Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

H. 3

Drittes Heft.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1880.

משנת המדות

MISCHNATH HA-MMIDDOTH

(LEHRE VON DEN MAASSEN)

AUS EINEM MANUSCRIPTE DER MÜNCHENER BIBLIOTHEK, BEZEICHNET
COD. HEBR. 36,

ALS ERSTE GEOMETRISCHE SCHRIFT

IN HEBRÄISCHER SPRACHE HERAUSGEGEBEN UND MIT EINIGEN BEMERKUNGEN
VERSEHEN VON

DR. M. STEINSCHNEIDER

(BERLIN 1864);

INS DEUTSCHE ÜBERSETZT, ERLÄUTERT UND MIT EINEM VORWORT VERSEHEN

VON

HERMANN SCHAPIRA

AUS ODESSA, STUD. MATH. IN HEIDELBERG.

Abkürzungen.

St. = Steinschneider.
M. b. M. = Mohamed ben Musa.

Vorwort.

I.

Eine hebräische Schrift betitelt „מִדּוֹת, Maasse“, wird von mehreren Autoren, besonders von רש"י (Salomon ben Isak, vulgo Raschi, gest. 1105), dem berühmten Comentator des Talmuds, der Bibel, etc. unter verschiedener Specialbenennung citirt. Zuweilen wird nämlich diese Schrift „משנת המדות“, die Mischna der Maasse genannt, zuweilen aber „מס' מדות“ Traktat der Maasse, מס' Abkürzung von מסכת Traktat, oder auch nach anderer Leseart מ"ט מדות 49 Maasse, ja zuweilen kommt diese letztere Leseart anstatt in Ziffern, in Worten deutlich ausgesprochen „ארבעים ותשע מדות“ vor, und endlich findet man noch den Namen „ברייתא“ Boraitha (externa, im Gegensatz zu der kanonischen Mischna) der Maasse. Man hielt allgemein diese Schrift für verloren, wie manche andere Schriften, die im Talmud citirt sind. Der Vernachlässigung war allerdings eine Schrift dem Namen nach, etwas Geometrisches oder Geodätisches enthaltend und nicht direct religiöse Fragen behandelnd, viel eher ausgesetzt, als andere direct religiöse Abhandlungen, da der Talmud und seine Schriftsteller diesen religiösen Zweck in erste Linie stellten, alles andere nur insofern behandelnd, als dasselbe in dieses Gebiet eingreift. Was im Uebrigen den Inhalt betrifft, so war die Zahl der verschiedenen Meinungen darüber nicht geringer, als die der verschiedenen Benennungen.

Herr Dr. Steinschneider gab zum siebenzigsten Geburtstage des Meisters Zunz (10. August 1864) eine Schrift genannt Mischnath Hammiddot, als erste geometrische Schrift in hebräischer Sprache mit einer kurzen Einleitung (auf die ich verweisen muss), heraus aus einem Funde, den er zwei Jahre früher in einem Cod. Hebr. 36 bezeichneten Manuscripte der Münchener Bibliothek gemacht hatte.

Nach der Meinung des Herausgebers sei diese Schrift identisch mit jener von Raschi und anderen citirten, und für den Fall, dass die Leseart מ"ט, 49, richtig wäre, so müsste, wenn diese Ziffer die Zahl der Sätze angeben sollte, angenommen werden, dass, da in der vorliegenden Schrift sich nur 42 Sätze vorfinden, entweder 7 Sätze verloren gegangen seien, oder dass manche Sätze zu theilen wären.

Anmerkung. Auf die Einzelheiten der Citate, und wie von ihnen diejenigen die sich auf den gleichnamigen Traktat im Talmud (Beschreibung der Stiftshütte beziehen, zu sondern sind, näher hier einzugehen ist mir leider nicht möglich, weil ich nicht weitläufig werden darf. Indess kann ich nicht unterlassen, mindestens so viel zu bemerken, dass die verschiedenen Citate in zwei Kategorien zu theilen sind: die einen haben einen halachischen, die andern einen aggadischen Charakter; die ersteren gehören eher der Mischna, die andern dagegen der Boraitha, ja sogar der Gemara an. Fasst man dieses ins Auge und bemerkt noch dabei, dass nicht alle citirten Stellen in unserer gegenwärtigen Schrift sich vorfinden, und dass gerade diejenigen sich nicht vorfinden, die eher den Charakter der Boraitha oder Gemara haben, während unsere Schrift, wenn überhaupt echt (ich meine nicht nachgeahmt), doch gewiss den Stempel der Mischna an sich trägt, sowohl der Sprache und des Styles wegen, als auch dem Charakter des Inhaltes nach; bemerkt man dieses, sage ich, so gehört gar nicht zu viel Phantasie dazu (jedenfalls nicht mehr, als bereits für manche Vermuthungen über diese Schrift in Anspruch genommen wurde), um folgende Frage sich zu stellen: War nicht vielleicht zu dieser Mischna auch eine Gemara, wie zu den andern Theilen der Mischna, vorhanden und führen somit die verschiedenen Benennungen nicht etwa zu einem Widerspruche, sondern haben alle vielleicht ihren richtigen Grund? Dieses um so mehr, da einerseits diese verschiedenen Benennungen mit den angeführten zwei Charakterzügen sich gut vertragen, und andrerseits die sich nicht vorfindenden citirten Stellen direct auf eine ähnliche Vermuthung hindeuten. Dass der Stoff nicht ungeeignet ist talmudisch behandelt zu werden, zeigt hinreichend das Factum, dass mancher Satz daraus im Talmud wirklich citirt und behandelt wird. Man könnte nur zweifeln ob man es wagen darf ein so hohes Alter für diese Schrift zu vermuthen; dieses ist und bleibt, wie wir weiter sehen werden, vorläufig unentschieden. Jedenfalls ist die Sprache und der ganze Charakter so täuschend ähnlich einerseits, und ist es andrerseits in der Literatur eine solche Seltenheit einen so genauen und reinen Mischna-Styl anzutreffen, dass ich hier von Echtheit und Unechtheit zu sprechen berechtigt zu sein glaubte, wiewohl kein Verfasser genannt ist. Der Einzige, der einen der Mischna verwandten Styl besässe, wäre, so weit mir bekannt ist, vielleicht Maimonides; aber auch er schreibt bei Weitem nicht so täuschend genau. Mit einem Worte: diese täuschende Genauigkeit der Aehnlichkeit geht meines Erachtens so weit, dass wenn die Schrift nicht zur wirklichen Mischna gehört, so muss der Verfasser unbedingt die Absicht gehabt haben, täuschend ähnlich jenem wohlbekannten Style der autorisirten Mischna zu schreiben, und daher der Ausdruck echt. (S. Schlussbemerkung.) Was die Midraschische Spielerei mit den Bibelversen betrifft, die Herr Dr. Steinschneider darin findet, so glaube ich zur Genüge gezeigt zu haben, dass solche angeführte Stellen durchaus nicht etwa müssig, sondern meistentheils nothwendig sind, um jedesmal irgend etwas zu begründen, sei es die Richtigkeit des behaupteten Satzes selbst, sei es in Betreff der Definition, sei es in Betreff der Terminologie; und das ist durchaus im Charakter der Mischna. Der aufmerksame Leser findet diese Bemerkungen an den betreffenden Stellen.

II.

Auf Veranlassung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Professor M. Cantor, habe ich die Uebersetzung dieser Schrift ins Deutsche und eine Erörterung derselben vorgenommen. Es lag mir durch die Freundlichkeit der Bibliotheksverwaltungen von München und Heidelberg das Münchener Manuscript zur Einsicht und genauerem Studium vor, wofür ich den genannten Verwaltungen, und insbesondere Herrn Oberbibliothekar Professor Zangemeister, meinen innigsten Dank hiermit ausspreche.

Bei der Gelegenheit möchte ich etwas Näheres über das Manuscript selbst mittheilen. (Ich bin allerdings nachträglich von Herrn Dr. Steinschneider auf seine Beschreibung im Catalog der Münchener H.-S. S. 12 aufmerksam gemacht worden; da es mir aber leider noch nicht möglich war Vergleiche anzustellen, so glaubte ich die folgende Beschreibung dem Leser nicht vorenthalten zu dürfen, weil es einerseits behufs der Beurtheilung der Zeit, des Ortes und Charakters vielleicht dienlich sein könnte, diese Beschreibung im Zusammenhange mit der Schrift vor Augen zu haben, und weil andrerseits hier sich vielleicht noch manches beachtenswerthe Wort für den weitern Forscher vorfinden könnte.)

Das Ganze ist eine Sammlung mehrerer Handschriften, die ihrem mehr oder weniger mathematischen Inhalte nach einander sehr verwandt sind. Die Hauptwerke darin sind eigentlich von einer Hand geschrieben und zwar in Quadratschrift; dagegen sind einige kleinere Abhandlungen in sogenannter Raschi-Schrift, eigentlich Spanisch-Hebräische-Cursivschrift. In letzterer Schrift sind auch mehrere Bemerkungen, Zusätze, Erläuterungen und Anhänge zwischen jene grössern Werke eingeschoben. Der Anfang fehlt, trotzdem dass der Einband wie der Inhalt verhältnissmässig sehr gut erhalten ist. Die Ränder derjenigen Abhandlungen, die in der zweiten Schrift geschrieben sind, tragen vom Buchbinder zur Hälfte weggeschnittene Aufschriften. Eine Art von Titelblatt findet sich nicht am Anfang des Ganzen, aber am Ende desselben. Vielleicht ist dieses Titelblatt nachträglich vom Bibliothekar bestellt und so behandelt worden, als hätte man es mit einer Schrift zu thun, die von links nach rechts gelesen wird. Eher aber möchte ich annehmen, dass man es hier mit zwei Büchern zu thun hat, die später zusammen gebunden wurden. Zu einem derselben dürfte vielleicht alles in Quadratschrift Geschriebene gehören, welches grössere Ränder hatte und deshalb verschont blieb, während die andern Abhandlungen im Texte von grösserem Formate waren und beim Zusammenbinden mehr leiden mussten. Dadurch wird auch erklärlich, dass unter den auf dem nachträglichen Titelblatte aufgezählten Werken manche fehlen. Der Inhalt des in Quadratschrift ausgeführten Titelblattes ist folgender:

ספר הפלוסופיא אשר בו נכתב הספירה:
וגם התכונה: ומעשה מרכבה: וחמשה עשר
ספרים האקלידה ממדת הארץ: גדר ארסטוטלוס
השם בספר פארי ארמניאס הועתק מלשון
הגרי אל לשון עברי אני משה בר שמואל
בר יהודה בן תבון זל מרמון ספרד
ונשלמה העתקתו בי"ז אלול שנת חמשת אלפים
ושלשים

Wörtlich:

Das Buch der Philosophie. Darin geschrieben: das Zählen (Arithmetik, gemeint wahrscheinlich die von Nikomachus, vgl. weiter unten), auch Astronomie, und Maasse Merkabah (kabbalistische Gottheitslehre), und fünfzehn Bücher des Euklid von Erdmessung (wörtlich Geometrie; in eigentlichen hebräischen Schriften nie so genannt, sondern Messkunst); Aristotelische Definition der Nomina im Buche *Περι ἑρμηνειας*; übersetzt aus dem Arabischen ins Hebräische von mir Moses ben Samuel ben Tibbon aus Granata in Spanien; und die Uebersetzung war beendigt am 17ten Elŭl 5030 (1270).

Bemerkenswerth sind dabei zwei Hauptpunkte: a) Das ganze Manuscript wird zusammen mit einem Namen „das Buch der Philosophie" genannt. b) Es ist aus dem Arabischen ins Hebräische übersetzt von Moses ben Tibon im Jahre 1270 n. Chr.[1])

1) Die freundliche Bemerkung des Herrn Dr. Steinschneider, mit der er nach gefälliger Durchsicht dieser Zeilen mich brieflich beehrte, dass nämlich die Schlüsse aus den Ueberschriften in den Manuscripten vollkommen verfehlt wären, da dieselben von unwissender Hand gemacht seien, diese Meinung kann ich leider nicht theilen. Nach meiner unmassgebenden Ansicht muss in dem vorliegenden Falle der Schreiber des Titelblattes eine Quelle gehabt haben, aus der er sagen konnte: übersetzt durch mich (in erster Person) Moses u. s. w., und dabei Tag, Monat, Jahr und Ort der Beendigung der Uebersetzung angeben? Ich sage ausdrücklich Beendigung der ganzen Uebersetzung (wie es hier ausdrücklich heisst), da einzelne dieser Uebersetzungen Angaben von anderem Datum und Ort enthalten, wie es z. B. beim Euklid heisst (in dritter Person), Uebersetzung des grossen Weisen Moses, Sohn des Philosophen der Gottesgelahrtheit, Samuel ben Juda ben Saul ben Tibbon; er übersetzte es in Montpellier. Beim Schlusse des Euklid findet sich aber wörtlich jene letzte Phrase des Titelblattes vom Uebersetzer in der ersten Person; dann unterschreibt noch der Schreiber wörtlich: und habe es geschrieben ich Moses, Jonah Sohn des David des Griechen (?) in Konstantinopel 5240 (1480). Dieses ist ebenfalls in Quadratschrift. Alles macht auf mich mindestens den Eindruck, als wären die andern Schriften später mit dem Hauptwerke zusammengebunden worden. Jedenfalls finde ich, dass dem historischen Forscher, für den diese Arbeit überhaupt als Material zu betrachten sein sollte, jenes Titelblatt nicht ganz verschwiegen werden dürfte. Dem Forscher dient manchmal eine geringfügige treue Wiedergabe der Thatsache zur Entdeckung wichtiger Merkmale.

Daraus würde man im ersten Augenblick zu entnehmen geneigt sein, dass auch unsere Schrift aus dem Arabischen übersetzt sei; aber ein solcher Schluss stellt sich bei näherer Betrachtung als etwas übereilt heraus. Zunächst fehlt unsere Schrift in der angeführten Detaillirung des Inhaltes der Uebersetzung. Auch fehlt nicht sie allein, so dass die Möglichkeit der Annahme, dass sie etwa ihres unbedeutenden Rauminhaltes wegen es nicht verdient hätte in Reihe der viel voluminösern Werke gezählt zu werden ausgeschlossen ist. Es fehlen noch manche andere Schriften, die in demselben Manuscript enthalten sind. Ich will hier den wirklichen Inhalt des Manuscriptes kurz angeben:

1) מעשה חושב, Maasse Choscheb, Rechenkunst (und nicht etwa: Kunstwerk, wie jemand in einer Notiz dort glaubte), enthaltend eine ziemliche Zahlentheorie, von Rabbi Levi ben Gersom. Dieses Werk ist ein selbständiges und hat insofern etwas besonders Interessantes in sich, als der Verfasser bestrebt ist den Rang der Ziffern auch ins Hebräische einzuführen durch Einführung der Null unter Beibehaltung der sonst üblichen Bezeichnung der Ziffern durch Buchstaben.

2) Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen, wobei Vergleiche mit einem griechischen und einem lateinischen Texte am Rande sich finden. Darin finden sich Commentare zu einigen Capiteln derselben von Abunassar Alpharabi, von Mohamed ben Mohamed Alpharabi, worin die Ansicht des Jacob ben Mochir angeführt wird, auch dessen Beweise, und Erläuterungen zu manchen Figuren; von Abu Ali Alhassan ben Alhassan, von Joseph (wahrscheinlich Joseph ben Isaak Hajisraeli, der sehr oft in dem Manuscripte vorkommt).

Letzterer citirt aus türkischen Werken (ספרי ישמעאל, und nicht ערבי wie es heissen würde wenn arabische Schriften gemeint wären) den Satz, dass die Höhe im rechtwinkligen Dreieck, auf die Hypotenuse gefällt, die mittlere Proportionale sei zwischen beiden Abschnitten der Hypotenuse. (Es sei beiläufig bemerkt, dass dieser Satz bei Mohamed ben Musa sich nicht findet, ebenso nicht bei Alkarkhi und Beha-Eddin, wie auch in unserer Schrift; in letzterer findet sich dagegen allerdings die Aehnlichkeit beider durch die Höhe entstandenen rechtwinkligen Dreiecke zu einander und zum ganzen Dreiecke Art. IV, b). Vor dem 14. Cap. heisst es: hier folgen zwei Capitel, welche zum Euklid passen und sind von Hypsikles. Und schliesst dieses mit der Bemerkung, es sei übersetzt von dem grossen Weisen Moses ben Samuel ben Juda ben Saul ben Tibon, die Uebersetzung geschah in Montpellier.

3) Zurath hooretz, צורת הארץ von Abraham ben Chija Hanassie, (mathematische Geographie).

4) Hakadur, ספר הכדור (Himmelglobus).

5) Hoëchod, ספר האחד von Ibn Esra. (Eigenschaften der ersten zehn Zahlen.)

6) Unsere Schrift, ohne Ueberschrift. Am Ende heisst es: hiermit schliesst das Capitel und mit ihm die Mischnath Hammiddoth.

7) Darauf folgen mehrere Proportionen und Verhältnisse des ein- und umgeschriebenen Quadrates und Dreieckes zu den Kreisen u. s. w., ohne Angabe des Verfassers; dann ebenso einige algebraische Aufgaben.

8) Cheschbon Hamahalachoth ספר חשבון המהלכות von Abraham ben Chija Hanassie. (Berechnung der Planeten-Bewegungen.)

9) Commentar und Bemerkungen zu der Arithmetik von Nikomachus von einem Schüler des Jacob ben Ischak ben Alzabah Alcanari und Säuberung des genannten Buches von der fehlerhaften Auffassung des Chabib ben Bacharir Al-nestor, der es aus dem Syrischen ins Arabische übersetzt hatte für den berühmten Himiam Takad ben Alhassan. (Hier wird wiederum Abu Joseph oft citirt.)

10) Herstellung einer astronomischen Tafel, genannt Zapichah, von Abu Ischak ben Alsarkalah. Vollendet durch mich Moses ben Jonah, Donnerstag 3. Iior, 17. nach dem Paschah Feste 5245 (1485). Bemerkungen von Comtina über die Einrichtung des Instrumentes (17. Tebet 5223, 1462).

11) Aufsatz über Astronomie von Abraham ben Chija Hanassie.

12) Einrichtung der Kupferinstrumente. ספר תקון כלי הנחשת Astronomische oder astrologische Instrumente. (Comtina in dritter Person.)

13) Ein Werk (die Ueberschrift scheint oben abgeschnitten zu sein),[1]) in drei Abtheilungen: Arithmetik, Geometrie und Musik, worin die ersten zwei Theile etwas eingehend behandelt sind, dagegen ist die Musik nur erwähnt. Uebrigens sind auch die ersten mehr beschrieben, als eigentlich behandelt. (In der Geometrie wäre vielleicht der Satz hervorzuheben, dass die Summe der Winkel eines n-Ecks, $2(n-2)$ R beträgt, was übrigens nicht als Formel angegeben, sondern, wie natürlich zu erwarten ist, an einigen Beispielen nur gezeigt ist. Dieser Satz findet sich weder in unserer Schrift, noch bei Mohamed ben Musa, noch bei Alkarkhi oder Beha-Eddin. Bei allen diesen wird mit Winkeln nicht operirt, höchstens wird bestimmt, ob sie recht, spitz oder stumpf sind, und zwar auch dieses nicht direct, sondern durch Anwendung des Pythagoräischen Satzes auf die Seiten, und also als Kennzeichen $a^2 + b^2 \overset{=}{\lessgtr} c^2$. Im Uebrigen scheint der Verfasser sich auf

1) Nach Herrn Steinschneider sei dieses von Abraham ben Chija. Was die Nummer 13 anstatt 16 betrifft, so kommt das daher, dass ich kleine, eingeschobene Anhänge nicht gezählt habe.

das Werk von Nikomachus zu beziehen, wie das die Eintheilung verräth; allerdings ist der Verfasser bemüht, die Quelle aller dieser Weisheiten in Bezalel, dem Baumeister der Stiftshütte in der Wüste, (Exodus XXXI, 1—6; s. d.) zu finden[1]). Das Werk hat insofern Interesse, als man durch dasselbe einen ungefähren Ueberblick über den verloren gegangenen geometrischen Theil des Werkes von Nikomachus bekommen könnte.

14) Einige Artikel über manche Aristotelische Definitionen von Abu Alkass ben Aderes. Darin sind citirt Abu Akr Alchaman ben Takr Ibn Sina, Abu Alchananah ben Tolmeus, Alraschid, Abu Alchananah Joseph ben Jechija Hajisraeli aus dem Abendlande. Abuchmed Algasali Hamabo. המבא von Ibn Esra (?).

15) Erläuterung der Himmelserscheinungen, Auszug aus Ben Raschid, von Levi ben Gersom.

16) Wechsel der Blicke חִלּוּף המבטים, (optisches Werk), von Euklid. Anfang: Der Verfasser sagt, da ich das Buch, das meinen Namen trägt, 13 Artikel als Vorbereitung zum Almagest, vollendet habe, so u. s. w.

17) Das Buch der Spiegel ספר המראים, von Euklid.

18) Erläuterung von Rabbi Simon Mutut über Linien die sich niemals treffen (Asymptoten). Ausführliche Beweisführungen über die Möglichkeit von Asymptoten überhaupt, und als Beispiel die Asymptoten der Hyperbel.

19) Die Messkunst, חבור חכמת התשבורת von Levi ben Gersom.

Hierauf folgt die oben erwähnte Aufschrift. Es bleibt also in Betreff unserer Schrift nicht ganz entschieden, ob sie den Uebersetzungen, oder der selbständigen Verfassung, wenn auch nach vorliegenden Modellen, angehört, da mehrere Werke und Abhandlungen von beiderlei Arten in demselben Manuscripte zusammengeschrieben sind, und zwar alles so durcheinander, dass dieselben nach dieser Eintheilung schwer zu trennen sind. Allerdings ist es bei den Uebersetzungen ausdrücklich gesagt, das sie solche seien, während bei den selbständigen Werken ein Stillschweigen die Selbständigkeit verstehen lässt. Da unsere Schrift nun unter den Uebersetzungen nicht gezählt ist, so bleibt jedenfalls die Möglichkeit, vielleicht auch die Wahrscheinlichkeit, sie als eine selbständige Abhandlung gelten zu lassen.

III.

Wenden wir uns nun zu der Sprache unserer Schrift. In I. erwähnte ich, dass die Sprache unserer Schrift auf ein früheres Alter derselben verweise. Dieses muss von zwei Standpunkten betrachtet werden: nämlich

---

1) Dass man beim Bau der Stiftshütte wirklich geometrische Kenntnisse anwandte, wie z. B. Kenntniss des Pythagoräischen Dreiecks, siehe weiter unten Art. IV. a, ¹a.

von Seiten des Styles und von Seiten der Terminologie, ich meine der mathematischen Terminologie.

Was erstere betrifft, so ist derselbe unverkennbar der leibhaftige Styl der Mischna. Schon der Anfang:

בארבעה דרכים (Art. I, a): In vier Wegen, Arten.
ואלו הן (Art. I, a): und zwar
זה הכלל (Art. I, a): die Regel ist.

Und so geht es fort:

איזו היא? זה ה־! (Art. I, b): was ist —? das was —!
שנאמר (Art. I, b); es heisst; und nicht das später gebräuchlichere Aramäische דכתיב, von derselben Bedeutung. והגג עצמו היא המשיחה als Refrain zum Schlusse von b, c, d, h. Ich lege auf diese Stellen um so mehr Gewicht, da alle diese Paragraphen sich bei Mohamed ben Musa nicht finden.
כיצד Wie so?
כבר אמרו es ist schon gesagt, (in der 3. Person Pluralis; sie (die Weisen) haben schon gesagt).
חסר ועולה חסר ועולה (Art. II, k); nimmt immer mehr und mehr ab.
מה תלמוד (Art. V, c); warum heisst es nun? eigentlich, was lernst du aus —
לפי שאמרו (Art. V, c); weil man sagte.
זה הכלל כל ש־ (Art. V, d); die Regel ist, alles was —
ג׳ דברים נאמרו (Art. V, d); drei Dinge sagt man; eigentlich: drei Fälle sind zu unterscheiden.
יחשב כדרכו (Art. IV, b); der rechne nur fort nach seiner Art.
ובלבד ש־ (Art. V, b); mit der Bedingung, dass —
הנתונה על הארץ (Art. V, c); welche liegt auf dem Boden;
הרי הוא אומר (Art. V, c); heisst es ja;
הא למדת (Art. V, c); so hast du gelernt u. s. w.[1]).

Was die wissenschaftliche Terminologie betrifft, so ist bemerkbar, dass die technischen Ausdrücke älter sind, als die in der arabisch-hebräischen wissenschaftlichen Literatur geläufigen, z. B. bei Abraham ben Chija Hanasşie, Maimonides, Ibn Esra, Ben Gersom, ben Tibon u. s. w. So zum Beispiel findet man in unserer Schrift nicht die wörtlich aus dem Arabischen genommenen Ausdrücke קֹטֶר, Durchmesser, תשבורת im Sinne von Flächeninhalt (تكسيب) auch Körperinhalt תושבת für Basis, מעוין (معينه) für

1) Herr Steinschneider macht noch auf „מכאן ואילך צא וחשוב“ aufmerksam; eine Phrase, die in Jezira auch vorkommt.

Rhombus, vergl. III, 1 mit Mb.M; sondern die später in diesem Sinne nicht vorkommenden חוט, Faden, משיחה Ausmessung, arab. مساحة und تكسير was wohl zu beachten [Marre's Bemerkung über das erstere (S. 6 Anmmerkung) und Zeile 2 „superficie" sind ungenau und widersprechend, St.]; קבע, סוף Grund-Endfläche für Basis.

Ebenso ist auffallend die weibliche Form für Viereck, Dreieck, Kreis und Bogen, was die Ergänzung von צורה Figur voraussetzt[1]). Ebenso findet sich hier nicht das später sehr geläufige גשם für Körper, und ist dafür das später in diesem Sinne sehr seltene גוף. Für Multipliciren finden wir hier צרף, während später כפל (dupliciren) gebräuchlich ist; (wegen des ב siehe NB. zum Schlusse des Vorwortes).[2])

Dieses würde, wenn unsere Schrift überhaupt echt ist, dafür sprechen, dass sie mindestens älter als die arabisch-hebräische Periode ist. (Unter einer solchen Periode verstehe ich die Zeit von etwa 740—1200.)

IV.

Die Aehnlichkeit unserer Schrift mit der ältesten arabischen Geometrie ist ungeheuer gross. Es lagen mir bei dieser Arbeit drei Werke von dieser Art vor. **Erstens** Mohamed ben Musa (Alkharizmy) in zwei Uebersetzungen, einer englischen, umfassend die Algebra und die Geometrie, von Frederic Rosen, London 1831, und einer französischen, nur die Geometrie enthaltend, von Aristide Marre, Rome 1866. Die Ausgabe von Rosen enthält auch den arabischen Text, der mir leider unzugänglich ist; wohl aber machte mir die gütige Gefälligkeit des berühmten Orientalisten Herrn Prof. Merx, dem ich hiermit meinen innigsten Dank ausspreche, es möglich, einen Blick

---

1) In Verbindung mit צורה findet man allerdings diese Form bei Jehuda ibn Tibbon in der Uebersetzung von Saadia, worauf Herr Steinschneider auch verweist.

2) Besonders fällt ins Auge, dass hier zwei Termini gänzlich fehlen: 1) Parallelität, was hier sowohl wie bei M. b. M. durch Worte ausgedrückt ist, die nicht ganz deutlich sind, und etwa „gleich, gerade, passend" heissen, so dass die Uebersetzer von M. b. M. es verschieden auffassen (vgl. Art. II, f, Nota 18), während später das Wort „מקביל" für „parallel" sehr geläufig ist, ja sogar in den andern Werken desselben Manuscriptes sehr oft vorkommt. 2) „Diagonale" ist hier durch umständliche Beschreibung erklärt, z. B. der Faden, der durchschneidet von Winkel zu Winkel, von Ecke zu Ecke und der der allerlängste ist im Gag" (Art. I, b). Es wäre ein Irrthum, wenn man glauben wollte, der Terminus sei hier חוט Faden und das Uebrige nur eine in der Einleitung gegebene Definition desselben; da dasselbe Wort auch anderweitig gebraucht ist (Art. I, g. u. a. m.), und muss jedesmal erklärt werden: „Faden von Ecke zu Ecke". Später ist aber „אלכסון" von λοξόν = לוכסן dafür gebräuchlich. Das Wort kommt im Talmud oft vor, ist in der Mischna aber, soviel ich mich erinnern kann, noch nicht gebraucht. (Dasselbe kommt auch in Jezira vor und heisst auch oft Hypotenuse.)

über manche kritische Stellen zu bekommen. Zweitens lag mir das Werkchen von Mohamed ben Alhusein Alkarkhi vor, herausgegeben von Prof. Hochheim, Halle 1877/80, deutsch; und drittens, ebenfalls deutsch, Essenz der Rechenkunst von Beha-Eddin, herausgegeben von Nesselmann, Berlin 1843.

Auf die Verwandtschaft dieser drei arabischen Schriften in Betreff der Geometrie unter einander will ich hier nicht eingehen, da dieses bereits zur Genüge klar gelegt ist. Was die Verwandtschaft unserer Schrift mit diesen arabischen dagegen betrifft, so glaube ich zwar an den betreffenden Stellen hinreichend aufmerksam gemacht zu haben, indess möchte ich hier noch hervorheben, dass es auf mich den allgemeinen Eindruck macht, als hätten, erstens sowohl Mohamed ben Musa, wie der Verfasser unserer Schrift eine und dieselbe Vorlage, die jeder von ihnen nach seiner Art behandelte. Dass zweitens diese gemeinschaftliche Vorlage keinen theoretischen, sondern rein praktischen Charakter gehabt zu haben scheint; es mag eine Art Sammlung von Resultaten geometrischer Sätze, die dem Praktiker, vielleicht dem Beamten oder Richter, zum Handbuch wenn nicht zum Codex dienen sollte, gewesen sein. Drittens scheint dieses Handbuch sehr alten Ursprungs und wahrscheinlich bei verschiedenen Nationen, in verschiedenen Ländern, in verschiedenen Abschriften, zuweilen auch in verschiedenen, mehr oder minder selbständigen Bearbeitungen vorhanden gewesen zu sein. Viertens scheint die Abschrift, die Mohamed ben Musa vor sich hatte, mehr Indisches angenommen zu haben, wie z. B. die Bestimmung des Fusspunktes durch reine Algebra (Mohamed ben Musa schrieb ja auch eine Algebra). Unsere Schrift enthält auch nicht eine Spur von Algebra, dagegen hat sie manches Griechische hinzugefügt, wie z. B. die Heronische Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks ausgedrückt durch die Seiten desselben, die bei M. b. M. nicht vorhanden ist, obwohl er dieselben Zahlen 13, 14, 15 für die Seiten des Dreiecks, die dort zu jener Formel gebraucht sind, ebenfalls benutzt. Alkarkhi und Beha-Eddin, die offenbar nach M. b. M. gearbeitet haben, geben auch die Heronische Formel zum Besten. Uebrigens haben diese beiden Araber schon viel mehr aus dem Griechischen, worunter am wichtigsten die Beweise der geometrischen Sätze sind, die sowohl bei M. b. M. wie auch in unserer Schrift nicht gegeben werden. Fünftens scheinen in unserer Schrift Commentarien und Zusätze späterer Zeit sich vorzufinden, wie z. B. die Winke der Verwandlung der Brüche in Decimalbrüche, was bei M. b. M. sich nicht findet und worauf ich seines Ortes aufmerksam gemacht habe.

Endlich sei noch erwähnt, dass unsere Schrift eine Einleitung an ihrem Anfange und ein paar Sätze über die Kugel im letzten Kapitel hat, was bei M. b. M. nicht vorhanden ist.

Zum Schlusse möchte ich noch zur Entschuldigung etwa nicht genügender Berücksichtigung mancher Seite der berührten Frage erwähnen, dass die Beschäftigung mit dogmatischer Mathematik, die zur Zeit meine Hauptaufgabe bildet, mir es leider unmöglich macht, dem gegenwärtigen Gebiete, auf das ich von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. M. Cantor erst neu eingeführt bin, vorläufig die nöthige ernste Hingebung nach meinem Wunsche zu widmen; vielleicht wird es mir noch vergönnt sein, darauf später einmal zurückzukommen, wogegen ich vorläufig mich begnügen muss, gütigen Zurechtweisungen der Meister vom Fache mit Dank und Ergebenheit entgegenzusehen.

Heidelberg, im November 1879.

Der Uebersetzer.

NB. Dass ich bestrebt war, die Uebersetzung möglichst wörtlich zu halten und zwar auch da, wo die deutschen Termini abweichend sind, wird mir der Leser gütigst verzeihen. Wenn ich oft mit dem Inhalte etwas freier umging, wo es der richtige Sinn unbedingt verlangte, so habe ich dagegen die Form der Worttreue geopfert. Ich glaubte nämlich, dass gerade solche Momente dem Historiker dienlich sein können. Wenn ich z. B. hier durchgängig multipliciren in (anstatt mit) wörtlich wiedergebe, so sei das ein Wink, dass dieses auf eine Verwandtschaft mit dem Arabischen hinweist. Wenn ich nicht irre, schwankt ursprünglich auch im Deutschen beim Multipliciren und Dividiren der feste Ausdruck dafür; es heisst bald mal, bald durch, und bald in. Dies wird auch im Deutschen von der Verschiedenheit der Quellen der ersten deutschen Mathematiker herrühren. Weist doch Drobisch nach, dass Johannes Widmann von Eger 1489 arabische und römische Quellen benutzte, ersteres beweist der Gebrauch von Helmŭaym = Elmeŭian („מעוין“ in der arabisch-hebräischen Literatur) für Rhombus.

Art.[1]) I.

a) Aus vier Formen (דרכים sonst Wege, Arten) besteht die gesammte Messkunst, und zwar: dem Vierecke, dem Dreiecke, dem Kreise, dem Bogenartigen (hier Halbkreis). Die Regel ist: Das Zweite (das Dreieck) ist die Hälfte des Ersten (des Vierecks), und das Vierte (Bogenartige) ist die Hälfte des Dritten (des Kreises). Alle übrigen (Formen) sind mit einander verflochten wie der Gürtel (סינר, für סונר ζωναρ) mit dem Schenkelband (בברית, nach St. für בבריות im Cod.).[2])

b) Das Viereck ist aus drei Gesichtspunkten (zu betrachten): Seite, Faden (Diagonale) und Gag, גג, sonst: Dach; hier: Ebene, Oberfläche, Flächeninhalt).[3])

Seite heisst, was die Seiten des Gag hält (ausmacht); es heisst: „viereckig sei der Altar (Opferstätte)“.[4])

Faden, der durchschneidet[5]) von Winkel zu Winkel, von Ecke zur Ecke, und ist der allergrösste in der Länge des Gag; und der

Gag selbst ist die M'schicha, (משיחה, Spannung, Ausdehnung, Messung, Ausmessung; hier Flächeninhalt; es wird wohl nicht entgehen, dass dieses fast identisch mit dem arabischen Messâhat, bei Mohamed ben Musa.[6])

---

1) פרק gebräuchlich in der Mischna, wörtlich articulus.

2) Ueber dieses Wort s. Levy's Neuhebr. u. chald. Wörterbuch בִּירִית I, 267, 288. Eine Erläuterung dieses orientalischen Bildes gehört nicht hierher, jedoch ist es wegen des Vaterlandes der Schrift beachtenswerth.

3) Herr Prof. Cantor macht hier aufmerksam auf das griechische στέγη Dach, und bei der Pyramide στέγη τῆς πεϱαμίδος, bei Heron, liber Geeponicus, Cap. 72 (ed. Hultsch S. 217).

4) Exodus 27, 1. Dort heisst es: fünf Ellen seine Länge, fünf seine Breite; viereckig soll der Altar sein, und drei Ellen seine Höhe. Die betreffenden Seitenflächen sind also Quadrate resp. Rechtecke und werden dennoch schlechtweg רבוע viereckig genannt; und deshalb ist wahrscheinlich diese Stelle hier citirt worden.

5) המפסיק wörtlich: „trennt“, vielleicht zu ergänzen: „die Fläche“, d. h. er theilt sie (St.). Dieser Ausdruck für das Durchschneiden der Diagonale ist nicht vereinzelt; vgl. diesen Art., Satz g; Art. III, d, e. Die Correctur המחזיק, המהדק scheint unnöthig.

6) s. St. S. IV. A. 4.

c) Das Dreieck — aus vier Gesichtspunkten: dem Schenkelpaare[1]), der Basis, der Höhe, des Gag.

Das Schenkelpaar, das sind die zwei Fäden (משוכים wörtlich Gedehnten). Rechts und [Links][2]); es heisst: „denn nach Rechts und Links wirst du dich erstrecken“.[3])

Die Basis, das, worauf das Schenkelpaar (basirt) befestigt ist; es heisst: (die Säulen), auf denen das Haus feststeht“.[4])

Die Höhe[5]) ist der Faden, der im Allgemeinen[6]) aus dem Schenkelpaardurchschnitt auf die Basis fällt und (da) einen Winkel bildet, „zu den Winkeln des Stiftszeltes“;[7]) und der Gag selbst ist die M'schicha.

d) Der Kreis — aus drei Gesichtspunkten: Umfang, Faden (Durchmesser) und Gag.

Umfang ist die Schnur (קו, Linie) die den Kreis umringt; denn es heisst: „und eine Schnur von 30 Ellen umringt es ringsherum“.[8])

Faden ist, der vom Rande zum Rande gezogene; es heisst: „von seinem Rande zu seinem [anderen] Rande“;[9]) und der Gag selbst ist die M'schicha.

e) Das Bogenartige, — aus vier Gesichtspunkten: Bogen, Sehne, Pfeil und Gag.

---

1) In der Handschrift: בשני הצלע, also ganz einfach; in der gedruckten Ausgabe (Berlin 1864) hat sich ein Schreib- oder Druckfehler eingeschlichen (בשני' בצלע) und gab Veranlassung zu einem (sic). (Correcter wäre [wie gleich darauf] בשני הצלעות; doch ist der Singular vielleicht nach Analogie von Maassbezeichnungen zu erklären, wie zwei Fuss u. dgl. Bemerkung des Herrn Dr. Steinschneider). Dem gegenüber muss ich hinzufügen, dass hier שְׁנֵי־הַצֵּלָע „Schenkelpaar“, in der Analogie von שְׁלֹשׁ־הַקִּלְּשׁוֹן aufzufassen sei und von שני צלעים ־ות, „zwei Schenkeln“ wohl zu unterscheiden. Der Ausdruck שני צלע kommt hier öfter vor: I, c. „שני צלע “זה; III, c. בשני צלע.

2) ימין ויכין, also eine Anspielung auf I. Kön. 7, 21. Dort ist allerdings יכין nicht die zweite, linke Säule; sondern die rechte Säule selbst wurde יכין genannt!

3) (Jesaia LIV, 3). Im vorhergehenden Verse ist dort von der Verlängerung der Seile bei der Spannung des Zeltes die Rede.

4) Richter XVI, 26, 29.

5) Bald: עמוד, Säule; bald עומד aufrechtstehender, Senkrechte; bald auch קומה, Höhe, s. unten Anm. 17.

6) חוט הכולל, hier vielleicht, um auszudrücken, dass es Fälle gibt, wo die Senkrechte ausserhalb der Schenkel, oder auch in einen der Schenkel selbst fällt.

7) Exodus XXVI, 23. Dort soll der Winkel ein rechter sein, obwohl es schlechtweg Winkel (oder Ecke) heisst; und deshalb wird wohl jene Stelle hier angeführt.

8) I. Kön. VII, 23.

9) Ibid.

Der Bogen ist ein Theil des Kreises; es heisst: „wie das Aussehen des Bogens (Regenbogens) in der Wolke“.[1])

Die Sehne,[2]) (ist) die den Mund des Bogens fasst; es heisst: „ein getretener (gespannter) Bogen“.[3])

Der Pfeil ist der aus der Mitte des Bogens zur Mitte der Sehne gezogene; es heisst: „sie setzten ihren Pfeil an die Sehne“.[4]) Und der Gag selbst ist die Mschicha.

f)[5]) Wie misst man die Mschicha (Flächeninhalt)? In Zahlen rechnest du eins auf eins, das ist die Mschicha, d. h. eine Elle auf eine Elle; so zählst du bei einem Gag, welcher an den Seiten und den Winkeln gleich ist, nach jeder Seite (Richtung); die Tabula (טבלא = Quadrat), welche aus zwei besteht auf jeder Seite, während die Winkel gleich sind,[6]) enthält als Ausmessung das vierfache Maass der Einheit, welche (selbst) eine Elle auf eine Elle ist; und wenn sie drei von jeder Seite hat, macht es das neunfache vom Maasse der Einheit; so auch vier auf vier und fünf auf fünf. Von da ab und weiter rechne so fort nach demselben Maasse aufwärts (d. h. steigend).

g) Was kleiner als die Einheit ist, theilst du so ein[7]): die eine (Quadrat-) Elle durch zwei von Rechts nach Links[8]) und von Oben nach Unten gehende und in der Mitte sich durchschneidende Fäden, so dass der Gag in vier Abschnitte getheilt wird, und so findest du eine halbe Elle auf eine halbe Elle, und die Mschicha selbst ist ein Theil von einer Elle, welches ein Viertel vom ganzen Gag[9]) ausmacht; so auch ein Drittel

---

1) (Ezech. I, 28.)

2) Das ו von והיתר in der Ausgabe ist Druckfehler.

3) Jes. XXI, 15.

4) Psalm XI, 2. חץ = سَهْمٌ Pfeil für sinus versus.

5) Bei Mohamed ben Musa fängt die Geometrie hier an; von der Classificirung aller geometrischen Formen zunächst nach Viereck (eigentlich Rechteck), Dreieck, Kreis und Bogen sowohl, wie von den vorangehenden Definitionen derselben findet sich dort nichts. Als Reihenfolge für die Behandlung wurde indess auch bei ihm die besagte Anordnung innegehalten, und zwar zweimal, einmal flüchtig und das zweitemal eingehender und specialisirender, während in dieser hebräischen Schrift diese Reihenfolge dreimal durchlaufen wird.

6) H. S. hier שוים gleich; nicht שנים zwei, wie in der Ausg.

7) Das ן von מחלקן fehlt in der Ausg.

8) Herr Steinschneider corrigirt hier mit Recht זה מפסיק anstatt והמספיק, ebenso anstatt das zweitemal ימין, שמאל, wenn nicht vielleicht יכין zu lesen ist (siehe c, Anm. 4.).

9) Es ist הגג für צד zu emendiren; die Worte מכל צד kommen in den letzten einigen Zeilen mehreremal vor, und das war für den Schreiber vielleicht die Ursache des Irrthums. In II, e wäre umgekehrt richtiger צד für das erste הגג

auf ein Drittel und ein Fünftel in ein Fünftel; wie bei gleicher [Länge und Breite], so auch bei ungleicher. Von da ab und weiter rechne so fort nach demselben Maasse abwärts.

h) Man hat schon gesagt (in der vorigen Mischna): ein Halb auf ein Halb ist ein Viertel, und so ein Drittel auf ein Drittel ist ein Neuntel[1]); wie in diesen, so in allen ähnlichen Fällen: man zählt (rechnet) es bei gleichen und bei ungleichen: אבאהוא (?)[2])

So zählst du: zehn auf zehn[3]) sind hundert, die Hälfte von zehn ist fünf, fünf mal fünf gibt 25 und das ist ein Viertel von hundert[4]), und die Zehn steht als Eins, und die Hundert als Zehn, und die Tausend als Hundert. Von da ab rechne so fort mit Brüchen nach Maass der Einheiten; aber bei den Einheiten nimmt es zu und bei den kleinern (als die Einheit) nimmt es ab.[5])

---

zu lesen, dann wäre nämlich jene Mischna in drei Theile zu theilen: 1. הרוצה למוד את צד המרובע, Ausmessung einer Seitenfläche des Parallelepipedons durch Multiplication von Länge und Breite. 2. הגג במנין שש פנים, Oberflächenbestimmung durch Addition (Zusammenzählen) der sechs Grundflächen. 3. מצרף ארך בתוך רחב בתוך העֹמק, Bestimmung des Körperinhalts.

1) Das Wort מְתֻשָּׁע allein heisst hier: ein Neuntel, wie das Wort מְרֻבָּע ein Viertel heisst; und das בחן ובדומין להן ist offenbar zusammengehörend aufzufassen, wie oben übersetzt. Diese Construction wiederholt sich hier und im Talmud überhaupt sehr oft. Herr Steinschneider S. IV. fasst מתשע בחן zusammen, er las es also wahrscheinlich מְתֻשַּׁע. An dieser Stelle wäre es gelegentlich zu bemerken, dass im Hebräischen für Stammbrüche (und nur für solche) nur bis Zehntel die weibliche Form עשירית, תשיעית, שמינית, שביעית, ששית, חמשית, רביע, שליש, מחצה $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$ sich vorfindet, auch im plur. עשירויות חֲמִשִׁיתָיו, etc. Sonst heisst es אחד מששים, eins von sechzig, anstatt ein Sechzigstel etc.

2) Wenn kein noch zu errathender Schreibfehler vorliegt, so scheint dieses Wort nicht hebräischen Ursprungs zu sein. Herr Prof. Cantor macht auf das indische Wort अभ्यास für Multiplication aus dem भू „sein“ aufmerksam. Der Sinn ist jedenfalls offenbar der, dass man immer die beiden Dimensionen (Länge und Breite) als Zahlen-Factoren zu behandeln hat, gleichviel ob dieselben als Vielfache einer ganzen Einheit oder als Theile einer solchen auftreten; im ersten Falle kommt als Flächeninhalt das Product dividirt durch die Einheit und im zweiten Falle der reciproke Werth. [Das Wort אלא „jedoch“ habe ich schon beanstandet, es scheint überflüssig; vielleicht מכאן ואילך „und so weiter“ wie im vorhergehenden §? אב אהוא ist sicher kein Fremdwort; vielleicht אבגדהוז d. h. 1—7, ursprünglich 1—9. Dann schliesst sich sehr gut daran die Berechnung von 10. Steinschneider] (?).

3) Man beachte die Ausdrücke על und בתוך, auf und in beim Multipliciren, und den Ausdruck פעמים oder פעם, mal; man pflegt sonst erstere Ausdrücke bei Flächen und Kubikinhalt und letztere bei Zahlen zu gebrauchen. [NB. צרף על oder בתוך s. meine Einleitung S. IV. Steinschneider.]

4) Modern gesprochen $^1/_2 = {}^5/_{10} = 0{,}5$; $^1/_4 = {}^{25}/_{100} = 0{,}25$; also Verwandlung der Brüche in Dezimalbrüche!! S. pag. 29, 4.

5) D. h. sobald die Verwandlung der Brüche in Dezimalbrüche ermöglicht ist,

i) Das ist die Regel: Ein Halb auf ein Halb gibt die Hälfte des Halben, und ein Drittel auf ein Drittel den dritten[1]) Theil des Drittels, und so ein Halb auf ein Drittel die Hälfte des Drittels; und so ein Viertel auf ein Drittel den vierten Theil des Drittels. Ebenso in allen ähnlichen Fällen, bei gleichen und ungleichen.

Art. II.[2])

a) Wer viereckige Felder[3]) messen will, so gleiche (an Länge und

---

wird es möglich, alle Rechnungen mit Brüchen wie mit ganzen Zahlen auszuführen; nur dass man (in moderner Sprache) die Bestimmung der Dezimalstellen zu beachten hat.

1) Herr Steinschneider corrigirt mit Recht שליש anstatt חצי, welches sich wahrscheinlich aus dem nächsten Satze beim Abschreiben irrthümlich eingeschlichen, wie es in diesem Manuscript oft der Fall ist. Auffallend ist, dass gerade an dieser Stelle auch die Schrift des Mohamed ben Musa den Uebersetzern Anlass zu verschiedener Auffassung gegeben hat: in der englischen Uebersetzung heisst es „two thirds by a half“, während in der französischen „un demi tiers par un demi tiers“. Siehe die betreffende Anmerkung in der französischen Ausgabe Seite 4. Das System von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, welches auf diese Weise bei Mohamed ben Musa sich herausstellt, trifft in der vorliegenden hebräischen Schrift nicht zu. Hier wird dieser Gegenstand in drei §§ getheilt: in g) bei der *geometrischen* Zerlegung der Fläche durch Linien sind die Ziffern $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ genommen; in h) vor dem Zahlenbeispiel (das bei Mohamed ben Musa nicht vorkommt und das dazu angethan ist, die Verwandlung von Brüchen in Dezimalbrüche zu lehren) kommt $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ vor; und in i) werden $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ bei der Behandlung einer ganz neuen Frage (die bei Mohamed ben Musa für Brüche unberührt geblieben), nämlich das Product ungleicher Factoren oder Rechtecke $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \ldots$ gebraucht.

2) Nachdem in Art. I. die vier Grundfiguren: Viereck, Dreieck, Kreis und Bogen und die Hauptbestandtheile derselben der Reihe nach in den §§ a bis e definirt sind, und in den folgenden f bis i der Flächeninhalt eine Einheit bekommt für ganze und gebrochene Zahlen, und die Multiplication der Flächenbestimmung für gleiche und ungleiche Factoren durchgeführt wird, fängt mit Art. II. die eigentliche Behandlung jener Figuren an, der obigen Reihe nach in den §§ a bis d. Von e bis m handelt es sich um Stereometrie, und zwar wird der Körperinhalt bestimmt für das Prisma, den Cylinder, die Pyramide und den Kegel; für die Halbkugel (was sich bei Mohamed ben Musa nicht findet), dann für die abgestumpfte Pyramide und den abgestumpften Kegel.

3) השדות die Felder, so ist es in der Handschrift, und nicht המדות die Maasse, wie in der Ausgabe. [Felder ist offenbar falsch conjicirt, es ist fast nirgends von concreten Dingen die Rede! Steinschneider.] Leider kann ich dieses nicht zugeben. Zunächst conjicire ich hier nicht, sondern befürworte im Gegentheil die Lesart השדות, *wie sie sich im Manuscripte vorfindet.* Im Uebrigen bin ich der Ansicht, dass hier sehr häufig, ja in diesem Kapitel sogar vorwiegend von *concreten* Dingen die Rede ist; vgl. התל או דבר מקובב „Hügel“ oder „gewölbter Gegenstand“; דופנותיו, seine „Wände“; כדור, „Ball“; i. עמוד, „Säule“ etc. Besonders kommt auch V, c. ausser בורות, מקואות, ימים „Meere“, „Bäder“, „Brunnen“ noch auch das Wort „שדה“ *Feld* selbst vor. Bei der Gelegenheit ist zu bemerken,

Breite), wie ungleiche, der multiplicire Länge in Breite, was sich aus beiden ergibt, das ist[1]) die M'schichah.

b) Beim Dreiecke, gleichviel ob gleichseitigen, oder ungleichseitigen,[2]) multiplicire man die Höhe[3]) mit der halben Basis, und was aus beiden sich ergibt, das ist die M'schicha, und mehrere Eingänge[4]) (Methoden) gibt es dabei.

c)[5]) Wie verfährt man beim Kreise? Man multiplicirt den Faden

---

dass auch alle Termini hier von concreten Bildern genommen sind: Faden (Messschnur), Brett, Pfeil, Sehne, Bogen, Wand, Dach, Kürbiss etc. Dass das Ganze für den praktischen Gebrauch und nicht für die abstracte Theorie geschrieben ist, beweisen auch die Ausdrücke: „wer zu messen braucht", „wer messen muss", „wer messen will" etc.

1) Das von St. beanstandete Wort הרחב hat sich hier beim Abschreiben irrthümlich aus der vorhergehenden Zeile eingeschlichen. Solche Schreibfehler sind in dem betr. Manuscript nicht selten.

2) Bei Mohamed ben Musa ist dieselbe Methode (Multiplication der Höhe mit der Hälfte der Basis) für den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks. Vergleicht man jene Schrift mit der unsrigen, so ist es anzunehmen, dass bei M. b. M. (oder in dem Texte, aus welchem er es abgeschrieben hat) die Worte „oder des Ungleichseitigen" fehlen. Der Uebersetzer des M. b. M. bemerkt an dieser Stelle Folgendes: „Mohamed ben Moussa, versé dans les sciences des Hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à l'aire du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quelconque; il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire et non pour des mathématiciens. Une seule règle qui convienne à tous les cas, lui paraît suffisante." Ja, das wäre alles sehr schön, wenn das Problem eines gleichseitigen Dreiecks von Jemand vorgelegt worden wäre und der Verfasser hätte sich nur zu Schulden kommen lassen, dass er zur Auflösung dieses speciellen Problems eine allgemeine Methode anwendet; hier ist aber der Fehler ein viel wichtigerer. Der Verfasser sagt, die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks durch Multiplication von Höhe und Grundlinie habe die Gleichseitigkeit des Dreiecks als Bedingung der Gültigkeit, ohne dass von einem gleichseitigen Dreieck überhaupt die Rede war; dieses schliesst in sich die Behauptung ein „ein nicht gleichseitiges Dreieck kann auf diese Weise nicht behandelt werden." Wollte der Verfasser die Bestimmung allgemein aussprechen, so hätte er das Wort équilatéral weglassen müssen.

3) העומד, das Stehende, die Senkrechte, in der Handschrift; St. setzt dafür העמוד, die Säule, wie oben I b und sonst; die Gründe s. unten Nota zu c.

4) מבואות in der H. S., bedeutet sonst: Eingänge, hier: Fälle, Methoden. Hiermit sind offenbar die Methoden weiter unten in Art. IV für die speciellen Fälle des rechtwinkligen oder des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecks gemeint, die Höhe zu ermitteln, wenn nur die Seiten gegeben sind. Bei M. b. M. findet sich hier dieser Zusatz nicht. Vielleicht sind übrigens die drei Fälle gemeint, wenn der Fusspunkt der Höhe innerhalb, ausserhalb des Dreiecks oder in eine Seite desselben fällt. Diese Frage des Fusspunktes ist unter dem Namen „Masquet al hadjar" bei M. b. M. algebraisch (mit einer Gl. 2. Grades) behandelt; in unserer Schrift ist kein Wort davon zu finden. Siehe Art. IV, g. Nota.

5) Bei M. b. M. ist hier der Satz des Rhombus, welcher in vorliegender Schrift

(Durchmesser) in sich selbst, und werfe (subtrahire משליך) davon ein Siebentel und ein halbes Siebentel ab, der Rest[1]) ist die M'schichah.[2]) Z. B. ein Faden dehne sich aus zu Sieben, sein Product (Quadrat)[3]) ist 49; und ein Siebentel und ein halbes Siebentel ist, (zehn und einhalb)[4]), so dass die M'schichah 38 und ein halb ist.

d) Wie das Bogenförmige[5])? Man setze den Pfeil an die Sehne, beides allzumal, (addire sie zusammen), multiplicire dieselbe (Summe)[6]) in die Hälfte des Pfeils, und stelle es (das Product) bei Seite; man nehme dann wiederum die halbe Sehne, multiplicire sie in sich selbst und theile durch 14, das Ergebniss addire zum Hingestellten,[7]) was herauskommt ist die M'schichah. Es gibt dabei auch andere Arten.[8])

Art III, d sich findet, eingeschaltet, aber ohne das Zahlenbeispiel. Derselbe Satz findet sich aber bei M. b. M. nebst Zahlenbeispielen und Figur noch einmal an seinem richtigen Orte unter den Vierecken.

1) והיתר H. S., in der Ausgabe והותר ist Druckfehler und die Correctur והנותר ist überflüssig, s. IV, g.

2) Bei M. b. M. wird an dieser Stelle auch der Umfang des Kreises nach verschiedenen Methoden bestimmt, und dann durch Umfang und Diameter der Flächeninhalt. Das geschieht in unserer Schrift in Art. V. bei der nähern Behandlung des Kreises. Die Bestimmung des Flächeninhalts, wie sie hier gegeben ist, gibt auch M. b. M. an dieser Stelle, nur ohne Zahlenbeispiel; dasselbe kommt aber später ganz wörtlich bei der nochmaligen Behandlung, nachdem dort gesagt wird: Nous avons terminé l'exposé de leurs (de les cercles) propriétés et de leur mesure dans la première partie du livre. Bei Alkarkhi cap. XLVI. findet sich für den Inhalt des Kreises unter andern Methoden auch diese hier. Ebenso bei Behâ-Eddin; bei allen der Ausdruck $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ ·

[3) צרופו ist Product, aber hier ist das vorhergehende בתוך עצמו (vgl. auch d) zu ergänzen also Quadrat. St.]

4) Die zwei Worte י' וחצי $10\frac{1}{2}$ fehlen in der H. S. und sind in der Ausg. mit Recht hinzugefügt. Bei M. b. M. sind sie vorhanden.

5) הקשותה. Es wird bei dieser Benennung nur der Bogen hervorgehoben, obwohl die Rede nicht von Bogenlänge, sondern vom Inhalt des Kreisabschnittes ist. Ebenso heisst es bei Alkarkhi, s. d. Cap. XLVII. Bei M. b. M. heisst es: „Tout segment de cercle est assimilé à un arc“ oder „every part of a circle may be compared to a bow.“

[6) oder lies אותם dieselben (Summanden). St.]

7) Dieses ist hier für jeden beliebigen Bogen aufgestellt, ohne Unterschied, ob er grösser, gleich oder kleiner als der Halbkreis ist. Was die Genauigkeit betrifft, so stimmt sie für den Halbkreis vollkommen $\frac{r^2\,\pi}{2}$ und für andere Bogen bis auf zwei Dezimalen genau. Dieselbe Formel findet sich übrigens bei Heron von Alexandrien $A = (s + h)\,\frac{h}{2} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14}$, wenn A den Kreisabschnitt, s die Sehne, h den Pfeil bezeichnet. Siehe M. Cantor, Römische Agrimensoren. Leipzig 1875. S. 48.

8) Vergleiche weiter unten Art. V f, g, und M. b. M. französ. und die Bemerkungen daselbst.

c) Wer beim Cubus[1]) den Gag aus Länge und Breite[2]) messen will, sei es bei gleichen [Seiten, Cubus] oder ungleichen [rechtw. Parallelepipedon][3]), der hat an diesem Gag die Zusammenzählung der sechs Ansichten (Oberflächen) auszuführen. (Sechs Flügel einem jeden)![4]); multiplicirt man Länge in Breite und Tiefe[5]), so ist das, was aus allen drei herauskommt, die M'schichah des Gag, die den Körper ausmacht.

f) Wenn er (der Körper) kreisförmig, (Cylinder), oder dreieckig, (Prisma), oder von irgend beliebiger Seitenförmigkeit ist, (obere und untere Grenzflächen — beliebige Polygone), wenn nur sein Boden eben und passend[6]) (gleich und parallel) ist, wonach misst man den Gag?

1) Das Wort המרובע, Rechteck, Quadrat, bezieht sich hier auf die Grenzflächen des Parallelepipedons, von dem, wie die Ausführung zeigt, die Rede ist. Die muthmassliche Vertauschung dieses הגג hier vor dem Worte המרובע mit dem Worte צד in I, g, siehe dort Nota 9.

2) Das Wort ועומק, Tiefe, welches in der Ausg. mit Fragezeichen eingeschaltet wurde, ist nach obiger Auffassung überflüssig. In diesem Theile der Mischna ist demnach von der Oberfläche, und erst im zweiten Theile vom Körperinhalt die Rede. Allerdings ist bei M. b. M. die Oberfläche nicht berücksichtigt, er beginnt: „Jeder viereckige Körper".

3) In der franz. Ausg. des M. b. M. ist die Bemerkung gemacht, dass eine Uebereinstimmung mit dem Indischen hier insofern stattfindet, als die Figuren in zwei Kategorien getheilt sind, die eine Parallelepipedon, Prisma und Cylinder unter einem Namen: sama-chata, und die zweite, Pyramide und Kegel enthaltend, unter dem Namen: souchi-chata etc. Dasselbe passt auch für unsere Schrift vollkommen.

4) Jesaia VI, 2. Offenbar ist כנפים hier wie כנפות gedeutet!

5) Der französische Uebersetzer des M. b. M. bemerkt (Seite 6): Nous remarquerons encore que la hauteur des solides de la première catégorie (les parallélipipèdes, les prismes et les cylindres) a le nom spécial de profondeur, tandis que la hauteur des solides de la seconde catégorie (les pyramides et les cônes) s'appelle colonne (aamoud), comme la hauteur d'un triangle. Ganz dasselbe bemerkt man auch in unserer Schrift: in e) und f) beim Parallelepipedon, Prisma und Cylinder ist עֹמֶק (wie arab. عمق) Tiefe als Höhe gebraucht, während bei Pyramide und Kegel in g) das Wort קומה die Höhe ausdrückt. Dass hier ein neues Wort קומה genommen werden muss und nicht dasselbe Wort עמוד, amud (Säule), das beim Dreieck (sowohl in b) als auch in Art IV, b) u. c)) gebraucht wird, beruht offenbar darauf, dass das Wort עמוד, Säule, schon für den Stumpf der Pyramide und des Cylinders in i), k), l) und m) vorweggenommen und ohne Anlass zu Missverständnissen nicht in einem andern Sinne zu verwenden ist.

6) Ausgedrückt durch ישר ונאה gerade, oder eben und passend; wahrscheinlich hier der Parallelismus gemeint. Bei M. b. M., wo das Ganze wörtlich sich findet, heisst es in der franz. Uebersetzung S. 5 ausdrücklich: egal und parallel, im Arab. S. 53, Zeile 6, in gegenwärtiger Ausgabe على الاستسواء والموازاة, engl. S. 74 perpendicular [M. b. M. hat ebenfalls zwei Ausdrücke, den ersten fasst Rosen als perpendiculär, Marre als égal استواء ist שוה St.]. Siehe Vorwort III.

[Miss] den Gag in seinem Maasse (Maasseinheit)[1]) in besagter Art, so erfährst du die M'schichah, (Flächeninhalt der Basis), und wer dieses weiss (oder misst?)[2]), mulitiplicire es in die Tiefe[3]) und das ist die M'schichah des Körpers, (Körperinhalt in Körpereinheiten).

g) Bei der Pyramide (oder Kegel) (משוך gedehnt, verjüngt), deren Spitze (ראש, Haupt, Spitze, Anfang, oberes Ende) scharf und deren Basis, (סוף, Ende, unteres Ende) flach (ausgebreitet (?)[4]) sei sie viereckig, quadratförmig), oder kreisförmig, oder dreieckig, messe die M'schichah des Körpers, indem du zwei Drittel der M'schichah (Basisinhalt) wegwirfst, ergreifst das eine Drittel und multiplicirst es in die Höhe[5]), was herauskommt ist die M'schichah des Körpers[6]), von der Spitze bis zur Basis.[7])

h) Wer einen Hügel oder gewölbten[8]) Gegenstand zu messen braucht, wenn nur die Wandungen gleichförmig nach allen Seiten, wie z. B. eine Halbkugel oder etwas ähnliches, der multiplicire einen der Fäden von Ecke zu Ecke (Durchmesser) in die Hälfte des anderen[9]) Fadens, (des

---

1) Das Wort במדד ist nach St. corrumpirt und soll vielleicht במדה heissen (s. St. S. III); es ist aber auch möglich, dass diese eigenthümliche Construction hier ein Terminus für Maasseinheit sein soll.

[2) והמודע lies והיודע? oder והמודד (St. S. III). Im arab. M. b. M. S. 53 steht wörtlich: „Du kennst die M'schicha (تكسير) und was du mit der Tiefe multiplicirt hast, das ist die M'schicha“ (تكسير). Die engl. und franz. Uebersetzungen geben nur den Sinn, nicht die Worte. Das Wort הגוף hat der arab. Text nicht, und Marre setzt du solide mit Recht in Klammern. Aber M. b. M. braucht es nicht ausdrücklich zu sagen, da bei ihm der Satz mit dem vorigen verbunden ist. St.]

3) העומק plene, H. S., nicht העמק.

[4) ממוצע ist von מצע, יצע abzuleiten; vgl. St. Vorw. St.]

5) Hier für Höhe קומה, vielleicht um den Fall, wenn die Höhe ausserhalb der Basis fällt, auszudrücken. Siehe oben pag. 21 Anmerkung (5).

6) Bei M. b. M. ist hier die Sprache viel einfacher und kürzer, obwohl der Gedankengang genau derselbe ist.

7) Bei M. b. M. findet sich dieser letzte Satz nicht; dieser hat vielleicht die Gültigkeit des obern Satzes für die schiefe Pyramide ausdrücken wollen, bei der die Höhe eine andere Linie ist, als die, welche von der Spitze zur Basis geht. Bei Beha-Eddin ist übrigens ausdrücklich als Bedingung für die Gültigkeit hinzugefügt, dass Cylinder und Kegel senkrecht resp. gerade seien.

8) מקובה. In den spätern arabisch-hebräischen Werken der Mathematik ist für Cubus das Wort מעוקב gebraucht; selbst z. B. in anderen Werken desselben Codex unzähligemal. Dagegen ist in denselben das hier gebrauchte Wort מקובה nirgends anzutreffen.

9) Unter den Worten: „In die Hälfte des andern“ ist hier die Hälfte des Umfangsfadens zu verstehen (und nicht etwa des andern Durchmessers, was keinen Sinn gäbe). Dieser ungewöhnliche Ausdruck hat Anlass

Umfanges), was aus beiden herauskommt, ist die M'schichah, (Oberfläche).[1])

i) Säule. (Pyramide, oder abgestumpfte Pyramide.) Bei der Säule, die sich entweder bis oben verjüngt und ihre Spitze ist scharf, oder sich bis zur Hälfte oder zu irgend welchem Theil verjüngt, vollziehe man die Ausmessung durch die Basis und den Schnitt (קטוע, Schnitt, Abschnitt, Abstumpfung), welcher den oberen Abschnitt der Spitze bildet und wodurch beide, (die obere abgeschnittene Pyramide, und die Ganze), von einander getrennt[2]) sind, welche man als Endfläche (untere Basis) behandele, und messe es nach letzterer Berechnung, werfe dann die kleinere, (abgeschnittene, fehlende Pyramide), von der Ganzen ab; was übrig bleibt ist die M'schichah der Säule.[3])

---

zu falschen Correcturen עצמו anstatt האחד (in Art. V, a) und zu einem Zusatz או בתוך חצי עצמו in Art. V, b gegeben, was den richtigen Sinn verkrüppelt hat. Vielleicht sind auch die dadurch sinnlos gewordenen Sätze deshalb von M. b. M. weggelassen. Merkwürdig ist, dass Beha-Eddin, sowie Alkarkhi, diese Correctur gelassen, aber noch zwei Sätze eingeschoben haben, wodurch zwei Methoden aus der einen geworden sind.

1) Die Oberfläche der Kugel in Art. V, a, sowie die der Halbkugel, hier und in Art. V, b, kommt bei M. b. M. gar nicht vor. Sollte die Vermuthung richtig sein, dass letzterem dieselbe Quelle wie dem Verfasser unserer Schrift vorgelegen habe, so ist auch diese Erscheinung erklärlich, indem M. b. M. diese fehlerhafte Stelle, deren richtigen Sinn er vielleicht nicht errathen konnte, gänzlich weggelassen hätte. Bei Beha-Eddin sowie bei Alkarkhi finden sich die Bestimmungen dieser Oberfläche; bei letzterem aber nur die der Kugel; für die Halbkugel aber sagt er: Verfahre man wie bei der Kugel und nehme dann die Hälfte jenes Resultates. Dass dieses für unseren Verfasser nicht genügte, kann vielleicht daher rühren, dass die Halbkugel, als Hügel, bei der Feldmessung, die die Hauptaufgabe dieser Schrift ausmachen soll, öfter als die ganze Kugel vorkommt.

2) In der Handschrift heisst es hier ganz deutlich: מוחלק, abgetheilt, getrennt, und nicht מחלק, welches in der Ausgabe durch die Auffassung, als bezöge es sich auf den Messenden, der etwa abzuziehen hätte (was aber noch später folgt), zu einer Bemerkung Steinschneider's Veranlassung gegeben, dass חלק על dividiren hiesse (was allerdings in Ordnung ist), und חלק מן subtrahiren (!) bedeuten sollte, was sonst niemals gebräuchlich ist.

3) Auch dieser ganze Paragraph ist bei M. b. M. weggelassen. Dieser fängt gleich mit dem dazu gehörigen Beispiele an, wobei dieselben Ziffern wie bei unserem Verfasser und derselbe Gedankengang, an mancher Stelle sogar wörtlich, zu finden sind. Bemerkt man, mit welchen Schwierigkeiten unser Verfasser in diesem Paragraph sichtlich zu ringen hat in Betreff der Sprachausdrücke, so wird man wiederum an obige Vermuthung (Anmerkung 1) erinnert. Was den Sinn des ganzen Paragraphen betrifft, so bemerkt man, dass der Verfasser in Unklarheiten verfällt, während er sich besondere Mühe giebt klar zu machen, dass man bei der abgestumpften Pyramide mit zwei idealen Pyramiden es zu thun hat, von

k) Wie calculirt man (dabei)? Es sei z. B. die Säule viereckig (quadratisch), ihre Basis sei 4 Ellen auf 4 Ellen, sie steige immer mehr und mehr abnehmend auf, und das Haupt, (obere Basis), sei zwei Ellen auf zwei Ellen, viereckig, (quadratförmig), und du musst wissen, wie viel (beträgt) die M'schichah und wie viel die Höhe der Säule. Es ist das eigentlich schon oben bei der ganzen Pyramide (in g) gesagt worden, nur ist diese in unserem Falle abgestumpft und du wüsstest noch immer nicht, wie viel diese Säule betrüge, so lange nicht die Eine[1]) nach oben bis zu Ende (zu einem Punkte) aufginge.

l) Du berechnest in Zahlen: wie zwei das Maass von vier, (die Hälfte) ist, so ist auch die Länge der Säule (Stumpf) die Hälfte der aufsteigenden (Pyramide); folglich die ganze Säule, die bis zur Spitze verlaufen sollte, zwanzig Ellen, und bis zum Abschnitt[2]) 10 Ellen. Du lernst da, dass zwei ein Maass von vier, wie zehn ein Maass von zwanzig ist.

m) Wer messen muss, der greife nach dem dritten Theile der Basiskante[3]), $\left(\frac{4 \times 4}{3} = \frac{16}{3} = 5^1/_3\right)$, es beträgt fünf und ein Drittel; multiplicire dieses in 20, so beträgt es 106 und zwei Drittel Ellen; das stelle bei Seite; greife dann wiederum nach dem dritten Theile des ausmultiplicirten Abschnittes 2 auf 2, $\left(\frac{2 \times 2}{3} = 1^1/_3\right)$, das beträgt eine Elle und ein Drittel; multiplicire dieses in die zehn obern Ellen, das beträgt 13 Ellen und ein Drittel, werfe dieses ab von 106 und zwei Drittel, so bleiben 93[4]) und ein Drittel und du kommst zum Körperinhalt der abgestumpften Säule. Ist dieselbe rund (Kegel), so ist (der Körperinhalt) der Rest, (was bleibt), nachdem du vom Obigen ein Siebentel und ein halbes Siebentel weggeworfen hast.[5])

---

denen die eine gar nicht existirt (bis auf die Basis derselben, als welche das obere Ende aufzufassen ist), während von der andern Pyramide nur ein Theil existirt, und dass die obere Basis dieselbe Rolle spielt für die obere Pyramide, wie die untere Basis für die ganze Pyramide. Auffallend ist, dass es hier den Schein hat, als sollte der Fall der ganzen Pyramide in dem der abgestumpften enthalten sein; dass dieses in der That der Fall ist, da im speciellen Fall der Subtrahend Null wird, ist klar; es wäre doch aber zu viel gewagt, unserem Verfasser das zuzuschreiben.

1) Die eine der beiden idealen Pyramiden. St. emendirt חד, also „bis sie spitz endet".

2) הקטופה H. S. und Ausg., nach St. wahrscheinlich הקטוע zu lesen.

3) Die Correctur בט״ז ist überflüssig, da die mit sich selbst multiplicirte Basiskante ohnehin sechszehn beträgt, und das auffallende ראשו חד bleibt nach der Correctur eben so auffallend wie ohne dieselbe.

4) Also צ״ג und nicht ש״ט muss es offenbar heissen; ein Fehler, der in einer Handschrift gar leicht entstehen konnte.

5) Zu Mischna m) ist zu bemerken, dass der Abschreiber hier eine ganze

Art. III.[1])

a) Fünf Arten sind es bei den Vierecken, und zwar: α) gerade, (recht, gleich), in Seiten und Winkeln, β) ungleich in den Seiten und recht in den Winkeln, γ) gleich in den Seiten und ungleich in den Winkeln, δ) gleich und ungleich in Seiten und Winkeln, wobei zwei Längen besonders für sich und zwei Breiten für sich, (unter einander gleich sind), (Parallelogramm), ε) ganz und gar ungleich in Seiten und Winkeln.

b) Wie was gleich ist an Seiten und Winkeln? z. B. zehn von [jeder] Seite; man multiplicire Länge auf Breite, das Ergebniss ist die M'schichah, d. h. 100. Die eine Seite ist die eine Wurzel, (עקר erste Potenz), und beide Seiten sind die zwei[2]) Wurzeln (die zwei Factoren), *und so 3 und so 4.*[3])

c) Ungleich an Seiten und recht an Winkeln, z. B. acht in einem Seitenpaare und im andern Seitenpaare sechs; multiplicire Länge auf Breite, das gibt 48, und das ist die M'schichah. Gleich an Seiten [ist] recht an Fäden.[4])

Zeile von dem zweiten ושלים bis zum dritten irrthümlich zweimal geschrieben hatte, was in dem betreffenden Manuscript gar nicht selten ist. Uebrigens hatte er das erstemal כ"ו anstatt ק"ו geschrieben und bemerkte es erst, nachdem er schon das Wort והוא geschrieben hatte, da wollte er es verbessern und fing aus Ueberstürzung anstatt vom zweiten ושלים vom ersten an, und als er מצ vom Worte מצרף geschrieben hatte, bemerkte er es, dann liess er diese zwei Buchstaben stehen, fing von neuem an und schrieb dann alles in Ordnung weiter, nur vergass er das Ueberflüssige zu streichen.

1) Dieser Art. handelt wiederum von dem Viereck mit näherer Specialisirung, wobei die obige Reihenfolge der Figuren wiederum innegehalten wird, wie das auch bei M. b. M. geschieht. Dabei handelt Art. III vom Viereck, IV vom Dreieck, V vom Kreis und Bogen. Alle diese Unterabtheilungen kommen genau ebenso bei M. b. M. mit denselben Zahlenbeispielen und Figuren vor, mit Ausnahme von der Oberfläche der Kugel, wie ich schon oben bemerkt habe.

2) עקרה, wohl zu lesen עקריה.

3) Dieser letzte Satz lautet bei M. b. M. (bald am Anfang, Seite 4 oben): Dans tout carré, si l'un des côtés (est multiplié) par un, c'est la racine de ce carré; si par deux, deux racines; *que ce carré soit petit ou grand.* Ebenso in der engl. Uebers.: One side of an equilateral quadrangular figure, taken once, is its root; or if the same be multiplied by two, then it is like two of its roots, *whether it be small or great.* Es scheint hier wiederum eine abweichende Auffassung der gemeinsamen Quelle vorzuliegen. Während nämlich in unserer Schrift die Verallgemeinerung des Satzes auf mehrere Factoren ausgedehnt wird, und zwar auf drei, (Cubus), und auf vier, was keine geometrische Bedeutung mehr hat, bezieht M. b. M. die Verallgemeinerung auf die Unabhängigkeit von der Grösse des Quadrates; während er bei den zwei Dimensionen stehen bleibt. Ist es nicht augenscheinlich, dass der Verfasser unserer Schrift und M. b. M. einen Satz aus gemeinsamer Quelle verschieden deuteten? —

4) קו (קוין in der Ausg. Druckf.) Schnur, Linie, Diagonale. Es soll aus-

d) Wie (ist) gleich an den Seiten und verschieden an den Winkeln (Rhombus)? z. B. fünf von jeder Seite, zwei Winkel spitz (צר eng) und zwei Winkel stumpf (רחב breit), und zwei Fäden (Diagonalen) durchschneiden sich gegenseitig in der Mitte, eine von acht und die zweite von sechs. Wer messen will, der multiplicire einen der Fäden in die Hälfte seines Genossen, (Conjugirten), was sich ergibt ist die M'schichah. Wie dieses da! (deutet auf die Figur hin).

e) Wie berechnet man, was ungleich an Seiten und Winkeln, aber zwei Längen für sich und zwei Breiten für sich (einander gleich sind) und die Winkel schief?[1]) Man durchschneide (das Parallelogramm) in zwei, von Ecke zur Ecke, und bringe (es) auf zwei, (Figuren), und berechne jede für sich nach Maass eines Dreiecks, und so ist die M'schichah (erhalten). Und so misst du auch was ganz und gar verschieden ist: so dass du alle[2]) ungleichseitigen Vierecke (betrachtest als bestehend) aus seinen Dreiecken.

Art. IV.

a) Drei Arten (sind es) beim Dreiecke und zwar: α) das rechtwinklige (נצבה) aufrechtstehende[3]), β) das spitz- (חדה scharfe), γ) das stumpfwinklige (פתוחה) offene. Wie ist das rechtwinklige?[4])

---

drücken, dass im Rhombus die Diagonalen einander senkrecht halbiren. Dieser Satz soll als Lemma zum folgenden dienen. Die in der Ausgabe vorgeschlagene Correctur זוית, Winkel, anstatt קו führt zu keinem Verständniss des Satzes, der wohl von dem vorigen Satze zu trennen ist, da jener vom Rechteck handelt, und hier von gleichen Seiten die Rede ist. Vielleicht trägt dieser Satz zur Ergänzung der Zahl von 49 Sätzen bei, die man hier zu suchen bemüht ist. S. Einleit.

1) ממחשבה אמה emendirt St. מחשב אותה, und so ist es hier übersetzt.

2) Die zwei Worte פְּסָקָה לשנים die hier sowohl, wie auch am Ende des Artikels sich vorfinden, gehören wohl zu den nebenstehenden Figuren, ebenso die Worte המשונה בכל עיקר. Uebrigens könnten sich letztere auf die Dreiecke beziehen, in welche die Vierecke zu zerlegen sind. Die Dreiecke werden in der That im Allgemeinen ungleichseitig sein. Bei M. b. M. ist das Parallelogramm direct und nicht durch Zerlegung in zwei Dreiecke bestimmt.

3) Zum erstenmal der Ausdruck, der für einen rechten Winkel später sehr geläufig geworden „זוית נצבת". Hier aber eigentlich nur zur Benennung des rechtwinkligen Dreiecks gebraucht, dann in b) allerdings auch für den Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, sonst aber nicht. Vielleicht ist hier das Bild von einem massiven Dreieck genommen, welches aufrecht stehen kann?!

4) Bemerkenswerth ist, dass diese Eigenschaft $a^2 + b^2 \overline{\gtrless} c^2$ nicht als Lehrsatz, sondern als Charakteristik, ja als Definition des recht-, spitz- und stumpfwinkligen Dreiecks hier aufgestellt wird. Ganz ebenso geschieht es bei M. b. M. (S. die engl. Uebers. S. S. 77, 78, 79; franz. S. S. 8, 9.) In der englischen Uebersetzung ist sogar das Wort definition ausdrücklich gebraucht, was sich allerdings im arabischen Texte nicht findet. Aber dass diese Eigenschaft der Seiten als

Seine zwei kürzeren Seiten, jede für sich quadrirt, sind (in Summe) gleich dem ersten [dem Quadrat der längeren]; z. B. sechs von einer Seite und acht von der andern Seite; was herauskommt aus diesen für sich, [wenn man sie quadrirt und addirt], ist hundert, und von jenem für sich, (Quadrat der längeren Seite), ist ebenfalls hundert.

Wer messen muss [multiplicire eine] der kürzeren in die Hälfte der andern, entweder 8 in 3 oder 6 in 4, und was sich ergibt ist die M'schichah.

b) Der Winkel, welcher zwischen den Katheten eingeschlossen ist, ist der rechte (נצבה aufrechtstehende); und [das Dreieck] ist die Hälfte des Rechtecks, das ungleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

Wer dieses (Dreieck) durch die Höhe berechnen will, der rechne es so (immerzu) nach seiner Weise, wenn seine (des Dreiecks) zwei Katheten seine zwei Säulen[1]) (Höhen) sind. Sie (vielleicht durch die Höhe entstandenen Dreiecke?) sind ähnlich, anliegend und rechtwinklig (gerade).

c) Die Säule (Senkrechte), welche aus ihnen [den kürzeren d. h. von ihrem Durchschnittspunkte] gezogen wird, fällt auf die lange Seite, das ist die Basis.[2])

---

charakteristisches Kennzeichen für das Maass des Winkels gebraucht wird, was schon die Idee der Goniometrie berührt, ist hier deutlich ausgesprochen. Ebenso findet es sich bei Alkarkhi und Beha-Eddin. Ich werde hier unwillkürlich erinnert an den Ausspruch meines hochverehrten Lehrers, Herrn Prof. M. Cantor, dass Seilspannung schon bei den Aegyptern unter anderm dazu benutzt wurde, um den rechten Winkel zu bestimmen, indem ein Seil vielleicht von 12 Einheiten Länge in Dreieckform so gespannt wurde, dass die Seiten 3, 4 und 5 Einheiten bildeten. Diese Zahlen finden sich beim Bau der Stiftshütte sowohl, wie beim Tempelbau Salomonis. Ja es scheint sogar der von den Bauhandwerkern benutzte Maasstab die Form eines solchen massiven rechtwinkligen Dreiecks besessen zu haben, wobei jede der Seiten möglicherweise eine Marke in ihrer Mitte trug und auf diese Weise auch die Maasse $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ direct angab. Dadurch ist erklärlich, dass (Exodus XXV, 10 und XXXVII, 1) die heilige Lade die Grösse hat $2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$ und so natürlich auch der Deckel; dass (XXV, 23 und XXXVII, 10) der Tisch $2 \times 1\frac{1}{2}$ ist; dass beim Stiftszelt nur die Vielfachen von 3, 4, 5 vorkommen (XXVI, 2 und XXXVIII); dass (XXVII und XXXVIII) der Altar von der Grösse $5 \times 5 \times 3$ war; dass in dem Brustschilde 12 Edelsteine in vier Zeilen zu je drei sassen u. s. w.; dass I. Regum VI und VII beim Bau des Salomonischen Hauses und Tempels fast ausschliesslich Vielfache von 3, 4, 5, ebenso beim Bau der Arche (Genesis VI, 15) vorkommen. Dass die Reihenfolge, die Beispiele und Ziffern genau dieselben bei M. b. M. sind, habe ich schon mehrmals erwähnt, und wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist das stillschweigend vorausgesetzt.

1) In der Ausgabe צלעותיה הקצורים כן הם שני צלעותיה עמודיה. Ich habe die zwei Worte כן צלעותיה in der Uebersetzung unberücksichtigt gelassen, weil sie den Sinn erschweren und in der Handschrift mit Punkten, wahrscheinlich als Tilgungszeichen, überzeichnet sind; St. S. III bemerkt das nur von dem כן. Der Satz stimmt auch so ziemlich mit M. b. M.

[2) המשך lies המשוך? Für אל lies על? נופל steht an ungeeigneter Stelle?

Wer messen will, multiplicire die Höhe in die halbe Basis, und was aus der Rechnung sich ergibt, das ist die M'schichah.

d) Wie das spitzwinklige? (Die) zwei kürzeren (welche auch gleich sein können) jede für sich quadrirt und zu einander addirt geben **mehr** als das Quadrat der dritten Seite, welche die Basis ist. Es gibt unter den spitzwinkligen auch gleichseitige; wer messen will berechne es mit Hülfe der Basis (und Höhe); somit finden wir die Winkel spitz. Wie das Maass des ersteren, so das des letzteren מן החדים צלעי (?)[1])

e) Wer das Maas der Höhe wissen will, bei gleichen Seiten, (gleichseit. Dreieck), multiplicire eine der Seiten in sich selbst [und die Hälfte der andern Seite in sich selbst][2]), ziehe das Kleinere vom Grösseren ab, was bleibt ist das Fundament (יסוד Quadrat, wovon die Wurzel gezogen werden muss), was dann gefunden wird (beim Ausz. d. W.) das ist die Höhe.

f) Wie zählt (berechnet) man? Zehn auf zehn sind hundert, und die Hälfte der andern Seite welche 5 beträgt, in sich selbst multiplicirt (gibt) 25, werfe das Kleinere vom Grösseren ab, so bleibt dort 75, das ist das Fundament (Quadrat) und seine Wurzel ist 8 und ein Rest.

Wer den Flächeninhalt messen muss, der multiplicire die Wurzel in die Hälfte der unteren Seite, und was sich (aus der Rechnung?)[3]) ergibt, das ist die M'schichah, welches 43 und etwas beträgt.[4])

---

vergl. unten § g. Anstatt מקבע lies הקבע, also: die von ihnen gezogene Säule (Höhe) fällt auf die lange Seite, das ist die Basis (קבע). St.]

[1) Dieser erste Satz muss im Text stark emendirt werden, um der kürzeren Fassung des M. b. M. (franz. S. 8 unten) zu entsprechen. או השוים „oder gleichen", steht dort nicht. „קבועים" für **addirt** ist mir sonst nicht bekannt. Lies מחוברים? Für הצלע השני muss השלישי, für ויותר muss הוא יותר emendirt werden. Der Schlusssatz . . . נמצא bedürfte noch einer Erklärung. מן החדים gehört vielleicht noch zu מדת האחרון und צלעי allein wäre zu tilgen. Ich verstehe noch nicht, was die spitzen Winkel (des gleichschenkligen Dreiecks) hier zu thun haben, und in Analogie mit unten § k möchte ich es nur als Vordersatz auffassen: Folglich ist (in Bezug auf) Spitzwinkel wie das Maass des ersteren etc. St.] Was die spitzen Winkel betrifft, so glaube ich, dass der Verfasser hier beweisen will, dass die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks alle spitz sein müssen, weil die Summe der Quadrate zweier Seiten hierbei entschieden grösser sein muss, als das Quadrat der dritten Seite. Siehe Art. IV, a (4). — Und was ferner den ungewöhnlichen Ausdruck קבועים für Addition betrifft, so könnte vielleicht der Verfasser damit das Ansetzen der geometrischen Quadrate an einander ausdrücken wollen.

2) Hier sind offenbar vom Abschreiber die eingeklammerten Worte „וחצי הצלע השני בתוך עצמו" irrthümlich wegen des homoteleuton weggelassen.

[3) Für מן liest St. היא; man könnte auch החשבון ergänzen, ist aber nicht nöthig.] S. V, c.

4) Beachtenswerth ist es, dass M. b. M. an dieser Stelle den Fusspunkt der Höhe unter dem Namen Masquèt al hadjar ganz ausführlich **algebraisch**, mit

g) Sieben[1]) andere Arten (Methoden) bei den Dreiecken. Bei einem gleichseitigen Dreieck [betrachte] jede[2]) Seite für sich; was von dieser Seite gesagt wird, das gilt auch von jener, und was von jener gesagt wird, das gilt auch von dieser.

Wer versteht בתפוח[3]), der multiplicire (quadrire) eine der Seiten für sich, was hundert beträgt; werfe den vierten Theil davon, 25, weg; es bleibt 75.

Wer (den Inhalt) messen muss, multiplicire 75 in 25, d. h. drei Viertel in ein Viertel 25[4]); das beträgt 1875, ergreife dann die Wurzel, und das ist die M'schichah, welche 43 und einen Rest beträgt. Daraus findest du, dass die Senkrechte (Säule) aus der halben Basis[5]) immer in die Spitze einfällt.

h) So hast du gefunden (herausgebracht) die Ausrechnung beim Gleichseitigen, und so bei einem ihm ähnlichen (wahrscheinlich gleichschenkligen Dreieck), aber zur Berechnung des ungleichseitigen hast du daraus kein

---

Benutzung einer Gleichung zweiten Grades, bestimmt, während unsere Schrift kein Wort davon erwähnt. Dass M. b. M. trotzdem, dass er die algebraische Lösung hat, dennoch gleich unserer Schrift dem Fall auszuweichen sucht, wo die Höhe ausserhalb des Dreiecks fällt, kommt wohl daher, dass er die negative Wurzel sichtlich vermeiden will.

1) Was diese sieben Arten bedeuten sollen, ist mir unverständlich, wenn man nicht einen Sinn hineinzwingen wollte. Vielleicht soll es auch יש בה, etwa il-y-a, anstatt שבעה heissen.

2) Ueber ראיה steht ., vielleicht ein Zeichen, dass das Wort unrichtig sei und am Rande emendirt werden sollte.

3) Apfel (?). Soll es vielleicht den Ort, wohin der Apfel fällt, d. h. den Fusspunkt bedeuten, wie „msaquèt al hadjar“? der Ort, wohin der Stein fällt, bei M. b. M. (Vgl. Deutsch. Sprw. „der Apfel fällt nicht weit vom Stamme“).

4) Diese Worte: drei Viertel und ein Viertel für 75 und 25, kommen bei M. b. M. nicht vor. Die Bemerkung, dass 25 und 75, wenn die Seite 100 ist, dieselbe Rolle spielen, welche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, wenn die Seite als Einheit genommen wird, und der Umstand, dass hier der Dezimalbruch schon bis auf 4 Dezimalen geht (modern gesprochen $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}1875$), erinnert wiederum an meine Bemerkung in Art. I, h, dass unser Verfasser (oder vielleicht Jemand, der diesen Zusatz eingeschoben hätte) auf die Verwandlung der Brüche in Dezimalbrüche aufmerksam zu machen sucht, während M. b. M. dieses übergeht.

5) An dieser Stelle heisst es im Texte ס"א d. h. in der sehr gebräuchlichen Abkürzung ספר אחר: in einem andern Buche. Ist das eine Bemerkung des Abschreibers oder des Verfassers selbst, der übrigens seinerseits ebenfalls ein Abschreiber ist? Jedenfalls ist es wichtig, zu wissen, dass mehr als ein Buch hier vorlag. Vielleicht erklärt schon dieses den Umstand, dass, trotzdem diese Schrift Hand in Hand mit Mohamed ben Musa geht, dieselbe doch Manches enthält, was sich bei Jenem nicht findet, und umgekehrt.

Mittel zur[1]) Berechnung der M'schichah. Wer dieselben genau untersucht, der wird es herausfinden, entweder durch die[2]) Seiten, oder durch Höhe und Basis.

i) Wie berechnet man z. B.[3]) ein ungleichseitiges Dreieck, welches spitze Winkel hat (und) 15 an einer Seite, 14 an der zweiten und 13 an der dritten beträgt?

Wer messen muss, nehme alle drei Seiten zussmmen, das beträgt 42; nehme die Hälfte und siehe um wie viel dieselbe grösser als die erste Seite ist, multiplicire die Hälfte mit dem Ueberschuss, was 21×6 ausmacht und 126 beträgt; dieses stelle bei Seite. Nehme wieder jene Hälfte, und siehe nun um wie viel sie grösser ist als die zweite Seite, multiplicire den Ueberschuss, d. h. 7 mit den ersten 126, es beträgt 882; stelle dieses bei Seite. Nehme zum dritten Mal die Hälfte, und siehe, um wie viel sie grösser ist als die dritte Seite, multiplicire den Ueberschuss 8 in 882, es beträgt 7056; die Wurzel daraus ist 84, und das ist eben das Maass der M'schichah.

k) Wie das offene (stumpfwinklige?)

Wenn jede der kürzeren Seiten für sich quadrirt[4]) und zusammen addirt, und die dritte Seite d. h. die Basis für sich quadrirt wird, so ist das Quadrat der letztern grösser, als die (Summe der Quadrate der) erstern. Ist z. B. 5 an einer Seite, 6 an einer andern Seite und 9 an einer andern (dritten) Seite, so findet sich, dass einer der Winkel offen, (stumpf), und breit ist. [Weil] das Erste (die Summe der Quadrate der kleinern) 61 ist, und das Letztere (Quadrat der Basis) 81 (und somit nach obiger Definition bewiesen).

Wer messen soll, der rechne (klar) durch Höhe und Basis; wenn er aber die Rechnung der Seiten und ihrer Hälfte (Heronische Formel) vorzieht, so rechne er nach einer Art i m m e r.

---

1) Das hier sich findende Wort קשת giebt keinen Sinn. Dagegen fehlt dieses Wort augenscheinlich in V, f. Vielleicht stand dasselbe früher am Rande und kam dann an unrichtiger Stelle in den Text herein?

2) ישכיל H. S., ישפיל in der Ausgabe, ist Schreibfehler. Anstatt ב' צלעים möchte ich בין בצלעים lesen.

3) Dieselben Zahlen für die Seiten nimmt auch M. b. M., aber an die Heronische Formel erinnert er mit keinem Worte, wohl aber Alkarkhi Seite 23. Vgl. auch die Citate bei St. S. V., Anm. 12, und Zeitschrift für Mathematik und Physik X, 487.

4) מצורק H. S. und so übersetzt; nicht מצרק wie in der Ausgabe.

[5) מְחַשְּׁבָה (nicht מַחְשָׁבָה), wie am Ende der Mischna; ברורה würde noch מַחְשָׁבָה (ist aber nicht Calcul) erfordern. St.]

Art. V.

a) Drei Arten giebt es bei dem Runden, und zwar: das Hängende, las Hügelartige und das Flache. Welches ist das Hängende? Das ist las[1]) runde nach allen Seiten, wie ein Ball, oder ist die M'schicha (Oberfläche) wie bei einem Kürbis[2]) (כאבטיח), welcher rings umher rund ist, wenn nur die Rundung gleichförmig ist nach Länge, Breite und Tiefe. Wie (bestimmt man) durch Messen? Man multiplicire einen der Fäden (Durchmesser) in die Hälfte des andern[3]), (Umfangs), was herauskommt ist die M'schichah (Oberfläche) der Kugel, wenn das verdoppelt wird. Denn sie (die Wölbungen) sind als ihre (cylindrischen) Wände zu betrachten.[4])

b) Welches ist das Hügelartige? Das als Hälfte des Hängenden dasteht, wie ein Hügel, oder wie (eine Höhlung), wie ein Zelt[5]), wenn (die Rundung) nur gleichförmig ist. Wer messen soll, der multiplicire einen der Fäden von Ecke zur Ecke, (Durchmesser), in die Hälfte des andern[6]) Fadens (Umfanges), was herauskommt ist die M'schichah, (Oberfläche der Halbkugel).

c) Wie das Flache? Das was auf dem Boden liegt, wie ein rundes Feld, oder eine runde Figur. Wer messen soll, multiplicire den Faden (Durchmesser) in sich selbst, werfe davon ein Siebentel und ein halbes Siebentel weg; der Rest ist die M'schichah, das ist ihr Gag.[7])

---

1) עומדת עקר ד׳ vermag ich nicht zu erklären. S. hebr. Text.

2) Bei Beha-Eddin kommt ebenfalls der Ausdruck Gurke und Rübe vor. S. 29 und 32. Siehe zu S. 29 die Anmerkung 17 des Uebersetzers auf S. 66.

3) Das Wort עצמו kann sich hier durch den Abschreiber irrthümlich anstatt האחד eingeschlichen haben.

4) Siehe Alkarkhi Cap. 11. Es ist also der Satz ausgesprochen, dass die Oberfläche der Kugel gleich ist dem Cylindermantel von derselben Höhe.

5) H. S. כקובה; in der Ausgabe כמו נקובה ist unrichtig. כ als נ zu nehmen war sehr leicht, und anstatt כמו findet man in der H. S. einen üblichen Zickzack zur Ergänzung der Zeile.

6) Die Worte או בתוך חצי עצמו werden wohl wie oben irrthümlich eingeschoben sein, und zwar von einem, welcher unter האחד einen andern Durchmesser verstand; und daher hielt er sich berechtigt und verpflichtet, die Bemerkung zu machen, dass man ebensogut den Durchmesser selbst noch einmal nehmen kann. Indess ist aber hier unter dem (andern) Faden nicht der Durchmesser, sondern der Umfang gemeint. Uebrigens siehe hier M. b. M. Er hat da nämlich zwei Methoden: in der einen kommt der Umfang, in der andern aber kommt wirklich der Durchmesser selbst. Ob nicht hier wiederum so eine zweideutige Stelle beide Verfasser auf verschiedene Wege führte? oder ob nicht vielleicht in unserer hebräischen Schrift durch Auslassung von ein Paar Zeilen beide Methoden in einander sich verschmolzen haben? — ich wage es nicht zu entscheiden.

7) Hier findet sich היא anstatt מן und oben IV, f, umgekehrt מן anstatt היא: Verwechselung des Schreibers, wozu das gleiche Wort המשיחה Veranlassung gegeben hat.

Wenn du den Umfang ringsherum wissen willst, so multiplicire den Faden (Durchmesser) in $3\frac{1}{7}$, das beträgt 22 [wenn der Durchmesser 7 ist].

Willst du die M'schichah (durch den Umfang) bestimmen, so nimm den halben Umfang, das ist 11, multiplicire es in den halben Faden (Durchmesser), was $3\frac{1}{2}$ beträgt, und es kommen $38\frac{1}{2}$ heraus. So im ersten Falle, so auch im letzten. Heisst es ja[1]): „Er machte das Meer gegossen zehn Ellen von seinem Rande zu seinem Rande, rund ringsum, und fünf Ellen seine Höhe", da es heisst: „Und eine Schnur von 30 Ellen umringt es ringsherum." Was lernst du (aus den Worten) „und eine Schnur von 30 Ellen" u. s. w.? Da die Erdenkinder (Profanen) von einem Kreise behaupten, der Umfang enthalte drei und ein Siebentel in den Faden; davon aber ein Siebentel an die Dicke des Meeres an seinen beiden Rändern aufgeht, so bleiben dreissig Ellen, welche es umringen. In diesem Maasse sind gleich die Meere, die Bäder und die Brunnen in Länge, Breite und Tiefe. Somit hast du das Maass des Runden gelernt.

e[2]) Drei Dinge sind beim Bogenartigen gesagt worden und zwar:

(Es gibt) eine gleiche (Figur), eine mangelhafte und eine überschüssige.

