Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

Supplement zum vierzigsten Jahrgang.

Der Supplemente zwölftes.

Zugleich der

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik

siebentes Heft.

Mit einer lithogr. Tafel und 16 Figuren im Text.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1895.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

7

Siebentes Heft.

Mit einer lithogr. Tafel und 16 Figuren im Text.

Inhalt:

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1895.

PTOLEMÄUS DE ANALEMMATE.

VON

J. L. HEIBERG

IN KOPENHAGEN.

MIT 10 TEXTFIGUREN.

Dass der bekannte Mailänder Palimpsest Ambros. L 99 sup. saec. VII u. a. auch Ueberreste des sonst verlorenen griechischen Textes von Ptolemäus' Schrift *Περὶ ἀναλήμματος* enthält, habe ich in dieser Zeitschrift (Abhandlungen z. Gesch. d. Mathematik V S. 4 Anm. ** Schluss) mitgetheilt. Während eines längeren Aufenthalts in Mailand habe ich jetzt das meiste von diesen Bruchstücken entziffert, soweit es mir ohne Reagentien möglich war, und lege hier meine Lesung vor, ohne vorläufig auf die vielen Fragen einzugehen, wozu das recht schwierige Schriftchen Anlass giebt; zu einem Verständniss im allgemeinen reicht der Commentar von Commandinus aus (Claudii Ptolemaei liber de analemmate a Federico Commandino Urbinate instauratus et commentariis illustratus, qui nunc primum eius opera e tenebris in lucem prodit. Ejusdem Federici Commandini liber de Horologiorum descriptione. Romae MDLXII. Apud Paulum Manutium Aldi f., 4to); vgl. auch Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne II S. 458 ff.

Ueber die Art der Herausgabe bemerke ich nur folgendes. Die unsicheren, nur mit Wahrscheinlichkeit zu erkennenden Buchstaben sind in ( ) eingeschlossen. Wo absolut nichts zu lesen war, habe ich mit Hülfe der lateinischen Uebersetzung den Text restituirt; meine Ergänzungen sind in ⟨ ⟩ gesetzt; dabei ist von einer Zeile von 32 bis 36 Buchstaben ausgegangen. Wo die Ergänzung mir unsicher schien, habe ich den Defect durch Punkte angedeutet; die Zahl der fehlenden Buchstaben lässt sich nach der angegebenen Mittelzahl ungefähr berechnen. | bedeutet Schluss der Zeile in der Handschrift, || Schluss der Seite; die Seitenzahlen der Handschrift sind am Rande angegeben; auf die Seite kommen 28—29 Zeilen.

Dem griechischen Text gegenüber (wo er fehlt, allein) gebe ich die lateinische Uebersetzung Wilhelms von Moerbek nach cod. Ottobon. lat. 1850 saec. XIII fol. 55—57 (nach der modernen Zählung der Blätter fol. 62—64) nach einer Photographie. In der angeführten Abhandlung habe ich S. 8 ff. nachgewiesen, dass wir in dieser Handschrift die eigenhändige Originalübersetzung Wilhelms vor uns haben, eine Auffassung, die auch durch dieses Stück ihre Bestätigung findet; ich habe deshalb alles so gegeben, wie es in der Handschrift steht, bis auf einige orthographische Kleinigkeiten; nur habe ich natürlich die vielen Compendien aufgelöst. Die Figuren sind nach denen der Handschrift bis auf die Buchstaben calquirt. Dem Wilhelm lag eine griechische Handschrift vor, wie die Randbemerkungen zeigen, ohne Zweifel die in dieser Zeitschrift Hist. Abtheilung XXXVII S. 97 nachgewiesene (in der Bibliothek des Papstes von 1311 nr. 608).

Nach dieser Handschrift hat Commandinus die Uebersetzung herausgegeben (Abhandl. z. Gesch. d. Math. V S. 4 Anm. **), aber stark daran corrigirt, wie er selbst in seiner Vorrede sagt (locos . . . deprauatos, quantum coniectura sum assecutus, restitui ac correxi; deinde quaecunque deerant, iis suppleui, quae cum antecedentibus Ptolemaei sententiis consentire iudicaui. quamuis nihil pro certo affirmauerim etc.); die Aenderungen gehen meist darauf hinaus, das mittelalterliche Latein des Uebersetzers etwas classischer zuzustutzen, was zuweilen nicht ohne missverständliche Aenderung des Sinnes abgeht. Jedenfalls haben diese Aenderungen für unsere Zwecke keinen Werth; ich habe sie daher nicht aufgeführt, von einigen wirklichen Emendationen abgesehen, die zur Erleichterung des Verständnisses in den Anmerkungen erwähnt sind. Ich mache besonders darauf aufmerksam, dass die Tabelle am Schluss, so wie sie hier nach der Handschrift gegeben ist (an den vier leeren Stellen 2, 3, 4, 5 ist natürlich $^2/_3 = 40'$ einzusetzen; *Γo* kommt für $^2/_3$ in den Handschriften der Syntaxis oft vor; es ist eine Verstümmelung von *Γ*Ϛ $= \gamma^{\beta}$), dem richtigen bedeutend näher kommt (vgl. Delambre II S. 471).

Zum Schluss schalte ich noch eine Beschreibung des palimpsesten Theils des Ambrosianus L 99 sup. ein.

Die obere Schrift ist aus dem VIII. Jahrhundert, die untere aus dem VII.; sie ist sehr schwer lesbar, wo die obere Schrift mit ihr zusammenfällt, viel besser geht es, wo diese zwischen den ausradirten Zeilen steht. Angelo Mai hat mit seiner Galläpfeltinctur grossen Schaden angerichtet; sie ist jetzt dunkelbraun geworden und hat auch die gegenüberstehenden Seiten überklekst. Die rescribirten Seiten sind:

113—114 (114 nicht beschrieben), veröffentlicht von Belger Hermes XVI S. 261 ff., verbessert von Cantor-Wachsmuth ebend. S. 637 ff. und von mir in dieser Zeitschrift XXVIII S. 121 ff., wo sie dem Anthemius vindicirt werden. Eine Nachvergleichung hat folgendes ergeben: S. 113, 23 *προυδεδει|γμένον* d. i. *προϋποδεδειγμένον*. 28 sicher: *οἱ μὲν οὖν* (Compendium) *παλαιοί*, darauf *δ . . λαβον*, also *δ⟨ιέ⟩λαβον*. 31 ist zwischen dem unsicheren *ἐν τῷ* und dem ganz klaren *πρὸς* noch ein *Γ*' (*γὰρ*) zu erkennen, also vielleicht: *τοῦτο δὲ ψεῦδος Ἀπολλώνιος μάλα δεόν* | *⟨τως λέγει⟩*· (*ἐν τῷ γὰρ*) *πρὸς τοὺς κατοπτρικοὺς κτλ.*, was bei den vielen Compendien zur Buchstabenzahl stimmt. S. 114, 23 ist zwischen den sicheren Worten *οὖσα* und *δὲ τοῦ* nur für 4 Buchstaben Raum; *αἵ* ist nothwendig, mein Supplement *ὑπόκειται* also kaum richtig, wenn nicht *υ'κ*^{τ} geschrieben werden konnte; das $\varDelta$ bei Belger habe ich nicht gesehen. 24 steht *τῆς* $\overline{ηζεϑ}$ *καὶ τῆς* $\overline{εγ}\,\overset{ω}{γ}$, also *τῆς ηζ εὐϑείας καὶ τῆς ηγ γωνία* ohne *περιφερείας*. 25 ist *εὐϑείας* nicht *ευ*^{ϑ}, sondern *ε*^{υ} geschrieben. 29 ist *περιενεχϑέν* deutlich zu lesen.

117—118 unten herausgegeben (*περὶ ἀναλήμματος*).

119—120 ebenfalls; 119 fast unlesbar wie 118 gegen Ende.

123, fast unlesbar, weil die Schrift von S. 124 stark durchgeschlagen hat. Am Anfang lese ich: *ειργασμενο(ς οια) ε' ϱ* ⁒ [1]) *ως ο* $\overline{εγ}$ *κιων* $\overset{ρ}{Π}\,\overset{ν}{τ}$ [2]) $\overline{α(ι)}$ *κιο*|*να ο α'* ϡ [3]) $\overline{ϱγ}$ *κυβος* $\overset{ρ}{Π}$ *τ' α'* ϡ [4]) $\overline{νι}$ *κυβον* ⁒ *η* $\overline{ϱγ}$ $\overset{ρ}{Π}$ $\overline{τ}$ | .. *φανερον* ... δ̦ [5]) *και ως ο εγ κιων* $\overset{ρ}{Π}$ *τ'* $\overline{αι}$ *κιονα* | .... Π ..... $\overset{ρ}{Π}$ ... *τον αυτον τω δοϑ*ˢ [6]) | .... | *τον τω δο* [7]). *ως δε οι* $\overline{ϱη}$ $\overline{αι}$ *κιονες προς αλληλους* | ... *και οι* $\overline{να}$ .... | Folgt Fig. 10. Zu ⁒ am Rande: ⁒ *ως δε ο α' τῆς* $\overline{ϱγ}$ *κυβος προς τ' α' της* $\overline{νι}$ *κ*^{υ}. Wie dieser Satz mit S. 124 in Verbindung gesetzt war, ist mir unklar.

124, nicht rescribirt, = Wattenbach, Scripturae Graecae specimina² tab. VIII.

129—130, s. unten (*περὶ ἀναλήμματος*).

139—140 ebenso.

143—144 ebenso.

157—158 ebenso.

189—190 (das Blatt ist umzukehren), fast ganz unlesbar, namentlich 189. Auf S. 190 lese ich:

.... *τινα τροπον επεσκεπται ον* ..... | .... *τας τε καταβατικας και αντι* .... | ... *σκιους*; nach der Mitte: ... *του τε μεσημβρινου και του* ..... | *νου ουν οτι* .... | Schluss: ... *του κατα κορυφην επι τελ* .. | — was dem Ptolemäus ähnlich sieht, doch finde ich in der Uebersetzung keine entsprechende Stelle. Sollte sie am Ende unvollständig sein, wie Delambre vermuthete?

195—196 (umzukehren), 195 unlesbar, auf 196: ... *τουτεστιν εως αν η ακτις συμπεση* | *τη κοινη αυτων τομη τουτου δε γινομ⟨ενου⟩* .... *ενδοτερον γιγνε⟨ται⟩* — Ptolemäus?

197—198, 198 unlesbar, 197 Anfang: *ε'* ϡ $\overline{νδ}$ =' *εφ* ..... ⟨*β*⟩*αρυ και παλιν κ'* ... | $\overline{μξ}$ ... *τα των* ...... | *λαβοντες και δια τ(ων)*

---

1) d. i. *ἐπ(ε)ὶ οὖν ἐστιν.* 2) *πρὸς τόν.* 3) *ἀπὸ τῆς.* 4) *πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς.* 5) *ἔσται.* 6) *δοϑέντι.* 7) *δοϑέντι.*

.... γενομεν̃ σημ | .... κανονιω δι αν | .... α γνωμων | . δε η δ . του ημικυ(λ) . η γδ .... | ... ποιας δε λου .... | . λομεθα δε .....; etwas weiter unten | λομεθα δια ....

235—236, 235 unlesbar, 236 Anfang: θω ε .... | ..... ημερα του ηλιου με ...... | ρον τμημα του οριζοντος ετι δε ...... τες | του εαξ λαμβανομεν .... |; weiter unten: οι μεν γαρ .... | und | φερωμεν ... . | το νω .... | — Ptolemäus?

241—242, 242 unlesbar, 241: ...... ας | .... εν | .... απεχει ... | .... τερον ε(μ) | τη .... (ενπ) α|ροδω ...... του ιση-με|ρινου .... α εμαυτο(ν) |; weiter unten: ⟨π⟩αροδους και τα επι | — Ptolemäus?

249—250, 249: ... αμφοτερων των πλευρων ..... | ... λλη ... ου και του φεροντος συνκε | κ ... μεν ..... εν μονω τω φεροντι προς τα | του μεσημβρινου κατα τα εξαρματα των | πολων παραφορας απαρεγκλιτων | — Ptolemäus?

251—252, 251: εντομας ο τε πολευων και ο ζωδιακος ωστε | προς ορθας τ ακριβως ειναι και μιαν επιφα|νειαν ποιειν των τε κυρτων εμμερει και των | κοιλων επιφανειων τη αυτη μεν ... | — Ptolemäus?

Aus den bezeichneten Seiten ist vielleicht mehr herauszubringen.

Der grosse Unterschied in der Verwendung der Compendien, indem im Ptolemäus (sowie S. 190, 196, 236, 241, 249, 251, die dadurch ebenso wie durch den Inhalt ihre Zugehörigkeit beweisen) fast nur der ν-Strich am Schluss der Zeile zur Verwendung kommt, während im „Anthemius" (S. 113—14, 123—24, 197) allerlei Compendien besonders zahlreich sind, erklärt sich wohl nur so, dass der spätere Schreiber zwei verschiedene Handschriften zerschnitt und verwendete. Dass man also im VIII. Jahrh. zwei solche alten Handschriften griechischer Mechanik und Astronomie in Italien besass und für werthlos hielt, ist eine interessante Thatsache.

Claudii Ptolemei liber de analemmate incipit.

Consideranti mihi, o Syre, angulorum acceptorum in locum gnomonicum quod rationale et quod non habitum quidem virorum illorum in lineis accidit admirari etiam in hiis et ualde acceptare, non coattendere autem ubique, et eam que secundum naturam in metodis consequentiam, ipsarum rerum non solum clamantium, quod et naturali theorie aliqua coassumptione magis mathematica et mathematice magis naturali, nullatenus exprobrauimus; non enim licitum est quod tale uiro amanti addiscere pure, sed obseruare, ut non propter dictam cogitationem unumquemque tractatuum aliqualiter imperfectiorem accidat fieri. qve itaque certitudinaliter deprehensa sunt michi[1]) secundum expositum locum, misi tibi consideraturo summatim, si quid tibi uidemur ad intellectum coauxisse et ad rationabilitatem suppositionum et ad promptitudinem usus eius qui per[2])

Qvoniam igitur eas que secundum unamquamque molem dimensiones consequens est determinatas esse et positione et multitudine sicut et magnitudine, declinationum autem que ad rectos angulos sole hunc habent modum; omnes enim alie et indeterminate secundum speciem et infinite secundum numerum; consequtum est tres solas esse tales secundum unamquamque molem dimensiones, quoniam et solas tres rectas ad rectos angulos inuicem constitui possibile est, plures autem hiis est impossibile; propter quod quidem et in spera sole tres diametri construuntur ad rectos angulos inuicem, et maximi circuli soli tres in recto angulo faciunt declinationes ad inuicem acceptorum in spera mundi, et uno quidem ipsorum intellecto secundum distinguentem quod sub terra emisperium ab eo quod super terram, uocatum autem orizontem, secundo autem penes distinguentem orientale emisperium ab occidentali, uocatum autem meridianum, reliquus et tertius erit penes separantem boreale emisperium ab eo quod ad meridiem, uocatum autem secundum verticem. et dictarum autem diametrorum communis quidem orizontis et meridiani uocatur meridiana, communis autem sectio meridiani et eius qui secundum verticem uocatur gnomon, communis autem sectio eius qui secundum verticem et orizontis uocetur equinoctialis, quoniam et ipsius equinoctialis ad ipsos fit communis sectio. simul translatis itaque cum sole hiis circulis circa manentes communes sectiones ut circa axes duas quidem possibile est intelligere lationes orizontis quidem circa equinoctialem diametrum ut ad id quod super terram et sub terra et circa meridionalem ut ad orientem et occasum, meridiani autem circa meridionalem diametrum ut ad ortus et occasus et circa diametrum gnomonis ut ad aquilonem et meridiem, eius autem qui secundum verticem circa diametrum gnomonis ut ad aquilonem et meridiem et circa equinoctialem ut ad id quod super terram et sub terra. sed quoniam non est possibile eundem simul duabus ferri lationibus, conuenientiorem et priorem duarum dictarum assignandum unicuique, hoc est orizonti quidem eam que circa equinoctialem diametrum, ut rursum determinet positionem ad id quod sub terra et super terram, meridiano autem eam que circa meridianum, ut notet distinctionem que ad ortum et occasum, ei autem qui secundum verticem eam que circa gnomonem, ut insinuet transitum ad aquilonem et

---

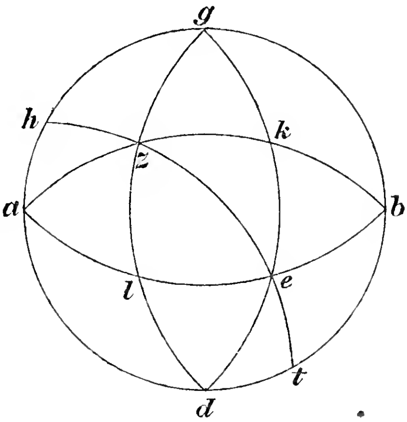
1) Hier durchstrichen: misi tibi. 2) Folgt eine Lücke, am Rande: ἀναλήμματ°.

meridiem. facit autem orizontis quidem latio circulum, quem uocamus ektimoron, id est sex partium, quia altitudinem usque ad sextam horam manifestat, latio autem meridiani circulum, quem uocamus horarium, quia longitudini que secundum unamquamque horam comprogreditur, latio autem eius qui secundum verticem circulum, quem uocamus katauaticum, id est descensiuum, quia notificat descensionem ab altissimo ad humillimum. rursum unusquisque dictorum circulorum in coexaltatione cum solari radio super terram facit duas declinationes, quibus datis et positio radii determinatur, quoniam una ad tale non sufficit, harum autem alteram quidem a rectis contentam, scilicet a delata et manente, hoc est a radio et a diametro, circa quam fertur, alteram autem ab ipsis planis[1]) similiter a moto et a manente, ita ut duorum circulorum utriusque una sola declinationum data determinetur et positio radii. et eorum quidem qui ab[2]) ektimoro circulo fiunt angulorum consistentem quidem apud radium et apud diametrum equinoctialem non uidemus ab antiquis acceptum in locum gnomonicum, eum autem, qui ab ipsius declinatione ad orizontem fit, uocant ektimoron. factorum autem a circulo horario duorum angulorum eum quidem, qui apud radium et apud diametrum equinoctialem consistit, uocant horarium, eum autem qui ab ipsius declinatione ad meridianum in plano eius qui secundum verticem. factorum autem a circulo descensiuo duorum angulorum hic quidem apud radium et apud gnomonem consistit iterum[3]), hic autem ab ipsius declinatione ad eum qui secundum verticem; utuntur autem non hiis, sed pro angulo quidem, qui a gnomone et a radio continetur, utuntur deficiente ad unum rectum et uocant ipsum descensiuum, pro angulo autem, qui ab ipsius declinatione ad eum qui secundum verticem continetur, utuntur eo, qui constituitur a declinatione ipsius ad meridianum, vocant autem et hunc antiskion, id est contraumbralem. sextum autem angulum inserunt pro relicto eum, qui fit ab equinoctiali diametro et a communi sectione circuli horarii et equinoctialis, quem uocant in equinoctialis plano, et quidem equinoctiali non in omni climate eandem seruante positionem aliter passus est et orizon et meridianus et qui secundum verticem.

Ut autem sub uisu nobis magis cadat consequentia angulorum et quod supponitur, sit meridianus quidem circulus qui *abgd*, recti autem super ipsum et orientales semicirculi orizontis quidem qui *aeb*, eius autem qui secundum verticem qui *ged*, et supposita positione radii alicuius penes *z* describantur per ipsum trium circulorum orientales semicirculi circumdelati cum radio circa proprias diametros, ipsius quidem orizontis *aeb* facti ektimori

1) Hier similiter getilgt. 2) ex ausgelöscht. 3) Unsicher.

semicirculus *hzet* circa diametrum que apud *e* et per oppositum sibi diametraliter, ipsius autem meridiani *agb* facti horarii semicirculus *azkb* circa diametrum que per *a* et *b*, ipsius autem *ged* qui secundum verticem facti descensiui semicirculus *gzd* circa diametrum que per *g* et *d*. et accipiantur differentie angulorum in periferiis propriorum circulorum subtensis unicuique propter simpliciorem ostensionem. angulis quidem itaque, quos dicebamus constitui a radio et ab axe, periferie subtenduntur que *ze* ektimori periferia et que *za* horarii et que *zg* descensiui, angulis autem, qui fiunt a declinationibus planorum manentis circuli et transcidentis ipsum subtenduntur que *ah* meridiani periferia continens declinationem orizontis et ektimori et que *gk* eius qui secundum verticem periferia continens declinationem meridiani et horarii et que *el* orizontis periferia continens declinationem eius qui secundum verticem et descensiui.



Huius itaque consequentie subicientis angulosque et periferias conuenientes nature circulorum unam secundum unumquemque manentium et motorum antiqui ipsam quidem *ez* ektimori praetermiserunt, ut diximus, ponentes pro ipsa, quem uocant in equinoctialis plano, ipsam autem *az* seruant et uocant proprie horariam, pro ipsa autem *zl* assumpserunt[1]) nominantes ipsam descensiuam et rursum ipsam quidem *ah* seruant et uocant ektimoron, similiter autem et ipsam *gk* uocantes ipsam in plano eius qui secundum verticem, pro ipsa autem *el* assumunt ipsam *al* uocantes ipsam antiskion id est contraumbralem. differentia quidem igitur rationabilitatis penes id, quod supponitur, ad eos qui ante nos manifesta.

Qvoniam autem omnis angulus facit aliquas magnitudines ex utraque parte declinationis et quandoque quidem equales, ut in positione recta, quandoque autem inequales, ut in reliquis, necessarium utique erit et in angulis expositis aut periferiis condeterminari principium secundum unamquamque speciem, a quo acceptio et contrarietates declinationum earum que ad ortus uel occasus et earum que ad aquilonem uel meridiem. proposito igitur nobis existente acceptiones et expositiones et appellationes periferiarum facere secundum ordinem a ratione productum consequens erit et suppositionibus determinatio propria secundum unamquamque speciem. nominationes enim facimus ab ipsis circulis, quorum sunt periferie, et uocamus eas quidem que in motis ektimoriales et horarias et descensiuas,

1) Hier können (am Schluss der Zeile) noch zwei Buchstaben haben stehen sollen; vielleicht ist am Rande etwas verwischt. Zu lesen: autem *zg* assumpserunt *zl*.

eas autem que in manentibus similiter meridionales et secundum verticem et orizontes. et in magnitudinibus semper eligimus acutum angulum consistentium ex utraque parte, si non sint recti, et principia acceptionum facimus earum quidem que in circulis motis ab altero polorum circulationis, ad quam declinatio, hoc est in hiis quidem que ipsius ektimori[1]) a termino diametri equinoctialis ante mediationem quidem celi ab orientali, post mediationem autem ab occidentali, in hiis autem que horarii a termino diametri meridiani, quando quidem positio radii fuerit borealior circulo qui secundum verticem ab arctico, quando autem australior, a meridiano, quod et ipsum oportet obseruare, quoniam non eandem habet determinationem; in hiis uero que descensiui solum a termino gnomonis qui super terram. earum autem que in circulis manentibus ab altero termino tanquam communi sectione uniuscuiusque et suppositi plani, ad quem faciens angulum declinatio, hoc est in hiis quidem que meridiani a[2]) termino recte meridiane radio quidem existente borealiori quam circulus qui secundum verticem ab arctico, australiori autem a meridiano; et hoc enim rursum oportebit determinare; in hiis que eius qui secundum verticem a termino qui super terram gnomonis solum, in hiis autem que orizontis a termino diametri equinoctialis ante mediationem quidem celi ab orientali, post mediationem autem celi ab occidentali vel borealiori quidem existente radio quam circulus qui secundum verticem ut ad aquilonem, australiori autem ut ad meridiem; quod et ipsum oportebat[3]) obseruare, et quia uniuersaliter eas que ex utraque parte positiones earum, que in ortibus uel occasibus determinantur, dico autem earum que horarii et earum que descensiui et earum que eius qui secundum verticem, mediatio celi simpliciter designat, earum autem que versus aquilonem aut meridiem, dico autem earum que descensiui rursum et earum que ektimori et earum que meridiani et earum que orizontis, positio radii ex utraque parte circuli qui secundum verticem, et has ipsas non habentes unum et eundem terminum.

Premissis itaque hiis exponemus instrumentales acceptiones secundum unamquamque speciem subiacentium nobis angulorum exempli gratia, ut promptam habeamus methodum, que erit in .[4]) prius autem[5])

119	(fast ganz unlesbar)	secundum se superueniemus super
	τ⟨ὴ⟩(ν) τῆς παραλελειμμένης τοῖς πα-	anguli[1]) praetermissi ab antiquis,
120	λαιοῖςγωνίας,[1]) | ⟨ἣν⟩(ἡ)μ(εῖς)καλοῦμεν	quem nos uocamus ektimorum, ac-

1) Hier scheint ein *i* ausradirt. 2) ab die Hds. 3) Aus oportet corrigirt. 4) Lücke freigelassen, am Rande: *αναλημματε*. 5) Ein *δε* ist im Ambros. S. 119 am Anfang der Zeile sichtbar.

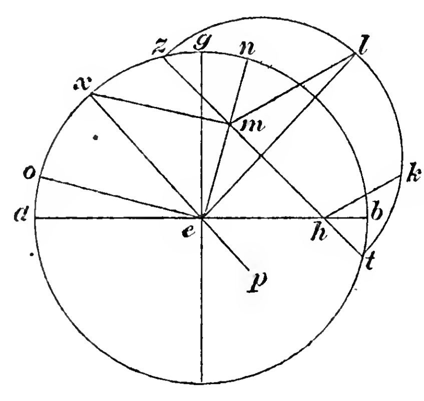
1) *γωνιᾱ*.

1) Folgt eine Rasur von 1 Buchstaben.

ἐκτήμορον, λῆψιν[1]) <ὀργ>αν<ι> | κ<ήν>, <ἐπει> δὴ καὶ τὴν ἀπόδειξιν[2]) ταύτης ἀναγκαῖ|ον ἂν εἴη συνάψα(ι) τ<οῖς>[3]) ἄλλως ἐκείνοις ἐ(φ)ω|δευμέν<οις>.

Ὅτι μὲν οὖν ἐν ταῖς ἰσημε|ρίαις αἱ ἐπιζητούμεναι γωνίαι αἰεὶ αἱ αὐταὶ | (γ)ί(γ)νονται ταῖς ἐν τῷ τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπιπέ|δῳ, δῆλον αὐτόθεν· ἐφαρμόζει γὰρ αὐτῷ[4]) τό|τε δι' ὅλης τῆς ἐπιφορᾶς καὶ ὁ ἑκτήμορος κύκλος ἴσας[5]) δὲ[6]) ἀλλήλαις ποιοῦντι τάς τε καθ' ἑκάστην ἰσημερίαν ὡριαίαν περιφέρειαν <ἐκ>πεντεκαίδεκα χρόνων συνισταμένα(ς καὶ) | τὰς ἀκολούθους αὐταῖς γωνίας ἑκτημόρια πε|ριεχούσας μιᾶς ὀρθῆς.

Ἕνεκεν δὲ τῶν λοιπῶν[7]) | μηνιαίων ἔστω μεσημβρινὸς κύκλος ὁ αβγδ, | ἐν ᾧ ὁρίζοντος μὲν διάμετρος ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς | δὲ αὐτῇ καὶ κατὰ τὸν γνώμονα ἡ γδ, καὶ κέν|τρον μὲν τῆς ἡλιακῆς σφαίρας τὸ ε, ἑνὸς δὲ | τῶν βορειοτέρων[8]) τοῦ μεσημβρινοῦ μηνι|αίων παραλλήλων ἡ ζηθ διάμετρος, ἐφ' ἧς ἀ|νατολικὸν ἡμικύκλιον ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ | νοείσθω[9]) τὸ ζκθ, καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ζθ|ἡ κη, ὥστε τὸ ζκ τμῆμα τοῦ παραλλήλου[10]) ποιεῖν | ὑπὲρ γῆς, καὶ ἀποληφθείσης[11]) τῆς κλ περιφερεί|ας ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν (ζ)θ ἡ λμ, | καὶ κέντρῳ τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μλ εἰ|λήφθω σημεῖον ἐ<πὶ> (τ)οῦ μεσημβρινοῦ τὸ ξ|,



ceptionem instrumentalem, quoniam et demonstrationem huius necessarium utique erit coniungere hiis, que ab illis aliter tractata[1]) sunt. quod quidem igitur in equinoctiis anguli inquisiti semper iidem fiant hiis qui in plano equinoctialis, palam ex se; congruit enim ipsi quod per totam circulationem et circulus ektimorus facienti equales inuicem periferias que secundum unamquamque equinoctialem horam ex 15 gradibus consistentes et angulos ipsi consequentes continentes ektimoria, id est sextas partes unius recti.

Gratia autem reliquorum mensilium esto meridianus circulus qui *abgd*, in quo orizontis quidem diametrus qui *ab*, ad angulos autem rectos ipsi et secundum gnomonem que *gd* et centrum quidem solaris spere *e*, unius autem parallelorum mensilium magis borealium quam equinoctialis diametrus sit que *zht*, super quam orientalis semicirculus in eodem plano intelligatur qui *zkt*, et ducatur ad rectos angulos ipsi *zt* que *kh*, ita ut *zk* portio parallelli sit super terram, et absumpta periferia *kl* ducatur perpendicularis ab *l* super *zt* que *lm*, et centro quidem *m*, distantia autem que *ml* accipiatur signum in

1) ληψειν. 2) αποδιξιν. 3) των? 4) αυτων? 5) ισαις. 6) Zu tilgen? 7) λοιπῶ. 8) βορειωτερων. 9) νοεισθαι. 10) παραλλον. 11) απολειφθισης.

1) trasctata.

καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ[1] ελ καὶ ἡ μν καὶ ἡ εξ | καὶ ἡ μξ, ἀνήχθω τε τῇ
139 εν πρὸς ὀρθὰς ἡ εο. ‖ λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν (ο)εξ[2] γωνία ἴση ἐστὶν τῇ γωνίᾳ[3] | τῇ ζητουμένῃ. νοείσθω γὰρ ἐπεστραμμένον | τὸ ζλϑ ἡμικύκλιον ἐπὶ τὴν οἰκείαν θέσιν |, τουτέστιν τὴν ὀρθὴν πρὸς τὸν τοῦ μεσημβρι|νοῦ ἐπίπεδον, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ ε ὀρθὴ πρὸς | τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀντὶ τῆς ἰσημερινῆς διαμέ|τρου ἡ επ. ὅτι μὲν οὖν ὀρθῆς οὔσης καὶ τῆς λμ|(π)ρὸς τὸν μεσημβριν(ὸ)ν αἱ εν καὶ μλ καὶ επ ⟨εὐθεῖαί⟩ | ⟨εἰσιν⟩ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ⟨ὀρθῷ⟩ (π)ρ(ὸ)ς τὸ τοῦ (αβγδ) | ἐπίπεδον,[4] δῆλον. ⟨ὁμοίως⟩ δέ, ὅτι καὶ ἡ εν[5] κ(ο)ι|νὴ τομή ἐστιν τοῦ ἑκτημόρου κύκλου καὶ | τοῦ ἰσημερινοῦ, ἡ δὲ λε ἐπ' εὐθείας τῇ ἡλια|κῇ ἀκτῖνι,[6] ἡ δὲ ἐπιζητουμένη γωνία, πε|ριεχομένη δὲ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς ἰσημε|ρινῆς διαμέτρου ἡ ὑπὸ λεπ. δεικτέον (δέ,[7] ὅ|τι) ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ξεο γωνία (τῇ ὑπὸ) ⟨λεπ⟩. | ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ελ τῇ ⟨ε⟩ξ, ⟨ἡ⟩ δὲ ⟨μλ τῇ | μξ⟩, κοινὴ δὲ ἡ εμ, κ⟨αὶ⟩ ....,[8] ⟨ἡ ὑπὸ | μελ⟩ τῇ ὑπὸ μεξ[9] ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ μεπ | καὶ ἡ ὑπὸ τῶν μεο,[10] ἐπεὶ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν εμλ· | καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν λεπ λοιπῇ τῇ ὑπὸ μεξ, | τουτέστιν τῇ ὑπὸ τῶν ξεο, ἴση ἐστίν· ὅπερ | ἔ(δ)⟨ει δεῖξαι⟩.[11]

β̅. Ἑξῆς δὲ καὶ τὰς κοινὰς | αὐτῶν λήψεις ἐκθησό|μεθα τὰς γινομένας[12] |

meridiano, quod sit *x*, et copulentur que *el*, *emn* et *ex*[1] et *mx*, ducatur autem ipsi *en* ad rectos angulos que *eo*. dico, quod angulus qui sub *xeo* est equalis quesito. intelligatur enim semicirculus *zlt* conuersus ad propriam positionem, hoc est rectam ad planum meridiani, et producatur ab *e* recta ad idem planum pro equinoctiali diametro que *ep*. quod quidem igitur et ipsa *lm* existente recta ad meridianum que *en* et *ml* et *ep* recte sunt in uno plano recto ad *abgd*, palam. similiter autem quod[2] et que quidem *en* est communis sectio circuli[3] ektimori et meridiani, que autem *el* in recta ad solarem radium, quesitus autem angulus, contentus autem a radio et a diametro equinoctiali qui sub *lep*. demonstrandum igitur, quod angulus qui sub *xeo* est equalis ei qui sub *lep*. quoniam enim equalis est[4] que quidem *el* ipsi *ex*, qve autem *ml* ipsi *mx*, communis autem que *em*, et angulus ergo qui sub *mel* est equalis ei qui sub *mex*. rectus autem qui sub *mep* et qui sub *meo*, quoniam et qui sub *eml*; et reliquus ergo qui sub *lep* reliquo ei qui sub *mex*, hoc est ei qui sub *xeo*, equalis est; quod quidem oportebat demonstrare.

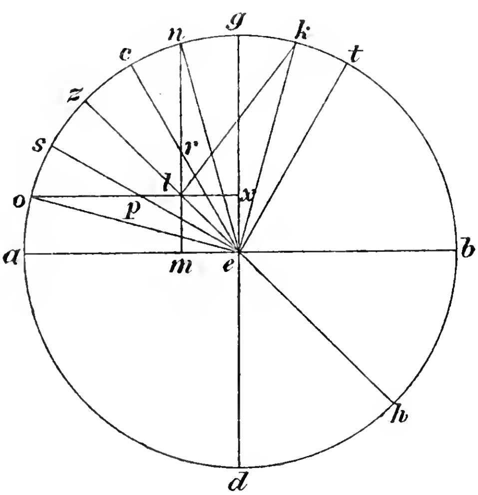
Consequenter autem et communes ipsorum acceptiones exponemus, que

---

1) αι. 2) Oder εξο. 3) γ̊ (ω über γ). 4) επιπεδω. 5) Lies ἡ μὲν εν. 6) ακτεινη. 7) δε unsicher; lies δή. 8) Undeutliche Spuren, etwa λιπ.(ιαν)....ξ̅. 9) μξ(ε). 10) μεξ. 11) Hier Fig. 2 (t = ϑ). 12) γενομενας.

1) So, am Rande: *tz*. 2) Uebergeschrieben. 3) Folgt ex getilgt. 4) ē̩i.

χωρὶς ἐπί τε τοῦ ἰση || μερινοῦ καὶ πάλιν ἐπί τινος τῶν βορειοτέρων | ἢ νοτιωτέρων αὐτοῦ[1]) παραλλήλων. ἔστω (τοίνυν) | μεσημβρι(ν)ὸς κύκλος ὁ αβγδ, ἐν ᾧ ὁρίζοντο(ς) | μὲν διάμετρος ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αὐτῇ καὶ | κατὰ τὸν γνώμονα ἡ ⟨γδ⟩ καὶ κέντρον (τῆς) | ἡλιακῆς σφαίρας τὸ ε, ἡ δὲ τοῦ (κλίμ)⟨ατος⟩ | περιφέρεια ἡ γζ, καὶ διήχθω πρότερον | ἰσημερινὴ διάμετρος ἡ ζεη, ἐφ' ἧς τὸ ⟨ζθη⟩ | ἡμικύκλιον (κεί)σθω μὲν ἐν τῷ τοῦ μεσημ|βρινοῦ ἐπιπέδῳ, νοείσθω δὲ ἐν τῷ πρὸς ἀ|νατολὰς ἡμισφαιρίῳ, γραφέτω τε ὁ ἥλιος | πρὸς αἴσθησιν ἐν τῇ μιᾷ περιπολήσει τούτων[2]) | τε καὶ τῶν ἄλλων μηνιαίων (ἕκασ)τον, καὶ ἀνα-|χθείσης (τ)ῆς ε⟨θ⟩ καθέτου πρὸς τὴν ζη, ὥστε (τὸ) ζ(θ) | τεταρτημόριον ποιεῖν ὑπὲρ γῆ(ν). ἀπειλήφθ(ω)|(ἡ) θ(κ) περιφέρεια δοθεισῶν ὡρῶν, καὶ προ|κείσθω τὰς ἐν τῇ θέσει ταύτῃ γωνίας λαβεῖν.[3]) | ἤχθωσαν μὲν δὴ κάθετοι ἀπὸ μὲν τοῦ κ ἐπὶ τὴν ζη ἡ κλ, ἀπὸ δὲ τοῦ λ ἐπὶ μὲν τὴν ε(α) | ἡ μλν, ἐπὶ[4]) δὲ τὴν εγ ἡ ξλο,[5]) καὶ τῇ (λ)κ ἴσαι | κείσθωσαν ἥ τε ξπ καὶ ἡ ρμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν[6]) | ἡ εκ καὶ ἡ εν καὶ ἡ εο[7]) καὶ ἔτι ἡ επσ καὶ ε(ρτ). | ὅτι μὲν οὖν (ν)οτιωτέρα ἐστὶν ἡ ἀκ(τ)ὶς τοῦ | κατὰ κορυφὴν κύκλου



1) νοτειοτερων ων. 2) τουτῶ. 3) λαβεῖ. 4) επει. 5) ξολ. 6) επεζευχθωσᾶ. 7) εθ?

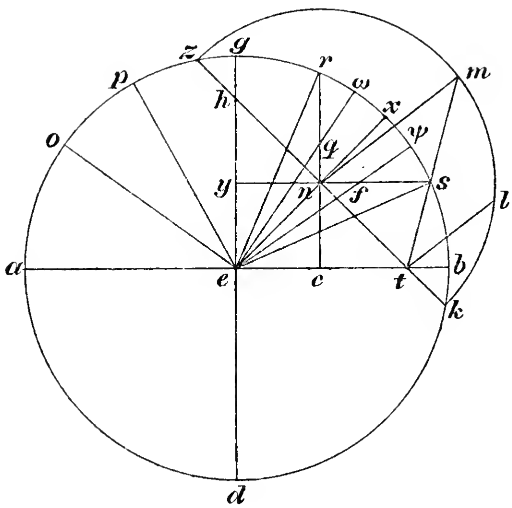
fiunt seorsum super equinoctialem et rursum super aliquem boraliorem aut australiorem ipso parallelorum mensilium. sit igitur meridianus circulus qui *abgd*, in quo orizontis quidem diameter qui *ab*, ad rectos autem ipsi et secundum gnomonem que *gd* et centrum quidem solaris spere *e*, climatis autem periferia que *gz*, et producatur prius equinoctialis diameter que *zeh*, super quam semicirculus *zth* iaceat quidem in plano meridiani, intelligatur autem in emisperio ad orientem, describaturque sol ad sensum in una circumuolutione horum et aliorum mensilium parallelorum,[1]) et producta que *et* perpendiculari ad *zh*, ita ut quod *zt* tetartimorion, id est quarta pars, sit supra terram. absumatur que *tk* periferia datarum horarum, et intendatur angulos qui in hac positione accipere. ducantur itaque perpendiculares a *k* quidem super *zh* que *ek*, ab *l* autem super *eh* que *mln*, super *eg* autem que *xlo*, et ipsi *lk* equales iaceant que *xp* et que *rm*, et copulentur que *ek* et *en* et *eo* et adhuc que *eps* et *erc*. quod quidem igitur australior est radius circulo qui secundum verticem per

1) Hierzu am Rande: ἑκας.

δι' ὅλης τῆς ὑπὲρ γῆν[1]) | περιφορᾶς ἐπί τε τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τῶν[2]) | νοτιωτέρων[3]) αὐτοῦ παραλλήλων διὰ τὸ | τὴν κλίσιν τῆς σφαίρας ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς | οἰκουμένῃ τετράφθαι πρὸς μεσημβρίαν, | καὶ δεῖ τὰς προσνεύσεις ἀκολούθους αὐτῆς ‖

totam circulationem supra terram in equinoctiali et in parallelis borealioribus[1]) ipso, quia inclinatio spere[2]) in habitata secundum nos versa est ad meridiem, et oportet adnuitiones consequentes positioni ipsius determinare, manifestum.

continet autem angulus qui sub *ekl*; hoc est qui sub *tek*, angulum[1]) circuli ektimori, qui sit idem, ut diximus, hic ei qui in plano equinoctialis, angulus autem qui sub *aen* eum qui horarii, qui autem sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *aez* eum qui meridiani, qui autem sub *gec* eum qui orizontis.



Exponatur itaque rursum qui *abgd* meridianus cum diametris *ab* et *gd*, et protrahantur in ipso diametri parallelorum mensilium boreaeliorum equinoctiali *zhtk*, super quam similiter describatur semicirculus orientalis qui *zlk*, et ad rectos angulos ipsi *zk* ducatur que *tl*, ita ut *zl* portio paralleli sit super terram. absumpta autem *lm* periferia datarum horarum ducatur ab *m* perpendicularis super *zt* que *mn* ipso *n* faciente uidelicet positionem radii borealiorem quidem circulo qui secundum verticem, quando fuerit super *ht*, australiorem autem, quando fuerit super *zh*. protrahatur etiam rursum que *cnx*, et recta ad ipsam erigatur que *eo*. accipiantur igitur in meridiano signa tria, centro quidem *n*, distantia autem *mn* quod *p*, centro autem *t*, distantia uero *tm* quod *r*, centro etiam *h*, distantia autem *hm* quod .[2]) deinde productis *rnc* et *sny* — ipse enim sunt per *n* accepte perpendiculares ad *cb* et *eg* — absumantur in ipsis similiter equales ipsi *mn* que *ynf* et *cnq*, et copulentur que *ep* et *er* et *es* et *mt* et adhuc que *efψ* et que *eqω*. continet itaque et hic angulus quidem qui sub *peo* angulum circuli ektimori, qvi autem sub *ber* eum qui horarii, qvi uero sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *bex* eum qui meridiani, qvi autem sub *geψ* eum qui eius qui secundum verticem,

1) γῆ. 2) τῶ. 3) νοτ(ει)οτερων (muss heissen: βορειοτέρων).

1) Am Rande: australioribus in greco. 2) ſpe.

1) Hier getilgt: qui. 2) Folgt eine kleine Lücke, am Rande: eψ.

qvi vero sub *geω* eum qui orizontis, angulo qui sub *tmn* faciente eum qui in plano equinoctialis.

Instrumentales quidem igitur acceptiones hunc continent modum assumpta simili consequentia in omnibus positionibus; in expositione autem quantitatum consistentium secundum unumquodque clima et signum et gradum sufficient quidem in ipsis solis periferiis subtendentibus angulos facere mensurationes, ut promptas ipsas habeamus in numeris et non

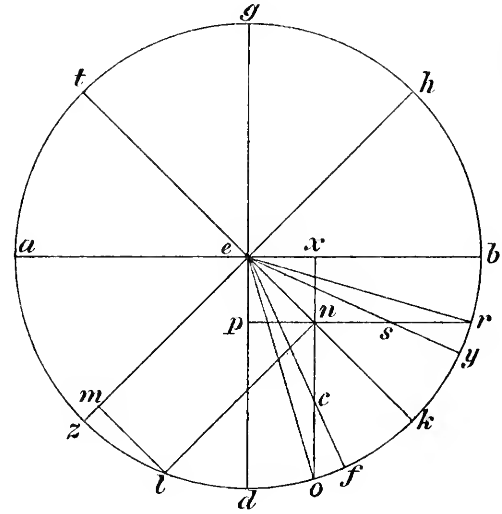
57 καταγραφὰς διωρισμένας τῇδε καθάπαξ | ἀναγκα(ζ)ώμεθ⟨α⟩ ⟨πραγματεύσασθαι⟩ ἀπὸ τοῦ ἀ|ναλήμματος τὰς ⟨ἐπιζητου⟩μένας γωνίας | τῶν εὐθειῶν σχεδὸν πάν⟨τη . . . . . .⟩ (ι)νομένων,[1] | ἀλλ' ἐφ' . . . . ἑνί τινι τεταρτη|μορίῳ κύκλου διῃρημένῳ εἰς τὰ τῆς (μι)ᾶς | ⟨ὀρθῆς μοίρας⟩ τὰ(ς) ἐνενήκοντα τὸ ἴσον ἐγγρά|φοντες ἢ περιγράφοντες ὁμόκεντρον τῷ | δεδομένῳ πρὸς τὴν κατασκευὴν καὶ λαμβά|νοντ(ες) ἀπὸ τοῦ διῃρημένου τὰς τὸν οἰκεῖον | ἀριθμὸν τῶν . . . ορισμ . . . . ⟨με⟩ | ταφέρομεν[2]) ἐπὶ τὸ ἴσον αὐ⟨τῷ τεταρτημόρι⟩|ον καὶ διὰ τῶν λαμβαν⟨ομένων περάτων⟩ | καὶ τοῦ κοινοῦ κέντρου τῶν κύκλων ἄγοντες | εὐθείας εὑρίσκομεν τὰς τῶν δεδομένων | μειζόνων ἢ ἐλαττόν⟨ων⟩ κύκλων γωνίας τε | καὶ περιφερείας. ἡ δὲ τοιαύτη λῆψις[3]) ὑ|πάρχ(ο)ι (μὲν)[4]) ἂν καὶ διὰ τῶν γραμμῶν ἐπὶ | τὸ ἀκριβέστατον τοῖς προαιρουμένοις, γένοι|το δ' ἂν εὐποριστοτέρα καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ ἀνα|λήμματος, κἂν μὴ ἀπαράλλακτο(ς) τῇ ⟨διὰ⟩ | γραμμικ⟨ῶν ἀποδείξεων⟩ . . . . | . . . . ⟨πρὸς ἣν τὸ χρη⟩στικὸν (τ)⟨έ⟩|⟨λος⟩ ἀνάγεται ⟨τῆς⟩ προκειμένης πραγματεί|ας. ὃν

1) ινομενῶ. 2) ταφερωμεν. 3) ληψεις. 4) η μεν?

descriptiones determinatas scilicet secundum semel cogimur negotiari per[1]) inquisitos angulos rectarum fere ubique confusarum, sed in unaquaque oportunitatum una quadam[2]) quarta parte circuli diuisa in unius recti portiones 90 equale inscribentes et circumscribentes concentricum cum dato ad[3]) et accipientes a diuiso distantias continentes numerum conuenientium graduum transferimus ad equalem sibi quartam partem et per deprehensos terminos et per commune centrum circulorum producentes rectas inueniamus angulos et periferias in datis circulis maioribus uel minoribus. talis autem acceptio exstabit quidem utique et per lineas ad certissimum uolentibus, fiet autem utique facilius acquisibilis et per ipsum[4]) , et si non sit eque inuiciabilis[5]) ei que per lineares demonstrationes, tamen usque ad examinationem que ad sensum, ad quam reducitur finis usualis suppositi negotii. qvo autem modo uterque processuum ad promptissimum nobis accipietur, ostendemus in parte summatim premissa consideratione que per numeros ita se habente.

1) Lücke, am Rande: $\alpha\nu\alpha\lambda\eta\mu\mu\alpha\overset{o}{\tau}$. 2) d aus l. 3) Lücke, am Rande: $\kappa\alpha\tau\alpha\sigma\kappa\varepsilon\overset{\upsilon H\nu}{\omega\mu}$. 4) Lücke, am Rande: $\alpha\nu\alpha\lambda\eta\mu\mu\alpha\overset{o}{\tau}$. 5) Am Rande: $\alpha\pi\alpha\rho\alpha\lambda\;\lambda\alpha\kappa\overset{o}{\tau}$.

δὲ τρόπον ἑκατέρα τῶν ἐφόδων ἐπὶ|τὸ προχειρότατον ἡμῖν ἐκληφθήσεται, δεί-|ξομεν ἐν μέρει κεφαλαιωδῶς προτάξαν-|τες τὴν διὰ τῶν γραμμῶν ἐπίσκεψιν ἔχου(σ)|⟨αν οὕτως . κείσθω⟩ ὁ αβγδ
158 μεσημβρινὸς περὶ ‖ κέντρον τὸ ε, ἐν ᾧ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλή|λαις τῆς κοινῆς τομῆς ⟨αὐτοῦ⟩ καὶ τοῦ ὁρίζον-|τος ἡ αβ, ⟨τοῦ δὲ γνώμονος ἡ γδ, ἔστω τε δοθὲν τὸ ἔ⟩|ξαρμα τ⟨οῦ πόλου καὶ περιεχέσθω ὑπὸ τῆς αζ⟩ περιφε-ρε⟨ίας, καὶ ἤχθω ἄξων μὲν ὁ ζεη, ἰσημερινὴ⟩ | (δ)ὲ (πρό)⟨τερον⟩ διά-μετρο⟨ς ἡ θεκ, καὶ ἀπειλή⟩φ⟨θω⟩ | δο-θεῖσα περιφέρεια ⟨ἡ ζλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἤχθωσαν⟩ | κάθετοι ἐπὶ μὲν τὴν εζ ἡ (μλ), ἐπὶ δὲ τὴν ⟨εκ ἡ λν⟩, | ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ν ἐπὶ μὲν τὴν (εβ) ἡ ξν⟨ο⟩, | ἐπὶ δὲ τὴν εδ ἡ πνρ. ἐπεὶ[1]) ⟨τοί⟩νυ⟨ν⟩ δέδοται ἡ αζ | περιφέρεια, τουτέστιν ἡ (δ)κ, δοθεῖσα ἔσται | καὶ ἡ ὑπὸ τῶν πεν[2]) γωνία. ὀρθὴ δὲ (ἡ) πρὸς τῷ π· | δέδοται ἄρα καὶ ⟨ὁ τῆς εν ὑποτεινούσης λόγος⟩ | πρὸς ἑκατέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, τουτέστιν | τὰς (ε)π καὶ πν καὶ τὰς ⟨ἴσας αὐταῖς τὰς νξ καὶ εξ⟩. | καὶ πάλιν ἐπεὶ[3]) δέδοται ἡ λ⟨ζ⟩ περιφέρε⟨ια, τεταρ⟩ | τημορίου[4]) δέ ἐστιν ⟨ἡ κζ, ὥστε καὶ τὴν⟩ | λοιπὴν τὴ⟨ν⟩ κλ δεδόσθαι,



Exponatur meridianus qui *abgd* circa centrum *e*, in quo diametri ad rectos angulos inuicem, communis quidem sectionis ipsius et orizontis que *ab*, gnomonis autem que *gd*, sitque data eleuatio poli et contineatur a periferia *az*, et protrahatur axis quidem qui *zeh*, equinoctialis autem prius diameter que *tek*, et absumatur data periferia que *zl*, et ab *l* ducantur perpendiculares super *ez* quidem que *lm*, super *ek* autem que *ln*, similiter autem et ab *n* super *eb* quidem que *xno*, super *ed* autem que *pnr*. quoniam igitur data est periferia *az*, hoc est que *dk*, datus[1]) erit et angulus qui sub *pen*. rectus autem qui apud *p*; data est ergo et ipsius *en* subtense proportio ad utramque earum que circa rectum, hoc est ad ipsas *ep* et *pn* et ad equales ipsis scilicet *nx* et *ex*. rursum quoniam data est que *lz* periferia, qvarte autem partis est que *kz*, quare et reliqua que *kl* data est, subtenditur autem duple ipsius *lz* periferie dupla ipsius *lm*

1) επι. 2) Corrigirt aus πνε. 3) επι. 4) Hier folgt ὀρθὴ (also getilgt).

1) data, aber in datus corrigirt.

ὑπο(τεί)ν(ει) ⟨δὲ⟩ τὴν μὲν | διπλῆν τῆς ζλ περιφερείας ἡ διπλῆ τῆς ⟨λμ⟩ | εὐθείας, τὴν δὲ διπλῆν τῆς λκ περιφερείας | ⟨ἡ⟩ διπλ⟨ῆ τῆς λν⟩ εὐθείας, δοθήσεται καὶ ὁ λόγος | ἑκατέρας τῶν λμ καὶ ⟨λν⟩ πρὸς τὴν τοῦ μεσ⟨ημ⟩ | βρινοῦ διάμετρον. (ὥσ)τε καὶ ὁ τῆς εν, ⟨ἥ ἐστιν ἴση⟩ | τῇ λμ, καὶ ὁ τῶν τοῦ επ ⟨νξ τετραγώνου[1]) πλευρῶν⟩. | ἀπειλήφθωσαν δὴ τῇ λν ἴσαι ἥ (τε) π(σ)[2]) καὶ ⟨ἡ ξτ⟩, καὶ διήχθωσαν (α)ἱ εο καὶ ε(ρ)[3]) καὶ εσυ καὶ ετφ|. ἡ μὲν τοίνυν ζλ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ | τοῦ ἑκτημορίου καὶ ἔτι τῇ ἐν τῷ τοῦ | ἰσημερι⟨νο⟩ῦ ἐπιπέδῳ αὐτ(όθεν) δέδοται. ||

recte, duple autem ipsius *lk* periferie dupla ipsius *ln* recte, data erit et proportio utraque ipsarum *lm* et *ln* ad diametrum meridiani. quare et proportio ipsius *en,* que est equalis ipsi *lm,* et proportio ipsarum *ep, nx* laterum tetragoni. sumantur itaque ipsi *ln* equales que *ps* et que *xc,* et protrahantur que *oe* et *er* et *esy* et *ecf.* qve quidem igitur *zl* periferia existens equalis ei que circuli ektimori et adhuc ei que in plano equinoctialis ex se data est.

43 ⟨ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦ εξο ὀρθο⟩γωνίου τριγώνου | δέδοται ἥ ⟨εξ καὶ ἡ ξο⟩, καὶ ἡ ⟨εο⟩ ὑποτείνουσα[4]) δοθήσε(ται) | ⟨καὶ ἡ ὑπὸ οεξ γωνία. ὥστε⟩ καὶ ἡ βο[5]) περιφέρει|(α) περιέχουσα ⟨τὴν τοῦ ὡριαίου κύ⟩κλου. ὁμοίως | ⟨δὲ ἐπεὶ καὶ τοῦ επρ ὀρθογωνίου⟩ δέδοται ἥ τε επ | καὶ ἡ ⟨πρ⟩[6]), δοθήσεται καὶ ἥ τε ⟨ερ⟩ ὑπο⟨τείνουσα καὶ⟩ | ⟨ἡ ὑπὸ ερπ γωνία καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ⟩ (π)ερ αὐτή τε καὶ | ἡ δρ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ τοῦ καταβατι|κοῦ. πάλιν ἡ μὲν ηκ[7]) περιφέρεια ποιοῦσα τὴν | τοῦ μεσημβρινοῦ αὐτόθεν δέδοται. ἐπεὶ δὲ καὶ | τοῦ π⟨εσ⟩ ὀρθογωνίου δέδοται ἥ τε επ καὶ ἡ π(σ), | δοθήσεται καὶ ἥ τε εσ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ὑπὸ | ⟨πσε γωνί⟩α αὐτή τε καὶ ἡ (δ)υ περιφέρεια ἴση οὖ|⟨σα τῇ⟩ (τοῦ) κατὰ κορυφήν. ὁμοίως δὲ ἐπεὶ[8]) καὶ τοῦ | (τ)ξ(ε)

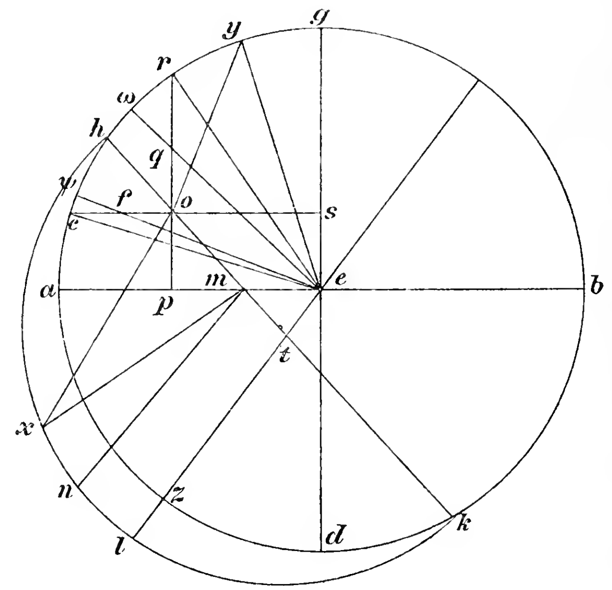
quoniam et ipsius *exo* rectanguli trigoni data est que *ex* et que *xo,* et que *eo* subtendens dabitur et angulus qui sub *eox* et reliquus qui sub *oex.* quare et que *bo* periferia continens eum qui circuli horarii. similiter autem quoniam et ipsius *epr* rectanguli data est que *ep* et que *pr,* et que *er* subtendens dabitur et angulus qui sub *erp*[1]) et reliquus qui sub *per,* simul cum ipso et que *dr* periferia existens equalis ei que circuli descensiui. rursum que quidem *hk* periferia faciens eum qui meridiani ex se data est. quoniam et ipsius *eps* rectanguli que *ep* et que *ps,* dabitur et que *es* subtensa et angulus qui sub *pse*[2]) ipseque et que *dy* periferia existens equalis ei que circuli qui secundum verticem. similiter autem

1) Die Spuren führen eher auf κυκλου. 2) πε? 3) εκ? 4) υποτινουσα. 5) αο? 6) Hier scheint Raum für mehr Buchstaben zu sein. 7) ακ? 8) επι.

1) *eprp.* 2) Hier fehlt: et reliquus *pes.*

ὀρθογωνίου δέδο⟨ται ἥ τε⟩ εξ καὶ ἡ ξ(τ), δοθή|σεται καὶ ἥ τε ε(τ) ὑποτείνουσα καὶ ἡ ὑπὸ τεξ | γωνία, (τουτέσ)τιν ἡ ὑπὸ τῶν δε(τ)[1]) αὐτή τε καὶ ἡ | (δ)φ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ τοῦ ὁρίζοντος.» —

ε̅. κ(αὶ) τῶν ἄλλων δὲ μη|νιαίων[2]) ἕνεκεν ἐκκεί|(σ)θω[3]) ὁ αβ(γδ) μεσημβρι|νὸς μετὰ τῶν πρὸς ὀρθὰς | ἀλλήλα(ι)ς διαμέτρων | καὶ τοῦ εζ ἄξονος, καὶ δι|ήχθω τινὸς[4]) τῶν νοτιω|τέρων τοῦ ἰσημερινοῦ | μηνιαίων παραλλήλων[5]) | διάμετρος ἡ ηθκ, (ἐ)φ' ἧς | ⟨τὸ⟩ πρὸς ἀνατολὰς νοούμενον ἡμικύκλιον γεγρά-||
144 φθω[6]) τὸ ηλκ, καὶ προσεκβεβλήσθω ὁ εζλ ἄξων | διχοτομῶν δηλονότι καὶ τὴν ηθκ διάμε|τρον κατὰ τὸ (θ) ⟨καὶ τὸ ηκ ἡμι⟩κύκλιον κατὰ τὸ | ⟨λ, διήχθω δὲ καὶ ἡ μν εὐθεῖα ἐπὶ τὴν



quoniam et ipsius *exc* rectanguli data est que *ex* et que *xc*, dabitur et subtensa que *ec* et angulus qui sub *cex*,[1]) hoc est qui sub *dec* ipseque et que *df* periferia existens equalis ei que orizontis.

Et aliorum autem mensilium gratia exponatur qui *abgd* meridianus cum diametris ad rectos inuicem et cum axe *ez*, et producatur unius rursum australiorum equinoctiali mensilium parallelorum diameter que *htk*, super quam ad orientem intellectus semicirculus describatur qui *hlk*, et usque ad ipsum educatur axis *ezl* in duo equa uidelicet secans ipsam *htk* diametrum penes *t* et semicirculum *hk* penes *l*. producatur autem et que *mn* recta super *ht* determinans *hn*[2])

---

1) δεξ? 2) Hier Fig. 5, die Buchstaben σ und υ nicht erkennbar, λ und ζ unsicher. 3) εκκη⟨σ⟩θω? 4) τινος übergeschrieben, im Text εως, vielleicht τέως τινός. 5) παραλληλῶ. 6) Am oberen Rand steht hier ein Scholion:

☌ εαν γ̓ προσεκβληθη επ ευ^θ η . ε εως τ^ς π'φεριας ϯ κ̆ κ ε'ξεν . . . . . . | ηκ ευ^θ τις ορθογ^ω γινεται △ . . . κιως η . . . . ηκη . . . . τ^ς εγγυτ . . . . | ημισια δε η ηθ της ηκ ημισ . . . . . η γε . . . . νης.

1) Zu lesen: *ecx*. 2) Darauf getilgt: s (der Uebersetzer wollte anfangs segmentum).

ηθ⟩ (διορί)|ζουσα τὸ ην ὑπὲρ γῆν τ⟨μῆμα τοῦ ἡμικυκλίου⟩ | ἀπὸ τοῦ ὑπὸ γῆν, καὶ ληφθείσης τῆς νξ περι|φερείας ⟨δοθ⟩εισῶν ὡρῶν ⟨ἤχθω⟩ ἀπὸ τοῦ ξ κά|θετος (ἐ)πὶ τὴν ⟨η⟩μ ἡ ξο, καὶ διὰ τοῦ ο (δι)ήχθω|σαν κάθετ⟨ο⟩ι πρὸς μὲν τὴν (αε) ἡ πορ, πρὸς δὲ | τὴν γε ἡ σοτ. ἐπεὶ τοίνυν δέδοται ἡ . . τοῦ | μεσημβρινοῦ περιφέρεια, τὴν δὲ λείπουσ⟨αν⟩ | εἰς τὸ ἡμικύκλιον ὑποτείνει[1] (ἡ διπ)λῆ τῆς | εθ εὐ⟨θε⟩ίας, δεδομένος ⟨ἔσται ὁ τῶν ηθκ καὶ εθ λό⟩|⟨γος πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ μεσημβρινοῦ. ὁμοίως⟩ | ⟨ἐπεὶ δο⟩θεῖσα . . . . | . . . . τε . . . . | . . . . ὥστε | δοθήσεται καὶ ὁ τῆς εθ λόγος πρὸς ἑκατέραν τῶν[2] | εμ καὶ μθ καὶ ἔτι ὁ τῆς ηκ διαμέτρου πρὸς ἑκάσ|την αὐτῶν. ἀλλὰ ἡ τῆς μθ εὐθείας διπλῆ ὑπο|τείνει[3] τὴν τῆς λν περιφερείας διπλῆν. ὥστε | καὶ ἥ τε λν περιφέρεια ⟨δοθήσεται καὶ ἡ λοιπὴ⟩ | ⟨εἰς τὸ τεταρτημόριον ἡ ν⟩ξ ⟨η. δέδο⟩(ται) δὲ καὶ ⟨ἡ | ν⟩ξ· δ⟨οθήσεται ἄρα ἥ τ⟩ε ⟨λ⟩ξ καὶ ἡ ξ⟨η. ὑποτείνει | δὲ τὴν⟩ μὲν διπλῆν τῆς (η)ξ[4] περιφερείας | ἡ διπλῆ τῆς (ξο) εὐθείας, τὴν δὲ διπλῆν τῆς ⟨ξλ⟩ | περιφερείας ἡ διπλῆ τῆς οθ εὐθείας. ὥστε δε|δομένος ἔσται καὶ ὁ τῶν ξο καὶ ο⟨θ⟩ λόγος πρὸς | τὴν ηκ διάμετρον, διὰ τοῦτ⟨ο δὲ καὶ πρὸς τὴν τοῦ⟩ ||

1) υποτινει. 2) τῶ. 3) υποτινει. 4) νεξ?

portionem semicirculi super terram ab ea que sub terra, et accepta ipsa *nx* periferia datarum horarum ducatur ab *x* perpendicularis super *hm* que *xo*, et per *o* producantur perpendiculares super *ae* quidem que *por*, super *ge* autem que *soc*. quoniam igitur data est *zl*[1]) meridiani periferia, residue autem in semicirculum subtenditur dupla˙ ipsius *et* recte, data erit proportio ipsius *htk* et proportio ipsius *et* ad diametrum meridiani. similiter quoniam data est que *az* periferia eleuationis, datus erit et ipsius *met* trigoni rectanguli angulus qui sub *met*. qvare data erit proportio ipsius *et* ad utramque ipsarum *em* et *mt* et adhuc proportio ipsius *ek*[2]) diametri ad unamquamque ipsarum. sed ipsius *mt* recte dupla subtenditur duple ipsius *ln* periferie. qvare et que *ln* periferia data erit et residua in quartam partem que *nxh*. data est autem et que *nx*. data ergo erit et que *lx* et que *xh*. subtenditur autem duple quidem ipsius *nx*[3]) periferie dupla ipsius *xo* recte, duple autem ipsius *xa*[4]) periferie dupla ipsius *ht*[5]) recte. qvare data erit ipsarum *xo* et *ot* proportio ad diametrum *hk*, propter hoc autem et ad eam que

1) Zu lesen *hzk* (Commandinus). 2) Lies *hk*, wie im Griechischen. 3) Lies *hx* (Command.). 4) Lies *xl* (*lx* Command.). 5) Lies *ot*, wie im Griechischen. Dass die Buchstaben hier verkehrt sind, ist durch ein ! am Rande (zu 2) 4) 5)) angedeutet.

meridiani. quoniam autem et ipsius *tm* data est proportio, data erit et proportio ipsius *mo*. et est, ut que *em* ad *mo*, ita que *tm* ad *mp* et que *et* ad *op*; equiangula enim sunt trigona *emt* et *opm*. data ergo erit et ipsarum *mp* et *op* proportio ad diametrum meridiani. propter hoc autem et proportio ipsius *es* et proportio ipsius *emp* totius, hoc est ipsius *os*. hiis igitur demonstratis sumatur centro *o* et distantia *ox* signum in meridiano scilicet *g*,[1]) et absumantur rursum ipsi *ox* equales que *pq* et que *sf*,[2]) et copulentur que *ey* et *er* et *et* et *xm* et adhuc que *eo* et *efψ* et *eqω*. quoniam igitur in praecedentibus angulus qui sub *eoy* demonstratus est esse rectus, data est autem et que *ey* subtensa existens ex centro meridiani et que *oy* existens equalis ipsi *ox*, data erit et angulus qui sub *eyo* continens eum qui circuli ektimori. similiter autem quoniam et rectanguli *xmo* data est que *xo* et que *om*, data erit et que *mx* subtensa et angulus qui sub *mxo* faciens eum qui in plano equinoctialis. rursum quoniam ipsius *epr* rectanguli date sunt que *ep* et *pr*, data erit et que *er* subtensa et angulus qui sub *per* et que *gr*[3]) periferia. rursum quoniam ipsius *esc* rectanguli date sunt que *es* et que *ec* subtensa, data erit et angulus qui sub *ces* et que *cg*[4]) periferia descensiui. consequenter autem quoniam et ipsius *eop* rectanguli date sunt que *op* et que *ep*, data erit et que *eo* subtensa et angulus qui sub *oep* faciens meridiani periferiam. rursum quoniam ipsius *sfe* rectanguli date sunt que *es* et que *sf*, data erit et que *ef* subtensa et adhuc angulus qui sub *sef* et que *gψ* periferia eius qui secundum verticem. restat autem, quoniam et ipsius *epq* rectanguli date sunt que *ep* et que *pq*, data erit et que *eq* subtensa et[5]) adhuc angulus qui sub *epq*,[6]) hoc est qui sub *qeg* et[7]) que *gω* periferia orizontis.

Qve quidem igitur per lineas acceptiones angulorum et subtensarum ipsis periferiarum sic utique nobis ad manum fient. in hiis autem que negociantur ex ipso[8]) maxime utique facile acquisibilis fiet expositionum unaqueque hoc modo. predemonstratur quidem igitur, quoniam eorum que inscribuntur in[9]) haec quidem in omni climate seruantur eadem, alia autem variantur; in hiis quidem igitur, que seruantur,

129 ἀρκεσθησόμεθα τῷ τε μεσημβρινῷ κύκλῳ | καὶ τῇ τοῦ ἰσημερινοῦ διαμέτρῳ καὶ ταῖς ἑ|τέραις μ(ό)ναις τῶν μηνιαίων παραλλήλων | σὺν τοῖς περιγραφομένοις αὐταῖς ἡμικυκλί|οις, τὴν

contenti erimus meridiano circulo et diametro equinoctialis et alteris solis mensilium parallelorum cum circumscriptis ipsorum semicirculis ipsam tamen tropicorum et eam que men-

1) Lies *y*. 2) Vor *sf* getilgt *f* (f). 3) Wohl zu lesen *ar* (Command.). 4) Am Rande: ǵs in greco, also *gc*. 5) Darauf getilgt *ah*. 6) Lies *eqp* (Command.). 7) Darauf getilgt: perifer. 8) Lücke, am Rande: αναλημμα(τος). 9) Lücke, am Rande: αναλημμ. .

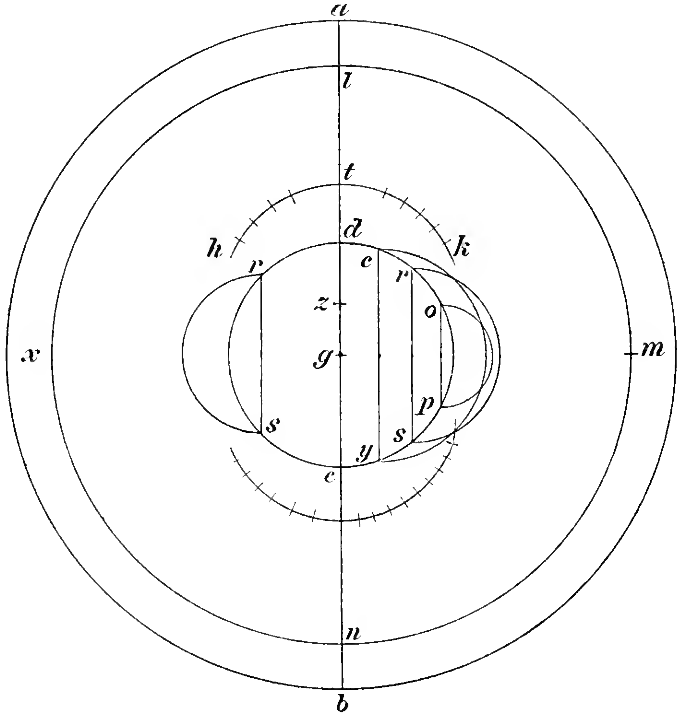
μέντοι τῶν τροπικῶν καὶ τὴν τοῦ | μετὰ τὸν ἰσημερινὸν μηνιαίου κατατάσσον|(τε)ς ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν πόλον, τὴν δὲ[1] μετὰ τὸν | τροπικὸν ὡς πρὸς τὸν ἀντικείμενον πόλον, | ἵνα μὴ πλησίον (ο)ὖσ(α) τῆς τοῦ τροπικοῦ συν|χ(ύ)νῃ[2] τὰς ἐπί[3] τε αὐτῶν καὶ τῶν περιγραφο|μένων αὐτ(οῖ)ς ἡμικυκλίων σημειώσεις[4]· διὸ | καὶ τυμπανοειδεῖ χρησόμεθα τῷ δεξομένῳ[5] | ⟨τὴν⟩ καταγραφὴν[6] ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ ἐπιστρε|φομένου τοῦ τυμπάνου ⟨τ⟩ὰ⟨ς⟩ (εἰ)ρημένας τῶν[7] | ⟨μηνιαίων διαμέτρους⟩ μετὰ τῶν ἡμικυκλί|ων καὶ ⟨ταῖς⟩ (τῶν) κατὰ διάμετρον θέσ(ε)⟨σιν⟩ | ἐφαρμόζειν δύνασθαι. ἐπὶ δὲ τῶν καθ' ἕκαστον κλίμα προτεθὲν[8] τασσομένων μόναις πάλιν[9] | ἀρκεσθησόμεθα δυσὶ διαμέτροις τῇ τε κατὰ | τὴν (κοινὴν) τομὴν τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ | ⟨ὁρίζοντος καὶ τῇ⟩ κατὰ τὸν γνώμονα, χρησόμε(θ)α δὲ (καὶ) πλατ(ύ)μματι λεπτοτέρῳ πάνυ καὶ | ἀκριβῶς ὀρθογωνίῳ μὴ ἐλάττους ἔχοντι τὰς | περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου | (τ)οῦ μεσημβρινοῦ ἕνεκεν τοῦ τά τε (ἄ)λλα ση|μεῖα καὶ τὰς καθέτους δι' αὐτοῦ ῥαδίως λαμ|βάνειν τῆς μὲν ἑτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν | πλ(ε)υρῶν[10] ἐφαρμοζομένης τῇ εὐθείᾳ[11], πρὸς | ἣν ἡ κάθετος, τῆς δὲ ἑτέρας προσαγομένη⟨ς⟩ ‖ τῷ σημείῳ, δι' οὗ ⟨ἡ⟩ κάθετος. καὶ ὅλως δὲ ποιησό|μεθα τὰς λήψεις τῶν ἐπὶ τοῦ

1) Lies δὲ τοῦ μετά. 2) συν-| χ(υ)ν(αι)η. 3) επει. 4) σημιωσις. 5) δεξαμενω? 6) καταγραφεν? 7) τῶ. 8) (προ)θεν. 9) παλῖ. 10) πλευραν. 11) της ευθειας.

silis post equinoctialem ordinantes ut ad eundem polum, eam autem que eius qui post tropicum[1]) ut ad oppositum polum, ne existens tropicum prope[2]) confundat eas[3]) que[3]) in[3]) ipsis[3]) notas semicirculorum ipsis circumscriptorum; propter quod et utemur tympanoydali plano suscepturo descriptionem ad hoc quod verso tympano dicte mensilium diametri cum semicirculis possint adaptari et positionibus eorum que ex opposito uel secundum diametrum. in hiis autem, que secundum unumquodque clima ordinantur, rursum contenti erimus solis duabus diametris, ea uidelicet que secundum communem sectionem meridiani et orizontis et ea que secundum gnomonem, utemur autem et quodam lato subtili ualde et examinate rectangulo non habente eas que circa rectum latus minores quam ea que ex centro meridiani gratia sumendi alia signa et perpendiculares per ipsum de facili[4]) altera quidem earum que circa rectum latus adaptata recte ad quam perpendicularis, altera autem adducta ad signum per quod perpendicularis. et totaliter autem faciemus acceptiones earum que in meridiano periferiarum per solum cancrum et per latum illud rectangulum nusquam conscribentes[5]) alteram rectam pre-

1) tropicōs. 2) Vor tropicum getilgt post, am Rande: cum tropicis. 3) Diese vier Worte am Rande. 4) Corrigirt aus facile. 5) Am Rande: πρ̊πϲγραφοντ . . .

μεσημβρινοῦ περιφε|ρειῶν[1]) *διὰ μόνου τοῦ τε καρκίνου καὶ τοῦ ὀρθο|γωνίου πλατύσματος μηδαμῇ προσπαραγρά-|φοντες ἑτέραν εὐθε(ῖα)ν τῶν προειρημένων, | ἀλλὰ γυμνὴν τηροῦντες τὴν καταγραφὴν | εἰς τὸ εὔληπτον τῶν ἐφεξῆς τῶν πρώτων | ὑ(πὸ) χ(εῖρ)α, καθ᾽ ὃν εἰρήκαμεν τρόπον, (εἰς τὴν) |*



ἔκ⟨θεσιν μετα⟩φ⟨ερομένων⟩. ἐκ(κ)είσθω γὰρ (αὐ)|τῆς π⟨αραδείξ⟩εως ἕνε(κεν) τὸ τυμπανοειδὲς | ἐπίπεδον περὶ διάμετρον (τὴν) (α)β καὶ κέντρον[2]) *| τὸ γ, καὶ τῆς αγ τρίτου μέρους ἔγγιστα πρὸς τῷ | α ληφθέντος ὡς κατὰ τὸ δ κέντρῳ τῷ γ | καὶ δια-*

1) (*περι*)|*φε*|*ριων*. 2) *κεντρō*.

dictarum, sed nudam seruantes descriptionem ad facilitatem acceptionis eorum que deinceps primis[1]) secundum modum, quem diximus in expositione, translatis. exponantur enim ipsius ostensionis gratia planum tympanoydale circa diametrum *ab* et centrum *g*, et ipsius *ag* tertia parte proxime versus *a* accepta ut penes *d* centro *g* distantia autem *gd* describatur[2]) qui *de*[3]) meridianus circulus ipsa *dge* diametro secundum eam que equinoctialis intellecta. deinde et ipsius *gd* tertia parte proxime versus *g* accepta ut penes *z* centro *z* distantia autem *gd* describatur circuli equalis meridiano quarta pars secta in duo equa ab *ag* que *htk* et diuidatur in 90 portiones equales diligenter. nichil autem prohibet et super alias partes diametri idem facere gratia conuersionis tympani. similiter autem et centro *g* distantia autem ea que a *g* ad sectionem in duo proxime ipsius *at* circulum describimus ut eum qui per quartas *l m n x*, quarum unam diuidentes similiter in 90 portiones

1) Lücke, am Rande: *υποκειρα*. 2) Darauf getilgt: circuli equalis meridiano quarta pars. 3) Lücke, am Rande: *αναλημματ*... Auf Fig. 7 steht im inneren Kreis links: in greco hic erat iste semicirculus qui non ex alia parte (nml. der Halbkreis auf *rs*).

στήματι τῷ γδ γεγράφθω (ἐπὶ) τοῦ ἀνα|λήμματος μεσημβρινὸς κύκ(λος) ⟨ὁ δε τῆς δγε | διαμέτρου κατὰ τὴν τοῦ ἰσημερινοῦ νοου⟩|μένης. ἔπειτα καὶ ⟨τῆς γδ τοῦ⟩ τρίτου μέρους | ἔγγιστα πρὸς τῷ γ ληφθέντος ὡς κατὰ τ⟨ὸ⟩[1] (ζ)[2] | κέντρῳ κῷ ζ διαστήματι δὲ[3] τῷ γδ γεγράφθω | τοῦ ἴσου[4] τῷ μεσημβρινῷ κύκλου[5] τεταρτη|μόριον[6] διχοτομούμεν⟨ον⟩[7] ὑπὸ ⟨τῆς αγ τὸ⟩ | ηθκ καὶ διῃρήσθω εἰς ἴσα⟨ς⟩ τὰ⟨ς⟩ ⟨ϙ μο⟩ί⟨ρας⟩[8] ἀκρι|βῶς. οὐδὲν δὲ ⟨κωλύει καὶ κατὰ⟩ τὰ ἕτερα (μέ)|ρη τῆς διαμέτρου τὸ αὐτὸ ποιεῖν ἕνεκεν τῆς | τοῦ τυμπάνου ἐπιστροφῆς. ὁμοίως δὲ καὶ κέν|τρῳ[9] τῷ γ διαστήματι δὲ τῷ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ | τὴν διχοτομίαν ἔγγιστα τῆς αθ κύκλον | γράψομεν ὡς τὸν διὰ τῶν ⟨λ μ⟩ ν ξ τεταρτη⟨μο⟩-| ρίων, ὧν τὸ ἓν διελόντες ὁμοίως εἰς
117 τὰ⟨ς⟩[10] || ⟨ϙ⟩ μοί(ρας καὶ) (ἐκ)βάλλοντες ἐν αὐτῷ[11] τὰς καθ' ἕ|καστ(ο) ⟨ν κ⟩λίμα διαστάσει(ς) τῶν τοῦ ἐξάρματος | ⟨μοιρῶν κ⟩α⟨τα⟩γράψομεν τὰς ἴσας καὶ ἐπὶ τῶν | λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων ἀρχόμενοι μὲν |[12] ἀπὸ τῶν λ μ ν ξ τομῶν, ἐκβάλλοντες δὲ ὡς ἐπ|ὶ τὰ δεξιὰ τῶν πρὸς ἀνατολὰς ἡμικυκλίων ὑπο|κειμένων αἰεὶ γεγράφθαι πρὸς ἡμᾶς. περιέ|χει[13] δὲ τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου, ὅπου (μὲν ἡ με)γίστη | ἡμέρα καὶ νὺξ ὡρῶν ἐστιν ι̅γ̅, μοίρας ἔγγιστα ι̅ς̅ γ̂ | ι̅β̅, ὅπου δὲ ι̅γ̅ ∟ ὡρῶν,

1) Nach τ Raum für drei Buchstaben. 2) Eher ξ. 3) Fehlt. 4) τω ισω. 5) κυκλω. 6) τεταρτημοριω. 7) Eher διχοτομουμενη⟨ν⟩. 8) Eher ... ιαια. 9) κε̄|τρω. 10) Wie es scheint, Raum für mehr Buchstaben. 11) αυτου. 12) με. 13) Das dritte ε scheint corrigirt.

et excipientes in ipsa eas que secundum unumquodque clima distantias partium eleuationis asscribemus equales et in reliquis tribus quartis incipientes quidem a sectionibus *l m n x*, educentes autem ut ad dextram eorum qui ad orientem semicirculorum, qui[1] supponuntur semper descripti esse ad nos. continet autem eleuatio poli, ubi quidem maxima dies et nox est horarum 13, partes proxime 16 tertiam et duodecimam, ubi autem est horarum 13 et s[2], partes 23 dimidiam et tertiam, ubi autem horarum 14, partes 36, ubi uero est horarum 14 et dimidie, partes 43 et quartam, at ubi est horarum 15, partes[3]   , ubi autem est horarum 15 et dimidie, partes 45, ubi uero est horarum 16, partes 48 et dimidiam et decimam. copulabimus autem et diametros dictorum mensilium accipientes proprias ipsorum distantias ab equinoctiali in ipsa meridiani periferia uniuscuiusque diuisionis equalis ipsorum quarte. distat enim et que quidem tropici et secundum *op* ab equinoctiali partes proxime 23 dimidiam et tertiam, que autem continui tropico mensilis et secundum *rs* partes 20 et dimidiam, qve autem continui et secundum *cy* partes 13 et tertiam. circumscribimus

1) Hier getilgt: sub. 2) D. i. $\frac{1}{2}$. 3) Lücke offen gelassen.

μ̊ κ̅γ̅ ∟ʹ γʹ, ὅπου δὲ ιδ ὡρῶν, | μ̊ λ[1] ⟨κ⟩α⟨ὶ⟩ γ̂, ὅπου δὲ ιδ ∟ʹ ὡρῶν, μ̊ λ⟨ς⟩, ὅπου δὲ ι̅ε̅ ὡ|ρῶν, μ̊ μ γ̂ δʹ ιʹ, ὅπου δὲ ι̅ε̅ ∟̅[2] ὡρῶν, μ̊ με, ὅπου δὲ | ις ὡρῶν, μ̊ μη ∟ʹ[3]. ἐπιζεύξωμεν δ(ὲ) καὶ τὰς τῶν[4] | εἰρημένων μηνιαίων διαμέτρους λαβόντες | αὐτῶν τὰς οἰκείας διαστάσεις ἀπὸ τῆς ἰσημε|ρινῆς ἐπὶ τῆς τοῦ μεσημβρινοῦ περιφερείας | ἑκάστης ἴσου ⟨αὐτῶν⟩[5] τεταρτημορίου διαιρέσε|ως. ἀπέχει γὰρ καὶ (ἡ) μὲν τοῦ τροπικοῦ κύκλου | κατὰ τὴν οπ τῆς ἰσημερινῆς μ̊ ἔγγιστα κ̅γ̅ ⟨∟ʹ γʹ⟩, | ἡ δὲ τοῦ συνεχοῦς τῷ τροπικῷ ⟨μηνιαίου κατὰ⟩ | τὴν ρσ μ̊ κ̅ ∟ʹ, ἡ δὲ τοῦ συνεχοῦς . . . . | κατὰ τὴν συ μ̊ ι(γ) Γο[6]. (π)εριγράφ⟨ομεν οὖν⟩ καὶ τὸ | ἐφ' ἑκάστ(ης) αὐτῶν ἡμικύκλιον, καὶ ταῦτα | μὲν μετὰ τῶν οἰκείων διαμέτρων ἐάσο|μεν[7] καθ' αὑτά, τοῦ δὲ μεσημβρινοῦ τῶν[8] περὶ τὴν | τοῦ ἰσημερινοῦ διάμετρον ⟨ἡμικυκλίων ἑκά-|τερον διελόντες εἰς ἴσας ὡριαίους διαστά|σεις ι̅β̅ σημειώσομεν κ⟩ατατομάς. ⟨ὁ⟩μ⟨οί⟩(ω)ς (δ)ὲ ⟨καὶ⟩ | ⟨τὰς ἐπὶ τῆς δγε γ⟩ινομένας ὑπ⟨ὸ τῶν ἐπ'
118 αὐτὴν⟩ ‖ καθέτων ἀφ' ἑκάστης τῶν ὡριαί⟨ων κατατομ⟩|ῶν, ἐπειδήπερ ταῦτα ⟨τηρεῖται⟩ κατὰ ⟨πάσας⟩ | τὰς ἐγκλίσεις. χαλκ⟨οῦ τοίνυν ὄντος ἢ ψη⟩-|φ⟨ί⟩(ν)ου τοῦ τυμπάνου οὐ⟨δεμιῶν ἔτι δεήσει⟩ | ἀ⟨πο⟩χαρά⟨ξ⟩εω⟨ν τού-⟩των μὲν ⟨ὑπαρχόντων⟩ . . . . . | . . . . τῶν κατ⟨ὰ κλίμα⟩ . . . .

itaque et semicirculum qui in unaquaque harum et hos quidem cum propriis diametris sinemus secundum se, meridiani autem eorum qui circa equinoctialem[1] diametrum semicirculorum utrumque diuidentes in equales horarias distantias 12 signabimus sectiones. similiter autem et eas, que super *dge* fiunt a perpendicularibus ad ipsam ab unaquaque diuisionum horariarum[2], quoniam quidem hec seruantur secundum omnes declinationes. tympano quidem igitur existente ereo uel[3] nulla iam opus erit deletione caracterum[4] hiis quidem existentibus in superlinitionibus eorum, que secundum clima ordinantur, ut duabus diametris et horariis diuisionibus. ligneo autem existente superliniendum[5]
nigro quidem colore alias omnes, rubeo autem meridianum et diametrum equinoctialis cum signis, et super totum tympanum cera consimiliter speris, ut non simul cum variandis superliniantur, que debent remanere.

---

1) Corrigirt. 2) c̅? 3) Vielleicht μη∟ʹ⟨ιʹ⟩. 4) τω̅ 5) Die ersten beiden Buchstaben vielleicht λα, jedoch sehr unsicher. 6) D. i. $^2/_3$. 7) εασωμεν. 8) Scheint gefehlt zu haben.

1) Darauf getilgt: circulum. 2) horarịụ̄riarum. 3) Lücke, am Rande: ψηφιν̆. 4) Hierzu am Rande: αποχαράξε̂. 5) Lücke, am Rande: τ̸ αποχαραξεις.