Welches ist die gleiche? — Die als Halbkreis dasteht, nicht weniger und nicht mehr. Die mangelhafte — die weniger als ein Halbkreis, und die Ueberschüssige, welche den Halbkreis übertrifft. Die Regel ist: Die, deren Pfeil[3]) kleiner ist, als die halbe Sehne, ist die mangelhafte, und die, deren Pfeil grösser ist, als die halbe Sehne, ist die Ueberschüssige.

f) Wer die gerade[4]) (gleiche) messen will, multiplicire die ganze[5]) Sehne in sich selbst, werfe davon ein Siebentel (und ein halbes Siebentel)[6]) weg; von dem Rest werfe man die Hälfte weg; was gefunden wird, ist die M'schichah.

g) Bei den andern musst du wissen, wie viel die Rundung (der Bogen) beträgt. Wie (macht man das)? Man multiplicire die halbe Sehne in sich selbst, das Ergebniss theile durch den Pfeil, was aus der Theilung gefunden wird addire zum Pfeil, das Ergebniss ist der [halbe] Faden des

---

1) I. Regum VII, 23; II. Chron. IV, 2.

2) § d fehlt; es ist aber im Manuscripte kein leerer Raum dafür gelassen.

3) Es muss heissen שֶׁחְצָה, anstatt שחצייה. Hier hat wohl auch Jemand verbessern wollen und hat dadurch das Errathen nur erschwert.

4) Das Wort היתר hat wohl der Abschreiber aus dem Nachfolgenden genommen. Vielleicht hat ihn das sich wiederholende Wort את dazu verleitet.

5) Auf בתוך finden sich im Manuscript zwei Punkte und auf כולו ein Punkt, um anzuzeigen, dass man כולו בתוך עצמו zu lesen hat.

6) Dass וחצי שביעי hier einzuschalten sei, ist klar.

Kreises. $\left(\frac{d}{2} = r\right)$; ergreife die Hälfte dieses Fadens, multiplicire ihn in den halben Bogen[1]), das Ergebniss stelle man bei Seite, und sehe zu, ob der Bogen ein mangelhafter ist, dann werfe (ziehe) seinen Pfeil von dem halben Kreisfaden ab und multiplicire den Rest in die halbe Sehne, und ziehe das ab von dem Hingestellten, der Rest ist die M'schichah.[2]) Ist aber der Bogen ein überschüssiger, so werfe den halben Kreisfaden[3]) von dem Pfeile selbst ab, multiplicire den Rest in die halbe Sehne und addire das zum Hingestellten. Was herauskommt ist die M'schichah. Wie das Maass des erstern, so auch das Maass des letztern.[4])

Der Art. ist zu Ende und mit ihm auch die Mischnath (so!)
Hamiddoth, mit Hilfe denjenigen, der die Räthsel kennt (versteht).

1) Vielleicht gehört hierher das Wort קשת von Art. IV, h, welches dort den Sinn nur erschwert. Das kann vielleicht am Rande als Correctur für החץ gestanden haben, und ist dann an unrichtiger Stelle in den Text hineingekommen.

2) Die zwei Worte ר״ה ומשליך geben hier keinen Sinn. Auch מן für היא s. oben.

3) Lies משליך חצי חוט העגולה מֵהַצָּה.

4) D. h. das Resultat beider Methoden ist dasselbe.

Schlussbemerkung.

Nachdem gegenwärtige Arbeit fertig war, sandte ich sie dem Herrn Dr. Steinschneider, dem wir überhaupt die erste Auffindung unserer Schrift in dem genannten Cod. der Münchener Bibliothek verdanken, zur gefälligen Durchsicht.

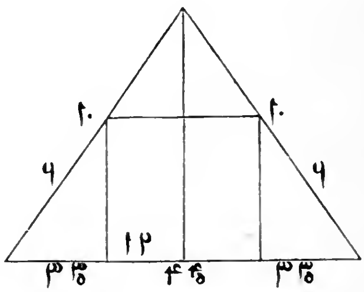
Ich spreche hiermit demselben meinen innigsten Dank aus für freundliche Bemerkungen, von denen ich mehrere in eckigen Klammern unter Bezeichnung St. zuzufügen mir erlaubt habe. Sollte ich manche Fragen nicht genügend beantwortet, resp. manche Einwendung nicht hinreichend widerlegt haben, so dürfte mir vielleicht der ungeheure Mangel an Zeit einigermassen zur Entschuldigung dienen.

Wer vor mir versucht hätte diese Aufgabe zu lösen, wird es mir hoffentlich nicht übel nehmen, wenn noch vielleicht etwas zu wünschen übrig geblieben, falls die Aufgabe mindestens der Hauptsache nach als gelöst betrachtet werden könnte.

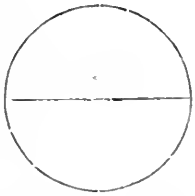
Vielleicht ist es mir später einmal vergönnt, auf den Gegenstand noch zurückzukommen. Vorläufig erwartet wohlwollende Zurechtweisungen in aller Ergebenheit der

Uebersetzer.

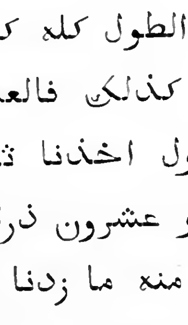
فان قيل ارض مثلثة من جانبيه عشرة اذرع عشرة اذرع والقاعدة
اثنا عشر ذراعا في خوفها ارض مربعة كم كل جانب من المربعة
فقياس ذلك ان تعرف عمود المثلثة وهو ان تضرب نصف القاعدة وهو
ستة في مثله فيكون ستة وثلثين فانقصها من احد الجانبين الاقصرين
مضروبا في مثله وهو مائة يبقي اربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو
العمود وتكسيرها ثمانية واربعون ذراعا وهو ضربك العمود في نصف
القاعدة وهو ستة فجعلنا احد جوانب المربعة شيئا فضربناه في مثله فصار
مالا فحفظناه ثم علمنا انه قد بقي لنا مثلثتان عن جنبتي المربعة ومثلثة
فوقها فاما المثلثتان اللتان علي جنبتي المربعة فهما متساويتان وعموداهما
واحد وهما علي زاوية قائمة فتكسيرها ان تضرب شيئا في ستة الا نصف
شيء فيكون ستة اشياء الا نصف مال وهو تكسير المثلثتين جميعا اللتان
هما علي جنبتي المربعة فاما تكسير المثلثة العليا فهو ان تضرب ثمانية
غير شيء وهو العمود في نصف شي فيكون اربعة اشياء الا نصف مال
فجميع ذلك هو تكسير المربعة وتكسير الثلث المثلثات وهو عشرة اشياء
تعدل ثمانية واربعين هو تكسير المثلثة العظمي فالشيء الواحد من ذلك
اربعة اذرع واربعة اخماس ذراع وهو كل جانب من المربعة ❋ وهذه
صورتها ❋



يحيط بها وهو احد عشر فيكون ثمانية وثلثين ونصفا وهو تكسيرها فا
احببت فاضرب القطر وهو سبعة في مثله فيكون تسعة واربعين فانقص
منها سبعها ونصف سبعها وهو عشرة ونصف فيبقي ثمانية وثلثون ونصف
وهو التكبير وهذه صورتها ❋

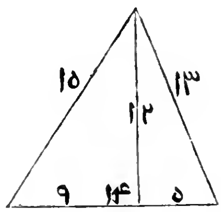


فان قال عمود مخروط اسفله اربعة اذرع في اربعة اذرع وارتفاع
عشرة اذرع وراسه ذراعان في ذراعين وقد كنّا بيّنّا ان كل مخروط
محدد الراس فان ثلث تكسير اسفله مضروبا في عموده هو تكسيره فلم
صار هذا غير محدد اردنا ان نعلم كم يرتفع حتي يكمل رأسه فيكون لا رأس
له فعلمنا ان هذه العشرة من الطول كله كبعد الاثنين من الاربعة فالاثنان
نصف الاربعة فاذا كان ذلك كذلك فالعشرة نصف الطول والطول كله
عشرون ذراعا فلما عرفنا الطول اخذنا ثلث تكسير الاسفل وهو خمسة
وثلث فضربناه في الطول وهو عشرون ذراعا فبلغ ذلك ماية وستة اذرع
وثلثي ذراع فاردنا ان نلقي منه ما زدنا عليه حتي يخرط وهو واحد
وثلث الذي هو ثلث تكسير اثنين في اثنين في عشرة وهو ثلثة عشر
وثلث و ذلك تكسير ما زدنا عليه حتي انخرط فاذا رفعنا ذلك من ماية
وستة اذرع وثلثي ذراع بقي ثلثة وتسعون ذراعا وثلث وذلك تكسير
العمود المخروط وهذه صورته ❋

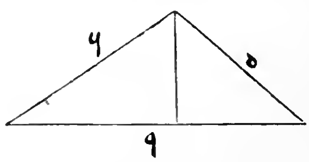


وان كان المخروط مدورا فالق من ضرب قطره في نفسه سبعه
ونصف سبعه فما بقي فهو تكسيره ❋

ماية وتسعة وستين الا مالا هو العمود ايضا علمنا انهما متساويان فقابل بهما وهو ان تلقي مالا بمال لان المالين ناقصان فيبقي تسعة وعشرون وثمانية وعشرون شيئا يعدل ماية وتسعة وستين فالق تسعة وعشرين من ماية وتسعة وستين فيبقي ماية واربعون يعدل ثمانية وعشرين شيئا فالشيء الواحد خمسة وهو مسقط الحجر مما يلي الثلثة عشر وتمام القاعدة مما يلي الضلع الاخر فهو تسعة فاذا اردت ان تعرف العمود فاضرب هذه الخمسة في مثلها وانقصها من الضلع الذي يليها مضروبا في مثله وهو ثلثة عشر فيبقي ماية واربعة واربعون فجذر ذلك هو العمود وهو اثني عشر والعمود ابدا يقع علي القاعدة علي زاويتين قائمتين ولذلك سمي عمودا لانه مستو فاضرب العمود في نصف القاعدة وهو سبعة فيكون اربعة وثمانين وذلك تكسيرها وذلك صورتها ❋

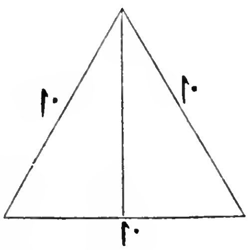


والجنس الثالث منفرجة وهي التي لها زاوية منفرجة وهي مثلث من كل جانب عدد مختلف وهي من جانب ستة ومن جانب خمسة ومن جانب تسعة فمعرفة تكسير هذه من قبل عمودها ومسقط حجرها ولا يقع مسقط حجر هذه المثلثة في جوفها الا علي الضلع الاطول فاجعله قاعدة ولو جعلت احد الضلعين الاقصرين قاعدة لوقع مسقط حجرها خارجها وعلم مسقط حجرها وعمودها علي مثال ما علمتك في الحادة وعلي ذلك القياس وهذه صورتها ❋



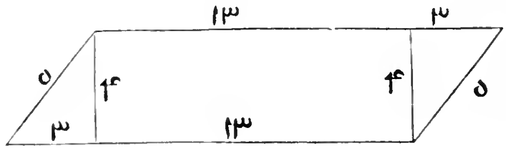
واما المدورات التي فرغنا من صفتها وتكسيرها في صدر الكتاب فمنها مدورة قطرها سبعة اذرع ويحيط بها اثنان وعشرون ذراعا فان تكسيرها ان تضرب نصف القطر وهو ثلثة ونصف في نصف الدور الذي

سوا اذا استوا الضلعان فان اختلفا خالف مسقط الحجر عن نصف القاعدة ولكن قد علمنا ان مسقط حجر هذه المثلثة علي اي اضلاعها جعلته لا يقع الا علي نصفه فذلك خمسة اذرع فمعرفة العمود ان تضرب الخمسة في مثلها وتضرب احد الضلعين في مثله وهو عشر فيكون ماية فتنقص منها مبلغ الخمسة في مثلها وهو خمسة وعشرون فيبقي خمسة وسبعون فخذ جذر ذلك فهو العمود وقد صار ضلعا علي مثلثتين قائمتين فان اردت التكسير فاضرب جذر الخمسة والسبعين في نصف القاعدة وهو خمسة وذلك ان تضرب الخمسة في مثلها حتي تكون جذر خمسة وسبعين في جذر خمسه وعشرين فاضرب خمسة وسبعين في خمسة وعشرين فيكون الفا وثماني ماية وخمسة وسبعين فخذ جذر ذلك وهو تكسيرها وهو ثلثة واربعون وشيء قليل وهذه صورتها ❋



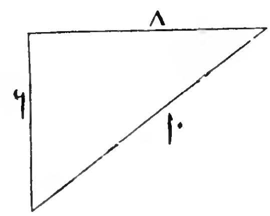
وقد تكون من هذه الحادة الزوايا مختلفة الاضلاع فاعلم ان تكسيرها يعلم من قبل مسقط حجرها و عمودها وهي ان تكون مثلثة من جانب خمسة عشر ذراعا و من جانب اربعة عشر ذراعا ومن جانب ثلثة عشر ذراعا فاذا اردت علم مسقط حجرها فاجعل القاعدة اي الجوانب شئت فجعلناها اربعة عشر وهو مسقط الحجر فمسقط حجرها يقع منها علي شيء مما يلي اي الضلعين شئت فجعلنا الشيء مما يلي الثلثة عشر فضربناه في مثله فصار مالا ونقصناه من ثلثة عشر في مثلها وهو ماية وتسعة وستون فصار ذلك ماية وتسعة وستين الا مالا فعلمنا ان جذرها هو العمود وقد بقي لنا من القاعدة اربعة عشر الا شيئا فضربناه في مثله فصار ماية وستة وتسعين ومالا الا ثمانية وعشرين شيئا فنقصناه من الخمسة عشر في مثلها فبقي تسعة وعشرون درهما وثمانية وعشرون شيئا الا مالا وجذرها هو العمود فلما صار جذرها هذا هو العمود وجذر

واما سادر المربعات فانما تعرف تكسيرها من قبل القطر فيخرج الي حساب المثلثات فاعلم ذلك وهذه صورة المشبهة بالمعينة ❋



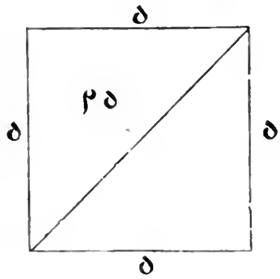
واما المثلثات فهي ثلثة اجناس القائمة والحادة والمنفرجة ❋ واما القائمة فهي مثلثة اذا ضربت ضلعيها الاقصرين كل واحد منهما في نفسه ثم جمعتهما [كان مجموع ذلك مثل الذي يكون من ضرب الضلع الاطول في نفسه ❋ واما الحادة فهي مثلثه اذا ضربت ضلعيها الاقصرين كل واحد منهما في نفسه ثم جمعتهما] كانا اكثر من الضلع الاطول مضروبا في نفسه ❋ واما المنفرجة فهي كل مثلثه اذا ضربت ضلعيها الاقصرين كل واحد منهما في نفسه وجمعتهما كانا اقل من الضلع الاطول مضروبا في نفسه ❋

فاما القائمة الزوايا فهي التي لها عمودان وقطر وهي نصف مربعة فمعرفة تكسيرها ان تضرب احد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة في نصف الاخر فما بلغ ذلك فهو تكسيرها ❋ ومثل ذلك مثلثة قائمة الزاوية ضلع منها ستة اذرع وضلع منها ثمانية اذرع والقطر عشر فحساب ذلك ان تضرب ستة في اربعة فيكون اربعة وعشرين ذراعا وهو تكسيرها ❋ وان احببت ان تحسبها بالعمود فان عمودها لا يقع الا علي الضلع الاطول لان الضلعين القصيرين عمودان فان اردت ذلك فاضرب عمودها في نصف القاعدة فما كان فهو تكسيرها وهذه صورتها ❋

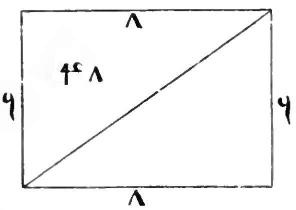


واما الجنس الثاني فالمثلثة المتساوية الاضلاع حادة الزوايا من كل جانب عشرة اذرع فان تكسيرها تعرف من قبل عمودها ومسقط حجرها واعلم ان كل ضلعين متساويين من مثلثة تخرج منهما عمود علي قاعدة فان مسقط حجر العمود يقع علي زاوية قائمة ويقع علي نصف القاعدة

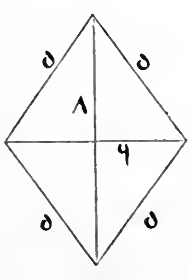
قائمة الزوايا فان تكسيرها ان تضرب الطول في العرض فما بلغ فهو التكسير ❊ ومثال ذلك ارض مربعة من كل جانب خمسة اذرع تكسيرها خمسة وعشرون ذراعا وهذه صورتها ❊



والثانية ارض مربعة طولها ثمانية اذرع ثمانية اذرع والعرضان ستة ستة فتكسيرها ان تضرب ستة في ثمانية فيكون ثمانية واربعين ذراعا وذلك تكسيرها وهذه صورتها ❊

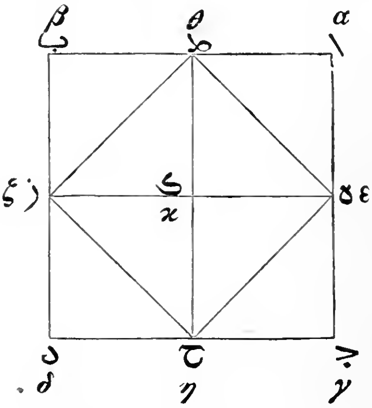


واما المعينة المستوية الاضلاع التي كل جانب منها خمسة اذرع فاحد قطريها ثمانية والاخر ستة اذرع فاعلم ان تكسيرها ان تعرف القطرين او احدهما فان عرفت القطرين جميعا فان الذي يكون من ضرب احدهما في نصف الاخر هو تكسيرها وذلك ان تضرب ثمانية في ثلثة او اربعة في ستة فيكون اربعة وعشرين ذراعا وهو تكسيرها فان عرفت قطرا واحدا فقد علمت انهما مثلثان كل واحد منهما ضلعاها خمسة اذرع والضلع الثالث هو قطرهما فاحسبهما علي حساب المثلثات وهذه صورتها ❊



واما المشبهة بالمعينة فعلي مثل المعينة ❊

الضلع الاطول في نفسه ❊ وبرهان ذلك انا نجعل سطحا مربعا متساوي الاضلاع والزوايا اب جد ثم نقطع ضلع اج بنصفين علي نقطة ه ثم نخرجه الي ز ثم نقطع ضلع اب بنصفين علي نقطة ط و نخرجه الي نقطة ح فصار سطح اب جد اربعة سطوح متساوية الاضلاع والزوايا والمساحة وهي سطح اك وسطح جك وسطح بك وسطح دك ثم نخرج من نقطة ه الي نقطة ط خطا يقطع سطح اك بنصفين فحدث من السطح مثلثين وهما مثلثا اطه وهكط فقد تبين لنا ان اط نصف اب و اه مثله وهو نصف اج و توترهما خط طه علي زاوية قائمة وكذلك نخرج خطوطا من ط الي ز ومن ز الي ح ومن ح الي ه فحدث من جميع المربعة ثماني مثلثات متساويات وقد تبين لنا ان اربع منها نصف السطح الاعظم الذي هو اد وقد تبين لنا ان خط اط في نفسه تكسير مثلثين و اه تكسير مثلثين بمثلهما فيكون جميع ذلك تكسير اربع مثلثات وضلع هط في نفسه ايضا تكسير اربع مثلثات اخر وقد تبين لنا ان الذي يكون من ضرب اط في نفسه و اه في نفسه مجموعين مثل الذي يكون من ضرب طه في نفسه وذلك ما اردنا ان نبين وهذه صورته ❊



اعلم ان المربعات خمسة اجناس فمنها مستوية الاضلاع قائمة الزوايا والثانية قائمة الزوايا مختلفة الاضلاع طولها اكثر من عرضها والثالثة تسمي المعينة وهي التي استوت اضلاعها واختلفت زواياه والرابعة المشبهة بالمعينة وهي التي طولها وعرضها مختلفان وزواياها مختلفة غير ان الطولين مستويان والعرضين مستويان ايضا والخامسة المختلفة الاضلاع والزوايا ❊

فما كان من المربعات مستوية الاضلاع قائمة الزوايا او مختلفة الاضلاع

بعض ❊ والدور اذا قسمته علي ثلثة وسبع يخرج القطر ❊ وكل مدورة فان نصف القطر في نصف الدور هو التكسير لان كل ذات اضلاع وزوايا متساوية من المثلثات والمربعات والمخمسات وما فوق ذلك فان ضربك نصف ما يحيط بها في نصف قطر اوسع دائرة يقع فيها تكسيرها ❊ وكل مدورة فان قطرها مضروبا في نفسه منقوصا منه سبعه ونصف سبعه هو تكسيرها وهو موافق للباب الاول ❊

وكل قطعة من مدورة مشبهة بقوس فلا بد ان يكون مثل نصف مدورة او اقل من نصف مدورة او اكثر من نصف مدورة و الدليل علي ذلك ان سهم القوس اذا كان مثل نصف الوتر فهي نصف مدورة سوا واذا كان اقل من نصف الوتر فهي اقل من نصف مدورة واذا كان السهم اكثر من نصف الوتر فهي اكثر من نصف مدورة ❊ واذا اردت ان تعرف من اي دائرة هي فاضرب نصف الوتر في مثله واقسمه علي السهم وزد ما خرج علي السهم فما بلغ فهو قطر المدورة التي تلك القوس منها ❊ فان اردت ان تعرف تكسير القوس فاضرب نصف قطر المدورة في نصف القوس واحفظ ما خرج ثم انقص سهم القوس من نصف قطر المدورة ان كانت القوس اقل من نصف مدورة وان كانت اكثر من نصف مدورة فانقص نصف قطر المدورة من سهم القوس ثم اضرب ما بقي في نصف وتر القوس وانقصه مما حفظت ان كانت القوس اقل من نصف مدورة او زده عليه ان كانت القوس اكثر من نصف مدورة فما بلغ بعد الزيادة او النقصان فهو تكسير القوس ❊

وكل مجسم مربع فان ضربك الطول في العرض ثم في العمق هو التكسير ❊ فان كان علي غير تربيع وكان مدورا او مثلثا او غير ذلك الا ان عمقه علي الاستواء والموازاة فان مساحة ذلك ان تمسح سطحه فتعرف تكسيره فما كان ضربته في العمق وهو التكسير ❊

واما المخروط من المثلث والمربع والمدور فان الذي يكون من ضرب ثلث مساحة اسفله في عموده هو تكسيره ❊

واعلم ان كل مثلث قائم الزاوية فان الذي يكون من ضرب الضلعين الاقصرين كل واحد منهما في نفسه مجموعين مثل الذي يكون من ضرب

باب المساحة ٭

اعلم ان معني واحد في واحد انما هي مساحة ومعناه ذراع في ذراع ٭ وكل سطح متساوي الاضلاع والزوايا يكون من كل جانب واحد فان السطح كله واحد ٭ فان كان من كل جانب اثنان وهو متساوي الاضلاع والزوايا فالسطح كله اربعة امثال السطح الذي هو ذراع في ذراع ٭ وكذلك ثلثة في ثلثة وما زاد علي ذلك او نقص وكذلك نصف في نصف بربع وغير ذلك من الكسور فعلي هذا ٭ وكل سطح مربع يكون من كل جانب نصف ذراع فهو مثل ربع السطح الذي هو من كل جانب ذراع وكذلك ثلث في ثلث وربع في ربع وخمس في خمس وثلثان في نصف او اقل من ذلك او اكثر فعلي حسابه ٭ وكل سطح مربع متساوي الاضلاع فان احد اضلاعه في واحد جذره وفي اثنين جذراه صغر ذلك السطح او كثر ٭

وكل مثلث متساوي الاضلاع فان ضربك العمود ونصف القاعدة التي يقع عليها العمود هو تكسير ذلك المثلث ٭

وكل معيّنة متساوية الاضلاع فان ضربك احد القطرين في نصف الاخر هو تكسيرها ٭

وكل مدورة فان ضربك القطر في ثلثة وسبع هو الدور الذي يحيط بها وهو اصطلاح بين الناس من غير اضطرار ٭ ولاهل الهندسة فيه قولان اخران احدهما ان تضرب القطر في مثله ثم في عشرة ثم تاخذ جذر ما اجتمع فما كان فهو الدور ٭ فالقول الثاني لاهل النجوم منهم وهو ان تضرب القطر في اثنين وستين الفا وثماني ماية واثنين وثلثين ثم تقسم ذلك علي عشرين الفا فما خرج فهو الدور وكل ذلك قريب بعضه من

Zur Vergleichung über die besprochene Analogie zwischen unsrer Schrift und der ersten arabischen **Geometrie** von **Mohamed ben Musa Alkharezmy** mag hier der arabische Text des letztern nach der Ausgabe von Rosen, London 1831, von Seite ٥٠ = 50 bis Seite ٦٤ = 64 folgen.

הרוצה למוד את הישרה מצרף את היתר כולו בתוך עצמו ומשליך (f) ו'
ממנו שביע [וחצי שביע] והנותר משליך חציו והנמצא הוא המשיחה.

והאחרות צריך אתה לידע כמה שעור עגלתה, כיצד מצרף את חצי (g) ז'
היתר בתוך עצמו והעולה מחלקו על החץ והנמצא מן החלוק מוסיפו על
החץ והעולה הוא [חצי] חוט העגולה, ואוחז חצי־החוט הזה ומצרף אותו
בתוך חצי "הקשת" והעולה מעמידו על צד ורואה אם היתה הקשותה
חסרה משליך חִצָּה מֵחֲצִי חוט העגולה ומצרף הנותר בתוך חצי היתר
ופוחת אותו מן הצד והנשאר "היא" המשיחה. ואם היתה הקשותה יתרה
משליך [חצי חוט] העגולה מֵחִצָּהּ עצמה ומצרף את הנשאר בתוך חצי
היתר ומוסיף אותו על הצד והעולה היא המשיחה. כמדת הראשון כן
מדת האחרון.

נשלם הפרק ובהשלמתו תמה משנת המדות,
בעזר יודע חידות.

(f) את הישרה so! das dazwischen befindliche Wort היתר ist überflüssig. — כולו בתוך עצמו anst. בתוך עצמו כולו in der Ausgabe. — [וחצי שביע] fehlt in Hs. und Ausgabe. — מוסיפו על anst. מוסיפו מן. — [חצי] fehlt in Hs. und Ausgabe. „חֲצִי־הַחוּט הזה“: diesen erwähnten *Radius*; und nicht etwa „die Hälfte des erwähnten Durchmessers“, da oben vom Radius und nicht vom Durchmesser die Rede war. — „הקשת“ anstatt החץ. — חִצָּהּ anstatt חציה. — „היא“ anst. מן; nach המשיחה finden sich in Hs. und Ausg. zwei überflüssige Worte ר״ח ומשליך. — [חצי חוט] fehlt in Hs. und Ausg. — מֵחִצָּהּ so!

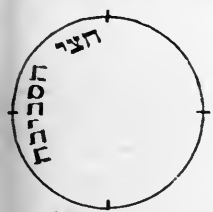
Schluss: משנת nach der Hs. anstatt מסכת' in der Ausgabe.

So der hebr. Text der Mischnath Hammiddoth wie ich ihn mir in der Uebersetzung gedacht habe. Die Abweichungen, die ich mir von Hs. und Ausg. erlaubt habe sind in den Randbemerkungen angegeben.

ועמק. במדה. כיצד מודד מצרף את החוטין הא׳ בתוך חצי „האחד׳
והעולה היא המשיחה והכפל אותה שהן קירותיה.

(b) ב׳ התלולה איזו היא, זו שעומדת בחצי התלויה, כתל או
כקובה ובלבד שתהא שוה. והצריך למוד מצרף אחד מן החוטין
מן הקצה אל הקצה בתוך חצי האחד והעולה היא המשיחה.

(c) ג׳ השפלה איזו היא, זו הנתונה על הארץ כשדה עגולה או
צורה עגולה. הצריך למוד מצרף החוט בתוך עצמו ומשליך
ממנו שביע וחצי שביע והנשאר הוא המשיחה הוא גגה. ואם
אתה חפץ לידע את הסיבוב הלילה חלילה הֱנָא מצרף את
החוט בתוך ג׳ ושביע ועולה כ״ב. ואם אתה חפץ לשער את
המשיחה אחוז חצי הסביבה שהיא י״א וצרף אותה בחצי החוט שהוא
ג׳ וחצי ועולין ל״ח ומחצה, כן בראשונה כן באחרונה. הרי הוא אומר ויעש
את הים מוצק עשר באמה משפתו אל שפתו עגל סביב
ושלשים אמה סביבתו שנ׳ וקו שלשים באמה יסב אותו
סביב, מה תלמוד וקו שלשים באמה וגומ׳ לפי שאמרו
בני ארץ בעגולה שהסביבה מחזקת שלש פעמים ושביע
בחוט יצא מהם שביע אחד בעביו של ים לשתי שפתות
ונותר שם ל׳ אמה יסוב אותו סביב ובשעור הזה שוים אחד
הימים והמקואות והבורות בארך וברחב ועמק הא למדת מדת העגולה.



(e) ה׳ ג׳ דברים נאמרו בקשותה ואלו הן, הישרה, החסרה והיתרה איזו היא
ישרה כל שהיא עומדת בחצי העגולה לא חסר ולא יתר, החסרה כל שהיא
פחותה מחצי העגולה, והיתרה כל שהיא עודפת על חצי העגולה, זה הכלל
כל שֶׁחִצָּהּ עומד פחות מֵחֱצִי היתר [בידוע] שהיא חסרה, וכל שֶׁחִצָּהּ יותר
מֵחֱצִי היתר בידוע שהיא יתרה.

(a) האחד anstatt עצמו.

(b) כקובה nach der Hs. anst. כמו נקובה in Ausg. — Die vier Worte או בתוך חצי עצמו, die sich nach dem Worte האחד in Hs. und Ausg. vorfinden, sind offenbar einem Verbesserungsversuche, von einem, der das Original nicht verstanden hat, zuzuschreiben. S. Uebers.

(c) הֱנָא so! — ועולין nach der Hs. anstatt ועולה in d. Ausg. — ל״ח anst. ל״ח — Zu der Figur V (c). קרן wahrscheinlich *Pol.* In der Hs. ist diese Figur viereckig anst. kreisförmig zu sein; die Figuren tragen überhaupt den Charakter einer flüchtigen Nachzeichnung an sich. An der Figur zu (a) habe ich ein Wort תלויה, welches dort keinen Sinn giebt, weggelassen; es soll vielleicht חצי התלויה heissen.

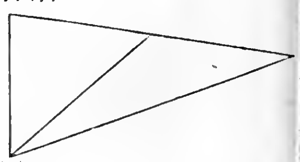
(d) סביבתו so!! wollte man die Lesart קומתו, wie in Hs. und Ausgabe auf Grund der betr. Bibelstelle beibehalten, so müsste man וחמש באמה anstatt ושלשים אמה setzen, und dann noch das folgende שנ׳ streichen. — בני ארץ Prophanen; nach einer Seite verwandt mit עמי הארץ. — שוים אחד anstatt אחד שוים in Hs. und Ausg.

(e) שֶׁחִצָּהּ anst. שהצייה in Hs. und Ausg. — [בידוע] nach St.

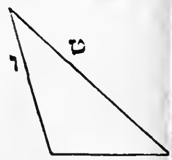
מצרף אחד מהם בפני עצמו שהם ק' ומשליך את הרבע שהוא כ"ה ונשאר ע"ה והצריך למוד מצרף ע"ה בתוך כ"ה שהם ג' רבעים ברבע (כ"ה) אחד והם עולים אלף ות"ת וע"ה ותופש את העיקר והוא המשיחה והוא מ"ג ושירים. מכאן אתה מוצא שהעמוד של חצי הקבע (ס"א) נופל לעולם.

הרי שהוצאת השוה וכן הדומה לו, אבל חשבון חלופים אין לך מהם (h) ה'
בחשבון המשיחה, והמדקדק בהם ישכיל בין בצלעים בין בעמוד עם הקבע.

כיצד משער, כגון משלשת חלופים שהיא חדה בזויות ט"ו מצד ראשון (i) ט'
י"ד מצד שני י"ג מצד שלישי, והצריך למוד מחזיק שלשתן בבת אחת עולים מ"ב, ולוקח את המחצה ורואהו כמה הוא יתר על צד ראשון ומצרף המחצה על היתר שהוא כ"א בתוך ו' והם נעשים קכ"ו ומעמידו לצד, וחוזר שנית ולוקח את המחצה ורואה כמה הוא יתר על צד שני ומצרף את היתר שהוא ז' בתוך קכ"ו הראשונים והם עולים ת"ת ופ"ב ומעמידו לצד. וחוזר שלישית ולוקח המחצה ורואה כמה הוא יתר על צד שלישי ומצרף את היתר שהוא ח' בתוך ת"ת ופ"ב האחרים והם עולים ז' אלפים ונ"ו ועקרם פ"ד והם הם שיעור המשיחה.



הפתוחה כיצד, צלעותיה הקצרים כל אחד מהם "מצורף„ בפני עצמו, (k) י'
ומוסיפין זה על זה והצלע הג' שהוא הקבע מצורף בפני עצמו, הצירוף האחרון יתר מן הראשון כמו ה' מצד [זה] ו' מצד זה ט' מצד זה נמצאת א' מן הזויות פתוחה ורחבה נמצא הראשון ס"א והאחרון פ"א. והצריך למוד מחשבה ברור בעמוד עם הקבע. ואם חפץ הוא בחשבון הצלעים המחצה מחשבה מדה אחת לעולם.



פרק ה'. V.

שלש מדות בעגולה, ואלו הן התלויה, התלולה, והשפלה. אי זו היא (a) א'
התלויה זו העומדת עקר העגולה מכל צד כדור או שהיתה המשיחה אבטיח שהיא עגולה לסביבותיה ובלבד [שתהא] עגולתה בשוה ארך ורחב

---

welchem die drei Punkte wahrscheinlich als Tilgungszeichen anzusehen sind. — [זה] nach St. — בתפוה s. Uebers. — (ס"א) s. Uebers.

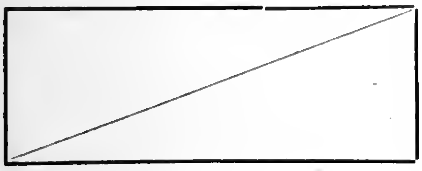
(h) Zwischen לך und מהם das Wort קשת in Hs. und Ausg. S. Uebers. — ישכיל בין בצלעים wird sich Rath schaffen, entweder mittels der Seiten, oder et anst. ישפיל ב' צלעים in Hs. und Ausg.

(i) Das Wort הם vor הראשונים in der Ausg. findet sich im Manuscripte nich dagegen steht an dessen Stelle ein Zickzack zur Ergänzung der Zeile.

(k) „מצורף" Hs. anstatt מצרף in der Ausg. — [זה] St. — ברור anstatt ירורה welches wahrscheinlich durch die irrthümliche Auffassung von מַחְשָׁבָה ansta מְחַשְׁבָה entstanden ist.

V. (a) העומדת anstat היא עומדת. — העגולה oder vielleicht ועגולה ansta ד' עגולה. — עגולה anstatt העגולה. — [שתהא] fehlt in Hs. und Ausgabe.

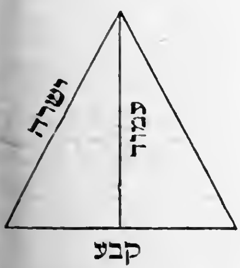
ב׳ (b) והזוית שהיא עומדת בין הקצורים היא הנצבה והיא חצייה של מרובעת
שהיא משונה בצלעים וישרה בזויות. המבקש לחשבה בעמוד יחשב כדרכו



והוא ששני צלעותיה הקצורים הם שני עמודיה והם דומים סמוכים ישרים.

ג׳ (c) והעמוד המשך מהם אל צד הארוך נופל והוא מקבע. והרוצה למוד
מצרף העמוד בתוך החצי הקבע והעולה מן החשבון היא המשיחה.

ד׳ (d) החדה כיצד, שני צלעותיה קצורים או השוים כל אחד ואחד מצורף



בפני עצמו קבועים זה עם זה והצלע השני שהוא
הקבוע מצורף בפני עצמו הצרוף הראשון יותר מן
האחרון. ויש מן החדה שצלעותיה ישרות והרוצה
למוד מחשב אותה כנגד הקבע נמצא הזויות חדות
כמדת הראשון כן מדת האחרון.

ה׳ (e) הרוצה לדעת במדת העמוד בצלעות השוות מצרף
את האחד מן הצלעות בתוך עצמו [וחצי הצלע השני
בתוך עצמו] ומשליך המיעוט מן המרובה והנשאר הוא היסוד והנמצא
הוא העמוד.

ו׳ (f) כיצד מונים, עשרה על עשרה ק׳ וחצי הצלע השני שהוא ה׳ מצורף
בפני עצמו כ״ה ומשליך הקטן מן הרב נשאר שם ע״ה והוא היסוד ועקרו
[ח׳] ושירים. והצריך למוד מצרף העקר בתוך החצי הצלע התחתון והעולה
מן החשבון [היא] המשיחה שהיא מ״ג ושירים.

ז׳ (g) שבעה פנים אחרות במשולשות השוה בצלעותיה כל צלע וצלע. בפני
עצמו את האמור של [זה] בזה ואת האמור של זה בזה והמבין בתפוח [?]

(b) הקצורים הם שני עמודי׳ anstatt הקצורים כ̈ן הם שני צלעות̈יה עמודיה in der Handschrift, wo die Doppelpunkte über כ̈ן und צלעות̈יה sicherlich Tilgungszeichen sind. In der Ausg. sind die Punkte weggelassen, und dafür nach כן ein Fragezeichen gesetzt.

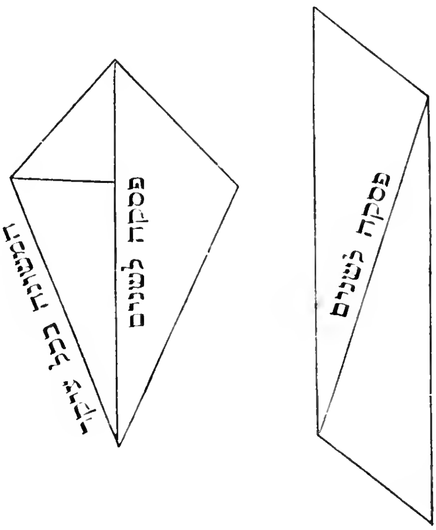
(d) יותר anst. ויותר. — Nach מדת האחרון finden sich im Text noch die Worte: „מן החדים צלעי“, die von St. mit (sic) begleitet wurden; vielleicht gehören sie auch den Figuren an.

(e) Die Worte von עצמו bis עצמו fehlen in Hs und Ausg.

(f) [ח׳] nach St. anst. ה׳ in d. Hs. — [היא] nach St. anst. מן einzusetzen; ich habe מן gelassen und habe analog dem Obigen (IV, (c)) noch החשבון hinzugefügt.

(g) שבעה s. Uebers. nach St. könnte es vielleicht ursprünglich ז׳ פנים אחרות geheissen haben, wobei ז׳ den Paragraphen bezeichnen sollte, und ist aus Missverständniss שבעה anstatt ז׳ geschrieben worden und dann noch ein ז׳ zur Bezeichnung des § obendrein (?). — Nach וצלע findet sich noch ein Wort ראִיה, über

המשונה בצלעות ובזויות ושני ארכן לבד ושני רחבן לבד והזויות (e) ה'
עקומות כיצד מחשב אותה פוסקה שנים מזוית לזוית ומעמיד בשנים ומחשב



כל אחד בפני עצמה כמדת המשולשת וכן היא המשיחה. וכן אתה מודד חשבון המשונה בכל עקר וכל המרבעות המשונות עשה אותם ממשלשותיהן כזה.

פרק ד'. IV.

שלש מדות במשלשות ואלו הן הנצבה, החדה, הפתוחה. איזו היא (a) א'
צבה שני צדיה הקצורים מצורפים כל אחד בפני עצמו והוא שוה לראשון
גון ששה מצד זה ושמנה מצד זה והעולה מאלו בפני עצמן מאה ומזה
פני עצמו מאה. והצריך למוד [מצרף אחד] מן הקצורים בתוך חצי חברו
או ח' בתוך ג' או ו' בתוך ד' והעולה היא המשיחה.

(e) מחשב אותה nach Steinschneider, anstatt ממחשבה אמה im Cod. — Nach וכל finden sich zwei Worte פסקה לשנים, welche offenbar zur Figur gehören, ebenso die Worte המשונה בכל עיקר und פסקה לשנים am Ende dieses Kapitels; ich habe diese Worte auch in die betreffenden Figuren, wo sie hingehören, hineingeschrieben. Hier der Text in der Ausg.: המרבעות המשונות. פסקה לשנים [?] כל עשה [?] אותם משלישותיה המשונ' בכל עיקר כזה פסקה לשנים.

Was die Figuren überhaupt betrifft, so sind sie zwar als Freihandzeichnungen nicht ganz genau, indess konnte ich die Meinung des Herrn St. nicht theilen: „sie könnten etwa weggelassen werden, weil sie das Verständniss nicht förderten“(?). Ich habe sie hier wiedergegeben; nur genauer und in etwas grösserem Massstabe. Die Berechtigung dazu verschafft der augenscheinliche Sinn einerseits und die Vergleichung mit M. b. M. andererseits. — ממשלשותיהן anstatt משלישותיה.

IV. (a) [מצרף אחד] nach St.

אמות עליונות והם עולים י״ג אמה ושליש, ומשליך אותם מן ק״ו ושלישים נשתיירו שם צ״ג ושליש והוא באת [?] העמוד גיו הקטוע, ואם הי׳ עגול השלך ממנו השביע וחצי השביע והנשאר בו הוא [המשיחה].

פרק ג׳. III.

(a) א׳ המשה פנים יש במרובעות ואלו הן יש ישרה בצלעותיה ובזויותיה. ב׳. ויש מי שהיא משונ׳ בצלעותיה וישרה בזויותיה. ג׳. ויש שהיא ישרה בצלעותיה ומשונ׳ בזויותיה. ד׳. ויש שהיא ישרה משונ׳ בצלעותיה ובזויותיה ושני ארכן שוין לבד ושני רחבן לבד. ה׳. ויש מי שהיא משונה בצלעותיה ובזויותיה כל עיקר.

(b) ב׳ השוה בצלעות ובזויות איזו היא כגון עשרה מן [כל] צד מצרף ארך על הרחב והעולה היא המשיחה והם ק׳ והצלע האחד הוא עקדה האחד ושני צלעותיה חם שני עקריה וכן ג׳ וכן ד׳.

(c) ג׳ והמשונה בצלעותיה וישרה בזויותיה, כגון ח׳ בשני צלע וששה בשני צלע, מצרף ארך על רחב שהן מ״ח והיא המשיחה, ישרה בצלע וישרה בקו.

(d) ד׳ הישרה בצלעותיה ומשונה בזויותיה איזו היא, כגון ה׳ מכל צד ושני זויות צריב וב׳ זויות רחבים וב׳ חוטין מפסיקין זה את זה באמצע הא׳ משמנה והב׳ משפה. והרוצה למוד מצרף הא׳ מן החוטין בתוך חצי חברו והעולה משניהם היא המשיחה כ״ד אמה כזה.

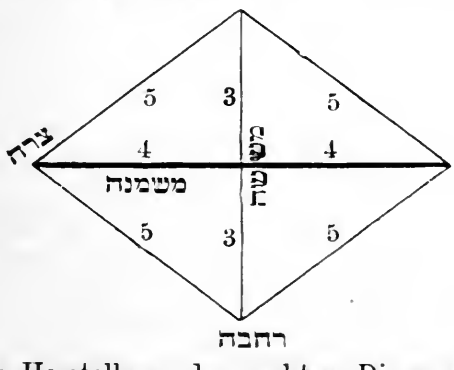
Schreiber selbst verbesserter, und später aus Irrthum stehen gelassener Satz: ושליש, והשלך מן כ״ו ושלישים נשתיירו שם ע״ט ושליש והוא מ׳צ׳ ומשליך אותם מן ק״ו ושלישים נשתיירו שם ש״ט ושליש והוא וכו׳. — צ״ג anstatt ש״ט. — באת St. will מדת einsetzen; dafür würde auch der Umstand sprechen, dass der Schreiber das erste mal nach והוא ein מ׳ angefangen hatte; das צ gehört vielleicht dem צ״ג an anstatt dessen ש״ט irrthümlich geschrieben ist. S. Uebers. — [המשיחה] nach St.

III. (b) [כל] nach St. — עקריה anst. עקרה in d. Ausg.

(c) בקו wie in der Hs. anstatt [בזוי׳ ?] in der Ausg.

(d) כזה zeigt auf die nebenstehende Figur, 

welche offenbar von dem Schreiber missverstanden wurde; die Figur ist so gemeint:



Man beachte, dass zur Herstellung des rechten Diagonalwinkels hier wiederum die sogenannten Pythagoräischen Zahlen 3, 4, 5 gewählt sind. Dieselbe Figur findet sich bei M. b. M.

הרוצה למוד את הגג המרובע אפי׳ שהוא שוה אפי׳ הוא מחלק שהוא (e) ה׳
ארך ורחב הגג במניין שש פנים, שש כנפים לאחד, מצרף ארך בתוך רחב
בתוך העמק והעולה משלשתן היא משיחת הגג והוא הגוף.

ואם היה עגול או משולש או לכל מיני צדדין מלבד שיהיה עמקו ישר (f) ו׳
ונאה ממה מודד הגג במדד שלו במדה שאמרו ותדע המשיחה והיודע
אותה מצרפו בתוך העומק הוא משיחת הגוף.

והמשוך ראשו חד וסופו ממוצע ואפי׳ מרובע או שיהי׳ עגול או משולש, (g) ז׳
אתה מודד משיחת הגוף והשלך שני שלישי המשיחה ואחוז השליש [ה]אחר
ואתה מצרפו בתוך הקומה והעולה הוא משיחת הגוף מראש ועד סוף.

הצריך למוד התל או דבר מקובה ובלבד שיהיו דופנותיו שוות מכל (h) ח׳
צד כחצי כדור או כדומה לו, מצרף א׳ מן החוטין מן הקצה אל הקצה
בתוך חצי האחד והעולה משניהם היא המשיחה.

עמוד. ובעמוד אם היה משוך לראשו וראשו חד או משוך לחציו הקובה (i) ט׳
או לכל שהוא מכין בסופו ובקטועו שהוא הקטוע הראש מוחלק זה מזה
בשיעור הסוף ומודדו (כמו) בחשבון האחרון ומשליך הקטן מן החבל והנשאר
הוא משיחת העמוד.

כיצד משער כגון עמוד מרבע וסופו ד׳ אמות בתוך ד׳ אמות חסר ועולה (k) י׳
חסר ועולה וראשו שתי אמות על שתי אמות רבוע, וצריך אתה לידע כמה
משיחתו וכמה קומתו, וכבר נאמ׳ באחרון אלא שזו קטוע ועדין אי אתה
ודע כמה הוא העמוד עד שיכלה אחד מלמעלה.

במניין אתה משער, כמדת שתיים מארבע׳ כן ארך העמוד שהוא חצי (l) יא׳
המעלה, נמצא כל העמוד עד שיכלה הראש עשרים אמה ועד הקטופה י׳
מות הא למדת שמדת שנים מן הארבעה כמדת הי׳ מן העשרים.

הצריך למוד אוחז שליש ראשו חד צורף בסוף והם ה׳ ושליש ומצרפו (m) יב׳
תוך כ׳ אז הם עולים ק״ו אמות ושני שלישי אמה ומעמידן לצד אחד, וחוזר
אוחז שליש צרוף הקטופה ב׳ על ב׳ והוא אמה ושליש ומצרפו בתוך עשר

(e) שהוא ארך ורחב, so! St. ergänzt auch hier ועומק; s. Uebers. — כנפים hier in dem Sinne von כנפות, Ecken, Kanten gedeutet!

(f) במדד vielleicht eine eigene Form für Massstab. — והיודע anst. המודע s. M. b. M. — העומק, anstatt העמק.

(g) [ה]אחר, St. — מראש nach St. anst. וראש.

(h) האחד; in d. Ausg. האחר.

(i) הקובה; St. emendirt המקובה. — מוחלק Hs. anst. מחלק in der Ausg welches Veranlassung zu einer andern Auffassung gegeben hat. — (כמו) in d Ausg. weggelassen; sieht in der Hs. auch aus wie ein Zickzack zur Ergänzung d Zeile. — החבל von St. mit Fragezeichen begleitet; vielleicht: Messschnur.

(k) אחד eine der im gegenwärtigen Falle zu betrachtenden zwei Pyramide einfacher jedoch die Emendation חד von St.

(m) בסוף Basis, die in unsrem Falle 16 beträgt; die Correctur בט״ז ist al unnöthig. — ושליש, ומשליך, so!! In der Hs., wie in der Ausg. findet sich zwisch diesen beiden Worten noch ein ganzer, falsch geschrieben gewesener, dann vo

ז' (g) והפחותין מן הא' כך אתה מחלקן, אמה אחת לשני חוטין זה מפסיק את זה באמצע מצלע ימין לצלע שמאל וכן מרום לתחת, נמצא הגג חלוק בד' פסקאות ואתה מוצא חצי אמה על חצי אמה ומשיחה עצמה חלק מאמה שהוא רבע מכל הגג, וכן שליש על שליש וחומש בתוך חומש בשוים ובחלופים. מכאן ואילך צא וחשוב בשבורים במדה הזאת ולמטה.

ח' (h) כבר אמרו מחצה על מחצה הוא מרובע וכן שליש על שליש הוא מתשע, בהן ובדומין להן. אלא בשוין ובחלופים מנים להם אב אהוא[?] כך אתה מונה עשרה על עשרה. הרי הן עולין ק' וחצי העשר הוא ה'. ה' פעמים ה' הם כ"ה והוא רבע ק'. ומעמד הי' בא' ומעמד הק' בי' ואלף בק'. מכאן ואילך צא וחשוב בשבורים כמדת האחדים אבל באחדים הוא מוסיף ובפחותים הוא גורע.

ט' (i) זה הכלל מחצה על מחצה, חצי המחצה. ושליש על שליש שליש השליש. וכן מחצה על השליש חצי השליש. וכן רביע על השליש רביע השליש. בהן ובדומין להן בשוים ובחלופים.

פרק שני. II.

א' (a) הרוצה למוד השדות המרבעות בשוים ובחלופים מצרף הארך על הרחב והעולה משניהם הוא המשיחה.

ב' (b) ובמשלשת בין בשוים בין בחלופים מצרף העומד בחצי הקבע והעולה משניהם היא המשיחה, והרבה מבואותה בה.

ג' (c) העגולה כיצד מצרף החוט בתוך עצמו ומשליך ממנו שביע וחצי שביע והיתר היא המשיחה. כמו חוט שהוא משוך לז' וצרופו מ"ט ושביע וחצי שביע הוא [י' וחצי] נמצאת המשיחה ל"ח ומחצה.

ד' (d) הקשותה כיצד נותן החץ על היתר שניהם בבת אחת ומצרף אותה בתוך חצי החץ ומעמידן לצד, וחוזר ולוקח חצי היתר וצורפו בתוך עצמו ומחלק על י"ד והעולה מוסיפו על העומד והעולה היא המשיחה. ויש בה פנים אחרים.

(g) מחלקן so! — זה מפסיק nach St. anst. והמספיק im Cod. ebenso שמאל anstatt ימין. — מאמה so; Ausgabe אמה [?]מ'; auch מכל הגג anstatt מכל צד Manuscr. u. Ausg.

(h) lies מְתֻשָּׁע; von אלא bis אבאהוא s. Uebersetzung.

(i) שליש השליש nach St. anst. חצי השליש; s. Uebers.

II. (a) השדות nach Manuscr. anstatt המדות Ausg. — הוא המשיחה so! das zwischen diesen beiden Worten eingeschlichene Wort הרחב ist sicherlich eine irrthümliche Wiederholung von oben.

(b) העומד nach der Handschr. anst. העמוד in der Ausg. — מבואותה Hs. Ausg. מבואתה.

(c) שביע; im Mscr. wie in d. Ausg. heisst es bald so und bald שביעי; ich habe überall das erstere in Analogie mit שליש gesetzt. — והיתר; St. corrigirt והנותר. — [י' וחצי] von St. mit Recht ergänzt.

פרק א׳ .I

בארבעה דרכים המדידה נקבצת ואלו הן המרבעת, והמשלשת, והעגלה, (a) א׳
והקשותה, זה הכלל השניה חצי הראשון, והרביעית חצי השלישית, ושאר
האחרות משלבות זו בזו כסינר בברית.

המרבעת בג׳ פנים, בצלע, בחוט, ובגג. אי זו היא הצלע זה המחזיק (b) ב׳
דופנותיו של גג, שנאמר רבוע יהיה המזבח, והחוט זה המפסיק מזוית לזוית
מן הקצה אל הקצה והוא היותר בארכו של גג. והגג עצמו היא המשיחה.

והמשלשת בד׳ פנים, בשני־הַצֵלָע, בקבע, בעמוד, בגג. אלו הן שני צלע (c) ג׳
זה השני משוכים ימין ויכין שנ׳ כי ימין ושמאל תפרוצי. והקבע זה ששני
צלעים קבועים עליו שנ׳ אשר הבית נכון עליהם. והעמוד זה חוט הכולל
היורד מבין שני הצלעים לקבע והוא בזוית למקצעות המשכן. והגג עצמו
היא המשיחה.

העגול בג׳ פנים, בסביבה, בחוט, ובגג. איזו היא סביבה הוא הקו (d) ד׳
המקיף את העגול שנ׳ וקו שלשים באמה יסב אותו סביב. והחוט זה המשוך
משפה אל שפה שנ׳ משפתו אל שפתו. והגג עצמו היא המשיחה.

והקשותה בד׳ פנים, בקשת, וביתר, ובחץ ובגג. איזו היא קשת [זה] החלק (e) ה׳
מן העגול שנ׳ כמראה הקשת אשר יהיה בענן. היתר זה המחזיק בפי
הקשת שנ׳ קשת דרוכה. והחץ הוא המשוך מאמצע הקשת לאמצע היתר שנ׳
כוננו חצם על יתר. והגג עצמו היא המשיחה.

כיצד מודדין את המשיחה במנין אתה מחשב אחד על אחד זהו (f) ו׳
המשיחה והיא אמה על אמה. נמצא הגג השוה בצלעים ובזויותיו הרי
אתה מונה אותם מכל צד. והטבלא העומדת שנים מכל צד והזויות שוים.
המדידה מחזקת ד׳ מונים במדת הא׳ שהיא אמה בתוך אמה, וכשהיא ג׳
מכל צד הרי הוא ט׳ מונים במדת הא׳, וכן ד׳ על ד׳ וה׳ על ה׳. מכאן
ואילך צא וחשוב במדה זאת ולמעלה.

I. (a) האחרות St. ergänzt hier הצורות, man muss aber bedenken, dass dieses Wort überhaupt schon für die obigen bestimmten Figuren wie המרבעת etc. hier zugedacht werden muss. — בברית nach St. anstatt בבריות im Cod.

(b) המפסיק so! die Correctur המהדק, המחזיק halte ich für überflüssig; wiederholt sich ja hier der Ausdruck פְּסָקָה, פוסקה, מפסיק im Sinne des Durchschneidens.

(c) בשני הצלע Manuscript; בשני׳ בצלע Ausg. fehlerhaft.

(d) בזוית unter rechtem Winkel, anst. später gebräuchl. בזוית נצבת; s. Uebers.

(f) והזויות שוים Manuscript; Ausg. שנים unrichtig.

משנת המדות

נמצאה בכ"י במינכען על ידי המגלה צפונות בגנזי בית עקד ספרי כ"י הרב ד"ר שטיינשניידער והובאה בפעם הראשון לדפוס על ידו; ועתה העתקתיה ובארתיה בשפת אשכנז, אחרי אשר הוספתי לנקותה משגיאות רבות על פי הכ"י ועל פי ספר המשיחה למחמד בן מוסה אלחריזמי, המחבר היותר קדמון בחכמת המאטהעמאטיק בספרות הערבית, בהראותי כי מקורו גם מקור משנתנו ממקור אחד נבעו,

הערמאן שפירא יליד רוסיא,

יושב כעת בשבת תחכמוני,
ודורש חכמת המאטהעמאטיק

פה היידעלבערג בארץ באַדען.

בשנת מִשְׁנָה זו אֵין מִדָּה טוֹבָה הֶמֶּנָּה לפ"ק.

ABRAHAM IBN ESRA

(ABRAHAM JUDAEUS, AVENARE).

ZUR GESCHICHTE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN IM XII. JAHRHUNDERT.

VON

MORITZ STEINSCHNEIDER.

Uebersicht.

1. Abraham bar Chijja und Abraham ibn Esra. **2.** Lebensverhältnisse. (Recensionen und Unterschiebungen, Legenden.) **3.** Daten. **4.** Ibn Esra und Jehuda ha-Levi. **5.** Auswanderung. **6.** Reisen. **7.** Hat ibn Esra arabisch geschrieben? (1. Buch der Wesen, 2. Erfahrungen, 3. Ethik, 4. Nativitäten, 5. Finsternisse, 6. *de mundo*, 7. astronom. Tabelle, 8. Logik). **8.** Kenntniss und Anwendung des Arabischen und der arab. Literatur ('Hai ben Mekiz). **9.** Mystik und Kabbala (Buch Jezira, Sefirot, Commentar zum B. Jezira, Mose Tachau, Elasar Worms, Abr. Abulafia, — Geomantisches Loosbuch). **10.** Zahlsymbolik (Gedichte — Nicomachus — Geheimnisse). **11.** A. Excurse in den Commentaren. **12.** 1. zu Exod. 3, 15 (Supercomm. 1) Isak Israeli, 2) Anonymus, 3) Anonymus, 4) Motot, 5) Schemtob ibn Major, 6) Sal. ibn Ja'ïsch, Briefwechsel zwischen Rabbaniten und Karaiten). 2. zu Exod. 23, 21; 3. zu 23, 26; 4. zu 32, 1; 5. zu 33, 21; 6. zu Kohel. 7, 27 (Immanuel b. Jakob). **13.** Stellen: 7. im Buch vom Namen (Comment. von Scharbit ha-Sahab, Sabbatai ben Malkiel, Comtino, Anonymus, del Medigo); 8. Kap. 11. von Jesod Mora über die Gesetze (Comm. von Comtino, Josef Kilti). **14.** B. Monographien: 1. Buch vom Einen (Commentare von Comtino und del Medigo). **15.** 2. Arithmetik (verschieden vom Buch der Zahlwörter), Handschriften, Abfassungszeit. **16.** Eintheilung (Fibonacci, Abr. bar Chijja; 1. Khowarezmi, 2. Kuschjar, 3. al-'Hassar, 4. Joh. Hispalensis; — Sacrobosco, Isak ben Mose, Comtino, Misrachi. — Anonymer Auszug, anonymes Compendium, nicht von Meïr Spira). **17.** Charakter der Arithmetik (Terminologie). **18.** Verbreitung, Autorität (Moscono, Jehuda ben Samuel ibn Abbas, Josef Caspi, del Medigo). **19.** 3. *Liber augmenti et diminutionis* (Job fil. Salomonis „*divisor*" — Regula falsi). **20.** (unecht) 4. Stratagemma (Hans Sachs). 5. Schach. **21.** Astronomische und astrologische Schriften (kurze Aufzählung). — Nachtrag (auf denselben verweist ein *).

§ 1.

Auf die Bedeutung des 12. Jahrhunderts, und insbesondere der durch Juden vermittelten morgenländischen Wissenschaft, habe ich vor 12 Jahren hingewiesen, als ich in der Zeitschrift für Mathematik u. s. w. Bd. XII (1867, S. 1) den älteren „Abraham Judäus" (Abraham bar Chijja oder *Savasorda*) behandelte und einleitend von verschiedenen Anführungen eines Juden Abraham in älteren nichtjüdischen Quellen sprach (vgl. weiter unten). Während „Savasorda's" Geometrie (*Liber Embadorum*) in der Uebersetzung des Plato aus Tivoli fast unbekannt blieb, erfreuten sich die astrologischen Schriften des Abraham (Sohn des Meir) ibn Esra (oder Ezra) einer Berühmtheit neben denen des 400 Jahre ältern Juden Maschallah (*Messahala* etc.) und des fälschlich als „*Ismaelita*" (für Israelita) geltenden Sahl ben Bischr (*Zael Bembiç* etc.). Die Juden selbst kannten Abraham bar Chijja hauptsächlich als Astronomen, und zwar insbesondere in Anwendung der Sternkunde auf Zeitmessung, Chronologie und das Kalenderwesen, ibn Esra vornehmlich als Exegeten, Grammatiker, Theologen, Dichter, allerdings auch als Astrologen, indirect oder direct. In unserer Zeit, wo die sogenannte rabbinische (neuhebräische) Literatur nach allen Richtungen hin sich immer mehr und mehr historischer Behandlung erfreut, ist auch ibn Esra als Mathematiker ins Auge gefasst worden. Sein Name hat sich einen Platz in den vielen encyklopädischen Wörterbüchern erworben, die Geschichte der Mathematik, namentlich der Astronomie, hat ihn frühzeitig als hervorragende Erscheinung berücksichtigt[1]), allerdings mit sehr geringer Kenntniss des Einzelnen und Eigenthümlichen, mit groben Irrthümern, auf

1) In Riccioli's Tabelle (Almagest.) ist Abraham Abenesra unter Rabbi zu suchen. — Ueber Weidler, Bibliogr. astron. p. 5, und Lalande, Bibliogr. p. 5, s. Abr. Jud. S. 36. — Im XVI. Jahrhundert gab es in Constantinopel und Salonichi eine Familie ibn Esra, darunter einen Arzt Abraham; s. Halberstamm in *Kebod ha-Lebanon* (Paris) VI, 285. Die ungenaue Bezeichnung der Quelle bei Coronel in *Kochbe Jizchak* (Wien) XXIV, 29, verleitete mich zu einer irrigen Conjectur (Hebr. Bibliographie VI, 129 und im Verzeichniss der hebr. Handschriften der k. Bibliothek in Berlin S. 32 unter fol. 60b und vorletzte Zeile). Vielleicht sind von diesem Arzte die Erklärungen zu Kidduschin bei Benjacob, *Thesaur. libr. hebr.* Wilna 1880, S. 175 n. 247?

deren Beleuchtung ich von vornherein verzichte, angesichts der schwereren Aufgabe, das Material zu einer gerechten Würdigung zu liefern, und der lockenden Versuchung, auf Gebiete zu gerathen, auf welche die gewöhnlichen Leser dieser Blätter kaum folgen würden, oder auch könnten, ohne dass ich ihnen alle und jede Berührung damit ersparen kann. Hingegen hielt ich es für angemessen, der hebräischen mathematischen Terminologie, für welche noch sehr wenig im Zusammenhange geleistet ist, eine grössere Beachtung zuzuwenden.

Dass die beiden Abraham, ungeachtet gleicher Studien, unter ehrenvoller Erwähnung vielleicht auch Bearbeitung des älteren Seitens des jüngern, nicht in einem persönlichen Verhältniss von Lehrer und Schüler gestanden, ist schon im Artikel Abraham Judäus (S. 11 A. 20) nachgewiesen, die irrige Behauptung aus einem Missverständniss erklärt und beleuchtet. Es wird sich die an Unmöglichkeit grenzende Unwahrscheinlicheiner solchen Annahme ergeben, wenn wir uns erinnern, dass der ältere Abraham um 1136 in Barcellona lebte, gelegentlich nach Südfrankreich kam[2]) und für die Bewohner dieses Landes hebräisch schrieb, während ibn Esra jene Gegend erst als gereifter Mann berührte. Dies führt uns auf die ersten Momente, welche als Grundlage weiterer Darstellung zu erörtern wären.

§ 2.

Wenn auf anderen Gebieten nicht selten die bekannten Lebensverhältnisse eines Schriftstellers einen festen Boden für die Aneinanderreihung, einen Schlüssel für die Würdigung seiner Schriften darbieten: so gehört das in der jüdischen Literatur des Mittelalters zu den höchst seltenen Ausnahmen; vielmehr ist man meistens darauf angewiesen, aus Titeln,

2) Das Wort צרפת (Frankreich), welches bei Geiger (Mose ben Maimon S. 76, vgl. Abr. Jud. S. 7 A. 10) fehlt, und durch andere Conjectur ersetzt wird, fand ich später in der von ihm benutzten Hs. München 10 f. 207b deutlich! Vgl. auch Abr. Jud. S. 42 und S. 6 Anm. 6. Bei Henricus Bates im *lib. de mundo* (s. unten § 21) f. 77a liest man: „*Insuper Abraham princeps, quem Avenare magistrum suum profitetur in quinto redemptionis israel.*" Das ס' הקץ in der Hs. Oppenh. 254 fol. f. 6, an dessen Ende ibn Esra als Verfasser vermuthet wird, ist in der That (wie Dukes, Litbl. der Orient XI, 341 andeutet) der Schluss des *Megillat* etc. von Abraham bar Chijja (Hs. Bodl. 160 f. 113 ff.); ibn Esra zu Daniel 10, 31 nennt es הקצים von „Abraham ha-Nasi". Die polemische Tendenz habe ich richtig errathen. S. mein Polemische und apologetische Literatur, Leipzig 1877, S. 350. Eine Confusion mit dem Nasi ist die Bezeichnung *Abraham Ducis seu Principis*, in der Leipziger astrologischen Hs. bei Feller, p. 327. — Ob der von ibn Esra angeführte „Spanier" (*Sefaradi*) — Abr. Jud. XII, 7 A. 10, S. 15 A. 24; Zeitschrift D. M. Gesellschaft XVIII, 177 — der Nasi sei, werde ich anderswo erörtern.

Nachschriften von zweifelhafter Geltung, einzelnen Stellen, Vor- und Rückverweisungen, die auch nachträglich eingeschoben sein können, u. dgl., die Linien zu einem dürftigen Lebensabriss zusammenzuholen. Bei unserem Autor kommt noch hinzu, dass er heimathslos unter welchselndem Aufenthalt, seine Schriften für verschiedene Personen abfassend — wenn die ausdrücklichen Widmungen nicht bloss als Complimente gelten sollten[3]) — dieselben grossentheils zweimal herausgab, das zweitemal wahrscheinlich oft ohne im Besitz derersten Recension zu sein[4]). Einiges trägt die deutlichen Spuren fremder Hand, wie man frühzeitig bemerkte; man kennt sogar Namen von Hand anlegenden Schülern[5]). Aber ganze Schriften sind offenbar untergeschoben oder irrthümlich beigelegt; es werden Titel citirt, die entweder zu anderweitig bekannten Schriften gemacht, oder aus der Luft gegriffen sind[6]). Die Neigung, das unbekannte Leben bedeutender

---

3) Der um 1216—18 alle drei Welttheile durchziehende berühmte Dichter Al-Charisi (der hebräische 'Hariri) widmete seine Makamen nicht weniger als vier verschiedenen Personen; die vierte hebräische Widmung, an einen Schemarja b. David in Jemen, findet sich in einer Hs., welche Herr Shapira aus Jerusalem kürzlich aus Jemen brachte; dafür ist die Widmungsstelle der arabischen Vorrede gekürzt, welche nächstens im *Bollettino Italiano degli Studj orient.* erscheint. — Von solchen Doppelwidmungen ist bei ibn Esra allerdings nichts bekannt; auch sind die Personen, denen er widmet, nicht als vornehme Mäcene bezeichnet; vgl. weiter unten.

4) Vgl. die Stelle aus *Safa Berura* (f. 15 ed. Fürth 1839) bei Grätz, Geschichte VI, 449.

5) Joseph ben Jakob ממדויל mit abweichender Orthographie und Auslegung (Catal. libr. hebr. in Bibl. Bodl. p. 1477; *Ozar Nechmad*, her. von Ign. Blumenfeld II, 223, III, 152); Grätz, Geschichte der Juden VI, 1861, S. 447 Nr. XI erklärt *Mondeville* (?); in *Hamwasser* her. von J. Kohn 1862, S. 49: „*Monteville* in der Normandie"; bei Berliner, Magazin für die Wissenschaft der Juden I, 108: „*Corbeil*" sicher falsch; daselbst S. 111: „*Morvil* oder *Marvil*" in England; Friedländer *Essays* etc. p. 209: „*Maudeville*". In zwei Hss. des *Jesod More* (unten § 13), nämlich Bodl. bei Uri Nr. 318, Luzzatto 114, jetzt Berlin 244, Oct., ist der Endvers ergänzt: אודה בהשלימו לאל לידידו יוסף בנו יעקב על מתנת ידו, also wäre das Buch für denselben Joseph ben Jakob verfasst. — Ein Anderer, Isak ben Jehuda, beruht theilweise auf sehr verdächtiger Autorität, s. meinen Artikel Mosconi, Magazin für die Wissenschaft des Judenthums, her. von A. Berliner und D. Hoffmann, III, 1876, S. 149 unter Mose ibn Esra, der fälschlich zum Bruder unseres Abraham gemacht und mit ihm nach Palästina (oder Aegypten) geschickt wird; s. weiter unten. Vgl. Magazin III, 49; Grätz, Geschichte VI, 446 identificirt einen jüngeren Homonynus, s. unten § 13, Anm. 132. — Ueber Zusätze vgl. Comtino in *Catal. Codd. hebr. Lugd. Bat.* 1858 p. 207. Vgl. auch unten Anm. 9.

6) Z. B. כחות שנות האדם „Kräfte der Jahre des Menschen", über den astrologischen Einfluss auf die Kräfte des Menschen je nach dem Lebensalter, worin der Verfasser seine eigenen Schicksale (als Beleg?) angeführt und woraus nach

Männer durch Legenden zu ergänzen, hat sich auch unseres fahrenden Autors bemächtigt, um ihn mit einem anderen, nicht minder berühmten Dichter und Theologen durch einen kurzen Roman in Verwandtschaft zu bringen. Nimmt man noch hinzu die knappe, sich gerne in Anspielungen ergehende Ausdrucksweise unseres Autors: so wird man eine annähernde Vorstellung gewinnen von den kritischen Misslichkeiten einer für Nichthebraisten berechneten Darstellung des Mannes und seiner Leistungen. Glücklicherweise kommt es uns, da wir ibn Esra nur als mathematischen Schriftsteller (im weitesten Sinne) vorzuführen beabsichtigen, auf die Genauigkeit einiger Daten (Zeit und Ort) weniger an, und es sollen hier nur die Hauptmomente des äusseren Lebens fixirt werden, so weit sie spruchreif erörtert vorliegen, oder in kurzer Erörterung zu gewinnen sind.

§ 3.

Die Unsicherheit der Daten in älteren Quellen[7]) und die anscheinenden Widersprüche in den Epigraphen und Verweisungen des Autors selbst hat man in neuerer Zeit auszugleichen gesucht. S. L. Rapoport[8]) hat

---

der Vermuthung des höchst verdächtigen Mosconi, ein angeblich im Jahre 1170 (?) in der Bulgarei lebender Supercommentator Abischai seine — wiederum verdächtigen — Daten geschöpft habe. Meine Abweisung dieses Materials (Hebr. Bibliogr. XV, 90) hat Berliner (Magazin III, 48) der Erwähnung werth gehalten. Friedländer (*Ess.* p. 214, Anm. 3) lässt ein Wort des Titels weg und sagt nicht deutlich, dass er im Namen Mosconi's berichte.

7) Aeltere Quellen verzeichnet Wolf, Biblioth. hebr. I, S. 86, jüngere bis ungefähr 1850 mein *Catalogus libr. hebr. in Bibliotheca Bodleiana* (Berlin 1852—60) p. 689, und Addenda, wo nachzutragen eine (von Depping citirte, mir nicht näher bekannte und schwerlich bedeutende) Abhandlung von Boissi in dessen *Dissert. Tom.* II. Ferner erwähne ich, wegen des mit der jüdischen Literatur vertrauten Verfassers, einen Artikel von J. Derenbourg (früher Dernburg) in der *Biographie Universelle*, und die popuälr gehaltene Charakteristik bei A. Geiger, Das Judenthum und seine Geschichte, Bd. II, Breslau 1865, S. 130—137, vgl. S. 183. Der Lebensabriss bei M. Friedländer (*The Commentary of ibn Ezra on Isaiah, vol.* I. *translation, London* 1873, *Introd.* p. XI ff.) folgt meist Grätz (Geschichte der Juden VI, 198 ff.); s. Hebr. Bibliogr. XIII, 27.

8) „Kritischer Apparat zu den Werken A. Ebn Esra's", in A. Geiger's Wissenschaftliche Zeitschrift für jüdische Theologie, IV. Band, Stuttgart 1839, S. 261—282. Geiger (daselbst S. 282) schliesst sich der grundlegenden Abhandlung des „gelehrten, gründlichen und scharfsinnigen Verfassers" [gestorben als Rabbiner zu Prag 16. Oct. 1867] in den allgemeinen Resultaten an und erhebt nur Bedenken gegen die Abfassung des Commentars zu Exodus (der uns näher angeht) durch Schüler; Friedländer, *Essays*, p. 152, betrachtet denselben als besonderes Werk. — Einen Ueberblick der Zeitfrage gibt De Rossi, Historisches Wörterbuch der jüdischen Schriftsteller, deutsch von Hamberger, Leipzig 1839 (2. Aufl., d. h. neues Titelblatt ohne Jahr) S. 3 (vgl. dazu Geiger, wissenschaftliche Zeitschrift IV, 446).

nach den vor 40 Jahren und in Lemberg zu Gebote stehenden Mitteln den Grund gelegt, auf welchem seitdem fleissig, wenn auch nicht immer richtig, weiter gebaut wird[9]).

Da bestimmte Nachrichten über das Geburtsjahr fehlen, so musste man, allerdings nicht ohne alle Berichtigung, die Notizen über seinen Tod zu Grunde legen. Es wird erzählt, dass er Montag, Neumond des ersten Adar 4927 (Februar 1167) gestorben, im Tode die Worte Abrahams (Genesis 12, 4) auf sich angewendet, also 75 Jahre alt geworden sei[10]). Das jüngste Datum in seinen Schriften ist ebenfalls 4927 (1166/7)[11]) und zwar

---

9) Die chronologischen Fragen behandelt im Zusammenhange, nicht ohne gewaltsame Hypothesen, Grätz, Geschichte der Juden, VI, 440—454, Note 8 „Ibn Esra, die Reihenfolge seiner Schriften und die Daten seiner Reise"; eine Uebersicht der Resultate S. 451. Theilweise andere Resultate gewinnt S. H. Halberstamm im Vorwort zum Buch *Ibbur* (unten § 21) S. 14—16 (vgl. dazu Hebr. Bibliogr. XIV, 90). M. Friedländer, *Essays on the writings of Abraham ibn Ezra*, London 1877 (vgl. dazu Hebr. Bibliogr. XVII, 217) giebt die Epigraphe einzelner Bibel-Commentare zerstreut (der Index S. IX ist zwischen S. 166 und 183 uncorrect) und ordnet S. 195 die Commentare in Italien (meist ohne Jahrzahlen) und Frankreich. Seine englische Uebersetzung ist nicht überall genau; so z. B. S. 147 in der Anmerkung: „*till he reached his sixty fourth year*", im Originale: „Die Zahl seiner Lebensjahre ist acht [multiplicirt] mit acht", also im 65. Jahre (wie im Text: *in the age of 64*), der Ausdruck zugleich bezeichnend für den Mathematiker und Zahlsymboliker. Ueber die für die Abfassungszeit wichtige Stelle p. 146 s. unter Anm. 91. — Unbequem ist bei Friedländer die nachträgliche Behandlung der Handschriften (195 ff.); z. B. S. 184, 188 (Hiob) und 210 über angebliche Bearbeitung eines Schülers (vgl. oben Anm. 5). Die Kreuzverweisungen bespricht Mathews in einer Note zur 1. Recension des Comm. Daniel (*Miscellany of Hebrew Literature*, ed. by *A. Löwy*, London 1877, p. 272).

10) In dem hebräischen Epigraph des Cod. Vatican. 39, bei Assemani S. 29, steht so wenig als in andern bekannten, etwas vom Monat Ab; letzteres ist in der lateinischen Uebersetzung vielleicht aus dem Worte בארבעת, wenn der Anfang dieses Wortes am Ende der Zeile zur Ausfüllung steht, zu erklären (vgl. Grätz S. 451, dem wohl Assem. selbst nicht zugänglich war). Damit erledigt sich die Bemerkung De Rossi's, die in der deutschen Uebersetzung S. 4 kaum verständlich ist. S. folgende Anm.

11) Vom Schlussgedicht zum Pentateuchcommentar haben wir eigentlich zwei Recensionen von 7 oder 10 Zeilen mit geringen Varianten (Friedländer, *Ess.* 158—160 und Anhang S. 69, spricht von vier Recensionen); die letzten drei, welche das Datum enthalten, nennen einen „6. Tag" als Freudentag für Israel, und hier bietet nur die HS. in Cambridge eine wesentliche Variante, indem sie den Monat Adar nennt; aber die Worte „*the month*" bei Friedl. 160 stehen nicht im Texte, und das Ganze klingt sehr hart. Friedl. (158) verdächtigt allerdings auch die 3 Verse des Datums. Der 6. Tag kann nicht Freitag bedeuten, da Purim im Jahre 4927 nicht auf diesen Tag fiel; Grätz VI, 449 denkt an Chanukka, welches Halbfest allerdings 8 Tage dauert, der 1. war ebenfalls nicht Freitag;

in Rom[12]). Dafs ibn Esra in dieser Stadt gestorben und begraben sei, besagt weder die oben besprochene Notiz von der Todeszeit ausdrücklich, noch indirect durch ihren Platz hinter dem Abfassungsdatum. Aber auch anderweitige, nach Jahrhunderten auftauchende Nachrichten über das Grab des weithin berühmt gewordenen Mannes verdienen nicht mehr Glauben als Gräberlegenden überhaupt[13]). Ist das Todesdatum **1167** wegen de

der Monat Adar fehlt aber in der HS. Cambridge in der darauffolgenden Noti über den Tod, welcher dort in das J. 928 (1168) verlegt wird, wie bei ältere Autoren (vgl. Grätz, S. 450). Aber auch zur Grammatik *Safa Berura* giebt Cod De Rossi 314 „*feria sexta A. 4927*“ ohne Monat; die Punkte bei Grätz S. 44 gehören letzterem, der wohl die Lücke bemerkte, aber nicht verwerthete; offen bar liegt ein Doppelgänger vor. Die von Dr. Berliner mir mitgetheilten Text worte des Cod. 314 bestätigen diese Vermuthung. Es frägt sich also, welcher Buche der Prioritätsanspruch gehöre. Dazu kommt eine anderweitige Schwierig keit, die auch Friedländer entging. Die Worte: שנת תפקוד אסורים sind durc Punkte bezeichnet in einem Supercommentar (Letterbode, Amst. 1876/7 II, 87, z Friedländer S. 245 s. Hebr. Bibliogr. XVII, 119), dessen Verfasser Elieser ode Elasar ben Mattatja, in Aegypten, wahrscheinlich mathematische Kenntniss besass (s. Berliner, Magazin IV, 147). Die Ziffernsumme des angeblichen Chrono stichons ist aber nur 907 = **1147**! — Das angeblich „mystisch-philosophisch Büchlein“ סודות התורה bei Grätz 450 (nach Bartolocci [I, 38], Wolf I, 75, III, 4 De Rossi, Wörterb. S. 6 n. 3) ist wiederum nur der Pentateuchcommentar ode ein Supercommentar über die Geheimnisse, d. h. über die Stellen, in welche ibn Esra auf ein Geheimniss (meist Astrologie) hinweist, wie sich ergib wenn man die angeführten HSS. weiter verfolgt; so z. B. Biscioni S. 31 Plut. II. Cod. 42[13] ist Joseph Caspi.

12) Die Gründe, welche Grätz für seine, gegen alle Handschr. und Zeugniss vorgehende vermeintliche Emendation (Rhodez) anführt, sind nicht stichhalti So z. B. gibt er an, der Jünger Salomo habe die vier älteren Grammatiken „nic auftreiben können“, ohne hinzuzufügen, dass die Besitzer sie nicht hergebe wollten, was am besten für Rom passt, welche Stadt ibn Esra den andere Städten gegenüber einfach nennen konnte. Ein Wortspiel mit Zahlbuchstabe zwischen dem 260. Cyclus und der Stadt, ist schwerlich beabsichtigt; das entstar erst durch die Corruptel (oder durch die in einem überflüssigen Bedürfniss na Alliteration vorgenommene vermeintliche Emendation) 240; am allerwenigste befriedigt Rhodez (רודם, ר״ס), was Grätz nicht nur vorschlägt, sondern (S. 45 für beide Schriften mit dem J. 1166 (obwohl der Monat ganz unsicher is festhält.

13) Man fand seine Grabstätte in Kabul in Palästina, neben Jehuda ha-Le und Salomo b. Gabirol (s. Carmoly, *Itineraires de la terre sainte*, Bruxelles 184 p. 453 n. 165 und p. 483). Abraham Sacut (schrieb in Tunis um 1502, vielleic später im Orient, s. Hebr. Bibliogr. XIX, 100) weiss (217 ed. London, aber nic 130 b ed. Cracau, was Kaufmann [unten A. 16] S. 48 nicht beachtet) von de gemeinschaftlichen Grabe der Töchtersöhne ibn Esra und Jehuda ha-Lev bald darauf (131 Crac., 218 Lond.) lässt er ihn in קלאהורא (Calahorra Spanien, nach Zunz, Zeitschr. f. d. Wiss. d. Jud. 150) gestorben sein, und die

bereinstimmung mit dem Kalender festzuhalten (wie schon Sacut be-rkt), das Alter von 75 wegen der Anspielung weniger sicher, so ist er lenfalls zwischen 1093—6 geboren, und zwar zu Toledo, wie schon ere Quellen angeben[14]); höchst wahrscheinlich bestätigt dies ein Zeitge-sse und Verwandter, wie sich zeigen wird.

§ 4.

Der berühmte Dichter Moses ibn Esra aus Granada, der um 1138 reits ein Greis war, verfasste in späten Lebensjahren ein arabisches

gabe hält Grätz (S. 451, Friedländer, *Comm.* I, p. XXVI) für „sicher"; sie sst zu seiner Verwandlung von Rom in Rhodez; Sacut fügt auch hier hinzu, ss er von dem Begräbniss in Palästina gehört; so haben Augenzeugen (ed. London, vielleicht מי שראה בעיניו zu lesen) berichtet dem Salomo ben Simon — enbar Sal. Duran in Algier (gest. 1467, s. Catal. Bodl. S. 304). — Wolf, Bibl. br. I. p. 71 setzt zu *Kalahora* (so): „*quam Rhodum alii vocant*", ohne renthese, als ob das bei Abr. Sacut vorkomme! Assemani, zu Cod. 78, theilt ei Epitaphe mit, welche das Grab Abrahams auf Rhodus enthalten soll; De Rossi . 5) bemerkt, dass darin weder Namen noch Jahr vorkomme. Das erste: הידע [ה]רמע ist in der That für den Grabstein eines Abraham gedichtet von Jehuda -Levi, nach dem Appendix des Divans (Cod. Pocock 74 f. 5) und daraus mit-theilt von E. Carmoly, Litbl. d. Orient 1850, S. 476, von Edelmann und Dukes Treasures of Oxford (Oxford 1850, S. 27), neuerdings von Carmoly (*Chikeke ben*, S. 24, hinter *ha-Orebim*, Rödelheim „1861", aber später beendet), welcher rschweigt, dass Assemani die Epitaphe auf ibn Esra beziehe — der jedenfalls n Dichter überlebte. Geiger, Blüthen (1853) S. 42, conjicirt einen von Jehuda -Levi gefeierten Abraham; doch ist hier nicht der Ort, dergleichen weiter zu rfolgen. — Das zweite Epitaph, anfangend ארם ולא אדם ist wahrscheinlich auf aimonides (רמב"ם wurde vielleicht zu רא"בע) verfasst; es ist als solches, aber correct, gedruckt bei El. Aschkenasi, *Dibre Cachamim*, Metz 1849, S. 86, und i Carmoly, *Chikeke*, S. 24; correcter in HS. München 224 f. 137[b] (im Catalog 87 nicht besonders erwähnt), wie bei S. Sachs (Vorwort zu *Maase Nissim* r. v. Goldberg, Paris 1867, S. XVII), welcher, nach der Randnote einer HS., edarschi (um 1300) als Verf. annimmt (?). — Von Rhodus kann überhaupt icht mehr die Rede sein, nachdem man dahinter gekommen, dass רודוס nicht hodus, sondern Rhodez in Frankreich (Languedoc) bedeute (s. das Citat bei rätz S. 445; in Bezug auf die Quelle, Cod. Paris 188[1], vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 19; hingegen scheint „רדום in der Nähe von England" bei Elasar b. Mattatja lagazin etc. IV, 149, Letterbode II, 87) Rouen (s. Histor. Jahresberichte für 378, Berlin 1879, I, 46). — Mose ben Chisdai aus Tachau (s. unten § 9) will von euten aus England (s. Hebr. Bibliogr. III, 62) gehört haben, dass Abraham dort, urch böse Geister in Gestalt von schwarzen Hunden erschreckt, in eine Krankheit rfiel, an der er starb.

14) Die Angabe „aus Granada", bei Sacut ed. London S. 218, steht ganz olirt und ist verdächtig, wie Manches in jener Ausgabe. Sie beruht offenbar uf Verwechslung mit Moses ibn Esra, s. § 5.

Werkchen über hebräische Poesie, welches die kostbarsten Nachrichten über jüdische Schriftsteller in Spanien darbietet, auch anderen Autoren als Quelle gedient zu haben scheint.[15]) Daselbst (Bl. 42b) heisst es: „Abu'l-'Hasan ben el-Levi, der Taucher nach den Perlen . . . und Abu Is'hak ben [el-Mudschid, am Rande] Esra von den Theologen, den eleganten und beredeten, beide Toledaner dann Cordovaner.“ Ich habe bereits im Bodl. Catalog (S. 1801) bemerkt, dass ersterer offenbar der — namentlich durch Heine allgemein bekannte — Dichter abu'l-Hasan Jehuda ha-Levi (geb. um 1080)[16]), der andere unser Abraham sei, der also nach Cordova gewandert war. Als Cordovaner bezeichnet er sich in der Uebersetzung der grammatischen Schriften des Jehuda 'Hajjudsch[17]), welche wohl zu seinen ersten literarischen Producten in Rom (also um 1140) gehört, wenn auch darin die Uebersetzung des Mose Gikatilia (Chiquitilla) angeführt wird[18]).

Dass Abraham und Jehuda eine Zeit lang in persönlichem Verkehr lebten, ist nicht zu bezweifeln, da ersterer Erklärungen des letzteren anführt[19]) und ein Gedichtchen verfasst zu haben scheint, worin der verstorbene Jehuda ihn auffordert, an der himmlischen Seligkeit theilzunehmen, er aber antwortet: „Mein Bruder Jehuda! geh wieder zur Ruh! Gott will nicht, dass ich mit dir gehe, bis ich Kinder erzeuge“ u. s. w.[20]). Der Ausdruck „Bruder“ bedeutet hier weder den leiblichen, noch den Vetter[21]); die leibliche Verwandschaft, mit welcher die Legende Jehuda und Abraham entweder schon

---

15) Ich besitze eine genaue Durchzeichnung der bis kürzlich einzigen Bodleian. HS.; ein defectes Exemplar erwarb neulich die Petersburger Bibliothek. — Ueber ein corruptes hebräisches Excerpt (bei Sacut, ed. London S. 229², vgl. S. 203, bei Grätz VI, 392 mit falschen Conjecturen), dessen unvollständigen Schluss die eben zu besprechende Stelle bildet, s. Hebr. Bibliogr. XIII, 107.

16) Vgl. auch Dav. Kaufmann, Jehuda Halevi, Versuch einer Charakteristik Breslau 1877, S. 41.

17) Herausg. von L. Dukes, Stuttg. 1844.

18) Herausg. von John W. Nutt, London 1870.

19) Zu den Stellen bei Geiger (Divan des ... Abu'l-Hassan Juda ha-Levi Breslau 1851, S. 150) kommt noch Exod. 13, 14 nach HS. Benzian. Ueber Benutzung des Buches *Kusari* von Jehuda ha-Levi (verf. um **1140**) s. Kaufmann Gesch. d. Attributenlehre etc. Gotha 1877, S. 517.

20) In der Bodl. HS. hinter dem Divan f. 76^b und im Nachtrag f. 4 gegen die Auffassung Edelmann's (Ginse Oxford, S. 20 u. XVIII) s. Geiger Divan l. c., welchem Friedländer (*Comm.* p. XX) folgt, ohne ihn zu nennen In einer Wiener HS. (Catalog S. 126 und Litbl. des Orient 1846, S. 565) wir der oben (A. 3) erwähnte al-Charisi als Verf. angegeben.

21) Im Neuhebräischen wird „Bruder“ mitunter für Vetter gebraucht, insbesondere „zweiter Bruder“. — Als Geschwisterkinder fanden wir die beide Männer bei Sacut, oben Anm. 13. Vgl. auch die unter § 6. A. 32 citirte Stell aus Parchon.

bei der Geburt, oder durch Heirat mit der Tochter Jehuda's, bis zur Grabstätte verbindet, hat um so weniger historischen Boden, als die Charaktere, Anschauungen, und selbst die Wege ihrer Wanderungen sie frühzeitig von einander, fast nach entgegengesetzten Richtungen, für immer trennten[22]).

---

22) Der höchst unzuverlässige Gedalja ibn Ja'hja (Traditionskette f. 41 ed. Ven. 1587, f. 31 ed. Amst.) will allerlei Geschichten von ibn Esra gehört und der Kürze wegen übergangen haben; aber die Legende von der Heirat konnte er doch nicht unterdrücken. Gedalja scheint dafür die älteste bisher bekannte Quelle, wahrscheinlich auch für die Erzählungen von ibn Esra und Maimonides in der jungen, aus Kairo stammenden HS. Paris 583. Jüdisch-deutsch bearbeitete die Erzählung Simon (Akiba Baer) b. Josef in seinem *Maase Adonai* (1691 etc.), und daraus floss sie in die Ausgaben des sogenannten „*Maase-Buch*" seit 1703 (s. meine Erörterung und Nachweisung in der Zeitschrift *Serapeum*, herausgegeben von Naumann, Leipzig 1866, S. 5, vgl. 1869 S. 138). Deutsch erzählt sie (ohne Quallenangabe) A. Geiger, Jüdische Dichtungen, Leipzig 1856, S. 29; englisch (ebenso) M. Friedländer, *Commentary* etc. p. XII. — In deutschen Versen erzählt und erweitert dieselbe Abr. M. Tendlau, Das Buch der Sagen und Legenden jüdischer Vorzeit, Frankfurt 1842, 1845, 3. verm. Aufl. 1873, S. 150 n. 32 (vgl. S. 367); zuletzt (S. 157) erkennt Jehuda den „Vetter" (wovon nichts bei Gedalja) in dem genialen Ergänzer seines Hymnus, und an diesen scheint die Legende zu knüpfen, wie sonst z. B. bei Salomo b. Gabirol, der nach Indien geschickt wird, Meir ben Isak, der zu den „rothen Juden" kömmt. In neuester Zeit ist die „Geschichte des Jehuda ha-Levi" sogar arabisch bearbeitet in der Sammlung von Erzählungen: *Maase Scha'aschuim*, Livorno 1868 f. 64, wo die Tochter Jehuda's דילא (Dilla?? woher?) heisst (über diese angebliche Dichterin, welcher Carmoly noch den Namen Esther angedichtet hat, — vielleicht weil bei Gedalja der ergänzte Vers diesen Namen der Königin Esther enthält? — s. Hebr. Bibliogr. 1879 S. 11). Die am Schlusse der arabischen Erzählung f. 65 befindliche Nachricht über die vom Arzte Chijja redigirte Sammlung, in Tunis noch vorhanden im Jahre 1805 (vgl. Catal. Bodl. 1341), hat mit der vorangehenden Legende nichts zu schaffen. — Die vermeintliche Anspielung Abraham's auf seine Frau bei Friedländer (*Comment.* p. XVI) hat Schiller-Szinessi (*Catal. of the Hebrew manuscr. . . . Cambridge*, P. I. 1876 p. 120) mit Recht auf die Armuth bezogen; s. Magazin etc. III, 141. Einen Versuch Reichersohn's, die Verwandschaft durch ein Gedicht zu begründen, weist Kaufmann S. 13 zurück, der auch die Vetterschaft durch Missverständniss eines Gedichtes für erklärlich hält. — Ich besitze ein Druckschriftchen, betitelt שבחי פון אבן עזרא, „Rühmliches von Ibn Esra" in jüdisch-deutschem Jargon gedr. in Lemberg ohne Jahrzahl (XIX. Jahrh.) in Oct. 8 Bl. Die darin erzählten Wunderthaten und Erlebnisse, welche zum Theil an Sindbad's Reisen u. dgl. erinnern, sollen nach dem Titel die Wunderwirkungen des Gebets beweisen; „es ist ganz gewiss war, was drinnen steht" — eine ältere Quelle dieser Volksschrift ist mir nicht bekannt. — Ueber eine angebliche Himmelfahrt eines Enkels ibn Esra's s. Hebr. Bibliogr. IV, 23, IX, 115.

§ 5.

Wann und in welcher Richtung sich Abraham aus Cordova entfernte, kann wiederum nicht mit Bestimmtheit, kaum nach combinatorischen Erörterungen entschieden werden. Dass er „wegen der Wuth des Bedrückers" sein Vaterland verlassen, sagt er selbst unter Anwendung einer Bibelphrase[23]), doch darf seine Auswanderung nicht mit den durch die fanatischen Almohaden hereinbrechenden Calamitäten combinirt werden[24]). Letztere eroberten Marocco 1146, Cordova 1148; wir wissen aber, dass Abraham bereits 1140 in Rom den Commentar zu Kohelet verfasste[25]), vielleicht schon 1136 in Beziers, wenn er Verfasser der Nativität, die ich im Art. Abr. Jud. (S. 41) besprochen habe. Er hatte zu dieser Zeit jedenfalls das 40. Lebensjahr lange überschritten, und wenige Jahre darauf (1143) finden wir bereits in Bagdad seinen Sohn Isak[26]), der später zum Islam überging, wie uns der Dichter Charisi berichtet[27]). Andererseits wissen wir, dass Abraham um 1139, oder kurz vorher, einige mathematische Fragen des David b. Josef aus Narbonne beantwortete (s. unten § 7), woraus man schliessen möchte, dass er zunächst nach Nordspanien oder der Provence wanderte[28]). Im Zusammenhange damit steht die Feststellung der Orte,

---

23) Jesaias 51, 13; Friedländer, *Essays* 183; vgl. Grätz S. 440.

24) A. Geiger, Moses ben Maimon. Studien, 1. Heft, Breslau (1850) S. 7, dem ich in „Polemische und apologetische Literatur etc." Leipz. 1877, S. 352 folgte, ohne näher zu untersuchen.

25) Grätz S. 440, 449; Friedländer S. 187 vermuthet eine Umstellung im Epigraph, welche bei einer wörtlichen Uebersetzung unnöthig ist. Ibn Esra spielt wahrscheinlich auf die am Ende des Jahrtausends zu erwartende Erlösung an.

26) Isak verfasste ein Lobgedicht auf den bekannten jüdischen Arzt abu'l-Berekat Hibet Allah, den Verfasser eines arabischen Commentars zu Kohelet, der später zum Islam übertrat und vielleicht auch Isak dazu verleitete. Das richtige Verhältniss und die Identität Isak's habe ich zuerst in der Hebr. Bibliogr. I (1858) S. 91 festgestellt, vgl. II, 109 und die nachfolgende Anm. 27. Dass Isak den Vater auf Reisen begleitete (Grätz), ist möglich, aber unerwiesen; die Trennung in Damask (Friedländer *Comment.* p. XIV) hat gar keinen Boden, da der Vater schwerlich bis dahin gekommen ist, s. weiter unten S. 69.

27) Ueber die richtige Lesart s. Hebr. Bibliogr. XII, 20; S. 19 lies: bei Benedetti S. 193 (für 139). Eine weitere Combination mit einem ابن عزرا s. Zeitschrift d. D. Morg. Gesellschaft Bd. XX, S. 427—30.

28) Dass David sich eine Zeitlang in Spanien aufgehalten, kann ich aus dem Briefe bei Geiger, Divan S. 129, nicht ersehen. Ein zweifelhaftes Zeugniss, dass Abraham 1138 noch in Spanien war, s. Hebr. Bibliogr. XIII, 27 über einen Hymnus (vgl. HS. Carmoly 83?); vgl. XIV, 90 und unten § 7 A. 36. Ueber ein Gedicht Jehuda ha-Levi's an denselben David s. Hebr. Bibliogr. III, 32 A. 2. — In Narbonne nahm man schon 1143 auf ibn Esra's Theorie der Horoscope (vgl. unten § 18 A. 230) Rücksicht; s. HS. des Rabbiners Wallerstein in Rzeszow, beschrieben

welche Abraham überhaupt auf seinen Reisen berührte, wie weit sich letztere ausdehnten.

§ 6.

Eine gelegentliche und vereinzelte Notiz aus dem Ende des XIII. Jahrh. berichtet im Namen Abraham's, dass er in seiner Gefangenschaft in Indien ungesäuertes Brod zur Nahrung erhalten habe. Für die Würdigung der Mittheilungen Abraham's, welche Indien und indische Gelehrte betreffen, unterzog ich die Frage: „Ist ibn Esra in Indien gewesen?“[29]) einer genaueren Prüfung und gewann ein verneinendes Resultat; auch bis Palästina ist er schwerlich gekommen[30]). Hingegen war er jedenfalls in Aegypten[31]), vielleicht auch in einem angrenzenden Theile Africa's[32]). Von anderen Gegenden und Orten[33]) sind sicher: Rom (1140, wahrscheinlich auch 1167),

---

in Benzian's Catalog 1869 S. 2 n. 5 f, wo die Tabellen für Cyclus 257 (1105—23) vielleicht die des Abr. bar Chijja sind. *

29) Zeitschr. d. D. Morgenl. Gesellsch. XX, 427—30.

30) Das angebliche Gespräch mit 15 alten (!) Masoreten in Tiberias, bei Grätz (und daher Friedländer, *Comm.* I, p. XIX), habe ich auf Einschiebung des Wörtchens „ihm“ bei Carmoly zurückgeführt (Z. D. M. G. XX, 427); ich finde nachträglich diese so wesentliche Einschaltung schon bei Gedalja ibn Ja'hja f. 41. — Irrige Angaben über Palästina und Längenentfernungen sind schon im XIV. Jahrhundert gerügt worden (von Josef b. Elieser, vgl. Zunz, Geogr. Lit. n. 36, Grätz S. 444, daher Friedländer, l. c.). Beachtenswerth sind folgende Angaben: im Brief des Sabbat (Pforte II, Kerem Chemed IV, 168) wird die Entfernung von Jerusalem und Bagdad auf zwei Drittel (mit Worten) Stunde (also 10° Länge) angegeben. Nach dem Buche *Ibbur* (f. 8b) sind zwischen Verona und Jerusalem mehr als 2 Stunden (30°), zwischen Bagdad und Jerusalem mehr als $1\frac{1}{2}$ Stunde, also gerade das Doppelte der obigen Angabe! Vgl. Friedländer, *Ess.* 152 A. 3.

31) Dort fand er die Kritik des Dunasch (ben Labrat oder Librat ha-Levi), die er in dem Buche *Sefat jeter* (Frankfurt am Main, 1843) widerlegte; letzteres verfasste er in Lucca, nach Halberstamm S. 12 im Jahre 1245.

32) Der, Ende des J. 1160 in Salerno schreibende Salomo Parchon (f. 4 Col. 3 ed. Pressburg 1844) bemerkt, dass der verstorbene Jehuda ha-Levi und ibn Esra „den Gott erhalte“ (lies ש"ץ) nach „Afrika“ (אפריקי) kamen u. s. w., nachdem eben von Palästina, Aegypten, Westen (Magreb) die Rede gewesen. Parchon war aber nicht ein „Jünger“ derselben (Grätz S. 452); sie werden in der Vorrede (S. XXII) nicht als persönliche Lehrer bezeichnet, wie Rapoport richtig annimmt (wonach Kaufmann, Jehuda ha-Levi S. 36 und 32 zu berichtigen ist). Dass ibn Esra überhaupt in Salerno gewesen und dort ein Spottgedicht verfasst habe, ist eine in der Luft schwebende Hypothese Grätz's, s. meine Bemerkung in Virchow's Archiv für pathol. Anatomie u. s. w. Bd. 38 S. 74 und dazu Gross in Berliner's Magazin II, 34. — Einen „Gelehrten aus Afrika“ citirt Abraham in dem von Zedner herausgegebenen Commentar zu Esther, S. 15, 22.

33) Vgl. den Artikel von Zunz in seiner Abhandlung: Geograph. Literatur der Juden; Gesammelte Schriften, I, Berlin 1875, S. 162 u. 36 (zuerst in engl.

Lucca 1145[34]), Mantua 1145, Verona 1146/7, Beziers 1155/6, Rodez 1156/7[35]), London 1158/9, Narbonne 1160; zweifelhaft Beziers 1136.

Wann war er in Aegypten? Grätz (S. 452) meint, es habe sich Niemand die Frage klar gemacht, wann er in „Africa, Aegypten, Palästina und noch anderen Ländern [d. h. des Orients] war", und gibt als etwas ganz Neues aus, dass „seine weiten Reisen" vor 1140 fallen, indem er ausserdem die Frage des David Narboni, welche sich auf das Jahr 1139 bezieht, so emendirt, dass sie „lange vorher" geschehen sein könne! Wir dürfen jedoch kaum über 1138 hinaufgehen[36]); es bleiben uns dann zwei Jahre. Schon im Jahre 1851 lässt Geiger[37]) unseren Abraham von Spanien nach Nordafrica und von dort nach Asien oder Aegypten entkommen[38]). Diese Annahme hat etwas von vorneherein Bestechendes, bedarf aber darum noch weiterer Bestätigung. Man ist stets von den weiten Reisen ausgegangen, welche eine längere Zeit erfordern; handelt es sich aber nur um den Osten

---

Uebersetzung im II. Bd. von Benjamin of Tudela 1840 p. 250, bei Friedländer, *Comm.* I. S. XVII) und Grätz S. 452 (mit Hypothesen, die ich weglasse, wie z. B. Salerno, s. die vorangehende Anm.), Halberstamm l. c. S. 14.

34) Gegen Grätz's willkürliche Aenderung 1155 s. Halberstamm l. c. S. 12, welchem stillschweigend Friedländer, *Essays,* p. 164, folgt; s. jedoch N. Brüll, Jahrbücher für jüdische Geschichte III. Jahrg. Frankfurt a. M. 1877, S. 164.

35) Nicht Rhodus, s. oben S. 65 A. 13. Hier müsste der Weg durch Nordfrankreich eingeschaltet werden, auf welchem Abraham mit Jakob Tam aus Rameru zusammengekommen wäre (Halberstamm S. 15); über die nicht ganz gesicherten Wechselverse, bei Friedländer, *Comment.* I, p. XXVI, s. verschiedene Nachweisungen in meinem Katalog der hebr. Handschr. in Hamburg (1878) S. 6 n. 32, Verzeichniss der hebr. Handschr. der k. Bibliothek in Berlin S. 126 n. 119. — Abzuweisen ist die Stadt „Mora" (מורה), über welche Abraham, mit Anspielung auf „Amora" (Gomorrha), ein Epigramm verfasst haben soll, welches aus ungeordneten Notizen einer Bodleianischen HS. mit der hier nöthigen Reservation mitgetheilt wurde von Dukes im Litbl. des Orient, her. von Fürst, 1850, S. 686 (vgl. S. 343), anfangend הקנקן ריקן. Die gehäuften, theilweise gesuchten Alliterationen sind nicht im Geschmack Abrahams's, und man muss sich wundern, dass A. Geiger jenes Epigramm ohne Weiteres unter den Namen des ibn Esra dem grösseren Publikum in deutscher Uebersetzung zugeführt hat („Blüthen" im deutsch-israel. Volkskalender, Johannisberg 1853, S. 27, und Jüd. Dichtungen 1856, S. 37).

36) Ein sehr zweifelhaftes Zeugniss, dass Abraham im Jahre 1138 noch in Spanien war, s. oben § 6, A. 29.

37) Moses b. Maimon, S. 7.

38) Geiger, Judenthum u. s. w. II. (1865) S. 131: „Wie es scheint, ist er über Nordafrica und Egypten nach den christlichen Landen, zunächst nach Italien gegangen, wo wir ihn in Rom, Lucca, Mantua sehen, dann nach der Provence, . . . dann nach Nordfrankreich . . . Von dort geht er nach England . . . Dann tritt er die Rückreise wohl in derselben Weise (?!) an, bis er in Rom im 75. Jahre die irdische Lebensbahn verlässt."

Africa's, welchen Abraham durch ein Schiff erreichen konnte[39]), so haben wir bis 1155 Lücken genug, in welche die Reise fallen konnte, insbesondere zwischen 1140 und 1145[40]).

§ 7.

Neben Raum und Zeit, ja im Zusammenhang mit denselben, tritt uns die Frage nach der Sprache entgegen: Hat ibn Esra arabisch geschrieben? Alle bekannten unverdächtigen Schriften sind hebräisch verfasst, alle Nachrichten von arabischen erweisen sich nicht als stichhaltig. Sie sollen hier zuerst kurz besprochen werden.

1. Ein „Buch von den Wesen" (העצמים *ha-Azamim*) hat sich in einer unedirten hebräischen Uebersetzung erhalten, deren Handschriften den Uebersetzer nicht nennen, nämlich in Parma, Cod. De Rossi 1055³, ausführlich beschrieben von P. Perreau (*Bollettino Italiano degli studii orientali,* 1877, S. 229—232), in Florenz (Plut. II, Cod. 25, 2, S. 25 bei Biscioni ed. in Oct. — unvollständig), Bodleiana (Michael 316)[41]), jüd. Gemeindebibliothek in Mantua (ein Expl. beschrieben von M. Mortara in Hebr. Bibliogr. II, 93 — vgl. XV, 16, XVI, 109 — wurde vom Wasser ruinirt, ein zweites s. in Mortara's *Catalogo dei manoscritti ebraici della biblioteca della comunità israel. di Mantova*, Livorno 1878, S. 61 n. 78 f), HS. Ghirondi-Schönblum 81 (S. 28 meines Catalogs 1872, wo jetzt, ist mir unbekannt), Luzzatto 114, jetzt der k. Bibliothek in Berlin 244 in Oct. (S. 56 meines Verzeichnisses).[42]) Das kleine philosophisch-theologische Schriftchen handelt 1) von Gott, 2) von den Emanationen der intellectualen Kräfte

39) Friedländer, *Comm.* I, S. XXI, erzählt als Schiffsanekdote das „Stratagem", worüber unten § 20.

40) Grätz, S. 441, schaltet hier als Ort zwischen Rom und Mantua (!) Salerno ein (Friedländer, Comm. I, p. XXII, A. 41 versprach eine Erörterung darüber im III. Bde., wo er sich jedoch auf die Commentare beschränkte); s. dagegen oben S. 69 A. 32. — 1145 erscheint als Grenze durch die Widerlegung des Dunasch (oben S. 69 A. 31). Derselbe ist zwar schon in der ersten Grammatik (*Mosnajim* in Rom um 1140?) erwähnt, jedoch, wie es scheint, nicht das in Africa gefundene Werk; ausserdem wird Dunasch nur noch citirt in der Grammatik *Zachot* (1145) f. 146ᵇ ed. Ven. (dieses Citat fehlt bei Dukes, Literaturhist. Mittheil. über die ältesten hebr. Exegeten u. s. w., Stuttg. 1844, S. 153) und f. 160, Comm. zu Psalm 9, Vers 1, 7, 10 und Psalm 42, Vers 5.

41) Daraus stammt wohl die Copie Edelmann's (*Chemda Genusa*, Königsberg 1856, Bl. 43).

42) Die in H. B. II, 93 angeführte HS. Paris hat irrthümlich den Titel *ha-Azamim;* der Catalog S. 23 n. 189⁴ verbessert mit Recht *ha-Teamim*, da es eine der astrologischen Abhandlungen ist (s. § 21), was Geiger (jüd. Zeitschr. IV, 187) übersehen hat, wie ihm auch alle älteren Nachweisungen wirklich vorhandener HSS. entgangen sind!

auf die seelischen, 3) von den Sabiern, Nabatäern und Chaldäern, 4) von der Seele (beginnend mit einer Verweisung auf einen Abschnitt über die Elemente), 5) von Thieren, 6) von den Sphären; 4 und 5 werden in einigen HSS. zusammengezählt, so dass nur 5 Abschnitte herauskommen; fehlt ein 3. über Elemente? Samuel Zarza berichtet, dass dieses Schriftchen für ihn (um 1367) aus dem Arabischen von Jakob ibn Alfandari übersetzt worden; sein Zeitgenosse Samuel Motot übersetzt kurz aus dem arabischen Original[43]). Auch ein dritter Supercommentator derselben Zeit in Berbiesca (Briviesca), Schemtob ibn Major, citirt das Buch Azamim als echt. Aber ein vierter, um wenige Jahre jüngerer, Schemtob Schaprut, bezeichnet es schon vorsichtig als „dem ibn Esra beigelegt". Letzterer ist sicherlich nicht Verfasser des Schriftchens, das erst um 1360 auftaucht, im Original wieder verschwindet, vielleicht in der Literatur der Muslimen zu suchen ist.

2. נסיונות *(Nisjonot,* Erfahrungen — entsprechend dem arabischen häufig vorkommenden *Mudscharrabât),* Zusammenstellung von leicht zu bereitenden Heilmitteln, theils sympathetisch und superstitiös, in 10 Tractaten oder Abschnitten, welche in Kapitel zerfallen; HS. Michael 205 der Bodleiana, Paris 1134 und 1170. Nach Carmoly[44]) scheint diese Schrift aus dem Arabischen übersetzt. Ich habe die Michael'sche HS., in welcher der X. Abschnitt fehlt, vor ungefähr 25 Jahren oberflächlich angesehen. Der I. Abschnitt handelt im Allgemeinen von den specifischen Mitteln oder Kräften, der X. von Fiebern. Es sind fast nur Excerpte aus der griechisch-arabischen Medicin; citirt werden Aristoteles (Physik und Thiergeschichte), Dioscorides, Galen, vielleicht Alexander (el-Iskenderi? VII, 2 ff.), der weise Salomo (VI, 10), auch das „Siegel Salomo's" (VII, 11)[45]), von Arabern ibn Maseweih, at-Thaberi[46]), al-Razi (Rhazes), manchmal heisst es: „Ich der

43) Supercomm. zu Mischpatim, (Exod. 23, 21) f. 24^c ed. 1553: „Dies ist der wesentliche Inhalt seiner Worte in arabischer Sprache." Das Citat bildet einen Theil der Erklärung von Exod. 23, 21, welche man als besonderes Stück findet in Cod. München 285^5 und Paris 825^6, wo der Catalog S. 140: „Geheimniss des Gottesnamens und der Engel nach Abr. ibn Esra" angiebt! Eine Abschrift dieses Stückes besitzt Rabbiner Dr. Gross. Andere Stellen bei Motot zu Beschallach 21^b, Jitro 22^c. Ueber die abweichende Recension Motot's s. Hebr. Bibliogr. XV, 16.

44) *Histoire des médecins juifs*, p. 46.

45) Ich weiss nicht, ob die Pflanze gemeint ist; vgl. meine Mittheilung bei S. Günther, Ziele und Resultate der neuern mathem.-hist. Forsch., Erlangen 1876, S. 118.

46) Wahrscheinlich der von Razi angeführte, nicht ibn Haitham, s. Zeitschr. D. Morg. Gesellsch. IX, 842, mein: Toxolog. Schriften der Araber, in Virchow's Archiv f. pathol. Anat., Bd. 52, S. 476 und Hebr. Bibliogr. XIV, 40.

Schreiber", oder der Experimentator (המנסה), und wird die bekannte Formel „erprobt und bewährt" (בחון ומנוסה) angewendet. III, 3 handelt von den „Namen" (d. h. Anwendung von magischen Wörtern und Zeichen), VI, 9 von sympathetischer Anwendung des „das Eisen anziehenden Steines, genannt *Calamita*" קלמיטה).[47]) Von einer solchen Schrift Abraham's weiss, so viel mir bekannt, das Mittelalter nichts, welches gerade nach derartiger Literatur besonderes Verlangen trug; erst aus dem Ende des 17. Jahrh. ist mir ein directes Citat bekannt[48]). Auch wird Abraham nirgends als Mediciner gerühmt.

3. מדות *(Middot)*, ein arabisches Werk über Ethik, HS. in der ehemaligen Sorbonne n. 9, erwähnt Wolf (Bibl. hebr. III p. 1138 n. 332), der jedoch vermuthet, ibn Esra sei darin nur angeführt und das Werk identisch mit dem eines viel später lebenden Anonymus. Die HS. scheint jetzt Sorbonne 54, aber der neue Pariser Catalog unter 830 meldet nichts von diesem und einigen andern bei Wolf genannten Bestandtheilen dieser HS[49]).

4. Ein arabisches Buch der Nativitäten *(Mawalid)* im Escural Cod. 935, geschrieben 1395, nach Casiri's Catalog p. 376, von *ben Azari* (? die Vocalisation des arab. Textes ist unsicher) *al-Kha'sibi*, dem jüd. Astronomen (oder Astrologen) aus Toledo. Der Schreiber, der die spanische und christliche Aera angibt, war ohne Zweifel Christ oder getaufter Jude und will unseren ibn Esra als Verfasser bezeichnen, wenn die lateinischen Worte

---

47) Vgl. Abr. Judäus S. 3, Anm. 1 und meine Abhandl. *Intorno ad alcuni passi . . . relativi alla calamita*, Roma 1871 (aus Boncompagni's *Bullettino* abgedr.), S. 25 die Stelle aus dem kurzen Comm. zu Exod. 7, 11, woraus vielleicht im grösseren (interpolirten) zu Exod. 28, 9; über תולדת s. weiter unten Anm. 94, wonach dort *nella generazione* zu lesen wäre.

48) In einer anonymen (von ירר"ם?) zu Busseti in Italien gegen Ende 1688 verfassten Abhandlung über das Gedächtniss (HS. Reggio 24 in der Bodl. 4 f. 9[b]) werden „*Segullot*" aus ibn Esra's Buch Nisjonot Tr. III, 2, 5 citirt. — Um 1600 bemerkt Abraham Jagel aus Monselice (HS. Reggio 10 Kap. 47) bei Gelegenheit des Cerastes (Plin. IV, 23), er habe gehört, dass ibn Esra ein Schlangenhorn im Griff seines Messers zum Schutz gegen Vergiftung angebracht, da es von nahendem Gifte schwitze. Aus einem dem Abraham beigelegten Buche „Anordnungen der Speisen" (תיקוני מאכלים) citirt Elasar ben Mattatja; vgl. Verzeichniss der hebr. HSS. in Berlin, S. 48[2]. — In Benjacob's grossem bibliogr. Werke, welches nächstens in Wilna erscheint (S. 399) fehlt unsere Schrift. Von der Medicin spricht Abraham zu Exod. 23, 26, s. unten § 12 n. 3.

49) Vgl. Hebr. Bibliogr. 1869, S. 22, A. 5. — Eine dem ibn Esra beigelegte hebräische Schrift מדות oder בית מדות scheint aus verschiedenen Confusionen entstanden, namentlich mit der so betitelten ersten Ausgabe der Sittenschrift des Römers Jechiel b. Jekutiel (1287) — s. Catalog Bodl. S. 1279 u. Add., Hebr. Bibliogr. XIX, 5 — und einer anonymen aus dem XV. Jahrh., s. Reifmann in der Zeitschrift *ha-Karmel* 1862, II, 278, Hebr. Bibliogr. XV, 1.

„genere Judaeus" nicht Casiri's Zusatz sind. Zu jener Zeit waren ibn Esra's astrologische Schriften längst bekannt (§ 21); es wäre also nicht unmöglich, dass sein Buch der Nativitäten (s. unten § 21) ins Arabische übersetzt worden sei. Gerade in Toledo, der Geburtsstadt Abraham's, erhielt sich der Gebrauch des Arabischen noch im 16. Jahrhundert. Man weiss nur nicht, was dann *al-Kha'sibi* bedeuten soll. So heisst nämlich ein Verfasser von Nativitäten bei Hagi Khalfa, welchen ich identificirte mit *„Albubater,"* dessen Buch der Canonicus Salio aus Padua entweder 1218 oder 1228 oder 1244 (er erscheint mit Guido Bonatti 1259 in Brescia) mit Hilfe eines Juden David übersetzte. Enthält die arabische HS. das Original dieses Werkes, und ist der Zusatz von ibn Azari, Astronomen in Toledo, falsche Conjectur eines Abschreibers?

Ich habe hier in Kürze das Resultat meiner zuerst hierauf gelenkten Forschungen mitgetheilt[50]), welche von Wüstenfeld nur theilweise benutzt und eher verdunkelt, als in helleres Licht gesetzt sind[51]).

5. Ueber Sonnen- und Mondesfinsternisse in Cod. Vatic. 44^4 soll, nach Assemani, aus dem Arabischen von Kalonymos übersetzt sein. Ich vermuthe, dass hier die Uebersetzung des Maschalla durch ibn Esra confundirt sei; s. unten § 21.

6. Auf einem Schreibfehler scheint eine Stelle im *liber de mundo* zu beruhen *(Opera Avenaris* Bl. 78 Col. 2): *Inquit translator*[52]) *hec* (so) *est itaque sermo avenare secundum quod jacet in arabico, sed visum est nobis*

50) Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24 (1870) S. 336, 337, Bd. 25, S. 419. *Letteratura Ital. dei Giudei* im Buonarroti, her. v. Narducci 1873, Art. I, S. 192 Anm. 9. Vgl. Abr. Jud. S. 26.

51) F. Wüstenfeld, die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische seit dem XI. Jahrhundert. Aus dem 22. Bd. der Abhandl. der k. Gesellsch. d. Wissensch. 4. Göttingen 1877, S. 83, § XVI, schon in der Ueberschrift: „Salomon (falsche Conjectur einer Münch. HS.) Canonicus Pad." verfehlt. Wie so die arab. HS. „näher auf den Verf. führt" sieht man im Verfolg nicht ein, da sich kein Resultat ergibt. Den Beinamen „Abu Bekr" hat niemals ein Jude geführt, unser Abraham hiess — wie fast alle Juden dieses Namens — abu Ishak (s. oben S. 66); auch sind nicht zwei Juden Abraham als Verfasser von Nativitäten zu unterscheiden, sondern zwei Recensionen und zwei lateinische Bearbeitungen (s. unten § 21). Den Gehilfen David mit dem J. 1244 sowie eine zweite Uebersetzung des Salio *(Hermes, de stellis fixis)* hat Wüstenfeld übersehen. Er hat (S. 4) unter den benutzten Quellen meine verschiedenen Abhandlungen so allgemein angegeben, dass an mehreren Stellen, wie die obige, nur ein genaueres Citat den Forscher in den Stand gesetzt hätte, die Sache weiter zu verfolgen. — Ich mache noch auf den (Zeitschr. 24, S. 336) herbeigezogenen Kasim b. Kasit (auch bei Wüstenf. S. 42 ohne weitere Nachweisung) aufmerksam wegen des bei ihm vorkommenden Sind-Hind.

52) Ob hier der Uebersetzer ins Französische Hagins spricht? (s. unten § 21).

aut truncatam fuisse literam in exemplari aut salvis bñ [bene?] dictis eius doctrinam nimis confusam tradidisse et minus artificiosam.

7. Cod. Vat. 384[13] enthält unter den astronomischen Tabellen eine arabische; es scheint aber das Ganze nicht von Abraham, sondern von Levi b. Abraham (s. § 21).

8. Eine angebliche Logik (הגיון) in Codd. Michael 82 und bei Uri 365[53]) ist von Kaufmann als eine andere Recension der gedruckten ethischen Schrift von Abraham bar-Chijja (Abr. Jud. S. 5 Anm. 5) erkannt, und möchte Kaufmann zwei Uebersetzungen aus dem Arabischen vermuthen. Ich glaube noch weniger, dass dieser in Barcellona und der Provence lebende Gelehrte etwas arabisch verfasst habe.

§ 8.

Von ibn Esra meint Geiger[54]): „Er hatte die arabische Bildung und die jüdische Gelehrsamkeit der damaligen Zeit, nach allen Richtungen hin, vollkommen in sich aufgenommen, und dennoch scheint seine Geburtsstätte [!!] insofern einen gewissen nachtheiligen Einfluss auf ihn geübt zu haben, als er, wie mich bedünken will, wenn auch der arabischen Sprache kundig und in der arabischen Literatur vollkommen heimisch [?], sich des Arabischen nicht so vollkommen bemächtigt hat, dass er auch schriftstellerisch darin auftreten konnte. Er lebte unter den Romanen [!], so war seine vaterländische Sprache nicht arabisch, und die Annahme liegt nicht fern, dass er diese erlernt, aber nicht schriftstellerisch zu handhaben vermochte. Es wäre sonst im höchsten Grade auffallend, dass von Aben Esra in der Zeit, innerhalb welcher er in Spanien lebte, d. h. in seinem Jünglings- und kräftigen Mannesalter, keine Schrift — die kleineren, die aus jener Zeit herrühren sollen [?], sind zweifelhaft — und dass überhaupt keine Schrift von ihm in arabischer Sprache erschienen ist.“ — Es ist uns jedoch von jener Periode überhaupt nichts bekannt, und ist es sehr wohl denkbar, dass Abraham erst in christlichen Ländern Veranlassung fand, seine arabische Bildung schriftstellerisch zu verwerthen. Die von Geiger versuchte Erklärung wird widerlegt durch Abraham's Zeit- und Landesgenossen, welche arabisch schrieben. In Bezug auf arabische Sprache und Literatur seien hier die, im Plane von Geiger's Vorlesungen nicht beabsichtigten Belege mit wenigen Worten erbracht.

---

53) Vgl. Litbl. des Orient XI, 342. — D. Kaufmann in Zeitschr. d. Deutschen Morgenl. Gesellsch. Bd. 30, S. 363, A. 5. — Immanuel b. Salomo, Divan f. 152[b] nennt הגיון hinter כלי הנחשת und חזיון wohl nur des Reimes halber. *

54) Das Judenth. u. s. Gesch. II, 131.

Ibn Esra behandelte die hebräische Grammatik nach Muster der arabischen[55]), brachte wohl zuerst ein berühmtes arabisches Lexicon (Buch *Ain)* zur Kenntniss der Juden[56]), erklärt nicht selten Wörter aus dem Arabischen, vielleicht theilweise nach Quellen, die wir nicht kennen. Wie weit er in der sonstigen Literatur der Araber sich umgesehen, hat meines Wissens noch Niemand untersucht, und Geiger's Behauptung ist eine rednerische Hyperbel. Die in mathematischen und astrologischen Schriften erwähnten Autoren habe ich theilweise in Bd. 24, 25 der Zeitschr. d. D. Morg. Gesellschaft behandelt und folgt später ein vollständiges Verzeichniss. Andere sind kaum irgendwo namentlich erwähnt. Das „Buch der ägyptischen Landwirthschaft" ist ohne Zweifel aus einem Lesefehler im Arabischen für „nabatäische" entstanden, und kein anderes, als das in neuester Zeit vielbesprochene Werk des Betrügers ibn Wa'hschijja[57]). Einiges hat er selbst übersetzt (Maschalla schon 1148), und ist kein Werk eines Muslim bekannt, welches vor ihm hebräisch übersetzt wäre.

Arabischen Ursprungs ist die Einleitung in ein eigenthümliches öfter gedrucktes Schriftchen, dessen Echtheit allerdings nicht unzweifelhaft ist. Es führt den Titel: חי בן מקיץ „Lebender, Sohn des Erweckers", wie der bekannte philosophische arabische Roman des ibn Tofeil (*'Hai ben Jokzan),* welchen Renan als „psychologischen Robinson" bezeichnet, mit welchem auch die Bibliographen das hebräische Schriftchen irrthümlich in Zusammenhang brachten. Ibn Tofeil erwähnt ein eben so betiteltes Buch von dem berühmten Arzte Avicenna, welches verloren scheint; aber eine ebenso betitelte kleine Abhandlung von 6 Blättern in Leyden hat ohne Zweifel dem Verfasser des hebräischen vorgelegen[58]), da er die (im Leydener Catalog abgedruckte) Einleitung in eleganter Reimprosa wiedergegeben hat. Darin trifft der Erzähler einen Greis, welcher spricht: „Hai . . ist mein Namen und die heilige Stadt (Jerusalem) mein Wohnort"[59]). Mit diesem Greis unterhält sich der Erzähler über alle Wissenschaften bis zur Physiognomik. Dann folgt im Text eine fabelhafte Erzählung von entfernten

55) *Mosnajim* f. 212, 234 ed. Ven.

56) *Zachot* Anfang, s. Zeitschr. D. M. Gesellsch. VI, 414; vgl. Hebr. Bibliogr. XI, 136. — Dss Werk des Sibeweih erwähnt schon Jona ibn Dschanna'h im XI. Jahrhundert.

57) S. Virchow's Archiv Bd. 52 S. 350, 499; Bd. 77 S. 507; Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 205 A. 30, Hebr. Bibliogr. XVII, 119 zu Friedländer, *Ess.* 243, vgl. p. 74.

58) Hebr. Bibliogr. 1870 S. 21, wo bemerkt ist, dass in der Bodl. HS. nur der Titel im Index vorkomme. Ueber eine Turiner HS. s. Nachtrag.

59) Hat vielleicht auch diese Stelle dazu beigetragen, ibn Esra in Palästina sterben zu lassen?

[G]egenden (Klimaten) bis zum göttlichen Wohnort. Der Hebräer geht von [d]er Einleitung sofort auf eine psychologische Allegorie über[60]), anschliessend [e]ine Wanderung durch ebenfalls allegorisch geschilderte „Reiche", d. h. Himmelssphären (Mond, Sonne, Mars etc., Fixsterne), worauf das Gebiet der [E]ngel und Gottes folgt. Nun wünscht der Erzähler den Weg zur Erkenntniss [u]nd Anschauung Gottes zu erfahren und wird auf Selbstkenntniss hinge-[w]iesen[61]). Mose Frankfurt, der das Schriftchen zuerst in Amsterdam 1733 [a]us einer HS. herausgab, suchte — im Geschmacke der Deutschen — den [N]amen Abraham im Zahlwerth der Buchstaben מקיץ—ח (248) des Titels. [I]bn Esra, wenn er Verfasser ist, würde solche Abgeschmacktheit mit seinem Humor gegeisselt haben.

Ob seine vereinzelte Polemik und Abwehr gegen den Islam[62]) auf Kenntniss von Schriften beruhe, lässt sich nicht ohne Weiteres bestimmen, [d]a es auch mündliche Disputationen und Mittheilungen gab. Der „grie-[c]hische Arzt", den er (zu Genesis 3, 6) für die Lebensbegrenzung des Menschen anführt, ist ohne Zweifel Galen[63]).

§ 9.

Wenn wir in Anschluss an die Lebensverhältnisse Abraham's den Kreis seiner echten Schriften durch die Sprache enger zu begrenzen vermochten, so werden wir mit weniger Sicherheit ein inneres Kriterium

60) Die fünf äusseren und inneren Sinne (S. 47 bei Goldberg, *Chofes Matmonim*, Berlin 1843) hat Avicenna, in seiner Psychologie, deutsch v. Landauer, Zeitschr. D. M. Gesellsch. Bd. 29 S. 390, wo die Benutzung bei Jehuda ha-Levi nachgewiesen ist. Die Vergleichung der Seelenkräfte mit gewissen Beamten ist auf die Glieder des Körpers übertragen von Gazzali und verarbeitet in einem Hymnus des ibn Esra, s. meine Nachweisung im Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 190.

61) Diese Pointe ist im Berliner Abdrück S. 50 oder in der benutzten HS. ausgefallen! Das griechische „Kenne Dich selbst" als Mittel zur Erkenntniss Gottes wird dem Khalifen Ali in negativer Form beigelegt (Hebr. Bibliogr. XV, 43), der Name ist also in der latein. Uebersetzung des Avicenna nicht eine Einschiebung, wie Landauer l. c. 374 annimmt; Gazzali citirt den Spruch in verschiedenen Schriften und behandelt ihn in seiner „esoterischen Schrift"; auf weitere Nachweisungen muss hier verzichtet werden. Bei den Juden wird Hiob 29, 26 darauf bezogen, s. H. B. XV, 44, Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 191 unt. and. in einem Hymnus unseres ibn Esra; vgl. dessen Comm. Exod. 31, 18 bei Friedländer, *Ess.* p. 34, der die Mittelglieder nicht kennt, und das Vorgedicht zu *Jesod Mora.* D. Kaufmann, Gesch. d. Attributenlehre u. s. w. Gotha 1877, S. 296 u. 445 kennt noch nicht den Ursprung des Schriftchens 'Hai ben Mekiz.

62) Mein: Polemische u. apologet. Lit. 1877, S. 352.

63) Friedländer, *Ess.* 74 Anm. zu ergänzen. Eine betreffende Anfrage des Josef ben Jehuda an Maimonides (s. Hebr. Bibliogr. XIX, 131) nennt Galen ausdrücklich. Die „Weisen Griechenlands" citirt ibn E. Exod. 12, 1.

anwenden dürfen auf dem Gebiete des Aberglaubens, welcher im Mittelalter — und leider auch darüber hinaus! — selbst die grössten Geister, mit sehr wenigen Ausnahmen (wie z. B. Maimonides) derart beherrschte, dass man gerade den philosophisch gebildeten Männern, insbesondere Mathematikern und Astronomen, den abscheulichsten Unsinn andichten oder unterschieben durfte. Ich erinnere nur an Gerbert und Albertus Magnus. Hier hat die Pseudepigraphie ihre glänzendsten Eroberungen gemacht, die noch heute ihr schwer abzugewinnen sind[64]). In Bezug auf die jüdische Literatur hat sich eine leicht verwirrende Bezeichnung eingeschlichen, nämlich: „kabbalistisch“. Mit diesem Worte sollte man nicht alles Abergläubische oder Mystische bezeichnen, wenn auch manches darunter in die Kabbala mündete, oder vorgab, zu derselben zu gehören. Gerade bei ibn Esra wird die Unterscheidung recht dringlich, die hier möglichst kurz erledigt werden soll[65]).

Was in der jüdischen Literatur bis zum Eindringen der arabischen Wissenschaft (VIII. Jahrh.) als „Mystik“ bezeichnet wird, besteht aus ungeordneten phantastischen Vorstellungen von Welt, Erde, Himmel, deren Entstehung, Form und Bewohner, und dem Glauben an Wunderwirkung gewisser Namen von Gott und Engeln. Da die semitischen Buchstaben zugleich Zahlzeichen sind, so ist schon frühzeitig der Zahlwerth der Wörter als exegetische Spielerei benutzt worden, die man durch das Wort „Geometria“ — vielleicht richtiger „Grammataia“, — bezeichnete. Jene Elemente der älteren „Geheimlehre“ treten nirgends als „Tradition“ auf, deren Ansehen dem Gesetz allein vorbehalten blieb. Zu Anfang des 13. Jahrh. bildete sich in der Provence, — gegenüber der aristotelischen Philosophie mit ihren zehn „Sphären“ *(Galgallim)* und Intellecten, in Anschluss an das System des Ptolemäus[66]), wofür Maimonides eine esoterische Ueberlieferung

---

64) S. meine Abhandl.: Zur pseudepigr. Literatur, insbesondere der geheimen Wissenschaften des Mittelalters. Aus hebr. u. arab. Quellen (Nr. 3 der „Wissenschaftl. Blätter aus der Veitel Heine Ephraim'schen Lehranstalt“, Berlin 1862). — Zum Speculum astronom. des Albertus Magnus, über die darin angefürten Schriftsteller und Schriften. Separatabdr. aus der Zeitschr. für Mathematik und Physik Bd. XVI [auf dem Umschlage falsch XIV] S. 357—396.

65) Ausführlicheres findet man in § 13 meines Artikels „Jüdische Literatur“ in Ersch und Gruber's Realencykl. (Bd. 31) und in dessen englischer Uebersetzung (*Jewish Literature*, London 1857).

66) Vgl. Mose Tachau (unten Anm. 76) S. 84: Maimonides und ibn Esra über die zehn Sphären; S. 96: „er macht eine neue Thora und Tradition (Kabbata) um unsere Thora zu läugnen.“ S. 68: Abraham ha-Nasi (d. i. bar Chijja) . . . Zur Zeit des Saadia [gest. 941] gab es Weise unter den Indern (!) und Philosophen, welche Alles durch ihre wissenschaftliche Forschung erkennen wollten. Es gab einen König Ptolemäus [ich lese בטלמיום], einen Weisen und Astrologen [hier

in Anspruch nahm — eine Emanationstheorie, welche für jene Sphären eine Art von Aeonen mit verschiedener Anordnung (nach Art der sog. Porphyrbaums) setzte und diese, mit allen älteren mystischen Elementen, auch manchem, den Philosophen entlehnten Material, ausgeführte Lehre für die echte Tradition *(Kabbala)* ausgab, die selbst über dem Gesetze stehe, als „praktische" Kabbala alle Arten von Wunder wirke. Ein Product dieser Kabbala, verbunden mit Geldspeculation, ist das berühmte — vielmehr berüchtigte — Buch Sohar, das in seiner Wirkung alle anderen Fälschungen weit hinter sich zurücklässt, da noch in unserer Zeit achtbare christliche Theologen die Trinitätslehre der alten Juden aus diesem Buche schöpfen, ohne die Angriffe auf das Christenthum zu beachten[67]). — Man sollte das Wort Kabbala nur auf diese jüngere Theosophie anwenden.

Ein eigenthümliches Büchelchen, an welches sich schon im 9. Jahrh. Interpolationen und Erklärungen knüpften, das sog. Buch der Schöpfung *(Sefer Jezira)*, harrt noch immer der kritischen Bearbeitung[68]). Es stellt in etwas phantastischer Weise die 10 Zahlen (ספירות *Sefirot)* und 22 Buchstaben als Vermittler der Schöpfung auf. Die echten, theilweise arabischen Erklärer des Büchelchens im 10. Jahrh. bringen mathematisches, physikalisches und philosophisches Material heran[69]). Ihnen Allen sind die 10

---

so viel als Astronomen], der viele Bücher der Wissenschaften verfasste. [Ueber die bekannte Vermengung des Astronomen und Königs, auch in echten Schriften Abraham's, z. B. in der Arithmetik bei Terquem, Not. p. 15, s. Zeitschr. d. D. M. Gesellsch. Bd. 25 S. 397 und Halberstamm zu Ibbur S. 8.] Sie [die Inder] erfinden, wie die Welt steht, und er [Ptolem.?] meint, wegen der Schnelligkeit der Sphären steht die Erde in der Mitte in der Luft, wie z. B. wenn Jemand ein Senfkorn in eine leere [l. רקנית?] Eierschale oder ein Glasgefäss thut, und dieses so stark dreht, dass das Korn in der Mitte bleibt." Als Beleg dient eine ähnliche Stelle bei Saadia (Religionsphilos. II, S. 57 ed. Leipzig 1859); aber das Gleichniss steht nur in der von Mose benutzten hebr. Paraphrase eines Anonymus, der nicht vor dem XII. Jahrh. gelebt hat (s. Hebr. Bibliogr. XIII, 82).

67) S. Polem. u. apologet. Lit. S. 362.

68) Die Ausg. Neu-York 1877 mit englischer Uebersetzung von Isidor Kalisch bietet einen willkürlich gemachten Text und ungenaue Uebersetzung, s. Hebr. Bibliogr. XIX, 122. Ueber die an das Buch Jezira sich knüpfenden culturhistorischen Fragen s. meine Anzeige von Günther's Studien zur Gesch. d. mathem. u. phys. Geographie, in Hebr. Bibliogr. XVII, 93, 94.

69) Ich erinnere an die von Munk mitgetheilte Stelle über die „Staubschrift" (*Gobar*), bei Reinaud, Mém. sur l'Inde p. 399, zu gleicher Zeit hervorgehoben in meinem Art. Jüdische Lit. § 21 A. 93 (*Jew. Lit.* p. 363, 378), wo ich bemerkte, dass der betr. Autor kein Zero erwähne, von der Rechentafel (פנקס, eigentlich πιναξ) spreche und die sog. Knöchelrechnung kenne (vgl. Abr. Jud. S. 29 A. 50). In der HS. Fischl 25 D. f. 127 hinter dem Buch *Mispar* des ibn Esra findet sich ein Stück überschrieben: „Fingerrechnung, welche arabisch *Gobar* heisst." — Ueber

„Sefirot", wie es der einfache Sinn erfordert, die 10 Zahlen. Erst die Kabbala des 13. Jahrhunderts verwandelt die Zahlen in Aeonen, und seitdem wird das „Buch der Schöpfung" in diesem Sinne gedeutet und für ein kabbalistisches ausgegeben.

Wie verhält sich ibn Esra zu diesem Buche? Der Schwärmer und Pseudo-Prophet Abraham Abulafia aus Toledo (geb. 1240), der in der Buchstaben-Kabbala den Mittelpunkt aller Weisheit gefunden, will einen Commentar ibn Esra's zum Buche Jezira kennen, der „grösstentheils Philosophie, theilweise kurze Kabbala" enthalte [69b]). Aber Niemand aus jener Zeit kennt diesen Commentar, bis um 1360—1370 die Supercommentatoren ibn Esra's aus einem solchen, oder aus der Erklärung „eines Theils" des Schöpfungsbuches unbedeutende Stellen anführen [70]). Dann verliert sich wieder jede Spur dieses angeblichen Buches, welches in mancher Beziehung interessant gewesen wäre. Bei ibn Esra's Vorliebe für Zahlensymbolik ist es kein Wunder, wenn er in echten Schriften jenes Buch heranzieht, ja sogar in der grammatischen Schrift *Zachot* und sonst die hebräischen Buchstaben danach ordnet, auch die Redensarten desselben als typisch anwendet [71]). Vielleicht hat man seine Excurse (unten § 11) für einen Commentar ausgegeben? Aber die „Sefirot" sind auch ihm die Zahlen [72]); in seinen echten Schriften ist nichts, was mit dem Namen Kabbala im oben begrenzten

---

jenen Autor selbst und die Pariser HS. hat Munk (*Notice sur Aboulwalid* p. 51 des Sonderabdr. aus dem *Journal asiat.*, deutsch im Litbl. des Orient 1850 S. 807) wenig befriedigend gehandelt und die wesentliche Identität zweier Uebersetzungen oder Bearbeitungen nicht erkannt; s. meinen Catal. Bodl. S. 1117 u. Add., 1335, 2762; Schorr, *he-Chaluz* VI, 63; mein Alfarabi 248, vgl. Hebr. Bibliogr. XII, 57; wonach D. Kaufmann, Geschichte der Attributenlehre u. s. w., Gotha 1877, S. 173, zu ergänzen ist.

69 b) Jellinek, Bet hamidrasch III, S. XLIII, vgl. unten Anm. 75.

70) Der, wenig zuverlässige Moscono in der Bulgarei (Magazin f. d. Wiss. d. Jud. III, 98 A. 12), Zarza, Motot (Hebr. Bibliogr. XV, 16), Schemtob ibn Major (bei Schiller-Szinessi, *Catal. of the Hebr. MS. etc.* P. 1 Cambridge 1876, p. 153); vgl. *Jewish Lit.* 302 n. 29, p. 357 zu 111; Catal. Codd. hebr. Lugd. Bat. p. 96; Hebr. Bibliogr. XIX, 122.

71) Zu Genes. 1, 2; Exod. 3, 15; Psalm 15, 9; Kohelet 21, 6 (Friedländer, *Ess.* 27 A. beachtet die Quelle nicht), *Meosnajim* f. 232 ed. 1545, *ha-Schem*, Kap. 1 u. 3, *Jesed Mora* Kap. 12, Buch vom Einen unter 4 u. 7 (S. 40, 57); Zahlwörter unter 10 S. 166; Arithmetik, Anfang. Gelegentlich bemerke ich, dass die Redensart מכאן ואילך צא וחשוב dem B. Jezira Kap. IV in der sog. Mischna der Maasse I, 6, 8 entlehnt scheint.

72) חכמי הספירות und חכמת sind die Zahlkundigen und die Zahlwissenschaft; s. W. Bacher, Abr. ibn Esra's Einleitung zu seinem Pentateuchcomm. (aus dem Decemberheft 1875 der Sitzungsberichte der phil.-histor. Classe der k. Akademie) Wien 1876, S. 17, 19 und Anfang der Arithmetik. Abulafia (bei Jellinek, Philosophie und Kabbala, Leipz. 1854, S. 37) verwirrt Alles.

Sinne bezeichnet werden darf[73]). Er verpönt die exegetische Anwendung der Zahlwerthe der Wörter[74]); dem gegenüber beruft sich der erwähnte Abulafia[75]) auf den Commentar zum Buche Jezira und das Buch vom Gottesnamen, worauf wir zurückkommen.

Schon ein halbes Jahrhundert nach seinem Tode wurde ibn Esra in Deutschland als Thaumaturg verschrien und theilweise wegen eines ihm untergeschobenen Buches verketzert. Mose ben Chisdai aus Tachau in Böhmen, wahrscheinlich in Regensburg, dann in Oesterreich[76]), ein unkritischer Zelot gegen spiritualistische Begriffe von Gott und gegen die „externe" (profane) Wissenschaft[77]), behauptet, ibn Esra habe die ihn beständig begleitenden „Schedim" (bösen Geister) geläugnet[78]) und zu grossen Erkenntnissen gelangen können, welche den Engeln versagt sind. Dennoch hätten die Geister ihm ihre Existenz bewiesen, indem sie in England seinen Tod herbeiführten[79]). Ferner berichtet er[80]), ibn Esra nehme an,

---

73) Das ist schon im Catalog Bodl. p. 689 angedeutet, aber missachtet im Catalog der Pariser hebr. HSS. (1866), wie Geiger, j. Zeitschr. IV, 187 rügt. Unter n. 1092⁴ verzeichnet dieser Catalog S. 201 „einige Sentenzen über die kabbalistische Bedeutung des Tabernakels und der heil. Gefässe" (!) mit Berufung auf Litbl. X, 430, wo aber Dukes eine Probe gibt von philosophischen Sentenzen, die aus verschiedenen Büchern excerpirt scheinen, aber dem Abr. beigelegt werden. Auch Friedländer, *Ess.* 125, gebraucht noch das Wort „kabbalistisch". — Das „Geheimniss der Buchstaben" bei Wolf, Bibl. Hebr. I, S. 80, De Rossi, Wörterb. S. 8 n. 14 ist HS. Vatican 405⁷ anonym; die HS. Oppenh. bei Wolf III S. 49 ist Oppenh. 979 Qu. (*Temuna*), aber die vorangehenden Collectanea (*Likkutim*) werden im handschr. Catalog fälschlich ibn Esra beigelegt. Ueber die angebl. „kabbalistischen" Geheimnisse im Pentateuch s. oben Anm. 11. — Del Medigo (bei Geiger, Melo Chofnajim S. 8) nennt ibn Esra neben Maimonides in Bezug auf die Gottesnamen als erleuchteten Mann.

74) Zu Genes. 14, 14 (vgl. Friedländer, *Ess.* 125) Einleitung, 4. Methode zu Ende, wo auch gegen zu weit gehende Zahlsymbolik; das Beispiel der 28 Mondstationen und der in ihnen aufgehenden Figuren s. auch zu Exod. 26, 2, Kohelet 3, 1; Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24, S. 359, wonach Bacher l. c. 68 zu ergänzen ist.

75) Brief an Abraham, bei Jellinek, Philosophie u. Kabb. S. 4; über die HS. vgl. Hebr. Bibliogr. XV, 32. Abulafia schildert dort sieben Arten der Auslegung unter dem Einfluss ibn Esra's, indem er das Bild desselben vom Centrum (Wahrheit) und der Peripherie (s. unten § 10) umkehrt und die Wahrheit in die allumfassende Sphäre verlegt.

76) Ueber ihn s. die Citate in Hebr. Bibliogr. XVIII, 66 und unten A. 85.

77) Seine interessante Streitschrift ist leider unvollständig erhalten, abgedruckt in Blumenfeld's *Ozar Nechmad* Bd. III, Wien 1860, S. 58—99. — S. 64 חכמה החיצונית 72 Z. 6 החיצונים; 85 Z. 13 v. u. דעת החיצונה. S. auch oben S. 78 Anm. 66.

78) Streitschr. S. 97 Z. 6 v. u. lies וכפר בהן.

79) S. das Genauere oben S 65. Anm. 13. Menachem Ziuni, aus Speier (XV. Jahrh.), verlegt den Sitz der Unholde nach dem Norden, z. B. Norwegen; s. Hebr. Bibliogr. XIV, 33 Anm. 2.

80) Daselbst S. 85.

dass man durch heilige Namen Visionen und Offenbarungen bewirken könne u. s. w., während Abraham (zu Exod. 3, 13 kürz. Rec.) mit einem seiner schlagenden Wortwitze bemerkt: „Diejenigen, welche vermeinen mit dem Namen grosse Werke zu verrichten, kennen den Namen (d. h. Gott) nicht.“ Allein das „Buch des Lebens“ (ספר החיים), welchem Mose Tachau's sehr ungenaue Citate angehören, und das in einigen HSS. den Namen ibn Esra's trägt[81]), ist ein Zerrbild Abrahams, allerdings ein Zeugniss seines frühzeitigen Einflusses auf die Juden in Deutschland, das er selbst gewiss nicht berührt hat. In meiner ursprünglichen Beschreibung der Münchener HS. — welche nebst so vielen anderen wegen Mangels an Raum wegbleiben musste, — hiess es: Der anonyme Verfasser kennt die Commentare zum Buch Jezira von Sabbatai Donnolo[82]), vielleicht auch von Saadia Gaon (gest. 941), oder des letzteren Religionsphilosophie in der Paraphrase. Er verbindet Zahlen- und astrologische Mystik, wie sie zum Theil mit derselben Terminologie bei ibn Esra vorkommt (jedoch ohne letzteren zu nennen) mit der bunten phantastischen Mystik, die wir bei Elasar aus Worms finden und steht im Ganzen letzterem sehr nahe. Er gebraucht französische Wörter und Sprüche (z. B. am Ende). — Kürzlich hat Jellinek[83]) geradezu erklärt, dass die in Wien befindliche HS. Pinsker's von diesem Elasar verfasst sei, unter dessen Namen allerdings ein so betiteltes unedirtes Buch bekannt ist. Ich unterschied im Münchener Catalog diese beiden, mit Zunz[84]). Anderseits finde ich jetzt in meinen Excerpten aus dem anonymen Buche die von Zunz[85]) aus Elasar angeführte Stelle

81) Unter Anderen in HS. München 207 und einer HS. des Antiquars Schönblum die ich 1869 excerpirte; s. auch Benjacob's Thesaurus libr. (1880) S. 178 n. 559, 560.

82) Dieser Comm. des um 941 in Italien schreibenden Astrologen und Arztes (Virchow's Archiv Bd. 39—42) wird von Prof. Castelli in Florenz zur Ausgabe vorbereitet.

83) Hebr. Bibliogr. XVIII, 4.

84) Literaturgesch. d. synagog. Poesie, Berlin 1865, S. 324, vgl. S. 317: Elasar kannte Saadia, Donnolo, Abenesra und verflocht deren Lehrsätze nebst Stellen aus dem ס׳ החיים eines Ungenannten ... in seine eigenen Werke, wo Hechalot [Schilderungen der Himmelsregionen] und Midrasch, Philosophie und Zahlenweisheit, Aberglauben und Sittenlehre friedlich nebeneinander lagern. Vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 10 unten, vgl. XIV, 32. Neubauer, bei Renan, *Hist. lit. de la France*, tome XXVII p. 466, ist der Ansicht, dass Elasar in Folge der Ermordung von Frau und Kindern (1214) tiefsinnig geworden sei. Derselbe hebt p. 465 ein französisches Sprüchwort hervor, das noch zu erklären ist; aber das „*livre de Gloire*“ ist eigentlich von Elasar's Lehrer, Jehuda (gest. 1216).

85) Zur Gesch. u. Lit. Berlin 1845, S. 377 — HS. Schönblum 6 Col. 4, München 207 f. 4b. — Beachtenswerth ist auch, dass nach Zunz, Litgesch. 316, Mose Tachau im Lebensb. Elasar's citirt ist, sowie dass Mose (nach der Vorbemerkung Kirch

lass die unschuldigen Kinder der Nichtjuden keine Strafe im Jenseits ereiden, da ihre Anlage zum Bösen nicht zur That geworden, die aber zu len Citaten aus dem anonymen Buche gehören kann. Es muss also eine Prüfung der von Zunz benutzten HS. abgewartet werden[86]). Die Schriften les Elasar Worms haben auf den Schwärmer Abulafia eingewirkt, der elbst ein prophetisches „Buch des Lebens" um 1282 verfasst hat[87]). So st denn des Toledaners ibn Esra Zahlenweisheit, mit fremdartigen Elenenten verbunden, über Frankreich und Deutschland nach einem Jahrundert wieder nach Toledo zurückgekehrt, wo auch christliche Kreise unter Mitwirkung von Juden sich dem Studium der Astronomie und Astrologie hinaben, und gelegentlich manches pseudepigraphische Werk erzeugten[88]). Es ann hier nicht die Absicht sein, ibn Esra's Spuren in der kabbalistischen Liteatur zu verfolgen; das gegebene instructive Beispiel sollte zugleich zeigen, vie schwer der Weg zur Ausscheidung untergeschobener Schriften ist.

Zweifelhaften Ursprunges scheint mir ein geomantisches „Loosbuch" גורלות החול), welches in verhältnissmässig alten Handschriften dem ibn Esra beigelegt wird[89]), da letzterer, wenigstens an Einer Stelle, auf das Punktwerfen" hinzuweisen scheint[90]).

---

eim's S. 55) unter dem Namen Maimonides den Comm. zu Hiob des Nachmanides rwähnt, der allerdings schon 1223 Talmudisches verfasste (Zunz *l. c.* 316). Dass er im J. 1234 schreibende Verf. des *Arugat ha-Bosem* (Perles S. 7, vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 84) Mose als Verstorbenen bezeichne, ist unsicher, da die Eulogie ich auf den Vater beziehen kann.

86) Wahrscheinlich Oppenh. 891 Fol. oder Mich. 187. Neubauer, bei Renan . *c.* S. 467, bezeichnet das Buch als *„prière et élévation vers Dieu"*.

87) HS. München 285, mein Catalog S. 113, V.

88) V. Rose, Ptolemäus und die Schule von Toledo, im „Hermes" Bd. VIII, 27 ff., vgl. Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellsch. Bd. 28, S. 454, und weiter unten.

89) Eine HS. des Buchhändlers Coronel, die ich 1871 sah, ist 1411 geschrieben. Die Geomantie ibn Esra's ist öfter mit der des Charisi verbunden und das Verältniss nicht überall klar; z. B. HS. Oppenheimer 1175 Qu.; Michael 128, 355 שער העצות im Register S. 317 ist nur eine Fortsetzung), München 228[8], Paris 1059[1] nvollst., Schönblum-Ghirondi 58, Barberina in Rom (Berliner, Magazin I, 45). Hingegen scheint Cod. De Rossi 103[2] nicht die Geomantie, sondern eine andere Art von Loosbuch, wie das dem ibn Esra sicher untergeschobene, unter dem Titel פוקת עבריו Florenz 1755, Amsterdam 1781, Fürth 1783 gedruckte (Zedner S. 23, ungeau Benjacob S. 456 n. 27, 28); s. Hebr. Bibliogr. VI, 122. Dasselbe oder ähnlich ist vohl das *Seder Goralot* Ven. 1657 bei Zedner l. c., vgl. Catal. Bodl. 527 n. 3436.

90) Zeitschr. der D. M. Gesellsch. Bd. 18 S. 176, vgl. Bd. 25 S. 410, Bd. 31 S. 762. — Auch ein Theil der Astrologie wird durch גורלות „*sortes*" bezeichnet.

§ 10.

Begeben wir uns nun auf das Gebiet der *echten*, oder wenigstens von Schülern verfassten Schriften, so werden wir hier wiederum uns in einem weiten Kreise umzusehen haben. Zahl und Maass beherrschen Abraham derart, dass er sie wenigstens als Bilder anbringen muss, wo sie nicht etwa eine symbolische Bedeutung haben, über deren Geltung er sich vielleicht selbst niemals klar geworden. So führt er in seiner Grammatik *Zachot* die 3 Grundvocale auf die 3 Arten der Bewegung zurück — wobei zu beachten ist, dass der Vocal in der arabischen und der ihr nachahmenden hebräischen Grammatik „Bewegung" heisst. — In der Einleitung zum Pentateuchcommentar schildert er die 4 Arten der Erklärer nach dem Bilde des Centrums und der Peripherie[91]). Selbst seine Verse sind nicht frei von dieser Geistesrichtung. „Dichten war nicht seine eigentliche Thätigkeit: Zahl- und Maass lauern in seinen Versen, und aus den Worten springt des Gedankens Blitz, nicht das Bild der Phantasie hervor."[92]) In einer für den Versöhnungstag bestimmten poetischen Darstellung des einstigen Gottesdienstes sucht er ein „pikantes ungebrauchtes Motiv" und findet es in dem Zahlenverhältniss der einzelnen Acte zu den noch stattfindenden religiösen Uebungen[93]). Ein anderer Hymnus von 14 Zeilen (Akrostichon) zählt Dinge auf, deren Zahl 1 (Gott) bis 10, aus dem Gebiete der Physik, Metaphysik, sogar Grammatik, in änigmatischer Weise, so dass man es mit Commentaren versah[93b]). In ähnlicher Weise giebt ihm auch die Er-

---

91) Friedländer, *Ess.* 145. Bacher l. c. S. 13, 16 und 56 hat die, wahrscheinlich ältere Recension vernachlässigt (vgl. Friedländer 120, 143), worin die erste vom Centrum am meisten entfernte Methode die Allegorie der Christen, die 3 die weitschweifige der Gaonim, welche profane Wissenschaften (חיצונות oder נכריות abhandeln, die man in besondern Lehrbüchern zu behandeln habe (vgl. unter A. 96). Nur Gottesnamen (vgl. Friedländer 137 Anm. und 146) und Gründe der Gesetze gehören in Bibelcommentare. Ueber Gesetze (ungenau „*these subjects*" bei Friedländer 146) verspricht ibn Esra ein Buch, offenbar *Jesod Mora* (unten § 13, 8) also ist diese Recension ungefähr 1157 verfasst, wie Rapaport ohnes dieses bisher übersehene, Argument annahm. Friedländer's Unterscheidung der in Italien oder Provence verfassten Bücher (p. 143, 158) kann hier nicht weiter verfolgt werden.

92) Zunz, Literaturgesch. der synagog. Poesie, S. 207.

93) M. Sachs, Die religiöse Poesie der Juden in Spanien, Berlin 1845, S. 314

93b) Das Gedicht ist mitgetheilt von Dukes, Litbl. VII, 486, mit Commentar des Prophiat Duran (s. unten § 12, 5) in den von El. Aschkenasi herausg. Miscellen: *Taam Sekenim*, Frankfurt a. M. 1854, S. 78 (Handschr. Medic. Plut. I Cod. 42^{11}, Bisc. 310 in 8^{0}); vgl. Hebr. Bibliogr. X, 109. — Einen handschr. Commentar von Michael Kohen (XV. Jahrh. in Griechenland?) besitzt Os. H. Schorr in Brody — Dukes, Mose b. Esra (1839) S. 89, nennt ältere Gedichte, welche Muster sein sollen klärung der heil. Schrift Veranlassung zu allerlei Zahlerörterungen, vorzugsweise zur Erläuterung des Tetragrammaton. Ein beliebtes Thema ist die Vergleichung Gottes mit der Eins, die selbst keine Zahl und doch das Element aller Zahlen ist.[94]) Arabische und jüdische Religionsphilo-

94) Stellen bei N. Krochmal, *More Neboche ha-seman*, Lemberg 1851 (ed. II. 1863 besitze ich nicht) S. 258 ff. in einer angefangenen Darstellung der philosophischen Ansichten (ein strenges System ist wohl nicht vorauszusetzen) des ibn Esra; vgl. Kaufmann, Attributenlehre S. 507 zu 288; Friedländer, *Ess.* S. 18, 21. — Verschiedene, leicht zu vermehrende Parallelen habe ich zu einer Stelle bei Abraham bar Chijja angegeben, Hebr. Bibliogr. IV, 88. Hier sollen nur einige (meist dort unerwähnte) Vorgänger ibn Esra's erwähnt werden, welche diese pythagoräische „Sonderstellung der Eins“ kennen, ohne zu den „Anhängern der jüdischen Kabbala“ (Cantor, Mathemat. Beiträge S. 270, vgl. S. 336 und weiter unten) zu gehören: a) *Algorithmus* (Khowarezmi, Uebersetzung ed. Boncompagni 1857 p. 2, s. unten Anm. 95; vgl. auch Cantor, Ein Codex des Klosters Salem, S. 11). Die „lauteren Brüder“ (Encyklopädiker des X. Jahrhunderts) bei Kaufmann, l. c. p. 288 (Weltseele S. 1 ist Pythagoras ausdrücklich genannt, vgl. Hebr. Bibliogr. XIII, 10 und 11); Bathalajusi (aus Badajoz) und dessen Plagiator Gazzali (Waage der Speculationen Kap. 1, Verzeichniss der hebr. HSS. der k. Bibliothek in Berlin 1878 S. 104); Isfaraîni (gest. 1078/9) bei Haarbrücker zu Schahrastani, Religionsparteien u. s. w. Halle 1850, II, 283; vgl. daselbst II, 99 die Darstellung der Lehre des Pythagoras. b) Juden: ein alter Scholastiker, bei Dukes, *Schire Schelomo*, Hannover 1858, I. Anhang S. IV (wo Z. 1 nicht mehr zum Jeziracommentar gehört, s. meine Bemerkung zu HS. München 92); Bechai (s. Kaufmann, die Theologie des Bachja S. 63). Hingegen ist „Nissim, Anhänger der Gnosis (!)“ bei Jellinek, Beiträge zur Geschichte der Kabbala, I. Leipzig 1852, S. 20, kein anderer als ibn Esra selbst, wie aus Geiger's deutscher Abhandlung zur Quelle, S. 48 zu ersehen war, nämlich das Buch *Jesod Mora*, in kürzerer Fassung. Dagegen wird bei älteren Scholastikern die Vergleichung der Einheit Gottes mit der Zahl abgewiesen (Kaufmann, Attribut. 24, vgl. das Gebet Elia's Anfang der *Tikkunim* zum Sohar: „Du bist Eins, nicht der Zahl nach“ in Verbindung mit den zehn Sefirot, und gleich darauf „du bist die *causa causarum*“!). Mit den Elementen vergleicht das Dekadensystem Isak Israeli b. Salomo (gest. um 940—50; *Opera Isaaci, lib. elementorum* latein. von Constantius Afer, zu Ende, besser in der handschr. erhaltenen hebr. Uebersetzung). Nach Gazzali (bei Schmölders, *Essai sur les écoles philosophiques chez les Arabes*, Paris 1842, p. 116) bestreiten die Mathematiker eine Erkenntniss Gottes überhaupt. — Beachtenswerth ist der Ausdruck תושיה (Einsicht, vgl. Sprüche Sal. 2, 7; 3, 21; 8, 14), welchen ibn Esra für die wahre Philosophie oder Metaphysik (gewissermassen Heilslehre) zu gebrauchen scheint, z. B. mit אנשי (Männer), Antwort an David Narboni S. 2 (*Jew. Lit.* 296), mit חכמי (Weise) *Jesod Mora* Cap. 12, zu Psalm 104, 30 (Bacher Einleitung 68), im astrolog. *lib. rationum* Anf., in der latein. Uebersetzung f. 32 Col. 2 nur „*sapientes*“, im Buch vom Einen unter 3 und 7 (S. 30, 56); mit דרך (Methode) zu Gen. 1, 1 (Friedländer *Ess.* 20 A. 2), *plur.* zu Anfang des *Arugat ha-Chochma;* technisch scheint das Wort nicht früher gebraucht, beim Karäer Nissi (Pinsker, *Lickute*, Wien 1860, S. 38, 40, Anh. S. 9, interpolirt nach Schorr, *he-Chaluz* VI, 70), mir ganz ver-

sophen hatten ein besonderes Interesse, die ihnen von den christlichen Syrern zugeführte Wissenschaft gegen Trinität und Verkörperung Gottes zu wenden. Der Vermittler ihrer Zahlphilosophie war namentlich Nicomachus aus Gerasa[95]). Die uns ganz willkürlich scheinenden Theorien der Astrologen sind für ibn Esra Ausflüsse der besonderen Beschaffenheit der Zahlen, und er findet sie in allen Erzählungen und Anordnungen des Pentateuch, natürlich als ein „Geheimniss", das er den in profanen Wissenschaften[96]) ungeübten Glaubensgenossen in christlichen Ländern nicht

---

dächtig. Der hebräische Uebersetzer des Commentars zu Jezira (I, 1) von Saadja (HS. Münch. 221 f. 57, HS. 92 f. 80, wo von den zehn Kategorien die Rede ist) gebraucht allerdings חכמי הח' (das arab. Textwort wäre in Oxford zu ermitteln); aber das Zeitalter jenes Uebersetzers ist zweifelhaft und dieser Ausdruck vielleicht als Criterium zu verwerthen. Bei Abraham bar Chijja, Anf. *Hegjon* und Hebr. Bibl. VII, 94, ist es noch mit den biblischen Synonymen verbunden. Eine spätere Verquickung bietet Pseudo-Abraham ben David zu Jezira f. 15b: אורחות תושיה bei den חכמי המחקר. — Eigenthümlich ist auch der Gebrauch des Wortes תולדה (*generatio*, Einzahl richtiger in HS. zu Ende der Abhandlung über die Zahlwörter), auch *plur.*, wie es in der Bibel vorkommt. Es bedeutet zunächst die Natur im Sinne von natürlicher Beschaffenheit (s. die klassischen Stellen zu Exod. 23, 19, 26; 31, 6, Einleitung bei Friedländer, Anh. S. 2, Z. 3, Lev. 1, 1 (das Geheimniss, auch substituirt bei Joseph ben Elieser zu Exod. 23, 20 für Anderes bei Abr. zu Daniel 10, 21); auch die vier Elemente als Grund der Qualitäten (Buch vom Einen S. 55, 63); dann in Verbindung mit חכמה und חכמי die Naturwissenschaft und die Naturkundigen, s. Exod. 18, 13, (bei Bacher Einl. S. 17), 31, 3 (unten A. 96), Esther 8, 10 בעלי חכמה, wie auch wohl Exod. 25, 40 (bei Dukes, Philos. 53) zu ergänzen ist; vgl. zu Exod. 23, 20 kürz. Rec., Arithmetik Ende Kap. 5, *Jesod Mora* S. 8, bei Creizenach S. 20 „Phänomenlehre", wofür Jost (Vorr. zu Lippmann's ed. *Sefat Jeter* S. 13) Schluss-Lehre setzen möchte!* Ibn Esra kennt das Wort als logischen Terminus noch nicht, vgl. ה' הראיות Koh. 7, 3. Josef b. Elieser zu Lev. 1, 1 (Anm. 12, vgl. zu Exod. 23, 25) erklärt es durch das jüngere, dem arabischen nachgebildete טבע. Abr. b. Chijja (Hebr. Bibl. VII, 94) nennt die Naturkunde חכמת היצורים, Wissenschaft der Geschöpfe. — חכמי המולדת zu Exod 2, 2 scheint Nativität zu bedeuten. Dem Astrologen dürften beide Begriffe verwandt gewesen sein und daher die Wahl des ersteren Ausdrucks.

95) S. die Nachweisung bei den „lauteren Brüdern", Avicenna, Abraham ba Chijja, in Hebr. Bibliogr. VII, 87 A. 8 und XIII, 10. Der Schüler des Maimonides Josef ibn Aknin, empfiehlt Nicomachus (bei Güdemann, das jüd. Unterrichtswesen etc. Wien 1873, S. 85; vgl. auch Comtino in Verz. der hebr. Handschr der k. Bibliothek in Berlin S. 26 n. 49). *„In alio libro arithmetice"* bei Kho warezmi, Algorithm. S. 2 (vgl. oben Anm. 94) dürfte ebenfalls Nicomachus sein Ueber das Studium desselben in Spanien s. meinen Artikel: Der Kalender vo Cordova, in Literaturzeit. der Zeitschr. für Mathem. XIX, 6; vgl. Jew. Lit. p. 378

96) Vgl. Einleit. zum Pentat. oben Anm. 91 und zu Daniel 10, 21 mit Hin weisung auf סוד המערכת Geheimniss der Constellation und סוד החלומות Geh der Träume; vgl. סוד החשבון Geh. des Rechnens, oder der Rechnung, zu Num. 19, 12

ohne Gefahr verrathen mochte, so dass erst gegen Anfang des 14. Jahrh., als die herrschende Philosophie des Maimonides der Orthodoxie und Kabbala zum Opfer gefallen war, in der Provence, Nordspanien, Italien und selbst bis nach Griechenland und der Bulgarei hin, jene Geheimnisse von Supercommentatoren[97]) grossentheils aus den anderweitigen Schriften verrathen wurden und die astrologische Bibeldeutung überhaupt zur Geltung kam[98]). Wie weit jedoch Abraham selbst, trotz aller Zurückhaltung, in seinen Aeusserungen ging, dafür mag das eine Beispiel genügen, dass er das Orakel des Hohenpriesters, die *„Urim we-Tummim“*, für ein Astrolab oder etwas ähnliches erklärte![98b]) In der hier angedeuteten Grundanschauung und halblauten Darstellung ist Abraham, bei manchen Widersprüchen in Einzelheiten, consequent geblieben; er citirt seine (um 1546 bis 1548 verfassten) astrologischen Schriften auch in jügeren Commentaren nirgends direct, auch nicht in den Excursen zum Exodus, dessen grössere Recension vielleicht nicht ganz aus seiner Hand geflossen[99]), und verweist in jenen nirgends auf diese; sie sind für verschiedene Leserkreise bestimmt. Einige kleinere Schriften stehen zwischen beiden, sowohl an Inhalt wie an

---

wonach 3 = 7 (auch in der Astrologie), סוד הגלגל Geh. der Sphäre, d. h. des Globus, der Kugelgestalt der Erde, s. Comm. zu Daniel (ed. Mathews S. 12), סוד האחד Geh. des Einen (B. des Einen S. 57); Geh. des Himmelswagens (מרכבה, Gottesthrones, *Jesod Mora* Kap. 10 S. 41 Z. 7), des Engels *Metatron* (daselbst Ende, identisch mit dem „activen Intellect“, s. zu Exod. 33, 21, Hebr. Bibliogr. XIV, 35; N. Brüll, Jahrbücher III, 1877 S. 175); Geh. der Himmelskunst (מלאכת השמים zu Exod. 32, 1 der kürzeren Recension, = Astrologie, nach Josef b. Elieser); die Weisheit Bezalel's (Exod. 31, 3) bestand in Kenntniss von „Rechnung, Maassen, Verhältnissen, Himmelskunst, Naturwissenschaft und Geheimniss der Seele: בחשבון ומדות וערכים ומלאכת שמים וחכמת התולדת וסוד הנשמה (vgl. die Parallele bei Abr. bar Chijja, Hebr. Bibliogr. VII, 94). Längst war סוד העבור Geh. der Intercalation technisch geworden. — Man sieht, dass hier Geheimniss so viel als gründliche Kenntniss, wissenschaftliche Erfassung bedeute, daher das Wortspiel mit יסוד Grundlage, s. unten Anm. 152. Vgl. auch Friedländer, *Ess.* S. 128. Zur Sache s. unten § 12 Excurs 3 zu Exod. 23, 26. Bei Menachem ben Saruk (X. Jahrh.), Wörterb. S. 5, scheint חכמי הסוד „Weise des Geheimnisses“, sich auf das Buch *Jezira* zu beziehen; vgl. Hebr. Bibliogr. XIX, 89 A. 1.

97) S. meinen Artikel: „Supercommentare zu ibn Esra's Pentateuchcommentar“, in A. Berliner's *Pletath Soferim*, Breslau 1872, S. 42—45, 51—54; Magazin f. d. W. d. Jud. III, 41, 94, 140, 190, IV, 145; Neubauer im Letterbode (Amst. 1876/7) II, 84—90; Friedländer, *Ess.* 215 ff. und dazu Hebr. Bibliogr. XVII, 117.

98) Vgl. Zunz, Gesammelte Schriften III, Berlin 1876 (verf. 1840), S. 93, 94.

98b) Magazin, etc. III, 100.

99) Diese streitige Frage kann hier nicht einmal auseinandergesetzt werden; Friedländer, *Ess.* S. 152, hält dieses Buch für ein eigenes Werk; vgl. oben S. 62.

Methode[100]). Die stofflichen Beziehungen sind aber derart, dass eine systematische Bibliographie sehr erschwert wird. Am zweckmässigsten scheint es, die die Mathematik berührenden Bestandtheile anderweitiger Schriften mit den dazu gehörenden Commentaren zuerst zu erledigen, und zwar nur inhaltlich, denn eine Aufzählung der Ausgaben würde einen unverhältnissmässigen Raum einnehmen. Wer sich näher interessirt, findet alle bekannten Drucke bis ungefähr 1730 in meinem Catal. Bodl. S. 680—89, die jüngeren in Zedner's *Catalogue of the Hebrew books in the library of the British Museum,* London 1867 p. 21—23, und in Benjacob's *Thesaurus libror.* (1880) unter den Schlagwörtern.

§ 11.

A. Stellen in den exegetischen und theologischen Schriften, in welchen ibn Esra auf mathematische und kosmographisch-astrologische Theorien hinzudeuten Gelegenheit hat, sollen hier nicht vollständig gesammelt, sondern nur einige zum Theil excursartige hervorgehoben werden[101]), welche mitunter als gesonderte Stücke in Handschriften vorkommen, den Supercommentatoren Veranlassung gaben zu Heranziehung der Parellelen und zu selbstständigen oder von Mathematikern erbetenen Ausführungen[102]).

1. Obenan steht hier der lange Excurs zu Exod. 3, 15. Das Tetragrammaton יהוה, und ebenso אהיה, ist nach ibn Esra ein *nomen proprium,* welches sich durch viererlei von anderen Substantiven unterscheidet. Nun beginnt die mathematische Stelle, welche ich der Bequemlichkeit halber in zwei Abschnitte zerlege. Das Ganze, oder einzelne Stücke, mit Citaten einer anderen Recension, deren Ursprung noch unbekannt, da die kürzere edirte zur Stelle nichts derart bietet, ist seit Anfang des 14. Jahrh. erläutert von verschiedenen Autoren, deren Verhältniss, trotz mehrfacher Behandlung in neuester Zeit, noch immer nicht klar gestellt ist, so dass

---

100) Der tendenziöse Verurtheiler Luzzatto geht über eine solche Unterscheidung hinweg; der Vertheidiger (Friedländer, *Ess.* p. 105) sieht in ibn Esra's Schriften „*textbooks for the lectures or the viva voce instruction he gave to his pupils*"; sie sind wohl eher das niedergeschriebene Resultat mündlicher Bibelunterweisung. — Eine Charakteristik der Schriften Abraham's gibt Del Medigo, deutsch bei Geiger, Melo Chofnajim, Breslau 1840, S. 25, 26. Die angeführte Empfehlung des Maimonides ist kritisch verdächtig, s. Magazin etc. III, 149; Hebr. Bibliogr. XIX, 32.

101) Ein Verzeichniss von Digressionen jeder Art gibt Friedländer, *Ess.* 108 ff., worunter einige über die Kalenderfrage.

102) Eine anonyme Erklärung aller Stellen zum Pentateuch, welche auf astronomische oder astrologische Geheimnisse hinweisen, bis Levit. Kap. 24, in der Bodleiana und im Vatic., s. Geiger's jüd. Zeitschr. VI, 128.

auch die nachfolgende Uebersicht Einiges als zweifelhaft hinstellen muss. Begreiflicher Weise müssen auch selbstständige Erläuterungen desselben Textes in wesentlichen Punkten übereinstimmen.

1) Die Grundlage, wenigstens älsteste Quelle, scheint Isak Israeli b. Josef, welcher in Toledo 1310 ein berühmtes astronomisches Werk *Jesod Olam* mit einleitenden mathematischen Abschnitten, nach 1320 im hohen Alter eine Ergänzung dazu verfasste und noch 1329 lebte. Ob jene Erklärung einem grösseren Werke entnommen sei, ist unbekannt, unberechtigt die Hypothese, dass ihm ein anonymer Supercommentar zu ibn Esra gehöre, von welchem die Rede sein wird. Eine Erklärung ist unter Israeli's Namen aufgenommen von Samuel Zarza (sprich: Çarça), der 1368/9 in Valencia schrieb (f. 31 ed. Mantua), jedoch, wie es scheint, mit Einschaltungen des bereits verstorbenen Joseph Schalom, der wohl ein jüngerer Zeitgenosse Israeli's war[103]).

2) Eine anonyme Erklärung über Abschn. *a.* (die ich mit An. bezeichnen werde), abgedruckt im Anhang von Friedländer's *Essays* S. 73—78, kommt separat vor in HS. München 256[3], Cambridge 46, Berlin 244 Oct.[104]), findet sich auch im Supercommentar, welcher in einer Bodleian. HS. dem jüngeren Salomo ibn Ja'isch aus Guadalaxara beigelegt wird[105]), und in einer anonymen Compilation[106]).

3) Ein Excerpt aus der Erklärung eines ungenannten sehr gelehrten „Geometers“, bei Esra Gatigno (1372 in Agremonte)[107]) ist der Motot's ähnlich.

---

103) Er ist ohne Zweifel der Polemiker gegen den getauften Alfons de Burgos, welchen de Rossi (zu Cod. 335, Wörterb., deutsche Uebers. S. 153) und Grätz (Gesch. VII, 512, vgl. Berliner, Plethat Soferim S. 52) für sonst unbekannt halten. — Ob der, f. 31 Col. 3 erwähnte Lehrer (אדני מרי ז"ל, vgl. Geiger's j. Zeitschr. VI, 129) Israeli sei, ist schwer zu ermitteln; f. 32 Col. 1 wird auf das Buch *Jesod Olam* „an seiner Stelle“ [diese Worte fehlen bei Motot] hingewiesen; ein genaues Citat hat schon ibn Jaïsch (s. unten). — Abschn. *b.* enthält anonym HS. Luzzatto 114[2], jetzt Berlin 244 Oct. (Verz. S. 56).

104) Magazin etc. III, 99, 141. Hebr. Bibliogr. XVII, 118.

105) Nach Friedländer, *Ess.* Vorr. S. V, ist diese Erklärung bei Jaïsch gekürzt? — Der im Text genannte Commentar scheint jedenfalls überarbeitet; es kommen hier in Betracht die HSS. Bodl. (Uri 106), Vat. 54[3], Medic. Plut. II Cod. 49, München 61[2], Cambridge 47, 48, Carmoly (wo jetzt?); s. Magazin etc. III, 141 gegen Schiller, welcher den ibn Jaïsch als Hauptquelle ansieht; dafür ist er zu jung.

106) Cod. Ascher 17, wonach Geiger's j. Zeitschr. VI, 129 Anm. 1 zu modificiren. Die Stelle An. S. 74 scheint dort gekürzt, nach meinen Excerpten zu schliessen.

107) Geiger's jüd. Zeitschr. VI, 128 (vgl. Hebr. Bibliogr. XIX, 94). Esra's Comm. ist unedirt. Er war aus Saragossa und schrieb 1356 Cod. Paris 1008 (Averroes arabisch, vgl. Hebr. Bibliogr. XIII, 5 unten).

4) Samuel Motot (um 1370 in Guadalaxara), gibt eine eigene Erklärung (פירוש המספר) in seinem Supercommentar (ed. Ven. 1554 f. 17 Col. 4 bis f. 20), aber in der geometrischen Partie scheint er Josef Schalom zu benutzen[108]).

5) Schemtob ibn Major aus Briviesca (1384?) gibt die Erklärung seines verstorbenen Lehrers Baruch[109]).

6) Zu Abschn. *b.* enthält die Bodl. HS. Uri 106 eine Erklärung des ältern Salomo ibn Ja'ïsch (gest. in Sevilla 1345), wahrscheinlich aus dem arabischen Supercommentar desselben excerpirt und übersetzt[110]).

7) Ueber denselben Abschnitt findet sich ein Briefwechsel zwischen einem Rabbaniten und einem Karaiten in der Bodl. (Uri 106) und im Vatican 36^3.[111])

§ 12.

Kehren wir nun zum Texte ibn Esra's zurück.

a) (arithmetisch) beginnt wörtlich: „Wisse, dass das Eins Geheimniss und Element (סוד, יסוד) aller Zahl ist, 2 Anfang der Paarzahlen, 3 der ungeraden; es sind danach die Zahlen 9 in einer Weise, aber 10 in anderer Weise. Schreibst du 9 in einem Kreise und multiplicirst (תכפול) das Ende [9] mit jeder Zahl, so findest du die Einheiten links, die ähnlichen Zehner rechts bis 5, wo sich das Verhältniss umkehrt[112]). Anderer-

---

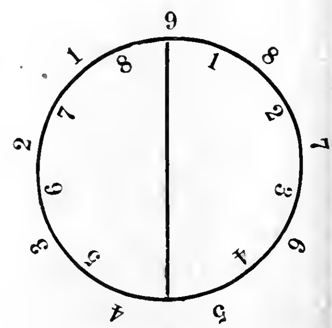
108) Von Fol. 19 Col. 3 („Ziehen wir einen Kreis") bis Col. 4 Z. 15 v. u. ist als פירוש תמונות (Erklärung der Figuren) dem Buche vom Namen angefügt von Elieser Norzi, und sonst anonym, daher nicht erkannt vom Biscioni (Pl. II, Cod. 42^4) p. 308, im Pariser Catalog No. 1092^8, Cod. Parma (Stern 21), s. Hebr. Bibliogr. VIII, 29, nachträglich von Luzzatto zu 114^9 (jetzt Berlin, s. Verz. S. 57). Ueber eine unedirte abweichende Recension Motot's, jetzt in Cambridge No. 49, s. Hebr. Bibliogr. XV, 16; Schiller-Szinessi, Catal. S. 136, 248. Den gedruckten Auszug (Amst. 1722) berücksichtige ich nicht.

109) Handschr. Cambridge 52, Catalog S. 148 und 155.

110) Magazin etc. III, 141; Hebr. Bibliogr. XIX, 93.

111) Geiger's jüd. Zeitschr. VI, 128; Hebr. Bibliogr. XVII, 119.

112) Der Kreis (vgl. oben S. 84 Anm. 91) wird schon von Israeli und dem An. gegeben und erklärt: $9 \times 9 = 81$, $9 \times 8 = 72$, $9 \times 7 = 63$, $9 \times 6 = 54$, dann $9 \times 5 = 45$ u. s. w.; aber in der Ausg. von Zarza sind die gleichen Zahlen irrig zusammengestellt, es muss so verbessert werden, wie zu Anfang der Arithmetik in Cod. Luzatto 114:



seits sind es zehn Zahlen[113]), nach der Ansicht der Arithmetiker (חכמי המספר), da jede Einheit ein Theil der entsprechenden Decade ist, oder entsteht aus Multiplication, oder Addition, oder beiden zugleich[114]). Die 10 *Sefirot* (Zahlen) entsprechen der Anzahl der Finger, 5 gegen 5, ebenso 9 Sphären, welche erhabene selbstständige Körper; die 10., welche „heilig“ ist, wird so genannt, weil ihre Kraft sich über den ganzen Thron der Herrlichkeit (כסא הכבוד) erstreckt“ u. s. w. — Ich verfolge hier nicht die kosmologische Anwendung und gebe im Folgenden den Inhalt in Kürze mit Benutzung der Commentare. — Die Buchstaben אהוי, also 1, 5, 6, 10, wovon 5, 6 die mittleren, haben das Eigenthümliche, dass ihre Quadrate sie selbst enthalten ($1^2 = 1$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $10^2 = 100$, d. h. 10 Zehner, ebenso $11 \times 11 = 121$, $15 \times 15 = 225$).[115]) Die Einheit hat nur Ein Ende, die andern Zahlen haben zwei[116]). 5 ist $= 1^2 + 2^2$, d. i. die „gleiche Rechnung“ (חשבון השוה) der Quadrate, denn $5^2 + 2 \times 5$ $(=10)^2$ ist $= 5^3$ (125)[117]); bei allen Zahlen vor 5 ist das Verhältniss des Cubus zur Summe des Quadrats und des Quadrats der doppelten wie das der betreffenden Zahl zu 5. [Z. B. 4^2 (16) $+ 8^2$ (64) $= 80$ — 4^3 (64) : 80 $= 4 : 5$]. Bei den Zahlen hinter 5 kehrt sich das Verhältniss um. Die Zahl 6 ist „gleiche Rechnung“ in ihren Theilen (d. h. Factoren). [$^6/_2 + {}^6/_3 + {}^6/_6 = 6$.][118]) Solcher Zahlen giebts in jeder Reihe (מערכת) nur Eine. Ferner $1^2 + 3^2$ (nämlich der ersten ungeraden Zahl) $= 10$, d. i. 1 Zehner.

---

113) Der Text hat hier בלי מה „ohne Etwas“, wie es wohl ursprünglich im Buch Jezira hiess, um die abstracte Zahl zu bezeichnen. An. S. 74 Zeile 3.

114) Israeli bezieht das noch auf die Einheiten, An. und Motot auf die Zahlen nach 10.

115) Motot nennt „jede dieser Zahlen“ runde (kreisende עגול) Rechnung, aber ibn Esra nur die 5 (Buch vom Namen Kap. 3 und 6 f. 16; *Jesod Mora* Kap. 11 f. 45, 47; Zahlwörter unter 5 S. 158; zu Kohelet 7, 27, unten n. 6); hier nennt er 5 die „gleiche“ d. h. unveränderliche.

116) Ibn Esra kennt (wie die Araber) keine negative Grösse, also steht 1 nicht zwischen 2 Zahlen; vgl. Pinsker zu B. des Einen S. 7.

117) An. S. 76 erklärt bei Gelegenheit das hebr. מעוקב für Cubus (arab. كعب, vgl. unten A. 190 קעב) von עקב Ferse, weil diese rund sei; ein allseitig rundes sei eine Kugel mit gleichen Dimensionen! Es scheint vielmehr: das „Entsprechende“, die Folge, indem jede Dimension den anderen entspricht. Ibn Esra gebraucht für Quadratwurzel יסוד (Pinsker zu B. d. Einen S. 2).

118) An. S. 77 hat anstatt $^6/_6$ 6 getheilt durch 2×3, also durch das Product beider Nenner. Er führt weiter aus, dass in der Reihe von 10 bis 100 nur 28 eine „gleiche Zahl“ gebe, dann $\frac{28}{2} + \frac{28}{4} + \frac{28}{7} + \frac{28}{7 \times 2} + \frac{28}{7 \times 2 \times 2} = 28$; auch hier drückt er sich aus „halbes Siebentel und dessen Hälfte“, vielleicht weil das Hebräische keinen Ausdruck für zweistellige Nenner hat. Hierauf gibt er eine

b) (geometrisch). Ziehe die Diagonale, deren Länge 10 [irgend eines Maasses] in einem Kreise, füge Sehnen an den Drittheilen, so ruht darauf ein Dreieck, dessen drei gleiche Seiten so lang sind als die Diagonale und als das (durch Verbindung beider Sehnen gebildete) Viereck[119]). Vor dieser Zahl wird sich das Dreieck zur Peripherie verhalten, wie zu 10, hinter derselben umgekehrt. — Hierauf führt die Ziffernsumme 22 der 4 Buchstaben אהוי auf die Klassificirung der 22 hebr. Buchstaben. Man könnte dies als: *c)* philologische Begründung des Gottesnamens, das Ganze aber als Erläuterung des ersten nnd grundlegenden Satzes im Buch *Jezira* betrachten, wonach Gott die Welt durch Zahlen und Buchstaben erschuf. Zuletzt ist noch von den 120 Planeten-Conjunctionen die Rede, s. unten zum 5. Excurs.

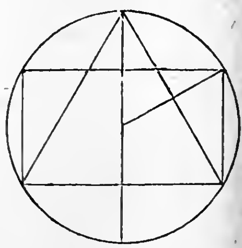
2. Zu Exodus 23, 21: Gott war in der „Mitte" wie das Centrum. Die Maasskundigen (חכמי המדות Geometer) haben bewiesen, dass der Mond sein Licht von der Sonne erhalte u. s. w. — Der Commentar Motot's ist anonym in Cod. München 285[3] und nicht erkannt in Catalog Paris 825[6].

3. Zu Exod. 23, 26[120]). Ibn Esra bemerkt, dass es grosse Gesetzgelehrte gebe, welche sich mit der Wissenschaft der Naturerscheinungen[121]) nicht beschäftigt haben, denen er also zur Texterklärung Einiges aus den Wissenschaften erwähnen müsse. Zuerst kommen Bemerkungen, die man psychologische und physiologische (Temperamente und daraus folgende Krankheiten) nennen kann; er bezeichnet sie zuletzt als „Medizin"[122]);

---

allgemeine Regel, die einzige solche Zahl in jeder Reihe aus einer Art „Primzahl" zu finden, und damit endet seine Erklärung. Motot gibt noch 496 unter den Hunderten an, erklärt auch den Unterschied von vollkommener, überschüssiger und mangelhafter Zahl (in Bezug auf Summe der Factoren) und verweist auf Euclid Ende B. IV. Die griechische Benennung ist ὑπερτελεῖς, ελλιπεις, τελειοι; die hebräischen Ausdrücke dafür bei Abraham bar Chijja s. Hebr. Bibliogr. VII, 88; vgl. Lippmann zum B. des Namens S. 32. Den Ausdruck חשבון שלם (perfect) hat ibn Esra, Zahlwörter S. 161. Vgl. Josef ibn Aknin bei Güdemann, das jüd. Unterrichtswesen, S. 84; als Quelle habe ich in Hebr. Bibliogr. XIV, 16 die Encyklopädie des al-Farabi nachgewiesen, wo sich die „befreundeten" Zahlen anschliessen; über letztere s. meine Nachweisungen H. B. XIV, 38.

119) Die Figur bei Josef Schalom (der bemerkt, dass die Differenz von π nach Ptolemäus und den indischen Weisen hier nichts verschlage) ist folgende:



120) Vgl. Friedländer, *Ess.* 116.
121) S. oben S. 86 A. 96.
122) S. oben §. 7, 2 S. 72.

nach der Combination von Stärke und Schwäche in den drei Hauptkräften zählt er 27 Arten von Menschen (s. unten S. 100 Anm. 154). Dann kommt er auf die Sternkunde (חכמת המזלות, hier Astrologie), d. h. die Anordnung der Planeten (מערכת המשרתים, d. h. Constellation) zur Zeit der Geburt, welche ebenfalls massgebend ist und mit dem Schriftwort nicht in Widerspruch stehe, wie zu 33, 16 [gemeint ist 33, 21] erörtert werden soll.

4. Zu Exod. 32, 1 vom goldenen Kalb[123]), welches kein Götze war. Die Sternkundigen behaupten, dass die grosse Conjunction der beiden obersten [Planeten] im Sternbilde des Stieres stattfand; das ist falsch, denn sie fand nur im Wassermann statt, und nach der Astrologie ist [der Stier] das Sternbild Israels. „Viele haben dieses Geheimniss erprobt, Gesclecht nach Geschlecht, auch ich sah es so[124]); sie setzten es (das Kalb) also in die Mitte des Himmels."

5. Zu Exod. 33, 21 über den Gottesnamen. Die Summen der vier Buchstaben יהוה ergeben 72[125]), $1^2 + 5^2 = 26$, auch die Conjunctionen der 5 Planeten [26 nach Motot, 21 nach Zarza = אהיה]. Die Namen der ersten 2 Buchstaben יו"ד ה"א zählen 26. Die Quadrate der Paarzahlen [$2^2 = 4 + 4^2 = 16 + 6^2 = 36 + 8^2 = 64$, Summe 120] ergeben die Summe aller Zahlen bis zum halben Namen [$1 + 2 + 3$ u. s. w. bis $15 = 120$]. Das Product beider Hälften [$15 \times 11 = 165$] ist gleich den Quadraten der ungeraden Zahlen [$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 165$]. Das Quadrat des 1. Buchst., vom Quadrat der 2 folgenden abgezogen, gibt den Cubus des zweiten [$15^2 = 225$ *minus* $10^2 = 100$ gibt $125 = 5^3$]. Das Quadrat von zweien subtrahirt vom Quadrat dreier, ergiebt den Cubus des dritten. [$21^2 - 15^2 = 6^3$.] Das Nachfolgende interessirt uns hier nicht. Jedoch bezieht sich darauf, wie auf einige andere Stellen Abraham's, betreffend die Siebenzahl, die auch in den hebräischen Festtagen erscheint,

---

123) Fehlt bei Friedländer, *Ess.* 117.

124) Die Stelle ist corrumpirt bei Motot f. 26 Col. 2, der sich auf ein altes Buch von Ptolemäus beruft, wohl Tetrabiblon oder Centiloquium. Auf seine eigene Erfahrung in der Astrologie beruft sich Abr. auch sonst, z. B. zu Exod. 2, 2: „Fünfmal habe ich erprobt, dass der Ort des Sternbildes des Mondes und dessen Aufsteigen (oder Grad) zur Zeit der Conception (des Kindes) der Grad des aufsteigenden Sternbilds zur Zeit der Geburt" etc.

125) $10 + 15 + 21 + 26 = 72$; Zarza und Motot, letzterer citirt *Jesod Mora;* s. unten § 13, 7, *ha-Schem* Kap. 5. Den Comm. in Cod. Uri 106[8] (in Geiger's j. Ztschr. VI, 128 ist חכא Druckf. für חשא) habe ich nicht vergleichen können. Ueber den Gottesnamen von 72 (Buchstaben) s. Zeitschr. d. Deutsch. Mg. Gesellsch. IV, 160, vgl. Hebr. Bibliogr. XIV, 6 u. 35 Anm. 7. Friedländer *Ess.* 117 giebt den Inhalt dieses Excurses sehr kurz und ungenau.

eine Abhandlung des Mathematikers Prophiat Duran (vor 1391?)[126]), welche nach Cod. de Rossi 835 abgedruckt ist hinter der Grammatik ed. Wien 1865 S. 181—84[127]). Der Verfasser citirt Plato's *Timaeus* — welcher unter den Schriften Plato's am meisten bei Arabern und Juden gekannt war — die „Elemente" (Euclid's), verschiedene Schriften der Araber[128]). Nachdem er auch das Buch Jezira erwähnt, bemerkt er, dass Aristoteles, Physik III, und Metaphysik VII, von Vorgängern spreche, welche die Zahlen als Prinzipien der Wesen ansahen (vgl. oben § 9). Er bemerkt ferner (S. 183): „In Bezug auf ibn Esra's Deutung der Midraschim (alten Auslegungen) haben wir nicht leitende Grundsätze, wie wir sie wohl besitzen in Bezug auf die meisten seiner Geheimnisse und Andeutungen"[129]), womit ohne Zweifel die Zahlsymbolik und Astrologie gemeint ist, über welche man aus seinen betreffenden Schriften die Grundsätze ziehen konnte.

Kehren wir zum Schluss des 5. Excurses zurück, worin die Siebenzahl vorkommt.

Es gebe bekanntlich 120 Conjunctionen der 7 Planeten[130]), die grosse (grösste) sei eine, die 2. und 5. Art (Combination von 2 und 5) zähle 21, die 3. und 4. zähle 35, die 6. zähle 7; 21 und 35 seien Producte von 7. — Motot giebt die Combinationen im Einzelnen an (welche natürlich Producte von 7 sein müssen, da 7 Planeten in Betracht kommen). Auch die Perioden von 20 und 240 Jahren (welche schon alte Astrologen kennen) werden erwähnt.

6. Zu Kohelet 7, 27 heisst es: „Wenn man 1 mit 1 verbindet (addirt) entsteht das Haupt [Anfang] der Zahl [2], verbindet man 2 mit dem Haupt, wird es wie ein Ende [3], verbindet man 1 mit dem Ende, wird es [4] quadrirt (נגדר s. S. 110), dazu 1 [5], wird es rund (vgl. oben Anm. 115), dazu 1 [6] ist geradegemacht (מיושר), das Geradegemachte vollkommen, das Vollkommene ein Körper." Auch diese symbolisirende Bezeichnung der

---

126) Vgl. S. Gronemann, *De Profiatii Durani (Ephodaei) vita ac studiis etc. Diss inaug. Vratislav. 1869*, p. 18: *De Prof. Durani studiis ad res calendarias spectantibus*, nach einem Werke, wovon nur Vorrede und Kap. 27 gedruckt sind. Zu S. 23 über Hermes s. Wolf, Bibl. Hebr. II, 1442 u. 738. — Vgl. auch oben S. 84 A. 93 b.

127) In der deutschen Einleitung S. 47 ist irrthümlich Cod. 800 angegeben.

128) S. darüber Hebr. Bibliogr. X, 109.

129) Gronemann, l. c. p. 119, hat nicht genau gelesen und verdreht Duran's Bemerkung.

130) S. unten § 13 zum B. vom Namen Kap. 5. Abr. erwähnt sie auch zu Exod. 3, 15 und Daniel 10, 21, im astrolog. *de mundo*; andere Nachweisungen s. Hebr. Bibliogr. XVI, 131.

Zahlen 1 bis 6 hat einen Erklärer gefunden, Namens Immanuel, den ich für Immanuel ben Jakob halte, den bekannten Verfasser der Kalender-Tabellen („Sechsflügel," oder Adlersflügel, verf. in Tarascon 1365).[131])

§ 13.

Ausser den Bibelcommentaren gehören noch zur obigen Rubrik *A.* zwei Schriften, die ich mit fortlaufender Ziffer bezeichne.

7. ספר השם (*ha-Schem*) Buch vom Namen, d. h. Gottesnamen, in 8 Kapiteln, verfasst in Beziers und gewidmet, nach einigen HSS., dem „Abraham ben Chajjim und Isak ben Jehuda"[132]), ist herausgegeben mit deutschem Vorwort, enthaltend eine Inhaltsübersicht, von Lippmann, Fürth 1834, nebst einer Erklärung des 6. Kapitels von Alexander Behr in München. Einen unedirten Commentar von Salomo ben Elia Scharbit-ha-Sahab (*Chrysococca?*), verfasst 1386 in Ephesus, enthält Cod. de Rossi 314[133]). Ein anderer von dem Kandioten Sabbatai ben Malkiel Kohen (1447 bis 1493?) HS. in Petersburg Firkowitz 536 und (Copie?) früher HS. Pinsker 11, jetzt im „Bet ha-Midrasch" in Wien[134]). Auch der Gegner des letzteren, Mordechai Comtino (um 1460 in Constantinopel und Adrianopel), als Lehrer der Mathematik nicht bloss unter den Juden bekannt[134b]), commentirte das Büchlein. Ein anonymer Commentar findet sich in HS. München 36[7] unmittelbar vor Mischnat ha-Middot. Der Commentar des J. S. del Medigo scheint noch nicht aufgefunden.

Das Schriftchen ist eine weitere Ausführung der Excurse zu Exod. 3, 15 und 33, 21 (oben 1 u. 5); auch hier behandelt Kap. 2 die Kenn-

---

131) Handschr. sind nachgewiesen im Magazin etc. III, 142. Ueber Immanuel's in Sitomir 1872 gedrucktes und von Slonimski corrigirtes, schon 1406 lateinisch übersetztes Werk und den griechischen Commentar von *Ge. Chrysococca* s. die Citate in Hebr. Bibliogr. XV, 26, 39. Vgl. auch mein *Intorno a Joh. de Lineriis etc.* p. 9 des Sonderabdrucks (Roma 1879).