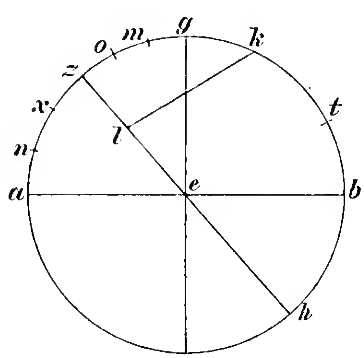
.........[1]) ⟨τὰς ἀποχαρά⟩|ξε(ις) μέ-
λανι ⟨μὲν⟩ .... ⟨ἐρυ⟩|θρῷ δὲ
τὴν[2]) τοῦ μεσημβ⟨ρινοῦ καὶ τοῦ ἰση-
μερι⟩ | ⟨ν⟩οῦ διάμετρ⟨ον⟩ ....
.... ⟨ὅλον⟩τὸ τύμπανον κηρῷ
.... |[3])

Hiis autem suppositis facile in promptu nobis erit acceptionum unaqueque, si prius quidem ordine assequentes radici supposite eleuationis diametros copulauerimus orizontisque et gnomonis, deinde tropici semicirculi sectionem distinguentem quod supra terram ab eo quod sub terra et utrarumque harum portionum in sex equalia diuisiones acceperimus et in propria ipsius diametro factas a diuisionibus super ipsam perpendiculares. hiis enim solis contenti procedemus secundum modum ostendendum. primas quidem igitur rursum eas que ektimori circuli secundum quamlibet horam periferias, has quidem ex portione super terram consistentes proprii signi ea que mensilis positione, has autem ex ea que sub terra eius quod ex opposito sibi. deinde eas que horarii omnium horarum, postea eas que descensiui et rursum conuenienter eas que meridiani seorsum. deinde eas que eius qui secundum verticem, post quas eas que orizontis, et ultimas, si uoluerimus, eas que in plano equinoctiali. post hoc autem acceptas quidem designationes liniemus.[1]) similia autem faciemus in reliquis duobus mensilibus utroque in parte et similiter in equinoctiali. deinde et priores diametros simul ablinientes copulabimus eas que consequentis climatis et eodem ordine utentes pertransibimus omnes suppositas differentias. ceterum autem gratia modi acceptionis periferiarum subtensarum angulis exponatur meridianus qui in[2]) et sit *abgd* circa centrum *e*, et copulentur per regulam examinate rectam que quidem *ab* diameter secundum communem sectionem ipsius et orizontis, qve autem *gd* secundum gnomonem. subiaceatque prius que *zeh* diameter equinoctialis, et sit que quidem in duo equa sectio semicirculi *zth* penes *t*, qve autem super terram quarta *zt*, horariarum autem que in ipso sectionum una quidem que penes *k*, et[3]) quod a perpendiculari per ipsum[4]) ad *ze* fit in ipsa signum, sit *l*;

1) Hier scheint ein Stück im Griechischen gefehlt zu haben. 2) τον. 3) Der Rest der Seite unlesbar; hier stand Fig. 7, deren Buchstaben aber nicht zu erkennen sind.

1) ạḅliniemus, am Rande: απαλει!ψοῦμ. 2) Lücke, am Rande: αναλημματ. 3) Getilgt: signum. 4) Ueber ipsum: scilicet *k*.

hec enim[1] a principio accepta. eam quidem igitur que ektimori periferiam ex se ostendit que *tk*, super quam statuentes cancrum et postponentes super diuisam quartam exponemus gradus contentos a distantia. continet autem semper tot, quot multitudo subpositarum ab ortu horarum, tempora equinoctialia, eadem existens ei que in plano equinoctialis. eam autem que horarii accipiemus adducentes lati illius rectanguli alterum laterum ad signum *l*, ita ut reliquum adaptetur diametro orizontis *ab*, et secetur[2] meridianus ab eo quod[3] apud *l* latere penes *m*; qve enim *am* periferia faciet dictam. similiter autem, si unum laterum adduxerimus ad *l*, ita ut alterum adaptetur diametro gnomonis *gd*, et secetur meridianus ab eo quod apud *l* latere penes *n*, que *gn* periferia faciet eam que descensiui. rursum autem que quidem *az* ex se facit eam que meridiani. si autem statuerimus cancrum super signa *k* et *l* et unum lati illius laterum apposuerimus ad *l* altero adaptato ipsi *ge*, deinde alterum quidem terminum cancri apposuerimus ei que secus[4] rectum angulum portioni ipsius *ge*, alterum autem apposuerimus lateri quod apud *l*, et manente ipso conuerterimus idem latus counitum similiter ipsi apud centrum *e*, ita ut secetur meridianus ab ipso[5] ut penes *x*, que *gx* periferia faciet eam que eius qui secundum verticem. similiter



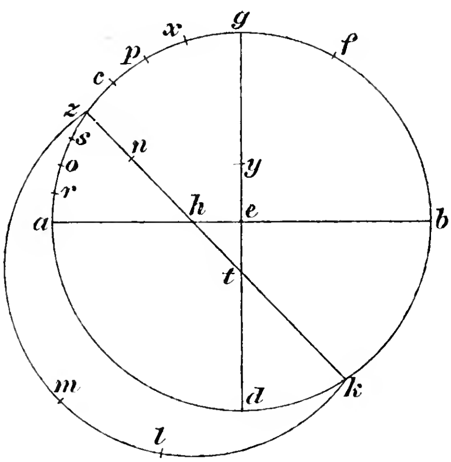
autem, si unum laterum apposuerimus ad *l* altero adaptato ipsi *ae* et cancri[6] eandem ipsi *kl* distensionem habentis[7] alterum quidem terminum apposuerimus ei que secus rectum angulum portioni ipsius *ae*, alterum autem applicuerimus ei quod apud *l* lateri, deinde hoc manente conuerterimus rursum idem latus seruata coniunctione super centrum *e*, ita ut secet meridianum ut penes *o*, que *go* periferia faciet eam que orizontis. et in hiis quidem periferiis et in omnibus semper[8] intelligendum, ut non idem repetamus, quod distensiones ipsarum[9] simul cum acceptione per cancrum transferentes super diuisam quartam deprehense[10] ab ipsis gradus debemus exponere.

Rursum supponatur alicuius aliorum mensilium parallelorum diameter et sit que *zhtk*, super quam orientalis semicirculus qui *zlk*, et centro quidem *t* distantia autem *ta* accipiatur signum in semicirculo *zlk* quod *l*,

---

1) Lücke, am Rande: εχ̀εν! (d. i. ἔχομεν). 2) Darauf getilgt: qui a. 3) Corrigirt aus qui. 4) secꝯ, davor getilgt: a. 5) Am Rande hierzu: latere scilicet. 6) Aus cancer, am Rande: cancri. 7) Aus habentes, am Rande: tis. 8) sīp^r. 9) Getilgt: cum. 10) Fehler für deprehensos.

in quo distinguitur quod quidem *zl* super terram semicirculi et quod *lk* sub terra. accipitur autem signum *l* per platinam[1]) rectangulam, si angulus adductus fuerit ad *h*, ita ut alterum laterum adaptetur ipsi *zk*.[2]) secundum quod enim reliquum[3]) secat semicirculum, erit determinatum signum, quoniam quidem que ab *h*[4]) ipsi *hk*[5]) perpendicularis producta fit sectio planorum orizontis et circuli mensilis. diuidatur itaque portionum utraque in 6 equalia, et signatis ipsis accipiantur per appositionem[6]) platine rectangule et signa super *zk* facta a perpendicularibus ad ipsam ab acceptis diuisionibus in semicirculo. sit autem una earum que super terram que penes *m* et quod eiusdem ordinis cum ipso signum eorum que super *zh* quod *n*. centro quidem itaque ipso *n* et distantia *nm* accepto secundum meridianum signo *x* et latere[7]) adducto ad signa *c* et *h*, ita ut secet meridianum penes *o*, que quidem *zo* periferia faciet residuam in quarta periferie ektimori, que autem ab *x* super sectionem alterius[8]) ipsius[9]) et meridiani ipsam que ektimori. consequenter autem centro *h* et distantia *hm* accepto secundum meridianum signo *p* que *ap* periferia faciet eam que horarii. similiter autem centro *t* et distantia *tm* accepto secundum meridianum signo *r* que *gr* periferia faciet eam que descensiui. rursum que quidem *ao* periferia faciet eam que meridiani. si autem unum laterum[10])



apposuerimus ipsi *n* reliquo adaptato ipsi *gc*, et cancri[11]) distensionem habentis[12]) equalem ipsi *nm* alterum quidem terminum apposuerimus[13]) ei que penes angulum rectum portioni ipsius *gc*, alterum autem apposuerimus ei quod apud *n* lateri, deinde hoc manente conuerterimus latus quod ad ipsum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e*, ita ut secet meridianum penes *s*, que *gs* periferia faciet[14]) eam que eius qui secundum verticem. similiter autem rursum, si unum laterum apposuerimus ipsi *n* altero adaptato ipsi *ae* et cancri distensionem habentis eandem ipsi *nm* alterum quidem apposuerimus ei que secus rectum angulum portioni ipsius *ae*, alterum

1) Am Rande: πλατυσματ̊. 2) Bei dieser Zeile am Rande: ńo. Ca. 3) Hierzu am Rande: 'scilicet latus. 4) Hierzu am Rande: ⸓uel *n*. 5) Bei dieser Zeile am Rande: /. 6) Darauf: p. 7) Lücke, am Rande: πλατυσματ̊. 8) Uebergeschrieben: scilicet lateris. 9) Lücke, am Rande: πλατυσματ̊. 10) Lücke, am Rande: πλατυσ. 11) -i corrigirt aus o. 12) -is corrigirt aus e. 13) Darauf getilgt: portioni; ei ist übergeschrieben. 14) -t corrigirt.

autem applicuerimus ei quod apud *n* lateri, deinde hoc manente conuerterimus id quod apud *n* rursum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e,* ita ut secet meridianum penes *c*, que *cg* periferia faciet eam que orizontis. ceterum autem, si ipsam *mn* ponentes equalem ipsi *ey* apposuerimus ipsi *y* rectum angulum uno[1] laterum adaptato ipsi *ey* et cancri distensionem habentis eandem ipsi *nm* alterum quidem terminum apposuerimus penes *y*, alterum autem applicuerimus recto angulo ad latus *eg* et manente hoc rursum conuerterimus latus quod apud id ipsum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e,* ita ut secet meridianum secundum *f,* que *gf* periferia faciet eam que in plano equinoctialis.

Nunc autem, si diameter *zk* ad sinistras nostri partes positionem habens sit unius parallelorum mensilium australiorum equinoctiali, transuerso tympano ad positionem ex opposito et que *zk* et qui super ipsam semicirculus secus dextras nostri partes erunt in situ eodem cum mensili parallelo descripto per opposita signa, borealiora autem equinoctiali, et que quidem *kl* portio erit super terram, qve autem *zl* sub terra. qvare[2] nos facientes eadem ostensis in diuisionibus portionis *kl* inueniamus et eas que in oppositis signis consistentes periferias. nam secundum quidem eam que in hyemali diametrum accepta ipsa *zk* quod quidem *zg* faciet eas que a principio capricorni fiunt super terram angulorum periferias, quod autem *dk*[3] eas que a principio cancri. secundum eam autem que mensilis consequentis hyemali tropico diametrum supposita ipsa *zk* semicirculus quidem *zl* faciet eas que a principio sagittarii et aquarii consistentes super terram periferias, qvi autem *lk* eas que in principio geminorum et leonis. secundum eam autem que mensilis contigui equinoctiali diametrum accepta ipsa *zk* qui quidem *zl* semicirculus faciet eas que in principio scorpionis et piscium factas super terram periferias, qvi autem *lk* eas que in principio tauri et virginis. eas enim que in principio arietis et libre existentes easdem in una quacunque quartarum equinoctialis demonstratas esse accidit.

Et angulos uero ab antiquis determinatos, quoscunque non eodem modo nobiscum exposuerunt, ab hiis in promptu licebit transumere. eum quidem enim qui circuli ektimori secundum nos, ut diximus, non assumpserunt, aliorum autem qui quidem horarius et qui in plano circuli qui secundum verticem et qui in plano equinoctialis iidem sunt hiis qui apud nos, qvi autem ab ipsis uocatur ektimorus, est isdem cum apud nos meridiano, reliquorum autem descensiuum quidem facit residuus[4] ad unum rectum eius qui apud nos descensiui, eum autem qui antiskius, id est

1) Corrigirt aus uni. 2) Am Rande: vel ut. 3) Am Rande: ḷ'kẹ in greco. Lies *lk*. 4) Am Rande: deficiens.

contraumbralis, rursum residuus[1]) ad unum rectum eius qui apud nos orizontis. quod autem distracto[2]) quidem plano equinoctialis accipitur, et per tale palam fit. ostendit quidem enim et hoc eam que circuli horarii positionem. hanc autem continet proprie que eius qui secundum verticem per polos horarii descriptorum[3]) et uno existente eorum qui a principio necessarie suppositorum trium circulorum seruantium ubique ad inuicem positionem ad rectos angulos, propter quod et ektimori quidem periferia, pro qua eam que equinoctialis assumpserunt, non solum cum ea que horarii ostendit positionem radii, set et cum ea que meridiani, qve autem equinoctialis cum sola ea que horarii et non adhuc neque cum ea que meridiani neque cum aliqua alia reliquarum. hoc autem quia neque secundum proprietatem ferentium radium comprehendit semper utique[4]) aut solum equinoctiis neque secundum proprietatem manentium eandem ubique seruat positionem ad reliquos non delatorum. exposuimus autem et non consistentes quantitates secundum illum, quem ostendimus, modum consequentium rationabilitati periferiarum.[5]) in subiectis autem[6]) septem parallelis et secundum unumquodque principium signorum et horarum in canonibus continentibus pertractatum a nobis ordinem in omnibus adiectionibus[7]) ad promptitudinem earum que in declinationibus acceptionum. adhuc autem quoniam periferias quidem in meridiano circulo determinatas prompte faciunt manifestas orientaliores ipso et occidentaliores positiones horarum[8]) eas autem que in circulo qui secundum verticem borealiores ipso et australiores casus radiorum, in quibus[9]) consequentiam diximus oportere coexquirere, asscripsimus singulis horarum signa, per que eam que ad borealia circuli[10]) qui secundum verticem et rursum ad australia radii positionem licebit considerare aliqualiter a conuenientibus hiis que predeterminata sunt principium facientes[11]) adiacentium quantitatum expressiones.[12]) promptum autem adhuc et coniugationes, a quibus positio radii determinatur[13]), sex numero esse accidit, tres quidem ab hiis que ad inuicem[14]) delatorum trium circulorum ektimorique ad horarium et ektimori ad descensiuum, tres autem eas que ab unoquoque delatorum cum eo, qui inclinationem ipsius continet, manentium, ektimori quidem ad meridianum, horarii autem ad eum qui secundum verticem, descensiui autem ad orizontem. habent autem et canones ita.

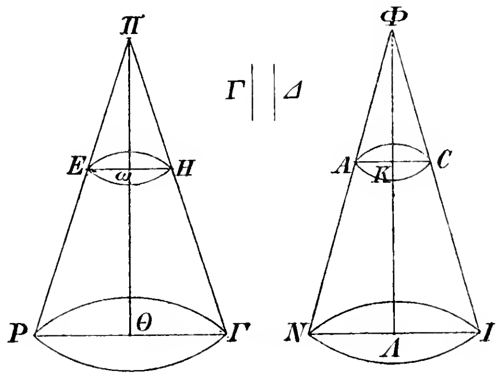
1) Am Rande: uel deficiens. 2) Folgt: p. 3) Am Rande: / 'ti. 4) Am Rande: /. Der Uebersetzer hat gelesen ἂν ἤ für ἀλλ' ἤ. 5) Am Rande: /. 6) a̱ūṭ, also getilgt. 7) Am Rande: επιβολα(ις). 8) Am Rande: των ρων. 9) Darauf q∂'. 10) Hier am Rande: /. 11) Lücke, am Rande: faciamus. 12) Am Rande: εκβολ˘. 13) Sehr unsicher; vielleicht eher: datur. 14) Folgt: feren, getilgt.

Cancri principium horarum 13.

	Hore		ektimori	horarie	descensiue	meridiane	secundum verticem	orizontis
	orizontis		24 15	65 5	90 0	0 0	90 0	24 15
bo	1	11	25 15	69 15	75[1] 10	35 15	74 50	20[2]
bo	2	10	31 20	73 0	60 55	59 5	60 0	18 50
bo	3	9	46 50	76[3]	46 6	72 10	45 5	17 15
bo	4	8	60 10	79 10	31[4]	78 30	30 10	18[5]
bo	5	7	75 0	81 20	17 30	81 30	15 10	27 0
bo	meridies		90 0	82 35	7 25	82 35	0 0	90 0

1) ϙч; 7 ist sonst ∧ geschrieben. 2) ′ und am Rande: *Γ́o*. 3) Ebenso. 4) Ebenso. 5) Ebenso. Am unteren Rande steht noch *Ⱡ* und fm̄ puto (d. i. wohl: finem puto oder finitum puto). *Γo* ist $^2/_3$.

Fig. 10.
(S. oben S. 5, zu S. 123 der Hds.)



EIN BEITRAG

ZUR

GESCHICHTE DER ALGEBRA IN DEUTSCHLAND

IM FÜNFZEHNTEN JAHRHUNDERT.

VON

MAXIMILIAN CURTZE.

Die von Gerhardt in den Monatsberichten der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*) behandelte Handschrift der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München No. 14908 dürfte für die Geschichte der deutschen Algebra bei weitem wichtiger sein, als es aus der Abhandlung Gerhardts hervorzugehen scheint. Einestheils ist die Beschreibung, welche er von ihr giebt, nichts weniger als ausreichend, und darin liegt jedenfalls anderntheils der Grund, weshalb sehr wichtige und das Können des Verfassers in helles Licht stellende Stücke des Manuscriptes von ihm übersehen und deshalb auch noch nicht einmal erwähnt sind.

Die Handschrift enthält nämlich aufser dem Bruchstück einer Algebra in deutscher Sprache, welches Gerhardt hat abdrucken lassen, zunächst (freilich räumlich davon getrennt, aber auf dasselbe Bezug nehmend) eine ganze Reihe zu demselben gehörige Beispiele in lateinischer Sprache, dann aber, nur vier Seiten hinter demselben, eine vollständige Abhandlung über den nämlichen Gegenstand auch in deutscher Sprache, welche durch ihre ganze Fassung zeigt, dafs sie nach einer italienischen Vorlage gearbeitet sein mufs, während das von Gerhardt herausgegebene Bruchstück aus dem Lateinischen geflossen zu sein scheint.

Der Titel dieser Abhandlung: „*Regule delacose secundum 6 capitula*“ und die in ihr benutzten Namen für die Zahl, die Unbekannte und deren Potenzen ergeben den Ursprung unzweifelhaft. *Numerus, cosa, censo, censo di censo, cubo di cubo* sind Worte, welche nur aus dem Italienischen stammen können. Der unbekannte Verfasser — auch der Schreiber ist ein anderer als der der Algebra Gerhardts — übersetzt *numerus* durch *zál, cosa* durch *ding* und benutzt für letzteres die auch sonst in späterer Zeit bekannte Abkürzung ∂. *Censo* behält er bei. Noch eine Abkürzung ist vorhanden für multiplicieren: *aſ*. Sie ist aus der gewöhnlichern: *Maſ* zusammengezogen und wird auch in den lateinischen Theilen der Handschrift, und zwar überall für jede Form des Wortes benutzt. Im Abdrucke ist dieselbe aufgelöst worden.

Weil wir im Deutschen *das Ding* sagen, heifst es bei unserem Verfasser meistens auch *das cosa*; $+$ heifst ihm *mer,* — *mynder,* an einigen Stellen auch mit *minus* untermischt. Zwei Zahlen multiplicieren heifst: *aſ 6 wider 8,* dividieren heifst stets *tailen,* der Divisor steht dabei immer an letzter Stelle, z. B.: *tail 6 in* $\frac{25}{144}$, wo das Resultat $\frac{6 \cdot 144}{25}$ wird.

*) Jahrgang 1870, S. 141 u. ff.

Von der nämlichen Hand geschrieben befinden sich noch zwei Abhandlungen über den doppelten falschen Ansatz in der Handschrift. Da die *Regula falsi* jedenfalls der Algebra angehört, und die Beispiele, welche behandelt werden, geschichtliches Interesse besitzen, so lasse ich dieselben im Folgenden ebenfalls abdrucken.

Alle übrigen Stücke, welche durchweg datiert sind, sind sämmtlich von ein und demselben Schreiber, von welchem überhaupt eine ganze Reihe Münchener Manuscripte herrühren. Derselbe nennt sich auf Blatt 220′ *Frater Fridericus ordinis S. Benedicti professus Monasterii St. Emmerami Ratisponensis.* Seine Thätigkeit an der fraglichen Handschrift erstreckte sich von 1455 bis 1464

Der nachfolgende Abdruck enthält der Reihe nach Folgendes:

1. *De dubio proposito per posicionem duarum falsitatum veritatem indagare* (Bltt. 40′—47),
2. *Regula falsarum posicionum declaranda per 12 regulas sive questiones* (Bltt. 47′—54),
3. Die Gerhardt'sche Algebra (Bltt. 133′—134′),
4. *Regula delacose secundum 6 capitula* (Bltt. 136—146′),
5. Beispiele zu der Gerhardt'schen Algebra in lateinischer Sprache (Bltt. 146′—153),
6. *De regulis per algebram etc*[a] *ut supra dictum est* (Bltt. 153—154′).
7. Beispiele zu den *Regule delacose* (Bltt. 154′—157),
8. Zwei Beispiele zur 5. und 6. Regel der Gerhardt'schen Algebra (Bltt. 134′),
9. Desgleichen zu den *Regule delacose* (Bltt. 504),
10. Weitere Beispiele mit No. 6 zusammenhängend (Bltt. 90—90′).

Nöthige Erläuterungen in textlicher Hinsicht sowohl, als in geschichtlicher gebe ich als Fufsnoten des Textes.

Gelegentlich hier nur noch eine Notiz, welche auf die Quellen der Geometrie Bradwardins Bezug hat, zugleich aber auch die dem Frater Fridericus zugänglichen Schriften klarstellen dürfte:

„*Hoc opus geometricum continet fere omnes demonstrationes geometricas,*
„*quas adducit philosophus gracia exempli vel in loyca, vel physica, et est*
„*collectum ex libris Euclidis, Campani, Archymedy (!), Theodosy, Jordani*
„*et ex libro, qui intulatur ysoperimetrorum. 1456 Fr.*"

Die letzte Schrift ist natürlich diejenige, welche Cantor*) als wahrscheinliche Quelle bezeichnete.

Thorn, 29. Oktober 1894. **M. Curtze.**

---

*) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II, S. 105.

I.

40′ | DE DUBIO PROPOSITO PER POSICIONEM DUARUM FALSITATUM VERITATEM INDAGARE.

Regula falsi dicitur ista, que consistit in posicione duorum numerorum falsorum ad inveniendum veritatem hoc modo. *Ponam casus, quod sint 20 persone in una cecha, inter quos sunt milites, cives et mulieres, et omnes habent solvere 20 ₰ hoc modo: miles dabit 2 ₰, civis 1 ₰, et mulier* $\frac{1}{2}$ *₰*. Si hoc vis scire et suum simile, pone duas falsas posiciones, et si in qualibet aliquid superfluit, tunc subtrahe numerum superfluum a maiore, et quod remanet erit divisor. Si vero in qualibet posicione aliquid defecerit, fac similiter subtrahendo minorem defectum a maiore, et quod remanet erit divisor. Si autem in una posicione aliquid superfluerit et in altera posicione defecerit, tunc defectus unius posicionis debet addi ad
41 superfluum alterius posicionis, et productum erit divisor. Et conformiter | agendum est in multiplicacione posicionis cuiuslibet per alterius defectum vel abundanciam, ita videlicet, quod sicut divisor invenitur per addicionem, ita debet addi, quod venit ex multiplicacione unius per defectum alterius et per abundanciam seu superfluum alterius, quod idem est. Sed quando divisor invenitur per subtractionem, tunc debet eciam subtrahi, quod venit ex multiplicacione unius per alterius defectum vel superfluum. Item cavendum est in predicta regula, ne superfluum vel defectus sunt numeri equales ita, quod unus delet alium facta subtractione unius ab alio. Item cavendum est, ne post subtractionem unius ab alio remaneat unitas pro divisore,

---

5—7. Aus dieser Stelle geht wohl unzweideutig hervor, dass die Ableitung des Ausdrucks *Regula coeci* von *Zeche* die richtige ist. Die hier vorliegende Aufgabe ist genau in derselben Form schon recht alt. In einer Handschrift aus dem 13. Jahrhundert wird dafür die gereimte Auflösung gegeben: *„In medio tetras, externis octo locentur“ (Clm. 14684, Blt. 30[a])*, welche mit der Auflösung unserer Abhandlung übereinstimmt. Es ist von gewisser Wichtigkeit, dass man auch Aufgaben der unbestimmten, sogenannten Diophantischen Algebra durch die *Regula falsi* zu lösen wusste. Leonardo Pisano hatte sie als Mischungsrechnungen behandelt (siehe Cantor, Vorlesungen II, S. 18). 22 bis S. 36 Z. 2. Diese Beschränkung ist in der zweiten Abhandlung über denselben Gegenstand nicht gemacht. Sie ist offenbar auch überflüssig.

vel eciam pro defectu vel superfluo, quia unitas multiplicando vel dividendo numerum minime variat. Et in proposito sit hoc exemplum prime regule.

Ponatur una falsa posicio, videlicet quod sunt tres milites | 7 cives 4: et 10 mulieres, qui sunt persone 20, sed numerus denariorum, quem dant simul, est 18, et sic deficiunt 2 a 20. Proponatur secundo, quod sunt 2 milites, 6 cives et 12 mulieres, que sunt 20 persone, sed numerus denariorum, quem dant, sunt 16, et sic deficiunt 4 ₰. Modo subtrahe 2, que defecerunt primo, a 4, que nunc deficiunt, et remanent 2, qui est divisor communis. Postea sic operabis: Multiplica primo 3 per 4 in modum crucis, facit 12; multiplica iterum per modum crucis 2 per 2, et erunt 4, que subtrahe a 12, manentibus 8, que divide per divisorem communem, scilicet 2, exibunt 4 milites. Simili modo multiplica 7 per 4, fit 28; deinde 6 per 2 multiplica, facit 12, que subtrahe ab 28, remanent 16, que divide per divisorem, exibunt 8 cives. Ulterius multiplica 10 per 4, fit 40, similiter multiplica 12 per 2, exibunt | 24, que subtrahe a 40, 42 remanent 16, que divide per 2, et habebis 8 mulieres. Et habebis 4 milites, qui dant 8 ₰, et 8 cives, qui dant 8 ₰, et 8 mulieres, qui dant 4 ₰, et habebis 20 persone, que dant 20 ₰.

Posicio prima			*Posicio secunda*
Milites	3	2	milites
Cives	7	6	cives
Mulieres	10	12	mulieres
minus	2	4	minus

$$\boxed{\begin{array}{c}2\\ \text{divisor}\end{array}}$$

Eciam sunt 3 milites, 11 cives, 6 mulieres. | 42

Exemplum secunde partis regule. Quidam emit pro 40 gl 40 volucres de triplice genere, anates, quarum una est vendita pro 2 gl, gallinas, quarum una est vendita pro 1 gl, columbas, quarum una vendita pro $\frac{1}{2}$ *gl. Queritur, quot anates etc*[a].

Fac duas posiciones. Primo pone 12 anates, 20 gallinas, 8 columbas, que sunt 40 aves, et valent 48 gl. Sic sunt in superfluo 8 gl. Iterum pone secundo aliam certam eciam falsam posicionem, scilicet 9 anates, 12 gallinas, 10 columbas, que sunt 40 aves, sed valent 44 gl, et sic excedit in 4 gl. Subtrahe ergo 4 ab 8, manent 4, qui est divisor communis.

---

26. Der Verfasser oder der Schreiber weiss also, dass es für die Aufgabe mehr als eine Lösung giebt. Die allgemeine Lösung heisst: n Soldaten, $20-3n$ Bürger, $2n$ Frauen; die speciellen Lösungen ergeben sich für $n = 3$; 4.

Postea multiplica 12 per 4 per modum crucis, facit 48; deinde iterum per modum crucis 9 per 8, facit 72, a quibus subtrahe 48, et remanent 24, que divide per 4, et habebis 6 anates. Postea multiplica 4 per 20, facit 80;
43 similiter 21 per 8 | facit 168, a quibus subtrahe 80, et remanent 88, que divide per 4, exibunt 22 galline. Similiter multiplica 8 per 4, facit 32, et multiplica 8 per 10, exibunt 80, a quibus subtrahe 32, et remanent 48, que divide per 4, exibunt 12 columbae, et sic habes 6 anates, 22 gallinas, 12 columbas: 40 aves, que valent 40 gl.

Prima posicio		*Secunda posicio*
Anates 12		9 anates
Galline 20		21 galline
Columbe 8		10 columbe
plus 8		4 plus
	4 divisor	

43′ Eciam sunt 12 anates, 4 galline, 24 columbe. |

Exemplum tercie partis regule. Sunt duo socii volentes emere duos equos: Primus 1 equum pro 20 fl, secundus pro 25 fl. Et dicit primus secundo: da mihi $\frac{1}{3}$ tue pecunie, tunc ego solvam equum precise pro 20 fl. Sed secundus dicit primo: da mihi $\frac{1}{4}$. tue pecunie, et ego solvam 25 fl precise. Volo nunc scire, quot habuit quilibet.

Pono primo unam posicionem falsam, videlicet, quod primus habeat 12 fl, secundus 24. Modo dicit primus secundo: da mihi $\frac{1}{3}$ de tua pecunia, videlicet 24, et est 8, ad meas et facit 20 fl; sed secundus dicit primo: da mihi $\frac{1}{4}$ de tua pecunia, scilicet de 12, et constat, quod sunt 3. Adde 3 ad 24 fient 27, que 27 excedunt 25 in 2. Secundo pone, quod primus habeat 16 et secundus 12, tunc deficiunt 9 fl. Modo regula dicit, quando in una posicione est superabundancia et in altera defectus, debent simul
44 addi, et aggrega|tum ex eis est divisor communis. Adde ergo 2 ad 9, fient 11. Postea multiplica in modum crucis 9 per 12, fient 108; similiter 2 per 16, fient 32, que adde ad 108 fient 140, que si diviseris per 11 exibunt $12\frac{8}{11}$ fl, que est summa primi, quem habuit. Similiter multiplica 9 per 24, exibunt 216, et 2 per 12, fiunt 24; que adde ad invicem, fient 240. Que si diviseris per 11, exibunt $21\frac{9}{11}$ fl, summa secundi.

---

16. Auch hier kennt der Verfasser mehr als eine Lösung. Allgemein erhält man n Enten, $40-3\,n$ Hühner, $2\,n$ Tauben. Die speciellen Lösungen ergeben sich für $n = 6;\ 12$.

Posicio prima	*Posicio secunda*
Primus 12	16 primus
Secundus 24	12 secundus
plus 2	9 minus

11
divisor

Item sunt tres socii A, B, C empturi nisum pro 34 ₰, et dicit A ad 44′
B, C: quilibet vestrum det medietatem suorum denariorum, et ego meos omnes do, et exolvamus nisum. Dicit B ad A, C: non sic, sed uterque vestrum det mihi terciam partem suorum denariorum, et ego meos omnes, exsolvamus nisum. Tercius dicit ad A, B: non ita, sed ego do omnes meos denarios, et quilibet vestrum quartam partem suorum, et presuppono quod quilibet vestrum donat. Queritur quod quilibet habuerit.

Prima posicio	*Secunda posicio*	
A. 20	12 A	A. 10
B. 27	23 B	B. 22
C. 1	21 C	C. 26
minus $21\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{4}$ minus.	
multiplicator	multiplicator	

17
divisor

Item sunt tres socii empturi equum pro 30 fl. Dicit primus ad secun- 45
dum: da $\frac{1}{2}$ de tuis fl ad meos et comparabo equum pro 30 fl. Dicit secundus ad tercium: da $\frac{1}{3}$. Dicit tercius ad primum: da $\frac{1}{4}$ etc^a. Queritur quot.
Pone sic:

Posicio prima	*Posicio secunda*	
Primus 17	19 primus	$19\frac{1}{5}$ primus
Secundus 26	22 secundus	$21\frac{3}{5}$ secundus
Tercius 12	24 tercius	$25\frac{1}{5}$ tercius
minus $13\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$ minus	

$12\frac{1}{2}$
divisor

Item si equus emitur pro 100 fl, pone duas posiciones falsas illo modo 45

Posicio prima		*Posicio secunda*	
Primus 66		62 primus	64 primus
Secundus 68		76 secundus	72 secundus
Tercius 96		72 tercius	84 tercius
plus $12\frac{1}{2}$		$12\frac{1}{2}$ minus	
	25 divisor		

Item 2 gesellen haben 27 fl, ainer hat mer dan der ander. Nu wen der mit der maisten summ des andern summ duplirt, vnd auch der ander des ersten duplirt, so haben sy das gelt

46 gleich | tailt. *Queritur quot quilibet habuerit.*

Pone sic duas posiciones falsas:

Prima posicio		*Secunda posicio*	
Primus 10		11 primus	$10\frac{1}{8}$ primus
Secundus 17		16 secundus	$16\frac{7}{8}$ secundus
minus $\frac{1}{2}$		$3\frac{1}{2}$ plus	
	4 divisor		

Item 2 gesellen, *ut supra,* haben zu tailen 8 fl. Et primus habet 3, secundus 5. vnd dy vil sein finstu cursoris. Sprich.

$$8 \left< \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right> 27 \left< \begin{matrix} 10\frac{1}{8} \\ 16\frac{7}{8} \end{matrix} \right.$$

46′ |Item einer hat gelt pay im, vnd wil t'uch kauffen, vnd wen

---

8. Wie so häufig in dem Manuscripte wechselt auch hier unvermittelt die Sprache aus dem Lateinischen ins Deutsche. An andern Stellen geht die Sprachmengerei so weit, dass man sich unwillkürlich an Luca Paciulo und dessen ähnliche Sprachmischung erinnert sieht. 19—22. Diese *cursorische* Methode, die auch eine Art unbestimmter Aufgaben enthält, hätte sehr gut auch für die beiden vorhergehenden Exempel benutzt werden können. Ihr Ansatz würde nach der Art der Handschrift so ausgesehen haben:

$$30 \left< \begin{matrix} 19\frac{1}{5} \\ 21\frac{3}{5} \\ 25\frac{1}{5} \end{matrix} \right> 100 \left< \begin{matrix} 64 \\ 72 \\ 84 \end{matrix} \right.$$

23 bis S. 40 Z. 5. Diese Zeilen sind offenbar nur aus Unachtsamkeit des Abschreibers hier hineingerathen. Der Preis ist entweder Fl. $3x - 4$ oder $2x + 10$, wenn die Ellenzahl x gesetzt ist, daher ist $x = 4 + 10$. Dann folgt aber aus $3x - 4$ der Werth der Ellen gleich 38 Fl.

er 3 fl gibt umb 1 ellen, so mangelt er 4 fl an zalen, vnd wen er 2 fl gibt pro 1 ellen, so pleiben jm 10 fl v̈ber. Queritur wie uil hat er gelts pey jm gehabt, vnd wie uil ellen er hat kauft?

Machs also. Addir 4 vnd 10, facit 14 ellen. Nu multiplicir 14 mit 3, sunt 42, davon subtrahir 4, pleibt 38 fl, et factum est.

Item 20 persone, viri, mulieres et virgines, dividere debent 20 ob, et vir capit 3 ob, mulier 2 ob, virgo 1 hallensem. Queritur, quot.

Pone sic duas posiciones falsas: 47

Posicio prima	*Posicio secunda*	
Viri 2	3 viri	1 vir
Mulieres 6	7 mulieres	5 mulieres
Virgines 12	10 virgines	14 virgines
superfluum 4	8 superfluum	

4
divisor

II.

REGULA FALSARUM POSICIONUM DECLARANDA PER 12 REGULAS SIVE QUESTIONES. 47

Propositis duobus numeris falsis examinatisque secundum casus propositi exigentiam, tunc si uterque deficiat vel excedat, subtrahatur brevior numerus excessus sive defectus a maiori, et habebitur divisor; deinde multiplica primum numerum falsum per mendacium secundi, similiter secundum numerum falsum per mendacium primi. Horum productorum minus a maiore dematur, residuum vero per partitorem parciatur, et patebit numerus verus. Si vero unus deficiat et alius excedat, iungantur simul numeri excessus et defectus pro divisore. Facta eciam multiplicatione, ut supra, iungantur in unum producta, et parciatur per partitorem, et habebitur numerus verus.

Pro eius exemplari declaracione aliquas ponam questiones propter eius variam applicacionem ad diversos casus.

Prima questio.

Quidam habet laboratores et pecunias eis distribuendas, quarum si cuilibet daret 7 solidos, retineretur 30 solidos. Proponit ergo cuilibet dare 9 solidos,

6—15. Hier ist die gefundene Lösung die einzig mögliche. Die allgemeine Lösung: $3n - 2$ Männer, $10 - 5n$ Frauen, $12 + 2n$ Jungfrauen hat nur für $n = 1$ positive Werthe. 30 bis S. 41 Z. 16. Die Aufgabe ist analog der oben ohne *posicio falsa* gelösten.

et tali casu deficiunt ei 30 solidi: queritur, quot fuerunt laboratores et quot habuerit solidos.

Coniectatur primo fuisse 20 laboratores, quorum cuilibet si dederit 7 solidos, erunt 140 solidi; retinuit 30 in tali distribucione, oportebat ergo ipsum habere 170 solidos. De quibus si cuilibet vellet dare 9 solidos, fient 180 solidos. Debuerint namque in tali distribucione provenire 200
48 solidi, de quibus deficiunt | 20. Primus ergo numerus, scilicet 20, deficit in 20.

Coniectatur ergo laboratores fuisse 40, quorum cuilibet si dederit 7 solidos, fierent 280, et quia retinuit in tali distributione 30, oportuerit ipsum habere 310 solidos. De quibus si vellet dare cuilibet 9, fierent 360; debuerint namque in tali distribucione provenire 340, que supergrediuntur in 20. Secundus ergo numerus, scilicet 40, excedit in 20

20 minus 20 | 40 divisor.
40 plus 20 |

Modo iuxta regulam operare, et est numerus laboratorum scilicet 30; habuit ergo 240 solidos, ut patet practicanti.

Secunda questio.

Quidam convenit quendam ad laborandum per 40 dies continuos tali foedere, quod quolibet die, quo laboraret, daret ei 7 denarios, et quolibet die, quo non laboraret, restitueret 5 denarios. Hic enim mercenarius pacto inito primitus diligenter laboravit, et paulatim post distentavit taliter, quod tempore completo nihil mercedis obtinuit. Queritur, quot diebus laboravit, quo scito scietur eciam tempus, quo vacavit.

Coniectatur ipsum laborasse 30 diebus, quibus lucratus fuisset 210 ₰. Vacasset ergo 10 diebus, quibus restituisset 50 ₰, et sic obtinuit adhuc 160 ₰, in quibus 160 primus numerus, scilicet 30, excedit.

Coniectatur ergo ipsum laborasse 25 diebus, quibus lucratus fuisset 175 ₰. Vacasset igitur 15 diebus, pro quibus restituisset 75, et sic adhuc obtineret 100 ₰, in quibus 100 secundus numerus, scilicet 25, excedit.

30 plus 160 | 60 divisor.
25 plus 100 |

48 | Modo iuxta regulam operando patet, quod laboraverat 16 diebus et $\frac{2}{3}$; vacaverat ergo 23 diebus et $\frac{1}{3}$, et lucratus fuit 116 ₰ et $\frac{2}{3}$, et tantum eciam obtinuit ipsum restituere etc[a].

---

17 u. ff. Diese Aufgabe war eine sehr beliebte unter den Rechenlehrern; wir werden ihr später bei den Beispielen zur Algebra wieder begegnen.

Tercia questio.

Quidam peciit a socio suo, quot haberet denarios, et respondit: Si haberem adhuc tantum, quantum habeo, et dimidietatem sui, pro dimidietate tantum in tercia et quarta partibus tantum et obolum sive dimidium denarium, haberem 200 ₰. Queritur, quot habuit denarios.

Coniectatur ipsum habuisse 60 ₰. Si ergo habuisset adhuc tantum scilicet 60, et $\frac{1}{2}$, scilicet 30, et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, scilicet 20 et 15 et 1 dimidium ₰ habuisset 185 et $\frac{1}{2}$; deficit ergo primus numerus scilicet 60, in 14 et $\frac{1}{2}$.

Coniectatur secundo ipsum habuisse 12 ₰. Si ergo habuisset adhuc tantum et $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ tanti et obolum, habuisset $37\frac{1}{2}$ ₰. Deficit ergo secundus numerus, scilicet 12, in $162\frac{1}{2}$.

60	minus	$14\frac{1}{2}$	148 divisor.
12	minus	$162\frac{1}{2}$	

Modo iuxta regulam operando patet, quod habuit 64 ₰ cum $\frac{26}{37}$, ut late examinanti clarescet casum.

Quarta questio.

Quidam venit ad portum navi onerata sua 60 pipis vini. Tenebatur solvere tributum certum theolenario, qui cum non habuisset pecunias, dedit theolenario pipam vini, et ipse restituit ei 30 solidos. De post venit | alter 49
ad eundum portum navi sua onerata 200 pipis, qui similiter debebat tributum solvere theolenario. Hic cum venisset, pecunia ei deficiebat, dedit eciam pipam vini et 20 solidos, et satis fecerant ambo theolenario. Queritur de precio pipe vini.

Coniectatur primo ipsam valuisse 40 solidos. Primus ergo qui dedit pipam valoris 40 solidorum et recepit 30 solidos, solvit 10 solidos pro suis 60 pipis. Inquire ergo secundum regulam proporcionum: si 60 pipe solvant 10, quantum debeant solvere 200? $\left|\begin{array}{cc} 60 & 10 \\ 200 & . \end{array}\right|$ Patet, quod 33 solidos et $\frac{1}{3}$ solidi. Secundus enim dedit pipam valentem 40 solidos et cum hoc 20 solidos, supergreditur ergo numerum solvendum 26 et $\frac{2}{3}$, qui est excessus primi numeri, scilicet 40.

Coniectatur igitur secundo, pipam valuisse 50 solidos. Primus igitur, qui dedit 1 pipam et recepit 30 solidos, solvit 20 solidos, oportet ergo

---

16 u. ff. Auch diese Aufgabe kommt in etwas anderer Fassung später wieder.

secundus $66\frac{2}{3}$ solvere iuxta regulam proportionum. Qui secundus dedit pipam valoris 50 solidorum et cum hoc 20 solidos; solvit nimis 3 et $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{lcl|l} 40 & \text{plus} & 26\frac{2}{3} & \\ & & & 23\frac{1}{3}\ \text{divisor.} \\ 50 & \text{plus} & 3\frac{1}{3} & \end{array}$$

Modo operando iuxta regulam patet valor pipe scilicet 51 solidorum
19' et $\frac{3}{7}$ solidi, ut patet clare practicanti. |

Quinta questio.

Sunt duo, quorum primus dicit secundo, ut det secundus primo 1, et erit ei equalis; dicit secundus: non sic, sed da mihi 1 de tuis, et ero tibi millecuplus. Queritur, quantum habet quilibet.

Coniectatur primo primum habere 2. Oportet ergo secundus habere 4, de quibus dabit primo unum, et erunt equales in ternario. Si ergo primus de suis 2 dederat 1 secundo, retinebit 1, et sic secundus haberet 5, et quia secundus diceret esse millecuplus ad primum, oportet ipsum habere 1000, a quibus distat sive defecit in 995 pro defectu primi, scilicet 2.

Coniectatur secundo primum habere 3. Oportet ergo habere secundum 5, qui cum daret primo 1, haberent aquale, scilicet 4. Si ergo primus daret secundo 1, retineret primus 2, et secundus haberet 6. Qui cum diceret esse millecuplus ad primum, oportet ipsum habere 2000, a quibus distat in 1994 pro defectu secundi, scilicet 3.

$$\begin{array}{lcl|l} 2 & \text{minus} & 995 & \\ & & & 999\ \text{divisor.} \\ 3 & \text{minus} & 1994 & \end{array}$$

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habuit unum et $\frac{4}{999}$; oportet ergo habere secundum 3 et $\frac{4}{999}$, ut patet intuenti clare.

Ad idem.

Sunt 3, quorum primus dicit secundo, ut det ei unum, et erit primus secundo equalis. Dicit secundus tercio, ut tercius det ei unum de suis, et
50 *erit ei duplus. Dicit tercius primo, ut det ei unum, et erit tercius | primo triplus. Queritur, quantum habeat quilibet.*

Coniectatur primo primum habere 3, oportet ergo secundum habere 5, qui cum dedit primo unum, erunt equales. Secundo habente 5 oportet tercium habere 4, qui cum dederit secundo 1, erit secundus duplus ad

---

7 u. ff. Ebenso findet sich diese Aufgabe wörtlich wieder als Beispiel zu den Regeln der Algebra.

tertium. Tercio ergo habente 4 et petente 1 a primo, retinebit primus 2, et haberet tercius 5, qui iuxta casum deberet habere triplum, scilicet 6, a quibus deficiet in uno.

Coniectatur aliter primum habere 5 et secundum habere 7, et oportet nunc tercium habere 5. Qui si dederit secundo unum, tunc esset ei secundus duplus. Si ergo tercius petit a primo 1, retinebit primus 4, et tercius habebit 6, et deberet esse triplum, scilicet 12, a quibus deficiunt 6.

$$\begin{array}{ccc|l} 3 & \text{minus} & 1 & \\ & & & 5 \text{ divisor.} \\ 5 & \text{minus} & 6 & \end{array}$$

Modo iuxta regulam operando oportet sic, quod primus habuit 2 et $\frac{3}{5}$, oportet ergo secundum habere 4 et $\frac{3}{5}$, et tercium 3 et $\frac{4}{5}$, ut patet practicanti.

Iste enim est modus examinandi tales casus, si eciam essent 4, aut 5, aut plures; eciam si in alia proporcione et numeris variarent casus.

Sexta questio.

Quidam emit 3 pannos precio 30 regalium et 7 solidorum; regale enim valet 30 solidos. Quorum pannorum secundus fuit | emptus precio duplo 50′
supra primum et cum hoc 5 solidis ultra. Tercius vero fuit emptus precio triplo super primos duos et cum 11 solidis ultra. Queritur de valore sive precio cuiuslibet.

Coniectatur fieri emptum primum 5 regalibus, fuit ergo secundus pannus emptus 10 regalibus 5 solidis, et tercius 45 regalibus et 26 solidis, qui valores seorsum collecti faciunt 61 regalia 1 solidum, qui excedunt numerum propositum in 30 regalibus et 24 solidis.

Coniectatur secundo primum pannum fuisse emptum 2 regalibus. Fuisset ergo secundus pannus emptus 4 regalibus 5 solidis, et tercius 18 regalibus 26 solidis. Qui valores collecti faciunt 24 regalia 31 solidos, qui deficiunt a numero proposito in 5 regalibus et 6 solidis.

$$\begin{array}{ccc|l} 5 & \text{plus} & 30\frac{24}{30} & \\ & & & 36 \text{ divisor.} \\ 2 & \text{minus} & 5\frac{6}{30} & \end{array}$$

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus pannus valet 2 regalia 13 solidos; valuit ergo secundus 5 regalia et 1 solidum; oportuit ergo, quod tercius valuit 22 regalia et 23 solidos, ut patet intuenti.

Questio septima.

Tres emerunt navem 100 scutis, quorum primus petivit $\frac{1}{2}$ a secundo et cum suis pecuniis solveret navem, scilicet 100 scuta. Dixit secundus tercio, ut tercius daret secundo $\frac{1}{3}$, et secundus cum suis pecuniis additis
51 *solveret 100 scuta. Dixit tercius | primo, ut ei daret $\frac{1}{4}$ de pecuniis suis, et ipse cum suis pecuniis adiunctis solveret. Queritur quantum quilibet, vel quantum primus habuit, quia scito uno, ita et alii scientur.*

Coniectatur primum habere 60; oportet ergo secundum habere 80, cum cuius $\frac{1}{2}$ primus solveret 100 scuta. Et secundo habente 80 oportet tercium habere 60, quia secundus cum $\frac{1}{3}$ tercii solveret 100. Et tercio habente 60 et petente $\frac{1}{4}$ a primo solveret 75, et sic primus numerus scilicet 60 deficit in 25 minus.

Coniectatur secundo primum habere 68; oportet ergo habere secundum 64, cum cuius $\frac{1}{2}$ primus solveret 100. Secundo igitur habente 64 oportet tercium habere 108, cum cuius $\frac{1}{3}$ secundus eciam solveret 100. Tercio vero habente 108 et capiente $\frac{1}{4}$ a primo solveret ipse 125, et sic excedit in 25.

60	minus	25	50 divisor.
68	plus	25	

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habuit 64; oportet ergo secundum habere 72 et tercium 84, ut patet etc[a].

Ad idem.

Sunt 2, quorum primus petit a secundo $\frac{2}{3}$ suarum pecuniarum, et primus emet pannum 40 solidorum. Petit secundus a primo $\frac{3}{7}$ suarum pecuniarum, et ipse secundus emet et solvet pannum 40 solidorum. Queritur, quantum habet quilibet.

Conietatur primo primum habere 14; oportet ergo secundum habere 39, cum cuius $\frac{2}{3}$, scilicet 26, primus solveret 40. Habente igitur secundo 39 et capiente $\frac{3}{7}$ de primo, scilicet 6, solveret 45, et sic excedit in 5.

Coniectatur secundo primum habere 21; oportet ergo secundum habere 28 cum $\frac{1}{2}$, cum cuius $\frac{2}{3}$, scilicet 19, primus solveret 40. Habente igitur secundo
51′ $28\frac{1}{2}$ et capiente | $\frac{3}{7}$ a primo, scilicet 9, solveret $37\frac{1}{2}$, et sic deficit in $2\frac{1}{2}$.

2—21. Mit verändertem Wortlaut die Aufgabe, welche S. 38 Z. 22 bis S. 39 Z. 7 abgehandelt wird. Das Resultat ist natürlich beide Male das nämliche.

$$\begin{array}{lcl|l} 14 & \text{plus} & 5 & \\ & & & 7\frac{1}{2} \text{ divisor.} \\ 21 & \text{minus} & 2\frac{1}{2} & \end{array}$$

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habet 18 et $\frac{2}{3}$; oportet ergo secundum habere 32 directe.

Octava questio.

Quidam habens pecuniam dixit primo sociorum suorum, ut daret ei tantum, sicud esset $\frac{2}{3}$ illius, quod habuerit, et ei redderet 7. Consequenter ivit ad secundum, cui dixit, ut daret ei tantum sicud (!) essent $\frac{3}{4}$ suarum pecuniarum, et ei redderet 11. Consequenter ivit ad tercium. dixit ei, ut daret sibi tantum, quantum haberet, et redderet ipsi 10. Consequenter ivit ad quartum, cui dixit, da mihi duplum ad id, quod habeo, et eius $\frac{2}{5}$, et reddam tibi 200, et finaliter nihil obtinuit. Queritur quantum habuit primus.

Coniectatur primo ipsum habuisse 33, cuius $\frac{2}{3}$ si secundus ei dedisset, scilicet 22, habuisset 55, de quibus ipsi primo restituisset 7, detinuisset 48. Cum quibus venisset ad secundum, qui illius $\frac{3}{4}$, scilicet 36, ei dedisset; et ei restituisset 11 et obtinuisset 73. Cum quibus venit ad tercium, qui dedit ei tantum; et restituerat ei 10 | obtinuit ergo 136. Cum quibus 136 52'
venit ad quartum, qui dedit ei duplum illius et $\frac{2}{5}$ eiusdem, cui cum restituisset 200, retinuit adhuc $262\frac{2}{5}$.

Coniectatur secundo ipsum habuisse 45, cuius $\frac{2}{3}$, scilicit 30, ei dedit secundus, et ipse secundo restituit 7, obtinuit ergo 68; cum quibus venit ad tercium, qui ei dedit $\frac{3}{4}$ de 68, scilicet 51, et ipse restituerat 11, obtinuit ergo 108; cum quibus venit ad tercium, qui dedit ei tantum, et restituit ei 10, obtinuit ergo 206; cum quibus venit ad quartum, qui dedit ei duplum illius et eciam eius $\frac{2}{5}$, cui cum restituisset 200, obtinuit adhuc 500 et $\frac{2}{5}$.

$$\begin{array}{lcl|l} 33 & \text{plus} & 262\frac{2}{5} & \\ & & & 238 \text{ divisor.} \\ 45 & \text{plus} & 500\frac{2}{5} & \end{array}$$

Modo iuxta regulam operando patet, quod habet primus 19 et $\frac{458}{595}$; cum ad secundum venisset habuit 25 et $\frac{565}{595}$. Ad tercium dum venisset, habuit 34 et $\frac{245}{595}$. Ad quartum autem cum venisset, habuit 58 et $\frac{490}{595}$, que cum expedivisset, optinuit 200, ut patet clare casum examinanti.

Nona questio.

Septem ova demptis 2 denariis sunt empta pro 5 ₰ et uno ovo: queritur quanti precii est ovum.

Coniectatur primo ipsum valere 5 ₰; valerent 7 35, preter 2 denariis essent 33 ₰, qui deberent tantum esse 5 ₰ et unum ovum talis precii,
2' scilicet 5 ₰ |, scilicet 10, qui excedit primus numerus in 23.

Coniectatur secundo 1 ovum valere 4 ₰; valerent ergo 7 28, preter 2 ₰ essent 26, qui esse debent tantum, quantum 5 ₰ et unum ovum eiusdem dem precii aut valoris, scilicet 4 ₰, et sic essent 9 ₰, qui excedit secundus numerus, scilicet falsus, scilicet 4 in 17.

$$\left.\begin{array}{ccc} 5 & \text{plus} & 23 \\ 4 & \text{plus} & 17 \end{array}\right| \text{ 6 divisor.}$$

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus valoris ovi, scilicet 1 denarii et $\frac{1}{6}$ denarii. Ad probandum dic: 1 ovum constat $\frac{7}{6}$, quot 7 ova? facit 8 ₰ $\frac{1}{6}$. Depone 2 ₰, remanebit $6\frac{1}{6}$, et hoc est 5 ₰ et 1 ovum, quia 1 ovum constat $1\frac{1}{6}$ ₰.

Ad idem.

4 ova demptis 2 denariis emuntur pro 7 ₰ et ovo, queritur quantum precium est.

Omnino iuxta regulam operando patet, quod ovum valet 3 ₰

$$\left.\begin{array}{ccc} 4 & \text{plus} & 3 \\ 5 & \text{plus} & 6 \end{array}\right| \text{ 3 divisor.}$$

Questio decima.

Quidam transiens vicum peciit a quodam, quot essent hore. Cui respondebat: quia dies est 12 horarum artificialium et sunt $\frac{2}{3}$ preteriti et $\frac{3}{4}$ futuri simul iuncte. Et verum dixit. Queritur, quot fuerunt hore.

Coniectatur 12 fuisse horas, cuius $\frac{2}{3}$ sunt 8, et $\frac{3}{4}$ sunt 9, usque ad complementum 12 horarum sunt 3, qui simul iuncte faciunt 11 et non 12, scilicet minus una.

Coniectatur secundo fuisse 6 horas, cuius vel quarum $\frac{2}{3}$ facit 4, et temporis futuri usque ad complementum 12 horarum $\frac{3}{4}$ sunt $7\frac{1}{3}$, qui simul
3 iuncte sunt $11\frac{1}{2}$, que deberent esse 6 tantum, et sic excessus est in $5\frac{1}{2}$. |

12 minus 1		
		$6\frac{1}{2}$ divisor.
6 plus $5\frac{1}{2}$		

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus horarum, scilicet quod fuerunt 11 cum $\frac{1}{13}$.

Undecima questio.

Quidam mercator a quodam cupit emere 100 ℔ cere antique et nove pro 18 scutis. Ipse enim venditor vendit quintale, quod est 100 ℔, antique cere pro 10 scutis, et nove pro 20 scutis. Modo queritur quot libre antique cere et quot ℔ nove sibi veniunt pro 18 scutis facientes simul unum quintale.

Coniectatur primo, quod ei veniunt 40 ℔ antique, ille enim venduntur 4 scutis; et cum caperet 40 antique, reciperet nove 60, que valent 12, que cum 4 primis additis essent 16, et sic essent minus 2 pro 40.

Coniectatur secundo ipsum recipere 30 antique. Ille venduntur 3 scutis, et reciperes tunc 70 nove, que vendentur 14, et sic posito 30 esset minus in uno.

40 minus 2		
		1 divisor.
30 minus 1		

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus antique cere scilicet 20, que valent 2 scuta, et nove 80 erunt, que valent 16, et sic patet solucio.

Nota in idem, quod si casus ponetur de tribus differentiis cere aut alterius rei, aut de pluribus differentiis, tunc per has posiciones non potest inveniri, nec per regulam, quia non semper uno numero, sed pluribus tales | 55
casus stare possunt.

Exempli causa quidam vendit de prima differencia pro 10 scutis, de secunda pro 25, de tercia pro 20 scutis ipsum quintale. Quidam cupit unum quintale aggregatum ex omnibus pro 18 scutis: queritur, quantum haberet de qualibet differentia.

Una recipiendo de prima 40, de secunda 40, de tercia 20.

Alia recipiendo de prima 30, de secunda 20, de tercia 50.

20—29. Hier behauptet der Verfasser also, dass unbestimmte Aufgaben mit der *regula falsi* nicht zu lösen gehen, und giebt als Grund die mehrfachen Werthe an, welche die Unbekannten erhalten können. In dem vorliegenden Beispiele ist allgemein $A = 20 + t$, $B = 2t$, $C = 80 - 3t$. Die beiden vom Verfasser gegebenen Speciallösungen ergeben sich für $t = 20$ und für $t = 10$. Obwohl oben mehrfach ähnliche Aufgaben durch die Regel vom falschen Ansatz zur Lösung gebracht sind, so lässt sich diese doch in unserem Falle nicht anwenden, da das Erfordernis dazu — dass nämlich die Anzahl der zu theilenden Sachen und der zu zahlende Preis einander gleich sein müssen — hier nicht zutrifft. In nicht ganzen Zahlen findet man freilich durch die *Regula falsi* stets eine Lösung.

Duodecima conclusio(!).

Est enim facilis et terminabitur per modum resolucionis a posteriori, quamvis posset eciam regula ista manifestari, et est:

Quidam intrant ortum, qui habet 4 portas, et colligit poma, qui exitum petens a primo dat primo $\frac{1}{2}$ omnium et $\frac{1}{2}$ unius integri. Consequenter secundo dat $\frac{2}{3}$ omnium et $\frac{2}{3}$ unius integri; tercio vero dat $\frac{3}{4}$ omnium et $\frac{3}{4}$ unius integri; quarto autem dat $\frac{4}{5}$ omnium remanencium et $\frac{4}{5}$ unius ultra integri, et retinet tantum 2 in fine. Queritur, quot fuerint in principio.

Quia remanserunt 2 et ultimo dedit $\frac{4}{5}$ ultra, ipsa 2 in 5 duc, et erunt 10, quibus adde $\frac{4}{5}$ ultra datas, et erunt 14 poma, que habuit, cum venisset ad quartum. Ipsa igitur 14, quia tercio dedit $\frac{3}{4}$, duc in 4 et superadde $\frac{3}{4}$ ultra datas et habebis 59. Consequenter, quia secundo dedit $\frac{2}{3}$, ipsa 59 in 3 multiplica et $\frac{2}{3}$ producto superadde, et habebis 179, que
54 habuit, cum ad secundum veniret, que dupla, et unitas | superaddita dat quesitum, scilicet 359.

III.

33′ Machmet in dem puech algebra und almalcobula hat gepruchet dise wort: census, radix, numerus. Census ist ain yede zal, die in sich selb multiplicirt wirt, daz ist numerus quadratus. Radix ist die wurcz der zal oder dez zins. Numerus ist ain zal fur sich selb gemercket, nit alz sie ain zins oder ain wurcz ist. Aus den dingen merkt er 6 ding: das erst, wann der census sich gelichet den wurczen; daz ander, so der census sich gelichet der zal; daz drit, so sich dye zal gelichet den wurczen; das 4 so sich der census und die wurczen gelichent der zal, als ob man spreche: ain census vnd 10 wurcz gelichent sich 32; das funft ist, so sich der census vnd die zal gelichend den wurczen; das sechst, so sich die wurczen vnd die zal gelichent dem census.

Dar vmb sprech ainer: gib mir ain zensus vnd zuech darvon sin wurcz, vnd von dem, daz vberbelyb an dem census, zuech och ausz dye wurcz; die zwo wurcz tue zesamen, daz 2 zal darausz werden. So aber daz nit in

---

1—15. Diese Lösung ist mit der *regula versa* des Leonardo Pisano, und also indirekt mit der sogenannten *Umkehrung* der Inder identisch, zugleich mit der *regula sermonis* der Araber, aus welcher letztern Quelle sowohl Leonardo als unser Verfasser geschöpft haben dürften. 25. Hier hat Gerhardt schon darauf aufmerksam gemacht, dass wohl ein Schreibfehler für 39 vorliegt, da dann die Aufgabe mit der des Muhammed Alchwarizmî identisch wird.

der sechs regel ainer stat, | so bring es in ain regel also. Es sollen die zwo wurcz 2 numero gelich gesin, so kompt es in die dritten regel; dar vmb zuech ab von den 2 numero die wurczen dez census, so belyben 2 minder der wurczen desz zins, dasz selb belybend ist gelych der wurczen desz, dasz ain census uberbelybt sein wurcz darvon gezogen wurt, daz du aber habest des gelych, unsz daz uberbelybt, so multiplicir die 2 dragmas minder ainer wurczen in sich selb, so komen 4 dragma vnd ain zins minder 4 wurczen, daz wurt gelich dem, daz uberbelybt an dem census, wann sein wurcz darvon wart gezogen. Nu zuech darvon dye gemindert wurcz, so belybt 1 census vnd 4 dragme gelich ain census vnd 3 wurcz. | Nu tu baidenthalb den zins darvon, so beleybt dennocht dasz ubrig gelich, dasz ist, 4 dragme sind gelych 3 wurczen. So musz ain wurcz $1\frac{1}{3}$ sein, wann 3 mal $1\frac{1}{3}$ macht 4. Multiplicir $1\frac{1}{3}$ in sich selb, so kompt $\frac{16}{9}$, daz ist der census, vnd sein wurcz ist $1\frac{1}{3}$, vnd wann tue $1\frac{1}{3}$ tust von $\frac{16}{9}$, so belyb $\frac{4}{9}$; die wurcz von $\frac{4}{9}$ ist $\frac{2}{3}$, die $\frac{2}{3}$ tue zu der wurczen $\frac{16}{9}$, daz ist $1\frac{1}{3}$, macht 2 gancz. 1461. Erasmi martyris.

IV.

REGULE DELACOSE SECUNDUM 6 CAPITULA, 1

vnd mit den selben capitel mag man alle rechnung machen, vnd haissen also:

Das erst: Cosa gleich numero,
Das ander: Censo gleich den numero,
Das dritt: Cosa gleich censo,
Das viert: Censo vnd cosa gleich numero,
Das funft: Censo vnd numerus gleich cosa,
Das sechst: Cosa vnd numerus gleich censo.

Nu merck, wen du ain rechnung machst, als du furpas werdest sehen, es musz der capitel aines gleich sein, darnach das selbig capitel ist, es musz mit der regel gemacht werden.

---

12. Gerhardt setzt hinter *sein* einen Punkt und beginnt dann mit *Wann* den Satz so, als ob er die Begründung für das Folgende: *Multiplicir* $1\frac{1}{3}$ wäre. Nun hat aber, und der Sinn wird mir auch recht geben, *wann* hier die Bedeutung von *weil* oder *denn*, und begründet, weshalb $x = 1\frac{1}{3}$ sein muss, wenn $4 = 3x$ ist. Bei Vergleichung unseres Textes mit dem Gerhardts werden auch sonst noch mehrfache Unterschiede zu Tage treten.

Capitulum primum.

Wen der numerus gleich ist cosa, das ist, wen dy zal gleich dem ding
37 ist, so sullen wir dy zal tailen | in daz ding, id est in den cosa, vnd was dar aus kumbt, als vil ist das ding wert.

Capitulum secundum.

Wen das ding ist gleich, das ist censo gleich der zal, so sol man tailen dy zal, id est den numerus, mit dem censo, vnd was ausz der tailung kumbt, Radise quadra von der selbigen zal ist daz ding wert.

Capitulum tercium.

Wen das ding ist gleich dem censo, so sol man das ding tailen in den censo, vnd was dar ausz kumbt, vnd als vil ist das ding wert, id est cosa.

Capitulum quartum.

Wen dy zal, id est numerus, gleich ist dem ding, id est cosa, vnd
37′ dem censo, so sol mansz tailen mit dem censo, dar | nach das cosa, id est ding, halbs taylen, vnd das selbig halbtayl schol man furpas in sich machen, vnd was es dann trift, auf dẏ selbig summa soltu darnach dy zal darzuthun, vnd radix in der selben summa unternand mynder den halbtail von dem ding ist das ding wert.

Capitulum quintum.

Wen das cosa, id est ding, gleich der zal, id est numero, vnd dem censo, so soltu tailen mit dem censo alle ding, vnd das ding halbs tailen, vnd für daz selbig halbtail in sich selb, das das selb halbtail von dem ding, vnd von der sum schol man abziehen dy zal. ain radixe von dem selbigen abgezogen ist das ding wert.

2—4. Das ist $ax = b$, $x = \frac{b}{a}$. 6—8. Hier hat sich der Verfasser zuerst verschrieben, indem er sagt: *Wen das ding*, er verbessert sich aber sogleich, indem er hinzufügt, *das ist censo*. In Zeichen: $ax^2 = b$, $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. 10—12. Das ist $ax^2 = bx$, $x = \frac{b}{a}$. 14—19. Das ist

$$ax^2 + bx = c;\quad x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a};\quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}.$$

21—25. Es soll sein $ax^2 + c = bx$; $x^2 + \frac{c}{a} = \frac{b}{a}x$; $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$; ein Commentator zu der Gerhardtschen Algebra — siehe unten — kennt auch bei der Wurzel das $+$ zeichen.

Exemplum. 80 drittail aines hallers wie uil fl. es macht. Machs als do stet $\frac{3}{1}$ pro 1 Haller, wie 80. | facit 1 fl. 6 ₰ $\frac{2}{3}$ ains Hallers.

Capitulum sextum.

Wen der censo ist gleich dem ding und der zal, so schol man tailen mit dem censo, vnd das ding $\frac{1}{2}$ tail, vnd fürsz in sich selbs, multiplicir für sichs selbigen $\frac{1}{2}$ tail, vnd das es trift, soltu dy zal darzu thuen, vnd dy radix von dem selben summe vnd auch das $\frac{1}{2}$ von dem ding ist das ding wert.

Merck, was censo, ding und cubo ist.

Multiplicir ding wider ding, macht censo:
Multiplicir ding wider censo, macht cubo.
Multiplicir ding wider cubo, macht censo de censo.
Multiplicir censo de censo wider ding, macht du^x cubo.
Multiplicir censo wider censo, macht censo di censo.
Multiplicir cubo wider cubo, macht cubo di cubo.

| *Exemplum de primo capitulo.*

Mach aus 10 zwai tail, vnd das grôst tail in das ander tail, vnd das aus der tailung 5 chumbt: wie uil ist ittlichs tails gewesen?

Machs also. nym, das 1 tayl say 1 ding, id est cosa, so musz das ander tail 10 mynder 1 dings seyn. Nu tail 10 mynder 1 dings in 1 ding, vnd sol 5 aus der taylung komen. vnd darumb das man in 1 ding nit mag taylen, mustusz also tailen. 10 mynder 1 dings mustu taylen in 1 ding, vnd 5 soll treffen aus der taylung. Nun multiplicir 5 wider ain ding, das was der tayler, so sol das komen, das man getaylt het, das was

---

1—2. Dieses *Exemplum* ist natürlich nur durch die Schuld des Abschreibers aus einer Randglosse in den Text gekommen. 4—8. Das ist $ax^2 = bx + c$; $x^2 = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$; $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$. 13. Die letzten Worte dürften wohl *duplex cubo* zu lesen sein, dann würden also folgende Potenznamen sich ergeben:

x = ding = cosa
x^2 = censo
x^3 = cubo
x^4 = censo di censo
x^5 = duplex cubo
x^6 = cubo di cubo.

Es wären also hier, im Gegensatz zu Luca Paciuolo die Exponenten nicht multiplicirt, sondern addirt.

10 mynder 1 ding gleich. Nu gib wider den 10 das ding, das er mynder
39 hat, so pleibt 10, gib an der ander tail auch | 1 ding zu 5 ding, so wirt
6 ding, das ist 10 zal gleich, id est numero. Nu spricht das erst capitel: wen das cosa gleich dem numero ist, so sol man die zal in daz cosa taylen: Nu tail 10 in 6, kumpt 1 vnd $\frac{4}{6}$, ist $\frac{2}{3}$, vnd als uil ist das ding wert. Nu nym das v̊brig bisz auf 10, das wer 8 vnd $\frac{1}{3}$. das 1 tail ist $1\frac{2}{3}$, das ander tail ist $8\frac{1}{3}$.

$$1 \text{ ding} \cdot 10 \text{ mynder } 1 \text{ dings} \cdot \frac{1}{6}\ \frac{5}{\text{pl}}$$
$$5 \text{ mol } 1 \text{ ding ist } 5 \text{ ding } \frac{10}{1} \cdot 1\,\frac{4}{6}.$$

Exemplum de secundo capitulo.

Vind 1 zal, das ich $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ von der selben zal genemen mug, vnd was v̊ber pleibt, wil ich furpas in sich selb multipliciren, vnd schol 16 tragen (?).

39′ Machs also. nym das dy zal sey | 1 cose, id est ding, gewesen. Nu nym $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ von 1 cosa, das ist $\frac{7}{12}$, pleibt $\frac{5}{12}$ ding. das für in sich selb, das macht $\frac{25}{144}$ von 1 censo, vnd das ist gleich 16. Darumb spricht dy regel, wann dy zal gleich dem censo, so soll man dy zal in dem censo tailen, vnd was dar ausz kumbt, radix quadrata von der selben sum ist das cose wert. Darumb tail 16 in $\frac{25}{144}$ censo, trift $92\frac{4}{25}$, vnd radix von $92\frac{4}{25}$ ist das cose wert, das ist $9\frac{3}{5}$, vnd $9\frac{3}{5}$ ist dy zal gewesen.

Probacio. Nym $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ dauon von $9\frac{3}{5}$, vnd das v̊brig multiplicir fur sich selb, so kumbt 16, et factum est.

De capitulo tercio.

Item wen dy censo gleich dem ding, so sol man das ding in den censo taillen, vnd als vil ist das ding wert.

40 Vind ain zal als 2 gegen | 3, vnd dy selben zal als vil prungt zusamen gethan als man hat multiplicir ain wider dy ander.

Machs also. nym, das dy erst zal sey 1 cosa gewesen, vnd das ander musz 3 seyn. thu zesam 2 vnd 3, macht 5 cose. Nu multiplicir 2 cose uider 3 cose, macht 6 censi. Nu haben wir 5 ding gleich 6 censi. (censi) gleich dem ding, so sol man (tailen) ding in 6 censi, komen $\frac{5}{6}$; als vil ist das ding wert. Vnd wir haben geseczt 2, darumb multiplicir 2 mol $\frac{5}{6}$,

---

28. Das muss natürlich heissen: *2 cosa*, wie aus dem Zusammenhange ersichtlich ist.

fit $\frac{10}{6}$, das ist $1\frac{2}{3}$, vnd als vil ist dy erst zal gewesen; der ander was 3 ding. Multiplicir 3 mol $\frac{5}{6}$, ist $2\frac{1}{2}$, vnd als uil ist dy ander zal gewesen, et factum est.

Probacio. Wir haben die erst zal $1\frac{2}{3}$, dy ander $2\frac{1}{2}$; thu es zesam, trift $4\frac{1}{6}$. | Nu sol wir multipliciren, vnd sol auch komen $4\frac{1}{6}$. Nu multiplicir $1\frac{2}{3}$ wider $2\frac{1}{2}$, das macht $4\frac{1}{6}$, vnd ist probiret.

De capitulo quarto.

Item ainer leicht 20 ℔ jn 2 jaren gewin vͤber gewin, vnd wen dy zwey jar ausz komen, so gibt man im wider 30 ℔ mit hauptgut vnd gewin. Nu frag ich, wie uil 20 ℔ in 1 jar hat gewonnen, vnd 20 β ist 1 ℔.

Machs also. Nym das 20 ℔ in 1 jar haben gewonnen 1 ding; das ander gewinnet dy 20 ℔ aber 1 ding. Nu mach, was 1 ding auch gewynet, mit der regel von 3 ding. Sprich 20 ℔ pro 1 ding, wie 1 ding vnd secz also

$$20 \cdot 1\,\partial \cdot 1\,\partial .$$

Multiplicir 1 ∂ wider 1 ∂, macht censy vnd | tails in 20, chumbt $\frac{1}{20}$ censo, vnd das ist dy 30 ℔ gleich mit hauptgut vnd gewin: 20 ℔ 2 ∂ $\frac{1}{20}$ censy dem 30 ℔ gleich. Nu zeuch ab 1 zal von der andern, wann es sol nur 1 zal sein. zeuch ab 20 ℔ von 30 ℔, pleibt 10 ℔; desgleich auch 1 ∂ $\frac{1}{20}$ censo, vnd tail alle ding mit dem censo. tail 10 ℔ in $\frac{1}{20}$ censo, kumbt 200 ℔; tail 2 ∂, chumbt 40 ∂. Nu haben 200 ℔ mit 40 ∂. tail das ding in $\frac{1}{2}$, alz dy regel spricht, kumbt 20 ∂. Multiplicir für sich selbs, trift 400 ∂, thu dy zal dazu dy 200 ℔, trift 600, vnd radix von 600 mynder das halb tail von dem ding hat 20 ℔ 1 jar gewonnen.

| *De capitulo quinto.* 14

Item es sind 2 gesellen, dy wellen stechen mit einander. der 1 hat gelt, der ander hat seyden. der mit der seyden peut 1 ℔ pro 9 fl pargelt vnd im stich 12 fl, vnd uil $\frac{1}{4}$ pargelt, das der mit dem gelt peut das gelt am beraiten gelt pro 10 fl 1 marc. Nu frag ich, wie er das gelt am stich sol pieten, das er $\frac{1}{4}$ von dem stich dem andern geb, vnd der stich gleich sey.

7—26. Das ist die *regula lucri* WIDMANNS nur mit andern Zahlenwerthen. Wir werden derselben Aufgabe später nochmals begegnen. Siehe auch CANTOR, Vorlesungen II, S. 213—214. 28 u. ff. *Stich* heisst Waarenaustausch. Siehe CANTOR, Vorlesungen II, S. 207.

Machs also: nym das 1 ∂ gelt 1 stich. Nu nym $\frac{1}{4}$ von 1 ∂, das ist $\frac{1}{4}$ dings, vnd das gib dem mit der seyden, der do 1 ℔ peut pro 9 fl vmb pargelt vnd am stich pro 12 floren. Nu gibt man $\frac{1}{4}$ ∂, darumb
142 zeuch im ab $\frac{1}{4}$ ∂. Nu machs mit der | Regel von 3 ding. 9 fl mynder 1 ∂ pro 12 fl mynder $\frac{1}{4}$ ∂, daz chan man nit taylen, wan ding in dem tailer ist. darumb sprich also: wir haben zu taylen 120 mynder $2\frac{1}{2}$ in 9 mynder $\frac{1}{4}$, vnd 1 ding ausz der taylung chomen. Darumb multiplicir 1 ∂ wider den tayler, das ist 9 minus $\frac{1}{4}$ dings, so werden 120 mynder $2\frac{1}{2}$ ∂ gleich. Nu multiplicir 1 ∂ wider 9 minus $\frac{1}{4}$ ∂, das macht 9 ∂ minus $\frac{1}{4}$ censo. Nu mach ain ydlich gleich, wan dem ersten sol man wider geben. gib dem 120 mynder $2\frac{1}{2}$ ∂ gewin $2\frac{1}{2}$ ∂, so pleibt 120 zal; gib dem andern auch als vil, komen $11\frac{1}{2}$ ∂ minus $\frac{1}{4}$ censy. gib in auch
142' den $\frac{1}{4}$ censy, das er minus hat, so pleibt $11\frac{1}{2}$ ∂. | gib dem andern auch $\frac{1}{4}$ censy, trift 120 zal $\frac{1}{4}$ censy. Nu haben wir paid tailen gleich gemacht, pleibt dem ainen tail $11\frac{1}{2}$ ∂, dem andern tail pleibt 120 zal vnd $\frac{1}{4}$ censy. Nu sol man alle ding in dem censo tailen. tail 120 zal in $\frac{1}{4}$ censy, trift 480 zal; tail auch $11\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ censy, trift 46 ∂; tail dy ding in halb, ist 23; multiplicir 23 für sich selb, sint 529. Nu zeuch ab dy zal, das ist 480, pleibt 49. Nu radix von 49 ist 7, das sol man abzihen von dem halben tail von dem ding, das was 23. zeuch ab 7 von 23, pleibt 16; vmb 16 fl hat man das gelt am stich gepoten.

136 | *Proba super quintam regulam lacose.*

Wiltus probiren, so sprich also. der mit der seyden peut 1 ℔ vmb 5 fl an pargelt vnd am stich vmb 12 fl, vnd wil $\frac{1}{4}$ pargelt haben von dem, der gelt hat, der das gelt am stich vmb 16 fl hat vnd umb pargelt pro 10 fl. Nu nym $\frac{1}{4}$ von 16, ist 4, vnd zeuch 4 von 12, pleibt 8; auch zeuch ab 4 von 9, pleibt 5. darnach sprich: 5 vmb 8, wie 10. secz also 5 · 8 · 10, kumpt 16.

5 · 8 · 10	$\frac{80}{16}$	1 ding stich
pargelt	pargelt	

---

22 bis S. 56 Z. 5. Diese *Proba* ist von der Hand des Frater Fridericus, während der Haupttext von anderer Hand ist. Jedenfalls ist aber dadurch bewiesen, dass diese Algebra nicht später zu setzen ist als die von demselben Frater Fridericus geschriebene Gerhardtsche Algebra.

$$9 \text{ mynder } \tfrac{1}{4} \text{ ꝛ } \tfrac{12}{12} \text{ mynder } \tfrac{1}{4} \cdot 10\tfrac{1}{4}$$

$$9 \text{ ding minder } \tfrac{1}{4} \text{ censo } \Big| \ 120 \text{ minder } \tfrac{10}{4}$$

pleibt $11\frac{1}{2}$ ding minder $\frac{1}{4}$ censo pleibt 120 zal

$$11\tfrac{1}{2} \text{ ding } 120\tfrac{1}{4} \text{ censo } \tfrac{46}{23}\ \partial\ \tfrac{529}{480} \cdot 480.$$

Radix von 49 ist 7, zeuch ab von 23, pleibt 16. | 136′

| *De capitulo sexto.*

Item ainer hat 100 ellen tuchs vnd ain ander hat auch als uil, vnd der erst geit seins | tuchs 5 ellen mer vmb 1 fl. den der 143 ander, vnd wenn sy dy tuch payde verkauft haben, so vinden sy, das sy 20 fl haben. Nu sprech ich, wie uil ydlicher ellen seins tuchs vmb 1 fl sol geben.

Machs also: nym, das der ander hab 1 ∂ pro 1 fl geben von den 100 ellen, so muss der erst geben 1 ∂ und 5 ellen mer. Nu tail 100 ellen in 1 ding, das er vmb 1 fl gibt, so trift $\frac{100}{1 \text{ ding}}$, 100 in 1 ding getailt, als vil fl trifts. Nu tail dy ander 100 ellen in 1 ∂ vnd 5 mer, so trifts $\frac{100}{1\ \partial\ 5}$ 100 in 1 ∂ vider 5 mer getailt. Nu summir zesam $\frac{100}{1\ \partial}$ vnd $\frac{100}{1\ \partial\ 5}$, als man zu prochen thut. Multiplicir in crucz: 100 mal 1 ∂ macht 100 ∂, vnd 100 mal 1 ∂ vnd 5 macht 100 ding vnd 500 zal. | 143′ addir zesam 100 ∂ vnd 100 ∂ vnd 500 zal, macht 200 ∂ vnd 500 zal. das sol man tailen in dy vntern figur, das ist 1 ∂ multiplicirt vider 1 ∂ 5, macht 1 censy vnd 5 ding, vnd tail 200 ∂ vnd 500 zal in ain censy vnd 5 ∂. das tailt uider nicht, wan ding ist. Vnd merck, wen du es getailt hast, so sol 20 fl komen, darumb multiplicir 20 fl uider 1 censy vnd 5 ∂, wirt gleich 200 ∂ vnd 500. Multiplicir ain censo 20 fl, macht 20 censo vnd 100 ∂ gleich 200 ∂ 500 zal. Nu nym davon dy 100 ∂, pleibt zu aym tail 20 census. nym zu dem andern tail auch 100 ∂, so plaibt 100 ∂ vnd 500 zal dem andern. tail mit dem censo, das chumbt 1 censo 5 ∂ vnd 25 zal. tail dy 5 ∂ halbs, das ist $2\frac{1}{2}$ ∂; multiplicir für sich, trift |

---

6 bis S. 57 Z. 3. Auch dieses Beispiel wird uns später nochmals begegnen. Dort ist es mit der 5. Regel gelöst, indem nicht die Ellenzahl des zweiten, sondern die des ersten als Unbekannte genommen wird, doch wird dort auch gesagt, man könne durch die sechste Regel die Aufgabe ebenfalls lösen. Bemerkenswerth sind jedenfalls die allgemeinen Brüche $\frac{100}{1 \text{ ding}}$ und $\frac{100}{1 \text{ ding } 5}$. Aehnliche, aber noch complicirtere werden wir später wieder finden.

6 ∂ $\frac{1}{4}$· tu es zesam mit der zal, das ist 25 zal, trift 31$\frac{1}{4}$, vnd radix von 31$\frac{1}{4}$ mer 2$\frac{1}{2}$ hat der ander ellen vmb 1 fl geben, der erst hat radix von 31$\frac{1}{4}$ mer 7$\frac{1}{2}$ vmb 1 fl geben, et factum est.

De capitulo primo.

Item ainer hat gelt pay im, vnd wil tuch kauffen, vnd wen er 3 *tt* gibt pro 1 ellen, so mangelt er 4 *tt* am zalen, vnd wenn er 2 *tt* gibt pro 1 ellen, so pleibt im 10 *tt* vͤber. Queritur, was 1 ellen hab golten, vnd wie uil geltes pey im hab.

Machs also: nym wir, das das stuck sey 1 ding gewesen, vnd er geit 3 *tt* pro 1 ellen. Sprich 3 mol 1 ∂ ist 3 ∂ | minus 4 *tt* darumb das er spricht, er mangelt 4 *tt* am zalen, darumb chomb 3 ∂ minus 4 *tt*. Nu sprich 2 mol 1 ∂ ist 2 ∂ vnd 10 *tt* mer, darumb das er spricht, im pleibt 10 vͤber. Nu ist 3 ∂ minus 4 *tt* dem ander gleich, das ist 2 ∂ 10 mer. Nu mach ain yeden tail gleich, gib dem 3 ∂, vnd gib dem andern auch 4 *tt*, so trifts 2 ∂ vnd 14 *tt* gleich den 3 ∂. zeuch ab 2 ∂ von 3 ∂, pleibt 1 ∂ vnd dem andern 14. Nu tail 14 in 1 ∂, kumbt 14, vnd 14 ist das ding wert. Das tuch ist 14 ellen gewesen. Wiltu nu wissen, wie uil gelts, so sprich: 3 mol 14 ist 42 *tt*. Nu zeuch ab dy 4 *tt*, dy er mangelt, so pleibt jm 38, dy hat er pey im gehabt. | Sprich 2 mol 14 ellen ist 28, pisz auf 38 ist 10 *tt* vͤbrig, vnd also ist probiret vnd gemacht.

Item zwischen 7 vnd 13 secz 5, was sol ich seczen zwischen 32 vnd 4.

Item es sein 2 gesellen, dy wellen vnternander stechen. der erst peut sein ding pro 8 fl 100 *tt* pargelt vnd am stich pro 11 fl, der ander peut sein ding 1 ℭ pro 4 fl mer am stich dan vmb pargelt. Nu frag ich, wie uil der ander sein ding hat gepoten am pargelt vnd am stich dem mit paren gelt.

Machs also: nym das er am paren gelt peut 1 ∂, so muss er am stich pieten 1 ∂ vnd 4 fl | mer; darumb sprich also: 1 ∂ pro 1 ∂ vnd 4 fl, wy 8, vnd sol 11 komen, als der erst hat poten. Nu secz also 1 ∂ 1 ∂ 4 · $\frac{8}{1}$ · Nu mach 8 mol 1 ∂ vnd 4 macht 8 ∂ 32, vnd das sol man tailen in

4 bis S. 58 Z. 18. Diese Aufgabe und die beiden folgenden sind nachträglich hinzugefügt worden. Mit der Aufgabe für das 6. Capitel war die eigentliche Abhandlung zu Ende. Der ersten Aufgabe sind wir schon oben S. 39, Z. 23 bis S. 40, Z. 3 mit dem identischen Wortlaute begegnet. Auch die dort gegebene Lösung beruht auf den hier ausführlich gegebenen Schlüssen. 22–23. Diese Zeilen sind sicherlich absichtslos hierher gesetzt worden.

1 ∂, vnd sol aus der tailung komen 11, das sind dy 11 fl, das der erst peut am stich. Nu haben wir 8 ∂ vnd 32, das sol man tailen jn 1 ∂, vnd soll 11 komen, darumb multiplicir 1 ∂ uider 11, das macht 11 ∂, das ist 8 ∂ vnd 32 gleich. zeuch ab 8 ∂ von 11 ∂, pleibt 3 ∂, gleich 32 zal. Nu tail 32 in 3 ∂, komen $10\frac{2}{3}$ ist das ding wert. darumb hat der ander sein ding am gelt vmb 10 fl $\frac{2}{3}$ poten, vnd 14 fl $\frac{2}{3}$ hat er am stich poten, vnd | an gelt pro 10 fl $\frac{2}{3}$, das ist 4 fl $\frac{2}{3}$ am gelt get mir 14
14 fl $\frac{2}{3}$ am stich w. g. in 8; vnd wiss, von recht soll 11 komen.

$$\begin{array}{lcl} 1\,\partial \cdot 1\,\partial \text{ vnd } 4 & \qquad & 8 \cdot 11 \cdot \mid 32 \\ 1\,\partial \cdot 1\,\partial\ 4 \cdot \frac{8}{1} & & \underline{\quad 11\,\partial \mid 11\,\partial} \\ & & 18 \cdot 18 \cdot 32 \cdot 10\frac{2}{3} \end{array}$$

De capitulo primo.

Item es sein 3 gesellen, dy haben gelt, vnd der erst spricht zu den andern 2: het ich 7 fl ewres gelts, so het ich dann 3 mol mer dann ir 2; spricht der ander: het ich 9 fl ewres gelts, so het ich 4 mol mer dann ir 2. spricht der dritt: het ich 11 fl ewres gelts, so het | ich 5 mol mer dann jr 2. 14

Facit. si haben all 3 gehabt $19\frac{43}{83}$. Primus $7\frac{53}{83}$, secundus $6\frac{51}{83}$, tercius $5\frac{22}{83}$.

V.

Questio prima.

Quidam emit 15 ℔ zinziberis et 17 ℔ cariofiorum pro 7 fl, et de cariofloribus pro vno fl veniunt 3 ℔ plus, quam veniunt zinziberis: queritur, quot veniunt ℔ zinziberis pro vno fl, et quot ℔ cariofiorum pro vno fl.