132) Nach einer handschr. Notiz B. Goldberg's hätte die HS. Orat. 180: Abraham „ben Samuel"; der Pariser Catalog gibt unter 1085[3] nichts Näheres an. Graetz (Gesch. VI, 446) combinirt zwei gleichnamige Gelehrte, welche aber dem XIII. Jahrh. anzugehören scheinen; vgl. Geiger bei Schorr, he-Chaluz II, 31; Zunz Litgesch. 481, *Hist. lit. de la France* XXVII, 620. Ueber Isak s. oben Anm. 5.

133) Ueber den Verfasser s. Hebr. Bibliogr. VIII, 28, XIX, 63.

134) Ueber den Verfasser s. Hebr. Bibliogr. XIX, 63. Den Titel ארון הברית geben ältere Quellen an. Stellen daraus über Mischnat ha-Middot bespricht Geiger wiss. Zeitschr. V, 417, VI, 26; vgl. auch *Kerem Chemed* VIII, 6; Schorr, he-Chaluz V, 45. — Was die Erklärung von Rechnungen des Gottesnamens in HS. Almanzi 238[9] (jetzt im Brit. Mus.) enthalte, und zu welchem Text Abraham's sie gehöre, ist noch unbekannt.

134b) Hebr. Bibliogr. XVII, 135; einen Artikel über ihn bringt die H. B. 1880.

zeichen des *nom. propr.*; im 3. geht Abraham wieder von der Einheit und Decade aus, mit Berufung auf das Buch Jezira (vergleiche die Inhaltsangabe bei Lippmann S. 20 ff.). In Kap. 4 heisst es unt. And.: Der Körper hat 3 Dimensionen, also 6 Ecken, wie es im Buch Jezira heisst; so hat das Tetragrammaton 3 Buchstaben; der 4. ist ו = 6, und da 3 Buchstaben 6 Combinationen geben[135]), 4 aber 24, so sind nur die 3 Buchstaben verschiedene, der 4. = 2., so dass nur 12 Combinationen entstehen. 4 ist auch Quadratzahl wie 1 — hier bezieht er sich auf das Buch vom Einen (unten § 14) — 3 ist aber die Grundlage der Rechnung, da sie die erste Zahl ist, deren Quadrat grösser als die Summe [$3 \times 3 > 3 + 3$], während $1 \times 1 < 1 + 1$, $2 \times 2 = 2 + 2$.

Kap. 5. Die Summe der Primzahlen = 18, verhält sich zu der zusammengesetzten, = 27, wie 2 zu 3, welche Anfang der Zahl ist (je nach dem Bedürfniss ist 2 oder 3 Anfang der Zahl!), ebenso der erste Buchstabe (10) zum 1. und 2. (15); [Nennen wir die 4 Buchstaben a b c d, so gibt $a + a + b + a + b + c + a + b + c + d$ 72][136]). Ferner 15 multiplicirt mit seiner Hälfte und $\frac{1}{2}$ — nach Art aller Progressionen (?)[137]) — also 15×8 gibt 120, dessen Theile [d. h. Factoren summirt] das Doppelte ergeben, wie keine andere Zahl. Nun folgen Sätze, die wir schon aus Excurs 5 kennen, jedoch für den dortigen letzten Satz (wie unten Nr. 8) heisst es hier: 15^2 (225) + 21^2 (441), abgezogen von 26^2 (676) gibt 10 (den 1. Buchst.) zum Rest. 10×5[138]) = $50 \times$ mit 6×30, giebt 1500, ähnlich 15 (d. h. 15 Hunderte). Ferner 15×26 (= 390) hat den Zahlwerth des Wortes Himmel (שמים = 390). $10 \times 10 + 10 \times 5 + 10 \times 6 + 10 \times 5$ (260) und dazu $5 \times 5 + 5 \times 6 + 5 \times 5$ (80) gibt den Zahlwerth des Wortes „Namen" (שם 340). Hier ist Abraham in künstliche Spielerei verfallen, während früher die Stellung der Zahlen 1, 5, 6, 10 im Decadensystem in consequenter Weise ausgeführt ist.

Kap. 6 beginnt mit Anführung von drei Ansichten über den Werth von π. 1. nach Ptolemäus: $3\frac{8}{60}$, 2. nach den Geometern (חכמי המדות)

---

135) Hebr. בתים „Häuser", so im B. Jezira.

136) In Bezug auf den Gottesnamen von 72 Buchstaben (woran Abraham selbst vielleicht nicht glaubte) citirt er zu Exod. 14, 19 ein Buch רזיאל Rasiel (vgl. Zeitschr. für Mathem. XVI, 386, 396), in der kurzen Rec. zu 3, 13 heisst das Buch הרזים „Buch der Geheimnisse". Zarza zu 14, 19 fand bereits so verschiedene Angaben dieses Gottesnamens, dass er lieber gar keine aufnahm.

137) מחברים scheint hier diese Bedeutung zu haben (vgl. unten § 16, 2 K. 5 במחובר מהחכאה). Lippmann scheint es geradezu für מחברות Conjunctionen zu nehmen, vgl. oben S. 93 A. 125.

138) נערוך für multipliciren, מערכת für Product.

$^{22}/_{7}$,[139]), nach den Weisen Indiens 3, 8′, 44″, 12‴ (nach Sexagesimaltheilung). Das wahre Maass sei weniger als $3\,^{1}/_{7}$ und mehr als $3\,^{10}/_{71}$.[140]) — Arjabhatta (bei Lassen, Ind. Alterth. II, 1138) hat $\frac{20000}{62832}$, oder (bei Lassen IV, 851) $\frac{62822}{252000}$. Abraham's Zahl gibt nach Luzzatto $\frac{216000}{895452}$, oder durch 12 reducirt $\frac{18000}{56621}$, in Decimalen 3,1622777; die jetzt angenommene Zahl bei Lassen wäre 3,14163. In der Arithmetik (§ 17) werden wir $\frac{62838}{20000}$ finden[141]); Immanuel ben Jakob (1365, s. Cod. Paris 1026[5]) hat $\frac{67861}{21600}$; Comtino (um 1450) hat $3\,^{8}/_{61}$. — Hierauf folgt das geometrische Beispiel vom Kreise, dessen Diagonale 10 (vgl. oben § 12 S. 92), indem hier die Anwendung nach den oben erwähnten Ansichten gemacht wird[142]). Dann kommt die arithmetische Deduction mit dem Kreise, welche im 1. Excurs der geometrischen vorangeht. Endlich kommt hier hinzu „der Weg des Gewichts" (משקל). Da 9 das Ende der Zahl ist, so ist sein Gewicht ihm gleich und sein Product (? מערכתו) mit jeder Zahl ihm gleich[143]). Daher ist das Gewicht von 8 nach der Probe von 9 eins, weil es um 1 absteht, 1^2 aber $= 1$ ist; das Gewicht für 7 ist 4, weil der Abstand 2, also 2^2, für 4 und 5 also gleich[144]).

---

139) Abweichende Angaben und den Namen des Archimedes in der Arithmetik unten § 17 Anm. 218. — $^{22}/_{7}$ hat schon die Mischna der Middot.

140) Nach Luzzatto's Emendation, *Kerem Chemed* II, 77, vgl. IV, 112, wo auch weitere Stellen rectificirt sind.

141) Vgl. Zeitschr. D. M. Gesellsch. Bd. 24 S. 345.

142) Abr. gebraucht hier den Ausdruck חץ (Pfeil, arab. سهم), ferner שברים für Flächeninhalt (später gewöhnlich חשבורת, chaldäisch חבריאתא*), das arab. تكسير, ebenfalls von كسر brechen; auch שִׁבּוּר s. unten Anm. 180, 217.

143) Hier kommen zwei eigenthümliche Ausdrücke vor, welche Lippmann nicht erklärt, und die ich nicht zu belegen weiss: 1) משקל „Gewicht" wird in der Grammatik für Wortform gebraucht. Hier drückt es das Quadrat der Differenz zwischen einer Zahl und dem Quadrat von 9 aus. — 2) מערכת, welches sonst bei Abraham die Zahlreihen (Einer, Zehner) bedeutet, heisst hier, wie Ende Kap. 4 (neben מחברת Summe) das Product (nicht „Multiplication" wie Lippmann f. 9b angibt). — Der Ausdruck für Probe, מאזנים, eigentlich Waage, erscheint auch wiederholt in der Arithmetik, besonders im 7. Kap., wo die beste Probe als מאזני צדק (Levit. 19, 36) bezeichnet wird, und im Kalenderwerk f. 4. Bei unserem Abraham ist es die Probe durch 9, wie bei Leonardo Pisani „*per pensam probare*" (s. mein *Intorno ad alcuni matematici etc. Lettera IV*, Roma 1865, p. 52). Vgl. das 12. Kapitel der Rechenkunst von Kuschjar b. Lebban (s. unten Anm. 191). Das Bild der Waage ist besprochen in der deutschen Abtheilung des *Jeschurun* her. von J. Kobak Jahrg. IX, 1879.

144) In Lippmann's angeblicher Erklärung finde ich keinen Sinn. Abr. meint,

Machen wir ein Quadrat von je 3 Ziffern, dessen Reihen gleich seien, so kann es nur aus 9 Ziffern bestehen; die Reihensumme muss 15 sein und 5 in der Mitte stehen.

Das Quadrat ist das bekannte magische,

6	7	2
1	5	9
8	3	4

oder beliebig umgestellt

4	9	2
3	5	7
8	1	6

wie es z. B. Creizenach zu Jesod Mora (s. folg. Nr.) S. 123 gibt. Liharźik[145]) holt das Quadrat aus letzterem Buche, bemerkt aber dazu: „das hebräische Werk selbst ist im J. 1834 als eine ausführliche Abhandlung über das Tetragrammaton unter den Titel „*Sefer ha-Schem*“ erschienen (!). Der mathematische Theil bildet die Basis seiner Religionsphilosophie. Herr Dr. Jellinek, durch welchen ich auf dieses [welches?] Werk aufmerksam gemacht wurde, ist im Besitz eines handschriftlichen Commentars, welcher in gemeinschaftlicher Bearbeitung nächstens erscheinen soll und verspricht noch weitere, sehr interessante Aufklärung über diesen Gegenstand. Die Abhandlung ist in 12 Abschnitte getheilt u. s. w.“ Das letztere bezieht sich auf Jesod Mora; Günther[146]) citirt „ha-Schem,“ jedenfalls nicht falsch, da es auch hier zu finden ist. Liharźik hat wahrscheinlich Jellinek's Angaben missverstanden; das versprochene Werk ist bis heute nicht erschienen. Das Quadrat erwähnt schon der berühmte arabische Philosoph Gazzali (1111)[147]) und es hat sich bei den Juden lange erhalten. Am Ende des Algorithmus von Johannes Hispalensis ist es von Boncompagni (S. 136) aus der HS. mit abgedruckt, doch ohne Zusammenhang mit der Schrift selbst. Wilhelm Raimund Moncada (um 1480), ein getaufter Jude, fand es als Amulet seines Vaters Nissim Abu'l-Faradsch[148]); es findet sich in den Hamburger hebräischen HSS. 148 und 248 meines Katalogs.

$8^2 = 64$ hat die Ziffernsumme 10, also 1 mehr als 9. $7 \times 7 = 49:9$, Rest 4, $6 \times 6 = 36$ Rest 0, $5 \times 5 = 25$ Rest 7 und $4 \times 4 = 16$ ebenfalls Rest 7. Vgl. Josef b. Elieser zu Schemot Bl. 44, Col. 4.

145) Franz Liharźik, das Quadrat die Grundlage aller Proportionalität in der Natur etc. 4⁰. Wien 1865, S. 5.

146) S. Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung, Erlangen 1876, S. 122; durch ihn bin ich auf Liharźik gekommen.

147) Gazzali bei Schmölders, *Essay sur les écoles philos. chez les Arabes*, Paris 1842, p. 81. — Andere in Zeitschr. D. M. Ges. Bd. 31 S. 339.

148) Bei Bartolocci, Bibliotheca Rabb. IV, 255 und bei R. Starrabba, *Guglielmo Raimondo Moncada ebreo convertito siciliano*, Palermo 1878, im *Archivio storico*

8. Im Sommer 1158[149]) verfasste Abraham zu London in vier Wochen für einen Schüler[150]) ein Büchelchen in 12 Capiteln über die Gebote[151]). Der Titel lautet gewöhnlich יסוד מורא *Jesod Mora*, vollständiger mit Hinzufügung von וסוד תורה, also „Grundlage der [Gottes-] Furcht und Geheimniss der Thora" (des Gesetzes). Dieser Titel bietet die bei Abraham beliebte Anspielung von יסוד und סוד[152]), einen Reim (wie schon in einer

---

siciliano, p. 87, im Sonderabdruck p. 76. Wäre Herr Starrabba in der Lage gewesen, die Citate in meinem Buche, Polem. und apologet. Lit. etc. 1877 S. 315 (von ihm p. 44, resp. 33, angeführt nach einer Mittheilung Amari's) weiter zu verfolgen, so würde er gefunden haben, dass bereits E. Narducci auf meine Veranlassung Mittheilungen gemacht hat über die von Moncada aus dem Arabischen des ibn Haitham [= *Alhazen*, die Identität beweist neuerdings G. Wiedemann in Poggendorff's Annalen der Physik etc. 1876, S. 656; vgl. V. Rosen, *Les Manuscrits arabes de l'Institut des langues orientales*, Petersburg 1877 S. 124 — der ebenfalls meine Nachweisungen zu Baldi nicht kennt] übersetzte Schrift: *de imaginibus coelestibus* (sie handelt von den Figuren, welche angeblich aufsteigen in den 28 Mondstationen); ferner würde er (p. 27, resp. 16) wegen der Herkunft Wilhelm's mehr als unbegründete Vermuthungen gegeben haben, da ich den Vater Nissim mit grosser Wahrscheinlichkeit in dem Besitzer von Cod. Hebr. München 246 entdeckt habe. — In der Widmung Wilhelm's (bei St. p. 86, resp. 75) liest man: „*Quis inquam est qui Ali ibn roghla* [d. i. der bekannte Astrolog vulgo *Aben Ragel*, = ibn al-Ridschal] *arabico comparari possit . . . . et si ab Hebreis petimus, an Isac* [d. i. der Arzt Isak b. Salomo Israeli, gest. 940—50] *an Abanhazra* [d. i. unser Abr. ibn Esra] . . . *Quid enim fructuosius et utilius operibus Abunasar* [lies *Abumasar*], *qui de imaginibus tam bonum opusculum reliquit.* Hier ist der bekannte Astrolog Abu Ma'aschar gemeint, dessen Namen mit dem des Abu Nasar [Alfarabi], wegen des Striches, der *m* und *n* in den latein. HSS. vertritt, leicht verwechselt wird. Eine besondere Schrift über diese Figuren ist mir nicht bekannt; doch behandelt Abu Ma'aschar dieselben in seiner grossen Einleitung (vgl. Zeitschr. für Mathematik XVI, 360, Zeitschr. d. D. M. Gesellsch. XXIV, 379, XXV, 396, 397, XXV, 420); zur Sache vgl. meine Notiz: *Intorno a Jo. de Lineriis etc.* in Boncompagni's *Bullettino* T. XII 1879, p. 352, Sonderabdr. S. 8. Auch ibn Esra spricht von diesen Figuren in seinen astrologischen Schriften.

149) Die Ungenauigkeiten bei Grätz VI, 447, XI, sind theilweise berichtigt im Magazin etc. I, 111.

150) Nach HS. bei Uri 318, und Luzzatto 114 (Berlin 244 Oct.) Josef ben Jakob, s. oben Anm. 5.

151) So im Buche selbst S. 13, daher der Titel in Cod. bei Uri 308 und in dem grossen Excerpt des Elasar Worms, im Buch von der Seele (anonym edirt Lemberg 1877), welcher Abraham החוזה („den Seher" d. h. Astronomen oder Astrologen) nennt, s. Hebr. Bibliogr. XVII, 53, XVIII, 3.

152) S. oben § 12 Excurs 1, Anm. 96, wo Zarza סוד mit „Versammlung" erklärt, wegen סוד העבור, wie auch die Schrift Abraham's über den Kalender, neben יסוד (wohl ohne Rücksicht auf die beiden Recensionen) heisst; ebenso יסוד המספר die Arithmetik (unten § 15), auch eine grammatische Schrift heisst היסוד (Hebr. Bibliogr. VIII, 29, XIII, 68, Geiger, j. Zeitschr. IV, 183); in unserem Buche Kap. 10

Schrift Abraham bar Chijja's) aber auch schon Metrum, vielleicht zum ersten Mal in hebräischen Titeln[153]). Das Büchelchen erschien zuletzt mit ziemlich treuer deutcher Uebersetzung von dem Mathematiker Dr. M. Creizenach (Vater Theodor's, — gest. 5. Aug. 1842) in Frankfurt a. M. 1840 (51 S. Text, 140 S. Uebersetzung in 16^0), ich werde mich daher hier kürzer fassen dürfen.

Einen Commentar über das ganze Buch schrieb gleichfalls der bereits unter 7 (S. 95) erwähnte Mordechai Comtino in Adrianopel. Die geometrische Stelle in Cap. 11 erläuterte Josef ben Mose Kilti, oder Kelti (?), in Griechenland, wahrscheinlich im XIV. Jahrhundert[154]).

Das Schriftchen beginnt fast wörtlich wie der Excurs zu Exod. 3, 15 in beiden Recensionen. Uns interessirt nur der Schluss des 11. Cap. („vom Geheimniss des Namens"), welches hier wiederum mit den Buchstaben beginnt. An den Buchstaben Jod knüpft sich (S. 46, deutsch S. 120) die arithmetische Behandlung, die meist uns schon Bekanntes enthält. Da 1 keine Zahl ist, so gibt es eigentlich nur 8, wovon 4 Primzahlen (ראשונים): 2, 3, 5, 7. $1 + 2^2 = 5$. $1 + 3^2 = 10$. $1 + 5^2 = 26$ etc. $1 + 7^2 = 50$ (Jubeljahr). 5 ist die Summe aller vorangehenden Primzahlen; 15 gibt das (magische) Quadrat (siehe oben unter 7). Die Quadrate der geraden Zahlen geben 120 u. s. w. Der Schlusssatz dieser arithmetischen Parthie ist der in Excurs **5.**

Es folgt nun die geometrische Erörterung (S. 47, deutsch S. 125) vom Durchmesser 10 einer Peripherie, worin ein gleichseitiges Dreieck und an den Drittheilen ein Oblongum gezeichnet wird. Das Ganze lässt sich (nach Luzzatto) in acht Sätze zerlegen, von denen der erste namentlich eine verschiedene Auffassung erhalten hat, andere verschieden begründet sind

---

S. 41 Z. 1 הסוד כי הוא יסוד, in der Version zu Anfang סודו ויוסדו. Vgl. S. Sachs, *ha-Techijja*, Berlin 1850 S. 59; Dukes, *Ginse Oxford* S. 64 zu 39; Bacher, Einleit. 62 und schon bei Abraham bar Chijja in der Einleitung zur Arithmetik, s. Hebr. Bibliogr. VIII, 88, auch in der Berliner HS. והסוד, und für חכם סודי daselbst, סודי.

153) *Jewish Literature* § 18, A. 42. Reifmann's vermeintliche Emendationen (Litbl. des Orient 1843, S. 606) sind nicht alle begründet. S. 8 hat er den Context nicht beachtet; שמים ist richtig, für ועפר lies ורוח. — Das Metrum des Titels ist das älteste und einfachste, dem arab. Redschez entsprechend. Ein anderes Metrum ergäbe die Stelle im Vorwort S. 6, wo der Artikel hinzutritt und die Wörter umgestellt sind, daher der Titel auch so angegeben wird: יסוד התורה וסוד המורא.

154) S. den Nachweis in Hebr. Bibliogr. XIX, 62. Die Pariser Hs. 707[4] enthält hinter dieser Erklärung noch andere zu verschiedenen Stellen der Commentare ibn Esra's, welche im Catalog nicht genau genug angegeben sind; die 3. gehört ohne Zweifel zu einem der Excurse zu Exodus (etwa 3, 15?), die 4. von 27 Arten der Menschen (der Catalog zweifelt, ob etwa 24!) sicher zu Ex. 23, 26, s. oben § 12 n. 3 S. 93.

von dem berühmten Professor am rabbinischen Seminar in Padua S. D. Luzzatto (gest. 29. Sept. 1865)[155]) und von dem Mathematiker Jakob Eichenbaum[156]). Letzterem folgt Creizenach in der Uebersetzung[157]) und in den eingeschalteten Deductionen, wie er ausdrücklich (S. 6) angibt. Auch Terquem[158]) entscheidet sich dafür. — Abraham berechnet für den Durchmesser 15 das Quadrat der Seite des gleichseitigen Dreiecks genau 15000, für den Durchmesser von 10 aber $987\frac{5}{9}$ und $\frac{5}{81}$,[159]) die Wurzel $31^0\,25'\,36''\,50'''$. Die Zahl des Gottesnamens beträgt 72 (wie oben).

Erwähnung verdient noch der Terminus עמוד (Säule) für die abstracte Höhe (S. 47, deutsch S. 125), ohne Rücksicht auf die physische Lage, wie im Arabischen und in der „Mischna der Middot", später גובה[159b]). Für die physische Höhe, z. B. Culmination, gebraucht man רום.

§ 14.

Wir kommen nun mehr zu

B. den selbstständigen Schriften oder Monographien mathematischen Inhalts, zu welchen von vorneherein bemerkt werden muss, dass es auch in ihnen nicht an Ueberstreifen in die theologische Anwendung auf den Gottesnamen fehlt, was wohl nicht ausschliesslich auf eine individuelle Vorliebe des Verfassers zurückzuführen ist, sondern auch auf den Charakter der Zeit überhaupt und der Personen, für welche er schrieb.

Es haben sich nur zwei hebräische Schriften dieser Art erhalten. Wenn der Dichter Immanuel ben Salomo aus Rom (um 1320) in einer

---

155) Hebräisch in der Zeitschrift *Kerem Chemed*, II (1836) S. 75 ff.; vgl. seine Remonstration daselbst VII, 75 und früher in *Zion*, her. von Jost I, 116, auch deutsch (aus dem Ital. übersetzt) in den Israel. Annalen, her. von Jost 1840 S. 75, wo er die Bedeutung des conventionellen Decadensystems für die vermeintliche Eigenthümlichkeit der Zahlen hervorhebt. Danach erscheinen die weitläufigen Nachweisungen bei H. Filipowski (Jahrbuch *Assiph*, Leipzig 1859 S. 99—106) überflüssig.

156) *Kerem Chemed* IV, 113, vgl. den vorangehenden Brief von J. S. Reggio.

157) S. 131: „Die Proportion kann umgekehrt gestellt werden, wenn" u. s. w. ist falsch, wie aus den Parallelen hervorgeht; es muss heissen: „das Gegentheil findet statt, wenn" u. s. w. Creiz. schaltet ein: „damit das kleinere Glied vorangehe (!)", ohne Zweifel, weil Eichenbaum, l. c., bemerkt, dass ibn Esra das Wort ערך nur von einem Verhältniss des Kleineren zum Grösseren anwende, womit er aber nur seine eigene Vorstellung begründen will; vgl. Motot f. 19[c] bei Luzzatto, *Zion* I, 117.

158) In der unten (§ 15) zu erwähnenden Abhandl. p. 294 (20 des Sonderabdr.).

159) Die bekannte Formel für zusammengesetzte Nenner aus sprachlichen Rücksichten.

159b) Z. B. bei ibn Esra selbst, Zahlwörter S. 163: „Der Körper, dessen Wesen die Höhe"

Aufzählung klassischer Schriften auch der „Bücher ibn Esra's über die Methoden des Rechnens“ erwähnt[160]), so ist aus dieser Angabe des gerne überschwenglichen Satyrikers nicht auf die Bekanntschaft mit einer grösseren Zahl zu schliessen.

1. ספר האחד (*Sefer ha-Echad*) Buch des Einen, oder vom Einen, oder der Eins, unter diesem Titel citirt im Buch vom Namen (§ 13, 7—f. 9), unter beirrendem Doppeltitel zuerst gedruckt in der hebr. Zeitschrift *Jeschurun*, herausg. von Jos. Kobak, Jahrgang I. Heft 1, Bamberg 1856, mit einer Erläuterung. Der Text ist dort sehr incorrect und lückenhaft, wie ich aus der Münchener HS. 36 ersah, aus welcher ich die Varianten sammelte, die ich einem neuen Herausgeber zur Verfügung stellen wollte, da Handschriften nicht sehr selten sind[161]); auch ein Commentar des (§ 13, n. 7 und 8) erwähnten Comtino existirt; der des Josef S. del Medigo ist schwerlich vollendet[162]). Inzwischen erschien eine neue correctere Aufgabe mit sachlichen Erläuterungen 1867[163]).

Das Schriftchen, dessen Text nur einige Seiten umfasst, handelt von den Eigenthümlichkeiten der Zahlen von 1 bis 9 in 9 entsprechenden kleinen Absätzen, indem auch auf Geometrie und Astrologie (unter 3, 4, 7) Rücksicht genommen ist, wie auf die Zahl gewisser Gegenstände oder Begriffe. Wir begegnen auch in diesem systematisch geordneten Schriftchen grossentheils denselben sogar wörtlich identischen Sätzen, die wir bereits

---

160) Makamen, ed. Berlin f. 152^b בדרכי החשבון.

161) Hebr. Bibliogr. 1859 S. 94 (Vat. ist 429^{17}), auch Paris 770^6, 1085^4.

162) Comtino's Commentar ist in Cod. De Rossi 556^3, Paris 681^3, diese Schrift fehlt bei Gurland, *Ginse Jisrael*, Petersburg 1867, in der Aufzählung von Comtino's Schriften. — Der bekannte Arzt und Mathematiker Josef Sal. del Medigo verfasste einen wahrscheinlich verlorenen oder nicht ausgeführten Commentar (angeführt in seinen mathemat. Problemen n. 14 über das Verhältniss der Algebra zur Geometrie, nicht n. 12, wie Geiger, Melo Chofnajim S. XLVI n. 16 angiebt, noch weniger genau Benjacob, Thesaur. libr. S. 460 n. 130). Vielleicht ist er der Verf. des anon. mathemat. Fragments in Cod. Hebr. Hamburg 329^5 (S. 158 meines Katalogs), der von seinem Comm. zu unserem Buch als zu verfassendem spricht.

163) Mit lat. Titel: *Abrahami Ibn Esra Sepher ha-Echad, liber de novem numeris cardinalibus cum Simchae Pinsker interpretatione primorum quatuor numerorum. Reliquorum numerorum interpretationem et prooemium addidit M. A. Goldhardt.* 8. Odessae 1867 (III u. 70 S.). Da Pinsker vor der Beendigung des Commentars starb, so fehlt eine Angabe seiner Hilfsmittel. Er benutzt eine HS. Schorr's und eine Pariser, worin Abraham „der Babylonier“ genannt wird (wohl Confusion mit dem von ibn Esra anderswo citirten Abr.); der Pariser Catalog gibt das unter beiden HSS. nicht an. — Gleich in der ersten Zeile fehlt das Wort וספור der Lemberger Ausg.; s. *Zion* I, 115. — S. 2 hat HS. München והוא מספר בכח.

aus den Excursen etc. kennen. Unter 4 (S. 45) wird eine allgemeine Regel gegeben für Berechnung der Differenz der Quadrate der Seiten eines Dreiecks, deren Maass drei aufeinander folgende Zahlen (die jedoch grösser als 4 sein müssen) ausdrücken; man subtrahirt 4 von der Mittelzahl und multiplicirt den Rest mit der Mittelzahl — z. B. 10, 11, 12 seien die Zahlen, $11 - 4 = 7 \times 11 = 77$; nämlich $12^2 + 77 = 11^2 + 10^2$.[164])

§ 15.

Wir kommen nunmehr zu einer grösseren Schrift, in welcher die Zahlkunde selbstständig behandelt, wenn auch nicht ohne alle Beimischung der Symbolik geblieben ist.

2. ספר המספר oder יסוד המספר (*ha-Mispar,* oder *Jesod ha-Mispar*) Buch (oder Grundlage) der Zahl; ich nenne es der Bequemlichkeit halber Arithmetik nach dem vorwiegenden Inhalt. Dieses Buch wurde oft verwechselt mit einem grammatischen Schriftchen, welches gewöhnlich den zweiten Titel führt, bis Luzzatto, nach seiner HS., die Verschiedenheit lehrte. Das grammatische Schriftchen, einige Blätter umfassend, behandelt die Zahlwörter in 5 Klassen oder Stufen (מעלות), nämlich Einheiten, Zehner u. s. w., ebenfalls nicht ohne alle Beziehung auf Zahlsymbolik. Es ist von S. Pinsker am Ende seiner Einleitung in das babylonisch-hebräische Punktations-System, Wien 1863, mit Commentar herausgegeben[165]). Trotz der nunmehr gebotenen Hilfsmittel ist man nicht immer in der Lage, die unvollständigen und uncorrecten Angaben der Kataloge zu ergänzen und zu berichtigen[166]).

Von dieser Arithmetik habe ich beinahe 20 HSS. in öffentlichen Bibliotheken ermittelt, nämlich:

Berlin 244 Oct. (mein Verzeichniss S. 57[13])[167]), früher Luzzatto 114, woraus letzterer einige Mittheilungen gemacht hat. Diese HS. enthält einen anonymen Commentar, wahrscheinlich von einem jüngeren Zeitgenossen

---

164) In positiver Weise ausgedrückt: $n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + (n+1) \times (n-3)$. Pinsker führt den Satz auf eine allgemeinere Form zurück, indem er die Mittelzahl n, die anderen $n - 1$ und $n + 1$ nennt.

165) Handschriften sind verzeichnet in Hebr. Bibliogr. 1865 S. 29; vgl. auch Geiger in *Kerem Chemed* IX, 63; Berliner, Magazin I, 95. — Ich bezeichne dieses Schriftchen als Buch der Zahlwörter und habe es mit der Abkürzung „Zahlw." citirt.

166) So z. B. wird in Catalog Aguilar bei Wolf, Bibl. Hebr. III S. 51, unser Titel mit „*Chronologia*" übersetzt, was nur für das Buch עבור passt; s. § 21.

167) Daselbst lies: *Kerem Chemed* II, 76, für VI, 46. Eine andere HS. Luzzatto's finde ich im Catalog seiner Bücher (1868) nicht.

des Mose ibn Tibbon, also in der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts[168]); auch einen „Zusatz" desselben Ende Cap. 2 f. 73 b.

Bodleiana, 5 HSS.: Uri 449, Pocock 280 B.[169]), Michael 201, 202, 203 (deren eine vielleicht HS. Sal. Dubno 18 in Qu.).

Florenz, Medicea Plut. 88 Cod. 28 (bei Biscioni S. 482 Ausg. in 8^0 als anonymes ספר המספרים (sic!); die Anfänge der Kapitel, welche mir Prof. F. Lasinio im Februar 1863 auf meine Anfrage mittheilte, stimmen) und daselbst Cod. 46 (bei Biscioni S. 525 von „fil Meir"; mit theils hebr., theils arab. Ziffern am Rande; nach Mittheilung Lasinio's vom Mai 1864; vgl. auch Berliner, Magazin I, 95). Eine von beiden meint de Rossi (Wörterb. S. 8).

Leeuwarden, früher Franecker (Catalog. S. 87 Cod. XVIII חכמת המספר, auch Neubauer im Letterbode herausg. v. M. Roest, II. Amst. 1876/7 S. 84, gibt nur den nackten Titel המספר).

München 43 mit Zusätzen eines Moses שואבי (Schwabe, oder *Soave*?) und eines Anonymus (vgl. unten Paris)[170]), und Nr. 150 (erworben 1865).

Paris, 5 HSS.: 1029[3] (Orat. 153), — 1049[1] (anç. f. 450, defect), — 1050[1] (a. f. 449), — 1051[1] (Orat. 157), — 1052[1] (a. f. 436) mit Zusätzen eines Deutschen, Elasar, wie die HS. Fischl 25 B.[171]). Aus Nr. 1050 allein gab der im J. 1862 verstorbene Mathematiker O. Terquem eine Analyse[172]), die manches Beachtenswerthe unberührt lässt[173]).

Rom, Vatican 386[3] (vom Widmungsgedichtchen zu Anfang die Hälfte); — 397[1], bei Assemani mit dem (vielleicht aus der Schlussstelle fabricirten) Titel תשבורת[174]), — 398[1] Fragment. Aber auch 171[14] (f. 98—106) ent-

168) Ob etwa von Levi b. Abraham, dem Epitomator der astrologischen Schriften? Die Schrift ist klein und blass, in trüben Tagen die Augen anstrengend, weshalb ich eine nochmalige Prüfung jetzt nicht vornehmen mag.

169) S. meinen *Conspectus Codicum Mss. hebr.* in *Bibl. Bodl.* 1857 p. 21.

170) Diese HS. ist in Geiger's wiss. Zeitschr. IV, 283 gemeint.

171) Hebr. Bibliogr. XI, 41 und dazu Hebr. B. XIX, 119, Zeitschr. d. Deutsch. Morg. Gesellsch. Bd. 25 S. 383.

172) *Notice sur un MS. hebreu etc.* 1841 (*Extrait du Journal des Mathématiques pures etc.* T. VI p. 275—96), und ungenau auszüglich im Litbl. des Orient 1845 S. 415, 492; z. B. S. 275 „hebräische" (!) Schule für *arabe*! vgl. Hebr. Biliographie 1862 S. 95).* — Vgl. *Notice sur la vie et les traxaux de O. Terquem par Prouchet*, in den *Nouv. Annales de Mathém.* 1862, Nov.—Dec.

173) Vgl. Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24 S. 340, 382.

174) Ich verdanke dem Fürsten Boncompagni in Rom eine im J. 1866 für mich angefertigte Durchzeichnung des Anfanges (f. 3) und der letzten Seite (f. 49), auf welcher nach dem Schlusswort das Widmungsgedichtchen (s. unten), dann eine arabische Nachschrift in hebräischer Cursivschrift, wonach David ben Salomo die Schrift zum eigenen Gebrauche, לנפסה [daraus macht Assemani einen Namen אבן עקויש!] copirte und in Murcia [מרסיה, nicht Marseille, wie Assemani liest,

hält nach dem bei Assemani corrumpirten Anfang ein Fragment, wozu ein Titel „Erklärung des unaussprechlichen Namens“ (פירוש שם המפורש) fabricirt ist.

Rom, Casanat. Dominicanerkloster Cod. in Qu. I, V, 11, 3, nach Auszügen aus dem handschriftl. Katalog, die ich Herrn Narducci verdanke.

Von **Privaten** besass Hirz Scheyer eine HS., welche Carmoly (Biogr. der Gelehrten, hebr. 1828 S. 35 n. 25 vgl. S. 38 n. 5) erwähnt, ob dieselbe, die im Katalog der Bücher und HSS. Carmoly's n. 217 mit blossem Titel *ha-Mispar*? Die HS. J. S. Reggio's (erwähnt in *Bikkure ha-Ittim* 1846 S. 48) besitzt jetzt Os. H. Schorr in Brody, eine andere S. J. Halberstamm in Bielitz (s. dessen Vorwort zu *ha-Ibbur* S. 11). Eine HS. des Buchhändlers Fischl-Hirsch in Halberstadt im J. 1870 ist in der Hebr. Bibliographie XI, 41 Nr. 25 B beschrieben.

Die Pariser HS. 1052^2 enthält eine Aufgabe über Wurzelziehen aus dem „zweiten Buch der Zahl“ von ibn Esra, was der Katalog als zweite Recension auffasst; die Bezeichnung dafür ist aber gewöhnlich eine andere. Im Einzelnen finden sich Varianten genug, doch weiss Niemand von zwei Redactionen.

De Rossi (im Catalog zu seiner HS. 314) vermengt die Zahlwörter mit dem Buch vom Einen, später (Wörterb. S. 8) letzteres mit unserer Arithmetik; Grätz (VI, 454) vermengt alle drei und macht falsche Schlüsse über die Abfassungszeit, weil im Register des Michael'schen Katalogs ein Wort fehlt, welches durch das Metrum und andere HSS. gesichert ist[175]). Im Widmungsvers nämlich, der am Anfang oder Ende des Buches steht, muss es heissen: „verfasst von dem Sohne Meïr's für Meïr, jung an Jahren und weise . . . (?)[176]); letzteres bezieht sich natürlich auf Meïr. Die Abfassungszeit der Arithmetik hat auch Halberstamm nicht näher untersucht. Ich habe bereits anderswo bemerkt, dass im Cap. 3 und 7 auf das Buch „Gründe der Tafeln“ hingewiesen sei[177]), welches ibn Esra 1160/1 in Narbonne übersetzte (s. unten § 21), so dass die Arithmetik kurz vorher verfasst scheint. Nun wird zwar letztere (ס' המספר, das B. der Zahlw. kann nicht gemeint sein) in dem Kalenderwerk (f. 4) citirt, dessen Abfassung

und daher Zunz, zur Gesch. 315 Anm. a, wo der Ort auffällig erscheint] beendete Dienstag 7. Kislew 5145 (Herbst 1384). Ueber die Confusion bei De Rossi und Grätz s. weiter unten.

175) HS. Medicea (Berliner, Magazin I, 94), Halberstamm's (l. c.), Berlin (l. c.), München 150, Vat. 397.

176) בחכונה (d. h. in Astronomie??) oder בתבונה in Einsicht (vgl. von Bezalel Exod. 36, 31); so, und in Zeile 1 תכונה, hat Vat. 397.

177) HS. Berlin hat in K. 7 sogar דברתי „habe ich gesprochen“, darüber steht allerdings הדבר „ist die Rede.“

das J. 1146/7 fällt. Aber so früh ist die Arithmetik — auf welche sich der Verf. in keiner anderen Schrift beruft, obwohl er öfter dazu Veranlassung hatte — sicher nicht verfasst; vielmehr ist diese Verweisung ein Nachtrag, wie andere Verweisungen, die Halberstamm (S. 11), gegen Grätz, mit Recht als derartige Nachträge ansieht, wenn auch Einzelnes sich anders erklären lässt (z. B. bei Brüll, Jahrbücher III, 164). Diese Ansicht erhält durch unser Schriftchen eine bedeutende Stütze.

§ 16.

Gehen wir nunmehr auf die Anlage der Arithmetik über[178]). Sie behandelt in 7 Pforten oder Kapiteln folgende Themata mit praktischer Anwendung auf die Astronomie und auf gewöhnliche Aufgaben:

1. הכפל, wörtlich *Duplatio*, Multiplication[179]), 2. חלוק Division, 3. חבור Addition, 4. חִסּוּר Subtraction, 5. שברים Brüche[180]), 6. ערכים Proportionen,

---

178) Dieser § ist vor 12 Jahren nach Luzzatto's und Terquem's Mittheilungen abgefasst und jetzt, nachdem ich drei Handschriften des Originals zu vergleichen Gelegenheit gehabt, nicht ganz umgearbeitet, aber ergänzt.

179) Auch bei Khowarezmi (*Algoritmi de num. indorum, Trattati d'Aritmetica pubbl. da B. Boncompagni* I, 1857, p. 10): *Etiam patefeci in libro* [welchem?] *quod necesse est omni numero qui multiplicatur in aliquo* [lies *alio?*] *quolibet numero, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius.* Hat der Uebersetzer hier dasselbe Wort verschieden übersetzt? Es sind also nicht „ungenaue Schriftsteller" (wie Nesselmann, Versuch e. krit. Gesch. d. Algebra I, 495 meint), welche כפל für multipliciren gebrauchen, wie schon Abraham bar Chijja (Hebr. Bibliogr. 1864 S. 89 A. 11) und dazu הנכפל בעצמו in *Cheschbon ha-Mahalchot* Abschn. I; המספר הנכפל פעמים die zweimal duplicirte Zahl (desselben Geometrie, HS. München 299 f. 50). Der später übliche Ausdruck für multipliciren (jedenfalls schon 1270 in der hebr. Uebersetzung des Euclid) הכה ב („in Etwas schlagen") ist ohne Zweifel dem arab. ضرب في *(multiplicare in)* nachgeahmt — letzteres nach Wöpcke *(Mém. sur la propag. des chiffres etc.* p. 68 n. 1) vom Indischen „*frapper*, *detruire*" (?) — auch הכה על, während im Talmud הכה מן (von Etwas hauen) subtrahiren heisst, was später durch חִסֵּר (Pielform) *minuere* ersetzt wird. Von כפל im Sinne von multipliciren ist abzuleiten כמה כפלים „wie viel mal" in der Uebersetzung der Religionsphilosophie des Abr. ben David (gest. 1170) aus ungewisser Zeit, S. 4, Z. 12, und משולש בכפל — מְרוּבַּע, d. h. Dreifaches, Vierfaches, bei Elia Misrachi (f. 3[b]), den Nesselmann von jenen angeblich „ungenauen Schriftstellern" unterscheidet, allerdings nur aus dem ins Latein übersetzten Compendium kennt; s. meine Briefe an B. Boncompagni (*Intorno ad alcuni matematici etc.* p. 54 nota 1, 65 nota 3); hiernach ist auch Güdemann, das jüd. Unterrichtswesen etc. S. 84 A. 3, zu berichtigen. Vgl. auch unten zu Ende des Buches.

180) Singular שֶׁבֶר (*Scheber*); Luzzatto (*Zion* I, 116, vgl. *Kerem Chemed* II 70, 76, VII, 75) glaubt, dass ibn Esra dasselbe Wort auch für Flächeninhalt *(area)* gebrauche; es wäre jedoch vielleicht für letzteres stets שבור *(Schibbur)* zu lesen,

7. השרשים המרובעים וכל מאזנים שלהם, Wurzeln, Quadrate und — nach der oben (Anm. 143) gegebenen Erklärung — von der Probe durch die Ziffernsumme derselben im Verhältniss zu 9. Terquem (p. 6) übersetzt diese Ueberschrift: „*Racines carrées et caractères des carrées parfaits*", jedenfalls sehr ungenau; — im Litbl. des Orients VI, 477 gar nur „von Quadratwurzeln und Quadraten". In der Analyse dieses Kapitels (p. 18) wird eine Stelle hervorgehoben, nach welcher das Quadrat von 1 und 9 dieselbe Initialziffer hat, ebenso 2 und 8, 3 und 7, aber 5 ist eine runde (kreisende) Zahl, s. oben S. 91.

Was zunächst die Anordnung der Kapitel betrifft, so hat Luzzatto (*Zion* I, 116) in Parenthese sein Befremden geäussert, dass die Multiplication und Division der einfachern Addition und Division vorangehe; man findet aber dieselbe Anordnung nicht bloss bei dem im Jahre 1202 verfassten (1228 revidirten) *Abacus* des Leonardo da Pisa (genannt Fibonacci)[181]), der lange Zeit als der erste europäische Algebrist nach der Methode der Araber gegolten hat, sondern auch Aehnliches in der Rechenkunst des Abraham bar Chijja, in einem Abschnitte seiner Encyklopädie (Abr. Jud. S. 10), welche nach einer offenbaren Interpolation der Ueberschrift in zwei HSS. der bekannte Zarkali aus einem arabischen [d. h. ins Arabische übersetzten] Werke des Archimedes ins Hebräische(!) übersetzt,

---

ein *nomen actionis* der II. Form, welche dem arab. *Teksir* eben so entspräche, wie חשבורת oben Anm. 142, 174. — Richtig ist jedenfalls die Bemerkung Luzzatto's, dass מרובע *(Merubba)* bei Abraham sowohl *quadratum* als *quadruplum* bedeute, in der Mischna der Middot I, 8: ein Viertel.

181) P. 19 ed. Boncompagni, wo jedoch die Ueberschrift des III. Kap. über Addition fehlt; vgl. die Inhaltsübersicht bei Wöpcke, *Sur l'introd. de l'arithmétique Indienne*, Rome 1859 p. 60. Fibonacci (welchen Terquem nach Florenz versetzt in einem Artikel über *Vincent's Mémoire sur l'origine de nos chiffres etc.*, aus den *Archives Isr.* December 1840, deutsch im Litbl. des Orient 1841, S. 87) hat, nach dem Prolog, in seiner Jugend in der Dogana zu „Bugna" in Africa das Rechnen mit „indischen" [d. h. unseren arabischen] Ziffern gelernt, dann Aegypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und die Provence bereist. Wenn Terquem (*Notice*, p. 22) behauptet, dass Fibonacci diese Methode zu Oran von jüdischen Kaufleuten gelernt habe, so ist mir die Quelle dafür unbekannt. Boncompagni, der Fibonacci zum Mittelpunkt seiner Studien gemacht, hat in seiner Schrift *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano (Roma* 1852) nichts davon. Vielleicht ist jene Behauptung nur eine Conjectur Terquem's, im Zusammenhange mit einer bei ihm vorangehenden, dass jüdische Kaufleute um das XI. Jahrh. die indische Methode nach den Küsten der Berberei und von da nach Spanien und Italien eingeführt haben. Wenn Terquem andrerseits bemerkt, dass Fibonacci im XV. Kapitel „beinahe" denselben Weg einschlage wie Ibn Esra in seiner Arithmetik, so sind solche Parallelen aus gemeinschaftlichen Quellen erklärlich.

oder in Auszug gebracht hätte[182]). Diese Arithmetik zerfällt zuerst in die (allgemeine) Zahlenlehre, oder Arithmetik im klassischen Sinne des Wortes (חכמת המספר) und in die praktische Rechenkunst (חכמת החשבון = علم الحساب, die Logistik der Alten)[183]). Letztere wird auf 6 Operationen zurückgeführt: 1. חשבון מנין במנין Multiplication, 2. חלוק מנין על מנין Division (des Grösseren durch ein Kleineres), 3. לדעת קצב[184]) מנין ממנין das Verhältniss einer (kleineren) Zahl zu einer (grössern) Zahl zu wissen (indem die kleinere durch die grössere dividirt wird, also = Resolviren), 4. לפחות מנין ממנין Subtraction, 5. להשלים מנין במנין (oder תוספת חלק על חלק) Addition, 6. להשיב מנין על מנין (oder חזרת חחלקים אחד אל אחד) Reduction (von Brüchen oder Theilen).

Vergleicht man hiermit einige andere alte Arithmetiken, so findet man die jetzt gewöhnliche Anordnung der sog. vier Species, und die Unterschiede beschränken sich nur auf untergeordnete Theile, nemlich die Mediation und Duplication, Verbindung der Brüche mit ganzen Zahlen; auf das Verhältniss der Elemente der Algebra zur Arithmetik wird anderswo Gelegenheit sein einzugehen. Ich beschränke mich hier auf einige für die Geschichte der indischen Rechenkunst wichtige Beispiele.

1) Muhammed b. Musa el-*Khowarezmi*, von welchem der Name „Algorismus" herkommt[185]), behandelt in dem von Boncompagni herausgegebenen Schriftchen *de numero Indorum* folgende, freilich in der Uebersetzung nicht äusserlich geschiedene oder gezählte Themata[186]): Numeration, Addition, Subtraction, Mediation, Duplication („*Duplatio*"), Multiplication, Division — Multiplication u. s. w. der Sexagesimalbrüche[187]) und Multipli-

182) Siehe die Nachweisungen in der Hebr. Bibliogr. V, 109 A. 4, VII, 87, Verzeichniss der hebr. Handschr. der k. Bibliothek in Berlin S. 58.

183) Vgl. darüber Nesselmann, Geschichte der Algebra I, 40. — Daher wohl zu Anfang des praktischen Schriftchens des Khowarezmi (s. oben Anm. 95) p. 2: *in alio libro arithmetice.*

184) Eine Randglosse der Münchener HS. erklärt קצב durch ערך, welches in der Geometrie des Abraham bar Chijja (s. Abr. Jud. S. 19, 20) in der ersten Definition für „Grösse" überhaupt genommen, sonst der gewöhnliche Ausdruck für Verhältniss ist. — Bei Ibn Esra ist ערך das Verhältniss des Kleineren zum Grösseren (s. oben Anm. 157). Motot (Bl. 18 a b) nennt die Verhältnisse der Zahlen zu ihren Theilen, nach den Arithmetikern (חכמי המספר), in folgender Weise: 1. ערך החלק והחלקים. 2. ערך הדמות והחלק. 3. ערך הכפל (Duplication und Multiplication, vgl. oben Anm. 179). 4. ערך הכפל והחלק (או והחלקים).

185) S. die Citate bei Narducci, *Saggio di voci ital. etc.* Roma 1858, p. 16 ff.

186) Vgl. das speciellere Summarium bei Wöpcke, *Sur l'introduction de l'arithm. Indienne etc.* p. 49.

187) Diese, für die Astronomie besonders wichtige Eintheilung behandelt

ation der gewöhnlichen Brüche, womit die HS. (oder Uebersetzung?) abbricht.

2) Von *Kuschjar* b. Lebban etc.[188]) hat sich ein Werk erhalten, welches meines Wissens bisher ganz unbeachtet geblieben ist; es existirt freilich nur in hebräischer Sprache, und zwar übersetzt und commentirt von Schalom b. Josef ענבי[189]) in der bodleianischen HS. *Oppenh.* 272 A. Qu., unter dem Titel עיון העקרים לחשבון ההנדיים „Betrachtung der Grundlehren der Rechnung der Inder". Hier interessiren uns bloss die Ueberschriften der 12 Pforten oder Kapitel; dieselben sind: 1. צורת האותיות Form der Zeichen (Numeration), 2. תוספת מספר על מספר Addition, 3. חסרון Subtraction, 4. הכאה Multiplication, 5. במחובר מההכאה Producte, 6. חלוקה Division, 7. בעולה מהחלוק Reste, 8. בשרש Wurzel, 9. ביוצא מהשרש was aus der Wurzel hervorgeht, 10. בקעב[190]) Cubus, 11. בעולה מהקעב was aus dem Cubus hervorgeht, 12. במאזנים oder מאזני המדרגות (Probe) Rest der Ziffersumme dividirt durch 9.[191])

3) Abu Bekr Muhammed ben Abd Allah, genannt al-'Ha'ssar (der Rechner), aus unbekannter Zeit, den ich erst kürzlich ans Licht gezogen und als den von ibn Khaldun genannten Autor nachgewiesen habe[192]), verfasste ein Lehrbuch der Rechenkunst, welches im Westen in Ansehen stand. Es hat sich in der hebräischen Uebersetzung des Mose ibn Tibbon (1271) erhalten (HS. des Vatican 396, Christ Church Coll. 189 in Oxford). Ich verdanke der Freundlichkeit Boncompagni's und des Prof. Ign. Guidi in Rom das Vorwort (worin die Bedeutung der Zahl für die Erkenntniss

---

auch ibn Esra in der Arithmetik, K. 3 ff., vgl. Terquem Notice p. 10, welcher die Einführung in Europa für sehr jung (?) hält. Khowarezmi (*Algoritmus* p. 17 und daher Jo. Hisp. p. 49) führt sie als die der Inder ein, s. unten A. 202. Ueber den babylonischen Ursprung und den frühzeitigen Einfluss auf die dortigen Juden s. meine Anzeige von Günther's Studien etc. Hebr. Bibliogr. XVII, 92 A. 3.

188) Ueber diesen Autor werde ich in einer besondern kleinen Notiz handeln und will hier nur bemerken, dass bei *Hagi Khalfa* V, 475 n. 11695 das J. 357 aber III, 570 das J. 457 der Flucht angegeben ist. Mir ist keine speciellere Nachweisung über die Anlage einer sicher zwischen Khowarezmi und Kuschjar fallenden arabischen Arithmetik nach indischer Methode bekannt.

189) Vielleicht Uebersetzung von *Dactylos*. Er lebte um 1450—60, s. Hebr. Bibliogr. XVI, 103.

190) Für كعب, sonst gewöhnlich מעוקב, s. oben Anm. 117.

191) S. oben Anm. 143.

192) Hebr. Bibliogr. XIV, 41, XVII, 123; *Rectification de quelques erreurs relatives au mathématicien arabe ibn al-Banna,* in Boncompagni's *Bullettino* Juni 1877 und Sonderabdruck. — Leider ist auch das Zeitalter des Jehuda Abbas, der den 'Ha'ssar empfiehlt, nicht bekannt, s. unten § 18, A. 224.

„verborgener“ Dinge erwähnt ist) und eine Anzahl von Ueberschriften. Das Werk zerfällt in II Hauptstücke: Ganze Zahlen und Brüche; I enthält 10 Kapitel (Pforten): 1. Stufen (מדרגות, Reihen) und Namen der Zahlen, 2. über die Staubfiguren (צורות האבק)[193]) und „dessen“ [deren?] Anwendung nach den Stufen der Zahl, 3. Addition (קבוץ), 4. Subtraction (השליך), 5. Multiplication (הכאה), 6. Verhältniss (יחס?)[194]), 7. Division (חלוק), 8. אלפלג (arabisch) Mediation, 9. Duplatio (כפילה), 10. Wurzelziehen (בהגדרה בלקיחת השורש).[195]) Dieses Hauptstück beginnt mit den Namen der 12 Zahlen, 1 ist die Wurzel u. s. w., aber 2 die erste Zahl; die Staubzeichen sind 9 (der Abschreiber oder Uebersetzer hat unsere arabischen Ziffern substituirt). Das II. Hauptstück von den Brüchen zählt 72 Kapitel (deren Ueberschriften mir Hr. Guidi mittheilte)[196]) und beginnt f. 13b fast wie al-Banna (französ. von Marre p. 20), aber zuletzt (f. 41—69) folgen noch einige ungezählte. Inwieweit etwa ibn al-Banna dieses Buch benutzt habe, bedürfte einer in die Einzelheiten dringenden Untersuchung.

4) Ich reihe hieran einen der ältesten Autoren des Abendlandes, welcher die indisch-arabische Arithmetik den Christen zuführte. Johannes Sohn des David *(Abendehut* etc.*)*, gewöhnlich Johann Hispalensis oder Hispanus genannt[197]), wahrscheinlich auch Johannes Toletanus (um 1135—

---

193) Also Gobarschrift, vgl. oben S. 79 Anm. 69 und unter II. Kap. 1 desselben Werkes.

194) Am Rand בלקיחת השם „Entnehmung des Namens“. Ob die Multiplication durch *„Denomination“* bei ibn al-Banna, franz. von Marre p. 14?

195) Das erste Wort bedeutet „Begränzung“; damit hängt der Ausdruck נגדר für die 4 als Quadratzahl zusammen; גדר Grenze (arab. جذر) ist die Quadratwurzel, schon bei ibn Esra, s. Rosin im Magazin u. s. w. V. S. 47, 48, wo einige missverstandene Stellen danach berichtigt werden. Eine anonyme, zu Anfang defecte Arithmetik in der Bibliothek der „Talmud Thora“ in Rom, worüber mich Hr. Di Capua im Juli 1876 befragte, handelt im 2. Abschnitt von den Zahlstufen (מדרגות) im 7. von der approximativen Wurzel in ganzen Zahlen und beginnt: תדע כי כל כפל הכאת חשבון על עצמו הוא הנקרא מספר נגדר או נשרש, „Wisse, dass das Product der Multiplication einer Zahl mit sich selbst genannt wird begrenzte oder radicirte Zahl.“ Vgl. oben S. 94.

196) Diese Zahl ist vielleicht keine zufällige, vgl. Rohlf's Deutsch. Archiv für Gesch. der Medicin I (1878) S. 443.

197) Die von mir in der Zeitschr. für Mathem. XVI, 373 (wo für „Joh. algebu.“ zu lesen ist „Gebrum hispalensem“) angeführten Quellen sind theilweise unbenutzt von Leclerc, *Hist. de la médecine arabe* Paris 1877 II, 370 ff.; dazu Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 25, S. 391, 393, 413, Bd. 29 S. 163, 164, Noten zu Baldi, S. 17 und 75, 30 und 94, theilweise nicht benutzt von Wüstenfeld, Uebersetz. aus dem Arab. S. 25 ff. Vgl. auch Otto Bardenhewer, Ueber den Ursprung des . . . Buches *de causis* (mir 1879 ohne Titelblatt zugeschickt) S. 4 ff. und s. folg. Anm.

1153)[198]) liegt zur Vergleichung mit ibn Esra sehr nahe, sie waren Zeit- und Landesgenossen, ursprünglich auch Religionsgenossen — schwerlich (allerdings möglich) auch Namensvettern[199]).

Der *Liber Algorismi de practica arismetricae* des Johannes Hispalensis, wahrscheinlich eine der ersten Nachahmungen der Arithmetik des Khowarezmi im Abendlande[200]), hat in der uns vorliegenden Ausgabe Boncompagni's ebenfalls keine eigentliche Eintheilung und Kapitelzahl, und vermisst man ein Summarium der Ueberschriften, welches ich hier, so weit es zu unserem Zwecke nöthig ist, zusammenstelle[201]):

Regulae de scientia aggregandi (p. 30)
„ „ „ *diminuendi (p. 32)*
„ „ „ *duplandi (p. 35)*
„ „ „ *mediandi (p. 36)*
„ „ „ *multiplicandi (p. 38)*
„ „ „ *dividendi (p. 41)*

198) V. Rose im Hermes VIII, 335, 337, 340, 343. — Ich werde eine kritische Revision des neuen, oder scheinbar neuen Materials anderswo vornehmen. Hier mag nur Ein Punkt kurz erledigt werden. Der Verf. des Commentars zu Ptolemäus' Centiloquium, Abu Dscha'fer Ahmed ist der Sohn des Jusuf ben Ibrahim ibn ed Dâje, und Verf. von Erzählungen von Aerzten und desgleichen von Astronomen; das Jahr 309 H. (bei Rose S. 340) könnte das Datum der Abfassung sein. Danach ist Wüstenfeld l. c. S. 28 und S. 60 n. 7 zu berichtigen. Die Belege und die Berichtigungen zu Zeitschr. für Math., X, 18 ff. anderswo.

199) Leclerc, l. c. II, 374 n. 6 fand in einer einzigen Handschrift des Centiloquiums (Par. 7307) „*Abraamus ben Deut*" und vermuthet darin den jüdischen Namen Johann's; Wüstenfeld, Uebers. S. 38, nimmt das auf und meint die Uebersetzung sei wohl von Johannes noch als Juden verfertigt. Für das Jahr 530 (1136) weiss Leclerc keinen andern Uebersetzer; an Plato aus Tivoli (und den Juden Abraham) dachte er nicht mehr; aber die HS. bei Rose hat Johannes Toletanus; hingegen ist „*Bereni*" bei Wüst. nicht Ptol., sondern *Battani!* — Abraham b. David aus Toledo starb als jüdischer Märtyrer 1170. Wie viele mögen so geheissen haben! Ich lege auf die einzige HS. keinen Werth. Bemerkenswerth sind die Citate eines „Johann aus Toledo" und David aus Toledo, neben Hermannus, in einer anonymen hebr. Abhandlung über das Astrolab, HS. Oppenh. 1666 Qu. der Bodleiana. Sie stammen wohl, wie vielleicht die ganze Schrift, aus lateinischen oder sonst christlichen Quellen.

200) S. 68: *Hoc idem est illud etiam quod . . . alcorismus dicere videtur.* Wöpcke, *Mém. sur la propag. des chiffres etc.* p. 155, 186, hält die Schrift Johann's für eine Paraphrase des Khowarezmi; vgl. auch Cantor, mathemat. Beitr. 275 und unten Anm. 203 und 243.

201) Schon *Chasles, Aperçu etc.* — deutsch u. d. T. Geschichte der Geometrie u. s. w. aus dem Franz. übertr. von L. A. Sohncke; Halle 1839, S. 595 — hebt die 7 Operationen hervor: Addition, Subtraction, Duplation, Mediation, Multiplication, Division und Wurzelausziehung.

de fractionibus numerorum (p. 49)[202])
de multiplicatione fractionum (p. 51)
de divisione numerorum cum fract. etc. (p. 53)
de dispositione integrorum in aggreg. etc. (p. 54)
de fractionibus alterius denominationis (p. 56) (Brüche aller Benennungen, *alterius* ist hier im Sinne von *alius* gebraucht)
de multiplicatione fract. (p. 60)
de divisione fract. (p. 69)
de invenienda radice numerorum (p. 72), mit ähnlichen Unterabtheilungen
Excerptiones de libro qui dicitur gleba mutabilia [gebr uamucabala] (p. 112).[203])

Die indische Arithmetik, welche Sacrobosco in Versen unter dem Titel „*de Algorismo*" hinterliess, deren 9 Kapitel die Numeration, Addition, Subtraction, Mediation, Duplation, Multiplication, Division, Progression und Extraction der Wurzeln behandeln, ist nicht bloss für Christen bis ins 16. Jahrhundert massgebend gewesen, wo man anfing die Duplation und Mediation unter Multiplication und Division zu subsummiren — wie das schon ibn Esra gethan — und daher die 9 Kapitel in 7 zusammenzuziehen[204]). Duplation und Mediation hat z. B. noch Isak ben Mose aus Oriola in Aragon, vielleicht in Constantinopel, zu Anfang 16. Jahrh.[205]). Hingegen theilt Mord. Comtino (um 1450), der vorzugsweise die Schriften ibn Esra's studirte[206]), den arithmetischen Abschnitt seines handschriftlichen Werkes in 1. Addition und Subtraction, 2. Multiplication, 3. Division und

---

202) Anfang: *Licet cuius libet numeri partium denominatio possit fieri infinitis modis secundum infinitos numeros, placuit tamen Indis, denominationem suarum fractionum facere a sexaginta.* Vgl. oben Anm. 187.

203) Diese Excerpte vindicirt Chasles (*Comptes rendus* XIII, 1841, p. 502) dem Joh. Hispalensis, ohne die theilweise Entlehnung aus Khowarezmi in Abrede zu stellen; ja er beweist daraus, dass die Algebra des letzteren schon übersetzt vorlag.

204) Chasles-Sohncke S. 602.

205) HS. Paris 1095; vgl. meinen Catalog der Leydener HSS. p. 283, die Zeitschrift *il Vesillo,* Casal Monferrato 1879 S. 17, wozu eine Berichtigung folgen wird, da nach Zunz (in Geiger's Zeitschrift VI, 195) עלי weder Ali noch Eli, sondern eine abbrevirte Eulogie ist.

206) Vgl. oben §§ 13 und 14, Verz. der hebr. HSS. der k. Bibiothek in Berlin S. 27. Sein Werk findet sich auch in der Bibliothek des Herrn Lehren in Amsterdam, worüber ich Mittheilungen des Herrn van Biema in der Hebr. Bibliogr. geben werde.

Progression, 4. Verhältnisse mit einem besonderen Theil über Brüche. Sein Schüler, der bekanntere Elia Misrachi (um 1500 in Constantinopel) bemerkt in der Einleitung zu seiner gründlichen und ausführlichen Arithmetik[207]), dass „einige der Alten“ (קצת מהראשונים) die Duplation und Mediation (כפול וחלוק באמצע) abgesondert behandelten, jedoch mit Unrecht, da beides „Multiplication“(!) mit 1 und $\frac{1}{2}$ sei.

An ibn Esra enger schliessen sich zwei unedirte anonyme Schriften, deren eine allerdings fast nur als ein Auszug angesehen werden dürfte. Die erste findet sich in der Bodleiana, alte deutsche HS. Oppenh. 1666 Qu. f. 46b—52b (abgebrochen). Nach den Notizen, welche ich vor mehr als 25 Jahren in Oxford gemacht, hat der Verfasser eigentlich das Buch grösstentheils zum mündlichen Gebrauch bestimmt. Seine 7 „Pforten“ sind die ibn Esra's mit derselben Bezeichnung und in der 3. f. 48 heisst es sogar: „Es spricht Abraham ibn Esra der Verfasser(!). Ich fand einen Weg u. s. w.“, wie HS. München 43 f. 112b. Fol. 47b gibt der Verfasser zweimal an, was sein ungenannter Lehrer von Rabbi Samuel ben R. Jehuda vernommen, der es von einem „thörichten Geistlichen“ (גלח טפש) vernommen[208]).

Ein titelloses Compendium in der bereits erwähnten HS. Oppenh. 272 A. Qu. f. 59—103, von zweiter Hand ergänzt, vielleicht unvollständig, beginnt:

בשם המאיר לעולם
והוא מכל נעלם
ואין עמו העלם(!) אחל לבאר קצת דרכי החשבון בחכמת המספר והקצת
[l. ומקצת] התשבורת וכוונתי להקל בביאור תכלית האפשר אצלי למען יקל
על המעיין אשר לא הורגל.

Der Verfasser behandelt den Stoff nach den „alten“ 7 Pforten (ganz so wie ibn Esra): 1. חבור, 2. חסור, 3. כפל, 4. חלוק, 5. שבר, 6. ערך, 7. שרשים; die Beispiele sind durch שאלה „Frage“ bezeichnet und sehr zahlreich. Sonderbarer Weise befindet sich in demselben Codex Bl. 117—119 von derselben Hand ein Fragment einer Ergänzung oder abweichenden Recension der letzten 3 Abschnitte desselben Werkes, anfangend mit denselben 3 Reimen (jedoch 2 hinter 3) dann fortfahrend: אבאר דרכי חשבונות

207) Fol. 4b der vollständigen Ausg. 1534, geschildert in meinem vierten Briefe an Boncompagni (Rom 1866), vgl. auch dessen *Bulletino*, 1879 S. 350 (*Intorno a Jo. de Lineriis etc.* p. 8).

208) Hier ist sicher nicht an den provençalischen Uebersetzer aus dem Arabischen, Samuel ben Jehuda ben Meschullam (geb. 1294, vgl Catal. der hebr. HSS. in München S. 192) zu denken. Einen deutschen Copisten Samuel ben Jehuda im Jahre 1298 erwähnt Zunz, Zur Gesch. und Lit. S. 208.

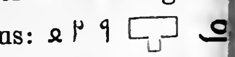
השברים והערכים והשרשים עם ביאור תוצאות מקצת הכללים בדרכי חשבונותיהם וגם אזכיר קצת כללים מן התשבורת יען אשר תוצאותיהם מן השרשים und so weiter fast dieselbe Vorrede wie oben. — Zwischen beiden befindet sich ein Commentar des Meir Spira (aus Speier) über die astronomischen Tabellen (Sechsflügel) des Immanuel ben Jakob (1365, vgl. oben S. 95), weshalb die Cataloge auch unser Compendium jenem Meir beilegen[209]).

§ 17.

Betrachten wir nunmehr den Charakter der Arithmetik des ibn Esra. Sie ist auf die „indische" Arithmetik basirt, obwohl er die „indischen" (arabischen) Ziffern durch hebräische ersetzt; nur das (im Hebr. nicht vorhandene) Zeichen der Null, „das Rad" (גלגל, *circulus* bei Joh. Hispalensis) behält er bei[210]); er schlägt sogar vor, es als Zeichen für die Unbekannte (x) zu setzen[211]).

---

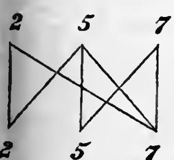
209) Dem Meir Spira wird auch ein anonymes, in verschiedenen Recensionen handschr. erhaltenes (vielleicht übersetztes?) Compendium der Himmelskunde (*form globi*) beigelegt; Abr. Jud. S. 11 Anm. 19; s. hebr. Bibligr. IX, 163; Catalog de hebr. HSS. in München S. 13 n. 36[14], Verz. hebr. HSS. der k. Bibl. Berlin S. 92

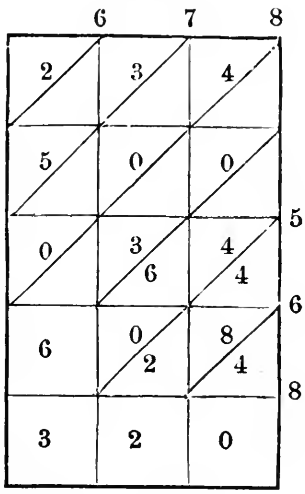
210) ל כן עשו חכמי הודו כל מספרם על תשעה ועשו צורות לט' מספרים והם
2 3 4 5 6 7 8 9 [ובני ישראל די להם מאותיות התורה] א ב ג ד ה ו ז ח ט . . . ואם
רן לו מספר באחדים ויש לו מספר במעלה השנית שהם העשרות, ישים כדמות גלגל 0
ראשונה, להורות כי אין במעלה הראשונה מספר; so in HS. Luzz. (Berlin); anstatt de
eingeklammerten Worte in HS. München 43 f. 104 . . . . אני כתתי במקומם א'ב'
ט' צורת אנשי הודו (!). In der von Terquem benutzten HS. stehen die 9 Ziffer am Rande, auf welchen durch ein Zeichen im Texte verwiesen wird. Terquem (p. 4) zweifelt nicht, dass die Figuren der Ziffern ursprünglich die arabische gewesen und von den Abschreibern durch unsere gewöhnlichen ersetzt worden er weist auf die Vergleichung von HSS. hin, welche aber nur dann zu einem Resultate führen würde, wenn man einen Autograph auffände; denn jeder Abschreiber hat wohl die ihm geläufigen Formen substituirt. Eine sehr alte HS wäre jedenfalls für die in neuerer Zeit vielfach behandelte Frage über den Ursprung unserer gewöhnlichen Ziffern und die Geschichte der arabischen von Interesse. In der HS. Luzzatto's sind Operationen am Rande m arabischen Ziffern, vielleicht vom Verf. herrührend.* In der Anweisung zu Numeriren, Hs. München 150 f. 83, sehen die Ziffern 4—9 so aus: 

211) Kap. 7, bei Terquem, p. 16. — Die Null wird auch in dem Schriftchen des Khowarezmi (p. 3 ed. Boncompagni) bezeichnet als *circulus parvulus in similitudine o litterae.* Der Strich über der Null, den Terquem bemerkt ha findet sich in vielen alten hebräischen HSS., und ist vielleicht hinzugefügt, um Nu von o zu unterscheiden?* Ueber die Namen der Null s. Chasles, *Compt rendus* XVI (1843) p. 143 und Nesselmann, Gesch. der Algebra I, 102, 49 Ibn Esra gibt den Namen *Sifra* (ספרא) als den der Landessprache (לעז), b Terquem p. 5 ungenau *„lange étrangère"*.* Allein die ganze Schlussstelle der Ei

Er kennt die Rechnungsprobe durch Ziffernsumme dividirt durch 9,[212]) lie schon bei Khowarezmi (p. 12) und auch bei Joh. Hispalensis (p. 32, 41) vorkommt, aber nicht die Division durch Differenzen von 9, welche in den Algorithmen vorkommt, die zu seiner Zeit entstanden[213]).

Vergleicht man die Methode seiner Multiplication (bei Terq. p. 7, vgl. weiter unten) mit den vier von Woepcke zusammengestellten[214]), so ist sie etwas kürzer als die des Khowarezmi und des Abacus (bei Chasles) und steht der jetzt gewöhnlichen am nächsten, nur dass die Theilfacite gleich hinaufgetragen werden; während Fibonacci und Planudes noch weniger aufschreiben. Dies sind freilich ganz untergeordnete Vortheile des Praktikers, (und ibn Esra berührt auch die pädagogische Seite), die aber in der alten Logistik und Calculation für wichtiger gehalten wurden und daher als Anhaltspunkte für die geschichtliche Fortentwicklung zu beachten sind. Männer von Fach dürften in den Einzelheiten des Textes unter Benutzung mehrerer HSS. noch Manches finden, was Terquem nach dem damaligen Standpunkt der Geschichte der Mathematik nicht für beachtenswerth hielt; ich beschränke mich auf ein einziges, in mehrfacher Beziehung instructives Beispiel. Das Ende des 1. Kapitels bietet eine bedeutende Abweichung in den HSS. Die oben erwähnte Multiplication (Terquem p. 7) fehlt vollständig in Cod. München 43 f. 107b, sie bildet in HS. Münch. 150 f. 87b, 88, das Ende des Kapitels, indem nach den Worten „45 Tausende und 25“ nur folgt: „Die Probe mache, wie du weisst.“ In Cod. Berlin f. 65 folgt noch eine kurze Anweisung für die Probe; eine ausführlichere geht in beiden Münchener HSS. voran; am Rande stehen beigegebene zwei Figuren (ich setze arab. Ziffern für die hebr. Buchstaben und Null ohne Oberlinie).





Hier ist die Form des „*Casello*“[215]).

Ueber die letzte Parthie des Buches konnte Terquem (p. 20) wegen der Beschaffenheit der einzigen benutzten HS. nicht genau berichten. Es

leitung ist in der HS. Luzzatto von der Hand eingeklammert, welche die Variante notirte, die Terquem ebenfalls am Rande fand. Für ibn Esra hat auch das „Rad“ seine symbolische Bedeutung.

212) Vgl. oben Anm. 143.

213) S. Chasles, *Comptes rendus l. c.* p. 173, 235.

214) Wöpcke, *Sur l'introduction des chiffres etc.* p. 20 ff., 47.

215) Boncompagni, in *Atti dell' Accad. dei nuovi lincei* VI, 320.

mag hier das Wichtigste in Kürze ergänzt werden. Der Verfasser geht vom Wurzelzeichen zum Kreise über, weil derselbe von der Wurzel abhänge (תלוי בשורש). In demselben gebe es viele Dinge: 1. Kreis (Peripherie), 2. Diagonale, 3. Quadrat[216]), 4. Sehne, 5. Pfeil, 6. Flächeninhalt[217]); aus zweien derselben lasse sich stets das dritte Unbekannte finden; einige könne man aus einem einzigen Anderen finden (eine Variante der Berliner HS. wiederholt hier: aus zwei Anderen!). Das 1. Beispiel ist ein Diameter von 10. Zur Berechnung der Peripherie aus dem Diameter bemerkt er: Die Geometer (חכמי המדות) nehmen das Verhältniss $^{22}/_{7}$ an, Archimedes[218]) bewies, dass es weniger als $3\,^1/_7$, mehr als 3 und 10 Theile von $70\,^1/_2$ („d. h. 8′ 24″ 35‴“); Ptolemäus nahm eine Mittelzahl, also 8′ 30″; die Inder $\frac{62838}{20000}$;[219]) zwischen letzteren beiden sei nur eine Differenz von 6‴. Nun folgt die Anwendung auf die Eintragung eines Dreiecks, die wir aus den anderen Schriften kennen, aber ohne irgend eine Hinweisung auf den Gottesnamen. In Bezug auf Bogen und Sehnen nach Ansicht der Astronomen wird, wie ich schon oben erwähnt, auf die „Gründe der Tabellen“ verwiesen und bemerkt, dass die Geometer (חכמי המדות) das Verhältniss der Peripherie genauer nehmen. Endlich erklärt er, warum die Arithmetiker (חכמי החשבון) „um Eins weniger zur Radix (יסוד) genommen haben“, — d. h. warum sie bei der Multiplication eine Reihe abziehen. Die wirklichen Zahlen 1—9 entsprechen den 9 Kreisen (עגולות, Himmelssphären — wenn er von 10 Zahlen spricht, so erinnert er an die Fingerzahl, wie das Buch Jezira), alle anderen sind ähnliche (נמשלים) und sollten erst die „Stufen“ bezeichnen, also die Zehner die 1. Stufe etc., 1000000 die 6. [die letzte, die sich mit Worten geben lässt?] bis ins Unendliche. Da man die Einheiten aber als 1. Stufe annahm, so musste man zuletzt eine abziehen, z. B. 200×300 ist $2 \times 3 = 6$ die Stufe gibt 6, davon ab eine, gibt die 5., deren Anfang 10000, also ist das Product 60000; nach eigentlicher Berechnung wäre Anfang der 4. Stufe 10000. Das Resultat ist dasselbe, „sie thaten es bloss, um es den Schülern zu erleichtern.“ Mit diesen Worten enden die vollständigen HSS.

---

216) הכפל d. h. die Multiplication mit sich selbst, Terquem liest falsch *Kafal* und weiss es nicht zu deuten; s. oben Anm. 179.

217) השברים, s. oben Anm. 142 und 180.

218) Der Namen ist in den HSS. verstümmelt; ibn Esra acceptirte wahrscheinlich die arabische Form ארשימידאס, welche dann von den Abschreibern modificirt wurde; s. oben Anm. 139.

219) Dies ist die richtige Zahl, nicht 62438, welche Variante nur aus Weglassung eines ח entstanden ist; vgl. oben S. 97 § 13.

In Bezug auf Terminologie ist noch hervorzuheben, dass nach Kap. 5 der Nenner מורה (Lehrer, Zeiger u. dgl.) heisst, und zwar deshalb, weil er „den geraden Weg zeige"; man könne ihn auch anders nennen.* Mehrstellige Nenner werden, wie bei den Arabern, zerlegt; die Veranlassung war zunächst eine sprachliche, es fehlt das Ordinale für zusammengesetzte Zahlen.

Diese Arithmetik ist offenbar als eine praktische Anleitung verfasst; aber der Verfasser kann sich von der Symbolik nicht ganz frei halten. Die (von Terquem übersetzte) Einleitung knüpft an das Buch *Jezira* (vgl. § 9). Zu Anfang des 2. Kap. hebt er die Bedeutung der Einheit hervor — jedoch ohne auf die Beschaffenheit des Gottesnamens einzugehen, also mit Ueberwindung seines Lieblingsthemas, wie auch gegen Ende bei der Kreisberechnung. Wenn er für seine Glaubensgenossen in christlichen Ländern auf die Einheit ein Gewicht legte, so wird das um so begreiflicher, als der abgefallene Johannes Hispalensis kurz vorher in seinem *Algorismus* Veranlassung genommen, die Trinität zu symbolisiren[220]).

§ 18.

Dass die Arithmetik Abraham's viel und lange studirt wurde, geht schon aus der grossen Zahl der erhaltenen Handschriften hervor. Die Theologen bedurften allerdings derselben nicht, da ihnen die Anwendung in den oben erwähnten Schriften und Excursen näher gelegt war. Auch seine Supercommentatoren erwähnen das Buch kaum, z. B. Leon Moscono, der bei Abraham selbst zu Levit. 26, 6 eine Verweisung darauf finden wollte, mit Unrecht[221]). Josef ben Elieser zu Gen. 4, 21 (n. 226) citirt aus Kap. 6 die Hochstellung der musikalischen Verhältnisse[222]). Desto mehr galt das Buch bei den philosophischen Pädagogen und Encyklopädikern. In der Studienordnung des Jehuda ben Samuel ben Abbas[223]),

---

220) *Liber Algorismi*, Rom 1857 pag. 127 seq., vgl. p. 128: *Numerum, cum ad instar nouenarii, tam celestia quam terrestria, tam corpora, quam spiritus, formata et ordinata esse videantur. Novem enim sunt spere etc. Sicut creature a simlitudine sui creatoris qualicumque modo non recederet, dum intra illum numerum se continent, quia primo impari in se multiplicato generant, qui post unitatem Deo solus consecratus est, quia numero Deus impare gaudet.* Vgl. Hebr. Bibliogr. VII, 88 und die Berichtigung daselbst VIII, 152.

221) Magazin etc. III, 99.

222) In Verbindung mit der vielverbreiteten Ansicht von der „Harmonie der Sphären" (Hebr. Bibliogr. XIII, 35), der auch die astrologischen Zahlverhältnisse dienen mussten.

223) Seine Worte sind ungenau übersetzt von M. Güdemann, das jüdische Unterrichtswesen u. s. w., Wien 1873, S. 251.

dessen Zeit nicht genau ermittelt ist[224]), heisst es (wörtlich nach dem Hebräischen): „Dann beginne er [der Schüler] zu lernen in einem Buche die Wissenschaft der Zahl, im Werke des Abraham ibn Esra, denn es umfasst die meisten Gegenstände der Rechenkunst, und, wenn ihm Gott dies Buch hat zugeschickt, das Werk des Ismaeliten ibn ʿHassar."

Josef Caspi aus Argentierre (Anfang des 14. Jahrh.) empfiehlt seinem 12jährigen Sohne, sobald er 14 Jahre alt sei, der Mathematik viel Zeit zu widmen, zu beginnen mit der Arithmetik des ibn Esra, dann folge Euclid, al-Fergani, das *Cheschbon ha-Mahalchot* [von Abraham b. Chijja].[225])

Schliesslich mag noch ein Gesammturtheil des Josef Salomo del Medigo erwähnt sein[226]): „Der Herr der Geheimnisse [d. h. der die Geheimnisse kennt], ein Schatz von Weisheit[227]), Abraham ibn Esra, über Zahl und Maass[228]), Astronomie und Kalenderkunde, Astrologie[229]) schrieb er viele Bücher voll von Weisheit und Gottesfurcht; sie sind übersetzt ins Lateinische und ruhmvoll erwähnt, so dass seine Methode der Construction der Häuser[230]) des Himmels und deren Eintheilung als intellectuelle und vorzügliche bezeichnet wird vor allen anderen Schriften der Alten."

§ 19.

3. Haben wir bisher unsern Autor nur in hebräischen Schriften verfolgt, so führt uns ein „Abraham" auch in die lateinische Literatur. Dem ibn Esra wird im Index des Pariser Catalogs der lateinischen HSS.

---

224) Hebr. Bibliogr. XIV, 39. Wenn er den ʿHassar (oben § 16 S. 109 A. 192) nur aus der Uebersetzung kannte, so lebte er nach 1271.

225) „Testament", herausg. in der Sammelschrift *Taam Sekenim* Frankf. a. M. 1854 f. 51b.

226) Bei A. Geiger, Melo Chofnajim, Berlin 1840, hebr. S. 11. Zu Geiger's Uebersetzung S. 12 s. unten Anm. 230.

227) אוצר החכמה — ein so betiteltes Buch, nach Wolf B. H. III. S. 51 in der Oppenh. Biblioth. (bei de Rossi, Wrtb. S. 10) existirt nicht, vielleicht Verwechselung mit dem astrolog. ראשית ח' s. unten S. 127.

228) שיעור, d. h. Geometrie (vgl. Hebr. Bibliogr. VII, 87 und 89), worüber jedoch kein besonderes Buch bekannt ist.

229) חכמת התולדת kann hier nur Astrologie bedeuten; del Medigo hat es vielleicht irrthümlich so aufgefasst, s. oben S. 86 A. 96.

230) Geiger's Uebersetzung lässt dieses Wort weg, wahrscheinlich kannte er die technische Bedeutung nicht. Es handelt sich um das Horoscop, dessen Eigenthümlichkeit schon 1143 erkannt war (s. oben Anm. 28), welches unt. And. Schleiden hervorhob, aber ibn Esra selbst als indisch bezeichnet (Abr. Jud. S. 13). Wahrscheinlich ist Scaliger zu Manilius missverstanden bei Heilbronner (*Hist. math.* p. 486, § 453), welcher schreibt: *„ei attribuitur divisio Zodiaci in duodecim signa (!) etc"*. De Rossi (S. 3, und nach ihm viele neuere Autoren) macht ibn Esra zum Erfinder einer Dichotomie der Himmelskugel durch den Aequator, woh

folgendes Schriftchen beigelegt: *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.* Libri hat dieses Schriftchen aus 3 HSS. edirt, aber dabei Zweifel über die Autorschaft geäussert, ohne die Gründe für oder gegen anzudeuten[231]). Es hat aber ein allgemeineres Interesse, den Verfasser und sein Zeitalter näher zu kennen, wie sich aus dem Nachfolgenden ergeben wird.

Das lateinische Schriftchen ist in jedem Falle eine mehr oder minder treue Uebersetzung oder Bearbeitung fremden Stoffes. Wenn Abraham etwa nur eine Substitution des lateinischen Uebersetzers für Ibrahim wäre, dann könnte an einen arabischen Verfasser dieses Namens gedacht werden; ist es ein Jude, so bleibt nur die Wahl zwischen Abraham bar Chijja und unserem ibn Esra, welche beide hebräisch, nicht arabisch schrieben (oben § 7). Ersterer war nur als Dolmetscher, z. B. bei der Uebersetzung des Buches *Electiones* von ʿAli b. Aʿhmed al-Imrani („Enbrani") thätig (Barzellona 1134)[232]), wahrscheinlich auch bei einem Werke des Maslema (§ 21, 5).

Ehe ich die innern und äussern Gründe für oder gegen die Autorschaft

---

nach Basnage (*Hist. des Juifs* p. 259), nach welchem ibn Esra in der Astronomie glückliche Entdeckungen gemacht, welche die geschicktesten Mathematiker (!) gewissenlos sich aneigneten, u. dgl. sonst. Das ist Alles wissenschaftliche — Legende, zu gebrauchen für oberflächliche Apologeten.

231) Libri, *Histoire des sciences mathém. etc.* I. p. 304 (cf. p. 124). — Das Citat aus der *Jenaer Lit.-Zeit.* 1843 n. 301 bei M. Sachs (die relig. Poesie der Juden in Spanien S. 310) ist ungenau. — Sedillot, *Matériaux pour servir à l'hist. comparée des sciences mathém. etc.* I. p. 454: „*cet Abraham qui n'est autre probablement que le rabbin Abraham-aben Esra, mort en* 1174". Was Sedillot über die Sache selbst vorbringt, werde ich nicht weiter berücksichtigen, da es sich von selbst erledigt.

232) Zeitschr. für Mathem. XII, 22, XVI, 370; Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. XXV, 393. Wüstenfeld, Uebersetz. S. 43, hat diesen Autor unter Plato aus Tivoli nicht aufgenommen. — In Bezug auf *Almansor* (Abr. Jud. S. 26, Noten zu Baldi S. 32, vgl. auch Hebr. Bibliogr. XI, 125 über eine Confusion bei Möhsen) nimmt Wüstenfeld *l. c.* S. 41 einen jüdischen, arabisch schreibenden Astrologen Mançur ben Abraham unter Hakam II (961—76) an, indem er bemerkt, ich habe die „Lesart al-Hakam kaum erwähnt"; s. jedoch Abr. Jud. S. 30, 9, wo auch die Lesart „filio Abenezrae". Von einem solchen Mançur habe ich in der jüdischen und arabischen Literaturgeschichte, die ich seit 35 Jahren insbesondere für arabische Literatur der Juden verfolge, keine Spur gefunden. Ich halte *Almansor* für ein noch ungelöstes Problem, welches hier nicht weiter verfolgt werden kann. — Was endlich das Centiloquium des Ptolemaeus mit dem Comm. des abu Dschaʿâfer betrifft (Abr. Jud. S. 37), so nennen Handschr. den Joh. Hispalensis oder Toletanus, s. oben S. 111 Anm. 198.

ibn Esra's auseinandersetze, mögen zuerst die Bemerkungen eines Mannes von Fach Platz finden.

Chasles[233]), welcher das Schriftchen für eine Uebersetzung aus dem Arabischen hält, äussert sich darüber: „Dieses Werk ist in mehrer Hinsicht von Werth. Zuerst ist es wesentlich verschieden von dem des Muhammed ben Musa [el-Khowarezmi]; denn es bezieht sich einzig nur auf die einfache und doppelte *Regula falsi.* Zweitens zeigt es uns, dass diese Regeln von den Indern herkommen. Man hat sie bisher den Arabern zugeschrieben, auf die Autorität des Lucas de Burgo gestützt, der sie die Regeln des *Helcatagm* [l. *Helcataym*] *„e vocabulo Arabo* nennt“ u. s. w. — Ich komme hierauf weiter unten zurück. — Später äusserte sich Chasles[234]) über dieses Schriftchen folgendermassen: „Es dreht sich hauptsächlich um die sog. *regula falsi*, aber auf jede Lösung nach dieser Methode folgt eine andre nach gewöhnlicher Regel; alle Fragen sind 1. Grades mit 1 oder 2 Unbekannten, also das Ganze nicht von Bedeutung in der Geschichte der Algebra; aber es verdient erwähnt zu werden, und zeigt auch, dass die Uebersetzer des 12. Jahrh. sich vorzugsweise mit dieser Parthie der Mathematik beschäftigten. Es gehört dem 12. Jahrh. an, ob es von Ibn Esra oder *Savasorda* herrühre u. s. w.“

In der That waren beide Abraham, die man sogar fälschlich zu Lehrer und Schüler gemacht[235]), Vermittler arabischer Wissenschaft für Juden in christlichen Ländern, und direct oder indirect auch für Christen. Doch scheint mir ein charakteristischer Unterschied darin zu liegen, dass b. Chijja bei seinen hebr. Arbeiten auf die specielle Erwähnung der arabischen Autoritäten weniger Werth legte und sie auch im Einzelnen weniger citirte. Abgesehen von den ganz allgemeinen Angaben griechischer Autoren über Geometrie[236]), welche vielleicht vollständig einem arabischen Autor entnommen sind, habe ich in seinen Schriften bisher fast nirgends einen arabischen Autor citirt gefunden. In seinem *Forma terrae*, welches al-Fergani benutzt zu haben scheint, wird letzterer, oder el-Battani genannt. Ibn Esra nennt in seinen grammatischen und exegetischen Schriften recht fleissig seine Vorgänger[237]); aus den mathematischen und astrologischen Schriften, wie aus der Vorrede zur Uebersetzung des Matani,

---

233) Chasles, deutsch von Sohncke, S. 567; vgl. Wöpcke, *Mém. sur la propag.* p. 180.

234) *Comptes rendus* XIII, 1841, p. 508.

235) Abr. Jud. S. 11.

236) Hebr. Bibliogr. VIII, 94; Verz. der h. HSS. Berlin S. 58.

237) Magazin u.s.w. III, 143, wo nachzutragen: Josef der Babylonier (Exod. 25, 8 kürz. Rec.), wenn nicht ein Irrthum.

lässt sich eine Reihe arabischer Autoren zusammenstellen und für die arabische Literatur selbst verwerthen. Die in der lateinischsn Uebersetzung verstümmelten Namen muss man allerdings aus den HSS. der hebr. Originale restituiren[238].

In dem *lib. augm. etc. p. 312* wird eine „*regula infusa*“ eines Job *filii* Salomonis *divisoris* erwähnt[239]. Noch mehr spräche für ibn Esra die Erwähnung der Inder, wenn das Schriftchen nicht eine stricte Uebersetzung des Werkes eines ungenannten Arabers ist. Zwar ist Abraham nie in Indien gewesen (oben § 6), aber die Anführung von Indern gehört zu den Kennzeichen seiner Schriften, insbesondere dem Nasi gegenüber; und grade zur Zeit ibn Esra's werden die auf indischem Einfluss beruhenden Schriften der Araber in Spanien beliebt; in dieser Beziehung ist auch das *lib. augm.* ein interessantes Document. Selbst der Titel verdient besondere

---

238) Die genannte Vorrede habe ich in der Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. Bd. 24 übersetzt mit Nachrichten über die darin, zum Theil auch über die in astrolog. Schriften erwähnten Autoren. Letztere werde ich anderswo erledigen.

239) Ibn, oder abu, Suleiman ist wohl ein stehender Beinamen für Hiob, أيوب (*Steinschneider,* Fremdsprachl. Elemente S. 13), und dieser vielleicht identisch mit Ejjub al-Baʿsri bei H. Kh. IV, 398 n. 8974 (ohne Bestimmung des Zeitalters, und nur hier erwähnt, nach Index VII, 1067 n. 1538) als Verfasser von فرائض, oder Erbschaftstheilungen, welche die Araber als eine Disciplin der Mathematik betrachten (H. Kh. I, 24, II, 62 u. 63, vgl. die Schriften IV, 393 n. 8967 ff. und Ibn Khallikan bei Wöpcke, *Recherches sur plus. ouvr. etc. I, Rome* 1856 p. 8). Daher die Benennung *divisor*, welche eine Randbemerkung der lat. HS. (bei Libri I, 312) erklärt: „*qui res a defuncto relicta [sic] partitur, et hoc apud Arabes.*“ Offenbar ist es die, auch sonst bei Mathematikern vorkommende Bezeichnung الغرضى, z. B. H. Kh. III, 528 (VII, 751), unrichtig übersetzt: *statutorum divinorum perito* (was auch Cureton, Catal. p. 199 nota a, nicht berichtigt; ebenso in Flügel's *Diss. de arab. scriptor. graecor. interpr.* Missenae 1841, p. 33 n. 73) besser IV, 408 n. 8991 (wofür VII, 822 العرضى) u. IV, 410 Z. 3, ferner V, 21 lin. 9: *juris hereditarii gnaro;* unübersetzt bei *Pusey*, *Catal.* p. 607 zu MXLII[1], (vgl. p. 286 nota i). — Zu dieser Gattung von Schriften gehört das von mir in der Bodleiana wieder aufgefundene כתאב אלמואריה̄ des Saadia Gaon (*Catal.* p. 2160), welches auf den ersten Anblick für ein mathematisches Werk anzusehen wäre. Die Regeln der Erbschaftstheilung boten bei verwickelten Bestimmungen Gelegenheit zu differirenden Ansichten. Auch Ibn Esra hat im 6. Kap. seiner besprochenen Arithmetik solche Fälle und erwähnt dabei die Methode der „fremden“ und der „israelitischen Weisen“ — in letzterer glaubt Terquem (l. c. p. 17) die „*logique tortueuse du Talmudiste*“ zu erkennen. Dass aber dergleichen mehr die Rechtslehre als die Mathematik angehe, bemerkt schon Rosen zu den von Muhammed b. Musa el-Khowarezmi in seiner Algebra behandelten Beispielen dieser Art (p. 91, vgl. p. 133).

Beachtung[240]). Die Araber nennen die *regula falsi* حساب الخطاءين oder عمل بالكفات „die Operation mit der Wage", wegen der Figur —×—, welche dabei in Anwendung kommt. In den mir bekannten orientalischen Quellen[241]) findet sich nur eine von diesen beiden Bezeichnungen. Welchen Ausdruck die hebräischen Arithmetiker des Mittelalters dafür gewählt haben, ist mir nicht bekannt, da es überhaupt sehr wenige elementare hebr. Rechenbücher gegeben zu haben scheint, und ich auch früher keine Veranlassung hatte, von diesem Ausdruck besonders Notiz zu nehmen. Chasles (l. c. bei Sohncke S. 567) bemerkt, dass man „in andern Werken aus derselben Zeit" jene Methode *Regula falsi,* oder *augmenti et decrementi,* „ebenso wie der Compilator Abraham" nenne, indem er das Schriftchen *Algorithmus de integris ... cum annexis de tri, falsi aliisque regulis*, Leipzig 1507, anführt. Ich weiss nicht, ob der Ausdruck *augmenti et decrementi* in diesem Buche selbst vorkommt, und welcher Zeit dasselbe angehört — vielleicht hat Chasles anderswo, etwa in der Abhandlung über Abacus und Algorismus *(Comptes rendus* XVI, 156, 281, 1383, XVII, 143*)* dieselbe näher bestimmt. Im Abacus des *Leonardo Pisano*[242]) beginnt das XIII. Kap. *(de regulis elchatayn* p. 318*): Elchataieym quidem arabice, latine duarum falsarum posicionum regula interpretatur etc.,* später (p. 319) heisst es: *Est enim alius modus elchataym; qui (sic) regula augmenti, et diminucionis appelatur etc.*

Vollkommen entscheidende Kriterien über den sprachlichen Ursprung und die Autorschaft des Schriftchens habe ich leider nicht auffinden können.

Was zunächst die oben mitgetheilte Ueberschrift betrifft, so ist sie weder präcise und klar, noch, wie ich glaube, überhaupt von kritischem Werthe. *„Compilavit"* bezeichnet die Arbeit des Autors im Gegensatz zu der des blossen Uebersetzers[243]). Was soll aber heissen: *secundum librum*

---

240) Der Ausdruck kehrt auch im Werkchen selbst (p. 332, 357, 359, 367 etc.) wieder; es ist auch von den beiden *„lances"* die Rede, so z. B. gleich zu Anfang S. 305.

241) *Haği Khalfa* III, 62 (VII, 707), III, 142 n. 4724, V, 80 n. 10089; *Nicoll*, *Catal.* p. 287, 545; Cureton, *Catal.* p. 199; Wöpcke, *Recherches etc.* II. p. 49. — Dass die *regula falsi* von den Indern stamme, belegt schon *Nicoll*, p. 287; vgl. auch Wöpcke, *Mém. sur la propag.* p. 177, wonach *art „géométrique"* (!) bei Marre, *Talkhis* p. 16 zu berichtigen; هندسى wird in HSS. leicht aus هندى.

242) Ed. Boncompagni; vgl. auch Libri, *Hist.* II, 31.

243) Ich erinnere mich *„compilator"* für מחבר (= مؤلف) gefunden zu haben; so nennt ein zweifelhafter Autor eines im Original nicht vorhandenen

qui Indorum dictus est, composuit? Mir scheint die ganze Ueberschrift fabricirt aus dem eigentlichen Anfange (p. 305): *Hic post laudem Dei inquit: Compilavi hunc librum secundum quod sapientes Indorum adinvenerunt de numeratione divinationis . . . Ex eo igitur est etc.* Dieser Anfang selbst kann auch noch vom lateinischen Uebersetzer modificirt sein, wie im *liber Embadorum*, wo der Uebersetzer Plato sich nur an das ihn Interessirende gehalten hat.

Auch sprachliche Kriterien für den arabischen oder hebräischen Ursprung dürften schwer zu finden sein. Die Schlussapostrophe: *„Intellige!“* (z. B. S. 329)[244]) entspricht dem arab. فافهم, فاعرف, wie dem hebr. וְהָבֵן; *„Intellige et invenias“* (p. 336) entspricht allerdings genauer dem rabb. דוק ותשכח. In dem Kapitel *de cambio* (p. 363)[245]) kommen *aurei melichini* [ملكى *reali?*], *revelati* (was ich nicht zu erklären weiss) und *solidi* [= *soldi*] vor. Vielleicht führt dies *revelati* durch Rückübersetzung auf Arabisch oder Hebräisch — obwohl es auch hier möglich wäre, dass schon der Hebräer den arabischen Ausdruck übersetzt hat. Ob die Ausdrücke *oppone* (p. 336) und *restaura* (p. 363)[246]) zu irgend einem Schlusse führen, zweifle ich.

Endlich möge noch erwähnt werden, dass in dem *Capitulum donationum* (p. 329) von der Dotation der Frauen gehandelt wird; in der Algebra des Muhammed ben Musa (p. 164 bei Rosen) ist nur von der Dotation der Sklaven in Verbindung mit der Erbschaftsrechnung die Rede.