Sic inquiro. pono, quod zinziberis vna res veniat pro fl, tunc oportet ex ypotesi, ut cariofiorum vna res et 3 ℔ veniant eciam pro fl. Debeo igitur diuidere 15 per 1 rem, iterum 17 per 1 rem et 3, et que exeunt in quantitate coniungere, et productum erit 7 fl. Sed cum diuido 15 per 1 rem exit fractio, scilicet $\frac{15}{1 \text{ res}}$. Iterum cum diuido 17 per 1 rem et 3,

---

12—17. Die Auflösung, so wie sie hier nur angedeutet ist, folgt später ausführlich. 18 u. ff. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf die Algebra, welche Gerhardt herausgegeben hat. Es heisst später „*in algebra Arabis*“.

exit finaliler fractio, scilicet $\frac{17}{1 \text{ res et } 3}$. Has duas fractiones more numerorum coniungo, multiplicando denominatorem in denominatorem, scilicet
7 rem in rem et 3. proveniunt census | et 3 res, denominator. Post numeratorem prime in denominatorem secunde et numeratorem secunde in denominatorem prime, et simul addite faciunt 22 res et 45. Ergo ex coniunctione harum fractionum exit fractio, scilicet $\frac{32 \text{ res et } 45}{1 \text{ census et } 3 \text{ res}}$. Fractio valet ex supposicione questionis tantum, quantum 7 fl. Ergo diuidendo numeratorem per denominatorem debent exire 7, quare e converso multiplicando denominatorem per 7 illud, quod exit, necessario equale erit numeratori. Ideo sequitur, ut 7 census et 21 res sunt equales 32 rebus et 45. Auffero utrobique 21 res, erit per communem conceptionem, quod 7 census equales fient 11 rebus et 45. Igitur 1 census equale erit $\frac{11}{7}$ rei et cum hoc $\frac{45}{7}$ additis. Ecce es in sexta regula, quando census equatur rebus et numero. Age igitur secundum eam, mediando rem, mediatum in se multiplicando, et sibi numerum coniungendo, et producti radicem extrahendo, et huic radici medietatem rerum addendo, et habebis valorem rei. Sic illud facio. Medio $\frac{11}{7}$, sunt $\frac{11}{14}$; duco hoc mediatum in se, veniunt $\frac{121}{196}$; huic coniungo $\frac{45}{7}$, proveniunt $\frac{1381}{196}$; huius aggregati debeo inquirere radicem quadratam. Sed quia hec fractio, quamquam denominator sit numerus quadratus, tamen ipsa non est fractio quadrata, propterea quod numerator
7′ eius est numerus | non quadratus, igitur impossibile est imperativum te invenire eius radicem. Quamcumque radicem propinquam mihi assignabis, ego semper assignabo adhuc viciniorem numerum radici eius vere. Ergo dico, quod emptio talis, ut proponitur, est impossibile et falsa, cum ea in nulli numero fieri possit. Sed si sic posuisses, diuide 15 per aliquam quantitatem, iterum diuide 17 per aliam quantitatem, que priorem divisorem excedit in ternario, et coniunge quocientes, et aggregatum ex eis faciat 7. Dic mihi hos diuisores (*Nota.* Non sum adeo iners, quod illud

---

6. Hier ist einer der oben vorausgesagten allgemeinen Brüche. 23 u. ff. Hier ist es interessant zu sehen, wie der Verfasser gut zu unterscheiden weiss zwischen angewandten Aufgaben und Aufgaben in reinen Zahlen. Während hier die gegebene Aufgabe, da irrazionale Wurzeln erscheinen, so wie sie gegeben ist, nicht gelöst werden kann, jedenfalls aber nicht absolut genau, lässt die zweite eine präcise Lösung zu. Der Verfasser bezieht sich hier und später auf das 10. Buch des Euklid von den Irrazionalen Grössen und zeigt sich mit demselben recht wohl vertraut. Für die damalige Zeit ein sehr gutes Zeugnis für denselben. Ob er jedoch im Stande gewesen wäre, die von ihm verlangte Probe wirklich durchzuführen, möchte ich doch bezweifeln.

te effectum dabo). facio opus, ut prius, et quando venio ad hoc aggregatum $\frac{1381}{196}$, huius debeo extrahere radicem. Sed ea non potest precisius et verius nominari quam radix de $\frac{1381}{196}$. Huic radici addo medietatem rerum, scilicet $\frac{11}{14}$, et proueniet radix de $\frac{1381}{196}$ huic radici adiunctis $\frac{11}{14}$. Dico ergo, quod prima quantitas diuisoris est radix de $\frac{1381}{196}$ et $\frac{11}{14}$, et quia quantitas secundi divisoris est hac in ternario maiore, ideo secundus diuisor fiet radix de $\frac{1381}{196}$ additis $\frac{53}{14}$. Iam habes quesitas quantitates. Sed sunt binomina, uno enim nomine est eas impossibile ex|plicari, et sunt linee 14 irracionales et incommunicantes cum 15 et 17 numeris propositis. Si legisti decimum librum Euclidis, ubi de hiis lineis irracionalibus agit, facilius intelliges. Quod si autem probare voles et ostendere tantum factum esse, pone quocientes in diuisione, ut fieri solet more fractionum, ut hic

$$\underset{\text{prima fractio}}{\frac{15}{\frac{11}{14}\text{ et radix de }\frac{1381}{196}}},\qquad \underset{\text{secunda fractio}}{\frac{17}{\frac{53}{14}\text{ et radix de }\frac{1381}{196}}}.$$

Denominatores horum fractionum sunt binomia et ponuntur sub virgula, numeratores sunt racionales et numeri. Si vis eas coniungere, duc denominatorem unum in alium, et quod exit, fac denominatorem aggregati ex eis. item numeratorem prime in denominatorem secunde et e converso numeratorem secunde in denominatorem prime, et coniunge hec aggregata pro numeratore aggregati. Et si recte fecisti, denominator precise septies continebitur in numeratore, quare recte actum convinces. Item si vero hec practica de binomiis et numeris surdis uni non sit cognita, ille frustra agitur.

Ecce quanta | diuersitas in proposicione questionis. Cum enim idem 14 modus practice sit in utrisque, tamen primum est impossibile, aliud possibile, proptera quod emptio humana non fit, nisi numero et quantitate distincta. Nemo enim vendet tibi aliquid pro radice de decem, cum ea non sit numerus, neque in numero, et si eciam ad infinitas fractiones distenderes, nunquam tamen radicem de illo numero comprehendes, sed quantitate continua comprendere potest. Ergo primum dixi impossibile, secundum autem possibile, quia illud in quantitatibus surdis quidem fieri potest. licet enim mercator querens multiplicitate fractionis ad vicinam accedit adeo eciam, ut in una millesima parte assis non esset, tum illud precisioni non sufficit. Quando igitur partitum proponitur, quod in numero comprehendi non potest, ego dico, ipsum mercatoribus esse impossibile, qui unitatibus omnes suas merces dimeciuntur non radicibus surdis! —

Surdus numerus non est numerus. Nam numerus est, quam unitas mensurat, et illa ad primam questionem. — Tamen quantum grosso calculatori sufficiet, et prope verum quereret non ipsum verum precisum, satis esset dicere in numero: De casiofoliis emit pro uno floreno libras 6 et $\frac{3}{7}$
9 vnius ℔ et modicum plus, | et illud modicum plus non potest certo numero dici; et de zinzibere pro 1 fl emit 3 ℔ et $\frac{3}{7}$ unius ℔ et eciam modicum plus, quod eciam certo numero dici non potest.

Sed ego taliter non appercio solucionem, quia non capit precisionem et puram veritatem. Quantumcumque enim vicine accedas ad verum duos tales numeros assignando, ego adhuc magis vicinius in millecupto accedere possum, et sic sine statu. Et hoc faciunt nostra binomia. Ideo non potest precisius dici quam in surdo, ut superius dixi. Sed hoc tamen pro doctis et non pro mercatoribus, qui quia grossi sunt, subtilem numerorum racionem comprehendere nequeant. contenti enim sunt tantum numerare, quantum numero florenorum suorum ostenditur. Sed nobis, qui florenis caremus, et qui diviciis non impedimur, attingimus racione nostra eciam illud, quod mercatori est impossibile. fui prolixior, quam institueram.

Secunda questio.

Unus concedit alteri 20 fl. ad duos annos pro lucro et lucri lucro. tandem restituit sibi in fine secundi anni 30 fl capitale et omnem lucrum et lucri lucrum. Queritur de lucro primi
9′ anni, similiter quantum 20 fl et | lucrum primi anni pro secundo anno lucri fecerunt.

Pono, quod lucrum primi anni sit una res, et quia lucrum est proporcionale semper, ideo dico: 20 fl lucrantur 1 rem, quid lucrantur 20 fl et una res? Duco 1 rem in 20 fl et rem, exierunt 20 res et census. hoc diuido per 20, venit 1 res et $\frac{1}{20}$ census, et tantum erit lucrum anni secundi. Coniungo hec, et erunt 20 fl et 2 res et $\frac{1}{20}$ census. hec sunt equales 30 fl. Auffero utrobique 20 fl, quare 2 res et $\frac{1}{20}$ census equales erunt 10 florenis. Multiplico unum quodque per 20 et erunt 40 res et unus census equales 200 fl. Ecce census et 40 res equantur 200 fl. Iam

---

1—7. Die Wurzel aus $\frac{1381}{196}$ ist hier gleich $\frac{37}{14}$ gesetzt, also nur die Ganzen des Zählers berücksichtigt. Bei einer spätern Gelegenheit zeigt der Verfasser dieses Commentars, dass er wirklich, wie er sagt, die Wurzel *vicinius in millecuplo* zu finden im Stande ist. 18 u. ff. Auch diese Aufgabe ist schon oben Seite 54, Zeile 8—26 genau wie hier abgehandelt worden. Es ist die *regula lucri* Widmanns.

es in quarta regula *Algebre Arabis*. Medio res, sunt 20; duco in se, sunt 400; iungo sibi numerum, fiunt 600; huius debeo extrahere radicem. quia autem non habet in numero, ideo quoque dico, numquam accidere soli re in mutuis precise, ut casus ponit. Tamen ego satisfaciam racioni vestre regule. radix, que queritur, est radix de 600. Ab hac aufero medietatem rerum, scilicet 20, remanet radix de 600 demptis mihi 20. Ecce hic vocatur ab EUCLIDE | unum ex residuis. Sunt enim quedam linee 1 irracionales, quas vocat residua binomiarum. binomia namque sunt cum additis, residua vere cum diminutis. Est ergo lucrum primi anni radix de 600 diminutis tamen 20. Sed lucrum tocius secundi anni est difficilioris invencionis sic. Quia inquirendo positum fuit lucrum tocius secundi anni esse 1 rem et $\frac{1}{20}$ census, res autem iam inventa est esse radix de 600 diminutis 20, hanc in se multiplico, veniunt 1000 minus 40 radicibus de 600, et tantus est census rei. Nunc eius vicesima pars est 50 diminutis tamen duobus radicibus de 600. habeo ergo quod lucrum pro secundo anno totale fuit aggregatum ex radice de 600 diminutis 20 et ex 50 diminutis duabus radicibus de 600. hec autem simul addita faciunt 30 diminuta radice de 600. Dico ergo, quod lucrum secundi anni est 30 diminuta radice de 600. Potuit tum facilius id sic reperiri, postquam certus fuisti de lucro primi anni, scilicet radice de 600 diminutis 20, et lucrum amborum annorum simul fuit 10. Ergo lucrum secundi anni fuit residuum de 10, scilicet quod manet ablatis ab eis radice | de 600 diminutis 20. Et cum hoc facies, 1 manent 30 diminuta radice de 600.

Hic disce residuum in se multiplicare.

Hic disce duo residua coniungere.

Hic disce residuum subtrahere a numero.

Ad hanc rem et similes operaciones oportet vos scire algorismum de additis et diminutis et artem binomialem. Nec potest hec racio aliter precise reperire, nisi velletis esse contenti in eo, quod est prope verum, ita ut mercatoribus sufficeret, qui unam decimam partem floreni nihil pendunt, qui mihi, si addesset, valde cara esset, et non proicienda in lutum. Possetis dicere, quod lucrum primi anni fuit 4 et $\frac{1}{2}$ modico valde inde dempto; lucrum secundi anni fuit 5 et $\frac{1}{2}$ et aliquid parvulum plus. Tamen quia in numero est illud impossibile attingere, ideo ego maneo apud primam solucionem, que precise est, sola precisio mihi placet, et hec de secunda questione.

---

1. Hier ist die oben schon erwähnte Stelle, an welcher die *algebra Arabis* genannt wird. 28—30. Hier ist die Wurzel aus 600 durch die bekannte Formel $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$ gewonnen worden, welche genau $24\frac{1}{2}$ liefert. Verfasser weiss aber, dass dieselbe um etwas zu gross ist.

Tercia questio.

A habet 100 brachia panni, B quoque 100. A vendit pro uno fl in 5 brachiis plus quam B et venditis pannis in toto habent 20 fl. Queritur, quod ulnas quilibet pro fl dedit.

Pono quod A det 1 rem | pro fl, ergo B vendet 1 rem minus 5 pro floreno. Diuido 100 per 1 rem, exit $\frac{100}{1 \text{ res}}$. Iterum diuido 100 per 1 rem demptis 5, exit in quociente $\frac{100}{1 \text{ res demptis } 5}$. Has duas fractiones coniungo more solito, et provenient

$$\frac{200 \text{ res diminutis } 500}{1 \text{ census diminutis } 5 \text{ rebus}}.$$

Hoc valet 20 florenos. Quare denominator ductus in 20 facit 20 census diminutis 100 rebus. Hoc necessario equale erit numeratori, scilicet 200 rebus diminutis 500. Quare utrique parti additis 100 rebus et 500 proveniunt 20 census et 500 equales 300 rebus. Ex quo sequitur, ut unus census et 25 sunt equales 15 rebus. Ecce iam es productus ad regulam quintam Algebre. Medio res, sunt $\frac{15}{2}$; duco in se, faciunt $\frac{225}{4}$; ex hiis minuo 25 numeri, remanent $\frac{125}{4}$. horum radix est surda. eam minuo ex medietate rerum, vel secum addo. si minuo remanent $\frac{15}{2}$ minus radice de $\frac{125}{4}$; si addo, provenient $\frac{15}{2}$ et radix de $\frac{125}{4}$. Et quia hic non potest processus fieri secundum viam diminucionis, igitur necessarium est, quod fiat secundum viam addicionis. | Nam quinta regula Algebre hanc habet ex natura sue demonstracionis libertatem et hoc privilegium. Dico ergo, quod in viis mercanciorum numquam fieri soleat sic, ut proponitur in questione. Tamen quia brachia seu ulne sunt in continuo, possibile est ita, ut proponitur, fieri, sed non a mercatoribus, qui geometrie indocti sunt, verum a geometricis peritis. Nam dico, quod A vendit pro uno fl $7\frac{1}{2}$ brachia et cum hoc radicem de $31\frac{1}{4}$; B autem vendit pro uno floreno $2\frac{1}{2}$ brachia et cum hoc radicem de $31\frac{1}{4}$. Et quia hic radix, que ultra numerum est, est surda, in

---

1 bis S. 64 Z. 21. Diese Aufgabe ist schon Seite 56, Zeile 7 u. ff. dagewesen. Während hier die 5. Regel in Anwendung gebracht wird, war dort durch die 6. die Lösung gewonnen. 16–21. Unser Verfasser weiss also zunächst, dass bei der 5. Regel zwei verschiedene Werthe erscheinen können. Wenn er nun hier sagt, dass bei dem vorliegenden Beispiele nur das Pluszeichen benutzt werden könne, so hat das darin seinen Grund, dass bei Benutzung der Subtraction für B der negative Werth $\frac{5(2-\sqrt{5})}{2}$ sich ergeben würde. Das ist also der Grund, weshalb der Verfasser hier behauptet, nur die Addition gebe einen möglichen Werth.

perpetuum in numeris non invenies hanc racionem precisam. Verum mercator quandoque contentus in vicina racione, ubi precisa ab eo habere non potest; quero igitur radicem aliquam, que sit vicina ad radicem de $31\frac{1}{4}$, et sum contentus in 5 et $\frac{3}{5}$, licet adhuc vicinior daretur. Huc addo numero, scilicet $\frac{15}{2}$, qui erat medietas rerum, et proveniunt $13\frac{1}{10}$. Tantum fere vendit primus, scilicet A pro uno floreno; B autem vendit 8 et $\frac{1}{10}$ fere pro vno fl. Si 100 diuiseris per unamquamque horum et coniunges | quocientes non deficiet tibi $\frac{1}{10}$ unius, quod habebis 20. Sed ille defectus consurgit propterea, quod $5\frac{3}{5}$ sunt modico plus quam radix de $\frac{125}{4}$. Item si dico, quod A vendit pro floreno uno 13 et $\frac{1}{11}$, et B vendit pro fl uno $8\frac{1}{11}$, iam iterum duos numeros vere dixi. Nam diuidendo 100 per $13\frac{1}{11}$ exeunt $7\frac{23}{36}$, et si diuido 100 per $8\frac{1}{11}$, exeunt $12\frac{32}{89}$. Si iungo $7\frac{23}{36}$ cum $12\frac{32}{89}$, consurgunt $19\frac{3199}{3204}$. Ecce deficiunt solum $\frac{5}{3204}$. Sic quidquid dictis in talibus partitis, ubi in surdis operi fieri oportet, si eorum numerum aliquem, in quacumque eciam fractione, adhuc potest precisius dari, quod minus erretur.

Potuisset eciam hec questio perducta fuisse ad regulam sextam, si posuisses, quod B vendidisset 1 rem pro floreno, et A vendidisset 1 rem pro fl et 5, sid in idem venisset finaliter. Habetur ergo in illis tribus questionibus, quod numquam in numero potest satisfieri, sed solum in surdo, et qui in surdis atque additis et diminutis et binomiis et residuis et lineis ceteris irracionalibus agere nescit, nihil in Arismetrica egregii nouit.

| *Questio quarta.*

Nota. Quidam dominus diues habet 4 bursas denariorum, in unaquaque tantum quantum in alia de denariis, quos vult distri-

---

2 u. ff. Die erste Wurzel von $\frac{125}{4}$ ist gefunden, indem Zähler und Nenner des Bruches mit 25 multiplicirt sind. Für $\sqrt{3125}$ ist dann der um etwas zu grosse Werth 56 gesetzt worden, wodurch näherungsweise $\sqrt{\frac{125}{4}} = 5\frac{3}{5}$ sich findet. Der zweite Werth ist in ähnlicher Weise dadurch entstanden, dass $\frac{125}{4}$ mit 121 erweitert wurde. Die $\sqrt{15125}$ ist dann gleich 123, um eine Kleinigkeit zu gross, angenommen, und daraus für $\sqrt{\frac{125}{4}}$ der Werth $5\frac{13}{22}$ gewonnen, welcher zu $7\frac{1}{2}$ addirt $13\frac{1}{11}$ ergiebt. Hier hat der Verfasser das oben gegebene Versprechen, die Lösung *vicinius in millecuplo* zu geben, gehalten. Die Probe giebt einen noch nicht um 0,0016 zu kleinen Werth. 22 bis S. 67 Z. 12. Hier kommen wir mit einem Male in unbestimmte Aufgaben. Wie der Verfasser richtig die Aufgabe in Zahlen fasst, handelt es sich um die gleichzeitige Lösung der Gleichungen

$$43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31n + 17,$$

buere in viam eleosine quatuor ordinibus scilicet czeilen(!) pauperum. In primo ordine pauperum sunt 43 pauperes, in secundo sunt 39 pauperes, in tercio sunt 35 pauperes, in quarto sunt 31 pauperes. Primam bursam distribuit equaliter primo ordini,

---

und er weiss, dass es eine unbegrenzte Zahl verschiedener Lösungen giebt. Eine derselben 5458590 giebt er auch richtig an.

Dass hier eine Anwendung der ta yen Regel der Chinesen vorliegt, ist keinem Zweifel unterworfen. Wie Cantor, Vorlesungen I, 2. Aufl. 643—44 auseinandersetzt, ist die Aufgabe der Chinesen mit der Regel zu ihrer Auflösung, aber ohne Beweis, in einer griechischen Handschrift, die um das Jahr 1400 entstanden sein muss, aufgefunden worden. Ich will jetzt hier den Beweis führen, dass um die Mitte des 15. Jahrhunderts sie *mit ihrem Beweise* und ohne Benutzung des chinesischen Beispiels eine ganz bekannte Sache war.

In unserer Handschrift befindet sich Blatt 124′—125 ein schon von Gerhardt angegebenes Stück mit der Ueberschrift „*Divinare*“. Dieses enthält nun Folgendes:

|| *DIVINARE.*

Item ich wil wissen, wie vil pfenning in dem peutel oder im synn hast. Machs also. Hays yn dy d̄n, dy er hat, zelen mit 3, darnach *cum 5, postea cum 7,* vnd alz oft eins vber pleibt mit 3, so merck 70, vnd alz oft 1 vber pleibt mit 5, merk 21, vnd mit 7, merk 15. *Postea adde illos numeros in simul, et ab ista summa subtrahe radicem, hoc est multiplica 3 per 5 et 7, erit 105,* alz oft du magst, vnd wz do pleibt, alz vil hat er ym sinn oder in peutel.

Item das exempel get nit hoher, den alz verr dy radix wirt, daz ist auf 105, vnd man sol dar vber nit nemen.

Du fragst war vmb nymbt man 70 auf 3, vnd 21 auf 5 etca. Also mags. Wildu haben dy zal auf 3, so multiplicir 5 *per* 7, vnd was kompt, das dividir *per* 3, vnd *manet* 1 vͤber, so ist dy selb zal recht; pleibt aber mer vber dann 1, so duplir dy selben zal, vnd darnach dividir mit 3, vnd pleibt dan aber mer vber dann 1, so addir dyselben zal. daz thu alz lang, bis 1 vber pleibt. Desgleichen wiltu haben | dy zal auf 5, so multiplicir 3 per 7, wirt 21, daz dividir per 5, so pleibt 1 vber, dar vmb ist 21 recht auf 5, vnd wildu dy zal haben auf 7, *multiplica 3 per 5, erit 15; illud divide per 7, manet in residuo 1, ideo 15 est verus numerus super 7,* dezglichen dy andern:

70	21	15	15	10	6	40	45	36	28	21	36	21	28	36	63	36	28
3	5	7	2	3	5	3	4	5	3	4	7	2	3	7	2	7	9
	105			30			60			84			42			126	

128	175	120	216	225	280	1144	936	1782
5	6	7	5	8	9	9	11	13
	210			360			1287	

Hier ist also die reine Regel ohne jede Anwendung auf eine specielle Zahl gegeben; es ist gezeigt, dass es nicht nur diesen einen Weg des Errathens der Zahl giebt, und es ist jedem der Weg gewiesen, auf welchem er für jede beliebige Combination von drei Zahlen sowohl die Hülfszahlen als die Radices finden kann. Eine ziemliche Zahl berechneter Regeln sind beigegeben. Unser Verfasser muss, in fine tamen remanent sibi 41, ita quod ad complendum ordinem deficiunt sibi 2 denarii. Secundam bursam distribuit equaliter secundo ordini, in fine tamen non potest complere, sed habet in residuo 33, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 6 denarii.

---

das wird mir jeder zugeben, einen völlig klaren Einblick in das Problem gehabt haben, sonst würde er sich mit der einfachen Wiedergabe des bekannten chinesischen Beispieles begnügt haben.

Es ist aber noch eine zweite Stelle in der Handschrift vorhanden, an welcher einzig und allein so vorgegangen wird, wie ich von jemandem es angenommen habe, der kein Verständnis für das Wesen des Problems besitzt. Sie befindet sich auf Blatt 38′—39 und lautet:

| Item. Nym fur dich ein zal wy vil du wilt, dy wil ich vinden mit raytung. 38
Ich nym fur mich 17. *Divide primo per 3 et manent 2, illa duo multiplica per 70, erit 140. Secundo divide per 5, et manent duo. Illa 2 per 21 multiplica, erit 42. Tercio divide per 7, manent 3; illa 3 multiplica per 15, erit 45. Illa omnia adde simul, scilicet 140, 42, 45, facit 227. Nunc considera bene, quando summa plus est quam 106, tunc debes subtrahere 210; illa est prima regula posicionis vera; et iterum considera bene quando minus esset summa quam 106, tunc debes subtrahere 105; ista est secunda regula posicionis, et dicitur regula falsa.* | Und mit der regel 3
posicionis vera et falsa mag man vinden mancherlay raytung.

$$\begin{array}{l} 70 \cdot 21 \cdot 15 \cdot \\ 3 \cdot \ \ 4 \cdot \ \ 5 \cdot \end{array} > 105 \text{ vel } 210.$$

Dass derjenige, welcher dieses verfasst hat, keinen klaren Begriff dessen hatte, was er beschrieb, ist offenbar. Die Thatsache jedoch, dass ein ganz anderer wenigstens die Regel kennt, wie sie von den Chinesen aufgestellt und für die zu findende Zahl 39 auseinandergesetzt war, zeigt, dass sie weiter bekannt gewesen sein muss.

Ein weiterer Beweis ist der, dass Regiomontanus in seinen Briefen Aufgaben stellt, welche ebenfalls durch die Ta yen Regel gelöst sein dürften. Bei Cantor, Vorlesungen II, 262—263 sind die beiden Aufgaben desselben mitgetheilt:

$$17x + 15 = 13y + 11 = 10z + 3,$$
$$23x + 12 = 17y + \ 7 = 10z + 3;$$

und Bianchini giebt für die erste die beiden Lösungen 1103 und 3313. Dass sowohl Regiomontan als Bianchini ihre Lösungen nach Art der Ta yen Regel gefunden haben, ist mehr als wahrscheinlich. Nach Art des ersten Verfassers würden die Schemata für die Lösung so aussehen:

$$\begin{array}{ccc} 1820 \cdot 170 \cdot 221 & & 3060 \cdot 460 \cdot 391 \\ 17 \ \cdot \ 13 \ \cdot \ 10 & \text{und} & 23 \ \cdot \ 17 \ \cdot \ 10 \\ 2210 & & 3910 \end{array}$$

und nach der Ta yen Regel würde man für die erste zu berechnen haben:

$$15 \cdot 1820 + 11 \cdot 170 + 3 \cdot 221 = 27300 + 1870 + 663 = 29833.$$

Die Division durch 2210 giebt den Rest 1103 und die allgemeine Lösung ist $t = 1103 + 2210n$.

Terciam bursam distribuit equaliter tercio ordini, in fine tamen remanent sibi 25, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 10 denarii. Quartam bursam distribuit quarto ordini equaliter, in fine tamen est residuum 17 denarionum, sicque ei 14 denarii deficiunt ad complendum ordinem. Queritur nunc, quot fuerunt denarii in una bursa?

In summa questio habet hoc: Invenias unum numerum, qui dum dividitur
per 43, post integra quocientis manent in residuo 41; item dum diuiditur
per 39, manent in residuo 33; item dum diuiditur per 35, manent in
53 residuo | 25; item dum diuiditur per 31, in residuo manent 17. licet autem
non sit solum unus numerus, qui talis est, verum infiniti sunt signabiles. 5458590.

Für die zweite Aufgabe hätte man zu finden:

$$12 \cdot 3060 + 7 \cdot 460 + 3 \cdot 391 = 36720 + 3220 + 1173 = 41113.$$

Die Division durch 3910 giebt den Rest 2013 und die allgemeine Lösung $t = 2013 + 3910n$.

Gehen wir nun an das uns hier vorliegende Problem mit 4 Gleichheiten über. Es soll also das System aufgelöst werden

$$43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31n + 17.$$

Wir gehen genau so vor, wie es bei drei Gleichungen gelehrt ist, dann erhalten wir das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} 1227135 & \cdot & 1492960 & \cdot & 155961 & \cdot & 763035 \\ 43 & \cdot & 39 & \cdot & 35 & \cdot & 31 \\ & & & 1819545. & & & \end{array}$$

Dann heisst die Ta yen Regel: Für 1 durch 43 gewonnen setze 1227135; für 1 durch 39 gewonnen setze 1492960; für 1 durch 35 gewonnen setze 155961; für 1 durch 31 gewonnen setze 763035, addire die Producte und dividire die Summe durch 1819545, der Rest der Division ist die gesuchte Zahl.

Es ist

$$\begin{array}{r} 41 \cdot 1227135 = 50312535 \\ 33 \cdot 1492960 = 49267680 \\ 25 \cdot 155961 = 3899025 \\ 17 \cdot 763035 = 12971595 \\ \hline \end{array}$$

die Summe also gleich 116450835, und der Rest der Division durch 1819545 giebt 1819500, die allgemeine Lösung ist daher $1819500 + 1819545n$. Für $n = 2$ ergiebt sich der von dem Verfasser angegebene Werth 5458590.

Dass wir berechtigt sind, die Auflösung als in dieser Weise erfolgt anzunehmen, ergiebt sich daraus, dass spätere Rechenlehrer wie Rudolf, Koebel und Simon Jacob die Erweiterung auf 4 gleichzeitige Gleichungen lehren, ohne jedoch anzugeben, wie sie die für bestimmte Zahlen mitgetheilten Hülfszahlen gefunden haben.

Ob bei allen obigen Untersuchungen Entlehnung aus China als sicher anzunehmen ist, möchte ich doch bezweifeln. Jedenfalls ist die Darstellung des

VI.

De regulis per algebram etc., ut supra dictum est.

Circa primam regulam. Quidam habuit laboratores et pecunias. si cuilibet laboratori dedit 5, habundat in 30; si vero daret cuilibet 7, deficiet in 30. Queritur, quot sunt laboratores.

Sit numerus istorum 1 ꝛ, et fiunt primo 5 ꝛ et 30, fiet secundo 7 ꝛ minus 30 equande 5 ꝛ et 30

2 ꝛ equande 60, venit ꝛ 30.

Circa secundam. Quidam conventus est ad laborandum per 28 dies. die laboris 5 habet, die vacacionis restituet 3; in fine nullum lucrum habuit. quot dies laboravit?

Sunt hic 1 ꝛ	erunt 5 ꝛ
28 minus 1 ꝛ	erunt 84 minus 3 ꝛ equande 5 ꝛ

84 equande 8 ꝛ, proveniet $10\frac{1}{2}$ pro 1 ꝛ.

Sed stante, cum ponatur, quod retinebit 4, tunc remoue de 84 minus 3 ꝛ 4, que equande, ut supra.

Circa terciam. Quidam dixit si haberem adhuc tot et $\frac{1}{2}$ eius, quod habeo, et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ et 1, haberem 191.

Habuit 1 ꝛ | 2 ꝛ | 3 ꝛ $\frac{1}{12}$ ꝛ et 1 equande 191.

3 ꝛ $\frac{1}{12}$ equande 190, proveniet 1 ꝛ $61\frac{23}{27}$,

2 ꝛ $61\frac{23}{27}$,

$\frac{1}{2}$ ꝛ $30\frac{30}{37}$,

$\frac{1}{3}$ ꝛ $20\frac{20}{37}$,

$\frac{1}{4}$ ꝛ $15\frac{15}{37}$.

1

---

deutschen Verfassers absolut klar, und muss von jedem auch ihre Begründung verstanden werden.

Am Schlusse dieser schon überhaupt etwas langen Anmerkung möchte ich noch darauf hinweisen, dass die erste Aufgabe des Regiomontan, welche verlangt $x + y + z = 240$; $97x + 56y + 3z = 16047$ in ganzen Zahlen zu lösen, ganz derjenigen analog ist, welche Seite 48, Zeile 24—29 abgehandelt ist, und für welche zwei Lösungen angegeben sind. Dass man auf diese Art der Aufgaben durch die *Regula coeci* geführt ist, dürfte wohl von selbst einleuchten.

1 u. ff. Für die folgenden unter dem Titel „*De regulis per algebram*“ zusammengestellten Aufgaben über Gleichungen des ersten Grades, denn nur solche werden betrachtet, ist die wirkliche gleichungsmässige Anordnung der Lösung besonders hervorzuheben. Es wäre nur nöthig, ihre Zeichen durch die jetzt gebräuchlichen zu ersetzen, um ganz moderne Bilder zu erhalten.

4 | *Circa quartam.* Quidam habet 60 mensuras, dat theolenario 2 mensuras et recipit 2 ß. Alter habet 120 mensuras, dat 2 mensuras et 5 solidas, queritur de valore mensure.

Valor sit 1 ꝶ | 2 ꝶ minus 2 ₰ vel ß

Alter 2 ꝶ 5 sol. vel ₰. hoc debet equari duplo primi

4 ꝶ minus 4 | 2 ꝶ 5

2 ꝶ equande 9

proveniet 1 ꝶ $4\frac{1}{2}$.

Circa quintam regulam siue questionem. Quidam habet pecunias. petit a socio suo 1 ₰, et erit ei equalis. Alter petit 1, et erit ei duplus.

Ponatur, quod totum hoc, quod habent sit 1 ꝶ. Primus igitur habet $\frac{1}{2}$ ꝶ minus 1 ₰, et secundus habet $\frac{1}{2}$ ꝶ et 1 ₰. Si igitur primus daret 1 ₰ secundo, primus haberet $\frac{1}{2}$ ꝶ minus 2, et secundus haberet $\frac{1}{2}$ ꝶ et 2, que deberent equari duplo primi, quod est 1 ꝶ minus 4

1 ꝶ minus 4 equatur $\frac{1}{2}$ ꝶ et 2

$\frac{1}{2}$ ꝶ equanda 6, proveniet ergo ꝶ 12.

Primus igitur habet 5, secundus 7.

Ad idem. *a, b, c.* *A* petit 1 de *b,* eritque ei equalis; *b* petit de *c* 1, eritque duplus ipsi *c*; *c* petit de *a* 1, eritque ei, scilicet *a*, triplus.

Ponatur, quod primus habet 1 ꝶ, oportet ergo, quod secundus habet 1 ꝶ et 2, oportet eciam, quod tercius habet $\frac{1}{2}$ ꝶ et $2\frac{1}{2}$. Qui si primo daret 1, haberet $\frac{1}{2}$ ꝶ et $3\frac{1}{2}$ tercius, et primus retineret 1 ꝶ minus 1, cuius triplo, scilicet 3 ꝶ minus 3, debet equari

3 ꝶ minus 3 | $\frac{1}{2}$ ꝶ $3\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{2}$ ꝶ | $6\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}$ ꝶ equande $\frac{13}{2}$

provenit 1 ꝶ $2\frac{3}{5}$ primus,

habet secundus $4\frac{3}{5}$

tercius $3\frac{4}{5}$.

4' | *Ad idem.* A petit de *b* 1, et erunt equales; petit *b* de *a* 1, et erit ei millecuplus.

1—8. Eine ähnliche Aufgabe ist oben bei der *regula falsi* behandelt worden. (Seite 42, *Quarta questio.*) 32 bis S. 70, Z. 6. Auf diese Lösung der Aufgabe haben wir schon oben hingewiesen. (Seite 43, *Quinta questio.*)

Ponatur, quod A habet 1 ꝛe, ergo b habet eciam 1 ꝛe et 2 ʒ

1 ꝛe minus 1 | 1 ꝛe et 3

100 ꝛe minus 1000 equande 1 ꝛe et 3

999 ꝛe | 1003.

Pro A igitur est 1 ꝛe $1\frac{4}{999}$

pro b $3\frac{4}{999}$.

Circa sextam regulam. Quidam habet pannos 3 emptos 100 solidis, secundus in duplo et 5 sol., et tercius in triplo ad ambobus et 5 sol.

Valor primi 1 ꝛe | 2 ꝛe 5 sol. | 9 ꝛe 20 sol.

12 ꝛe 25 sol. equande 100 sol. | 12 ꝛe equantur 75

una res $6\frac{1}{4}$ primus | secundus $17\frac{1}{2}$ | tercius 76 ß $\frac{1}{4}$.

Circa septimam regulam. A petit de b $\frac{1}{2}$, et habebit a 100; b de c $\frac{1}{3}$, et habebit 100; c de a $\frac{1}{4}$ et habebit 100. queritur de a, quantum habet et de b et de c.

1 ꝛe pro omnibus.

VII.

Item una regula super primum capitulum delacose.

Item sint 3 socii, volunt emere equum pro 100 fl. dicit primus ad secundum, haberem $\frac{1}{2}$ de tuis fl ad meos fl, tunc ego solverem equum pro 100 fl; dicit secundus ad tercium, haberem $\frac{1}{3}$ de tua pecunia ad meam, tunc ego solverem equum pro 100 fl; dicit tercius ad primum, haberem $\frac{1}{4}$ etc[a]. Queritur, quot quilibet habet secum pecunie.

Recipiam, quod primus habet 1 ding, tunc oportet secundus habere 200 minus 2 ding. Nunc vide, quot tertius oportet habere, wann er $\frac{1}{3}$ seins gelcz dem ander gibt, vnd daz dem andern 100 fl pleiben, so musz der drit 6 ding minner 300 haben. $\frac{1}{3}$ von 6 ∂ minner 300 ist 2 ding minner 100. Gib dem andren der hat 200 minder 2 ∂, so pleibt im 100. Nu spricht der drit zu dem ersten, het $\frac{1}{4}$ deins gelcz, so kauft ich daz

13—16. Die Lösung dieser Aufgabe kommt in der folgenden Abhandlung ausführlich zur Darstellung. 17 u. ff. Hier kommt wieder die Sprachmengerei zum Vorschein, welche eine Eigenthümlichkeit derjenigen Theile unserer Handschrift ist, welche den Frater Fridericus selbst zum Verfasser zu haben scheinen. Das erste Beispiel ist mit dem vorhergehenden identisch.

pferd pro 100 fl. Nu nym $\frac{1}{4}$ von dem ersten, der hat 1 ∂, daz wår $\frac{1}{4}$ ∂ dem dritten, so her nu $6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300, vnd daz ist 100 gleich, wann er auch sol 100 fl haben. Nu mach ein yeden tail gleich, gib 300 wider czw, der minner hat, pleibt $6\frac{1}{4}$ ∂. Nu gib auch czw dem andern tail 300, macht 400, daz ist gleich $6\frac{1}{4}$ ∂. Nu tail 400 in $6\frac{1}{4}$ ∂, kumpt 64, vnd alz vil ist daz ding wert. Der erst 1 ∂, so hat er 64 fl, der ander 72 fl, der drit 84 fl. Nu merck war vmb der ander 72 hab vnd der drit 84. Wann dem andern haben wir geseczt, daz er hab 200 mynner derselben
5' 2 ∂. 1 ∂ ist 64, alz der erst hat, | so ist 2 ding 2 mol 64, daz wår 128. zeuch ab 128 von 200, pleibt 72, vnd also sol der ander 72 haben. Nu het der drit 6 ∂ minner 300. 6 ∂ ist 6 mal 64, daz macht 384. zeuch ab 300, nun so pleibt ym 84 fl.

Der erst 1 ding	
der ander 200 minner 2 ∂	$6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300
der drit 6 ∂ minner 300	gelich dem 100
$6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300	$6\frac{1}{4}$ ∂ gelich 400.

Vis tu probare, proba sic. der erst der $\frac{1}{2}$ des gelcz des andern hat. Nu nym $\frac{1}{2}$ de 72 fl, quod habet secundus, hoc est 36. adde 36 ad 64, quod primus habet, tunc erit 100 fl. Nunc dicit secundus ad tercium, haberem $\frac{1}{3}$ tue pecunie ad meam, tunc haberem 100 fl. Accipe $\frac{1}{3}$ de 84, quod tercius habet, hoc est 28, ad pecuniam, quod habet secundus, id est 72 et 28, et est eciam 100. Nunc tercius postulat $\frac{1}{4}$ de primo socio, ideo accipe $\frac{1}{4}$ de pecunia primi socii, hoc est 64, hoc est 16, et illud adde ad 84, productum est eciam 100 fl.

Iterum una regula de primo capitulo lacose.

Item sunt 3 socii. illi habent pecuniam. dicit primus ad alios duos, haberem ego 7 fl de vestris, tunc ego haberem in triplo tantum sicut vos; dicit secundus haberem 9 fl etc[a], tunc in quadruplo plus haberem; dicit tercius, haberem 11 fl etc[a], tunc in quintuplo plus etc[a]. Nunc quero, in quantum unus habuit.

Fac sic, sit quot isti tres socii habent 1 ∂. Nu spricht der erst, het ich 7 fl eurs gelcz, so het ich 3 mal mer dann ir ped, darvmb sprich daz der erst hat $\frac{3}{4}$ ∂ minner 7. Wann alle 3 haben ain ding, so het der

2. Hier hat *wann* ebenfalls die Bedeutung *weil*, wie in der Gerhardtschen Algebra. 25 u. ff. Siehe oben Seite 58: *De capitulo primo.*

erst, wann er 7 mer het, so het er 3 mal mer, darvmb secz ich daz er hab $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7. Der ander spricht, hiet ich 9, so hiet ich 4 mal mer dan ir paid, dar vmb secz ich, daz der ander hab $\frac{4}{5}$ mynner 9. So spricht der dritt, het 11, so het ich 5 mal mer dann ir paid, dar vmb sprech ich, daz der drit hab $\frac{5}{6}$ mynner 11. Dar vmb secz also: der erst hat $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7, der ander $\frac{4}{5}$ ∂ mynner 9, der drit $\frac{5}{6}$ ∂ mynner 11. Nu sumirs zu sam allz, daz trift 2 ∂ $\frac{23}{60}$ mynner 27, daz ist 1 ding gleich, daz all drey haben vor gehabt. Nu gib 27 dem, der mynner hat, so pleibt 2 ∂ $\frac{23}{60}$; gib dem andern auch 27, so pleibt 1 ∂ mer 27 gleich 2 ∂ $\frac{23}{60}$. zeuch ab 1 ∂ von 2 ∂ $\frac{23}{60}$, so pleibt 1 ∂ $\frac{23}{60}$, zu dem andern tail pleibt 27. Nu tail 27 in 1 ∂ $\frac{23}{60}$, kumpt $19\frac{43}{83}$, vnd alz vil ist daz ding werd (!), alz vil haben sy alle drey mit ein andern $19\frac{43}{83}$. Nu wart, waz iglicher pesunder hat. $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7 von $19\frac{43}{83}$ pleibt $7\frac{13}{83}$, vnd alz vil sol der erst haben. Nu nym $\frac{4}{5}$ ∂ mynner 9 de $19\frac{43}{83}$, so trift $6\frac{51}{83}$, vnd so vil sol der ander haben. Dar nach nym $\frac{5}{6}$ ∂ mynner 11 de $19\frac{43}{83}$, so pleibt $5\frac{23}{83}$, in tantum tercius habet.

1 ∂ $\frac{23}{60}$ · 27	1 ∂ $\frac{3}{4}$ mynner 7	$\frac{5}{6}$ mynner 11
gleich 1 ∂ $19\frac{43}{83}$	$\frac{4}{5}$ mynner 9	2 ∂ $\frac{23}{60}$.

| *Regula delacose super quartum capitulum.*

Item tres socii dy habent geseczt vnter in 370 fl vnd haben gebunnen 20 fl. Dem ersten trift mer hauptgut vnd gewin 5 fl, dem andern 25 β, tercio 50 fl. Primus stat 4 menses, secundus 3, tercius 2: in quantum fuit capitalis summa?

Fac sic. Nym, daz daz erst hauptgut sey gewesen 1 ∂; dem andern 1 zall, daz pillig sey, nem wir 20, oder waz du wilt; dem driten 50 mynner 1 ∂. Multiplicir 4 man. 4 mal 1 ∂ macht 4 ∂, vnd 2 mal 20 des andern macht 40, vnd 2 mal der trit, hat 50 minder 1 ∂, macht 100 mynner 2 ∂. Nu sumirs zu sam, macht 140 · 2 ∂. Nu sprich 140 · 2 ∂ gibt in 20 fl gewinsz was gibt mir 48. Der erst spricht 4 mal 20 ist 80, tails in 140 · 2 dingen, kumpt $\frac{80}{140 \cdot 2\,\partial}$ gewincz, tůs zu sammen zu dem hauptgut, daz waz 1 ding. Multiplicir in kreucz, kummen 220 · 2 censy, daz sol man tailen in dy ander vnter figur, vnd sol 15 kummen. darvmb multiplicir 15 mal 140 · 2 ∂, macht 2100 · 30 ∂, dar von an paiden taillen, so pleibt 190 ∂ vnd 2 censy dem andern 2100 zall. daz ist daz

4 capitel sprechent. so kummet radix von $3306\frac{1}{4}$ mynner $47\frac{1}{2}$, alz vil ist daz hauptgut des ersten, daz ist 10, dez andern 20, des drit 40 etc[a].

1 ∂ 4 · 1 ∂	4	2100
nym 20	40	190 ∂
		15 cosa
2 50 mynner 1 ∂	100 mynner 2 ∂	2100 cense.

| *Proba cose forte de poma.*

Mach mir dy rechnung, dy gat auch *per la cosa e la molte agraus.* Es sind 2 gesellen, dy haben opfel, vnd hat yglicher 56 ℔. Nu sollen sy dy opfel verkauffen, also wann der 1 gibt 4 ℔ vmb 1 ß, so sol der ander 5 ℔ geben, vnd daz der ein albeg 1 ℔ mer gib denn der ander vmb 1 ß, vnd daz sy al paid nit mer lŏsen ausz den opfel, den 20 ß. Nu frag ich, wye vil ichlicher opfel vmb 1 ß hab geben.

VIII.

5[ta] *regula.* Item 1 z 27 numero ist gleich 12 cosa
z^0 vnd 6 numero ist gleich 5 cosa
6[ta] *regula.* Item 1 z ist gleich 6 numero 5 cosa.

IX.

Item 2 z 10 co gleich numero 28.
Item 2 z 3 co gleich 14 numero.
Item nym cosa $\frac{16}{4}$· ist 1 z 4 co ist gleich 32 numero.
Item nym cosa $\frac{25}{5}$· ist 1 z 1 co gleich 30 numero.

---

7 u. ff. Verkauft der erste x ℔ für $1ß$, so muss der zweite $(x+1)$ ℔ für $1ß$ verkaufen, es muss also

$$\frac{56}{x} + \frac{56}{x+1} = 20 \text{ sein.}$$

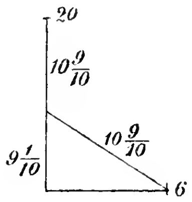
14—22. Diese beiden Aufgaben gehören der angewendeten Bezeichnung nach zu den *Regule delacosa,* ebenso wie die auf Blatt 504 niedergeschriebenen. In moderner Bezeichnung würden sie heissen:

$$x^2+27=12x;\ x^2+6=5x;$$
$$x^2=5x+6;$$
$$2x^2+10x=28;$$
$$2x^2+3x=14;$$
$$x^2+4x=32;\ x^2+x=30.$$

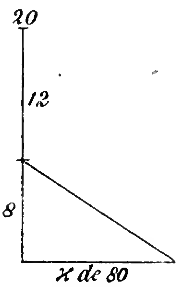
X.

Nota. Arbor 20 pedum iuxta aquam 6 pedum, queritur, in qua parte frangatur, ut summitas eius extremitati aque iungatur.

Illa pars est 1 ꝛe, alia scilicet remanens est 20 minus 1 ꝛe. Dico, quod illa pars multiplicata in se producitur census equalis huic, quod aggregatur ex duobus censibus iunctis, quorum unus erit ex 20 minus 1 ꝛe, et altera ex 6, scilicet 36. 1 ꝛe fit 1 census; 20 minus 1 ꝛe in se sunt 1 census 400 minus 40 ꝛe; 6 in se sunt 36. et sunt 1 census 436 minus 40 ꝛe. $10\frac{9}{10}$ est una pars vel 1 ꝛe; $9\frac{1}{10}$ est altera pars, scilicet inferior.



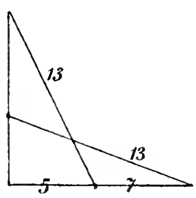
Item arbor 20 pedum frangitur in 8 pedibus a radice; queritur, ad quod se extendit a basi.



Multiplica partem distentam, scilicet 12, in se, erit 144; similiter residuum, scilicet 8, in se, erit 64, que minue ex 144, et restant 80, unus census, cuius ꝛe est quesitum.

Item scala 20 pedum iuxta aquam latitudinis 10 pedum producitur ad murum iuxta aquam: queritur, ad quantam altitudinem se extendit.

Multiplica quodlibet in se, minus a maiore aufferatur, et remanet census, cuius res est quesitum.



Nota scala 13 pedum distans a muro per 5 adhuc retrahitur per 7 pedes, ut sit elongata a basi per 12: queritur, quot descendit in muro.

Primo scias altitudinem muri per precedentem; erit enim 12. Iterum secundo scito altitudine muri etcª.

1—26. In diesen Aufgaben ist die Benutzung des Zeichens ꝛe als Wurzelzeichen recht sehr hervorzuheben.

DIE HANDSCHRIFT No. 14836

DER

KÖNIGL. HOF- UND STAATSBIBLIOTHEK ZU MÜNCHEN.

VON

MAXIMILIAN CURTZE.

Vor einiger Zeit hat Herr Dr. Wappler in Zwickau durch seinen Aufsatz „Bemerkungen zur Rythmomachie"[1]) die Aufmerksamkeit auf den *Codex latinus Monacensis 14836* hingelenkt, und eine Reihe darin befindlicher Schriften ihren Verfassern zutheilen können, auch zwei derselben, die Abhandlung Hermanns des Lahmen und die des Asilo über die Rythmomachie, in diplomatisch treuem Abdruck veröffentlicht. Durch andere Untersuchungen auf dieselbe Handschrift aufmerksam geworden, liess ich mir dieselbe kommen, und will nun mir im Nachfolgenden erlauben, den reichen Inhalt der wichtigen Handschrift bekannt zu geben, welche viel mehr Sachen enthält, als der Handschriftenkatalog der Münchner Bibliothek verzeichnet.[2])

Wie schon gesagt, befindet sich die fragliche Handschrift in der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München unter der Nummer 14 836. Sie gehörte früher dem Kloster St. Emmeram zu Regensburg, und hatte dort die Bezeichnung „*k. 6*". Sie besteht aus 160 Pergamentblättern von je 137 mm Höhe und 107 mm Breite. Dieselben sind auf den Vorderseiten von 1—160 foliiert und mit einem Vor- und einem Nachblatt, beide ebenfalls in Pergament, zusammen in einen mit Leder überzogenen Holzdeckel gebunden. Die Gesamtzahl der vorhandenen Blätter beträgt also 162. Es ist noch zu bemerken, dass zwischen den mit 17 und 18 bezeichneten Blättern ein ein Doppelblatt, jedoch von kleinerer Dimension als die übrigen, füllendes Sternverzeichnis mit eingeheftet ist. Die einzelnen zusammengehörigen Blattlagen sind auf doppelte Weise bezeichnet. Jedes erste Blatt einer solchen trägt in der rechten untern Ecke in arabischen Ziffern die Nummer der betreffenden Lage, während auf dem letzten Blatte jedes Päckchens in der Mitte des untern Randes in römischer Bezeichnung die Nummer desselben angegeben ist. Da diese letztere Bezeichnung der Blattlagen nur bis zur siebenten mit der erstern übereinstimmt, so ist klar, dass beim Einbinden nicht die römische, sondern die arabische Bezeichnung die massgebende gewesen ist. Letztere geht bis 23.[3]) Die Ziffern haben die Form

1 2 3 ϱ ɥ 6 ʌ 8 9 0.

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 37. Band, Historisch-literarische Abtheilung S. 1—17. 2) *Catalogus Codicum Manuscriptorum Bibliothecae Regiae Monacensis Tomi IV. Pars II. Codices latinos continens.* Monachii A. M.D.CCC.LXXVI, S. 240—241. 3) Die einzelnen Lagen bestehen je aus folgender Blattzahl: 8, 6, 6, 8, 8, 5, 5, 6, 7, 8, 2, 6, 10, 6, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 8.

Die Handschrift ist, mit Ausnahme des auf der Vorderseite des Vorblattes befindlichen Inhaltsverzeichnisses, von Händen des XI. Jahrhunderts geschrieben. Das Inhaltsverzeichnis ist aus späterer, jedoch immerhin noch alter Zeit und hat folgenden Wortlaut.

1) *„Cilindrus*
„Rythmomachine (!) siue pugna numerorum
„ac scacus mathematicus Wirzibergeñ
„Commentum in rationem (?) Boethii
„Herimani Astrolabium
„Geometria Gerberti
„Ludus laterculorum siue scacus
„Coniunctio numerorum Wircebergensium
„Geometrica Musica
„Mensura limitum
„Pondera mensure
„Astrologica Musica
„Adelpoldi Geometrica
„Pondera mensure rursus
„Astrolabium.“

2) Auf Blatt 1 beginnt eine Abhandlung, welche von der Hand, die das Inhaltsverzeichniss schrieb, betitelt ist: *„Cylindrus“*. Die Anfangsworte sind *„Componitur quoddam simplex et paruulum uiatoribus horologicum instrumentum“*. Der Schluss ist auf Blatt 3: *„sique in cuique hore fine ą punctis ad puncta obliquas lineas in uidelicet incrementa et detrimenta (!) dierum postulant deducendo totius horologii huius mensuram consumabo.“* Es soll ein Fragment aus Hermann des Lahmen Schrift *de utilitatibus astrolabii* sein.[1]) Ich habe es nicht verificieren können, da mir der Pez'sche Thesaurus nicht zur Disposition steht.

3) Auf Blatt 3^{v} bis 4^{v},13 ist dann die Schrift Hermanns *„De conflictu rithmimachię“* und

4) Blatt 4^{v},14—6^{v},15 des Asilo Werk *„de Rithmomachia“* enthalten, welche, wie schon Anfangs gesagt, Wappler veröffentlicht hat.

5) Von Blatt 6^{v},15—10^{v},7 findet sich Hermanns des Lahmen *Tractatus de diuisione,* welchen nach unserer Handschrift im Verein mit Nr. 14 689 der Münchner Bibliothek Treutlein im X. Bande des *Bullettino Boncompagni* veröffentlicht hat.[2])

1) Nach dem Handschriftenverzeichniss aus dem ersten Capitel des zweiten Buches. Das betreffende Stück findet sich übrigens häufiger als selbständige Abhandlung in den verschiedensten Bibliotheken. 2) *A. a. O.,* S. 644—647.

6) Blatt 10^v,8—16^r enthält einen Commentar *in Boethii librum de consolatione philosophiae*, so der gedruckte Katalog, in der Handschrift überhaupt ohne Titel. Anfang: „*O qui perpetua mundum ratione gubernas*“ Schluss: „*ante missas declamare. Sic enim probatum est.*“ Auf Blatt 15^v,9 steht die Anrede: „*ad te, Amatissime frater G.*“

7) Es folgt: „*Herimani Astrolabium*“, so von der Hand bezeichnet, welche das Inhaltsverzeichniss geschrieben hat, und zwar Blatt 16^v—24^r. Anfang: „*Christi pauperum peripsima*“. Schluss: „*et ingenium in huiusmodi rerum usu exercitanti alias debet notificare.*“ Auch hier muss ich, da, wie schon gesagt, der Thesaurus von Pez mir nicht zugänglich, eine Vergleichung des gedruckten und handschriftlichen Textes unterlassen.

8) Blatt 24^v—40^v,14 und Blatt 45^r—75^v: *Geometria Gerberti.* Als Ueberschrift von späterer Hand, der des Inhaltsverzeichnisses, steht nur über den beiden ersten Seiten „*Geometria*“. Von zwei verschiedenen Händen geschrieben. Ich gebe im Folgenden die von der Ausgabe von Olleris[1]) abweichenden Lesarten an, werde aber da, wo es mir nöthig zu sein scheint, einen völlig neuen Abdruck dieses wichtigen Buches veranstalten. Zunächst fehlt, für den Prolog und die ersten 13 Capitel wenigstens, jede Ueberschrift, was ich des weitern nicht ferner erwähnen werde. Sie sind nur durch Absätze und grössere Anfangsbuchstaben kenntlich gemacht. Also zunächst Collationierung des Druckes mit der Handschrift.[2])

401. 3. *quattuor.* — 7. *nostra.* — 8. *quia indoctos doceo* fehlt. — 11—12. *eluvionem Nili fluminis.* — 14. *a continenti; terrenae dimensionis.* — 18. *terminum diffinitionis.* — 19. *Geometrica.* — 21. *Geometrica; rationabilium* statt *mensurabilium vel ad mensurandum.* — 22. *probabiliter.*

402. 5. *et* hinter *numero* fehlt. — 8—9. *collecturi.* — 10. *quos terminos.* — 11. fehlt.

403. 7. *cum ipse Boethius.* — 8. *litteraturae tractatores.* — 9. *beatissimus.* — 11. *copiosissime*; *etiam mentio oculum.* — 12. *multis* fehlt. — 13—14. *prudentioribus.* — 15. *tamen* fehlt. — 16. *temptabo.* — 19. *tactuque.* — 21. *finis* fehlt. — 22. *ephiphaniae.* — 23. *se contenta.* — 24. *dilatet; adiecis.* — 25. *corpus solidum.* —

1) *Œuvres de Gerbert Pape sous le nom de Sylvestre II collationées sur les manuscrits etc. par* A. Olleris. Clermont-F^d et Paris 1867, S. 401—470. 2) Ich bemerke hier ein für alle Mal, dass überall, auch wo ich *v* geschrieben habe, in der Handschrift *u* sich findet, mit Ausnahme der grossen Buchstaben, wo stets *V* steht, auch da, wo nach jetzigem Gebrauche *U* zu erwarten war. Ich wollte dadurch den unnützen Varianten gegen den Olleris'schen Text aus dem Wege gehen. Ebenso bemerke ich noch, dass die Handschrift immer *spera* statt *sphaera* liest, und allgemein das *ae* entweder durch ein einfaches *e* oder das bekannte Compendium *ę* ausgedrückt ist.

404. 5. *coartat; in ea.* — 8. *symion.* — 12. Hinter *Haec* fügt die Handschrift hinzu: *vero et longitudine et latitudine passim se praebens secabilem solam, quae fit in crassitudine, respuit sectionem. Sed haec, videlicet punctum linea.*[1]) — 18—19. *alias sufficientius de talibus.* — 20. *Itaque iusta praedictas.* — 21. *metienda* fehlt. — 22. *vel certe.* — 23. *geometricis vocitatur.* — 24. *quaeritur* fehlt. — 25. *aedificiorumve.* — 26. *posita.* — 29. *quae etiam constrata planave.*

405. 1. *ut in.* — 3. *nuncupatur.* — 5. *lineas longitudinemve.* — 6. *altitudine latitudineve.* — 6—7. *Constratus sive planus est.* — 7. *seu planities, sive.* — 8. *longitudine latitudineque.* — 10. *altitudineque; distensus.* — 11. *vel tesserae; quae in.* — 12. *intellegi.* — 14. *figuratim.* — 16. *distinguuntur.* — 17. *sciendum vero.* — 18. *item et.* — 28. *invenies hoc modo.* — 30. *eius altitudinem.*

406. 2. *poterit* fehlt; *in plano poterit scribi.*[2]) — 4. *solidos palmos.* — 5. *observetur.* — 8. *usu.* — 9. *et* fehlt. — 11. *clyma.* — 12. *iuger vel* fehlt; *leuua (!).*[3]) — 15. *antiqui in agris metiendis.* — 16. *quatuor*
ati
hordei. — 19. *longitudine (!).* — 25. *Nam duodecies as et* SS XVI *sunt.* — 26. *autem* fehlt. — 27. *expansa.* — 29. *et* fehlt.

407. 3. *et tertiam eius.* — 5. *ei* fehlt. — 6. *etiam ei, ut constratus fiat, adicitur.* — 7. *idem in lato.* — 14. *pedes vero.* — 15. *dictus autem.* — 16—17. *sextas VII et* SS ist ausradiert. — 18—19. *maximus in itineri spatiis metiendis usus est.* — 19. *Dictus autem; patentibus tribus.* — 20. *quinque* fehlt; *etiam passi.* — 22. *sextas* XIII. — 23. *Dicta autem.* — 29. *et in longo.*

408. 3. *dicitur, et ipse agri.* — 4. *discriminans.* — 6. *constratos* fehlt. — 7. *sive iugo.* — 8. *a iungendo.* — 10. *pedes CXX.* — 16. *planitieique; circumscriptae.* — 17. *cunque* fehlt. — 20. *ut supra dictum est* fehlt. — 24. *est* fehlt. — 26. *et* fehlt; *et bissem* fehlt. — 27. *et* fehlt; *uncias* $\overline{VII}$ *D.*

409. 1. *Leuva.* — 3. *leuva.* — 4. *etiam apud nos Teutonicos.* — 9. *fiant.* — 12. *Leuva.* — 12—13. $\overline{MIICCC}$ *et* $\overline{LXXV}$. — 14. $\overline{MI}$ *milia, solidos* $\overline{Mi}$*lies mille milia. Stadium habet enim lineares passus CXXV, constratos* $\overline{XV}$. *DCXXV, solidos* $\overline{MDCCCCLIII}$ *CXXV.* — 16. *pedes V; CXXV.* — 18. *Cubitus autem; quadrantem* fehlt. — 19. *quadrantem* fehlt; *et sescuncem* fehlt. — 20. *digitos XVI; CCLVI.* — 25. *grana hordei.* — 26. *hactenus quidem; eorundemque.* — 27. *sed non superflue; si pluribus in.*[4])

---

1) Eine sehr wichtige Ergänzung des Textes. 2) Die Lesart bei Olleris *in palmo describi* giebt gar keinen Sinn. 3) Dass *leuva* die richtige Lesart ist, folgt schon aus dem französischen *lieue.* Auch in den *Gromatici Veteres ed.* Lachmann steht *leuua.* 4) Auch diese Lesart giebt erst einen guten Sinn.

410. 1. *prout.* — 1—2. *sive intellectuales.* — 2. *multimodis diuidere.* — 5—6. *mensuris includuntur iam deinceps speculandum videtur.* — 9. *figurae dicuntur.* — 12. *curvis* fehlt, doch ist Raum dafür gelassen. — 13. *elycoydes; campelas.*[1]) — 18. *seu planities; circumsepta.* — 19. *quod* bis *nuncupatur* fehlt. — 22. *quae quidem.* — 23. *paucula.* — 24. *prolibaverimus.* — 25. *figurae planae; lineis* fehlt. — 28. *sub duabus.* —

411. 1. *se invicem tangentibus continetur.* — 4. *facit ita.* — 6. *vice virtutis.* — 7. *nec minus iusto coartat.* — 9. *pleonesiae; indiffinitaque.* — 10—11. *lineae rectae.* — 12. *vero angulus.* — 13. *indiffinita; lineae defectum.* — 16. *appellari latine.* — 19. *recta linea.* — 20. *secatur.* — 23. *scribatur ita.* — 24. *si easdem tres.* — 25. *invicem sibi connexos.* — 27. *et singulis altrinsecus punctis.* — 28. *pernotabis hoc modo.* — 29. *alios duos connexueris, ut.* — 30. *hebetes, in altrinsecus.*

412. 1—2. *immune omnino.* — 5. *connexio componitur.* — 6. *vero* fehlt. — 10. *omnes tres.* — 10—11. *coactae punctum describuntur. liquide satis ostenditur hoc modo.* — 13. *ibi.* — 16. *efficit angulum.* — 20. *iacenti lineae rectae.* — 21. *ut et illam et invicem.* — 23. *occupant recti.* — 25. *rectae lineae; per alterutram.* — 26. *angulos efficiunt.* — 27—28. *aequales sunt.* — 29. *lineae rectae.* — 31. *dicuntur, tales scilicet.* —

413. 1. ad aliam. — 2. *eas tangit.* — 2—3. *exteriores, binosque interiores.* — 4. *Possunt.* — 5. *haec interim.* — 10. *vero* fehlt. — 11. *acutos omnes; duas vero.* — 12. *omnes vero.* — 13. *ut* fehlt. — 14. *satis liquebit formationibus.* — 20. *quod tres.* — 22. *atque idcirco, qui; lineis angulisque distensus; extensus vel* und *est* fehlen. — 24. *in angulatis exstat.* — 25. *eumdem rursus.* — 26. *exagonive.*

414. 1. *singulos angulos lineas rectas.* — 5. *dividuntur ut subiecti. Inde etiam.*[2]) — 7. *embadum a diligentibus.* — 18. *potest clarere.* — 15. *autem* fehlt; *habens angulum.* — 16. *acutos ita.* — 17. *nomen inclitum.* — 22. *identidem accepit vocabulum.* — 25. *Unde et ipse ab acuto, quod.* — 27. *facile quivis intellegere; etiam eorum.* — 29. *isosceles.* —

415. 1. *aequalibus omnibus.* — 2. *aequus.* — 3. *Isosceles est; latera habet; etiam quasi.* — 4. *isosceles; aequicrurium.* — 5. *sibi invicem inaequalia.* — 6. *transferatur.* — 7. *solus, ut dictum est.* — 8. *isosceles.* — 13. *praedictam superius.* — 22—23. *introrsus ad se invicem inclinatae.* — 28. *anguli, id est acuti.* — 29. *trini eorum; eorum; aequi* fehlt.

416. 1 *sint aequi.* — 2. *supervaduntur.* — 3. *et duo interiores acuti.* — 4. *complent angulum.* — 5. *duo quidem acuti rectum unum supervadunt,*

---

1) Auch hier ist die richtige Lesart unzweifelhaft. Cycloiden treten ja erst bei Galilei auf. 2) Auch diese Lesart ist die bessere.

sed. — 6. *tantum* fehlt; *minores sunt tanto, quantum.* — 7. *illud, ni fallor.* — 8. *est* fehlt. *Multis movere solet scrupulum.* — 9—10. *aequos habere duobus rectis.* — 11. *His vero.* — 12. *an acutus.* — 13. *certius etiam; requirenti* fehlt. — 17. *angulo* fehlt. — 22. *esse* fehlt. — 23. *quaesiveras.* — 24. *sin autem.* — 28. *aequa mensura distiterint.*

417. 1. *Phittagorae* und so immer. — 2. altera eiusdem. — 3. *utrimque.* 4. *deducito.* — 5. *pedes* fehlt; *dubitabas.* — 8—9. *usque ad* ***G*** *quatuor mensuro, dein lineam rectam ab* ***F*** *ad* ***G*** *duco.*[1]) — 10. ***E*** *angulum*; *id cogente.* — 11. *eum deputari.* — 12. Das neue Capitel beginnt im Manuscript mit den Worten: *Lineae vero rectae.* — 17. *Directim et non oblique.* — 18. *accipit; quasi fundamenta sit.* — 21. *Katheti* und so immer; *nomen.* — 25. *Ex harum autem lineari mensura.* — 27. *superius quoque.* — 28. *maiorem angulum.*

418. 1. *putetur; regulis suis.*[2]) — 2. *speciebus* fehlt; *primatum.* — 9—10. *manifestabitur.* — 12. *sit; pedes III;* — 13. *mensuras, basis IIII, hypotenusa V seu alias quaslibet plures in eisdem proportionibus mensuras.* — 16. *Quia vero interdum quaedam vel omnia.* — 17. *admixtis; geometram.* — 18. *etiam non ab re erit.* — 19. *itaque* fehlt. — 20. *scilicet; per kathetum alia invenire latera.* — 23. *Si eandem, quam abstulisti, nonam.* — 25. *novem facit.* — 25—26. *reliqui, id est VIII, dimidia; basi* fehlt. —

419. 1. *superius dicta.* — 2—3. *sive de minutiatis.* — 3. *compacta; ut in hoc, qui IIII in katheto tenet.* — 4. *parte* fehlt. — 4—5. *et triente ablata.* — 5. demonstrat. — 10. *senarium habet.* — 10—11. *in se* fehlt. — 13—14. *duo* ς£. — 14. *VII* £ ςςς. — 5. *id est* £ ςςς; *basi.* — 16. *VIII et* ςς. — 18. *reliqui.* — 19. *habeat in katheto.* — 20. *IIII* ς. — 21. *Cui tribus.* — 23—24. *III et* Ʒς. — 24—25. *II,* ɾ, ◡◡. — 25. *XVI,* ςςς £◡. — 26. *VIII* Ʒς ◡◡. — 27. *II* ɾ *et* ◡◡. — 27—28. *podismum in X* ς *et* £◡ *consumat.* — 29. *quae et in.*

420. 1. *orthogonio trigono.* — 4. *coniungatur et huius.* — 8. *alio quolibet.* — 9. *generatur.* — 12—13. *in se ducto.* — 16. *reliqui latus.* — 20. *ducta* fehlt; *tetragoni, id est.*[3]) — 21. *faciunt* fehlt. — 22. *quinque* fehlt; *XXV faciunt.* — 24. *investigo.* — 25. *id est ex; ductum id est.* — 30. *numero* und *dem* fehlen.

421. 8. *VI* Ʒς; *Ipsumque.* — 9—10. *XL* ɾ ◡◡. — 10—11. *VIII* ςς◡◡.

---

1) Die Ergänzung ist, wie man leicht sieht, nöthig. Ich bemerke noch, dass die Handschrift überall im Texte sowohl, als an den Figuren grosse Buchstaben hat. 2) Auch hier dürfte die richtige Lesart getroffen sein. 3) Hier ist offenbar von Olleris die Abkürzung *.i.* für *id est,* welche in unserer Handschrift nirgends vorkommt (es ist dafür stets *id̄* gesetzt), fälschlich mit *tetragoni* verbunden worden.

— 11—12. *LXXI* ʒ£◡∖ *III scripuli et tria siliquae.* — 13—14. *CXI tertiam scripuli et tertiam siliquae continentem.* — 15. *X* ʒ£◡. — 16. *et* fehlt; *eodem autem.* — 17—18. *ducto, id est CXI* ʒʒ ∖, *duabus siliquis et tertia siliquae.* — 18—19. *ductum* fehlt; *XL* ≺◡◡. — 19—20. *reliqui LXXI* ʒ£◡∖ *duarum siliquarum et trientis siliquae latus, quod.* — 20—21. *VIII et* ʒʒ◡◡ *basis erit. Si autem basis in se ducta, id est LXXI* ʒ£◡∖ *bissiliqua et tertia siliquae.* — 23. *in se numero; remanentis XL* ≺◡◡. — 24. IV ʒʒ. — 25. *quoque huius modi.* — 26. *libuerit.* — 28. *huiuscemodi tradunt.* — 29. *katheti videlicet.* — 31. *duplicataque.*

422. 2. *id est* fehlt. — 2—3. *duplicati XII faciunt.* — 3. *partem* fehlt. — 4. *Horum si.* — 5. huius. — 7. *et* fehlt. — 8. *ablata et; II* ʒʒ. — 9. *et* fehlt. — 10. *per quartam sui.* — 10—11. *latus tetragonale.* — 13. *facilior.* — 14—15. *universalis.* — 16. *concreverit, pro embado habeatur.* — 17. *basis integra multiplicetur; natum embado detur.* — 19—20. *per latitudinem longitudo.* — 21. *sibi invicem* fehlt. — 23. *Sed ut exempla huic.* — 25. *quindecies XX fiunt.* — 26. *certo certius indicant.* — 28—29. *regulariter.* — 29. *LIII* ʒʒ£9∖ ... —

423. 1. *constrati pedis capiat quantitates.* — 2. *vero* fehlt. — 4. *multiplica.* — 7. *In sequenti vero, cuius area constratos.* — 8. *et* hinter *CCCCXXVII* fehlt. — 9. Das erste *et* fehlt; *VI. DCCCXLV* ʒ£; *contineri.* — 14. *fiunt.* — 15. *quotiens.* — 20. *partem* fehlt. — 23. *adhuc regulam.* — 24. *subiciendam.* — 26. *basis.* — 27. *Ut autem.*

424. 9. *iuncta in.* — 11. *ductae* fehlt. — 12. *utrorum.* — 14. *latus, quod.* — 18. *XIIII est.* — 20. *ductus* fehlt; *et* fehlt; *Cui si IIII embada.* — 21. Beide *et* fehlen. — 22. Das erste *et* fehlt; *Quae ut.* — 23. *ducto* fehlt; *et* fehlt. — 24. *et* fehlt. — 25. *I* ʒʒ; *VIIII et* ʒʒ. — 27. *I* ʒʒ *adeundem.* — 28. ʒʒ *adiunctum; X* ʒʒ; *quae est V et* ʒʒ, *basim.* — 31. *diximus orthogonii tripleuri.* — 32. *quantitatem* fehlt. — 33. *acceperat; sibi quantitatem.*

425. 1. *patet* fehlt; *horum.* — 3. *dinoscendam.* — 4. Das erste *sunt* fehlt. — 5. *eam consequentiam.* — 5—6. *tantum quod quibusdam.* — 7. *ad basim; meminerit.* — 8. *ne iam dicta.* — 28. *continuet.* —

426. 3. *vel minutiatos; item ad minutiatas* fehlt. — 4. *offendere scrupulum.* — 5. *et* fehlt. — 6. *sesquitertia alterutros habitudine copulet.* — 7. *aspicias;* beide *est* fehlen. — 10. *modo in se.* — 11. *in se* fehlt. — 15. *geometricam scilicet.* — 28. *dinoscitur.* — 29. *volo in his.* — 31. *eorum latera; podismusque.* —

427. 3. *sesquialtera, si sesquitertia sesquitertia.* — 5. *Fiunt.* — 8. *orthogonios efficiunt.* — 10. *ostendat, ut sunt subiecti.* — 11. *germani. Item isti, sed aliis laterum proportionibus compacti.* Dann folgen die bei Olleris in Fig. 37 abgedruckten Dreiecke. — 12—17 fehlen.

Bis hierher, das heisst bis zum Ende des sogenannten ersten Theiles, stimmt der Text der Angaben im Allgemeinen mit dem Manuscripte, jedoch wird man leicht bemerken, dass sehr viele der angeführten Varianten einen bei weitem reineren und verständlicheren Text geben, als der gedruckte ist. Wir haben ja an einigen Stellen in den Anmerkungen darauf hingewiesen. Der Fortsetzung ist von vielen Seiten der Vorwurf gemacht, dass die Anordnung der vorgetragenen Lehren ein wüstes Durcheinander sei, voller Wiederholungen und dergl., so dass es eines Gerbert für unwürdig und deshalb für untergeschoben gehalten werden müsse. Unsere Handschrift hat nun eine Reihenfolge der Capitel, welche den Fehler des wüsten Durcheinander vermeidet, und einen Text, welcher bedeutend besser ist, als derjenige, welcher bis jetzt gedruckt wurde. Sie ist ja auch die älteste der bis jetzt bekannten Handschriften, welche die ganze Geometrie Gerberts enthalten. Ich werde daher im Nachfolgenden den zweiten Theil der Geometrie, die Feldmesskunst, nach unserem Codex vollständig abdrucken lassen. Ich bin fest überzeugt, dass dadurch der Verfasser derselben, mag es nun Gerbert sein, oder wer es sonst will, in ein ganz anderes Licht gerückt werden wird.

Ich fahre also mit dem Texte so fort, wie unsere Handschrift ihn giebt. Die am Anfange stehende römische Nummer ist die aus dem Manuscripte folgende, die hinten stehende arabische diejenige der Ausgabe von Olleris. Um jedem Missverständniss entgegen zu treten, mache ich nochmals darauf aufmerksam, dass die Capitel- oder Paragraphenzahlen erst durch die Herausgeber eingeführt sind, sich aber in keinem Manuscripte finden.

| I. DE MENSURIS. 15. 4

Mensurarum appellationes, quibus utimur, sunt hae: Digitus, Uncia, Palmus, Sextans, quae et Dodrans appellatur, Pes, Laterculus, Cubitus, Gradus, Passus, Decempeda, quae et Pertica appellatur, Clima, Actus, qui et Aripennis dicitur, Iugerum, Centuria, Stadium, Miliarium.

Digitus est minima pars agrestium mensurarum.

Uncia secundum quosdam digitos habet tres, secundum quosdam, quod verius est, digitum unum et tertiam digiti.

Palmus habet digitos quatuor, uncias tres.

Sextans digitos duodecim, uncias novem, palmos tres.

Pes digitos XVI, uncias XII, palmos IV, sextantem unam et tertiam eius.

Laterculus pedem unum in latitudine, uncias XXIIII in longitudine.

Cubitus sesquipedem, sextas II, palmos VI, uncias XVIII, digitos XXIV.

Gradus habet III pedes; passus V. Pertica X. Clima LX.

Actus in latitudine CX, CXX in longitudine:

Iugerum, quod sit iunctum duobus actibus, in longitudine CCXL, in latitudine CCXX.

Centuria CC.

Stadium pedes DCXXV, passus CXXV.

Miliarium passus M, stadia VIII.

II. INCIPIUNT EXCERPTA DE GEOMETRIA. 14.

Geometricales tractandi diversitates praemonstrandum est, quas ipsius artis tractatus spondeat utilitates, quatinus lectoris ingenium insinuationis trifida ratione incitatum, promtius ad legendum, studiosius sequentis operis perscrutetur tractatum. Est enim huius disciplinae scrupulosa descriptio, 5v sed totius dimensionis in|dagatione indagationisque commoditate copiosa descriptio. Quam tamen, quamvis arduum sit, consequi potis erit, qui in ea infatigabili sudaverit studio. Quae ut facilius a studiosis consequatur, cuique theoremati sua figura subiungatur.

III. AD ALTUM UT METIATUR. 32.

Ad rem inaccessibilem nobis altioribus ut metiatur, quamvis laboriose, huiusmodi figuram facimus. Sit quantitas rei metiendae AB, et quot cubitorum, vel ulnarum, vel pedum, vel digitorum, vel etiam unciarum, vel cuiuslibet alterius mensurae sit, sit nobis propositum scire. Re orthogonaliter constituta sit spacium immeabile inter nos et rem, ut est GB. Erigatur nobis orthogonium DG, et sit linea sursum ducta de G ad D, sicut primo dictum de A ad B. Ducatur planiter linea de D ad Z, sicut plana iacet linea de G ad B, et sit notum, quanta est linea GD et linea DZ, nos enim eas facimus. Erigamus orthogonaliter lineam de Z sursum ad V, et ponamus oculum in linea ZV orthogonaliter erecta, ut exeat visus noster per D ad B; et locus lineae istius, ubi stetit oculus, notetur puncto ipso V, et metiamur ZV, quanta sit. Et post haec iterum ponamus oculum in linea ZV ita, ut valeamus videre per D ad A; et locus, in quo visus steterit, notetur puncto H, et videamus, ubi haec linea tangens terram coniungitur lineae GB, et sit punctum E, ita ut linea GE sit recta. Et post haec notemus, quantum sit inter Z et H. Et quota pars est ZH ad ZD, tanta est DG ad GE, et nota est linea HZ et ZD et DG, quia nos eas fecimus. Igitur notum est, quanta est linea GE; 6r et quanta | est linea VZ ad ZD, tanta est linea DG ad lineam GB, et lineae VZ et ZD et DG nobis notae sunt: notum igitur erit, quanta est linea GB. Et quia sapivimus dudum lineam GE, et sapimus modo lineam GB, possumus sapere, quanta est linea BE. Et quanta est linea DG ad lineam GE, tanta est linea AB ad lineam BE, et lineae DG et BE notae sunt: igitur AB linea nota est, et haec est, quam quaerebamus. Et ut brevius, quod superius diffuse dictum est, comprehendatur compendium, quo philosophia gaudet, ponatur. Qualis comparatio fuerit ZV ad HV, talis erit GD ad BA. Sit et ZV duplum ad HV, erit GD duplum BA. (Fig. 1.)

IV. ALIA FIGURA DE EADEM RE CUM HOROSCOPO. 17.

Ad altitudinem inaccessibilem ob fluvii vel vallis impeditionem sit altitudo quaelibet, ut sit AB, sit fluvii vel vallis impeditio, ut est BC. Sume horoscopum stans in ripa C, et per utrumque foramen mediclinii summitatem A diligenter inspice. Considera numerum graduum in mensurae quadrato, qui verbi gratia notatur quaternario numero, per quem summa totius quadrati, scilicet CXLIIII, | diuidatur, et quarta pars reperta, videlicet XXXVI, conscribatur. Post haec de C ad D certa spatii quantitas metiatur, quae exempli gratia quadragenario numero praenotatur. Iterum sume horoscopum stans in fine D, et per utrumque foramen, ut prius, summitatem A inspice. Perpende iterum numerum graduum in quadrato, qui signatur in figura ternario numero, per quam denuo summa totius quadrati dividatur, et pars tertia, quae est XLVIII, iuxta quartam, quae est XXXVI, conscribatur, et minor numerus de maiore, id est XXXVI de XLVIII, tollatur, et quod remanet, id est XII, cum latere quadrati, quod XII est, comparetur, et numerus remanens et latus quadrati aequalis pronuncietur. Et sicut ultimum remanens XII lateri quadrati XII aequalis habetur, sic spacium CD spacio AB aequale affirmetur; et quota pars ternarius, qui est ultimus numerus graduum, in XII iudicatur, eadem pars AB in BD spatio sine dubio dicatur. Est igitur XL AB, sicut est XL CD, et est CLX totum BD, et est CXX BC. (Fig. 2.) |

V. AD ALTITUDINEM CUM SPECULO VEL AQUA METIENDAM. 24.

Posito in speculo centro, vel in media scutella plena aquae, constituatur in plano arvo, et tam diu a geometra huc illucque diligenter trahatur, donec per medium centrum unius supradictorum cacumen rei metiendae aspiciatur. Cacumine invento spatium, quod continetur inter pedes mensurantis et centrum speculi vel medium vasis limphae pleni diligenter mensuretur, et post haec non minus caute metientis statura comparetur, et ut fuerit illud spatium ad metientis staturam, sic erit linea a medio centro speculi usque ad radicem altitudinis ad altitudinem rei metiende.

Exempli cura subdatur plana figura. (Fig. 3.)

VI. AD ALTITUDINEM CUM ASTROLABIO METIENDUM. 16.

Si altitudo fuerit in aequalitate, tali poterit mensurari inspectione. Sumatur ab altimetra astrolabium, et constituatur in medietate quadrati mediclinium, ut hac scilicet positione sit mediclinium alterius partis astrolabii in numero graduum dierum XLV, et tamdiu ab eo ante et retro aestimando pergatur, donec per utrumque ambulatoriae pertusum altitudinis summitas inspiciatur. Qua inspecta loco, in quo stetit mensor, nota imprimatur, et huic impressioni | statura mensoris adiungatur. Post haec locus ipse diligenter notetur, et ab eo usque ad radicem altitudinis tota planities caute mensuretur, et quot pedum ipsa planities fuerit, tot sine dubio altitudo erit. (Fig. 4.)

VII. AD ALTUM METIENDUM CUM ORTHOGONIO. 30.

Componatur a geometra orthogonium basi kathetoque eiusdem numeri compositum, hypotenusae vero proportio praetermittatur, quae ad altum investigandum prorsus inutilis iudicatur. Compositum autem tam diu per planum a mensore trahatur, donec oculo humi apposito per katheti summitatem summitas altitudinis investigandae cernatur. Qua visa a loco, cui visus inhaeret, planities ad radicem usque metiatur, et quanta fuerit, tanta altitudo dicatur. Quod ut apertius intelligatur, orthogonium cum altitudine metienda figuraliter visui anteponatur. (Fig. 5.)

3r | VIII. DE EADEM RE ALIUD ORTHOGONIUM. 31.

Est etiam aliud aestimandae altitudinis orthogonium, quod ab inventore denominative nuncupatur Pythagoricum, naturalibus proportionibus katheti, basis, hypotenusae compaginatum, katheto ternario insignito, basi insignita quaternario, hypotenusa vero praenotata quinario, scilicet ut basis katheto sesquitertio proporcionetur, et hypotenusa basi sesquiquarto comparetur. De quo cuncta fiunt, quaecumque dicta sunt in praecedenti figura, hoc solo excepto, quod in hoc de mentita planitiei quantitate quarta pars est auferenda hac videlicet ratione, quod basis iacens kathetum erectum superat cum sua quarta parte. Quod ut melius animadvertatur etiam istud orthogonium subternis depingatur. (Fig. 6.)

IX. AD METIENDUM ALTITUDINEM CUM UMBRA. 25[a].

Quaecumque res, si fuerit sub divo posita, umbram emittit, sed non sibi semper aequalem. Quapropter umbrae quotam partem volueris eliges, deinde virgam coaequatam huic parti in terra statuas, et umbram exinde cadentem seu per pedes, seu per palmos, seu per uncias dividas. Si maior inventa | fuerit umbra, quantum umbra virgam superat, tantum a singulis partibus, quarum virga mensuram habet, subtrahas. Si autem minor, quantum a virga superatur, tantum dictis partibus adicias. Quod autem in umbra vel ex augmentatione accreverit, vel ex subtractione remanserit, pro mensura illius rei habeto. (Fig. 7.)

X. AD ALTUM CUM ARUNDINE METIENDUM. 25^{b}.

Componitur etiam instrumentum ad altitudinem sine difficultate inveniendam, quod hac de causa a sapiente inventum putatur, quia visum humi adiungere difficile mensori, inconveniens spectatori putabatur, sumitque quantitatem suae magnitudinis a magnitudine staturae metientis. Constituamus arundinem tali magnitudine, ut duplari comparatione proportionetur mensoris longitudine. Cuius medio altera arundo orthogonaliter coniungatur, quae, statura mensoris aequalis, ei, cui coniungitur, subdupla habeatur. Quatinus in hac coniunctione completum comprobetur, quod in prima figurarum ac curvo praeceptum videtur: *omnes lineae a medio circuli procedentes et videntur, et sunt parili magnitudine aequales.* Igitur hoc instrumentum sic compositum tamdiu ducatur a mensore per planum, donec per summitates istarum virgarum rei metiendae conspiciatur summum. Quo conspecto tanta altitudo dicatur, quantum spatium a mensore ad radicem altitudinis statura adiuncta mensu|ratur. Verbi gratia sit statura mensoris AB, arundo 4 sibi dupla CD, altera arundo istius medio orthogonaliter iuncta AE, altitudo metienda FG, spatium a mensore ad radicem altitudinis BG. Hoc tamen nullo modo mensor obliviscatur, quin et huic omnique perpendiculo aequipendium appendatur, quod geometricaliter institutum ad mensuram paratur. (Fig. 8.)

XI. AD PLANITIEM CUM HOROSCOPO METIENDAM. 19.

Si vis cum horoscopo quamlibet metiri planitiem, dirige intuitum per utrumque mediclinii foramen, donec terminatur intuitus in metiendae quantitatis limite. Post haec, in quoto gradu quadrati mediclinium steterit, inspiciatur, et ipse numerus graduum cum XII conferatur: et qualis comparatio erit graduum ad XII, talis comparatio erit staturae metientis ad planitiem totam. Verbi gratia sit statura mensoris AB, planicies BC, numerus graduum ternarius, qui ad XII comparatus quarta pars eius dubietate sublata invenitur. Igitur AB, quae est statura metientis, sic BC planitiei quarta pars computatur, sicut ternarius quarta pars XII computabatur. (Fig. 9.)

XII. AD PLANITIEM CUM VIRGA VEL ARUNDINE METIENDAM. 26.

Stabiliatur arundo visui aequiparata metientis in termino epiphaniae, cui altera coniungatur cuiuslibet quantitatis orthogonali ratione, quae scilicet susum iusumque tamdiu a planimetra ducatur, donec per utriusque arundinis summitates oppositus limes planitiei cernatur. Quo inspecto ipsa coniunc|tio arundinum diligenter notetur, et superior pars fixae arundinis a coniuntione alterius cum tota sui quantitate comparetur, et eadem comparatio pendentis virgae planique incunctanter dicatur, quae superioris partis a coniunctione cum tota quantitate fixae arundinis superius dicebatur. Et ut clarius reddatur, quod litterari inflexione computamus, picturam apertius obsccura demonstrantem visui legentium supponamus. Sit arundo stans visui metientis aequiparata AC, sit planities metienda CD, virga orthogonaliter pendens BC; sit igitur AB medium AC, erit ergo BC medium CD. (Fig. 10.)

XIII. AD PLANITIEM CUM QUADRATO MEDICLINIORUM METIENDAM. 33.

Si fuerit nobis propositum, quodlibet quolibet modo metiri planum, sumamus cubiti longitudinis lignum, cui tria alia in dimensione aequalia tali coniunctione innectantur, ut coniuncta quadrati diffinitionem suscipere videantur, quod quatuor lateribus aequale, quatuor angulis est orthogonale. Cuius unius lateris summitatibus duo semipedalia ligna erecta infigantur, quae in summitatibus perforata per utrumque foramen visum metientis admittere videantur. Post haec extremitati oppositi lateris mediclinium, ut in horoscopo, sic copuletur, ut, dum per oppositum sibi latus certis dimensionibus distinctum trahitur, formam orthogonii Pythagorici imitetur, vel imitari videatur. Verbi gratia | sit quadrati figura $ABCD$, duo semipedalia ligna in summitatibus unius lateris posita E, F; mediclinium in lateris oppositi summitate locatum per oppositum sibi latus discurrens DG in hunc modum (Fig. 11). Composita quadrati figura hac ratione ponatur iacens in metiendae planitiei extremitate, et tamdiu a metiente ex altera parte erigatur, donec per foramina E, F opposita extremitas plani cernatur, et in loco, quo visus steterit, nota ponetur. Post haec per mediclinium ex adverso constitutum visus mensoris dirigatur, donec iam notata extremitas videatur. Quo facto locus, in quo steterit G, notetur, et CG ad GB comparetur; et qualis comparatio CG ad GB fuerit, eadem comparatio AB ad totam planitiem erit. Verbi gratia tota planities BH dicatur et CG GB aequalis constituatur: et AB BH aequalis non dubitatur. (Fig. 11.)