§ 20.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch: **4.** תחבולה (*Tachbula*) Stratagemma, Kunstgriff, dessen sich Abraham bedient haben soll, als er sich zu Schiffe mit 15 Schülern und 15 Taugenichtsen befand und wegen des Sturmes die Hälfte, und zwar stets der 9., über Bord geworfen werden sollte. Er stellte sie so, dass immer der 9. ein Taugenichts war, nämlich

arabischen Commentars über das Buch *Jezira* den Verfasser (oder Redactor?) dieses Buches קובצו und מאספו (in der hebr. Uebersetzung jenes Commentars). — So hat auch Chasles, (*Comptes rendus* XIII, 515) gegen Libri nachgewiesen, dass *„edidit“* für verfassen vorkomme, also *liber Algorismi* des Joh. Hispalensis nicht eine blosse Uebersetzung sei; vgl. oben S. 111 Anm. 200.

244) Vgl. *Algorismus* des Khowarezmi ed. Boncompagni p. 13.

245) Der vorangehende Index der Kapitel stimmt in den letzten derselben nicht genau mit den Ueberschriften selbst, was auch für die Autorität der dem Index vorangehenden Ueberschrift von einiger Bedeutung ist.

246) Ueber den Sinn dieser Wörter in der Uebersetzung von الجبر, المقابلة durch *restauratio et oppositio* s. Chasles, *Comptes rendus* XIII (1841) p. 606.

4 Schüler 5 T., 2 S. 1 T., 3 S. 1 T., 1 S. 2 T., 2 S. 3 T., 1 S. 2 T., 2 S. 1 T.; dazu kommt ein Vers, dessen Anfangsbuchstaben die Zahlen angeben, wie ihn Abraham gewiss nicht geschrieben hat. Als Quelle wird ein „Memoriale der Thaten" ibn Esra's angegeben[247]). Das Kunststück, welches man als „algebraisch" zu bezeichnen pflegt, ist zuerst 1546 gedruckt, auch in Schwenter's Sammlung (1651) deutsch zu finden, von Pfeiffer lateinisch übersetzt (1665)[248]). Mit einem prosaischen Memorialsatz, der die Heiden ins Meer stürzen lässt, aber als Aufgabe die Wahl von Florinen und Groschen stellt, findet sich das Kunststück im Namen ibn Esra's in der HS. München 341[5], anonym als Vorfall zwischen Juden und Christen arabisch mit hebräischer Schrift in der Bodl. HS. bei Uri 212. Die 15 Juden werden ins Wasser geworfen in einer latein. HS. der Bodl. aus dem XVII. Jahrh.; Cod. Bern 704 enthält: *Sors cujusdam* (so) *de XX. christianis totidemque iudaeis*, anfangend: *bis duo nam niuei* (so) *praesunt et V nigelli;* ähnlich in Riese, *Anthol. latina II,* 185 *nota.* Vgl. auch „Historische und gute Schwänke des Meister Hans Sachs, herausg. von Conrad Spät", Pesth 1818 S. 40: „15 Türken und Christen". Wer möchte wohl den Ursprung solcher populär gewordener Spielereien mit Sicherheit nachweisen?

5. Da man das Schachspiel zur Mathematik zu ziehen pflegt, so bemerke ich, dass die dem Abraham beigelegten versificirten Regeln darüber höchst wahrscheinlich einer späteren Zeit angehören, s. meine Abhandlung „Schach bei den Juden" in A. van der Linde's Geschichte und Bibliographie des Schachspiels, Berlin 1873 S. 159 u. S. 195, wo ein correcter Abdruck mit genauer Uebersetzung beigegeben ist.

§ 21.

Die gegenwärtige Abhandlung hat eine solche Ausdehnung erreicht, dass es nicht mehr angeht, auch die astronomischen und astrologischen Schriften Abraham's in gleicher Weise zu behandeln; das muss einem besonderen Artikel vorbehalten bleiben. Da jedoch auf dieselben theilweise Bezug genommen ist, so mag hier eine äusserst kurz gehaltene Aufzählung mit sehr beschränkten Nachweisungen folgen, und zwar so gut es geht, in

247) זכרון המעשים. Ich möchte daraus nicht schliessen, dass man im Mittelalter eine besondere Schrift solchen Inhalts gekannt habe.

248) Warum Friedländer, *Comm. on Isaiah,* p. XXI, den Plan des Schiffscapitains und den Kunstgriff „ungenügend bekannt" nennt, ist mir unerfindlich; auch ist dieses Stück 1546 wahrscheinlich nur *in fugam vacui* hinter Mose b. Chabib's Schrift gedruckt und hat mit derselben nichts zu thun. Das Weitere s. in meinem Catalog. Bodl. p. 687.

chronologischer Reihenfolge, jedoch so, dass jüngere Ueberarbeitungen stets der ersten Recension angefügt sind.

1. Nativität in Beziers 1136, zweifelhaft (Abr. Jud. S. 42, u. oben S. 68).

2. Antwort auf drei chronologische Fragen an David Narboni, kurz vor 1139, von mir edirt 1847. Vgl. oben S. 68.

3. לוחות, astronomische Tabellen, vielleicht ursprünglich eine Redaction der Tabellen des Abraham bar Chijja (Abr. Jud. S. 16, 43, 44, Verz. der hebr. HSS. . . . Berlin S. 103), oder selbstständig, und zwar zuerst in Lucca (um 1145?), revidirt in Narbonne (ob etwa zur Uebersetzung des Matani?). Jehuda ha-Jisraeli, in seinen neuen Tafeln (um 1339??), in der Bodl. HS. Oppenh. 1666 Qu., geht über die toletanischen um 1^0 vor, wie Maimonides, Abr. ibn Esra, Abraham [*Sa'hib*] *esch-Schorta*, auch die „Tabellen der Geistlichen". Der „*tractatus Abrahae de tabulis planetarum*" in Cod. Arundel 377 (Brit. Mus.) ist von Abraham Sacut? Vgl. auch die Tabulae revolutionum etc. von Samuel (?), worin „dicit Abraham", Cod. Cambridge III, 302 n. 1684 (Hebr. Bibliogr. XI, 78).

4. ספר העבור *ha-Ibbur,* vom Kalender, 2. Recension Verona 1146/7, unvollständig erhalten; mit Vorwort von S. H. Halberstamm in Bielitz ed. Lyck 1874. Berichtigungen und Erläuterungen bei N. Brüll, Jahrb. III, 164 ff. — Wahrscheinlich dahin gehörende Gedächtnissreime habe ich in n. 12 einer Handschriften-Sammlung des Antiquars Schönblum in Lemberg im J. 1869 gefunden und werde sie demnächst drucken lassen.

5. כלי הנחשת über das Astrolab (bei de Rossi, Wörterb. S. 9 n. 23 und 24!) zuerst um 1145/6, in 2. Recension 1148, miserabel herausgegeben von Edelmann (Königsberg 1845), dessen vollständige Unkenntniss nachweist H. Filippowski (*Assiph,* Almanach, II, für 1850, S. 106—9). Es gibt ausserdem eine Nebenrecension.

Rodolfus Brugensis übersetzte ein Werk über das Astrolab von Maslama al-Medschriti (Commentator des Planisphärium von Ptolemäus, s. Zeitschr. d. D. Morg. Gesellsch. XVIII, 169, XXV, 402, Zeitschr. f. Mathem. XVI, 382, Noten zu Baldi S. 6 und 28, den Artikel aus Oseibia bringt Wüstenfeld, Uebersetz. S. 50), und zwar unter dem Dictat seines Lehrers Abraham (HS. Cotton, Vespas. II, *ms.* XIII f. 40b, bei Heilbronner, *Hist. mathes.* p. 295 § 214b, s. auch Rose, im Hermes VIII, 335), was Leclerc (*Hist. de la médicine arabe*, II, 433) und Wüstenfeld *l. c.* unbeachtet lassen, obwohl es nicht unwichtig ist. Ich vermuthe, dass hier Abraham bar Chijja gemeint sei, den wir als Dolmetscher des Plato aus Tivoli kennen (oben Anm. 232). Dasselbe Werk übersetzte auch Joh. Hispalensis nach Cod. Merton 259^3, s. Zeitschr. f. Mathem. XVI, 374. Wüstenfeld, Uebers. S. 33, fügt ohne weiteres Cod. Paris 7292 hinzu, über welchen ich *l. c.* Aufschluss gewünscht habe.

6. Eine Reihe astrologischer Schriften, grossentheils in 2 Recensionen 1146 und 1148. Eine Compilation von wörtlichen Auszügen — die man daher für Schriften des Abraham hielt — machte Levi ben Abraham gegen Ende des XIII. Jahrh. (vgl. Abr. Jud. S. 44); Commentare des Messer Leon (Jehuda ben Jechiel in Italien, um 1450—90) besitzt Petersburg. — Chajjim aus Briviesca studirte sie gegen Ende des XIV. Jahrh. in Salamanka (Letterbode II, 87, 88, vgl. Hebr. Bibliogr. XVII, 62). Ein Jude Hagins (d. h. Chajjim)[249]) übersetzte sie im Hause des Henricus Bates in Mecheln 1273 ins Französische, auch den Namen „ibn Esra" in *maistre de aide*, daraus wurde lateinisch *magister adjutorii* (Opera f. 31 c) und *adjutor*, daraus ohne Zweifel wieder *additor* in einer Wiener HS. (Tabulae IV, 125 n. 5442[9,13]), während in Spanien ibn Esra in den bekannten Namen ibn Zohar verwandelt wurde. Henricus Bates übersetzte daraus das Buch *de mundo* in Liège und beendete es 1281 in Mecheln (nach der Ausgabe); eine Leipziger HS. (bei Feller S. 327) versetzt Bates nach Fez (!) und substituirt 1292 (wegen Petrus? s. unten); ersteres möchte Wolf (B. H. III p. 51) auf die benutzte hebräische HS. beziehen — die vermittelnde französische war ihm unbekannt. — Sollte etwa für *„Leodio"* Paris gelesen sein? etwa wegen der Identität mit dem pariser Kanzler?[250]) Im J. 1293 redigirte Petrus d'Abano (*Aponensis*) aus Padua die meisten übrigen Bücher (Opera ed. 1507 f. 31 c) nach der Recension v. J. 1148, und so verbreitete sich in unzähligen Abschriften die Kenntniss und das Ansehen des Verf., dessen Name bis zu *Avenare* verstümmelt wurde, auch durch Uebersetzungen in alle Sprachen, ja es ist vielleicht sogar eine arabische gemacht worden (s. oben § 7, 4). Eine, wie es scheint, theilweise abweichende spanische Uebersetzung einiger Bücher (Rodriguez de Castro, Bibl. Españ. I. p. 25, 26) ist wiederum lateinisch von dem Spanier Ludovicus de Angulo übersetzt (Wolf, Bibl. Hebr. I, p. 83, jetzt Cod. Paris 734[2]). Vgl. auch unten zu IV. — Die latein. Uebersetzung des Petrus mit Einschiebung der des Bates ist in Venedig 1507 gedruckt als *Abrahe Avenaris . . . in re judiciali opera*; vgl. Catal. Bodl. 687 u. Add.

Ein genaueres Studium der hebr. Handschriften allein vermag zur Be-

---

249) S. Hebr. Bibliogr. XVIII, 130 und die in H. B. XVII, 104 angeführten Quellen, insbesondere den Artikel *„Hagins le Juif"* von P. Paris in der *Hist. Lit. de la France* XI, 499 ff., der nicht von Irrthümern frei ist. Die von ihm besprochene HS. ist das angebl. Buch *„de la sphere par maitre Deiade"* (sic), welches ich im Art. Abr. Jud. S. 12 erwähnt habe.

250) S. über Bates meine Nachweisungen in Catal. Bodl. p. 1038 und Add., berichtigt in Zeitschr. D. M. Gesellsch. XVIII, 190, XXIV, 371 u. XXV, 417 über die im J. 1274 verfasste *magistralis compositio astrolabii*, welche mit ibn Esra zu vergleichen wäre. Vgl. auch Baldi, *Cronica* p. 81.

eitigung unzähliger Missverständnisse und Irrthümer bei den Bibliographen ınd Catalogisten zu führen. Hier genüge eine Aufzählung der hebr. und atein. Titel ohne Rücksicht auf die verschiedenen Recensionen, die von den meisten noch vorhanden sind.

Der allgemeine Titel חקות השמים ist wahrscheinlich unecht, noch sicherer אוצרות חכמה (Catalog der HSS. Carmoly S. 57 N. 104 B, wohl Confusion mit אוצר oben S. 118 A. 227).

I. ראשית חכמה *Initium Sapientiae*, oder *Introductio.*

II. משפטי המזלות, auch als ס' המזלות (Buch der Gestirne), unübersetzt, scheint eine Nebenrecension von III. Einen Theil bilden ניהוגים (Leitungen, was als Titel eines Buches vorkommt; vgl. Handschr. des Rabbiners Wallerstein in Rzeszow, aufgenommen in meinem Verzeichniss der Handschr. des Buchhändlers Benzian 1859 N. 5. F).

III. הטעמים *Lib. Rationum.*

IV. מולדות *Nativitatum;* in der abweichenden Recension, welche lateinisch 1485 etc. erschienen ist (s. Boncompagni, *Della vita ecc. di Guido Bonatti* 1851, p. 135, 136) liest man (fol. c. 2 verso): *In tempore autem hoc 1154 ab incarnatione etc.* Mehr in Zeitschr. D. M. Gesellsch. XXIV, 341, übersehen von Wüstenfeld, Uebers. S. 83; vgl. oben S. 74 A. 51 über eine etwaige arab. Uebersetzung.

V. מבחרים *Electiones.*

VI. שאלות *Interrogationes.*

VII. מאורות *Luminaria.*

VIII. העולם ... מחברות המשרתים *de Mundo et conjunctionibus planetarum.*

7. Uebersetzung von Maschallah's Schriften שאלות *Interrogationes* und בקדרות *de eclipsibus,* welche man meist mit den astrologischen VIII Büchern verbunden findet.

8. אגרת השבת Brief des Sabbat an den Verfasser, verf. 1158 in London, gedruckt; vgl. oben S. 69 Anm. 30.

9. Uebersetzung des Buches: „Gründe der Tabellen des *Khowaresmi* von al-Matani“ (? ein noch unbekannter Araber), Narbonne 1160, mit einer interessanten Einleitung, welche ich in Zeitschr. D. M. Gesellsch. Bd. XXIV mit deutscher Uebersetzung meiner Abhandl. „Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen ins Arabische“ einverleibt habe; Nachträge dazu finden sich in Bd. XXV.

10. Horoscop eines Kindes, Narbonne 1160, gewöhnlich zwischen den astrolog. Schriften zu finden. Excerpte daraus gab ich 1847 nach einer Dresdener HS., Einiges habe ich später berichtigt.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch der „*Introductio in Al-*

chorismum a magistro A. composita", welche Chasles dem Abraham Savasorda beilegt (Zeitschr. D. M. Gesellsch. XXV, 393 zu 124 A. 11), ohne ausreichende Begründung.

Ein grosses und kleines Buch סולם המזלות „Leiter der Gestirne", wird in verdächtiger Quelle (oben S. 62 Anm. 6) dem Abraham beigelegt. In der Turiner falsch gebundenen HS. (Peyron l. citando S. 108) geht es anonym dem Astrolab (oben Nr. 5) voran.

Nachtrag.

(Juni 1880.)

S. 64 Anm. 11 und S. 81 A. 73. Benjacob, Thesaurus S. 417 N. 276: סוד (ungenau), denkt an Jesod Mora.

S. 69 A. 28. Für die Verbindung Narbonne's mit Spanien um dieselbe Zeit ist anzuführen, dass Jehuda ibn Gajjath aus Granada wahrscheinlich um 1130—40 dort war (Katalog der hebr. HSS. in Hamburg S. 66).

S. 75 A. 53, s. Benjacob S. 133 n. 216.

S. 76 A. 58. Dass die Turiner HS. (bei Bern. Peyron, *Codices hebr... Biblioth... Turin.* — Turin 1880 S. 227 n. 213) einen Commentar des Avicenna zu *'Hai b. Mekiz* enthalte, ist trotz der so lautenden Nachschrift unglaublich. Die HS. bedarf näherer Untersuchung.

S. 77 A. 63. Die Weisen Griechenlands nennt Abraham zu Exod. 12, 1.

S. 81 A. 73. תמונת האותיות nach Sabbatai, bei Benjacob S. 655 N. 629 (vgl. N. 625) ist dieselbe HS. Vatic. 405[7] bei Wolf I S. 80 mit hinzugesetztem סוד, nämlich das (edirte) kabbal. *Temuna*.

S. 86 A. 94 בעלי התולדת zu Psalm 46 (Zunz, Ges. Schr. III, 61 A. 33).

S. 90 A. 112. Ueber הן (Num. 23[9]) wird im Midrasch Exod. Kap. 15 (f. 100 Col. 2 ed. Frankf.) bemerkt, dass 8 Ziffern paarweise 10 geben (1 + 9 etc.), nur 5 sei isolirt. — S. 92 Z. 1 Diagonale lies Diameter.

S. 97 A. 142 תבריאתא hat Chananel (in Kairowan, Anf. XI. Jahrh., bei Berliner, *Migdol Chananel* S. XXV), dafür תשבורת (das. S. 38).

S. 104 A. 172. Nachdem diese Abhandlung im Satz vollendet war, gelangte ich zur Ansicht des 1. Artikels von Leon Rodet: *Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVI*[e] *siècle. À propos d'un manuscrit de l'Arithmétique d'Aben-Ezra*, in den *Actes de la Société philologique*, T. VIII, fasc. 1. année 1878 (Paris 1879) S. 1—25 (ein zweiter scheint noch nicht gedruckt). Der Verf. kennt Terquem's Notiz nicht und legt die HS. Paris 1052 zu Grunde, aus der er ein Facsimile und Proben giebt. Er sucht zu beweisen, dass Abraham zuerst die hebr. Buchstaben mit Positionswerth anwende und Autor der Operationstabellen sei (S. 13). Das Zeichen $\bar{o}$ leitet Wöpcke (bei Rodet S. 9) von οὐδεν ab, also ist die Linie wohl ein Abkürzungszeichen? Die Probe durch 9 scheinen die Araber von den Indern abzuleiten; sie findet sich aber in den bekannten Quellen nicht (S. 15). Eine Analogie eines viertheiligen Quadrats für die Verhältnisse mit unseren Determinanten wird hervorgehoben (S. 22). מורה (oben S. 117) wird (S. 25) ungenau *„norme"* wiedergegeben; es ist nicht eine Abstractform, sondern ein *partic. activi.* — Man sieht, dass das Büchlein wirklich noch nicht ausgebeutet ist.

S. 114 Ende § 16. Eine anonyme Arithmetik in Turin (bei Peyron l. c. S. 193 N. 181) in 2 Theilen, Th. 2 in 6 Pforten, beginnt mit einem Vorwort: „Wisse, die Weisen verglichen Gott in der Welt der separaten Intellecte mit der Eins in der Zahl."

Daselbst A. 211. „סיפרא das ist ein Rad", bei Elia Baschiatschi, *Adderet Eliahu* f. 11[d] unten ed. Gosloff.

S. 122 Z. 1. Bei Gurtand, Beschreib. der mathemat.... hebr. Handschr. der Firkowitz'schen Sammlung, Petersb. 1866 S. 34: „Regel de Tri" (!) hebr. דרך המתנגדים, d. h. „Weg der Entgegengesetzten".

PROLOGUS

N. OCREATI IN HELCEPH AD ADELARDUM

BATENSEM MAGISTRUM SUUM.

FRAGMENT SUR LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION

PUBLIÉ POUR LA PREMIÈRE FOIS

PAR

M. CHARLES HENRY.

Le manuscrit auquel est emprunté le morceau que nous éditons est signalé ainsi dans le Catalogue des manuscrits de la Bibliothèque royale: „VI M DCXXVI. Codex membranaceus olim Baluzianus. Ibi continentur 1. L. Annaei Senecae libri duo de Clementia ad Neronem Caesarem; 2. Ejusdem libri septem de beneficiis ad Ebutium Liberalem, amicum suum; 3. N. OCreati liber de multiplicatione et divisione numerorum ad Adelardum Bathoniensem magistrum suum. Is codex decimo tertio saeculo videtur exaratus"[1]).

Il est composé de 87 feuillets numérotés 1—87, précédés et suivis d'un feuillet de garde. Le Prologus occupe les folios 84—87.

Ce manuscrit est encore signalé par Jourdain dans les lignes suivantes de ses Recherches sur les traductions d'Aristote au moyen-âge: „Il existe en effet à la Bibliothèque royale un abrégé d'un ouvrage arabe sur les nombres entrepris à sa prière et que l'auteur, un certain O'Creat, écrivain inconnu à tous les biographes anglais que nous avons consultés lui a dédiés comme à son ami et à son maître"[2]). Jourdain a même publié dans une note les premières lignes de ce document[3]).

Augurant de ces passages l'importance du traité d'O'Creat, M. Maurice Cantor adressa le 22 Août 1879 à M. Léon Rodet, qui voulut bien nous transmettre la demande, une lettre dans laquelle il le priait de vouloir bien examiner ce fragment.

Les prévisions de M. Cantor furent parfaitement justifiées; non seulement cet écrit avait le prix d'être le seul extrait qu'on possède d'un traité arabe sur la multiplication et la division; en considérant une sorte de multiplication complémentaire comme une application d'une règle de Nicomaque (évidente sous la forme algébrique) „$a^2 = (a-b)(a+b) + b^2$" l'auteur faisait un rapprochement du plus haut intérêt historique.

Malheureusement les renseignements sur O'Creat sont nuls.

En s'en tenant aux données les plus positives, on doit placer l'existence d'Adélard de Bath dans le trente premières années du XII[e] siècle. Il voyagea beaucoup en Allemagne, en Italie, en Espagne, même en Egypte et en Arabie. On cite parmi ses travaux un traité de l'Astrolabe, une doctrine de l'Abaque, une traduction des tables Kharizmiennes et la célèbre version

1) Catalogus codicum manuscriptorum Bibliothecae regiae pars tertia tomus quartus Parisiis MDCCXLIV p. 263.

2) p. 99.

3) p. 99, note 1.

arabe-latine des Eléments d'Euclide dont va s'occuper ici même Mr. Weissenborn dans un mémoire imprimé à la suite de notre travail.

Quant à Helceph, M. Rodet conjecture que ce mot ne désigne pas un nom propre, mais le mot القيف alqeyf, examen, étude, discussion, recherche approfondie, peut être le commencement d'un titre tel que *„El-qeyf fî'l'-ilm el-hissâb* „Recherche sur la science du calcul". D'une part nous n'avons trouvé aucun personnage de ce nom; d'autre part les étranges défigurations que les Occidentaux ont fait subir aux mots arabes rendent cette explication vraisemblable.

Prologus N. Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem magistrum suum.

Virtus amicitiae inter eos qui ejus habitu inficiuntur hanc legem constituit ut alterutro praecipiente alter parere non pigritetur. Iussus igitur ab amico immo a domino et magistro festino aggredi Helcep Sarracenicum tractare de multiplicatione scilicet numerorum et divisione, nec non etiam de multiplicatione proportionum quae nonnisi per numeros investigantur, licet non omnes in numeris reperiantur. Cujus quidem compendium ingenio vestro placiturum non ambigo, si dominus dedit proferre prout dedit intelligere. Cujus quidem invocato nomine vel auxilio piè presumitur quod sine eo temere auderetur, in quo omnes thesauri sapientiae et scientiae ascunditi; qui sit benedictus in secula. Amen.

Textus.

Ordines igitur numerorum sive limites a primis numeris qui digiti vocantur et sunt IX per decuplos in infinitum procedunt. Sunt autem in unoquoque limite numerorum novem termini, nec plures inveniri vel excogitari possunt. Unde ut opinor novenarium coelestium spirituum ordinem auctor omnium mutuatus est. Omnes autem qui sunt in caeteris limitibus, praeter primum, articuli solent appellari: ut sit primus limes ab I usque ad X, secundus vero a X perprimorum per decuplos primorum digitorum usque ad C; tertius vero a C usque ad mille per decuplos secundorum et sic de caeteris, verbi gratia; prima unitas videlicet primi limitis principium est I, primus binarius II; primus ternarius III; primus quaternarius, IIII[1]); primus quinarius V; primus senarius VI; primus septenarius VII; primus octonarius

---

1) Pour l'importance au point de vue de l'histoire des mathématiques de cette variété et des variétés analogues de chiffres nous nous permettons de renvoyer à notre travail Sur l'origine de la Convention dite de Descartes (Revue Archéologique, Avril 1878).

VIII; primus novenarius IX. Ecce assignavi primum ordinem numerorum; secunda autem unitas, quae est secundi limitis principium, est X et in eodem limite sunt caeteri numeri qui sunt primorum decupli scilicet XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX, XC tertia unitas C, quarta unitas mille, Quinta unitas X idem[1]), sexta unitas C idem, [2])septima unitas $\overline{\text{m m}}$, [3])octava unitas decies mille millia, [4])nona unitas millies mille millia.[5]) Sed et reliquos numeros quota fuerint, ipsa unitas totos assignabit, ipsos praecedentis quidem limitis decuplos. Placuit igitur ad evidentiam ordinis praedictos cum suis novenis terminis sub notare | ut quotus sit unusquisque numerus locus designet, f° 84 ve
ut in secundo loco scriptus secundus binarius I. X X accipiatur et sic de ceteris deorsum dispositi deduplicatione. Sinistrorsum vero naturali multiplicatione a prima specie multiplicitatis quae est decupla usque ad octavam.

IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	
Nonaginta	Octoginta	Septuaginta	Sexaginta	Quinquaginta	Quadraginta	Triginta	Viginti	Decem	
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	decem
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	centum
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	mille
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	X milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	. I	C milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	M. milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	Xes M. milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	Ces M. milia
IX	VIII	VII	VI	V	IIII	III	II	I	Mes M. milia

[N]unc dicendum est qui proveniat exductu cujuslibet terminorum primi ordinis ducti in semetipsum aut ex quolibet uno in quemlibet alium ejusdem

1) x. ʒ. c. a. d. les dizaines de milles. 2) c. ʒ. 3) $\overline{\text{m. m.}}$ 4) cꝫ. lc. ia. x. m. m.
5) m. m. m. il faut lire centies.

limitis ducto. [I]gitur cujuslibet termini infra X supra sub duplum ejus constituti quere differentiam quam habet ad X et eandem subtrahe ab eo quem ducis in se, intra reliquum et X medius erit arithmetica medietate. Itaque secundum regulam Nichomachi quod ex duobus extremis in alterutram et ex duabus differentiis invicem ductis provenit hoc ex ipso medio ducto in se; verbi gratia novies novem quot sint interrogatus respondeo octies X et semel unum sumo enim differentiam quam habet IX ad XI[1]) et eam demo de IX et relinquuntur VIII, ecce arithmetica medietas VIII, IX, X. Ergo duo extrema sunt VIII et X tanto minus continentur quia medium ex se provocat quantum duae differentiae sunt unum et unum. Simili ratione interroganti quantum est octies VIII respondeo sexies, X cum bis binis at
o 85 v. vero septies VII est quater X cum ter ternis per eamdem | regulam Nichomachi quod septem est medius inter IIII et X, sunt differentiae tres et tres. Eadem quoque ratione sexies VI sunt bis X cum quater quaternis. Jamvero ex solo usu VI^{es} V sunt XXX, quater quatuor sunt XVI; ter terni sunt IX; bis bini sunt IV; semel unum I est. Hunc (sic) descendamus ad secundum ordinem ubi per geometricam medietatem perpenditur quod in primo limite per arimeticam scilicet unius saltus. Non enim solum per centum ab ultimo usque ad suduplum perpenditur quantum quisque ex se producat scilicet I[2]) usque X vel unum decies qui est secundi ordinis principium ex arte quia X proportionnaliter est inter unum et centum.

Ergo semel C tantumdem est quantum decies X similiter investigandum est quantum producat ex se quilibet terminus secundi ordinis, considero enim quomodo terminus de quo quaeritur se habet ad C. et quisnam ad eum similiter se habeat. Qui autem sub eodem et centum continetur contra interrogationem respondeo: Verbi gratia Interrogatus quantum est vigies viginti dico quadringinti qui numerus continetur sub IIII et C inter quos XX proportionnaliter continetur. Scilicet etiam triginta inter IX et C; at vero inter quadraginta XVI et C. Sed quinquaginta inter XXV et C; LX vero cum sunt tres quintae centenarii proportionaliter continetur inter suas partes quintas quae sunt XXXVI et centum. Septuaginta cum sint septem decimae partes centenarii proportionaliter continetur inter suas VII decimas partes quae sunt XLIX et centum. At vero LXXX cum sunt quatuor quintae[3]) quae sunt centenarii proportionaliter continetur inter suas quatuor et quintas quae sunt quintas XVI . I . LXIV et centum; nonaginta vero cum sit IX decimae in numero C proportionaliter continetur inter novies IX . I . LXXXI et C. Pariter ergo quantum ex se producat quilibet terminus secundi limitis ex decimo nono theoremate septimi libri

1) Entre la ligne on lit unum. 2) ʒ. 3) quatuor $\overset{e}{\text{V}}$.

Euclidis. Similis ratio est etiam in caeteris ordinibus. Unum igitur ostensum est quantum producat quisque ductus in se; restat ostendere quantum producat quisque in alterum ductus sui ordinis. Dico ergo quod omnis minor terminus cujus limitis in majorem ejusdem ordinis tantumdem producit quantum continetur sub ipso minore et principio sequentis ordinis subtracto; Eo quidem continetur sub eodem minore et differentia majoris et ipsius principium sequentis ordinis. Verbi gratia septies IX est septies X septies I minus. Similiter sexies IX est sexies X sexies uno minus. Vel aliter. Quisquis in alium tantum producit quantum in se | et in f° 85 v.
ipsorum differentiam. Verbi gratia septies IX tantumdem est septies septem et septies II. Est etiam inveniri qui ad minorem sic se habent ut maior ad principem; sic enim vocamus principium sequentium limitum. Erit igitur ibi quod continetur sub extremis haec sub ipsis contineri. Sic est enim in omnibus IIII terminis proportionalibus. Verbi gratia: quinquies sex sunt ter X quum tres ad V sic se habent ut sex ad X. Simili ratione decies XXX sunt CCC quum ut tres ad X sic XXX ad C scilicet quadragies LX sunt CCCC vigies qui sunt $\overline{\mathrm{II}}$ et CCCC quum sicut XX IIII se habent ad XL sic LX ad C scilicet quia haec et his similia sunt quaedam quasi anximata (sic) et ad artem propositam minus respicientia attingimur ad ipsam cominus adgrediendam.

Cum igitur voluerimus aliquot numeros sive duos sive quotlibet ut per se ipsos vel per alios totidem aut etiam per plurimos sive per pauciores multiplicare etiam ipsos. Multiplicandos scribemus in locis diversis singulos in singulis sinistrorsum dispositis ut de quoto ordine quisque fuerit, totum locum teneat. Quod si non fuerint in ipsis multiplicandis numeri qui loca primā optineant (sic) ponatur[1]) pro eis qui defuerint signum cyfre ad locum vacuum designandum ut si multiplicandi fuerint .$\bar{\mathrm{I}}$. CC cum eos oporteat quarttum (sic) et tercium locum tenere eo quod $\bar{\mathrm{I}}$ de quarto, CC vero de tertio ordine sint. Idcireo secundum locum et primum obtinebunt due cyfre hoc modo $\bar{\mathrm{I}}$ $\overline{\mathrm{CC}}$ 00[2]) vel si XXII mille tertium locum habebit cifre hoc modo I 0 II.I. In hac igitur dispositione quotum locum teneat quisque tota est unitas vel totus binarius et sic de ceteris. Proponatur igitur quod primum duo numeri multiplicandi sunt per semetipsos XXX.III. et scribantur in primo quodam loco primus ternarius. In secundo loco secundus ternarius III et III dein minimum multiplicantium sub maximo multaplicandorum (sic) hoc modo. Juxta

	III	III
III	III	

1) Ecrit deux fois: la seconde fois barré.
2) Le signe du zéro est le suivant τ.

hanc regulam in omni multiplicatione minimus sub maximo ponendus est scilicet et caeteri quotquot fuerint multiplicantes sinistrorsum disponuntur, in totis locis singuli quotorum ordinum fuerint. Ita videlicet ut quemadmodum supra dictum est, cyfre si opus fuit vacuum locum designet. Ducendus est ergo
fo 86 finistimus superioris ordinis | in finistimum inferioris quisque in quosque scilicet nonnisi nominibus digitorum licet ipsi sint articuli ut terterni. Si ergo digitus inde excreverit supra illum inferioris ordinis unum oritur in superiori ordine ponetur. Quod si articulus ultimus non supra illum, scilicet nec ibi remanebit si articuli nascuntur ex invento et apposito. Juxta hanc regulam digitus de quo nascitur supra eum ponitur vel in qua superiori nascitur ibidem remanet. Si nasceretur articulus, scriberetur ulterius est ita hic[1])

	III		
III	III	III	
IX	IX		
III	VII		III

id est igitur quomodo disposui XXXIII quos cum vellem ducere sinaphi posui minorem sub majori I ita sub XXX dein a sinistris ipsius ternarii inferioris scripsi XXX XIXXX[1]) in XXX sub nominibus digitorum fatiendo terterna I IX ducerem IX scripsi sub secundum ternarium inferioris ordinis, Dein secundum ternarium superioris ordininis (sic) in primum ternarium inferioris sub nominibus digitorum ut secundum quod exigit ars Helcep; scripsi IX rursus supra primum ternarium inferioris ordinis ut patet in secunda formula. In tertia formula scripsi tria sub tribus scilicet minimum sub maximo in quo non est maior ducendus cum ipse solus restet scripsi in qua et (a) sinistris ejus ita ut tertia formula monstrat. Cum ergo ter tria facient novem et

		III	III
III		III	
IX		IX	III
III		III	
IX		IX	III
		III	III
τ.	τ.	VIII	IX
		III	III

IX vel cum IX et IX facient XVIII reliqui digitum I VIII insunt ejus unus ortus fuerat tulique cogitatione XX articulum ad IX ultimus uti regula exigit ad tertium locum et tertiae formulae invenique ibi IX natoque est articulus ex invento et addito. Scripta ergo ī unitate ulterius in quarto loco ibi idem in tertio loco scripsi cyfre. Rursus ter tria multiplicans produxi IX quod scripsi in primo loco quartae formulae.

Habes igitur quod provenit ex XXXIII ductis in se Ī . O VIII . IX quod ita esse divisione probetur. Si enim cum divisero mille LXXX . IX . per XXXIII exierit mi in denviationibus (sic) XXXIII recte multiplicatum cognoscam fuisse; age ergo scribantur M . O . VIII . IX ponaturque sic in

1) Hic au dessus de la ligne.

mni divisione faciendum est maximus sub maximo si inde detrahi possit ominibus digitorum alioquin ponatur dexterius scilicet ceteri sub caeteris extrorsum disponantur hoc modo:

Nunc ergo quibus ternarius nonpoterat ab unitate prima detrahi positus est f° 86 v°
ub cyfre ut a secunda unitate detrahatur subtrahatur ergo ternarius a x quoiens potest ita tamen ut reliqui a reliquis totiens detrahi possint . quod leterminatio si non hic alibi erit necessaria, post autem detrahi et remaiebit unum, quod unum quibus diminutum est non ibi remanebit tunc enim iulli esse determinatio tantumdem remaneret quantum ibi erat; diminutum rero voco quodcumque unitas relicta prius detractionem sub decuplae cujusque rat in eo loco una detractio facta est. Itaque secunda bis reliqua unitate n loco cyfrae scribes autem cyfre in ipso primo loco jam vacuo scilicet denominationem cujusque minimi divisoris affiges hoc modo τ. I. $\overset{\text{III}}{\text{VIII}}$. $\overset{\text{IX}}{\text{III}}$

III III

deinde reliquos a reliquis eamdem denominationem detrahes ut terpnarius de X et reliquam unitatem quae diminuta est secunda bis ad VIII ut sunt IX et rursus scribes cyfre scilicet prius cyfre quibus et ultimus penultimus vacui sunt hoc modo. Dein promovebis ipsos divisores quotquot sunt et

τ.	ī.		III.	IX
		III	VIII	
			III	

pones maximum sub maximo et reliquos sub reliquis quemadmodum supradictum est hoc modo . (D)etrahes ergo secundum ternarium

		III	
τ.	τ.	VIII.	IX
		III	III

III III

a secundo novenario: τ et a prima eamdem denominationem et prout novenis scribes ττ ad signanda loca vacua, ponesque denominationem supra minimum divisorem ut artis

		III	
τ.	τ.	VIII.	IX
		III	III

hujus postulat ratio hoc modo: (V)ere ergo respondit divisio multiplicationi quoniam in denominationibus sunt

τ.	τ.	τ.	τ.

XXXIII qui ducti fuerant in se ipsos ut inde producentur $\bar{\text{I}}$. 0. VIII. IX.

Sint nobis propositi rursus $\bar{\text{I}}$ CC per se multiplicandi, cum ergo duo cyfre primum locum obtineant quaecumque tertium unitas locum tenens centum est scilicet quaternum locum quarta tenet unitas scilicet mille. Scribo ergo

I	II	ττ
I	II	ττ

quasi minimum sub maximo $\bar{\text{I}}$ primum cyfre sub $\bar{\text{M}}$ prius habetur sinistrorsum dispono o . II . I hoc modo. (D)uco ergo primum I ultimum superioris ordinis in primum inferioris ordinis et secundi. Quum autem semel unum et semel duos digitos procreant, pone eos qui procreati sunt quasi ingerimus eos ex

I	II		τ. τ.
I.	II.		τ. τ.
II.	τ.	III.	τ. τ.
I	II		τ. τ.

quibus producti sunt hoc modo scilicet quum inferiori ordine inter duo
f° 87 r. et unum locus erat vacuus jam ipse ego rite ō cyfre po|sui ad locum designandum pro quarta unitate in eodem ordine posui o . I . II . oo.

Promoveo ergo terminos omnes inferioris ordinis ut meos ducam tertium binarium et pono ō sub ipso tertio binario ceteros sinistrorsum dispono sic. Inde ergo ex binario ducto in unitatem producitur binarius. Pono unum supra unum quibus digitus unus ponitur. Cum autem fuerint ibi plus duo scribo alia dua.

I	II	τ τ.	II.	τ τ.
τ.	I.	II.	τ	τ.
I.	II.	τ τ τ.		II. ττ.
I.	II.			ττ.

Rursus duo duco in duo, digitum scilicet quatuor, qui nascitur, pono supra eum ex quo nascitur sublato cyfre quibus vacuus est locus ut monstrat subjecta descriptio Et haec multiplicatio divisione examinanda inde ergo in omni divisione maximus supponendus est maximo si inde detrahi possit.

I.	IIII.	IIII.		ττττ.
I.	II.	τ.		τ.
I.	IIII.	IIII.		ττττ.
I.	II.	τ.	τ.	

Ego sic facio. Ceteros dextrorsum dispono videlicet quartam unitatem sub septima unitate tertium binarium sub sexto quaternario dein duo cyfre; qui si deerint nec tertium posuissem binarium, imo primum nec quartam unitatem imo secundam. Sic ergo dispositis dividendis et divisoribus detraho a maximo maximum. quotiens possum videlicet semel mihi remanet nisi quod ponitur ob signandum ponitur cifre scilicet reliquos a reliquis eadem denominatione id. est semel detraho videlicet duo de quatuor; relinquuntur II dein denominant I unum supra minimi divisoribus; inde illius cyfre quod obtinet locum primum in ordine divisorum hoc modo

τ.	II.	IIII.	I.	ττττ.
I.	II.			ττ.
τ.	II.	IIII.		ττττ.
I.	II.			ττ.

Dein omnes divisores uno gradu dextrorsum promoveo . pono hoc modo. Detrahatur ergo idem ab II quotiens potest scilicet bis, scilicet duo de IIII similiter nihil remanet nisi ōō qui pro locis designandis vacuis scribuntur notandis scilicet denominato I II supra minimum divisorem scilicet supra primum ō, ordinis divisionum ponatur videlicet juxta praedictam denominationem quae erat I. dein compleatur II ō in ordine denominationum hoc modo.

(D)atur ergo ex denominationibus recte multiplicatum fuisse. Breviter ergo colligendae fuerunt regule hujus artis: In omni multiplicatione minimus sub maximo, ceteri sinistrorsum disponendi sunt, digitus unum nascitur per multiplicationem supra eum ponitur articulus ulterius ut si ducantur isti duo in unum fient IIII . ut patet in formula suppositi. Vel Ubi nascitur [per coacervationem] ibi remanet scilicet nascitur articulus transratur ulterius, locum vacuum designet ō. In omni divisione maximus sub aximo ponendus est ceterique ponantur dextrorsum. Maximus a maximo etrahatur quoties poterit, ita | tamen ut reliqui a reliquis totiens detrahi f° 87 v. ossint. Si quid in dividendo diminutum fuerit secedentur dextrorsum in ocum anteriorem transferatur. Denominato supra minimum divisorem cribatur in tertio ordine. Collige autem pro minimo divisore mt toties yfre ō. hoc ergo quidem dictum est ad multiplicandum dividendum per ntegros patet posse sufficere. Nunc de proportionandis minutiis dicendum st. Si ergo complecta detractione ad modum supra dictum est adhuc elinquitur et fuit aliquid denuo dividendorum fuitque illud reliquum minus oto minus divisore proportionandum hoc illi est. Quum enim duobus umeris in aequalibus ad invicem paratis necesse est ut minor majoris sit ut pars aut partes si ad eum fuerit comparatus videndum est reliquum llud quota pars est, quote partes si totius numeri divisorum dico itaque uod quantum fuerit hoc reliquum illius numeri contigit singulos divisores le illo reliquo praeter jam acceptam summam denominationum. Verbi gratia Sic C . XLVIII dividere voluerimus, scribemus sup[a] dicto modo umerum divisorum si ergo ut ars postulat dividendi maximum sub maximo onamus hunc ab illo ut quotiēs detrahamus est unum ab uno quod quidem i poterimus semel facere; non poterimus producere quum maius a minore on potest detrahi jam ponemus majorem divisorem I . X sub IIII minorem . VI sub VIII ita tamen ut reliqui I . VI toties detrahi a reliquis possent. Detraho igitur unum a decem novies unum quoties potest, relinquitur unum. Quod quibus diminutum est transferetur a IIII ut sit in secundo loco V nihil in tertio ni cyfre.

Quo pono (sic) denominationem I . X . supra minimum divisorem I supra VI sub eamdem denominationem, aufer quinquies sex de LXVIII .I. novies. Negliguntur autem IIII qui numerus est IIII cum minor minimo divisorum proportionandus est illi. Invenitur autem esse quarta pars dico ergo quod unusquisque divisor accipiat de numera dividendorum IX quatrantem. Omnisnumerus tantumdem producit ex se quantum eius utraque pars altera in alteram bis ducta. Verbi gratia si quaeretur quot sunt trigies quinquies XXX CC respondeatur ptrigies triginta et quinquies V et quinquies trigenta bis vel trigies quinquies quinque bis.

DIE ÜBERSETZUNG DES EUKLID AUS DEM ARABISCHEN IN DAS LATEINISCHE DURCH ADELHARD VON BATH

NACH ZWEI HANDSCHRIFTEN DER KGL. BIBLIOTHEK IN ERFURT.

VON

PROF. DR. H. WEISSENBORN

IN EISENACH.

In seiner Geschichte der Geometrie S. 593 (der deutschen Uebersetzung) sagt Chasles von der nach Cantor (Math. Beitr. z. Culturl. d. Völker S. 268) etwa in das Jahr 1120 fallenden Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische durch Adelhard von Bath: „Diese ist die erste Uebersetzung, welche man in Europa von diesem Werk gehabt hat ..... Adhelard hatte mit seiner Uebersetzung noch Commentare über die Sätze des Euklid verbunden. Dieses Werk ist Manuscript geblieben," und fügt in einer Anmerkung hinzu: „Es findet sich in der Bibliothek der Dominikaner von St. Marcus zu Florenz unter dem Titel: *Euclidis Geometria cum Commento Adelardi;* und in der *Bibl. Bodleiana* unter diesem: *Euclidis elementa cum scholiis et diagrammatis latine reddita per Adelardum Bathoniensem.* Die königliche Bibliothek zu Paris besitzt auch eine Copie (Nr. 7213 der lateinischen Manuscripte). Ein anderes, das dem Regiomontanus gehört hat, befindet sich in der Bibliothek zu Nürnberg." Zugleich aber auch spricht Chasles, ibid. S. 468, von Campano aus Novara: „Campanus, ein Schriftsteller aus derselben Zeit (dem 13. Jahrhundert), welchem man in Europa die erste Uebersetzung des Euklid, und zwar aus einem arabischen Texte, verdankt," und, bei Erwähnung der Theorie der Stern-Polygone, ibid. S. 548: „Die ersten Keime dazu finden wir in dem Commentar, welchen Campanus, ein Geometer des 13. Jahrhunderts, zu seiner Uebersetzung der Elemente des Euklid aus dem Arabischen (der ersten, die in Europa erschien) hinzugefügt hat." Legen wir nun auch kein Gewicht auf die Inconvenienz, dass nach Chasles nicht nur Adelhard von Bath, sondern auch der um 100 Jahre später lebende Campano die erste Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische geliefert haben soll, so müssen doch einige Aeusserungen Libri's in seiner „Histoire des sciences mathématiques en Italie. Deuxième Édition. Halle a/S. 1865" auffallen, welche derselbe in Tom. II. des genannten Werkes über Adelhard (S. 62 „Adelard de Bath, auteur qui vivait au commencement du douzième siècle") und Campano ausspricht, nämlich l. c. S. 48: „On a classé Campanus de Novare parmi les plus illustres traducteurs du treizième siècle; mais l'examen des manuscrits prouve que la traduction d'Euclide qu'on lui avait attribuée est d'Adelard de Bath, appelé communément Adelard le

Goth, et que Campanus n'a fait que le commentaire“ nebst der Bemerkung „MSS. latins de la bibliothèque du roi, n. 7213, 7214 et 7216 A. — Cela avait déjà été remarqué par Tiraboschi. Cependant M. Chasles a continué à attribuer cette traduction à Campanus.“ Letzteren Vorwurf nimmt Libri sodann wieder zurück l. c. S. 291 Anmerk. 2: „Je dois dire que dans son ouvrage, M. Chasles a corrigé l'inadvertance que j'ai signalée précédemment sur la traduction d'Euclide, qu'il avait d'abord attribuée à Campanus.“ Und in der That lesen wir bei Chasles ausser den oben angeführten Worten auch l. c. S. 596: „Campanus übersetzte die 13 Bücher der Elemente Euklid's .... aus einem arabischen Text, und fügte einen Commentar hinzu“, mit der Bemerkung: „Einige Historiker glauben, dass dieses Werk des Campanus kein andres ist als die Uebersetzung des Adhelard, zu welcher Campanus den Commentar hinzufügte. ... Der folgende Titel eines handschriftlichen Exemplars vom Euklid des Campanus, welches sich in der königlichen Bibliothek zu Paris, unter Nr. 7213 befindet, bestätigt diese Meinung: *„Euclidis philosophi socratici incipit liber Elementorum artis geometricae translatus ab Arabico per Adelardum Gothum Bathoniensem sub commento Magistri Campani Novariensis.* (MS. aus dem 14. Jahrhundert.)“ Hankel endlich, in seiner „Geschichte der Mathematik“, gedenkt S. 336 „der nochmaligen (nach Adelhard) Uebersetzung der Elemente Euklid's“ aus dem Arabischen durch Gherardo von Cremona (1114—1187), und derjenigen Campano's, über welchen er sich ibid. S. 339 dahin äussert: „Nur Giovanni Campano aus Novara (um 1260) mag noch erwähnt werden, weil dessen Uebersetzung des Euklid in der Folge die älteren des Athelard und Gherardo verdrängte und den ersten gedruckten Ausgaben zu Grunde lag.“ Curtze hinwiederum sagt in seinem Aufsatze: „Reliquiae Copernicanae“ Bd. XIX dieser Zeitschrift, S. 80, 449—450, die Campano's Namen tragende „Ausgabe des Euklides“ sei „aus dem Arabischen übersetzt“, „sei es nun von Campanus, sei es von Atelhard von Bath“, und fügt hinzu, Anm. 40: „Ich hoffe in Kurzem zeigen zu können, dass Atelhard der Uebersetzer, Campanus nur der Commentator des aus dem Arabischen geflossenen lateinischen Euklides ist.“ Etwas Weiteres ist mir jedoch nicht bekannt geworden.

Fassen wir nun das Bisherige zusammen, so sehen wir Folgendes: Kästner in seiner Geschichte der Mathematik II. S. 318, Chasles l. c. S. 594, Libri l. c. I. S. 168, II. 283, 298 erwähnen zwar Gerhard von Cremona als Uebersetzer arabischer Werke, allein ausser Hankel a. a. O. keiner, und besonders auffällig bei Gerhard's Landsmann Libri, als Uebersetzer der Elemente Euklid's. Ferner: Kästner kennt die Uebersetzung des Adelhard und des Campano, l. c. I. 255, 289—302, 306—310, und beschreibt letztere ausführlich, weiss aber nichts von einer Identität beider; Chasles stellt an den zwei zuerst angeführten Stellen beide als verschieden hin, nach ihm hat Adelhard die seinige mit einem Commentar begleitet, wir erfahren jedoch nicht, worin derselbe bestehe und was er enthalte, an der dritten Stelle aber findet er die Meinung bestätigt, dass Campano's Uebersetzung keine andere sei als diejenige Adelhard's, zu welcher Campano nur einen Commentar geliefert habe; letzteres behauptet Libri von seinem zweiten Landsmann Campano bestimmt, und gleicher Meinung ist Curtze; ebenso bestimmt aber spricht Hankel wieder von Adelhard's und Campano's Uebersetzungen als verschiedenen, und einen Commentar erwähnt derselbe gar nicht. Wenn es nun auch unzweifelhaft ist, dass Campano an verschiedenen Stellen Zusätze durch *Campani additio*, und — von Buch VII an durch *Campani annotatio* bezeichnet — zum Euklid gemacht (insbesondere zu I, 32 die Theorie des Stern-Fünfecks, und am Ende des 4. Buches die Trisection des Winkels) und mithin denselben commentirt hat, so stehen sich doch hinsichtlich der Frage, ob seine Uebersetzung dieselbe sei wie diejenige Adelhard's, die Ansichten Libri's und Curtze's, z. Th. auch Chasles' auf der einen, Hankel's auf der andern Seite gegenüber und etwas Genaueres über die Uebersetzung Adelhard's und Gerhard's von Cremona erfahren wir nirgends. Und doch dürfte es meines Erachtens nicht ohne Interesse sein, die Leistungen derjenigen Männer eingehender kennen zu lernen, die, nachdem man sich Jahrhunderte hindurch mit dem dürftigen Auszuge bei Cassiodor und vielleicht in der sog. Geometrie des Boetius begnügt hatte, zuerst den ganzen Euklid[1]), wenn auch auf dem Umwege durch Vermittelung der Araber, dem christlichen Abendlande bekannt machten und eine wissenschaftliche Behandlung der Geometrie anbahnten; die Gerechtigkeit aber auch dürfte es erfordern, die Verdienste eines jeden derselben genau darzulegen und gebührend zu würdigen.

Unter solchen Umständen erregte es meine Aufmerksamkeit, als ich durch eine gütige Mittheilung meines früheren Collegen am hiesigen Realgymnasium, Herrn Dr. E. Ludwig, gegenwärtig in Bremen, vernahm, dass sich auf der königlichen Bibliothek zu Erfurt mehrere handschriftliche lateinische Uebersetzungen des Euklid befänden. In der Hoffnung, hier Aufschluss über die oben berührten Zweifel zu erhalten, begab ich mich daher nach Erfurt, und Herr Ober-Bibliothekar Professor Dr. H. Weissenborn, welchem ebenso wie Herrn Dr. E. Ludwig ich mich zum

1) Freilich scheint es heut zu Tage kaum als ein Mangel empfunden zu werden, dass, nachdem die auf dem ältesten Codex beruhende Peyrard'sche Ausgabe gänzlich vergriffen ist, der Mathematiker sich nur mit Mühe den Text des Euklid in gesicherter Form und in der Ursprache zu verschaffen vermag.

herzlichsten und wärmsten Danke verpflichtet fühle, gestattete mir mit der grössten Freundlichkeit und Zuvorkommenheit Einblick in alle Handschriften, in welchen der Inhalts-Angabe nach sich etwas meinen Zwecken Dienendes erwarten liess, und unterstützte mich in meinen Forschungen auf das Wirksamste. Längere Zeit jedoch suchte ich vergebens, die Manuscripte waren astronomischen Inhalts, einige auch enthielten die Uebersetzung Campano's ganz oder zum Theil. Endlich ergriff ich einen mehrere Handschriften enthaltenden Quartband, bezeichnet: „*Bibliotheca Amploniana. Libri manu scripti in 4^to. Nr. 23.*“ Auf der Innenseite des Einband-Deckels fand ich unter der von Amplonius aus dem Jahre 1430 herrührenden Ueberschrift: „In hoc volumine continentur“ die Titel mehrerer Schriften, und unter ihnen: „*Euclides cum commento Alani Adelardi*“, das *Alani* durchstrichen. Der Anfang des Textes selbst lautet: „*Institutio artis geometricae secundum euclidem philosophum*“, und der in mehreren Randbemerkungen vorkommende Name *adelardus* machte es unzweifelhaft, dass ich hier die Uebersetzung der Elemente Euklid's, und zwar aller 13 Bücher, nebst dem 14. und 15., durch Adelhard vor mir hatte. Der Schluss des Ganzen lautet: „*Explicit lib. euclidis phi. de arte geometrica continens CCCCLXV proposita et propositiones et XI porismata praeterea anxiomata (!) singulis libris premissa proposita quidem infinitivis propositiones indicativis explicans. Deo gratia.*“ Da mir zugleich die gedruckte Ausgabe Campano's, mit Zamberti's Uebersetzung aus dem Griechischen zusammen herausgegeben von Hervagen 1546 (der Erfurter Bibliothek gehörig) vorlag, so würde eine Vergleichung der Adelhard'schen und Campano'schen Uebersetzung sehr leicht gewesen sein, wenn nicht die Entzifferung der nach dem Urtheile des Herrn Ober-Bibliothekars dem 14., frühestens dem Ende des 13. Jahrhunderts angehörigen Schrift sehr viele Mühe und Zeit gekostet hätte. Eine geraume Weile hatte mich diese Beschäftigung in Anspruch genommen, dann wandte ich mich zu einem anderen, ebenfalls mehrere Manuscripte enthaltenden, Quartband, bezeichnet „*Bibliotheca Amploniana. Libri manu scripti in 4^to. Nr. 352.*“ Ich hatte denselben bisher nicht beachtet, denn das ebenfalls von Amplonius aus dem Jahre 1430 herrührende Inhaltsverzeichniss auf der Innenseite des Einbanddeckels wies u. a. nur: „*Pauca de Euclide*“ auf und verhiess daher nur geringe Ausbeute. Um so freudiger aber auch war ich überrascht, hier als Anfang des Textes zu lesen: „*Primus liber ecludis* (!) *institutionis artis geometricae incipit habens XLVII propositiones per adhelardum batoiensem ex arabico in latinum translatus*“, und es war offenbar, dass ich hier ein zweites Exemplar der Adelhard'schen Uebersetzung vor mir hatte, allerdings kein vollständiges, denn dasselbe reicht nur bis Buch VIII, Propos. 16, das Uebrige fehlt; der Herr Ober-Bibliothekar erklärte diese Handschrift für lter als die erstgenannte und dem 13. Jahrhundert angehörig. Beide Codices sind auf Pergament geschrieben; der ältere, Nr. 352, zeigt auf dem ersten Blatte, gewissermassen als Titel-Vignette, einen Mönch, der ein Winkelmess-Instrument nach dem Himmel richtet. In beiden Handschriften sind die Buchstaben in den Lehrsätzen und Aufgaben grösser als in den Beweisen und Constructionen, und zwar ist dieser Unterschied vielfach sehr auffallend in Nr. 23, weniger hervortretend in Nr. 352; gegen das Ende des Vorhandenen) enthält letztere Handschrift mehrere Randbemerkungen. Die Schrift in Nr. 352 ist nicht allein ungleich schöner als in Nr. 23, mit rothen und blauen oder mehrfarbigen Initialen (in Nr. 23 sind nur die Anfangs- und Schlussworte roth), sondern auch leichter zu lesen. Bei beiden Manuscripten, dem älteren Nr. 352 und dem jüngeren Nr. 23, fallen, auch bei nur oberflächlicher Betrachtung, zwei Dinge besonders auf: einmal nämlich ist der Raum, den die Beweise und Constructionen einnehmen, auch wenn man die kleinere Schrift in Betracht zieht, ein auffallend geringer, sodann enthalten die in beiden Handschriften an den Rand gezeichneten Figuren in Nr. 23 grösstentheils keine Buchstaben, häufiger noch gegen das Ende, in Nr. 352 aber, wo die Linien der Figuren noch mit gelber Farbe überzogen sind, fehlen die Buchstaben an denselben gänzlich. Beide Umstände lassen eine Uebereinstimmung der Beweise und Constructionen mit den von Campano gegebenen im Voraus als wenig wahrscheinlich erscheinen. Ich komme auf diesen Punkt weiter unten zurück.

Um nun die Uebersetzung Campano's mit derjenigen Adelhard's zu vergleichen, setze ich mehrere Stellen neben einander, und zwar zunächst einige Definitionen. Der Anfang lautet bei

Adelhard.	*Campano.*
Punctus est, cui pars non est. Linea est longitudo sine latitudine cujus extremitates quidem duo puncta sunt. Linea recta est ab uno puncto ad alium extensio in extremitates suas utrumque eorum recipiens.	1. Punctus est, cujus pars non est. 2. Linea est longitudo sine latitudine. 3. Cujus quidem extremitates, sunt duo puncta. 4. Linea recta, est ab uno puncto ad alium brevissima extensio, in extremitates suas eos recipiens.

Schon hier also, bei der 4. Definition, macht sich ein anscheinend geringer, in Wahrheit aber erheblicher, Unterschied geltend, indem Adelhard die gerade Linie als die extensio schlechthin, Campano aber, abweichend auch vom griechischen Texte, als die *brevissima* extensio definirt und somit das Axiom: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten, vorwegnimmt. Die Definitionen 30—34 lauten ferner bei

Adelhard.	*Campano.*
Figurarum autem quadrilaterarum	30. Figurarum autem quadrilate-

alia est quadratum aequilaterum atqu. rectiangulum. Alia est tetragonus longus, estque figura rectiangula sed aequilatera non est. Alia est elmuain estque aequilaterum, sed rectiangulum non est. Alia simile elmuain quae opposita latera atque angulos habet aequales idem nec rectis angulis nec lateribus continetur aequalibus. Praeter has autem omnes quadrilaterae figurae helmunharifa nominantur.

rarum alia est quadratum, quod aequilaterum atqu. rectangulum. 31. Alia est tetragonus longus, quae est figura rectangula, sed aequilatera non est. 32. Alia est helmuayn, quae est aequilatera, sed rectangula non est. 33. Alia est similis helmuayn, quae opposita latera habet aequalia atque oppositos angulos aequales, idem tamen nec rectis angulis nec aequis lateribus continetur. 34. Praeter has autem omnes quadrilaterae figurae helmuariphe nominantur.

Nr. 23 hat statt *elmuain* und *helmunharifa* bezüglich *elmuhahin* und *elmuharifa*. In Nr. 352 ist von einer anderen Hand und mit anderer Tinte über *tetragonus longus*, *elmuain*, *simile elmuain*, *helmunharifa* geschrieben bezüglich *parte altera longior forma*, *rombus*, *rombo simile*, *trapezia*. Bekanntlich blieben die arabischen Benennungen helmuayn, similis helmuayn, helmuariphe so lange im allgemeinen Gebrauche, bis sich nach Bekanntwerden des griechischen Textes und nach der ersten Uebersetzung desselben in das Lateinische durch Zamberti um 1516 die Benennungen Rhombus, Rhomboid, Trapez einbürgerten.

Die fünf Postulate, oder Petitiones, welch letztere Bezeichnung Adelhard und Campano in gleicher Weise gebrauchen (die αἰτήματα des Euklid) stimmen bei beiden überein. Die Axiome aber (κοιναὶ ἔννοιαι des Euklid) oder *communes animi conceptiones*, *communes scientiae*, von beiden genannt, lauten bei

Adelhard.	*Campano.*
Quae eisdem aequalia sunt et sibi invicem sunt aequalia.	Quae uni & eidem sunt aequalia, & sibi invicem sunt aequalia.
Et si aequalibus aequalia addantur, tota quoque fient aequalia.	Et si aequalibus aequalia addantur, tota quoque fient aequalia.
Et si ab aequalibus aequalia auferantur quae relinquuntur aequalia sunt.	Et si ab aequalibus aequalia auferantur quae relinquuntur erunt aequalia.
	Et si ab inaequalibus aequalia demas, quae relinquuntur erunt inaequalia.
Et si inaequalibus aequalia addas, ipsa quoque tota fient inaequalia.	Et si inaequalibus aequalia addas, ipsa quoque fient inaequalia.

Si fuerint duae res uni aequales utraque earum aequalis erit alteri.

Si fuerint duae res quarum utraque uni eidemque dimidium erit, utraqu. erit aequalis alteri.

Si aliqua res alicui rei superponatur, appliceturque ei nec excedat altera alteram ille sibi invicem erunt aequales.

Omne totum sua parte majus.

Si fuerint duae res uni duplices, ipsae sibi invicem erunt aequales.

Si fuerint duae res quarum utraqu. unius ejusdem fuerit dimidium, utraque erit aequalis alteri.

Si aliqua res alicui superponatur, appliceturqu. ei, nec excedat altera alteram, ille sibi invicem erunt aequales.

Omne totum, est majus sua parte.

Man sieht, Campano's 4. Axiom fehlt in beiden Handschriften Nr. 352 und Nr. 23 der Adelhard'schen Uebersetzung, und ebenso beruht bei beiden die Fassung des Axioms, welches bei Campano das 6. ist, offenbar auf einer Verderbniss des Textes (*aequales* statt *duplices*), denn es würde nichts Anderes besagen, als das 1.; das 7. Axiom bei Adelhard endlich ist in der Handschrift Nr. 23 ausgefallen, was allerdings bei nicht gehöriger Achtsamkeit des Schreibers leicht geschehen konnte, da sich dieses Axiom ebenso wie das vorhergehende auf *alteri* endigt. Das Vorkommen desselben Fehlers an derselben Stelle, bei Axiom 4 und 6, in beiden Handschriften kann auf die Vermuthung führen, dass entweder beide Manuscripte Abschriften einer und derselben an dieser Stelle corrumpirten dritten seien, oder dass Nr. 23 eine Abschrift der an diesen Stellen bereits verderbten Handschrift Nr. 352 sei, jedoch spricht Anderes wieder dagegen, wie z. B. die verschiedene Schreibweise der arabischen Namen für Rhombus, Rhomboid, Trapez, und einige andere Abweichungen. Einer solchen begegnen wir sogleich im Folgenden. Bei Adelhard nämlich findet sich ein Zusatz zu den Axiomen, welcher in der Handschrift Nr. 352 wie wir nicht anders erwarten, h i n t e r denselben, in Nr. 23 aber v o r den *communes animi conceptiones* steht. Man könnte nun wohl meinen, es liege hier ein durch Unkenntniss und Unaufmerksamkeit des Schreibers von Nr. 23 bedingter Irrthum vor, jedoch bleibt, wie sich zeigen wird, auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass derselbe dieser Bemerkung absichtlich den genannten Platz angewiesen habe. Ein ganz ähnliches Scholium finden wir auch bei Campano hinter den Axiomen, und zwar lautet dasselbe bei

Adelhard.

Notaque multas communes scientias praetermisit euclides quae infinitae sunt et innumerabiles. Quarum haec est una. Si duae quantitates aequales ad quamlibet tertiam com-

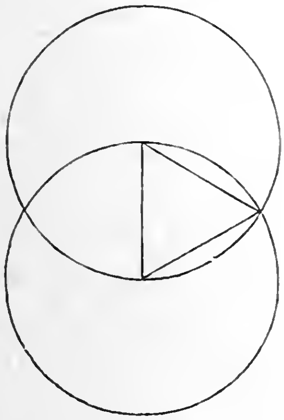
Campano.

Campanus. Sciendum est autem, quod praeter has communes animi conceptiones sive communes sententias, multas alias quae numero sunt incomprehensibiles, praetermisit Euparentur ambae sunt illa aut aeque majores aut aequ. minores aut eidem ambae aequales. Item alia. Quanta est aliqua quantitas ad aliam tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam. In quantitatibus quidem continuis hoc observandum est sive antecedentes majores sint suis consequentibus sive aequales. Magnitudo namqu. decrescit in infinitum. In numeris autem si fuerit primus submultiplex secundi quilibet tertius alius quarti erit submultiplex. Multitudo quippe crescit in infinitum.

clides: quarum haec est una. Si duae quantitates aequales, ad quamlibet tertiam ejusdem generis comparentur: simul erunt ambae illa tertia, aut aeque majores, aut aeque minores, aut simul aequales. Item alia. Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam ejusdem generis, tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam ejusdem generis. In quantitatibus continuis hoc universaliter verum est, sive antecedentes majores fuerint consequentibus, sive minores: magnitudo enim decrescit in infinitum: in numeris autem, non sic. Sed si fuerint primus submultiplex secundi, erit quilibet tertius aeque submultiplex alicujus quarti: quoniam numerus crescit in infinitum, sicut magnitudo in infinitum minuitur.

Gehen wir nunmehr zu den Lehrsätzen und Aufgaben selbst über, so stossen wir zunächst auf ein unvorhergesehenes Hinderniss. In beiden Handschriften Nr. 352 und Nr. 23 nämlich gehen der Propos. 1 des Buches I Euklid's einige Zeilen vorher, die weder bei diesem noch bei Campano ein Analogon haben; sie schliessen sich in Nr. 352 unmittelbar an den zuletzt erwähnten Zusatz, in Nr. 23, welches denselben vor die *communes animi conceptiones* setzt, an letztere an. Zugleich passt der auf I, 1 folgende Beweis nicht zu dieser Aufgabe; der auf I, 2 folgende nicht zu dieser, u. s. w.; und eine genauere Betrachtung lehrt, dass wir nicht etwa hier eine durch Unkunde der Schreiber verderbte Stelle vor uns haben, sondern dass durchgehends die Beweise den Sätzen, nicht, wie wir es gewohnt sind, nachfolgen, sondern denselben vorangehen, so dass für unsere Betrachtungsweise anscheinend zu jedem Satze der Beweis des folgenden gehört. Der Grund dieser auffallenden Sonderbarkeit mag im Folgenden zu suchen sein: Im Griechischen und Lateinischen laufen die Zeilen von links nach rechts, werden die Bücher von vorn nach hinten gelesen; im Arabischen laufen die Zeilen von rechts nach links, werden die Bücher (nach unserer Anschauungsweise) von hinten nach vorn gelesen. Es ist daher keineswegs unglaublich, dass entweder der arabische Schriftsteller, der den Euklid aus dem Griechischen in das Arabische übertrug, oder auch Adelhard, der den arabischen Euklid in das Lateinische übersetzte, diese Verschiedenheit der betreffenden Sprachen in Bezug auf links und rechts, hinten und vorn auch durch Umkehrung des vor und nach, oder oben und unten bezeichnen zu müssen glaubte, und somit die Beweise den Sätzen voranstellte. Aus demselben Grunde auch kann möglicherweise der Schreiber von Nr. 23 das zu den *communes animi conceptiones* gehörige Scholium demselben vorangestellt haben. Im Folgenden nun soll durchgehends die im Abendlande übliche Anordnung, nach welcher die Beweise und Constructionen erst auf die Lehrsätze und Aufgaben folgen, welches Verfahren auch Campano einhält, beobachtet werden. Wenden wir uns nunmehr zum Anfange des eigentlichen Inhalts, so lauten die drei ersten Aufgaben Euklid's bei

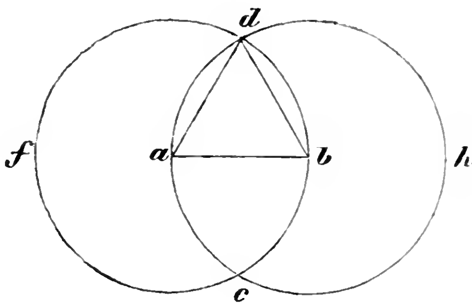
Adelhard.



I. Triangulum aequilaterum super datam lineam collocare. A duobus terminis datae lineae ipsam lineam occupando cum circino duos circulos sese invicem secantes describe et ab ipsa communi sectione circulorum ad duos terminos lineae propositae duos lineas rectas dirige. Dein ex circuli descriptione argumentum elice.

(Die Worte „cum circino" fehlen in Nr. 23.)

Campano.



I. Triangulum aequilaterum: supra datam lineam rectam collocare.

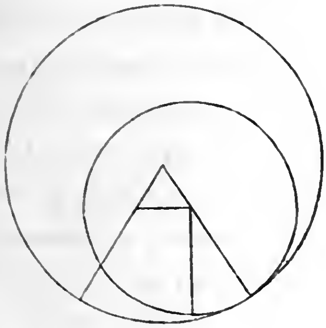
Esto data linea recta ab; volo: super ipsam, triangulum aequilaterum constituere. Super alteram ejus extremitatem, scilicet in puncto a, ponam pedem circini immobilem, & alterum pedem mobilem extendam usqu. ad b, & describam secundum quantitatem ipsius lineae datae, per secundam petitionem circulum $cbdf$. Rursus alteram ejus extremitatem, scilicet, punctum b faciam centrum: & per eandem petitionem & secundum ejusdem quantitatem, lineabo circulum $cadh$; qui circuli intersecabunt se in duobus punctis quae sint c, d. Et alteram duarum sectionum sicut sectionem *d*, continuabo cum ambabus extremitatibus datae lineae: protractis lineis *da, db* per primam petitionem. Quia ergo a puncto *a*, quod est centrum circuli *cbd*, protractae sunt lineae *ad* & *ab* usque ad ejus circumferentiam: ipsae erunt aequales, per diffinitionem circuli. Similiter quoqu. quia a puncto *b*, quod est centrum circuli *cadh*, protractae sunt lineae *ba* & *ad* usqu. ad ejus circumferentiam, ipsae erunt etiam aequales. Quia ergo utraqu. duarum linearum *ad*, *bd* aequalis est lineae *ab*, ut probatum est, ipsae erunt aequales inter se, per primam communem animi conceptionem. Ergo super datam rectam lineam: collocavimus triangulum aequilaterum, quod est propositum.

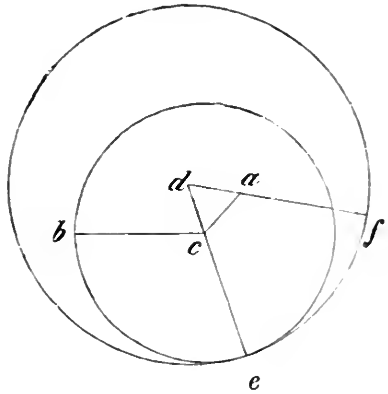
Campani additio. Si autem super eandem lineam libeat collocare reliquas duas triangulorum species, scilicet triangulum duum aequalium laterum, & triangulum trium inaequalium laterum: protrahatur etc. Folgt nun eben so ausführlich die Construction des gleichschenkligen und des ungleichseitigen Dreiecks, obschon letztere Aufgabe in Propos. 22 wiederkehrt.

II. A dato puncto cuilibet lineae rectae positae aequam rectam lineam ducere. A dato puncto ad terminum propositae lineae lineam rectam dirige et super eam triangulum aequilaterum statue et ab eodem termino sed in spacium datae lineae circulum describe et rursus ab eodem termino latus trigoni aequilateri ad circumferentiam directe protrahe, rursusque a vertice

II. *Euclides ex Campano.* A dato puncto: cuilibet lineae rectae propositae aequam rectam lineam ducere.

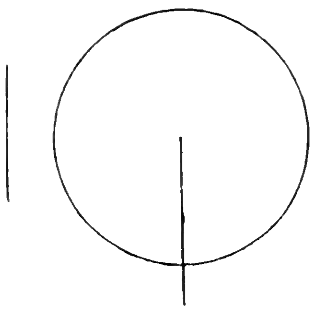
Campanus. Sit *a*, punctus datus: & *bc* linea recta data; volo a puncto *a*, ducere lineam unam aequalem lineae *bc* in quamcunqu. partem contingat. Conjungam ergo punctum *a*, cum altera extremitate lineae *bc*: cum qua voluero: & conjungam ipsum *a*, cum

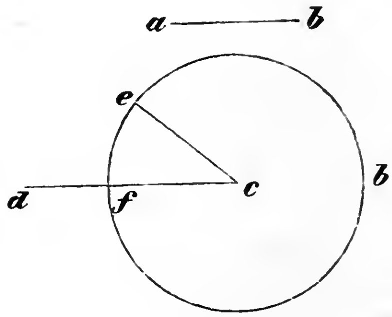




trianguli aequilateri occupando punctum ubi incidit latus ejus productum in circumferentiam alium majorem circulum describe, dein ex circuli descriptione atque ex tertia et prima communi conceptione argumentum elice.

extremitate *c*, per lineam *ac*: super quam constituam triangulum aequilaterum secundum doctrinam praecedentis, qui sit *acd*; & in illa extremitate lineae datae cum qua conjunxi punctum datum *a*, scilicet in extremitate *c* ponam pedem circini immobilem, describamqu. super ipsum (per 3 petitionem) circulum secundum quantitatem ipsius datae lineae; qui sit circulus *cb*; & latus trianguli aequilateri quod opponitur puncto dato, scilicet latus *dc* protraham per centrum circuli descripti usqu. ad ejus circumferentiam: & sit tota linea sic protracta *dce*. Secundum cujus quantitatem lineabo circulum, posito centro in *d*: qui sit circulus *ef*. Postea protraham latus *da* usque ad circumferentiam hujus ultimi circuli: & occurrat circumferentiae ipsius in puncto *f*. Dico igitur quod *af* est aequalis *bc*. Nam *bc* & *ce* sunt aequales: quia exeunt a centro circuli *cb* ad ejus circumferentiam; Similiter quoqu. *df* & *de* sunt aequales: quia exeunt a centro circuli *ef* ad circumferentiam; sed *da* & *dc* sunt aequales: quia sunt latera trianguli aequilateri. Ergo si *da* & *dc* demantur de *de* & *df* quae sunt aequales: erunt residua, quae sunt af & ce, aequalia. Quia ergo utraqu. duarum linearum af & cb est aequalis ce: ipsae per 1. communem animi conceptionem adinvicem sunt aequales. Quare a puncto a protraximus lineam af aequalem bc; quod est propositum.





III. Propositis duabus lineis inaequalibus de longiore earum aequalem breviori abscindere. A termino longioris aequam breviori lineam rectam sicuti praemissa proponebat ducito et ab eodem secundum spacium brevioris circulum describito, deinde ex circuli descriptione argumentum elicito.

III. *Euclides ex Campano.* Propositis duabus lineis inaequalibus, de longiori earum, breviori aequalem abscindere.

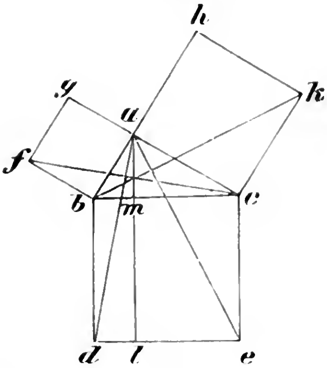
Campanus. Sint duae lineae ab & cd, & sit ab minor: volo ex cd abscindere unam, quae sit aequalis ab. Duco primo a puncto c, unam lineam aequalem ab, secundum quod docuit praecedens, quae sit ce: posito ergo centro in puncto c, describam circulum secundum quantitatem ce, qui secabit lineam cd; sit ergo ut secet eam in puncto f, eritque linea cf aequalis lineae ce, quia ambae exeunt a centro ejusdem circuli ad circumferentiam, & quia utraque duarum linearum ab & cf est aequalis ce, ipsae per 1. communem animi conceptionem sunt inter se aequales, quod est propositum.

Es lautet endlich der Pythagoreische Lehrsatz, der s. Z. berühmte Magister matheseos, bei

Adelhard.

XLVI. In omni triangulo rectiangulo quadratum quod a latere recto angulo opposito in se ipsum ducto describitur aequum est duobus quadratis quae ex duobus reliquis lateribus conscribuntur. Ab angulo recto ipsius trianguli ad unam basim maximi quadrati tres lineas rectas dirige unam perpendicularem duas vero ipotenusas ad duos terminos. Itemqu. a duobus reliquis ejusdem trianguli angulis ad duos angulos duorum minorum quadratorum duas lineas rectas dirige intra ipsum sese vicissim secantes. Age ergo ex XIIII*a* bis assumpta et ex IIII*a* bis et tertia bis et XLI*a* bis et tertia bis argumentum elice.

Campano.



XLVI. *Euclides ex Campano.* In omni triangulo rectangulo, quadratum quod a latere recto angulo opposito in semetipso ducto describitur, aequum est duobus quadratis, quae ex duobus reliquis lateribus conscribuntur.

Campanus. Sit triangulus *abc*, cujus angulus *a* sit rectus. Dico quod quadratum lateris *bc*, aequum est quadrato lateris *ab* & quadrato lateris *ac* simul sumptis. Quadrabo ergo haec tria latera secundum doctrinam praecedentis, sitqu. quadratum *bc*, superficies *bcde*, & quadratum *ba*, superficies *bfga*, & quadratum *ac*, superficies *achk*. Ab angulo *a*, recto, ducam ad basin *de* basin maximi quadrati, tres lineas, scilicet *ab* aequidistantem utriqu. lateri *bd* & *ce*, quae secet *bc* in puncto *m*, & hypothenusas *ad* & *ae*. Itemqu. a duobus reliquis angulis trianguli, qui sunt *b* & *c*, ducam ad duos angulos duorum quadratorum minorum, duas lineas se intersecantes intra ipsum triangulum, quae sunt *bk* & *cf*. Et quia uterqu. duorum angulorum *bac* & *bag* est rectus, per 14 erit *gc* linea una: eadem ratione erit *bh*, linea una, quia uterque duorum angulorum *cab* & *cah* est rectus. Quia ergo super basin *bf*, & inter duas lineas aequidistantes quae sunt *cg* & *bf*, constituta sunt parallelogrammum *bfga* & triangulo *bfc*, erit per 41. parallelogrammum *bfga* duplum triangulus *bfc*, sed triangulus *bfc* est aequalis triangulo *bad* per 4, quia *fb* & *bc* latera primi sunt aequalia *ab* & *bd* lateribus postremi, & angulus *b* primi est aequalis angulo *b* postremi, eo quod uterquo constat ex angulo recto & angulo *abc* communi: ergo parallelogrammum *bfga* est duplum ad triangulum *abd*. Sed parallelogrammum *bdlm* est duplum ad eundem triangulum per 41, quia constituti sunt super eandem basin, scilicet *bd*, & inter lineas aequidistantes quae sunt *bd* & *ab*, ergo per communem scientiam quadratum *abfg*, & parallelogrammum *bdlm* sunt aequalia, quia eorum dimidia, videlicet praedicti trianguli sunt aequalia Eodem modo & per easdem propositiones mediantibus triangulis *kbc* & *aec* probabimus quadratum *achk* esse aequale parallelogrammo *celm*. Quare patet propositum.

Ich setze endlich noch die Definitionen vom Anfange des II. Buches des Euklid, nebst den zu diesen von Adelhard und Campano gemachten Bemerkungen her. Diejenigen des ersteren gehen in Nr. 352 den Definitionen voran, in Nr. 23 stehen sie auf einem eingebundenen Zettel. Sie lauten bei

Adelhard.

Omne paralellogramum (!) rectiangulum sub duabus lineis angulum rectum ambientibus dicitur contineri. etc.

Nota paralellogramum idem esse quam superficiem equidistantium laterum.

Campano.

Omne parallelogrammum rectangulum, sub duabus lineis angulum rectum ambientibus dicitur contineri. etc.

Campanus. Parallelogrammum, est superficies aequidistantium laterum. Parallelogrammum rectangulum, est

Nota quoque quod nos gnomonem d elaale dicunt arabes.

superficies aequidistantium laterum habens omnes angulos rectos, & producitur ex uno duorum laterum ejus ambientium unum ex suis angulis, ducto in reliquum, & adeo sub illis dicitur contineri.

Ich führe diese Stelle an aus zwei Gründen: einmal nämlich ist die letzte Bemerkung Adelhard's eine solche, welche im arabischen Texte offenbar nicht gestanden haben kann, die einzige derartige, welche ich bemerkt habe; und allerdings ist sie eine rein äusserliche. Zweitens aber drängt sich uns die Frage auf: woher hatte sich Adelhard die geometrischen Kenntnisse erworben, die ihn befähigten, den Euklid zu übersetzen? Denn *Rhombus*, *Rhomboid*, *Trapez* sind ihm offenbar ganz fremde Begriffe und Vorstellungen, für welche er gar keine Namen hat, so dass er sich genöthigt sieht, die arabischen beizubehalten, der Begriff und die Vorstellung der *Gnomon* aber ist ihm augenscheinlich geläufig. Nach der, meines Wissens, allgemeinen Annahme soll, insbesondere seit Gerbert, die sog. Geometrie des Boetius bis zum Bekanntwerden mit den Arabern die hauptsächlichste Quelle des geometrischen Wissens gewesen sein, etwa nebst Schriften Heron's. In beiden aber kommt der Gnomon nur einmal, Rhombus, Rhomboid, Trapez aber, wenn auch nicht oft, so doch mehrere Male vor. Hätte ferner Adelhard diese Boetius-Geometrie gekannt, hätte er sich da nicht erinnern müssen, dass er ja hier ganz Aehnliches gelesen habe, hätte er nicht statt *tetragonus longus* das daselbst gebrauchte, und, sollte man meinen, bekannte *parte altera longior*, statt *elmuain rhombus*, statt *simile elmuain rhomboides*, statt *helmunariphe trapezium* oder *mensula* gebraucht? Keins von Allen aber findet satt; erst ein Späterer schreibt diese Worte in den Codex ein, während doch die Boetius-Schrift durch die Bekanntschaft mit dem arabischen Euklid in den Hintergrund gedrängt sein soll. Hier stehe ich vor einer Frage, welche die Richtigkeit jener Ansicht wohl zweifelhaft erscheinen lassen könnte, auf die näher einzugehen aber hier nicht der Ort ist.

Dem bisher Mitgetheilten, welches für das Ziel, das ich mir hier gesteckt, völlig hinreicht, entnehmen wir Folgendes: Zunächst die dem Freunde historischer Forschung auf dem Gebiete der Mathematik vielleicht nicht uninteressante Thatsache, dass sich die Uebersetzung des Euklid durch Adelhard von Bath nicht nur an den von Libri und Chasles angeführten Orten Florenz, Oxford, Paris und Nürnberg befindet, sondern auch in Erfurt, und zwar in zwei Handschriften: einer älteren, schöner und deutlicher geschriebenen, leider aber unvollständigen, Nr. 352, und einer jüngeren, minder schön und deutlich geschriebenen, auch, wie es scheint, etwas weniger correcten, dagegen vollständigen, Nr. 23. Bemerkenswerth in beiden erscheint die Bezeichnung: Euclidis *institutio artis geometricae,* die einerseits die sonst allgemein übliche Benennung *Elemente* nicht kennt, andrerseits an die Titel der Schriften des Boetius (nach der Friedlein'schen Ausgabe): *de institutione* arithmetica, *de institutione* musica, *ars geometrica* erinnert. Der Umstand endlich, dass in Nr. 352 z. B. am Ende von Buch IV, und Nr. 23 Euklid als *philosophus* bezeichnet wird, in Verbindung mit dem Titel der ungefähr derselben Zeit angehörigen von Libri und Chasles citirten Pariser Handschrift Nr. 7213, in welchem derselbe noch specieller philosophus *socraticus* heisst, lässt erkennen, dass bereits im 13. und 14. Jahrhundert (wenn nicht schon bei den Arabern) Euklid *von Megara*, der Schüler des Sokrates, als der Verfasser der Elemente galt.

Betrachten wir nunmehr die Uebersetzung Adelhard's genauer, so werden wir, glaube ich, doch Manches anders finden, als wir nach Chasles' und Libri's Angaben erwarten zu dürfen meinten. Denn vergleichen wir sie mit derjenigen Campano's, um die Frage zu entscheiden, ob letztere mit ersterer identisch sei, so sehen wir, dass beide in den Definitionen, Postulaten, Axiomen, dem Wortlaute der Lehrsätze und Aufgaben, sowie in der Reihenfolge derselben im Ganzen übereinstimmen, obschon, wie sich zeigte, auch hier nicht unwesentliche Verschiedenheiten vorkommen; zugleich wird man anerkennen müssen, dass fast allenthalben, wo solche auftreten, Campano's Fassung die klarere und präcisere ist. In den Beweisen jedoch weichen Adelhard und Campano völlig von einander ab; ersterer nämlich enthält dieselben nicht vollständig, sondern deutet sie nur an, und zwar in der knappesten Form, nicht selten auf originelle Weise (so besteht z. B. der Beweis zu I, 4, dass zwei Dreiecke congruent sind, wenn sie zwei Seiten und den Zwischenwinkel gleich haben, aus den Worten: „Suppositione scilicet ex penultima omnium conceptionum. Quodsi protervus perseveret adversarius ex quinta petitione indirecta raciocinatione eum argue", vgl. Campano's Beweise zu I, 8; I, 14; III 4; IV, 10; u. a.); letzterer giebt sie eben so ausführlich als der griechische Text und die Uebersetzung desselben durch Zamberti. Nur dann also, wenn man unter dem *Euklid* blos die Definitionen, Postulate, Axiome, und Lehrsätze und Aufgaben ohne die Beweise versteht, wird man etwa sagen können, Campano's Uebersetzung sei identisch mit derjenigen Adelhard's; man müsste denn annehmen, die von mir verglichenen Handschriften Nr. 352 und Nr. 23 enthielten nicht die ursprüngliche Fassung Adelhard's, dieser hätte eben so ausführlich übersetzt als Campano, und ein Späterer die Beweise zusammengezogen. Ich brauche jedoch nicht auseinanderzusetzen, wie wenig wahrscheinlich dies wäre. Einıal nämlich müsste diese Umgestaltung schon in sehr früher Zeit or sich gegangen sein, denn wir hätten in dem Codex Nr. 352, ungefähr 00 Jahre nach Adelhard's Uebersetzung, bereits ein und zwar schon hie nd da durch Abschreiber verderbtes Exemplar dieser veränderten Ueber-etzung vor uns. Sodann aber auch: wer war der Gelehrte jener Zeit, er eine so umfassende und eindringende Sachkenntniss besass, dass er ı den Beweisen die Haupt-Momente aufzufassen, hervorzuheben und zu rdnen verstand? Und vor Allem: welchen Zweck hätten solche Ab-ürzungen haben sollen, da bei dem damaligen niedrigen Stande des geo-ıetrischen Wissens blosse Andeutungen, die nur den weiter Vorgeschrittenen ı fördern vermögen, keinen Nutzen haben konnten? Zugleich dürfte ie Thatsache, dass Campano's Euklid denjenigen Adelhard's verdrängte, ass gerade sein Text beim Drucke zu Grunde gelegt ward und eraume Zeit hindurch massgebend blieb, als Beweis dafür gelten, dass ıan Adelhard's Fassung als die kürzere, folglich schwerer zu verstehende, iejenige Campano's aber als die ausführlichere, und daher zweckmässigere, annte.

Ich wende mich nunmehr zu der Frage: Hat Adelhard, oder Campano, der beide einen *Commentar* zum *Euklid* geliefert? Und zwar verstehe ich, ie wohl zugegeben werden wird, unter einem *Commentar* zu einem Schrift-eller erläuternde Zusätze, durch welche der Text desselben nach der einen der anderen Richtung erklärt wird. Freilich muss daher zuvor festgestellt ein, welches denn der zu commentirende Text sei, und diese Frage hin-chtlich der Elemente des Euklid ist, worauf ich bereits an einem anderen rte aufmerksam gemacht habe, zu verschiedenen Zeiten verschieden beant-ortet worden. Denn nach Kästner, l. c. p. 249, berichtet Savilius in seinen Praelectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis Oxonii habitae. xf. 1620," Einige schrieben dem Euklid nur die Lehrsätze und Aufgaben, ie Beweise aber dem Theon zu, weil sich in manchen Manuscripten der lemente Euklid's der Beisatz ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν befunden habe, nd Theon eine Ausgabe des Euklid veranstaltet hatte, und u. a. Holtz-ıann oder Xylander hält es, ibid. p. 353, für nöthig, seiner deutschen ebersetzung der sechs ersten Bücher vom Jahre 1562 die „Warnung an en Leser" hinzuzufügen: „Die Demonstrationen sind nicht vom Euclide elbst, sondern von anderen hochgelehrten kunstreichen Männern, als Theone, lypsicle, Campano etc. hinzugesetzt worden," und in der Campano-Zam-erti'schen Doppel-Ausgabe (die meinige ist die vom Jahre 1537) sind die-elben offenbar aus gleichem Grunde durch den Zusatz bezüglich *Campanus* nd *Theon ex Zamberto* charakterisirt. Wenn nun auch nicht geleugnet verden soll, dass der Zusatz ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν zur Begründung dieser damals weit verbreiteten Ansicht[1]) beigetragen habe, so erscheint es doch wenig wahrscheinlich, dass er der einzige Grund gewesen sei, denn er setzte ja Bekanntschaft mit griechischen Handschriften voraus; die Kenntniss des Griechischen aber war im Occidente geraume Zeit hindurch eine sehr seltene. Weit wahrscheinlicher finde ich es, dass, als griechische Manuscripte wieder mehr beachtet wurden, diese Ansicht bereits vorhanden war und durch dieselben nur neue Bestätigung erhielt; dass aber der wahre Grund in den früher bekannt gewordenen Uebersetzungen des Euklid aus dem Arabischen, welche ja die Kenntniss mit demselben vermittelten, und insbesondere in der Uebersetzung Campano's als der am meisten gebrauchten zu suchen ist. Hier nämlich wird in den Beweisen häufig von *Euclides* in der dritten Person gesprochen, z. B. im Beweise von I, 41; V, 11, 20; VII, 5, 7, 12, 13, 14, 15, 20, u. a., oder vom *auctor*, ebenfalls Euklid, z. B. II, 4; III, 24; IV, 5; V, 9, etc.; oder wir begegnen einem *proponit* IV, 16; einem *definit*, V, 7—13, 16; einem *vult* V, 14, 15, einem *demonstrat*, V, 12, 17, 18, 22, 23; VI, 17 etc. also einem: *Er* stellt die Aufgabe (nämlich Euklid), *er* definirt, *er* will, *er* zeigt, etc. und der Leser wird somit verleitet, auch das nicht seltene *dico quod* dem Schreiber der Beweise und nicht dem Euklid beizulegen, und somit dieselben als den Commentar eines Anderen zu betrachten. Nehmen wir noch hinzu, dass jene frühere naive Zeit zum Glauben weit geneigter war, als die Gegenwart, dass endlich damals die Geometrie nicht für eine Wissenschaft, sondern für eine Kunst (*ars* geometrica) galt; kann es unter solchen Umständen Wunder nehmen, wenn die Ansicht Wurzel schlug, Euklid habe nur die Definitionen, Postulate, Axiome, Lehrsätze und Aufgaben geliefert, und ein Anderer die Beweise als Commentar hinzugefügt? Dies war wohl auch die Ansicht des guten Amplonius, der ja die Handschriften der Adelhard

---

1) Vor mir liegt eine Ausgabe des Euklid von Stephan Gracilis (vergl. Kästner I, p. 261), unter dem Titel: „Euclidis elementorum libri XV. Quibus cum ad omnem mathematicae scientiae partem, tum ad quamlibet Geometriae tractationem facilis comparatur aditus. Coloniae. Apud Gosuinum Cholinum 1612." Sie enthält auf 203 Seiten klein 8⁰ den ganzen Euklid, freilich nur die Lehrsätze und Aufgaben, mit den Figuren (ohne letztere würde sie etwa den halben Raum ausfüllen), aber nur wenige *non poenitenda Theonis scholia, sive mavis lemmata* und nicht *Theonis apodixin.* Das 1., 2. etc. Buch führt die ergötzliche Ueberschrift: Euclidis *elementum* primum, secundum etc. Die Unterschrift der Vorrede „Lutetiae 1557" zeigt, dass diese Ausgabe ursprünglich in Paris, vermuthlich zum Gebrauche an der dortigen Universität, erschienen war; sie muss für so brauchbar befunden worden sein, dass zu demselben Zwecke eine neue Ausgabe in der damaligen Universitätsstadt Cöln veranstaltet ward. Wie viel und was die Studenten aus diesem wunderbaren, 15 wohlgezählte *Elementa*, aber nicht *Theonis apodixin* enthaltenden Euklid gelernt haben mögen, kann man sich vorstellen.

schen wie der Campano'schen Uebersetzung vor sich hatte; dies mochte ihn bestimmen, den Codex Nr. 352 durch „*Pauca* de Euclide," Nr. 23 durch „Euclides *cum commento* Adelardi" zu bezeichnen, indem in seinen Augen die Beweise das *commentum* waren, und auf derselben Meinung mag auch die Bezeichnung der von Chasles und Libri angeführten Florentiner, Oxforder und Pariser Handschriften beruhen. In der Gegenwart jedoch, welche die Geometrie nicht mehr als eine Kunst, sondern als eine Wissenschaft betrachtet, hat sich, und mit Recht, die Auffassung Bahn gebrochen, dass auch die Beweise, obschon sie wohl nicht gerade alle von Euklid selbst gefunden worden sind — *Ante Euclidem permulti floruerunt Geometrae. Primus omnium Graecorum, Euclides eorum opera collegit, collecta digessit, et quae fuerant incondite demonstrata, ea demonstrationibus inconcussis exornavit* sagt Peyrard in der Vorrede zu Band I seiner Ausgabe — doch zum *Euklid* gehören, dass sie nicht willkürliche Erklärungen der Sätze, sondern die nothwendige Begründung derselben sind, ohne welche die Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit nicht Sache des Wissens, sondern des Glaubens sein würde, und ich kann daher Chasles nicht beistimmen, wenn er auch von einem *Commentar* des Zamberti spricht, l. c. p. 549 und ibid. Anm. 176 da letzterer doch nur den griechischen Text (mit den Beweisen) übersetzt hat, und ebensowenig, wenn nach ihm Adelhard einen Commentar zum Euklid gegeben haben soll, da sich doch bei diesem selbst die Beweise nur angedeutet und nicht vollständig durchgeführt, geschweige denn durch Zusätze erläutert finden; solchen begegnen wir, wie wir sahen, mit Ausnahme einer einzigen, unten noch zu erwähnenden Stelle, nur hier und da bei den Definitionen. Allein selbst im günstigsten Falle könnte nicht Adelhard als der Commentator betrachtet werden. Denn es wäre schwer zu glauben, dass derselbe im arabischen Texte nur den Wortlaut der Lehrsätze und Aufgaben vorgefunden und die Beweise sämmtlich proprio Marte aufgestellt hätte; er würde ja dann mehr geleistet haben, als Euklid selbst. Ebensowenig wird man annehmen dürfen, er habe im Arabischen die Beweise vor sich gehabt, und dieselben abgekürzt und excerpirt; denn wozu hätte dieses dienen sollen? Wir müssen vielmehr, zumal sein Euklid in der Ueberschrift als eine Uebersetzung bezeichnet wird, glauben, dass er den arabischen Text, wie derselbe ihm vorlag, getreu wiedergab, höchstens solche Bemerkungen hinzufügend wie die, der Gnomon heisse im Arabischen elaale, dass mithin der Name eines Commentators, wenn überhaupt, dem arabischen Schriftsteller gebühre. Anders verhält es sich mit Campano, dessen Ausgabe an verschiedenen Stellen — z. B. die Theorie des Stern-Fünfecks bei I, 32, die Lehre von der Trisection des Winkels am Ende des IV. Buches, in der Ausgabe von 1537 am Ende des ganzen Werkes stehend — erläuternde Zusätze zum Euklid enthält; davon, ob Campano diese selbst gefunden, wird weiter unten die Rede sein. Auffällig bleibt es allerdings, dass nach Band XIX dieser Zeitschr. Literaturzeit. p. 47—48, auf welche Stelle Herr Professor Cantor mich aufmerksam zu machen die Güte gehabt hat, Herr Professor Günther in der von Regiomontanus geschriebenen, in Nürnberg befindlichen Adelhard'schen *Euklidbearbeitung* die Theorie der Sternvielecke noch ausführlicher als bei Campano gefunden hat, während die beiden Erfurter Handschriften dieselbe nicht allein nicht vollständiger, sondern gar nichts von derselben enthalten, und sich nur auf den Beweis des (nachfolgenden) Satzes I, 32 von der Winkelsumme bes Dreiecks beschränken. Ebensowenig enthalten sie, wie ich hier bemerken will, die Lehre von der Dreitheilung des Winkels. Denn nachdem am Ende des IV. Buches die Beweise vorangegangen, welche in keiner Weise auf die Trisection Bezug nehmen, folgen die zugehörigen Sätze: „Intra datum circulum quindecagonum aequilaterum atqu. aequiangulum designare. Dein circa quemlibet circulum assignatum quindecagonum aequilaterum atqu. aequiangulum, atqu. intra datum quindecagonum circulum describere.“ Und unmittelbar hieran schliessen sich die Worte: „Explicit liber IIII ecludis (!) philosophi dei gratia ejusque auxilio. Incipit liber V. XXV propositiones habens.“ Da mir die hier in Frage kommende Abhandlung des Herrn Günther unbekannt geblieben ist, kann ich meine Ansicht natürlich nur mit Vorbehalt aussprechen. Dieselbe geht dahin, dass entweder eine Verwechselung der Adelhard'schen Uebersetzung mit einer anderen (etwa des Gerhard von Cremona) vorliege, oder aber, dass Regiomontanus, der Adelhard's Euklid gewiss nicht, wie ein unkundiger Schreiber den *ecludes*, Wort für Wort copirte, nicht eine Abschrift, sondern eine Bearbeitung desselben geliefert hat, indem er die Resultate der seit Campano insbesondere durch Bradwardin (Chasles l. c. p. 549—551, 597, 611) weiter geförderten Theorie der Stern-Polygone nach vielleicht inzwischen verloren gegangenen Quellen mit einflocht, wie ja nach Curtze „Reliquiae Copernicanae,“ Zeitschr. XIX, p. 81—82, auch Copernicus zu Campano's Scholium über die Trisection des Winkels Bemerkungen hinzufügte, dass also Regiomontanus zu der Adelhard'schen Uebersetzung Zusätze machte, von denen weder die um 200 Jahre ältere Erfurter Handschrift Nr. 352, noch Nr. 23 etwas weiss.