XIV. AD ALTUM CUM ARUNDINE MENSURANDUM. 27 u. 28.

Si quis superioris figurae, retro positae figurae, qua planitiem mensurabamus, subtiliter inspexerit vim, istius quoque figurae vis, qua altitudines metimur, eum prorsus latere non poterit. Parum enim distat haec a superiori figura excepto, quod superior in planitie, haec operatur in altitudine mensuranda. Sit altitudo mensuranda AB; statura metientis CD; arundo, cum qua altitudo metiatur, statura longior EF; virga orthogonaliter ducta DG, linea a visu metientis per arundinem usque ad altitudinem metiendam | DFA. His peractis DG ad GF comparatur, et eadem comparatio DH ad AH pronuncietur, quae DG ad GF pronuntiabitur. Verbi gratia DG ad GF dupla ponatur, et non minus DH ad AH dupla indubitanter dicatur; quod si BH HA mensurabiliter copulantur, quae DC, statura metientis, aequalis habetur, tota altitudo AB mensurata non dubitatur. Sed quia potest evenire, quod CB sit interdum non meabile, HA non est omnino nobis notum, quamvis sit proportionale. Qua de causa planities BC in retro erit metienda, et similis superiori alia componenda erit figura. Metiatur planities CI, sitque statura metientis IK; sit arundo aequalis superiori LM, sit virga orthogonaliter ducta KN, linea a visu metientis tendens ad altum KLA. Post haec KN NL in quadrupla proportione conferantur, et similiter totum KH HA quadruplum indubitanter dicatur. Et quia superius iam DH HA duplum habebatur, modo autem KH AH quadruplum pronuntiatur, sublato DH de toto KH manet KD, quae est mensurabile, duplum ad HA. Quod si ad AH, KI statura metientis, quae est aequalis NM et DC et FG et HB, mensurabiliter apponatur, totum BA, quod est altitudo, mensuratum nullo modo dubitatur. (Fig. 12.)

XV. AD PLANITIEM CUM ARUNDINE METIENDAM. 29.

Stans mensor in metiendae planitiei extremitate componat | sibi arundinem minorem suae longitudinis prolixitate, quae scilicet tam diu diversis locis planitiei directa figatur, donec per summitatem ipsius arundinis altera extremitas planitiei ex opposito cernatur. Quo facto a summitate arundinis orthogonalis linea usque ad mensoris staturam ducatur, et locus ipsius staturae, in quo linea terminabitur, diligenter signetur, et ipsa pars staturae ab ipsa nota usque ad visum cum linea orthogonaliter ducta conferatur. Et qualis comparatio ipsius partis staturae cum tota linea orthogonaliter ducta habebitur, eadem comparatio totius staturae ad planitiem totam pronuntiabitur. Verbi gratia sit statura metientis AB; planities metienda BC; canna, cum qua mensuratur, DE, linea orthogonaliter ducta DF. Quota pars fuerit AF in FD, tota pars erit AB in BC. Sit AF quarta pars in FD, et in eodem modo est AB quarta pars in BC. (Fig. 13.)

XVI. AD METIENDUM CUM HOROSCOPO PATEUM. 20.

Primo a geometra diligenter perpendatur, quatinus circulatio putei perpendiculo perpensa aequalis habeatur. Deinde cuius quantitatis sit eius diametrum inquiratur. Invento diametro stans metiens super putei labrum despiciat per mediclinium lateris oppositi terminum. Quo peracto numerus graduum, in quo mediclinium steterit, in quadrato, cum XII comparetur, et eadem comparatio diametri et profunditatis cum statura geometrae indubitanter | pronuntietur. Qua statura abstracta de profunditatis numero quod superest, ipsius est altitudo putei. Verbi gratia sit putei altitudo AB; sit eius diametrum AC; sit statura geometrae trium pedum CD. Eia, constituamus trium pedum AC, et dirigamus intuitum per mediclinium de D ad B. Post haec gradus, qui causa exempli III sint, cum XII in quadrupla proportione conferamus, et AC, qui et ipsi III sunt, ad BC in eadem proportione ponamus. Est igitur III pedum AC, et XII pedum DE, et trium pedum DC, quae est statura metientis; quibus tribus sublatis de DE remanet VIII pedum CE, quod est putei altitudo. (Fig. 14.)

XVII. AD PUTEUM CUM ARUNDINE MENSURANDUM. 21.

Ut in superiori figura putei dictum est, primo a geometra diligenter perpendatur, quatinus circumductio putei circularis habeatur, deinde cuius quantitatis sit diametrum inquiratur. Quo invento stans mensor super putei summitatem supponat pedibus suis cuiuslibet longitudinis scorpionem, quem tam diu ante et retro pedetemtim ducat, donec per summitatem ipsius scorpionis alterius partis putei profunditatem cernat. Quo facto pars ipsa scorpionis, quae puteo superiacet, a pedibus mensoris impressa nota caute notetur, cui statura metientis non minus diligenter comparetur. Et quota comparatio ipsius partis fuerit ad meti|entis figuram, eadem comparatio erit diametri cum statura metientis ad putei totam summam. Verbi gratia sit profunditas AB; diametrum eiusdem putei AC; statura metientis CD, arundo, quae staturae comparetur, et per quam putei profunditas investigatur CE; altera pars putei CF; sit CD quadruplum ad CE; igitur DF quadruplum est ad AC.

Sumas mensuram si vis, auferre staturam.[1] (Fig. 15.)

XVIII. AD ALTUM INACCESSIBILE CUM HOROSCOPO METIENDUM. 18.

Si quid eminens inaccessum fuerit aestimandum cum horoscopo, stet alti mensor in metiendi eminentis arcifinio, suspiciatque per utrumque mediclinii foramen, quousque intueatur altitudinis mensurandae cacumen. Quo inspecto gradus quadrati numerentur, qui exempli manifestatione III computentur, qui in XII, quadrati latere, quater continentur. Hoc peracto tam diu ante et retro pergatur, donec iam visum cacumen altitudinis mensurandae iterum videatur. Quo viso numerus graduum quadrati denuo inspiciatur, et verbi gratia II habeantur, qui in XII, quadrati latere, sexies contineri non dubitantur; et intervallum stationum mensoris scilicet XII pedum notabile habeatur. His peractis minus continens ternarii, id est quaternarius, ab maiori continenti, id est senario, semel tollatur, et binarius, qui remanet, in mente teneatur, et ipsum intervallum stationum mensoris inaccessibilis alti duplum ponatur. Subtractione continentium facta si unus tantum remanserit, intervallum stationum mensoris alto aequale est, si duo duplum, si tria triplum et sic in sequentibus.

Tali pictura fit declaratio pura. (Fig. 16.)

XIX. (AD PUTEI ALTITUDINEM METIENDAM.[2])) 34.

Putei aut cuiuslibet fossae altitudinem sic probabis. Accipe lignum directum | et pone super buccam putei, cuius umbram videbis in *CF*, id est in profunditate putei, et lignum quatuor cubitos aut plus habeat; et exeat subtus eius pedes alia hasta directa similis sibi. Et est profunditas putei *AE*;

1) An dieser Stelle hat Herr Weissenborn (Gerbert, Beiträge zur Kenntniss der Mathematik des Mittelalters. Berlin 1888, S. 23) seine Kunst im Versemachen gezeigt. Dass ein leoninischer Vers beabsichtigt war, ist deutlich; sobald, wie in unserer Handschrift, das Wort *putei* weggelassen wird, ist auch der Vers in Ordnung. Der betreffende Verskünstler hat als selbstverständlich vorausgesetzt, dass jeder ihn so verstehen würde:

Sumere mensuram si vis, auferas staturam,

auch wenn er die Verbalformen von *sumere* und *auferre* mit einander vertauschte. Unsere Handschrift liefert ausser den drei bekannten leoninischen Versen noch einen vierten, der in den Druckausgaben durch Abänderung eines Wortes als solcher nicht mehr vorhanden ist. Am Ende von Cap. IV; 24 steht nämlich im Manuscripte, wie ich auch oben habe drucken lassen:

Exempli cura subdatur plana figura,

wo die Ausgaben das gewöhnlichere *causa* lesen. 2) Die nicht im Manuscripte vorhandenen Ueberschriften, welche sich aber auch in keiner andern Handschrift finden, sondern von Pez hinzugefügt sind, habe ich eingeklammert.

et hasta directa AD; et alia hasta ABC iacens super buccam putei truncat DE super angulos rectos. Et intuere in aqua putei umbram AC de D usque ad F, et invenies AC cubiti quot sint vel palmi, ac quotiens sit in DA, tociens est ACB vel EF in DAE.[1] Utputa, si AC habeat unum palmum et DA tres, tribus vicibus est AC in DA, sicut est tribus vicibus ACB in DAC. Abstrahe AD, remanet AE. (Fig. 17.)

XX. (AD ALTITUDINEM MONTIS INVENIENDAM.) 35.

Dum quaeris altitudinem alicuius montis, pone hastam ante te in plano pro monte longiorem te: et est hasta AB, et tu CD. Postea contemplare huc illuc te movens, donec recto oculorum visu per A usque F videas. Tunc con|sidera, quanta sit GC ad GA, tanta est CH ad HF. Utputa, si GC dupla est ad GA, dupla est CH ad HF; et quantalibet GC ad GA, tanta est procul dubio CH ad HF; et quanta est AG ad GC, tanta est FH ad HC, et HF est mons.

Quod si fluvius habetur aut aliud obstaculum inter C et H, et non possis pertingere ad montis radicem, ut praedictam invenias mensuram, accipe hastam, id est AGB, et ambula retro XXX cubitos aut quantumlibet, et iterum contempla recto visu de M per K usque F, quod est montis summitas, et | postea vide, quanta sit MO vel NL ad OK, tanta est MH vel NI ad HF. Abstrahe de MH vel NI CH vel DI, et vide, quod remanet, tanta est altitudo montis. Utputa, si invenisti CH duplum ad HF, et post MH quadruplum ad HF, tolle CH de MH, id est duo de quatuor, remanent duo, quod MC dices. Quia MC duplum est HF, dona XX cubitos ad MC et X ad HF. Et si CB triplum est ad HF, et MH septuplum est ad HF, abstrahe de MH CH, id est III de VII; quadruplum est MC ad HF. Sic in aliis. (Fig. 18.)

XXI. (DE EADEM RE SINE MUTATIONE HASTAE.) 36.

Si quaeris sine mutatione hastae, sic facies. Est mons AB. Accipe hastam duorum cubitorum longiorem te, et pone ante te in plano. Postea considera ipsam hastam, quae est CDE, et visum tuum recte mitte de F per D usque A, dividens ipsam hastam super unum cubitum; et vide, quantum sit FE ad ED, tantum est FG ad GA. Ambula retro, quousque videas de H per C usque A|, ubi est summitas montis, et vide, quantum sit HE ad EC, tantum est HG ad GA. Invenisti forsitan antea FG quadruplum GA, et HG decuplum ad GA: minue FG de HG, id est

1) Dass durch die Einschaltung unsrer Handschrift erst die ganze Darstellung richtigen Sinn erhält, ist leicht einzusehen.

IV de X, remanent VI. Sic est HF sescuplum ad GA, vel GA sexta ad FH. (Fig. 19.)

XXII. (AD INVENIENDAM PER SPECULUM ALTITUDINEM.) 37.

Si per speculum aut per concham plenam aquae quaeris scire altitudinem montium vel turrium, accipe speculum, et pone prope montem[1]) in plano, et in tantum te ipsum et speculum positum in terra moveas huc et illuc, quousque videas A in B, id est summitatem montis in medio speculo. Et, quomodo sint invicem BC et CD vide, sic sunt invicem EB et EA. Et si sit obstaculum, quod non possis probare hoc, ambula retro cum ipso speculo, et pone in terram, ut videas mo|vendo[2]) te a D in Z. Et quantam proporcionem habent invicem PK et KZ, eandem habent EA et ZE invicem. Minue inde BE, et remanet BZ. Et vide, ut antea in superioribus figuris, quantum habeant proportionem BZ et EA.[3]) (Fig. 20.)

XXIII. (AD LATITUDINEM FLUVII INVENIENDAM.) 38.

Si quaeris scire latitudinem fluvii vel alicuius campi vel curtis vel cuiuslibet rei, accipe lignum, quod pertingat usque ad tuos oculos, secundum alios minus uno cubito, et pone eum in ripa fluvii, et sta prope eum, et est lignum, ut subtus vides, quasi AB, et pone aliud lignum super ipsum erectum, sicut est CD. Postea contemplare recto oculorum visu per AD usque videas E, id est ripam vel terminum ex altera parte. Nam BE est fluvius, et ADE visus directus. Postea considera, quantum sit AC | ad CD vel e contra, quantum est DC ad AC, tantum est ACB ad BE vel e contra BE ad ACB. Utputa, si DC est duplum AC, duplum est BE ad BCA; si triplum, triplum et cetera. (Fig. 21.)

XXIV. (AD IDEM ALIUS MODUS.) 39.

Si quaeris aliter scire, pone hastam minorem te quasi ad pectus, et pone in ripa fluvii, et accipe aliud lignum pertingens usque ad oculos, sicut est CD. Et ambula retro quantumlibet, et pone ipsum fustem.

1) Dass dies die richtige Lesart ist, dürfte von selbst einleuchten. 2) Blatt 55 ist für die Figuren eingeheftet und enthält keinen Text. 3) Nach Herrn Weissenborn, *a. a. O.*, S. 84, soll dieses Capitel erst im 12. Jahrhundert durch Savosarda in das Hebräische und aus diesem durch Plato von Tivoli in das Lateinische übersetzt sein. Da es sich aber schon in einer Handschrift des 11. Jahrhunderts befindet, so dürfte das von Libri erwähnte Stück doch wohl ein anderes sein als das vorliegende, und alle daraufhin von Herrn Weissenborn gezogenen Schlüsse verfehlt.

Et tu tantum move te huc et illuc, quousque videas de C per A usque E, id est alteram fluminis ripam. Dehinc minue AB de CD, remanet FC. Vide, quomodo sint AF ad FC, sic sunt BE ad BA. Si triplum est AF ad FC, triplum est BE ad BA. (Fig. 22.)

XXV. AD ALTUM CUM SAGITTIS ET FILO MENSURANDUM. 40.

Dum geometricis figuris intenti philosophorum iam fatigabundi inven|tionibus inhaeremus, ne omnino deficiamus militaribus exercitiis animum relevemus. Sicut enim corpus cottidianis sumptibus fastidiens inusitato recreatur cibo, sic mens philosophicis onerata austeritatibus coniecturali poetarum relevatur figmento. Quapropter, ut animam nostram reficiamus, militare inventum post multa supponamus.

Si cuiuslibet rei altitudinem investigare volueris, huiusmodi militari ingenio investigare poteris. Sume arcum cum filo, et una fili summitate, sagittae postremitati inhaerente, altera in manu remanente sagitta arcu emissa altitudinis | mensurandae cacumen contingat. Post haec alterius fili summitas eodem modo sagittae alteri vel alicui iaculo alligetur, et horum utrumvis proiectum altitudinis radicem, ut prius cacumen, feriat. Quo facto utrumque filum retrahas, et, quot pedum vel cubitorum sit utrumque, diligenter mensuratum inspicias. Deinde cuiusque fili numerus in se ductus multiplicetur, et, quanta utriusque multiplicationis summa fuerit, perpendatur, ac minor summa de maiore subtrahatur, et tunc eius numeri, qui remanserit de maiori summa, tetragonale latus diligenter inquiratur. Hoc vero inquisito ac diligenter invento, sapienter tot pedum vel cubitorum ambiguitate semota altitudo, de qua inquiritur, pronuntietur, quot pedum vel cubitorum tetragoni illius latus unum habet. Et ut, quae dicimus, apertius cognoscantur, altitudo et fila cum notis et numeris figuraliter subiiciantur. Sit altitudo, quae investigetur, AB; sit prioris fili, quod summitatem tetigit, quantitas quinario numero determinata AC; sit alterius fili, quod altitudinis radicem percussit, longitudo quaternario numero diffinita CB. Post haec vero prioris fili numerus in se multiplicetur, in XXV concrescit; quatuor vero posterioris fili numerus in se ductus in XVI consurgit. Dein minore numero, id est XVI, de maiori, id est XXV, sublato erit remanens IX, cuius tetragonale latus III invenitur, quia III in se ductus in IX cumulatur. Trium igitur pedum erit altitudo AB. Sed quia potest accidere, quod remanentis tetragonale latus interdum integris numeris nequit inveniri, subtilitas minutiarum necessario debet adhiberi, de quibus, quia longum est disserere, praetermittatur, et figura cum numeris et notis supponatur.

Rebus in obscuris oritur lux clara figuris. (Fig. 23.)

Bis zu unserm Cap. XVII hat ein und dieselbe zweite Hand geschrieben, bishierher sind auch die mitgetheilten Ueberschriften der einzelnen Capitel mit rothen Versalien geschrieben vorhanden. Die weitern Abschnitte XVIII bis XXIV (34—40) sind dann ohne Unterbrechung, aber auch ohne jede Ueberschrift, nur durch grosse in rother Farbe ausgeführte Anfangsbuchstaben als solche kenntlich gemacht, geschrieben. Nur bei Cap. XXIV (40) ist wieder die Ueberschrift hinzugefügt. Die Hand, welche zuletzt schreibt, ist deutlich von den beiden vorhergehenden unterschieden, dass aber die Fortsetzung der vorhergehenden Capitel beabsichtigt ist, wird dadurch klar, dass Blatt 52 unten in der Mitte die lateinische Nummer VII trägt, während, abweichend von allen früheren Bezeichnungen, das folgende Blatt 53 auf der Vorderseite in der Mitte des unteren Randes die Bezeichnung VIII hat und rechts in der unteren Ecke die arabische Ziffer 9.

Betrachten wir nun für einen Augenblick zunächst den Inhalt der von der zweiten Hand geschriebenen zusammengehörigen Nummern, so sehen wir, dass die in den Druckausgaben als 22 und 23 bezeichneten Capitel oder Paragraphen vollständig fehlen. Von ihnen ist 22, nebenbei gesagt, das einzige Capitel, in welchem dreimal das Wort *alhidada* statt *mediclinium* vorkommt, und auf welches Weissenborn[1]) ein so grosses Gewicht gelegt hat. Nach den beiden einleitenden Paragraphen haben wir nun zunächst sieben Methoden der Höhenmessung, dann folgen drei Längenmessungen, eine Höhenmessung, welche auf die bei der einen Längenmessung benutzte Methode ausdrücklich Bezug nimmt, wieder eine Längenmessung, zwei Tiefenmessungen und zum Schlusse noch eine Höhenmessung.

Ausser den beiden schon genannten Capiteln 22, 23 fehlt vor allem die zweite Erklärung des *quadratum geometricum* nach der Darlegung einer Höhenmessung mit Hilfe eines beweglichen, aus Stäben zusammengesetzten rechtwinkligen Dreiecks ohne feste Hypotenuse in Cap. 28. an einer Stelle, wo diese Erklärung gerade so hinpasst, wie die Faust aufs Auge. Damit entfällt ein zweiter Vorwurf, welchen Herr Weissenborn[2]) der Darstellung dieses zweiten Theiles macht. Auch diese Erklärung findet sich nur in einer einzigen späten Handschrift, und dürfte ebenso wie Cap. 22 auf

1) A. a. O., S. 86 u. 92. Ich habe schon an anderem Orte (Deutsche Litteraturzeitung 1888, No. 22, Sp. 818) darauf hingewiesen, dass nur eine einzige Handschrift das Capitel 22 enthält, und dass, da diese erst dem XII. Jahrhundert angehört, man den Zeugnissen der übrigen Codices gegenüber wohl berechtigt sei, diesen Paragraphen als Interpolation eben dieser einzigen Handschrift anzusehen. 2) A. a. O., S. 104.

Interpolation beruhen. Es fehlt die Bemerkung in Cap. 25[a]: *Est etiam alia altitudinis metiendae regula etc.,* welche auch Pez nicht kennt, obwohl sie in den von Cantor[1]) als Fortsetzung der Gerbertschen Geometrie aus dem Salzburger Codex mitgetheilten Paragraphen sich befindet. Es fehlen die von Olleris in Parenthesen eingeschlossenen Zusätze, und die von Weissenborn[2]) richtig als Glosse erkannte Stelle am Schlusse von Cap. 16.

Alles in allem stellen diese XVII Capitel in der von unserem Manuscripte gegebenen Reihenfolge eine wohlgeordnete Anleitung zum Höhen-, Längen- und Tiefenmessen dar, nur muss man nicht verlangen, dass zwei Methoden, welche dem Wesen nach gleich, sich nur durch das angewendete Messinstrument von einander unterscheiden, von dem Verfasser oder Compilator auch als ein und dieselbe Methode erkannt werden. Wie soll der Mann, der nicht einmal die beiden Messungen mit den gleichschenklig rechtwinkligen und mit dem Pythagoreischen Dreiecke als ein und dieselbe Methode erkennt, dazu kommen, die in § 25[b] bei Olleris, unserem Cap. IX, abgehandelte Höhenmessung z. B. als im Princip auf dieselbe Methode wie die beiden vorhergehend abgehandelten beruhend anzusehen? Und wenn Herr Weissenborn[3]) behauptet, das in Cap. 33 bei Olleris, unserm XII, beschriebene geometrische Quadrat sei mit dem Horoscope und dieses wiederum mit dem Astrolabium identisch, so steht dem die Beschreibung selbst entgegen, in der es ja heisst: „*Post haec extremitati oppositi lateris mediclinium,* **ut in horoscopo,** *sic copulatur*“, wodurch deutlich genug gezeigt wird, dass das Horoscop von dem Schreiber für ein anderes Instrument gehalten wird, als das hier beschriebene *quadratum geometricum.*[4]) Um jene Zeit gab auch die kleinste Verschiedenheit eines Apparates Grund, denselben anders zu nennen, als den ähnlichen. Ich will nur an das *Instrumentum Albion* erinnern, das sich von dem unter dem Namen *Cylindrus* beschriebenen Zeitmesser Hermanns des Lahmen in fast gar nichts unterscheidet, aber eine ganze Litteratur hervorgebracht hat, wie jedes Handschriftenverzeichniss ausweisen wird. Wir von unserer bessern Kenntniss aus sagen, Astrolabium, Horoscop und Quadratum geometricum sind ein und dasselbe; zu Gerberts Zeiten war das eben nicht der Fall; speciell unterschied sich ja das Astrolabium vom Horoscope, wie Herr Weissenborn[5])

---

1) Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Leipzig 1875. Anmerkung 283. Hier hat Cantor jedoch nicht bemerkt, dass dieser Passus in der Ollerischen Ausgabe sich findet. Er hat freilich den Pezschen Thesaurus benutzt. 2) A. a. O., S. 111. 3) A. a. O., S. 104. 4) Dass das *Quadratum geometricum* stets für etwas anderes gehalten ist, als das *Astrolabium,* bezeugt auch Peurbach, dessen ebenso benanntes Instrument nichts weiter ist als eine verbesserte Form des Gerbert zugeschriebenen. 5) A. a. O., S. 109.

selbst hervorgehoben hat, durch seine Eintheilung nach *gradus dierum* statt der Zwölftheilung des Horoscopes.

Die von der dritten Hand geschriebenen 7 Capitel fügen den vorhergehenden nach, was die Hilfsmittel betrifft, neuen Methoden noch eine Reihe von Tiefen-, Längen- und Höhenmessungen hinzu. Die Längenmessungen, in die Form der Breitenmessung eines Flusses gebracht, sind wie die Höhenmessungen durch CANTOR[1]) als Messung mit der festen Stange charakterisiert worden. Den Schluss macht die militärische Höhenmessung. Von ihr meint Herr WEISSENBORN[2]), sie sei wohl von dem Verfasser nur zur Verspottung aufgenommen worden. Ich glaube gerade im Gegentheile, dass ähnliche Versuche wirklich gemacht worden sind, und dass, wenn alle Militärschriftsteller vor GERBERTS Zeit und ihre Werke auf uns gekommen wären, sich auch für diese Methode die Urquelle auffinden lassen würde, jedenfalls aber nicht bei einem Araber, sondern aus römischen Quellen.

Von derselben Hand, welche die Paragraphen 30—40 (unser XVIII bis XXIV) geschrieben hat, schliessen sich nun von den Ollerischen noch die folgenden an: 53—64; 66—84, 90, 93, 94. Darauf folgt wieder eine von allen vorhergehenden Händen verschiedene Hand, welche noch Folgendes hinzufügte: Cap. 41; 43; 46; 47—52; 64 nochmals; 65. Von den in CANTORS Agrimensoren, Anm. 283 veröffentlichten Stücken Absatz 1; Cap. 85—89; 91; 93; Agrimensoren, Anm. 283, Absatz 2 u. 3; Cap. 49, 2. Absatz; 46, 2. Absatz.

Ausser den Capiteln 22 u. 23 fehlen also noch gänzlich: Cap. 42; 44; 45; und von Cap. 56 die fünf letzten Absätze.

Für das Folgende begnüge ich mich wieder in der Reihenfolge, wie unsere Handschrift sie giebt, die *Varia lectio* mitzutheilen, wobei ich jedoch oftmals darauf aufmerksam machen werde, wann entweder durch die Anordnung der Capitel, oder durch die Lesart des vorliegenden Manuscriptes der Sinn des Ganzen gebessert wird, speciell auch Dittographien vermieden werden.

Seite **452.** (Cap. 53.) 5—6. *sunt dispositae.* — 6. *sic quaeratur.* — 7. *quinta sumenda est.*[3]) — 8—9. *numerum arborum, quam et alia inveniendi regula est.* — 10. *diuisis.* — 14. *id est.*

(Cap. 54.) 18. *Rumbi, cuius sint.* — 21. *rumbi.*

(Cap. 55.) 25. *Omnis trigonus aequilaterus unum latus.* — 26. ipsum latus.

453. 1. *similiter* fehlt. — 3. *Omnis* fehlt. — 4. *expostulat.* — 5. *medietatem reliqui.* — 6. *Omnis* fehlt; *qui aequis continetur lateribus* fehlt; *quater lateris.* — 7. *unius lateris* fehlt; *in se multiplicat.* — 8. *et*

1) Agrimensoren, S. 163. 2) A. a. O., S. 23—24. 3) Die Lesart: *sic quaeratur. Utriusque partis quinta sumenda est* ist jedenfalls richtig. Sie giebt erst einen vollständig zutreffenden Sinn.

reliqui. — 9. *Omnis* fehlt; *multiplicationem lateris* fehlt; *aream ter.* — 10. *Octogonus septies, aream quater.* — 11—12. *Ennagonus septies, aream quinquies.* — 13—15. *Decagonus octies, aream sexies, et caeteri ad hanc consequentiam.*

(Cap. 56.) 18. *rotundi vel circuli; et embadum invenire.* — 19 *XXII*[da] *unitate sublata.* — 23. *integrum, et tunc medietas vel quarta pars circuitus perdiametrum, et tunc totum, et idem.* — 25. fehlt.

454. 1—14 fehlen.

(Cap. 57.) 17. *emiciclo; diametrum XIIII.* — 19. *quarta decima fiunt CCCVIII.* — 20. *emicicli.*

(Cap. 58.) 23. *longitudo est pedum.* — 24. *Hi.* — 25. *Hi* fehlt; fient CXXXIIII ss. — 26. *pedes VIIII, unciae VII et* ꞩ; *semis* bis *semuncia* fehlt.

455. 1. *sphaera.*

(Cap. 59.) 6. *trigono.* — 8. *dinoscere.* — 9—14. *embado totius circuli per supradictas regulas invento XI vicesimas primas subtrahas, id est, tolle vicesimam primam et multiplica undecies, fit area circuli, multiplica decies, fiunt excessiones trigoni.*

(Cap. 60.) 21. *permixtio; unitate sublata.* — 23. *superficiei multiplicatae.* — 24. *demus de singulis.* — 25. *singula latera.* — 26. *sit embadum.* — 28. *id est CCXX.*

456. (Cap. 61.) 4. *Tetragoni; latera singula pedum X.* — 8. *fientque CCX.*

(Cap. 62.) 11. *aequis.* — 12. *eandem.* — 14. *augmentata.* — 15. *fient.* — 16. *exagonis.*

(Cap. 63.) 24—25. *uno interius, uno exterius.*

457. *tres decimas quartas.* — 2. *regulam, id est dimidio.* — 3. *scias* fehlt. — 4. *tribus decimis quartis superari. Ex.* — 5. *et ei quatuor.* — 6. *cuius quantitatis; demptae.* — 8. *et eam.* — 13. *L et VI.*

(Cap. 64.) 16. *habeat circuitu pedes CCC, in.* — 19. *totius montis. Sed ad iugera invenienda per pedes unius iugeri, id est* $\overline{XXVIII}$ *· DCCC ille supradictus.*

458. (Cap. 66.) 28. *maius XV.* — 29. *in se fiunt.* — 30. *fiunt; hypotenusa.* — 31. *fiunt.*

459. 1. *minor praecisura.* — 2. *quam cadit kathetus. Haec.* — 3. *CXLIIII.* — 6. ss. — 7. *minoris facito.*

(Cap. 67.) 10. *si vis oves.* — 11. mittere sic. — 12. *duc bis vicenus; de CC.* — 14. *implebis numerum.*

(Cap. 68.) 17. *quacumque.* — 24. *numerum XXXVIII.* — 25. *autem fuerit.* — 26. *latitudine; erunt LXXVI.*

460. 2. *Semotim ducas longitudinem.* — 3. *si vis perpendere.* — 5. *invenies embadum.* — 6. $\overline{V}$. *D* fehlt.

(Cap. 69.) 9. continet. — 10. una XXXIV, in altera XXXII; *agnoscas.* — 15. *VII tunc esse.* — 15—16. *in illud campo* fehlt.

(Cap. 70.) 19. *in secundo.* — 22. *perticas* fehlt. — 23. *hoc autem; unus et ς, remanentibus.* — 24. ubique fehlt.

(Cap. 71.) 28. *habet.*

461. 1. *comprehende. De.* — 2. Das dritte *id est* fehlt. — 6. *XCVI ςCςς et nichil.*

(Cap. 72.) 9. *in altero* $\overline{I}$. — 10. pedes fehlt. — 11. *fac.* — 12. *iunctae* fehlt; *fiunt; duae* fehlt. — 13. *fiunt.* — 16. *sume.*

(Cap. 73.) 21. *capiantur; ut unaquaeque; domus* fehlt. — 22. fac. — 23. *fiunt XLV.*

462. (Cap. 74.) 3. *si vis locare.* — 8. quinquies millies $\overline{\text{CI}}$. XCVI. — 8—9. *trigesies XX.*

(Cap. 75.) 12. *est pedum.* — 13. *implere.* — 16. *CXLIIII; per longitudinem et latitudinem multiplicans.* — 16—17. quater millies millia $\overline{\text{CXLVII}}$. CC. — 19. *pavimentum dictae basilicae; queunt.*

(Cap. 76.) 22—23. Die Glosse fehlt. — 23. *habet pedes.* — 24. *velis locare; pervius.* — 25. *quotiens sint; habeantur* fehlt. — 26. *quatuordecies; remanentibus duobus* fehlt. — 27. *sunt IV.* — 27—28. *VII quatuordecies.*

463. (Cap. 77.) 3. *XIV pedum.*

(Cap. 78.) 8. *ducas XIV.*

(Cap. 79.) 12. *emiciclo; basis sit.* — 13. *XXXVIIII et duabus.* — 14—15. *remanentibus, id est VIII* fehlt; *Quod idem.* — 18. *area sit.* — 18—19. *Ducatur quatuordecies, fiunt* $\overline{VIII}$. *DCXX IIII.*

464. (Cap. 80.) 1. *et his.* — 2. *hypotenusa.*

(Cap. 81.) 5—6. Die Glosse fehlt. — 7. *laevum, iugera sic.* — 8. *iugera* fehlt; *fit* fehlt. — 9. *pedibus constat. Ascensiumque in unum sume dimidiam, quae fit DCCC pedibus*[1]*); fiunt* $\overline{DCXL}$. — 10. repperies.

(Cap. 82.) 14. *in* fehlt. — 17. *eius* fehlt. — 22. *hypotenusa.* — 23. *ad summum; illic.* — 25. *visum tamdiu.*

465. 2 *illius rei, quam quaesiisti, tene.* — 2—3. *altitudinis inveniendi certa ratio est.* — 3. *erectus* fehlt. — 4. *plana sit.*

(Cap. 83.) 8. *in* fehlt.

(Cap. 84.) 22. *in se invicem ductis.* — 24. *fit.* — 25. Das zweite *de* fehlt. — 27. *diversitas* statt *profunditas.*[2])

---

1) Hier ist durch die Ergänzung der Sinn erst klar geworden. 2) Dass es *diversitas* heissen muss, wie auch Pez liest, ist klar. Wenn die Durchmesser des Fasses zu grosse Verschiedenheit zeigen, so ist die entwickelte Formel eben nicht mehr anwendbar.

467. (Cap. 90.) 22. *XX pedum.* — 23. *adicias.* — 24. *fiunt.* — 26. *id est* fehlt. — 27. *XLIV* fehlt.

468. (Cap. 93.) 21. *itemque.* — 22. *nosse; huius artis* fehlt. — 23. *tenuit.* — 24. *Syene usque Meroen; dispositique per.* — 25. *locorum* fehlt.

469. 1. *tot.* — 4. *notareque unumquemque.*[1]) — 8. *est mensurae.* — 9. *quingentorum.* — 10. *pertineat.* — 14—15. *portio.* — 17. *sextae horae.* — 18. *ut et.* — 19. *scribemus.* — 20. *sciroterum.* — 21. *exeat et aliquando* fehlt. — 22. *umbras* fehlt. — 24. *ingressum umbrae* fehlt.

470. (Cap. 94.) 7. *C, D, E.* — 8. *longissima erit umbra.* — 10. *describamus; stat.* — 11. *gnomo* ***AB*** *planitie* ***B.*** — 11—13. *umbram, et in planitie notemus signo D, sic et terram signo E, ut sint in vasi proportione longitudinis suae BEDC. Eiciamus hypotenusas.*[2])

446. (Cap. 41.) 6. *In ampligonio.* — 7. *super quam.*

447. 1—2. *hypotenusae minoris multiplicatione aggregata.* — 3. *multiplicationem; superhabundaverit adiecto uno.* — 4. *quotiens.* — 6. *nisi eiecturam.* — 7. *sumas latus, quod.* — 10. *fiet CL numerus embadi.*[3])

(Cap. 43.) 25. *trigonum orthogonium.*

448. 2. *superhabundaverit.* — 3. *videlicet iuncto.* — 5. *de* fehlt.

449. (Cap. 46.) 8. *scilicet* fehlt. — 11—17. fehlen.[4])

(Cap. 47.) 22. *adicias.*

(Cap. 48.) 28. *Trapitezii, cuius; embadum.*

450. 1. *dinoscere.* — 2. *basis plus quam coranstum ducas.* — 3. *sunt CCCCL; XX medium.* — 4. *invenitur* fehlt.

(Cap. 49.) 8. *singula latera.* — 9. *si vis prius; in se duc.* — 10. *DCCCC. Item alterius lateris mediam in se fient CCXXV. Hos detrahas de DCCCC remanebunt.* — 11. *basis.* — 13—25. fehlen.

451. (Cap. 50.) 3. *ysoscelis.* — 5. *in se, id est.*

(Cap. 51.) 12. *utrisque.* — 14. *CCCCL; dimidio, id est.*

(Cap. 52.) 24. *fient VIIII.*

452. 2. *et* fehlt.

Es folgt hier nochmals Cap. 64, genau in derselben Fassung, welche wir oben nachgewiesen haben.

457. (Cap. 65.) 25. *ducta.* — 27. *ducta.* — 29. *vel dempto uno et ducta.* —

---

1) Daraus folgt, dass die Pezsche Lesart *et notare* statt der von Olleris *notare etiam* die richtigere ist. 2) Der erste Abschnitt von Cap. 93 findet sich in der Ausgabe des Macrobius von Jan I, 219 Anmerkung zu 7, der zweite Theil, sowie das Cap. 94 ist aus Hyginus. (Siehe Gromatici veteres ed. Lachmann S. 188, 14—191, 11, wo auch der Schluss des Capitels gegeben ist.) 3) Es folgt noch offenbar ein Stück aus dem nächsten Capitel vorweggenommen: *Kathetus et basis sic quaerantur. Hypothenusae.* 4) Dadurch ist wieder ein Anstoss, welchen Weissenborn an diesem Capitel genommen hat, durch unsere Handschrift beseitigt. (Gerbert, S. 29 u. 33.)

458. 2. ducta. — 3—4 fehlen. — 6. *ducta.* — 8. *ducta.* — 9. *XXXVI facit quadratum, cuius quadrati latus acceptis VI et ducta.* — 12. *ducta; decima octava.* — 14. *ducta.* — 15. *accrescat numero.* — 16. *augmentationes* bis *naturaliter* fehlt. — 18. *et sic in caeteris.* — 19—20. *Inter* bis *caeteris* fehlt, steht aber von andrer Hand geschrieben auf dem obern Rande. — 20. *incipienti auctiones.* — 21—22. *Nam pentagoni multiplicatio.* — 23. *id est I et IIII.*

Es folgt hier mit der Ueberschrift: *Quotiens in leuga rotetur rota* der erste Absatz der Anmerkung 283 in den Agrimensoren Cantors mit folgenden Abweichungen[1]): 2. *a primis; habeat.* — 8. *Utali, Bawarii.* — 10. *sint in Mille ut quadragies quinquies; fiunt $\overline{IX}$.* — 11. *scilicet unus.* —

Daran schliesst sich der erste Absatz von Cap. 55 nochmals an, ohne Abweichung von dem Drucke. Nun folgt von Cap. 25 der vorletzte Absatz in folgender Fassung, zugleich Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 3.[2])

Est etiam alia metiendae regula, qua cum umbra ipsius altitudinis ipsa altitudo mensuratur, quam sic notam putamus, ut expositione carere aestimemus. Hae duae figurae principatum debent optinere cum suis regulis, sed parvitas spatii sic fieri vetuit.

Dazu sind die beiden Figuren 4 (Cap. V, 16) und Fig. 2 (Cap. III, 17) nochmals gezeichnet. Die Worte *Hae* bis *vetuit* sind aber wieder durchgestrichen, denn der Raum hätte sicher erlaubt, jene beiden Methoden nochmals abzuhandeln. Jedenfalls stand das genau so in der Vorlage, aus welcher abgeschrieben wurde, ist einfach übernommen, dann das nun Folgende ebenso mechanisch abgeschrieben, und ein späterer Ueberarbeiter, von dem mehrfach Randglossen vorhanden sind, hat diesen Passus gestrichen. Es folgen nun zunächst aus Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 4 und 5 mit folgenden Abweichungen:

31. *origenis.* — 34. *egresipum vel eugepium.* — 36. *decies quam tantum.* — 37. *est in latere a dorso.* — 38. *metieris.* — 39. *ad dexteram in sinistram, vel ad sinistram in dextram.*

Dann weiter

466. (Cap. 85.) 4. *Ex coadunatione.* — 5. *quanta summa concrescat.* — 7. *numerus terminorum.* — 8. *velis scire.* — 10—11. *impar autem numerus terminorum.* —

---

1) Jedenfalls geht aus dem Vorkommen dieses Absatzes in einer Handschrift des XI. Jahrhunderts hervor, dass er schon um jene Zeit vorhanden sein musste, also nicht erst im XII. Jahrh., wie Cantor und nach ihm Weissenborn annehmen, verfasst sein kann. 2) Dass sich der Passus bei Gerbert findet, war Cantor a. a. O. entgangen.

(Cap. 86.) 19. Ueber *inauraturam* ist übergeschrieben *id est soliditatem vel spissitudinem.* (Hierüber sehe man die Bemerkung am Schlusse der Abhandlung.)

(Cap. 87.) 3. *pedes* fehlt.

(Cap. 88.) 7. *facies.* — 8. *aequalis* statt *et qualis.* —

(Cap. 89.) 13. *octogonium.* — 14. *circulum;* die Glosse fehlt. — 15. *et* fehlt. — 17. octogonium.

468. (Cap. 91.) 3. *fuerit prisma; pedum VIIII.* —

(Cap. 92.) 11. *vel longilatero.* — 12. *summarum inde.* — 13. *diagonio.* — 17. *ducatur, de ea summa nona tollatur, remanet.* —

Nun folgt von Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 2 mit folgenden Abweichungen:

15. *genera sunt.* — 16. *est exterior.* — 17. *videre vis.* — 18. *triangulus* bis *duobus* fehlt. — 20. III^{es}; *quidem.* — 21. *determinent.* — 23. *descendant.* — 26. *tres circulos lineas.*

Hieran schliesst sich von gänzlich anderer Hand Cap. 49, 2. Absatz:

450. 14. *iterum basim et.* — 15. id est V, in se, qui. — 16. *fient.* — 18. *id est ex CLXIX; XIII* bis *fiunt* fehlen. — 19. *autem si.* — 21. *katheton quoque.* — 24. *dimidiam.* —

Endlich findet sich noch Cap. 46, Absatz 2:

449. 13. *orthogonis, vel oxigoniis, vel ampligoniis.* — 16. Die Glosse fehlt.

Damit schliesst Blatt 75^{v}. Auf dem untern Rande desselben steht die römische Zahl X, die letzte, welche als Bezeichnung der verschiedenen Lagen vorkommt. Auf Blatt 76^{r} steht schon die arabische Nummer 13. Zwischen den Blättern 41 und 47 sind fünf Blätter eingeheftet worden, welche die lateinische Ordnungszahl mit den arabischen in Widerspruch gebracht haben. Wie das gekommen sein dürfte, möchte ich hier noch auseinandersetzen:

Diejenige Hand, welche die ersten 13 Capitel des Gerbert abschrieb, sollte auch noch die Blätter 45 und 46 abschreiben. Da sie jedoch, vielleicht durch die eingeschalteten Figuren, zu weit vorgerückt war, — es blieben dem Schreiber nur noch $2\frac{1}{3}$ Seiten übrig, während er noch 4 Seiten schreiben musste —, so benutzte er die beiden noch übrigen Seiten zu andern Zwecken. Die zweite Hand hatte schon auf die ersten beiden Blätter einer vierblättrigen Lage ihr Pensum zu schreiben angefangen, nahm nun eine weitere vierblättrige Lage, schrieb auf die letzten beiden Blätter das von der ersten Hand Versäumte nach und benutzte die beiden ersten Blätter zu einem andern Stücke. Da aber der Raum von 4 Seiten nicht reichte, so wurde noch, wie deutlich zu sehen ist, ein 5^{tes} Blatt eingeheftet. Nehmen wir die fünf Blätter heraus, so ist die durch die lateinische Custodenbezeichnung angeordnete Reihenfolge der Quaternionen vollständig gewahrt.

Der 7. Quaternio hat dann 6 Blätter, der 8. ebenfalls 6 und ist ihm, um für zwei Figuren, für welche sonst der Platz mangeln würde, einfügen zu können, ein etwas kleineres Blatt eingeheftet worden; der 9. besitzt 8 Blätter, ebensoviel der 10. — Die fünf eingehefteten Blätter tragen die arabische Nummer 7, der mit VII bezeichnete Quaternio hat arabisch 8, der mit VIII bezeichnete, wie schon oben gesagt wurde, besitzt die Nummer 9, der mit VIIII bezeichnete die Nummer 10. Bei dem X. Quaternio hat der Schreiber wieder aus Versehen das ganze Blatt, welches das erste und achte desselben bilden sollte, hintereinander beschrieben; es musste daher einzeln eingebunden werden, und so haben denn die Blätter 68 und 69 die arabische Nummer 11, die 6 andern des Quaternio X aber 12. Damit schliesst aber nach unserer Ueberzeugung die ursprünglich beabsichtigte Handschriftensammlung ab, wie schon aus dem Fehlen der römischen Custoden im Folgenden einleuchtend sein dürfte. Wir werden später noch einen weitern Grund für unsere Behauptung aus der Beschaffenheit der Handschrift beibringen.

Auf den $2\frac{1}{3}$ Seiten, welche der erste Schreiber mit andern Sachen ausfüllte, und den drei Blättern, welche der zweite Schreiber einfügte, steht nun Folgendes:

9) Bltt. 40^v, 14—23: Gedicht über die Farbe der Lämmer.

Quis color in pullis pecodum si forte requiris,
His poteris signis sine visu noscere certis.
Agnus enim natus **be** *statim clamitat albus,*
Me *referat nigrum repetitis vocibus agnum,*
Alternat varius **be, me** *sic voce canorus.*
Talibus indiciis protendunt signa coloris.
Si sexum quaeris, his sensum decoque curis.
A *feminas notat, mares* **e** *voce serenat.*
Hoc habeas studium, si vis dinoscere verum,
Numquam falleris, si sic vigilabis in istis.

10) Blatt 41^r enthält zunächst das Fragment einer Anleitung, eine von einem andern gedachte Zahl zu errathen. Ich setze dasselbe hierher, vielleicht gelingt es jemandem, die Herkunft desselben festzustellen.

et ex quincuplatione natum numerum decies ducere. Postea quot centenarii exinde concreverint interroges, et quotquot centenarii fuerint, tu L superesse sciens, ipsosque L cum ducentis auferens, quot centenarii his sublatis remanserunt, tot tu unitates collige, et ex his numerum, quem ille concepit, minime cuncteris edicere.[1])

1) In dem CLM. 14908, Bltt. 38^v findet sich aus dem XV. Jahrhundert folgende ähnliche Betrachtung. *Nota nym fur dich ein zal, wye uil du wilt, exempli gracia Ich nem fur mich 17. illa duplica; erit 34, adde 5, erit 39; nunc multiplica 39*

11) Daran schliesst sich Bltt. 41^r, 7 bis 41^v, 18, das aus den *Carmina Burana* No. 92 bekannte Gedicht „*Ludus scacorum*“. So heisst bei uns ebenfalls die Ueberschrift.

Anfang: *Qui cupit egregium scacorum noscere ludum,*
Audiat, ut potui carmine composui.

Schluss: *Sepius est mattus servorum turbine septus,*
Et mattum suffert, si via nulla patet.

12) Darunter stehen die beiden Verse

Quatuor. et penta. duo. monas. tris. mias. unus.
Hinc dias. ambo. trias. unus. dias. et duo. monas.

Sie sind an späterer Stelle (Blatt 80^v) wiederholt und ihre Gebrauchsanweisung beigefügt. Es sind Verse, welche die Anordnung enthalten, um das sogenannte Josephspiel, *ludus Joseph*, mit Christen und Heiden, von denen die Hälfte über Bord geworfen werden soll, so durchzuführen, dass nur Heiden das Loos trifft.

13) Bltt. 42^r—44^v enthalten einen arithmetischen Tractat, welchen ich, seines hohen Interesses halber, vollständig folgen lasse. Von der Hand, welche das Inhaltsverzeichniss schrieb, ist übergeschrieben „*Wirceburgensium*“. Worauf sich das gründet, wird später klar werden.

| DE AGGREGATIONE NATURALIUM NUMERORUM.

Si naturales numeros, id est I, II, III, IV, V et ceteros quotlibet ordinatim volueris aggregare, et quotum pariter conficiant numerum invenire, ultimum aggregandum, si par sit, in duo aequa divide, et per medietatem eius imparem sequentem multiplica. Si autem impar sit, eum nichilominus in duo seces, et per maiorem partem ipsum imparem ultimum scilicet aggregandum multiplices, et numerum totius aggregationis invenies. Taliter autem nati numeri trigoni vel trianguli solent nuncupari.[1])

---

cum 5 erit 195; adde 10, erit 205; illa multiplica cum 10 facit 2050. Nu merck sein regel, et est 350, dy zeuch ab von der sum, vnd waz vber pleibt; daz tail in 100, et sic factum est. Et idem est, cum vis scire, quid unus iaceret cum tribus taxillis. Noch näher dürfte folgendes aus dem CLM. 14684 dem XIV. Jahrh. angehörend dem Obigen kommen (Blatt 30^v, 23—27): *Si velis scire in quota feria osculatus est aliquis amicam suam, dic ei, quod duplet feriam adiciendo 1, quot totum multiplicet per 5, post hoc productum per 10, et de tota summa reiciat 50. Post hoc quaere hanc certitudinem, quotiens possint 100 subtrahi de tota summa. Si semel sit, est dies dominica, si bis, secunda feria, si ter, tercia feria, et sic deinceps.* Würde hier 5 statt 1 addiert sein, so würde genau die Regel unseres Manuscriptes herauskommen.

1) Ist das letzte Glied $2n$, so ist die Summe $n(2n+1)$, ist aber das letzte Glied ungerade, also $2n+1$, so entsteht $(n+1)(2n+1)$ als Summe.

DE IMPARI NUMERO AGGREGANDO.

Si impares tantum numeros vis aggregare, idem ultimum aggregandum in duo divide ita, ut unitas tantum aequalitatem inpediat, et maiorem partem in sese multiplicans, quod quaesieras, invenies. Tales quoque numeri tetragoni vel quadranguli solent nominari.[1]

DE PARIBUS AGGREGANDIS.

Si autem pares mavis aggregare, idem proximum imparem sequentem in duo simili modo partire, et per minorem partem maiorem multiplicans repperies, quod quaesieras. Et hii itidem numeri parte altera longiores ab Arithmeticis solent vocari.[2]

Singularis unitas in omnes articulares unitates intenditur, si per singulas superparticulares species tot proportiones assumis, quot duplas a triangulari unitate ponis. Et omnes articulares unitates in singularem unitatem remittantur, si per singulas superparticulares species tot propor|tiones aufero, quot intendendo assumpsisti. Sicut a singulari unitate incipiendum est, cum intendis, item ab articularibus unitatibus item incipiendum est, cum remittis. Quoscumque repperias in superparticulari ultimos praecedentis speciei copulativos, scias esse sequentes eodem numero non eadem parte; et tot ex illis superpatientes procedere, quot superparticulares. Sive intendas, sive remittas, copulativos, quos praedixi, invenire non neglegas. Quibus inventis, si qua incuria deviabis, per illorum inventionem ad certum tramitem remeabis. Sicut pater cum parvulo puero vel filio loquitur, ut ab eo possit intellegi, sponte palbutiit, ita item vellem abacista humili et simplici sermonis mei inductione ad intelligenda, quae dicturus sum, viam parare, si pateretur hoc subtilitas et obscuritas ipsius rei, quae adhuc inculta et ab ipsius sapientiae thesauris noviter producta nemini patet, nisi in numerorum computatione bene exercitatis, nec his, nisi omni mentis intentione intellectum exhibeant.

In requirendis copulativis memor esto, quoto loco primus subsesqualter ponatur ab unitate, et quem eodem loco triplum invenies ab unitate, sit copulativus sesqualterae et sesquitertiae et radix superbipartientium.

Item, quem eodem loco quadruplum invenias ab unitate, sit copulativus sesquitertiae et sesquiquartae radixque supertripartientium.

---

1) Ist das letzte Glied $2n + 1$, so ist dieses nach der Regel in n und $n + 1$ zu theilen. Die Summe aber ist $(n + 1)^2$. 2) Ist wieder das letzte Glied $2n$, so soll $2n + 1$ in n und $n + 1$ zerlegt werden, und die gesuchte Summe ist $n(n + 1)$.

Item quem eodem loco quincuplum invenias ab unita|te copulativus sit sesquiquartae et sesquiquintae radixque superquadripartientium.

Item, quem eodem loco sescuplum invenias ab unitate, copulativus sit sesquiquintae et sesquisextae radixque superquinquepartientium.

Item, quem eodem loco septuplum invenias ab unitate, copulativus sit sesquisextae et sesquiseptimae radixque supersexpartientium.

Item, quem eodem loco octuplum invenias ab unitate, sit copulativus sesquiseptimae et sesquioctavae radixque superseptempartientium.

Item, quem eodem loco nonuplum invenias ab unitate, sit copulativus sesquioctavae et sesquinonae radixque superoctopartientium.

Hac inventione copulativorum contentus numeros copulativos interpositos his praeceptis quaeras. Secundum arbitrium tuum ordinatis in radice ab unitate duplis, medietatem per ternarium multiplica, et primum sesqualterum procreabis; sic deinceps ternarii per medietatem procreati ducto per solos sesqualteros ad primum copulativum ascendis.

Hic expers medietatis ad procreandum primum sesquitertium tertiam suam multiplicandam dat quaternario; sic deinceps quaternario per tertiam procreati ducto per solos sesquitertios ad secundum copulativum ascendis.

Hic expers tertiae ad procreandum primum sesquiquartum quartam suam multiplicandam dat quinario; sic deinceps quinario per quartam procreati ducto per solos sesquiquartos ad tertium copulativum ascendis.

Hic expers quartae ad procreandum primum sesquiquintum, quintam suam multiplicandam dat senario; sic deinceps senario per quintam procreati ducto per solos sesquiquintos ad quartum co|pulativum ascendis.

Hic expers quintae ad procreandum primum sesquisextum sextam suam multiplicandam dat septenario; sic deinceps septenario per sextam procreati ducto per solos sesquisextos ad quintum copulativum ascendis.

Hic expers sextae ad procreandum primum sesquiseptimum septimam suam multiplicandam dat octonario; sic deinceps octonario per septimam procreati ducto per solos sesquiseptimos ad sextum copulativum ascendis.

Hic expers septimae ad procreandum primum sesquioctavum octavam suam multiplicandam dat novenario; sic deinceps novenario per octavam procreati ducto per solos sesquioctavos ad septimum copulativum ascendis.

Hic expers octavae ad procreandum primum sesquinonum nonam suam multiplicandam dat denario; sic deinceps denario per nonam procreati ducto per tot varietates partium, per tot discrimina proportionum unitas reddit in suam formam.

Insuper haec est admirabilis consideratio huius figurae, in qua continentur tres unitates: prima ex qua intenditur, tertia de qua remittitur, media per quam intenditur et remittitur, et quod per omnes assumptiones superparticularium proportionum partes numeris, quibus partes fiunt, et forma et quantitate diversae sunt; in solis sesquinonis partes numeris suis fiunt conformes, et sicut transcensis sesquinonis unitas reddit in suam formam, ita transcensis sesquioctavis in sesquinonis eadem est forma numerorum, quae suarum partium.

Nec illud praetereundum | est, quod in singulis superparticularibus speciebus duae certae et legitimae partes inveniuntur in sesquialteris media et tertia, in sesquitertiis tertia et quarta, in sesquiquartis quarta et quinta, in sesquiquintis quinta et sexta, in sesquisextis sexta et septima, in sesquiseptimis septima et octava, in sesquioctavis octava et nona, in sesquinonis nona et decima, ita ut prima omnium dux sit ad intendendum, secunda omnium dux sit ad remittendum. Non enim uniformiter intuenda est haec intentio ab unitate, cuius singularis et simplex assumptio fit VIIII modis, quorum primus assumit in superparticulari VIII, numerus secundus XVI, tertius XXIIII, quartus XXXII, quintus XL, sextus XLVIII, septimus LVI, octavus LXIIII, nonus LXXII, ut omnes assumptiones octonario numerositate se transcendant. Sed nos computistarum sollertiae ceteros numeros relinquentes, ultimum et maximum cum omni diligentia et magna affectione speciem cum suis partibus, quorum generatio talis est. Primi copulativi tertiam per V multiplica, et primum superbipartientum procreasti, sic deinceps quinario per tertiam procreati ducto ceteros superbipartientes aggregasti. Item secundi copulativi quartam per VII multiplica, et primum supertripartientem procreasti; sic deinceps septenario per quartam procreati ducto ceteros supertripartientes aggregasti. Item tertii copulativi quintam per VIIII multiplica, et primum superquadripartientem procreasti; sic deinceps novenario per quintam procreati ducto ceteros superquadripartientes aggregasti. | Item quarti copulativi sextam per XI multiplica, et primum superquinquepartientem procreasti; sic deinceps undenario per sextam procreati ducto ceteros superquinquepartientes aggregasti. Item quinti copulativi septimam per XIII multiplica et primum supersexpartientem procreasti, sic deinceps XIII^{0} per septimam procreati ducto ceteros supersexpartientes aggregasti. Item sexti copulativi octavam per XV multiplica, et primam superseptempartientem procreasti; sic deinceps XV^{0} per octavam procreati ducto ceteros superseptempartientes aggregasti. Item septimi copulativi nonam per XVII multiplica, et primum superoctopartientem procreasti; sic deinceps XVII^{0} per nonam procreati ducto ceteros superoctopartientes aggregasti.

Sufficiant haec praecepta de sola intentione unitatis huius scientiae amatoribus. Quem copiosior investigatio delectet, certus sit, omnium digitorum reformationem si id(!) articulis reperturum, si per singulas superparticulares species tot proportiones assumuntur, quot dupli a singulari digito ponuntur. Praeterea inveniuntur in hac calculatione reformationes ab omnibus speciebus multiplicis. Sed nos *Wirzeburgenses*[1]) de illis dicere differimus, donec cognoscamus, quid inde moderni iudicant philosophi, utrum nostrum an veterum aestiment inventum, tribuant ab illis residuas reformationes requirant.

Eine Reihe, wie sie der Autor fordert, ist z. B. die folgende:

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100.

Die *numeri copulativi* sind hier 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90. Zuerst ist zweimal die *proportio dupla* vorhanden, dann zweimal *proportio sesqualtera*, da aber 9 *expers est medietatis,* so tritt nun die *Proportio sesquitertia* zweimal auf; ebenso ist wieder 16 *expers tertiae etc.* Zuletzt ist 81 *expers octavae,* deshalb tritt an Stelle der *proportio sesquioctava* die *sesquinona,* welche dann nach noch zweimaliger Anwendung die 100 zum Vorschein kommen lässt, den *articulus* zu dem *digitus* 1. Anders ausgedrückt lässt sich die obige Reihe auch in der Form folgenden Produktes schreiben:

$$1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} = 100.$$

Geht man etwa von dem *digitus* 5 aus, so erhält man die Reihe:

5, 10, 20, 40, 60, 90, 135, 180, 240, 320, 400, 500, 625, 750, 900, 1080, 1296, 1512, 1764, 2058, 2401, 2744, 3136, 3584, 4096, 4608, 5148, 5832, 6561, 7290, 8100, 9000, 10000

oder als Produkt geschrieben:

$$5 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot$$
$$\cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} = 10000.$$

14) Nach der *Geometria Gerberti* folgt jetzt Blatt 76^r—77^v, 6 ein Stück mit dem Anfange: „*Tria Genera Musicae studiosis comprehensa esse feruntur*“ und dem Schlusse: „*Octavum habet primum in se duplum*“. Nach dem Handschriftenverzeichniss ist es ein *Tractatus de mensura fistularum organicarum,* Auszug aus Aureliani *de Musica* in dem Sammelwerke Gerberts.[2])

15) Daran schliesst sich ohne irgend welchen Absatz Blatt 77^v, 7—18: ein Abschnitt *de Luna.* Anfang: „*Etatem lunae multiplica per quatuor*“, Schluss: „*Ubicumque haec lunatio completa fuerit, in die sive in nocte ibi sequentis initium esse cognoscat.*“

16) In derselben Zeile fortfahrend erstreckt sich dann bis Blatt 78^r, 15 ein Stück „*de mensuris*“. Anfang: „*Hora habet punctos V. Minuta X.*

---

1) Hieraus hat der spätere Glossator seine Ueberschrift „*Wirceburgensium*“ genommen. 2) *Scriptores ecclesiastici de musica.* St. Blasien 1784. Bnd. I, S. 32 ff.

Uncias XII, partes XV. Momenta XL, Ostenta LX“ und schliesst: „*Centuria antiquitus C iugerum erat, postea duplicium. pristinum tamen obtinuit nomen.*“

17) Von Blatt 78r, 15 bis 78v, 5 findet sich wiederum absolut anschliessend der dritte Absatz des Cap. 82 von GERBERTS *Geometrie* (OLLERIS, 464—465). *Varia lectio:* **464.** 19. *alia* fehlt. — 20. *vel trium* fehlt; *sit* fehlt; *vel IV* fehlt. — 20—21. *vel V* fehlt; *rem illam.* — 23. *ad terram* fehlt; *in summum.* — 23—24. *illic, ubi basis hypotenusae iungatur.* — 25. *que* fehlt; *summum tibi.* — 27. *et* fehlt. —

465. 1. *illius, et hoc spatio.* — 2. *altitudine illa, de qua.* — 2—3. *Haec ratio pro altitudine certissima est.* — 4. *plana sit.* —

18) Blatt 78v, 6—80r, 17: „*Incipiunt numeri, per quos potest, qui voluerit, alterius cogitationes cognoscere de numero quolibet, quem animo conceperit.*“

Das Stück ist abgedruckt in *Bedae venerabilis opera*[1]), und ich gebe hierunter die Abweichungen der Handschrift dem Drucke gegenüber an.

Theil I, Spalte 100. 2. *assumetur.* — 3—4. *Qui triplicatus.* — 6—7. *fuerint. iterum triplicabis, quae maior fuerit.* — 8. *triplicatur VIIII; possunt.* — 10. *est autem quod postquam triplicetur.* — 13. *fuerit.* — 13—14. *remansissent.* — 14. *aliquod supra remansit.* — 16. *est numerus; mente fuerat.* — 18—19. *fiunt VI. Sex vero diuisi per binarium III fiunt. Qui triplicati in VIIII consurgunt, nec aliquid remanet.* — 20. *primum.* — 22. *et* fehlt.

101. 1—3. *in senarium* bis *dictum* fehlt. — 5. *idem* fehlt. — 8. *quilibet* fehlt. — 8—9. *ac triplicetur, triplicatus vero.* — 10. *numeri* fehlt. — 11. *esse ambas.* — 12. *unus adsumatur.* — 21. *quot novenarii in eis; interrogetur.* — 23. *quot* statt *quotquot; tot novenarios.* — 24. *ut* fehlt. — 25. *faciunt, qui divisi.* — 27. *qui divisi.* — 29. *est* fehlt. — 29. *sunt* fehlt. — 30. *tunc in maiori.* — 31. *In quatuordecim semel, de his IIII.* — 33. *fiunt VI.* — 34. *primum.* — 36. *paritati* fehlt. — 39. *quia haec bis diuiditur et triplicatur.* — 41. *vero* fehlt. — 43. *quislibet.* — 44. *Quamcumque.* — 44—45. *cuius feriae.* — 47. *iungere debet; est* fehlt. — 48. *decies totum.* — 49. *toto CCL tollere.* — 50. *teneto, ut* fehlt. — 52. *quinquies ducti; qui decies.* — 53. *de totius summae collectione* fehlt. — 54. *et* fehlt; *centenarii remanserint.* — 55. *superius dictum est.* — 60. *quinquies fiunt XLV.* — 60—61. *decies fiunt ducti.* — 62—70. *si de tertia* bis *significant* fehlt. — 70. *qui quinquies.* — 71. *fiunt* fehlt. — 72. *qui* bis *significat* fehlt; *si autem de.* —

1) *Venerabilis Bedae Presbyteri Anglo-Saxonis viri sua aetate doctissimi Opera quotquot reperiri potuerunt omnia. Hac ultima impressione ornatius in lucem edita.* Coloniae Agrippinae Sumptibus Johannis Wilhelmi Friessem. Anno MDCLXXXVIII. 8 Bde. fol. ist die benutzte Ausgabe.

73. *VII*^{a} *ratio habeatur; fiunt XIIII.* — 74. *qui quinquies; fiunt CV. Hi vero decies.* —

102. 1. *multiplicati fiunt; et remanent.* — 3. *tuum* fehlt.[1])

19) Das Blatt 80^{r}, 17—80^{v} 18 Befindliche ziehe ich seines Interesses halber vor vollständig mitzutheilen. Es lautet:

: ⋮ . ⁘ ⁙
AEIOV

V ⁝ RS ⁘ S + B :: N · F : C ·· ⁝ P · SC :: P · GL :: R · :: S · Q ⁙⁝ M : RT · R · S

Genus huius descriptionis, tam quod supra punctis V et vocalibus, quam subtus equalibus vocalibus, quam solitum est, informatum continetur, fertur, quod sanctus Bonifacius archiepiscopus et martyr de angulis saxis veniens hoc antecessoribus nostris demonstraret, quod tamen non illo inprimis coeptum est, sed ab antiquis istius modi usus crevisse comperimus.

B · F · K · P · X · KBRXS · X$\bar{P}$PFPRIKS · TKRPKNS TERSBFFKRP · BRCHKIF · NFNSSCKPTPRRFGNKXTDFCXS · B · O · X · R · K · A · E · I · O · V · B · F · K · P · X.[2])

20) Ad fures inveniendos scribis in quattuor foliis lauri ana ∗BAAA ÑAhAnAAABANAA, et mittis immissorio, et vocas, quem suspectum habes, et manducare non poterit. Ad fures inveniendum pingis in IIII^{or} foliis lauri $^{a}{}_{a}$⁞∗B33⁞333 istas formulas, et vocas eum, quem suspectum habes, manducare non poterit.

21) Quatuor · et pentas · duo · monas . tris · mias · unus.
Hinc dias · ambo · trias · unus · dias · et duo · monas.

Quorum quidem versuum universalis regula tali poterit monstrari experientia, ut non solum sicut in his versibus auferendi auferantur, sed etiam quovis numero, quos volueris tollantur. Ponantur enim quilibet numeri duplici proportione constituti, quorum, quem vis remanere, duplus ponatur, quem vero vis auferre, subduplus ponatur. Computo solummodo per VIIII, vel VIII, vel quemcumque numerum voluero, et quem VIIII, vel VIII, vel quicumque numerus, per quem computavi, monstraverit, tollo,

---

1) In dem bekannten Buche des Jesuiten Leurechon: „*Recreation mathematique. Composee de plusieurs problemes plaisants et facetieux En faict d'Arithmetique Geometrie, Mechanique, Opticque, et autres parties de ces belles sciences. Au Pont-à-Mousson. M.DC.XXVI.*" ist das *Probleme I. Deuiner le nombre que quelqu'un aurait pensé,* nichts weiter als eine ziemlich wörtliche Uebersetzung dieser Abhandlung von Beda dem Ehrwürdigen. Ob schon der Vorgänger Leurechons, Bachet, dieselbe aufgenommen hatte, ist mir nicht bekannt. 2) Dass hier der Schreiber seine Vorlage falsch abgeschrieben hat, ist klar. Es soll überall *A* durch *B*, *E* durch *F*, *I* durch *K*, *O* durch *P*, *U* durch *X* wiedergegeben sein. Anfang und Schluss sind klar: *A.E.I.O.V. Karus Christoforius Tiro . . . . . architenens ciotoregni ut decus auri AEIOUBFKPX,* aber die Zwischenworte zur Lösung zu bringen, ist uns nicht gelungen.

et inde duplos tuli, subduplos pono, et eodem duplos, quo ordine positi, si auferendi sunt, aufero.[1])

22) Hieran schliessen sich wieder (Blatt 80^v, 19—82^v) von derselben Hand ohne jeden Absatz geschriebene Wiederholungen von Capiteln der Gerbertschen Geometrie und zwar von den Olleris-Capiteln die Nummern 22, 23, 28, 32, 34, 35, von denen das letzte mitten im Satze abbricht, so dass der Schreiber des Inhaltsverzeichnisses darunter „deest“ geschrieben hat. Figuren sind nicht beigegeben, die Hand ist keine von denen, welche früher in der Geometrie Gerberts vorgekommen sind. Ich lasse die Varianten hier folgen.

433. (Cap. 22.) 4. *cuiusque.* — 5. *dumtaxat.* — 6. *halgidadae.* — 8—9. *halgidadae.* — 8. *stet* bis *supra* fehlt. — 10. *proportionum altitudo* fehlt. — 12. *habent.* — 12—13. *umbrae.* — 15. *si omnes XII.* — 17. *halgidada.* — 18. *corporis erecti.* — 20. *transversum.*

(Cap. 23.) 23. *Si vero est invenire; operatio sit.* — 24. *quacumque cuiusque diei; astrolabium.* — 25—26. *et* bis *corpore* fehlt. —

437. (Cap. 28.) Stimmt absolut mit der oben (S. 90) gegebenen *varia lectio* überein, auch darin, dass die zweite Beschreibung des *quadratum geometricum* sich nicht vorfindet.

439—440. (Cap. 32.) 5. *est* fehlt. — 6. *sit notum.* — Alle übrigen Varianten sind die nämlichen wie oben (S. 85).

442. (Cap. 34.) 5. *Puteus autem.* — 6. *et* fehlt; *in profunditate.* — 7—8. *pedes tuos hasta alia similis.* — Auch die übrigen Varianten, besonders die Einschaltungen gegen den Druck, wie sie oben (S. 92—93) angegeben sind, sind vorhanden.

---

1) Die Aufgabe wird zuerst in Hegesippus *de bello judaico* erwähnt. Cantor hat sie als Bestandtheil der mathematischen Betrachtung zuerst bei Chuquet im XV. Jahrh. nachweisen können. Hier haben wir sie schon aus dem XI. Jahrh. und zwar offenbar nicht als etwas Neues, sondern auch schon als alten Bestand. Der Verfasser scheint sich nur die allgemeine Lösung zuzuschreiben, dass nicht, wie bei der gewöhnlichen, es immer der neunte Mann sein muss, welchen das Loos trifft. Aus dem Clm. 14908 auch dem XV. Jahrh. angehörend, wie Chuquet, entnehme ich über dieses sogenannte Josephspiel folgende Merkverse. Die hinzugeschriebenen Zahlen besagen, der Wievielte jedesmal durch das Loos ausgemerzt werden soll. Nur die Vokale haben den Zahlenwerth $a = 1$, $e = 2$, $i = 3$, $o = 4$, $u = 5$.

Rex angli cum veste bona dat signa serena. 10.
Non dum pena minas a te declina degeas. 9
Arte parare mea veniant adistere secte. 8
Larga dei pietas bene manes omnia papam. 6
Ibant per montes, querebant desidiosa. 12 proponendo videas.
Item 15 christiani et 15 iudei.

Siehe des Weitern meine Abhandlungen in der *Bibliotheca mathematica* 1894 und 1895, wo Nachweisungen aus dem X. und XII. Jahrhundert gegeben sind.

(Cap. 35.) Stimmt ebenfalls mit der früheren Lesart überein. Der Schluss von Seite **443**, 3 *plum est* bis *in aliis* (Zeile 5) fehlt.

23) Mit Blatt 83^r beginnen Auszüge aus den *Gromatici veteres*[1], und zwar *Nomina limitum et agrorum*[2] (I, 246, 25—249, 5), beide jedoch in folgender Weise durcheinander gemischt (Blatt 83^r, 1—17):

Orientales dicuntur decumani. Ager assignatus. Septemtrionales. cardines. Ager centuriatus. Maximi k. m. Ager subseciuus. Actuarii. Ager dextratus. Intercisiui. Ager citratus. Quintarii. Ager tesselatus. Cultellati. Ager normalis. Nouali. Ager triumuiralis. Maritimi. Ager neronianus podismatus. Temporales qui solis ortum sunt secuti. Ager commutatus ex beneficio Augusti. Gallici. Ager locorum. Regales. Ager sinistratus. Subruncivi. Ager ultratus. Sellati. Ager epidonicus. Linearii. Ager tetragonus. Sextanei. Ager cultellatus. Tetragonales. Ager solitarius sylanus. Montani. Ager caesarianus. Austrinales. Ager meridianus. in XXV iuga. Qui per anticam et posticam diuiduntur. In potenii salas. Prefecturales. Ager ex alieno sumptus. Egregii. Ager cineribus deputatus. Undecimani. Ager intraclusus. Colonici. Ager qui finibus augustinori continet. Passivi. Solitarii et Perpetui. —

Blatt 83^r, 18—83^v 18 folgt *Ratio limitum regundorum* (I. 358, 15—359, 10). Die Namen der Limites $A \cdot B \cdot C$ u. s. w. fehlen. Bei I fehlt die Angabe der Länge. Bei K steht CCCL statt ∞CL; bei L statt ∞∞, CCCC; bei N CC statt ∞C; bei O CCC statt ∞C; bei T MC statt MD; bei V MCC statt MDC; bei Z endlich MCCCC statt MCCC. —

Es folgt 83^v, 19—20. *De mensuratione iugeri* (I, 359, 12—13). Darin steht *terram* für *terra*. Weiter

83^v, 21—84^v, 12. *De compositione limitum vel terminorum.* So die Ueberschrift des Codex. (I. 359, 15—360, 32): **359.** 17—18. *interpretaretur non extorquet, sed ita est.* — 20. *extorquet.* — 22. *Babylonis* fehlt. — 23. *impinguet.* — 25. *inveniuntur signa.*

360. 6. *cissuram.* — 10. *victum.* — 11. *epictaticum; massaticium.* — 15. *fontentem(!).* — 17. *scissuram.* — 18. *scissum.* — 20. *Terminus si trestas circa(!).* — 21. *nominum bifurcium samarcia.* — 22—23. *si* bis *dare* fehlt. — 25. *olivastellam.* — 26. *convallium.* — 28. *demonstrat.* — 31. *demappas.*

---

1) Die Schriften der Römischen Feldmesser bearbeitet und herausgegeben von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Erster Band. Texte und Zeichnungen. Berlin bei Georg Reimer 1848. Auch unter dem Titel: *Gromatici Veteres ex recensione Caroli Lachmanni. Diagrammata edidit Adolfus Rudorffius.* Berolini Impensis Georgii Reimer. 1848. 2) Der Titel findet sich nicht in der Handschrift. Im Folgenden wird stets gesagt werden, ob das Manuscript die betreffende Capitelüberschrift hat, oder nicht.

Ohne weitere Ueberschrift folgt (Blatt 84^{v}, 12—85^{r}, 17) Gr. V. I. 361, 3—362, 6.

361. 3. *invenies in quadrifinio.* — 4. *sunt positae in qudrifinio.* — 7. *et* fehlt. — 9—10. fehlen. — 11. *in fine.* — 14. *Pressum.* — 15. *Olivastellam.* — 20. *direxerimus.* — 21. *direxerimus.* — 25. *in fine* fehlt. — 32. *collectarium.* — 33. *picititos.* —

362. 2. *nativales.* — 6. *observantur.* —

Nun folgt mit der Ueberschrift: *Quomodo literae latinae sive graecae terminorum rationem et locorum qualitatem designant,* erst von Blatt 85^{r}, 17—86^{v}, letzte Zeile I, 362, 30—364, 22 und daran ohne Unterbrechung anschliessend (Blatt 86^{r}, l. Z.—87^{r}, 18) I, 325, 12—327, 3.

362. 30. *in singulis terminis; quas.* — 31. *sunt nudorum sed rationes.* —

363. 3. *invenies* fehlt; *bifurcium.* — 7. *decimanum.* — 18. *rigarum.* — 20. *invenies* fehlt. — 24. *finalem.* — 28. *habentes atque a septentrione.*

364. 2. *signis aliis; finales literas.* — 3. *tytulus* beidemale. — 6. *rivum respicit.* — 7. *collicaelum.* — 9. *inveneris; possionem.* — 15. *decumano fine.* — 17. *habet* fehlt. —

325. 14. *vivas duo sub se flumina.* — 15. *aspectus.* — 16. *mordet ibidem.* — 21. *si colligit.* — 25. *iacet* fehlt. —

326. 2. *vivam, habet flumen.* — 4. *sub* fehlt. — 7. *inferius laucrum est.* — 9. *colliget.* — 10. *gramen germanum.* — 13. *vivam aquam.* — (π und ϱ sind miteinander vertauscht). — 17—18. *vivam aquam.* — 19—20. *revertitur in aquam.* — 22. *habet* fehlt. — 25. *et* fehlt. — 25—26. *et* bis *inferius* fehlt. —

Mit der Ueberschrift: *De conditionibus et mensuris agrorum* folgt nun Blatt 87^{r}, 18—89^{r}, 4; I. 354, 2—356, 10.

354. 2. *iugerum; CCLXCXVIII.* — 15. *igitur una tabula perticas quadratas.* — 6. *per unum latus.* — 27. *L, nam cum metiri; quot.* — 8. *se* fehlt. — 9. *VIII tabulas* fehlt. — 10. fehlt. — 12. *multiplica.* — 13. *si sumis.* — 14. *remaneant.* — 19. ∞ fehlt; *tabulam unam LXMDCCCLX.* — 20—21. *trigonia ysopleurus.* — 21. *unum latus.* — 22. Das erste *latus* fehlt. — 23. *quae sunt; tabulas.* — 24. *perticas.*

355. 1. *in uno latere.* — 2. Die drei *et* fehlen. — 3. *dividis.* — 5. *quem dividi.* — 8. Ueberschrift: *De agro lunato.* — 9. *aequas* fehlt. — 10. *et unam partem facis.* — 12. *II tabulae.* — 15. *habeat* fehlt. — 18. *decimam* fehlt; *DCXXVI S.* — 19. *diximus esse.* — 21. *rotundus erit.* — 22. *diametrum.* — 26. *unum pedum est V.*[1]) — 27. *perticas XXIII.* —

356. 2—3. Statt *esto* bis *basi* steht: *XX XX coniungo numerum.* —

---

1) Hier ist natürlich die Abkürzung für *quincunx* ⁓ als *est* gelesen.

4—6. *horum* bis *sunt X* fehlt. — 8. *diximus.* — 8—9. *iunctus itaque numerus.* — 9. *perticas* fehlt. — 10. *hoc* fehlt. —

24) Hieran schliessen sich zunächst Blatt 89^r, 5—90^r, 10 einige von Cantor in seinen Agrimensoren veröffentlichte Stücke aus Epaphroditus, die ich mir erlaube unter Zuhilfenahme des Cantorschen Textes herzustellen.

Seite 208. § 7. | Ager est longus pedum [CXX, latus pedum] LXX in quo dispositae sunt arbores $X^{v}X$ inter pedes V. si vis scire numerum arborum, quae in eo consitae sunt, sumas longitudinis partem quintam, quod haec est XXIIII, similiter et latitudinis quintam partem, quod est XIIII. His adicias bases singulas, ut fient XXV et quindecim. Dehinc multiplices latitudinem per longitudinem sive longitudinem per latitudinem, quindecies enim XXV sive vigesies quinquies XV faciunt trecentos LXX quinque: tot sunt enim arbores.

Daran schliesst sich folgende Fortsetzung, deren Sinn unklar ist:

Sint in agro LXX arbores CCCLXXII. Huius summae quaero latus, fit CXCII, huic adicio VIII fit CC. sumpta parte XX^a fit X. his de aglos(!).

Nun folgen:

§ 25. Sphaera est, cuius diametrum pedum XIIII, quaero | huius sphaerae inauraturam, hoc est profunditatem sive spissitudinem. Sic quaero. Diametrum duco bis, fit XXVIII. Hoc multiplico in se, vigesies octies XXVIII faciunt DCCLXXXIIII. hoc duco per XI, fit $\overline{\text{VIII}}$. DCXXIIII. huius summae sumpta parte $XIIII^a$ fiunt DCXVI; tot pedum erit huius sphaerae inauratura.[1]

§ 26. Si fuerit cyclus, cuius diametrum est pedum XIIII, quadrati huius aream quaero hoc modo. Multiplico diametrum in se, fit CXCVI, et hoc duo undecies, fiunt $\overline{\text{II}}$ · CLVI. huius summae sumo partem quartam decimam, fit CLIIII; tot pedum erit huius cycli embadum, hoc est area.

§ 27. Si fuerit circuitio pedum XLIIII, diametrum pedum XIIII, quaero huius areae pedes per hunc modum. Sumo circuitionis partem dimidiam, fit XXII, diametri dimidiam partem, quod est VII. hoc duco per XXII, fit CLIIII; tot erunt huius areae pedes.

§ 28. Si fuerit emicyclus, cuius sit basis pedum XXVIII, curvatura pedum XIIII, quaero huius emicycli aream. Sic quaero. multiplicabo basim huius emicycli per curvaturam, id est XXVIII per XIIII, fit CCCXCII. hoc duco per XI, fiunt $\overline{\text{IIII}}$ · CCCXII. | sumpta parte quarta decima fit CCCVIII, tot pedum est huius emicycli area.

§ 29. Absidem ad circinum datam sic quaero. curvaturam altitudinis per basim multiplicatam duco undecies. sumo partem quartam decimam; erit embadum.

1) Ueber *inauratura* siehe die Anmerkung am Schlusse der Abhandlung.

§ 30. In trigono orthogonio circulum inscribere si vis, qui omnes eius lineas tangat sic quaere. iunge kathetum et basim, deme hypotenusam, erit diametron circuli.

25) Daran schliessen sich noch einige ähnliche Paragraphen Blatt 90^r, 11—90^v 5.

Sphaera fuerit data, cuius dyameter sit pedum VII, eius solidos pedes sic quaere. Multiplico dyametrum, id est VII in cubo. Primo in se, fit pedes XLVIIII. Deinde hoc rursus per VII, fiunt pedes CCCXLIII. hoc semper ducimus per undecim, fiunt $\overline{\text{III}}$ · DCC · LXXIII pedum. Huius sumamus partem XXI, fiunt pedes CLXXVIIII; tot pedum erit eiusdem inauratum.[1])

Si datus fuerit circulus, cuius area habet pedes VI centos XVI, et scire volueris dyametrum eius | sic invenias. ducas quater decies areae 9
pedes, fiunt pedes $\overline{\text{VIII}}$ · DC · XXXIII. Dehinc hanc summam partiaris per XI, fit undecima pars DCCLXXXIIII. Huius summae latus est XXVIII; tot pedum erit diametrum.

26) Es folgt ein Abschnitt (Blatt 90^v, 5—92^r, 14) mit der Ueberschrift:

DE GEOMETRIA COLUMNARUM ET MENSURIS ALIIS.

Geometria columnarum hoc modo fieri debet ab artifice, ut fiat, quantum grossa possit esse, quantaque eius longitudo fuerit. Columna septimam partem longitudinis debet habere in imo, hoc est in parte, quae supra pedem manet. Superior autem pars columnae, ubi capitellum insidet, octauam partem debet longitudinis tenere.[2])

Mensura columnarum, ut possit aestimari, quantam altitudinem possit tenere mensurandi in circuitu. Si habuerit collurus super stragulum in circuitu pedes V, habebis in altum colluris pedes XII et dimidiam. Si habuerit vero collurus in circuitu pedes (X), habebis in altum pedes XXV, quoniam unus pes in circuitu levat in altum pedes duos et dimidiam.

Si columna fuerit, quae sit in imo lata pedum XIII, in summo lata pedum V, alta pedum XXX, si scire voluerimus, quot pedes solidos haec teneant, multiplicemus latitudinem imam in se, hoc est XIII, fiunt CLXVIIII. Dehinc multiplicemus summam latitudinem in se, hoc est V, fiunt XXV. Deinde multiplicemus primam summam quinquies, quinquies enim XIII fiunt LXV. Post haec metiamur has tres summas in unum, fiunt CCLVIIII. Haec ducamus per XI. Undecies enim CCLVIIII faciunt $\overline{\text{II}}$ · DCCC · XLVIIII. Hinc igitur sumamus partem decimam quartam, quod sunt CCIII et semis.

---

1) Quelle vom 2. Absatz des Cap. 82 bei Gerbert Olleris 464. 2) Dies ist die Quelle für den ersten Absatz von Gerberts Cap. 82. (Olleris, *464.*)

illud quae ducamus per XXX fiunt $\overline{\mathrm{VI}}$ · CV. Huius summae facimus octavam partem fiunt DCCLXIII, tot erunt solidi pedes huius columnae.[1])

Pes quadratus tenetur VIII pedibus, palmis LXVIII, unciis mille DCCXXVIII, digitis $\overline{\mathrm{IIII}}$ · XCIII. Digitus unus £, pes quadratus amphoram capit semipedem longum, semipedem latum et altum, capit congium. hac ratione semis per semum fit, et semispes fit. Semper enim longum per latum et per altum erunt pedês quadrati.

Mensura unius pedis quadratos si habuerit in altum digitos XVI, grassitudinem digitos XVI, computa XVI digitos in se fit CCLVI, et rursus computa digitos XVI per CCLVI, fiunt in unum digiti $\overline{\mathrm{IIII}}$ · XCVI; tantum colligit. Unus pes quadratus capit sextarios urbi CCLXCVI.

Si cupa, id est vagina, in imo per dyametrum habet IIII pedes, in summo pedes II, in medio V, alta pedum XII, si vis cognoscere, quot amphoras capiat, sic quaeras. Multiplica dyametrum medium in se, id est V, fiunt XXV; id duplices, fiunt L. Post dyametrum multiplices secundum in se. coniunge X et IIII, fiunt XIIII; hoc iunge ad XLV, fiunt LVIIII. Item multiplicemus dyametrum imum in se, quod sunt duo, fiunt IIII. iungo cum summa superiore, fiunt LXIIII. iungo dehinc in unum dyametrum imum ac summum, fiunt V. multiplicemus per dyametrum medium, hoc est V, fiunt XXV. Hoc iungo ad summam superiorem, fiunt in unum DCCCCLXVIII. hunc numerum diuido per tertiam altitudinem, hoc est per dyametrum tertium, quod est quatuor, fiunt $\overline{\mathrm{II}}$ · XLII; tot erunt amphorae in cupa nominata.[2])

1) Ist d_1 der untere, d_2 der obere Durchmesser, h die Höhe, so würde die Anweisung auf folgende Formel herauskommen:

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{8} \left(d_1{}^2 + d_1 d_2 + d_2{}^2\right),$$

während die richtige Formel heissen müsste:

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{3} \left(d_1{}^2 + d_1 d_2 + d_2{}^2\right).$$

Sollte etwa an cannelierte Säulen zu denken sein? 2) Hier ist überhaupt aus der ganzen Auseinandersetzung nicht klug zu werden; jedenfalls muss die letzte Zahl CCXLII heissen. Nach der Handschrift *„Clm. 14783“* Bltt. 479$^{\mathrm{v}}$—480 heisst die Regel so: „Multipliciere den mittlern, den obern und den untern „Durchmesser in sich selbst; dann den obern in den mittlern und den „untern und addiere alles. Darauf multipliciere die Summe mit $\frac{11}{14}$ und „dann noch mit dem dritten Theile der Höhe, so ist das Produkt der „Inhalt des Gefässes.“ Sind d_1, d_2, d_3 die drei Durchmesser die Höhe h, so lautet die Vorschrift also so

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{3} \left(d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2 + d_3 \left(d_1 + d_2\right)\right).$$

Da heisst das Beispiel $d_1 = 6$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$, $h = 12$, und das richtige Resultat giebt $272\frac{20}{14}$!

Si fuerit puteus, cuius dyametrum sit pedum VI, altitudo XL pedum, et quaeritur, quot amphoras capiat. Sic quaere. Primum inveniamus aream, cuius dyametrum fiat IIII m(!), et remanent DXX. huius summae tolle XIII^{am} partem, quod est quadraginta. Hoc duc per altum, fiunt mille ducenti. Tot amphoras continet nominatus puteus.

27) Blatt 92^{r}, 14—93^{r}, 6 folgen zwei Abschnitte aus Hyginus *de limitibus constituendis* (I, 170, 3—8; 182, 14—183, 16) mit der Ueberschrift.

„*De limitibus constituendis secundum rationem solis*".

Abweichende Lesarten sind:

170. 3. *per mundi.* — 4. *quod in semel; ferramenta.* — 5. *postea auspicaliter.* — 7. *limites duxerunt.* — 8. *in VIam horam non continet.*

182. 14. *quia ad.* — 14—15. *usi sunt hac ratione.* — 16. *crediderint, aut fefellit scientia errorem.* — 17. *neglexerint; contenti ei.* —

183. 1. *metiri.* — 1—2. *ortum singulis regionibus rectum esse.* — 3. *descendat.* — 4. *quicquid.* — 7. *non est facile, quia.* — 9. *si* fehlt; *illa.* — 10. *altero.* — 11. *apertiori.* — 12. *quo; citius.* — 12—13. *si non longe a monte nascatur cardo sive decumen.* — 14. *cursus recte potest comprehendi.* — 15. *luceat adhuc.* — 15—16. *et eidem campis adhuc interiori parte refulgeat.* —

28) Nun kommt ein Stück aus Boethius (Blatt 93^{r}, 6—94^{r} 5) I, 378, 14—379, 21. Die ersten Zeilen stehen so:

Trilaterum nec non amplius, in quo obtusus angulus fuerit. Oxygonium vero, id est acutum angulum, in quo tres anguli sunt acuti, vero quod est obtusum angulum, in quo obtusus angulus fuerit, figurarum formae sunt. In orthogonium, id est rectiangulum, quod quidem ut triangulum, quod habet angulum rectum, ambligonium vero, quod est angulum obtusum.

Weiter folgen die Varianten:

378. 20. *quadratum figuratur.* — 22—23. *sed non est aequilaterum.* —

379. 1—2. *angulos tenet compares, id est autem non rectis.* — 2. *nec comparibus continetur lateribus.* — 3. *Praeter ista.* — 4. *coloniae; cognominantur.* — 6. *coniunctae atque.* — 8. *thimata; id est* fehlt; *partitus ab.* — 9. *omnem; lineam rectam.* — 12. *aequos sub centro; sibi* bis *esse* fehlt. — 13. *et* bis *partes* fehlt. — 14. *composuerit minores.* — 15. *lineas metiri ad eas.* — 17. *ynas et nyas.* — 18. *haec, quae sunt idem sunt comparia.* — 18—19. *comparia.* — 19. *a paribus paria.* —

Es führt noch mit Gr. Vet. I. 385, 23—386, 2 fort: *Gnomon ergo parallelogrammi spatii eorum, quae circa eandem sunt dyametrum, quodlibet unum quinque cum supplementis duobus*

29) Ohne irgend welchen Absatz folgt Blatt 94^r, 5—95^r, 4 ein Abschnitt mit der Ueberschrift

5 | DE PROPORTIONE.[1])

Magnitudo minor maioris magnitudinis mentis, quando minor maiorem magnitudinem permetitur. Maior ergo magnitudo minoris magnitudinis multiplex est, quotiens a minore maior integra dimensione completur. Proportio est duarum magnitudinum cogunt(!) ad se invicem comparatione veniens magnitudo. Proportiones vero ad se invicem tenere dicuntur, quae possunt esse invicem multiplicationem transscendere. Eandem ergo proportionem prima magnitudo ad secundam magnitudinem, tertia ad quartam tenere prohibemus, quando primae aut tertiae magnitudinum per quae multiplices eas, quae sunt secundae atque tertiae, aeque multiplices, vel simul transcendant, vel ab his pariter transcenduntur, vel bis in simul exsequuntur, cum scilicet in alterna comparatione sumatur. Quae vero eandem retinent proportionem, ut proportionaliter esse dicuntur, quando vero earum magnitudinum, quae sunt aeque multiplices primae quidem magnitudinis, multiplicem superat, tertiae vero magnitudinis multiplex, secunda vero magnitudo multiplicem superat, tertiae vero magnitudinis multiplex, quartae magnitudinis multiplicem minime superat: tunc prima magnitudo ad secundam magnitudinem maiorem proportionem quam tertia ad quartam tenere prohibetur. Proportionalitas vero et minimum terminis inventum proportionales idem eiusdem magnitudines proportionis esse dicuntur, praecedentes praecedentibus et consequentibus consequentes. Quando autem magnitudines proportionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad tertiam duplicem proportionem quam ad secundam dicitur possidere. Quando vero
5r magnitudines pro|portionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad quartam triplicem proportionem quam ad secundam dicitur obtinere. Conum vero summum sumere magnitudines proportionaliter fuerint constitutae.

Der Rest des Blattes ist leer.

30) Blatt 96^r—117^v, 1. umfasst eine Abhandlung, welche von der Hand, welche das Inhaltsverzeichniss geschrieben hat, die Ueberschrift trägt:

„Geometrica“

Dieselbe ist eine Compilation. Soweit dieselbe noch nicht herausgegeben ist, lasse ich sie hier folgen. Von denjenigen Stücken, welche gedruckt vorliegen, gebe ich nur die Varianten.

---

1) Der folgende Abschnitt *„De proportione“* ist nichts weiter als eine Uebersetzung der Erklärungen des 5. Buches Euklids. In einer andern Handschrift aus dem X. Jahrhundert der Münchner Hof- und Staatsbibliothek ist der Abschnitt besser und vollständig überliefert. Ueber diese Handschrift im Vereine mit noch zwei andern werde ich anderswo Näheres mittheilen.

| Igitur geometricae artis peritiam qui ad integrum nosse desideret, necesse est, ut huius artis expositores diligenti cura perlegat, et ea, quae perlegerit, tenaci memoriae commendet. Nam in primis eum scire oportet arithmeticam artem, quae continet numerorum causas et divisiones, id est, qualis est diffinitio et diuisio; de paribus et imparibus numeris, et qualis est compositus numerus, et qualis incompositus; qualis est perfectus numerus, et qualis imperfectus; qualis est divisibilis numerus, et qualis indiuisibilis; qualis est particularis numerus, et qualis minus particularis; qualis superparticularis numerus, et qualis superpartiens; qualis est superfluus numerus, et qualis diminutus; qualis est multiplex numerus, et qualis submultiplex; qualis est solidus, et qualis est sphaericus.

Item quomodo inventa est geometria; unde vocata est geometria; quid sit geometria; quae utilitas; qui ordo praescrip|tionis; quae sit ratio propositionis, quae dispositionis, quae descriptionis, quae demonstrationis, et quae conclusionis. Qualis est recta linea; qualis est definita linea; quot genera sunt extremitatum, quanta sunt summitatum; Qot genera sunt angulorum, qualis est planus angulus, qualis est obtusus angulus, qualis[1]) angulus, qualis est rectus angulus, qualis est acutus. Nec non et de mensuris sciendum est. Quae mensura sit pertica; quantum trahit stadium, quid sit actus, quid climma, quid centuria, quid leuva, quid aripennis, quid iugerum, vel quid centuria. Quid punctum, quid diametrum, quid parallelogramum. Quid sit figura, vel quid sit circulus, aut in quae sit divisio. Qui scit ista omnia ad plenitudinem, novit locorum segregationem; nam qui ignorant regulam huius artis multa obponunt falsa pro veris.[2])

Nach dieser Einleitung folgt jetzt mit der Ueberschrift:

Quid sit ipsa geometria et quae eius effectiva potentia

eine Abschrift der Geometrie des Cassiodorius.[3]) Von ihr setze ich nur die abweichenden Lesarten hierher.

576. 2. *usuale.* — 2—3. *quod ut praeconiis* fehlt. — 4. *geometricare.* — 5. *amplicetur.*

577. 1. *caelo; creatur.* — 2. *adplicetur; sententia diffinitione forsitan.* — 3. *dicere, quodammodo geometrizat sancta divinitas.* — 3—4. *suae creaturae, quam.* — 4. *famulasque.* — 6. *quae sunt fixa.* — 8. *demensio.* — 10. *Egiptus propriis dominis fertur esse partita, quia Nili inundatio confusionem*

1) Diese Lücke befindet sich in der Handschrift. 2) Wie ich nachträglich gesehen habe, ist das Stück schon in der Boethius-Ausgabe Basileae 1570 auf Seite 1541, Z. 16—46 abgedruckt, doch ist unser Manuscript vollständiger als der Abdruck. 3) Ich benutzte die Ausgabe: M. Aurelii Cassiodori Senatoris V. C. opera omnia. Genevae Excudebat Philippus Gamonetus Anno MDCL.

fecit in agris. Unde controversiam ortam geometriae disciplinis prudentiores quippe sedare curarunt. Cuius iam. — 12. *consistere.* — 13. *homines constat demensiones; vagantibus populis.* — 15. *partitus* fehlt; *edicti.* — 16. *ita reperta.* — 18. *caeli.* — 18—19. *peritissimos* fehlt. — 19. *adsecutos.* — 22. *Cerellium quintum; spatia ipsius.* — 23. *caeli terrae ambitum.* — 24. *descripsit dicens.*

Und nun wird aus Censorinus, *de die natali*[1]) folgender Passus eingeschoben (S. 22, 22—24, 12). Auch hier gebe ich nur die Varianten.

22. 25. *numerabilem arithmon.* — 26. *distantiis diastematis.*

23. 2. *concinnent melodiam.* — 3. *carpere.* — 5. *fore stadiorum; ducentorum.* — 6. *Pythagoras* fehlt. — 7. *in terra.* — 9. *sexcentorum.* — 12. *pitagoras.* — 12. *mercurii lunam stellam.* — 15. *semitonion.* — 16. *bosphoron.* — 17. *semitonion.* — 19. *a terra* fehlt; *dimidium a terra.* — 21. *tesseron autem ad martis stellam.* — 24. *pheton nominatur, dimidium ipsius.* — 25. *amphenon.* — 26. *semitonion.* — 27. *semitonion.*

24. 1. *tesseron.* — 3. *fore VI.* — 4. *simphonia; multa* fehlt. — 5. *retulit; et in hoc omnem; enarmion esse innotuit.* — 7. *alii dixerunt; illud dacoraon.* — 10. *tantum tamen.* — 12. *musica; revertar.*

Jetzt wird mit der neuen Ueberschrift:

DE DIVISIONE GEOMETRIAE, IN QUOT PARTES DIUIDITUR.

der Auszug aus Cassiodorius fortgesetzt.

577. 25. *vero* fehlt; *quae dividitur.* — 31. *et in rationem.* — 35. *rationabiles et inrationabiles; Rationabiles quarum.* — 36. *inrationabiles; vero* fehlt; *quarum.* — 37. *igitur hac solidae; longitudine et.* — 40. *caelestibus concluditur.* — 41. *Euclides.* — 42. *Euclidem oblatum romanae linguae magnificus Boetius dedit.*

Damit schliesst Cassiodorius. Woher das nun Folgende genommen, weiss ich nicht zu sagen. Es hat folgenden Wortlaut:

| DE UTILITATE GEOMETRIAE.

Quae autem supra diximus de utilitate geometriae, sciendum est, quod utilitas geometriae triplex est. Cuius quaedam species pertinent ad facultatem enim, ut scientiae mechanicae vel architecturae; ad sanitatem vero, ut disciplinae sunt medicorum. Quia, sicut ritus artis mechanicae nulla ratione consistunt absque mensura et descriptione liniamentorum, sic nec ars medicinae sine mensura et pondere atque herbarum discretione ullo modo subsistere valeat. Ad animam vero pertinet geometria, quia philo-

[1]) *CENSORINI de die natali liber.* Rec. Fr. Hultsch Lipsiae 1867 ist die benutzte Ausgabe.

sophorum disciplinis discretionem et moderationem in omnibus rebus habere ⟨debet⟩. Quid enim aliud prudentia, iustitia, fortitudo et temperantia nobiscum agunt, nisi ut prudenter, iuste, aequanimiter et temperanter vitam ducamus | et secundum praecepta conditoris nostri ordinabiliter et recte vivamus. Quia, sicut supra dictum est, quicquid in nostra conversatione bene disponitur atque completur, potest disciplinae huius qualitatibus applicari.

DE ORDINE PRAESCRIPTIONIS GEOMETRIAE.

Ordo autem conscriptionis in geometria considerari debet, quia secundum quoddam ordo geometriae in disciplinis aliquatenus post arithmeticam secundus est, aliquatenus tertius, quia quidam geometriae musicam anteponunt. Sed qui diligentius de hac re investigaverunt secundo loco post arithmeticam geometriam, musicam vero tertio loco posuerunt et quarto astronomiam, quia sine dubio omnis motus est post quietem, et natura semper statio motu prior est. Mobilium vero astronomia, immobilium geometria doctrina est, et ideo cum motus sequatur post quietem, consequens est, ut motum astrorum armonicae modulationis continetur concentus. |

DE RATIONE PROPOSITIONIS.

Ratio propositionis in geometria est, ut perpendamus, quod primum in ipsa arte proponi atque considerari oporteat. Quia enim mensura in aliquo et alicuius esse debet, primo loco constituamus fundum, in quo mensurae universae disponuntur. Fundus enim dictus est, quod in eo fundentur, vel stabilientur quaelibet res. Fundus autem et urbanum aedificium et rusticum secundum antiquos intelligendum est, de quibus rebus geometria maxime tractat ac figurarum omnium rationem disponit.

DE DISPOSITIONE.

Dispositio geometriae est linearum intendere genera, utrum vel circumferendo vel flexuose pergar, de quo in sequentibus plenius dicendum est.

DE DISSCRIPTIONE GEOMETRIAE.

In disscriptione quoque notari debent anguli, sicut in distributione inspiciuntur figurae, quod demonstrabitur, cum de angulis et de figuris universis dicemus.

DE DEMONSTRATIONE GEOMETRIAE.

In demonstratione autem, quantae sint summi|tates, intueri oportet. Nam summitatum genera sunt duo: summitas et plana summitas. [Secundum geometricam enim appellatio summitas est, quae longitudinem et latitudinem habet tantummodo. Summitatis finis lineae sunt. Plana summitas est, quae aequaliter rectis lineis est posita] ad longitudinem atque latitudinem, quae alio nomine superficies dicitur.

Was ich zwischen eckige Klammern gesetzt habe, findet sich in den *Grom. Vet.* I. an drei verschiedenen Stellen. **99,** 11—14; **411,** 10—14; **414,** 14—18. Nach folgender Einleitung:

DE EXTREMITATIBUS.

De extremitatibus quoque, quomodo pertineant ad conclusionem, noscendum, quod

folgt nun weiter aus den *Grom. Vet. I* das Stück 414, 24—415, 4 mit folgenden Abweichungen.

414. 24. *quippe* fehlt; *duo, hoc est.* — 25. *per rigorem; per flexuosum observatur; rigoris.* — 26. *velut.* — 26—27. *rectum perspicitur.* — 27. *vero* fehlt.

415. 1. *quicquid ad horum immitationem in forma. Nam; mensura.* — 2. *directum.*

Weiter

DE PRINCIPIO MENSURAE.

Grom. Vet. I. 377, 2—7. Voran geht: *Principium mensurae punctus vocatur, cum medium tenet figurae.*

377. 2. *cuius figurae pars.* — 3. *puncti.* — 5. *et.*

Ferner

DE GENERIBUS MENSURARUM.

Grom. Vet. I. 96, 1—97, 13. Abweichungen sind folgende:

97. 1. *et crassitudinem.* — 2. *cum longitudinem.* — 3. *mirabilia.* — 4. *similia multa.* — 5. *vocant.* — 6. *habeamus.* — 6—7. *per quae etiam agros metimur* fehlt. — 9. *et illis alia similia; est* fehlt. — 10. *nos autem; appellamus* fehlt. — 12. *Pirarum idem opus rotundum, pyramidem aut lapide macherias.*

Von hier an fehlen weitere Ueberschriften. Es finden sich aber der Reihe nach noch folgende Theile der *Grom. Vet. I.:*

415. 4—5: 4. *singuli.* — **415.** 1—4: 2. *directum.*

98. 15—106, 11.

98. 15. *est, ut iam diximus; vero.* — 16. *rectae* fehlt.

99. 1. *positae cunctae; non* fehlt. — 3. *tria.* — 6. *singulorum suorum distat.* — 7. *arborum aut signorum.* — 8. *similitudine.* — 9. *multorum; rerum* fehlt. — 14—14. fehlt. — 15. *summitatum.*

100. 2. *si quis.* — 3. *ratione angulorum.* — 3—4. *ipsas extremitates.* — 5. *habes* — 8—9. *generis sui* fehlt. — 9. *hebes.* — 10. *ethigrammos.* —

11—12. *rectus super rectam lineam trans ordinem.* — 12. *ut singuli.* — 13. *sint.* — 14. *insistit vertex est.*

101. 1. *ex recto angulo.* — 3. *positionem qua si.* — 5. *habebit.* — 6. *compressior.* — 9—10. *intra finitimas lineas.* — 11. *plus normalis* fehlt. — 12. Ueberschrift: *De speciebus linearum.* — 13. *sunt tres generis sui.* — 14. *cyrculum.* — 15. *per* fehlt; *transferet.* — 15—16. *par e altero.* — 17. *quaecumque vero linea ordinata dimensione semicirculum erit.*

102. 1. *qui; et linearum per.* — 2. *interiacebit, hebetes angulos faciet generis sui; infra.* — 3. *dimensione; lineae* fehlt. — 5—6. *anguli, ut diximus, sunt rectum; acutum; rectum.* — 7. *per rectum punctum.* — 8. *parte* fehlt. — 8—9. Statt *ebes et acutus* steht *Ceteros autem.* — 9. *dimensione a recta linea.* — 11. *cludit.* — 13. *acuta hoc modo fiunt.* — 14. *pares circuli.* — 16. *faciunt; Hebetes; contrarii.* — 17. *hi inter.* — 18. *inducuntur.* — 18—19. *rectus angulus. hebes et acutus dicuntur.* — 19—20. *fuerunt inter se.* — 20. *intra se.*

103. 1. *altero.* — 3. *medio; hebetes.* — 5. *exilissima plenissime finiantur.* — 6. *et angulorum.* — 8. *complures* fehlt. — 10. *ergo.* — 11—16 fehlen. — 17. *Angularis igitur; tenet duas.* — 18. *planitie.* — 19. *et* fehlt. — 20. *Nam solidus.*

104. 1. *Forma sive figura.* — 4—5. *rationali.* — 5. *circumferentibus et rectis.* — 6. *rectis et circumferentibus.* — 7—12. fehlen. — 13. *circumferentium formarum.* — 14. *unius.* — 15. *et* fehlt. — 16. *accedentibus usque infinitum.* — 17. *plurimum.* — 18. *sub; atque ab.* — 19. *positae.*

106. 1—3. *ex duabus* bis *ex recta* fehlt. — 3—5. *Quadrilatera forma est quatuor lineis totidemque angulorum ex duobus circumferentibus et duabus rectis. Plura latera.* — 6. *plusplus.* — 6—7. *continetur.* — 8. *ex tribus circumferentibus et duabus rectis.*

Endlich 378, 5—14.

378. 5. *Rectae lineae.* — 6. *Tria latera.* — 7. *tribus* fehlt. — 8—10. *finitima* bis *servatur* fehlt. — 10. *vero* fehlt; *quae quatuor.* — 11. *continentur; est* fehlt. — 12. *tribus comparibus clauditur.* — 13. *tenet latera comparia.*

Nun folgen Ergänzungen der von Cantor in den *Agrimensoren* aus Epaphroditus veröffentlichten Paragraphen, speciell zu § 7 und folgende, welche ich mir wörtlich mitzutheilen erlaube.

I. | Idem ager est longus pedum CCXL, cuius latitudo ignoratur, sed in eo dispositae sunt arbores inter quinos pedes singulae crassae pedum duorum DXXV. Si quaerere vis latitudinem agri, adicias ad longitudinem quinarum numerum, quia inter pedes V dixi sitas esse arbores, fiunt CCXLV. Tunc sumas partem septimam, quia arbores | cum intervallo habent pedes VII, fiunt XXXV. Sumas tricesimam partem quintam de numero arborum, hoc est de quingentis XLV, fit XV. Hoc ducas septies, fit CV. Hinc ducas intervallum, hoc est pedes V, remanent C; tot pedes latitudo agri.

II. At cum erit mons, qui tenet in vertice per circuitum pedes trecentos et in ascensu pedes octingentos, ad pedem autem habet in circuitu pedes mille. Si quaeris, quot iugera in eo sint, iungas in unum duas circuitiones, id est mille et trecentos. Dein sumas partem dimidiam, hoc est sexcentos quinquaginta. Ducas per ascensum montis, hoc est per octingentos, fiunt $\overline{\text{DXX}}$; tot igitur pedes erunt quadrati in superficie montis. Deinde, ut inveniamus, quot sunt iugera in eo, videas, quoties teneat $\overline{\text{XXVIII}}$ · DCCC, quia tot pedes constratos habet unum iugerum, id est $\overline{\text{XXVIII}}$ octingentos, erunt iugera XVIII insuper pedes mille sexcenti.

III. Item | mons est qui tenet in imo prope pedem in circuitu pedes $\overline{\text{II}}$ · D in medietate per gyrum pedes MDC, in cacumine adaeque in circuitu pedes C, cuius ascensus pedum est D. Si igitur quaeris, quot iugera in eo sint, iunge in unum tres circuitiones, id est pedes $\overline{\text{II}}$ · D et MDC, nec non et centum, fiunt simul $\overline{\text{IIII}}$ · CC. Hinc sume partem tertiam quae fit MCCCC. Hoc multiplica per altitudinem, et facit $\overline{\text{DCC}}$. Deinde vide quotiens habeat $\overline{\text{XXVIII}}$ · DCCC, hoc est vicies quater. Tot sunt iugera in eundem montem, hoc est tabulae quatuor et remanent pedes CC.

IV. Mons est strabus, qui habet ad pedem in circuitu pedes MCCC, in cacumine per circuitum pedes CC, sed est altus in parte dextera pedum DCCCL et ex parte laeva pedum DCCL, quaero, quot sunt in eo iugera. Sic quaere. Iungo in unum duas circuitiones, hoc est MCCC et CC. Sumo partem dimidiam fit DCC. mitto per circuitum $\overline{\text{II}}$ · D ascensus ambas in unum, id est DCCCL · DCCL, fiunt MDC. Hinc sumo medietatem, | quo.[1])

Damit bricht die Sache ab, und ist hier der Auszug aus dem *Geometrica* überschriebenen Abschnitte zu Ende.

31) Es folgen nun wieder Blatt 107^{v} 2—109^{r} Capitel aus Gerberts Geometrie und zwar die *Ollerischen* Nummern 45, 42, 44, 23, 22 mit folgenden Abweichungen:

448. (Cap. 45.) 28. *Katheti dimidium.*

---

1) Aus diesen vier Paragraphen in Verbindung mit dem auf Blatt 89^{r} des Manuscripts befindlichen lässt sich nun wohl sagen, was auf dem einen fehlenden Blatte des Arcerianus von Epaphroditus enthalten gewesen sein dürfte. Es war zunächst die weitere Ausführung des bei Cantor unvollständigen § 7, dann kamen noch zwei Aufgaben über Bäumezahl, bei welcher einmal die Länge, einmal die Breite des bestandenen Ackers gesucht wurde, dann kam von den jetzigen vier Paragraphen No. II. Der letztere schon von Cantor durch Divination erschlossene Ergänzung, die Quelle zu Gerberts Cap. 64. *(S. 457.)* § IV lässt sich aus Cantor unschwer vervollständigen.

447. (Cap. 42.) 15. *adiciatur.* — 17. *linearum rectarum.* — 19. *erit* fehlt; numeri $\overline{\text{I}}$ · CCXXV.

448. (Cap. 48.) 14. *praecisuras.* — 15. *dinoscere; ducto.* — 16. *summam simul.* — 17. *CCCLXV.* — 18. *quod superfuerit.* — 20. *praecisurae.* — 22. *praecisuram.* — 23. *superhabundantis.*

433. (Cap. 23.) 23. *Si vero est.* — 24. *quacumque cuiusque, astrolabium.* — 26. *conlatio*
comparatio.

(Cap. 22.) 1. *Ad mensurandum cum quadrato astrolabii in plano stantem per suam ipsius quamlibet altitudinem.* — 4. *cuiusque.* — 5. *per umbram ipsius* ausradiert. — 6. *solis radio; alhidadae.* — 7—9. *quod* bis *quadrato* fehlt. — 10. *candem; proportionem altitudo* fehlt; *ad umbram* ausradiert. — 12. *habent; umbra* ausradiert. — 14—15. *sesqualtera.* — 15. *si omnes XII.* — 16. *et umbra* ausradiert. — 17. *alhidada; umbra* ausradiert. — 19. *inumbrata* ausradiert; *bassis est.* — 23. *dinoscitur.*

Blatt 109$^{\text{v}}$, 110 und 111 sind leer.

32) Von Blatt 112$^{\text{r}}$ bis 118$^{\text{r}}$, 14 erstreckt sich dann eine Abhandlung, welche von der Hand des Inhaltsverzeichnisses „PONDERA" überschrieben ist. In Wirklichkeit ist es eine Abhandlung über das Rechnen mit römischen Minutien. Ich theile dieselbe mit, soweit sie Interesse hat, und gebe dort, wo ein solches in beschränktem Masse besteht, dieselbe nur auszüglich wieder.[1])

| DE DIVERSITATE TALENTORUM.

Mna C dragma, id est XXV solidi. Talentum minimum est librarum L, medium LXXII, maximum CXX. Siliqua lentis duo grana sunt et duae tertiae.

Uncia in unciam fit dimidia sextula.	XXIIII
Sesquuncia in sesquunciam. sextula et obolus..	XXXVI
Sextas in Sextantem fit duella.	XLVIII
Quadrans in quadrantem fit semuncia et sicilicus.	LXXII
Triens in trientem fit uncia et duella.	XCVI
Quincunx in quincuncem fit sextans et dimidia sextula.	CXX
Semis in semissem fit quadrans.	CXLIIII
Septunx in septuncem fit triens et dimidia sextula.	CLXVIII
Bisse in bissem fit quicunx et duella.	CXCIX
Dodras in dodrantem fit semis semuncia et sicilicus.	CCXVI
Dextas in dextantem fit bisse et duella.	CCXL
Deunx in deuncem fit dimidia sextula.	CCLXIIII
As in assem fit as.	CCLXXXVIII

1) Es ist ein Abschnitt von GERBERTS *Regula de abaco computi* (OLLERIS 333, 25 bis 341, 16).

DE SIMILITUDINE MULTIPLICI.

Ecce animadvertere potes, qualiter haec multiplicationis similitudo in diminutionem cadit. Sic enim dixi semis in semissem, quasi sex in senarium. Sed sex in senarium in XXXVI consurgit, semis vero in semissem in | quadrantem descendit. Sed quia cuiusque ductione in se breviter dictum est, quod postmodum lucidius demonstrabitur, nunc etiam in alterum ducere longum non videatur.

Sem. XII
Duet VIII
Sicil. VI
Drag. III
Dim. S. II
Scrip. I
Obol. M
Cerat. Q
Calcus ᴗ

De uncia. Uncia in assem uncia .... uncia in sescunciam dragma.

De sescuncia. Sescuncia in quamcumque ducatur, eius octavam requirit, in quam ducitur, quia ipsa octava assis existit.

De sextante. Sextas in quadrantem semuncia .... sextas in assem sextas.

De quadrante. Quid quadrans in unciam, vel in sextantem, vel in se ipsum | faciat, superius dictum est. Idem est enim quadras in unciam vel sextantem, quod uncia vel sextas in quadrantem. Nunc vero, quod in ceteris reddat, videndum est. .... Quadras in assem quadras.

De triente. Triens in quincuncem uncia semuncia sextula .... Triens in assem triens.

De quincunce. Quincunx in semissem sextas semuncia .... Quincunx in assem quincunx.

De semisse. | Quid semis in unciam vel sextantem, vel quadrantem, vel trientem, vel quincuncem faciat superius demonstratum est, quando dicebatur, quod uncia, vel sextas, vel quadras, vel triens, vel quincunx in semissem redderet. Hoc enim scire oportet, quod in omni multiplicatione sive numerorum, seu unciarum, sive minutiarum tantumdem valet conversio, quantum directio. Sic enim idem mihi est, si dicam vel directim ter quatuor, vel e conversim quater tres; utraque multiplicatio ad duodenarium convergit. Sic idem mihi erit sive directim triens in semissem, vel conversim semis in trientem dicam; utrumque duorum ad sextantem descendit .... Semis in assem semis.

De septunce. Septunx in bissem triens semuncia sextula .... Septunx in assem septunx.

De bisse. Bissis in dodrantem semis | ... Bissis in assem bissis.

De dodrante. Dodras in dextantem septunx semuncia .... Dodras in assem dodras.

De dextante. Dextas in deuncem dodras sextula. Dextas in assem dextas.

De Deunce. Deunx in asse deunx.

De asse. As in assem fit as.

Ne mireris me semis in semissem, vel quadras in trientem, vel triens in quadrantem dixisse, cum potius semissis semissem, vel quadrantis trientem, vel trientis quadrantem et cetera eodem modo dicere debuissem. Quia enim superius me earum detrimenta sub optentu multiplicationis ostensurum promisi, nunc semis in semissem quasi sex in senarium dixi. Quia vero quid quaeque in se, quid in invicem facerent, minus capacibus monstravi, universalem regulam subnectere collibuit: Omne quod sub unitate locatur, sive in numerum quemlibet, sive in aliquod eorum, quae sub unitate sunt, sicut superius demonstratum est, ducatur, non multiplicationem exposcit, sed totam partem illius, in quam ducatur, quota pars ipsum assis existit. Verbi gratia si unciam in XXIIII ducas, non extra XXIIII numerum quaerere, in quem illa inductio excrevisset, labores, sed infra XXIIII totam partem, quota est uncia assis, id est duodecimam, | requiras, quae erit binarius. Ex XXIIII igitur et uncia repraesentatur binarius. Si vero eandem unciam in deuncem duxeris, vel dextantem, vel in ceterorum aliquem, quia ipsa est assis duodecima, duodecimam deuncis, vel dextantis, vel ceterorum alicuius accipias. Sed forte dicis deuncem non habere duodecimam, cum non nisi undecim contineat uncias. Ego vero tibi respondebo, cum uncia habere possit duodecimam, id est dimidiam sextulam, unciae duodecima undicies ducta, eo quod et ipsa undecies intra deuncem teneatur, faciet deuncis duodecimam. Sextas autem, quia sexta est assis, in quemcumque numerum sive minutiam ductus, in quem ducitur sextam requirit. Quadras quia quarta, quartam; triens, quia tertia, tertiam; quincunx, quia quinque sunt assis duodecimae, quinque duodecimas illius, in quam ducitur, exposcit. Semis, quia media, mediam; septunx, quia septem duodecimae, septem duodecimas; bissis, quia duae tertiae, duas tertias; dodras, quia tres quartae tres quartas; dextas, quia X duodecimae, X duodecimas; deunx, quia undecim duodecimae, XI duodecimas.

Est et alia regula numeros tantum comparandi ad uncias. Quilibet numerus si cuilibet supradictorum comparetur, id est vel deunci vel dextanti, numerus unciarum in deunci vel dextanti per numerum comparatum ducatur|, et hi, qui inde excreverint, per duodenarium partiantur. Quotcumque vero in hac partitione duodenarios reperies, totidem asses in ipsa unciarum et comparati numeri multiplicatione excrevisse cognoscas. Si aliquae vero extra duodenariorum partitionem superfuerint, hos pro unciis teneto, verbi gratia, si quinque, pro quincunce, si IIII pro triente. Si autem infra duodenarium illa multiplicatio remanserit, quicumque numerus tibi sub duodenario venerit, eum pro totidem unciis teneto. Quod usque modo dictum est, exemplificare libet. Ecce quadrante octonarius comparetur. Sed tres unciae in quadrante tenentur, quae per octonarium ductae in XXIIII surgunt. Sed in XXIIII bis duodenarius apparet; duo igitur asses ex octonarii et quadrantis multiplicatione veniunt. Item si octonarius trienti comparetur, quia triens IIII unciarum est, quaternarius per octonarium multiplicatur. Sed quater VIII XXXII. In XXXII vero bis duodenarius habetur remanentibus VIII; erit igitur ex multiplicatione unciarum trientis et octonarii XXXII unciae, id est asses II et VIII unciae, id est bisse. Item quaternarius sextanti comparetur. Sed sextas duarum est unciarum, binarius ergo in quaternarium ducatur, de quo nascitur octonarius. Quia igitur infra duodenarium remanet octonarius, infra assem etiam erit, et pro VIII unciis, idest pro bisse, deputabitur.

| Videor in culpam illam incidisse in quam Porphirium, cum de genere tractabat, dicunt devenisse. Cum enim omnem demonstrationem ex notioribus oporteat constare, deputant illi in vicium ad generis diffinitionem speciem ignotiorem adhibuisse. Ego quippe similiter comprobor. Cum enim unciarum comparationes ex notioribus monstrare debuissem, minucias ignotiores, id est sextulam, sicilicum et ceteras intermiscui. Sed Boetius Porphirio succurrit et mihi, dum dicam, nullam rem nisi ab his, in quibus substantiam suam habet, posse demonstrari. Sicut enim genus a specie substantiam sumit, sic et uncia a partibus suis, id est sextula, sicilico et ceteris, quibus praeeuntibus ipsa non manebit. Nec autem paululum unciis intermissis aliquantulum scribere non pigeat de minutiis, ut et minutiis et unciis pleniter cognitis de utrorumque divisionibus et ductionibus postmodum abunde dicatur. Ne mireris autem nos distinctionem inter minutias fecisse, cum et unciae minutiae possint vocari. Uncias quidem propter excellentiam suam tantum uncias, minutias vero, quae parvitate sua post unciam locantur, appellare placet tantum minutias.

Unciae divisione ultimus terminus calcus occurrit. Prima autem eiusdem divisionem secundum medietatis naturam semuncia suscipit. Unciae igitur | medietas semuncia dicitur; tertia duella; quarta sicilicus; sexta sextula; octava dragma; duodecima dimidia sextula, vicesima quarta scripulus; quadragesima octava obolus; nonagesima sexta cerates; centesima nonagesima secunda calcus. Sed qui fastidium respuunt, non nisi ad scripulum descendere volunt, qui vicesima quarta est unciae, assis vero ducentesima octuogesima octava, ut in prima paginula huius libelli videre perfacile est. Ascripulo igitur propter minus capaces incipiens, quod quaeque in se vel in quamlibet aliarum valeat, monstrabo, servata tamen in illis etiam, sicut in unciis, regula prima universaliter superius dicta.

De minutiis. Scripulus in scripulum fit pars calci trigesima sexta, quae ob parvitatem sui nomen habere non meruit. Dimidia sextula in se calci nona. Dragma in se calci quarta. Sextula in se oboli nona. Sicilicus in se calcus. Duella in se duae scripuli nonae. Semuncia in se obolus.

Quod autem in invicem faciant, vel etiam in ipsas uncias, sic accipe.

De scripula. Scripulus in dimidiam sextulam XVIII^a calci .... Scripulus in unciam oboli sexta, quod esse dicunt siliquae medietatem | .... Scripulus in assem scripulus.

De dimidia sextula. Dimidia sextula in dragmam calci sexta .... Dimidia sextula in dodrantem scripulus et medietas scripuli | .... Dimidia sextula in assem dimidia sextula.

De dragma. Dragma in sextulam calci tertia ... Dragma in assem dragma.

De sextula. Sextula in sicilicum ceratis tertia .... Sextula in semissem dimidia sextula | .... Sextula in assem sextula.

De sicilico. Sicilicus in duellam tercia oboli .... Sicilicus in assem sicilicus.

De duella. Duella in semunciam tercia scripuli .... Duella in semissem sextula | .... Duella in assem duella.

De semuncia. Semuncia in unciam scripulus .... Semuncia in assem semuncia (Bltt. 118^r, 14).

33) Nun folgt von der nämlichen Hand, aber durch eine Zeile Zwischenraum getrennt, Folgendes:

| Ambitus totius terrae $\overline{\text{CCLII}}$ absolvitur stadiorum, quae faciunt leuvas gallorum $\overline{\text{XXI}}$; Milliaria $\overline{\text{XXXI}}$.D; Passus tricies et semel mille millia et D; Pedes centies quinquagies et septies mille milia et D; Uncias milies octingenties nonagies mille milia; Digitos $\overline{\text{V}}$.DC$^{\text{ies}}$ LXX$^{\text{ies}}$ $\overline{\text{III}}$. Digitus est minima pars agrestium mensurarum. Uncia habet digitos III; Palmus in IIII protenditur digitos; Pedem XVI metiuntur digiti, Passus V pedum mensuram sortitur|; Pertica duos passus, id est X pedes explicit. Passus CXXVI stadium absolvunt; Stadia VIII miliarium praestant; Mille passus, id est miliarium et dimidium, leuvam faciunt habentem passus M et D; duae leuvae sive milliaria tria efficiunt restam.

34) Daran schliesst sich Bltt. 118^v, 5—11 ohne jeden Zwischenraum die „*Divisio de limace*“ aus den *Propositiones ad acuendos iuvenes* (Bedae *opera* I, 102) ohne jede Abweichung von dem gedruckten Texte, ausser dass in der Lösung die Zahl der Uncien richtig als 90 000, nicht wie im Drucke als 90 angegeben wird.

35) Weiter folgt 118^v, 11—124^r, obwohl völlig heterogenen Inhalts, ebenso unmittelbar anschliessend eine Abhandlung über astronomische

Gegenstände. Sie hat folgende Capitel oder Paragraphen: *De solis cursu; De cursu solis per XII signa; De cursu lunae per XII signa; De cursu VII planetarum;* sie schliesst Bltt. 123^{v}: *Sed inter haec omnia sydera martis maxime inobservabilis est cursus.* Bltt. 124^{r} enthält dann noch ein dazu gehöriges astronomisches Diagramm.

36) Da auf Bltt. 119^{v}, einer grösseren auf Bltt. 120^{r} folgenden Figur halber, etwa eine halbe Seite Platz geblieben war, so hat eine ähnliche, jedoch sicher andere Hand den Platz mit folgender Bemerkung ausgefüllt, welche sich auf die Theile des Asses bezieht.

Unaquaeque pars assis a deunce usque in £ quot semunciis consistit, tot ss ad unciam sibi requirit. A semuncia vero usque in obelum, quot obelis consistit, tot semuncias scripuli ad unciam sui requirit. Et hoc in minimis partibus assis probemus. Quaeramus unciam in ÷ hoc modo. Uncia habet duas £, totidem ss^{as}., qui sunt q2 ad unciam sui requirit. £^{a} autem tres £ habet, totidem quoque ss^{as}, qui sunt ✕, ad unciam sui requirit.

37) Auf Bltt. 124^{v} findet sich an erster Stelle die 19. Idylle des Ausonius mit der Ueberschrift:

Duodecim Herculis erumnae, quas victor sustinuit
Euristeo iubente Iunonis prece.

38) Darunter steht folgende Melodie:

Ūt ré fá rē mí ré ụ̄t ré mí mí
fá sól mí rē mí ūt ré fá sól lá
sͦol fá mí ré mí mí sól la sͦol mí
fá sͦol rē lá sól lá fā sól lá lá
sͦol fá ré ūt mí rē

und die Bemerkung:

Armo grece, coaduno latine, unde armonia coadunatio vocum dicitur.

39) Bltt. 125^{r}—127^{v} enthält eine Abhandlung mit dem Titel „*Mensura Monochordi*“. Anfang: *Primum divide monochordum per quatuor a magdala usque ad magdalam.* Schluss (Bltt. 127^{v} 6): *et duos tonos habebis.* Auf Blatt 127^{v} steht dann noch eine Tabelle der Töne und Halbtöne.

40) Nun folgt Blatt 128^{r}—132^{v}, 23 der Brief Adelbolds an Gerbert über das Volumen der Kugel. Da derselbe in den bisherigen Drucken noch nicht in seiner Vollständigkeit veröffentlicht ist, sondern zu seinem vollen Verständniss wesentlich nothwendige Sätze, der Mangelhaftigkeit der benutzten Handschriften halber, weggelassen sind, so lasse ich denselben hierunter vollständig abdrucken.

| *Domino* Silvestro *Summo Et Pontifici Et Philosopho* 128
Adelpoldus *scolasticus vitae et felicitatis perpetuitatem.*

Valde peccare est publicis intentum utilitatibus privatis inquietare conventionibus, sed hoc ingenio vestro confido, ut simul et rebus publicis possit sufficere, et mihi ex hoc, quod quaero, satisfacere. Et tamen temere ago et non ignoranter pecco, quod tantum virum quasi conscolasticum in naeniis convenio. Sed confessio peccati veniam non tantum dico quaerit, sed exigit. Fortasse cogitastis, ut sic peccem, ut me peccasse poenitere nolim, ac ideo sine fructu poenitentiae confessio nec veniam debeat quaerere, nec remissionem aliquam exigere. Ad haec respondeo, quia si benignitatem vestram in hac conventione offendero, ultra quam credere possitis, me vos convenisse dolebo: ac ideo dolenti, et poenitenti, simulque se peccasse fatenti, et deinceps ab eiusmodi peccato se abstinere volenti veniam concedendam esse censebo, ab eo maxime, qui vicem illius tenet, cui dictum est: „*Non dico tibi usque septies* etc[a]."

Si autem non offendere, sed id, quod quaesiero, cum benevolentia vestra adeptus fuero, scitote, quod in adeptione mea et mihi et multis prodesse gaudebo. Quaestiuncula, quam iam auctoritati vestrae transmisi, quia non resolvatur, me | in ea aut vos offendisse timeo, aut pro dilatione 128
solutionis aliquid grande futurum spero. Sed aliud quoddam proponam, ut aut ex hoc, quod timeo, magis doleam, et doloris magnitudo vos flectat ad veniam, aut ex eo, quod spero, magis gaudeam, et gaudii mei plenitudo remunerationem vobis implorit futuram. Et hoc quidem, quod nunc proponere volo, quibus rationibus discuti, et ad intellectum usque deduci possit, videor videre, sed ad determinandam diligentiam vestram expecto, ut tanti viri auctoritas praeceptionis meae fiat aut correctio aut integritas.

Quid ergo sit, quibusque imaginationibus circa illud vel delusus habear, vel certus tenear, iam nunc aperiam, ut vulnere aperto haesitationis a vobis praesto sit medicamentum certitudinis.

Macrobius super somnium Scipionis ubi loquitur de magnitudine caeli, terrae, solis et lunae eorumque rotunda globositate, compertum esse ait aput geometricos peritissimos, ut in duobus circulis, si diametrum unius duplum sit diametro alterius, eius crassitudo, cuius diametrum duplum sit, octupla fiat crassitudini illius circuli, cui duplum idem est diametrum. De diametro circulum, de circulo diametrum, de diametro et circulo aream invenire, ac ideo diametrum ad diametrum, et circulum ad circulum, et aream ad aream comparare illis est facile, qui de talibus consuevere curare. | Crassitudinem autem ad crassitudinem quomodo potest comparare, qui 129
necdum, quid sit crassitudo, perceperit? Duarum enim rerum notitiam

earundem comparatio non praecedit, sed subsequitur. Unde fit, ut crassitudinem aliquam crassitudini alteri octuplam esse comprehendere nequeat, qui non noverit, unde cuiusque circuli crassitudo concrescat. Quod autem iam inde mihi percepissem, aperiam; non, ut aiunt, Minervam litteras, sed ut monstrem, quid sentiam. Quatinus, si erro, ad viam a sagacitate vestra reducar, si viam titubantis teneo, auctoritati vestri assensus innitar. Sed ut ad id, quod volo, perveniam, ab his, quae nota sunt pluribus, incipiam.

Diametrum VII pedum mihi facio; ex hoc circulum sic quaero: triplico illud, et eius septimam triplicationi illi superaddo, et sic circulum in XXII pedibus habeo. Medietate autem diametri, quod est III et S, et medietate circuli, quod est XI, in invicem multiplicatis venit mihi area eiusdem circuli in XXXVIII pedibus et S. Ecce diametrum, ecce circulum, ecce aream habeo. Sed ut crassitudinem inveniam, diametrum idem cubico, et cubum mihi eiusmodi facio, qui globositatem sphaerae lateribus contingat, angulis autem et lineis ab angulo in angulum procedentibus excedat. Ab eiusmodi cubo crassitudinem illam, quae a globositate usque ad angulos [9v] et lineas procedit, necesse est | recidere, ut hac recisa solius sphaerae soliditas remaneat. Hanc recisionem hoc modo facio: summam totius cubi per XXI, id est vicesimas primas, divido; ex his vicesimis primis decem excessionibus cubi deputo, undecim reliquas crassitudini sphaerae relinquo. Quod idem esset, si summam totius cubi undecies ducerem, et ex illa concretione unam vicesimam primam subducerem. Haec enim una vicesima prima tanta esset, quantae illae XI, quae ex simplici cubi summa tollebantur. Ut lucidius fiat, quod dicimus, certis numeris crassitudines duas assignabimus, ut assignata in invicem comparare possimus. Non ut haec, aut veriora vos ignorare credamus, sed ut viis nostris vestrae diligentiae monstratis a vobis deinceps ducti errare nesciamus.

Circuli, cuius est diametrum VII pedum, crassitudinem sic quaero: cubico diametrum et dico, septem septies fiunt XLVIII; rursus septies XLVIIII fiunt CCCXLIII. Ecce cubus eiusmodi quadrati, cuius unumquodque latus VII sit pedum, et hic cubus globositatem sphaerae ex toto concludit. Ut autem superexcedentia recidantur, sic facio: tollo vicesimam primam ex CCCXLIII, quae est XVI et ʒS. Hanc si decies duco, habeo [0r] CLXIII et ʒS, excessiones scilicet cubi; | si undecies, habeo CLXXVIIII et SS, sphaerae videlicet crassitudinem.

Ut manifestius fiat, quod diximus, circulum cum quadrato subpingamus, ut visa in planitie facilius intelligantur in crassitudine.

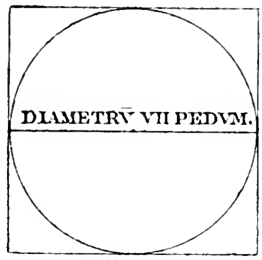
Ecce in hac sphaera diametrum est VII pedum, circulus XXII, area XXXVIII et S, soliditas CLXXVIIII et SS. Non est autem mirandum, si cubus in excessionibus suis fere medietatem crassitudinis obtineat, cum hic quadratus in planitie supergressionibus suis vix tertiam partem retineat. | 13(Hic quippe in quadratura, cum unumquodque latus VII sit pedum, secundum laterum dimensionem area XLVIIII habebit. Cumque circulus ex his sibi XXXVIII et S acceperit, quadratura suis excisuris non nisi X et S retinebit. Quare autem mihi ita esse videatur, si vobis non sit fastidiosum audire, mihi non erit onerosum dicere.

Hic idem namque quadratus si septies in altum tollitur, CCCXLIII pedes reddit, excessiones scilicet suas et aream circuli secum in altum ducens. Septies enim X et S, id est excessiones, fiunt LXXIII et S, et septies XXXVIII et S, id est area circuli, fiunt CCLXVIIII et S. Sed LXXIII et S et CCLXVIIII et S reddunt CCCXLIII. Quare quadratum in altum tollere nihil aliud est, nisi excessiones suas et circuli aream secum deducere. Ab illo igitur cubo, qui ex area XLVIIII pedum consurrexerat, si quis septies X et S, id est LXXIII et semissem reciderit, nondum sphaericam globositatem expolivit, sed formam modii ab aequali area in aequalem aream deductam constituit in pedes scilicet CCXVIIII et S.

Ex hac autem forma non medietatem, ne in modum trochi ex utraque parte acueretur, sed tertiam partem quae est LXXXIIII et SSS, tollere debemus, ut sphaeram ex omni parte expoliamus. Sed haec tertia non tamen omnino rotundae formae, id est LXXXVIIII et SSS, et septem excessiones, id est LXXIII et S idem reddunt, quod X vicesimae primae, quae ob hoc ab integro | cubo tollebantur, ut sphaera undique rotundaretur, et haec X 13 vicesimae primae ad medietatem sphaerae fere pervenirent, nisi quadragesima secunda eiusdem cubi impedirentur. Iam facile est videre, cum quadratus nec tertia sui circulum devincat, quare cubus fere sui medietate sphaerae globositatem supervadat. Sed haec forma modii, quae recisis undique lateribus cubi rotundatur, quamvis ad plenum non possit, aliquatenus tamen subscribatur, ut, quod inertia linguae occultat, veritas picturae aperiat. Ecce videri potest, quantum post recisionem accuminum de cubo recidendum sit de modio, ut pura globositas sphaerae remaneat.

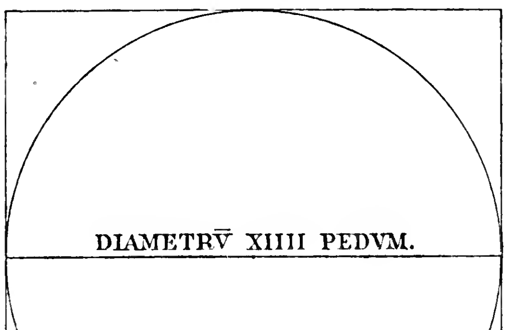
| Ecce satis dictum esse videtur, quomodo ex diametro VII pedum 13 crassitudo sphaerae concrescat. Iam nunc aliam statuamus, quae ex duplo diametro proveniat. Sit XIIII diametrum. Hoc cubico, XIIII^{es} XIIII^{es} XIIII fiunt $\overline{\text{II}}$.DCCXLIIII, hic est cubus sphaeram concludens. Huius si vicesimam primam accepero, quae est CXXX et SS, et eam decies duxero, venient

mihi Ī.CCCVI ss, et his cubus sphaeram excedit. Si autem undecies, fiunt Ī.CCCCXXX et VII et ʒs, et haec est sphaerae crassitudo. Quam si quis eisdem rationibus velit informare, quibus superiorem informavimus, scilicet ut eam de cubo in formam modii, de modii forma in suam globositatem velit deducere, non tantum istam, sed et omnes, de quocumque diametro processerint, simili modo rotundare poterit. Sed uterque circulus depingatur, et is qui VII, et is qui XIIII pedes habet in diametro, ut numerus cuique suae soliditatis adscriptus demonstret, quantum minora maiore vincatur.



| Huius sicut dictum est diametrum VII est pedum, circulus XXII, area XXXVIII et s, soliditas CLXXVIIII et ʒs

Huius autem diametrum XIIII est pedum, circulus XLIIII, area CLIIII, soliditas Ī.CCCCXXXVII et ʒs. Diametrum et circulus sphaerae maioris diametro et circulo minoris dupla proportione iunguntur; area vero areae quadrupla; crassitudo autem crassitudini octupla. Bis enim VII et bis XXII, quod est diametrum | et circulus minoris, faciunt XIIII et XLIIII, quod est diametrum et circulus maioris; et quater XXXVIII et s, quod est area minoris, fiunt CLIIII, quod est area maioris; et octies CLXXVIIII et ss, quod soliditas minoris, reddunt Ī.CCCCXXXVII ʒs, quod est soliditas maioris.



Iam nunc quidem nil dubitarem, quin haec esset ratio sphaericam crassitudinem inveniendi, si proprium esset sphaericae tantum crassitudinis, ut, si duplicitas in diametro constaret, octuplicitas in soliditate reperiretur; sed hanc eandem rationem in omnibus cubis invenio. Si enim ex binario unum fecero cubum et ex quaternario alterum, quia quaternarius duplus est binarii, cubus quaternarii octuplus erit cubo binarii, et etiam area binarii quadrupla erit area quaternarii. Et non tantum in cubis, sed etiam in puteorum idem invenitur profunditatibus.

In his omnibus si erro, oro, ut ad viam veritatis reducar; si viam teneo, nihilominus peto, ut via, quae me dubitantem tenet in tenebris, vestri assensus auctoritate illustrata reluceat. (Bltt. 132^{v}, 20.)

41) An diesen Brief schliessen sich nun von der nämlichen Hand geschrieben ohne jeden Zwischenraum und nur durch rothe Anfangsbuchstaben

ausgezeichnet wieder Capitel aus GERBERTS Geometrie an, und zwar Blatt 132^{v}, 21 bis 135, 18. Von den Capiteln bei OLLERIS sind es Nr. 58; 56, 3. Abs.; 15; 53; 72; 73; 74; 75; 56, 1. u. 2. Abs.; 57; 79; 56, 3. Abs. nochmals; 25^{a}; 83. Hier wieder die Varianten.

Seite **454.** (Cap. 58.) 23. *sit longitudo pedum.* — 24. *fiunt; horum fiunt III et* ʒ. — 25. *Hi* fehlt; *CXXXVII et* ss. *Huius sumpta quarta decima parte.* — 26. *fiunt; VIIII et; et septunx* statt *et semis* bis *semuncia.*

455. 1. *vero haec; sphaerae.* — 2. *sive sit longa.*

453. (Cap. 56, 3. Abs.) 25. *eius cubices et.* — **454.** 1. *ex eaque summa vicesimam primam accipies; et haec erit crassitudo sphaerae.*

Daran schliesst sich folgender in GERBERT und bei CANTOR nicht befindlicher Abschnitt:

Ecce est pentagonus, qui unumquodque latus trium pedum habeat, et dicatur ter tres ter fiunt XXVII. Ex hac summa deducatur, id est abstrahatur, aera, id est latus, in quo sunt tres, remanent XXIIII. Huius medietas, id est duodenarius, huius pentagoni, qui tres in unoquoque latere habet, aream implet.[1])

428. (Cap. 15.) 7. *sextas; dodras.* — 8. *climma; arripennis; dicitur* fehlt. — 9. *leuca* fehlt. — 11. *digiti tres; secundum quosdam, quod.* — 12. *digitus unus et tertia.* — 15. *sextantem.* — 16. *uncias XXIII.* — 18. *climma.* — 19. *in latitudine CX* fehlt; *CXX in longitudine.* — 20. *quod* bis *actis* fehlt. — 21. *CXX.* — 24. *passus M* fehlt. — 25. fehlt.

452. (Cap. 53.) 5. *Ager est; quo.* — 5—6. *sunt dispositae.* — 6. *sic quaeratur.* — 7. *quinta sumenda est.* — 9. *quem et alia inveniendi est regula.* — 10. *id est per.* — 11. *Ecce numerus arborum.* — 13. *partiantur.* — 14. *efficient; id est latitudinem.*

461. (Cap. 72.) 10. *domos ponere.* — 11. *pedum* fehlt; *vero* fehlt. — 12. *iunctae* fehlt; *fiunt.* — 13. *faciunt.* — 16. *tricesimam.* (Cap. 73.) 21. *unaquaeque.* — 23. *fiunt XLV.* — 26. *fiunt.*

462. (Cap. 74.) 3. *si vis locare.* — 5. *auferas, id est* $\overline{VII} \cdot DCXLIIII$*; vero tertiam sumas.* — 6. *hos et pro; ergo.* — 8. *pedibus* fehlt; V^{es} $\overline{MMCI} \cdot XCVI$. (Cap. 75.) 12. *sit.* — 13. *implere.* — 14. *habebit.* — 15. C^{es} XX^{es} *CCXL.* — 16. *CXLIV; per longitudinem et latitudinem multi-*

---

1) Es ist nach der Formel für die Fünfeckszahl

$$Pr_5 = \frac{3r^2 - r}{2}$$

für $r = 3$ gerechnet worden. Hier ist auch der Beweis dafür, dass die Annahme CANTORS, *a. a. O.* S. 125, es bedeute *aera* die Seite, richtig ist. Es heisst ja „*aera, id est latus*“.

plicans. — 16—17. *quater* $\overline{MMCXLVIII}$ · *CC, quos si dividis.* — 18. *fiunt; remanentibus* bis *unciis* fehlt.

453. (Cap. 56, 1 u. 2 Abs.) 19. *XXII*^{da} *sublata.* — 21. *si vis deinde, vel.* — 21—22. *ducenda est diametrum.* — 22. *dimidia.* — 22—23. *dimidium diametri duceretur.*

454. (Cap. 57.) 17. *diametrum XIIII.* — 18. *fiunt; pedes* fehlt. — 19. *parte quarta decima fiunt CCCVIII; et* fehlt.

463. (Cap. 79.) 13. *diametrum in se.* — 14. *sumas; et duabus.* — 14—15. *remanentibus* bis *VIII* fehlt; *Quod et idem.* — 19. *ducatur area et fiunt pedes.*

Zwischen Zeile 17 und 18 dieses Capitels steht noch folgender in Gerbert nicht befindlicher Absatz:

De omni circulo XXII^{dam} *aufer partem, et illius numeri remanentis tertiam partem pro circuli diametro semper habebis. Embadum si nosse desideras, numerum dimidium totius circuli per dimidium diametri multiplica, et huius summam pone in embadum.*

Es folgt nochmals Cap. 56 Abs. 3 absolut mit der obigen Fassung übereinstimmend.[1]

434. (Cap. 25^{a}.) 15. *Ad aestimandum cuiusque rei altitudinem sole lucente.* — 16. *res illa fuerit sub divo posita.* — 17. *semper* fehlt; *elige.* — 18. *virgam huic parte coaequatam.* — 20. *fuerit. quantum virga superat.* — 21. *virga mensuram habet.* — 22. *est umbra* fehlt; *a virga superatur.* — 22—23. *adicias.* — 24. *rei illius habeto.*

465. (Cap. 83.) 8. *quoti.* — 9. *uno pede.*

42) Darunter, Blatt 135^{v}, 19—23 steht folgender Text zu einem Gesange nebst einer sonstigen Bemerkung:

Cordex care cantilenam care canta caritativam chordas contrectando canens caeli conditori carmen, cui canunt chori caelorum canticam canticorum, cane chordis canta corde creatura creatorem.

Diapason et diatesseron symphoniae et intentae et remissae pariter consonantiam diapason in modulatione consona reddunt.

43) Die folgende Seite, Blatt 136^{r}, enthält nur die Worte „*Pondera*

---

1) In einem Werke „*Liber theoreumaciae*" betitelt, das spätestens aus dem 14. Jahrhundert stammt — es befindet sich u. A. in dem *Codex lat. Mon.* 14684 aus dem XIV. Saec. —, heisst das *18. theorema* des 2. Buches: CIRCULI SPERICAM CRASSITUDINEM INVENIRE. ARCHIMENIDES *dicit: circulum incrassare si vis, dyametrum eius cubices, et ipsam cubicationem 11*^{es} *ducas, ex eaque summa 20*^{am} *unam partem minuas et illa erit spere crassitudo.* Hier wird also unser vorliegender Absatz dem Archimedes zugeschrieben. Mit welchem Rechte? und woher stammt diese Behauptung?

et mensurae", ist sonst aber leer. Die betreffende Abhandlung, vielleicht schon im X. Jahrhundert geschrieben, — jedenfalls ist die betreffende Hand die älteste im ganze Bande[1]) — beginnt auf Blatt 136v mit ganz vergilbten Schriftzügen folgendermassen:

Signa.

DE RATIONE VNTIARVM.

ƨƨ Scripulus est sex siliquae.

ψ Dimidia sextula. Duo scripuli vel siliquae XII.

ᴗ Sextula sive sescla. quatuor scripuli vel siliquae XXIIII.

u. s. w.

ł Assis sive as. duodecim unciae.

Zwischen den Zeilen sind von etwas späterer Hand, die aber jedenfalls dem XI. Jahrhundert zugehört, Interlinearglossen mit bedeutend schwärzerer Schrift gemacht. Die beiden folgenden Capitel setze ich vollständig hierher.

| DE PROBATIONE AURI ET ARGENTI. 13

Omne aurum purum cuiuslibet ponderis omni argento similiter puro eiusdem tamen ponderis densius est parte sui vicesima, quod ita probari potest. Si purissimi auri libra cum aeque puri argenti simili pondere | 13 sub aqua conferatur, in statera XII denariis, id est vicesima sui parte, aurum gravius argento, vel argentum levius auro invenitur. Quapropter si inveneris ossus aliquod auro formatum, cui argentum permixtione inesse videatur, scireque volueris, quantum auri, quantumve in eo contineatur argenti, sume argentum sive aurum, et examinato suspecti operis pondere non minus pensatum massam de utrovis metallo fabricato, atque utrumque, et opus scilicet et massam, staterae lancibus inponeto aquaeque inmergito. Si argentea fuerit massa, quam fecisti, opus praeponderabit, si aurea fuerit, allevato opere aurum inclinabitur. Hoc tamen ita fiet, ut, quot partibus inclinatur aurum, tot idem partibus sublevetur argentum, quia quicquid

1) Es ist dies mit ein Grund, weshalb ich behaupte, dass mit Blatt 75 die eigentliche Sammlung von Werken schloss, und alles Übrige spätere Zuthat ist, wo aber das später sich nicht auf die Abfassungszeit, sondern auf die Hinzufügung zu dem eigentlichen Corpus der Handschrift bezieht, welche, wie ich oben gesagt habe, mit dem durch X bezeichneten Quaternio ihren Abschluss hatte. Dass der Abschnitt aus früherer Zeit stammt als die übrigen Theile, folgt auch daraus, dass der Text erst auf der Rückseite des Blattes beginnt, was nur bis in das X. Jahrhundert üblich war. Die Worte *Pondera et mensurae* sind von der Hand des Inhaltsverzeichnisses geschrieben.

in ipso opere fuerit sub aqua praeter | solitum per[1]) .... qui priorem .... pertinere, quod .... ad argentum propter scarsitatem est referendum. et ut hoc facilius possit adverti, considerare debes tam in gravitate auri, quam in levitate argenti VII denarios significare libram, sicut prima lectionis huius fronte praefixum est.

DE MENSURA CAERAE ET METALLI IN OPERIBUS FUSILIBUS.

In fundendis operibus cuiusque ponderis metallum quotlibet ad certum caerae pondus respondere debeat.

Ad caerae unciam unam:

Stagni unciae VII et denarii XVII;
Aeris albi unciae VIII et denarii XVI;
Aeris cypri unciae VIIII et denarii III;[2])
Argenti unciae X et denarii XII;[3]) (!)
Argenti unciae X et denarii XII;
Plumbi unciae XII et denarii VI;[4]) |
Auri unciae XVIIII et denarii VIII.

Item si caerae fuerit libra, stagni VII librae et unciae X et denarii quattuor mittendi sunt, quia, quot uncias cera habuerit, tot VII uncias et XVII denarios stagni pondus habere debebit, et ideo si caerae fuerit libra, id est XII unciae, duodecies VII unciae stagni, quae faciunt VII libras, et duodecies XVII denarii mittendi sunt, qui faciunt CCIIII denarios, id est uncias X et denarios IIII.

Si fuerit caerae libra, aeris albi librae VIIII sumendae sunt et duodecies XVI denarii, quod sunt uncias VIIII et denarios XII.

In libram caerae aeris cypri librae VIIII et denarii XII mittendi sunt.

Sic in libram caerae auricalci librae VIIII et duodecies tres denarii, qui faciunt unciam unam et denarios XVI.

Contra libram caerae argenti librae X et duodecies XII denarii.

| Simili modo in libram caerae plumbi librae XIII et duodecies VII denarii mittendi sunt.

In auri fusione contra libram caerae auri librae XVIIII et duodecies octo denarii, quod sunt unciae IIII et denarii XVI.

---

1) Es sind hier, offenbar mit Absicht, drei Zeilen vollständig mit Tinte überschmiert worden; soweit es möglich war, habe ich die Worte zu entziffern versucht. Eine von der Stelle genommene Photographie liess ebenfalls ein weiteres Lesen nicht zu. 2) Es muss heissen: *et denariis I,* wie aus dem Folgenden ersichtlich ist. 3) Hier sollte sicher stehen: *Auricalci unciae VIIII et denarii III.* Der Abschreiber ist offenbar aus einer Zeile in die andere gerathen. 4) Nach dem Folgenden müsste es heissen: *unciae XIII et denarii VII.*

Das folgende Capitel

DE MENSURA ET PONDERIBUS

ist wieder ein Ausschnitt aus den *Gromatici Veteres* (I, 371, 6—376, 5). Ich setze davon nur die Varianten hierher.

371. 8. *provinciis.* — 9. *provincias.* — 17. *pedes.* — 17—18. *pertica; pedes X* fehlt. — 26. *sive medico*(!). — 28. *quidam autem.*

372. 9. *pedes.* — 10. *pedes.* — 11. *XIIII.* — 17. *semi iugerum.* — 20. *pedes.* — 22. *pedes.* — 25. *quia apud.* — 32. *procellit.*

373. 1. *longitudinem.* — 6—7. Statt *qui* bis *demonstrat* steht *ac demonstratur.* — 29. *duo; faciunt* fehlt. — 29—30. *staterae.*

374. 8. *ex quattuor; et duodecim.* — 13. *IIII punctos; lunam V.* — 23. *quae habet.* — 27. *cyatum.*

375. 1. *X oxifalum; cyati.* — 2—3. *quod sunt; quattuor* fehlt. — 9. *coniugii.*(!) — 11. *coniugius. Coniugius.* — 18. *sicut* fehlt. — 28. *XX et quattuor.*

376. 2. *coaequatus.* — 5. Mit dem Worte *Modius* bricht der Auszug ab.

Blatt 144ʳ ist leer.

43) Auf Blatt 144ᵛ bis 195ʳ, 10 und 160ʳ, 12—160ᵛ folgt eine Schrift ohne Titel. Anfang: *Quicumque astronomicae disciplinae et caelestium sphaerarum geometricaliumque mensurarum altiorem scientiam diligenti veritatis inquisitione altius rimari conatur.*

Nach dem Handschriftenverzeichniss ist es Hermanns des Lahmen *liber de utilitatibus astrolabii.* Auf Blatt 159ʳ heissen die Schlussworte: *Huius autem divisionis exordium a meridici linea, quae per medium primum gradum cancri ducitur, capit initium.* Auf Blatt 160ʳ beginnt dann die Schrift wieder: *Duo sunt extremi vertices mundi, quos appellant polos* und endigt ohne richtigen Schluss mitten im Satze abbrechend Blatt 160ᵛ *In lacteo circulo inter pisces.*

44) Auf Blatt 159ʳ, 10—160ʳ, 12 ist nun, merkwürdig genug, so dass man ohne genaues Aufmerken es nicht finden würde, ein Fragment des Briefes Adelbolds an Gerbert zwischengeschrieben. Derselbe beginnt mit dem letzten Worte von Zeile 7 auf Seite 474 bei Olleris und geht bis zum Schlusse des Briefes. Er stimmt vollständig mit der Lesart überein, von welcher ich oben einen genauen Abdruck gegeben habe, weshalb ich von einer Mittheilung der *Vario lectio* Abstand nehme.

Mit Ausnahme von Blatt 136 bis 143, welche ich, wie oben gesagt, für den ältesten Bestandtheil der Handschrift halte, ist nur Blatt 1—75 unzweifelhaft aus der ersten Hälfte des XI. Jahrhunderts, während der übrige Theil recht wohl aus den letzten Jahrzehnten desselben herstammen kann. Nur in den genannten älteren Abschnitten kommt niemals das sogenannte runde *s* vor, sondern steht ausnahmslos auch am Ende das lange *ſ*. Auch in den übrigen Theilen ist das *ſ* überwiegend, doch habe ich an wenigstens 6 Stellen schon das runde *s* verwendet gefunden, ein deutliches Zeichen späterer Entstehung.

Anmerkung zu Seite 102, 115 und 116. Das Wort *inauratura* kommt in der Lachmannschen Ausgabe der *Gromatici Veteres* nur Seite 97, Zeile 8 in folgendem Zusammenhange vor: *planum est quod Greci epipedon appellant, nos constratos pedes; in quo longitudinem et latitudinem habemus; per quae metimur agros, aedificiorum sola, ex quibus altitudo aut crassitudo non proponitur, ut opera tectoria, inauraturas, tabulas, et his similia.* Weder aus diesem Texte noch aus der zugefügten Figur 70 kann man errathen, was unter *inauratura* zu verstehen ist. Aus dem *Codex Arcerianus* hat dann Cantor eine Reihe noch nicht veröffentlichter Paragraphen der Gromatici, dem Epaphroditus zugeschrieben, in seinen *Agrimensoren* herausgegeben. In diesem Abschnitt (*Agrimensoren S. 213*) heisst es nun in § 25: *Sfera est, cuius diametrum ped. XIIII. quaero huius sferae inauraturam. S. Q. semper diametrum duco bis, fit XXVIII. hoc multiplico in se, fit DCCLXXXIIII. hoc duco XI, fit $\overline{\text{VIII}}$ DCXXIIII. sumptam partem XIIII. DCXG. tot ped. erunt.* Daraus folgt, dass unter *inauratura* die Oberfläche der Kugel verstanden werden soll. In unserer Handschrift ist derselbe Paragraph ebenfalls in etwas erweiterter Gestalt vorhanden. In ihm steht nun hinter *inauraturam: hoc est profunditatem sive spissitudinem,* was dieser Erklärung widersprechen würde. Ebenso widersprechend ist die Stelle auf S. 116 dieser Abhandlung, wo es anfangs heisst: *Sphaera fuerit data, cuius dyameter sit pedum VII, eius solidos pedes sic quaere,* und wo doch am Schlusse gesagt wird: *tot pedum erit eiusdem inauratum.*

Bei Gerbert (S. 466) heisst das Cap. 86: *Circuli inauraturam sic quaeras: diametrum circuli in se ductum vigesies bis multiplica. Effectae summae septimam accipias, et haec erit circuli inauratura; quod idem esset, si per diametrum circulum multiplicares.* Dass hier nicht mehr von der Oberfläche der Kugel die Rede ist, welche schon früher als *sphaerae area* berechnet worden, dürfte einleuchten. Dem ist aber auch wirklich so, denn in spätern Jahrhunderten wird der Inhalt des Kreisringes zwischen dem Kreise vom einfachen und dem vom doppelten Radius als *circuli inauratura* bezeichnet und, wenn auch fälschlich, als das Vierfache des Grundkreises berechnet, wie ich es in verschiedenen Handschriften der Münchner Hof- und Staatsbibliothek konstatiren konnte.

Wie *inauratura* die Oberfläche der Kugel bedeuten konnte, da die wörtliche Uebersetzung doch jedenfalls Vergoldung ist, und wie sich der Begriff dann auf jenen Kreisring verschieben konnte, hat mir Herr Professor E. v. Wölfflin in München auf meine Anfrage in freundlichster Weise so auseinandergesetzt:

München, 26. März 1895.

„Der Uebergang von „Vergoldung“ zu „Oberfläche“ scheint mir ganz natürlich. Es konnte doch einmal das Problem auftauchen: Wie viel Gold braucht man zum Vergolden einer Kugel? z. B. einer Kugel, auf der die Victoria steht. Wäre das

Gold, mit welchem wir die Nüsse vergolden, kreisförmig, nicht quadratisch zugeschnitten, so könnte man — so nahm man an — mit vier runden Plättchen die entsprechende Kugel vergolden. Wenn man nun auch annahm, der Kreis verhalte sich zu dem Kreisring wie 1 : 4, so lag nichts näher als den Ausdruck inauratura = das Vierfache, darauf zu übertragen."

Ich glaubte zur Aufklärung der merkwürdigen Anwendung obigen Wortes in so verschiedenartiger Bedeutung diese Auseinandersetzungen hinzufügen zu sollen.

Thorn, 7. September 1895.

Man verbessere gütigst in den beiden vorhergehenden Abhandlungen folgende Druckfehler:

Seite	47	Zeile	9	tilge	*dem.*
„	61	„	4	lies	*cariofoliis.*
„	69	„	3	„	*solidos.*
„	89	„	13	„	beidemale *BE.*
„	91	„	8	tilge	das Komma hinter *steterit.*
„	93	„	6	lies	*DAE.*

EINE

AUTOBIOGRAPHIE VON GOTTHOLD EISENSTEIN.

MIT ERGÄNZENDEN BIOGRAPHISCHEN NOTIZEN

HERAUSGEGEBEN

VON

F. RUDIO.

Bei Gelegenheit der Herausgabe der Briefe Eisensteins an Stern, welche ich in Gemeinschaft mit meinem Freunde und Kollegen, Herrn Prof. Hurwitz, übernommen hatte[1]), empfand ich es als ein Bedürfnis, die Situationen, denen jene Briefe entsprungen waren, durch eine kurze Darstellung der äusseren Lebensverhältnisse Eisensteins zu erläutern. Es schien mir dies um so wünschenswerter, als merkwürdigerweise über den allerdings nur allzu kurzen Lebenslauf des grossen Mathematikers, der plötzlich wie ein hellstrahlendes Meteor auftauchte, um eben so rasch wieder zu verschwinden, nur äusserst wenig — und das Wenige noch vielfach entstellt — in die Oeffentlichkeit gedrungen ist.

Den Ausgangspunkt meiner Nachforschungen boten mir die verschiedenen Legenden, welche sich an den Eintritt Eisensteins in das akademische Leben geknüpft haben. Nach der einen Version soll Eisenstein die Universität ohne Maturitätszeugnis bezogen haben; nach einer andern soll er zwar durch ein Maturitätsexamen hindurchgegangen sein, dabei aber in allen Fächern, mit Ausnahme der Mathematik, eine so unglaubliche Unwissenheit an den Tag gelegt haben, dass die Prüfungsbehörde, namentlich auch im Hinblick auf das angeblich wenig befriedigende sittliche Verhalten des Examinanden, die Abweisung desselben zu beschliessen im Begriffe war. Da habe sich im letzten Momente noch Schellbach erhoben und erklärt, man dürfe sich der Lächerlichkeit nicht aussetzen, einem jungen Manne heute das Reifezeugnis zu verweigern, den vielleicht morgen schon die Berliner Akademie zu ihrem Mitgliede ernennen würde. Daraufhin habe Eisenstein das Zeugnis der Reife erhalten.

Nachdem ich durch die gefälligen Bemühungen von Herrn Prof. Knoblauch in Erfahrung gebracht hatte, dass Eisenstein auf Grund eines Reifezeugnisses vom Friedrich-Wilhelms-Gymnasium an der Berliner Universität immatrikuliert worden war, wandte ich mich an meinen hochverehrten ehemaligen Lehrer, Herrn Stadtschulrat E. Fürstenau in Berlin, der sich mit dankenswertester Bereitwilligkeit der weiteren Nachforschungen annahm. Dieselben ergaben bald eine unerwartet reichhaltige Ausbeute. Am 21. Jan. d. J. schrieb mir Herr Fürstenau: „Der Direktor des hiesigen Friedrich-Wilhelms-

1) Siehe pag. 171 dieses Heftes.

Gymnasiums, Herr Nötel, hat mir auf meine Anfrage mitgeteilt, dass Eisenstein an dieser Anstalt am 22. September 1843 die Reifeprüfung als Extraneer bestanden hat. Direktor Nötels Mitteilung lautet weiter:

> „Schellbach schreibt unter die mathematische Arbeit bloss „sehr gut" und im Zeugnis: „In der Mathematik reichen seine Kenntnisse weit über den Umfang des Gymnasialunterrichtes hinaus. Sein Talent und sein Eifer berechtigen zu der Erwartung, dass er einst wesentlich zur Ausbildung und Erweiterung der Wissenschaft beitragen werde." Auch sonst lautet das Zeugnis durchweg anerkennend und mindestens befriedigend. Von seiner umfangreichen Vita lasse ich Ihnen zur beliebigen Benutzung eine Abschrift anfertigen, die Sie baldigst erhalten sollen."

Soweit der Brief des Herrn Direktor Nötel, der auch für mich sehr interessant gewesen ist, weil er eine ganze Anzahl Legenden, die auch von Eisensteins Bekannten geglaubt und weiter verbreitet worden sind, vollständig vernichtet. Sobald ich die in Aussicht gestellte Abschrift der Vita erhalten habe, schicke ich sie Ihnen. Ich darf wohl annehmen, dass dies Schriftstück noch weit interessanter ist, als die obigen Nachrichten, da es doch unzweifelhaft eine Darlegung des eigenen Bildungsganges enthalten wird."

Die mir bald darauf von Herrn Fürstenau gütigst zugestellte Vita Eisensteins schien mir in der That trotz mancher jugendlicher Weitschweifigkeiten so viel des Interessanten zu bieten, dass ich mich, im Einverständnis mit Herrn Hurwitz, entschloss, dieselbe, losgelöst von den oben erwähnten Briefen, zum Mittelpunkte einer besonderen Publikation zu machen. Bevor ich sie aber jetzt in extenso folgen lasse, um dann später noch weitere Ausführungen daran zu knüpfen, ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Stadtschulrat Fürstenau und Herrn Direktor Nötel meinen verbindlichsten Dank dafür auszusprechen, dass sie mich in die Lage versetzt haben, ein Schriftstück mitzuteilen, welches von den zahlreichen Bewunderern des Genius Eisensteins gewiss mit Freude begrüsst werden wird.

Curriculum Vitae des Gotth. Ferdinand Eisenstein.

Indem ich einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission hiermit die Schilderung meines Lebenslaufes vorlege, erlaube ich mir zuerst einige Worte über die Tendenz dieser Arbeit vorauszuschicken.

Eine Uebersicht des eigenen Lebens soll nicht allein die äusserlichen Schicksale und Ereignisse, die einen betroffen haben, die Verhältnisse, in denen man sich befunden hat, überhaupt alles sämmtlich Erlebte und Erfahrene von der Geburt an bis auf den heutigen Tag zusammenstellen, sie muss auch den ganzen Verlauf der geistigen Ausbildung verfolgen, sie muss zeigen, wie man nach und nach durch Irrtümer und Fehler hindurch Verstand und Herz zu dem Standpunkte herangebildet hat, von dem aus man auf sein vergangenes Leben zurückblickt. Das Erstere ist gleichsam nur die Form, zu welcher das Letztere erst den wahren Inhalt liefert. Die Aufgabe, bloss die historischen Facta seines Lebens neben einander zu stellen, ist, indem dazu nur ein gutes Gedächtnis gehört, allerdings weit leichter, als die andere, sich aus seinem jetzigen geistigen Standpunkte heraus auf die verschiedenen Stufen seiner Entwickelung zurückzuversetzen und für einen Augenblick so zu denken und zu fühlen, wie man in seiner Kindheit gedacht und empfunden hat. Doch will ich, um diese Arbeit ihrer Bestimmung und meinem jetzigen Zwecke gemäss einzurichten, nämlich den Grad meiner sittlichen und Verstandesreife an den Tag zu legen, das Schwierige des Unternehmens nicht scheuen und also mit der Beschreibung meines äusseren Lebens, soweit es in meinen Kräften steht, eine Geschichte meiner inneren Entwickelung zu verbinden versuchen.

Ehe ich mich jedoch in die Vergangenheit zurückversetze, werde ich erst noch einen Blick auf die Gegenwart werfen.

Ein passender Zeitpunkt ist mir für die Anfertigung dieser Arbeit geworden; ein würdiger Ruhepunkt ist mir gegeben, um von demselben aus der Gegenwart in mein verflossenes Dasein zurückzublicken. — Ich stehe gerade im zwanzigsten Jahre. Eine wichtige und bedeutungsvolle Zahl im menschlichen Leben. Mit dem zwanzigsten Jahre tritt man in eine ganz neue Epoche des Lebens ein; man geht vom Knaben- zum Mannesalter über, aus einer Zeit der Ausbildung und Abhängigkeit in eine Zeit der Reife und Selbstständigkeit; bis dahin war man noch ein halbes Kind, andere Menschen, Eltern, Freunde, Lehrer, sorgten für einen, man wurde von anderen geleitet, nur auf einen kleinen Wirkungskreis war man beschränkt. Jetzt hat man das Alter erreicht, um ins grosse Leben einzutreten, man wird auf seine eigene Kraft hingewiesen, man soll jetzt das selbst für sich thun, was bisher Andere für einen gethan haben; bisher war man noch in steter Entwickelung, jetzt soll sich der Charakter und die Gesinnung festgesetzt haben, die einen nun für das ganze Leben begleiten werden. Im zwanzigsten Jahre kann man schon genau den Pfad erkennen, den der Mensch einschlagen wird, man sieht schon deutlicher, zu welchen Erwartungen und Hoffnungen man berechtigt ist. Der Mensch, der bisher ein Gegenstand der Nachsicht gewesen ist, dem man leicht einen Fehltritt als eine Uebereilung der Jugend verzieh, wird nun ein Vorwurf des strengen

Urteils, der jeden Schritt, welchen er thut, selbstständig verantworten und vertreten muss. Wenn man bisher noch über die künftige Bestimmung in Zweifel war, so muss man jetzt mit sich vollkommen im Reinen sein, welchem Berufe man sich für die Zukunft zu widmen gedenkt; man muss sich fürs ganze folgende Leben den Weg vorgezeichnet haben, den man mit Gottes Hülfe zu vollenden beabsichtigt. Was man bisher gelernt und erfahren hat, waren allgemeine Vorbereitungen, die die Grundlagen für jede specielle Richtung bilden sollen; nun muss man seinen ganzen Fleiss und Eifer auf Erlangung derjenigen Kenntnisse und Hülfsmittel wenden, welche für das besondere Fach, das man sich erwählt hat, notwendig werden. — Von hoher Bedeutung ist also dieses Jahr, welches gleichsam die Eingangspforte bildet, durch welche wir wie aus einer Vorschule in das ganze folgende Leben der Wirksamkeit und des Schaffens hinübertreten. Und besonders für mich ist dieser Zeitpunkt in hohem Grade wichtig, der ich, von feuriger Liebe zu einer speciellen Wissenschaft begeistert, nun den Pfad vor mir erblicke, auf den ich ihr ganz folgen, ihr mein ganzes Leben weihen darf. Während ich bisher mit Recht von Eltern und Lehrern dazu angehalten wurde, mich in allen Zweigen des Wissens zu fördern, und ich so fortwährend, wie stark es mich auch anzog, mit dieser vorherrschenden Neigung im Kampfe liegen musste, so soll mir jetzt die teure Freundin zur Begleiterin durch's Leben gegeben werden, ich werde, wenn mir mein jetziges Vorhaben nicht misslingt, nicht mehr genötigt sein, meine Kraft zu zersplittern, sondern werde dieselbe ganz auf dies eine Ziel wenden können, auf das mich mein innerer Beruf hinweist.

So will ich denn hier mit meinem vergangenen Leben gewissermassen abschliessen, um dann mit ruhigem Blicke, mit frischem Mute und Gottvertrauen in die Zukunft schauen zu können.

Das Licht der Welt erblickte ich am 16. April des Jahres 1823 in Berlin. Meine Eltern hatten sich im Juni des vorhergehenden Jahres verheiratet, und so war ich der erste Sohn ihrer Ehe; ich bekam später noch fünf Geschwister, drei Brüder und zwei Schwestern; diese Geliebten hat mir aber alle nacheinander der unerbittliche Tod geraubt, so dass ich jetzt von sechs Kindern meiner Eltern der einzig am Leben Gebliebene bin. Die heilige Taufe erhielt ich von dem Garnisonsprediger Ziehe, derselbe, der meine Eltern getraut hatte; so wurde ich in den Bund der evangelischen Christen aufgenommen.

Die erste Periode meines Lebens kann ich bis zum elften Jahre rechnen, weil ich in diesem zum erstenmale das elterliche Haus auf längere Zeit verliess und nach dem zwei Meilen entfernten Dalldorf in Pension gegeben wurde. Aus dieser ersten Jugendzeit erinnere ich mich mit Dankbarkeit und Rührung der innigen und wahren Zärtlichkeit meiner Eltern gegen ihren Erstgeborenen, und ich hing auch meinerseits mit der herzlichsten Liebe an Vater und Mutter, besonders an der Mutter, von der auf Augenblicke getrennt zu sein, mich schon Thränen kostete. Ich fand wenig Geschmack an dem Umgang mit andern Knaben desselben Alters; ich lebte viel mit mir und in mir selbst und so konzentrierte sich mein höchstes Glück und Wohlsein im Schosse der Familie. Von der lauten und fröhlichen Lust der Gleichaltrigen zog ich mich durchaus zurück, ich konnte mich auch selten mit einem derselben gut stellen. Ich war sehr verschlossen und zurückhaltend, ja beinahe ängstlich; aber wenn ich einmal einem Freunde mein jugendliches Herz aufschloss, so blieb es auch mit ganzer Liebe an demselben hängen. Ich hielt mich lieber zu den Mädchen oder zu erwachsenen, besonders ernstern Leuten, und das grösste Vergnügen war für mich, der Rede eines geistreichen Mannes lauschen zu dürfen. Während andere Knaben spielten, sass ich zu Hause und horchte den Gesprächen der Erwachsenen oder liess mich von der Mutter unterhalten und belehren. Die Mutter gab mir eigentlich meine erste Erziehung, denn der Vater wurde durch sein Geschäft in Anspruch genommen und konnte sich daher nur wenig um mich bekümmern; von der Mutter habe ich meine ersten Begriffe, die ersten Anfangsgründe meiner Kenntnisse. Ich erinnere mich noch, wie sie, um mir die Zeichen der Buchstaben einzuprägen, jedes auf eine sinnbildliche Weise auslegte, ein O war ein Thorweg, und so jeder Buchstabe nach seiner Form, E (K) war ein Schlüssel u. s. w.

Ich war in meiner Jugend äusserst kränklich und schwach, daher auch sehr reizbar. Eine schwere Krankheit, die Gehirnentzündung, welche fast alle meine Geschwister hingerafft hat, bedrohte auch mein Leben. Ich wurde zwar wieder hergestellt; aber die üblen Folgen blieben zurück und sie scheinen mich auch jetzt noch nicht ganz verlassen zu haben. Wahrscheinlich sind sie die Ursache einer, von Zeit zu Zeit wiederkehrenden, mich nun schon seit zwei Jahren verfolgenden hypochondrischen Stimmung, die ich nicht zu überwinden vermag.

Meine Mutter bewohnte oft mit mir in der warmen Jahreszeit eine Sommerwohnung in einem freieren Teile der Stadt oder vor dem Thore, während der Vater in der Stadt das Geschäft versah. So lernte ich frühzeitig das Angenehme des Lebens in der freien Natur kennen, obwohl mir auch dieser Genuss, wie viele, durch meine Kränklichkeit und Reizbarkeit verbittert wurde; dieselbe wurde auch Ursache vieler Unarten, mit denen die Mutter hart zu kämpfen hatte; denn so sehr diese mich auch liebte, so zeigte sich ihre wahre Zärtlichkeit erst darin, dass sie mich keineswegs verzog und mir durchaus nichts nachsah.

Durch meinen Krankheitszustand geschah es auch leider, dass ich hinter vielen zurückblieb, denen ich in der That geistig überlegen war. Besonders wurde es mir schwer, alles das zu begreifen, was Sitte und Uebereinkunft festgesetzt haben, den sogenannten Anstand des äusseren Lebens. Ich konnte eher als sechsjähriger Knabe den Beweis eines mathematischen Satzes verstehen, als dass man in der Stube die Mütze von dem Kopf nehmen oder dass man das Fleisch nicht mit der Gabel zerreissen, sondern mit dem Messer zerschneiden müsse. Indem ich von allen Dingen erst den Grund wissen wollte, machte ich durch meine Widersetzlichkeit meinen Eltern vielen Kummer. Ueberall, wo es auf eine Operation des Verstandes, auf ein Ergrübeln ankam, da war ich auf dem Platze, aber hartnäckig und eigensinnig stand ich da, sobald es hiess: Das ist so, das muss und soll so geschehen. Natürlich blieb ich bei dieser Sinnesart in allem dem, was praktisch ausgeübt, nicht theoretisch begriffen sein will, in allen diesen kleinen Fertigkeiten und sich stets wiederholenden täglichen Geschäften, in denen andere Kinder so schnelle Fortschritte machen, immer auf derselben Stufe stehen. Diese Lücke hat mir später manche Verlegenheit und Unannehmlichkeiten zugezogen, und ich musste nachher viel Kraft aufwenden, um das Versäumte nachzuholen, während ich es früher mit grosser Leichtigkeit hätte erwerben können. Ueberhaupt sind die übel daran, welche es in den Verrichtungen, die wir mit dem Tier gemein haben, nicht zu einer Geschicklichkeit bereits in der Jugend gebracht haben, sie werden überall anstossen, da es mit gereiftem Verstande später sehr drückend ist, sich noch mit diesen geringfügigen, aber doch unumgänglich nötigen Dingen zu befassen, wenn sie einem nicht von früher her zur Gewohnheit geworden sind.

Unter den verschiedenen Bekannten meiner Eltern, die in unserem Hause aus- und eingingen, erwähne ich nur einen, der vielen bedeutenden Männern noch aus der Erinnerung bekannt sein wird. Er ruht schon längst im Grabe, aber er hat zuerst meine schlummernde Neigung für die Mathematik erkannt und geweckt. Diese hatte sich bisher nur an den Tag gelegt durch eine grosse Lust, Alles zu zerstören, um auszufinden, was im Innern verborgen wäre, oder im Durchkriechen von allerlei verborgenen Räumen und Gängen, um zu sehen, wo man zuletzt hinkäme. Lautz war der Name dessen, der mich zuerst mit den Zahlen bekannt und vertraut machte, und obgleich sich diese Eindrücke wegen der zu grossen Jugend bald verwischten, so bin ich ihm doch eine dankbare Erinnerung schuldig. Er hatte unter Pestalozzi studiert und brachte dessen Ideen in unsere Familie.

Leider gehörte er zu denen, welche anders sind, als andere Menschen; ob er ein Genie gewesen ist, weiss ich nicht, ein grossartiger Kopf war er gewiss; aber er wusste sich nicht in Verhältnisse zu fügen, er war kein Freund regelmässiger Thätigkeit, und verstand es nicht, seinen Willen einem fremden unterzuordnen. Eine herrliche Anstellung als einer der ersten Lehrer an der Cauerschen Anstalt in Charlottenburg, deren Gründer er zum Teil war, gab er auf und starb im Elend. Er wurde mir von den Eltern als ein warnendes Beispiel vorgehalten, man prägte mir dasselbe um so mehr ein, als man bei mir Anlage zu einer ähnlichen Richtung zu bemerken glaubte.

Von meinem sechsten Jahre an besuchte ich die Bartelsche Schule in der Scharrenstrasse, welche noch existiert. Hier wurde der Grund zu meiner ersten wissenschaftlichen Bildung gelegt. In den untern Klassen erhielt ich meine Elementarbildung. Aus dieser Zeit entsinne ich mich noch, wie viel Qual mir das Schreiben, und im Rechnen die langen Multiplikationsexempel machten. Hieraus würde man nun mit Unrecht schliessen, dass es schlecht mit meinen mathematischen Fähigkeiten gestanden habe, wenn ich am Rechnen keine Neigung fand; denn nur das Mechanische, sich stets Wiederholende der Operation verdross mich, so wie mich noch jetzt verwickelte Rechnungen ohne weiteren Zweck anwidern, während ich keinen Fleiss scheute, wenn es etwas Neues gab, worin ich Geist, Idee bemerkte.

Mit grosser Leichtigkeit begriff ich die Formen der Grammatik und der Sprache, wie Alles, was sich auf logische Art fassen liess.