Ich wende mich nunmehr zu der oben erwähnten, von Chasles l. c. p. 596, Libri II, p. 48, und Curtze l. c. p. 80, 449—450 ausgesprochenen Meinung, welche Campano das Verdienst eines *Uebersetzers* abspricht, und demselben blos das, wie aus dem *nur* hervorgeht, geringere eines *Commentators*, und zwar nicht des Euklid, sondern des Adelhard, zugesteht. Allerdings kennt auch der Titel der 1482 bei Ratdolt zum ersten Male edruckten Campano'schen Euklid-Ausgabe nach Curtze l. c. p. 80 Campano ur als Commentator („*cum commentis Campani*"), hingegen lautet derjenige er von Paciolo (Lucas de Burgo sancti sepulcri) castigirten und commenirten Ausgabe 1509 nach Kästner I, p. 299: „Euclidis megarensis philoophi .... opera a *Campano interprete fidissimo tralata*", der Titel der)oppel-Ausgabe 1537: „Euclidis Megarensis .... elementorum lib. XV. 'um expositione Theonis in priores XIII a Bartholomeo Veneto Latinitate onata, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos" spricht on Campano blos als Erklärer, und nur von Bartholemeus (Zamberti) als Jebersetzer, ebenso die Ueberschrift des ersten Buches: „Euclidis ... primum x Campano, deinde ex Theone graeco commentatore, interprete Bartholomeo ;amberto Veneto ... liber primus"; die Ueberschriften der übrigen Bücher ıssen nichts Bestimmtes erkennen, nur in derjenigen des XIV. erscheint 'ampano als Commentator, in der des XV. aber wieder als Uebersetzer ex *traditione Campani*"). Jedoch begegne ich sonst allenthalben (auch bei 'eyrard, Vorrede zu Band I, p. XXIV) der Ueberzeugung, Campano habe einen Euklid aus dem Arabischen übersetzt, nur Chasles, Libri und Curtze, on der oben besprochenen Ansicht, dass Campano's und Adelhard's Euklid lentisch seien, ausgehend, sind anderer Meinung; und wenn letzterer, l. c. . 446 sagt: „Ich will ferner zeigen, dass das Scholion (von der Trisection es Winkels) in der Ausgabe von 1482 vielleicht schon in der arabischen 3earbeitung vorhanden war, und also nicht den Campanus zum Verfasser at", so müsste man schliessen, dasselbe sei von Adelhard übersetzt worden. Linestheils aber findet sich, wie ich bereits erwähnte, dieses Scholium bei ıdelhard gar nicht, anderntheils aber auch erscheint es mir, wie ich gestehe, nklar, wie man sich eine etwaige Commentirung der Uebersetzung Adelard's durch Campano vorzustellen habe, wenn derselbe keinen arabischen 'ext vor sich gehabt hätte. Hätte Campano in der That ohne eine solche 3eihülfe den Figuren Buchstaben beigefügt und die von Adelhard doch ur ganz kurz angedeuteten Beweise nicht nur so vervollständigt, eine ırbeit, deren Grösse man nach dem Mitgetheilten ermessen kann, sondern uch mit so vielen und, neben allerdings manchem Irrigen, scharfsinnigen nd tiefgreifenden Zusätzen bereichert, wie wir es bei ihm finden, so wäre, neines Erachtens, sein Verdienst, wenn auch nicht als Uebersetzer, sicherich nicht geringer anzuschlagen als dasjenige Adelhard's; sein Genie wäre in hervorragendes, und namentlich die bei aller Verschiedenheit unleugbar orhandene Aehnlichkeit mit der lateinischen Uebersetzung des griechischen Euklid wahrhaft erstaunlich und unbegreiflich. Weit glaublicher erscheint es laher, dass auch Campano seinen Euklid aus dem Arabischen übersetzt ıat, jedoch nach einem Texte, der von demjenigen abwich, welcher Adelhard vorgelegen hatte. Denn darauf, dass schon bei den Arabern Verschiedenheiten in den Beweisen sich vorfanden, scheinen die Worte in der *Campani additio* zu V, 20, mögen dieselben nun von Campano selbst herrühren, oder übersetzt sein, hinzudeuten: „Quidam autem hanc conclusionem demonstraverunt ... hoc modo ... Isti autem erraverunt in sua demonstratione“ etc. Wir wissen ferner, Hankel l. c. p. 232—233, dass in der That von den Elementen Euklid's mehrere und verschiedene Uebersetzungen in das Arabische existirten, und dasselbe hatte bereits Kästner, l. c. p. 252, vermuthet: „Vom Apollonius Pergäus sind drey arabische Uebersetzungen bekannt. So lässt sich wohl schliessen, auch Euklid habe mehr als einen arabischen Uebersetzer gefunden“, und, ibid. p. 255: „Campan könnte also wohl nur einem Araber gefolgt haben, und, ob das eben der ist, dem Adelhard folgte, liesse sich entscheiden, wenn man die gedruckte Uebersetzung (Campano's) mit der ungedruckten (Adelhard's) vergliche.“ Dieses letztere nun ist von mir geschehen, und es dürfte demnach durch das Mitgetheilte als festgestellt zu erachten sein, dass die in den Uebersetzungen Adelhard's und Campano's unleugbar vorhandenen Verschiedenheiten darin ihren Grund haben, dass beiden verschiedene arabische Texte vorlagen. Ja, es will mir scheinen, als habe die so weit verbreitete und so lange festgehaltene Ansicht, Euklid habe nur die Propositionen verfasst, ihren letzten Grund bei den Arabern. Denn was konnte diesen, da sie in ihren Ausgaben die Beweise von einander abweichend, und nur die Lehrsätze und Aufgaben übereinstimmend fanden, näher liegen als die Meinung, erstere seien ein Commentar und nur letztere die Worte des Euklid, und diese Auffassung konnte sich auf die Völker des christlichen Abendlandes, mit denen sie ja in so vielfache Berührung kamen, übertragen haben, noch bevor eine Uebersetzung in das Lateinische stattgefunden hatte. Dass Campano nun diejenige Adelhard's nicht commentirt, sondern selbst eine solche nach einem anderen arabischen Texte geliefert hat, erscheint mir, wie ich bemerkte, in Uebereinstimmung mit dem Zeugnisse des Paciolo unzweifelhaft. Jedoch möchte ich dies nicht so verstanden wissen, als habe Campano nur übersetzt, als hätten sich die zahlreichen Zusätze zum Euklid sämmtlich in seinem arabischen Texte vorgefunden; ebensowenig freilich möchte ich behaupten, dieselben seien sämmtlich seinem eigenen Geiste entsprungen. Vergeblich habe ich mich bemüht, aus den verschiedenen Bezeichnungen: *Euclides ex Campano* bei den Definitionen und Propositionen *Campanus* bei den Beweisen, aber auch bei Zusätzen zu den Definitionen *Campani additio* und *Campani annotatio* bei Zusätzen zu den Propositionen und Beweisen hierüber bestimmte Anhaltspunkte zu gewinnen. Weder weiss ich, von wem diese Bezeichnungen herrühren, ob vom Castigator Paciolo oder vom Herausgeber Hervagen, oder von wem sonst, noch wie sie sich unterscheiden sollen, denn z. B. bei VII, 39 finden wir 1) den Lehrsatz, mit *Euclides ex Campano*, 2) ein *Correlarium*, 3) den Beweis, mit *Campanus*, 4) Erläuternde Zusätze, mit *Campani additiones*, und 5) nochmals erklärende Anmerkungen, mit *Campani annotatio* versehen. Unter solchen Umständen bleibt nichts Andres übrig, als Vermuthungen aufzustellen, und es erscheint mir als das Richtigste, anzunehmen, Campano habe ausser dem arabischen Euklid-Text, der die Sätze und die Beweise enthielt, noch andere Schriften, arabische und lateinische, benutzt, und so unter Hinzufügung von manchem Eigenen sein Werk compilirt. Dafür wenigstens spricht Verschiedenes. Von dem die Trisection des Winkels behandelnden Scholium hat Curtze, l. c. p. 446—452, den arabischen Ursprung wahrscheinlich gemacht; auf eine gleichfalls arabische Quelle deutet es hin, wenn Campano in seinem mit *Campanus* bezeichneten Zusatze zur Definition V, 16 einen „*Ametus filius Joseph ben Tavit*" erwähnt; dagegen finden wir in einer zur Definition V, 3 gehörigen Bemerkung die *Musik des Boetius* citirt, die meines Wissens den Arabern nicht bekannt war, und in seiner *Additio* zu II, 14 gebraucht Campano für das Rechteck, welches er in der Definition I, 31 *tetragonus longus* genannt hatte, den Ausdruck *altera parte longior figura*, vielleicht in Erinnerung an die in der Arithmetik oder der sog. Geometrie des Boetius gebrauchte Bezeichnung, obschon er auffallender Weise dieselben neben der Musik nicht erwähnt. Sei dem aber wie ihm wolle, so viel ist gewiss: Wenn auch Adelhard der Ruhm gebührt, den Euklid zuerst aus dem Arabischen übersetzt, und ihn wenigstens ausführlicher, als man ihn bisher besass, dem christlichen Abendlande bekannt gemacht zu haben, so hiesse es doch diesem seinem Verdienste gegenüber dasjenige Campano's schmälern, der, wie es scheint, zuerst (über Gerhard von Cremona bin ich leider nicht genauer unterrichtet) den vollständigen Euklid wiedergab, denselben erst geniessbar machte und einbürgerte, wenn man mit Libri, Chasles und Curtze sagen wollte, seine Uebersetzung sei dieselbe wie diejenige Adelhard's und er habe nur einen Commentar hinzugefügt. Und selbst wenn, wie es ja wohl möglich ist, Campano beim Anfertigen seiner Uebersetzung diejenige des Adelhard zu Rathe zog, obwohl er sie nicht nennt, und den einmal feststehenden Wortlaut der Aufgaben und Lehrsätze thunlichst beibehielt, wer möchte ihm dies verargen?

Adelhard's Uebersetzung aber, in welcher die Beweise nicht ausgeführt sind, und in welcher ich, wie ich oben bemerkte, nur einen einzigen nennenswerthen erläuternden Zusatz zum Euklid gefunden habe, nämlich das oben mitgetheilte Scholium zu den *communes animi conceptiones,* dem wir in präciserer Fassung auch bei Campano begegnen, macht entschieden

den Eindruck eines Leitfadens, wie ihn gegenwärtig ein Lehrer an einer Akademie oder Universität seinen Zuhörern in die Hand giebt, eines Leitfadens, welcher nur das Wesentlichste enthält, die Einzelnheiten aber übergeht, um den Vortrag nicht zu einer blossen Paraphrase herabsinken zu lassen und zugleich durch gegebene Fingerzeige und Andeutung der hauptsächlichsten Momente zur Selbstthätigkeit anzuregen. Den gleichen Charakter muss natürlich auch der von Adelhard, wahrscheinlich in der Meinung, er habe den vollständigen Euklid vor sich, übersetzte arabische Text getragen haben. Es erscheint daher wohl die Annahme gerechtfertigt, Adelhard habe einen solchen Text vor sich gehabt, wie er an einer der maurischen gelehrten Schulen zu Cordova, Sevilla u. a. den Vorlesungen über Euklid zu Grunde gelegt ward. Jenes Scholium aber (es wäre von Interesse zu wissen, wie dasselbe in der Bearbeitung des Regiomontanus lautet) gleicht einer den Abschnitt über die Axiome erläuternden beim mündlichen Unterrichte gemachten Bemerkung, welche, an den Rand geschrieben, durch Zufall oder mit Absicht in den Text aufgenommen ward. Doch es würde nutzlos sein, weitere Vermuthungen über diesen möglicher Weise auf eine schon bei den Vorträgen an der Akademie von Alexandria benutzte griechische Bearbeitung des Euklid zurückweisenden Zusatz auszusprechen. Vielleicht würde die Uebersetzung der Elemente Euklid's durch Gerhard von Cremona hierüber genaueren Aufschluss verschaffen; Näheres über dieselbe in Erfahrung zu bringen, ist mir jedoch bis jetzt nicht gelungen.

FORTOLFI

RYTHMIMACHIA

VON

R. PEIPER.

°86^{r}, 1]

Prologus in Rithmimachiam.

Quoniam quidem huius artis scientia ab ignorantibus contempnitur ; magis leuitati quam utilitati asscribitur, eo quod instar aleae formari ideantur et camporum distinctio et diuersa tabellularum protractio: gratum on nullis arbitror ostendere, quam procul a leuitate distet et quantum tilitatis conferat eius integra cognitio. Est quidem in hac arte quod upliciter admireris, scilicet et iocunda utilitas et utilis iocunditas, quae on modo tedium non inferant, sed potius adimant, et inutiliter exoccuatum utiliter occupent et rursum inutiliter occupatum utiliter exoccupent, um plerumque talis occupatio, quia utilis et iocunda, curis grauatam lleuiare possit mentem post decisa negotia, et rancori submissam huius ulchri theorematis maiestas erigere possit. Laudabilior quippe est in omni rte eiusmodi exercitatio, quae animum et instruit et oblectat, iuxta lud Flacci: omne tulit punctum qui miscuit utile dulci. Dicant rgo qui eiusmodi scientiam uanitati deputant et irreligiositati, quidam uanitatis habeat uel quid religioni deroget ea inuestigare, quae ratio atura duce propalauit. Siquidem numerum natura dedit, quo et ipse aturae conditor deus in rerum creatione usus est; de quo dicitur quia mnia in mensura et numero et pondere constituisti. Hoc enim, t ait Boetius, principale in animo conditoris exemplar fuit. Hinc nim IIII^{or} elementorum multitudo mutuata est, hinc temporum ices, hinc motus astrorum caelique conuersio. Qui ergo naturalium erum scientiam nugas appellant, ipsarum conditori iniuriam faciunt non ttendentes, quod ipsi magis sunt nugigeruli, qui uel ocio torpent, uel iocis liisue mundi uanitatibus occupantur, quibus magis offenditur deus. Sed uia nichil est ab omni parte beatum, relinquamus eos sibi, qui ea naxime reprehendunt, quae nesciunt, quia ad hoc eos impellit [2] inuidia ua torquentur; inuidia enim Siculi non inuenere tyranni maius tornentum, uocesque Sirenarum surda pertranseamus aure. Hanc autem ostram rusticam operam nobis nostrique similibus permittant; nam nullas erborum pompas hic promittimus, sed simpliciter quod in hac arte potue-

14. Horat. A P 343. 19. Lib. Sapientiae XI 21. 20. Boet. Arithm. I 2 p. 12. 26. Horat. C. II 16, 27. 28. 28. Horat. Ep. I 2, 58. 59.

rimus indagare, parati sumus beniuolentiae gratia beniuolis communicare Sciendum praeterea, quod haec ars ab arithmetico fonte quasi quidam riuulus profluxit ideoque arithmeticae disciplinae expertibus facillimam cele remque ad se uiam praebet, inexpertibus uero tardiorem et non absqu labore concedit ingressum.

Capitula libri I.

I Quae sit operis insequentis inscriptio.

II Quae sit materia. III Quae sit intentio. IIII Quae sit utilitas. V Cui parti philosophiae supponatur. VI Qualiter paranda sit tabula. VI De dispositione numerorum. VIII Qualiter uel unde ipsi numeri procreen tur. IX Que sint tria praecepta, per quae ipse numerus disponitur. X Qualiter ipsi numeri in tabula locentur. XI De tabellulis et earum formi et coloribus. XII De cribro componendo. XIII Qualiter tractus tabellarun fiant. XIIII De regula capiendorum numerorum. XV Quotis campis nu meri a numeris capiantur. XVI Qui sint piramides et unde dicantur ue unde nascantur. XVII Qualiter et per quos numeros ipsae piramides capiantu

Quae sit operis insequentis inscriptio. § I.

Primo igitur dicendum, quod sit huius operis ΕΠΥΓΡΑΦΗ Ν .i. inscripti quia, ut ait Priscianus, nisi nomen scieris, cognitio rerum peri Ex duabus grecis dictionibus composito nomine artem istam Rithmimachia titulo inscribi placuit. Rithmos enim grece, latine numerus; Machia pugn dicitur. Inde rithmimachia .i. numerorum pugna. Hic namque considerar licet numerorum ante et retro, dextrorsum, sinistrorsum et angulariter sit oppositorum seque inuicem regulariter deicientium, ueluti militum in camp palantium, iocundum quoddam spectaculum, postremo alterutrae parti tam subtilem uictoriae stationem, ut ip- [f. 86 u] sam in laudem uictoria non componendum, sed quasi iam compositum per musicas consonantia repraesentare uideas cantum. De qua, quia suo loco latiorem postula rationem, hic dicere supersedemus.

Quae sit materia. § II.

Tria autem in hac arte consideranda sunt, scilicet materia, intentic utilitas. Materia huiusce artis numerus est, qui neque passim in incertur

19. *Die Stelle des Priscianus vermag ich nicht nachzuweisen. Ich finde nu Inst. II 22 (Gramm. lat. ed. Keil II p. 57, 3):* Nomen quasi notamen, quod ho notamus unius cuiusque substantiae qualitatem.

---

3. in expertibus R. expers *und* inexpers *sind im Sinne von* expertus *und* in expertus *angewendet; der Verfasser hat Boetius Consol. II 4 (p. 33, 49) vor Augen* inest enim singulis, quod inexpertus ignoret, expertus exhorreat. 9. Cui] Qui R

liffunditur, neque naturali tantum ordine contexitur, sed sicut ex materia ignorum siue lapidum parietes, laquearia, trabes, tecta ceteraque huiusmodi iecessaria diuersitate disposita unam constituunt domum, ita hic ex materia iumerorum species multiplicis, superparticularis, superpartientis rationabili iarietate distinctae unam perficiunt artem.

Que sit intencio. § III.

Intentio huius artis componendae ut reor haec fuit, ut quia omnes atitudinem arithmetici campi percurrere non possunt, huius se artis breui-ate exerceant et exercendo oblectent et, quod ibi longa lectionis serie ıssecuti sunt, hic quasi compendiose depingendo recolligant, ita rationabiliter psa arte disposita, ut et instruat et tamen tedium non inferat.

Quae sit utilitas. § IIII.

Utilitas huiuscae scientiae non parua, quia honesta et necessaria. Nam confert scientiam multiplicandi et habitudines ipsorum numerorum cogno-scendi. Progressiones quoque piramidum et differentias trium medietatum multaque alia spectabilia hic exarare poterit quilibet cautus et curiosus in-spector, ut ea quasi oculis breuiter depingat, de quibus Boetius in arithmetica latissime disputat.

Cui parti phylosophie subponatur. § V.

Supponitur autem haec ars physicae .i. naturali scientiae. Substan-tia enim numeri naturalis est et ab ipso mundi exordio naturaliter existens, omnisque eius uarietas naturali ratione distinguitur. Si quidem arithmeticae disciplinae scien- [2] tia, ex cuius fonte haec, quam prae manibus habemus, diriuata est, cunctis artibus, ut ait Boetius, prior est, non modo quod hanc ille huius mundanae molis conditor deus primum suae ha-buit ratiocinationis exemplar et ad hanc cuncta constituit, que-cumque fabricante ratione per numeros assignati ordinis inue-nere concordiam; sed hoc quoque prior arithmetica declaratur, quod, quaecumque natura priora sunt, his sublatis simul poste-riora tolluntur; si uero posteriora pereant, nichil de statu prio-ris substantiae permutatur. Quem admodum si arithmeticam aufe-ras, ceterae quoque artes, ut sunt Geometria, Musica, Astronomia, quae numerorum ratione constant, auferentur; his autem sublatis non simul numerorum auferetur substantia. Si enim numeros tollas, iam non

24. Boet. de arithm. I 1 p. 10 F.

25. primam *Boetius.* 30. quod si *Boetius.*

erit triangulum uel quadratum uel quicquid in geometria uersatur, quae omnia numerorum denominatiua sunt. At si quadratum triangulumque sustuleris omnisque Geometria consumpta sit, tres et quatuor aliorumque numerorum non peribunt uocabula. Similiter in musica diatessaron, diapente, diapason, quae a numeris denominantur, sublatis numerorum tamen substantia permanebit. Idem et de reliquis artibus quae numeris constant sentiendum.

Qualiter paranda sit tabula. § VI.

Ad opus igitur huiuscae scientiae construenda est tabula quadrata, eminentem in circuitu habens umbonem ita exaratum, ut pendens ex altera parte tenuior tabula equabiliter ei imponi possit in modum arculae intrinsecus adeo capabilis, ut tabellulas numeris inscriptas includere possit. Haec in longitudine et latitudine distinctos habeat campos: in longitudine quidem deorsum campos XVI, in latitudine VIII$^{\text{o}}$. Quorum unum per alterum multiplicans inuenies per totum campos C XX VIII$^{\text{o}}$. Octies enim XVI$^{\text{cim}}$, uel sedecies VIII$^{\text{o}}$, C XX$^{\text{ti}}$ VIII$^{\text{o}}$ sunt. Ipsam uero tabulam per medium in lati- [f^{0} 87^{r}] tudine una linearis intersecet paginula, altrinsecus se octonos aequali dimensione distantes habens campos in longitudine et latitudine. Hanc autem paginulam diremptoriam uocitare placuit, uel quod campos ita dirimat, ut utrique parti aequale spacium attribuat, uel quod circa eam numerus numerum oppositus oppositum capiendo dirimat.

De dispositione numerorum. § VII.

Composita eo modo quo diximus tabula, disponantur super eam alterutra parte in ultimis locis omnes species Multiplicis, Superparticularis, Superpartientis usque ad decuplam proportionem, ita ut in una parte ex pari habeant denominationes, in altera uero parte ex impari. Ex pari quidem generis multiplicis sint species: Dupli, Quadrupli, Sescupli, Octupli; ex impari uero eiusdem generis: Tripli, Quincupli, Septupli, Nonupli. Item ex pari generis superparticularis species sint: Sesqualteri, Sesquiquarti, Sesquisexti, Sesquioctaui, et ex impari e contra eiusdem generis: Sesquitertii, Sesquiquinti, Sesquiseptimi, Sesquinoni. Item ex parte parium generis superpartientis species ponantur .i. Superbipartientes, Superquadripartientes, Supersexipartientes, Superoctipartientes, et e contra ex parte imparium: Supertripartientes, Superquinquepartientes, Superseptipartientes, Supernonipartientes.

---

27. multiplices R.

Qualiter uel unde ipsi numeri procreentur. § VIII.

Quodam loco in arithmetica Boetius, ubi de aequalitate et inaequa-tute disputans dicit omnem inaequalitatem ex aequalitate nasci, similitu-nem ponit bonitatis et maliciae ad aequalitatem et inaequalitatem, dicens agnum fructum esse, si quis non nesciat, quod bonitas diffinita st et sub scientiam cadens animoque semper imitabilis et per-eptibilis prima natura est et suae substantiae decore perpetua. afinitum uero maliciae dedecus est, nullis propriis principiis ixum, sed natura semper errans a boni diffinitione principii amquam aliquo [2] signo optimae figurae impressa componitur t ex illo erroris fluctu retinetur. Nam nimiam cupiditatem raeque immodicam effrenationem quasi quidam rector animus ura intelligentia roboratus astringit, et has quodammodo in-equalitatis formas temperata bonitate constituit. Ad hanc ergo imilitudinem omnis inaequalitas quasi instabilis et fluctuans ab aequalitate omponitur, et ipsa quodammodo aequalitas matris et radicis op-inens uim omnis inaequalitatis species ordinesque profundit. Si enim tres terminos aequales posueris et in his tria praecepta Boetii, que paulo post demonstrabimus, obseruaueris, uidebis, quomodo tibi ex eis multi-plices, ex multiplicibus superparticulares, ex superparticularibus superpartien-es procreentur. Et prima quidem species multiplicis .i. dupla generabit ibi primam speciem superparticularis .i. sesqualteram, et haec primam spe-iem superpartientis .i. superbipartientem. Secunda uero species multiplicis i. tripla secundam speciem superparticularis .i. sesquiterciam; haec quoque secundam speciem superpartientis .i. supertripartientem, eodemque modo caeteras per ordinem uidebis alteram ab altera procreari. Dupli namque recto ordine positi generabunt triplos; Tripli quadruplos, Quadrupli quin-cuplos, Quincupli sescuplos, Sescupli septuplos, Septupli octuplos, Octupli nonuplos. Dupli uero conuerso ordine positi procreabunt sesqualteros, Tripli sesquitercios, Quadrupli sesquiquartos, Quincupli sesquiquintos, Sescupli ses-quisextos, Septupli sesquiseptimos, Octupli sesquioctauos, Nonupli sesquinonos. Sesqualteri uero conuersi generabunt superbipartientes, Sesquitercii super-tripartientes, Sesquiquarti superquadripartientes, Sesquiquinti superquinque-partientes, Sesquiseptimi superseptipartientes, Sesquioctaui superoctipar-tientes, Sesquinoni supernonipartientes.

2. Boet. de arithm. I 32, p. 66 F.

6. est *om. Friedlein.*

Quae sint tria praecepta, per quae ipse numerus disponitur. § VIIII.

Tria igitur praecepta quae memorauimus haec sunt. Tribus terminis aequalibus positis hoc modo ita facies: Pone [f. 87 u] primum primo parem .i. unitatem unitati; secundum primo et secundo .i. duabus unitatibus; tercium primo, duobus secundis et tercio .i. unitati, duabus unitatibus et unitati, continuoque uidebis duplam speciem hoc modo:

I	I	I
I	II	IIII

Rursus dupli recto ordine positi procreabunt triplos hoc modo: Pone primum primo parem, secundum primo et secundo, tercium primo, duobus secundis et tercio, et haec tibi formula apparebit:

I	II	IIII
I	III	VIIII

Eodem modo fac de reliquis speciebus multiplicis, et unaqueque tibi alteram repraesentabit. quarum omnium formulas annotauimus hoc modo:

D	u	pli	Tr	ip	li
I	I	I	I	II	IIII
I	II	IIII	I	III	VIIII
Qua	dru	pli	Quin	cu	pli
I	III	VIIII	I	IIII	XVI
I	IIII	XVI	I	V	XXV
Ses	cu	pli	Sep	tu	pli
I	V	XXV	I	VI	XXXVI
I	VI	XXXVI	I	VII	XLVIIII
Oc	tu	pli	No	nu	pli
I	VII	XLVIIII	I	VIII	LXIIII
I	VIII	LXIIII	I	VIIII	LXXXI

2. Boet. de arithm. I 32, p. 67 sqq.

iperparticulares autem inuenturus hoc modo facies: Pone duplos conuerso dine et fac secundum tria praecepta superius data, statimque uidebis priam speciem superparticularis .i. sesqualteram hoc modo: em de triplis conuersis fac eodem modo et inuenies ecundam speciem .i. sesquiterciam. Rursum quadruplis dem modo conuersis nascentur sesquiquarti ita:

IIII	II	I
IIII	VI	VIIII
VIIII	III	I
VIIII	XII	XVI

XVI	IIII	I
XVI	XX	XXV

Eodem etiam modo per sequentes multiplicis species omnes alias superparticularis species equiuoce denominatas habebis. Horum quoque omnium descriptionem subiecimus. [87^{u}, 2]

Ses	qual	teri	Ses	qui	tercii
IIII	II	I	VIIII	III	I
IIII	VI	VIIII	VIIII	XII	XVI
Ses	qui	quarti	Ses	qui	quinti
XVI	IIII	I	XXV	V	I
XVI	XX	XXV	XXV	XXX	XXXVI
Ses	qui	sexti	Sesqui	sep	timi
XXXVI	VI	I	XLVIIII	VII	I
XXXVI	XLII	XLVIIII	XLVIIII	LVI	LXIIII
Sesqui	octa	vi	Sesqui	no	ni
LXIIII	VIII	I	LXXXI	VIIII	I
LXIIII	LXXII	LXXXI	LXXXI	XC	C

Superpartientes uero inuenies, si eodem modo quo supra superparticulares conuerso ordine secundum tria praecepta posueris. Nam prima pecies superparticularis .i. sesqualtera generabit primam speciem superpartientis .i. superbipartientem, secunda species superparticularis .i. sesquitercia ecundum speciem superpartientis .i. supertripartientem, similiterque per eliquas ordinatim species superparticularis conuerso ordine positas omnes uperpartientis species nasci uidebis, ut subiecta descriptio docet:

14. posuerunt R.

Super	bipar	tiens	Super	tri	partiens
VIIII	VI	IIII	XVI	XII	VIIII
VIIII	XV	XXV	XVI	XXVIII	XLVIIII
Super	quadri	partiens	Super	quinque	partiens
XXV	XX	XVI	XXXVI	XXX	XXV
XXV	XLV	LXXXI	XXXVI	LXVI	CXXI
Super	sexi	partiens	Super	septi	partiens
XLVIIII	XLII	XXXVI	LXIIII	LVI	XLVIIII
XLVIIII	XCI	CLXVIIII	LXIIII	CXX	CCXXV
Super	octi	partiens	Super	noni	partiens
LXXXI	LXXII	LXIIII	C	XC	LXXXI
LXXXI	CLIII	CCLXXXVIIII	C	CXC	CCCLXI

Qualiter ipsi numeri in tabula locentur. § X.

Horum autem numerorum in tabula ultimis in locis alterutra part locandorum haec est demonstratio. Nota in primis diligenter omnes specie multiplicis, et in his excipe omnes pares .i. duplos, quadruplos, [f. 88r] sescuplos, octuplos, et ab his quae per primum praeceptum posita sunt, reiecti quae per secundum et tercium posita sunt, tantum assume primamque speciem .i. duplam in una parte tabulae pone, ita ut binarius sit in quart campo longitudinis et tercio latitudinis, quaternarius uero retro eum i sequenti campo, eodemque modo ceteros pares iuxta illos per ordinem uersu sinistram tuam locabis. Tum uersa tabula in altera parte pari loco e ordine paribus impares e regione oppones .i. Duplis triplos, Quadruplis quincuplos, Sescuplis septuplos, Octuplis nonuplos. Alias autem species e genere superparticulari primi tantum praecepti numero reiecto ita alterutr parte dispones, ut Sesqualteri iuncti sint duplis, Sequitercii triplis, Sesquiquarti quadruplis, Sesquiquinti quincuplis, Sesquisexti sescuplis, Sesquiseptim septuplis, Sesquioctaui octuplis, Sesquinoni nonuplis. Item ex genere superpartienti Superbipartientes iuncti sint sesqualteris, Supertripartientes sesquiterciis, Superquadripartientes sesquiquartis, Superquinquepartientes sesquiquintis, Supersexipartientes sesquisextis, Superseptipartientes sesquiseptimi Superoctipartientes sesquioctauis, Supernonipartientes sesquinonis.

i
19. se/q sextis R.

De tabellulis et earum formis et coloribus. § XI.

Inuentis et dispositis hoc modo numeris parandae sunt siue ex ligno siue, si accuratius uolueris, ex osse tabellulae admodum spissae, quaedam rotundae, quaedam quadratae in modum tesserae. Sed rotundae XVI^{cim} tantum numero, in quibus duae solummodo, quae piramides ostendant, parumper eminentes in modum turbonis erunt. Caeterae uero quadratae numero XXXII, ex quibus XVI^{cim} aequaliter maiores, XVI^{cim} aequaliter minores erunt. Hae omnes tabellulae tricolores erunt, albe, nigrae, rubeae; quae inscribende erunt omnibus supradictorum generum speciebus et super campos eisdem numeris inscriptos ponende. Octo minores albi habeant omnes species multiplicis pares .i. Duplos, Quadruplos, [2] Sescuplos, Octuplos. Quibus e regione in altera parte opponantur VIII^{o} minores nigrae, habentes impares eiusdem generis .i. Triplos, Quincuplos, Septuplos, Nonuplos. At VIII^{o} maiores rubeae inscriptas habeant species superparticularis pares .i. Sesqualteros, Sesquiquartos, Sesquisextos, Sesquioctauos. Quibus opponantur in altera parte VIII^{o} maiores albae habentes impares .i. Sequitercios, Sesquiquintos, Sesquiseptimos, Sesquinonos. Octo uero rotundae nigrae habeant species superpartientis ex paribus .i. Superbipartientes, Superquadripartientes, Supersexipartientes, Superoctipartientes. Hisque opponantur VIII rubeae rotundae eiusdem generis .i. Supertripartientes, Superquinquepartientes, Superseptipartientes, Supernonipartientes.

De cribro componendo. § XII.

Ad inueniendas autem numerorum multiplicationes alternas huic arti necessarias perutile est nosse paginam illam, quam cribrum nominant; quam hoc modo compones. In tabula huius quam descripsimus tabulae appendice fac figuram IIII^{or} lineis quadratam. Deinde infra ipsam figuram duc VIIII^{em} lineas in longitudine et latitudine, et habebis per totam figuram .C. intersticia, in quibus calculos hoc modo locabis. Pone naturalem numeri ordinem usque ad X in prima linea longitudinis et eundem in prima linea latitudinis, multiplicabisque per ordinem unius uersus ordinem alterius, ut puta per binarium unius alterius binarium ternarium quaternarium et deinceps usque ad X, et ex his habebis in secundo uersu omnes duplos. Idem per sequentem ternarium, et habebis in III^{o} uersu triplos, per quaternarium in quarto quadruplos, per quinarium in V^{o} quincuplos, per senarium in VI^{o} sescuplos, per septenarium in VII^o septuplos, per octonarium in VIII^o octuplos, per nouenarium in VIIII^o nonuplos, per denarium in X^o decuplos. In hac quoque descriptione superparticularis species tali modo inuenies. Nota secundum

XLVIIII	XXVIII	XVI												VIIII	XV	XXV
CXXI	LXVI	XII												V	LXV	LXXXI
	XXXVI	VIIII	III										II	IIII	XXXV	
	XXX	XXV	V										IIII	XVII	XX	
	LVI	XLVIIII	VII					D I R E M P T O R I A					VI	XXXVI	XLII	
	LXIIII	LXXXI	VIIII										VIII	LX	XLVIIII	
CCXXV	CXX	XC												LXXII	XCI	CLXVIII
CCCLXI	CXC	C												LXXXI	CLIII	CCLXXXVIIII

angulum, cuius inicium est quaternarius, et ad ipsum quaternarium compara senarium [f. 89 v] qui est in III^o uersu, et habebis sesqualteram proportionem, totusque ille uersus tercius secundi sesqualter est, quartus uero tercii sesquitercius, quintus quarti sesquiquartus, eodemque modo reliquas superparticularis species inuenies. In hac etiam inuenies numeros tetragonos et longilateros et alia quaedam inspicies, ut Boetius dicit, ad subtilitatem tenuissima et ad scientiam utilissima et ad exercita-

9. Boet. I 26, p. 53 F.

tionem iocundissima. Figuram autem tabulae, quam supra descripsimus, et colorum in tabellulis ponendorum differentias oculis subiecimus, cribrumque apposuimus, ut, quod discernit uisu, facilius quilibet lector capiat intellectu.

X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C
VIIII	XVIII	XXVII	XXXVI	XLV	LIIII	LXIII	LXXII	LXXXI	XC
VIII	XVI	XXIIII	XXXII	XL	XLVIII	LVI	LXIIII	LXXII	LXXX
VII	XIIII	XXI	XXVIII	XXXV	XLII	XLVIIII	LVI	LXIII	LXX
VI	XII	XVIII	XXIIII	XXX	XXXVI	XLII	XLVIII	LIIII	LX
V	X	XV	XX	XXV	XXX	XXXV	XL	XLV	L
IIII	VIII	XII	XVI	XX	XXIIII	XXVIII	XXXII	XXXVI	XL
III	VI	VIIII	XII	XV	XVIII	XXI	XXIIII	XXVII	XXX
II	IIII	VI	VIII	X	XII	XIIII	XVI	XVIII	XX
I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X

[2] **Qualiter tractus tabellularum fiant. § XIII.**

Duobus igitur huic tabulae assidentibus legitimi ex alterutra parte alternatim fiant tractus, ita ut multiplices trahantur in secundum campum, in ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter; superparticulares eodem modo in tercium, superpartientes in quartum.

6. Oddo p. 285, 2 v. 7 *von unten.*

De regula capiendorum numerorum. § XIIII.

Duobus ut diximus ad tabulam sedentibus duplici intentione uigilandum est, uidelicet ut uterque et suae parti cautam et bene consideratam adhibeat custodiam et contrariae parti callide insidietur ut capiat. Quicumque ergo numerus contrariae partis numerum suo legitimo tractu offenderit, auferat eum, ut uerbi gratia si nouenarius rubeus, qui in tercium currit campum, nouenarium nigrum, qui in secundum currit campum, in tercio a se campo offenderit ante uel retro siue dextrorsum siue sinistrorsum uel angulariter, aufert eum; et e conuerso niger rubeum, si in secundo a se campo offenderit eum. Et in hac captura tali regula uteris: Numerus numerum par parem in suo legitimo cursu inueniens aufert eum. Obseruandum tamen in hac regula par parem non dici secundum substantiam numeri, sed secundum quantitatem eandem et idem uocabulum, vt VIIII VIIII XVI XVI XLVIII^{a} XLVIII^{a} LXIIII^{a} LXIIII^{a}. Si numerus altrinsecus circumponatur contrariae partis numeris, qui multiplicati aut iuncti medium afficiant, auferatur. Quia diuersum est quod diximus multiplicati aut iuncti, de duobus diuersis duas diuersas dabimus regulas. De multiplicandis hanc dices regulam: Numeri altrinsecus positi multiplicati medium efficientes auferunt eum. De iungendis hoc modo: Numeri altrinsecus positi iuncti medium efficientes auferunt eum. Exemplum utriusque [f. 89^{r}] regulae: Si ex parte parium II et VI XII de parte imparium altrinsecus interceperint, dices: bis sex XII, et auferes XII. Eodem modo si ex parte imparium III et V de parte parium XV altrinsecus offenderint, dices: ter V XV^{cim}, et auferes XV^{cim}. Item si ex parte parium VIII et IIII^{or} XII altrinsecus offenderint, auferunt eum; VIII enim et IIII^{or} iuncti XII faciunt. Simili modo ex parte imparium V et III, si VIII altrinsecus interceperint, auferunt eum; V enim et III VIII^{o} faciunt. Sic et de aliis sicubi inueneris facies. Quicumque autem numerus contrariae partis numerum sic offenderit, ut quantitas interiacentium camporum in se multiplicata contrarii numeri reddat summam, auferatur. Cuius praecepti haec est regula: Numerus numerum oppositus oppositum interiacentes campos multiplicando efficiens aufert eum. Exempli causa: Si binarius in VI^{o} campo a XII distat per oppositum dices: bis VI XII. Si autem in VIII^{o} a XVI dices: bis VIII XVI. Hoc modo facies in

5. Oddo p. 285, 2 v. 2 *von unten.* 11. Numerus] *Hier beginnt der Schreiber mit schwärzerer Tinte und diese bleibt bis f^{o} 89^{u} Col. 2 Z. 1.*

omnibus numeris, qui per hanc regulam capiuntur, illud solummodo non segniter obseruans, ut omnis oppositio fiat in ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter.

Quotis campis numeri a numeris capiantur. § XV.

Quoniam quidem hoc opusculum non doctis, quibus uno exemplo dixisse sufficit, sed indoctis et simplicibus cudimus, ad captandam eorum erga nos beniuolentiam aliquantulum latius de hoc modo capiendi dicere suscepimus, ut demonstremus, qui numeri et a quibus et quoto campo singuli a singulis capiantur. Ac primo a parte parium qualiter impares capiantur. XII auferuntur per binarium in VI^{o} ab eo campo, per quaternarium in III^{o}, per senarium in secundo. Sexies enim duo uel bis sex uel ter IIII^{or} XII faciunt. XVI^{cim} capiuntur per binarium in VIII^{o} campo, per quaternarium in IIII^{o}, per octonarium in secundo. Bis enim VIII^{o} uel octies II^{o} uel quater IIII^{or} XVI^{cim} sunt. XXVIII$^{ti\,o}$ auferuntur per binarium in XIIII$^{o\,o}$ campo et per quaternarium in VII^{o}. Nam bis XIIII uel quater VII XXVIII$^{ti\,o}$ faciunt. LXVI^{a} capiuntur a senario in XI^{o} campo, quia [2] sexies XI^{cim} LXVI^{a} complent. XXXVI^{a} per senarium tolluntur in VI^{o} campo, XXX^{a} per eundem in V^{o} campo. Nam sexies VI XXXVI^{a} et quinquies VI XXX^{a} conficiunt. L VI per octonarium cadunt in VII^{o} campo, LXIIII^{a} per eundem in VIII^{o} campo, quia octies VII LVI et octies VIII^{o} LXIIII^{a} componunt. XC per VIIII auferuntur in X^{o} campo. Nouies enim X^{cem} XC comportant. C per XX in V^{o} campo rapiuntur; nam quinquies XX C conficiunt. Haec de parte parium. A parte uero imparium pares hoc modo capiuntur. Sex per ternarium in II^{o} campo submouentur, VIIII per eundem in III^{o}. Bis enim tres sunt VI et ter tria VIIII. XXV auferuntur per quinarium in V^{o} campo, XX per eundem in IIII^{o}. Quinquies enim V XXV et quater V sunt XX. XXXVI^{a} per ternarium in XII^{o} campo cedunt loco, XLII^{o} per septenarium in VI^{o} campo et XLVIIII per eundem in VII^{o} campo submouentur. LXXII$^{a\,o}$ per nouenarium in VIII^{o} campo cadunt et LXXXI^{a} per eundem in VIIII. Nouies enim VIII^{o} LXXII$^{a\,o}$ et nouies VIIII LXXXI^{a} sunt. XV capiuntur per quinarium in III^{o} campo uel per ternarium in V^{o}. Nam ter V uel quinquies ter XV sunt. XLV^{a} auferuntur per quinarium in VIIII^{o} campo uel per nouenarium in V^{o} uel per ternarium in XV^{o} campo. Quinquies enim VIIII uel nouies V uel ter XV LXV^{a} sunt. Tali praedae subiaceant omnes pariter pares uel pariter impares, impariter pares, secundi et compositi. Soli primi et incompositi uagentur tuti, nisi ita sunt aduersariis septi, ut per legitimos tractus euadere non possint. Hanc foueam arithmeticam incidentes auferantur. Qui autem sint uel quare dicantur pariter pares uel pariter impares uel impariter pares siue primi et incompositi, secundi et compositi, si quis nosse desiderat, quia nimis longum esset hic persequi, mittimus eum ad arithmeticam Boetii, qui de his copiosissime disputat.

Que sint piramides et unde dicantur uel unde nascantur. § XVI.

Iam nunc rationem piramidum ostendere intendimus, quam idcirco singulari distinximus capitulo, quia in huius artis scientia singulari habundat materia. Dicendum itaque in primis, quid sit pira- [f. 89^{u}] mis. Quae ex diffinitione secundum Boetium sic colligitur. Piramis est alias a triangula basi in altitudinem sese erigens, alias a tetragona, alias a pentagona, et secundum sequentium multitudines angulorum ad unum cacuminis uerticem subleuata. Dicitur autem piramis a greco PIR quod latine ignem sonat, eo quod in modum exurgentis flammae inferius dilatata superius in acumen porrigatur. Omnis enim piramis a latitudine basis proficiens per laterales lineas in unum uerticem dirigitur, ita tamen ut haec linearis porrectio a basi triangula uel tetragona uel pentagona ceteraque multiangula ducatur. Et haec quidem speculatio circa geometricas uersatur figuras, sed eam quoque numerorum rationi applicandam docet auctoritas. Nam sicut in geometricis figuris de puncto, quod est principium lineae et interualli .i. longitudinis, linea producitur, quae est principium superficiei .i. duplicis interualli, longitudinis scilicet et latitudinis, ipsamque superficiem efficit; ex superficie uero, quae est inicium solidi corporis triplex interuallum continentis, .i. longitudinem, latitudinem, altitudinem, ipsa soliditas procreatur: ita et in numeris. Siquidem unitas puncti optinens uicem et numeri in longitudinem distenti principium existens linearem numerum longitudinis capacem et latitudinis caput creat, qui a binario inchoans unitatis semper adiectione in unum eundemque quantitatis ductum explicatur; linearis uero numerus superficiem longitudinis la-

3. Oddo p. 286, 1 v. 9—15. 10. Boet. de arithm. I 9. 10. 11. 14. 15. 16. Boet. de arithm. II 21, p. 105 F.

12. Qui sint R.

titudinisque capacem et altitudinis principium generat, qui a tribus inchoans addita descriptionis latitudine in sequentium se naturalium numerorum multiangulos dilatatur, ut primus sit triangulus, secundus quadratus, tercius pentagonus numerus et deinceps secundum naturalem numerum a greco denominatis angulis procedens, superficies autem duo interualla .i. longitudinem et latitudinem continens soliditatem trina interualli dimensione hoc [2] est longitudine, latitudine et altitudine distantem procreat, cuius soliditatis principium est is numerus, qui uocatur piramis, alias a triangula basi, alias a tetragona, alias a pentagona et secundum sequentium multitudines angulorum exurgens, quemadmodum superficiei primus est triangulus, secundus tetragonus, tercius pentagonus numerus. In quorum consideratione quia non huius loci est diutius immorari, cum in Boetii commento de his habundanter possit quilibet instrui, de his piramidibus que uocantur perfecta et curta, quia ad praesens opus spectat, aliquid dicere causa postulat. Et primi quidem diffinitio talis est: Perfecta piramis est, quae a qualibet basi profecta usque ad primam ui et potestate piramidem peruenit unitatem. Sequentis diffinitio: Curta piramis est, quae a qualibet basi profecta usque ad unitatem altitudine sua non peruenit. Quod si ad primum opere et actu multiangulum eius generis, cuius fuerit basis, non peruenerit, biscurta uocabitur; si uero nec ad secundum opere et actu multiangulum peruenerit, uocabitur tercurta; ac deinceps quot multianguli defuerunt, tociens curta pronunciabitur. Ex his duae solummodo in hac arte constitutae sunt, perfecta scilicet ex parte parium et tercurta ex parte imparium. Perfecta piramis summam numeri habet XCI, tercurta CXC. Et hae utreque a tetragono eadem tetragonorum super se compositione nascuntur. Denique pone tetragonos per ordinem usque ad XXXVI hoc modo .i. IIII VIIII XVI XXV XXXVI, et considera quomodo inferius crescendo dilatantur, superius decrescendo usque ad unitatem acuuntur. Ultimus uero in his numerus, qui et maximus, basis appellatur, quod super eum ceteri quasi super basim construendo collocati sursum porrigantur. Hos ergo numeros unum alteri superaddendo collige, et uidebis inde perfectam piramidem XCI procedere. Sed de his tetragonis tribus, id est I IIII VIIII, praecisis, habebis [f. 90r] tercurtam piramidem, cuius basis est LXIIII, hoc modo: XVI XXV XXXVI XLVIIII LXIIII. Hi etiam in unam summam redacti tercurtam piramidem CXC producunt. At si forsitan ignoras, qui sint tetragoni, eosque inuenire desideras, primum noueris, quod omnes tetragoni latera sua secundum ordinem naturalis nu-

12. Boet. II 21, sqq. p. 104 sqq. 15. Boet. II 25, p. 110.

---

7. longitudine] *Hinter* lon *wieder gelbere Tinte.* 19. si *m. pr. s. l. add.* 25. XCI *ist aus* XLI *verbessert* R. 32. procededere, *das zweite* de *unterstrichen* R.

meri habent descripta, utpote primus ui et potestate tetragonus est unitas, qui unum solum gerit in latere; secundus II, tercius III, quartus IIII, quintus V, et ad eandem sequentiam cuncti procedunt, sicuti uidere potes in his formulis quas exempli gratia posuimus:

I	II	III	IIII	V	VI
I	IIII	VIIII	XVI	XXV	XXXVI
I	IIII	V	VI	VII	VIII
I	XVI	XXV	XXXVI	XLVIIII	LXIIII

Si ergo cuiusque tetragoni latera in se ipsa multiplicaueris, eundem tetragonum cuius sunt latera habebis hoc modo: Semel unus unus, bis II IIII, ter tria VIIII, quater IIII XVI, et ita in infinitum progredi potes.

Qualiter et per quos numeros ipse piramides capiantur. § XVII.

Superius digestis capiendorum numerorum modis de piramidibus tantum intermiseramus propter ostendendam prius de earum qualitate necessariam rationem. Iam uero nunc expediendum, qualiter et ipse insidiantibus sibi aduersariis loci sui dignitate deponantur. Nam maior eis cautela utrobique seruatur et custodia, quia et maiori auiditate utrimque appetuntur. Et non sine causa; ubi enim maius lucrum, ibi et maior cupido. In casu namque piramidis maius sequitur dampnum, quia unius casus multorum est ruina. Cadente enim piramide cadunt simul omnes numeri illi, quorum compositione piramis efficitur. Capitur autem utraque hoc modo: Si perfectam piramidem .i. XCI sua basis .i. XXXVI legitimo tractu ab opposito offenderit, aufert eum. Ubi regulam superius scriptam dices: Numerus numerum. Quare autem hoc fiat, aduertere debes. Utraque piramis per summam suae basis capitur, quia omnis ille numerus, quo conficitur piramis, [2] ita ordinatim locatur, ut ab ultima maiorique summa quasi a basi sustentetur, ideoque necesse est, ut cadente piramide, que continet ceteros, cadant etiam hij, qui ab ea continentur, et hoc est tota piramis. Hoc tamen obseruare debes, quod si sola basis ab opposito sibi numero capitur, non ideo piramis cadit; sed tunc tantummodo, cum his numerus, per quem basis capitur, opponitur ei a contraria parte. Per nouenarium quoque in $\overset{\mathrm{o}}{\mathrm{IIII}}$ campo et per ternarium in $\overset{\mathrm{o}}{\mathrm{XII}}$ campo eadem piramis dei-

26. his *bedeutet* is!

itur. Quater enim VIIII et ter XII sunt XXXVI. At tercurta piramis i. CXC praedicto modo capitur .i. si eam sua basis LXIIII a contraria parte legitimo tractu offenderit. Deponitur etiam per octonarium in VIII^{o} campo uel per XVI in IIII^{o} campo. Octies enim VIII^{o} uel quater XVI LXIIII sunt. Hanc autem cautelam semper memoriae admittere debes in custodienda piramide tua, ut semper loca illa, in quibus ab aduersariis superari potest, tuis quandiu potes protuicione pracoccupes, uel talem ei locum in IIII^{o} campo siue ante siue retro siue dextrorsum siue sinistrorsum siue angulariter praepares, ut si in tali articulo fuerit, ut non nisi fuga se liberare possit, tute et sine timore consistat. Caeteri quoque cum capiendi sunt, fugae se praesidio liberare habebunt. At si locus fugiendi defuerit, in muscipulam cadere habebunt.

Prologus secundi libri.

De uictoria Rithmimachiae.

Non nullos offendere uidentur hi, qui alieno operi iam publicato et quasi in auctoritatem recepto audent aliquid adicere, quod etiam suo elaborauerint studio, quasi hoc nulla ueritatis assertione stipuletur, quod iuuante ratione probare possunt. Nempe bonus artifex uel pictor seu cuiuslibet artis doctus inspector quod ratio offert uel ornatus operis exigit, non ideo neglegit, quia hoc a magistro non didicit, sed potius gaudens amplectitur, quod se ratione magistra inuenisse miratur. Nam hoc non est artem destruere, sed prouehere et gratiorem reddere et ad maioris exercitium speculationis animum [f. 90^{u}] inducere. Denique Pithagoras musicam ex IIII^{or} malleolis commentatus est, de qua postea alii latissime disputantes plures impleuerunt libros, multique alii diuersa phylosophorum commenta subtiliter uestigata et inuenta suis etiam subtilioribus uel auxerunt uel dilucidauerunt scriptis. Igitur non ero ut reor culpandus, si aliqua de ratione rithmicae uictoriae in hoc nostro, quod fraterna karitas extorsit, opusculo non ante perspecta posuero, cum hec non ex meo ingenio, sed ex maiorum potius magna ex parte collegerim scripto. Quod quidem non iactanciae uitio, sed communis utilitatis et huiusmodi artis exornandae gratia facio et ut studiosis eo gratior in ea fiat exercitacio, quo fuerit iocundior occupatio. Denique positis terminis tribus aut IIII^{or} pulcherrime uictoriae practica perficitur, quando et arithmeticis et geometricis armonicisque proprietatibus perspectis theoricae rationis subtilitate nobilitatur.

---

4. $\mathrm{IIII}^{\tilde{\imath}}$ *ist in* quat̃ *verbessert* R. 17. elaborauerit R. 25. phylosorum R.

Capitula secundi libri.

De duobus modis uictoriae. § I.

Descripto numeralis palestrae praeludio expedienda iam est spectabilis huiusce concursus uictoria, que est operosae maxima pars materiae. Sed ad huius speculationem uictoriae duos constituimus modos, ad quos perfecte cognoscendos perutile est nosse trium medietatum hoc est arithmeticae, geometricae, armonicae proprietates atque differentias. Primus quippe modus est, cum tribus tantum terminis, maximo, medio, minimo, positis per singulas medietates, hoc est uel arithmeticam uel geometricam siue armonicam or uictoria perficitur. Alter uero modus est, cum IIII modis dispositis per tres insimul medietates, arithmeticam, geometricam et armonicam, maximam et perfectam armoniam symphonizans uictoria concelebrat. Et iste quidem modus maxime querendus et tenendus est propter sui perfectionem et integram musicae proportionis cognitionem. Qui si haberi non potuerit, sufficiat superior modus et ipse musicarum haut expers symphoniarum.

De diffinitionibus trium medietatum. § II.

Opere precium est supra dictarum trium medietatum proprietates breuiter hic, quantum ad praesens negocium attinet, subscribere. De quibus si quis amplius et perfectius scire desiderat, Boecii de arithmetica commento sedulus scrutator adhereat. Harum autem proprietatum differentias demonstrant subiectae huiuscemodi diffinitiones. Arithmetica medietas est

34. Boet. de arithm. II 43, p. 140 F.

21. terminis *aus* termisus *verbessert* R. 33. adhereat R.

ibi inter tres uel quotlibet terminos equalis atque eadem differentia, sed non equalis proportio inuenitur. Geometrica medietas st, ubi equa proportio et in terminis et in differentiis inuenitur. Armonica medietas est, quae neque eisdem differentiis nec equis roportionibus constituitur, sed quemadmodum maximus terminus ad paruissimum, sic differentia maximi et medii ad differeniam medii atque paruissimi comparatur.

Quomodo per tria praecepta ipse medietates inueniantur. § III.

Est autem quaedam disciplina, per quam has medietates reperire poeris, si trium praeceptorum regulas, quas daturi sumus, obseruaueris. Ipsis iero tribus praeceptis non uno modo in omnibus medietatibus inueniendis iteris, sed singulae medietates suum quendam singularem modum trium praeceptorum habebunt. Primo igitur tres terminos equales pones, hoc est uel tres binarios uel tres ternarios uel tres quaternarios uel alios quoscumque uolueris. His ita positis si [f. 91r] arithmeticam medietatem inuenire uolueris, haec tria praecepta obseruabis: Pone primum primo equum, secundum primo et secundo, tercium primo, secundo ac tercio, et arithmeticam medietatem habebis hoc modo: [A] Est etiam alia arithmeticam medietatem procreandi uia huiuscemodi: Pone primum equalem primo et secundo, secundum primo et duobus secundis, tercium primo et duobus secundis ac tercio, et erit huiusmodi figura: [B] Geometricam autem medietatem hoc modo inuenies: Pone primum primo equalem, secundum primo et secundo, tercium primo duobus secundis et tercio, et erit hac forma: [C] Armonicam quoque medietatem inueniendi hec uia est: Pone primum primo ac duobus secundis parem, secundum duobus primis et duobus secundis, tercium primo, duobus secundis et tribus terciis, et hanc figuram armonicam habebis: [D] Possunt et per alios numeros he medietates secundum

A

II	II	II
II	IIII	VI
III	III	III
III	VI	VIIII

B

II	II	II
IIII	VI	VIII
III	III	III
VI	VIIII	XII

C

IIII	IIII	IIII
IIII	VIII	XVI
V	V	V
V	X	XX

D

II	II	II
VI	VIII	XII
III	III	III
VIII	XII	XVIII

3. Boet. de arithm. II 44, p. 144 F. 4. Boet. de arithm. II 47, p. 152 F.

33. secundo *aus* secundum *corr.* R.

hec praecepta inueniri, sed hos tantum maluimus ponere, ex quibus illi pro-creantur termini, qui in rithmimachiae tabula uidentur dispositi.

Quomodo etiam alio modo inueniantur. § IIII.

Est etiam alius modus praedictas medietates inueniendi, sed in ho quoque modo his numeris utemur, qui in huius disciplinae instrument reperiuntur. Ponantur duo termini et inter eos unus terminus per regulam quam dabimus collocetur, eo uidelicet modo, ut duobus terminis altrinsecus positis immutabiliter permanentibus medius, qui per regulam dandam ponendus est, ita mutetur, ut nunc arithmeticam, nunc geometricam, nunc armonicam medietatem componat. Sint ergo duo termini tales V XLV. Ho itaque terminos coniun- [2] ge et habebis L, quem diuides eiusque medietatem .i. XXV inter utrasque extremitates locabis, et arithmeticam medietatem habebis. Vel si illum numerum, quo maior minorem superat, diuida eiusque medietatem minori termino adicias et qui inde concrescit mediun ponas, arithmetica medietas formatur. Nam XLV quinarium quadragenari superat. Quem si diuidas, XX fiunt. Hunc si quinario supposueris, XX nascentur, quem medium constituens arithmeticam medietatem efficies hoc modo V XXV XLV. Si autem geometricam medietatem facere uis, praescripto terminos propria numerositate multiplica sic: Quinquies quadraginta V ue quadragies quinquies V sunt CCXXV. Horum tetragonale latus assume . XV. Quindecies enim quindecim faciunt CCXXV. Hos igitur XV medio inter V et XLV si posueris, geometricam medietatem formabis hoc modo V XV XLV, uel si terciam partem maioris termini accipias et illam mediam ponas, idem erit. Ter enim XV XLV sunt. Armonicam uero medietatem tali modo reperies. Prefatos terminos sibi met ipsis copula .i. V et XLV, e fient L. Deinde differentiam eorum .i. XL per minorem .i. V multiplica, e erunt CC; hos per numerum, quem ex duobus iunctis confeceras, diuide . per L, et inuenies latitudinem eorum IIII^{or} esse. Quinquagies enim III^{o} faciunt CC. Hanc ergo latitudinem .i. IIII^{or} appone minori termino .i. V erunt VIIII; hos cum inter V et XLV posueris, armonicam medietatem explebis.

De differentiis et proprietatibus earum. § V.

Vigilanter quoque notandae et memoriae commendandae sunt ipsarum trium medietatum proprietates et differentiae, quarum consideratione poss singulas indubitanter discernere. Est autem proprium arithmeticae medi

---

23. si etiā terciam, etiā *unterstrichen als ungültig,* R. 25. ipsis *aus* ips *corrigirt* R. 26. multip^{l}ca R. *hier und öfters.*

ltis equalem differentiam inter dispositos habere terminos et, quod extre-nitates copulatae efficiunt, duplum esse medii, maioremque proportionem sse minorum terminorum quam maiorum, minoremque numerum esse, qui t ex multiplicatis extremitatibus, eo, qui fit ex multiplicata medietate, tanım quantum eorum differentiae multiplicatae resti- [f. 91$^{\mathrm{u}}$] tuunt. Itaque bicunque inter dispositos terminos tales IIII proprietates inueneris, arithıeticam medietatem procul dubio pronuntiabis. Quod ut magis luceat, xemplificandum est in ea quam supra posuimus dispositione V XXV XLV. 'empe in hac dispositione equales sunt differentiae; eadem enim est inter ' et XXV, que inter XXV et XLV .i. XX. Quinque autem et XLV simul ıncti faciunt L, cuius medietas est XXV, maior que proportio est inter ' et XXV, quam inter XXV et XLV. Nam XXV ad V quincuplus est, LV ad XXV superquadripartiens quintas est, quae minor est quincuplo. i uero extremos alterum per alterum multiplices et dicas: quinquies XLV el quadragies quinquies V fiunt CCXXV, que summa maior est ea que x medio .i. XXV in se multiplicato conficitur, quia uigies quinquies XXV excentos XXV faciunt, que summa priorem superat CCCC, qui fiunt ex ifferentiis in se ductis; differentiae autem terminorum sunt XX. Vigies rgo XX sunt CCCC. Porro geometricae medietatis proprium est differenias eiusdem proportionis esse, cuius sunt termini, et quemadmodum est naior terminus ad medium, sic medium esse ad extremum, et quod ab xtremitatibus inuicem se multiplicantibus conficitur equum esse ei, quod a nedio in se ducto completur, ut in V XV XLV. Inter quinque enim et V denarius est differentia, et inter XV et XLV XXX, qui triplus est lenarii, sicut XLV triplus est XV et XV triplus quinarii. Et quinquies LV uel e conuerso faciunt idem quod XV$^{\mathrm{es}}$ XV .i. CCXXV. Armonicae ıero medietatis talis est proprietas, ut eadem proportione differentiae ad se nuicem comparentur, qua maximus terminus ad paruissimum comparatur, t quibus partibus maioris a maiore medius uincitur, eisdem partibus minoris ninorem superet, maiorque proportio sit in maioribus quam in minoribus; t si extremitates iungantur et per medium multiplicentur, duplum sint d eam summam, que ex inuicem multiplicatis extremitatibus colligitur; t V VIIII XLV: differentia inter XLV et VIIII XXXVI sunt, qui umerus ad differentiam, que est inter VIIII et V, nonuplus est, sicut maxinus terminus [2] .i. XLV ad minimum .i. V nonuplus est et IIII$^{\mathrm{or}}$ partibus naioris .i. XXXVI, que sunt IIII$^{\mathrm{or}}$ nouenarii, quater enim VIIII XXXVI sunt, nedius a maiore uincitur, qui eisdem partibus minoris .i. IIII$^{\mathrm{or}}$ minorem

15. in ea, *aber* in *unterstrichen*, R. 32. extremitatis R.

superat. maiorque proportio est inter XLV et VIIII, que est quincupla, quan inter VIIII et V, que est superquadriparciensquintas. et si XLV et V copu lentur, qui faciunt $\stackrel{a}{\mathrm{L}}$, et per medium .i. nouenarium multiplicentur, sic nouie $\stackrel{a}{\mathrm{L}}$ faciunt $\stackrel{a}{\mathrm{CCCC}}$ $\stackrel{a}{\mathrm{L}}$, duplum uidelicet illius quod extremitates inuicem s multiplicantes comportant .i. CCXXV.

Geometricalis speculatio uictoriae per has medietates dispositae. § VI

Si cui uero placet recipere, non arbitror rationi obsistere, si per ha medietates nouam uictoriae speciem disponimus, in qua dispositione omni harum medietatum proprietates insimul possis oculo mentis inspicere, insupe aliquas geometricales figuras et nonnullas musicas consonantias. Quo enin utilior, tanto delectabilior erit in aliqua dispositione uictoriae occupatio. S ergo ex parte parium talis uictoria componenda est, V de parte impariun per praedam acquirendi sunt, ceteri $\stackrel{or}{\mathrm{IIII}}$ .i. VIIII XV XXV $\stackrel{a}{\mathrm{XLV}}$ in dispo sitione parium inueniuntur, si tamen a contraria parte ablati non fuerint quorum V ut dixi et etiam XXV de parte imparium per praedam adqui runtur. Porro si a parte imparium uictoria statuenda est, XV et XLV per prae dam adquirendi sunt; nam caeteri imparium reperiuntur, si tamen et ipsi a con traria parte ablati non fuerint. Cum igitur omnes hos terminos quacumque part sedens habueris, uictoriam facturus pone primo V, deinde in sequenti camp XV, post hunc $\stackrel{a}{\mathrm{XLV}}$ siue in ante siue retro siue dextrorsum siue sinistrorsum altrinsecus uero XXV et VIIII, ut instar uictoriosae cruci hec figura exeat.

```
        XXV
         |
V|——XV——|XLV
         |
       VIIII
```

Iam nunc adibito mentis oculo si curios intendas, uidebis trigonum ortogonium quadrifidum exurgere cuius basi et catheto equali proportione extante hypotenus consequenter superbipar- [f. 92ʳ] tiens quintas ad basin uel cathetum erit. Duorum igitur superiorum trigonorur hypotenusa arithmeticam medietatem comprehendit, basis uero quadrific trigoni geometricam medietatem subportat, inferiorum uero trigonorum hypo tenusa armonicam medietatem demonstrat, numeros uero, qui sui mutacion tres istas medietates efficiunt, cathetus ipsius quadrifidi trigoni equalite assurgens representat hoc modo: [A]

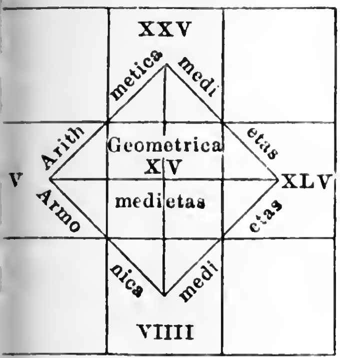
Alia speculatio. §. VII.

Alia quoque in huiusmodi dispositione speculatio suboritur. Dispositi enim terminis eodem modo quo supra, XV pro centro uel puncto estimabi

---

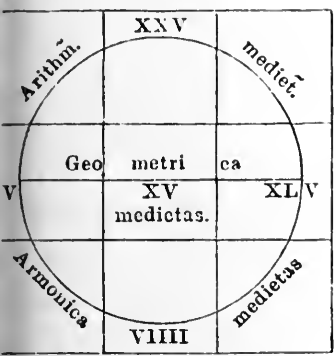
20. $\stackrel{\text{dex}}{\text{retr.}}$ *von gleichzeit. hd corr.* R. 22. adibito *d. i.* adhibito. 23. orto genium, ge *in* go *corrigirt?* R. 34. certro R.

A



In quo quasi circino posito numeros circumpositos circumferentia excipiat, quam si in duas equas partes a sinistra ad dextram per diametrum diuidas, superius hemisperium arithmeticam tibi medietatem consignat, diametrum geometricam, inferius hemisperium armonicam hoc modo: [B]

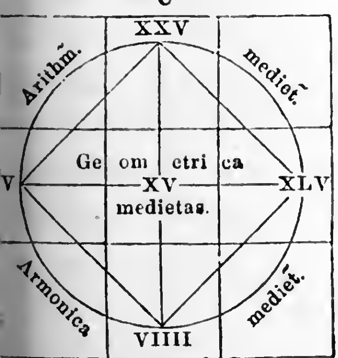
B



Item alia. § VIII.

At si aliud diametrum a XXV per XV ad VIIII recta linea feceris, totum circulum in IIII [or] quadrantes diuides, in quibus singulis triangulum ortogonium estimare potes, ita ut duo triangula medietatem diametri sursum et duo deorsum pro catheto habeant et alterius medietatem diametri duo dextrorsum et duo sinistrorsum pro basi accipiant, ypotenusa uero rectam lineam a fine basis, ubi circumferentiam tangit, usque ad summitatem catheti, ubi etiam circumferentiam tangit, per singulos quadrantes deductam ipsius quadrantis VI [a] parte minorem. Superior ergo pars circumferentiae duos triangulos complectens arithmeticam pandit medietatem, cui altera pars inferior et ipsa duos continens triangulos [2] ab opposito armonica medietate respondet, mediana uero linea ipsorum IIII [or] triangulorum basim denotans geometricam medietatem insinuat; numeros uero, in quibus ipsarum medietatum constat effectus, altera linea mediana, que pro cathetis IIII [or] trigonorum estimatur, assignat hoc modo: [C]

C



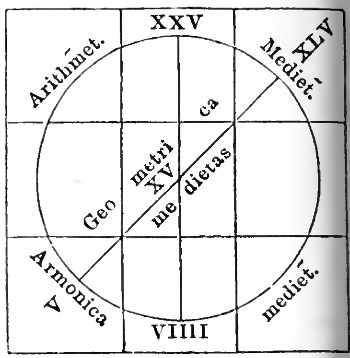
Item alia. § VIIII.

Quod si praefati termini ita fuerint dispositi, ut quasi duae lineae secundum rationem diametri deductae in quamlibet partem ad se inclinatae fuerint, duos sibimet exaduerso oxigonios .i. acutos angulos et duos ampligonios .i. hebetes angulos formabunt; unusque oxigonius et ampligonius arithmeticam capient medietatem, alter uero oxigonius et ampligonius ab opposito armonicam comprehendent medietatem, medio autem inter utrosque loco geometrica apparebit medietas sic: [D]

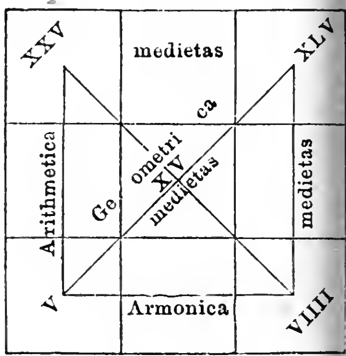
3. ad *aus* in *oder* an *al. m.* R. 30. anglilos R. 31. ampligonios *d. h.* amblygonios.

Si autem ipsos terminos trium medietatum angulariter constituas, uidebis quod quasi duae diagonales lineae medio se intersecant, ita ut duos triangulos altrinsecus ad unam basim constituant, quorum cathetos equales esse necesse erit hoc modo: [E]

D



E



Hec non ante inspecta in rithmimachiae uictoria ponere praesumpsi, non pertinaciter ea astruendo, sed beniuole beniuolis offerendo. Que si placent recipiant, sin autem, mihi soli relinquant. Nam quod ipsa natura offert, ratio non repellit, cum̃ et hoc accedat, quo maxime animus capitur, scilicet quia instruit et oblectat, cui parum aut nichil confert huius disciplinae practica, [f. 92[u]] si nulla in ea exerceatur theorica.

Qualiter uictoria fieri debeat. § Capit. X.

Igitur facturus uictoriam in campis aduersarii eam statuere debes, primumque numerum quem ponis ex nomine aduersario indicabis̃, hoc summopere praecauens, ut ipsum primum quem ponis et adhuc ponendos nullus aduersariorum interrumpere possit. Nam si semel interrupti fuerint, uictoria cassa erit et iterum cautius eam te reparare oportebit. In statuenda uero uictoria hanc obseruabis regulam, ut si tres ponere uis terminos, tum duos, si IIII[or], tum tres de tuis statuas, tercio uel quarto de parte aduersarii per praedam acquisito.

Qui numeri sint armonici. § XI.

In ea parte ubi perfecta piramis est, scilicet XCI, XV et XX armonici sunt, XXX[a] per praedam acquirendus est. Statutis ergo XV XX XXX, si recte consideres, uidebis secundum regulam superius dictam hanc esse armonicam medietatem. Eadem enim proportione differentiae ad se inuicem comparantur, qua maximus terminus ad paruissimum comparatur. Si quidem inter XXX[a] et XX differentia est X, inter XX autem et XV V. Eadem ergo proportio est inter X et V, quae inter XXX[a] et XV .i. dupla. Consonantias uero musicas in his terminis perspicies, si eorum proportiones consideres. Nam XXX[a] ad XX hemiolia .i. sesqualtera proportione iungitur

---

19. p̄onendos R.

uae est in musica diapente consonantia. Habet enim minorem totum et ius alteram partem. Ad XV uero dupla, que est diapason. Porro XX d XV sesquitercia proportio est, quae est diatesseron. Habet enim mino-em totum et eius terciam partem. Item IIII et VI armonici sunt, XII er praedam adquirendus est. XII ad VI dupla proportio est diapason, ad III tripla .i. diapason diapente, VI ad IIII sesqualtera .i. diapente. Item II et VI armonici sunt, III per praedam acquirendus est, VI ad III duplus .i. liapason, ad II triplus .i. diapason diapente, III ad II sesqualtera .i. dia-ente. Item XXV et XLV armonici sunt, CCXXV per praedam acquiren-lus est. In his tamen terminis consonantiae non inueniuntur, nisi tantum roprie- [2] tas armonice medietatis. In ea uero parte, ubi tercurta pira-nis est CXC, armonici sunt III et V, XV per praedam adquirendus est. tem V et VIIII armonici sunt, XLV per praedam adquirendus est. Item XXVIII et VII armonici sunt, IIII per praedam adquirendus est. In quorum mnium dispositione eadem ratio armonice proprietatis, quae superius prae-ibata est, diligenter consideranti aperitur, preter quod musice consonantie non deo ibi inueniuntur, quia maxime in superpartienti proportione constituti unt, quae sicut dicit Boetius ab armoniae continentia separatur; a Ptolomeo amen recipitur, cuius de hac sentenciam qui nosse desiderat Boetii de musica ractatum perlegat. Predictos quoque utriusque partis terminos sic uariare otes, ut per arithmeticam seu geometricam proprietatem dispositi musicis uoque proportionibus uictoriam perficiant. Exempli gratia: Statue VII, VIII, VIIII siue VI, VIIII, XII uel VIIII, XII, XV et habebis arithmeticam me-lietatem et non nullas musicas consonantias. Ad geometricam uero me-lietatem disponendam pone IIII, VIII, XVI siue V, XV, XLV uel IIII, XVI, LXIIII, et in his musicam quoque non deesse perspicies. Hac tantummodo ratione utramque medietatem discernes, ut in arithmetica equales sint differentiae, in geometrica uero equali inter se termini proportione iungantur.

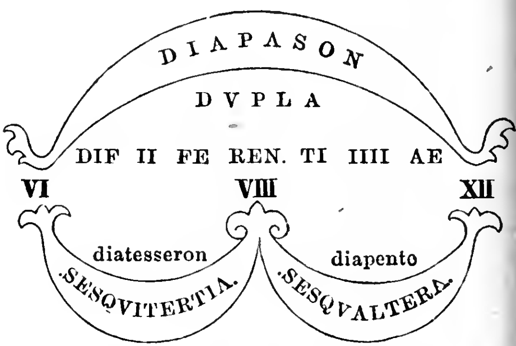
De geometrica armonia. § XII.

Est alia' quedam pulcherrima uictoriae dispositio, quae in his tribus constituitur terminis, uidelicet VI, VIII, XII, quam Boetius geometricam armoniam appellat et nos cubicam uictoriam dicere possumus. Tribus namque interuallis continetur .i. longitudine, latitudine, altitudine. Omnis enim cubus XII latera habet, VIII angulos, VI superficies. Omnis autem armonica proprietas omnesque musicae consonantiae, si differentiae cum terminis considerentur, in hac dispositione inueniuntur. XII namque ad VI

18. Boet. inst mus. I 5, p. 193, 1 Fr. 6, p. 194, 15. 31. Boet. inst. arithm. II 49, p. 158 Fr.

8. diaps R *hier und öfter*. 8. diapt R.

dupli sunt et diapason ostendunt, XII ad VIII sesqualtera proportione diapente reddunt, VIII ad VI diatessaron in sesquitercia proportione. Porro dif- [f. 93ʳ] ferentia inter XII et VIII quaternarius est, inter VIII et VI binarius. Duodenarius igitur ad IIII et VI ad binarium triplam proportionem habentes diapason diapente symphoniam pandunt, VIII uero ad binarium quadruplus bis diapason resonat, ut haec descriptio docet:



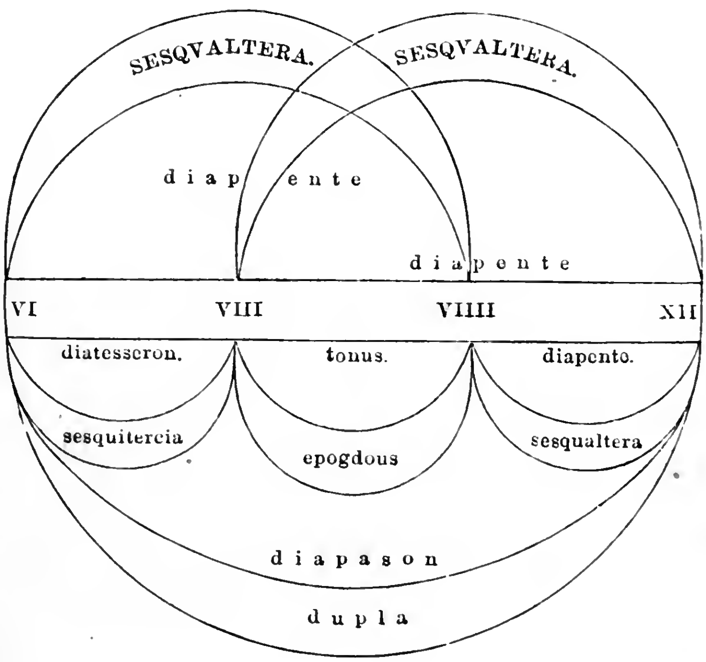
De maxima et perfecta armonia.
§ XIII.

Restat nunc dicere de maxima et
or
perfecta armonia, quae IIII terminis disposita nobilissimam et principalem uictoriae format stacionem tres praescriptas in se continens medietates et omnium musicarum symphoniarum proportiones. Cuius dispositio talis est: VI VIII VIIII XII. Hii ergo numeri solidi sunt, quia tribus interuallis distenti creuerunt .i. longitudine, latitudine, altitudine, sed non equaliter productis, quia alius ipsorum terminorum ab equali per equale equaliter, alius ab inequali per inequale inequaliter, alius ab inequali per equale equaliter, alius ab equale per equale inequaliter producitur. Siquidem semel bis tres VI creant ab inequali per inequale inequaliter procedentes. Minus est enim semel quam bis et bis minus quam tres. Bis duo bis VIII generant ab equali per equale equaliter gradientes. Equaliter namque sunt bis et duo et bis. Semel ter tres VIIII faciunt ab inequali per equale equaliter exeuntes. Minus est enim semel, equalia ter et tres. Bis duo ter XII pariunt ab equale per equale inequaliter prodeuntes. Equalia quippe sunt bis et duo, sed ter maius. Et ille quidem solidae quantitatis numerus, qui ab equali per equale equaliter procedit, cubus appellatur. Qui uero ab inequali per inequale inequaliter, scalenon grece, latine gradatus dicitur, eo quod de minore ad maius quasi per gradus exurgat idemque [2] speniscus .i. cuneolus appellatur, quod nulla ibi equalitas seruetur latitudinis uel altitudinis, sicut in cuneo, qui ad modum constringendae rei uel minuitur uel augetur. Inter hos medius est ille, qui neque cunctis partibus equalis est nec omnibus inequalis, sicut qui uel ab inequali per equale equaliter, uel ab equali per equale inequaliter procedit. Qui grece parallelipipedus uocatur, sed latina glossa non uniformiter exprimi potest, nisi quod tantum exponitur is esse, qui alternatim positis latitudinibus continetur. Igitur in horum dispositione

---

2. diãtss R. 19. ab equal*e per*] e *und* p *aus Correctur pr. m.* 26. quan^{ti}tatis R. 29. *d. h.* spheniscos.

erminorum arithmetica proportionalitas inuenitur, si XII ad VIIII uel VIIII .d VI comparemus. XII autem ad VIIII sesquitercia proportione, VIIII .d VI sesqualtera. In utrisque autem ternarius differentia est et iunctae xtremitates medietate duplae sunt. Si enim iunxeris VI et XII, XVIII acies, cuius medietas est nouenarius. Geometrica uero proportio est, si (II ad VIII uel VIIII ad VI comparemus. Utraque enim comparatio esqualtera proportio est et, quod continetur sub extremitatibus, equum est i quod fit ex mediis. Nam XII^{es} VI idem est quod VIIII^{es} VIII^{o} .i. LXXII. Armonica quoque medietas hic inuenitur, si XII ad VIII et rursus VIII d VI comparemus. Qua enim parte senarii octonarius senarium superat, adem octonarius a duodenario superatur .i. tercia parte. Quatuor enim uibus octonarius a duodenario superatur, duodenarii pars tercia est, et II^{o}, uibus octonarius senarium superat, senarii pars tercia est. Et si extremitates ungas VI scilicet et XII easque per octonarium medium multiplices, CXLIIII fiunt. Quod si se extremitates multiplicent, VI scilicet et XII, LXXII faciunt, cuius duplus est CXLIIII. Omnes ergo proprietates trium medietatum superius descriptas in hac dispositione, si rite perpendas, inuenire licebit. Inueniemus hic quoque omnes musicas consonantias. Denique VIII ad VI et XII ad VIIII comparati sesquiterciam proportionem reddunt et diatessaron consonantiam; habet enim maior numerus minorem totum et eius terciam partem. Item VI ad VIIII uel VIII ad XII comparati sesqualteram proportionem faciunt et [f. 93^{u}] diapente simphoniam; habet enim maior numerus minorem totum et eius alteram partem. XII uero ad VI comparati duplam proportionem efficiunt et diapason symphoniam, VIIII uero ad VIII considerati epogdoum faciunt, qui est tonus in musica. Habet enim maior numerus minorem totum et eius octauam partem. Huius descriptionis figuram subiecimus hoc modo:



20. diatss R.

Quia uero in facienda uictoria aliqui disponuntur termini ex genere superpartienti, in quibus musicae proportiones non possunt inueniri, sicut supra praelibauimus, non inutile arbitror ostendere, quomodo et in ipsis utcumque terminis musica quoque speculatio deesse non possit. Dicit domnus Wido in micrologo suo talem distributionem neumarum in componendo cantu obseruandam, ut cum neumae tum eiusdem soni repercussione, tum duorum aut plurium connexione fiant, semper tamen aut in numero uocum aut in ratione tonorum ipse neumae alterutrum conferantur atque respondeant, nunc aequae aequis, nunc duplae uel triplae simplicibus, atque alias collatione sesqualtera uel sesquitercia. Cum per has quidem proportiones diuisio disponatur monocordi, hic tamen intendit ostendere, quod sicut in monocordo istis mensuris praedictae consonantiae colliguntur, ita in armonia neumae, quae non nisi ipsis consonantiis fiunt, etiam ipsis praecipue proportionibus consonent [2] et conferantur. Sicut ergo ille proportiones per diuersos numeros diuerse sibi conferuntur, sic in cantibus secundum diuersos numeros sonorum non consonantiarum diuersitatem uidere possumus proportionum. Vnde et numeros sonorum, seu consonantia sit seu non sit, ita considerare possumus, ut cum habeant duplam, sesqualteram uel sesquiterciam proportionem, etiam inuenire possimus triplam, quadruplam et quincuplam ac deinceps, superbipartientem quoque et supertripartientem seu superquadripartientem ac deinceps, sicque fiat, ut ex genere superpartienti constituta uictoria musica quoque ibi non desit per proportiones tantum sonorum, non consonantiarum. Quod ut exemplo manifestius fiat, quasdam symphonias secundum has sonorum proportiones compositas subiecimus.

[f^{0} 94^{r}.] In hac autem proportione sonorum quod decentius est, magis obseruare debes, uidelicet inter duas dictiones uel tres uel IIII^{or}, ut uerbi gratia una dictio talem numerum sonorum habeat, ad quem alterius dictionis numerus conferatur uel sesqualtera uel sesquitercia uel sesquiquarta siue dupla siue tripla siue quadrupla aut superbipartienti aut supertripartienti seu alia qualibet proportione. Vel etiam ad unius dictionis numerum duarum uel trium dictionum numerus conferatur supradictis proportionibus, sicut in hac antiphona uidere potes, quam exempli gratia apposuimus.

5. Guidonis Aretini Microl. c. XV. M. Gerbert Scriptores de musica II, p. 15.

---

8. tenorum R. 26. *Diese symphoniae füllen die 2. Columne und 2 Langzeilen von f^{0} 94^{r}.* 34. *Diese antiphona füllt 2 Langzeilen auf f^{0} 94^{r}.*

Vides ergo quomodo hec antiphona proportionaliter incedit. In osculetur enim VI sunt uoces siue soni, in me $\overset{\text{o}}{\text{VIII}}$. Octo autem totum senarium in se habet et eius terciam partem .i. $\overset{\text{o}}{\text{II}}$. Serquitercia ergo proportio est. In osculo $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$ soni, in oris sui VI. Sex autem totum quaternarium in se habet et eius alteram partem .i. $\overset{\text{o}}{\text{II}}$. Est igitur sesqualtera proportio. In quia sunt duo soni, in meliora $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$, et hec est dupla proportio. Sunt habet $\overset{\text{es}}{\text{III}}$ sonos, ubera tua uino VIIII, et est tripla proportio. Fraglantia $\overset{\text{e}}{\text{V}}$ sonos habet, unguentis optimis XX, eque quadrupla proportio. Oleum VI habet uoces, effusum X et est superbipartiens, quia habet in se totum senarium et eius duas partes .i. $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$. Nomen V uoces, tuum VII habet. Septenarius habet in se totum quinarium et eius duas quintas, que proportio uocatur superbipartiens quintas. Ideo habet $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$ sonos, adolescentule XI. Vndecim habet $\overset{\text{or}}{\text{IIII}}$ in se plus quam semel et insuper eius $\overset{\text{es}}{\text{III}}$ quartas, que proportio dicitur triplex supertripartiens. Dilexerunt $\overset{\text{o}}{\text{VIII}}$ uoces, te nimis V; supertripartiens quintas est.

[Sequitur tabula]

FINIT . OPVS . FORTOLFI . AMEN.

---

13. XI] XX R, *aber die zweite* X *ist ausradirt. Fol.* 95[u] *werden die symphoniae und die antiphona auf acht Langzeilen nochmals wiederholt, in berichtigter Abschrift. Diese theilen wir allein mit, ohne die kleinen Abweichungen, die sich oben finden.*

Bemerkungen zur Rythmimachie.

Omnia in mensura et numero et pondere constituisti! Sapient. XI, 21. Das wird man als Devise der Zeit die man Mittelalter nennt im ganzen, insbesondere des 11. bis 14. Jahrhunderts, betrachten dürfen. Die Geometrie mit den verwandten, untrennbar mit ihr verbundenen Wissenschaften, zunächst Arithmetik und Musik, ist das Centrum, von dem alle weitere Geistesthätigkeit ausstrahlt, und was das Mittelalter Grosses geschaffen, was es wirklich geschaffen, das ruht auf diesem Grunde. Die Geometrie galt diesem Zeitalter als Wissenschaft κατ' ἐξοχήν[1]), als Wissenschaft und Kunst des rechten Denkens, Glaubens, Lebens. Und will man den Ausdruck „Wissenschaft" bemängeln, da von wissenschaftlicher Auffassung allzumal das Mittelalter keine Ahnung gehabt, so wird man der Beschäftigung mit der überlieferten Geometrie doch nachrühmen dürfen, dass sie den wissenschaftlichen Sinn vor dem Ersterben gehütet, ihn im Halbschlummer bewahrt hat, für die Zeit, wo der Retter für dies Dornröschen erscheinen, wo das Licht eines neuen Tages es zum neuen frischen Leben wecken sollte. Wer sollte, sei er gleich Laie in den in Frage kommenden Wissenschaften, nicht den Reiz empfinden, dies Traumleben zu beobachten? Walther von Châtillon, der berühmte Dichter des Epos von Alexander dem Grossen, dem wir aber auch eine Reihe wirksamer lyrischer Ergüsse verdanken, in denen er gegen die Verderbniss besonders des Clerus seiner Zeit auftritt, gibt uns in dem verbreitetsten der letzteren, seiner Apocalypse[2]), folgende Schilderung:

Estiue medio dici tempore
umbrosa recubans sub Iouis arbore
astantis uideo formam *Pictagore*,
deus scit, nescio, utrum in corpore.

---

1) Isidorus Origg. III 1, § 1—2 nennt freilich die Arithmetik als erste: [Arithmeticam] scriptores secularium litterarum inter disciplinas mathematicas ideo primam esse uoluerunt, quoniam ipsa ut sit, nulla alia indiget disciplina. *Musica* antem et *Geometria* et *Astronomia*, quae sequuntur, ut sint atque subsistant, istius egent auxilio.

2) Die zehn Gedichte des Walther von Lille genannt von Châtillon, hrsg. von W. Müldener, Hannover 1859, n. IV, v. 5—22. Ich gebe die Verse nach meiner eigenen Collation der massgebenden Pariser Hds.

Ipsam Pictagore formam inspicio
inscriptam artium scemate uario.
an extra corpus sit hec reuelatio,
utrum in corpore, deus scit, nescio.

In fronte nituit ars *astrologica*;
dentium seriem regit *grammatica*;
in lingua pulcrius uernat *rethorica*;
concussis estuat in labris *logica*.

Est *arismetica* digitis socia;
in caua *musica* ludit arteria;
pallens in oculis stat *geometria*,
quelibet artium uernat ui propria.

Est ante ratio totius *ethice*;
in tergo scripte sunt artes *mechanice*.
qui totum explicans corpus pro codice
uolam exposuit et dixit: „Respice!“

Manus aperuit secreta dextere,
cumque prospexeram coepique legere,
inscriptum reperi fusco caractere:
DVX EGO PREVIVS ET TV ME SEQVERE.

Pythagoras also gilt ihm als Vertreter aller Wissenschaften; er ists, der ihn weiter zu neuen Gesichten führt; zunächst in ein anderes Land zu auserwählten Schaaren, unter denen einzelnen der Name an die Stirn geschrieben ist: das sind die Heroen der Wissenschaften und Künste; hier erscheint er selbst wieder neben Boetius und Euclides, dem einen als Vertreter der Arithmetik, dem anderen als dem der Geometrie, er selbst als der der Musik.

Wenn Pythagoras der mythische Heros der Wissenschaft, so tritt im Mittelalter als Lehrer neben ihn Boetius, der erste Lehrer des Mittelalters in Mathematik wie in Philosophie, einer Philosophie, die nicht Schemen nachjagt, sondern auf dem Boden der Wirklichkeit, des irdischen Leids erwachsen, das Herz erwärmt, der Rauheit der Zeiten gegenüber die milderen Gefühle des Herzens und damit die Gesittung rege zu halten sich eignete. Aber nicht zu allen Zeiten und mit allen seinen Schriften hat Boetius gleichmässig solchen Ansehens genossen, auch er hat eines Sospitators bedurft. Die Zahl der wohlerhaltenen Handschriften, die vor das 10. Jahrhundert hinaufgehen, darf darüber nicht täuschen. Gerade die gelesensten Autoren sind es, von denen uns alte Hdss. fehlen. Wenn ich gleich für die Behauptung Hankel's[1]), dass vor Gerbert die Arithmetik des Boetius fast gar nicht citirt wird, nicht volle Verantwortung übernehmen darf — er hat nur ein Beispiel bei Rabanus gefunden — so meine ich durch die Citationen, die ich in des Abtes Lupus von Ferrières[2]) Briefen finde, dieselbe doch eher bestätigt als entkräftet und nur näher auf die Zwischenzeit zwischen Karl dem Grossen und Otto III. bestimmt zu sehen. Denn am Ende des 10. Jahrhunderts werden auf einmal die Spuren zahlreicher. Wenn die Nonne Hrotsuit von Gandersheim in ihren Comödien Pafnutius und Sapientia die handelnden Personen nicht blos boetianische Musik sondern selbst Mathematik vortragen lässt[3]), so beweist das schon Eindringen dieser Werke in den Klosterunterricht[4]); und dass dem wirklich so war, zeigt uns der Bericht, den Walter von Speyer, durch die Gnade Bischofs Balderich von Speyer (970—987) erzogen, über seine Studien erstattet in seiner im Anfang von Otto's III. Regierung verfassten Vita et Passio S. Christophori Martyris[5]). Ueber seine arithmetischen Studien spricht er dort I, 148 ff. folgende Worte, die allerdings zu ihrer vollen Lösung eines Oedipus zu bedürfen scheinen:

Rhythmica summarum praecessit quinque puellas: —
quae circumscriptis intende uocabula, lector,
haec quia dactylico non cernis idonea metro; —
primula multiplici caput irradiata metallo

1) Hankel Gesch. d. Mathematik p. 310 führt Rabanus bei Baluzius Misc. I, p. 7 an.

2) Lupi Ferrariensis epistolae ed. Baluzius. In ep. V p. 21 citirt er Boet. I 4 ex., I 31, II 2, und II 25.

3) In der Ausgabe von Barack p. 243 f., 279, vgl. R. Köpke Ottonische Studien p. 70 f.

4) Die Notizen über den Unterricht in den Stifts- und Klosterschulen, aus welchen die Gelehrten hervorgingen, sind doch nicht so selten, wie der Geschichtschreiber der Mathematik in Deutschland, C. J. Gerhard, (München 1877) p. 2 meint; und der Mathematik wird, wie das folgende Beispiel zeigt, in ihnen doch nicht so nebenbei gedacht. Aber freilich wer erst mit der Gründung der Universitäten das Studium der mathematischen Wissenschaften — ohne die unsere Dome doch wahrlich nicht gebaut worden wären — in Deutschland beginnen lässt (p. 4), wer auf so erhabenem Katheder steht, dass sich ein Gerbert ihm als Pygmäe darstellt, hat ein Recht über derartige Spuren die Nase zu rümpfen und ausführliche Lehrpläne modernster Art zu verlangen.

5) Zuerst publicirt von B. Pez Anecd. T. II P. 3 p. 37 sqq. Neu nach der Hds. hrsg. von Dr. W. Harster in der Beigabe zum Jahresbericht 1877/78 der k. Studienanstalt Speier. München 1878. 8°.

tardantem retro citius iubet ire sororem,
quae simul ad sociam conuersa fronte sequentem
inquit: Habeto meae tecum dextralia palmae;
hoc etenim speculi nostrae commendo sodali,
quam genui patria quondam statione locata.
Staret inornatis famularum quinta capillis,
ni sibi lacteolam praeberet tertia uittam.
ibant quamque sua comitum stipante corona,
et postquam planas limabant rite figuras
interuallorum mensuris et spatiorum
ordine compositis, cybicas effingere formas
nituntur mediumque uident incurrere triplum:
collatum primi distantia colligat una;
alterius numeros proportio continet aequa;
respuit haec ambo mediatrix clausa sub imo.
ordinibus mathesis gaudebat rite paratis
haec missura tibi solatia, clare *Boaeti.*

Ob diese Erscheinung bereits auf Gerbert's Einfluss zurückzuführen ist, ob in ihm der Drang seiner Zeit sich nur verkörpert darstellt — sicherlich verdient Gerbert jenen Namen als Sospitator des Boetius; und die Folgezeit erkennt das an und überträgt auf ihn so manches, was durch andere nach ihm gedacht und geschrieben worden.

Als Erfinder des Spieles, von dem unser Tractat handelt, wird bald Pythagoras, bald Boetius, bald Gerbert[1]) bezeichnet. Wir werden das ideale Recht darauf dem einen wie dem andern zugestehen müssen; bei Prüfung des wirklichen Anrechts könnte höchstens der letztere in Betracht kommen. Es mag ja einzelnes geben, was mit Recht, ohne dass ein directer Nachweis möglich, trotz aller Wandlungen, die das Mittelalter vorgenommen, auf Pythagoras zurückgeführt wird, wie das Pentagramm in seiner Wandlung zum christlichen Heilszeichen, wie die Sphaera Pythagorae, die zunächst, wie sie in der Redaction des Apuleius erhalten ist, nur über Leben und Sterben Kranker, dann in schlimmeren Zeitläuften auch über Sieg und

1) Pythagoräisches Spiel wird die Rh. von Neueren viel genannt, Boetius gilt dem Hermann Contractus als Erfinder, Gerbert wird von Boissier als solcher bezeichnet s. unten; Fabricius III 45 stellt Selenus' Ausgabe unter Gerbert's Werke. Chasles in seinem weiterhin erwähnten Briefe an Bethmann hat dagegen schon sein Bedenken ausgesprochen. Auf Pythagoras konnte schon Isidorus führen Origg. III 1, § 3: Numeri disciplinam apud Graecos primum *Pythagoram* autumant conscripsisse. Dazu kam die Wichtigkeit des unter dem Namen *tabula Pythagorica* allen bekannten Abacus.

Niederlage und in anderen Nöthen befragt wurde. Aber dann erscheinen doch die Spuren früher und nicht plötzlich in späteren Jahrhunderten. Von Boetius Schriftstellerei ferner haben wir doch zu genauen Bericht, als dass eine Sache, die erst in Handschriften vom 11. Jahrh. an uns bekannt wird, für boetianisch zu halten uns zugemuthet werden dürfte; und wenn wir dem Gerbert wirklich die Erfindung zutrauen dürften, so muss gerade jedes mit seinem Namen in Verbindung gebrachte Factum solcher Art peinlichster Prüfung ausgesetzt werden, ehe es glaubhaft für uns werden darf. Die handschriftliche Ueberlieferung indess giebt uns zu solcher gar nicht einmal die Veranlassung, und wir können über diesen Gedanken, der im 16. Jahrh. erst wie es scheint auftaucht, ruhig hinweggehen. Wie der Dichter der Vetula zum Erfinder des Schachspiels den Ulixes macht bei der Belagerung von Troia, wie Palamedes als inventor des ludus tabulae gefeiert wird in der lateinischen Anthologie[1]), so etwa sind die Genannten der Ehre theilhaftig geworden, Erfinder der Rhythmimachie zu heissen. Nur mit dem Unterschiede: sie mussten in der That dieser Erfindung vorausgehen, auf ihnen beruht diese Erfindung, selbst von Gerbert wird man das in obgedachtem Sinne behaupten dürfen; vor seiner Zeit konnte keiner daran denken[2]).

Und noch eins musste voraufgehen, das Schachspiel, welches nicht erst im 11. Jahrh. fleissig geübt wurde, aus dem uns Froumund's Zeugniss im Ruodlieb[3]) vorliegt[4]), sondern schon früher, wie ein Gedicht des 10. Jahrh. in Hagen's Sammlung beweist. Bald nach Gerbert, im ersten Viertel des 11. Jahrh., mag die Rh. entstanden sein; darauf führen die unten zu verzeichnenden Bearbeitungen, die von keinem Vorgänger ausser Hermann Contractus etwas wissen, soweit sie von Fabeleien absehen. Damit stimmt die Etymologie: es verräth der Name eine Unkenntniss des Griechischen und seiner Wortbildung, wie sie dieser Zeit eignet. Ums Jahr 1041 schrieb Anselm von Besate, Capellan am Hofe Heinrich III., eine *Rhetorimachia*[5]); der Gegenstand derselben ist so grundverschieden von unserer R. (der Verfasser, sich gegen einen fingirten Gegner mit allen Mitteln seiner Kunst vertheidigend, will ein Musterstück für den Unterricht der Rhetorik liefern), dass wir

1) Anthol. latina ed. A. Riese n. 82, 192—194.

2) Vor diese Zeit geht auch keine Notiz zurück. Isidorus hätte uns gewiss in dem 18. Buche des Origines eine Mittheilung gemacht. Ueber einen Missbrauch seines Namens s. unten.

3) Thörichter Weise dreht Boissier die Sache um und lässt das Schachspiel Gewinn ziehen aus der Rhythmimachie.

4) Carmina inedita ed. H. Hagen, Bernae 1877 p. 137 ff. aus Einsiedler Hdss. des 10. und 10—11. Jahrhunderts.

5) E. Dümmler, Anselm der Peripatetiker, Halle 1872, p. 20 ff.

den Titel ganz unabhängig, ganz ohne Anspielung auf die Rh., rein aus dem üblichen Sprachgebrauch seiner Zeit gebildet erachten dürfen; dazu tritt die Verwendung von ῥυθμός für ἀριθμός. Ich kann nicht glauben, dass dem eine missverstandene Stelle, des Martianus etwa IX 966 (p. 363, 9 Eyssenhardt), zu Grunde liegt:

Nunc rhythmos hoc est numeros perstringamus.

Kein Gelehrter hätte *rhythmos* so äusserlich mit *numerus* gleichgesetzt; davor war durch Kenntniss von Cicero und Quintilian, durch das Studium der Rhetorik jeder behütet. Dieselbe Veranlassung, die den Walter von Speier verleitet, *rhythmica* für *arithmetica* zu setzen, trägt hier die Schuld. Isidorus Origg. III, 1, § 1 sagt nämlich: *Arithmetica est disciplina numerorum; Graeci enim numerum* ἀριθμόν *uocant.* Ein verdorbenes ἀριθμόν der handschriftlichen Ueberlieferung dieser Quelle hat jenes Wort erzeugt.

Mir sind die geistigen und geistlichen Strömungen nicht hinlänglich bekannt, durch welche Wibold, Bischof von Cambrai († 965) veranlasst wurde, seinen Tractat *de Alea regulari contra aleam secularem*[1]) zu verfassen. — Es wäre wohl möglich, dass eine neue Zeitströmung das pythagoreische Spiel diesem Muckerspiel entgegengestellt hätte; wäre das aber auch nicht der Fall, so zeigt uns jene alea regularis s. clericalis, dass die Zeit, in welche ungefähr die Entstehung unserer Rh. nach dem vorgesagten zu versetzen ist, ein Bedürfniss nach ernsterem Spiel auch neben dem Schach empfand. Da Bethmann dies Spiel aus der Rh. sich entwickeln lässt, scheint es gerathen, ihren verschiedenen Charakter durch eine kurze Darstellung nachzuweisen.

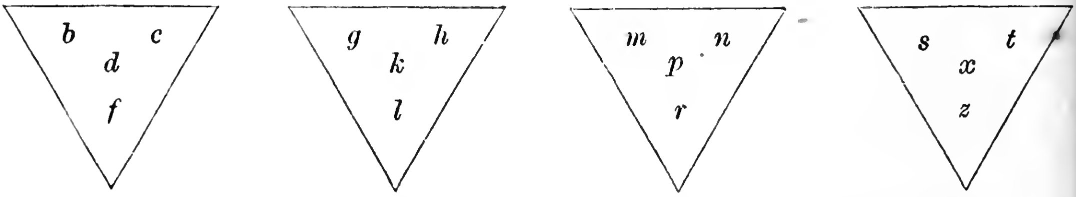
Die Alea regularis soll dem gewöhnlichen Würfelspiel Concurrenz machen. Drei Würfel, jeder mit 1—6 Punkten auf seinen Seiten versehen, geben 56 verschiedene Würfe; jeder derselben führt den Namen einer Tugend: an der Spitze aller steht Karitas (1. 1. 1.), ihr folgt Fides (1. 1. 2.). Spes (1. 1. 3.). Den Schluss macht als Sechspasch Humilitas. Auf einer Tabelle sind Würfe und ihnen entsprechende Tugenden in dieser Reihe verzeichnet. Anstatt der Punkte werden jedoch die Würfel mit den 5 Vocalen in der Reihe des Alphabets beschrieben (*Y* spielt nicht mit), so dass, da jeder Würfel 21 Punkte zählt, der erste mit *a* beginnt und endigt, der zweite mit *e*, der dritte mit *i*:

---

1) Gesta episcoporum Cameracensium c. 89 = Pertz Mon. hist. IX (Scriptt. VII) p. 433 ff., daraus abgedruckt sammt Bethmann's Noten in San Marte's Parcival-Studien III 203—211, leider durch einige böse Druckfehler entstellt. Houillon Le jeu du seigneur Wibold, Cambrai 1832, 8°, hat das Spiel in einem Gedicht dargestellt — mir unbekannt. Histoire litt. de la France VI 311—313.

I.	*a*	*ei*	*oua*	*eiou*	*aeiou*	*aeioua*
II.	*e*	*io*	*uae*	*ioua*	*eioua*	*eiouae*
III.	*i*	*ou*	*aei*	*ouae*	*iouae*	*iouaei*

So wird jeder einzelne jener 56 Würfe wieder einer Anzahl von Variationen fähig, unter denen den richtigen zu treffen Sache des Glücks ist. Es werden nämlich ferner auch noch die Consonanten (*qu* als zusammengesetzt fällt weg, *v* existirt nicht) auf die vier Flächen einer dreiseitigen Pyramide (Tetraeder) nach ihrer alphabetischen Folge vertheilt:



Beides, Würfel und Pyramide, werden nun zugleich geworfen und nun ist die oben liegende Fläche der ersteren, die unten liegende der letzteren massgebend, was dahin erklärt wird, dass die Consonanten dem Körper ähneln, der nach unten sinkt, die Vocale dem Geist, der in die Höhe strebt.

Nun zählt man die Points auf den drei Würfeln und sucht danach auf der Tabelle die entsprechende Tugend auf, sieht ferner zu, ob auf der Basis der Pyramide der erste oder ein anderer Consonant des Wortes sich findet: steht keiner da, so ist der Wurf misslungen, findet er sich, dann darf man weiter die Uebereinstimmung in den Vocalen prüfen [1]): wenn solche vorhanden, dann ist der Wurf gelungen.

Trifft ein Wurf des Gegners später dieselbe Tugend, so muss er sie dem, an welchen sie bereits vergeben ist, ohne Ersatz lassen. Besondere Schwierigkeit macht hier die Erlangung der Karitas, die für zwei Tugenden gilt. Da der Einerpasch nur *a e i* ergiebt, ist es dem, der ihn wirft, erlaubt, sein Glück in einem zweiten Wurfe zur Findung eines zweiten *a* zu versuchen. Sieger ist schliesslich, wer bis zum Ende am meisten Tugenden geworfen hat.

---

1) Wie weit die Uebereinstimmung gehen muss, da eine völlige doch bei Namen von 13 Buchstaben wie Perseuerantia unmöglich, ist aus der ungeschickten Darstellung Wibold's, die der Chronist wohl wörtlich übertragen hat, nicht zu errathen, die Einzelhandschriften, die freilich möglicherweise nur Excerpte aus der Chronik sind, hat Bethmann leider nicht beachtet, z. B. einen Bruxellensis, und die Erklärer lassen uns gänzlich im Stich, wenn sie nicht gar Thorheiten begehen, wie z. B. San Marte bei den Worten: *proiectis simul e manu cubis cum triangulo,* die einfach vom Wurf der drei Würfel sammt dem Tetraeder, hier *triangulum* genannt, zu verstehen sind.

Der Gewinnende gilt (ein Antrieb, sich dieselben anzueignen) aller Tugenden für theilhaftig; er soll bis zum sechsten Tage den Unterliegenden seinen Schüler nennen und die Tugenden, die ihm dem Ausgange des Spiels zufolge fehlen, durch gutes Verhalten sich zu erwerben mahnen; der Besiegte soll den Sieger als Magister ansehen; beide aber, falls keiner den Sieg davon trägt, einträchtig in der Liebe sich mit dem Brudernamen grüssen.

Wibold bemerkt am Schluss seiner Darstellung: *Quod si ludus uilescit aut animo tedium gignit, saltem* numerorum utilis coaptio *uirtutumque diligibilis inquisitio nec otiosa exercitatio mentem ad eum conuertant*, ut collatione numerorum exerciteris *uirtutumque cumulo gratuleris.* Der praktische Nutzen des Verstandesübung wird also neben der Tugendübung und zwar in erster Reihe betont. Das leistete die Rhythmomachie in viel höherem Grade — gar nicht zu gedenken, wie hoch interessant sie diesem Spiele gegenüber auch dem Unbegabtesten erscheinen musste — hätte Wibold sie gekannt, d. h. hätte sie bereits existirt, so würde er sein Spiel nicht erfunden oder ihm eine ganz andere Gestaltung gegeben haben[1]). Von einer Ableitung des einen vom andern kann natürlich trotz Bethmann's Andeutung gar nicht die Rede sein, da dort ein Bretspiel, hier ein Würfelspiel vorliegt.

So ist uns das Spiel also ein Beweis, dass in der Zeit der Cluniacenserreformen wohl ein Bedürfniss nach solchen Dingen rege war, zugleich aber auch davon, dass die Rh. nicht vor der Zeit Gerbert's erfunden ist.

Wir wollen der Alea gegenüber die Grundzüge der Rhythmimachie kurz skizziren.

Zu Grunde liegen dem Spiele die drei von Boetius ausführlich besprochenen, auch von Isidor Origg. III 6 § 5—8 dargelegten Zahlenverhältnisse der multiplices, superparticulares, superpartientes.

Die Definition derselben, „jener widerwärtigen antiken Benennungen der Verhältnisse" (Hankel p. 353) lese man bei den Angeführten, deren Autorität sie es verdanken, dass man ohne Rütteln an ihnen so lange festgehalten, oder in Fortolf's Tractat nach. Die Darstellung des Ganges unseres Spieles meinen wir in Kürze für Leser, denen das Latein des Mittelalters weniger zusagt, geben zu müssen.

Gefunden werden die *superparticulares* aus den entsprechenden multiplices, die *superpartientes* aus den entsprechenden superparticulares, wenn man die Verhältnisse umkehrt und nach der Formel

$$a : a + b : a + 2b + c$$

rechnet. Beispiel seien die multiplices sescupli:

1) Eine etwas interessantere Modification giebt Th. Morus an, s. unten.

$$1,\ 6,\ 36,$$

man kehre diese um:

$$36,\ 6,\ 1,$$

daraus ergibt sich für die superparticulares sesquisexti:

$$36 : \underbrace{36 + 6}_{42} : \underbrace{36 + 2 \times 6 + 1}_{49},$$

aus der Umkehrung dieser (49 : 42 : 36) wiederum für die entsprechenden superpartientes (supersexipartientes):

$$49 : \underbrace{40 + 42}_{91} : \underbrace{49 + 2 \times 42 + 36}_{169}.$$

Ich schreibe für den Laien diese Verhältnisse bis zur Grundzahl 9 her, da ihre Zahlen für das Spiel benutzt werden.

Multiplices				Superparticulares				Superpartientes			
dupli	1	2	4	sesqualteri	4	6	9	superbipartientes	9	15	25
tripli	1	3	9	sesquitertii	9	12	16	supertrip.	16	28	49
quadrupli	1	4	16	sesquiquarti	16	20	25	superquadrip.	25	45	81
quincupli	1	5	25	sesquiquinti	25	30	36	superquinquep.	36	66	121
sescupli	1	6	36	sesquisexti	36	42	49	supersexip.	49	91	169
septupli	1	7	49	sesquiseptimi	49	56	64	superseptip.	64	120	225
octupli	1	8	64	sesquioctavi	64	72	81	superoctip.	81	153	289
nonupli	1	9	81	sesquinoni	81	90	100	supernonip.	100	190	361

Da nun aber

die erste Columne der multiplices lediglich aus der 1 besteht,

die erste Columne der superparticulares der dritten Reihe der multiplices, sowie

die erste Columne der superpartientes der dritten Reihe der superparticulares entspricht,

so lässt man diese weg und es ergeben sich dann 48 Zahlen, welche auf *Spielsteine* geschrieben in zwei feindliche Haufen gesondert werden, deren erster die pares, der andere die inpares, d. h. die auf gleiche oder ungleiche Grundzahlen zurückzuführenden Zahlen umfasst. Auf zwei gesonderten *Spielbretern* von je 8 × 8 Feldern findet sich für beide Parteien die Stellung genau vorgezeichnet. Beiderseits in der Mitte je acht *multiplices*, die pares von rechts nach links, die inpares von links nach rechts geordnet, so dass 2 und 3, 4 und 5, 6 und 7, 8 und 9 einander feindlich gegenübertreten, in zwei Gliedern, voran die der zweiten, dahinter die der dritten Columne. Seitwärts und hinter dem zweiten Gliede, die Breite des Brets einnehmend, stellen sich die acht *superparticulares* auf, im engen Anschluss also an die dritte Columne der multiplices, die ja zugleich ihre eigene erste

Columne bildete. Hinter dem Mitteltreffen bleiben vier Felder unbesetzt; auf die noch freien 2×4 Eckfelder werden die acht *superpartientes* vertheilt, im Anschluss an die ihrer ersten Columne entsprechende dritte Columne der superparticulares. Genaueres ersieht man aus der bildlichen Darstellung in Buch I c. 12 des lateinischen Tractats, oben S. 178.

Die Spielsteine selbst sind von verschiedener Gestalt und Farbe:

16 viereckige kleinere für die multiplices, weiss die pares, schwarz die inpares;

16 viereckige grössere für die superparticulares, roth die pares, weiss die inpares;

16 runde für die superpartientes, schwarz die pares, roth die inpares [1]).

Zwei von den runden sind jedoch kreiselförmig erhöht und zugespitzt. Sie stellen die Zahlen*pyramiden* dar, d. h. die durch die Addition quadratischer Zahlen gewonnenen Summen, die im Spiel nur durch zwei Exemplare, eins für jede Partei, vertreten sind:

auf der Seite der pares eine *perfecta pyramis* = 91,
(ihre Basis ist 36, ihre Spitze 1; 91 die Summe von $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1$),
auf der Seite der inpares eine *tercurta pyramis* = 190,
(ihre Basis ist 64, die Spitzen 1, 4 und 9 sind abgeschnitten, die Zahl ist die Summe von $64 + 49 + 36 + 25 + 16$).

Es wird nun mit diesen Steinen Zug um Zug gethan abwechselnd von jeder Partei, wie es in den bekannten Bretspielen oder im Schachspiel geschieht. Welche Partei beginnt, darüber findet sich keine Vorschrift. Die Steine gehen gradaus, seitwärts nach rechts und links, übereck nach beiden Seiten. Die multiplices machen stets nur einen Schritt, die superparticulares zwei, die superpartientes drei.

Das Rauben der Steine des Gegners erfolgt nach folgenden Gesetzen:

1. Jeder Stein kann einen *quantitativ ihm gleichstehenden* des Gegners mit den ihm zustehenden Zügen rauben. Die Art des Schlagens ist dieselbe wie beim Schach. Die Anzahl dieser auf beiden Parteien gleichen Steine ist freilich eine geringe.

2. Wenn zwei Steine von *A* einen von *B* in die Mitte nehmen, deren Zahl die ihrigen durch Addition oder Multiplication miteinander erreichen, so schlagen sie den feindlichen Stein.

3. Wenn die Zahl eines Steines multiplicirt mit der Felderzahl, um die er von einem feindlichen absteht (das Feld des Angreifers wie das

---

1) Boissier will die drei Sorten lieber durch runde, dreieckige und viereckige tesserae bezeichnet wissen.

des Angegriffenen eingerechnet) die Zahl des letzteren ergiebt, so ist letzterer geschlagen.

4. Die *Primi et incompositi numeri,* unsere Primzahlen, wären also von diesem Schicksal stets ausgeschlossen. Sie dürfen nur dann gefangen, d. h. geschlagen werden, wenn sie von Gegnern so umdrängt sind, dass sie durch einen gesetzmässigen Zug nicht entweichen können. Schliesslich gilt diese fouea oder muscipula wohl für alle Zahlen; wer sich nicht mehr durch rechtzeitige Flucht vor Einschliessung retten kann, wird genommen.

5. Die Pyramiden werden beide durch den ihrer Basis entsprechenden feindlichen Stein genommen, durch 36 und 64 [1]), auch nach dem unter 3. angeführten Gesetz, und mit der Pyramide fallen dann zugleich sämmtliche Steine, welche die Zahlen, aus denen sie zusammengesetzt ist, repräsentiren.

Es könnte scheinen, dass das Spiel eine grosse Geläufigkeit in der Kenntniss des Einmaleins voraussetze — und das kann selbst heute manchen abhalten, eine Probe mit diesem Spiele zu machen. Aber wahr ist doch, was Hankel sagt, dass man sich im Mittelalter nicht gerade mit dem Auswendiglernen desselben gequält hat. Man hatte stets, und so auch hier, wie der Tractat l. I c. 12 zeigt, das Cribrum zur Hand, ja an das Spielbret selbst angeheftet.

Man darf sich nicht wundern, dass sich in den Carmina burana neben dem Schach, dem Bret- und Würfelspiel, die dem lebenslustigen geselligen Menschen mehr *iocunditas* boten, unsere so viel trockenere Rhythmimachie weder erwähnt, noch wie jene abgebildet und besungen findet (Carmina Burana ed. Schmeller p. 244 f.). Die dort abgebildeten Spieler sind keine Mönche. In Verbindung mit Wein, Weib und Gesang zu treten, wie jene, dazu war unser Spiel nicht angethan. Was die Phantasie zu erregen vermochte, davon besass es nichts; mit der Liebe zu einer Vetula freilich, wie bei jenem Dichter, dessen Werk zum Spott unter Ovid's Namen sich verbreitet hat, liess es sich wohl einen. Wir treten dem Spiel damit wohl nicht zu nahe, dessen pädagogische Vortheile Leute wie Johann von Salisbury in früherer, in späterer Zeit Thomas Morus zu schätzen und zu rühmen wussten; geschah das doch im Gegensatz zu den oberflächlichen und unlauteren Vergnügungen der jungen Hofleute ihrer Zeit, besonders dem geistlosen Würfelspiel, und hier that ein Hinweis auf Ernsteres wohl noth.

---

1) Wenn der Stein, der die Zahl ihrer Basis trägt, vom Gegner genommen wird, bleibt die Pyramide trotzdem frei.

2) Ueber das Würfelspiel im Mittelalter vgl. San Marte in den Parcivalstudien III, p. 191—202. Ueber Alea in römischer Zeit: K. W. Müller in Pauly's Encyklopädie I, 319 ff., über Latrunculorum ludus: Teuffel ebenda IV, 824 ff.

Der Verfasser ist, wie sich für jene Zeit von selbst versteht, Mönch: *fraterna karitas extorsit opus*, sagt er im Prolog zum 2. Buche. Er ist wohl bewandert in den Schriften des Boetius, zunächst in dessen Arithmetik und Geometrie, und allerorten führt er die Stellen daraus an, auf denen sich das Spiel aufbaut. Auch Ptolomäus (II § 11) wird citirt, doch beruht das Citat ohne Zweifel auf Boetius de musica. Mehrfach erscheinen Stellen aus Horatius mit und ohne dessen Namen.

Auch über den Namen des Verfassers darf kaum Ungewissheit bleiben. „*Explicit opus Fortolfi*“ heisst es am Schlusse, eine ungewöhnliche Art ohne Zweifel den Verfasser anzugeben. Indessen bin ich in der Lage, ein zweites Beispiel aus einer, etwas früherer Zeit, vermuthlich aber demselben Vaterlande entstammenden Handschrift anzuführen. Die Wiener Hds. n. 391 s. XI (nimmermehr s. X, wie Endlicher meinte) der Gedichte des Alcimus Avitus episcopus Viennensis trägt am Schluss des 6. Buches die Worte „*Explicit opus docti Alcimi*“. Man kann den Anfang der oben erwähnten Schrift des Anselmus Peripateticus damit vergleichen: Hoc opus Anselmi collaudant subtitulati. Die That des Schreibers mit *opus* zu bezeichnen würde wohl auch schwerlich Jemand sich erkühnt haben. Der Name *Fortolf*, oder besser *Frotolf* (Nebenformen *Fruatolf*, *Frodulf, Frudulf*, von ahd. FRÔD prudens, wie Fruotbert, Fruotfrid, die Graff, Sprachschatz III 821 aufführt) erscheint nicht gerade häufig in Schriftwerken; die von Förstemann altd. Namenbuch I 435 gegebenen Nachweise, die nach Weissenburg, Corvey, Regensburg führen, habe ich näher zu prüfen nicht Gelegenheit gefunden. In Pertz Monumenta findet sich der Name auch nicht einmal. Ich suche den Mann in irgend einem der bayerischen Klöster, die in jenen Jahrhunderten rühmenswerthe Propagatores der Wissenschaften waren.

Fortolf ist nicht der einzige, der die Rhythmimachie in jenem Jahrhunderte zum besonderen Studium sich erkor. Weder für den Erfinder, noch ersten Bearbeiter giebt er sich aus. „Die Intention bei der Aufstellung des Spiels war, wie ich vermuthe, folgende,“ sagt er I § 3, und im Prolog zu Buch II bekennt er offen, aus Schriftwerken von Früheren das meiste geschöpft zu haben. Er überliefert das in möglichster Einfachheit in seinem ersten Buche: denn nicht Prahlerei, sondern der gemeine Nutzen[1]) bewegt ihn. Indessen konnte das Spiel wohl zu weiteren Erfindungen und Verfeinerungen verleiten, und wenn Neuere nicht vermieden haben, diesen Abweg zu betreten (erst Boissier rühmt sich die einfache Gestalt wieder hergestellt zu haben), wer wollte es dem grübelnden Klosterbruder verdenken,

1) Den Nutzen betont er zum öfteren, z. B. § 4: *confert scientiam multiplicandi et habitudines ipsorum numerorum cognoscendi*, *progressiones quoque pyramidum et differentias trium medietatum etc.*

dass er sich weiteres ausgeklügelt. Diese geistreichen, oder, wie es dem Laien scheinen mag, vielmehr spitzfindigen Entdeckungen, durch welche die *uictoria* verschönert werden soll, legt er uns im zweiten Buche dar und vertheidigt sie (im Prologe) mittelst einer Exposition über Originalität, die nicht uninteressant zu lesen ist.

Vor dem 11. Jahrh. hat der Verfasser nicht gelebt, wie u. a. sein Citat „*Wido in micrologo*" bezeugt; kann doch nur Guido Aretinus gemeint sein, dessen Lebenszeit um 1025 fällt, vgl. Fabricius bibl. med. et inf. lat. III 127 ed. Mansi. Ist nun gleich Guido rasch auch in Deutschland bekannt geworden, so verliert doch dies Citat für uns den Werth einer Zeitbestimmung von Fortolf's Schrift vor jenen Ausführungen, nach denen er auf den Schultern Anderer zu stehen bekennt. Diese Anderen nämlich haben frühestens zu Guido's Zeit, eher aber etwas später geschrieben. Die Handschrift des Fortolfus, die bei ihrer vorzüglichen Ausführung und der Reinheit von Fehlern als eine unter des Verfassers Aufsicht geschriebene, nahezu als Autograph gelten darf, berechtigt, ihn um die Wende des 11. und 12. Jahrhunderts anzusetzen. Des Verfassers Vertheidigung gegen Böswillige lässt sich aus den Verhältnissen dieser Zeit wohl erklären. Von Ignoranten werde, sagt er, das Spiel verachtet und mehr *levitas* als *utilitas* in ihm gefunden, weil die äussere Einrichtung des Spiels, die *camporum distinctio et tabellularum protractio* der alea nachgebildet erscheine. Aber weit entfernt sei es von *levitas*, es sei eine *iucunda utilitas* und *utilis iucunditas* zugleich; er weist entrüstet den Vorwurf der *uanitas* und *irreligiositas* zurück: *ea maxime reprehendunt quae nesciunt*, ausserdem sei es *inuidia*, was jene stachle. Und wie einst Cassiodorius[1]), so weist auch Fortolf, mit dem Salomonischen Ausspruch, den wir an die Spitze unserer Bemerkungen gesetzt, die ungerechtfertigten Vorwürfe seiner Gegner ab.

Der Codex der Breslauer Stadtbibliothek n. 54 (früher Rehdigerianus S. I 4, 5) membr. f. $86^r - 94^v$ s. XII, besteht aus einem quaternio nebst einem auf beiden Seiten beschriebenen $^3/_4$-Stück eines Blattes; die acht Blätter des quaternio in doppelten Columnen, die scedula ohne Columnentheilung. Schöne saubere Hand des 12. Jahrhunderts in Schrift und Figuren. Vereinigt wurde dieser quaternio schon früh mit einer guten Hds. von Boetius de arithmetica s. IX (f. 1—85); denn aus dem 14./15. Jahrh. stammt die Inhaltsgabe auf dem Vorsetzblatte f. 1^r: *Item duo libri Boecij de arismetrica | Item liber qui dicitur Rithmimachia.* Die Züge verrathen eine deutsche Hand: leider ist sonst nicht das geringste Merkmal der Herkunft zu finden.

---

1) In der Vorrede zu seiner Encyklopädie. Opera ed. Garetius II 528^a.

Die Boetiushds. umfasst zehn von der Hand des Schreibers am Ende umerirte Quaternionen (f. 2—81) nebst vier Blättern (f. 82—85). Das orsetzblatt f. 1 gehört von Ursprung an dazu. Der Titel lautet f. 2r: NCIPIVNT DVO LIBRI DE ARITH|METICA ANITII MANILII SEVE | INI BOETII VC̃ ET ILL̃ EXCSL̃ | ORD̃ PATR̃ | DOMINO PATRI | IMMACHO BOETIUS | IN dandis etc.

Auf die vier Tabellen, welche f. 84v = p. 172, 173 Friedlein den chluss des Werkes bilden, folgen noch anderthalb Seiten Text. Die untere älfte von f. 85v ist leer gelassen (auf ihr steht eine probatio pennae von nderer Hand: Dominus iesus χp̃s postquam). Ein Explicit, ja auch nur eine ndeutung, dass das Werk schliesst, wird hier wie in den übrigen alten Idss. vermisst; ein ziemlich sicheres Zeugniss, dass der Schluss des Werkes erloren ist.

Der erste Abschnitt jenes in den Ausgaben fehlenden Schlussstückes 85r lautet:

Inter diatessaron et diapente. tonum differentiam quoniam si fuerint tres termini ita constituti ut secunda ad primum sesquitertia habitudine referatur. ad eundem autem primum tertius sesqualtera. Idẽ tertius ad secundum sesquioctaua proportione iungetur. ut sĩ VI. VIII. VIIII. Nam VIII. ad VI! sesquitercius est. VIIII. uero ad eundum senarium! sesqualter. VIIII. autem ad VIII! sesquioctauus. id ÷ epogdous. Qui iccirco dicitur differentia inter sesquitertium et sesqualterum! quoniam sesqualter id ÷ VIII. In octaua parte sesquitertia. uincit eundem sesquitertium.

Das sind, wie man sieht, erklärende Zusätze zur Arithmetik, wie sie ebst zahlreichen Interlinearglossen aus der Vorlage auf die Ränder der Ids. vom Schreiber übertragen worden sind[1]). Auch Varianten hat der chreiber zwischen den Zeilen aufgenommen, z. B.:

	Text:	übergeschrieben:
. 70, 18 Fr.	inueniatur,	in al' inuenitur
	Sit	in al' fit
, 80, 18 „	ut superius distinctum est,	in al' dictum est
, 79, 18 „	aequitas	in al' aequalitas
, 83, 27 „	multiplicationis	in alt' multiplicitatis
, 84, 21 „	dupla	in al' duplus
, 87, 1 „	fingant	l' signant

1) Z. B. p. 80, 5 Fr. ∴ ENMUSITATON THEOREMA ∴ hoc est in carninibus dei uerbum. Aliter. inquisitio dei celsitudinis. — Lupus Ferrariensis a. O. itirt: *Nichomachus inmusitatum,* siue ut alibi reperi *enmusitaton theorema prociens* etc. quae uerba graeca quam habeant proprietatem nescio si recte acceperim.

	Text:	übergeschrieben:
p. 87, 3 Fr.	uno .V. uel decem	al' unos
„ 90, 11 „	additi tamen latitudini	al' addita al' altitudini
„ 92, 12 „	solus	al' in solis
„ 93, 4 „	procreabuntur	in al' in se procreabnt͠
„ 93, 5 „	ut haec	in al' hic
„ 93, 5 „	Primum omnium ponent id quod	in al' & primum omnium ponenti
„ 93, 8 „	quae	in al' qui
„ 93, 11 „	ipse	al' ipso

u. s. w.[1]) Friedlein's Ausgabe, an deren Text mit Recht von H. Düker (Der liber mathematicalis des heil. Bernward im Domschatze zu Hildesheim, Progr. Hildesheim 1875. 4⁰. p. 10) ausgesetzt wird, dass in ihm keine feste Norm befolgt ist bezüglich der Handschriften, wird einer Revision bedürfen; die Rhediger'sche Handschrift, die der zu früh der Wissenschaft entrissene Gelehrte nicht benutzen konnte, dürfte für eine solche ein schätzenswerthes Hülfsmittel bilden.

---

1) Wie für die Uebertragung von Interlinear- und Marginalnoten, so ist auch in einer weiteren Hinsicht die Hds. interessant. Neuerdings ist von Leopold Delisle (Notice sur un mst. mérovingien . . d'Eugyppius. Paris 1875 p. 7) wieder auf die Vertheilung der Quaternionen einer Vorlage unter mehrere Schreiber aufmerksam gemacht worden, die sich theils in leeren Spatien, theils in Ueberfüllung der letzten Seiten mancher Quaternionen zu erkennen giebt. Ein solches Auseinandernehmen einer vielleicht anderwärts her entliehenen Handschrift halte ich nur in ganz vereinzeltem Falle für denkbar; für zahlreichere Fälle wird die von unserem Schreiber angewendete Methode Geltung finden, die auf der Ungefügigkeit des „Schreibleders" beruht: er richtet sich völlig nach der Quaternionen-, Lagen-, Blatt- und Seitentheilung seiner Vorlage; beschreibt den zurechtgelegten Quaternio nicht von Seite 1—16, sondern lagenweise, zuerst f. 1^r dann 8^v, 1^v und 8^r, 2^r und 7^v, 2^v und 7^r u. so fort; so kann er jede Lage, damit die Schrift wohl trockne und keine Unsauberkeit entstehe (und wie selten ist ein Abdrücken feuchter Schrift selbst beim dicksten Auftragen des „Schreibsaftes" in den älteren Hdss. zu bemerken) bei Seite schieben. Auf solche Weise ist die auffällige Uebereinstimmung der Seitenabtheilung in der Ueberlieferung zahlreicher Autorentexte leicht erklärt. Der Beweis für die Boetiushds. liegt in folgendem: Das Vorsetzblatt (f. 1) ist Fragment einer von demselben Schreiber geschriebenen, wegen eines Versehens cassirten Lage, welche das 1. und 8. Blatt des Quaternio .III. zu bilden bestimmt war: die Rückseite ist nämlich beschrieben Wort für Wort, Glosse für Glosse mit dem Inhalt von f. 18^v; der im Falz liegende Rest des einst dazu gehörigen Blattes zeigt vorn die Zeilenanfänge von f. 25^r, auf der Rückseite die Zeilenschlüsse von f. 25^v. Der Fehler hat ersichtlich in dem Einmaleins (p. 53 Friedl., f. 25^v unserer Hds.) stattgefunden. Auf der Vorderseite (f. 1^r) ist die Schrift säuberlichst mit Bimstein getilgt, dennoch erblickt man, aufmerksam geworden, die Spuren besonders der letzten Zeile von f. 18^r.

Die Bearbeitung des Fortolfus, die ich aus der alten und guten Rhediger'schen Handschrift mittheile, findet sich auch in einem Bruxellensis n. 927 s. XIV. Vielleicht giebt auch die Hds. von Avranches (Abrincensis) n. 145 mbr. s. XII in 8^{0}. dieselbe Fassung; wenigstens werden aus diesem citirt die Worte „*Ritmomachia id est pugna numeri.* Indessen ist das ein gar zu geringer Anhalt, auch Oddo's unten zu nennende Bearbeitung beginnt: *Rhythmimachia graece, numerorum pugna exponitur latine.*

Von den berühmteren Namen, auf welche die Tradition Bearbeitungen der Rhythmimachie zurückführt, dürfen wir als leidlich begründet nur den des *Herimannus Augiensis* oder *Hermannus Contractus* nennen, wenn gleich Trithemius' Zeugniss nicht die genügende Gewähr bieten sollte. Ueber ihn und seine Werke vgl. Fabricius III 237 f., A. Potthast Wegweiser durch die Geschichtswerke des europäischen Mittelalters p. 364, Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter, 4. Aufl. II 36 ff., Giesebrecht, G. d. deutschen Kaiserzeit II 523 f. Als sein Todesjahr wird 1054 angegeben. Das Jahrhundert also, in welches sein Leben fällt, seine genugsam erwiesene Theilnahme an den mathematischen Bestrebungen seiner Zeit könnten Trithemius und seiner Zeitgenossen Zeugniss stützen, oder, wenn dieses nur auf eine Muthmassung sich gründen sollte, indem sie die Rhythmimachie mit mathematischen Werken des Herimannus in derselben Handschrift vereinigt fanden, diese Muthmassung zur höchsten Wahrscheinlichkeit erheben. Eine solche Handschrift ist die, welche G. Libri in seinem Cataloge[1]) 1859 p. 103 f. unter n. 483 verzeichnet hat:

483 Hermanni Contracti Liber de compositione Astrolabii — Incipit Rithmachia, Incipit: „Nomen materia intentio finis — Libri Almogesti Ptolomei Philudensis (Abbreviatio seu Capitulatio) — Rhetorica et Grammaticalia quaedam. 4to. SÆC. XII on vellum. . . . The present manuscript contains a text of the *Liber de Compositione Astrolabii* quite different in the general disposition as well as in the details from the two works (*De Mensura Astrolabii* and *De Utilitatibus Astrolabii*) published both by Pez [Thesaurus anecd. III] and M. Migne [Patrologiae cursus completus vol. 143]. For instance the manuscript begins with *quicunque astronomicae peritiae*, and contains a portion of the *Liber primus* of the work published under the title of „*De Utilitate Astrolabii* (Migne vol. 143 col. 389) and then gives the *Liber de compositione Astrolabii* published by M. Migne under the same title of *De Utilitatibus Astrolabii*,

1) Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts chiefly upon vellum in various languages of Europe and the East formed by M. Guglielmo Libri, the eminent collector, who is obliged to leave London in consequence of ill health, and for that reason to dispose of his Literary Treasures. 1859.

in the volume allready quoted (col. 389). But there are great differences between this manuscript and the edition. Besides the work, *De Mensura Astrolabii*, as printed, the manuscript contains some additional matter, followed by several chapters, the first of which forms in the edition (col. 405) the *caput primum* of the second book, *De Utilitatibus Astrolabii.* The tables also offer considerable variations.

Obwohl diese Beschreibung des ersten Theils der Hds. manches zu wünschen übrig lässt, habe ich sie mittheilen zu müssen geglaubt, da sie bei Vergleichung anderer Hdss. des Hermann von Nutzen sein kann, der Catalog aber selten ist[1]). Bezüglich der Rhythmimachie „a work of great importance for the history of arithmetic and of the composite or figurative numbers" fasst er sich kürzer. Der Text hat nichts mit dem der Ausgaben Rom 1482, Paris 1496 (wiederholt 1510), oder dem der Hds. von Montpellier zu thun; eine Stelle aus dem 1. Capitel lautet:

„*Non enim aliter arismetice opus rithmachia representat, quam musica in cytharis et organis, et geometria in abaci opere et astronomia in horoscopis et astrolabii sollertia consistit. Inuentor ludi huius apud Romanos Boetius fuit, quemadmodum arismetice apud Grecos Pytagoras et Nicomacus et alii quapropter his premissis ad negotium transeamus.*"

Geschrieben scheint die Rh. von derselben Hand, wie die Schrift über das Astrolabium, auf die sie unmittelbar folgt; denn „the abridgment of Ptolemy and the *Rhetorica,* consisting of five columes, closely written, are in a different, alttough ancient hand-writing".

Weitere Bestätigung für Hermann — so weit spärliche Mittheilungen über Hdss. Schlüsse gestatten — und ein neues interessantes Zeugniss, dass man sich in Süddeutschland angelegentlichst mit der Darstellung unseres Spieles befasste, gewähren uns die Mittheilungen aus Bethmann's Papieren in Pertz Archiv XII 232. Danach befindet sich in der „eigentlichen" *Vaticana* unter n. 3101 membr. in 4^{0} eine im Jahre 1077 von Benedictus Accolytus mon. S. Arsacii — also im Monasterium Ilminense? — geschriebene „Ritmachya" (sic!). Ihr Anfang lautet: *Quinque genera inaequalitatis ex aequalitate procedere manif.*[2]) — Später liest man: *Huiusmodi conflictum quidam*

1) Mich hat Herr Prof. M. Cantor aufmerksam gemacht und die Güte gehabt, aus dem Heidelberger Exemplar die ganze auf obige Hds. bezügliche Stelle abzuschreiben.

2) Diesem Anfang zufolge könnte Vindobonensis 5216 f. 59^{a}—62^{a} chart. s. XV mit dieser Bearbeitung verwandt sein. Als Titel wird angegeben: *„De ludo Richomachie" siue tractatus de procliis;* er beginnt: *Quinque genera inequitatis ex equitate* — und schliesst: *Si quis hec plane uiderit, Richomachiam scire ualebit.* Es folgt eine tabula ludum repraesentans.

ex clero Wirciburgensi, si periti iudicent, dabit posteritati. Sit tabula — ac si tuus sit. Die Hds. des Benedictus enthält vielleicht dasselbe Werk wie die der Libri'schen Sammlung, von der thöricht genug die den Anfang bildende Rubrica (Nomen materia intentio finis), aber doch nicht der Anfang selbst mitgetheilt wird: indessen aus dem Titel *Ritmachya* statt *Rythmimachia,* könnte man einiges schliessen: die Benennung *conflictus* stimmt auffällig mit dem von Trithemius gegebenen. Die Hoffnung, in den folgenden Worten eine Hindeutung auf unsern Fortolf und damit den Ort wo er sein Werk verfasste zu gewinnen, muss so rasch wie sie aufgetaucht, schwinden. Ein Codex *Abrincensis* nämlich (Pertz Archiv VIII 383), der die *Compositio astrolabii secundum Hermannum* enthält nebst andern Schriften, die wohl auch von ihm herrühren könnten, veranlasste M. Chasles in Chartres in einem Briefe an Bethmann gelegentlich der Vermuthung, dass die Ritmachya des Vaticanus gleicherweise auf diesen Mann zurückgeführt werden könne, die oben ausgehobene Stelle vollständiger aus Cod. Parisinus 7377 C. mitzutheilen. Daselbst lautet sie: *Huiusmodi conflictum quidam ex clero Wirzeburgensi* nomine Asilo *si periti indicentur* [leg. *iudicent*] *dabit posteritati.* Am Rande aber stehen die Verse:

Nomen id expelle, quod dicis cęsar Agelle.
Asilo dicor ego, cui si mihi grammata tollo,
A remanebit et O; quid erit praestantior illo?

Die Verse beziehen sich zweifelsohne auf ein Factum: einen Besuch, den der Kaiser, bei welchem jener Asilo in Gunst stehen mochte, in Würzburg abstattete. Von dem freimüthigen Humor im Verkehr der jüngeren und älteren Klosterinsassen mit geistlichen und weltlichen Vorgesetzten hat uns ja die Klosterchronik von St. Gallen eine Reihe hübscher Beispiele bewahrt (vgl. Casus St. Galli c. 14, 26, 94, 123, 147). Zunächst bedürfen die Verse der Besserung; man muss im ersten *Aselle,* im zweiten *cum* SIL, statt *cui si,* lesen:

Nicht Esellîn, Herr Kaiser, mit Verlaub!
Nennt Asilo mich! wenn das SIL ich tilge,
Bleibt *A* und *Ω*: wer rühmt sich edlern Namens?

Da Asilo nur Hypokoristikon für Adalbert und Adalbero ist[1]) — wofür auch Azilin, Ascelin[2]), Ezilin und gerade Mitte des 11. Jahrh. Aezelin vorkommen —, so könnte man füglich an *Adalbero*, Grafen von Lambach

1) Vgl. Förstemann, Altd. Namenbuch I 192; F. Stark, die Kosenamen der Germanen p. 92 f.

2) Auch Adalbero Bischof von Laon 977 wurde Ascelin genannt.

denken, der zu Paris gebildet, Stifsherr am Dome zu Würzburg, durch Kaiser Heinrich's III. Vertrauen den Bischofsitz bestieg 1045 († 1090). Dieser Kaiser aber galt seinerzeit selbst hochgebildet als vielgefeierter Gönner der Wissenschaften[1]).

Wer Asilo immer sein mag, — sein Licht wird er nicht unter den Scheffel gestellt haben bei dieser Befürwortung, zumal wenn dieselbe wirklich von Hermann ausgegangen ist — so wird man kaum den Gedanken zu kühn finden dürfen, dass eine vierte Bearbeitung, aus dem 11. Jahrhundert, die wie es scheint ziemliche Verbreitung gefunden hat, von ihm herrühre. In jenem Vaticanus folgen unter anderen Werken kalendarischer Art die *regula metiendae sperae* von *Gerbert*, der *Compotus Hermanni Sueui* mit desselben *Prognostica, Ratio de obseruatione quattuor temporum Gerungi et Berni, Helpericus de computo,* gegen das Ende endlich eine Schrift De arte arithmetica „Quisquis peritus etc.". Letztere ist vielleicht identisch mit einer Regula de rithmimachia *„Quisquis peritus arithmetice huius inuenti noticiam*[2]) — *sescuplet*", die sich in dem Fragmentbande Vatic. Christ n. 598 auf einem Quaternio s. XI hinter einer Interpret. arabic. nom. astrolabii, Recepten zu Farben, Goldschrift u. a., Beschwörungen, Horologium regis Ptolomei (Pertz Archiv XII 297), ferner in zwei Pariser Hds. unbekannter Datirung (Paris. 7185 und Arsenal-Bibl. Sciences et arts n. 55, s. Pertz Archiv VIII 383)[3]), endlich in der Handschrift von Montpellier n. 366 membr. in 4^0 s. XIV (nach andern Angaben s. XII, s. Albrecht von Halberstadt, hrsg. v. Bartsch p. VII). In dieser soll die Rhythmomachia als Bestandtheil der oben citirten Vetula hinter letzerer stehen und zwar unter dem Namen des Hermannus Contractus — ein leicht erklärlicher Irrthum bei der Verbindung, die, falls die Vermuthung gegründet, zwischen beiden Männern bestand, und der Verbindung, in die die beiderseitigen Werke in den Handschriften traten.

Ausserdem haben wir aber noch eine gedruckte Bearbeitung, die unter bestimmter Namenangabe überliefert ist:

Regulae domini Odonis de Rhythmimachia.

---

1) Für die Abfassung von Hermann's Tractat würde sich daraus eine genauere Datirung, vor 1045, ergeben. Der Name sammt der Anecdote können immerhin, ohne dadurch an Glauben zu verlieren, in späteren Abschriften von Hermann's Werk durch einen anderen zugesetzt sein. Ueber Adalbero s. Wegele in Allg. deutsche Biographie Bd. I; Budinszky, die Universität Paris und die Fremden an derselben im Mittelalter, Berlin 1876 p. 115.

2) *Cupit habere* lauten die folgenden Worte in der nachstehend angeführten Hds.

3) Eine jedenfalls von diesen verschiedene Pariser Hds., St. Victor Paris. Cod. 620, führt Le Beuf Dissert. II 91 an.

Sie beginnt: *Sesquialtera proportio est, quando numerus maior* — und schliesst: *quot unitates singulae continent pyramides in latere. Finiuntur.*

Martin Gerbert hat dies Stück aus einer Wiener Hds. s. XIII (jedenfalls Vindobonensis 2503) herausgegeben Scriptores eccles. de musica I p. 285—295. Aus derselben Hds. giebt er p. 296—302 *Regulae domni Oddonis super abacum,* die wie schon Hankel p. 318 Anm. meinte, ganz unbegründeterweise dem Oddo von Clugny zugeschrieben werden und nicht vor das 11. Jahrh. zurückgehen, ferner p. 303 *Eiusdem Oddonis quomodo organistrum construatur.*

Aus derselben Wiener Hds.[1]) gibt Gerbert I 25 ein Fragment der Rhythmimachie: „Hoc Excerptum est de Rhythmimachia *„Sunt numeri qui consonantias creant uel per quos ipsae discernuntur* —", Schluss: *Nam diapente et diatessaron iunctae diapason consonantias creant.*" Dies Stück findet sich auch im cod. lat. Monacensis 6369, einer aus Freisingen stammenden Hds. s. XI, f. 65—66. In beiden Hdss. geht voraus: *„Sententiae Isidori Episcopi ad Braulionem Episcopum de musica,* Excerpte aus Isidor's Origg. III c. 14—22, abgedruckt bei Gerbert I 19—24); man hat darum auch für das Fragment der Rythmimachie Isidor's Namen in Anspruch genommen, während es eine wörtliche Abschrift einiger Capitel von Oddo's Werk ist, die sich p. 287 f. bei Gerbert finden.

Man könnte nun meiner Ausgabe des Fortolfus die Berechtigung absprechen, da es gerade genug sei, die Grundgesetze einmal in Druck vor uns zu haben, die Tüfteleien der weiteren Bearbeiter aber geringen Werth beanspruchen dürfen. Und in der That, wenn wir an Oddo's Rh. das hätten, was solche Einwendungen voraussetzen, dürfte ich nicht in der Lage sein, sie völlig zurückzuweisen. Wie aber Martin Gerbert aus seiner Hds. sie gegeben hat, ist sie ein wirres Durcheinander. Es beginnt der Tractat ohne Vorbemerkung mit Behandlung der Proportionen, danach wird plötzlich eine Tabula beschrieben, erst auf der siebenten von elf Druckseiten wird der Name des Spiels genannt und erklärt. Dort nämlich p. 291, 1 ist in Wahrheit der Anfang und von ihm geht es leidlich in Ordnung fast bis p. 295, 2; dann erst müssen die Seiten 285, 1 bis 291, 1 folgen, die sich aber in trostloser Confusion befinden, die im einzelnen zu entwirren ich mir versagen muss; ich will nur aufmerksam machen, wie p. 286, Col. 2, Zeile 3 mit den Worten *siue per angulos fiat in directum* plötzlich in ein ganz anderes Capitel hineingefahren wird. Die Disposition des Werkchens findet sich p. 293, 1 in der zweiten Hälfte: danach kann man leicht den Faden durch

1) In ihr steht auch der Dialogus Oddo's, für den Gerbert (p. 252 ff.) einen anderen Vindobonensis benützt hat, wie er Praefatio f. e[v] angiebt; cod. 2503 scheint nämlich auf p. 259 col. 1 med. mitten im Stücke abzubrechen.

das Labyrinth finden, wenn gleich hier und da die Verbindungen verloren zu sein scheinen. Der Text selbst ist äusserst verderbt und M. Gerbert hat dem Stücke wenig Mühe zugewendet, so dass grobe Fehler, wie z. B. p. 293, 1 Zeile 2 v. u. *deterosi* statt *de cetero si,* p. 286, 1 Z. 12 *non ita* statt *nisi ita* stehen geblieben sind u. a.

Die Altersangabe der Münchener Hds, s. XI, würde uns nicht abhalten dürfen, zunächst an Oddo abbas Morimundensis, † 1161, als Autor der Rh. wie der anderen bei Gerbert unter Oddo's Namen aufgeführten Stücke zu denken. Unbezweifelt wird diesem ein Tractat *de sacris numerorum mysteriis* zugewiesen, der z. B. im cod. Vindobonensis 1418 s. XII erhalten ist. Vergl. Fabricius Bibl. med. et inf. lat. V p. 159 ed. Mansi. Aber man muss doch die grosse Zahl von Schriftstellern dieses Namens in jenen Jahrhunderten bedenken, die längst nicht alle von Fabricius aufgezählt, und deren vielseitige Thätigkeit, wenn sie genannt sind, von dem berühmten Litterator doch nicht immer erschöpfend angeführt ist; als Beispiel mag der auch von M. Cantor genannte, in so vielen Beziehungen rühmenswerthe Odo von Tournay dienen[1]); das räth uns, nur auf die sichersten Angaben und bestimmtesten Beweise hin die Zuweisung von Schriftwerken vorzunehmen. Mir scheint ausserdem der Tractat selbst nicht gegen, sondern für eine frühere Zeit zu sprechen, als den Ausgang des 11. Jahrhunderts. Freilich Odo von Clugny, an den Martin Gerbert gedacht, hat wieder viel zu früh dafür gelebt (Abt 927—942) und auf des einzigen Anonymus Mellicensis Zeugniss hin möchte ich ihn selbst nicht zum Verfasser eines Werkes über Musik machen; dass der Horizont seiner Studien über die Theologie hinaus sich erweitert habe[2]), müsste durch zuverlässigere Angaben erwiesen werden.

Aber Odo giebt uns ja selbst einigen Anhalt seine Zeit zu bestimmen. In der Einleitung p. 292, 2 sagt er: *Nos uero uelut rudes intellectu, qui huius nouellae plantationis nondum satiamur fructu, ipsius tamen pomi dulce fragrantis per ipsius exteriorem non (notitiam?) dulcedinem interiorem palati adhuc esurientis summatim praelibauimus gustu. — Tentemus saltem leuiora,* sagt er ferner in der Einleitung p. 293, 1, *quibus haud posse subest prius discutere difficiliora, nec nisu temerario ea quae ipse huius artis panditor studiose inuestigata, ut omnium liberalium artium imbutus scientia, (in) notitiam futurorum stilo haud paruipendendo patefecit, repetamus. Sed*

1) Hist. litt. de la Fr. VII p. 95 sq. vgl. p. 137. M. Cantor Mathem. Beiträge z. Kulturleben der Völker p. 332.

2) Ich glaube hier mit den Resultaten M. Cantor's in seinem „Odo von Cluny" überschriebenen Capitel (Mathem. Beitr. p. 292 ff.) mich eher in Uebereinstimmung als in Disharmonie zu finden.

salua ipsius personae auctoritate ex eiusdem [et] scriptionis prato flosculos mellifluos legentes nostrae ignorantiae utiles recondamus. Caeteras uero rhythmimachiae normas ibidem pleniter subtitulatas memoriae non subtrahamus. Ibi namque praelibati conflictus certamen, siquod libeat, poterit cognoscere etc.

Dreierlei geht daraus hervor: Erstlich ist nach seiner Ansicht, die mit unseren bisherigen Erfahrungen stimmt, die Rhythmomachie eine Erfindung jüngster Zeit. Zweitens aber hat er für seine Darstellung einen Führer sich erwählt, den er als einen Meister in den sieben freien Künsten und als *huius artis panditor* bezeichnet — ich gestehe, ich habe diesen Ausdruck anfangs falsch gefasst und sogleich auf Hermann Contractus bezogen, denn nur auf ihn und keinen andern Zeitgenossen konnte dies Lob sich beziehen[1]). Ich glaube nun geirrt zu haben. Das Wort *panditor* findet sich in den Lexicis, selbst im Du Cange nicht, und dennoch ist es richtig: Odo hat es dem Guido entlehnt, der am Schluss des Micrologus c. 20 (M. Gerbert II, p. 24, 2) die Worte hat: *Hinc enim incipiens Boetius panditor huius artis multam miramque et difficillimam huius artis concordiam cum numerorum proportione demonstrauit.* Und nicht blos das Wort, sondern auch die Beziehung selbst: Odo meint keinen anderen als den Boetius, auf dessen Lehren die Rh. sich aufbaut. Von Odo von Clugny kann also als Darsteller der Rhythmomachie nicht ferner die Rede sein. Vielleicht erstreckt sich dies Resultat nun auch weiter auf die anderen musikalischen Schriften, die unter diesem Namen gehen.

Als Führer in seiner novella plantatio, der Rhythmomachie, dürfen wir trotzdem den Hermann nicht aufgeben. Das geht zum dritten aus dem Gebrauch des Wortes *conflictus* hervor, der der Bearbeitung des Reichenauer Mönchs zu eignen scheint. Es kann hier die Erinnerung nützen, dass wir letzterem auch ein Gedicht unter dem Titel *Conflictus ouis et lini* verdanken[3]). Bei einem häufiger gebrauchten Worte, wie pugna, würde ein solches Zusammentreffen sehr gleichgiltig sein; bei dem wie es scheint ziemlich seltenen Vorkommen des in Rede stehenden wird man dem Beachtung schenken müssen. Und Oddo hat nicht zufällig an obiger Stelle dies Wort gesetzt, es kehrt bei ihm wieder p. 286, 2 in der 4. Zeile des Abschnitts *Nemo existimet*[3]).

Ich habe unter dem Texte des Fortolfus mehrere Stellen angemerkt,

1) Es ist doch ein grosser Unterschied, ob man jemand unter vier Augen rühmt, wie Hugo Metellus den Gerland Canonicus von S. Paul in Besançon in der Briefanrede: *Scientia triuii quadriuiique onerato et honorato,* (Hist. litt. de la France VII 138) oder vor der ganzen gelehrten Welt seiner Zeit.

2) Reiffenberg im Annuaire de la bibl. de Bruxelles, 1844 p. 80—86.

3) In der Folge ist das Wort wohl häufiger gebraucht worden. Bekannt sind mir Hildeberti Cenomanensis (geboren 1055) *liber de querimonia seu* con-

wo letzterer wörtlich mit Odo übereinstimmt; es mag noch mehrere der Art geben, ja es müsste noch eine ganze Reihe derselben sich vorfinden, wenn Odo's Text unverstellt erhalten wäre oder der letztere seiner übernommenen Verpflichtung so sorgsam nachgekommen wäre, wie Fortolf. Es ergiebt sich aus der ganzen Haltung beider Werke, dass nicht Fortolf den Odo, nicht Odo den Fortolf ausgeschrieben, sondern dass beide einer und derselben Vorlage in jenen Stellen, d. h. in den Grundgesetzen des Spiels, gefolgt sind, welche klarer und knapper wiederzugeben kaum möglich war; ein Verfahren, das unter die Rubrik der gestatteten Plagiate nicht blos jener Zeit gehört. Der Autor, dem beide entlehnen, was sie brauchen können, ist unzweifelhaft Hermann, und in seiner Rh. müssten sich diese Stellen wiederfinden; die Schrift, in der sie nachweisbar originaliter stehen, muss Hermann's Schrift sein.

Der Verfasser der von Gerbert edirten Bearbeitung hat also offenbar in geringem zeitlichen Abstande von Hermann dem Lahmen gelebt; näheres über ihn festzusetzen, zunächst ob er wirklich auf den Namen Odo Anspruch erheben darf, ist Sache weiterer Handschriftenforschung.

Du Cange führt nach einem mir nicht zugänglichen Werke von Abbé Le Beuf (Var. Script. II p. 85) einen Tractat über unser Spiel von *Wilhelmus Tegernseensis Scholasticus* an. In desselben Verfassers Dissertations sur l'histoire de Paris, Paris 1739—41 (3 Bde.) wird II 91 *Abaelard* als Verfasser einer Rhythmomachie genannt nach einer Angabe in Richard de Fournival's Biblionomia (Mitte des 13. Jhdt.). Hier liegt wohl nur ein Irrthum vor[1]).

---

flictu *carnis et animae,* eine Nachahmung der boetianischen Consolatio, bei Migne vol. 171 p. 996—1004. Ferner *Carmen de* conflictu *uirtutum et uitiorum* in den Münchener Hdss. lat. 4613 s. XII und lat. 3941 s. XV etc.

1) Richard beschreibt (nach L. Delisle, Le cabinet des manuscrits II 426) die Handschrift so: *46 Prefati Boetii liber de arithmetica ad Symmachum. Item Petri Abadalardi liber de pugna numerorum qui dicitur Rychmimachia. In uno volumine.* Man könnte an Adalbero denken. — Der Catalog von St. Amand s. XII (L. Delisle a. o. p. 453) führt zwei namenlose Abschriften auf: *159 Item regulae abaci et rimimachiae. 160 Tabula rimimachiae, cum figuris numerorum eiusdem artis.* — Eine Berner Hds. der „Arithmomachie" (so wollte schon Le Beuf Dissertations II 91 das Spiel nennen) cod. 299 membr. führt M. Cantor Math. Beitr. p. 412 not. 430 an: das sind jedoch die Versus Acbrhanni de ludo tabularum secundum numerum, die von mir nach H. Hagen's Mittheilung im Anzeiger des German. Museums 1873 p. 249 f., dann von H. Hagen selbst in seinen Carmina medii aevi m. p. inedita Bern 1877 p. 142 ff. herausgegeben und schon früher von demselben in der Schrift „Antike und mittelalterliche Räthselpoesie" Bern 1869 (und 1877 wiederum) p. 32 f. erläutert worden sind. Verschieden davon sind die Versus Agbranii in einer Römischen Handschrift Cod. Vaticanus Christinae 1964 s. XI s. Dümmler, Neues Archiv IV 530 n. 5.

Endlich erscheint noch ein spätes Machwerk, des 16. Jahrh. wie es scheint, im Wiener Codex 3276 f. 213r—226v unter dem Namen eines Johannes Primicianus: Pythagorae ludus nuper in aliam formam translatus (Incip.: „*Usus et practica . . .*“, Expl.: „*dommum parant*“). Dieser mag dann schon aus neueren und nur im Druck erhaltenen Bearbeitungen geschöpft haben, zu denen wir uns nun wenden, nachdem wir einige Stimmen aus der Laienwelt citirt haben, die in die Zwischenzeit zwischen die obgenannten Schriften und den ersten der zu nennenden modernen Mathematiker fallen[1]).

Jo. Saresberiensis Polycrat. I c. 5 (ed. Giles III 33) (de alea et usu et abusu eius.) Attalus Asiaticus, si gentilium historiis creditur, hanc ludendi lasciuiam *[alearum ludum]* dicitur inuenisse, ab exercitio numerorum paululum deflexa materia. Cum enim antiquiores illud exercitium duntaxat approbarent, quod ad inuestigationem ueri disciplinasque liberales proficeret uel recte uiuendi instrueret usum, hic subtili quidem, licet infructuosa inuentione ueteris exercitii duritiam non temperauit sed emolliuit, multis adhuc in pristina manentibus grauitate. A manibus namque Graecorum abacus nondum excidit, aut ratio calculandi, aut ludus in quo plene uicisse est ad denunciatum calculum in campis aduersarii constituisse *perfectam et maximam harmoniam.* Cum uero in eisdem harmonica, arithmetica uel geometrica trium terminorum medietate exultat, semiplena uictoria est. Quaeuis alearum, etsi contingant citra triumphi gloriam, aut ludentis felicitatem aut artis peritiam protestantur. *Iucundum quidem et fructuosum est numerorum nosse certamina,* qui depredationi inueniantur obnoxii et qua ratione in castris sint alii tutiores, omnium periculorum ignari, nisi forte circumuenti ab hostibus captiuentur. *Huius uoluptate certaminis, Ptolomaeum, Alexandrum, Caesarem, Catonem, ipsum quoque Samium* grauiores operas legimus temperasse, quo etiam inter ludendum id agerent, unde essent philosophicis negotiis aptiores. Alea uero exciso regno Asiae inter manubias euersae urbis non sub una tantum specie migrauit ad Graecos. Hinc tessera, calculus, tabula, urio uel dardana pugna, tricolus, senio, monarchus, orbiculi, taliorchus, uulpes, quorum artem utilius est dediscere quam docere. Anderswo soll bei Johannes nach Du Cange das Wort *rithmachia* im Sinne von *concinnitas* gebraucht sein, die Stelle ist mir bisher entgangen[2]).

---

1) Der Gründe, weshalb ich mich nicht auf kurze Angabe der Stellen beschränke, sondern dieselben ganz abdrucken lasse, sind vornämlich zwei. Einerseits zeigt erst die ermöglichte Vergleichung mit dem Fortolftexte, dass bei den citirten Schriftstellern wirklich von unserer Rh. die Rede ist, was z. B. D. de Foncemagne bei Du Cange leugnete, andrerseits kann sich für die Herkunft und Verbreitung der verschiedenen Bearbeitungen ein Fingerzeig in ihnen finden: so deutet möglicherweise der Schluss der Honoriusstelle auf Fortolf.

2) Gemeint ist doch schwerlich epist. 235 (p. 431 ed. Masson): In Rithmachia

Es mag weiter die Darstellung in dem im Mittelalter dem Ovid unterschobenen Gedichte *de Vetula*[1]) folgen. Dort heisst es Buch I c. XXXV p. 25—28 in dem bekannten Nachdruck der Wolfenbütteler Ausgabe (ed. 1662 typis Sterniis):

O utinam ludus sciretur Rythmimachiae!
ludus Arithmeticae folium, flos fructus et eius
gloria laus et honor, quia totum colligit in se
ludus, ubi bellum disponitur ordine miro.
Campis in geminis congressio fit numerorum
quattuor *imparium*, qui sunt in limine primo,
cum totidem *paribus*, qui limite sunt in eodem,
principio numeri numeris non connumerato.
octoque sunt isti patres utriusque cohortis;
auxiliatores nam parti dantur utrique.
primo *multiplices*, quia ducto quolibet in se
quadrati subduntur eis, quibus ordine bino
subsunt *supraparticulares* adicientes
toti particulam dictam patris a quotitate.
His alii subsunt, qui particulas superaddunt
dictas a numero uincente patris quotitatem
uno, sed numero patris aequales quotitati,
ordoque binus eis. Numeros hinc inde tabellae
seu Scaci portant, et sunt acies bicolores
ad discernendum, praesertim cum paritas et
imparitas mixtae sibi sint in utraque cohorte.
distinguuntur item Scaci tabulaeue figuris:
hi trigonis, hi tetragonis, illique rotundis;
scilicet ut Scaci numeros utrinque rotundi
primos octo ferant, trigoni sint octo sequentes,
tetragoni reliqui, nisi quod duo sunt ibi Reges
pyramidalibus ex numeris. Ideo quoque Scaci
pyramidales sunt: et habet pars utraque Regem.
In castris parium nonus decimus locus unam
perfectam dat *pyramidem*: senarius in se
ductus pyramidi basim producit eidem

---

ludentium hoc indicat iocus, ubi quoties aufertur pyramis intercepta, toties concidunt latera eius.

1) Vetula in oben genannter Hds. von Montpellier s. XII und zahlreichen anderen Hdss. erhalten: schon Richard von Bury im Philobiblon citirt sie als echtes Werk des Ovid, ebenso Walter Burleigh.

totaque pyramis est nonagenarius unus.
At locus imparium decimus bis *pyramidem* dat
tercurtam, cuius basim octonarius in se
ductus producit, quam pyramidem coadunant
centenarius et nonagenarius una.
Istae pyramides sunt Reges his aciebus
et sunt ex numeris quadratis omnibus ambae,
quod potes ex tabula subiecta noscere plane.

c. XXXVI:

O utinam multis numerorum pugna placeret!
quae si sciretur, placitam se redderet ultro.
Sed Mathesis uix inueniet qui iam uelit ipsam. etc.

Zur Erläuterung finden sich dahinter die Zahlen nach ihren Species und ihrer Vertheilung an die Spieler angegeben.

Noch einmal bezeugt der Verfasser l. III c. II p. 57 seine Liebe zur Rh., indem er von den Studien spricht, denen er sich ergeben will:

Adiciamque iocos dociles Mathesisque sequaces.
sumptibus exiguis aliquatenus aedificabo
concernens ad materiam geometrica quaedam,
sic abstracta quidem, quod non sine materia sint,
Algebraeque memor, qui ludus arithmeticorum,
admittam ludum, qui Rythmomachia uocatur[1]).

Auf *Alanus* de Insulis poetische Schilderung der Arithmetik im Anticlaudianus III 4 v. 17—22 p. 350 de Visch macht mich Le Beuf Diss. II 91 aufmerksam[2]):

1 Quarta soror sequitur, quartae rota prima sororis
est opus, huic operas operose dedicat illa.
et quamuis haec quarta foret, tamen esse secundam
4 se negat in facto, contendens prima uocari.
— — — — — — — — — — — — — — —
17 *Mensam Pythagorae*, quae menti patula donat
Delicias animi sapiens, non corporis escas,

1) Der Verfasser schildert übrigens in anderen Capiteln auch den ludus Deciorum (c. 24—30, p, 15—23), das Schachspiel (c. 31—33, p. 23—25) und andere aus der Zahl der *alii parui ludi quos scire puellas est decens* (c. 34, p. 25); ist also wenigstens nach dieser Seite hin nicht uninteressant.

2) Als Autoren der arithmetica werden von Alanus bezeichnet am Schluss des 4. Capitels: Nicomachus, Gilbertus, Pythagoras, Chrysippus.

sustinet una manus, *pugnas* manus altera monstrat,
agmina disponit *numerorum*, praelia fingit,
indicat insultus uarios numerosque rebelles,
22 tandem subtili concludit bella triumpho.

Ihm lasse ich folgen *Honorius Augustodunensis* (um 1300), der in seiner Schrift de animae exilio die Rh. mit folgenden Worten erwähnt:

Quarta ciuitas est Arithmetica. per quam quaerenda est patria. In hac Boetio docente par et impar numerus multipliciter se complicant. Cribrum simplices numeros per multiplices numeros reciprocat, Abacus per digitos et articulos eundo multiplicat, redeundo diuidit, minutiis monadem in mille particulas redigit. In hac Rhythmimachia pares et impares numeros in pugnam prouocat, alea Scachos certo numero in certamen ordinat, tabula iactis tesseris senaria sorte congregat. In huius urbis schola uiator discit, *quod deus omnia in mensura et numero et pondere disposuit.*

Im ersten Viertel des 13. Jahrhunderts schrieb Jordanus Nemorarius (um 1235 nach Fabricius IV 176) eine Rh. Seine Arbeit dürfte erst am Beginn der Neuzeit weiteren Kreisen bekannt geworden sein, als Jacobus Faber Stapulensis sie den Ausgaben von Nemorarius' Arithmetik Paris 1496 und 1503 anfügte. Ausser diesen Ausgaben hat M. Curtze von Jordanus' Rh. eine abgekürzte Form kennen gelernt in einem von ihm in Bulletino Boncompagni Tom. I p. 140 bezeichneten, seitdem verloren gegangenen Bande der Königsberger Bibliothek.

Im 14. Jahrh. soll nach Boissier's Angabe Nicolaus Oresmius (von jenem Orestinus genannt), als episcopus Lexoviensis † 1382, sich mit dem Spiel befasst haben. Fabricius V 120 schweigt darüber, und M. Curtze, der über „die mathematischen Schriften des Nicole Oresme“ im Programm des Gymn. zu Thorn 1870 gehandelt, hat auch seit der Zeit, wie er mir im J. 1878 mittheilte, trotz fernerer Handschriftenforschungen, die die Schriften des Mannes betrafen, eine Rhythmomachie desselben nicht zu Gesicht bekommen[1]).

Das Ende des 15., sowie das ganze 16. Jahrhundert scheint sich dem Spiele mit einem Eifer, der an den des 12. erinnert, hingegeben zu haben. Es sind vornämlich Engländer und Franzosen, die sich seiner annehmen. Mein Bericht gründet sich, da ich von all den Ausgaben nur die jüngsten in den Breslauer Bibliotheken vorfand, hauptsächlich auf Boissier, der aber

1) Hier will ich noch anfügen die Notiz des Breviloquus Benthemianus s. XV in. (Progr. der Realsch. des Johanneums zu Hamburg 1879 s. 26): *Richmachia: est tabula geometricalis, in qua pueri discunt algorismum uel in qua proprium est disci algorismum, ubi tractatur de numero et pugnatur. et dicitur a ricmos id est numerus et machos pugna.*

selbst die erste der zu nennenden, die von Shirwood s. a. et l. in 4° (Rom 1482) nicht gekannt zu haben scheint.

Indem Boissier eine *„altera Chaldaeorum ludendi ratio"* bespricht, sagt er f. 41^b: *cum saepius ea mihi uenirent in mentem, quae Thomas Randolphus Vir bonarum literarum studiosissimus, cum Lutetiae operum literis dabat, solitus erat mihi dicere de uaria Rythmomachia ludendae ratione, qua Angli delectantur . . . obtulit se mihi humanissimus uir Thomas Topcliphus* (ein Anglus, der wie B. bezeugt, *praecipue in Astronomia, Algebra et Scenographia praestat) . . . copiam mihi fecit cuiusdam libelli, qui, ut ille retulit, decerptus est ex quodam ueteri libro Chaldaico ac anglico sermone donato. Hic libellus quandam ludendae Rythmomachiae rationem paulo a priore diuersam continet.* Einen französischen Freund der R. nennt B. f. 17^a (hinter f. 31^b!) am Schluss eines Abschnittes *Honoris litisque Victoria*: *„haec ultima species simplicium Victoriarum satis feliciter excogitata est a nostro Ioh. Mesmio Marsano mathemata Lutetiae profitente.* — Er glaubt: *hanc progressionis formam (quae Schachico respondet) nostri ludi perfectionem esse quamque ueteres in ludendo secuti sunt. Qua de re coniecturam capio progressum schachorum et incessum indidem suam originem traxisse. Hinc satis integrum est intueri, quam seuere et Stoice a quibusdam ueteribus hic ludus descriptus sit: qui dum contemplatione ludi contenti sunt, contempserunt id in huius ludi exercitatione, quod neque ingratum neque iniucundum ludentibus fuisset: Hi uero sunt Gilbertus Papa, Hermannus Contractus Castrensis*[1]), *Nicolaus Orestinus: quos hac nostra memoria sunt imitati Orontius Finaeus Delphinas, Iacobus Faber Stapulensis neque ego hactenus ab eorum uestigiis discessi.*

Des Orontius Schrift habe ich in dem bibliographischen Nomenclator R. Constantino authore Paris. 1555 und anderwärts vergeblich gesucht; vielleicht ist sie ein Anhang seines dort p. 104 citirten Werks Arithmetices practicae lib. 4.

Jacques Lefevre aus Etaples en Picardie 1455—1537 „scripsit (wie es dort p. 103 heisst) in Arithmeticem Boethii et Jordani. Et Rithmomachiae ludum". Und Boissier sagt f. 49^a: *„huic meae opellae id quod Iacobus Faber Stapulensis scripsit adiungere uisum est"* und es folgt 49^b —52^a *„Rythmomachia Iacobi Fabri Stapulensis . Dialogus . Bathillus . Alcmeon . Orontinus ."* Libri führt von diesem Dialog, der, wie schon der Name Orontinus zeigt, nicht von Jordanus herrühren kann, Pariser Folioausgaben von 1496 und 1510 an; ich finde ferner eine Ausgabe von 1514 genannt im Verzeichniss alter Drucke der Joachimsthal'schen Gymnasialbibliothek zu

1) Wie kommt Hermann zu dieser Bezeichnung?

Berlin Progr. 1878 p. 37: *Arithmetica . . Musica . . Epitome in libros diui Seuerini Boetii . Rithmimachie ludus . Haec secundaria sup. opp. ed. uenalis habetur Parisiis: in officina Henrici Stephani* (1514). Inwieweit diese von den bei Jordanus genannten Ausgaben verschieden sind, kann ich nicht angeben. Nur nimmt mich Wunder, dass Boissier des Jordanus Namen so ganz verschweigt. Sollte die äussere Verbindung mit dessen Arithmetik in Lefevre's Ausgaben verleitet haben, des Commentators Werk dem Commentirten unterzuschieben?

Die verschiedenen Arten, auf die man das Spiel in England und Frankreich betrieb, mag wer Lust hat bei Boissier selbst nachlesen, dessen Ausgabe nicht gar zu selten. Dass es wirklich gespielt und nicht bloss theoretisch betrieben wurde, wenngleich in kleineren Kreisen und von ernsteren Leuten, ist nicht zu bezweifeln[1]). Thomas Morus (1480, † 1535) empfiehlt es in seiner Utopia neben einem andern an Wibold's Alea regularis (s. oben) erinnernden, zweifelsohne von demselben abgeleiteten Spiele. Er sagt lib. II im Capitel de artificiis (ed. Helmestadi 1672 in 4⁰ p. 69):

Aleam atque id genus ineptos ac pernitiosos ludos ne cognoscunt quidem. Caeterum duos habent in usu ludos, latrunculorum ludo non dissimiles: alterum numerorum pugnam, in qua numerus numerum praedatur; alterum in quo collata acie cum uirtutibus uitia confligunt. quo in ludo perquam scite ostenditur et uitiorum inter se dissidium et aduersus uirtutes concordia; item quae uitia quibus se uirtutibus opponant, quibus uiribus aperte oppugnent, quibus machinamentis ab obliquo adoriantur, quo praesidio uirtutes infringant, quibus artibus eorum conatus eludant, quibus denique modis alterutra pars uictoriae compos fiat.

Mit Boissier's Schrift ist doch wohl eher ein feierlicher Abschluss dieser Beschäftigung mit der R. erfolgt, als dass man in ihr die Inauguration einer neuen Epoche finden dürfte. Ihr Titel mag drum, gleichsam als Epitaphium, hergesetzt sein:

NOBILISSIMUS ET ANTIQUISSIMUS *ludus Pythagoreus (qui Rythmomachia nominatur) in vtilitatem & relaxationem studiosorum comparatus ad ueram et facilem proprietatem & rationem numerorum assequendam, nunc tādem per Claudium Buxerium Delphinatem illustratus.* (Das Bild einer Henne mit der Umschrift: *IN PINGUI . GALLINA* †) LUTETIAE *Apud Gulielmum Cauellat, sub pingui Gallina, ex aduerso collegij cameracensis. Abacus et calculi*

---

1) Die nothwendigen Spielrequisiten, Abacus et calculi, waren, wie der Titel der Boissier'schen Schrift anzeigt, käuflich „in Palatio apud Ioannen Gentil“. Meine Erwartung, das Germanische Museum in Nürnberg würde in Besitz eines mittelalterlichen Spielapparats sich befinden, war vergeblich.

væneunt in Palatio, apud Joannem Gentil. 1556 CUM PRIUILEGIO REGIS. *(52 foll. in 8⁰.)*

Wie es scheint, wurde gleichzeitig auch eine französische Uebersetzung ausgegeben.

Nur als Nachzügler[1]) ist zu nennen die Bearbeitung des Italieners Franz Barrozi, Venedig 1572[2]), mit deren Uebertragung durch den Herzog von Braunschweig[3]) im folgenden Jahrh. unser Spiel nochmals nach Deutschland kam, sicherlich ohne sich der warmen Aufnahme von ehedem zu erfreuen.

1) In welcher Abhängigkeit des William Fulco *Μετρομαχία* s. Ludus geometricus, London 1566 u. 1578. 4⁰, und desselben *Οὐρανομαχία* i. e. Astrologorum ludus, London 1571. 4⁰, von unserer Rythmimachia stehen, habe ich nicht erkundet.

2) Il giuco pittagorico nominato Ritmomacchia per Franc. Barrozi. Venet. 1572. 4.

3) Rythmomachia. Ein vortrefflich, und uhraltes Spiel, deß *Pythagorae:* Welches *Gustavus Selenus,* auß des *Francisci Barozzi,* Eines Venedischen Edelmans, welschem Tractätlein, ins deutsche ubergesetzet, seinem vorgehenden Tractat, vom König=Spiele, (dieweil es ebenmessig, ein scharffes nachdencken erfodert) zugeordnet, und mit nützlichen glossen, auß dem Claudio Buxero Delphinate, verbessert. *Cum Privilegio S. C. Maiest.* Apud *Henningum Gros.* Jun. M. DC. XVI. in Folio. [Bildet p. 443—495 des „Schach- oder Königspiels“ von Gustavo Seleno. Lipsiae CIϽIϽCXVI; die Rückseite von 495 enthält Errata, das nächste Blatt Angabe des Druckers und Verlegers.]


Fert eu angelinum quadro diatessaron orbi. Educit diapente choros per quinqe sorores. Et diapason habet
duplicati dona talenti. Diapason diapente triplex tunniculus artat. Octo beatudines nonem ordines
angelorum toni mensuram dant et resonant Bisdiapason zacheus reddit quadruplo. Super partientem cum
sua specie multimoda non admittit musica. nisi per sonorum ut cumque discrimina. Superbipartiens totum
continet in se minorem et duas partes eius. Super tripartiens totum minorem et tres partes eius ceterae
que species super partientis musicam constituunt uictoria n.
Osculetur me osculo oris sui quia
meliora sunt ubera tua uino fraglantia unguentis optimis. oleum effusum nomen tuum.
ideo adulescentule dilexerunt te nimis.
FINIT · OPVS · FORTOLFI · Amen

VERSUCH EINER GESCHICHTE

DER

DARSTELLUNG WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN

EINER VARIABLEN

DURCH TRIGONOMETRISCHE REIHEN

VON

ARNOLD SACHSE

IN STRASSBURG I. E.

I.

Seitdem Riemann in seiner im Jahre 1854 verfassten Habilitationsschrift[1]) einen geschichtlichen Ueberblick über die Untersuchungen und Ansichten betreffend die Darstellung willkürlicher Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen bis zu den Arbeiten von Dirichlet einschliesslich gegeben hat, sind so viele fruchtbringende Untersuchungen auf diesem Gebiete angestellt worden, dass es sich des Versuches vielleicht verlohnen dürfte, die erlangten Resultate in Kurzem zusammenzufassen. Wenn man eine willkürliche Function als eine solche definirt, deren Eigenart in jedem kleinsten Intervalle keine Bedingung über ihre Beschaffenheit in irgend einem andern Intervalle in sich schliesst, so ist die allgemeinste Aufgabe, welche den Arbeiten über die Darstellung willkürlicher Functionen zu Grunde liegt, die: eine solche Function in einer mathematischen Form darzustellen, in der nur die Grundoperationen der Arithmetik, Addition, Subtraction, Multiplication und Division sei es endlich oder unendlich oft auftreten. Die ausserordentliche Allgemeinheit des gestellten Problems hat naturgemäss die Forschung zunächst auf die Functionen e i n e r Variablen hingewiesen, auf die wir uns auch im Folgenden beschränken wollen.

Im vorigen Jahrhundert führte die Untersuchung über die schwingenden Saiten auf die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

D'Alembert gab als allgemeine Lösung die Summe zweier ganz willkürlicher Functionen der Variablen x und t an:

$$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t),$$

und zeigte, dass nur eine willkürliche Function auftrete, wenn y zugleich der Bedingung genügen solle, an der Stelle $x = 0$ und $x = l$ zu verschwinden. Daniel Bernoulli zeigte, dass die Differentialgleichung sowohl, als auch die Nebenbedingungen durch eine trigonometrische Reihe befriedigt werden könnten, und behauptete, diese sei die allgemeinste Lösung.

---

1) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Gesammelte Werke pag. 213—253.

Euler formulirte das hiermit auftauchende Problem dahin: Kann eine ganz willkürliche Function einer Variablen allemal durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden?

Wie weit die Lösung dieses Problems bis jetzt gelangt ist, soll eben hier dargestellt werden.

Zu jener Zeit wurde der Begriff einer willkürlichen Function weit beschränkter aufgefasst, als er oben angegeben ist. Man ging im vorigen Jahrhundert durchaus von geometrischen Anschauungen aus, indem man nur solche Functionen im Auge hatte, bei denen man sich eine Darstellung in stetig fortlaufenden Linienzügen vorstellen konnte. Man sprach von graphisch gegebenen Functionen, ein Ausdruck, dessen sich Riemann trotz seiner beschränkten Anwendbarkeit später auch noch bedient. Euler nannte diese Functionen functiones continuae. Bei diesen glaubte man nach langem Streit zu dem Resultate gelangt zu sein, dass sie sich durch eine trigonometrische Reihe darstellen liessen. Ausserdem dachte man sich noch solche Functionen, die an einer Stelle plötzlich unterbrochen und an einer anderen fortgesetzt wären. Man sah sie aber nicht als eine Function an, sondern als eine aus Theilen zusammengesetzte, und meinte, dass alle Theile zusammen durch eine trigonometrische Reihe nicht dargestellt werden könnten. Fourier's Behauptung, dass eine jede willkürliche Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar sei, erregte daher nicht geringes Aufsehen. Denn sie widersprach durchaus dem bisherigen Functionenbegriff und nöthigte dazu, künftighin eine Function, auch wenn sie in ihren verschiedenen Theilen verschiedenen Gesetzen gehorchte, als eine Function anzusehen. Die erste Mittheilung von seiner grossen Entdeckung machte Fourier 1807 der Pariser Akademie. Seine weiteren ausgedehnten Forschungen über die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen, die sich an Probleme der Wärmetheorie anknüpften, hat er in zahlreichen Abhandlungen veröffentlicht und schliesslich in seinem umfassenden Werke der „théorie de la chaleur" 1822 niedergelegt.

Soll die trigonometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$ die Function $f(x)$ für jeden Werth von x darstellen, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

sein, so bestimmt Fourier die Coefficienten a_n, b_n dadurch, dass er beiderseits mit $\sin nx$ resp. $\cos nx$ multiplicirt, und von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirt. Er glaubte behaupten zu dürfen: Wenn man in der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha;\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha$$

setzt, so stellt diese Reihe allemal für jeden Werth von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ die Function $f(x)$ dar. Man hat seitdem die trigonometrischen Reihen mit diesen Coefficienten Fourier'sche Reihen genannt und diesen Namen schliesslich auf alle trigonometrischen Reihen übertragen. Erst in neuerer Zeit nach dem Vorgange von Herrn Heine[1]) beginnt man wieder trigonometrische Reihen mit irgend welchen Coefficienten und Fourier'sche Reihen zu unterscheiden, um für besondere Functionengattungen die Möglichkeit noch offen zu lassen, dass sie durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden könnten, die nicht die von Fourier bestimmten Coefficienten besitzt.

Was nun die Geschichte des Ursprungs der trigonometrischen Reihen aus speciellen physikalischen Problemen betrifft, so hat Riemann (a. a. O.) dieselbe ausführlich behandelt und wir bescheiden uns daher, nur auf zwei Punkte aufmerksam zu machen.

Das Verdienst Fourier's, scheint mir, ist nicht in der Auffindung der Coefficientenbestimmung zu suchen, sondern darin, dass er zuerst bemerkte, dass eine trigonometrische Reihe mit den nach ihm benannten Coefficienten auch eine ganz willkürliche Function darstellen könne. Denn die Coefficientenbestimmung an sich war nicht neu. Die Methode hatte Lagrange bereits 1766 in den Miscellanea Taurinensia[2]) gegeben, wenn auch ohne volles Bewusstsein ihrer Bedeutung, und wenn er sie auch nicht bis zu Ende durchgeführt hat. Er löst die Aufgabe, eine gebrochene Linie derart darzustellen, dass sie mit einer gegebenen in n Punkten übereinstimmt. Er sagt aber ausdrücklich (a. a. O. pag. 259), dass diese gebrochene Linie immer genauer mit der gegebenen übereinstimme, je mehr Punkte man nähme, und dass man durch Annahme unendlich vieler gemeinsamer Punkte den Ausdruck einer stetigen Curve erhielte, die mit der gegebenen identisch sei. Die Interpolationsmethode Lagrange's ist im Grunde dieselbe, wie die Fourier's, nur tritt bei Lagrange das Wesen der Coefficientenbestimmung

1) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 71. pag. 354.

2) Tom. III. Pars. math. pag. 251.

viel schärfer hervor, und desswegen ist sie wohl auch von Dirichlet[1]) und Riemann[2]) in ihren Demonstrationen bevorzugt worden. Aber auch die Multiplicationsmethode, welche Fourier gegeben, gehört ihm nicht ursprünglich an. Es scheint Riemann entgangen zu sein, dass bereits Euler[3]) 1777 (veröffentlicht 1798) die Coefficientenbestimmung durch Multiplication gegeben hatte, worauf Jacobi[4]) aufmerksam macht. Da sich in dem dritten Bande der Misc. Taur. auch Abhandlungen von Euler befinden, so ist kein Zweifel, dass Euler die Lagrange'sche Entwickelung gekannt hat; ebensowenig kann ein Zweifel darüber bestehen, dass Fourier die Euler'schen Resultate bekannt gewesen sind. Denn er führt selbst an (th. de la ch. art. 428), dass man bei fast allen Mathematikern der Zeit Daniel Bernoulli, Clairaut, Euler, Lagrange den seinigen analoge Resultate und Entwickelungen fände.

Ferner dürfte vielleicht der Riemann'schen Geschichtserzählung noch die Notiz hinzuzufügen sein, dass auch Poisson eine eigene Methode der Coefficientenbestimmung gefunden hat, die wegen der vielen Untersuchungen und Folgerungen, welche daran geknüpft worden sind, besonders merkwürdig ist. In der für $r < 1$ richtigen Formel[5])

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x - \alpha) + r^2}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(x - \alpha)\, d\alpha$$

geht Poisson zur Grenze $r = 1$ über und sucht darzuthun, dass alsdann das Integral links in den Werth der Functionen $f(x)$ an der Stelle x überginge.

Bei Fourier fehlt der Beweis, dass die unendliche trigonometrische Reihe, welche er als Darstellung einer Function erhält, wirklich gegen den Werth der Function convergirt. Er gibt zwar (art. 177. a. a. O.) eine strenge Definition der Convergenz einer Reihe, hält aber im gegebenen

1) Dove und Moser, Repertorium für Physik. Band 1. 1837. pag. 152—174.

2) Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausg. von Hattendorf.

3) Nova acta Acad. Scient. Petrop. Tom. XI. 1798. pag. 114.

4) Crelle's Journ. für Math. Bd. 2. pag. 2.

5) Ausführlich angegeben findet man die Stellen, wo diese Formel steht, bei H. A. Schwarz: Zur Integration der part. Differentialgl. $\Delta u = 0$. Borchardt's Journ. für Math. Bd. 74. 1872. pag. 226; hier sei angeführt: Journ. de l'école polyt. cah. 19. 1823 pag. 404 u. f., und Mémoires de l'Acad. Royale des Sc. de l'inst. de France. 1823. pag. 574.

Falle den Beweis für die Convergenz ausgesprochenermassen für leicht genug, um ihn dem Leser zu überlassen. Es zeigte sich, dass in den speziellen Fällen, die man überhaupt aufstellte, und für specielle Werthe der Variablen die Reihe in der That gegen den Werth der Function convergirte; dass aber dennoch ein von der Eigenart der Function unabhängiger und für das ganze Intervall geltender Beweis ein dringendes Bedürfniss sei, scheint zuerst Cauchy[1]) empfunden zu haben.

Er theilte der Pariser Akademie im Jahre 1826 einen Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe mit. In demselben wird das allgemeine $n$te Glied der Reihe auf eine Form gebracht, die anzeigt, dass das Verhältniss desselben zu der Grösse $A\frac{\sin nx}{n}$, wo A eine für alle Glieder gleich grosse Constante bezeichnet, um so weniger von der positiv genommenen Einheit abweicht, je grösser n wird. Daraus, dass nun die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $A\frac{\sin nx}{n}$ convergirt, will Cauchy die Convergenz der Fourier'schen Reihe schliessen. Dass letzterer Schluss durchaus falsch ist, hat Dirichlet[2]) gezeigt. Cauchy erkannte auch selbst, dass seine Methode in manchen Fällen versage, und dass sie jedenfalls voraussetze, dass das allgemeine Glied für $n = \infty$ bestimmt sei. Die Umformung der Reihe aber, an welcher Dirichlet noch überdies Anstoss genommen hatte, da ihr Princip nicht sicher definirt sei, beruht wie Riemann (art. 2. a. a. O.) bemerkt, nur auf der Annahme, dass es eine Function $\varphi(x + yi)$ des complexen Argumentes $x + yi$ gebe, welche für alle positiven Werthe von y endlich sei, und deren reeller Theil für $y = 0$ der gegebenen willkürlichen Function $f(x)$ gleich wird. Riemann setzt hinzu: „Will man diesen Satz, der in der That richtig ist, voraussetzen, so führt allerdings der von Cauchy eingeschlagene Weg zum Ziele, wie umgekehrt dieser Satz sich aus der Fourier'schen Reihe ableiten lässt."

Zur Prüfung dieser Behauptung fordert Herr H. A. Schwarz[3]) auf. Die Behauptung zerfällt in zwei Theile. Dass erstens Riemann nur gemeint haben sollte, nach bewiesener Voraussetzung gelte nun der Cauchy'sche Beweis ohne Weiteres, ist (nach den Dirichlet'schen Einwänden) von vornherein ausgeschlossen. Er kann vielmehr hiermit nur gemeint haben, es sei möglich, eine Function $\varphi(x + yi)$ des complexen Argumentes $x + yi = re^{\alpha i}$ in eine nach Potenzen von $x + yi$ fortschreitende convergente Reihe zu entwickeln, deren reeller Theil für einen bestimmten Werth von r in

---

1) Mémoires de l'Acad. R. des Sc. de l'inst. de France. Tome VI. pag. 603 u. f.
2) Crelle's Journ. für Math. Bd. 4. pag. 158.
3) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 74. pag. 232. Anmkg.

die Fourier'sche Reihe für die Function $f(\alpha)$ überginge, und dass die Convergenz der Fourier'schen Reihe aus der Convergenz der ersten gefolgert werden könnte. Nun giebt es eine im Innern eines Kreises mit dem Radius 1 convergente Reihe:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)d\gamma + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{+\pi} f(\gamma)\cos n(\alpha-\gamma)d\gamma,$$

welche für $r = 1$ formal in die Fourier'sche Reihe übergeht, aber es ist die Frage, ob der Uebergang in gleichmässig stetiger Weise erfolgt. Die vielfachen Untersuchungen über diese und einschlägige Fragen wurden zum Abschluss gebracht durch zwei fast gleichzeitig erschienene Abhandlungen, die erste von Herrn H. A. Schwarz[1]), die andere von Herrn Prym[2]). Herr H. A. Schwarz beweist folgenden in seinen wesentlichen Theilen schon von Riemann behaupteten Satz: „Wenn längs des Randes einer Kreisfläche mit dem Radius 1 eine für alle Werthe des Argumentes α endliche stetige und eindeutige reelle Function $f(\alpha)$, welche bei Vermehrung des Arguments um 2π periodisch in sich zurückkehrt, sonst aber keiner weiteren Beschränkung unterliegt, willkürlich vorgeschrieben ist, so giebt es jedesmal eine und nur eine einzige innerhalb und am Rande des Kreises stetige Function u, deren Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, im Innern der Kreisfläche endliche, stetige und eindeutige Functionen von x und y sind, welche die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllt, und längs des Randes mit der gegebenen Function $f(\alpha)$ übereinstimmt." Der Beweis dieses Satzes wird aber nicht aus der Reihe, sondern aus dem Poisson'schen Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-x)+r^2}\,d\alpha$$

abgeleitet, welches im Innern des Kreises mit der obigen Reihe übereinstimmt und den reellen Theil der durch die Gleichung

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{e^{\alpha i}+z}{e^{\alpha i}-z}\,d\alpha$$

1) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich. Jahrg. XV. „Ueber die Integration der Dfflgl. $\Delta u = 0$ für die Fläche eines Kreises." Ein Abdruck der Abh. nebst Fortsetzung und Erweiterung der darin enthaltenen Untersuchungen in Borchardt's Journ. für Math. Bd. 74. 1872.

2) Ueber die Dfflgl. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Borchardt's Journ. für Math. Bd. 73. 1871.

für alle Werthe von $z = re^{\alpha i}$, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, mit dem Charakter einer ganzen Function eindeutig definirten Function des complexen Argumentes $z = x + yi$ darstellt. Das Poisson'sche Integral verliert nun am Rande seinen Sinn. Wenn man aber festsetzt, die durch das Integral im Innern des Kreises definirte Function solle am Rande mit der Function $f(\alpha)$ übereinstimmen, so lässt sich zeigen, dass die Werthe des Integrals in unendlicher Nähe des Randes in stetiger Weise in die Werthe der Function $f(\alpha)$ am Rande übergehen. Der reelle Theil der im Innern des Kreises definirten Function $\varphi(x + yi)$ geht demnach am Rande stetig in die Function $f(\alpha)$ über.

Andrerseits folgt aus dem von Dirichtet[1]) neu bewiesenen Abel'schen[2]) Satze, wonach die Grenze einer convergenten Potenzreihe $c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots.$, wenn r dem Werthe 1 unendlich nahe kommt, gegen den Werth $c_0 + c_1 + c_2 \ldots..$ convergirt, falls letztere Reihe convergirt, dass die mit dem reellen Theile von $\varphi(z)$ im Innern des Kreises übereinstimmende Reihenentwicklung nach Potenzen am Rande stetig in die Fourier'sche Reihe übergeht. An den Stellen, wo also die Fourier'sche Reihe convergirt, kann sie nicht verschieden sein von den zugehörigen Werthen von $f(\alpha)$. Ob aber, und wann sie convergirt, können wir hieraus überhaupt nicht schliessen.

In dem Handbuche der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait[3]) wird ein Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe gegeben, der, was Mangel an Strenge betrifft, wenig hinter dem Cauchy'schen, auf dem er sich im Allgemeinen aufbaut, zurücksteht. Die Fourier'sche Reihe wird aus der Umformung eines Integrals erhalten, von dem gezeigt wird, dass es zwischen einander immer näher rückenden endlichen Grenzen eingeschlossen werden kann. Damit ist aber gar nichts bewiesen. Die Herren W. Thomson und P. G. Tait versuchen ihr Verfahren sowohl im Allgemeinen in der Vorrede, als auch speciell im citirten Art. zu rechtfertigen. Die Berechtigung für ihr Verfahren leiten sie aber nur daraus her, dass „jede der (von ihnen) äquivalent gesetzten Formeln einen bestimmten arithmetischen Sinn habe, und die darin enthaltene Reihe somit convergire".

An zweiter Stelle behauptet Riemann, es lasse sich umgekehrt der pag. 236 angeführte Satz aus der Fourier'schen Reihe ableiten. Dieser Weg

1) Liouville. Journ. des Math. Sér. II. Tome VII. pag. 253—255.
2) Crelle's Journ. für Math. Bd. I. pag. 314—315.
3) Treatise on natural philosophy by W. Thomson and P. G. Tait. Vol. I. Part. I. 1879. New ed. art. 77. pag. 59 and f.

ist auch von Herrn Neumann[1]) eingeschlagen worden. Dagegen sind aber mehrfach Einwendungen gemacht worden. Herr Heine[2]) gab hier den Anstoss, indem er neben anderen Gründen auch deswegen die Neumann'sche Methode für unsicher hielt, weil damit ohne jede weitere Voraussetzung die Eindeutigkeit der Entwickelung einer Function in eine Fourier'sche Reihe bewiesen wäre. Besonders betont aber hat die Einwände Herr Prym (a. a. O.). Man kann von der Fourier'schen Reihe gar nicht ausgehen, wenn man den Satz in seiner vollen Allgemeinheit beweisen will, weil der Beweis fehlt, dass die Fourier'sche Reihe für alle stetigen Functionen convergire. Somit dürfte auch der zweite Theil der Riemann'schen Behauptung nicht als zutreffend anzusehen sein.

II.

Dieser Versuch von Cauchy war, wie Dirichlet sagt, seines Wissens der einzige, der bis dahin gemacht war, als Dirichlet im Jahre 1829 seine Abhandlung über die trigonometrischen Reihen[3]) veröffentlichte, die Riemann mit Recht die erste gründliche Untersuchung auf diesem Gebiete nennt. Man hatte bemerkt, dass bis dahin als richtig angesehene Methoden sich in speciellen Fällen als fehlerhaft oder unzureichend erwiesen, ohne dass man einen Fehler der Rechnung auffinden konnte, und war zu der Ansicht gelangt, dass der Fehler nur in den Principien liegen könnte. Die Hauptvertreter dieser Periode der Aufklärung über die Fundamente der Infinitesimalanalysis sind Cauchy, Abel und Dirichlet. Abel gab in einem Briefe 1826 seinem Erstaunen darüber Ausdruck, dass die Theorie der unendlichen Reihen bisher noch so unvollkommen begründet sei, insbesondcre, dass man alle für Functionen, die aus endlichen Grössenoperationen entstehen, geltende Regeln ohne Weiteres auf die unendlichen Reihen übertrüge[4]). Damit hatte er den Punkt getroffen, aus dem so viele Paradoxa entsprungen waren. Die Grundlage des Dirichlet'schen Beweises, welche auf eben dieser Erkenntniss beruht, die Auffindung des Unterschiedes zwischen unbedingter und bedingter Convergenz der Reihen, hat Riemann (a. a. O. art. 3) in meisterhafter Weise klargelegt. Indem Dirichlet die strengste Definition der Grundbegriffe der Analysis auf die Theorie der trigonometrischen Reihen

---

1) In seiner Schrift „Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen.“ Leipzig 1865. pag. 5 u. f.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 71. pag. 361.

3) Crelle's Journ. für Math. Bd. 4. 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques, qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

4) Abel, Oeuvres compl. Bd. 2. pag. 265. Brief vom 16. janv. 1826.