In den oberen Klassen lernte ich nun schon Geschichte und besonders Lateinisch, worin ich ziemliche Fortschritte machte. Neben andern Dingen wurden auch einige Hauptsachen aus der Physik vorgetragen. In dieser Zeit trat bei dem Knaben durchaus noch keine vorherrschende Neigung hervor; es fehlte der anregende Anstoss von aussen; sobald dieser gegeben ward, so musste sie sich in aller Kraft entwickeln, wie sich nachher zeigen wird.

Um meine Gesundheit zu stärken, gaben mich meine Eltern zu dem Prediger Horn nach Dalldorf in Pension, wo ich, von geistiger Anstrengung frei, ganz dem Genusse der Landluft leben sollte.

Höchst schmerzlich war mir diese erste Trennung von meiner Familie, und meine Sehnsucht nach den Eltern war fast unerträglich; ich konnte oft Stunden lang in Thränen zerfliessen. Ich schrieb die zärtlichsten Briefe an meine Teuren, in denen ich sie mit allerlei Liebesnamen benannte. Aus dieser Weichheit meiner damaligen Stimmung entstand eine gewisse poetische Richtung. Ich machte mehrere Gedichtchen, in denen sich die kindliche Liebe zu den Eltern aussprach. Diese Richtung ging später auf andere Stoffe über, und ich habe seitdem immer so ab und zu, wenn mich meine Stimmung dazu anregte, ein Verschen niedergeschrieben. Ich nehme mir die Freiheit, am Schlusse dieser Arbeit eine Probe aus der neueren Zeit beizufügen, von deren poetischem Unwert ich übrigens vollkommen überzeugt bin.

Ich bekam damals einige Neigung zu landwirtschaftlichen Beschäftigungen. Ein Stückchen Land, welches mir gegeben wurde, grub ich selbst um, bepflanzte und besäe'e es und freute mich, wenn die Blumen so schön blühten und wuchsen.

Meine geistige Ausbildung wurde in dieser Pension, in der ich ein halbes Jahr blieb, nicht sehr gefördert, im Gegenteil vergass ich vieles, was ich auf der Schule bereits gefasst hatte, besonders im Lateinischen. Doch erhielt ich hier meinen ersten Unterricht auf dem Fortepiano durch den Küster des Dorfes Herrn Bergemann, zu dem ich viel Liebe fasste. Im Zeichnen leistete ich damals recht Gutes. Dieses letztere Talent hat mich jetzt gänzlich verlassen; ich habe es später nie wieder geübt, und wenn ich jetzt die Zeichnungen aus jener Zeit betrachte, so muss ich gestehen, dass ich nicht halb so Gutes leisten könnte. Die Musik jedoch habe ich bis auf den heutigen Tag mit vielem Eifer und Lust getrieben, und glaube es bereits zu einiger Fertigkeit auf dem Fortepiano gebracht zu haben. Auch zum Komponieren hatte ich nicht wenig Neigung; einige meiner Kompositionen gefielen wenigstens denen recht gut, welchen ich sie vorspielte. Es ist immer gut, neben seiner Berufsthätigkeit noch ein solches zweites Talent auszubilden, das einem gleichsam den Eintritt in die Gesellschaft eröffnet. Man kann die Leute am Ende nicht mit mathematischen Sätzen unterhalten, aber eine hübsche Sonate oder Ouverture hört Jeder gern. Bei meinem Aufenthalte in Liverpool und Dublin, wo man in solchen Dingen noch hinter dem Kontinent zurück ist, hielt man mich fast für einen Virtuosen, während ich hier doch nur für einen höchst mittelmässigen Spieler gelten kann.

Ich verliess diese Pension, um in die Cauersche Anstalt in Charlottenburg einzutreten, die, nach dem Tode Cauer's eingegangen, sich damals unter dem Schutze des Staates auf's Neue bildete. Ich war einer der Ersten, die in die auf diese Weise ganz neu entstehende Anstalt eintraten, die jetzt von dem Direktor Herrn von der Lage geleitet wird. Die Art, auf welche ich hier behandelt wurde, sagte mir auf keine Weise zu. Es herrschte in diesem Institute eine fast militärische Disciplin, die mir, der ich bisher immer unter der Sorgfalt einer liebenden Hand gestanden hatte, am allerwenigsten zusagte. Ich war bis jetzt sehr viel mir selbst überlassen gewesen und hatte das Meiste nach Bequemlichkeit und Laune gethan. Hier ging Alles nach einer strengen unumstösslichen Ordnung. Auf Kommandowort musste man aufstehen, zu Bette gehen, arbeiten, spielen. Unter beständiger Aufsicht des Lehrers konnten wir auch nicht das Geringste nach eigenem Belieben thun. Unter dieser ungewohnten strengen Zucht verlebte ich sehr traurige einförmige Tage. Doch habe ich dieser Anstalt viel Gutes zu verdanken. Vor allen war es hier, wo mein mathematisches Talent zuerst ins Licht gezogen wurde; hier genoss ich den ersten systematischen Unterricht in der Mathematik. Die Methode, welche der Direktor bei diesem anwandte, bestand darin, dass jeder Schüler selbst die Beweise der einzelnen Sätze nach der Reihe auffinden musste. Ein Vortrag fand durchaus nicht statt; keiner durfte seinen Beweis dem Nachbar mitteilen, und Jeder erhielt den folgenden Satz unabhängig von den Uebrigen, sobald er den vorhergehenden richtig bewiesen und gründlich erfasst hatte. Hier begann für mich eine ganz neue Thätigkeit, ein ganz neues Leben; mit ungeheurem Eifer und einem wahren Durste ergriff ich das Gegebene; schon bei den ersten Sätzen war ich schnell den Anderen vorausgeeilt, und ich bewies bereits den hundertsten Satz, während sich meine Mitschüler noch beim elften oder zwölften abmühten. Nur ein junger Mann, der jetzt auf der Universität Medicin studiert, konnte mir nacheifern. — Die Methode war sehr gut, denn zuerst wurde durch das Selbstdenken die Kombinationskraft des Verstandes gestärkt, und dann wurde auch durch das gemeinsame Streben ein allgemeiner Wetteifer unter den Lernenden angeregt. Doch allgemein dürfte diese Methode wohl nicht anzuwenden sein. Denn wie sehr ich auch das alles anerkenne, was zu ihrem Vorteile gesagt werden kann, so muss man doch gestehen, dass sie die Kraft zu sehr vereinzelt und dass sie keine Uebersicht des Ganzen gewährt, welche nur durch einen guten Vortrag erreicht werden kann. Jetzt, wo sich durch die mannigfaltigen und herrlichen neueren Entdeckungen ein so gewaltiger Reichtum des Stoffes gehäuft hat, ist man durchaus genötigt, in der Masse zu arbeiten, wenn man aus dieser unendlichen Fülle nur einigermassen das Hauptsächlichste und Wichtigste aufnehmen und sich zu eigen machen will. Das grösste mathematische Genie kann am Ende nicht allein alles das auffinden, was erst durch das Zusammenwirken vieler ausgezeichneter Köpfe entstanden und aus ihrem gemeinsamen Schaffen hervorgegangen ist. Diese Methode des Selbstauffindens ist für Schüler nur dann anwendbar, wenn es sich um die Auffassung eines kleinen Gebietes leichter, besonders geometrischer Sätze handelt, wo am Ende alles derselben Behandlungsweise unterworfen wird und keine neuen und scharfsinnigen Ideen erfordert werden. — Daher kam es auch, dass der Kreis meiner mathematischen Kenntnisse, so gründlich und sicher ich auch das einmal

Verarbeitete gefasst hatte, doch in quantitativer Hinsicht, als ich die Anstalt verliess, sehr klein war, und dass ich sogar in der ersten Zeit auf dem Gymnasium hinter meinen Mitschülern zurückstehen musste. — Wenn ich nun jetzt den grossen Umfang des Gebietes überschaue, das ich beherrsche, so scheint es mir fast ein Wunder zu sein, wie ich dies alles in den wenigen 5—6 Jahren ohne allen Unterricht erreichen konnte. Aber als ich nur einigermassen die nötigen Hülfsmittel erlangen konnte, warf ich mich mit einem solchen Eifer und mit einem solchen eisernen Fleisse auf das Studium, dass es wohl nicht anders kommen konnte. Denn ich lebte ganz in dieser Wissenschaft, und wenn ich Tage und halbe Nächte angestrengt bei meinem mathematischen Buche, oder einer Ausarbeitung, oder einer eigenen Idee sass, so war mir dies keineswegs eine Anstrengung, sondern die grösste Wohlthat und ich schätzte mich glücklich, wenn man mich nur nicht von aussen her störte oder daran hinderte. Wenn ich mich dann zur Ruhe legte, so schlief ich mit dem freudigen Gedanken ein, am folgenden Tage die Arbeit wieder fortsetzen zu können, und der früheste Morgen fand mich schon wieder am Pulte.

Ich kehre zu meiner Pension zurück, um die Fortschritte anzugeben, die ich ungefähr dort in den übrigen Zweigen des Wissens gemacht habe. Im Lateinischen waren mir die Hauptsachen aus der Grammatik schon bekannt; ich las hier den Cornelius Nepos und Julius Caesar; wir verfertigten Exercitien und Extemporalien. In der Geschichte erhielt ich eine allgemeine Uebersicht der Griechen- und Römerzeit. Griechisch wurde gar nicht getrieben; ich studierte für mich selbst in der letzten Zeit meines Dortseins die Buttmannsche Grammatik und brachte es bis zu den unregelmässigen Zeitwörtern. Es war mein Wunsch, sobald ich wieder nach Berlin käme, gleich in die Obertertia eines Gymnasii eintreten zu können. Xenophons Anabasis zu lesen gestattete man mir nicht, sondern nahm mir die Bücher fort.

Der Unterricht wurde in verschiedenen Klassen erteilt, die den unteren Klassen eines Gymnasii bis etwa Untertertia entsprachen. Ich habe sie alle durchgemacht, und meine Eltern nahmen mich nicht eher aus der Anstalt fort, als bis ich dort nichts mehr lernen konnte.

Das Leben der Pensionäre war, wie schon gesagt, ein höchst einförmiges und streng abgemessenes. Wir schliefen alle zusammen in einem grossen Saale unter Aufsicht eines Lehrers. Auf seinen Ruf erhoben wir uns um $5^1/_2$ Uhr des Morgens, wuschen uns und zogen uns an, um uns sodann zum gemeinschaftlichen Frühstück hinunter zu begeben, das aus Milch und Semmel bestand. Der sehr geräumige Schlafsaal wurde selbst bei der strengsten Kälte nicht geheizt, und so kam es denn oft im Winter, dass ich, wenn es recht hart gefroren hatte, aus dem steinernen Wasserkruge mit dem Stiefelknechte das Eis loshauen musste, um den Neptun aus seiner krystallenen Behausung hervorzulocken. — Nach genossenem Frühstück fertigten wir die aufgegebenen Arbeiten; um 8 Uhr begannen die Lektionen und dauerten bis 4 Uhr Nachmittags mit einer Unterbrechung von zwei Stunden für eine kleine Erholung und das Mittagsbrot, an dem in einem grossen Saale Lehrer und Schüler auf gleiche Weise Teil nahmen. Bis 6 Uhr war wieder Arbeitsstunde; den Abend hatten wir frei und konnten uns nach Belieben unter Aufsicht des Lehrers beschäftigen. Wenn sich hier ein Lehrer nicht das nötige Ansehen zu geben wusste, so brach der jugendliche Uebermut um so stärker hervor, je strenger er die übrige Zeit in Fesseln erhalten wurde. — Der Direktor war so gütig, mich in den Winterabenden das Schachspiel zu lehren, welches mir viel Vergnügen gewährte.

Uebrigens waren wir fast immer in den Zimmern oder auf dem Hofe eingeschlossen und bekamen die Stadt kaum zu sehen.

Mein Gesundheitszustand war während dieser Zeit ein sehr trauriger, wahrscheinlich zum Teil eine Folge der ungewohnten Strenge, die vielleicht für andere junge Leute recht vorteilhaft sein mag, aber auf meine Persönlichkeit gerade die entgegengesetzte Wirkung hervorbrachte. Nicht allein, dass ich fortwährend an einer trüben Stimmung litt und nie recht munter sein konnte, ich war auch von Zeit zu Zeit recht ernstlich und oft gefährlich krank und musste mit Fieber und Kopfentzündungen kämpfen. Da ich fast immer unwohl war, so glaubte man zuletzt, dass ich mich nur verstelle, und so hatte ich neben meinen Schmerzen auch noch bittere Kränkungen zu ertragen, denn der Gesunde und Starke schaut auf den Kränklichen und Schwachen gewöhnlich mit Verachtung, und so macht es besonders die Jugend. Ich musste schon früh erfahren, was Leiden heisst, und die bittere Frucht des Lebens kennen lernen; meine sehr reizbare Gemütsstimmung liess mich alles doppelt empfinden, was Andere kaum berührte. Doch murre ich hierüber nicht, und aus derselben liebenden Hand des Schöpfers, die mir Anlagen und Liebe zur Wissenschaft schenkte, empfange ich auch die mir beschiedenen Leiden mit Ergebung.

Im September des Jahres 1837 verliess ich endlich die Cauersche Anstalt und kehrte nach langer Trennung in den Kreis meiner Familie zurück, die damals aus meinen Eltern, mir und einer kleinen Schwester von sechs Jahren bestand, an der ich mit grosser Zärtlichkeit hing, die mir aber nach dem Willen Gottes bald darauf durch den Tod entrissen wurde.

Von dieser Zeit an habe ich bis zum Juli des verflossenen Jahres 1842 die Gymnasien der Hauptstadt besucht und zwar das Friedrich-Wilhelmsche des Herrn Direktor Spilleke ruhmwürdigen Andenkens, auf dem ich Obertertia und die beiden Sekunda durchmachte, und dann bei dem Herrn Direktor Bonnell die Prima des Werderschen Gymnasii. Diese neue Periode meines Lebens war wieder ziemlich gleichförmig; ich ging alle Tage nach dem Gymnasium, kam nach Hause, machte meine Schularbeiten und verwendete dann die ganze mir übrige Zeit auf meine mathematischen Beschäftigungen.

Meine Neigung zur Mathematik wurde jetzt so vorherrschend, dass ich oft darüber das Andere vernachlässigte, und meine Fortschritte in den übrigen Lehrgegenständen keineswegs glänzend genannt werden konnten. Wenn nun auch deshalb meine Lehrer nicht so überaus mit mir zufrieden sein konnten, so leistete ich doch so ziemlich das Aufgegebene und kam in der gehörigen Zeit durch die Klassen.

Ich hatte mich schon damals fest entschlossen, mich dem Studium der Mathematik zu widmen, und ohne erst zu fragen, welche Laufbahn mir auf diesem Wege offen stände, folgte ich hierin nur meiner Neigung und einer inneren Stimme. — Darin bin ich in der That glücklicher, als viele junge Leute in meiner Lage, dass mir die Natur selbst eine so bestimmte Richtung für's ganze Leben vorgezeichnet hat, von der ich nicht abweichen kann und auf die ich nach Abschweifungen in andere Gebiete immer wieder durch eine innere Gewalt zurückgeführt werde. Traurig scheint es mir, wenn Jünglinge, die studieren wollen, von einem zum andern schwanken, bald dieses bald jenes ergreifen und wieder fallen lassen, und oft im letzten Semester ihres Besuches von Prima nicht wissen, was sie nun eigentlich studieren sollen. Wie viele studieren auch blos aus falscher Eitelkeit, weil sie sich schämen, ein Handwerk zu ergreifen oder sich irgend einem anderen Berufe zu widmen, während doch am Ende jede Stellung dem Manne zur Ehre gereicht, der in ihr mit Lust und Liebe seine Pflicht erfüllt. Wer nicht in sich den Beruf und wahre Liebe zur Wissenschaft verspürt, der mag nicht studieren; wenn er sich auch noch so viele positive Kenntnisse vielleicht mühselig zusammenrafft, immer bleibt er ein dürftiger Nachbeter, ein Ungeweihter, und nie wird er sich zur Selbständigkeit erheben und mit schöpferischer Kraft der Begeisterung die Grenzen der Wissenschaft hinausrücken.

Es würde zu weitläufig sein, wenn ich mich genau über den Weg aussprechen wollte, den ich bei meinen mathematischen Bemühungen gegangen bin. Nur im Allgemeinen Folgendes. — Was mich an der Mathematik so gewaltig und ausschliessend anzog, war, neben dem Inhalte selbst, besonders die eigentümliche Art der Denkthätigkeit, mit welcher die mathematischen Dinge behandelt werden. Diese Art des Schliessens und Auffindens neuer Wahrheiten aus den alten, sowie die ausserordentliche Klarheit und Evidenz der Sätze, und das Geistreiche der Ideen, welcher ganze Theorien zu Grunde liegen, hatte einen unwiderstehlichen Reiz für mich. Keine andere Wissenschaft schien eine so reiche Ernte und einen so unerschöpflichen Stoff zur Ausübung dieser Geistesthätigkeit darzubieten. Kant zeigt ganz deutlich in seiner Kritik, dass dieses Feld das einzige ist, auf dem der menschliche Geist sich ohne alle Schranke ergehen und ohne Aufhören a priori die glänzendsten Entdeckungen machen kann; in der That ohne Aufhören, da jede neue Konstruktion, von einem genialen Geiste geleitet, neue Resultate hervorbringen muss. Ich gewöhnte mich bald daran, von den einzelnen Sätzen ab schärfer in den Zusammenhang zu dringen und ganze Theorien als eine Einheit aufzufassen. So ging mir die Idee des mathematisch Schönen auf. Es giebt ein solches mathematisch Schöne, ebenso wie ein aesthetisch Schönes, welches man aber nur dann erst begreift, wenn man voll Begeisterung ein ganzes System von Entwickelungen, welche sich an eine Hauptidee schliessen und durch ihre Gemeinschaft zu einem Endresultate führen, in ihrer Verkettung, Harmonie, und Genialität als ein organisches Ganze wie ein Gemälde im Geiste überschaut. Es giebt auch einen mathematischen Takt oder Geschmack, der der Untersuchung gleich von vorn herein ansieht, ob sie zu einem Resultate führen werde oder nicht, und die Betrachtungen und Entwickelungen demgemäss leitet.

Nachdem ich mir durch eigenes Studium (denn einen Privatlehrer hatte ich nie) die Elementarkenntnisse erworben hatte, ging ich zur höheren Mathematik über und studierte ausser andern Büchern über diese Gegenstände besonders die herrlichen Werke von Euler und Lagrange über die Differential- und Integralrechnung. Da ich es mir zum Gesetz machte, jede neue Theorie, sobald ich sie verstanden hatte, gleich schriftlich auszuarbeiten, so prägten sich mir die Dinge weit tiefer ein, und ich beherrschte sie vollkommen, wozu noch kam, dass ich jede Sache auf mannigfaltige Arten kennen zu lernen suchte. Oft spazierte ich im Garten oder Zimmer auf und ab und demonstrierte mir, gleichsam mich selbst unterrichtend, ganze Reihen von Sätzen vor, deren Beweise mir klar waren. Ich kann diese Methode als sehr praktisch empfehlen. Das Docieren war überhaupt meine Neigung und ich hätte dieselbe gern an meinen Mitschülern befriedigt, wenn diese nicht meiner Begeisterung mit einer wahren Eiseskälte entgegengetreten wären, und wenn ich nicht hätte mit Betrübnis bemerken müssen, wie wenig Interesse die jungen Leute an einer Wissenschaft nahmen, die ich meinerseits mit aller Liebe umfasste, deren ich nur fähig war.

Als ich in der höheren Analysis schon ziemlich fest war, wurde ich durch andere Betrachtungen auf die Zahlentheorie geführt, die ich bisher merkwürdiger Weise für unfruchtbar gehalten hatte. Ich erkannte meinen Irrtum und legte mich nun mit um so grösserem Eifer auf diesen Zweig der Mathematik, der in der Art der Behandlung und dem Stoffe nach von den übrigen Teilen durchaus abweicht, so dass er ganz getrennt von ihnen sein unabhängiges Bestehen in sich selbst hat, obgleich die höchsten und feinsten Partien beider Wissenschaften sich jetzt durch Dirichlet's und Jacobi's Forschungen aneinander zu neigen scheinen. Dieser doppelt schwierigen und doppelt interessanten Wissenschaft wandte ich seitdem meinen Hauptfleiss zu, und ich habe mir das Meiste und Wichtigste aus derselben zu eigen gemacht; besonders bin ich auch zu ihren neuesten Entdeckungen vorgedrungen. Die Zahlentheorie ist den Mathematikern eben wegen ihrer Eigentümlichkeit weniger bekannt; aber sie scheint jetzt den wichtigsten Platz in der Mathematik einnehmen und zur Basis aller neueren Forschungen dienen zu wollen, wie z. B. die Kreisteilung von Gauss und Dirichlet's Theorie der Anzahl der quadratischen Formen beweist. Aus ihr habe ich daher auch einen Gegenstand, der sich gut abrunden lässt, gewählt, um ihn als eine Art Probearbeit einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission vorzulegen.

In den Jahren 1840 bis 1842 besuchte ich die Kollegia des Professor Ohm an der Universität und zwar mit einer solchen Energie und Eifer, dass ich kaum die Zeit von einer Stunde zur anderen abwarten konnte. Auch nahm ich, wenn es die Zeit erlaubte, an den Vorlesungen des grossen Lejeune Dirichlet Teil, der uns jetzt leider auf einige Zeit verlassen hat, um in freundlicheren Zonen seine edle Lebenskraft zu stärken; mit seinem würdigen Lobe möchte ich mein ganzes Leben ausfüllen, hielte ich es nicht für Anmassung, meine schwache Stimme da hinzuzufügen, wo so allgemeine Anerkennung der erhabensten Geister stattfindet. Selbst wenn ich, um mit Homer zu reden, ein ehernes Herz und eine tausendfältige Zunge hätte, würde ich nicht die Begeisterung schildern können, in die mich die grossartigen und genialen Entdeckungen dieses ungeheuren Kopfes nicht nur in einem, sondern fast in allen Gebieten der Mathematik versetzt haben; wie sich immer in den verwickeltsten Theorien ein einfacher, schöner und klarer Hauptgedanke zum Grunde legt, an den sich das Ganze wie um einen Mittelpunkt anreiht, wie er immer den wahren Kern herauszufinden weiss, so dass man, wie man auch nachher den Gegenstand anders drehen mag, doch einsieht, das war es, worauf es ankam, so und nicht anders musste es gemacht werden. — Das wesentliche Princip der neueren mathematischen Schule, die durch Gauss, Jacobi und Dirichlet begründet ist, ist im Gegensatz mit der älteren, dass während jene ältere durch langwierige und verwickelte Rechnung (wie selbst noch in Gauss' Disquisitiones) und Deduktionen zum Zweck zu gelangen suchte, diese mit Vermeidung derselben durch Anwendung eines genialen Mittels in einer Hauptidee die Gesammtheit eines ganzen Gebietes umfasst und gleichsam durch einen einzigen Schlag das Endresultat in der höchsten Eleganz darstellt. Während jene, von Satz zu Satz fortschreitend, nach einer langen Reihe endlich zu einigem fruchtbaren Boden gelangt, stellt diese gleich von vorn herein eine Formel hin, in welcher der vollständige Kreis der Wahrheiten eines ganzen Gebietes konzentriert enthalten ist und nur herausgelesen und ausgesprochen zu werden darf. Auf die frühere Art konnte man die Sätze zwar auch zur Not beweisen, aber jetzt sieht man erst das wahre Wesen der ganzen Theorie, das eigentliche innere Getriebe und Räderwerk. So gründet z. B. Jacobi auf die einzige Idee, dass in dem Differentiale einer rationalen Funktion jede Potenz von x nur nicht das Glied $\frac{1}{x}$ vorkommen könne, die ganze Theorie die Umkehrung der Reihen in aller Vollständigkeit, Gauss auf eine eigentümliche Anordnung der ganzen Zahlen nach den Exponenten ihnen congruenter Potenzen seine grossartige Theorie der Kreisteilung, an der Jahrtausende verzweifelt hatten, (seit Euclid war nichts hinzugekommen). Doch genug hiervon, der Mathematiker darf seine Begeisterung nicht zu sehr in Worte ausgiessen; dies bleibt dem Dichter und Künstler vorbehalten, der seine Kunst im Gesange bis an den Himmel erheben und ihre Herrlichkeit in glänzenden Bildern ausschmücken kann; in eine so ernste und hohe Wissenschaft, wie die Mathematik, darf sich die Phantasie nicht einmischen, hier ist nur redliches Forschen und eifriges Weiterdringen am Platze, jedes weitläufige unwissenschaftliche Sprechen über die Gegenstände entfernt schon von ihrem wahren Geiste: Das beseligende Gefühl, das von demjenigen empfunden wird, der, von ihren Wahrheiten durchdrungen, ihren eigentlichen Wert zu schätzen versteht, ist für sie der herrlichste Weihrauch.

Nachdem ich so mein mathematisches Leben und Treiben geschildert, welches fast meine ganze Zeit ausfüllte und meine ganze Energie in Anspruch nahm, habe ich nur noch wenig von dem Uebrigen hinzuzufügen. — Meine Lektüre war sehr gewählt, sie wurde von meiner Mutter geleitet. An Romanen und schwülstigen Sachen, welche sonst junge Leute mit einer wahren Wut zu verschlingen pflegen, fand ich gar keinen Gefallen und so habe ich meine Phantasie so ziemlich rein erhalten. Nur klassische und wirklich bildende Bücher las ich und zog aus diesen die Stellen schriftlich aus, die mich am meisten interessierten, indem sie mir entweder auffallend oder wegen ihres Inhaltes wichtig erschienen; auch fügte ich zuweilen eine Beurteilung des Buches hinzu, wie es mich zur Zeit berührte. Auf diese Weise konnte ich bemerken, wie sich nach und nach Geschmack und Urteil des Knaben verbesserte oder wenigstens änderte. Auch führte ich ein ziemlich regelmässiges Tagebuch, worin ich nicht allein die Ereignisse verzeichnete, sondern auch besonders, wie ich sie aufgefasst und was ich dabei gedacht und empfunden hatte, und auch hier zeigte sich mir, wie die Ansichten in den verschiedenen Perioden des Lebens schwanken und wechseln.

In die Wahrheiten der christlichen Religion wurde ich von dem Herrn Konsistorialrat Hossbach eingeweiht; ich genoss seinen Unterricht in den Jahren 39 und 40. Ostern 1840 wurde ich durch meine feierliche Einsegnung in den Bund und die Gemeinschaft derjenigen Christen aufgenommen, welche ihr Glaubensbekenntnis öffentlich abgelegt und gelobt haben, durch ihre Gesinnung und ihren Wandel sich als wahre Jünger Christi ihres Meisters und Erlösers würdig zu bezeigen.

Bis zum Ende dieser Lebensperiode nämlich, bis zum Juni v. Js., war mein Leben in ziemlicher Gleichförmigkeit der Alltäglichkeit geblieben, wie es bei dem fortwährenden Aufenthalte in einer und derselben Stadt oder deren nächsten Umgebung kaum anders sein konnte. Jetzt sollte ich auf längere Zeit Vaterstadt und Vaterland verlassen, um in fremdem Lande neue Menschen, neue Sitten, ein ganz neues Leben kennen zu lernen. Da der Vater schon seit zwei Jahren sein Geschäft nach England verlegt hatte, so reiste ich mit der Mutter den Sommer des vorigen Jahres dorthin und habe bis vor zwei Monaten in England, Irland und Wales mich aufgehalten. Was ich auf dieser Reise, die mich Stubengelehrten auf einmal in's weite Leben hinauswarf, alles gesehen und erfahren, wie ich mit Wehmut halb Hamburg in Asche liegen sah, wie ich grosse Städte kennen lernte mit ihren Merkwürdigkeiten und den Wunderwerken des menschlichen Erfindungsgeistes, Eisenbahnen unter Felsen und den Fundamenten der Häuser, Brücken unter den Betten der Flüsse, grossartige Kanäle und Häfen, Beweise von Ungeheurem, was die Kraft der Menschen vereint leisten kann, wie ich herrliche Landschaften durchreist bin, ausgeschmückt mit den lieblichsten Reizen der Natur, wie mich der Anblick des majestätisch sich ausbreitenden, unermesslichen Meeres berührt hat, wie ich sechs grosse Seereisen gemacht habe, unter ihnen eine sehr gefährliche zwischen den Klippen von Anglesia durch die ungeheure Kettenbrücke, unter deren Hauptbogen das ganze Berliner Schloss mit Bequemlichkeit Platz findet, und unter welcher man mit aufrechtstehenden Masten hindurchsegelt, wie ich den Snowdon, den höchsten Berg Englands bestieg, wie ich die Bekanntschaft grosser Männer, als O. Connel's, gemacht habe und die bitterste und schmutzigste Armut neben dem üppigsten und glänzendsten Reichtum erblickte; wie ich ein Volk sah, welchem der Staat, die Politik und seine Freiheit alles ist, ein Volk, das weit entfernt von der Aeusserlichkeit und schalen Renommisterei der andern Länder, nur das schätzt und dem Wert beilegt, was wirklich, was gediegen, was nützlich ist, wie ich besonders den Geist der dortigen Universitäten kennen zu lernen suchte, um ihn mit dem der unsrigen zu vergleichen, wie endlich diese ungeheure Mannigfaltigkeit der Eindrücke die ganze Gestaltung meines innern und äussern Lebens, Urteil und Lebensanschauung wesentlich verändert und modifiziert hat, so dass ich durch diese Reise ein ganz anderer Mensch geworden bin: dieses alles der Reihenfolge nach mit gehöriger Klarheit und Deutlichkeit auseinanderzusetzen und zu beschreiben, würde allein den Raum mehrerer Bogen erfordern und also die dieser Arbeit gesteckten Grenzen bei Weitem überschreiten. Gern und mit grossem Vergnügen würde ich, wenn ich nicht eine Hochwohllöbliche Prüfungskommission zu ermüden fürchten müsste, in einer besonderen Arbeit Derselben eine vollständige Beschreibung meiner Reise vorlegen, die ich hier wegen der zu grossen Menge des Stoffes bei Seite zu lassen mich genötigt sehe. — Genug, die Sehnsucht nach meinem Vaterlande und der Wunsch ihm nützlich zu werden, so wie auch Familienangelegenheiten haben mich wieder zurückgeführt, da ich in der That schon die Absicht hatte, mich in Dublin niederzulassen und meine Studien dort fortzusetzen. Ich bin gekommen, um mich nun mit neuem Eifer und Fleisse auf die Studien zu legen, die ich auf meiner Reise nicht im mindesten vernachlässigt habe. So stehe ich denn auf dem Punkte, mir mit Gottes Hülfe durch das Bestehen der Abiturienten-Prüfung die Erlaubnis zum rechtmässigen Besuche der Universität und die Aussichten auf eine Carriere im Preussischen Staate zu erwirken.

Dies ist in kurzer Uebersicht die Schilderung meines verflossenen Lebens. Es ist das Leben eines zwanzigjährigen Jünglings, der erst in die Welt eintritt und der nicht wie der gereifte Mann oder der thatenumgebene Greis auf eine kräftige Fülle von stolzen und segensreichen Werken zurückschauen kann. Es ist arm an Leistungen, Thaten, Verdiensten, aber doch vielleicht nicht arm an allem guten Stoff; es enthält die Entschlüsse und Vorsätze für das künftige Leben und die Keime zu allem Guten und Schönen, welches sich einst später entwickeln kann. — Aber auch die Weise der Auffassung bei dieser Lebensbeschreibung und die Art der Beurteilung ist die eines Jünglings; wenn sich daher manche einseitige Darstellung, mancher fehlerhafte Gedanke, manches unrichtige Urteil vorfinden sollte, so macht doch gerade diese Mangelhaftigkeit die Arbeit zu dem, was sie eigentlich sein soll, eine selbstständig verfasste Schilderung des vom jetzigen Standpunkt in objektiver Anschauung aufgefassten Lebens.

Indem ich also hiermit diesen jugendlichen Versuch der Nachsicht und Wohlgewogenheit Einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission, dem sehr verehrten Herrn Direktor und den hochgeschätzten Herrn Professoren und Lehrern des Gymnasii zur Ansicht vorlege, wage ich es, auch mich und meine jetzigen Wünsche ganz gehorsamst Deren Gunst zu empfehlen.

Einer Königlichen Preussischen Hochwohllöblichen Prüfungskommission

Ganz Ergebenster Diener

Gotthold Eisenstein

wohnhaft Sophienstr. No. 24 bei Hr. Wentzel.

Berlin im August 1843.

Der Eisenstein'schen Vita war noch ein längeres, „Begeisterung" betiteltes Gedicht beigefügt. Ich habe dasselbe trotz darin enthaltener hübscher Gedanken hier nicht mit aufgenommen, weil es mir mehr den idealen Sinn als das poetische Geschick des Verfassers zu bekunden schien. Dagegen dürften die folgenden, die Darstellung ergänzenden Notizen noch am Platze sein.

Die Eltern von Ferdinand Gotthold Max Eisenstein waren beide in Danzig geboren, der Vater, Johann Konstantin, am 3. Sept. 1791, die Mutter, Helene geb. Pollack, am 10. April 1799. Beide bekannten sich, nach den vor mir liegenden amtlichen Mitteilungen, zu der evangelischen Konfession; doch lassen verschiedene Umstände nicht zweifelhaft erscheinen, dass sie jüdischer Abstammung waren. Das Schwesterchen, welches Eisenstein in seiner Vita erwähnt, hiess Anna Mathilde Margarethe; es wurde 1833 geboren und starb 1840. Der Vater war Kaufmann. Er wird in den amtlichen Registern als Plattirfabrikant, Kommissionär und Agent aufgeführt; jedenfalls scheint seine Beschäftigung eine wechselnde gewesen zu sein. Mit Rücksicht auf sein Verhältnis zu seinem Sohne Gotthold ist die Bemerkung nicht ohne Interesse, dass er gleichzeitig mit diesem, Juni 1843, aus England nach Berlin zurückkehrte. Mit der Berufswahl seines Sohnes war er offenbar nicht einverstanden; dieser wohnte weder als Student noch später als Docent in dem elterlichen Hause und scheint auch von seinen Eltern keine, oder doch keine ausreichende Unterstützung erhalten zu haben. Schon am 20. April 1846 schrieb Gotthold Eisenstein an Stern: „Es fehlt mir hier an aller Geselligkeit, mit meinen Verwandten bin ich ganz zerfallen, denn dies sind Geldleute, die mich nicht verstehen und die ich nicht verstehe, ...". Es sei noch hinzugefügt, dass die Eltern Eisensteins bis Ende 1869 in Berlin wohnten und dann nach Charlottenburg übersiedelten, wo beide hochbetagt starben, der Vater am 28. November 1875, die Mutter am 28. Juli 1876.

Zu den Lehrern Eisensteins gehörte auch Schellbach, der, wie mir Herr Fürstenau mitteilte, bis Ostern 1842 den mathematischen Unterricht in den obersten Klassen des Friedrich-Werderschen Gymnasiums erteilte und dann an das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium berufen wurde. Doch war wohl Eisenstein, der schon als Gymnasiast die Vorlesungen von Ohm und Dirichlet besuchte, dem Schellbach'schen Unterrichte damals längst entwachsen.

Auf Grund des am 22. Sept. 1843 erhaltenen Reifezeugnisses wurde Eisenstein am 21. Oktober desselben Jahres an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin unter dem Rektorate Lachmanns immatrikuliert. Seine ersten grösseren Ferien, Ostern 1844, benutzte er zur Erfüllung seines sehnlichsten Wunsches: die Bekanntschaft mit Gauss zu machen. Mit welcher Verehrung er an diesem hing, davon zeugen nicht nur alle seine wissenschaftlichen Arbeiten, sondern auch die zahlreichen Aussprüche, in denen er bei jedem sich bietenden Anlasse bewundernd auf Gauss hinweist. „Durch Gauss habe ich nun einmal meine mathematische Bildung erlangt," schreibt er gelegentlich an Stern, und ein anderes Mal: „An Gauss brauche ich wohl keinen Gruss zu bestellen, denn zu dem lieben Gott kann man nur beten und bewundernd emporblicken." Umgekehrt brachte aber auch Gauss dem kaum 21jährigen Mathematiker eine hohe Wertschätzung entgegen. Und was noch mehr ist, er wusste dieselbe auch thatkräftig zu bekunden. Es ist das grosse Verdienst von Gauss, namentlich durch Vermittelung Alexanders von Humboldt Eisenstein die Wege geebnet und ihn vor den drückendsten Sorgen bewahrt zu haben.

Während der in Göttingen zugebrachten Ferien trat Eisenstein auch in näheren Verkehr mit Stern, mit dem ihn bald eine herzliche Freundschaft vereinigte. Die Briefe, welche Eisenstein an Stern in den Jahren 1844 bis 1850 richtete, sind, abgesehen von ihrem wissenschaftlichen Inhalte, von um so höherem Interesse, als sie nicht nur eine Uebersicht über die Entwicklung der äusseren Lebensverhältnisse Eisensteins darbieten, sondern auch einen Einblick in die Seelenvorgänge dieses merkwürdigen Mannes gewähren, dem es durch eine verhängnissvolle Verkettung von Umständen und jedenfalls nicht durch eigne Schuld allein versagt war, zu einer seinen hohen Geistesgaben entsprechenden inneren Befriedigung zu gelangen. Da es nicht die Absicht dieser Zeilen ist, ein vollständiges Lebensbild Eisensteins zu entwerfen, so kann ich mich darauf beschränken, auf diese Briefe zu verweisen und denselben noch einige wenige Daten hinzuzufügen.

Es ist heute nicht mehr leicht, sich eine Vorstellung davon zu bilden, welch' ungeheures Aufsehen Eisenstein bei seinem Eintritte in die wissenschaftliche Welt erregte. Kaum hatte er das Maturitätsexamen absolviert, so folgten auch Schlag auf Schlag, in fast unheimlich kurzen Intervallen, die Publikationen, die ihn mit einem Male an die Seite der ersten Mathematiker des Jahrhunderts stellten. Brachte doch, um nur eines hervorzuheben, im Jahre 1844 der 27. Band des Crelle'schen Journals unter 27 mathematischen Beiträgen nicht weniger als 16, welche von stud. G. Eisenstein herrührten! Man muss alles dies im Auge behalten, um das unerhörte Ereignis zu verstehen, dass Eisenstein, bevor er nur das dritte Semester zurückgelegt hatte, von der philosophischen Fakultät der Breslauer Hochschule zum Doktor honoris causa ernannt wurde. Kein Geringerer als Jacobi war es gewesen, der hierzu die Anregung gegeben hatte. „Den 15. Februar 1845 erhielt der stud. phil. Eisenstein in Berlin wegen seiner ausgezeichneten mathematischen Arbeiten auf den Antrag der Professoren Kummer und Fischer das Ehrendiplom der Fakultät" — so lautet, wie mir Herr Prof. Sturm mitzuteilen die Güte hatte, die kurze aber inhaltsschwere Notiz in dem Fakultätsprotokolle. Dass ein junger, noch nicht 3 Semester zählender Student, der also, um einen drastischen akademischen Ausdruck zu gebrauchen, fast noch ein Fuchs war, von einer deutschen Universität zum Ehrendoktor ernannt wurde, dürfte in der Geschichte der Wissenschaft ohne Beispiel dastehen.

Bei solchen wissenschaftlichen Erfolgen konnten materielle nicht ganz ausbleiben. Wie schon bemerkt, verdankte Eisenstein dieselben vornehmlich Gauss und Alexander von Humboldt. Dem, was Eisenstein hierüber in seinen Briefen Stern mitteilt, füge ich, der historischen Darstellung etwas vorgreifend, im Wortlaute bei, was mir neben anderen wertvollen Daten Herr Geh. Kanzleirat Skopnik aus den Akten der Berliner Universität gütigst zur Verfügung gestellt hat:

„Mittelst allerhöchster Ordre vom 8. Juli 1846 war Eisenstein zu seiner Ausbildung im Lehrfache vom 1. April 1846 ab auf 3 Jahre eine jährliche Unterstützung von 500 Thalern aus allgemeinen Staatsfonds bewilligt worden. Am 14. September 1849 hat Eisenstein um Fortgewährung dieser Unterstützung gebeten, in Folge dessen der Minister die philosophische Fakultät zur gutachtlichen Aeusserung über den Erfolg seiner bisherigen Lehrwirksamkeit und seine sittliche Haltung aufforderte. Die Fakultät berichtet sehr günstig, umgeht aber eine Empfehlung zur weiteren Unterstützung, weil sie von dieser bisher nichts wusste, darin aber auch andern

Privatdocenten gegenüber eine Benachteiligung gelegen hätte. Der Erfolg war aber, dass Eisenstein von Seiner Majestät 400 Thaler jährlich auf 2 Jahre erhielt."

Schon am 20. April 1846 schrieb Eisenstein an Stern, dass er sich an der Berliner Universität zu habilitieren gedenke, und dass der Minister Eichhorn ihn von der gesetzlichen Bestimmung dispensiert habe, wonach eine Habilitation jeweilen erst drei Jahre nach zurückgelegtem Triennium zulässig sei. Indessen dauerte es doch noch ein volles Jahr, bis seine Habilitation perfekt wurde. Kränklichkeit und seine damit wohl zusammenhängende trübe Gemütsstimmung, der er in einem späteren Briefe an Stern (Januar 1848) einen geradezu rührenden Ausdruck zu geben wusste, mögen Ursache der Verzögerung gewesen sein.

In seinem Habilitationsgesuche — ich verdanke die Mitteilungen über Eisensteins Habilitation den freundlichen Bemühungen von Herrn Prof. Knoblauch — bezeichnete er als Fächer, über welche er zu lesen gedenke: Algebra, Differenzial- und Integralrechnung, Mechanik, mathematische Physik und besonders Zahlentheorie. Die Fakultätssitzung, in welcher über Eisensteins Zulassung entschieden wurde, fand am 22. April 1847 statt. Kommissare der Fakultät waren Dirksen und Encke. In dem Gutachten des letzteren heisst es, Eisenstein habe eine grosse Anzahl von Abhandlungen namentlich über Zahlentheorie geliefert, „welchen unsere vorzüglichsten Kenner dieses Teiles der reinen Mathematik einen sehr hohen Rang beilegen." Sonnabend, den 15. Mai, hielt darauf Eisenstein vor der Fakultät die Vorlesung „Ueber die Fundamentaleigenschaften der ganzen rationalen Funktionen." Als eigentliches Habilitationsdatum (wie es in die Schrift „Die Friedrich-Wilhelms-Universität in ihrem Personalbestande von 1810 bis 1885" aufgenommen ist) gilt das des 21. Mai 1847, an welchem Tage Eisenstein seine öffentliche Vorlesung „De fundamentis calculi differentialis" gehalten hat.

Ueber die Vorlesungen, welche Eisenstein an der Berliner Universität während seiner nur 10 Semester umfassenden Docententhätigkeit teils angekündigt teils gehalten hat, giebt das folgende Verzeichnis Auskunft, welches Herr Skopnik aus den Universitätsakten für mich auszuziehen die Freundlichkeit hatte. Den Vorlesungstiteln sind jeweilen darauf bezügliche kurze Bemerkungen von Eisenstein hinzugefügt.

Verzeichnis
der von dem Herrn Dr. Eisenstein an der Universität Berlin gehaltenen Vorlesungen.

I. Im Winter-Semester 1847/48.

1. Differenzialrechnung (privatim). 14 Zuhörer.
2. Höhere Zahlentheorie, besonders der quadratischen, kubischen und biquadratischen Reste und Theorie der ternären quadratischen Formen (gratis).

   Bei Gratis-Kollegien wird selten von den Zuhörern angenommen und ist daher die Anzahl nicht genau anzugeben. (gez.) E.
3. Theorie der elliptischen Funktionen (privatissime). 6 Zuhörer.

II. Im Sommer-Semester 1848.

1. Integralrechnung als Quelle der transcendenten Funktionen (privatim). 3 Zuhörer.
2. Erläuterung der disquisitiones arithmeticae von Gauss mit speciellen Untersuchungen über die Kreisteilungen (privatissime).

   Nicht zu Stande gekommen, statt dessen ein publice über die einfachsten Principien der Mechanik.

III. Im Sommer-Semester 1849.

Mathematische Besprechungen über einzelne Schwierigkeiten in den Studien.
Die Integralrechnung.
Ueber alle Theile der Mathematik.
Durch Krankheit war ich am Lesen verhindert.

IV. Im Winter-Semester 1849/50.

Eine Repitition der Differenzialrechnung. 11 Zuhörer.
Integralrechnung und analytische Mechanik. 12 Zuhörer.

V. Im Sommer-Semester 1850.

Die analytische Mechanik, nebst Entwickelung der nötigen Formeln aus der Integralrechnung. 4 Zuhörer.
Ich habe elliptische Funktionen statt der Mechanik gelesen, weil letztere von einem anderen Docenten angezeigt worden war. E.

VI. Im Winter-Semester 1850/51.

Die Differenzial- und Integralrechnung. 18 Zuhörer.

VII. Im Sommer-Semester 1851.

Die schwierigeren Teile der Integralrechnung in besonderer Hinsicht auf den heutigen Standpunkt der Wissenschaft.
Wegen Krankheit nicht gelesen.

VIII. Im Sommer-Semester 1852.

Die Integral- und Variationsrechnung und als Einleitung eine kurze Uebersicht der Differenzialrechnung. 18 Zuhörer.

Gleich mit Beginn seiner akademischen Lehrthätigkeit wurde Eisenstein eine grosse Auszeichnung zu Teil: Gauss veranstaltete 1847 die bekannte Ausgabe „Mathematische Abhandlungen[1]) besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen von Dr. G. Eisenstein, Privatdocent an der Universität zu Berlin" (Berlin bei G. Reimer 1847) und fügte derselben eine besondere Vorrede hinzu, in der er auf den hohen Rang dieser Abhandlungen hinwies. Nachdem er von den Arbeiten Euler's und Lagrange's gesprochen, führt er fort: „Die vorliegenden Aufsätze enthalten soviel treffliches und gediegenes, dass durch dieselben dem Verfasser ein ehrenvoller Platz neben seinen Vorgängern gesichert wird, an deren Arbeiten jene sich würdig anschliessen."

Die Anerkennungen, welche Gauss von Anfang an der wissenschaftlichen Thätigkeit Eisensteins zollte, waren für diesen wahre Wohlthaten. Sie bildeten fast die einzigen Lichtpunkte in seinem freudearmen Dasein. Man lese nur, wie er sich in seinem Briefe vom 20. April 1846 Stern gegenüber ausspricht: „Da Sie, mein lieber Stern, einen so liebevollen Anteil an meinem Kummer nehmen, so werden Sie gewiss eine ebenso freundliche Gesinnung bei dem Angenehmen beweisen, was mich betrifft. Es ist mir eine grosse Freude geworden. Ich weiss nicht, ob ich Ihnen mitgeteilt habe, dass Gauss mir im vorigen Frühjahr einen sehr interessanten Brief geschrieben hat. Gauss hat sich nun im vorigen Winter und jetzt wieder vor einigen Tagen, auf mathematische Mitteilungen hin, die ich ihm gemacht, zu Alexander von Humboldt schriftlich über mich ausgesprochen, in Worten, die mich vollkommen über Jacobi's Angriff zu trösten geeignet sind; A. v. Humboldt hat mir die Briefe mitgeteilt, ich würde Ihnen eine Abschrift schicken, wenn ich nicht fürchten müsste, dass Sie mich für eitel hielten, und ich dadurch in Ihrer Achtung, die mir so teuer ist, sinken könnte.

Ausser dieser wissenschaftlichen Anerkennung und Freude ist aber mein Leben sehr freudlos . . . ."

Auch Alexander von Humboldt, dessen gewichtige Vermittelung — um Dirichlet's Worte zu gebrauchen — nirgends fehlte, wo es die Ehre der

1) Dieselben waren vorher in den verschiedenen Bänden des Crelle'schen Journals erschienen. Die sämmtlichen Arbeiten Eisensteins befinden sich in Crelles Journal (Bd. 27—44), in Liouvilles Journal (Bd. 10 u. 17), in den Nouvelles Annales de Math. (Bd. VIII) und in den Berichten der Berliner Akademie (1850—52).

Wissenschaft und das Wohl ihrer Vertreter galt, liess es, wie schon früher hervorgehoben, an Aufmunterung und sichtbaren Beweisen seiner Hochachtung nicht fehlen. Seinen Bemühungen vorzugsweise hatte Eisenstein den Eintritt in die Akademie zu verdanken.

„Am 22. August 1850 forderte der Minister unter Beifügung eines Schreibens von Alexander von Humboldt, Jacobi und Lejeune-Dirichlet, worin diese die definitive Anstellung Eisensteins in Antrag brachten, die Fakultät zur gutachtlichen Berichterstattung auf. Die Fakultät berichtete rühmend und wünschte schliesslich, ihn der Universitätslaufbahn erhalten zu sehen und dass derselbe durch anerkennende Teilnahme auch über seine weitere Zukunft beruhigt werde.“[1])

Indessen war zu jener Zeit nirgends eine mathematische Professur frei und auch keine Aussicht vorhanden, dass für Eisenstein ein besonderer Lehrstuhl errichtet würde. So musste sich dieser abermals gedulden. Erst im Anfange des Jahres 1852 gelang es, einen Ausweg dadurch zu finden, dass Eisenstein als ordentliches Mitglied in die Berliner Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. Die Aufnahme erfolgte am 24. April; seine Antrittsrede hielt er am 1. Juli. Damit schied er zwar formell aus dem Verbande der Universität, aber mit der bestimmten Absicht, entsprechend den Rechten der Akademiemitglieder, seine Lehrthätigkeit unverändert fortzusetzen.

Leider sollte er sich nur wenige Monate der so sehnlichst von ihm erhofften gesicherten Stellung erfreuen. Seine Gesundheit war vollständig zerrüttet. Von Hause aus kränklich, hatte er von Jahr zu Jahr seinen Zustand sich verschlimmern sehen. Die Klage um denselben zieht als wehmütiger Grundton durch alle seine Berichte, durch seine Lebensbeschreibung wie später durch seine Briefe. Dazu kam noch für ihn, den „die fortwährende Sehnsucht nach Liebe und Zuneigung der Menschen und nach gemütlichen Verhältnissen“ folterte, das drückende Gefühl, allein und verlassen in der Welt dazustehen.

Schon zu wiederholten Malen war er genötigt gewesen, seine Thätigkeit an der Universität zu unterbrechen. Im Jahre 1851 hatte er noch durch einen längeren Aufenthalt in einer Wasserheilanstalt Genesung gesucht. Es war vergebens, der Kräfteverfall liess sich nicht mehr aufhalten. Am 11. Oktober 1852 wurde Eisenstein, in einem Alter von nur 29 Jahren, von seinen Leiden durch den Tod erlöst.

---

1) Aus den Akten der Berliner Universität.

BRIEFE VON G. EISENSTEIN AN M. A. STERN.

HERAUSGEGEBEN

VON

A. HURWITZ UND **F. RUDIO.**

In dem Nachlasse des am 30. Januar 1894 in Zürich gestorbenen Prof. Dr. M. A. Stern fand sich ein kleines Packet mit der Aufschrift: „Die einliegenden Briefe meines verstorbenen Freundes G. Eisenstein sollen nach meinem Tode sorgfältig bewahrt und wo möglich nach dem Jahre 1890 zum Drucke befördert werden". Als wir von unserem Freunde und Kollegen, Herrn Prof. Dr. Alfred Stern, mit der Herausgabe dieser an seinen Vater gerichteten Briefe betraut wurden, sind wir der Aufforderung um so lieber nachgekommen, als es sich für uns zunächst um die Erfüllung des Wunsches eines Mannes handelte, der uns beiden ein verehrungswürdiger, väterlicher Freund gewesen war. Sodann aber glaubten wir, dass die Briefe sehr wohl geeignet sein dürften, das lebhafteste Interesse der Fachgenossen zu erregen, auch wenn sie in wissenschaftlicher Hinsicht keine Ueberraschungen bieten werden. Giebt es doch unter den grossen Mathematikern unseres Jahrhunderts kaum einen, über dessen äussere Lebensverhältnisse so wenig zuverlässiges bekannt ist, wie über diejenigen Eisensteins. Auch sein Charakterbild, „von der Parteien Gunst und Hass verwirrt", ist als ein so schwankendes zu bezeichnen, dass jeder Beitrag zur Klärung willkommen sein muss.

Es war ursprünglich unsere Absicht, den Briefen einige biographische Notizen, als Einführung in die Situation, aus der jene hervorgegangen sind, vorauszuschicken. Als die zu diesem Zwecke angestellten Nachforschungen aber, neben manchem andern wissenswerten, eine umfangreiche Autobiographie zu Tage förderten, glaubten wir diese letztere besser einer besonderen Publikation zuweisen zu sollen. Indem wir uns an dieser Stelle damit begnügen, auf die in derselben enthaltenen biographischen Mitteilungen zu verweisen, lassen wir jetzt die Briefe Eisensteins an Stern in chronologischer Ordnung folgen.

I.

Mein lieber Herr Dr.[1])

Mit grossem Danke sende ich Ihnen hier die entliehenen acht Thaler; ich wurde bei meiner Ankunft gleich von so vielen Geschäften und Ver-

1) Der Brief trägt kein Datum. Aus dem Zusammenhange ergiebt sich aber, dass er 1844, etwa im Juli, geschrieben wurde.

hältnissen in Anspruch genommen, dass es mir erst jetzt möglich war, an Sie zu schreiben. Ich hoffe und wünsche, dass Sie sich recht wohl und munter befinden und dass Sie noch ein klein wenig an mich denken, so wie ich mich stets mit Dank und angenehmer Empfindung an die freundliche Aufnahme erinnern werde, die ich bei Ihnen und Ihren Bekannten gefunden habe. Haben Sie doch gefälligst die Güte, Herrn Dr. Goldschmidt sowie die Familie Meierstein und Lott herzlich von mir zu grüssen und sie meines aufrichtigen Dankes zu versichern. Ich wünschte recht bald einen oder den anderen von Ihnen hier in Berlin zu sehen. An Gauss brauche ich wohl keinen Gruss zu bestellen, denn zu dem lieben Gott kann man nur beten und bewundernd emporblicken. Wir haben jetzt Jacobi in Berlin und er wird ganz hierbleiben, was wir auch Alexander von Humboldt zu verdanken haben. Ich habe Jacobi schon mehrmals besucht, man kann herrlich mit ihm umgehen, er ist im Vertrauen der direkte Gegensatz von Gauss. Er wird in kurzer Zeit zum Jubiläum der Universität nach Königsberg reisen und dann mit seiner Familie wiederkommen. Dirichlet, der nobelste und liebenswürdigste aller Mathematici bleibt bis zum Winter in Neapel. Ich habe durch Alex. v. Humbolt's Verwendung soeben 100 Thaler zu einer neuen Reise erhalten und werde wahrscheinlich Helgoland wählen. Dies sind die neuesten Berliner Neuigkeiten.

Ich habe mit grossem Vergnügen Ihre Abhandlung über die quadratischen Reste, die preisgekrönte, gelesen; ich versuchte, das Princip, welches Sie zur Bestimmung des quadratischen Charakters der Zahlen 2 und 3 anwenden und welches sehr scharfsinnig ist, für grössere Zahlen zu benutzen, aber ich habe nichts gefunden, und es scheint, dass die Methode gerade nur für diese beiden Fälle passend ist; Gauss ist derselben Ansicht (Götting. gelehrte Anz.), er hat dieselbe schon zur Bestimmung des biquadratischen Charakters der Zahl 2 angewandt.

Die Summe $\sum \frac{1}{\sin a_1 \omega}$, welche Sie dort für $p = 8m + 7$ bestimmen, habe ich auch für $p = 8m + 3$ gefunden; überhaupt kann nicht leicht irgend eine Summe von einer ähnlichen Form meinen Principien entgehen; ich bitte es zu versuchen; schicken Sie mir Summen, ich schreibe Ihnen die Antworten. Bei dieser Gelegenheit bin ich unter anderen auf einen merkwürdigen Satz geführt worden. Wenn $p = 4n + 3$, so hat man bekanntlich $\Sigma a < \Sigma b$, aber man hat auch $\sum \operatorname{cotg} \frac{a\pi}{p} > \sum \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{p}$, wenn a die Reste, b die Nichtreste $(mod p)$ vorstellen; von der grossen Schwierigkeit, dergleichen einfache Sätze zu beweisen, erhält man erst eine richtige Ansicht, wenn man sich lange Zeit damit beschäftigt.

Vielleicht sind Ihnen einige andere mathematische Mitteilungen nicht ganz unangenehm. Mein erster Beweis des biquadratischen Mysteriums ist nunmehr im Crelle'schen Journal abgedruckt, der zweite wird wahrscheinlich in einer grösseren Abhandlung unter dem Titel „die drei Reciprocitätssätze der höheren Arithmetik“ bei Veit erscheinen. Die Reste der 8^{ten}, 12^{ten} und auch 5^{ten} Potenzen, welche fertig sind, arbeite ich jetzt aus.

Dies ist ein Feld, auf dem ich mich ganz frei bewegen kann, denn hier hat selbst Jacobi nichts, wie er mir gesteht. Auch hier erreiche ich wieder alles durch das einzige kostbare Princip, die Ausdrücke dergestalt analytisch umzuformen, dass sich die Division in der That allgemein ausführen lässt. Sie glauben garnicht, wie pikant diese Untersuchungen sind. Bei den Resten der höheren, z. B. der 7^{ten}, 11^{ten} u. s. w. Potenzen, leistet das Princip ebenfalls alles, was es leisten kann, aber die Schwierigkeit hängt hier von den ersten Elementen der complexen Zahlen ab, über welche man noch garnichts weiss. Prof. Kummer hat zum Glück seine schöne Theorie der complexen Zahlen noch bei Zeiten durch Encke von der Akademie zurücknehmen lassen; denn sie enthielt zuviel Revolutionsstoff, ich wäre z. B. rasend geworden; man kann durch dieselbe beweisen, dass zu jeder Determinante nur eine quadratische Form gehört und dergl. Unsinn mehr. Kummer hofft die Theorie leicht zu ergänzen; es erhebt sich ein leiser Zweifel in meinem Gemüte.[1]) Auch Jacobi ist ganz meiner Ansicht, dass die Theorie der allgemeinen complexen Zahlen erst durch eine vollständige Theorie der höheren Formen ihre Vollendung erhalten kann. Die complexen Zahlen aus 8^{ten} und 12^{ten} Wurzeln der Einheit lassen sich jedoch durch ein eigentümliches Princip behandeln, welches später seine Anwendbarkeit verliert; bei den höheren complexen Zahlen gibt es auch eigentlich gar keine complexen Primzahlen mehr. Gibt man den Satz zu, dass das Produkt zweier complexer Zahlen nicht anders durch eine Primzahl teilbar sein kann, als wenn wenigstens ein Faktor durch die Primzahl teilbar ist, was ganz evident erscheint, so hat man die ganze Theorie auf einen Schlag; aber dieser Satz ist total falsch, und man muss also ganz neue Principien anwenden.

Ich habe nicht eher geruht, als bis ich meinen geometrischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes, der Ihnen so viel Spass gemacht hat, und der auch, beiläufig gesagt, Jacobi ausserordentlich gefällt, von dem Lemma befreit habe, von dem er noch abhängig war, und er ist jetzt so einfach,

1) Die Zukunft hat bekanntlich Eisenstein nicht Recht gegeben.

dass er sich in ein paar Zeilen mittheilen lässt. Der Hauptunterschied zwischen meinem Gange und dem Gaussischen besteht darin, dass ich nicht wie Gauss die Zahlen $< p$, in solche $< \frac{p}{2}$ und in solche $> \frac{p}{2}$ theile, sondern in gerade und ungerade. Es sei A, B resp. der Complex der geraden, ungeraden Zahlen $< p$; k sei eine nicht durch p theilbare ungerade Zahl; die Reste der Vielfachen kA, welche in A fallen, seien α, diejenigen in B seien β, dann werden offenbar alle α zusammen mit allen Zahlen der Form $p + (-1)^\beta \beta$ alle A erschöpfen, und man wird die beiden Congruenzen haben $k^{\frac{p-1}{2}} \Pi A \equiv \Pi \alpha \, \Pi \beta$, und $\Pi A \equiv \Pi \alpha \, (-1)^{\Sigma \beta} \Pi \beta \pmod{p}$, woraus folgt $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\Sigma \beta}$; aber offenbar ist $\Sigma k A = p \Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) + \Sigma \alpha + \Sigma \beta$, und da alle A so wie alle α gerade, und $p \equiv 1 \pmod 2$ ist, so folgt hieraus $\Sigma \beta \equiv \Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) \pmod 2$; und durch eine leichte Transformation, oder schon durch geometrische Betrachtung, erhält man, weil $k-1$ gerade ist, $\Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) \equiv - E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) - E\left(\frac{3k}{p}\right) + \cdots$

$$\pm E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) \equiv E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) + \cdots + E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) \pmod 2.$$

Wird letztere Summe durch S bezeichnet, so hat man also auch $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^S \pmod{p}$, d. h. $\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^S$.

Ebenso findet man, wenn k auch eine Primzahl ist, $\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^T$, wenn $T = E\left(\frac{p}{k}\right) + E\left(\frac{2p}{k}\right) + \cdots + E\left(\frac{\frac{k-1}{2}p}{k}\right)$ ist.

Nun ist S die Anzahl der Gitterpunkte in einem Rechteck mit den Dimensionen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{k-1}{2}$, welche zwischen der Geraden, deren Gleichung $y = \frac{k}{p} x$ ist, und der Achse der x liegen, T die Anzahl der Gitterpunkte, welche in jenem Rechteck zwischen derselben Geraden $x = \frac{p}{k} y$ und der Achse der y liegen, also ist $S + T$ die Gesammtzahl der Gitterpunkte jenes Rechtecks, nämlich $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2}$, also kommt $\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^{S+T} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{k-1}{2}}$, quod erat demonstr.

Wie glücklich würde sich der gute Euler geschätzt haben, diese paar Zeilen vor etwa 70 Jahren zu besitzen.

Leben Sie herzlich wohl, mein lieber Herr Dr. und grüssen Sie alle unsere Freunde in Göttingen.

Ihr aufrichtiger Freund

gehorsamst

Berlin. Gotth. Eisenstein.

Baldige Antwort und Mittheilungen von Ihrer Seite werden mir sehr schätzenswerth sein.

II.

Dass ich, mein liebster Stern, der unhöflichste Mensch bin, darf ich nicht erst mathematisch beweisen, da ich so lange mit der Antwort auf Ihren freundlichen Brief gezögert habe; ich will mich auch garnicht erst entschuldigen, denn da das Verbrechen so gross ist, so müsste ich Bogen mit Entschuldigungen und exquisiten Ausflüchten anfüllen; und übrigens giebt es gar keine Entschuldigung, sondern nur meine unschuldsvolle Faulheit ist zu beschuldigen, dass ich den schuldigen Bescheid auf Ihren Erstling schuldig geblieben bin. — Um Ihr Schreiben von hinten an zu beantworten:

Ihre drei Bitten:
Das Datum in der Mitten,
Den Doktorhut ohne Tresse
Und meine Adresse

werde pünktlich nach Vorschrift beobachten. Herrn Wittstein habe im vorigen Jahre gesprochen und einen Gruss von Ihnen bestellt; da ich mich indessen höchst kurze Zeit in Hannover aufhielt, so konnte ich von seinem Diensteifer nur wenig Gebrauch machen; er war auch sehr beschäftigt, wie es mir vorkam. Ich fuhr damals nicht sogleich nach Berlin, wie Sie ohne Beweis behaupten, sondern blieb noch acht Tage in Alexisbad, wo es mir sehr gut gefallen hat, so dass ich in diesem Jahre wieder mit meiner Mutter, die Sie grüsst, dagewesen bin. Später machte ich noch eine Badereise auf vier Wochen nach Swinemünde, während welcher Zeit Ihr Brief durch Herrn Meyerstein's Güte bei mir anlangte. Nach meiner Zurückkunft beschäftigte ich mich teils mit dem Lesen Ihres Briefes und dem stets unausgeführten Vorhaben, ihn zu beantworten, teils mit der Herausgabe einer Arbeit über die cubischen Formen mit drei Variabeln, die nicht mehr und nicht weniger als 15 Druckbogen lang, also sehr lang geworden ist. — Für Ihr Anerbieten wegen der Frankfurter Buchhandlung bin ich Ihnen sehr dankbar und werde wohl einmal davon Gebrauch machen können. — Bei

Ihrem Beweise von $\sum \operatorname{cotg} \frac{a\pi}{p} > \sum \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{p}$ stützen Sie sich auf $\Sigma b > \Sigma a$; dies ist zwar ganz brav, aber so war die Sache nicht gemeint, sondern ich sprach von einem direkten Beweis, denn $\Sigma b > \Sigma a$ ist bis jetzt, wenigstens so viel ich weiss, nur durch unendliche Reihen und Produkte (von Dirichlet) bewiesen worden, meinen Beweis habe ich noch nicht publizieren wollen, da er auf einem principium latissime patens beruht, von dem ich erst noch fernere Anwendungen zu machen denke. — Es würde mich ausserordentlich freuen, wenn Sie wieder einigermassen, durch Musse und Muse begünstigt, auf die Zahlentheorie kämen.

Nun mein lieber Stern komme ich zur Hauptsache, um derenwillen besonders ich die Feder in die Hand genommen habe, nämlich um Ihnen von Herzen Glück zu wünschen. Vor wenigen Tagen erfuhr ich, gerade als ich Dr. Joachimsthal's Probevorlesung beiwohnte, durch den jungen Friedländer zu meiner grössten Freude Ihre Verlobung, oder, was dasselbe besagt, dass Sie Sich auf Hymens Kettenlinie vorbereiten, deren Gleichung mir unbekannt ist, obwohl ich weiss, dass sie mit einem Maximum der Freude anfängt und zuweilen einige Spitzen hat. — So offeriere ich Ihnen denn, mein liebster Stern, meine Gratulation in optima forma, doch behalte ich mir ein ausführlicheres Wünschen und eine feierliche Segenserteilung bis zu Ihrer Hochzeit vor, zu der ich mich hiermit einlade.

In Betreff Berliner Neuigkeiten, so wissen Sie, dass Prof. Jabobi (der Grosse) für immer hier angestellt, und dass Prof. Dirichlet (der Liebenswürdige) nebst einem neuen weiblichen Sprössling, einer Florentinerin, ebenfalls aus Italien zurück ist. Aber wir haben auch Prof. Kummer hier als Gast auf einige Zeit; er hat mich zum Doktor hon. c. gemacht, wie Sie vielleicht erfahren haben werden; wenn nicht, so teile ich es Ihnen hier mit, was schon lange meine Pflicht gewesen wäre (Unterlassungssünde). Noch habe ich ihn nicht ordentlich geniessen können, da er gleich nach der Insel Rügen abgereist ist, hoffe dies aber nach seiner Rückkehr hierher nachzuholen. Mein Freund Dr. Joachimsthal habilitiert sich nächsten Winter hier; mein Freund Kronecker, dessen ich mich gegenwärtig, wie im vorigen Jahre des Heine, als meines wöchentlichen und täglichen Hausfreundes bediene, arbeitet an seiner Promotion und ist jetzt nach Rügen gereist mit Kummer, da ihn diese Reise in seinem Fleisse aufhält, später geht er nach seinem Gute in Schlesien, um dort zu verbauern; mein Freund Dr. Heine der auch in Göttingen studiert hat, ist schon seit vorigem Winter Privatdocent in Bonn, und unser beider Freund Eisenstein existiert auch. Ich will Ihnen hier nur unser Berliner mathematisches Publicum aufführen und Parade machen lassen; diese und der reiche Dr. Borchardt, dessen unmenschliches Geld ihn aufserhalb des Bereiches aller menschlichen Berechnungen setzt, sind es; denn neuen Zuwachs und jungen Nachwuchs haben wir hier nicht bekommen.

So lustig ich Ihnen auch aus diesem Schreiben erscheinen mag, mein lieber Stern, so bin ich doch in Bezug auf meine Gesundheit sehr leidend. Ich bemerke dies nur, weil Sie sich wundern werden, dass so lange keine Abhandlung von mir erscheint, da doch sonst jedes Crelle'sche Heft eines meiner Kinder enthält. Vorrat habe ich hinlänglich und sehr weit aussehende Ideen, aber ich bin so abhängig von meinem Körper, dass ich nichts thun kann; sobald ich ein wenig arbeite, leide ich an Schwindel, unruhigem Schlaf und allerlei nervösen Zufällen. Im vorigen Winter war ich sehr krank, vier Wochen bettlägerig, und nun habe ich mich noch immer nicht erholen können, trotz Brunnenkur und Pillen — so steht es mit mir; doch was hilft das Klagen: hoffe und wünsche nur, dass Sie so munter wie ein Fisch sind, was ja bei einem Bräutigam nicht fehlen darf.

Zum Desert will ich Ihnen doch noch einige Formeln auftischen. — Zwei Hauptgegenstände sind es, mit denen ich mich namentlich in dieser Zeit beschäftigt, und die ich wenigstens zum Teil zu einem gewünschten Ausgang geführt habe, (doch ist Alles Stümperei, ehe ich nicht gesund bin); die Formen zweiten Grades mit beliebig vielen Variabeln, und die Lemniscatenfunktionen, welche in Bezug auf die complexen Zahlen genau dieselbe Rolle spielen, als die Sinus für die reelle Theorie. Diese Lemniscf. müssen jetzt, wenigstens für einen Arithmeticus, fast als das Wichtigste in der ganzen Mathematik gelten, denn sie enthalten gewissermassen im Keime und implicite die Haupteigenschaften der complexen Zahlen. Wie ich durch sie auf die einfachste Art von der Welt das mysterium maxime reconditum bewiesen habe, werden Sie aus Crelles Journal (29. Band) ersehen haben; diese Beweise haben den Vorzug, dass man fast Wort für Wort die Analogie bei quadr. cub. und biq. Resten verfolgen kann, und dass sie vollkommen symmetrisch in Bezug auf die beiden zu vergleichenden Primzahlen sind; in der That drücken sie den Charakter (qu. cub. biq.) durch eine analytische Formel aus, der man die Symmetrie also die Reciprocität unmittelbar ansieht. Indem ich denke, dass Sie vielleicht meine kleine Abhandlung (nur einen Bogen) hierüber durchgesehen haben, will ich hier einige Sätze über die Lemniscf. anführen, die mir wichtig erscheinen und die sich dort nicht finden. Sie wissen, dass für jede ungerade ganze complexe Zahl $a + bi = m$ die Differenzialgleichung

(1.) $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \dfrac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, in welcher y mit x zugleich verschwinden soll, durch eine **gebrochene** rationale Function y von x integrirt wird, ebenso wie analog das Integral von $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für ein ganzes **reelles** und ungerades m eine ganze rationale Function von x ist, nämlich, wie bekannt

$$y = mx - \frac{m(m^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}x^m.$$

Hier nun ist es leicht, die Koeffizienten durch Einsetzen in die Differenzialgleichung zu bestimmen. Ganz anders verhält sich die Sache, wenn y eine gebrochene Funktion von x ist, wie in (1.); es ist dann gänzlich unmöglich, nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus der Differenzialgleichung auch nur einen einzigen Koeffizienten des Zählers oder Nenners zu finden, nicht etwa wegen der Weitläufigkeit der Rechnung, die man doch überwinden könnte, sondern weil die Sache in sich unmöglich ist, wovon Sie Sich leicht durch einen Versuch überzeugen können. Natürlich meine ich die allgemeine Bestimmung der Koeffizienten für ein unbestimmtes m, denn dass man für specielle gegebene Werte von m die Koeffizienten des Zählers und Nenners aus der Diff. Gl. numerisch berechnen kann, versteht sich von selbst, aber man erkennt daraus nicht den Zusammenhang dieser numerischen Werte mit dem jedesmaligen m. Dies hat auch nichts Frappantes mehr (so wunderbar es anfangs erscheint), sobald man die Form der Koeffizienten erst kennt; denn sie sind gar nicht, wie ich anfänglich glaubte, Funktionen von m allein, sondern auch von der Norm von m, $a^2 + b^2 = N(m)$, die ich mit p bezeichnen will, und wie sollte wohl diese Norm vermittelst der Differenzialgleichung irgend eingehen können! Man muss also ganz neue Methoden anwenden und ich bin durch solche endlich zu dem gewünschten Ziele gelangt. — Wenn m primär d. h. $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ ist, was ohne Schaden der Allgemeinheit angenommen werden darf, so finde ich unter anderm, um Ihnen ein kleines aperçu zu geben:

1) y hat die Form: $y = x\cdot\dfrac{A_0 + A_1x^4 + A_2x^8 + \cdots + A_{\frac{p-5}{4}}x^{p-5} + x^{p-1}}{1 + B_1x^4 + B_2x^8 + \cdots + B_{\frac{p-5}{4}}x^{p-5} + B_{\frac{p-1}{4}}x^{p-1}}$,

wo alle Koeffizienten A und B ganze complexe Zahlen sind, und es ist hierbei $A_0 = B_{\frac{p-1}{4}}$, $A_1 = B_{\frac{p-5}{4}}$, etc., $A_{\frac{p-5}{4}} = B_1$, so dass im Zähler genau dieselben Koeffizienten vorkommen, wie im Nenner, nur in umgekehrter Reihenfolge.

2) Setzt man brevitatis causa $m^4 = q$, so sind B_μ und $\frac{A_\mu}{m}$ ganze Funktionen von den beiden Variabeln p und q von der μ^{ten} Ordnung,

und zwar enthalten sie alle Potenzen und Produkte, in denen die Summe der Exponenten von p und q zusammen $\leqq \mu$ ist; die numerischen Multiplikatoren dieser Potenzen und Produkte, die nun nicht mehr von m noch von p abhängen, sind reelle Zahlen, was sich keineswegs von selbst versteht, da sie a priori betrachtet, ebenso gut complex (imaginär) sein könnten.

So ist z. B. $A_0 = m$, $A_1 = m \cdot \frac{-5p - q + 6}{60}$,

$$A_2 = m \cdot \frac{35p^2 + 14pq - q^2 - 384p - 84q + 420}{56 \cdot 180}, \text{ etc.} \ldots$$

$$B_1 = \frac{-p+q}{12}, \quad B_2 = \frac{35p^2 - 70pq - q^2 - 300p + 336q}{56 \cdot 180}, \text{ etc.} \ldots$$

In B_μ kommt kein konstantes Glied vor; die höchsten Potenzen von p in B_μ und $\frac{1}{m} A_\mu$ haben denselben numerischen Multiplikator. q bezeichnet, wie gesagt $(a + bi)^4$ und p die Norm $a^2 + b^2$.

3) Bildet man nach dem bekannten Newton'schen Theorem aus den Koeffizienten, etwa denen B des Nenners, die Potenzsummen der Wurzeln, etwa indem man setzt

$S_1 + B_1 = 0$, $S_2 + B_1 S_1 + 2B_2 = 0$, $S_3 + B_1 S_2 + B_2 S_1 + 3B_3 = 0$, etc.,

so enthalten alle S das p nur linear, d. h. in der **ersten** Potenz allein. Dies ist ein Fundamentalsatz für die Koeffizienten. Bringt man ihn mit einem anderen, ziemlich merkwürdigen Princip in Verbindung, welches, Sie mögen es mir glauben oder nicht, davon abhängt, dass die Zahl π grösser als 2 ist, so kann man allein hieraus so viele Koeffizienten berechnen, als man will, wovon ich oben eine kleine Probe gegeben habe.

4) Die Koeffizienten brechen von selbst ab (natürlich für ein ganzes complexes m), sobald der Index μ die Zahl $\frac{p-1}{4}$ überschreitet, in ähnlicher Weise, wie dies bei den Binomialkoeffizienten und bei denen der Fall ist, welche in der Entwickelung von Sinus der vielfachen (ungeraden) Bogen nach Potenzen von Sinus der einfachen Bogen vorkommen.

5) Wenn m eine zweigliedrige complexe Primzahl, also p eine reelle Primzahl $4k + 1$ ist, so sind alle Koeffizienten $\equiv 0 \pmod{m}$. Dieser Satz, welcher dem für die Polynomialkoeffizienten im Reellen analog, ist besonders wichtig für die Anwendung auf Reciprocitätssätze und auf die Teilung der Lemniscate. Das biquadr. Fundamentaltheorem lässt sich unmittelbar daraus ableiten und ich habe diese specielle Anwendung Gauss mitgeteilt, der sie zu meiner grossen Freude benigne aufgenommen hat. — Von einer Menge Beispielen, die ich mit grosser Mühe berechnet habe, will ich Ihnen ein recht eklatantes aufschreiben. Für $m = 3 + 2i$, $p = 13$ hat man

$$y = \frac{(3+2i)x + (7-4i)x^5 + (-11+10i)x^9 + x^{13}}{1 + (-11+10i)x^4 + (7-4i)x^8 + (3+2i)x^{12}}$$

und es ist

$$7 - 4i = (3+2i)(1-2i) \quad -11 + 10i = (3+2i)(-1+4i)$$

so dass also, wenn man mit dem Nenner nach links multipliziert, in gewissem Sinne $y \equiv x^p \pmod{m}$ ist.

Die Hauptsache ist noch zu thun, nämlich das allgemeine Gesetz der Multiplikatoren des μ^{ten} Koeffizienten zu finden, nachdem der Bau desselben in Bezug auf m erkannt ist. Man wird ihm zu dem Ende eine ganz neue Form geben müssen, denn nach Potenzen und Produkten von p und q geordnet wird er kein einfaches Gesetz befolgen, ebenso wenig als die Binomialkoeffizienten $\frac{m(m-1)\cdots(m-t+1)}{1\cdot 2\cdots\cdot t}$ wenn man sie nach Potenzen von m entwickeln wollte, während sie doch in Form von Produkten so höchst simpel erscheinen. — Die Beweise der vorstehenden Sätze eignen sich nicht gut zu brieflicher Mitteilung.[1])

Zuerst hatte ich die Absicht, Ihnen noch über quadratische Formen mit mehreren Variabeln, namentlich über die Anzahl der nicht aequivalenten ternären Formen einiges mitzuteilen, aber da dieser Stoff unerschöpflich ist und dieser Brief doch schon für die Zeit eines Bräutigams zu lang geworden ist, so verschiebe ich dies auf das nächste Mal, da ich nun einen regelmässigen Briefwechsel zwischen uns hoffe, und schliesse den mathematischen Salm mit einem arithmetischen Theorem, dessen Beweis Sie suchen mögen: „Wenn p eine beliebige reelle Primzahl ist, und man nimmt in der Summe

$$\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \cdots \pm (p-2) \qquad (\Omega)$$

alle möglichen Zeichenkombinationen, doch so, dass die Anzahl der negativen Zeichen jedesmal gerade ist, so geben die Reste (mod p) der so aus (Ω) hervorgehenden Zahlen erstlich gewissemale die Null, und ausserdem die Quadratreste einmal öfter als die Nichtquadratreste. Nimmt man aber die Anzahl der negativen Zeichen ungerade, so kommen umgekehrt die Nichtquadratreste einmal öfter vor als die Quadratreste; so dass man also durch dieses Verfahren auf lineare Weise die q-Reste und Nichtreste bestimmen kann, wenn man von allen (Ω) so viel als möglich vollständige Restensysteme (mod. p) fortlässt. Z. B. für $p = 7$ erhält man $1+3+5 \equiv 2$, $-1-3+5 \equiv 1$, $-1+3-5 \equiv 4$, $1-3-5 \equiv 0 \pmod{7}$, und

1) Diese Sätze und ihre Beweise hat Eisenstein in dem ersten Teil seiner „Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen" veröffentlicht. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30, 1846; oder „Mathematische Abhandlungen von Dr. G. Eisenstein", Berlin 1847.)

in der That sind 1, 2, 4 die q-Reste; dagegen $-1+3+5 \equiv 0$, $1-3+5 \equiv 3$, $1+3-5 \equiv 6$, $-1-3-5 \equiv 5$, und 3, 5, 6 sind die q-Nichtreste."[1])

Nun zu guter Letzt, mein lieber Stern, will ich mich wieder wie ein vernünftiger Mensch betragen. Antworten Sie mir bald, natürlich ohne dabei etwas Nötigeres zu versäumen, schreiben Sie mir alle Neuigkeiten, die Sie wissen und nicht wissen, was es in Göttingen Interessantes giebt, besonders über Ihre Braut, wegen derer ich mich im Stande der Unschuld, d. h. gänzlicher Unwissenheit befinde. Schliesslich wiederhole ich meinen herzlichen Glückwunsch. Grüssen Sie mir vielmals Dr. Goldschmidt und die Familie Meyerstein. — Uebrigens werden Sie schon wissen, was mich interessieren kann, denn obwohl ich seit einem Jahre nichts von dorther erfahre, so habe ich doch nicht aufgehört, für Göttingen und seine Bewohner einen lebhaften Anteil zu nehmen. — Kann ich Ihnen hier in irgend etwas dienen, so finden Sie zu Allem bereit

Ihren ergebensten Freund

Gotthold Eisenstein.

Adresse: Dr. Eisenstein Jerusalemerstr. Nr. 63 parterre.

Berlin, 20. August 1845.

N. Friedländer war so eilig, dass er mir nur Ihre Karte in die Hand steckte, ich weiss also nicht einmal, ob Sie gegenwärtig in Göttingen sind; deshalb mache ich die Adresse sehr ausführlich.

III.

Berlin, 20. April 1846.

Mein lieber Stern!

Es wäre meine Pflicht gewesen auf Ihren herzlichen und liebevollen Brief, der mir die gröfste Freude bereitet hat, sogleich zu antworten. Aber teils ist meine Faulheit an der Verzögerung schuld, teils hatte ich gar keine rechte Lust auf die fatale Geschichte mit Jacobi wieder zurückzukommen. — Das ganze Rätsel ist, dass es Jacobi verdriefst, dass ich nicht sogleich, nachdem ich von seinen Arbeiten über Kreisteilung erfahren hatte, öffentlich seine Priorität anerkannt habe, während ich doch Gauss so oft anführe. Dass ich nun dies unterlassen habe, daran ist blofs meine

1) In seiner Abhandlung „Über eine der Teilung der Zahlen ähnliche Untersuchung und deren Anwendung auf die Theorie der quadratischen Reste" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 61 (1863)) hat Stern diesen Satz, sowie eine Reihe ähnlicher Sätze bewiesen.

unschuldige Einfalt Schuld, da ich mich um dergleichen Äufserlichkeiten nicht kümmerte, sondern nur an die Wissenschaft selbst dachte; durch Gauss habe ich nun einmal meine mathematische Bildung erlangt, seine Leistungen sind mir geläufig, und desshalb führe ich ihn an; die Arbeiten von Jacobi sind mir erst zugänglich geworden, seit ich ihn persönlich kenne, d. h. seit er hier in Berlin ist. Muss man denn wirklich alles durchkramen, ehe man drucken lässt, ich glaubte, dass wenn man sich mit dem Crelle'schen Journal au fait erhält, man genug thut.

Inzwischen kann Jacobi selbst unmöglich daran glauben, dass ich ihm seine Sachen gestohlen habe, denn er hat eben auf diese meine früheren Arbeiten hin vor $^5/_4$ Jahren den Antrag zu meiner Doktor-Ernennung bei der Breslauer Fakultät gestellt. Uebrigens gebührt in den Beweisen der Reciprocitätssätze weder mir, noch Jacobi die Priorität, sondern Gauss; aber gedruckt sind die Beweise zuerst von mir erschienen; am Ende hat doch Jacobi auch nur gesagt, dass er die Beweise gefunden habe, Gauss hat dasselbe aber schon viel früher gesagt, Theoria residuorum biquadr. und schon an einem viel früheren Orte: demonstrationes et ampliationes novae etc., also: — hic aqua haeret.

Schon einige Zeit, ehe ich Ihren Brief erhielt, hatte ich ein Manuskript fertig, worin ich Jacobi in höchst gemäfsigter Weise antworte und die Untersuchungen vereint zusammenstelle, welche ich in früherer Zeit über Kreisteilung angestellt hatte; denn was ich damals herausgab, war kaum die Hälfte dessen, was ich herauszugeben beabsichtigte, bis mir Jacobi in die Quere kam. Ich habe es aber aufgegeben, dieses Manuskript wenigstens für jetzt drucken zu lassen, denn einmal ist Jacobi aufserdem ganz freundlich gegen mich, bis auf die allerletzte Zeit, wo ich ihn selten besuche, was aber an mir und nicht an ihm liegt, und dann darf ich ihn mir auch jetzt nicht erzürnen, weil ich meine Habilitation hier beabsichtige, wobei er mir einerseits nutzen andererseits aber auch sehr schaden kann.

Ich spreche eben von meiner Habilitation. Sie wissen, lieber Stern, dass nach den Statuten der Fakultät man drei Jahre Doktor sein muss oder vielmehr man drei Jahre schon das Triennium absolviert haben muss, ehe man sich habilitieren darf. Der Minister Eichhorn, der sehr freundlich für mich gesinnt ist, hat mich von diesem Formzwange dispensiert und es werden mir so drei Jahre erspart, denn ich hätte eigentlich erst zum Oktober dieses Jahres mein Triennium absolviert, müsste also eigentlich noch bis Oktober 1849 warten; es hindert mich jetzt weiter nichts an der Habilitation, als meine Militärpflicht.

Da Sie, mein lieber Stern, einen so liebevollen Anteil an meinem Kummer nehmen, so werden Sie gewiss eine eben so freundliche Gesinnung bei dem Angenehmen beweisen, was mich betrifft. Es ist mir eine grofse Freude geworden. Ich weifs nicht, ob ich Ihnen mitgeteilt habe, dass Gauss mir im vorigen Frühjahr einen sehr interessanten Brief geschrieben hat. Gauss hat sich nun im vorigen Winter und jetzt wieder vor einigen Tagen, auf mathematische Mitteilungen hin, die ich ihm gemacht, zu Al. v. Humboldt schriftlich über mich ausgesprochen, in Worten, die mich vollkommen über Jacobi's Angriff zu trösten geeignet sind; A. v. Humboldt hat mir die Briefe mitgeteilt; ich würde Ihnen eine Abschrift schicken, wenn ich nicht fürchten müsste, dass Sie mich für eitel hielten und ich dadurch in Ihrer Achtung, die mir so teuer ist, sinken könnte.

Aufser dieser wissenschaftlichen Anerkennung und Freude ist aber mein Leben sehr freudlos. Die Mathematik allein kann nicht glücklich machen und sie ist so schwierig, dass man nur selten die Genugthuung hat, einen Schritt vorwärts zu kommen. Es fehlt mir hier an aller Geselligkeit, mit meinen Verwandten bin ich ganz zerfallen, denn dies sind Geldleute, die mich nicht verstehen und die ich nicht verstehe, die Fachgelehrten sind wieder zu hoch erhaben und zu stolz, als dass es zu einer rechten Innigkeit kommen könnte. Mit Heine und Kronecker ging ich früher viel um und diese passten zu mir, aber der erste ist jetzt Privatdocent in Bonn, der zweite Gutsbesitzer bei Liegnitz, Joachimsthal ist ganz Schulmeister geworden und ich finde bei ihm daher auch keinen Anklang. In dieser meiner melancholischen Isolierung fühle ich eine tiefe Sympathie für die zarte Verbindung, die Sie eingegangen sind; möchten Sie, von einem Sie liebenden Wesen stets umgeben, Ihre Tage glücklicher zubringen, als ich es thue. Leben Sie herzlich wohl.

Mit freundschaftlichster Hochschätzung

Ihr

Eisenstein.

Bitte, schreiben Sie mir genau Ihre Adresse. Die meinige ist Jerusalemerstrafse 63.

Was meinen Sie mit Gött. Gel. Anz. 1815, Stück 104?

IV.

Anfang eines Briefes vom Sommer 1847.

Mein lieber Stern!

Seien Sie nicht böse auf mich, dass ich so lange nichts habe von mir hören lassen; ich habe nichts desto weniger stets an Sie und Ihre freundliche Gesinnung für mich mit Dankbarkeit und Liebe gedacht. Aber einen unmathematischen Brief wollte ich Ihnen nicht schreiben, und es bot sich nichts dar, was für die Kürze einer brieflichen Mitteilung passend gewesen wäre und was ich Ihnen ohne lange Auseinandersetzungen klar machen könnte; auch sind die schlechten Federn schuld; halten Sie dies Argument nicht für unbedeutend, denn so wie mich eine wohlschmeckende Cigarre zu einer mathematischen Idee begeistert, so eine gutbeflügelte Feder zu einem inhaltreichen Briefe. Ausserdem habe ich diese Zeit über so viele Allotria getrieben und so wenig mathematisch gearbeitet, dass ich mich vor Ihnen schämen musste, ja Sie sogar als Kritiker fürchten musste. Ich hoffe aber, dass dieser Brief Sie, lieber Stern, durch einige mathematische Stellen versöhnen wird und dass ich durch ein paar in Crelle's Journal erscheinende schon unter der Presse schwitzende Abhandlungen, wenn auch nicht meine Sünden vollständig abbüfsen, so doch mein Gewissen einigermassen erleichtern werde.