übertrug, gab er den Anstoss zu der mannichfachen Förderung und Klärung, welche diese Grundbegriffe bei Gelegenheit der Untersuchungen über die trigonometrischen Reihen erfahren haben.

Ausser der genannten Abhandlung hat Dirichlet noch eine zweite Abhandlung über die trigonometrischen Reihen geschrieben (siehe pag. 234. Anm. 1), die jedoch wesentlich nur eine ausführliche Darlegung der in der ersten Abhandlung theilweise nur angedeuteten Methoden enthält.

Dirichlet stellt sich die Aufgabe zu untersuchen, wann die Fourier'sche Reihe convergirt, und schlägt dazu folgenden Weg ein. Er untersucht, wie eine Function $\varphi(x)$ beschaffen sein muss, damit die Summe der $(2n+1)$ ersten Glieder der Fourier'schen Reihe:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos kx \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos k\alpha\, d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \sin kx \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha = \int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} \varphi(x - 2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

$$+ \int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} \varphi(x + 2\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

mit unendlich werdendem n gegen den Werth der Function an der Stelle x, nämlich gegen $\varphi(x)$, convergirt. Die Untersuchung kommt daher auf die Bestimmung eines Integrales von der Form

$$\lim_{k=\infty} \int_{0}^{h} f(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta_{0<h \leqq \frac{\pi}{2}}$$

hinaus. Wenn man die Voraussetzung macht, $f(\beta)$ solle erstens zwischen 0 und h beständig endlich und bestimmt sein, und zweitens beständig positiv sein und nie zunehmen, so ist das Integral in eine Summe von Theilintegralen zerlegbar, deren jedes so beschaffen ist, dass die Function unter dem Integralzeichen beständig von demselben Zeichen innerhalb desselben Intervalles ist. In jedem Intervall lässt sich nun ein bekannter Mittelwerthsatz anwenden, und alsdann erhält man eine Reihe alternirender Glieder, die immer kleiner werden. Vermöge dieser Eigenschaft der Reihe kann man die Summe der $2n+1$ ersten Glieder zwischen zwei Grenzen einschliessen und zeigen, dass beide Grenzen bei wachsendem n gegen $\frac{\pi}{2}f(0)$ convergiren. Hiernach ist

I) $$\lim_{k=\infty} \int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} f(0)_{0 < h \leqq \frac{\pi}{2}}$$

und daraus folgt unmittelbar, dass

II) $$\lim_{k=\infty} \int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = 0_{0 < g < h \leqq \frac{\pi}{2}}$$

ist. Mit Hülfe des Satzes II) kann man den Satz I) auf alle stetigen Functionen ausdehnen, die nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis haben. Hierbei nennt Dirichlet eine Function stetig, wenn sie zwischen 0 und h endlich und bestimmt bleibt, und bei der ausserdem noch $f(\beta + \delta) - f(\beta)$ mit δ ohne Grenzen kleiner wird. Es lässt sich jedoch in Folgendem überall die schärfere Definition zu Grunde legen: Eine Function $f(\beta)$ ist in der Umgebung eines Punktes β dann stetig, wenn es nach Annahme einer von Null verschiedenen, sonst beliebig kleinen Grösse ε stets eine Grösse δ' derart giebt, dass für alle Grössen δ'', deren absoluter Betrag unter dem von δ' liegt, $f(\beta + \delta'') - f(\beta)$ unter die Grösse von ε herabsinkt. Ist die Function $f(\beta)$ an der Stelle 0 unstetig, so convergirt die Fourier'sche Reihe auch noch, aber gegen den Werth $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\pi}{2}\big(f(0+\varepsilon) + f(0-\varepsilon)\big)$. Dies geschieht auch noch, wenn ausserdem noch in dem Intervalle von 0 bis h eine beliebig grosse, aber endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen liegt.

Wenn man nun die Function $\varphi(x)$ denselben Bedingungsn unterwirft, wie $f(\beta)$, so lässt sich unschwer zeigen, dass die Summe S für jede innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ gelegene Stelle x gegen den Werth $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(x+\varepsilon) + \varphi(x-\varepsilon)}{2}$ convergirt, für die Grenzen selbst aber gegen den Werth $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(-\pi+\varepsilon) + \varphi(\pi-\varepsilon)}{2}$ convergirt.

Wir haben demnach den Satz:

„Die Fourier'sche Reihe für eine Function, die

1) nicht unendlich wird,
2) nicht unendlich viele Unstetigkeiten, und
3) nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt,

convergirt gegen den Werth der Function an allen Stellen, ausser an den Unstetigkeitsstellen, wo sie gegen den Mittelwerth aus den beiderseitigen Grenzwerthen convergirt.“ Die Bedingungen, denen hier die Function unterworfen ist, sind zumeist als die Dirichlet'schen bezeichnet worden.

Es fragt sich nun, was wir unter dem Ausdruck zu verstehen haben „eine Reihe stellt eine Function dar". Wollten wir darunter verstehen, dass der Werth der Reihe mit dem Werthe der Function für jeden im Intervall gelegenen Punkte übereinstimmt, so müssten wir schon bei Functionen, welche den Dirichlet'schen Bedingungen genügen, auf eine Darstellung durch eine Fourier'sche Reihe verzichten. Wir werden daher folgende Definition vorziehen: „Eine Reihe stellt eine Function in einem Intervalle dann dar, wenn ihre Werthe mit denen der Function für alle im Intervall gelegenen Punkte mit Ausnahme einer endlichen Anzahl bestimmter Punkte übereinstimmen". Dann wird eine den Dirichlet'schen Bedingungen genügende Function durch die Fourier'sche Reihe allemal dargestellt und die Ausnahmepunkte sind die Unstetigkeitspunkte. Nimmt jedoch eine Function an den Unstetigkeitsstellen jedesmal den Mittelwerth aus den beiderseitigen Grenzwerthen an (ein Fall, den auch Riemann a. a. O. pag. 223 besonders in Betracht zieht), und genügt sie den Dirichlet'schen Bedingungen, so ist sie ausnahmslos durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar; und selbst für eine Function, die nur der ersten Bedingung genügt, im Uebrigen aber unendlich viele Unstetigkeiten besitzt, ist noch die Möglichkeit offen gelassen, sie ausnahmslos durch eine Fourier'sche Reihe darzustellen.

Es würde nichts hindern zu definiren, dass eine Reihe auch dann noch eine Function darstellt, wenn man selbst an einer unendlich grossen Anzahl von Stellen auf die Uebereinstimmung der Werthe verzichtet. Diese Auffassung findet sich bei Riemann auch, a. a. O. pag. 245, letzter Absatz, im Gegensatz zu pag. 223, zweiter Absatz. Da es sich aber nur um den Wortlaut handelt, so ziehe ich die erstgegebene Definition vor, da sie mir als die natürlichere erscheint.

Wenn wir nun bisher nur von einer Darstellung einer um 2π periodischen Function innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ gesprochen haben, so ist dies nur der Einfachheit halber geschehen. Man kann statt dieser Grenzen leicht beliebige andere substituiren und die bisherigen Sätze auf Functionen mit beliebigen Perioden übertragen. Sie gelten aber auch für eine gar nicht periodische Function, wenn sie nur den nöthigen Bedingungen genügt, zwischen ganz beliebigen Grenzen, indem der Verlauf einer willkürlichen Function innerhalb einer gegebenen Strecke eine beliebige Verfügung über alle ausserhalb der Strecke gelegenen Werthe nicht verbietet.

Wir haben nun noch auf einen Punkt aus dem Dirichlet'schen Beweis näher einzugehen, dass nämlich die Fourier'sche Reihe an den Unstetigkeitsstellen gegen den Mittelwerth aus den beiden Grenzwerthen convergirt. Es ist von Herrn Schläfli bezweifelt worden, ob dies angänglich und richtig sei.[1]). Herr Schläfli beruft sich auf Duhamel[2]), indem er von dessen Abhandlung meint, hier scheine dem Verfasser der Gedanke vorzuschweben, dass es natürlicher wäre, der durch die trigonometrische Reihe ausgedrückten Function an der Unstetigkeitsstelle alle Werthe, die zwischen den Grenzwerthen in stetiger Folge liegen, beizulegen. Nun spricht freilich Duhamel den Satz aus: Wenn man die Summe der ersten n Glieder einer Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen von x sind, zusammenzieht, und statt x eine Function von n substituirt, die mit wachsendem n in einen Werth x_1 übergeht, für den die Function eine Stetigkeitsunterbrechung erfährt, so kann man diese Function von n so einrichten, dass die Function gegen jeden Zwischenwerth zwischen den Grenzwerthen convergirt. Er sagt aber zugleich, es gäbe zwei Wege, um den Werth einer Reihe an einer Stelle x_1 zu finden. Man könne zuerst $x = x_1$ setzen und dann summiren, so fände man einen Werth, und diesen Weg wende man an, um die Summe der Reihe wirklich auszuwerthen. Oder man bildet zuerst die Summe formal und setzt dann den Werth $x = x_1$ ein. Duhamel erkennt sehr richtig, dass bei stetigen Functionen beide Wege zu demselben Ziele führen, bei den unstetigen aber der angeführte Satz gelte. Aber die zweite Art und Weise der Aufsuchung der Summe ist überhaupt gar nicht zulässig, denn man darf nicht behaupten, dass die gefundene Summenformel für den Werth $x = x_1$ mit der Reihe für $x = x_1$ übereinstimme. Gegen die Zulassung einer derartigen Definition ist mit entscheidendem Gewicht ihre völlige Willkürlichkeit geltend zu machen. Es ist daher nur zulässig, den ersten Weg einzuschlagen, und dann convergirt die Fourier'sche Reihe nur gegen den Mittelwerth.

Auch Herr P. du Bois-Reymond[3]) hat den Nachweis zu führen versucht, dass die Fourier'sche Reihe an den Unstetigkeitsstellen jeden beliebigen zwischen den Grenzwerthen liegenden Werth annehmen kann. Er construirt an einer Unstetigkeitstelle $x = x_1$ als Werth des $\lim_{n=\infty,\, x=x_1}$ der Fourier'schen Reihe:

$$\frac{\pi}{2}\left(f(x_1+0)+f(x_1-0)\right)+\left(f(x_1+0)-f(x_1-0)\right)\lim_{\substack{n=\infty\\ x=x_1}}\int_0^{n(x-x_1)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

1) Einige Zweifel an der allgemeinen Darstellbarkeit einer willkürlichen periodischen Function einer Variablen durch eine trigonometrische Reihe. Bern 1874. Universitätsprogrm. pag. 15, und Borchardt's Journ. für Math. Bd. 72. Ueber die part. Differentialgl. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ pag. 284.

2) Liouville Journ. des Math. Tom. XIX. 1854. Note sur la discontinuité des valeurs des séries, et sur les moyens de la reconnaître.

3) Math. Annalen Bd. 7. 1873. Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen. Siehe insbesondere pag. 254: „Also sind alle Werthe,

Lässt man hierin erst $x = x_1$ und dann $n = \infty$ werden, so erhält man den Dirichlet'schen Mittelwerth; lässt man erst $n = \infty$ und dann $x = x_1$ werden, so erhält man die beiden Grenzwerthe, je nachdem man sich x_1 von der positiven oder negativen Seite her nähert; macht man aber die Grenzübergänge gleichzeitig, so erhält man alle dazwischen liegenden Werthe. Dies soll nach Herrn P. du Bois-Reymond die „eigentliche Werthbestimmung der Fourier'schen Reihe“ sein. Dass sie auf einer nicht zulässigen Ansicht über Reihensummationen beruht, ist nach dem Vorhergehenden klar. Es darf keine andere Reihenfolge stattfinden, als die, zuerst $x = x_1$ und dann $n = \infty$ zu setzen, und dann fällt hier auch die sogenannte Stetigvieldeutigkeit fort. Andernfalls erhält man nämlich gar nicht den Werth der Fourier'schen Reihe an der Stelle $x = x_1$.

Man hat sich zu der irrthümlichen Ansicht, dass die Dirichlet'sche Mittelwerthbestimmung nicht genau richtig sei, verleiten lassen durch die oben erwähnte Betrachtung einer durch das Poisson'sche Integral im Innern eines Kreises mit dem Radius 1 definirten Function von x und r. Wenn die mit dem Poisson'schen Integral identische Reihe am Rande in die willkürlich gegebene, endliche, stetige und eindeutige Function $f(x)$ übergehen soll, so geschieht dieser Uebergang auf stetige Weise, und selbst dann gilt der von Herrn H. A. Schwarz bewiesene Satz, wenn die Function an einzelnen Stellen unstetig wird, wenn man nur auf die Uebereinstimmung der durch die Reihe definirten Function mit der gegebenen Function an den Unstetigkeitsstellen am Rande verzichtet. Herr Prym untersucht (a. a. O.) genau die Art und Weise des Ueberganges und zeigt: dass die Function beim Uebergange $r = 1$ an den Unstetigkeitsstellen jeden beliebigen zwischen den Grenzwerthen liegenden Werth und diese selbst annehmen kann, je nach der Richtung, in welcher man die Verbindungslinie zwischen dem Endpunkte von r und der Unstetigkeitsstelle an dieser gegen Null abnehmen lässt. Die Fourier'sche Reihe convergirt aber durchaus nur gegen den Mittelwerth, da sich x dem Werthe x_1 im Gebiete einer Variablen nähert, dagegen der Endpunkt von r der Unstetigkeitsstelle im Gebiete zweier Variablen.

Die Dirichlet'schen Bedingungen sind keine nothwendigen, sondern nur hinreichende. Nach ihnen blieb noch in Frage, ob eine Function, die

1) an einer Stelle unendlich wird,
2) unendlich viele Unstetigkeiten,
3) unendlich viele Maxima und Minima besitzt,

noch durch die Fourier'sche Reihe darstellbar ist.

---

welche die Fourier'sche Formel und die Fourier'sche Reihe an der Sprungstelle repräsentirt, eingeschlossen zwischen den Grenzen $\pi f(x_1 - 0)$ und $\pi f(x_1 + 0)$, ein Intervall, das sie continuirlich ausfüllen, und kein Werth liegt ausserhalb.“

Wird die Function an einer Stelle c unendlich, so stellt Dirichlet bei Gelegenheit einer anderen Abhandlung[1]) die Convergenz des Integrals $\int f(\alpha)d\alpha$, wenn es über die Stelle c erstreckt wird, als Bedingung auf, damit die Fourier'sche Reihe auch dann noch die Function darstelle. Jedoch hat Dirichlet diese Bedingung durchaus nur als eine hinreichende, nicht als eine nothwendige aufstellen wollen. Wenn das Integral unbedingt convergirt, so ist diese Bedingung in der That eine ausreichende, wie Herr P. du Bois-Reymond bemerkt hat[2]).

Die beiden letzten Fälle, äusserte sich Dirichlet am Schlusse seiner ersten Abhandlung (pag. 169), seien auf die behandelten zurückzuführen. Eine Function, die unendlich viel Unstetigkeiten besässe, sei durch die Fourier'sche Reihe noch darstellbar, wenn sich nur zwischen zwei Stellen (a b) immer noch andere (r s) finden liessen, so dass zwischen letzteren die Function stetig wäre. Die Fundamentalsätze aus der Analysis, die zu dieser Erweiterung seines Satzes nothwendig seien, verspricht er in einer späteren Note auseinanderzusetzen, in der er sich auch noch mit andern merkwürdigen Eigenschaften der Reihe beschäftigen will. Dies Versprechen hat er aber nicht eingelöst. Die Bedingung, die er für die unendlich oft unstetigen Functionen formulirt, entspringt nach ihm aus dem Begriffe des bestimmten Integrals, und man hat daher sagen können, Dirichlet behaupte hier, für alle in seinem Sinne integrablen Functionen gelte die Fourier'sche Darstellung. Die genaue Ausführung des Beweises hat Herr Lipschitz gegeben[3]). Derselbe interpretirt Dirichlet's Ansicht über die Functionen mit unendlich vielen Unstetigkeiten gewiss richtig dahin, dass es dann nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte geben dürfe, in deren Umgebung unendlich viel Unstetigkeitspunkte liegen. Dann aber stellt die Fourier'sche Reihe, wie er beweist, in der That die Function noch dar. Ob die Function auch an den singulären Stellen durch die Reihe dargestellt wird, bleibt unentschieden, und wir haben kein Mittel, diese Frage zu beantworten.

Wenn nun eine Function unendlich viele Maxima und Minima hat, so hindert nichts die Fourier'sche Reihe für diese Function aufzustellen, wenn

1) Crelle's Journ. für Math. Bd. 17. pag. 54.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 79. 1874. Allgemeine Lehrsätze über den Giltigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen, pag. 43—46, und Abhandlungen der Bayerischen Akademie Bd. XII, II. Math.-Phys. Classe. 1876. pag. 43—44.

3) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 63. 1864. pag. 296. de explicatione per series trigonometricas etc. Die Abh. erschien zuerst pro aditu muneris professoris ordinarii in ord. phil. univ. Frid. Guil. Rhen. 1864 Mai.

nur die Coefficienten einen Sinn haben und die Reihe convergirt. Aber dass die so gebildete Reihe die Function anch wirklich darstelle, kann erst behauptet werden, wenn gezeigt ist, dass ihre Werthe in jedem Punkte höchstens mit Ausnahme einer endlichen Anzahl bestimmter Punkte mit denen der Function übereinstimmen.

Die Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis sind in solche einzutheilen, welche an einer Maximum-Minimumsstelle unendlich viele Oscillationen mit unendlich kleiner Amplitude besitzen, und solche, bei denen die Amplituden endlich sind. Die ersteren können stetige Functionen sein, die letzteren sind unstetige. Dirichlet hielt nun jedenfalls alle stetigen Functionen für darstellbar durch die Fourier'sche Reihe ohne irgend welche Ausnahmepunkte, und er soll auch nach einer mündlichen Mittheilung von Herrn Weierstrass, auf welche sich Herr P. du Bois-Reymond[1]) bezieht, diesen Glauben nicht verloren haben. Auch Riemann hat, nach mehreren Stellen seiner Schriften zu schliessen, an die Dirichlet'sche Behauptung geglaubt[2]); und H. Hankel[3]) meint geradezu „es sei durch Dirichlet, Lipschitz und Riemann erwiesen, dass alle stetigen Functionen in eine Fourier'sche Reihe entwickelbar seien". Das Irrige dieses Glaubens hat Herr P. du Bois-Reymond aufgedeckt, nachdem er nach mannichfachen vergeblichen Versuchen, den Satz zu erweisen, zu der Ansicht gelangt war, dass er wohl nicht richtig sei. In einer weitläufigen Untersuchung[4]) werden verwickelte Bedingungen aufgestellt, unter denen die Fourier'sche Reihe, welche sonst die stetige Function darstellt, an einzelnen Stellen nicht mit den Functionswerthen übereinstimmt. Da wir jedoch den Hauptwerth dieser Untersuchung darin sehen, dass ein erstes Bespiel einer solchen stetigen Function gegeben wurde, so werden wir nur am Schluss ein einfacheres Beispiel angeben, welches Herr Prof. H. A. Schwarz in seinen Vorlesungen gegeben, und dessen Mittheilung derselbe mir gütigst gestattet hat. Dasselbe ist zwar in dem allgemeineren du Bois-Reymond'schen Beispiel formal enthalten, zeichnet sich aber sowohl in der Anlage, als im Beweise durch grössere Einfachheit aus.

Hauptsächlich aus der Annahme, dass alle stetigen Functionen nach

---

1) Abh. der Bayer. Akad. XII, II. pag. VIII. Anm.

2) Ges. Werke. Inauguraldiss. pag. 3. „Neuere Untersuchungen haben indessen gezeigt . . ." und Habilitationsschrift pag. 223. „In der That für alle Fälle der Natur . . .", und pag. 224 „wenn man die unnöthige Voraussetzung . . . .".

3) Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Tübingen 1870. Universitätsschrift. § 3.

4) Abh. der Bayer. Akad. Bd. XII, II. Math.-Phys. Classe 1876. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. Cap. IV.

dem Dirichlet'schen Beweise durch die Fourier'sche Reihe darstellbar seien, entspringt wohl auch Riemann's Ansicht (a. a. O. pag. 223, 230 und 251), dass Functionen, auf welche sich die Dirichlet'sche Untersuchung nicht erstrecke, nicht in der Natur vorkämen. Wir wollen es mit Herrn Heine[1]) schon dahingestellt sein lassen, ob die unstetigen Functionen überhaupt in der Natur vorkommen, und es vorziehen, dieser naturphilosophischen Frage gegenüber zu sagen, dass wir darüber nichts wissen. Jedenfalls müssen wir uns bewusst bleiben, dass wir zu den gebrauchten Hypothesen in der Physik eine neue hinzufügen, wenn wir die Entwickelbarkeit einer auftretenden Function in eine trigonometrische Reihe annehmen.

Die Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis, welche im Uebrigen den Dirichlet'schen Bedingungen genügen, hat Herr Lipschitz (a. a. O.) einer Untersuchung unterworfen, und hat eine Bedingung angegeben, unter der die für eine solche Function aufgestellte Fourier'sche Reihe sowohl convergirt, als auch in ihren Werthen in jedem Punkte mit denen der Function übereinstimmt. Herr Lipschitz betrachtet eine Function, die innerhalb der Grenzen endlich und stetig ist, oder nur eine endliche Anzahl von Stetigkeitsunterbrechungen erfährt, aber unendlich viele Maxima und Minima sei es in Punkten oder Strecken besitzt. Die beiden andern von Dirichlet nicht bis zu Ende behandelten Fälle, dass die Function an einzelnen Stellen unendlich viele Unstetigkeiten besässe, sollen hier nicht statthaben: „quia duobus, vel tribus (sc. casibus) simul adcitis seriei species potius quam vis et natura mutatur“. Jedoch wird die Eigenthümlichkeit der Reihe nur dann nicht geändert, wenn nicht in demselben Punkte mehrere der von Dirichlet ausgeschlossenen Singularitäten zusammentreffen. Herr Lipschitz stützt seinen Beweis auf die beiden Integraltheoreme Dirichlet's I und II pag. 240. Er zeigt, dass sie gelten und damit, dass die Fourier'sche Reihe noch gegen den Functionswerth convergire, wenn an allen Stellen, wo die Function oscillirt, der absolute Betrag von $f(\beta + \delta) - f(\beta)$ mit abnehmendem δ rascher gegen Null convergirt, als das Product einer Constanten B und einer Potenz von δ mit beliebigem positiven Exponenten. Bezeichnen wir den absoluten Betrag der Schwankung $f(\beta + \delta) - f(\beta)$ mit D, so lautet die Lipschitz'sche Bedingung „$D < B\,\delta^{\alpha}$“, wo $\alpha > 0$ ist. Diese Bedingung enthält mehr als die Forderung der gleichmässigen Stetigkeit. Wenn die Function gleichmässig stetig sein soll, so muss es für alle Werthe von β einen von β unabhängigen Minimalwerth δ' geben, so dass für alle Werthe δ'', die dem absoluten Betrage nach kleiner als δ' sind, $f(\beta + \delta'') - f(\beta)$ unter dieselbe vorgegebene beliebig kleine Grösse σ sinkt.

---

1) Handbuch der Kugelfunctionen. 2. Aufl. Bd. 1. pag. 55.

Die Lipschitz'sche Bedingung verlangt aber mehr als gleichmässige Stetigkeit, denn es ist sehr wohl möglich, dass gleichmässige Stetigkeit stattfindet, aber wenn $\sigma = B\delta^\alpha$ vorgegeben ist, ist nicht gesagt dass der Minimalwerth δ', den die Bedingung der gleichmässigen Stetigkeit ergiebt, auch $\geqq \left|\sqrt[\alpha]{\frac{\sigma}{B}}\right|$ sei. Die Bedingung umfasst also keineswegs alle stetigen Functionen.

Die Lipschitz'sche Demonstration gilt nur dann nicht, wenn D schwächer gegen Null convergirt, als $B\delta^\alpha$. Herr Lipschitz sagt, diese Ausnahme träte ein, wenn $B\delta^\alpha$ langsamer gegen Null convergirte, als $\frac{1}{\log\delta}$, und beruft sich dabei auf Gauss[1]), der diese Bemerkung zuerst gemacht hat. In der That, da δ^α stärker gegen Null convergirt, als $\frac{1}{\log\delta}$, so convergirt D erst recht schwächer gegen Null, als $B\delta^\alpha$, wenn es schwächer als $\frac{1}{\log\delta}$ gegen Null convergirt. Es ist aber auch nöthig, das Umgekehrte zu betrachten. Wenn D rascher gegen Null convergirt, als $\frac{1}{\log\delta}$, so ist damit noch nicht gesagt, dass es auch rascher gegen Null convergirte, als $B\delta^\alpha$. Ist letzteres nun nicht auch der Fall, so würde der Beweis von Herrn Lipschitz schon hier seine Geltung verlieren. Das ist aber nicht richtig. Denn man sieht leicht, das man ganz von vornherein, als beschränkende Bedingung $\lim_{\delta=0} D\log\delta = 0$ aufstellen konnte, welche identisch ist mit der Bedingung, dass D stärker gegen Null convergirt, als $\frac{1}{\log\delta}$. Herr Lipschitz bezeichnet selbst den Angelpunkt seines Beweises (a. a. O. pag. 310) „Atque hac in re sunt nervi demonstrationis nostrae". Es wird nämlich der Rest der Reihe zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, und in dem einen Grenzwerth tritt $\lim_{\delta=0} D\log\delta$ als überschüssig über die Null auf. Damit nun der Rest gleich Null werde, setzt Herr Lipschitz $D < B\delta^\alpha$ und hieraus allein entspringt seine Bedingung. Man kann also die Lipschitz'sche Bedingung sofort durch die umfassendere $\lim_{\delta=0} D\log\delta = 0$ ersetzen. Herr Dini[2]) bedient sich derselben auch ohne Weiteres. Also die Fourier'sche Reihe stellt auch eine Function mit unendlich vielen Maximis und Minimis dar, wenn nur an allen Stellen, wo die Function oscillirt, $\lim_{\delta=0} D\log\delta = 0$ ist. Wenn aber an einer endlichen Anzahl von Oscillationspunkten die Bedingung nicht mehr erfüllt ist, so kann man auch dann noch sagen, die

1) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrats wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Art. 16.

2) Sopra la serie di Fourier. Pisa 1872.

Fourier'sche Reihe stelle eine derartige Function dar; jedoch muss man darauf verzichten, die Convergenz der Fourier'schen Reihe oder die Uebereinstimmung ihrer Werthe mit denen der Function an jenen singulären Punkten mit den bisher zum Ziele führenden Mitteln zu erweisen. Der Erfolg der Lipschitz'schen Untersuchung betreffend die Richtigkeit der beiden Integraltheoreme lehrt schon, dass Riemann mit seiner Behauptung (a. a. O. pag. 224), dass die Integraltheoreme, im Falle die Function unendlich viele Maxima und Minima hat, nicht mehr ausreichten, im Irrthum war. Es scheint mir überhaupt, dass eine Entscheidung, ob die Fourier'sche Reihe für eine Function convergirt oder divergirt, nur aus diesen beiden Integraltheoremen geschöpft werden kann, so lange die Function noch integrirbar ist. Erfüllt die Function nicht mehr die Bedingung der Integrirbarkeit, so haben die Integraltheoreme freilich ihren Sinn verloren; in diesem Falle aber haben wir überhaupt noch gar kein Mittel zur Untersuchung.

Durch die Bedingung, welche Herr Lipschitz aufgestellt hat, ist zwar wieder von einer ganzen Functionenklasse nachgewiesen, dass sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar ist, aber die nothwendigen Bedingungen haben wir damit eben so wenig erreicht, als durch die Dirichlet'sche Abhandlung. Ob eine Function, welche den bisher bekannten Bedingungen nicht genügt, nicht auch noch durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, bleibt noch völlig unentschieden. Aber man kann vielleicht sagen, es ist zu viel verlangt, die nothwendigen Bedingungen anzugeben, denen eine Function genügen muss, damit sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar sei. Neben der allgemeinsten Definition, dass eine Reihe positiver Grössen dann convergirt, wenn die Summe der n ersten Glieder mit wachsendem n sich in einer bestimmten endlichen Grenze nähert, giebt es keine andere Definition, welche denselben Umfang hätte. Man kann daher wohl immer engere, dieser Definition immer näher rückende Bedingungen aufstellen, und damit das Gebiet der darstellbaren Functionen immer mehr erweitern. Hätte man aber die nothwendigen Bedingungen selbst, so könnten diese nicht verschieden sein von den in der Definition gegebenen, und eine Aussage über den Umfang des Gebietes, in dem die Functionen noch darstellbar sind, würde wieder auf die Definition des Begriffes der Darstellbarkeit einer Function zurückführen.

Wenn daher ein Versuch, noch weniger einschränkende Bedingungen als die Dirichlet'schen und die Lipschitz'sche zu finden, nicht auf einfache Resultate führt, so erscheint er insofern nicht völlig befriedigend, als die Bedingungen eben immer noch weiter eingeschränkt werden können, ohne dass man doch jemals zum Endziel gelangte. Es ist auch auf diesem Wege weiter vorzudringen nur noch ein Versuch gemacht worden, nämlich durch die Abhandlung des Herrn P. du Bois-Reymond: „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln" (a. a. O. Cap. I—III). Dieselbe scheint mir jedoch zu keinen greifbaren Resultaten zu führen.

Nur das Eine wollen wir ihr entnehmen, dass in der That bei Functionen, welche der Lipschitz'schen Bedingung nicht mehr genügen, bereits Divergenz der Fourier'schen Reihe eintreten kann.

III.

Riemann hat in seiner Habilitationsschrift einen folgenreichen Schritt gethan, der das Verständniss aller folgenden Untersuchungen über diesen Gegenstand eröffnet, und sie überhaupt erst ermöglichte, indem er nämlich den Dirichlet'schen Weg verliess, und die Frage so stellte: Welche Eigenschaften muss eine Function haben, damit es eine trigonometrische Reihe giebt, welche überall da, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function convergirt?

Ob diese Reihe dann die Function darstellt, wird hiermit nicht entschieden. Von dieser Seite aus konnte Riemann nun allerdings die Frage nach nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, oder wie wir kürzer sagen, nach „den nothwendigen Bedingungen" aufwerfen. Und es ist ihm in der That gelungen, die nothwendigen Bedingungen dafür aufzufinden, dass es eine trigometrische Reihe giebt, welche, wo sie convergirt, gegen den Functionswerth convergirt. Sobald er aber wieder den Dirichlet'schen Weg betrat, musste er wieder zu bloss hinreichenden Bedingungen seine Zuflucht nehmen. In diesem Sinne ist daher auch nur die Bemerkung Riemann's (a. a. O. pag. 230) zu verstehen: „es müssen zunächst zur Darstellbarkeit nothwendige Bedingungen aufgesucht, und aus diesen dann zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden". Dies erscheint jedoch in einer anderen Beziehung nicht ganz correct; denn hinreichende Bedingungen müssen allemal sämmtliche nothwendigen einschliessen, ebenso wie umgekehrt die Functionenklassen, welche in Folge der nothwendigen Bedingungen darstellbar sind, die welche in Folge ausreichender darstellbar sind, umfassen.

Die Riemann'sche Habilitationsschrift zerfällt in drei Theile. Der erste ist der historische, auf den wir oben mehrfach Bezug genommen haben. Der zweite Theil enthält jene Auseinandersetzung über Fundamentalsätze der Analysis, die schon Dirichlet für unumgänglich nothwendig zum weiteren Fortschreiten in diesem Gebiete gehalten hat. Der Begriff des bestimmten Integrals wird definirt, und untersucht, wann eine Function ein Integral besitzt. Diese Untersuchungen sind allgemein angenommen, und wir können ein näheres Eingehen darauf füglich unterlassen.

Die von Riemann anerkannte Definition des bestimmten Integrals einer Function $f(x)$, die innerhalb des Integrationsgebietes an einem Punkte unendlich wird, ist auf mehrfache Integrale erweitert worden. Wird z. B. eine sonst im Integrationsgebiete G stetige und endliche Function zweier Variablen $f(x, y)$ an einer Stelle $X_0 Y_0$ unendlich, so schliesse man von G ein kleines Flächenstück, welches die Stelle $X_0 Y_0$ enthält, aus. Wenn dann das über den übrig bleibenden Theil von G erstreckte Integral einer festen Grenze A zustrebt, wie man auch das ausgeschlossene Flächenstück gegen 0 convergiren lässt, so versteht man unter dem Werthe des bestimmten Integrals eben jenen Werth A; andernfalls hat das Integral keine Bedeutung. Herr P. du Bois-Reymond nimmt in seinen Schriften über die Fourier'schen Integrale einen Standpunkt ein, der von der consequenten Fortentwicklung der Riemann'schen Definition verschieden ist. Er beruft sich dabei auf Cauchy[1]). Herr du Bois-Reymond definirt nämlich[1]): „Ein bestimmtes Doppelintegral $\int\limits_{X_0}^{X_1} dx \int\limits_{Y_0}^{Y_1} dy\, f(x, y)$, wo $X_0\, Y_0\, X_1\, Y_1$ Zahlen bedeuten, ist das Resultat des Ueberganges der variablen Grenzen $x_0 x_1 y_0 y_1$ des unbestimmten Integrals $\int\limits_{x_0}^{x_1} dx \int\limits_{y_0}^{y_1} dy\, f(x, y)$ in die Zahlenwerthe $X_0\, X_1\, Y_0\, Y_1$", und wendet diese Definition auch für den Fall an, dass $X_0 Y_0$ ein Unendlichkeitspunkt ist. Die Folgen einer solchen Definition, auf welche Riemann's Urtheil über die Cauchy'schen Festsetzungen in Betreff der Hauptwerthe, dass sie schon wegen ihrer grossen Willkürlichkeit zur allgemeinen Einführung wohl kaum geeignet seien, zutrifft, treten denn auch bald hervor. Herr P. du Bois-Reymond giebt nämlich, indem er $f(xy) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}$ setzt, dem bestimmten Doppelintegral die Form:

$$F(X_1, Y_1) - F(X_0, Y_1) - F(X_1, Y_0) + F(X_0, Y_0),$$

und folgert nun, dass je nach der Reihenfolge, in der $x_0 x_1 y_0 y_1$ ihre festen Werthe annehmen, das Integral im Allgemeinen vierzehn verschiedene Werthe (oder auch unendlich viele) annimmt[2]).

Der Standpunkt, den Herr P. du Bois-Reymond in Bezug auf die Berechnung eines bestimmten Integrals, in dem die zu integrirende Function

1) Math. Annalen. Bd. 4. pag. 366.

2) Siehe Borchardt's Journal für Math. Bd. 69. pag. 70 u. f. u. 1).

einen willkürlichen Parameter enthält, einnimmt[1]), ist bei der Berechnung des Poisson'schen Integrals, die a. a. O. vorgenommen wird, unstatthaft, wie aus den Erörterungen auf pag. 241—243 einleuchtet.

Durch die Untersuchungen Riemann's über die Integrirbarkeit unendlich oft unstetiger Functionen wurde zugleich entschieden, dass eine stetige Function nicht allemal einen Differentialquotienten haben müsse. Es hat sich besonders durch die Untersuchungen von Herrn Weierstrass gezeigt, dass die Nichtdifferentiirbarkeit grossen Functionenklassen eigen ist. Darum erhalten aber nicht differentiirbare Functionen noch nicht den Charakter derjenigen Functionen, über deren Darstellbarkeit durch eine Fourier'sche Reihe wir nichts wissen. Die von Herrn Schläfli[2]) ausgesprochenen Zweifel, ob eine nicht diffentiirbare Function überhaupt noch in eine Fourier'sche Reihe entwickelbar sei, sind daher nicht begründet. Weder der Dirichlet-sche Beweis, noch die Riemann'sche Bedingung der Integrirbarkeit setzen die Differentiirbarkeit der Function voraus. Auch ist die Behauptung von Herrn Schläfli (a. a. O. pag. 13) irrig, die Convergenz der Fourier'schen Reihe zu schätzen, begegne selbst dann noch Schwierigkeiten, wenn die Function wohl einen ersten, aber keinen zweiten Differentialquotienten mehr besitzt. Dem wird von Herrn Prof. H. A. Schwarz durch die Bemerkung begegnet, man könnte dann statt der ursprünglichen Function $f(\vartheta)$ eine Function: $f(\vartheta) + M\vartheta$ einführen, wo M den Maximalwerth von $f'(\vartheta)$ im Intervall bezeichnet. Dann gilt für das in der Schläfli'schen Abhandlung auftretende Integral: $\lim_{\beta=0} \int_{-\beta}^{+\beta} f'(\vartheta + \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi$ streng der Dirichlet'sche Beweis.

Im dritten Theile seiner Abhandlung, der sich mit der Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Functionen beschäftigen soll, schlägt nun Riemann den angegebenen Weg ein.

Eine trigonometrische Reihe $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots$ wo $A_0 = \frac{b_0}{2}$, $A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx$ ist, soll durch Ω bezeichnet werden und ihr Werth an allen denjenigen Stellen, wo sie convergirt, mit $f(x)$. Ferner sollen die Glieder A_k für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden. Dann lässt sich zeigen, dass die durch zweimalige Integration aus Ω erhaltene Reihe

$$F(x) = C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots - \frac{A_k}{k^2} - \ldots$$

---

1) Math. Annalen. Bd. 7. pag. 257 u. f.

2) Siehe pag. 242. Anm. 1.

eine für jeden Werth von x convergente Reihe ist, beständig endlich ist, und eine Integration zulässt. Nun beweist Riemann, dass aus der Convergenz der Reihe Ω nothwendig folge (art. 8; 9, I), dass

$$1)\quad \frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x-\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

gegen $f(x)$ convergirt, wenn α und β so unendlich klein werden, dass ihr Verhältniss doch ein endliches bleibt,

$$2)\quad \mu^2\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

mit wachsendem μ unendlich klein wird, wenn b und c willkürliche endliche Grenzen sind, $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ an den Grenzen des Integrals gleich Null und zwischen diesen immer stetig sind, und $\lambda''(x)$ nicht unendlich viel Maxima und Minima hat.

Es ist nun zu untersuchen, ob diese Bedingungen auch umgekehrt hinreichend sind, damit es eine trigonometrische Reihe giebt, deren Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall da, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function convergirt.

Riemann multiplicirt die Gleichung:

$$F(x)-C'x-A_0\frac{x^2}{2}=C-\frac{A_1}{1}-\frac{A_2}{4}\cdots\cdots-\frac{A_k}{k^2}-\cdots\cdots$$

mit $\cos n(x-t)$ und integrirt von $-\pi$ bis $+\pi$. Damit findet er für A_n den Werth:

$$A_n=-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(F(t)-C't-A_0\frac{t^2}{2}\right)\cos n(x-t)\,dt$$

und behauptet nun, A_n müsste nach Voraussetzung 2) unendlich klein werden mit wachsendem n. Dies leuchtet nicht unmittelbar ein. Es ist indessen von Herrn H. Weber (in einer Anm. pag. 251 der Habilitationsschrift) gezeigt worden, wie das schliessliche Verschwinden der Glieder A_n auf die Voraussetzung 2) zurückgeführt werden kann. Herr Ascoli hat in einer Abhandlung [1]), die im Wesentlichen einen Commentar zu Riemann's Habilitationsschrift bildet, diese Stelle (a. a. O. pag. 307 und folgende) ausführlich behandelt, und die Riemann'sche Behauptung auf demselben Wege, wie Herr H. Weber abgeleitet.

Es ist also zunächst bewiesen, dass die Glieder A_k der trigonometrischen

1) Annali di Matematica. Ser. II. Tom. VI. dic. 1873 al genn. 1875. pag. 21 e 298. Sulla serie di Fourier.

Reihe zuletzt unendlich klein werden. Dass dann die Reihe, wo sie convergirt, gegen den Werth $f(x)$ convergirt, folgt aus der Voraussetzung 1).

Die zwei Bedingungen 1) und 2) sind also für den behaupteten Satz die nothwendigen.

Riemann zeigt nun weiter (art. 9, III) den wichtigen Satz, dass die Convergenz der Reihe an einer bestimmten Stelle nur von dem Verhalten der Function an dieser Stelle abhängt.

Soweit bleibt die Riemann'sche Abhandlung ganz allgemein. Wenn wir nun aber entscheiden wollten, unter welchen Bedingungen eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, so müssen wir darauf verzichten, nothwendige Bedingungen zu ermitteln. Wir müssen mit Riemann specielle Fälle aufsuchen, in denen die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind; und dann ist nach Dirichlet'scher Methode eine Untersuchung anzustellen, an welchen Stellen die trigonometrische Reihe nun wirklich convergirt. Riemann zeigt nun, dass die beiden Bedingungen erfüllt sind, wenn die Function 1) nicht unendlich wird, 2) integrirbar ist, 3) nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt. In diesem Falle sind die Coefficienten A_n die Fourier'schen, und die Fourier'sche Reihe convergirt dann, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function. Die Reihe wird aber convergiren an allen den Stellen, in deren Umgebung nicht unendlich viele Unstetigkeiten liegen. Sind diese Stellen nun bloss in endlicher Anzahl vorhanden, so werden wir sagen, dann stellt die Reihe die Function dar. Sind sie aber in unendlicher Anzahl vorhanden, so werden wir nach unserer Definition im Allgemeinen nicht mehr von einer Darstellung reden, wenn auch die Fourier'sche Reihe noch an einer unendlichen Anzahl von Stellen convergiren und mit den Functionswerthen übereinstimmen kann.

Der Fall, dass die Function unendlich würde, war bisher ganz ausgeschlossen. Es möge nun jetzt die Function an einer Stelle a unendlich werden, jedoch ohne Maxima und Minima. Wenn in diesem Falle Riemann die Bedingung aufstellt (art. 12), es solle $f(a+\delta)+f(a-\delta)$ bis an die Unstetigkeitsstelle heran integrirt werden können, und zweitens solle $f(a+\delta)\,\delta$ und $f(a-\delta)\,\delta$ mit δ unendlich klein werden, so will er damit keine andere Bedingung, als die früher angeführte geben, dass das Integral unbedingt convergiren soll. In der That aber ist der zweite Theil seiner Bedingung keine hinreichende Bedingung dafür, dass das Integral unbedingt convergirt. Dies kann man sowohl an Beispielen zeigen, als auch kann man wie oben schliessen, dass überhaupt keine Aussicht vorhanden ist, nothwendige und hinreichende Bedingungen für die unbedingte Convergenz eines Integrals zu erreichen, welche von der Definition verschieden sind.

Riemann hat bewiesen, dass die Fourier'schen Coefficienten mit wachsendem Stellenzeiger unendlich klein würden, sobald die Function endlich bleibt, und eine Integration zulässt. Es ist aber wünschenswerth, das Unendlichkleinwerden der Coefficienten in seiner Abhängigkeit von dem Wachsen des Stellenzeigers schätzen zu können. Setzt man bloss die Integrirbarkeit voraus, so ist dies, wie der Riemann'sche Beweis zeigt, nicht möglich. Unter beschränkteren Annahmen kann man aber zum Ziel gelangen. Wir wollen hier Sätzen von Herrn Heine folgen, die derselbe in seinem „Handbuch der Kugelfunctionen“ pag. 59 u. f. mittheilt. Die Fourier'schen Coefficienten $\int\limits_0^h f(\beta) \sin n\beta \, d\beta$ und $\int\limits_0^h f(\beta) \cos n\beta \, d\beta$ seien mit A_n und B_n bezeichnet. Wenn die Function $f(\beta)$ endlich bleibt, und für jeden Werth des Argumentes β kleiner als γ ist, und zwischen 0 und h nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis und Stetigkeitsunterbrechungen hat, so bleiben nA_n und nB_n unter dem Werthe $G\gamma$, wo G eine von n unabhängige Constante bezeichnet. Wenn aber $f(\beta)$ an der Stelle 0 unendlich wird, jedoch so, dass $\beta^\nu \, f(\beta) \; {}_{0 < \nu \leqq 1}$ noch endlich bleibt, so sinkt $n^{1-\nu} A_n - \dfrac{\pi}{2\, \Gamma\nu \sin \frac{1}{2} \nu\pi} f(0)$ unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herab und desgleichen $n^{1-\nu} B_n - \dfrac{\pi}{2\, \Gamma\nu \cos \frac{1}{2} \nu\pi} f(0)$, wenn nur $\nu < 1$ bleibt. Die Producte $n^{1-\nu} A_n$ und $n^{1-\nu} B_n$ werden also, wenn man nur n stark genug wachsen lässt, endlich bleiben.

Man gelangt auch noch zu einer Schätzung, wenn $f(\beta)$ im Uebrigen den angegebenen Bedingungen genügt, aber an der Nullstelle unendlich viele Maxima und Minima hat, jedoch so, dass die Lipschitz'sche Bedingung erfüllt ist [1]). In $A_n = \int\limits_0^h f(\beta) \sin n\beta \, d\beta$ werden die beiden Theilintegrale $\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} + \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}$ abgesondert. Der Rest kann kleiner als $\dfrac{K}{n}$ gemacht werden, wo K eine von n unabhängige Constante ist. Die beiden ersten Theilintegrale geben aber $\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \left(f(\beta) - f(\beta + \frac{\pi}{n})\right) \sin n\beta \, d\beta$. Nach der Lipschitz'schen Bedingung muss nun dem absoluten Betrage nach $f(\beta) - f\left(\beta + \frac{\pi}{n}\right) < B \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha$

1) Siehe pag. 247. Anm. 2.

oder auch $< \dfrac{B}{\left(\log \frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}}$, $\alpha < 0$ sein, und das Integral wird daher $< B \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}$

oder $< \dfrac{B'}{n (\log n)^{1+\alpha}}$, wo B' eine andere Constante bezeichnet.

Kommen innerhalb des Intervalls mehrere Unendlichkeitsstellen oder Maximum- und Minimumstellen von angegebener Beschaffenheit, aber in endlicher Anzahl vor, so kann man auch dann noch zu einer Schätzung gelangen, wenn man das Intervall in Theile theilt, deren Endpunkte eben jene singulären Punkte sind.

Da der Beweis Riemann's, dass die Convergenz der Fourier'schen Reihe an einer bestimmten Stelle nur von dem Verhalten der Function in unmittelbarer Nähe abhängt, so lange die Function integrirbar ist, nur aus seinen allgemeinen Sätzen abgeleitet ist, so wird es nützlich sein, für diesen Satz einen eigenen Beweis zu geben, der direct von dem Dirichlet'schen Integral ausgeht, auf das der Riemann'sche Weg ja auch wieder zurückführt. Herr Prof. H. A. Schwarz hat in seinen Vorlesungen eine Abschätzungsformel für das Integral

$$\int_g^h \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} f(\beta)\, d(\beta) \quad 0 < g \leqq h \leqq \frac{\pi}{2}$$

gegeben, welche hier unmittelbar zum Ziele führt, und auch später noch gebraucht werden wird.

Um das Integral

$$S = \int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta \quad 0 < g < h \leqq \frac{\pi}{2}$$

abzuschätzen, werde das Intervall von g bis h in die Theilintervalle

$$g \,..\, \frac{m\pi}{k},\ \frac{m\pi}{k} \,..\, \frac{(m+1)\pi}{k}, \ldots, \frac{m'\pi}{k} \ldots h,$$

$$\text{wo } \frac{(m-1)\pi}{k} \leqq g \leqq \frac{m\pi}{k}; \qquad \frac{m'\pi}{k} \leqq h \leqq \frac{(m'+1)\pi}{k}$$

ist, zerlegt. Dann setze man:

im ersten Intervalle $f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_1(\beta)$

im zweiten „ $f(\beta) = f\left(\frac{m\pi}{k}\right) + \psi_2(\beta)$

im dritten „ $f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_3(\beta)$

im vierten „ $f(\beta) = f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right) + \psi_4(\beta)$

u. s. f.

und theile S in zwei Theile S' und S'', von denen sich der erste auf die Functionen f, der andere auf die Functionen ψ bezieht. Es ist nun:

$$S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left[\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{m\pi}{k}}^{\frac{(m+1)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right]$$

$$+ f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right)\left[\int_{\frac{(m+1)\pi}{k}}^{\frac{(m+2)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int_{\frac{(m+2)\pi}{k}}^{\frac{(m+3)\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta\right] + \ldots.$$

Es wird dann nach Dirichlet

$$(-1)^{\nu-1}\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \varrho_\nu$$

gesetzt. Berücksichtigt man, dass

$$\int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta = (-1)^{m-1}\frac{2}{\sin g}$$

ist, so wird

$$S' = f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left[\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta\right]$$

$$+ (-1)^{m-1}\left[f\left(\frac{m\pi}{k}\right)\left(\frac{2}{k\sin g} - \varrho_{m+1}\right) + f\left(\frac{(m+2)\pi}{k}\right)\left(\varrho_{m+2} - \varrho_{m+3}\right) + \ldots\right]$$

Nun ist

$$\int_g^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \int_{\frac{(m-1)\pi}{k}}^{\frac{m\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin g}\,d\beta < \frac{2}{k\sin g}.$$

Der zweite Theil von S' ist, wenn man den grössten Werth unter den auftretenden Werthen von f mit c bezeichnet, und berücksichtigt, dass $\varrho_n < \varrho_{n+1}$ ist,

$$< c\left[\frac{2}{k\sin g} - (\varrho_{m+1} - \varrho_{m+2}) - (\varrho_{m+3} - \varrho_{m+4}) - \ldots\right].$$

Daher ist

$$S' < \frac{4c}{k \sin g}, \text{ und da } \frac{1}{\sin g} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{g}$$

ist, weil

$$g < \frac{\pi}{2} \text{ ist, so folgt } S' < \frac{2c\pi}{kg}.$$

Dazu kommt nun noch der zweite Theil von S: S''. Bezeichnet man mit $\sigma_q(\beta)$ den absoluten Betrag der grössten Schwankung von $f(\beta)$ im $q$ten Intervalle, so ist derselbe sicher nicht kleiner, als der absolute Betrag des grössten Werthes der entsprechenden Function $\psi_q(\beta)$.

Es ist also sicher

$$S'' < \int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\sin\beta}\,d\beta < \frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta,$$

wo $\sigma(\beta)$ im $q$ten Intervalle gleich $\sigma_q(\beta)$ ist. Man hat daher endlich für S die Abschätzungsformel:

$$S = \int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta < \frac{2c\pi}{kg} + \frac{\pi}{2}\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

Das Integral $\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta$ kann nun beliebig klein gemacht werden durch Vergrösserung von k, wenn nur die Function $f(\beta)$ integrirbar ist und endlich bleibt.

Denn es ist

$$\int_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta < \frac{1}{g}\int_g^h \sigma(\beta)\,d\beta.$$

$\int_g^h \sigma(\beta)\,d\beta$ ist aber sicher kleiner, als $\Sigma\sigma_q(\beta)\,\Delta_q\beta$, wo $\Delta_q\beta$ die Grösse des $q$ten Intervalles bezeichnet, und sich die Summe über alle Intervalle erstreckt. Diese Summe muss aber nach dem Begriffe des bestimmten Integrals durch Verkleinerung der Intervalle beliebig klein gemacht werden können.

Um nun den erwähnten Riemann'schen Satz zu erweisen, zerlege man das Dirichlet'sche Integral $\int_0^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$ in die beiden Theile $\int_0^g + \int_g^h$, wo g sehr klein angenommen werden soll. $f(\beta)$ möge zunächst nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Wendet man auf das Integral $\int\limits_g^h$ die Abschätzungsformel an, so kann man k so gross wählen, dass sowohl $\frac{2c\pi}{kg}$, als auch $\frac{\pi}{2}\int\limits_g^h \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta$ sehr klein wird.

Durch dieses Verfahren kann man der betrachteten Stelle beliebig nahe kommen, während immer alle Theile jenseits g einen Beitrag zu dem Integralwerthe geben, der durch Vergrösserung von k unter jeden Grad der Kleinheit herabsinkt. Damit ist bewiesen, dass die Convergenz der Fourierschen Reihe an einer bestimmten Stelle nur abhängt von dem Verhalten der Function in unmittelbarer Nähe dieser Stelle. Nach einfachen Mittelwerthsätzen lässt sich dann zeigen, dass der Werth der Reihe an allen Stetigkeitsstellen und einfachen Unstetigkeitsstellen mit dem der Function übereinstimmt. Es lässt sich aber auch zeigen, dass dies selbst dann noch stattfindet, wenn die Function an der betrachteten Nullstelle unendlich viele Maxima und Minima besitzt, wenn nur die Lipschitz'sche Bedingung erfüllt ist.

Es ist zu dem Zwecke das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$ zu berechnen. Man setze $f(\beta) = f(0) + \varphi(\beta)$, und theile das Integral in die Theilintegrale:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(0)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int\limits_0^{g} \varphi(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta + \int\limits_g^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta.$$

Der erste Theil ist gleich $\frac{\pi}{2}f(0)$. Da $f(\beta)$ der Lipschitz'schen Bedingung genügt, so muss $\varphi(\beta) = f(\beta) - f(0) < B\beta^\alpha$ $(\alpha > 0)$ sein. Der zweite Theil J ist daher $< B\int\limits_0^g \beta^\alpha \frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$, und da $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin\beta}{\beta} \leqq 1$ ist, so ist $J < B\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int\limits_0^g \beta^{\alpha-1}\,d\beta < B\frac{\pi}{2}\cdot\frac{g^\alpha}{\alpha}$. Der dritte Theil ist nach der obigen Abschätzungsformel

$$< \frac{2c\pi}{gk} + \int\limits_g^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

Daher wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}\,f(0) + K,$$

$$\text{wo } K < B\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{g^\alpha}{\alpha} + \frac{2\,c\pi}{gk} + \int_g^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma(\beta)}{\beta}\,d\beta \text{ ist.}$$

Nun kann zunächst g beliebig klein angenommen werden, und dann k so gross gewählt werden, dass die Gesammtgrösse von K beliebig klein wird, und wir an der Grenze erhalten:

$$\lim_{k=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}\,f(0),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Riemann untersucht noch in Art. 11, ob eine trigonometrische Reihe, deren Glieder A_k nicht für jeden Werth von x unendlich klein werden, zur Darstellung einer Function geeignet ist. Es zeigt sich aber, dass bei Functionen ohne Maxima und Minima die Reihe dann im Allgemeinen nur in einer endlichen Anzahl von Stellen mit der Function übereinstimmen kann (a. a. O. pag. 242 und 245), und zur Darstellung einer Function daher sicher ungeeignet ist.

Was nun die Functionen betrifft, die unendlich viele Maxima und Minima besitzen, so giebt Riemann keine allgemeinen Gesetze an, sondern illustrirt nur an Beispielen[1]) folgende beiden Sätze: 1) Es giebt Functionen, die unendlich viele Maxima und Minima besitzen, und durchgehends einer Integration fähig sind, ohne durch die Fourier'sche Reihe darstellbar zu sein. 2) Es giebt Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis, welche keine Integration zulassen und doch durch die Fourier'sche Reihe darstellbar sind.

IV.

Die Riemann'sche Abhandlung bildet den wesentlichen Abschluss der Untersuchungen über die blosse Darstellbarkeit einer trigonometrischen Reihe. Die mannichfachen Hilfsmittel, welche Riemann zur Behandlung der trigonometrischen Reihen gegeben hat, haben erst ermöglicht, andere

---

1) Diese Beispiele sind von Herrn Genocchi einer näheren Prüfung unterworfen worden: Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino. Vol. X. 1875. Intorno ad alcune serie.

Untersuchungen über diese Reihen mit Erfolg durchzuführen, zu denen wir uns nunmehr wenden wollen.

Cauchy hatte in einer Note den Satz ausgesprochen, dass das Integral einer unendlichen Reihe von Gliedern gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder sei. Dieser Satz war unbestritten angenommen worden, und alle Untersuchungen über Fourier'sche Reihen, die wir bisher angeführt haben, beruhen auf ihm. Da zeigte Herr Weierstrass, dass der Versuch den Satz zu beweisen, nur dann gelänge, wenn die Reihe innerhalb des Integrationsintervalles in gleichem Grade convergirte, und verstand darunter, dass für jeden Werth der Variablen der Rest der Reihe von demselben Gliede ab kleiner, als dieselbe vorgegebene Grösse würde. Diese Bemerkung findet zuerst in der Heine'schen Abhandlung[1]) „Ueber trigonometrische Reihen" Anwendung. Herr Heine citirt daselbst eine Abhandlung von Herrn Thomé, in der bereits der Weierstrass'sche Begriff der Convergenz in gleichem Grade als ganz bekannt erwähnt wurde[2]). Der Begriff der Convergenz in gleichem Grade war eigentlich schon in einer Abhandlung[3]) von Herrn Seidel aus dem Jahre 1848 enthalten, doch scheint dieselbe lange übersehen worden zu sein. Cauchy[4]) hatte behauptet, eine convergente Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen des Argumentes sind, stelle allemal selbst eine stetige Function dar. Bereits Abel[5]) bemerkte, ihm scheine, dass dieser Satz zuweilen Ausnahmen erleide, und hatte zum Beleg seiner Ansicht die Reihe

$$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 4\varphi + \ldots\ldots$$

angeführt, die trotz der Stetigkeit aller ihrer Glieder zwar für alle Werthe von φ zwischen $m\pi$ und $(m+1)\pi$ gleich $\frac{\varphi}{2} - \nu\pi$ ist, wo $m = 2\nu$ oder $= 2\nu - 1$ ist und ν irgend eine positive ganze Zahl ist, aber für $\varphi = m\pi$ selber $(m > 0)$ unstetig wird, nämlich den Werth 0 annimmt.

Um eine Aufklärung über diesen Punkt herbeizuführen, beweist nun Herr Seidel folgenden Satz: „Ist eine convergente Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen des Argumentes sind, eine nicht stetige Function, so giebt es in der unmittelbaren Nähe einer Unstetigkeitsstelle Stellen, an denen die Reihe beliebig langsam convergirt." Er unterscheidet zwei Fälle: erstens wenn die Function das Verhalten zeigt, was wir heute mit

1) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 71. 1870.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 66. 1866. pag. 334.

3) Abh. der Bayerischen Akad. 1847—49. Note über eine Eigenschaft von Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.

4) Analyse algébrique pag. 131.

5) Crelle's Journ. Bd. 1. pag. 316. Anm. u. pag. 336.

Convergenz in gleichem Grade bezeichnen, so ist der Cauchy'sche Satz richtig; zweitens wenn sich die Reihe nicht so verhält, dann gilt sein Satz. Dass eine unstetige Function niemals durch eine in gleichem Grade convergente Reihe dargestellt werden könne, beweist auch Herr Heine, führt aber alsbald den Begriff einer im Allgemeinen in gleichem Grade convergenten Reihe ein, wobei „im Allgemeinen" so zu verstehen ist, dass in der unmittelbaren Umgebung aller Unstetigkeitsstellen auf die Convergenz in gleichem Grade verzichtet werden soll. Herr du Bois-Reymond[1]) zeigt, dass das Aufhören der Convergenz in gleichem Grade nicht bloss an Unstetigkeitsstellen stattfindet, was schon vorher Herr Seidel (a. a. O. pag. 393) vermuthet hatte. Es bedarf also eines Beweises, dass eine trigonometrische Reihe, die eine stetige Function darstellt, in gleichem Grade convergirt. Durch die Weierstrass'sche Bemerkung war klar geworden, dass man bei der Coefficientenbestimmung der Fourier'schen Reihe nicht ohne Weiteres die Multiplicationsmethode Fourier's anwenden dürfe, weil diese auf der Voraussetzung beruht, dass das Integral einer Summe unendlich vieler Glieder, die eine convergente Reihe bilden, gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder sei. Durch diese Schlussfolgerung wurde aber bewiesen, dass, wie man auch eine Function in eine trigonometrische Reihe entwickeln möge, man immer dieselbe Entwicklung erhielte. Auf diesem Satze von der Eindeutigkeit der Entwicklung basirten nicht nur alle physikalischen Anwendungen, sondern auch manche wichtige mathematische Folgerung, wie z. B. Jacobi's Darstellung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch bestimmte Integrale. Dieser Satz war also hiermit in Frage gestellt. Die Wiederherstellung desselben ist von Herrn Heine (a. a. O.) begonnen, und von den Herren G. Cantor und P. du Bois-Reymond fortgeführt worden.

Herr Heine spricht sich dahin aus, es sei durch die Arbeiten von Dirichlet, Riemann und Lipschitz nur festgestellt, dass eine Function von x sich unter gewissen Bedingungen in eine trigonometrische Reihe entwickeln lasse, aber nicht auf wie viele Arten dies geschehen könne.

Man könnte nun vielleicht verlangen zu beweisen, dass eine trigonometrische Reihe, welche eine stetige Function darstellt, auch in gleichem Grade convergirt. Doch da überhaupt noch nicht bewiesen ist, dass es eine trigonometrische Reihe giebt, welche die genannten Eigenschaften hat, so begnügt sich Herr Heine zunächst damit, zu beweisen (a. a. O. § 7—9), dass die Fourier'sche Reihe für eine endliche, nur an einzelnen Punkten unstetige Function, die nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, in

1) Siehe Abh. der Bayer. Akad. Bd. XII, I. pag. 119. Anm.

gleichem Grade convergirt. Dazu hat aber Herr Schläfli (a. a. O. pag. 7) die Bemerkung gemacht, dass der Heine'sche Beweis nicht mehr stichhaltig sei, wenn eine Maximum-Minimum-Stelle in der von vornherein der Ausdehnung nach definirten unmittelbaren Umgebung des Punktes liegt, an dem die Function dargestellt werden soll. Diese Bemerkung trifft zu; indessen lässt sich zeigen, dass auch dann noch der Satz gilt. Herr Prof. H. A. Schwarz hat bei Gelegenheit einer Universitätsvorlesung diesen Beweis ausgeführt; für den Fall, dass $f(\beta)$ stets positiv bleibt, sollen die Hauptmomente des Beweises hier kurz dargelegt werden, da andernfalls nur einfache Modificationen eintreten.

Es sei

$$S = \int_0^h f(\beta)\, \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta \,.\; 0 < h \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Wenn $f(\beta)$ zwischen den Grenzen 0 und h beständig positiv bleibt, und nie zunimmt, so ist, wenn m irgend eine positive ganze Zahl ist, so dass $2m + 1 < \frac{k}{2}$ und $\frac{2m\pi}{k} < h$ ist, und $f(\beta) \leqq c$ ist,

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left(f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right),$$

wo durch die senkrechten Striche angedeutet werden soll, dass der absolute Betrag der eingeschlossenen Grösse zu nehmen ist.

Wenn $f(\beta)$ beständig negativ bleibt und nie abnimmt, so gilt die Formel

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2}\left| \left(f(0) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right) \right|.$$

Wir werden nun bei stetigem Verlaufe von $f(\beta)$ sagen: Die $f(\beta)$ im Intervalle von 0 bis h darstellende trigonometrische Reihe convergirt in gleichem Grade, wenn eine Zahl m derart gefunden werden kann, dass für alle Werthe von β innerhalb des Intervalles die Differenz $\left|S - \frac{\pi}{2} f(0)\right|$ kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine Grösse ε bleibt.

Soll nun die Differenz $f(\beta + \delta(\beta)) - f(\beta)$ kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine Grösse ε_1 sein, so giebt es bei einer stetigen Function $f(\beta)$ einen von β unabhängigen Minimalwerth δ' von $\delta(\beta)$, so dass für jedes β zwischen 0 und h die Differenz $f(\beta + \delta'') - f(\beta) < \varepsilon$ ist, sobald dem absoluten Betrage nach $\delta'' \leqq \delta'$ ist. $\frac{2m\pi}{k}$ ist nun so bestimmbar, dass es $< \delta'$ wird. Zwischen 0 und h möge $f(\beta)$ μ Maximum- und Minimumstellen $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta\mu$ besitzen. Alsdann wenden wir auf die Function $f(\beta)$ folgende Zerlegung an. $f(\beta)$ ist überall zwischen 0 und h gleich der Summe:

$$f_1(\beta) + f_2(\beta) + \ldots + f_{\mu+1}(\beta) + f(h-0),$$

wenn die $(\mu + 1)$ Functionen $f_1(\beta) \ldots f_{\mu+1}(\beta)$ folgendermassen bestimmt sind: $f_1(\beta)$ sei im ersten Intervall gleich $f(\beta) - f(\beta_1)$, in allen folgenden gleich Null.

$f_\lambda(\beta)$ $(\lambda = 2, 3 \ldots \mu + 1)$ sei im Intervalle $0 \ldots \beta_{\lambda-1}$ gleich $f(\beta_{\lambda-1}) - f(\beta_\lambda)$
. . . . $\beta_{\lambda-1} \ldots \beta_\lambda$ gleich $f(\beta) - f(\beta_\lambda)$
. . . . $\beta_\lambda \ldots h$ gleich Null. $(\beta_{\mu+1} = h - 0.)$

Auf jede der Functionen $f_1(\beta) \ldots f_{\mu+1}(\beta)$ ist nun die eine oder die andere der obigen beiden Formeln anwendbar.

Ist $\delta' < \beta$, so ist jedenfalls

$$\left| \int_0^{\beta_1} f_1(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \big(f(0) - f(\beta_1)\big) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(0) - f(\beta_1) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right) \right|.$$

Für jede folgende Function f_λ ist $f\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$ constant und zwar gleich $f(\beta_{\lambda-1}) - f(\beta_\lambda)$. Alsdann ist für $\lambda = 2, 3 \ldots (\mu + 1)$:

$$\left| \int_0^{\beta_\lambda} f_\lambda(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \big(f(\beta_{\lambda-1}) - f(\beta_\lambda)\big) \right| < \frac{c}{2m}.$$

Ist aber $\delta' > \beta_1$, also liegt die erste Maximum- oder Minimumstelle zwischen 0 und δ' und ist $\delta' < \beta_2$, so wird

$$\left| \int_0^{\beta_1} f_1(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \big(f(0) - f(\beta_1)\big) \right| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \big(f(0) - f(\beta_1)\big) \right|$$

$$\int_0^{\beta_2} f_2(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \, d\beta - \frac{\pi}{2} \big(f(\beta_1) - f(\beta_2)\big) \Big| < \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(\beta_1) - f(\beta_2) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right) \right|$$

während alle folgenden Integrale ungeändert bleiben. Die Summe der Integrale ergiebt im ersten Falle:

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < (\mu + 1) \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(0) - f(\beta_1) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right) \right|,$$

im zweiten:

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < (\mu + 1) \frac{c}{2m} + \frac{\pi}{2} \left| \left(f(0) - f(\beta_2) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right) \right|.$$

Es muss nun sowohl

$$\left| \left(f(0) - f(\beta_1) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right) \right| \text{ als } \left| \left(f(0) - f(\beta_2) - f\left(\frac{2m\pi}{k}\right) \right) \right|$$

kleiner als ε_1 sein.

Also muss

$$\left| S - \frac{\pi}{2} f(0) \right| < (\mu + 1) \frac{c}{2\,m} + \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon_1 \text{ sein.}$$

Nun war ε_1 ganz willkürlich angenommen. Wählen wir ε_1 so, dass $\varepsilon - \frac{\pi}{2} \varepsilon_1 > 0$ ist, so sieht man, das m immer von der Grösse gewählt werden kann, dass $S - \frac{\pi}{2} f(0)$ unter ε sinkt.

Ueberträgt man die nämlichen Erörterungen auf die Summe der Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{2}(\pi + x)} \varphi(x - 2\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{2}(\pi + x)} \varphi(x + 2\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta,$$

so zeigt man leicht, dass die nämliche Schätzung für jeden Werth von x gilt, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Ist nicht $\delta' < \beta_2$, sondern ist etwa $\beta_\lambda < \delta' < \beta_{\lambda+1}$ $(\lambda > 1)$, so ist das obige Verfahren auch dann noch leicht anwendbar, und es lässt sich immer zeigen, dass die Reihe in gleichem Grade convergirt.

Die vorhergehende Erörterung trifft auch den Abschnitt über trigonometrische Reihen in Heine „Handbuch der Kugelfunctionen" pag. 61—62.

Es ist also zunächst nachgewiesen, dass es überhaupt eine Reihenentwicklung giebt, die in gleichem Grade convergirt. Aber es könnte auch mehrere solcher Entwicklungen geben, von denen nicht jede in gleichem Grade convergirt. Herr Heine beweist nun, dass, wenn es überhaupt eine in gleichem Grade convergente Reihe giebt, dieses die einzige in gleichem Grade convergente Reihe ist. Ob es ausserdem noch andere giebt, die nicht in gleichem Grade convergiren, bleibt hiernach fraglich. Es wird die Identität zweier im Allgemeinen in gleichem Grade convergenten Reihenentwicklungen derselben Function dadurch nachgewiesen, dass ihre Differenz gebildet und dann folgender Satz bewiesen wird: Eine trigonometrische Reihe, die im Allgemeinen convergirt und Null darstellt, existirt nicht, d. h. die Coefficienten müssen sämmtlich identisch Null sein.

Riemann hat als nothwendig für die Convergenz einer trigonometrischen Reihe in endlichen Strecken erkannt, dass $A_k = a_k \sin kx + b_k \cos kx$ mit wachsendem k unendlich klein werde. Herr Heine beweist nun, dass bei einer im Allgemeinen in gleichem Grade convergenten trigonometrischen Reihe die einzelnen Coefficienten a_k und b_k zuletzt unendlich klein werden; und darauf gestützt, dass die Coefficienten der aus der Differenz der beiden Reihen gebildeten neuen Reihe überhaupt verschwinden müssen, womit die Identität beider Reihen gezeigt ist.

Das Resultat der Heine'schen Abhandlung ist also schliesslich folgendes: eine endliche, nur an einzelnen Punkten unstetige Function, die nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, kann nur auf eine Weise in eine in gleichem Grade convergente trigonometrische Reihe entwickelt werden; und diese Reihe ist die Fourier'sche.

Es bleibt nun noch in Frage, ob es nicht noch andere Reihenentwicklungen geben könnte, die nicht in gleichem Grade convergirten, und zwar ob noch mehrere. Mit dieser Frage hat sich Herr G. Cantor beschäftigt. Derselbe schlägt den nämlichen Weg ein, wie Herr Heine, indem er zunächst beweist, dass in jeder im Allgemeinen convergenten trigonometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ die Coefficienten a_n und b_n zuletzt unendlich klein werden [1]), ohne jedoch eine Voraussetzung über die Art der Convergenz zu machen. Alsdann beweist er, dass eine im Allgemeinen convergente trigonometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n \sin nx + d_n \cos nx)$, welche überall mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen Null darstellt, nicht existirt, also die Coefficienten c_n und d_n sämmtlich verschwinden müssen [2]). Der vorbereitende Satz ist aber nach einer Bemerkung von Herrn Kronecker gar nicht nothwendig [3]). Es sei die Differenz zweier im Allgemeinen convergenten trigonometrischen Reihenentwicklungen derselben Function:

$$D(x) = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots = 0,$$

$$\text{wo } C_0 = \frac{d_0}{2},\ C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx \text{ ist.}$$

Man bilde nun

$$D(x + \delta) - D(x - \delta) =$$
$$e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \ldots = 0,$$

so müssen nun die Coefficienten $e_n = c_n \sin \delta n + d_n \cos \delta n$ von vornherein unendlich klein werden, wenn die letzte Reihe im Allgemeinen convergiren soll, wie es nach Voraussetzung der Fall ist. Nun ist auf diese Function das von den Herren Heine und G. Cantor benutzte Verfahren anzuwenden.

1) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 72. 1870. „Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz", und Math. Annalen. Bd. 4. 1871. Ueber trigonometrische Reihen.

2) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 72. 1870. Beweis, dass eine für jeden reellen Werth etc. . . . .

3) Borchardt's Journ. für Math. Bd. 73. 1871. Notiz zur vorerwähnten Abhandlung.

Man bildet die Riemann'sche Function:

$$F(x) = e_0 \frac{x^2}{2} - e_1 - \frac{e_2}{4} - \frac{e_3}{9} - \ldots .$$

so muss

$$\frac{F(x+\alpha) - 2\,F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

ausser an einer endlichen Anzahl von Punkten gegen Null convergiren. Dann muss aber nach einem von Herrn H. A. Schwarz gegebenen Beweise $F(x)$ eine lineare Function sein (pag. 265, Anm. 2), und zwar, wie Herr Heine gezeigt hat, in jedem der durch Unstetigkeitspunkte getrennten Intervalle dieselbe lineare Function $ex + e'$. Also muss

$$e_0 \frac{x^2}{2} - ex - e' = e_1 + \frac{e_2}{4} + \frac{e_3}{9} + \ldots . \text{ sein.}$$

Indem man nun mit $\cos n(x-t)$ multiplicirt, und von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirt, ermittelt man, dass für jedes n und jedes t $c_n \sin nt + d_n \cos nt$ und somit auch c_n und d_n selbst verschwinden müssen. Damit ist bewiesen, dass eine im Allgemeinen stetige Function, die nur eine endliche Anzahl von Stetigkeitsunterbrechungen erleidet und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, nur auf eine Weise in eine im Allgemeinen convergente trigonometrische Reihe entwickelt werden kann.

Es ist aber Herrn G. Cantor durch die erfolgreiche Anwendung eines Weierstrass'schen Satzes gelungen, den Satz von der Einheit der Entwicklung auch auf Functionen auszudehnen[1]), die unendlich viel Unstetigkeiten haben, wenn diese nur in gewisser Weise vertheilt sind. Wenn eine unendliche Anzahl bestimmter Stellen gegeben ist, so giebt es nach einem Satze, den Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen beweist, in dem Gebiete dieser Stellen mindestens eine Stelle, in deren Umgebung unendlich viele definirte Stellen liegen. Es kann aber auch mehrere, und auch unendlich viele solcher Stellen geben, und wir wollen ihre Gesammtheit mit Herrn G. Cantor die erste abgeleitete Punktmenge nennen. Enthält diese wieder unendlich viele Punkte, so kann man eine zweite Punktmenge ableiten u. s. f. Kommt man auf diese Weise zu einer Punktmenge, die nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht, so lässt sich der Beweis für die Eindeutigkeit der Entwicklung auf diesen Fall ausdehnen. Es kommt darauf an zu zeigen, dass in jedem der durch die Unstetigkeitspunkte getrennten Strecken $F(x)$ dieselbe lineare Function von x ist.

Nun lässt sich zeigen, dass in jedem der Intervalle, deren Endpunkte

1) Math. Annalen Bd. 5. 1872. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

durch die Punkte der ersten abgeleiteten Punktmenge bezeichnet sind, nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten liegen kann, so dass nun wieder der Heine'sche Beweis für jedes dieser Intervalle eintritt. Durch Iterationen dieses Verfahrens, deren Anzahl eine endliche sein muss, weil die letzte abgeleitete Punktmenge nur eine endliche Anzahl von Punkten besitzen soll, zeigt man, dass $F(x)$ überall dieselbe lineare Function ist.

Wir haben daher den Satz: „Eine endliche Function, die in der Weise unendlich viele Unstetigkeiten besitzt, dass es eine abgeleitete Punktmenge von einer endlichen Anzahl von Punkten giebt, und überhaupt in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist, kann nur auf eine Weise in eine solche entwickelt werden.“ Eine derartige Function ist, wenn sie nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, integrirbar; also convergirt die Fourier'sche Reihe für sie, wo sie convergirt, gegen den Werth der Function, und ist die einzig mögliche Reihenentwicklung.

In dem ganzen Gebiete dieser Functionen müssen daher die Coefficienten der Reihenentwicklung die Fourier'sche Gestalt haben, und ein Beweis, dass dies wirklich so sei, führt nur auf einem andern Wege zu demselben Ziele, wie der Heine-Cantor'sche Beweis von der Eindeutigkeit der Entwicklung. Ebenso wie umgekehrt ein Beweis, dass die Reihenentwicklung der Functionen aus diesem Gebiete nur die Fourier'schen Coefficienten haben kann, den Satz von der Einheit der Entwicklung in diesem Gebiete ersetzt. Derartige Beweise sind denn auch in der That von den Herren Dini [1]) und Ascoli [2]) gegeben worden, sie gelten aber nur für ein beschränkteres Functionengebiet, als dasjenige ist, für welches der Heine-Cantor'sche Beweis gilt, geben also keine Erweiterung der Theorie.

Wohl aber haben wir eine Erweiterung der Theorie darin zu erkennen, wenn Herr P. du Bois-Reymond [3]) nachweist, „dass, wie man auch eine Function $f(x)$ in eine Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$, deren Coefficienten a_n und b_n zuletzt unendlich klein werden, entwickeln möge, die Coefficienten doch immer die Gestalt haben:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) d\alpha;$$

---

1) Siehe pag. 247. Anm. 2. daselbst Art. 4.

2) Siehe pag. 252. Anm. daselbst Art. III. und Math. Annalen Bd. 6. 1873. pag. 231—240.

3) Abhandlungen der Bayerischen Akademie. Bd. XII, I. 1875. pag. 117—167. „Beweis, dass die Coefficienten etc.“

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha,$$

jedesmal, wenn diese Integrale einen Sinn haben". Der Zusatz „deren Coefficienten a_n und b_n unendlich klein werden" fehlt zwar in dem du Bois-Reymond'schen Satze, muss aber doch gemacht werden, da er in dem Beweise (a. a. O. pag. 141) nothwendig gebraucht wird. Der obige Satz schliesst den Satz von der Einheit der Entwicklung nothwendig in sich, und indem er die Folgerung enthält, dass es für alle Functionen, deren Entwickelbarkeit in eine trigonometrische Reihe nachgewiesen ist, nur eine einzige solche giebt, und dieses die Fourier'sche ist, giebt er allen bisherigen Untersuchungen die gewünschte Vervollständigung.

Es sollen nun die Grundzüge der du Bois-Reymond'schen Beweisführung angegeben werden. Bis auf Weiteres soll die zu behandelnde Function endlich bleiben. Zunächst wird der Beweis für die stetigen Functionen, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima haben gegeben, wie ihn im Allgemeinen auch schon die Herren Dini und Ascoli angegeben haben.

Man bilde die Riemann'sche Function

$$\text{I)}\quad F(x) = b_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2}.$$

Es ist nothwendig für jeden Werth von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_{-\pi}^{x} d\alpha \int\limits_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta) = f(x).$$

Bildet man nun

$$\Phi(x) = F(x) - \int\limits_{-\pi}^{x} d\alpha \int\limits_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta),$$

so folgt

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0$$

und daraus $\Phi(x) = c_0 + c_1 x$.

Also

$$\text{II)}\quad F(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} d\alpha \int\limits_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta) + c_0 + c_1 x.$$

Wenn man I) mit $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, 1 multiplicirt und integrirt, so folgt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \qquad - \frac{a_n}{n^2} \cdot \pi .$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = (-1)^n \frac{2\pi . b_0}{n^2} - \frac{b_n}{n^2} \cdot \pi .$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \, d\alpha \qquad = - \frac{\pi^3}{3} \cdot b_0 .$$

Man setze nun für $F(x)$ den Ausdruck II) ein, und ermittele den Werth der Integrale durch partielle Integration. Indem man n unendlich werden lässt, findet man unter Zuhilfenahme des hier geltenden Satzes, dass $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha\, dx$ und $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha$ und a_n und b_n zuletzt verschwinden, dass zunächst

$$c_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \left(\frac{\pi^2}{3} - (\pi - \alpha)^2 \right) d\alpha;$$

$$c_1 = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) (\pi - \alpha) \, d\alpha; \quad b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \, d\alpha$$

ist, und alsdann, dass

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha$$

für jedes n ist. Was für stetige Functionen somit nachgewiesen ist, kann man nun nach der Heine-Cantor'schen Methode auf alle Functionen ausdehnen, die nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis besitzen, und in der Weise unendlich viele Unstetigkeiten, dass eine abgeleitete Punktmenge von einer endlichen Anzahl von Punkten existirt.

Wenn aber die Function nur der Bedingung, integrirbar zu sein, unterworfen ist, so kann nicht mehr behauptet werden, dass dann $\lim\limits_{\varepsilon = 0} \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2}$ überall gleich Null ist.

Denn die Function hat hier nicht nothwendig in jedem Punkte einen bestimmten Werth; ihr Werth kann zwischen einer unteren und oberen Grenze hin und her schwanken. Bezeichnen wir die Summe der oberen und der unteren Grenze einer Function $f(x)$ an einer Stelle x mit $S(x)$, und ihre Differenz mit $D(x)$, so kann man offenbar dem Werthe der Function die Gestalt $f(x) = S(x) + jD(x)$ geben, wo j eine zwischen -1 und $+1$ liegende reelle Zahl ist, und $S(x)$ und $D(x)$ nun bestimmte Werthe sind. Wenn man nun ganz nach der von Riemann (art. 8) angewandten Methode $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2}$ bildet, so findet man, dass dieser die Gestalt hat

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j\left(\tfrac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) D(x).$$

Desgleichen hat man $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2}$ zu bilden für

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} dx \int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta) d\beta$$

und erhält

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2} = S(x) + j_1 \,.\, D(x),$$

wo j_1 ebenfalls zwischen -1 und $+1$ liegt. Da nun $\Phi(x) = F(x) - F_1(x)$ ist, so ist der grösste Werth, den $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2}$ annehmen kann:

$$\left(\tfrac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) D(x).$$

Es ist also nicht nachweisbar, dass für jeden Werth von x $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = 0$ ist. Nichtsdestoweniger lässt sich mit Hilfe der Bedingung der Integrirbarkeit für $f(x)$ zeigen, dass $\Phi(x)$ eine lineare Function von x ist. Sobald dies bewiesen ist, tritt wieder der pag. 268 und 269 geführte Beweis in Kraft. Das Intervall von x bis $x + a$ theilen wir durch die Punkte:

$$x,\ x + \delta_1,\ x + \delta_1 + \delta_2,\ \ldots,\ x + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1},\ x + a$$

in Intervalle, und bilden die Summe:

$$D(x + \varrho_1 \delta_1)\delta_1 + D(x + \delta_1 + \varrho_2 \delta_2)\delta_2 + \ldots\ldots$$
$$+ D(x + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \varrho_n \delta_n)\delta_n,$$

wo die ϱ positive echte Brüche sind.

Diese Summe muss vermöge der Bedingung der Integrirbarkeit verschwinden mit verschwindenden δ. Es muss also erst recht verschwinden mit verschwindenden δ:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2} \Big\{ \Phi(x + \varrho_1 \delta_1)\delta_1 + \Phi(x + \delta_1 + \varrho_2 \delta_2)\delta_2 + \ldots\ldots$$
$$+ \Phi(x + \delta_1 + \delta_2 + \ldots \varrho_n \delta_n)\delta_n \Big\}$$

oder es ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2}{\varepsilon^2} \int\limits_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Daraus folgt nach dem von Herrn H. A. Schwarz bewiesenen Satze, dass

$$\int\limits_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha = c_0 + c_1 x$$

ist, wo c_0 und c_1 Constanten sind. Nun ist

$$\int\limits_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha = \int\limits_0^a F(x+\alpha)\, d\alpha - \int\limits_0^a F_1(x+\alpha)\, d\alpha.$$

Bezeichnet α_1 einen mittleren Werth der zwischen 0 und a gelegenen Werthe von α, so ist $\int\limits_0^a \Phi(x+\alpha)\, d\alpha$ bei unendlich klein werdendem a

$$\text{gleich } F(x+\alpha_1) - F_1(x+\alpha_1) = \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a} \cdot x.$$

Lässt man dann a gleich Null werden, so erhalten $F(x)$ und $F_1(x)$ bestimmte Werthe, und dies muss demgemäss auch bei $\frac{c_0}{a}$ und $\frac{c_1}{a}$ der Fall sein. Daher wird

$$F(x) - F_1(x) = c'_0 + c'_1 x,$$

wo c'_0 und c'_1 Constanten sind, und damit sind wir auf den früheren Beweis zurückgeführt.

Wird die Function an einer Stelle unendlich, so müssen die Riemannschen Bedingungen (siehe pag. 253) eintreten.

Hiermit hoffe ich die wesentlichsten Untersuchungen über die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen berührt zu haben, welche seit der Abfassung der Riemann'schen Abhandlung erschienen sind, und es bleibt mir nun noch übrig, das von Herrn H. A. Schwarz gegebene Beispiel einer stetigen Function anzuführen, für welche die Fourier'sche Reihe nicht überall convergirt.

V.

Das Intervall von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 sei in unendlich viele bis zur Null kleiner werdende Theilintervalle:

$$\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{[1]}, \frac{\pi}{[1]} \cdots \frac{\pi}{[2]}, \cdots, \frac{\pi}{[\lambda-1]} \cdots \frac{\pi}{[\lambda]}, \cdots, \frac{\pi}{[\mu]} \cdots 0$$

eingetheilt, wo $[\lambda] = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2\lambda + 1)$ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots \mu$ und $\lim \mu = \infty$ sein soll. In dem λten Intervalle sei eine Function $f(\beta)$ durch die Gleichung $f(\beta) = c_\lambda \,.\, \sin\,[\lambda]\beta$ definirt, wo $c_1, c_2, c_3, \ldots c_\mu \ldots$ eine bis zur Null abnehmende Werthreihe bilden sollen. Diese Function ist von vornherein stetig; sie nimmt, wenn sich β der Stelle 0 nähert, mit unendlich vielen Maximis und Minimis von unendlich kleiner Amplitude ab, und es soll festgesetzt werden, dass sie bei $\beta = 0$ selbst den Werth 0 hat. Um nun zu sehen, ob die Fourier'sche Reihe, welche im Uebrigen die Function darstellt, auch noch an dieser Stelle den Functionswerth ergiebt, hat man den Werth des Integrals

$$J = \lim_{k=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\, \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta$$

zu untersuchen. Es wird sich zeigen, dass dieses Integral nicht convergirt. Wir lassen k wie $[\mu]$ mit wachsendem μ unendlich werden, und theilen das Integral nach den vorbezeichneten Intervallen in Theilintegrale; so ergiebt sich:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta)\, \frac{\sin\,[\mu]\beta}{\sin \beta} = c_{\mu+1} \int_0^{\frac{\pi}{[\mu]}} \sin\,[\mu + 1]\,\beta\, \frac{\sin\,[\mu]\beta}{\sin \beta}\, d\beta$$

$$+ c_\mu \int_{\frac{\pi}{[\mu]}}^{\frac{\pi}{[\mu-1]}} \frac{\sin^2 [\mu]\beta}{\sin \mu}\, d\beta + \sum_{\lambda=\mu-1}^{2} c_\lambda \int_{\frac{\pi}{[\lambda]}}^{\frac{\pi}{[\lambda-1]}} \sin\,[\lambda]\,\beta\, \frac{\sin\,[\mu]\beta}{\sin \beta}\, d\beta$$

$$+ c_1 \int_{\frac{\pi}{[1]}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\,[\beta]\, \frac{\sin\,[\mu]\beta}{\sin \beta}.$$

Diese vier Theile untersuchen wir nun einzeln. Das erste Integral wird in Theilintegrale zerlegt, so dass in jedem derselben $\sin\,[\mu + 1]\beta$ von demselben Zeichen ist. Dann folgt unter Anwendung eines bekannten Mittelwerthsatzes, dass das Integral nicht grösser sein kann, als $\int_0^{\frac{\pi}{[\mu]}} \frac{\sin\,[\mu]\beta}{\sin \beta}\, d\beta$, also nicht grösser, als das Dirichletsche ϱ_0, und dieses ist nicht grösser als $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$. Daher ist der erste Theil von J kleiner als $c_{\mu+1}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\right)$, und verschwindet also mit wachsendem μ.

Für ein Theilintegral J'_λ des dritten Theils ist die pag. 257 gegebene Abschätzungsformel anzuwenden. Darnach ist:

$$J'_\lambda = c_\lambda \int\limits_{\frac{\pi}{[\lambda]}}^{\frac{\pi}{[\lambda-1]}} \sin[\lambda]x \frac{\sin[\mu]\beta}{\sin\beta}\, d\beta < \frac{2\mu c_\lambda}{\frac{\pi}{[\lambda]}\cdot\mu} + \frac{\pi}{2}\cdot c_\lambda \int\limits_{\frac{\pi}{[\lambda]}}^{\frac{\pi}{[\lambda-1]}} \frac{\sigma_q[\beta]}{\beta}\, d\beta$$

$\sigma[\beta]$ ist im $q$ten Intervalle von $\frac{q\pi}{[\mu]}$ bis $(q+1)\frac{\pi}{[\mu]}$ gleich $\sigma_q(\beta)$, dem absoluten Betrage der grössten Schwankung der Function $\sin[\lambda]\beta$ in diesem Intervalle.

Da nun die Differenz zweier Sinus allemal kleiner ist, als die Differenz der zugehörigen Argumente, so ist

$$\sigma_q(\beta) < (q+1)\frac{\pi}{[\mu]}\cdot[\lambda] - q\cdot\frac{\pi}{[\mu]}\cdot[\lambda]$$

$$\text{also } \sigma_q(\beta) < \pi\cdot\frac{[\lambda]}{[\mu]}.$$

Daher ist:

$$J'_\lambda < 2\,c_\lambda\cdot\frac{[\lambda]}{[\mu]} + \frac{\pi}{2}\cdot c_\lambda\cdot\pi\cdot\frac{[\lambda]}{[\mu]}\int\limits_{\frac{\pi}{[\lambda]}}^{\frac{\pi}{[\lambda-1]}} \frac{d\beta}{\beta},$$

$$J'_\lambda < 2\,c_\lambda\cdot\frac{[\lambda]}{[\mu]} + \frac{\pi^2}{2}\cdot c_\lambda\frac{[\lambda]}{[\mu]}\cdot\log(2\lambda+1).$$

Bildet man nun $\sum\limits_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda$, so erhält man für den dritten Theil:

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda < 2\,c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{2}\frac{[\lambda]}{[\mu]} + \frac{\pi^2}{2}\cdot c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{2}\frac{[\lambda]}{[\mu]}\cdot\log(2\lambda+1),$$

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda - 2\,c_1\sum_{\lambda=\mu-1}^{2}\frac{[\lambda]}{[\mu]} < \frac{\pi^2}{2}c_1\left\{\frac{\log(2\mu-1)}{2\mu+1} + \frac{\log(2\mu-3)}{(2\mu+1)(2\mu-1)} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{\log 5}{(2\mu+1)(2\mu-1)\dots 9.7}\right\},$$

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda - 2\,c_1\sum_{\lambda=\mu-1}^{2}\frac{[\lambda]}{[\mu]} < \frac{\pi^2}{2}\cdot c_1\frac{\log(2\mu-1)}{2\mu-1}\left\{1 + \frac{1}{2\mu-1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2\mu-1)(2\mu-3)} + \dots \frac{1}{(2\mu-1)\dots 9.7}\right\},$$

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda - 2\,c_1\sum_{\lambda=\mu-1}^{2}\frac{[\lambda]}{[\mu]} < \pi^2 c_1\cdot\frac{\log(2\mu-1)}{2\mu+1}$$

mit wachsendem μ. Mit unendlich wachsendem μ wird nun

$$\sum_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda - 2\,c_1 \sum_{\lambda=\mu-1}^{2} \frac{[\lambda]}{[\mu]} \text{ gegen } \sum_{\lambda=\mu-1}^{2} J'_\lambda$$

zugleich aber auch gegen Null convergiren, da $2\mu + 1$ stärker unendlich wird, als $\log(2\mu - 1)$. Ebenso wie hiernach mit unendlich wachsendem μ der dritte Theil gegen Null convergirt, kann man dies mit Hilfe derselben Abschätzungsformel vom vierten Theile zeigen. Es bleibt noch der zweite Theil

$$c_\mu \int_{\frac{\pi}{[\mu]}}^{\frac{\pi}{[\mu-1]}} \frac{\sin^2[\mu]\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

zu untersuchen übrig. Da sämmtliche Elemente desselben positiv sind, so ist das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{[\mu]}}^{\frac{\pi}{[\mu-1]}} \frac{\sin^2[\mu]\beta}{\sin\beta}\, d\beta = J'' > \int_{\frac{\pi}{[\mu]}}^{\frac{\pi}{[\mu-1]}} \frac{\sin^2[\mu]\beta}{\sin\beta}\, d\beta.$$

Nun kann man leicht zeigen, dass auch

$$J'' > \int_{\frac{\pi}{[\mu]}}^{\frac{\pi}{[\mu-1]}} \frac{\cos^2[\mu]\beta}{\beta}\, d\beta$$

ist, und erhält daher durch Addition der beiden letzten Ungleichungen:

$$J'' > \tfrac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{[\mu]}}^{\frac{\pi}{[\mu-1]}} \frac{d\beta}{\beta}, \text{ also auch } > \tfrac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{[\mu]}}^{\frac{\pi}{[\mu-1]}} \frac{d\beta}{\beta}.$$

Es ist daher $c_\mu J'' > \frac{1}{2} c_\mu \log(\mu + \frac{1}{2})$. Wählt man nun die Werthreihe der c_μ so, dass $\lim_{\mu=\infty} c_\mu \log(\mu + \frac{1}{2})$ unendlich wird, während c_1 endlich bleibt, und c_μ doch mit wachsendem μ unendlich klein wird, so wird der zweite Theil von J unendlich gross. Dies tritt z. B. ein, wenn man für die c_μ eine Reihe wählt, die wie die absoluten Beträge von $\frac{1}{\sqrt{\log(\mu + \frac{1}{2})}}$ mit wachsendem μ abnimmt. Denn dann wird der zweite Theil von J selbst $< \frac{1}{2} \log(\mu + \frac{1}{2})$ also unendlich gross mit unendlich wachsendem μ. Damit ist nachgewiesen, dass die Fourier'sche Reihe, welche die angegebene stetige Function sonst darstellt, an der Stelle Null nicht convergirt.

Anmerkung.

Vorstehende Abhandlung ist zuerst im Mai 1879 als Inauguraldissertation in Göttingen erschienen. Herr P. du Bois-Reymond hat sich bewogen gefühlt, gegen dieselbe im Mai 1880 eine Schrift unter dem Titel: „Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, eine Entgegnung" (Tübingen) erscheinen zu lassen. Eine von mir verfasste Anzeige derselben findet sich in den Göttinger gelehrten Anzeigen. 1880. Stück 31. Die Einwendungen des Herrn P. du Bois-Reymond, soweit sie sachlich sind, habe ich in Erwägung gezogen und auf pagg. 241 und 248 mit Dank benutzt; auf pagg. 242 und 243 sind Aenderungen in der Wortfassung vorgenommen worden, und grössere Ausführlichkeit ist der Kritik der du Bois-Reymond'schen Auffassung des bestimmten Integrals auf pagg. 250 und 251 ertheilt worden.

Arnold Sachse.

Inhaltsangabe.

I. Angabe des Problems, dessen Geschichte behandelt werden soll. Ueber die Entstehung des Begriffes einer willkürlichen Function. Definition der Fourier'schen Reihe. Ueber die Priorität der Auffindung der Coefficientenbestimmung dieser Reihe. Das Poisson'sche Integral. Der Cauchy'sche Versuch, die Convergenz der Fourier'schen Reihe zu beweisen, und daran sich knüpfende Erörterungen, ob der Cauchy'sche Satz und ähnliche überhaupt zum Ziel führen können.

II. Die Dirichlet'sche Abhandlung. Ihre Bedeutung für die Klärung der Fundamente der Analysis. Dirichlet's Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe. Reduction der die Function beschränkenden Bedingungen. Ueber den Begriff der Darstellbarkeit einer Function. Ueber den Mittelwerth an den Unstetigkeitsstellen. Dirichlet's Ansicht über die von ihm nicht erledigten Fälle. Seine Definition des bestimmten Integrals. Sein Irrthum in Betreff der stetigen Functionen. Ueber das Verhältniss der Darstellung einer willkürlichen Function zur Naturerklärung. Die Lipschitz'sche Bedingung für die Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis. Ueber das Verhältniss der gefundenen Bedingungen zu den nothwendigen.

III. Die Riemann'sche Habilitationsschrift. Ihr Ziel. Die vorbereitenden Auseinandersetzungen über einige Fundamentalsätze der Analysis. Die beiden Riemann'schen Bedingungen; sie sind hinreichend, und auch nothwendig, aber in einem andern Sinne, als dem bisherigen. Die daraus abzuleitenden Resultate über die Darstellbarkeit. Ueber das Unendlichwerden der Functionen. Ueber das schliessliche Verschwinden der Fourier'schen Coefficienten. Die Convergenz der Fourier'schen Reihe hängt nur von dem Verhalten der Function in der unmittelbaren Umgebung der betrachteten Stelle ab. Beweis dafür mit Hülfe einer Abschätzungsformel von Herrn H. A. Schwarz. Mit deren Hülfe auch Ableitung der Lipschitz'schen Bedingung. Ueber die Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis.

IV. Ueber die Eindeutigkeit der Entwicklung einer Function in eine trigonometrische Reihe. Die Aufklärung über die Cauchy'sche Ansicht betreffend die Integration einer unendlichen Reihe durch Herrn Weierstrass. Definition des Begriffes der Convergenz in gleichem Grade. Die erste Aufstellung dieses Begriffes durch Herrn Seidel. Durch die Weierstrass'sche Bemerkung waren eine Reihe der bisherigen Beweise in Frage gestellt. Insbesondere der Satz von der Eindeutigkeit der Entwicklung. Heine's Beweis, dass die Fourier'sche Reihe in gleichem Grade convergirt. Vervollständigung dieses Beweises. Der Heine'sche Beweis für die Eindeutigkeit der Entwicklung der stetigen Functionen, die nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Cantor's Fortführung der Heine'schen Untersuchungen ohne Voraussetzung der Convergenz in gleichem Grade. Ihre Ausdehnung auf unendlich oft unstetige Functionen besonderer Art. Ueber das Verhältniss der Heine-Cantor'schen Sätze über die Eindeutigkeit der Entwicklung zu dem Satze, dass die Coefficienten einer convergenten trigonometrischen Reihenentwicklung einer Function die Fourier'sche Form haben müssten. Beide erreichen dasselbe in einem gewissen Functionenbereich. Ausdehnung des zweiten Satzes zu seiner weitesten Brauchbarkeit durch Herrn P. du Bois-Beymond. Dessen Beweismethode.

V. Einfaches Beispiel einer stetigen Function, für welche die Fourier-sche Reihe, welche die Function sonst darstellt, an einer Stelle nicht convergirt.