Herr Riemann, durch welchen ich Ihre Karte nebst den freundlichen Worten darauf erhalten habe, scheint einer der wenigen zu sein, welche sich in der Zahlentheorie recht lobenswerte Kenntnisse erworben haben. Er wird an einem Privatissimum Teil nehmen, welches ich in diesem Sommer über elliptische Funktionen lesen werde. Bitte recht sehr, suchen Sie doch meinem lieben Freunde dem Amerikaner Gould, der jetzt in Göttingen ist, ein wenig die Zeit zu vertreiben und nehmen Sie Sich, wenn Sie können, angelegentlichst seiner an; er ist ein sehr lieber junger Mann, der bei seinem Vorhaben sich in Europa astronomisch auszubilden leider durch den Mangel an Teilnahme bei unsern Gelehrten schon sehr gekränkt und enttäuscht worden ist.

Mein Verhältnis zu den hiesigen Gelehrten noch immer beim Alten; auch würde mir eine Annäherung nichts nutzen, da jene ihren Stolz und ihr aristokratisches Benehmen gegen mich nie ablegen werden. Ich stehe also ganz allein.

Was Sie anbetrifft, lieber Freund, so . . . .
. . . .

V.

Berlin, Januar 1848.

Mein lieber Stern!

Mit der Redaktion einer mathematischen Abhandlung beschäftigt, welche Ihnen sehr nahe liegt, und welche, wie ich hoffe oder mir zu schmeicheln wage bei ihrem Erscheinen Ihnen einige Freude machen wird, so wie auch von Vorlesungen an der Universität in Anspruch genommen, reisse ich mich los, um endlich an Sie, werter Freund, zu schreiben. Es ist dies nicht das erste Mal seit einer langen Zeit, dass ich die Feder zu diesem Zwecke in die Hand nehme, es liegen zwei halb angefangene Briefe noch vom Sommer her, in welchen ich mich mit Ihnen unterhalten wollte, aber ich bin nicht fertig geworden, und ich erlaube mir, hier eine Probe von diesen Versuchen beizulegen, auch dem guten vortrefflichen Gould, den ich Ihnen in meinem Schreiben empfehlen wollte, habe ich auf seinen so liebreichen und herzlichen Brief an mich nicht geantwortet, was mich immer schmerzlich foltert; gewiss ist er jetzt nicht mehr in Göttingen und glaubt, dass ich eine kalte Gesinnung gegen ihn hege, wovon gerade das Gegenteil der Fall ist. Ehe ich aber zu dem Grunde meines langen Schweigens übergehe, will ich Ihnen den Gegenstand meiner jetzigen Abhandlung mitteilen; doch vor allen Dingen erkundige ich mich nach Ihrem Befinden und nach dem Ihrer Familie auf's Angelegentlichste, so wie nach dem Befinden aller derer in Göttingen, welche mich etwas lieben nicht blos für einen nicht ganz schlechten Mathematiker halten, was ein grofser Unterschied ist; sollte Gould noch da sein, so grüssen Sie ihn recht herzlich von mir und versichern ihn meiner dauernden Freundschaft, so wie dass sein Andenken eine wohlthuende Erinnerung für mich bleiben wird und dass ich wohl wünschte, die Verhältnisse möchten uns einmal noch im Leben zusammen führen, auch mag er nicht zu sehr zürnen, dass ich nicht geantwortet habe; aber gewiss ist er nicht mehr da, bitte dann schreiben Sie mir doch über seinen jetzigen Aufenthaltsort, wenn Sie ihn wissen.

In meiner jetzigen Abhandlung[1]), die wahrscheinlich bald zum Drucke kommen wird, da ich schon bei der Redaktion der letzten Bogen stehe, beweise ich Ihren Satz über die Bestimmung von c für die Primzahlen $q = 8n + 3 = c^2 + 2d^2$ durch eine Kongruenz (mod. q); dieser Satz bildet allerdings den Anfang zu einer ganz neuen Reihe von Sätzen dieser Art, indem bei denjenigen Sätzen dieser Gattung, welche unmittelbar die Kreisteilung ergiebt, die zu der Zerfällung gehörige Determinante, wie hier 8, ein Teiler von $q - 1$ sein muss; so kann man z. B. für die Primzahlen $q = 7n + 1$ die Zerfällung $A^2 + 7B^2$ durch die Kreisteilung bestimmen, aber nicht für die Primzahlen $7n + 2$ und $7n + 4$, welche dieselbe Zerfällung zulassen; ich erinnere mich, schon in Göttingen mit Ihnen über diesen Gegenstand gesprochen zu haben, aber nicht mehr genau. Sie sagen in Ihrer Notiz, die Theorie der Reste schiene nicht die wahre Quelle solcher Sätze zu sein; dies ist aber doch der Fall, und meine Methoden, die ich schon in früheren Abhandlungen auf andere Gegenstände angewandt habe, sind allgemein genug, um auch solche Sätze, wie z. B. der für die Primzahlen $8n + 3$ daraus ableiten zu können. Ich beweise in meiner

1) Die Abhandlung ist unter dem Titel „Zur Theorie der quadratischen Zerfällungen der Primzahlen $8n + 3$, $7n + 2$ und $7n + 4$“ im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 37 erschienen.

jetzigen Abhandlung noch die beiden folgenden Sätze, welche wahrscheinlich ganz neu und noch unbekannt sind. (Ich muss jetzt fort nach der Universität, um Vorlesung zu halten.)

„Ist q eine Primzahl $7n+2 = A^2 + 7B^2$, so hat man $2A \equiv \frac{3n(3n-1)(3n-2)\cdots(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ (mod. q) und hieraus ergiebt sich A positiv oder negativ, je nachdem es abgesehen vom Zeichen $\equiv 3$ oder $\equiv 4$ (mod. 7) ist.“ Z. B. für $q = 23$ ist $n = 3$, $2A \equiv \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \equiv 3\cdot 4\cdot 7 \equiv 84$ (mod. 23) $= 4\cdot 23 - 8 \equiv -8$, also $A = -4$, und in der That ist $23 = 4^2 + 7$, ferner hat sich $A = -4$ negativ ergeben, weil der absolute Wert $\equiv 4$ (mod. 7).

„Ist q eine Primzahl $7n+4 = A^2 + 7B^2$, so hat man $2A \equiv \frac{(3n+1)3n(3n-1)\cdots(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ (mod. q), und A wird hieraus positiv oder negativ, je nachdem sein absoluter Wert $\equiv 2$ oder $\equiv 5$ (mod. 7) ist.“ Beispiele geben $q = 11, 39, 53$ u. s. w.

Die Principien, auf welchen diese Sätze beruhen, können entweder aus der Theorie der elliptischen Funktionen geschöpft werden, wovon bei einer andern Gelegenheit, oder sie sind rein arithmetischer Natur. Ich fange damit an so wie ich bei der Zerfällung $A^2 + B^2$ die complexe Zahl $A + Bi$, ebenso $A + B\sqrt{-2}$ für $A^2 + 2B^2$ oder $A + B\sqrt{-7}$ für $A^2 + 7B^2$ u. s. w. durch eine endliche Reihe auszudrücken. Um bei $A^2 + 2B^2$ stehen zu bleiben, so kann für $q = 8n+1$ eine solche Reihe aus der Kreisteilung genommen werden, aber nicht so für $q = 8n+3$. Im letzteren Falle finde ich jedoch durch meine sehr einfachen Betrachtungen eine ebenfalls sehr einfache Reihe als Ausdruck für $A + B\sqrt{-2}$. Da q nicht von der Form $4n+1$ ist, so umfasst ein vollständiges Restensystem (mod. q) mit Ausschluss der Null $q^2 - 1$ complexe Zahlen von der Form $x + yi$ und für alle diese ist $(x+yi)^{q^2-1} \equiv 1$, also $(x+yi)^{\frac{q^2-1}{4}} \equiv$ irgend einer Potenz von i, und wenn $F^2 \equiv i$ (mod. q) gesetzt wird, $(x+yi)^{\frac{q^2-1}{8}} \equiv$ irgend einer Potenz von F; es sei $\omega^2 = i$, also ω eine primitive 8te Wurzel der Einheit, und es bezeichne das Symbol $[x+yi] = \omega^\mu$, wenn $(x+yi)^{\frac{q^2-1}{8}} \equiv F^\mu$ (mod. q) ist; ich finde dann

$$A + B\sqrt{-2} = [1] + [1+i] + [1+2i] + [1+3i] + \cdots + [1+(q-1)i] = \sum_{y=0}^{y=q-1} [1+yi];$$

und wenn überhaupt $\Sigma[1+yi]^\nu = \varphi(\omega^\nu)$ gesetzt wird, so ist

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega^3) = A + B\sqrt{-2}, \quad \varphi(\omega^5) = \varphi(\omega^7) = A - B\sqrt{-2},$$
$$\varphi(\omega)\,\varphi(\omega^5) = \varphi(\omega^3)\,\varphi(\omega^7) = q, \quad \varphi(\pm i) = 1, \quad \varphi(-1) = -1, \quad \varphi(1) = q;$$

aus den letzten drei Formeln ergiebt sich besonders die Bestimmung des Vorzeichens von A durch eine Kongruenz (mod. 4); aus den ersten beiden folgt $2A = \varphi(\omega) + \varphi(\omega^5) \equiv \varphi(F) + \varphi(F^5)$ (mod. q); nun sieht man leicht, dass nach der Definition der Symbole [] man haben muss

$$\varphi(F) \equiv \Sigma(1 + yi)^{\frac{q^2-1}{8}}, \quad \varphi(F^5) \equiv \Sigma(1 + yi)^{5\frac{q^2-1}{8}};$$

es bleibt also in letzter Instanz die Diskussion dieser beiden Summen; diese Diskussion, welche gar nicht leicht ist, liefert mir nun die erste Summe $\equiv 0$ und die zweite $\equiv$ Ihrem Binomialkoeffizienten; erschwert aber auch interessant gemacht wird die Diskussion besonders dadurch, dass die Potenzen $(1 + yi)^{\frac{q^2-1}{8}}$ und $(1 + yi)^{5 \cdot \frac{q^2-1}{8}}$, da der Exponent $> q$ ist, in ihrer Entwickelung nach dem binomischen Satze sehr viele Potenzen von y enthält, deren Exponenten durch $q - 1$ teilbar sind, während bei den Betrachtungen von Gauss am Schluss von Theor. res. biq. I nur eine solche Potenz, nämlich y^{q-1} erscheint. Dies sind Grundzüge in flüchtiger Kürze, wegen des näheren Details und fernerer Anwendungen muss ich Sie auf meine Abhandlungen verweisen oder besser gesagt, vertrösten. Von elliptischen Funktionen ist hier an keiner Stelle die Rede, die aus ihnen folgenden Principien bilden eine ganz für sich stehende eigene zweite Methode zum Beweise solcher Sätze, worüber ich an Gauss im vorigen Sommer eine kleine Mitteilung gemacht habe; der Gaussische Satz z. B. folgt unmittelbar aus den einfachsten Eigenschaften der lemniscatischen Funktionen, denn es sei m eine primäre zweigliedrige complexe Primzahl, m' die conjugirte Zahl $mm' = p$ die Norm von m eine reelle Primzahl $4n + 1$; der Differenzialgleichung (1.) $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ genüge. (2.) $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1}$ in inf., dann sind alle Koeffizienten a_1, a_2 u. s. w. durch m teilbare ganze Zahlen, mit alleiniger Ausnahme von a_p, welcher $\equiv 1$ (mod. m) ist; setzt man $y = a_p x^p + mR$, so hat R lauter ganze (complexe) Koeffizienten, R enthält die Potenz x^p nicht und man hat gewissermassen $y \equiv x^p$ (mod. m), da $a_p \equiv 1$ (mod. m); setzt man nun in die Differenzialgleichung nachdem man ihr die Form $\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^4}{1-x^4}}$ gegeben, x^p für y, so kommt

$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} \equiv \sqrt{\frac{1-x^{4p}}{1-x^4}} \equiv \sqrt{\frac{(1-x^4)^p}{1-x^4}} \equiv (1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{m};$$

nun ist $\frac{dy}{dx} = p a_p x^{p-1} + mR'$, $\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = m' a_p x^{p-1} + R' \equiv m' x^{p-1} + R'$ (mod. m) wegen $p \equiv mm'$, $\frac{p}{m} = m'$; also geht die vorhergehende Kongruenz in $m' x^{p-1} + R' \equiv (1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. m) über; vergleicht man auf beiden die Koeffizienten von x^{p-1} und bemerkt, dass diese Potenz x^{p-1} in R' nicht vorkommt, weil x^p in R nicht enthalten ist $\left(R' = \frac{dR}{dx}\right)$, so erhält man $m' \equiv$ dem Koeffizienten von x^{p-1} in $(1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}}$, d. h. $m' \equiv$ dem Gaussischen Binomialkoeffizienten (mod. m) u. s. w. Diese Untersuchungen nebst mehreren anderen arithmetischen Anwendungen der elliptischen Funktionen werden vielleicht auch bald das Licht erblicken. Ich mache Sie noch besonders hierbei auf diejenige fruchtbare Erweiterung des Begriffs der Kongruenz aufmerksam, wonach zwei unendliche Reihen nach Potenzen von x $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ und $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ kongruent heissen, wenn $a_0 \equiv b_0$, $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$ etc. ist; die Konvergenz oder Divergenz der Reihen bleibt hier ganz aus dem Spiel. — In Bezug auf die unendlichen Reihen nach Potenzen von x verspricht besonders der folgende Satz über die Entwickelungskoeffizienten der algebraischen Funktionen viel für die Arithmetik.

„Es seien $f_1(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$, $f_2(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$ u. s. w. $f_n(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$ n algebraische Gleichungen zwischen den $n + 1$ Variabeln $u_1, \cdots u_n, x$, vermöge welcher Gleichungen jedes u eine algebraische Funktion von x ist; es wird angenommen, dass $f_1, f_2, \cdots f_n$ als rationale ganze Funktionen von $u_1, u_2, \cdots x$ mit rationalen Koeffizienten gegeben sind; entwickelt man u als Funktion von x nach steigenden Potenzen von x, so werden die Koeffizienten der Entwickelung, wenn sie rational sind, lauter Nenner haben, welche nur durch eine bestimmte endliche und begrenzte Anzahl von Primzahlen teilbar sind; diese Primzahlen sind die Teiler einer bestimmten Zahl $\triangle$, welche man so erhält: man bilde die Determinante aus den Differenzialquotienten

$$\left.\begin{matrix}
\frac{df_1}{du_1}, & \frac{df_1}{du_2}, & \frac{df_1}{du_3}, & \cdots & \frac{df_1}{du_n} \\
\frac{df_2}{du_1}, & \frac{df_2}{du_2}, & \frac{df_2}{du_3}, & \cdots & \frac{df_2}{du_n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{df_n}{du_1}, & \frac{df_n}{du_2}, & \frac{df_n}{du_3}, & \cdots & \frac{df_n}{du_n}
\end{matrix}\right\}$$

und setze statt $u_1, u_2 \cdots u_n$ die simultanen Wurzeln der n Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \\ f_2(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \end{array}\right\}$$

und mache rational. Die Konstante, welche man erhält, ist $\triangle$.[1]) Dieser Satz und mehrere dieser Art bilden characteristische Unterschiede zwischen den algebraischen und den transcendenten durch Differenzialgleichungen bestimmten Funktionen; wenn aber eine Differenzialgleichung oder ein System von Differenzialgleichungen sich algebraisch integrieren lässt, so erhält man durch Anwendung jener Sätze merkwürdige Resultate, indem man die Reihenentwickelung mit Hülfe der Differenzialgleichungen vornimmt; Specielleres hierüber bei einer anderen Gelegenheit; zum besseren Verständnis will ich Sie nur auf die Entwickelung von $\lg(1+x)$ aufmerksam machen, wo die Nenner der Koeffizienten $1, 2, 3, \cdots$ nämlich nach der Reihe alle ganze Zahlen sind, so dass man immer Nenner findet, welche durch eine beliebige noch so grosse Primzahl teilbar sind; dergleichen kann bei algebraischen Funktionen nie stattfinden, sondern die Anzahl der Primzahlen, welche in den Nennern der Entwickelung aufgehen, ist begrenzt.

Nun will ich Sie nicht länger mit mathematischen Verirrungen quälen, denn vielleicht sind Sie eben mitten in praktisch populärer Astronomie oder gar in Familien-Sorgen und -Freuden, und ich komme mit meiner Zahlentheorie sehr ungelegen, vielleicht habe ich jedoch auch gerade eine glückliche Stunde getroffen. Ein Onkel von mir behauptet, dass man nur irgend jemand aus dem Tollhause oder Irrenhause zu nehmen brauchte, das würde gewiss der beste Mathematiker sein; ich sage dazu und so meint auch Dirichlet, man könne allenfalls behaupten, die Mathematik sei überhaupt eine Verirrung, deshalb braucht aber nicht jede Tollheit mathematischer Natur zu sein. Besagter Onkel, der, wie alle meine Verwandten (ich Glücklicher in ihrer Mitte?) die Menschen nur nach ihrem Werte (des Geldes) schätzt, meinte auch, als ich ihm mit vieler Mühe durch Beispiele die Zerlegbarkeit der Primzahlen $4n+1$ in zwei Quadrate und die Nichtzerlegbarkeit derer $4n+3$ darthat, „allerdings sei es merkwürdig, aber es gehöre der hyperimaginärste Grad von Verrücktheit dazu, auf so etwas zu

1) Eisenstein hat eine kurze Mitteilung über diesen Satz in den Monatsberichten der Berliner Akademie (vom Juli 1852) veröffentlicht. Beweise des Satzes wurden von Heine (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 48) und Hermite (Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 7) gegeben.

verfallen, was ist das schon für Unsinn 'ne Primzahl, nu machen se da noch 'nen Unterschied zwischen $4n + 1$ und $4n + 3$, was kommt mer davon heraus"; die Goldmachekunst ist freilich weit besser. Dieser ist noch der geistreichste von meinen Verwandten, nun urteilen Sie über die andern und welche Rolle ich unter ihnen spielen muss. Aber lieber Eisenstein, was kümmern Sie Ihre Verwandten, lassen Sie die doch laufen; ja das thue ich auch, aber es kümmert sich auch sonst Niemand um mich, so dass ich gänzlich isoliert stehe und doch zuweilen gezwungen bin, zu meinen Verwandten zu gehen. Diese Betrachtungen führen mich auf ein anderes Thema, nämlich die gänzliche Zerrissenheit und Trostlosigkeit meines Gemütes, als Ursache meines langen Schweigens.

Ich müsste lügen, lieber Stern, wollte ich Mangel an Zeit als Grund meines Schweigens vorschützen, sondern es ist vielmehr eine mir Alles verleidende Mutlosigkeit, welche aus der Ungunst meiner Verhältnisse entspringt. Ich spreche hier durchaus nicht von pekuniären Verhältnissen, denn ich kann mit wenigem auskommen, da ich nur wenig Bedürfnisse habe und ich bekomme vom König 500 ℛ jährlich; durch Geld kann mir auch garnicht geholfen werden, denn ob ich etwas besser esse, wohne, mehr Bequemlichkeit habe, das ist sehr gleichgültig; aber es fehlt mir jede geistige Nahrung und Erhebung aufserhalb der Mathematik und im Umgange mit Menschen, die es wahrhaft gut mit mir meinen, jedoch nicht so hoch über mir stehen, dass der Umgang ein blofses steifes Ceremoniel bleibt. Wenn ich nun meinen Kopf durch mathematische Spekulationen zerarbeitet habe, so kann ich mir nachher durchaus keine Erheiterung des Geistes verschaffen, die mir nur aus einer gemütlichen Geselligkeit hervorgehen würde, d. h. einer solchen, wo ich mich nicht zu genieren brauchte, nicht immer geistreich sein müsste, sondern mich gehen lassen könnte, wie ich wollte und wie ich nun einmal bin. Es ist so unendlich schwer, aus dem Kreise herauszukommen, in dem man nun einmal geboren ist, ja für mich unmöglich, da ich mich mit Dingen beschäftige, die so wenige Menschen interessieren, und also so wenige oder gar keine Anknüpfungspunkte finde; und wie die Wenigen, welche gleiche Beschäftigung haben, sich gegen mich benehmen, wissen Sie ja; Dirichlet ist jetzt ganz freundlich gegen mich, aber es bleibt kalte Höflichkeit, er ist Professor, ich bin Privatdocent. Wie ich seit langer Zeit lebe, könnte ich mir eben so gut ein Haus auf einer wüsten Insel bauen lassen, ich würde dann Fische sehen, statt kalter steifer und liebeleerer Menschen. Es sind dies nicht etwa hypochondrische Gedanken, sondern meine Worte gehen aus einer klaren Einsicht der Verhältnisse und dessen, was mir fehlt, hervor; manche Menschen sind sich selbst genug, ich bin nicht so glücklich, sondern mich foltert die fortwährende Sehnsucht nach Liebe und Zuneigung der Menschen und nach gemütlicheren Verhältnissen, mathematische Beschäftigung ist für mich eine Art Betäubung, um mich vor Melancholie zu retten, so wie für andere Menschen Wein oder Branntwein; daher ist meine Stimmung am düstersten gerade nach Absolvierung eines schwierigen mathematischen Problems, da ich dann recht einsehe, wie sich hierdurch doch garnichts in meiner Lage ändert. Indem ich nun immer mehr einsehe, dass ich selbst mir hierin nicht helfen kann und Andere mir nicht helfen wollen, so bin ich gänzlich meines Daseins überdrüssig geworden und ich vegetiere nur so fort, indem ich mich, wie gesagt, durch mathematische und andere Beschäftigung betäube; so treibe ich schon seit einem Jahre Anatomie und Physiologie und höre eifrig Johannes Müller's Vorlesungen, auch musiziere ich oft, doch Alles kann keine Zufriedenheit gewähren, da ewig das fehlt, was ich wünsche. Dass wirklich mein Unglück in den Verhältnissen liegt, sehe ich an einzelnen Lichtblicken, wenn etwas sich hierin zu ändern scheint, dann komme ich mir gleich wie ein ganz anderer Mensch vor, aber es sind nur Täuschungen und es wird gleich wieder dunkle Nacht, d. h. es bleibt Alles beim Alten. Wenn Sie einige Freundschaft für mich empfinden, so werden Sie mich vielleicht verstehen, von Hause aus bin ich gewiss kein Hypochonder, man bringe mich nur in heitere Verhältnisse (nicht glänzende), so werde ich der heiterste Mensch sein. Ich wollte Sie nicht mit Klagen belästigen lieber Stern, denn ich weiſs, man macht sich dadurch unliebenswürdig und verscheucht seine Freunde; eben um nicht zu klagen, habe ich solange nicht geschrieben; mögen Sie eben so glücklich sein, als Ihr Freund unglücklich.

Verzeihen Sie, dass ich den Satz über die Primzahlen $8n+1$ in meiner Abhandlung den Stern'schen Satz nenne, es ist ebenso, wie mit dem Legendre'schen Reciprocitätssatze. Das Papier geht zu Ende; leben Sie recht wohl. Mit den herzlichsten Wünschen

Ihr

Berlin 10./2. 48. Gotthold Eisenstein.

Bitte um baldige Antwort, damit der Briefwechsel nicht abermals ins Stocken gerät.

VI.

November 1848.

Lieber Stern.

Wenn man lange nicht geantwortet hat, so schämt man sich und diese Scham wächst mit der Zeit wie eine Lawine, so dass man das Antworten immer wieder aufs Neue aufschiebt; doch hoffe ich diesmal noch Verzeihung, indem ich jetzt so spät erst die Feder ergreife. Ich darf doch nun jedenfalls zum Professor gratulieren, ohne dass Sie Sich darüber ärgern werden; ich betrachte dies, nämlich Ihre Professur, als eine der Errungenschaften unserer Freiheitsperiode, die nun bald aufhören wird, da mir nach den Wiener Ereignissen die jetzt hier stattfindende Waffenauslieferung der letzte Schlussstein zur Unterdrückung der von Frankreich ausgegangenen Bewegung zu sein scheint. Ich schreibe dies während Berlin in Belagerungszustand erklärt ist. Doch ich will nichts von Politik schreiben, einmal weil dies ein zu langes und jetzt zu abgedroschenes Kapitel wäre, und dann auch, weil man nicht genau wissen kann . . .[1]).

Jedenfalls, die Dinge mögen kommen, wie sie wollen, so haben Sie das Angenehme der Freiheit genossen, es wird Ihnen aber leider durch den Anblick des jetzigen Rückschrittes verbittert werden. Ich dagegen, was mich persönlich betrifft, habe nur das Bittere von der Freiheit zu kosten bekommen; denn obgleich ich mich nicht im Mindesten thätig in die Politik gemischt habe, sondern nur einigemal die Clubs besuchte, was jeder that, ohne aber Reden zu halten, so bin ich doch, blos desshalb schon, von den Räten des Ministeriums, gewiss in Folge von Verläumdungen, als Republikaner angefahren worden. Sie wissen vielleicht, dass ich aus dem Königlichen Fond jährlich eine Unterstützung von 500 Thaler beziehe; dieses Geld ist aber schlimmer als nichts, denn ich hänge dadurch ganz speciell von der Gnade des Königs ab, und das ist, wie Sie wohl denken können, in jetzigen Zeiten sehr übel. Ich bin überzeugt, dass welcher Umschwung aller Verhältnisse in politischer und socialischer Hinsicht auch stattfinden möge, man doch Männern, namentlich Gelehrten, die bereits in Amt und Brod sind, schwerlich das Ihrige entziehen wird; jedoch wird man sich auch ebenso wenig um Menschen, wie ich z. B., kümmern, die eine vorübergehende Unterstützung ohne feste Stellung geniessen, denn die meinige läuft zum 1. Januar ab; ich habe schon alle möglichen Schritte beim Ministerium zu deren Verlängerung gethan, auch habe ich die besten Versicherungen erhalten, aber noch nichts Schwarz auf Weiss, was in solchen Angelegenheiten die Hauptsache ist. Wenn Sie also für mich irgend eine Stellung wissen, sei sie auch noch so schlecht, so werden Sie mich gewiss nicht ekel finden, dieselbe anzunehmen; denn nur darin bin ich ekel und das drückt mein Gemüt, wenn ich von der Gnade selbst des Königs abhängen soll, ich möchte nur das, was mir rechtmässig zukommt. Ich kann auch erst dann zu einigem Frohsinn und zur vollen Entwickelung meiner Kräfte gelangen, wenn ich aus meiner jetzigen, nicht gerade schlechten, aber doch gleichsam in der Luft schwebenden ökonomischen Lage heraus bin.

1) Die folgenden Worte sind durchgestrichen.

Ich mache hier eine Pause und lege die Feder nieder, da mich das lange Schreiben zu sehr anstrengt, denn ich bin schon seit 4 Wochen sehr krank an Fieber, Husten und Schnupfen, sogenannter Grippe, der Arzt fürchtet ein Nervenfieber, wenn ich mich nicht sehr schone. Ich werde aber bald meinen Brief fortsetzen, wenn ich mich wieder wohler fühle.

Sind Sie Ihrem Vorsatze, sich in die Zahlentheorie wieder hineinzuarbeiten, treu geblieben? Ich möchte gerne, was ich könnte, dazu beitragen.

VII.

Berlin, 12. Juli 1849.

Lieber Stern!

Da ich heute an Gauss einen Brief abschicke, so kann ich Sie nicht ohne einige Zeilen lassen. Sie müssen nicht glauben, dass ich die ganze Zeit über nicht an Sie gedacht habe; das Gegenteil beweist beiliegender Anfang eines Briefes schon vom November 48; einen zweiten umfangreichen Brief habe ich im März c. geschrieben, er schien mir aber nachher zu melancholisch und unmathematisch und ist verworfen worden. Ich wollte gern mich recht mit Ruhe im Schreiben an Sie ergehen und Ihnen eine Menge mathematischer und unmathematischer Mitteilungen machen, aber ich bin nicht dazu gekommen. Heute nur ganz kurz; erwarten Sie aber bald einen inhaltreichen Brief oder mich selbst, wenn ich Ihnen angenehm bin. Ich hätte wirklich Lust jetzt auf ein paar Wochen nach Göttingen zu kommen, weiss aber noch nicht recht, wie es sich mit der Kasse vertragen wird; bin ich Ihnen willkommen? — Ich hoffe, dass bei Ihnen Alles gut geht und dass Ihre Familie nicht irgendwie Unangenehmes durch den Krieg in der Pfalz, der doch auch Frankfurt berührt, erlitten hat. Grüssen Sie vielmals Ihre Frau Gemahlin, Herrn Goldschmidt und Alle, die in Göttingen einen freundschaftlichen Anteil an mir nehmen. In meinen Verhältnissen hat sich nichts geändert und schwebe ich, um es kurz zu sagen, noch immer in der Luft.

Den herzlichsten Dank für Ihre liebevolle und trostreiche Zusprache in Ihrem Briefe. Nur eine ganz kurze mathematische Mitteilung. Ich zweifle, dass Sie irgend Formeln zwischen Binomialkoeffizienten vorbringen können, die nicht in folgenden allgemeinen Sätzen enthalten sind. Es sei q wie immer eine ungerade pos. Primzahl; das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$ sei mit $n!$ bezeichnet. Wenn $a + b = q - 1$, so ist $1 \cdot 2 \cdots \cdot q - 1 = (1 \cdot 2 \cdots a)(q - 1 \cdot q - 2 \cdots \cdot q - b) \equiv (-1)^b a!\, b! \equiv (-1)^a a!\, b!$, also nach dem Wilson'schen Satze

1) $a!\,b! \equiv (-1)^{a+1} \equiv (-1)^{b+1} \pmod{q}$ wenn $a + b = q - 1$.

Es sei jetzt ϑ eine beliebige Zahl $< q$ und $n\vartheta$ ein Vielfaches von ϑ ebenfalls $< q$; dann ist

$$(n\vartheta)! = (\vartheta \cdot 2\vartheta \cdot \cdots \cdot n\vartheta)\big(1.\ (\vartheta + 1)(2\vartheta + 1) \cdots ((n-1)\vartheta + 1)\big)$$
$$\big(2.\ (\vartheta + 2)(2\vartheta + 2) \cdots ((n-1)\vartheta + 2)\big)$$
$$\cdots\big((\vartheta - 1)(\vartheta + \vartheta - 1)(2\vartheta + \vartheta - 1)\cdots\big)$$

d. h. =

$$\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + 1)\cdot\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + 2)\cdot\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + 3)\cdots\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta + \vartheta).$$

Setzt man

$$q = e_1\vartheta + r_1,\ 2q = e_2\vartheta + r_2,\ 3q = e_3\vartheta + r_3, \cdots (\vartheta - 1)q = e_{\vartheta-1}\vartheta + r_{\vartheta-1},$$

so sind alle $r < \vartheta$ wieder die Zahlen $1, 2, 3, \cdots \vartheta - 1$ in anderer Reihenfolge, folglich

$$(n\vartheta)! = \Pi(\sigma\vartheta + r_1)\,\Pi(\sigma\vartheta + r_2)\,\Pi(\sigma\vartheta + r_3)\cdots\Pi(\sigma\vartheta + r_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta + \vartheta)$$

Π erstreckt sich immer von $\sigma = o$ bis $\sigma = n - 1$.

Aber es ist $r_1 \equiv -e_1\vartheta$, $r_2 \equiv -e_2\vartheta$, $\cdots r_{\vartheta-1} \equiv -e_{\vartheta-1}\vartheta \pmod{q}$, folglich

$$(n\vartheta)! \equiv \vartheta^{n\vartheta}\cdot\Pi(\sigma - e_1)\,\Pi(\sigma - e_2)\cdots\Pi(\sigma - e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma + 1) \pmod{q}.$$

Man hat auch, wenn $\vartheta - r_1$, $\vartheta - r_2$, $\cdots \vartheta - r_{\vartheta-1}$ statt r_1, r_2 etc. gesetzt werden, was ebenfalls erlaubt ist,

$$(n\vartheta)! = \Pi(\sigma\vartheta - r_1)\,\Pi(\sigma\vartheta - r_2)\ \cdots\ \Pi(\sigma\vartheta - r_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta),$$

wo jetzt σ von 1 bis n sich erstreckt; also auch wegen $-r_1 \equiv e_1\vartheta$, $-r_2 \equiv e_2\vartheta$ etc.

$$(n\vartheta)! \equiv \Pi(\sigma\vartheta + \vartheta e_1)\,\Pi(\sigma\vartheta + \vartheta e_2)\cdots\Pi(\sigma\vartheta + \vartheta e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta)$$
$$\equiv \vartheta^{n\vartheta}\,\Pi(\sigma + e_1)\,\Pi(\sigma + e_2)\cdots\Pi(\sigma + e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma) \pmod{q}.$$

Nun ist $\prod_{\sigma=1}^{\sigma=n}(\sigma + e) = (1 + e)(2 + e)(3 + e)\cdots(n + e)$ nichts anders als $\frac{(n + e)!}{e!}$, folglich hat man

$$(n\vartheta) \equiv \frac{\vartheta^{n\vartheta}\,n!\,(n + e_1)!\,(n + e_2)!\cdots(n + e_{\vartheta-1}!)}{e_1!\,e_2!\cdots e_{\vartheta-1}!} \pmod{q},$$

wo $$e_1 = E\left(\frac{q}{\vartheta}\right),\ e_2 = E\left(\frac{2q}{\vartheta}\right),\ \cdots e_{\vartheta-1} = E\left(\frac{(\vartheta - 1)q}{\vartheta}\right)$$

ist, nach der Legendre'schen Bezeichnung der grössten Ganzen; da nun allgemein

$$E\left(\frac{(\vartheta - \alpha)q}{\vartheta}\right) + E\left(\frac{\alpha q}{\vartheta}\right) = q - 1,$$

so hat man nach dem ersten Satze

$$e_1!\, e_{\vartheta-1}! \equiv (-1)^{e_1+1},\quad e_2!\, e_{\vartheta-2}! \equiv (-1)^{e_2+1}, \ldots$$

folglich ist, wenn ϑ ungerade, der ganze Nenner

$$\equiv (-1)^{e_1+e_2+\cdots+e_{\frac{\vartheta-1}{2}}+\frac{\vartheta-1}{2}} \equiv \left(\frac{-q}{\vartheta}\right) \pmod{q};$$

wenn ϑ gerade, so bleibt noch das mittlere Glied $e_{\frac{\vartheta}{2}}$ stehen, welches keinen Gefährten findet. Sei ϑ ungerade, so hat man nun den zwar elementaren aber wichtigen Satz[1])

$$(\vartheta n)! \equiv \vartheta^{n\vartheta}\left(\frac{-q}{\vartheta}\right) n! \left(n+E\left(\frac{q}{\vartheta}\right)\right)! \left(n+E\left(\frac{2q}{\vartheta}\right)\right)! \ldots \tag{2}$$
$$\ldots \left(n+E\left(\frac{(\vartheta-1)q}{\vartheta}\right)\right)! \pmod{q},$$

wo $\left(\frac{-q}{\vartheta}\right)$ das Legendre'sche Zeichen. Ich überlasse Ihnen mannigfaltige Anwendungen dieser Formel für specielle Werthe von ϑ zu machen; wichtig ist, dass die Zahlen E von n unabhängig sind, und man so für jedes specielle ϑ wegen des n eine allgemeine Formel hat.

Ich verbleibe Ihr ergebener Freund

Berlin, 12. Juli 49.

G. Eisenstein,
Ritterstrasse 56.

PS. Wenn ϑ gerade, so ist $e_{\frac{\vartheta}{2}} = \frac{q-1}{2}$, also kommt dann $\left(\frac{q-1}{2}\right)!$ im Nenner.

VIII.

Juli 1849.

In Ihrem Briefe findet sich die Formel, wenn $q = 24n + 1$, so ist

$$\left(\frac{12n \ldots 11n+1}{1 \ldots n}\right)^2 \equiv \frac{5n+1 \ldots 6n}{1 \ldots\ldots n} \cdot \frac{7n+1 \ldots 13n}{1 \ldots\ldots 6n} \pmod{q}.$$

Um zu sehen, was man eigentlich hat, muss man erst auch Fakultäten bringen. Die linke Seite ist

$$\left(\frac{(12n)!}{n!\,(11n)!}\right)^2, \quad \text{die rechte} \quad \frac{(6n)!}{n!\,(5n)!}\;\frac{(13n)!}{(6n)!\,(7n)!} = \frac{(13n)!}{n!\,(5n)!\,(7n)!},$$

---

1) Dieser Satz ist als specieller Fall in einem anderen enthalten, welchen Herr Stickelberger im § 4 seiner Abhandlung „Über eine Verallgemeinerung der Kreisteilung" aufgestellt hat. (Mathematische Annalen, Bd. 37.)

also ist, wenn man den gemeinschaftlichen Divisor $n!$ fortlässt, zu beweisen, dass

$$(12n)!\,(12n)!\,(5n)!\,(7n)! \equiv (11n)!\,(11n)!\,n!\,(13n)!$$

Zunächst vereinfacht sich dies nach

1) $$a!\,b! \equiv (-1)^{a+1}, \quad \text{wenn} \quad a+b=q-1.$$

Also hier ist

$$(12n)!\,(12n!) \equiv (-1)^{12n+1} \text{ und rechts } (11n)!\,(13n)! \equiv (-1)^{11n+1},$$

weil $$12+12=24 \quad \text{und} \quad 11+13=24.$$

Es ist also nur zu zeigen, dass

$$(5n)!\,(7n)! \equiv (-1)^n n!\,(11n)! \quad (\text{mod. } q = 24n+1);$$

dies ist falsch, es ist vielmehr $(5n)!\,(7n)! \equiv n!\,(11n)!$ ohne $(-1)^n$, wie Sie sogleich sehen werden. Sie haben also jedenfalls in Ihrer Formel rechts z. B. den Faktor $(-1)^n$ vergessen, oder sich geirrt; die richtige Formel ist

$$\left(\frac{12n \ldots 11n+1}{1 \ldots n}\right)^2 \equiv (-1)^n \frac{5n+1 \ldots 6n}{1 \ldots n} \cdot \frac{7n+1 \ldots 13n}{1 \ldots 6n} \quad (\text{mod. } q);$$

ich habe auch gleich nach Empfang Ihres Briefes den fehlenden Faktor $(-1)^n$ dazu geschrieben.

Dass nun wirklich $(5n)!\,(7n)! \equiv n!\,(11n)!$ ist, geht wie folgt aus der allgemeinen Formel

2) $$(\vartheta z)! \equiv \vartheta^{\vartheta z}\left(\frac{-q}{\vartheta}\right) z!\,(z+e_1)!\,(z+e_2)! \ldots (z+e_{\vartheta-1})! \quad (\text{mod. } q)$$

hervor. Um zunächst möglichst allgemein zu bleiben, sei ϑ irgend ein ungerader Divisor von $q-1$ und $q = e\vartheta + 1$; dann hat man

$$2q = 2e\vartheta + 2,\ 3q = 3e\vartheta + 3, \ldots (\vartheta - 1)q = (\vartheta - 1)e\vartheta + \vartheta - 1,$$

also sind in diesem Falle die Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_{\vartheta-1}$ nichts anderes als $e, 2e, 3e, \ldots (\vartheta - 1)e$, nämlich $\frac{q-1}{\vartheta}, 2\frac{q-1}{\vartheta}, 3\frac{q-1}{\vartheta}, \ldots (\vartheta-1)\frac{q-1}{\vartheta}$; ferner ist $\left(\frac{-q}{\vartheta}\right) = \left(\frac{-1}{\vartheta}\right)$; man erhält daher den sehr brauchbaren speciellen Fall von 2)

3) $$(\vartheta z)! \equiv \vartheta^{\vartheta z}\left(\frac{-1}{\vartheta}\right) z!\,(z+e)!\,(z+2e)! \ldots (z+\vartheta-1\,e)! \quad (\text{mod. } q),$$

wenn ϑ ein ungerader Divisor von $q-1$ und $e = \frac{q-1}{\vartheta}$.

Sei jetzt $q = 24n+1$, $\vartheta = 3$ und zunächst $z = n$, dann kommt wegen $e = 8n$,

$$(3n)! \equiv 3^{3n}\left(\frac{-1}{3}\right) n!\,(9n)!\,(17n)!;$$

sei $z = 3n$, so kommt

$$(9n)! \equiv 3^{9n}\left(\frac{-1}{3}\right)(3n)!\ (11n)!\ (19n!,$$

also multiplicando

$$(3n)!\ (9n)! \equiv 3^{12n} n!\ (9n)!\ (17n)!\ (3n)!\ (11n)!\ (19n)!$$

Hier ist $3^{12n} = 3^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{3}{q}\right)$, aber $\left(\frac{3}{q}\right) = \left(\frac{q}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$, weil $q \equiv 1$ (mod. 4); also kommt $n!\ (11n)!\ (17n)!\ (19n)! \equiv 1$ (mod. q). Statt $a!$ im Zähler kann man immer $b!$ im Nenner schreiben, wenn $a + b = q - 1$, und man nicht vergisst, mit $(-1)^{a+1}$ zu multiplizieren; dies folgt aus $a!\,b! \equiv (-1)^{a+1}$.

Schreibt man daher statt $(17n)!$ und $(19n)!$ resp. $\frac{1}{(7n)!}$ und $\frac{1}{(5n)!}$ so kommt

$$\frac{n!\ (11n)!}{(5n)!\ (7n)!} \equiv (-1)^{17n+1}\,(-1)^{19n+1} \equiv 1,$$

d. h. $$n!\ (11n)! \equiv (5n)!\ (7n)! \text{ quod erat dem.}$$

Ihre Kongruenz geht also aus doppelter Anwendung von

$$(3z)! \equiv 3^{3z}\left(\frac{-1}{3}\right) z!\ (z + 8n)!\ (z + 16n)! \ (\text{mod. } 24n + 1)$$

hervor. — Um nicht identische Formeln für verschieden zu halten, ist es sehr wesentlich, statt Binomialkoeffizienten Fakultäten allein zu betrachten und alle Fakultäten $x!$ so zu reduzieren, dass $x \leqq \frac{q-1}{2}$ wird. — Um bei Ihrem Falle $q = 24n + 1$ noch stehen zu bleiben, kann man nach allen Relationen fragen, die überhaupt zwischen $n!$, $(2n)!$, $(3n)!$, .. $(11n)$ stattfinden, denn $(12n)! \equiv \pm 1$ und die folgenden drücken sich in diesen aus, z. B. $(13n)!$ in $(11n)!$ u. s. w. Sei br. c. $(\mu n)! = [\mu]$. Setzt man in obige Formel n, $2n$, $3n$, .. $8n$ statt z, so bekommt man das System

$$\begin{aligned}
[3] &\equiv -5^{3n}\,[1][9]\ [17] \equiv (-1)^{7n}\, 3^{3n}\,[1][9] : [7]\\
[6] &\equiv -3^{6n}\,[2][10][18] \equiv 3^{6n}\,[2][10] : [6]\\
[9] &\equiv -3^{9n}\,[3][11][19] \equiv (-1)^{5n}\,3^{9n}\,[3][11] : [5]\\
[12] &\equiv -2^{12n}\,[4][12][20] \equiv [4][12] : [4],
\end{aligned}$$

wird identisch; die folgenden geben nichts neues, also hat man zunächst 3 Relationen

$$[3][7] \equiv (-1)^n\, 3^{3n}\,[1][9],\quad [6]^2 \equiv 3^{6n}\,[2][10]$$

und $$[5][9] \equiv (-1)^n\, 3^{9n}\,[3][11];$$

man findet andere Relationen, wenn man $\vartheta = 2$, 4 oder 8 statt 3 setzt und die Formel für ein gerades ϑ anwendet. —

Nächstens mehr von dergleichen entweder schriftlich oder mündlich. — Mit der Schnelligkeit, mit der ich Ihre Abhandlung über irrationalwertige

Reihen ins Crelle'sche Journal gebracht habe, werden Sie hoffentlich zufrieden sein; ich habe dieselbe auf eigne Gefahr und auf Gefahr von Crelles höchster Ungnade nach der Druckerei getragen, selbst Redacteur gespielt und dem Setzer zum Druck empfohlen, sonst läge sie noch; übrigens kannte ich Ihre dortige Methode und hatte mich längst geärgert, denn da die Irrationalität dieser Reihen und Produkte sich so einfach beweisen lässt, wozu nutzen dann meine Kettenbrüche! — Was Sie einmal über Kongruenzen ersten Grades gesagt oder gefragt haben, habe ich wirklich nicht verstanden und bitte um Wiederholung und nähere Aufschlüsse. — Sie sagen in Ihrem Briefe, über quadratische Zerfällungen, „dass diese mühselige, für jeden besonderen Fall besonders zu behandelnde Reihenbetrachtung noch nicht der richtige Weg sei," aber ich habe ja die Reihen, welche auf alle quadratischen Formen passen und habe sie nur für Ihren Fall specialisiert, um den Geist der Methode an einem einfachen Beispiele hervortreten zu lassen und zu zeigen, dass dieselbe auch anwendbar ist, wenn die Determinante nicht Teiler von $q-1$ ist, wie bei $q=8n+3$. Aufserdem weifs ich nur eine umfassende freilich hiervon ganz verschiedene Methode durch die elliptischen Funktionen. Ihre neuste Abhandlung über Kettenbrüche (Konvergenz) ist sehr hübsch. Lieber Stern, ich kann schliefslich nicht unterlassen zu sagen, dass mir Ihr Brief vom vorigen Jahre unendliches Vergnügen bereitet und dass ich ihn wohl zwanzig Mal gelesen habe; ich muss dies hier ausdrücklich bemerken, weil Sie wegen meines langen Schweigens leicht daran zweifeln könnten; aber wie gesagt, nur die Fülle des Stoffes hat mich am Schreiben gehindert, und weil ich gern eine würdige Antwort schicken wollte. Unschicklich war es von mir, dass ich nicht Bescheid gab auf Ihre freundliche Einladung; aber ich wollte wirklich von Monat zu Monat kommen, was immer unterblieb.

Grüfsen Sie Ihre liebe Frau, Ihren Jungen, Goldschmidt und Meyersteins.

Ihr

Eisenstein.

IX.

Berlin 14. Januar 1850.

Lieber Stern!

Obgleich ich wohl weifs, dass ich nicht verdiene wieder vor Ihren Augen zu erscheinen, da ich auf die unhöflichste Weise von der Welt Ihren herzlichen Brief weder beantwortet, noch Ihrer freundlichen Einladung Folge geleistet habe, so hoffe ich doch, dass Sie vielleicht über einen reuigen Sünder Gnade ergehen lassen.

Was mich dazu führt, gerade jetzt an Sie zu schreiben, ist eine mathematische Kleinigkeit, die wegen ihrer grofsen Einfachheit Ihnen gewiss Spafs machen wird. Ich bin darauf bei meinen Untersuchungen über höhere Reciprocitätsgesetze gekommen; was ich Ihnen mitteilen will, lässt sich aber sehr gut von der Theorie trennen und bildet einen ganz selbstständigen Satz, dem Sie es gewiss nicht anmerken, dass er mit jener Theorie zusammenhängt. — Nehmen Sie irgend zwei positive ganze Zahlen, z. B. was das einfachste ist 1 und 1, schreiben zwischen beide ihre Summe, also 1 2 1; dann zwischen je zwei dieser drei Zahlen wieder deren resp. Summen, also 1, 3, 2, 3, 1 u. s. w. immer zwischen je zwei bereits erhaltene Zahlen ihre Summe; jede neue Einschaltung der Summe ist als eine Vervollständigung der Reihe zu betrachten, deren Gliederzahl sich fortwährend verdoppelt (mit Ausnahme eines Gliedes), und das Verfahren wird ins Unendliche fortgesetzt; nach einer gewissen Zeit erhält man z. B.

1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 7 11 4 9 5 6 1

Am Besten nimmt sich diese Procedur aus, wenn Sie auf einen schmalen Streifen Papier oben und unten 1 schreiben, den Streifen halb falten, in den Kniff (Berliner Ausdruck) 2 setzen, abermals falten, so dass zwei neue Kniffe entstehen, wohinein Sie 3 resp. 3 schreiben, aufs Neue kniffen, um von oben nach unten 4, 5, 5, 4 hinein zu setzen u. s. w. In der so gebildeten und durch fortwährendes Einschalten der Summe zwischen je zwei Zahlen zu vervollständigenden Zahlenreihe kommt jede bestimmte ganze Zahl nur eine endliche Anzahl mal vor, weil sie nach einer gewissen Zeit wegen der wachsenden Gröfse der neu hinzutretenden Zahlen nicht wieder erscheinen kann. So kommen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 resp. 1 mal, 2 mal, 2 mal, 4 mal, 2 mal vor. Ich habe nun allgemein gefunden, „dass jede Zahl A genau $\varphi(A)$ mal vorkommt, wo $\varphi(A)$ die Bedeutung in Disq. Arithm. hat", z. B. jede Primzahl p kommt $p-1$ mal vor. Wenn man statt von 1 und 1 von zwei andern ursprünglichen Zahlen bei der Bildungsweise ausgeht, so gilt ein anderes Gesetz. Geht man von a und b aus, und nennt a^0, b^0 die kleinsten der Gleichung $ba^0 - ab^0 = 1$ genügenden Zahlen, so kommt in der nach obigem Algorithmus gebildeten Zahlenreihe, welche ich die Entwickelung von (a, b) nennen will, eine beliebige ganze Zahl A so oft vor, als es Zahlen zwischen den Grenzen

$$(\alpha) \qquad \frac{b^0}{b}A \text{ und } \frac{a^0}{a}A$$

giebt, die zu A relative Primzahl sind, wie Sie Sich leicht durch Induktion an einigen Beispielen überzeugen können. Meine Beweise dieser Sätze sind ziemlich kompliziert, vielleicht finden Sie einfachere, es wäre mir lieb, solche zu besitzen, die sich unmittelbar aus der angegebenen Bildungsweise auf elementare Weise ergeben.[1]) Diese Formationen besitzen viele andere merkwürdige Eigenschaften; notiert man z. B. die Zahlen, welche in der Entwicklung von (a, b) je unmittelbar auf eine bestimmte Zahl A so oft dieselbe vorkommt, folgen, so sind diese die Werte von $\frac{1}{x}$ (mod A), während x zwischen den obigen Grenzen (α) liegt und zu A relative Primzahl ist; so folgen z. B. in der Entwicklung von (1, 2):

1, **7, 6,** 11, 5, 14, 9, 13, 4, 15, 11, 16, **7, 17,** 10, 13, 3, 14, 11, 19, 8, 21, 13, 18, 5, 17, 12, 19, **7, 16,** 9, 11, 2,

auf die Zahl 7 an den drei Stellen, an welchen sie vorkommt, die Zahlen $6, 17 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$, $16 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$ und 2, 3, 6 sind die Werte von resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ (mod 7), wo die Nenner, die zwischen $\frac{7}{2}$ und 7 liegenden Zahlen sind. In der Entwickelung von (1, 1) sind namentlich die auf A so oft es vorkommt je unmittelbar folgenden Zahlen die sämmtlichen $\varphi(A)$ inkongruenten Zahlen (mod A), welche mit A keinen gemeinschaftlichen Teiler haben.

Wenn Sie diese Bemerkungen irgendwo wollen drucken lassen, vielleicht in Ihrer Akademie, so wird es mir angenehm sein. Crelle ennuiert mich jetzt schrecklich, er ändert in meinen Arbeiten, was ihm beliebt, so dass ein höchst wunderlicher Styl und manche Sinn-Entstellung herauskommt. Können Sie Sich etwas Schrecklicheres denken als folgenden Passus: Ich schreibe ganz vernünftig: Der Gleichung $P = Q$ kann man die Form $R = S$ geben. Crelle macht hieraus:

Der Gleichung $P = Q$ lässt sich die Form $R = S$ geben.

Dies nur ein Beispiel unter vielen ebenso grausigen.

Ich habe im Crelle'schen Journal eine lange Arbeit drucken lassen, die sich schon vom Sommer her bis jetzt durch drei Hefte durchzieht und die mich auch verhinderte zu Ihnen zu kommen; sie wird Ihnen wahrscheinlich bald zu Gesichte kommen; sobald ich meine Abdrücke erhalte, will ich einen an Gauss schicken, von dem ich vor einiger Zeit auf mein Gratulations-Schreiben eine Antwort empfangen habe, die mir grofse Freude gemacht hat.

Haben Sie schon gehört, dass Rosenhain in Breslau den grofsen mathematischen Preis aus Paris erhalten hat? Einer unserer jüngeren Privatdocenten hier hat die Stelle von Pohl in Breslau als Prof. extr. erhalten.

1) Solche Beweise hat Stern in seiner Abhandlung „Über eine zahlentheoretische Funktion“ gegeben. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55 (1858).)

Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir mitteilten, ob und in welcher Weise man bei Ihnen einen Verleger für Tänze (Polkas, Walzer) findet; ich habe mehrere dergleichen komponiert, die hier allgemeinen Beifall finden, aber es ist schwer, hier einen Verleger zu gewinnen, wenn man nicht schon Komponist von Ruf ist. Sie teilten mir einmal früher mit, dass Sie mir einen Verleger für mathematische Sachen verschaffen könnten, wollten Sie vielleicht die Güte haben, mir nähere Nachricht darüber zukommen zu lassen.

Unter dem Siegel der tiefsten Verschwiegenheit will ich Ihnen, da Sie Sich auf so freundschaftliche Weise auch für meine menschlichen Verhältnisse interessieren, anvertrauen, dass ich, was für einen Mathematiker eine Dreistigkeit ist, ein Viertel von 1000 ℛ in der Lotterie gewonnen habe; aber sprechen Sie nicht davon, sonst denken die Leute, ich sei reich geworden, während doch die paar 100 ℛ fast schon aufgezehrt sind.

Ich weiſs nicht, ob ich Ihnen schon über Riemann geschrieben habe; ich halte ihn ebenfalls für sehr talentvoll und habe auch mit Dirichlet von ihm gesprochen; sein Umgang hätte mir viel Freude gemacht; als er hier war bin ich ihm förmlich nachgelaufen, er schien mich aber zu vermeiden, was mir sehr leid that, ich kenne nicht die Ursache, vielleicht Schüchternheit oder Verlegenheit von seiner Seite, oder lag es an mir, dass ich ihm nicht so freundschaftlich erschienen bin, als ich es innerlich gewiss fühlte und beabsichtigte; wie geht es ihm jetzt?

Zum Schlusse noch etwas Mathematisches. Können Sie folgendes Problem über Permutationen lösen: die Elemente 1, 2, 3, ... n in solche noch unbekannte Reihenfolge zu bringen, dass, wenn man bei der letzteren das erste Element herausnimmt, das zweite ans Ende schreibt, das dritte herausnimmt, das vierte ans Ende schreibt u. s. w. immer abwechselnd ein Element herausnimmt und eins ans Ende schreibt, wobei denn die ans Ende geschriebenen Elemente später auch wieder vorkommen, dass bei einem solchen Verfahren die herausgenommenen Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3, ... n nach und nach erscheinen; z. B. die 13 Karten (Spielkarten) einer Farbe so zu legen, dass wenn man die erste auswirft (auf den Tisch), die zweite unter das Spiel steckt, die dritte auswirft, die vierte untersteckt u. s. w., bis alle Karten, auch die früher untergesteckten erschöpft sind: die ausgeworfenen Karten in natürlicher Reihenfolge 2, 3, ... 10, Bube, Dame, König, Ass folgen. Ich bin im Besitze eines sehr einfachen Princips, um allgemein folgendes Problem zu lösen, welches Obiges als speciellen Fall enthält und auch praktisches Interesse darbietet. Thätigkeit will ich jedes Verfahren, jede Art und Weise nennen, einen gewissen Zustand zu verändern, den man selbst als das Resultat aller vorgehenden Thätigkeiten von $-\infty$ her ansehen kann; solche Thätigkeiten will ich mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Soll nun ein unbekannter Zustand Z gefunden werden, von der Art, dass, wenn man auf ihn nach und nach die Thätigkeiten a, b, c, ... g, h anwendet, zuletzt ein gewisser status quo A hergestellt wird, so suche ich zunächst zu jeder der gegebenen Thätigkeiten die ihr entsprechende reciproke, durch welche sie wieder aufgehoben wird, und wende dann diese reciproken $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \cdots \frac{1}{h}$ in umgekehrter Reihenfolge $\frac{1}{h}, \frac{1}{g}, \cdots \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ auf den status quo A an; so finde ich

$$Z = A \cdot \left(\frac{1}{h}, \frac{1}{g}, \cdots \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right).$$ [1]

Bei dem obigen Beispiel bedeutet Z die gesuchte noch unbekannte Anordnung der Karten, A die Karten in ihrer natürlichen Reihenfolge, die Thätigkeiten sind das Auswerfen und unter das Spiel Stecken der Karten, ihre reciproken also das Aufnehmen einer Karte vom Tische, resp. das Legen einer unten befindlichen Karte oben auf das Spiel, so dass wenn a z. B. das Auswerfen, dann $\frac{1}{a}$ das Einnehmen bezeichnet; nach diesen Andeutungen werden Sie leicht die Lösung finden. Solche Probleme kommen unbewusster Weise bei den gewöhnlichsten Lebensverrichtungen vor. Wenn man sich des Morgens anziehen will, zuerst Strümpfe, dann Unterhosen, Hosen, Tragebänder, Weste, Rock, und man will diese Kleidungsstücke auf seinem Stuhle gleich zur Hand liegen haben, so muss man sie des Abends nicht in der genannten, sondern gerade in der umgekehrten Reihenfolge hinlegen, also zu unterst erst: Rock hinlegen, dann Weste, Tragebänder, Hosen, Unterhosen, Strümpfe. Dies klingt lächerlich und geschieht wie gesagt unbewusster Weise, aber ich nehme es in vollem Ernste und halte diese Anwendung der reciproken Thätigkeiten in **umgekehrter** Reihenfolge für ein wichtiges, mathematisches oder wenn Sie wollen, logisches Princip, von dem noch schöne Anwendungen bei Problemen gemacht werden können, die sich auf andere Art etwa combinatorisch gar nicht behandeln lassen. — Nächstens will ich Sie von einem Princip unter-

---

1) Nach der heute üblichen Bezeichnungsweise der Gruppentheorie sind $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \cdot\cdot \frac{1}{h}$ die zu a, b, $\cdot\cdot$, h inversen Operationen. Die Bemerkung von Eisenstein kommt auf den bekannten fundamentalen Satz hinaus, dass $\frac{1}{h}\frac{1}{g}\cdots\frac{1}{b}\frac{1}{a}$ die inverse Operation der zusammengesetzten Operation $ab\cdots gh$ ist.

halten anderer, aber ebenso allgemeiner Art, welches ich das Princip der Sparsamkeit nenne, und bei welchem die Freiheit des Willens mathematisch abgehandelt wird; es kommt dabei heraus, dass es am vorteilhaftesten ist, jedesmal so zu handeln, dass man im nächstfolgenden Zustande nach der That möglichst unfrei sei.

Leben Sie nun herzlich wohl und grüſsen vielmals Ihre Familie; haben Sie schon wieder etwas Kleines? Wenn Sie mir eine Frau empfehlen, so heirate ich auch. Uebrigens beabsichtige ich jetzt in allem Ernste unsere Korrespondenz in besseren Fluss zu bringen. Ihr ergebenster Freund

G. Eisenstein.

NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ.

REDE,

GEHALTEN

BEI DER FEIERLICHEN VERSAMMLUNG DER KAISERLICHEN UNIVERSITÄT KASAN

AM 22. OKTOBER 1893

VON

PROFESSOR **A. WASSILJEF.**

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

PROFESSOR **FRIEDRICH ENGEL.**

Das edle Leben des Mannes, dessen Gedächtniss heute gefeiert wird, 1
ist während der ersten fünfzig Jahre des Bestehens der Universität Kasan untrennbar mit deren Geschichte verbunden; auf jeder Seite dieser Geschichte — es sind das Worte aus einer an seinem Grabe gehaltenen Rede — steht ehrenvoll und in dankbarem Andenken der Name Lobatschefskijs.

Lobatschefskij tritt in die Universität sogleich bei ihrer Gründung ein. Am 5. November 1804 war das Statut der Universität bestätigt worden, unter dem 9. Januar 1807 steht der Name Nikolaj Lobatschefskijs in dem Verzeichnisse der Schüler des Kasaner Gymnasiums, die für würdig erklärt wurden, die Vorlesungen der Professoren und Adjunkten zu hören, und zwar steht er da mit dem Vermerke „dignus".

Die ersten Jahre in dem Leben unsrer Universität, mit denen Lobatschefskijs Studentenjahre zusammenfallen, zeigen äusserlich viel Chaotisches, Unvorbereitetes und Ungeordnetes. Die Universität wurde ohne alle Hülfsmittel für den Unterricht eröffnet; es fehlte an der regelmässigen Vertheilung des Stoffes auf die Facultäten, und dieser Zustand schadete selbstverständlich dem Erfolge der Arbeit der Universität.

Dafür hatte sich aber an der jungen Universität, die eben erst in 2
einem halbwilden Lande eröffnet worden war, in dieser „ultima Musarum Thule", wie die ersten hierher gekommenen deutschen Professoren die Universität Kasan nannten, es hatte sich der studirenden Jugend jener Zeit eine Begierde nach Kenntnissen, ein brennender Trieb nach Wissen bemächtigt. Noch in Dorpat, viele Jahre später, erinnerte sich Bartels, der erste Professor der Mathematik, mit lebhaftem Bedauern seiner begabten Kasaner Schüler.

Entsprechend dieser Begierde nach Kenntnissen herrschte, wie uns einer der ersten Zöglinge unsrer Universität, S. T. Aksakof, in seiner „Familienchronik" bezeugt, „vollständige Verachtung gegen alles Niedrige und Gemeine, und tiefe Verehrung für alles Rechtschaffene und Hohe, mochte es auch unvernünftig sein."

Dieser Geist der studirenden Jugend der damaligen Zeit, von dem auch einige uns überlieferte Thatsachen aus Lobatschefskijs Jugendjahren Zeugniss ablegen, entsprach dem allgemeinen Geiste jenes Zeitraums, den

Puschkin als den „schönen Anfang der Tage Alexanders“ bezeichnet hat, jenes Zeitraums, an den uns das schöne Bildniss erinnert, das in unsrer Aula steht und auf dem der junge Herrscher in der ganzen Anmuth seiner Schönheit dargestellt ist, wie er vor der Büste seiner erleuchteten Grossmutter und gewissermassen auf ihren Befehl der Universität Kasan die Stiftungsurkunde überreicht.

Wenige Zeiträume in der Geschichte der russischen Bildung sind so glänzend und fruchtbar wie dieser Zeitraum, wo die Regierung, an der Spitze der geistigen Bewegung des Landes stehend, einen allgemeinen Plan für die Volksbildung ausarbeitet, „grossartig,“ sagt Karamsin, „und ruhmvoll nicht nur für Russland und den Herrscher, sondern auch für das ganze Jahrhundert,“ wo sie das Blühen der Uebersetzungslitteratur begünstigt, die Russische Akademie reorganisirt, neue Universitäten eröffnet und an diese die besten ausländischen Gelehrten beruft.

Der Thätigkeit der Regierung entsprach die Belebung der geistigen Thätigkeit der Gesellschaft selbst. Mit besonderem Eifer machte man damals
3 Stiftungen für Bildungszwecke; in diese Zeit fallen die Stiftungen Djemidofs für zukünftige Universitäten, die Stiftung des Adels von Charkof, die Stiftung des Grafen N. P. Rumjanzef. Die in der Gesellschaft erwachte Verehrung für Litteratur und Wissenschaft trug ihre Früchte. Den ersten Jahren des gegenwärtigen Jahrhunderts verdanken wir unsern unsterblichen Nationaldichter Puschkin, ihnen verdanken wir auch den genialen Mathematiker, dessen Gedächtniss heute gefeiert wird.

Aber, wenn auch auf junge, ins Leben eintretende Leute das Leben, das sie umgiebt, einen grossen Einfluss ausübt, so ist doch der Einfluss der Lehrer und der ersten Führer bei selbständigen geistigen Arbeiten nicht weniger wichtig und unmittelbar. Deshalb sind wir an dem Tage, wo wir Lobatschefskij ehren, verpflichtet, dankbar seiner Lehrer zu gedenken und vor allen der ehrwürdigen Gestalt des ersten Professors der reinen Mathematik an unsrer Universität, Bartels, dessen Schutz Lobatschefskij, der in seinen jungen Jahren hitzig, feurig und offenherzig war, auch ausserdem so viel verdankt.

Johann Martin Christian Bartels (geb. 1769) nimmt in der Geschichte der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts eine hervorragende Stelle ein. Ihm war es vergönnt, nicht nur Lobatschefskijs Lehrer zu sein, sondern auch der Lehrer und Beschützer dessen unter den Gelehrten des neunzehnten Jahrhunderts, der mehr als sonst irgend einer der Entwickelung der Mathematik sein Gepräge gegeben hat — Gauss. Um sein Brod zu verdienen wurde der sechzehnjährige Bartels Gehülfe des Lehrers an einer Privatschule der Stadt Braunschweig, und gegen ein armseliges Entgelt schnitt

er den Schülern die Federn und half ihnen beim Schönschreiben. Unter der Zahl der Schüler befand sich der damals achtjährige Gauss, und die mathematischen Fähigkeiten des genialen Knaben zogen die Aufmerksamkeit des wissbegierigen Bartels auf sich. Trotz des Altersunterschiedes entsteht zwischen Bartels und Gauss eine enge Freundschaft; vereint studiren sie mathematische Werke, vereint lösen sie Aufgaben. Bartels gewährte mehrmals Gauss seinen Schutz, und Gauss achtete Bartels hoch wegen dessen 4
edlen, humanen Charakters, und bis in seine allerletzten Jahre war er ihm dankbar als einem alten Freunde. Bartels war auch selber ein vortrefflicher Mathematiker. Seine „Vorlesungen über mathematische Analysis", die er in Dorpat im Jahre 1833 herausgab, nehmen in der deutschen mathematischen Litteratur eine hervorragende Stelle ein, denn sie zeichnen sich durch Strenge der Beweise und durch Klarheit der Anordnung aus. Eine Ueberlieferung berichtet sogar, Laplace habe auf die Frage: „Wer ist der erste Mathematiker Deutschlands?" geantwortet: „Bartels, denn Gauss ist ja der erste Mathematiker der Welt."

Dank Bartels stand der Unterricht in der reinen Mathematik an der Universität Kasan mit einem Male auf derselben Höhe wie an den besten Universitäten Deutschlands. Alle klassischen Werke der damaligen Zeit: die Differential- und die Integralrechnung — von Euler, die analytische Mechanik — von Lagrange, die Anwendung der Analysis auf die Geometrie — von Monge, die Disquisitiones arithmeticae — von Gauss wurden von dem begabten und belesenen Bartels erläutert. In eignen Vorträgen las Bartels über die Geschichte der Mathematik und entwickelte vor seinen Zuhörern das grossartige Gemälde der Fortschritte des menschlichen Geistes auf diesem Gebiete.

Nachdem Lobatschefskij (am 10. Juli 1811) trotz „schlechten Betragens" den Magistergrad erhalten hatte, „auf Grund ausserordentlicher Fortschritte und ebensolcher Gaben in den mathematischen und physischen Wissenschaften" und auf Grund einer von ihm vorgelegten Arbeit: „Die Theorie der elliptischen Bewegung der Himmelskörper", beschäftigte er sich bei Bartels auf dessen Wohnung vier Stunden wöchentlich, indem er unter dessen Leitung die Disquisitiones arithmeticae und den ersten Band der Mechanik des Himmels von Laplace studirte.

Eins der Ergebnisse dieser Beschäftigungen war die Arbeit, die Lobatschefskij im Jahre 1813 unter dem Titel: „Ueber die Lösung der algebraischen Gleichung $x^n - 1 = 0$" vorlegte, sie behandelt die Frage nach der Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte Grad durch vier theilbar ist.

Eine der Verpflichtungen, die Lobatschefskij als Magister hatte, war 5 die „Unterstützung von Bartels in dessen Eigenschaft als Professor der reinen Mathematik, zur Erzielung grösserer Fortschritte seiner Zuhörer, und schliesslich die Erklärung dessen, was sie nicht verstanden haben.“ Es ist klar, dass Lobatschefskij in den allernächsten Beziehungen zu Bartels gestanden haben muss.

In nicht weniger enger Gemeinschaft muss Lobatschefskij auch mit Bronner gestanden haben, dem Professor der Physik und Leiter des pädagogischen Instituts, in das die jungen Magister zu ihrer Weiterbildung eintreten mussten. Bronner, der viel erlebt und viel durchdacht hatte, erst Benediktinermönch, dann Angehöriger des Illuminatenordens, dann Idyllendichter, dann Mechaniker und Physiker, endlich Historiker und Statistiker des Kantons Aargau, in dem er sein stürmisches Leben beschloss, der sich bald von den Ideen Rousseaus und der französischen Revolution hinreissen liess, bald von Kants „Kritik der reinen Vernunft“, Bronner konnte bei seiner begabten Persönlichkeit nicht umhin, auf seine Schüler einen bezaubernden Einfluss auszuüben, und seine ausgedehnte philosophische Bildung trug unzweifelhaft viel zu der geistigen Entwickelung Lobatschefskijs und seiner Genossen bei.

Später als Bartels und Bronner, aber noch während der Studentenjahre Lobatschefskijs, kamen Renner und Littrow nach Kasan und waren seine Lehrer. Der ehemalige Privatdocent der Göttinger Universität, Caspar Friedrich Renner, ein vortrefflicher Mathematiker und Lateiner, erscheint in den auf uns gekommenen Erinnerungen von der anziehendsten Seite als ein Mann, auf den Puschkins Vers „von der durchaus göttingischen Seele“[1]) vortrefflich passt. Littrow, der bekannte Astronom, ein hochgebildeter Mann, der von der Philosophie Schellings begeistert war, erhob den Unterricht in der Astronomie an unsrer Universität auf dieselbe Höhe, die der Unterricht in der Mathematik hatte. Unter seiner Anleitung führte Lobatschefskij zusammen mit seinem Kameraden, dem späteren bekannten Professor der Astronomie, J. M. Simonof, Beobachtungen des Kometen von 1811 aus, und die Mittheilung Littrows über diese Beobachtungen (Kasaner Nachrichten von 1811, Nr. 21) ist die erste gedruckte Mittheilung über die wissenschaftlichen Arbeiten Lobatschefskijs.

Die geistige Anregung dieses glänzenden Zeitraums, in den Lobat-
6 schefskijs Jugend fiel, die talentvollen Lehrer, die eifrig die jungen Gemüther
für das Licht des Wissens und der Wahrheit erweckten, das war die
geistige Atmosphäre, in der Lobatschefskij mit dem Idealismus der An-
schauungen erfüllt wurde, den seine merkwürdige „Rede über die wichtigsten

1) [Jewgenij Onjegin, II. Gesang, Strophe 6.]

Gegenstände der Erziehung" athmet, mit dem Durste nach mannigfaltigem Wissen, mit dieser Freiheit des Geistes, die nöthig war, um an der Wahrheit eines Axioms zu zweifeln, das im Laufe zweier Jahrtausende von allen anerkannt und durch die Autorität Euklids geheiligt war, mit dieser brennenden Liebe zur Wahrheit, die ihm erlaubte, ohne sich durch die Gleichgültigkeit oder den Spott seiner Zeitgenossen hemmen zu lassen, hartnäckig und beharrlich seine geliebten wissenschaftlichen Ideen zu verfolgen.

War Lobatschefskij vielleicht auch in diesem Punkte seinen hervorragenderen Lehrern, namentlich Bartels, verpflichtet? Verdankte er etwa diesem die Wahl des geliebten Gegenstandes seiner Arbeiten, der Frage nach den Grundlagen der Geometrie, die ihn berühmt machen sollte? Wahrscheinlich wird das immer ein Räthsel bleiben; aber, wie gross auch unsre patriotische Begeisterung für Lobatschefskij sein mag, die Liebe zur Wahrheit muss uns doch zwingen, an die Möglichkeit zu denken, dass Gauss durch die Vermittelung von Bartels Lobatschefskij beeinflusst haben kann.

Der grosse deutsche Mathematiker hatte schon 1816 und 1822 Besprechungen verschiedener Versuche, die Euklidische Forderung zu beweisen, veröffentlicht, und die Entschiedenheit, mit der er in diesen Besprechungen seiner Ueberzeugung Ausdruck verleiht, dass alle Versuche, die Lücke der Geometrie auszufüllen, die mit dieser Forderung zusammenhängt, vergeblich seien, erlaubt uns nicht, an der Richtigkeit der Behauptung zu zweifeln, die er im Jahre 1846 in seinem bekannten Briefe an Schumacher ausspricht, dass er nämlich schon 1792 zu der Ueberzeugung von der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie gelangt sei. Die Zeit, in der sich diese Ansichten bei Gauss entwickelten, ist die Zeit seiner engen Freundschaft mit Bartels, die schon 1785 entstanden war, als Bartels sechzehn und Gauss acht Jahre alt war. Ihre unausgesetzten, persönlichen, freundschaftlichen Beziehungen wurden zwanzig Jahre hindurch fortgesetzt, bis 1807, wo Bartels nach Kasan übersiedelte. Mit Ausnahme einer kurzen 7
Zwischenzeit lebten sie fast unzertrennlich in Braunschweig und bekamen beide ein Stipendium von dem Herzoge von Braunschweig, der die Absicht hatte, ein Observatorium zu erbauen, dessen Direktor Gauss werden sollte, und eine höhere mathematische Schule zu gründen, an der Gauss und Bartels Professoren werden sollten. Ihre Namen waren so sehr mit einander verbunden, dass beide gleichzeitig von Fuss, dem ständigen Secretär der Petersburger Akademie der Wissenschaften, Briefe erhielten, in denen Gauss die Direktorstelle der St. Petersburger Sternwarte und Bartels die Professur in Kasan angeboten wurde.

Man kann daher die Vermuthung nicht für zu gewagt halten, dass Gauss seine Gedanken über die Frage der Parallellinien seinem Lehrer und Freund Bartels mitgetheilt habe.[1]) Könnte nicht andrerseits Bartels seinem wissbegierigen und talentvollen Kasaner Schüler etwas von den kühnen und interessanten Ansichten mittheilen, die Gauss über eine der Grundfragen der Geometrie gefasst hatte?

Aber selbst wenn wir diese Hypothese aussprechen, so müssen wir natürlich auch noch eine andre Erklärung dafür zu geben versuchen, dass Lobatschefskij bei der Frage über die Grundlagen der Geometrie und über die Parallellinien verweilte.

Auf der einen Seite hatte das Interesse an den Parallellinien, das ja auch schon bei den griechischen Mathematikern (Proklus und Ptolemäus) und bei den Arabern (Naṣîr-Eddîn), und vom 16. bis zum 18. Jahrhundert
8 in Europa (Clavius, Saccheri, [Lambert] und andere) vorhanden gewesen war, am Ende des vergangenen Jahrhunderts und beim Beginn des gegenwärtigen ganz besonders zugenommen. In dem einen Jahre 1786 zum Beispiel erschienen sieben Abhandlungen, die der Frage der Parallellinien gewidmet waren. Im Jahre 1794 erschien die erste Ausgabe des bekannten Lehrbuchs der Geometrie von dem berühmten französischen Mathematiker Legendre mit einem Beweise der Euklidischen Forderung, der auf das Gesetz der Homogeneität gegründet war. Mit diesem Beweise begann Legendre die Reihe seiner merkwürdigen Arbeiten über die Theorie der Parallellinien, zum Theil in den neuen, zahlreichen Ausgaben seines Lehrbuchs, zum Theil in besonderen Abhandlungen.[2]) Legendre, so kann man sagen, versucht von allen Seiten her zur Entscheidung der schwierigen Frage zu gelangen und verwendet die ganze Kraft seines Verstandes und seines Wissens darauf, einen einwandfreien Beweis der Euklidischen Forderung zu liefern.

Diese Arbeiten Legendres verstärkten ihrerseits das Interesse an der Theorie der Parallellinien. In den fünfundzwanzig Jahren, die dem Er-

---

1) Es ist ein Brief von Gauss auf uns gekommen, der an einen andern seiner Freunde und Studiengenossen gerichtet ist, an Wolfgang Bolyai, den Vater Johann Bolyais, des Verfassers der Abhandlung: Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens (1832), in der zwar nach Lobatschefskij aber von ihm unabhängig die Grundlagen einer Geometrie entwickelt sind, die nicht auf dem Euklidischen Axiome beruht. In diesem Briefe, der 1799 abgeschickt ist und der in einer Rede Prof. Scherings mitgetheilt wird (Gedächtnissrede zum 100jähr. Geburtstage von Gauss, S. 7 (1877)), schreibt Gauss: „Zum Beispiel, wenn man beweisen könnte, dass ein geradlinigtes Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande, die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht“ u. s. w.

2) Nouvelle théorie des parallèles avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles. Paris 1803.

scheinen der ersten Arbeit Lobatschefskijs vorausgingen, verstrich kein Jahr, in dem nicht eine oder einige Abhandlungen über die Theorie der Parallellinien erschienen wären. Aus dem Zeitraume von 1813 bis 1827 kennt man allein in deutscher und in französischer Sprache gegen dreissig gegedruckte Abhandlungen. Einige von diesen Abhandlungen befinden sich seit Lobatschefskijs Zeiten auf unsrer Bibliothek und sind, wie deren Einlaufkatalog zeigt, von Lobatschefskij selbst angeschafft.[1])

Die Erfolglosigkeit aller dieser Versuche, die Euklidische Forderung zu beweisen, das heisst, sie auf die vorhergehenden Axiome, Forderungen und Erklärungen zurückzuführen, veranlasste Gauss 1816, seine Meinung in folgenden Worten gedruckt auszusprechen: „Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie 9
der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen."

Diese Erfolglosigkeit aller früheren Versuche konnte auch unabhängig von dem Einflusse von Gauss und Bartels Lobatschefskij auf den Gedanken bringen, entsprechend der Geometrie, die auf die Euklidische Forderung begründet ist, ein andres geometrisches System zu studiren, das von dieser Forderung unabhängig ist. Der Lösung dieser Aufgabe, die Lobatschefskij so glänzend durchgeführt hat, war schon in der ersten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts der italienische gelehrte Jesuit Saccheri nahe gekommen.[2]) Fast gleichzeitig mit Lobatschefskij gelangte Johann Bolyai, 10

---

1) Hessling. Versuch einer Theorie der Parallellinien. Halle 1818. Lüdicke. Versuch einer neuen Theorie der Parallellinien, im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie dargestellt. Meissen 1819.

2) Ueber Saccheri, als einen Vorläufer Lobatschefskijs, siehe meinen Artikel in den „Mittheilungen der physisch-mathematischen Gesellschaft [zu Kasan]," Bd. 3, Heft 3. In der letzten Zeit sind die Mathematiker auf einige andre Abhandlungen aufmerksam geworden, in denen ebenfalls der Gedanke der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie ausgesprochen ist. So stammt von Lambert, dem bekannten Philosophen und Mathematiker, eine Abhandlung: „Zur Theorie der Parallellinien", die 1786 in dem „Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik" erschien. In dieser Abhandlung, auf die zuerst von Stäckel wieder hingewiesen worden ist, macht Lambert zwar viele vergebliche Versuche, die

der Sohn Wolfgang Bolyais, des Studiengenossen und Freundes von Gauss, zur nichteuklidischen Geometrie.

Auf der andern Seite führte auch das philosophische Denken der damaligen Zeit zu der Frage nach dem Wesen und der Entstehung der geometrischen Axiome.

Die Zeit, in der Lobatschefskij mit jugendlichem Eifer und mit Ruhmbegierde seine selbständige, geistige Arbeit begann, war eine in der Geschichte des menschlichen Verstandes berühmte Zeit. Sie erscheint uns nach den beredten Worten von Helmholtz in seiner Rede „Die Thatsachen in der Wahrnehmung", als eine Zeit, „reich an Gütern geistiger Art, an Begeisterung, an Energie, idealen Hoffnungen und schöpferischen Gedanken." Diese Zeit stellte die grundlegende Aufgabe jeder Wissenschaft, die Aufgabe der Erkenntnisstheorie: „Was ist Wahrheit? In wieweit entsprechen unsre Vorstellungen der Wirklichkeit?" Zur scharfen Formulirung dieser Aufgabe hat besonders Kant beigetragen, namentlich seine „Kritik der reinen Vernunft" und die darin enthaltene Lehre vom Raume.

Der grosse Königsberger Philosoph hat die Frage nach dem Wesen des Raumes im Laufe seines Lebens mehrere Male und auf verschiedene Weisen beantwortet. In seiner ersten darauf bezüglichen Arbeit: „Gedanken über die wahre Schätzung der lebendigen Kräfte" (1746) wirft der zwanzigjährige Kant mit jugendlicher Kühnheit die Frage auf nach dem Grunde der drei Ausdehnungen des Raumes und erblickt diesen Grund darin, dass die Seele ihre Eindrücke gemäss dem von Newton entdeckten Gesetze der Anziehung empfängt, also umgekehrt proportional dem Quadrate des Ab-

---

Euklidische Forderung zu beweisen, behandelt aber andrerseits auch die beiden Möglichkeiten, dass die Winkelsumme im Dreieck grösser oder kleiner als zwei Rechte ist. Er bemerkt, dass die erste Möglichkeit auf der Kugel verwirklicht ist, und spricht die Vermuthung aus, dass die andre auf einer imaginären Kugel stattfinde. Er hat auch erkannt, dass es, sobald eine von beiden Möglichkeiten stattfindet, für die Längen ein absolutes Mass giebt. Ueberdies ist er selber offenbar von seinen Versuchen, die Euklidische Forderung zu beweisen, unbefriedigt gewesen, sonst hätte er die Arbeit wohl noch bei seinen Lebzeiten veröffentlicht.

In seiner „Theorie der Parallellinien" (1825) sagt Taurinus: „Die Idee einer Geometrie, in welcher die Summe der Dreieckswinkel kleiner als zwei Rechte wäre, ist mir schon vor vier Jahren mitgetheilt worden (von meinem Oheim, Prof. S. in K., damals noch in M.); ich habe mich aber nicht damit befreunden können und kann es jetzt noch viel weniger." Nach der sehr wahrscheinlichen Vermuthung G. S. Semikolefs, des Verfassers der „Studien über die Lobatschefskijsche Geometrie" meint er damit Professor Schweikart, den Gauss in seinem bekannten Briefe an Schumacher erwähnt (s. „Ueber die Grundlagen der Geometrie", Veröffentlichung der physisch-mathematischen Gesellschaft. Kasan 1893, S. IX).

standes. Später zu der Zeit, wo er, noch unter dem Einflusse Newtons 11
stehend, seine „Allgemeine Naturgeschichte des Himmels" schrieb, theilte er auch die Ansicht Newtons über den Raum, als etwas objektiv Vorhandenes, was allen Dingen vorausgeht, indem es ihr Behälter ist, und in der für die Geometer so interessanten Arbeit: „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume" (1768) benutzt er das Vorhandensein der Paare von symmetrischen Körpern, um zu zeigen, dass der absolute Raum seine selbständige Realität besitzt, nicht nur unabhängig von dem Vorhandensein jeder Materie, sondern sogar als eine nothwendige Bedingung für deren Vorhandensein. Aber schon zwei Jahre später, in der Abhandlung: „De mundi sensibilis atque intelligibilis forma atque principiis" (1770) entwickelt Kant seine Lehre vom Raume als etwas Apriorischem, was aller Erfahrung vorausgeht, einer völlig subjektiven Form unsrer Anschauung, eine Lehre, die auch eine der wichtigsten Theorien der „Kritik der reinen Vernunft" (1781) bildet. Für diese Kantische Lehre besitzt seine Ansicht über die geometrischen Axiome entscheidende Bedeutung. Kant stützt sich auf die augenscheinliche Thatsache, dass diese geometrischen Axiome uns als nothwendig wahr erscheinen, und dass wir uns sogar keinen Raum vorstellen können, der nicht die Eigenschaften besitzt, die in diesen Axiomen zum Ausdruck kommen, und er benutzt diese Thatsache, um zu zeigen, dass die Axiome früher gegeben sind als jede Erfahrung; deshalb ist auch der Raum eine transscendente, von der Erfahrung unabhängige Form der Anschauung.

Kants Lehre, die den Lehren Lockes, Condillacs und andrer Sensualisten gerade entgegengesetzt war, fand zahlreiche Gegner.[1]

Gauss, zum Beispiel, sprach sich mehrmals gegen die Lehre Kants
aus und erklärte: „Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre 12
zu unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzteren eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass wenn die Zahl bloss unseres Geistes Product ist, der Raum auch ausser unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.[2]

---

1) Als einer dieser Gegner erwies sich zum Beispiel Adam Weishaupt, der bekannte Begründer des Illuminatenordens, in seinem Schriftchen: „Zweifel über die Kantischen Begriffe von Zeit und Raum. Nürnberg 1788." Ueber Weishaupt siehe mein Schriftchen: „Bronner und Lobatschefskij. Zwei Episoden aus dem Leben der ersten Professoren an der Universität Kasan." Kasan 1893.

2) Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Leipzig 1880, S. 497.

In den ersten Studentenjahren Lobatschefskijs trat in Russland ein andrer Gegner der Kantischen Lehre vom Raume auf, ein begabter russischer Mathematiker aus dem Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts, Timofej Ossipofskij, Professor an der Universität Charkof, der Uebersetzer von Condillacs Logik. Er that das in der Rede: „Ueber Raum und Zeit."[1]) In seiner Kritik stellt sich Ossipofskij auf den sensualistischen Standpunkt und spricht sich kategorisch für die Objektivität des Raumes aus. „Raum und Zeit sind die Bedingungen für das Dasein der Dinge und existiren in der Natur selbst und an und für sich, nicht aber bloss in unsrer Vorstellung. Der Begriff des Raumes entsteht durch die Eindrücke, die von ihm durch Vermittelung unsrer äusseren Sinne zu unsern inneren Sinnen gelangen."

Es ist kaum möglich anzunehmen, dass der vielseitig gebildete Lobatschefskij gegenüber diesen die Geister der damaligen Zeit bewegenden Fragen theilnahmlos geblieben sein sollte. Auch hat Lobatschefskij durch seine geometrischen Untersuchungen, indem er die Möglichkeit einer streng logischen nichteuklidischen Geometrie nachwies, ein gewichtiges Wort zu der von Kant erhobenen Frage gesprochen. Auf die Lösung, die in der Kritik der reinen Vernunft gegeben worden war, antwortet Lobatschefskij
13 damit, dass er eine der nothwendigen Wahrheiten der Geometrie — die Euklidische Forderung — als ein physisches Gesetz anerkennt, das heisst als etwas durch die Erfahrung Gegebenes, und dass er in astronomischen Beobachtungen die Antwort auf die Frage nach der Wahrheit dieser Forderung sucht.

Am allerklarsten hat Lobatschefskij seinen genialen Gedanken auf der ersten Seite seiner „Neuen Anfangsgründe der Geometrie" formulirt, in den Worten: „Den geometrischen Begriffen selbst ist noch nicht die Wahrheit eigen, die man hat beweisen wollen und die ebenso wie andre physische Gesetze nur durch die Erfahrung bestätigt werden kann, also zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen." Dieser Gedanke steht in geradem Widerspruche zu der Meinung, nach der unser Wissen vom Raume ein absolutes Wissen ist, das zu prüfen und mit der Erfahrung zu vergleichen durchaus nicht nöthig erscheint.

Dieser Lehre von dem absoluten Wissen vom Raume, die einen der Ecksteine der „Kritik der reinen Vernunft" bildet, hat Lobatschefskij einen vernichtenden Schlag versetzt. Vor Lobatschefskij war es möglich zu behaupten, dass wir, während wir von dem Wesen der Erscheinungen, die in

---

1) Reden, gehalten in der feierlichen Versammlung der Universität Charkof, am 30. August 1807.

der Welt vorgehen, nichts wissen und nur die Phänomene sehen, aber die „Dinge an sich" nicht kennen, doch wenigstens in der Geometrie ein absolutes Wissen vom Raume haben, dass dieser überall dieselben Eigenschaften besitzt, hier sowie in ungeheuer grossen Entfernungen, heute sowie gestern und morgen. Nach Lobatschefskij gelten für den Geometer der Gegenwart die von Euklid behandelte Raumform, die von Lobatschefskij behandelte Raumform und die nach Riemann benannte Raumform alle drei als gleich logisch möglich und er kann nicht behaupten, dass er die Eigenschaften des Raumes in ungeheuer grossen Entfernungen von uns kennt; er kann nicht behaupten, darüber etwas zu wissen, welche Eigenschaften der Raum gehabt hat und welche er haben wird.[1])

Aehnlich wie nach den Entdeckungen des Kopernikus, so hat sich auch nach den Untersuchungen Lobatschefskijs der geistige Horizont der Menschheit ausserordentlich erweitert. Die Menschen, die geglaubt hatten, einen absoluten Begriff von dem Weltgebäude zu haben, in dessen Mitte sich die Erde befinde, die von concentrischen Krystallsphären umgeben sei, — nach 14
Kopernikus erkannten sie plötzlich, dass sie auf einem nichtigen Sandkörnchen in einem Meere von Welten lebten. Giebt es eine Gränze für dieses Meer und worin besteht sie? Das sind die Fragen, zu denen das Kopernikanische System führte. Die Untersuchungen Lobatschefskijs führten zu einer naturphilosophischen Frage von nicht geringerer Wichtigkeit, zu einer Frage über die Eigenschaften des Raumes; sind diese Eigenschaften genau dieselben hier bei uns und in jenen entlegenen Welten, von denen das Licht erst in hunderttausenden, ja Millionen von Jahren zu uns gelangt? sind diese Eigenschaften jetzt dieselben, die sie waren, als sich das Sonnensystem aus einem Nebelflecke bildete, und die sie sein werden, wenn sich die Welt dem Zustande der überall gleichmässig vertheilten Energie nähern wird, in dem die Physiker die Zukunft der Welt erblicken? Hierin besteht die Parallele zwischen Kopernikus und Lobatschefskij, die zum ersten Male von Clifford in seiner „Philosophy of the pure sciences[2]) durchgeführt worden ist. Die Benennung „Kopernikus der Geometrie", die für ein slavisches Herz doppelt schmeichelhaft ist, wendet zum Beispiel der hoch bejahrte englische Mathematiker Sylvester auf Lobatschefskij an.[3])

Indem er die Relativität unsrer Kenntnisse von dem Raume behauptet,

---

1) W. K. Clifford, Lectures and Essays, S. 213.

2) Lectures and Essays. Second edition. London 1886, S. 180—243.

3) „I cordially join with you in the hope that our english mathematicians may not be wanting in the manifestation of a honor due to your illustrious compatriot, »the Copernicus of geometry«." (Aus einem Briefe Prof. Sylvesters an den Verfasser der Rede.)

zeigt Lobatschefskij zugleich den Weg, auf dem wir unsre Kenntniss von diesem erwerben und erweitern müssen. Dieser Weg ist der der Erfahrung. In dieser Beziehung erscheint Lobatschefskij als Fortsetzer der Arbeit der grossen Gelehrten und Philosophen: Bacon, Descartes, Galilei und Newton, die, auf apriorische Betrachtungen verzichtend, die Natur zu fragen begannen, in dem Bewusstsein, dass diese, wie Lobatschefskij sagt, unabänderliche und befriedigende Antworten auf die Fragen giebt.[1] Die Untersuchungen Lobatschefskijs beleuchten den Gedanken über die Geometrie, den Newton in der Vorrede zu seinen Principien hingeworfen hat, sie sei ein Theil der Mechanik, der sich auf die mechanischen Wirkungen gründet, die bei Messungen nöthig sind: „Fundatur igitur geometria in praxi Mechanica, et nihil aliud est quam Mechanicae universalis pars illa quae artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat.“

In seiner ganzen wissenschaftlichen Thätigkeit zeigt sich Lobatschefskij als ein hervorragender Vertreter des klaren russischen Verstandes, der nach Klarheit strebt und der den unsichern Weisungen des innern Gefühls und den metaphysischen Spekulationen die auf Erfahrung gegründete wissenschaftliche Wahrheit vorzieht. Oefters spricht Lobatschefskij seine gesunden Ansichten über die Naturphilosophie aus. „In der Natur“, sagt er, „erkennen wir eigentlich nur die Bewegung, ohne die Sinneseindrücke nicht möglich sind. Alle übrigen Begriffe, zum Beispiel die geometrischen, sind künstlich von unserm Verstande erzeugt, indem sie aus den Eigenschaften der Bewegung abgeleitet sind, und deshalb ist der Raum an und für sich, abgesondert[2], für uns nicht vorhanden.“ (Neue Anfangsgründe der Geometrie. Vollständige Sammlung der geometrischen Abhandlungen Lobatschefskijs. Bd. I, S. 227.)

„Ohne Zweifel werden immer die Begriffe zuerst gegeben sein, die wir in der Natur vermittelst unsrer Sinne erwerben. Der Verstand kann und muss sie auf die kleinste Zahl zurückführen, damit sie dadurch der Wissenschaft als feste Grundlage dienen können.“ (Neue Anfangsgründe der Geometrie; a. a. O. S. 231.)

Seiner hohen Achtung vor der Erfahrung hat Lobatschefskij in seiner merkwürdigen Rede „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung“

1) Rede über die wichtigsten Gegenstände der Erziehung. (Kasaner Bote.)

2) Mir scheint, dass das Wort abgesondert in dem Sinne: unabhängig von Bewegung und Messung zu verstehen ist. Die Frage nach den Eigenschaften des Raumes erscheint auf diese Weise als gleichbedeutend mit der Frage nach den Methoden zur Messung. Dieser Gedanke liegt den Ansichten Cayleys und F. Kleins über die Lobatschefskijsche Geometrie zu Grunde, von denen später gesprochen werden wird.

Ausdruck verliehen: „Die Mathematiker haben direkte Hülfsmittel zur Er-
werbung von Kenntnissen eröffnet. Es ist noch nicht lange her, dass wir
diese Hülfsmittel benutzen. Der berühmte Bacon hat sie uns gezeigt. 16
„Hört auf,“ sagte er, „unnütz zu arbeiten und euch zu bemühen, alle
Weisheit aus der Vernunft abzuleiten; befragt die Natur, sie bewahrt alle
Wahrheiten und auf eure Fragen wird sie euch entschieden und befriedigend
antworten.“ Schliesslich hat der Genius Descartes diese glückliche Ver-
änderung hervorgerufen und, Dank seinen Gaben, leben wir bereits in
Zeiten, wo kaum noch ein Schatten der alten Scholastik auf den Uni-
versitäten umgeht.“

Aus dem Gesagten geht klar hervor, dass der Gedanke Lobatschefskijs, eine jener Forderungen Euklids, die Kant für eine nothwendige Wahrheit gehalten hatte, zu verwerfen, die Möglichkeit eines logischen Gebäudes der Geometrie, auch ohne diese Forderung, darzuthun und damit zugleich die Vergeblichkeit aller Anstrengungen sie zu beweisen, dass dieser Gedanke nicht der Einfall eines eigensinnigen nach Originalität strebenden Kopfes war, wie die Mehrzahl der Mathematiker seiner Zeit gedacht hat. Die Aufgabe, die Lobatschefskij löste, war eine Aufgabe, die sowohl die Mathematik als die Philosophie seiner Zeit der Reihe nach gestellt hatten, aber um diese Aufgabe zu erkennen, dazu gehörte die Genialität eines Gauss und eines Lobatschefskij, um sie zum Abschluss zu bringen, dazu gehörten die Beharrlichkeit und Arbeitsamkeit des letzteren. Für uns wird es immer ein Gegenstand andächtiger Bewunderung und hohen patriotischen Stolzes bleiben, dass diese Aufgabe, die durch die geistige Bewegung der hervorragendsten Nationen Europas gestellt worden war, ein Gelehrter gelöst hat, der in Kasan lebte, weit entfernt von den Centren des geistigen Lebens, der niemals Russland verlassen hat und der mit den Denkern und Geometern des westlichen Europas gar nicht in lebhaftem unmittelbarem Verkehre stand.

Die Musse zum Arbeiten, zur zusammenhängenden Entwickelung einer
von Euklids Forderung unabhängigen Geometrie, jener Geometrie, die jetzt
den Namen Lobatschefskijs trägt, gewährte Lobatschefskij der Zeitraum in
der Geschichte der Universität Kasan, der mit dem Namen Magnizkij ver-
knüpft ist. Dieser Zeitraum war für streng wissenschaftliche Arbeiten
nicht günstig. Aber in dieser Zeit, wo sich Lobatschefskijs Kollege auf
dem Katheder, der Professor Nikolskij, der herrschenden Richtung unter-
warf, indem er in seiner Rede „Ueber den Nutzen der Mathematik“ nach
mystischen Deutungen der mathematischen Wahrheiten strebte, trachtet 17
Lobatschefskij in Bemühungen, die einzig und allein die wissenschaftliche
Wahrheit im Auge hatten, danach, sich über die schwer lastende Gegenwart
zu beruhigen und diese zu vergessen.

Im Archiv der Universität Kasan hat man ein interessantes Aktenstück gefunden, aus dem hervorgeht, dass die Arbeiten Lobatschefskijs an der systematischen Entwickelung der Geometrie bereits vor dem Jahre 1823 begonnen haben. In diesem Jahre überreichte er Magnizkij ein von ihm verfasstes Lehrbuch der Geometrie, damit es auf öffentliche Kosten als ein „klassisches" Buch gedruckt werden sollte. Magnizkij übersandte das Buch dem Akademiker Nik. **Fuss**, der sich über die Arbeit sehr streng aussprach und fand, „dass der Verfasser, wenn er glaubt, sie könne als Lehrbuch dienen, dadurch zeigt, dass er keinen rechten Begriff von den Erfordernissen eines Lehrbuchs hat, das heisst, keinen Begriff von der Fülle der geometrischen Wahrheiten, die den Inbegriff eines Elementarkursus der Wissenschaft bilden, von der mathematischen Methode, von der Nothwendigkeit scharfer und deutlicher Erklärungen aller Begriffe, von der logischen Ordnung und der methodischen Vertheilung des Stoffs, von der gehörigen Aufeinanderfolge der geometrischen Wahrheiten, von der unerlässlichen und möglichst rein geometrischen Strenge ihrer Beweise. Von allen diesen nothwendigen Eigenschaften ist in der Geometrie, die ich durchgesehen habe, auch nicht eine Spur."

Aber besonders empört ist Fuss, in Uebereinstimmung mit dem Geiste der Zeit und mit seinem Korrespondenten, darüber, dass der Verfasser das französische Meter bei der Ausmessung gerader Linien als Einheit benutzt und ausserdem unter der Benennung Grad den hundertsten Theil des Viertelkreises als Einheit bei der Ausmessung des Kreisbogens. „Bekanntlich", schreibt Fuss, „ist diese Eintheilung in der Zeit der französischen Revolution erdacht worden, als die Wuth der Nation, Alles früher dagewesene zu vernichten, sich sogar auf den Kalender und die Eintheilung des Kreises erstreckte. Aber diese Neuerung ist nirgends angenommen worden und in Frankreich selbst schon längst wieder aufgehoben in Folge augenscheinlicher Unzuträglichkeiten."

Fuss, der in seiner Antwort so schonungslos verfuhr, konnte nicht voraussehen, dass nach siebzig Jahren die Mathematiker nicht bloss Russ-
18 lands, sondern der ganzen Welt für den ersten Versuch Lobatschefskijs zur Entwickelung der Geometrie das lebhafteste Interesse haben würden. Leider ist diese interessante Handschrift verloren.

Aus dem Briefe von Fuss geht nicht hervor, dass Lobatschefskij in seinem Lehrbuche originelle Ansichten über die Theorie der Parallellinien entwickelt hatte; aber es ist wohl unzweifelhaft, dass Lobatschefskij bereits vor dem Jahre 1823 begonnen hat, sich mit der Geometrie zu beschäftigen. Wahrscheinlich hat Lobatschefskij bald nach der Ueberreichung seines Lehrbuchs der Geometrie, die mit einem Misserfolg endete, sein System der Geometrie ausgearbeitet, aber mit der Veröffentlichung wartete er einige Zeit. Es scheint kein zufälliges Zusammentreffen zu sein, dass am 8. Februar 1826 der Generalmajor Sheltuchin die Revision der Universität Kasan begann, die unter dem Vorwande einer „Erneuerung" in vollständige Zerrüttung gebracht worden war, und dass nach Verlauf dreier Tage am 11. Februar 1826 die physisch-mathematische Abtheilung die von Lobatschefskij vorgelegte Schrift: „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles" einer Prüfung unterzog.

Die Revision Sheltuchins hatte die Entfernung Magnizkijs zur Folge. Für die Universität Kasan begann damit eine andere, lichtere Zeit, wo man Männer brauchte, die der Wissenschaft ergeben waren und die Universität lieb hatten. Das Vertrauen der Kollegen richtet sich auf Lobatschefskij und vom 3. Mai 1827 an nimmt dieser neunzehn Jahre hindurch die erste Stelle an der Universität Kasan ein und dient ihr uneigennützig und unermüdlich.

Der junge Rektor (Lobatschefskij war beim Antritt nur dreiunddreissig Jahre alt) benutzt die erste günstige Gelegenheit, um offen seine Ansichten über die Erziehung der Jugend und über die Ziele der Universität zu zeigen, Ansichten gerade entgegengesetzt denen, die während einer Reihe von Jahren an dieser herrschend gewesen waren, und in der feierlichen Versammlung des 5. Juli 1828 hielt er seine merkwürdige Rede: „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung," auf die ich mir jetzt erlaube Ihre Aufmerksamkeit hinzulenken.

Die Rede beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung der Er- 19
ziehung.

„Ich stelle mir vor, in welchem Zustande sich ein Mensch befinden muss, der der menschlichen Gesellschaft entfremdet, ganz dem Ermessen der wilden Natur überlassen ist. Sodann richte ich meine Gedanken auf einen Menschen, der inmitten der wohlgeordneten, gebildeten Bürgerschaft des letzten aufgeklärten Jahrhunderts durch tiefe Kenntnisse seinem Vaterlande zur Ehre und zum Ruhme gereicht. Welcher Unterschied! Welcher unermessliche Abstand trennt den einen vom andern. Diesen Unterschied hat die Erziehung hervorgebracht. Sie beginnt von der Wiege an; zuerst wird sie durch die blosse Nachahmung erworben, allmählich entwickeln sich Verstand, Gedächtniss, Einbildungskraft, Geschmack für das Schöne, es erwacht die Liebe zu sich selbst und zum Nächsten, die Liebe zum Ruhme, der Sinn für die Ehre, der Wunsch das Leben zu geniessen. Alle Fähigkeiten des Verstandes, alle Gaben, alle Leidenschaften, Alles das verwerthet die Erziehung und stellt es in den Dienst eines wohlgeordneten Ganzen, und der Mensch, als wäre er von Neuem geboren, zeigt sich als das Geschöpf in seiner Vollkommenheit.“ Aber die Erziehung darf die Leidenschaften des Menschen und die ihm angebornen Begierden nicht unterdrücken und ausrotten. „Alles das muss bei ihm erhalten bleiben: sonst würden wir seine Natur verderben, ihr Gewalt anthun und sein Glück schädigen.“ „Es ist nichts gewöhnlicher, als über die Leidenschaften klagen zu hören, aber wie richtig hat Mably[1]) gesagt: je stärker die Leidenschaften, um so nützlicher sind sie für die Gesellschaft; schädlich sein kann nur ihre Richtung.“

„Aber die blosse Verstandesbildung ist noch nicht der Abschluss der Erziehung. Während der Mensch seinen Verstand mit Kenntnissen bereichert, muss er auch noch verstehen lernen, das Leben zu geniessen. Ich meine damit die Bildung des Geschmacks. Leben heisst: empfinden — das Leben geniessen: unaufhörlich etwas Neues empfinden, was uns daran erinnert, dass wir leben.... Nichts hemmt den Strom des Lebens so sehr wie die Unwissenheit; wie ein verödeter, geradliniger Weg begleitet sie das Leben von der Wiege bis zum Grabe. In den niederen Klassen erquicken noch die anstrengenden Arbeiten für des Lebens Nothdurft abwechselnd mit der Erholung den Geist des Landmannes, des Handwerkers. Ihr aber, deren Dasein ein ungerechtes Schicksal andern als eine schwere Last auferlegt hat, ihr, deren Geist abgestumpft, deren Gefühl erstickt ist, ihr geniesst das Leben nicht. Für euch ist die Natur todt, die Schönheiten der Poesie fremd, die Baukunst ihrer Reize und ihrer Herrlichkeiten entblösst, die Weltgeschichte gleichgültig. Ich tröste mich mit dem Gedanken, dass aus unsrer Universität derartige Erzeugnisse vegetabilischer Natur nicht hervorgehen werden; sie werden nicht einmal hierher kommen, wenn sie unglücklicherweise zu einem solchen Schicksal geboren sind. Sie werden nicht herkommen, wiederhole ich, denn hier weilt die Liebe zum Ruhme, das Gefühl für Ehre und inneres Verdienst.“

„Die Natur, die den Menschen bei seiner Geburt so freigebig beschenkt hat, scheint noch nicht zufrieden gewesen zu sein und so hat sie einem jeden den Wunsch eingeflösst, die andern zu übertreffen, bekannt zu sein, ein Gegenstand der Bewunderung zu sein, berühmt zu werden, und auf diese Art hat sie dem Menschen die Pflicht auferlegt, selbst für seine Vervollkommnung zu sorgen. In unaufhörlicher Thätigkeit strebt der Geist, Ehrenbezeugungen zu erringen, sich emporzuheben und das ganze Menschengeschlecht schreitet von Vervollkommnung zu Vervollkommnung — und wo ist ein Ende abzusehen?“

1) [Gabriel Bonnot de Mably (1709—1785), französischer Philosoph, Condillacs Bruder.]

„Wir wollen das Leben hochschätzen, solange es seine Würde nicht verliert. Mögen Vorbilder in der Geschichte, der wahre Begriff von der Ehre, Liebe zum Vaterlande, die in jungen Jahren erweckt ist, bei Zeiten den Leidenschaften die edle Richtung und die Kraft geben, die uns erlauben, über die Schrecken des Todes zu siegen.“

Indem er sich zur Moral als dem wichtigsten Gegenstande der Erziehung wendet, verweilt Lobatschefskij besonders bei der Liebe zum Nächsten. „Duclos, Rochefoucauld, Knigge haben erklärt, auf welche Weise die Selbstliebe die versteckte Triebfeder aller Handlungen der Menschen in der Gesellschaft zu sein pflegt. Wer, frage ich, hat vollständig darzulegen verstanden, welche Pflichten aus der Liebe zum Nächsten entspringen?“[1])

Die ganze Rede, aus der ich Bruchstücke angeführt habe, athmet, wie 21
man sieht, feurigen Idealismus, Liebe zur Universität, Ehrfurcht vor der menschlichen Natur, vor der menschlichen Vernunft, vor der menschlichen Würde.

Den schönen Worten der Rede entsprach auch ein schönes Leben, ganz erfüllt von der Arbeit für die Entwickelung der Wissenschaft, für das Wohl der heimischen Universität. Als das werthvollste Ergebniss dieses Lebens erschienen die geometrischen Untersuchungen, von deren Bedeutung für Mathematik und Naturphilosophie schon die Rede war. Aber unser grosser Geometer war nicht ausschliesslich Geometer, wie es Steiner oder Staudt waren, und seine Arbeiten in der Algebra und Analysis haben ebenfalls nicht geringes Interesse. Vorhin ist erwähnt worden, dass sich Lobatschefskij unter der Anleitung von Bartels mit dem Studium des berühmten Gaussschen Werkes: „Disquisitiones arithmeticae“ beschäftigt hatte. In diesem Werke macht Gauss, um seine Untersuchungen über die Zahlentheorie zu krönen, eine merkwürdige Anwendung von ihnen. Die alten Geometer hatten die bekannten Konstruktionen für das regelmässige Dreieck, Sechseck, Zehneck gegeben, mit Hülfe von Zirkel und Lineal. Gauss zeigte, dass es eine unendliche Menge andrer regelmässiger Vielecke giebt, die ebenfalls mit Hülfe von Zirkel und Lineal konstruirt werden können.

Die erste Arbeit Lobatschefskijs, die er 1813 der physisch-mathematischen Abtheilung vorlegte: „Ueber Auflösung der algebraischen Gleichung $x^n - 1 = 0$“, bezog sich ausdrücklich auf diese Frage. Später kam Lobatschefskij auf dieselbe Frage zurück in dem Aufsatze: „Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte

1) In meinem vorhin erwähnten Schriftchen: „Bronner und Lobatschefskij“ habe ich als eine Vermuthung den Gedanken ausgesprochen, dass Lobatschefskij seine moral-philosophischen Ansichten wesentlich dem Einflusse seines Lehrers Bronner verdankt.

Grad durch 8 theilbar ist“ und fügte zu der Theorie von Gauss eine wichtige Ergänzung hinzu.

Schon Ende der zwanziger Jahre, so muss man annehmen, dachte Lobatschefskij daran, ein Lehrbuch der Algebra für Gymnasien zu schreiben. Später führte er diese Absicht aus und entschloss sich, einen Leitfaden für Lehrer und ein Lehrbuch für Hörer an der Universität abzufassen. Ein solches Buch gab er in der That 1834 heraus unter dem Titel: „Die
22 Algebra oder die Rechnung des Endlichen.“ Das Lehrbuch Lobatschefskijs unterscheidet sich vortheilhaft von den gleichzeitigen Lehrbüchern der Algebra, nicht nur von den russischen sondern auch von den ausländischen, und zwar durch seine systematische Anordnung und durch die Strenge in der Erklärung der Grundbegriffe. „In allen Zweigen der mathematischen Wissenschaften,“ so schreibt er im Vorwort, „erwirbt man die ersten Begriffe leicht, aber immer mit Mängeln behaftet. Schliesslich muss man aber einmal wieder zu den Grundlagen zurückkehren und dann ist es angebracht, auf vollkommene Strenge Gewicht zu legen.“ Nach der Ansicht Lobatschefskijs „beginnt erst in der Algebra die Mathematik mit der ganzen Schärfe der Begriffe und mit der ganzen Weite des Gesichtskreises; während die Arithmetik bloss den Anfang bildet und nur zur Vorbereitung und zur Uebung dient.“ Deshalb beginnt Lobatschefskij seine Algebra von den ersten Begriffen der Arithmetik aus, von den Grundgesetzen der arithmetischen Operationen und giebt eine systematische Entwickelung der Wahrheiten der reinen Mathematik. Er zeigt sich dabei als ein würdiger Vorgänger des grossen Systematikers der Mathematik unsrer Zeit, des deutschen Gelehrten Weierstrass. Als ein charakteristischer Zug der Algebra Lobatschefskijs erscheint auch ihre bemerkenswerthe Reichhaltigkeit. So bringt Lobatschefskij in der Algebra zum Beispiel die Lehre von den trigonometrischen Funktionen, indem er für diese Funktionen eine rein analytische Erklärung giebt; in dieser Beziehung hat sein Lehrbuch den Vorzug sogar von den klassischen Werken Eulers: „Introductio in Analysin infinitorum,“ und Cauchys: „Analyse algébrique.“ In seinem Lehrbuche setzt Lobatschefskij unter Anderm auch seine eigenthümliche Methode auseinander, das Verschwinden oder die Konvergenz unendlicher Reihen festzustellen. Diese Methode entwickelte er später in den Abhandlungen:

1) Ueber das Verschwinden trigonometrischer Reihen (Gelehrte Schriften der Kaiserlichen Universität Kasan für 1834).

2) Eine Methode, das Verschwinden unendlicher Reihen festzustellen und sich dem Werthe von Funktionen sehr grosser Zahlen zu nähern (Gelehrte Schriften für 1835).

3) Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen. [Deutsch, Kasan 1841.]

Schon in der ersten dieser Abhandlungen berührt Lobatschefskij die 23 grundlegende Frage der Differentialrechnung, die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit, und eilt hier ebenso wie bei der Frage über die Grundlagen der Geometrie seinen Zeitgenossen um ein halbes Jahrhundert voraus. Die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts hatten die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit nicht berührt, weil sie stillschweigend voraussetzten, dass jede stetige Funktion von selber auch eine Ableitung besitze. Ampère hatte versucht, diese Eigenschaft zu beweisen, aber sein Beweis zeichnet sich nicht durch Strenge aus. Die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit zog in den siebziger Jahren die Aufmerksamkeit auf sich, als Weierstrass ein Beispiel einer Funktion gab, die in einem bestimmten Intervalle stetig war und zu gleicher Zeit in diesem Intervalle keine bestimmte Ableitung hatte (nicht differentiirbar war). Indessen hatte Lobatschefskij schon in den dreissiger Jahren auf die Nothwendigkeit hingewiesen, zwischen „allmählicher Aenderung" (nach unsrer Ausdrucksweise: Stetigkeit) und zwischen „Ununterbrochenheit" (jetzt: Differentiirbarkeit) der Funktionen zu unterscheiden. Besonders scharf spricht er diesen Unterschied aus in seiner „Methode, das Verschwinden unendlicher Reihen festzustellen u. s. w." „Eine Funktion ändert sich allmählich, wenn ihre Zuwachse zugleich mit den Zuwachsen der Veränderlichen zur Null herabsinken. Eine Funktion ist ununterbrochen, wenn das Verhältniss zweier solcher Zuwachse bei deren Verkleinerung unmerklich in eine neue Funktion übergeht, die mithin der Differentialquotient sein wird. Die Integrale müssen immer derart in Intervalle zerlegt werden, dass die Elemente unter jedem Integralzeichen sich immer allmählich ändern und ununterbrochen bleiben."

Ausführlicher geht Lobatschefskij auf diese Frage ein in der Arbeit „Ueber das Verschwinden trigonometrischer Reihen", in der auch sehr interessante allgemeine Betrachtungen über Funktionen enthalten sind. „Wie es scheint," so schreibt er, „sind das zwei Wahrheiten, an denen man nicht zweifeln kann, dass sich nämlich Alles in der Welt durch Zahlen darstellen lässt und dass jede Veränderung und Beziehung darin durch eine analytische Funktion dargestellt wird. Indessen erlaubt eine weite Auffassung der Theorie das Bestehen einer Abhängigkeit nur in dem Sinne, 24 dass man die Zahlen, mit einander verbunden, als zusammen gegeben annimmt. In seiner Funktionenrechnung (Calcul des functions), durch die er die Differentialrechnung ersetzen wollte, hat Lagrange die Allgemeinheit der Begriffe in demselben Maasse beeinträchtigt, in dem er an Strenge der Behandlung zu gewinnen dachte." (Gelehrte Schriften der Universität Kasan. 1834. Heft II, S. 183.)

Ich will die andern Arbeiten von Lobatschefskij, über die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und über die Mechanik unerwähnt lassen. Alle Arbeiten Lobatschefskijs legen von seiner merkwürdigen Beherrschung des Rechnungsapparates Zeugniss ab und beweisen, dass sein mathematischer Genius in die feinsten Fragen der Analysis eindrang.

Seine Liebe zur Wissenschaft beschränkte sich nicht bloss auf die Mathematik, diesen „Triumph des menschlichen Verstandes." Sie erstreckte sich auf alle Zweige des Wissens: Botanik, Chemie, Anatomie zogen ihn ebenso an und waren ihm gut bekannt.

Aber ganz besonders liebte Lobatschefskij die Erfahrungswissenschaften. Nicht umsonst spricht er in seiner Rede an einer vorhin erwähnten Stelle mit solchem Eifer von der Bedeutung der Erfahrung.

Wir finden Lobatschefskij zum Beispiel als einen thätigen Theilnehmer an Beobachtungen über die Temperatur des Erdbodens. Zu diesem Zwecke wurde auf dem Hofe der Universität ein Brunnen angelegt, in dem bis zu einer Tiefe von 15 Sashen [32 m] gegen zwanzig Thermometer aufgestellt wurden. 1833 und 1834 belief sich die Zahl der Beobachtungen jährlich auf 3050. Die Beobachtungen hörten im Jahre 1835 auf, weil in dem Brunnen ungewöhnliche Mengen Kohlensäure auftraten; aber 1841 erneuert Lobatschefskij die Beobachtungen und richtet seine Aufmerksamkeit besonders auf die Temperatur der vegetabilischen Bodenschicht; für die Beobachtungen über die Temperatur dieser Schicht, deren Wichtigkeit für die Landwirthschaft erst in der letzten Zeit anerkannt zu werden beginnt, ersinnt Lobatschefskij selber ein Metallthermometer von besondrer Konstruktion.

Ebensolches wissenschaftliches Interesse zeigte Lobatschefskij auch für die Astronomie.

25 Im Jahre 1842, am 26. Juli, war in einem Theile des europäischen Russland eine totale Sonnenfinsterniss sichtbar. Der Expedition nach Pensa, die von der Universität Kasan ausgerüstet wurde und die aus dem Astronomen Lapunof und dem Professor der Physik, Knorr, bestand, schloss sich auch Lobatschefskij an. Nach der Rückkehr liess Lobatschefskij einen ungewöhnlich ausführlichen Bericht drucken. In diesem Berichte Lobatschefskijs ist unter Andern eine Sammlung von Mittheilungen über die wunderbare Erscheinung der Sonnenkorona enthalten, die nur während einer Sonnenfinsterniss zu beobachten ist, und es werden die verschiedenen Theorien, die über diese Frage bestehen, auseinandergesetzt und erörtert. Lobatschefskij erklärt sich weder für die Theorie, die zur Erklärung der Sonnenkorona das Vorhandensein einer Sonnenatmosphäre annimmt, noch für die Theorie, die diesen Ring durch Beugung der Strahlen in der Nähe der Oberfläche des Mondes erklärt. Bei der Besprechung der zweiten Theorie setzt Lobat-

schefskij seine Ansicht über die Lichttheorien auseinander. „Die Wellenlehre,“ sagt er, „kann man eigentlich nicht als Theorie bezeichnen, sondern nur als eine Darstellung der Erscheinungen, die man erklären will. Die wahre Theorie muss in einem einfachen, einzigen Principe bestehen, aus dem sich die Erscheinung in aller ihrer Mannigfaltigkeit als nothwendige Folge ergiebt. Von Wellen reden, heisst die ganze Betrachtung auf etwas gründen, was im strengen Sinne gar nicht vorhanden ist, ebenso wie wir von Linien und Flächen reden, während es doch in der Natur nur Körper giebt.“

Unbefriedigt von der Wellentheorie spricht Lobatschefskij den Gedanken aus, es sei möglich, die Wellentheorie und die Emanationstheorie mit einander zu vereinigen, indem man annehme, dass die Lichttheilchen an ihrer Ausgangsstelle nicht bloss eine Translations-, sondern auch eine Vibrationsbewegung erhalten. Die erste ist die Ursache des Leuchtens und der Wärme; die zweite erklärt die Entstehung der Farben und aller Erscheinungen des polarisirten Lichtes. Nach seiner Ansicht kann die Newtonsche Emanationstheorie bestehen bleiben, wenn man nur hinzufügt, dass „der Strom des Aethers, wenn er auf seinem Wege Hindernisse trifft, eine Welle bildet, ebenso wie das Wasser in einem Flusse, das einen Damm getroffen hat,
sich als Woge erhebt und sich in zwei Wellen theilt, zwischen denen ein 26
leerer Raum entsteht; schliesslich vereinigt sich das Wasser wieder in einen allgemeinen Strom. Oder es ist ebenso wie bei der Luft, die, ein Hinderniss treffend, gleichfalls Wellen schlägt und sich in zwei Ströme theilt, mit einem leeren Raume dazwischen; die Wellenbewegung bringt hier bisweilen einen Schall hervor und hinter dem leeren Raume erneuert sich das frühere Fliessen. Das Fallen des Wassers hinter dem Damm und der leere Raum, den die Luft hinter der Wand bildet, entsprechen folgerichtig dem Schatten, der hinter undurchsichtigen Körpern geworfen wird; das Streben des Wassers oder der Luft, sich von zwei Seiten her zu vereinigen, stellt uns die Ablenkung des Lichtes nach der Mitte des Schattens dar.“

Zur Erscheinung der Sonnenkorona zurückkehrend, erklärt Lobatschefskij diese dadurch, dass unsre Atmosphäre, wenn sie vom Lichte berührt wird, selbst zu leuchten anfängt, und dass wir in dem Ringe um den Mond herum das eigene Licht der oberen Luftschichten erblicken, ebenso wie diese feine Hülle der Erde für die Bewohner der übrigen Planeten und des Mondes in hellem Lichte erglänzen muss.

Ueber die Mannigfaltigkeit der wissenschaftlichen Beschäftigungen Lobatschefskijs müssen wir uns um so mehr verwundern, als seine eifrige Thätigkeit als Professor und ausserdem als Rektor der Universität schon allein seine ganze Zeit in Anspruch nehmen konnte.

Vom Jahre 1820 an zum Beispiel befand sich an der Universität

Kasan kein einziger mehr von den deutschen Lehrern Lobatschefskijs. 1816 geht Littrow weg und stirbt Renner, ein Jahr später nimmt Bronner auf sechs Monate Urlaub, reist nach der Schweiz und kehrt nicht wieder nach Kasan zurück. 1820 vertauscht Bartels die Professur in Kasan mit einer in Dorpat. In der physisch-mathematischen Abtheilung, die kurz zuvor eine Fülle wissenschaftlicher Kräfte besessen hatte, verbleiben Lobatschefskij, Simonof und Nikolskij. Aber der zweite von diesen wird bald zu der Weltumsegelung mit Bellingshausen entsendet und Nikolskij widmet sich der Angelegenheit des Universitätsbaues. Die ganze Last des Unterrichts liegt auf Lobatschefskij. Er trägt die gesammte reine Mathematik, die Physik und die Astronomie vor.[1])

Nach der Rückkehr Simonofs von seiner Weltreise hörte Lobatschefskij auf die Astronomie zu lesen, dafür übernahm er aber die Vorlesungen über Mechanik und mathematische Physik.

Erst in der Mitte der dreissiger Jahre, als die physisch-mathematische Facultät Knorr als Professor der Physik erhielt und als Professor der Mechanik den vielen von uns noch persönlich bekannten, ehrwürdigen

1) Ich führe als Beispiel ein Bruchstück an aus dem Plane der Vorlesungen und Lehrgegenstände an der Kaiserlichen Universität Kasan, vom 17. August 1824 bis zum 28. Juni 1825. Nikolaj Lobatschefskij, Dekan der physisch-mathematischen Abtheilung, ordentlicher Professor der reinen Mathematik, kündigt

a) Aus dem Gebiete der reinen Mathematik für die Studenten der ersten Abtheilung Folgendes an: Ueber die Eigenschaften der ganzen Zahlen, über imaginäre Potenzen, über die Wurzeln der Gleichungen, Elemente der Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie nach eigenen Heften; für die Studenten der zweiten Abtheilung: Analytis he Geometrie, Differenzenrechnung, Anfangsgründe der Differentialrechnung nach dem Leitfaden von Lacroix; für die Studenten der dritten Abtheilung: Integral- und Variationsrechnung, Anwendung der Analysis auf Geometrie, die ersten beiden nach Lacroix, die letztere nach Monge.

b) Aus dem Gebiete der Physik für die Studenten der ersten Abtheilung: Grundlagen der Physik, die Untersuchungsmethoden in dieser Wissenschaft, über die anziehenden und die abstossenden Kräfte, die Anschauungen der Physiker über die Körper, die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, über die Elasticität der Körper und über die Verdampfung der Flüssigkeiten. Für die Studenten der zweiten und dritten Abtheilung: Ueber Elektricität, Magnetismus, Licht und Wärme, wobei er in seinem Unterrichte das Werk Biots zu Grunde legt: Traité complet de Physique, zugleich mit Benutzung andrer Schriftsteller.

c) Aus dem Gebiete der Astronomie wird er den Studenten der dritten Abtheilung sphärische und theoretische Astronomie anbieten nach Anleitung der Werke von Delambre.

Im Jahre 1826—27 las er ausser den Vorlesungen über reine Mathematik noch Statik und Mechanik der festen und der flüssigen Körper nach Lagrange und Poisson und mathematische Physik nach Fourier, Laplace, Poisson und Fresnel.

P. J. Kotjelnikof, konnte sich Lobatschefskij auf den Unterricht in der reinen Mathematik beschränken.[1])

Noch nicht zufrieden mit dem obligatorischen Unterrichte an der Universität, hielt Lobatschefskij mehrmals öffentliche Vorlesungen über Physik. Eine dieser Vorlesungen behandelte die Theorie der chemischen Trennung und Zusammensetzung der Körper durch die Wirkung der Elek- 28
tricität und war von Versuchen begleitet. Für den Handwerkerstand hielt er 1839—1840 einen besonderen populären Kursus der Physik unter dem Namen: „Volksthümliche Physik".

Ueber die Methode, die Lobatschefskij beim Halten der Vorlesungen befolgte, hat sein begabter Schüler und Nachfolger auf dem Lehrstuhle, Professor A. F. Popof, Erinnerungen hinterlassen. Nach diesen Erinnerungen „verstand es Lobatschefskij, im Hörsaale scharfsinnig oder hinreissend zu sein, je nach dem Gegenstande seines Vortrags. Im Allgemeinen glich sein gesprochener Stil dem geschriebenen nicht. Während sich seine Abhandlungen durch einen knappen und nicht immer klaren Stil auszeichneten, liess er es sich im Hörsaale angelegen sein, die Auseinandersetzungen mit aller Klarheit zu geben, er liebte es aber mehr, selbst zu lehren, als die Schriften andrer auszulegen, indem er es den Zuhörern überliess, sich selbst mit der gelehrten Litteratur bekannt zu machen. Seine öffentlichen Vorlesungen über Physik zogen ein zahlreiches Publikum in den Hörsaal, und die Vorlesungen für einen auserwählten Zuhörerkreis, in denen Lobatschefskij seine neuen Elemente der Geometrie entwickelte, müssen mit Fug und Recht als äusserst scharfsinnig bezeichnet werden."

Wie ernst es Lobatschefskij bis zum Ende seines Lebens mit seinen Pflichten nahm, dafür zeugt seine gedruckte, ausführliche und auch an selbständigen Ergebnissen reiche Besprechung der Doktordissertation A. F. Popofs: „Ueber die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik, nachdem man sie auf lineare Form gebracht hat." Kasan 1845. Der Veröffentlichung der Urtheile über die Dissertationen legte Lobatschefskij sehr grosse Bedeutung bei, und in seiner Eigenschaft als Verwalter des Kasaner Lehrbezirks setzte er dem Minister für Volksaufklärung seine Ansicht auseinander, dass jeder Doktordissertation eine gedruckte, ausführliche Besprechung beigelegt werden müsse. Obgleich ihm anheim gestellt wurde,

1) Im Jahre 1833—34 las Lobatschefskij mit Benutzung der Werke von Cousin, Lagrange und Lacroix für die Studenten des zweiten Kurses: Integration der Funktionen, für die des dritten Kurses: Integration der Differentialgleichungen mit einer Veränderlichen und für die Studenten des vierten Kurses: Integration der partiellen Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Diese Kurse behielt er bis zum Ende seiner Professorenthätigkeit bei.

nach seinem Ermessen zu handeln, zog er doch vor, über diesen Punkt die Ansicht des Senates der Universität Kasan zu hören. Der Senat verhielt sich dem Plane Lobatschefskijs gegenüber ablehnend, indem er der Ansicht war, eine solche Veröffentlichung dürfe, da man sie dem Urtheile des Publikums gegen den Willen des Verfassers aussetze und daher von diesem besondere Strenge verlange, die zuweilen für die Doktoranden lästig sei,
29 nicht als eine beständige Pflicht auferlegt werden, sondern müsse dem eigenen Ermessen und dem Wunsche der Professoren überlassen werden, die diese Beurtheilungen abfassten.“ In seinem Antwortschreiben erklärte Lobatschefskij dem Senat, „dem Urtheile des Publikums ist ein Verfasser bei jeder von ihm veröffentlichten Arbeit gegen seinen Willen ausgesetzt. Wenn daher der vom Senate angeführte Grund durchschlagend wäre, so wäre das ein Zeichen, dass die Professoren beabsichtigten, ihre Arbeiten nicht drucken zu lassen.“ Aber angesichts des Widerstandes des Senats gegen die von ihm vorgeschlagene Maassregel beschränkte sich Lobatschefskij auf das Anerbieten: „jedesmal ausführlich die Gründe anzugeben, die ihn veranlassten, an der Veröffentlichung der ganzen Beurtheilung der Dissertation festzuhalten.“

An strenge Erfüllung seiner Pflichten gewöhnt, wie das aus dem eben angeführten Zwischenfalle hervorgeht, und von dem Wunsche beseelt, ebensolche Pflichterfüllung auch bei andern zu finden, bethätigte Lobatschefskij auch bei der Erfüllung seiner Rektorpflichten die ganze Energie, die ihn auszeichnete, die ganze Unermüdlichkeit in der Arbeit, die um so nöthiger war, als gerade in die Zeit seines Rektorats die Reorganisation der Universität fiel, die in dem vorhergehenden Zeitraume ganz in Verwirrung gerathen war, und ausserdem die Erbauung vieler Gebäude unsrer Universität (des physikalischen Kabinets, der Bibliothek, der Anatomie und des Observatoriums).

Ein unermüdlicher und energischer Verwaltungsmann, der auf alle Einzelheiten des ökonomischen Lebens der Universität einging, der sogar die Baukunst studirte, um den Bau der Gebäude mit Erfolg beaufsichtigen zu können, beschäftigte sich Lobatschefskij doch mit besondrer Vorliebe mit den Hülfsmitteln und den äusseren Zeichen des geistigen Lebens der Universität, mit ihrer Bibliothek und mit ihrer Zeitschrift.

Die Bibliothek befand sich in vollständiger Unordnung, als Lobatschefskij (am 8. Okt. 1825) die Pflichten des Bibliothekars übernahm. Drei Jahre unermüdlicher, energischer Arbeit brachten die Bibliothek in Ordnung; es wurde ein vollständiges Inventar der Bibliothek aufgenommen, Kataloge hergestellt, alle ihre Lücken ermittelt. Lobatschefskij liebte die Bibliothek so sehr, dass er die Pflichten des Bibliothekars auch dann nicht

aufgab, als er Rektor wurde und sie erst im Jahre 1835 einem andern 30
überliess.

Die Universität Kasan hatte seit 1812 ihr Organ, das anfangs „Kasaner Nachrichten“ hiess, nachher „Kasaner Bote“. Aber dieses Organ besass ganz und gar nicht den Charakter einer gelehrten Zeitschrift: Originalaufsätze gelehrten Inhalts waren unter Aufsätzen vollständig andern Charakters versteckt, unter Uebersetzungen und litterarischen Aufsätzen, und waren mit politischen Nachrichten und obrigkeitlichen Verordnungen untermischt. Auf Lobatschefskijs Veranlassung wurde diese Zeitschrift seit 1834 durch die „Gelehrten Schriften“ ersetzt.

Die Gedanken, die Lobatschefskij bei dieser Umgestaltung leiteten, sind in dem Vorworte zu dem ersten Hefte der „Gelehrten Schriften“ auseinandergesetzt. Das Vorwort beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung des Buchdruckes, dieser zweiten Gabe des Wortes, dank der „ein Gedanke, der abends im Geiste eines Menschen entstanden ist, morgens auf dem Papiere tausendmal wiederholt und so an allen Enden der bewohnten Erde verbreitet wird. So ergiesst ein Funke, der sich an einem Punkte entzündet hat, seine Strahlen augenblicklich auch in einem weiten Umkreise. So verbreitet sich das Licht des Geistes, dieses Abbild des Tageslichtes, und vermag zu leuchten. So können Männer, die den Wissenschaften ergeben sind, dem Wunsche nicht widerstehen, ihre Entdeckungen, ihre Meinungen und Erläuterungen aufzuschreiben und drucken zu lassen.“ Aber ebenso wie es „in jedem aufgeklärten Reiche zwei Arten der Bildung giebt, eine allgemeine, die man als die volksthümliche bezeichnen kann, und eine andre, die der gelehrten Welt gehört,“ so muss es auch zwei Arten von periodischen Veröffentlichungen geben. „Die einen müssen einen mannigfaltigen Inhalt haben, wie es ja auch bei der Volksbildung sein muss, anziehend durch seine Neuheit und verlockend durch ein Gemälde des Lebens der Gegenwart, durch wahrheitsgetreue Schilderung der Leidenschaften und Gefühle.“ „Höhere gelehrte Anstalten, Akademien und Universitäten sollen keine solchen Zeitschriften herausgeben; sie müssen eine andre Pflicht übernehmen.“ Diese andre Pflicht ist die Herausgabe einer rein gelehrten Zeitschrift. Eine Zeitschrift dieser Art sind auch unsre
„Gelehrten Schriften“ von Anfang an gewesen. Der erste Aufsatz des 31
ersten Heftes: „Die Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte Grad durch acht theilbar ist“ stammt von Lobatschefskij.

Von der rastlosen Arbeit des Gelehrten, des Professors und Rektors suchte Lobatschefskij Erholung in der Liebe zur Natur, in bescheidenen landwirthschaftlichen Beschäftigungen. Sechzig Werst [64 km] von Kasan, an der Wolga stromaufwärts, liegt ein kleines Dorf „Belowolshskaja Slobodka", das Lobatschefskij gehörte; hier legte er einen schönen Garten an, und noch heutigen Tages hat sich darin ein Cedernhain erhalten. Nach einer rührenden Ueberlieferung, die seine Familie bewahrt hat, sagte Lobatschefskij, als er die Cedern pflanzte, schwermüthig, er werde deren Früchte nicht erleben; seine Voraussagung hat sich erfüllt: die ersten Cedernnüsse wurden im Todesjahre Lobatschefskijs gepflückt, aber erst nach seinem Tode.

Aber auch bei der Beschäftigung mit dem Gartenbau und der Landwirthschaft strebte sein forschender Geist danach, Neuerungen einzuführen und mit dem Schlendrian der in den vierziger Jahren üblichen gutsherrlichen Wirthschaft zu brechen. Bei seinem Besitzthume legte er eine Wassermühle an und erfand ein eignes Verfahren zur Herstellung von Mühlsteinen, auch kaufte er Guano auf zum Düngen. Besondere Aufmerksamkeit widmete er dem Gartenbau und der Schafzucht. Lobatschefskij brachte Merinoschafe auf sein Besitzthum, die er aus dem Erlös für einen Brillantring anschaffte, den er vom Kaiser Nikolaus erhalten hatte, und für seine Verbesserungen bei der Bearbeitung der Wolle wurde er durch die silberne Medaille der Kaiserlichen Landwirthschaftlichen Gesellschaft zu Moskau belohnt. Noch nicht zufrieden mit der Anwendung seiner wissenschaftlichen Kenntnisse in der eigenen Wirthschaft, wusste Lobatschefskij ausserdem auch andre Landwirthe des Gouvernements Kasan anzuregen und wurde eins der eifrigsten Mitglieder der 1839 zu Kasan eröffneten Kaiserlich Kasanischen Oekonomischen Gesellschaft, in der er ungefähr fünfzehn Jahre lang das Amt des Vorsitzenden einer ihrer Abtheilungen einnahm.

Die ernstliche Hingabe an so zahlreiche Beschäftigungen machte Lobatschefskij verschlossen, für den Verkehr unzugänglich und wortkarg; er
32 erschien finster und streng. Man findet das oft bei Leuten, die in ihrer Jugend feurig und stürmisch sind, die aber gerade wegen ihres Feuers sich häufiger als andre den Stürmen des Lebens aussetzen. Solche Lebensstürme, die geeignet sind, den Charakter stark zu beeinflussen, hat es, wir wissen das, auch im Leben Lobatschefskijs gegeben.

Aber unter der strengen, fast mürrischen Aussenseite verbarg sich wahrhafte „Liebe zum Nächsten", ein gutes Herz, Theilnahme für alles redliche Streben, brennende Liebe, ja ein wahrhaft väterliches Verhältniss zur studirenden Jugend und zu allen begabten jungen Leuten. Ein junger Handlungsdiener, der hinter dem Ladentisch ein mathematisches Buch liest, zieht Lobatschefskijs Aufmerksamkeit auf sich; dieser ermöglicht ihm zuerst den Eintritt ins Gymnasium und dann in die Universität, und der junge Handlungsdiener wird nach einigen Jahren der bekannte Professor der

Physik an der Universität Kasan, Bolzani. Der Sohn eines armen Priesters war aus Sibirien zu Fuss nach Kasan gekommen, mit Lobatschefskijs Hülfe tritt er in die medicinische Facultät ein, gelangt dann zu einer angesehenen Dienststellung und aus Dank für die Universität Lobatschefskijs vermacht er dieser seine kostbare Büchersammlung. Mehrfach hat Lobatschefskij als Rektor junge Leute vor den Folgen ihrer Uebereilungen bewahrt, und die Studenten, die aus Lobatschefskijs Zeit und auch die heutigen, bewahren ihm ein ehrfurchtsvolles Andenken.

Die hohen Verstandes- und Gemüthseigenschaften Lobatschefskijs erwarben ihm bei seinen Lebzeiten allgemeine Achtung an der Universität und in der Stadt. Diese Achtung galt in gleicher Weise Lobatschefskij dem Rektor wie Lobatschefskij dem Gehülfen des Kurators, der als „Belisar", wie man ihn damals nannte, zu den Universitätsprüfungen kam.

Aber die Achtung galt dem Menschen, dem Professor, dem Verwaltungsmanne, sie konnte den Mann der Wissenschaft nicht befriedigen, der sich bewusst war, „neue Principien" in diese eingeführt zu haben.

In dieser Beziehung stiess Lobatschefskij bekanntlich entweder auf
Gleichgültigkeit[1]) oder grobe und kränkende Spöttereien, von denen eine 33
Beurtheilung, die sich in einer der Petersburger Zeitschriften befindet, voll ist.[2]) Sogar unter den Schülern Lobatschefskijs fand sich keiner, der dessen Ideen bearbeitete und als ihr überzeugter Vertheidiger auftrat. Als Trost konnte ihm einzig der Beifall von Gauss dienen, mit dem Lobatschefskij in Briefwechsel stand, und vielleicht noch die „Beispiele aus der Geschichte", die lehren, dass zu hoch über ihren Zeitgenossen stehende Männer den Lohn der Anerkennung und des Ruhms erst nach ihrem Tode empfangen.

Es vergingen auch keine vierzig Jahre nach Lobatschefskijs Tode, als dieser Lohn nunmehr auch ihm zu Theil wurde.

Der allerhöchste Lohn für einen Denker, der Lohn, der Lobatschefskij bei seinen Lebzeiten versagt blieb, ist die Weiterentwickelung seiner Ideen, das Arbeiten in der Richtung, die er der Wissenschaft gegeben hat. Ein solches Arbeiten findet man jetzt nicht bloss im Vaterlande Lobatschefskijs, sondern auch in allen Kulturländern Europas: in England, Frankreich, Deutschland, Italien und in dem eben aus seinem geistigen Schlafe erwachenden Spanien, ja sogar in den jungfräulichen Wäldern von Texas.

Diese Arbeiten haben seit 1866 begonnen, wo der jetzt verstorbene französische Mathematiker Hoüel, dessen wir heute mit Dankbarkeit gedenken müssen, eine französische Uebersetzung der deutsch geschriebenen

---

1) Der Akademiker W. Ja. Bunjakofskij erwähnt in seiner Arbeit „Die Parallellinien", die 1853 gedruckt ist, Lobatschefskijs Untersuchungen gar nicht.

2) „Sohn des Vaterlandes." 1834.

Arbeit Lobatschefskijs: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" herausgab[1]), indem er einen Auszug aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher beifügte. Er hat überdies der Entwickelung der Ideen Lobatschefskijs auch ein eignes selbständiges Werk gewidmet.[2])

34 Im Jahre 1867 wurde eine Abhandlung Riemanns veröffentlicht, die auf die Möglichkeit der Geometrie eines sphärischen Raumes hinwies, einer Geometrie, in der auch das Axiom „zwei gerade Linien können keinen Raum einschliessen" nicht gültig ist.[3]) Andrerseits stellte der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami Untersuchungen über krumme Oberflächen an[4]), bei denen er sich der Principien bediente, die Gauss in seiner berühmten Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" entwickelt hatte, und er wurde so zur Behandlung einer besondern Gattung von Flächen geführt, den pseudosphärischen, wie er sie nannte, wobei er auf die Uebereinstimmung der Geometrie dieser Flächen mit der Planimetrie Lobatschefskijs hinwies. Durch Verbindung aller dieser Untersuchungen gelangte man so zu dem Ergebniss, dass ein überall gleichartiger mathematischer Raum von drei Dimensionen (das heisst einer, in dem die Bewegung eines festen, unveränderlichen Körpers möglich ist) von dreierlei Art sein kann. An die eine dieser drei Arten knüpft sich immer fester und fester die Benennung: Lobatschefskijscher Raum. Die beiden andern heissen der Euklidische und der Riemannsche Raum. Die analytische Theorie dieser Räume unterscheidet sie nach dem Vorzeichen eines gewissen Ausdrucks, der der Krümmung einer Fläche analog ist. Für den Euklidischen Raum ist dieser Ausdruck, die Krümmung des Raums, gleich Null, für den Lobatschefskijschen ist er negativ und für den Riemannschen positiv.[5])

35 Die Erforschung der Eigenschaften der Räume im allgemeinen Sinne

---

1) Études géometriques sur la théorie des parallèles, suivies d'un extrait de la correspondance de Gauss et Schumacher. Traduit de l'Allemand par J Hoüel.

2) Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. 1867. Séconde édition 1883.

3) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Eine russische Uebersetzung dieser Abhandlung, von D. M. Sinzof, befindet sich in dem Sammelwerke „Ueber die Grundlagen der Geometrie", das von der physisch-mathematischen Gesellschaft an der Kais. Universität Kasan zum Jubiläum N. J. Lobatschefskijs herausgegeben worden ist.

4) Saggio di una rappresentazione della geometria non-euclidea — Teorica degli spazii di curvatura costante.

5) [Man vergleiche hierzu und zu dem Folgenden namentlich die gruppentheoretischen Arbeiten von Lie über die Grundlagen der Geometrie, s. Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, Leipzig 1893.]

ist nun der Gegenstand der nichteuklidischen Geometrie. Als ein nothwendiges Hülfsmittel erscheint dabei die Vorstellung, dass diese Räume in einem Raume von vier Dimensionen enthalten sind. Deshalb schliesst sich die Geometrie der mehrfach ausgedehnten Räume an die nichteuklidische Geometrie an und bildet sozusagen deren Fortsetzung; indem sie zahlreiche Fragen der Geometrie beleuchtet, erscheint sie gegenwärtig als ein unentbehrliches Hülfsmittel bei der Lösung vieler Aufgaben der Analysis.[1]) Ich erwähne zum Beispiel die merkwürdigen Untersuchungen von Poincaré über die Theorie der automorphen Funktionen und den Nutzen, den Kronecker aus der Geometrie mehrerer Dimensionen bei der Frage über die Trennung der Wurzeln von Systemen simultaner Gleichungen gezogen hat.

Der Gedanke Lobatschefskijs hat, wie das bei allen genialen Gedanken zu geschehen pflegt, die mannigfaltigsten Fragen hervorgerufen. Einerseits stellt er die Frage: Ist denn „der physische Raum unsrer Erfahrung" wirklich ein Euklidischer Raum, wie es uns erscheint und wie unsre begränzte Erfahrung uns zu überreden versucht? Newcomb, Ball, Peirce und andre haben sich nach dem Vorgange von Lobatschefskij mit der Frage beschäftigt, in wie weit astronomische Beobachtungen uns gestatten, die Frage über die Winkelsumme im Dreieck zu erledigen, und indem sie dem von Lobatschefskij selbst angegebenen Wege folgten, sahen sie die Antwort auf diese Frage in der Bestimmung der Parallaxen von Fixsternen. Der königlich irische Astronom Ball, ein bekannter Gelehrter, sagt über diese Frage Folgendes: „Die Astronomen sind oft unangenehm überrascht gewesen, wenn sie als Ergebniss ihrer Bemühungen eine negative Parallaxe erhielten. Schliesslich ist das im Allgemeinen eine Folge der unvermeidlichen Fehler bei solchen mühsamen Beobachtungen, aber man darf nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass, wenn der Raum wirklich eine Krümmung 36
besässe, die negative Parallaxe sich auch aus Beobachtungen von mathematischer Genauigkeit ergeben würde." Der amerikanische Gelehrte C. S. Peirce geht sogar noch weiter und glaubt auf Grund astronomischer Beobachtungen bewiesen zu haben, dass unser Raum ein Lobatschefskijscher Raum ist.

Dagegen kam Zöllner auf Grund der Erscheinung, dass der Himmel dunkel ist, und auf Grund von Untersuchungen über die gegenseitige Einwirkung von Massen, die in den Räumen der verschiedenen Arten vertheilt sind, zu dem Schlusse, dass unser Raum zu der Klasse der Riemannschen Räume gehört.

---

1) Eine schöne Darstellung der Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie und über die Geometrie von mehreren Dimensionen findet man in dem eben erschienenen und unsrer mathematisch-physischen Gesellschaft gewidmeten Werke Prof. Killings: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie".

Viele Gelehrte haben versucht, Naturerscheinungen durch die Annahme zu erklären, dass der Raum eine Krümmung besitzt, indem sie einen Raum von grösserer Dimensionenzahl zuliessen.[1]) Am weitesten ist in dieser Richtung der begeisterte Verehrer Lobatschefskijs, Clifford, gegangen, indem er sich zu der Annahme verstieg, die uns sichtbare Bewegung der Materie sei nichts anderes als eine Aenderung der Krümmung des Raumes. Die wichtigsten Behauptungen seiner merkwürdigen Hypothese bestehen in Folgendem:

1) Die unendlich kleinen Theile des Raumes sind ihrer Natur nach analog mit Erhebungen und Vertiefungen auf einer im Allgemeinen ebenen Fläche; die gewöhnlichen Gesetze der Geometrie finden bei ihnen nicht statt.

2) Die Eigenschaften, sich zu krümmen und sich wieder gerade zu biegen, pflanzen sich unausgesetzt von einem Theile des Raumes zum andern fort, ähnlich wie eine Welle.

37 3) In dieser Veränderung der Krümmung des Raumes besteht nun die Erscheinung, die man als Bewegung der wägbaren oder der ätherischen Materie bezeichnet.

4) In der physischen Welt geht nichts weiter vor als eine Veränderung der Krümmung des Raumes, die (vielleicht) an das Gesetz der Stetigkeit gebunden ist.

Dies die kühnen Spekulationen Cliffords. Ob etwa derartige Spekulationen über die Eigenschaften des Raumes wirklich neue Hypothesen zur Erklärung der Erscheinungen in der Welt liefern können, das wird die Zukunft zeigen. Wie Riemann[2]) sagt, ist es wichtig, dass die Arbeit an der Erklärung der Erscheinungen, die in uns und um uns vorgehen, „nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.“

Ich erwähne übrigens noch, dass Lobatschefskij, was für seine philosophischen Ansichten sehr charakteristisch ist, nicht nur niemals von Eigenschaften des Raumes spricht, sondern sogar behauptet, dass der Raum an und für sich, abgesondert gar nicht vorhanden ist. Es scheint demnach,

---

1) Mach, Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. „Warum es bis jetzt nicht gelungen ist, eine befriedigende Theorie der Elektricität herzustellen, das liegt vielleicht mit daran, dass man sich die elektrischen Erscheinungen durchaus durch Molekularvorgänge in einem Raume von drei Dimensionen erklären wollte.“ Mach und auch Bresch (Der Chemismus im Lichte mehrdimensionaler Raumanschauung. Leipzig 1882) haben die Annahme eines Raumes von vier Dimensionen zur Erklärung chemischer Erscheinungen benutzt.

2) [Am Schlusse seiner Habilitationsrede. Ges. Werke, 1. Aufl., S. 268.]

dass Lobatschefskij die Theorien über die Eigenschaften des Raumes nicht gebilligt haben würde, er würde vielmehr, scheint es, die Weiterentwickelung seiner Ansichten und Gedanken in der Stellung der Frage über die nicht-euklidische Geometrie erblickt haben, die wir bei Cayley und F. Klein[1]) finden. Bei diesen Mathematikern wird die etwas metaphysische Frage nach den Eigenschaften des Raumes durch die Frage nach dem Verfahren zur Ausmessung von Abständen ersetzt. Um einen Begriff von ihrem Gedanken zu geben, wollen wir uns vorstellen, dass wir auf der geraden Linie $ABCDEFG\ldots$ Abstände messen, die absolut genommen folgende Werthe haben:

$AB = 1$ Werst[2]), $BC = \frac{1}{2}$ Werst, $CD = \frac{1}{4}$ Werst, $DE = \frac{1}{8}$ Werst, ...,

wir messen sie aber mit einem Massstabe, der sich (zum Beispiel vermöge schneller Temperaturveränderung) verkürzt und zwar beim Uebergang von 38
AB zu BC auf die Hälfte, beim Uebergang von BC zu CD nochmals auf die Hälfte, und so weiter. Dann wird es uns so erscheinen, als ob alle Abschnitte unserm Massstabe gleich wären, also gleich einer Werst und ein Abstand von zwei Werst, der der Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots$$

gleich ist, wird subjektiv gleich einer unendlich grossen Zahl von Werst sein; das Ende dieses Abstandes wird bei unserm Messverfahren niemals erreicht werden können. Ein um den Punkt A mit einem Halbmesser von zwei Werst beschriebener Kreis wird der Gränzkreis der Lobatschefskijschen Geometrie sein. Das System der Beziehungen zwischen Abständen und Winkeln wird, wie Cayley und Klein gezeigt haben, mit dem Systeme zusammenfallen, das die Lobatscheftskijsche Geometrie bildet.

Aber welche Stellung der Frage wir auch vorziehen mögen, die Fragen, die unser unsterblicher Geometer auf die Tagesordnung gebracht hat, beschränken sich augenscheinlich nicht bloss auf das Gebiet der Geometrie. An ihrer Lösung muss auch die Physiologie der Sinnesorgane (vorzugsweise des Gesichts und des Gefühls) theilnehmen und ebenso der Zweig der Philosophie, den man als Erkenntnisstheorie bezeichnet. Von ihrer Lösung sind unsre Ansichten über die allgemeine Naturphilosophie abhängig.

Hierin zeigt sich nun die Grösse der Ideen Lobatschefskijs. Je stärker der Schlag ist, den ein schwerer Körper bei seinem Fall auf ein stehendes

1) F. Klein, Ueber nicht euklidische Geometrie. (Math. Ann. Bd. IV und VI.) A. Cayley. Address as President of British Association at Southport 1883.

2) [1067 m.]

Gewässer ausübt, um so weiter dehnt sich die Bewegung der Wellen aus, um so mehr Stellen werden davon ergriffen. Je genialer ein Gedanke, um so grösser das Gebiet wissenschaftlichen Denkens, das seinem Einflusse unterworfen wird. Darin, dass Lobatschefskijs Ideen von jetzt an nicht nur das Interesse der Mathematiker, sondern auch das der Physiker, Astronomen, Physiologen und Philosophen immer mehr auf sich ziehen werden, besteht eben der erste Lohn für unsern Geometer und Denker.

Als zweiter Lohn für Lobatschefskij erscheint die allgemeine Verehrung seines Namens; Zeugniss für diese Verehrung legen ab die zahlreiche Zuhörerschaft, die sich versammelt hat, um sein Andenken zu ehren, die Be-
39 grüssungen, die wir vor Kurzem gehört haben, und die Theilnahme, mit der der Aufruf der physisch-mathematischen Gesellschaft zur Bildung einer Stiftung auf den Namen Lobatschefskijs aufgenommen worden ist. Beiträge sind fast aus allen Gegenden Europas eingegangen; betheiligt haben sich daran das ferne Amerika ebenso wie eine der ersten gelehrten Anstalten der Welt — die Königliche Gesellschaft zu London, und wie die Realschule einer kleinen deutschen Stadt. Auf unsern Aufruf haben nicht nur Mathematiker geantwortet, sondern auch Philosophen.

Dank allen diesen Beiträgen wird die Stiftung auf den Namen Lobatschefskijs ins Leben treten und wird, durch Unterstützung und Ermuthigung junger Mathematiker, zur Entwickelung der geliebten Wissenschaft Lobatschefskijs beitragen.

Aber Russlands gebildeten Ständen und vor allen Dingen den gebildeten Ständen dieser Stadt, in der Lobatschefskij erzogen ist, gelehrt, gedacht und gewirkt hat, liegt noch eine andere Pflicht ob.

Ein Denkmal Lobatschefskijs gegenüber dem Gebäude seiner geliebten Universität ist kein zu weit getriebener Dank für den Mann, dessen ganzes Leben der Aufklärung seiner heimathlichen Gegend gewidmet war, für den grossen Denker, der für den wissenschaftlichen Ruhm Russlands und der Universität Kasañ so viel gethan hat.

Möge dieses Denkmal zukünftige Geschlechter von Lehrenden und Lernenden der Universität Kasan an die erhabene Gestalt des Professors erinnern, der sein ganzes Leben in den Dienst seiner heimathlichen Universität gestellt hat, an den Professor, der es als Ziel der Universität hinstellte, nicht nur den Verstand durch Kenntnisse aufzuklären, sondern auch zur Tugend anzuleiten, Liebe zum Ruhm einzuflössen, Gefühl für Edelmuth, Recht und Ehre, für diese unberührte Redlichkeit, die auch gegenüber verführerischen Beispielen des Missbrauchs, die der Strafe unerreichbar sind, Stand zu halten vermag.

40 Möge dieses Bild des genialen und mächtigen Denkers, der über einen

der wichtigsten Zweige des menschlichen Wissens neues Licht verbreitet und „neue Principien“ darin eingeführt hat, ganz Russland verkündigen:

„Auf der Bahn des Verstandes giebt es kein Zurückweichen.“

ZUSÄTZE DES VERFASSERS.[1])

S. 220, Z. 4 v. u. „aber es ist wohl unzweifelhaft, dass Lobatschefskij schon vor dem Jahre 1823 begonnen hat, sich mit der Geometrie zu beschäftigen.“

Diese Annahme ist jetzt zur Gewissheit geworden, denn nach dem Erscheinen der russischen Ausgabe meiner Rede erhielt ich ein altes Kollegienheft mit einer Nachschrift der Vorlesungen, die Lobatschefskij während der Jahre 1815 und 16 an der Universität Kasan gehalten hat. In diesem Hefte befinden sich drei kurze Darstellungen einer systematischen Bearbeitung der Parallelentheorie und in jeder dieser Darstellungen ist eine andere Auffassung der Parallelentheorie enthalten.

Nach dem Vorgange von L. Sohncke in Ersch und Grubers „Allgemeiner Encyclopädie der Wissenschaften und Künste“ kann man die Versuche, die zur Vervollständigung der Parallelentheorie gemacht worden sind, in drei Klassen eintheilen.

In die erste Klasse gehören die Versuche, bei denen eine neue, von der Euklidischen abweichende, Erklärung der Parallellinien zu Grunde gelegt wird. Man erklärt die Parallellinien entweder als solche, die in allen Punkten gleich weit von einander abstehen, oder als solche, die ein und dieselbe Richtung haben. Lobatschefskij schliesst sich in dem ersten Vorlesungshefte der letzteren Auffassung an, die später von C. F. A. Jacobi in seiner Dissertation: „De undecimo Euclidis axiomate iudicium. Jena 1824“ sehr ausführlich entwickelt worden ist. Vor dem Jahre 1815 findet sich diese Auffassung nur in einem holländischen Werke von Swinden: „Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterdam 1790.“

Die zweite Klasse der Beweisversuche führt Unendlichkeitsbetrachtungen ein und benutzt unendlich grosse Theile der Ebene. Ihr erster Vertreter ist Bertrand de Génève in seinem Buche: „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. 1778.“ Auch Legendre hat diese Betrachtungsweise vielfach benutzt. Der damit verwandte Beweis, den

---

1) Der Verfasser hat diese Zusätze eigens für die vorliegende deutsche Uebersetzung geschrieben.

Lobatschefskij in dem zweiten Vorlesungshefte giebt, hat besonders mit dem Beweise grosse Aehnlichkeit, den Crelle in dem Schriftchen: „Ueber Parallelentheorien und das System der Geometrie." Berlin 1816, gegeben hat. Später hat Crelle seinen Beweis in der Abhandlung: „Theorie der Parallelen, Crellesches Journal Bd. 11" wieder abgedruckt.

Am anziehendsten ist aber das dritte Heft. Dieses enthält einen Beweis des Satzes, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten ist. Der Beweis schliesst sich am nächsten denen von Legendre an und zeigt, dass sich Lobatschefskij sehr eingehend mit den Arbeiten Legendres über diesen Gegenstand beschäftigt hat. Zunächst beweist Lobatschefskij, dass die Winkelsumme zwei Rechte nicht übersteigen kann; sodann zeigt er, dass die Winkelsumme in jedem Dreiecke gleich zwei Rechten ist, sobald sie nur in einem einzigen diesen Werth hat. Es handelt sich also noch darum, ein Dreieck zu finden, dessen Winkelsumme gleich zwei Rechten ist. Lobatschefskij glaubt beweisen zu können, dass ein rechtwinkliges Dreieck, in dem einer der spitzen Winkel gleich $\frac{\pi}{8}$ ist, eine Winkelsumme von zwei Rechten besitzt; man kann aber gegen seinen Beweis dieselben Einwürfe machen wie gegen den von Legendre. In historischer Beziehung ist Lobatschefskijs Beweis deswegen merkwürdig, weil sich darin schon mehrere Sätze über Defekte finden. Zum Beispiel wird bei dem Beweise der Satz benutzt, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks, das in einem andern enthalten ist, aber mit diesem einen Winkel und eine Seite gemein hat, grösser als die Summe der Winkel des grösseren Dreiecks sein muss. Sätze dieser Art gehören schon dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie an.[1])

Zu S. 224, Z. 1 v. u. „Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen. [Kasan 1841.]"[2])

Das von Lobatschefskij angegebene Verfahren, um über die Konvergenz unendlicher Reihen zu entscheiden, beruht auf den folgenden Betrachtungen:

Ist eine unendliche Reihe:

$$\sum_{i=\infty}^{i=\infty} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

gegeben, so kann man sich auf den Fall beschränken, dass alle $f(i) \leq 1$ sind, und kann dann die einzelnen Glieder in Ausdrücke von der Form:

---

1) [Im Ganzen hat also Lobatschefskij in den Jahren 1815—16 noch ungefähr auf demselben Standpunkte gestanden, wie Saccheri und Lambert. Diese Thatsache spricht nicht gerade für die Annahme, dass Gauss durch die Vermittelung von Bartels Lobatschefskij beeinflusst haben sollte.]

2) Vgl. hierzu und zu dem folgenden Zusatze die Note Wassiljefs in dem Bulletin of the New York mathematical society. Bd. III, 1894, S. 231—235.

$$\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2^2} + \cdots$$

verwandeln, wo jedes λ einen der beiden Werthe 0, 1 besitzt. Gelingt es nun, für jedes k eine Zahl μ_k so zu bestimmen, dass

$$f(\mu_k) \geqq 2^{-k}, \qquad f(\mu_k + 1) < 2^{-k},$$

so können höchstens μ_k verschiedene Glieder den Bruch 2^{-k} in ihrer Entwickelung enthalten und in der Summe der Reihe kann 2^{-k} keinen Koefficienten haben, der grösser ist als μ_k. Demnach kann die Summe der Reihe den Werth:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \mu_k\, 2^{-k}$$

nicht übersteigen.

Die Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt in der Bestimmung der Zahl μ_k.

Es ist bemerkenswerth, dass Lobatschefskij sein Verfahren zur Bestimmung einer oberen Gränze für die gegebene Reihe auch auf die einfache Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{x^i}{i!}$$

anwendet, um die Funktionalgleichung:

$$f(x)\, f(y) = f(x + y)$$

zu beweisen. Wie es scheint, hat er das aus denselben Gründen gethan, die später die Mathematiker veranlasst haben, zwischen gleichmässiger und ungleichmässiger Konvergenz zu unterscheiden.

Zu S. 225, Z. 17 v. u. „Die Integrale müssen immer derart in Intervalle zerlegt werden u. s. w."

Diese Worte zeigen, dass Lobatschefskij seinen Zeitgenossen auch in der Frage über die Grundlagen der Infinitesimalrechnung voraus war. Mit noch grösserer Schärfe hat er seine Ansichten in der Abhandlung: „Ueber das Verschwinden der trigonometrischen Reihen" ausgesprochen. Er giebt darin die Definition des Differentialquotienten in folgender Form:

„Es bezeichne $F(k)$ eine Funktion, die sich mit x ändert und von einem bestimmten Werthe von x bis zu $x = a$ zunimmt. Wir theilen $a - x$ in i gleiche Theile und bezeichnen $\frac{a-x}{i}$ mit h. Ferner seien die Werthe $F(x)$, $F(x+h)$, ..., $F(a)$ bekannt für jeden noch so kleinen Werth von h, das ja mit zunehmendem i unbeschränkt abnimmt. Der Quotient

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

wird sich mit h verändern. Für $i' > i$ sei nun $\frac{a-x}{i'}$ gleich h'. Wenn dann die Differenz

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x+h')-F(x)}{h'} = \varepsilon,$$

oder, was dasselbe ist, der Ausdruck:

$$\frac{h'F(x+h) - hF(x+h') + (h-h')F(x)}{hh'} = \varepsilon$$

für jeden Werth von x mit h abnimmt und beliebig klein gemacht werden kann, so soll die Funktion eine ununterbrochene Funktion heissen. Der Quotient

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

hat in diesem Falle eine Gränze und diese Gränze ist

$$\frac{dF}{dx}.\text{“}$$

NACHWORT DES ÜBERSETZERS.

Durch die vorstehende Uebersetzung der Wassiljefschen Rede möchte ich dazu beitragen, dass Lobatschefskij auch in den Kreisen der deutschen Mathematiker etwas mehr als dem Namen nach bekannt werde. Die Rede ist wörtlich übersetzt, nur in der Anmerkung 2 auf S. 213 habe ich mir erlaubt, den Text des Verfassers etwas zu ändern und die Angaben über Lamberts Theorie der Parallellinien zu berichtigen.[1]) Ich bin wohl auch an andern Stellen nicht immer ganz derselben Ansicht, wie der Verfasser, aber ich habe es nicht für nöthig gehalten, etwaige Meinungsverschiedenheiten, die nur Kleinigkeiten betreffen, zum Ausdrucke zu bringen. Die wenigen Zusätze, die ich gemacht habe, sind in eckige Klammern ein-

1) Die Abhandlungen Saccheris und Lamberts findet man in dem von Stäckel und mir bearbeiteten Buche: „Die Parallelentheorie von Euklid bis Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895 bei Teubner.“ Dort sind auch ausführliche geschichtliche Mittheilungen über die Parallelentheorie überhaupt gemacht. Insbesondere sind zwei bisher unbekannte Aeusserungen von Gauss über die Parallelentheorie mitgetheilt, und ausserdem kommen Schweikart und Taurinus (vgl. S. 214, Anm.) hier zum ersten Male zu ihrem Rechte.

geschlossen. Ausserdem habe ich die Seitenzahlen des Originals beigefügt, was eigentlich bei jeder Uebersetzung geschehen sollte.

Ich habe die Wassiljefsche Rede nach dem Original übersetzt, obwohl bereits eine englische Uebersetzung von G. B. Halsted (Austin, Texas 1894) vorlag; es schien mir aber für einen Deutschen nicht passend, eine russische Schrift nach einer englischen Uebersetzung zu übertragen. Selbstverständlich habe ich aber die Halstedsche Uebersetzung überall verglichen und bekenne gern, dass sie mir an manchen Stellen gute Dienste geleistet hat.

Zu besonderem Danke verpflichtet bin ich meinem Leipziger Freunde und Kollegen Professor W. Wollner, der mir über verschiedene sprachliche und sachliche Fragen Klarheit verschafft hat.

Es scheint mir angemessen, die Mittheilungen, die in der Rede über das Leben Lobatschefskijs gemacht sind, in einigen Punkten zu vervollständigen, denn die Rede ist ja keine Lebensbeschreibung Lobatschefskijs, sondern eine Würdigung seiner Leistungen.

Nikoláj Iwánowitsch Lobatschéfskij ist am 22. Oktober (2. Nov.) 1793 im Gouvernement Nishnij-Nowgorod geboren. Sein Vater, ein Architekt, starb 1797 und hinterliess seine Frau mit zwei kleinen Söhnen in sehr bescheidenen Verhältnissen. Die Wittwe zog nach Kasan, und es gelang ihr, ihre Söhne auf dem dortigen Gymnasium auf Staatskosten unterzubringen. Die weitern Lebensumstände Lobatschefskijs sind in der Rede Wassiljefs mitgetheilt. Es ist nur noch zu bemerken, dass Lobatschefskij von 1816 bis 1846 als Professor thätig war und in dem letztgenannten Jahre zum Gehülfen des Kurators des Lehrbezirks Kasan ernannt wurde; ferner dass er gegen Ende seines Lebens das Augenlicht verlor, aber auch blind immer noch seine wissenschaftlichen Arbeiten fortsetzte. Sein letztes Werk „Pangéométrie“ diktirte er seinen Schülern. Er starb am 12. (24.) Februar 1856.

Die geometrischen Werke Lobatschefskijs sind von der Kaiserlichen Universität Kasan in zwei Bänden neu herausgegeben worden. Der erste (bereits vergriffene) Band: „Vollständige Sammlung der geometrischen Arbeiten N. J. Lobatschefskijs“ ist in Kasan 1883 erschienen und enthält die russisch geschriebenen Arbeiten. Es sind das folgende:

1) Ueber die Anfangsgründe der Geometrie. S. 1—70. (Kasaner Bote 1829.) Diese Abhandlung ist ein Auszug aus der auf S. 221 erwähnten, ungedruckten Arbeit vom Jahre 1826: „Exposition succincte de la géometrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.“ Leider scheint das Manuscript der „Exposition succincte“ verloren zu sein.

2) Imaginäre Geometrie. S. 71—120. (Gelehrte Schriften der Kais. Universität Kasan 1835.)

3) Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. S. 121—218.

4) Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen. S. 219—486. (Gelehrte Schriften u. s. w. 1835—38.)

5) Pangeometrie. S. 487—550. (Gelehrte Schriften 1836.)

Der zweite Band (Kasan 1886) enthält die in deutscher und in französischer Sprache geschriebenen Arbeiten, sowie ein Bild Lobatschefskijs. Man findet darin Folgendes:

6) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. S. 553—578. (Berlin 1840. In der Finkeschen Buchhandlung.)

7) Géométrie imaginaire. S. 581—613. (Crellesches Journal Bd. 17, 1837.)

8) Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. S. 618—680. (Kasan 1855.)

Nr. 7 ist eine Bearbeitung, theilweise eine Uebersetzung von Nr. 2. Nr. 8 ist eine Uebersetzung von Nr. 5. Uebersetzungen von Nr. 4 giebt es meines Wissens leider bis jetzt nicht, sie wären aber höchst erwünscht.

Ich füge noch einige wenige Bemerkungen bei.

S. 209, Z. 15 v. o. Die Laplacesche Aeusserung bezog sich wohl nicht auf Bartels, sondern auf Pfaff.

S. 212, Z. 2, 1 v. u. Diese Schrift ist nicht von Legendre, sondern von Adolf Kircher, s. Stäckel u. Engel, Theorie der Parallellinien S. 304.

S. 213, Z. 4 v. o. Das von Stäckel aufgestellte Verzeichniss weist für die Jahre 1813—1827 nicht weniger als 67 Schriften und Abhandlungen über die Parallelentheorie nach (a. a. O., S. 305—310).

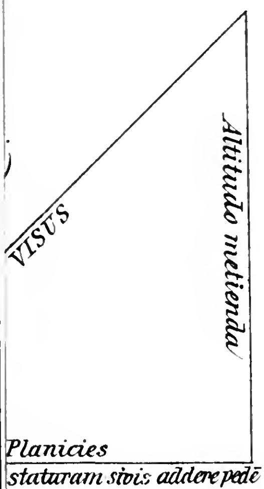
S. 219, Z. 9 v. u. Ueber Magnizkij vergleiche man: Alfred Rambaud, Histoire de la Russie. 3me éd. Paris 1884. — chap. XXXV, p. 624—625 und: (J. Eckardt) Aus der Petersburger Gesellschaft. 5. Aufl. Leipzig 1880. — X. Unsere Unterrichtsminister. S. 257.

S. 233, Z. 5 v. u. Hier hätte Baltzer erwähnt werden sollen, durch den Hoüel erst auf Lobatschefskij und Bolyai aufmerksam gemacht worden war (a. a. O., S. 239).

S. 235, Z. 9—5 v. u. Zöllner hat das doch wohl nur als eine Möglichkeit hingestellt.

Leipzig, im Juli 1895.

Friedrich Engel.



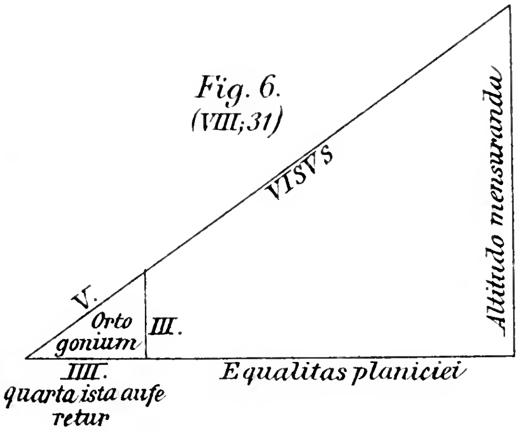
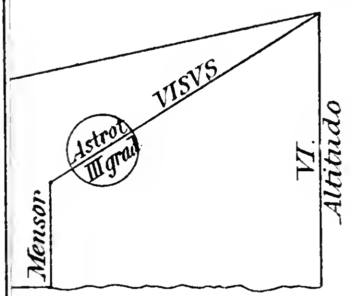


Fig. 6.
(VIII; 31)



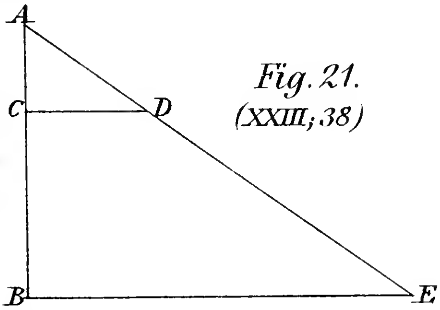


Fig. 21.
(XXIII; 38)

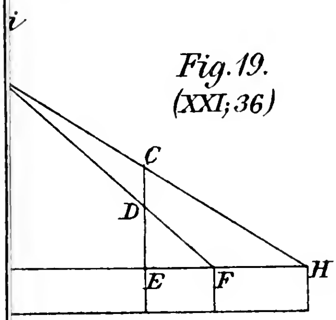


Fig. 19.
(XXI; 36)

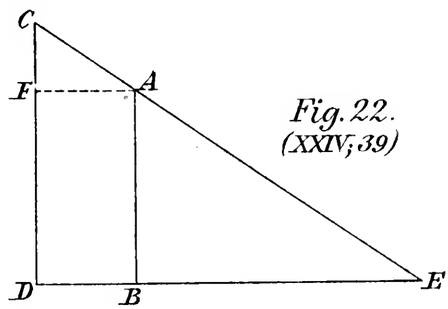
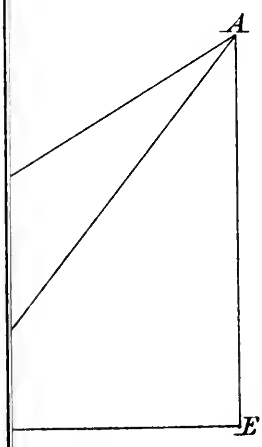


Fig. 22.
(XXIV; 39)



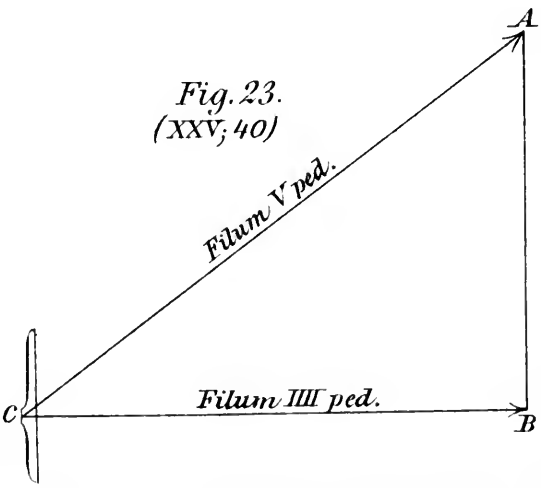
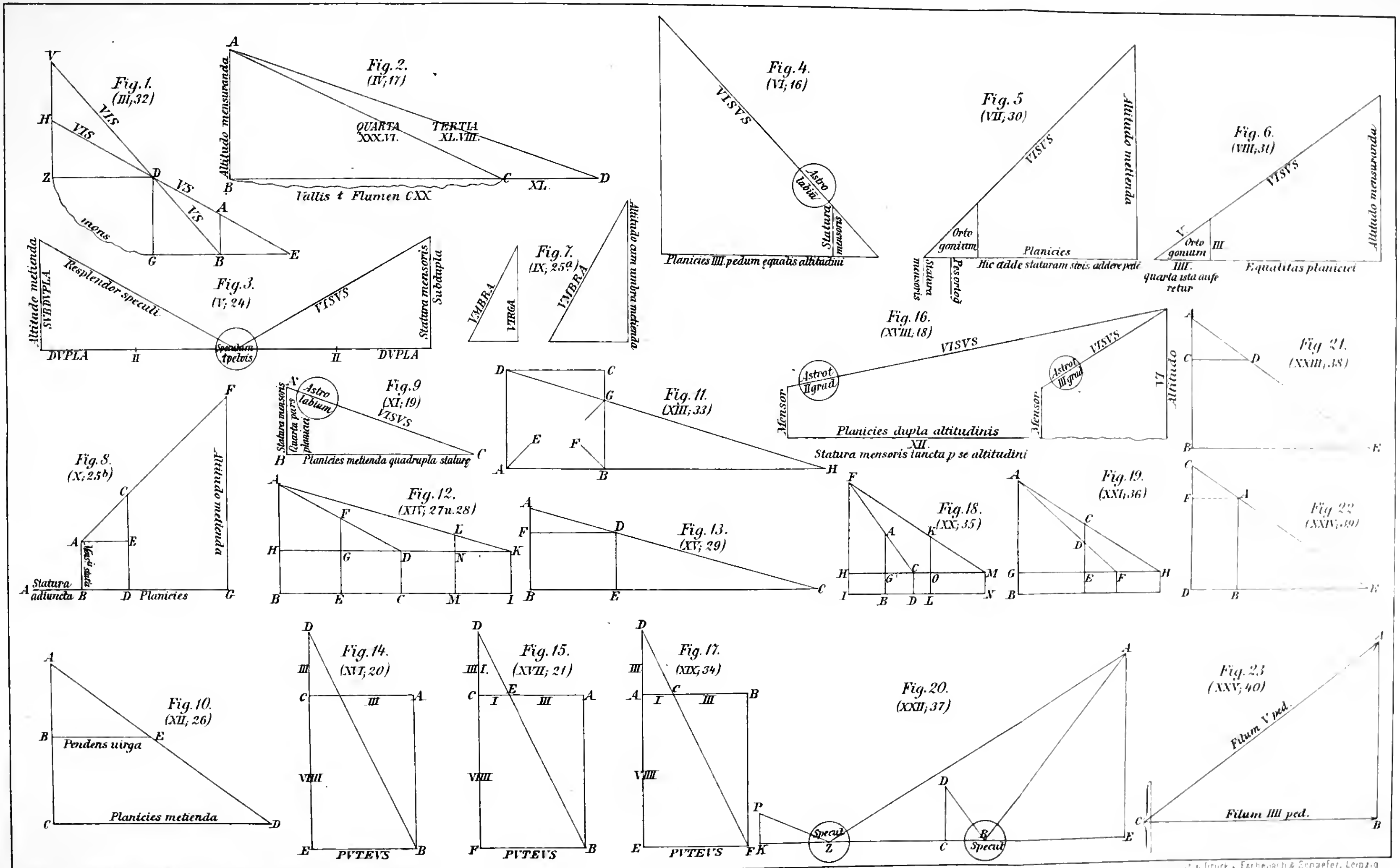


Fig. 23.
(XXV; 40)

Lith. u Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig



Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig