ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXIX.

PARS PRIOR.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXII.

r16.70292 april 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXIX. Janvier —— Juin.

avec une planche de figures.

PHYSIQUE EXPERIMENTALE.

HISTOIRE NATURELLE.

MÉTÉOROLOGIE

PROMO-

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXIX. Pars prior

cum tabulis XI aeri incisis.

PHYSICO-MATHEMATICA.

C. G.

PHYSICA.

ASTRONOMICA.

HISTOIRE.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXIX.
Janvier —— Juin.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE.

Lettre de S. E. Mr. le Comte *Jvan Grégorevitsch de Czernischew*, Vice-Président du College de l'Amirauté, Chambellan actuel, & Chevalier des Ordres de Russie & de Pologne,

A l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg (*).

Traduite du Russe.

Le 20 Avril à 11 heures du soir, on apperçut dans le Port de Cronstadt une fumée épaisse, qui

a 2 s'éle-

(*) Quoique cette lettre & les expériences suivantes qu'elle a occasionnées soient de plus fraiche date que ne le sont les autres écrits contes'élevoit d'une frégatte de l'escadre qui se préparoit à mettre à la voile, quoique depuis 5 jours il n'y eût absolument point eu de feu. Cette fumée parut sortir de la chambre du Maître d'équipage fermée & cachetée depuis quatre heures: on y avoit porté & déposé plusieurs choses nécessaires à l'entier équipement de la frégatte. On força la porte de la chambre & l'on y vit des toiles à voile rouges de feu & étincelantes.

Toutes les recherches qu'on put faire pour découvrir la cause de cet accident furent infructueuses, & à la fin on auroit été obligé de laisser la chose dans l'obscurité qui l'enveloppoit en soupçonnant peut-être des personnes innocentes, ainsi que l'année derniere à l'occasion d'un semblable accident, si *Sa Majesté Impériale* n'avoit pas daigné Elle-même mettre sur la voye les personnes chargées de cet examen, en me donnant l'ordre suivant:

" Comme Nous avons vu par le Journal que vous „ Nous avez présenté touchant l'accident arrivé à la fré„ gatte Marie, qu'il y avoit eu dans la chambre où le „ feu s'est manifesté, quelques rouleaux de cordages, & „ au milieu d'un hamac, un mélange de suie & d'huile „ enveloppé, & destiné à la peinture du vaisseau, Nous „ Nous souvenons qu'entre autres causes du feu qui prit „ l'année derniere aux magazins de chanvre, on avoit „ allégué que cet incendie pouvoit avoir eu lieu, parceque „ le

contenus dans ce volume, ayant été lues en Août 1781; l'importance de la découverte dont il s'agit ici, a déterminé l'Académie à anticiper le temps de sa publication & à l'insérer sans retard dans le volume des ses Actes qui se trouvoit sous presse.

„ le chanvre avoit été peut-être enveloppé de nattes en-
„ duites d'huile, ou bien amoncelé avec ces mêmes nattes:
„ c'eſt pourquoi vous aurez ſoin d'examiner ſcrupuleuſe-
„ ment cette obſervation dans le cas préſent."

J'ai d'abord communiqué cet ordre au Comité nommé par le Collège de l'Amirauté à cet examen, & qui étoit composé d'un membre du dit Collège, du Commandant en chef du Port, & de quelques autres Officiers de Pavillon. Ce Comité réſolut en conformité de l'ordre Impérial qu'il avoit pour guide, d'examiner attentivement, ſi l'incendie en queſtion n'auroit pas pu être l'effet phyſique d'une cauſe qui eût pu le produire d'elle-même. Et comme on a vu effectivement par le procès verbal dreſſé à cet effet, qu'il s'étoit trouvé dans la chambre du Maître d'equipage, où la fumée s'étoit manifeſtée, un mêlange de ſuie & d'huile, & qu'en l'éteignant on le vit jetter des étincelles; on réſolut de faire des expériences là deſſus. Pour cet effet on fit le même mêlange de ſuie & d'huile que celui de la frégatte: on mit dans un ſeau 40 livres de ſuie, on y verſa 35 livres d'huile de chénevis cuite, que l'on répandit après l'y avoir laiſſée durant une heure: On laiſſa la ſuie imbibée d'huile dans le ſeau autant de temps qu'un pareil mêlange auſſi dans un ſeau étoit reſté dans la frégatte, c'eſt à dire quatre heures. Enſuite on enveloppa cette maſſe de ſuie & on la mit dans un hamac, placé à coté de la chambre du Conſeil: & pour éviter tout ſoupçon, deux membres du Comité mirent leur cachet ſur le hamac & ſur la porte que l'on fit garder par une ſentinelle. Pour plus de ſûreté quatre Officiers de Marine eurent ordre d'y avoir l'oeil pendant la nuit, & d'avertir le Commandant en chef, au moindre ſigne de fumée.

Cette expérience ſe fit le 26 Avril à 11 heures avant midi, en préſence de tous les Officiers, qui avoient été nommés pour y aſſiſter. Le lendemain à 6 heures, après un intervalle de 13 heures depuis l'appoſition du ſcellé la fumée ſe manifeſta. Le Commandant en fut averti ſur le champ par le plus ancien Officier de Garde. Il y accourut promptement, vit par un trou de la porte ſortir de la fumée du hamac, & avant que de deſceller la porte, il envoya chercher les autres membres du Comité; mais comme la fumée devenoit trop épaiſſe & que le feu commençoit à éclater, il ſe vit obligé d'ouvrir la porte ſans les attendre. Dès que l'air libre eût pénétré jusqu'au hamac, il commença à s'enflammer & brula.

Le Collège de l'Amirauté réſolut de réïterer ces expériences en pluſieurs endroits & de différentes façons, pour être en état de mieux approfondir les effets & les ſuites de ce mélange de ſuie & d'huile enveloppé de toile: elles ont réuſſi pour la plus-part.

Je ſuis perſuadé que l'Académie Impériale des Sciences prendra cet objet en conſidération, & qu'elle fera des expériences rélatives, qui conduiront à de nouvelles découvertes.

J'ai l'honneur de joindre ici une notice de la quantité de ſuie & d'huile qu'on a employée, auſſi bien que du temps que le mêlange a mis à s'enflammer. J'ai jugé

jugé à propos d'y ajouter la remarque, que les mêlanges de 3 livres de ſuie & d'1 ½ livre d'huile de chénevis cuite, faits dans ma maiſon ſe ſont toujours enflammés.

Iwan Comte Czerniſchew.

I. Expériences faites au Port des Galères.

1. Le 28 Avril à 3 heures après midi, on verſa ſur 20 ℔ de ſuie ordinaire 20 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit enſuite un gobelet.

2. A 4 heures du même après-midi, on verſa ce gobelet d'huile de chénevis cuite ſur 2 ℔ de ſuie ordinaire.

   Ces deux maſſes furent ſcellées & enfermées dans la chambre attenante au Corps de Garde.

   Effet. Le lendemain 29 le matin à 10 heures, la premiere maſſe enveloppée dans un hamac n'avoit acquis aucune chaleur. La ſeconde qui étoit restée dans une cuve fut trouvée chaude: on l'enveloppa dans de la toile & on en vit ſortir de la fumée vers le ſoir.

3. Le 29 Avril vers les 5 heures du ſoir, on verſa 4 ℔ d'huile de chénevis cuite ſur 8 ℔ de ſuie ordinaire, & on enferma la maſſe dans la chambre du bain.

   Effet. La chaleur ſe manifeſta à 8 heures du ſoir, mais elle ne fut ſuivie d'aucun embraſement.

4. Le même ſoir à 9 heures on verſa ſur 20 ℔ de ſuie

ſuie ordinaire, $17\frac{1}{2}$ ℔ d'huile commune, dont on répandit 7 ℔ au bout d'une heure. La maſſe repoſa pendant 5 heures: le lendemain 30, le matin à 3 heures on l'enveloppa dans un hamac & on l'enferma dans la chambre de Corps de Garde.

Effet. La maſſe devint chaude au bout de 3 heures; & elle s'embraſa à 12 heures & demie. Le feu qui ſortit du milieu fut violent.

5. Le 29 Avril à 10 heures du ſoir, on verſa ſur 20 ℔ de minium 10 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit enſuite $7\frac{1}{2}$ ℔: on plaça cette maſſe dans le comptoir.

6. Le même ſoir à 11 heures, on verſa ſur 3 ℔ de ſuie d'Hollande $\frac{3}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite: cette maſſe fut depoſée dans la chambre de l'Officier auprès des magaſins.

7. En même temps on verſa auſſi $\frac{3}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite ſur 10 ℔ de ſuie commune, & on enferma cette mixtion dans la chambre de la Garde à coté du comptoir.

8. Le 1er Mai à 1 heure après midi, on verſa ſur 18 ℔ de ſuie commune 13 ℔ d'huile ordinaire, dont on répandit après quelques momens 5 ℔; & la maſſe fut miſe dans la chambre du Corps de Garde.

Effet. Toutes ces maſſes acquirent quelque degré de chaleur ſans s'embraſer: & au bout de quelques heures elles ſe refroidirent.

9. Le 1er Mai à 2 heures après midi, on prit 10 ℔ de

de ſuie ordinaire & 5 ℔ d'huile de chénevis commune ou crue, dont on répandit enſuite 1 ℔. à 7 heures du ſoir: la maſſe fut enveloppée dans un hamac, & enfermée dans la chambre du bain.

Effet. Le lendemain 2, à 9 heures du matin, la maſſe commença à donner des indices de chaleur, & à 6 heures du ſoir, elle s'embraſa avec violence.

II. Expériences faites dans l'hôtel de S. E. Mr. le Comte de Czerniſchef.

1 & 2. Le 30 Avril à midi on prépara les deux mêlanges ſuivans:

3 ℔ de ſuie d'Hollande avec ¼ ℔ d'huile de chénevis cuite.

3 ℔ de ſuie d'Hollande avec 3 ℔ d'huile de chénevis cuite.

On enveloppa ces deux maſſes d'abord après leur mixtion dans des toiles: on poſa la premiere dans le veſtibule du bain & l'autre dans un corridor ayant deux fenêtres expoſées au Sud.

Effet. A 6 heures du ſoir l'une & l'autre maſſe acquirent de la chaleur: mais il ne s'en ſuivit aucun embraſement.

3. Le 1^er^ Mai à midi on verſa 10 ℔ d'huile de chénevis cuite ſur 10 ℔ de ſuie d'Hollande; on laiſſa repoſer la maſſe pendant 5 heures ſans la mêler: on l'enveloppa enfin dans un hamac & on l'enferma dans le veſtibule du bain.

Il n'en résulta aucune chaleur.

4. Le 3 Mai à 11 heures avant midi, on mêla ensemble 3 ℔ de suie ordinaire avec $1\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis cuite: cette masse reposa durant une heure & fut ensuite enveloppée dans un hamac & transportée dans le vestibule sus-mentionné.

Effet. Elle s'embrasa à 4 heures & demie après midi; on la porta à l'air libre, & elle brula au delà de 3 heures.

5. Le 4 Mai à 10 heures avant midi, on répéta l'expérience précédente, & on enveloppa la masse une heure après la mixtion dans de la toile.

Effet. A 2 heures & demie après midi, on en vit sortir de la fumée, à 3 heures il en sortit des étincelles, & après que la masse fut exposée à l'air libre, elle s'enflamma & se consuma.

6. Le même jour à douze heures & demie on fit une seconde répétition de la 4eme expérience en enveloppant la masse dans un hamac, toujours 1 heure après la mixtion.

Effet. Les mêmes phénomènes eurent lieu à 5 heures du soir.

7 & 8. Le 5 Mai à 4 heures du matin, on prépara deux masses pareilles à celle de la 4^{e} expérience & des suivantes; on enveloppa l'une & l'autre dans des toiles, & on les enferma dans le vestibule du bain.

Effet. A 8 heures du matin l'une & l'autre masse s'embraserent.

III. Ex-

III. Expériences faites à Cronſtadt le 28 Avril à 5 heures du ſoir.

Avertiſſement. Dans les ſix premieres de ces expériences, on verſa ſimplement l'huile ſur la ſuie, & on laiſſa repoſer les maſſes pendant 4 heures, c'eſt à dire jusqu'à 9 heures du ſoir. On répandit enſuite l'huile ſuperflue, dont le poids eſt marqué à chaque expérience. Enfin on enveloppa les portions de ſuie ainſi imbibées dans de vieux hamacs & on les poſa dans une chambre à une diſtance ſuffiſante l'une de l'autre. Dans les deux dernières expériences, les maſſes furent d'abord après leur mixtion enveloppées dans des hamacs.

1. 40 ℔ de ſuie commune.
   35 ℔ d'huile de chénevis crue dont on répandit au bout de 4 heures 24 ℔.

   Effet. La maſſe s'embraſa le lendemain matin à 5 heures $\frac{3}{4}$.

2. 20 ℔ de ſuie commune.
   $17\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis crue dont on répandit 7 ℔.

   Effet. L'embraſement eût lieu à la même heure.

3. 10 ℔ de ſuie commune.
   5 ℔ d'huile de chénevis crue dont on répandit $3\frac{1}{2}$ ℔.

   Effet. La chaleur de la maſſe augmenta jusqu'à 5 heures $\frac{3}{4}$ du lendemain matin: mais il n'y eût point d'embraſement.

4. 4 ℔ de ſuie d'Hollande.
4 ℔ d'huile de chénevis crue: on n'en répandit rien.

Effet. La maſſe s'embraſa à douze heures & demie de la nuit.

5. 8 ℔ de ſuie commune.
4 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit $\frac{1}{2}$ ℔.

Effet. La maſſe s'échauffa & ſe refroidit alternativement ſans s'enflammer.

6. 32 ℔ de minium.
10 ℔ d'huile de chénevis cuite dont on répandit $7\frac{1}{2}$ ℔.

Effet. Il ne ſe manifeſta aucune chaleur.

7. 3 ℔ de ſuie d'Hollande.
$\frac{3}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

Effet. La maſſe s'embraſa à 9 heures du ſoir, c'eſt à dire au bout de 4 heures. On ne l'éteignit qu'avec peine: même après l'avoir jettée dans une cuve remplie d'eau, elle remonta & brula encore pendant quelque temps.

8. 10 ℔ de ſuie commune.
$\frac{3}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

Effet. La maſſe s'échauffa, & la chaleur augmenta jusqu'à minuit: elle diminua enſuite, & la maſſe redevint froide.

IV. Ex-

IV. Expériences faites à l'Amirauté.

1. Le 28 Avril à 6 heures 20′ du soir on versa sur 45 ℔ de suie commune, 25 ℔ d'huile de chénevis crue: 1 heure après, on en répandit 14 ℔, & au bout de 4 heures on enveloppa la masse dans de la toile & on la mit dans une chambre voutée sans fenêtres.

Effet. La masse s'embrasa le 30 à 3 heures 55′ du matin; par conséquent 27 heures 35′ après l'avoir enveloppée.

2. Le 29 Avril à 3 heures après midi, on versa sur 40 ℔ de suïe commune, 35 ℔ d'huile crue: on procéda comme dans l'expérience précédente, en répandant 27½ ℔ d'huile. La masse fut mise dans une chambre à deux grandes croisées.

Effet. L'Embrasement eût lieu le lendemain après midi à 2 heures 15′, ou 23 heures 45′ après qu'on eût enveloppé la masse.

3. A 4 heures du même jour, 29 Avril après midi on réïtera la même procedure avec 32 ℔ de suie commune & 16 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit 13 ℔. La masse fut posée dans une chambre à une seule croisée.

Effet. Le feu y prit le lendemain à 9 heures 45′ du soir, 12 heures 45′ après que la masse eût été enveloppée.

4. A 5 heures du même après-midi, on versa sur 6 ℔ de suie d'Hollande, un poids égal d'huile de ché-

chénevis crue, & on n'en répandit rien. La masse fut déposée dans la chambre à une croisée.

Effet. On observa de la chaleur, mais elle ne fut point suivie d'embrasement. Au bout de 18 heures la masse fut refroidie.

5. A 6 heures du même soir, on fit un essai avec 32 ℔ de minium, sur lequel on versa 10 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit au bout d'une heure 7 ℔. On mit la masse dans la chambre à deux croisées.

Effet. Il ne se manifesta aucune chaleur.

6. Le lendemain 30 Avril à 8 heures du matin, l'expérience fut faite avec 10 ℔ de suie commune & 4 ℔ d'huile de chénevis cuite sans en répandre. La masse fut encore enfermée dans la chambre à deux croisées.

Effet. La chaleur se manifesta au bout de 58 heures, mais il n'y eut point d'embrasement.

7. Le 1er Mai à 12 heures & demie, on mêla ensemble 20 ℔ de suie commune & 17 ℔ d'huile de chénevis crue; on enveloppa ensuite cette masse dans de la toile & on la transporta dans une chambre, dont les deux fenêtres regardent le Sud.

Effet. La masse s'échauffa au commencement, mais elle ne s'embrasa pas & se refroidit au bout de 48 heures.

8. 9. A la même heure on fit encore deux mixtions pareil-

pareilles à celle de l'expérience précedente: en employant pour la 1^{ere}.

10 ℔ de ſuie commune & 5 ℔ d'huile de chénevis cuite; & pour la 2^{de},

$3\frac{1}{2}$ ℔ de ſuie d'Hollande & 3 ℔ d'huile de chénevis cuite.

On tranſporta ces deux maſſes, enveloppées dans de la toile, dans la même chambre à deux croiſées vers le Sud.

Effet. Les phénomènes furent les mêmes que dans l'expérience précédente, à l'exception, que les maſſes ſe trouverent déja refroidies au bout de 18 heures.

10. 11. Le 4 Mai à 11 heures avant midi, on fit deux eſſais; dans le premier on mêla enſemble 10 ℔ de ſuie commune & 8 ℔ d'huile de chénevis crue, dont on répandit à midi le ſuperflu peſant 1 ℔. Dans le ſecond eſſai on employa pour la même quantité de ſuie 8 ℔ d'huile de chénevis cuite, dont on répandit au bout d'une heure $1\frac{1}{2}$ ℔. A 4 heures après midi on enveloppa l'une & l'autre maſſe dans de la toile & on les mit dans la chambre à deux croiſées vers le Sud.

Effet. Ces deux maſſes donnèrent les mêmes phénomènes: elles manifeſtèrent d'abord le la chaleur, mais elles ne s'embraſèrent pas, & au bout de 32 heures, l'une & l'autre avoient perdu toute chaleur.

12. 13. A la même heure on fit encore deux mixtions, en employant pour la 1^{ere} 2 ℔ de ſuie d'Hollande & $\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis cuite; & pour la 2^{de} 1 ℔ de ſuie d'Hollande & $\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis cuite: on mit l'un & l'aute pacquet dans la chambre à deux croiſées.

Effet. Aucun indice de caléfaction pendant 32 heures.

14. 15. Toujours au même avant-midi & dans la même chambre, on mit les deux mixtions ſuivantes, enveloppées dans des toiles:

La 1^{ere} de $2\frac{1}{2}$ ℔ de ſuie commune & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

La 2^{de} de $2\frac{1}{2}$ ℔ de ſuie d'Hollande & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

Effet. Ces deux maſſes s'échaufferent au commencement, & ſe refroidirent au bout de quelques heures.

16. Le 5 Mai à 8 heures du matin, on mêla enſemble 3 ℔ de ſuie commune avec $1\frac{1}{2}$ ℔ d'huile de chénevis cuite: on enveloppa la maſſe comme dans les expériences précedentes & on la dépoſa dans une chambre à deux croiſées expoſées vers le nord.

Effet. A 1 heure 45′ après midi, ou bien au bout de $5\frac{3}{4}$ heures, la maſſe s'enflamma & le feu fut très vif.

V. Ex-

V. Expériences faites à l'Amirauté le 2 Mai avec du chanvre, de l'huile de chénevis & de la ſuie.

A douze heures & demie on entortilla dans des toiles les huit mêlanges ſuivans, & on les mit dans la chambre à deux croiſées expoſées vers le Nord:

1. Du chanvre poiſſé & de l'huile de chénevis crue.
2. Du chanvre poiſſé & de l'huile de chénevis cuite.
3. Du chanvre ſérancé & de l'huile de chénevis crue.
4. Du chanvre ſérancé & de l'huile de chénevis cuite.
5. Du chanvre poiſſé, de l'huile de chénevis crue & de la ſuie.
6. Du chanvre poiſſé, de l'huile de chénevis cuite & de la ſuie.
7. Du chanvre ſérancé, de l'huile de chénevis crue & de la ſuie.
8. Du chanvre ſérancé, de l'huile de chénevis cuite, & de la ſuie.

Le dernier pacquet, où le chanvre n'avoit point été humecté conſidérablement fut le ſeul, qui s'echauffa & s'embraſa: cela arriva à 4 heures & demie après midi c'eſt à dire au bout de 4 heures. Les ſept autres pacquets, où une plus grande portion d'huile avoit été employée, ne donnerent aucun indice de caléfaction, quoiqu'on ait attendu au delà de 28 heures.

VI. Expériences faites à l'Amirauté le 4 Mai à 11 heures avant midi, dans la chambre à deux croisées exposées au Sud.

1. Une livre de chanvre poissé humecté d'$\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis crue, commença d'abord à s'échauffer, mais il ne s'ensuivit point d'embrasement, & au bout de 31 heures, la chaleur avoit entierement disparu.

2. Les trois masses suivantes n'ont donné aucun indice de caléfaction, quoiqu'on les ait observées pendant 31 heures.

1.) 1 ℔ de chanvre poissé & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

2.) 1 ℔ de chanvre sérancé & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis crue.

3.) 1 ℔ de chanvre sérancé & $\frac{1}{4}$ ℔ d'huile de chénevis cuite.

EXPE-

EXPÉRIENCES

ſur l'inflammation ſpontanée de la ſuie mêlée avec différentes huiles,

par

Mr. J. G. Géorgi.

Traduites de l'Allemand.

Peu après que le bruit ſe fut répandu que la frégatte impériale Marie avoit pris feu dans le port de Cronſtadt, ce qui arriva le 20 d'Avril 1781, on commença à parler auſſi d'un mélange de ſuie & d'huile, dont l'inflammation ſpontanée devoit avoir cauſé cet incendie. En ſuppoſant le fait avéré, il paroiſſoit bien paradoxe qu'on n'eût encore jamais obſervé la réalité ni même la poſſibilité d'un pareil phénomene; vu que ſans contredit le mélange en queſtion s'eſt fait, non une fois mais des millions de fois, dans toutes les contrées de l'Europe, & qu'il s'eſt trouvé, ſoit par accident, ſoit à deſſein, tantôt couvert, tantôt à découvert, tantôt dans un lieu, tantôt dans un autre, & cela pendant des intervalles de tems plus ou moins longs. Mais lorsque notre auguſte Souveraine eut fait faire des perquifitions fur les lieux mêmes, la chofe fe trouva certaine, & plufieurs expériences réïtérées la confirmerent. Comme il ne s'agiffoit donc plus d'un foupçon ou d'une fimple probabilité, je me mis auffitôt de mon propre chef à faire des expériences là deffus; & peu après je me fis un devoir de les continuer par ordre de Son Excellence Monfieur le Chambellau *de Domafchnef*, Directeur de l'Académie impériale des fciences.

Les expériences de l'Amirauté ont été faites avant les miennes; & fi elles euffent pu m'être communiquées, j'aurois omis quelques unes des miennes, ou du moins je les aurois faites d'une autre maniere: j'aurois tâché, en partant du point auquel l'Amirauté s'étoit arrêtée, de pouffer mes recherches auffi loin que poffible. Mais ne pouvant les obtenir, je fus réduit à confidérer la chofe comme un problème à réfoudre, dont cependant la poffibilité étoit démontrée. Les indices que je reçus par la complaifance de Mr. *Jean Alb. Euler*, touchant l'une de ces expériences qui devoit rarement manquer, & qui étoit indiquée dans un rapport du Comité établi à Cronftadt pour cet objet, m'épargnerent beaucoup de peines inutiles; quoique cette expérience même ne m'ait jamais réuffi, quand j'ai voulu la répéter. Lorsque, le 13 du mois d'Août, S. E. Mr. le Comte *Jean Czernifchef*, Vice-Préfident de l'Amirauté communiqua à l'Académie les expériences faites par l'Amirauté, je trouvai que les miennes pouvoient fervir en partie à les conftater, en partie à leur donner plus d'étendue, & en général à répandre du jour fur toute cette matière. C'eft pourquoi je vais tranfcrire ici mes obfervations, telles que je les ai préfentées à l'Académie

cadémie le 5 de Juillet 1781, en y ajoutant celles que j'ai faites du depuis.

Pour éviter les répétitions qui pourroient ſe gliſſer dans mon récit, je me crois obligé de faire préallablement les remarques ſuivantes.

La ſuie ou le noir de fumée d'Allemagne, eſt ce que les Allemands appellent ſuie de peintre (*Mahler-Ruſs*) & qu'on nomme auſſi du noir à noircir: on le vend ici en boëtes plus ou moins grandes qui ont la forme de petits tonneaux, ſous le nom de ſuie d'Hollande (*Ghollandskaya Saja*): je me ſervirai indifféremment de ces divers noms. C'eſt une matière très fine, très légere & très noire dans ſon genre. *La ſuie ou le noir de fumée de Ruſſie*, eſt une ſubſtance plus groſſiere, plus peſante au triple ou au quadruple de l'autre, & plus graſſe en apparence. On la tire des réſidus de la poix, auſſi bien que de bois de ſapin réſineux. On s'en ſert communément pour peinturer le boiſage, à cauſe du bon-marché. C'eſt de cette derniere eſpece qu'étoit le noir que le Barbouilleur à Cronſtadt avoit malheureuſement mêlé avec de l'huile, & conſervé pour ſon uſage. (*Voyez la lettre du Comte de Czerniſchef.*)

L'huile de chénevis cuite, c'eſt cette huile réduite par la cuiſſon en vernis après avoir été mêlée d'un peu de minium par un procédé aſſés connu. Nos Barbouilleurs prennent pour leur vernis qu'il appellent *olive* de l'huile de chénevis (*kanapli masla*) parce que cette huile eſt moins chere que celle de lin, & qu'elle ne dépose par tant de sédiment salin. En place de litarge d'argent, on prend ici sur une livre d'huile environ une demi-once de minium. C'est avec de pareils matériaux que l'Amirauté a aussi fait ses expériences.

Pour serrer ou envelopper les masses, j'ai toujours pris de la toile grossiere & non-blanchie, qui ressemble beaucoup à celle dont on fait les estrapontins à coucher & les voiles des vaisseaux, hormis qu'elle est moins forte.

Les mêlanges ont été faits dans une jatte, ou un assés grand bassin de bois, où les masses sont toujours demeurées à découvert jusqu'au moment que je les ai enveloppées de toile.

La chambre de l'Académie qui sert de laboratoire chymique a deux fenêtres qui donnent à peu près à l'est, & une troisieme presque au sud: elle a deux portes. Pour arrêter autant que possible tout mouvement & toute affluence de l'air extérieur, sans être empêché néanmoins dans l'observation des phénomenes, je me suis servi d'une caisse de bois de cinq piés de long, deux de large & presque autant de haut, qui étoit munie d'un bon couvercle. Je fis faire des échancrures aux deux extrémités de la caisse, & les fis fermer par des vitres. Chaquefois qu'il se manifesta quelque réaction intérieure dans les masses, on sentit une odeur plus désagréable que n'est celle de l'huile bouillante, & on vit s'élever des vapeurs dont les vitres furent humectées.

Pre-

Premiere expérience.

Le 1. de Mai. Je mêlai dans un vaſe de verre une livre de noir de fumée de Ruſſie avec une pareille quantité d'huile de lin crue ou non-cuite, & je plaçai le vaſe ouvert dans une cheminée. Cette maſſe visqueuſe ne ſubit pas le moindre changement ſenſible, ni ce jour là, ni les jours ſuivants.

Seconde expérience.

Un autre mêlange d'une livre de noir de fumée de Ruſſie avec autant d'huile de chênevis crue, reſta également inactif.

Troiſieme expérience.

Une livre de noir de fumée de Ruſſie, ayant été mêlée avec une livre d'huile d'olive crue, le tout demeura froid.

Quatrieme expérience.

Le 4. de Mai. Je fis une maſſe ſemblable d'une livre de ſuie d'Hollande ou d'Allemagne, avec de l'huile de lin, prenant 3 livres de cette huile: je plaçai cette mixtion à découvert dans la cheminée; mais elle demeura ſans action.

Cinquieme expérience.

Une autre mixtion d'une livre de ſuie d'Hollande avec 3 livres d'huile de chênevis crue, qui fut placée à côté de la précédente, demeura tout auſſi inactive.

Sixieme expérience.

Le 5 de Mai. Une mixtion d'une livre de ſuie d'Hollande avec 3 livres d'huile d'olive commune, laiſſée à découvert, me fruſtra encore de l'eſperance du ſuccès.

Septieme expérience.

Le 10. de Mai. On mit dans le baſſin de bois 3 livres de noir de fumée de Ruſſie, on répandit deſſus $1\frac{1}{2}$ livre d'huile de chénevis cuite, & on fit une pâte de ces deux ingrédients. Après l'avoir laiſſée durant une heure à découvert, on la paitrit de nouveau; ce que feſant, on la trouva chaude vers le milieu, de façon qu'elle affectoit l'ordorat. Là deſſus on la lia bien ferme dans de la toile groſſiere, après l'avoir encore ſaupoudrée d'un peu de noir tout ſec. Ainſi empaquetée on la mit dans la caiſſe qui avoit été préparée dans le laboratoire, & dont il a été parlé à l'entrée de cette diſſertation. Après qu'elle y eût repoſé durant 3 heures & demie, on ſentit l'odeur de l'huile bouillante, & le paquet devint chaud. La chaleur alla en augmentant pendant deux heures, après quoi elle diminua. Ayant ouvert le paquet le lendemain matin, je ne m'apperçus d'aucun changement dans la maſſe. Je l'enveloppai de nouveau, & la mis en lieu de ſûreté. Le 3 de Juillet je rouvris le paquet, & je trouvai que la maſſe avoit contracté extérieurement une croute ſeche, & intérieurement une couleur griſâtre: expoſée à l'air libre, elle s'échauſa ſenſiblement; mais elle perdit ſa chaleur au bout de quelques heures.

Hui-

Huitieme expérience.

Une autre maſſe de 3 livres de noir de Ruſſie & de 2 livres d'huile de chénevis cuite, paitrie & préparée de la même maniere, & miſe en même tems que la précedente dans la caiſſe, demeura froide.

Neuvieme expérience.

Trois livres de noir de Ruſſie, ayant été mêlées avec une livre d'huile de chénevis cuite, le tout ayant été bien paitri, puis au bout d'une heure empaqueté comme ci-deſſus, après avoir été ſaupoudré de noir ſec; on ne s'apperçut pas de la moindre réaction dans cette maſſe.

Dixieme expérience.

Le 12 de Mai. Trois livres de noir de Ruſſie furent paitries avec 1 ½ livre d'huile de chénevis cuite, & le tout fut traité & préparé comme dans les expériences précédentes. Mais la maſſe ne devint ni plus ni moins chaude qu'elle ne l'étoit.

Onzieme expérience.

Le 14 de Mai. Pour eſſayer ſi la ſuie & l'huile en plus grande quantité ne ſeroient pas mieux diſpoſées à s'échaufer & s'enflammer enſemble qu'en moindre quantité, comme il arrive ordinairement à des tas de foin & à d'autres matieres ſemblables; j'ouvris toutes les maſſes précédentes qui étoient demeurées froides jusqu'à celle qui avoit ſervi à la dixieme expérience incluſivement ce qui fit une maſſe totale de plus de 30 livres; je la paitris, la laiſſai une couple d'heures à l'air, la ſerrai bien ferme dans un ſac de toile, & mis le ſac en lieu de ſureté dans le laboratoire en cas d'inflammation. Mais pluſieurs ſemaines ſe paſſerent ſans que j'y remarquaſſe le moindre changement.

Douzieme expérience.

Le 15 de Mai. On paitrit 3 livres de noir de Ruſſie avec $1\frac{1}{2}$ livre d'huile de lin cuite, & $1\frac{1}{2}$ once de naphte d'Aſtracan: la maſſe fut poſée auſſi tôt ſur une piece de toile, ſaupoudrée abondamment de noir ſec, liée bien ferme dans de la toile, & miſe dans la caiſſe. Elle ne s'échauffa point.

Comme je ne pouvois faire parvenir jusqu'au degré d'ignition la chaleur des maſſes de ſuie & d'huile ſemblables à celles qui s'étoient le plus fréquemment enflammées dans les expériences de Cronſtadt, & qui, d'après les indices que m'en fournit Mr. l'Académicien *Euler*, conſiſtoient en $1\frac{1}{2}$ l. d'huile ſur 3 l. de noir; je conclus de là que la faute en étoit ou aux matériaux ou à la manipulation. C'eſt pourquoi je tâchai d'obtenir pour mes expériences les mêmes matelots que l'on avoit employés à Cronſtadt pour faire les mêlanges. Mais au lieu de matelots on m'envoya de la ſuie & de l'huile pour une mixtion: il y avoit 3 livres de noir de Ruſſie & 4 livres d'huile de chénevis, au lieu d'une livre & demie que je croyois requiſe. Après un léger examen, je trouvai que ces matériaux ne différoient en aucune façon des miens.

Treizie-

Treizieme expérience.

Le 20 de Mai. Je paitris les 3 l. de noir de Ruſſie que j'avois reçues de l'Amirauté avec $1\frac{1}{2}$ l. de l'huile de chénevis qui m'avoit été envoyée en même tems: je laiſſai la maſſe pendant une heure à découvert, & procédai pour tout le reſte comme dans ma 7ᵉ expérience. J'avois retenu un peu du même noir pour en parſemer la maſſe. Ce paquet demeura auſſi ſans réaction; ce qui ne ſeroit pas arrivé, ſi j'y euſſe mis toute l'huile qui m'avoit été envoyée, comme je le reconnus du depuis par d'autres expériences.

Quatorzieme expérience.

Pour comparer mes matériaux avec ceux de l'Amirauté, je pris des miens la même quantité que dans la 13ᵉ expérience, & procédai en général comme dans la 7ᵉ & 13ᵉ expérience; mais ſans ſuccès.

Quinzieme expérience.

Le 24 de Mai. Sur 4 l. de noir de Ruſſie furent verſées 2 l. d'huile de chénevis cuite, & le tout fut mêlé légerement. La ſuie reſta ſeche en grande partie après avoir englouti l'huile. Ce mêlange fut mis à découvert dans le baſſin de bois & dans la caiſſe à expériences. Au bout de 9 heures on ſentit une odeur déſagréable & fétide d'huile bouillante, & un peu de chaleur. Cette chaleur augmenta durant 3 heures, & fut accompagnée de vapeurs aqueuſes qui s'élevoient de la maſſe. Après quoi la chaleur ſe perdit inſenſiblement, & il ne ſe fit plus d'autre changement.

Seizieme expérience.

Le 26 de Mai. Quatre livres de noir de Ruſſie, ayant été bien mêlées avec 3 l. d'huile de chénevis cuite, ſans que l'on eût cependant paitri ces matériaux, on mit d'abord la maſſe dans de la toile groſſiere, puis dans la caiſſe. Point de ſuccès.

Dix-ſeptieme expérience.

Le 1 de Juin. On verſa lentement & uniformément 5 l. d'huile de chénevis cuite, ſur 3 l. de noir de Ruſſie. La ſuie englontit tout le vernis, de façon qu'il n'en reſta point à décanter. Au bout de 5 h ſans mêler d'avantage cette compoſition, on l'euveloppa de toile groſſiere. Elle conſiſtoit en un grand nombre de petites maſſes humides & en partie mollaſſes qui étoient entourées d'un peu de ſuie demeurée à ſec: le tout étoit froid. Et c'eſt dans cet état que la maſſe entiere fut miſe dans la caiſſe à expériences. Seize heures après avoir été imbibée & 11 après avoir été enveloppée, elle commença à odorer & à s'échaufer. Au bout d'une heure encore il y eut quelques places dont la chaleur étoit à peu près la même que celle que l'on ſent ſous une poule qui couve: les exhalaiſons qui en ſortoient étoient viſibles: à d'autres endroits au contraire le paquet étoit froid. Après l'intervalle d'une demi-heure, l'une de ces places chaudes, de la grandeur environ d'une piece de demi-rouble, devint brune, & quelques moments après on la vit incandeſcente: elle s'étendoit inſenſiblement & gagnoit un peu par ſes bords. Au bout d' $\frac{1}{4}$ d'heure il en arriva autant à une ſeconde place, & bientôt après à une troiſieme.

Toutes

Toutes trois étoient rouges comme de la braiſe, & il en ſortoit une fumée épaiſſe de couleur griſâtre, & d'une odeur moins fetide que n'avoit été celle de la maſſe entiere au commencement de la réaction. La chaleur du paquet n'étoit pas égale de toutes parts.

La maſſe ayant été ôtée de la caiſſe & transportée dans un air plus libre, le feu ſe dévéloppa, formant une flamme de la hauteur d'un empan, mais peu vive, tranquile, & qui donnoit beaucoup de fumée.

Ayant fait une ouverture à une place qui ne bruloit pas, je tirai du milieu du paquet une petite portion de la maſſe; je la trouvai chaude, mais non ardente, molle, d'un noir luiſant, d'une odeur forte & répugnante. Quand je feſois des ouvertures dans la maſſe, en la piquant, il en ſortoit peu après une fumée fuligineuſe, qui s'allumant d'elle-même, bruloit en flamme. Et en général le feu n'étoit proprement partout qu'à la ſurface, où ſe feſoient des crevaſſes: il ſortoit de ces crevaſſes des exhalaiſons épaiſſes, qui en s'allumant formoient la flamme. Je n'ai point vu que la maſſe ſe ſoit gonflée ſenſiblement, ſoit pendant la réaction ſoit pendant l'ignition. Environ au bout d'une heure les flammes s'éteignirent, & la maſſe ne fit plus que bruler en braiſe. Mais lorsque pour la dégager de ſes cendres, on l'eut pouſſée de la planchette qui la ſoutenoit, ſur les pavés de la chambre, & qu'elle ſe fut par là un peu éparpillée, elle jetta ſubitement une flamme violente, jusqu'à 3 pieds de hauteur, qui donna une fumée épaiſſe & abondante. Après quoi cette grande flamme diminua peu à peu, & le feu fut réduit de nouveau à la ſimple incandeſcence, d'abord avec fumée, & enfin ſans fumée. Au bout de huit heures tout fut conſumé. Les cendres étoient griſes tirant ſur le noir, & aſſés compactes: elles peſoient $5\frac{1}{2}$ onces.

Dix-huitieme expérience.

Le 4 de Juin. Je répétai l'expérience précédente avec la même quantité de matieres, je verſai le vernis d'huile de chénevis ſur le noir de fumée ſans mêler autrement ces matieres, & procédai en tout comme ci-deſſus. Cinq heures après l'opération la maſſe fut trouvée froide; je l'enveloppai & la poſai dans la caiſſe. Ce ne fut que 40 heures après avoir été imbibée & 35 après avoir été enveloppée qu'elle commença à s'échaufer & à répandre de l'odeur. La chaleur alla en augmentant pendant 4 heures, de maniere que l'incandeſcence ſpontanée ſe manifeſta 44 heures après l'imbibition. Cette incandeſcence & la flamme qui s'enſuivit, & qui dura huit heures, préſenterent des phénoménes exactement ſemblables à tout ce qui arriva dans la 17ᵉ expérience. Les cendres peſereut cette fois-ci $5\frac{1}{2}$ onces & 1 ſcrupule.

Dix-neuvieme expérience.

Le 10 de Juin. Ayant mis dans la jatte ou le baſſin de bois 3 l. de noir de Ruſſie, je verſai deſſus lentement & uniformément 5 l. d'huile de lin, qui avoit été cuite en vernis avec $2\frac{1}{2}$ onces de minium: puis je procédai en tout, tant par rapport aux intervalles de tems que par rapport à la manipulation comme dans la 17ᵉ & 18ᵉ expérience. Lorsque j'enveloppai la maſſe, je la trouvai plus pénétrée du fluide que celles que j'avois faites

faites avec de l'huile de chénevis cuite, & où une partie de la suie étoit demeurée à sec. Dix-sept heures après la mixtion, & 12 heures après l'enveloppement la masse se mit en réaction, & devint chaude & odorante. La chaleur alla en augmentant durant deux heures consecutives, puis elle diminua, & il ne s'ensuivit point d'autre changement.

Je ne doute pas que l'inflammation spontanée n'eût eu lieu, si j'eusse répété cette expérience avec un peu moins de vernis à l'huile, ou, peut-être même sans cela dans un tems sec (car c'étoit un jour de pluie). Je soupçonne que l'huile de pavot, celle de noix, & toute autre huile à vernis ou siccative produiroit le même effet.

Vingtieme expérience.

Le 16 de Juin. Ayant pris 3 l. de noir de fumée de Russie, j'y fis imbiber lentement 4 l. d'huile d'olive, qui avoit été cuite en maniere de vernis jusqu'à l'évaporation de toute aquosité, quoique par elle-même, & sans chaux de plomb. Lorsqu'au bout d'une heure je voulus envelopper cette masse comme de coutume dans de la toile grossiere, je la trouvai toute molle, & sans aucun reste de suie seche. C'est pourquoi je la saupoudrai abondamment d'autre suie toute seche, & la mis dans la caisse. Mais il ne s'y manifesta pas le moindre changement.

Vingt & unieme expérience.

Le 17 de Juin. Je croyois avoir remarqué que l'inflammation spontanée exigeoit de petites masses de suie imbibées d'huile & entourées de suie seche. C'est pourquoi je je fis imbiber 2 l. d'huile d'olive cuite dans 3 l. de ſuie de Ruſſie, ce qui produiſit les maſſes ou globules en queſtion, & laiſſa une partie de la ſuie à ſec. Au reſte je procédai en tout comme dans la 20^{e} expérience; mais après avoir attendu pluſieurs jours, je me vis fruſtré de tout ſuccès.

Vingt-deuzieme expérience.

Le 20 de Juin. Je répandis 2 l. d'huile de térébentine, qui eſt la moins conteuſe des huiles eſſentielles, ſur 2 l. de ſuie de Ruſſie. Celle-ci engloutit promptement l'huile. Au bout d'une heure je mêlai l'une avec l'autre, & je trouvai ma mixtion compoſée de petits amas qui ne feſoient point une maſſe continue. Je la mis dans de la toile, puis dans la caiſſe; elle y demeura froide & ſans mouvement.

Vingt-troiſieme expérience.

Le 23 de Juin. Pour faire un nouvel eſſai avec une huile empyreumatique, je mis dans la jatte 3 l. de ſuie de Ruſſie, & je verſai lentement deſſus 3 l. de *Dioggot* de Ruſſie, c'eſt à dire d'huile ou de goudron de bouleau (que l'on fait diſtiller *per deſcenſum* dans des creux faits dans la terre, ſe ſervant à cet effet de l'ecorce du bouleau). Je laiſſai cette compoſition à decouvert pendant 2 heures: puis voulant l'envelopper, j'en trouvai l'odeur plus forte qu'auparavant & je la ſentis tiede. Sans la mêler d'avantage, je la mis dans la caiſſe: la chaleur s'y augmenta d'abord, mais au bout d'une heure elle com-

commença à diminuer, & trois heures s'étant encore écoulées, toute chaleur fut diffipée.

Vingt-quatrieme expérience.

Je pris de la fuie de cheminée ou de cuifine toute pure & provenue de bois de bouleau, (ce bois étaut ici le plus commun pour le chaufage). Elle confiftoit en petits amas fecs, poreux, fans luftre: je la fis pulvérifer par le pilon & le crible, de façon que j'en obtins une poudre très fine. J'en mis 3 livres dans la jatte, & je verfai deffus $1\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite, qui fut auffitôt engloutie Après avoir laiffé le tout pendant 2 h. à découvert, & voulant enfuite l'envelopper, je trouvai que je pouvois décanter environ 1 once d'huile qui ne s'etoit pas incorporée avec la fuie. Je faupoudrai encore ma maffe glaireufe d'une demi-livre de fuie de cheminée pulvérifée, & l'ayant enveloppée, je la mis dans la caiffe. Elle demeura auffi froide & inactive qu'elle l'avoit été.

Vingt-cinquieme expérience.

Le 26 de Juin. Voulant avoir une maffe moins molle, je pris 3 l. de fuie de cheminée pulvérifée: je ne verfai deffus qu'une livre d'huile de chénevis cuite, & procédai au refte comme dans l'expérience précédente. Pour faupoudrer cette maffe, qui ne laiffa pas d'être humectée d'outre en outre, il me falut encore une 4^{e} livre de poudre de fuie. En l'enveloppant après qu'elle eut repofé pendant une heure, je trouvai qu'elle avoit contracté un peu de chaleur, mais à peine jusqu'à la tiédeur.

Ce commencement de chaleur ſe perdit bientôt & ne revint plus.

Vingt-ſixieme expérience.

Je répandis une boëte à noir de fumée d'Allemagne dans ma jatte, & quoiqu'il n'y en eût qu' $\frac{3}{4}$ de livre, le vaſe en fut plus rempli que de 3 l. de ſuie de Ruſſie; j'y verſai autant d'huile de chénevis cuite que la ſuie en put humer, ce qui alla jusqu'à $2\frac{1}{2}$ l. La mixtion étant reſtée à découvert pendant 2 heures & allant être enveloppée, ſe trouva toute molle. C'eſt pourquoi je la ſaupoudrai préallablement d'un peu de ſuie ſeche. Elle demeura pluſieurs jours dans la caiſſe ſans le moindre changement.

Vingt-ſeptieme expérience.

Le 4 de Juillet. Comme il me ſembloit qu'il y avoit eu trop d'huile d'employée dans la 26^e^ expérience, je pris à 10 h. du matin $\frac{3}{4}$ de livre de noir de fumée d'Allemagne, & y verſai $1\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite, procédant au reſte comme ci-devant. Cette mixtion demeura froide jusqu'au 7^e^ du mois, qu'elle commença à 7 heures du matin à s'échauffer & à odorer. A 9 heures le paquet fut déja aſſés chaud pour répandre des exhalaiſons humides, viſibles, & qui ſembloient trembler. Cette chaleur dura à peu près au même degré pendant 6 heures, après quoi elle diminua; & ce ne fut qu'au 8^e^ du mois vers le ſoir qu'elle ſe perdit entierement. Le 9 de Juillet j'ouvris le paquet, & j'y vis une maſſe comme fondue, visqueuſe, & d'un noir luiſant. D'où l'on voit que la reaction ne commença qu'au bout de près de 3 jours entiers,

entiers, & dura 36 heures. Il n'eſt point à douter que je n'euſſe obtenu le degré de réaction néceſſaire à l'inflammation ſpontanée, en feſant encore quelques eſſais avec moins d'huile ou avec une plus grande quantité de ſuie.

Vingt-huitieme expérience.

Le 8 de Juillet. Je réïtérai la 17[e] & 18[e] expérience avec toute l'exactitude poſſible. Lorsqu'au bout de 5 heures on enveloppa la matiere, elle ſe trouva tiede, & commença à affecter l'odorat. La chaleur augmenta pendant 4 heures, après quoi elle diminua, de maniere qu'au bout de 14 heures, il n'y en eut plus du tout. Le 10 du mois, au matin, la maſſe redevint chaude, & le fut pendant tout le jour & la nuit ſuivante: enfin elle ſe refroidit vers la pointe du jour, pour ne plus jamais ſe réchaufer.

On remarquera qu'ici, environ 40 heures après le mêlange, & 20 après la fin de la premiere réaction, il s'en fit une ſeconde, qui dura plus de 12 heures. La maſſe enfin réfroide fut ſemblable à celle de l'expérience précédente, à la réſerve d'un peu plus de ténacité.

Vingt-neuvieme expérience.

Le 12 de Juillet. La 17[e] & 18[e] expérience avoient été faites dans un tems ſerein; la 19[e] & 28[e] au contraire, où la réaction n'alla pas jusqu'au degré de l'ignition, avoient été exécutées pendant des jours pluvieux. Cette fois-ci, voyant que le jour étoit beau, je répétai

pétai le même procédé avec la derniere exactitude, en prenant de l'huile de chénevis cuite, avec cette seule différence, que la suie de Russie, après avoir été imbibée d'huile, ne demeura que pendant 4 heures exposée à l'air libre. En enveloppent la mixtion à 1 heure après midi dans de la toile, je la trouvai tiede & odorante. Elle conserva cette même tiédeur jusqu'à 4 h. après-midi, après quoi elle s'échaufa de plus en plus & très promptement, répandant une odeur plus forte, & des exhalaisons humides. A 7 h. du soir, c'est à dire 10 heures après le mélange, & 6 h. après l'enveloppement, on vit subitement une épaisse fumée, qui fut immédiatement suivie de l'incandescence. La flamme jaillit bientôt, & dura quelques heures: enfin l'incandescence continua sans flammes jusqu'au lendemain à midi, ce qui fait en tout une ignition de 17 heures. La cendre pesa 4 onces, 3 dragmes.

Trentieme expérience.

Le 14 de Juillet. Ayant mis dans la jatte 3 l. de suie de Russie, je versai dessus 3 l. d'huile de chénevis crue, la répandant lentement & uniformément, sans mêler d'avantage les matieres: je procédai au reste comme dans la 17^e^ expérience, hormis que la masse fut enveloppée au bout de 4 heures: elle formoit des amas de suie imbibés d'huile, & comme ensevelis dans le reste de la suie qui étoit demeurée seche. La réaction commença 5 heures après le mélange & 1 heure après l'enveloppement: elle alla en augmentant durant 5 heures consécutives. La chaleur augmenta à proportion, aussi bien que les exhalaisons visibles qu'elle fesoit monter, & qui (à ce que je vis par des essais que j'avois déja faits & que je fis encore) ne se laissoient pas allumer par du papier brulant. Quatre autres heures s'étant écoulées, c'est à dire 13 heures après l'imbibition, la mixtion se mit à fumer & à s'enflammer. Ce fut une flamme foible, & comme mourante, qui ne dura que peu; mais l'incandescence continua pendant plus de 12 heures. La cendre étoit d'un gris noirâtre & pesoit 16 onces, 6 dragmes.

Trente & unieme expérience.

Le 16 de Juillet. D'après les indices que Mr. *J. A. Euler*, membre de l'Académie, me donna touchant les expériences de l'Amirauté, selon lesquelles l'inflammation spontanée devoit se manifester le plus sûrement dans des mixtions composées de deux parties de suie de Russie & d'une partie d'huile cuite, j'étois porté à croire que j'avois manqué dans la manipulation pour ma 7, 9, 13 & 14^e expérience. C'est pourquoi je les répétai, en observant le procédé de la 17^e. Je fis imbiber $1\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite dans 3 l. de suie de Russie: au bout de 4 heures j'enveloppai la matiere dans de la toile, &c. 7 heures après le mélange, elle s'échaufa & odora, mais l'un & l'autre assés foiblement. Elle resta durant quelques heures dans cet état, après quoi elle redevint froide à jamais.

Trente-deuzieme expérience.

Le 19 de Juillet. La mixtion précédente me paroissoit un peu seche, & les petits amas de suie n'avoient été que peu imbibés. C'est pourquoi je versai encore deſſus $\frac{5}{4}$ de livre d'huile de chénevis cuite: je renveloppai le mêlange & le remis dans la caiſſe. Au bout de 11 heures le paquet devint chaud & odorant: l'incandeſcence commença 16 heures après l'imbibition. Pendant 6 heures il brula ainſi ſans flammes, avec une fumée épaiſſe & griſâtre tirant ſur le blanc. Après quoi il continua encore à ſcintiller & bruler en flammeche pendant 6 autres heures. La cendre peſoit 7 onces, 3 dragmes.

Trente-troiſieme expérience.

Le 21 de Juillet. Pour trouver la moindre quantité de matiere capable de produire l'inflammation ſpontanée, je fis cette 33^{e} expérience avec 1 l de ſuie de Ruſſie, imbibée d'1 $\frac{1}{2}$ l. d'huile de chénevis cuite: au bout d'une heure je l'enveloppai dans de la toile & la mis dans la caiſſe: mais je n'y remarquai aucun changement.

Trente-quatrieme expérience.

Le 24 de Juillet. Une livre de noir de Ruſſie, ayant été imbibée de $\frac{5}{4}$ l. d'huile de chénevis cuite, fut auſſitôt enveloppée de toile & miſe dans la caiſſe. Après l'eſpace de 6 heures elle devint tiede & odorante; mais la tiédeur & l'odeur ſe perdirent à la fois au bout de quatre autres heures.

Trente-cinquieme expérience.

Le 26 de Juillet. Une livre de noir de Ruſſie, fut imbibée d'une quantité pareille d'huile de chénevis cuite, & miſe au bout de 3 heures dans la caiſſe, étant enveloppée de de toile. Six heures après le mêlange, elle s'échaufa sensiblement; mais au bout de 2 heures elle se refroidit.

Trente-sixieme expérience.

Le 29 de Juillet. Une livre de noir de fumée de Russie, ayant été imbibée d'$\frac{3}{4}$ de livre d'huile de chénevis cuite, fut enveloppée de toile au bout de 2 heures; ce que fesant, je trouvai qu'un seul des amas qui s'étoient formés, avoit contracté quelque chaleur. Après que ce paquet eut reposé 2 heures dans la caisse, l'odeur accoutumée se fit sentir avec une chaleur générale, qui s'augmenta bientôt. Six heures après le mélange, s'ensuivit l'incandescence sans flammes qui dura 8 heures; & enfin le résidu de cendres pesa 6 onces, 6 dragmes.

Trente-septieme expérience.

Le 6 d'Aout. J'ouvris tous les paquets qui n'étoient par parvenus jusqu'à l'ignition, & je trouvai que les masses qui avoient été en réaction étoient devenues plus uniformes, plus gluantes, & plus molles, tandis que celles qui étoient demeurées tout à fait inactives, ne s'étoient qu'un peu dessechées. Je fis faire un mêlange uniforme de toutes ces compositions différentes: j'en employai une partie à des expériences d'un autre genre, & je partageai le reste en deux portions égales. J'en mis une moitié dans un pot que je couvris négligemment, & que je posai à un endroit sûr & tranquile du laboratoire: mais cette masse qui pesoit 25 livres demeura inactive.

Trente-

Trente-huitieme expérience.

Je mis l'autre moité du même reſte dans un pot ſemblable au précédent: comme la maſſe étoit, auſſi bien que la premiere moitié, un peu molle, je jettai encore deſſus 1 l. de ſuie de Ruſſie; puis je couvris le tout légerement d'une planchette. Mais dans l'eſpace de pluſieurs ſemaines, il ne s'y montra pas le moindre changement.

Du depuis j'ai répété pluſieurs fois la 17^e & 32^e expérience, & toujours heureuſement, avec cette ſeule différence que l'intervalle de tems qui s'écoula depuis le mêlange jusqu'à l'inflammation ne fut pas toujours égal, ayant été plus court dans un temps ſerein, & plus long dans des tems de pluie.

Je paſſe ſous ſilence pour le préſent les expériences que j'ai faites avec les cendres qui ſont restées après les inflammations précédentes, & avec ces mêmes mixtions par diſtillation &c.

Et afin que l'on puiſſe comparer d'une ſeule vue mes expériences entre elles & avec celles de l'Amirauté je les rangerai ici en forme de table, y ajoutant le tems qu'il a fait pendant que je m'en ſuis occupé.

Table

Table de plusieurs Expériences concernant l'inflammation spontanée du noir de fumée avec différentes huiles.

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mêlange.	Succès, & Remarques.
1.	Pluvieux.	Noir de Russie 1 ℔.	Huile de lin crue, 1 ℔.	Simplement mêlé.	A découvert & non enveloppé.	Point de changement.
2.	Pluvieux.	Noir de Russie 1 ℔.	Huile de chenevis crue, 1 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
3.	Pluvieux.	Noir de Russie 1 ℔.	Huile d'olive crue, 1 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
4.	Pluvieux.	Noir d'All. ou d'Hollande. 1 ℔.	Huile de lin crue, 3 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
5.	Pluvieux.	Noir d'Allem. 1 ℔.	Huile de chenevis crue, 3 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.
6.	Pluvieux.	Noir d'Allem. 1 ℔.	Huile d'olive crue, 3 ℔.	Mêlé.	A découvert.	Point de changement.

Expérience.	Beau & mauv. tems	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mélange.	Succès, & Remarques.
7.	Pluvieux.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔	Paitri.	Enveloppé de toile au bout d'1 hr.	Chaud après $3\frac{1}{2}$ heures, puis refroidi.
8.	Pluvieux.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, 2 ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout d'1 heure.	Point de changement.
9.	Pluvieux.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, 1 ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout d'1 heure.	Point de changement. Voyez la 7e Expérience.
10.	Sec.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de lin, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Paitri.	Enveloppé après 1 h.	Point de changement.
11.	Sec.	Noir de Russie & d'Allem. environ 15 ℔.	Huile de chenevis, de lin, & d'ol. envir. 17 ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout de 2 heures.	Point de changement. C'étoit un assemblage des masses précédentes.
12.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de lin, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔. & Naphte $1\frac{1}{2}$ once.	Paitri.	Enveloppé aussitôt.	Point de changement.

Ex-

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mélange.	Succès, & Remarques.
13.	Pluvieux.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis, cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Paitri.	Enveloppé au bout d'1 heure.	Point de succès. C'étoient les matériaux de l'Amirauté.
14.	Pluvieux.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Paitri.	Enveloppé au bont d'1 heure.	Point de succès. C'étoit de mes matériaux que je voulois comparer avec les précedents.
15.	Pluvieux	Noir de Russie, 4 ℔.	Huile de chenevis cuite, 2 ℔.	Mêlé.	Non enveloppé.	Echauffé au bout de 9 heures, puis refroidi.
16.	Serein.	Noir de Russie, 4 ℔.	Huile de chenevis cuite, 3 ℔.	Mêlé.	D'abord enveloppé.	Point de changement.
17	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 h.	En feu au au bout de 18 h. après le mêlange.

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mêlange.	Succès, & Remarques.
18	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 heur.	En feu au bout de 44 h. après la mixtion. V. la 17. Exper.
19.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de lin cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 h.	Chaud au bout de 17 h. après la mixtion, puis froid.
20.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile d'ol. cuite, 4 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.
21.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile d'ol. cuite, 2 ℔	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.
22.	Serein.	Noir de Russie, 2 ℔.	Huile de térébentine 2 ℔.	Mêlé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.
23.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de bouleau ou Diogar, 3 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	Chaud pendant l'enveloppement, puis froid au bout de 2 h.

Ex-

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de mêler.	Tems de l'enveloppement après le mélange.	Succès, & Remarques.
24.	Serein.	Suie de cheminée, $3\frac{1}{2}$ ℔.	Huile de chenevis cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	Point de changement.
25.	Serein.	Suie de cheminée, 4 ℔.	Huile de chenevis cuite, 1 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Devint tiede, puis froid.
26.	Serein.	Noir d'Allem. $\frac{3}{4}$ ℔.	Huile de chenevis cuite, $2\frac{1}{2}$ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	Sans succès.
27.	Serein.	Noir d'Allem. $\frac{3}{4}$ ℔.	Huile de chenevis cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 2 h.	S'échauffa après 70 h., & la chaleur dura 36 h.
28.	Pluv.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 5 h.	Chaud durant l'enveloppement, puis froid, puis de nouveau chaud au bout de 40 h. Voyez la 17. & 18. Exp.

Expérience	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de meler.	Tems de l'enveloppement après le mêlange.	Succès, & Remarques.
29.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, 5 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 4 h.	Fut chaud pendant l'enveloppement, & prit feu 13 heur. après le mêlange. V. la 17, 18, & 28. Exper.
30.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis crue, 3 ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 4 h.	S'embrasa 13 h. après le mêlange.
31.	Pluv.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, $1\frac{1}{4}$ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout de 4 h.	S'échauffa 7 h. après la mixtion, puis se refroidit.
32.	Serein.	Noir de Russie, 3 ℔.	Huile de chenevis cuite, $2\frac{1}{4}$ ℔.	Imbibé.	D'abord enveloppé.	Prit feu au bout de 16 heures.
33.	Serein.	Noir de Russie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, $1\frac{1}{2}$ ℔.	Imbibé.	Enveloppé au bout d'1 h.	Point de changement.

Ex-

Expérience.	Beau & mauv. tems.	Noir de fumée.	Huile.	Maniere de meler.	Tems de l'enveloppement après le mêlange.	Succès, & Remarques.
34	Serein.	Noir de Russie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, $1\frac{1}{4}$ ℔.	Imbibé.	Aussitôt enveloppé.	Chaud au bont de 6 h. puis refroidi.
35.	Serein.	Noir de Russie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, 1 ℔	Imbibé.	Enveloppé au bout de 3 h.	S'échaufa 6 h. après la mixtion.
36.	Serein.	Noir de Russie, 1 ℔.	Huile de chenevis cuite, $\frac{3}{4}$ ℔.	Imbibé.	Enveloppe au bout de 2 h.	*Prit* feu 6 heures après la mixtion.
37.	Serein.	Restes qui n'avoient pas pris feu, environ 25 livres.		Paitri.	Mis aussitôt dans un pot & couvert.	Point de changement.
38.	Serein.	Restes qui n'avoient point pris feu, 25 ℔.		Paitri.	Mis dans un pot, jetté dessus 1 ℔ de Noir de Russie, & couv.	Point de changement.

L'inflammation spontanée de la suie avec de l'huile est une decouverte si importante, que l'Amirauté impériale de Russie. & S. E. Mr. le Comte de *Czernischef*, qui en est le Vice-President, ne peuvent que s'attendre à la reconnoissance de tous les amateurs de Chymie, de Physique, & même de science économique, pour avoir publié leurs ob-

observations là dessus. Cette découverte sert à étendre nos connoissances sur les réactions des corps, sur la production & la manifestation du feu, sur les précautions nécessaires pour prévenir des incendies qui pourroient résulter de négligence ou d'inattention sur cet objet. Elle mérite aussi notre attention, en ce que les matieres qui produisent cette inflammation, étant faciles à aquérir, pourroient devenir des instruments dangereux dans les mains des incendiaires; d'autant plus qu'on peut aisement les placer où l'on veut, & que leur effet n'étant pas d'abord visible, les scélérats qui s'en serviroient auroient encore assés de tems pour se sauver par la suite.

Pour ce qui est de mes expériences, j'y ai tâché principalement de découvrir quelles sont les sortes de noir de fumée & d'huile qui s'enflamment après avoir été mêlées, en quelle proportion il faut prendre ces deux substances, comment il faut les mêler & les manier pour qu'elles s'enflamment le plus sûrement, & en combien petite quantité ces matieres sont en état de prendre feu. Or à tous ces égards, si l'on fait attention aux expériences de l'Amirauté & aux miennes, on pourra en tirer les conséquences suivantes.

Quant à la suie, il paroit que les expériences réussissent mieux avec le noir de fumée commun de ce pays-ci, qui semble être un peu gras, qu'avec celui d'Hollande ou d'Allemagne, qui est fin & sec, & qu'avec la grossiere suie de cheminée. Entre les huiles, on n'a trouvé propres à l'inflammation que celles qui sont tirées des végétaux par expression, & parmi celles-ci il faut prendre les

les plus ſiccatives: elles produiſent l'effet requis, ſoit qu'on les emploie cuites ou crues. Il eſt vrai que toutes les expériences qui ont réuſſi, ont été faites avec de l'huile de chénevis; mais il eſt indubitable, que ſi l'on s'étoit ſervi tout auſſi ſouvent d'huile de pavot, de lin, de noix, ou de toute autre huile ſiccative, les effets auroient été les mêmes. La proportion entre l'huile & la ſuie ne ſauroit être déterminée au juſte. La ſuie s'allume avec une quantité d'huile dont le poids eſt un dixieme, un cinquieme, un tiers, ou l'équipollent, ou même le double du ſien. La proportion la plus ſûre, eſt de prendre un poids égal des deux matieres, ou ſi l'on veut, un peu plus de ſuie, mais plutôt cependant plus d'huile que de ſuie.

Une mixtion légere, ou plutôt une ſimple imbibition de l'huile dans la ſuie, où il arrive qu'une partie de la ſuie demeure ſeche & enveloppe en quelque ſorte de petits amas humides, une pareille imbibition eſt, dis-je, préferable à une mixtion plus intime & au paitriſſement. Quand on mêle les matieres plus intimément, il eſt bon de les ſaupoudrer encore de ſuie ſeche.

L'intervalle de tems depuis la mixtion jusqu'à l'inflammation roule entre 4 & près de 48 heures. Comme je conſervai aſſés longtems durant mes expériences les maſſes avec leſquelles je les avois faites, je n'aurois pu manquer d'appercevoir le mouvement d'ignition, s'il s'étoit manifeſté plus tard dans les matieres qui ne s'étoient pas d'abord enflammées: il paroit donc que le delai de l'inflammation ne va gueres au delà du terme que je viens de marquer. Il eſt très probable que la réaction de la ſuie &

de l'huile dépend auſſi en grande partie de l'état de l'atmoſphère. Car j'ai vu que des mêlanges, qui s'enflammoient ordinairement ſans faute, ont manqué leur effet dans un tems de pluie, ou du moins ont pris feu beaucoup plus tard que de coutume.

Il n'eſt pas d'une néceſſité indiſpenſable d'envelopper les mixtions dans de la toile groſſiere, mais cela ne laiſſe pas de contribuer beaucoup à aſſûrer l'effet. Les grandes maſſes, quand on ſuit les procédés que nous avons indiqués, s'allument beaucoup plus facilement que les petites, & même quelque fois dans des vaſes, ſans être enveloppées de toile. La raiſon en eſt, que dans les grandes la réaction ſe fait à pluſieurs endroits à la fois, de façon qu'il s'y trouve toujours quelque portion de matiere plus diſpoſée que le reſte à s'échaufer jusqu'au point d'ignition. Cependant dès que l'on a aquis une certaine habitude dans la manipulation, & que l'on obſerve ſoigneuſement toutes les précautions dont dépend la réuſſite, il arrive rarement que des maſſes plus petites vous fruſtrent du ſuccès. Néanmoins quand elles ſont trop petites, la chaleur ne ſauroit aſſés s'accroitre, à cauſe de la réfrigération qui provient de l'air extérieur.

Il eſt vrai que l'on peut compter avec aſſés d'aſſûrance ſur le phénomene de l'inflammation ſpontanée, quand on emploie des matériaux convenables en juſte proportion, obſervant en outre une manipulation aiſée en elle-même, mais indiſpenſable: cependant ce phénomene ne ſe montre pas auſſi fréquemment que l'on pourroit ſe le figurer d'après le ſuccès des expériences: car il ne peut

peut arriver que très rarement que le hazard combine exactement toutes les conditions requises; & c'est ce qui fait qu'il y a moins à craindre pour les incendies de ce côté là. S'il n'en étoit pas ainsi, pourquoi n'auroit-on jamais jusqu'ici remarqué ou du moins soupçonné l'inflammation spontanée dont il s'agit, après que l'on a mêlé des millions de fois de la suie avec de l'huile? Il faut convenir même que jusqu'à ce jour on n'y auroit peut-etre point fait attention, si l'esprit pénétrant de notre illustre Souveraine n'en avoit fait un objet de nouvelles recherches, à l'occasion de ce qui arriva à Cronstadt.

Pour ce qui est de l'explication de ce phénomene, on pourroit se la faciliter en fesant une analyse exacte des différentes sortes de suie, par les moyens connus de la Chymie. En attendant je me figure que la chose se fait de la maniere suivante. Les huiles par expression, autant qu'on a pu s'en instruire jusqu'à présent, consistent dans la combinaison de beaucoup de phlogistique ou de matiere inflammable avec de l'acide & de l'eau. La suie est composée d'une terre charbonneuse, d'une grande portion de phlogistique, d'un peu d'acide, & d'alkali volatil. Quand la suie a humé l'huile, de façon que l'une se trouve en certaine proportion avec l'autre, les principes de ces deux matériaux agissent réciproquement les uns sur les autres, par quoi une partie de la matiere inflammable se dégage, & de là se forme un air phlogistique ou une vapeur chargée de matiere inflammable & d'acide, c'est à dire d'une sorte de soufre aërien. Dans un air libre la chaleur sera réfrigérée à mesure qu'elle se forme, & l'air phlogistique déja dégagé se dispersera. Une masse

 consi-

considérable se comprime d'elle-même plus qu'une moindre; la toile comprime encore mieux: ce qui favorise la réaction, garantit la chaleur & les principes dégagés d'une trop prompte dispersion, & modifie l'action de l'air extérieur. La chaleur montée par là jusqu'à un haut degré, & aidée de l'air extérieur, peut faire que la matiere inflammable déja dégagée, & le soufre végétal imparfait contenu dans l'air phlogistique, aquierent le mouvement d'ignition, & produisent l'embrasement. Ce qui prouve que l'alkali volatil contenu dans la suie contribue aussi au succès, c'est l'odeur fetide qui se fait sentir pendant la réaction, & l'expérience de l'or fulminant, qui s'allume par une friction assés légere.

Il paroit que le souffre imparfait, divisé en parcelles separées, ne s'allume pas avec vivacité, ni promptement d'un atome à l'autre, & qu'ainsi il s'éteindroit bientôt, si la suie seche mêlée dans la masse ne lui servoit comme d'amorce, pour prendre & augmenter le feu. La toile dont la masse est enveloppée, outre son usage de compression, sert encore par sa grande combustibilité à favoriser l'embrasement.

Le célebre Mr. *Marggraf* à Berlin, ayant reçu par Mr. *J. A. Euler*, un avis général de l'evènement arrivé à la flotte, & des expériences que l'Académie avoit commencé à faire là dessus, répondit le 15 de Juin en ces termes:

“ Quand, pour combiner intimément de la suie „ avec de l'huile, on les broye ensemble, & les conserve „ dans

„ dans un état de compression; il est trés possible que „ le mouvement interne aille au point, que les parties „ constituantes de ces substances se saisissent réciproquement, s'échauffent, & prennent même feu à la maniere „ du pyrophore, dès que la matiere enveloppée est exposée à une promte affluence de l'air extérieur. La „ suie contenant des parties inflammables & d'autres urineuses, & l'huile de chanvre renfermant un acide naturel avec de la matiere inflammable; il est incontestable, par des raisons physico-chymiques, que „ dans une masse composée de ces deux substances, „ il peut aisément se manifester au bout d'un certain tems un mouvement d'ignition, & enfin une „ flamme visible, & cela par l'action & la réaction du „ mouvement interne, qui devient de plus en plus violent, & qui par des causes accidentelles peut être „ porté jusqu'au plus haut point; d'autant plus qu'il y a „ une quantité abondante de matiere inflammable dans les „ deux corps." L'explication de ce grand Chymiste auroit été sans doute encore plus juste & plus précise, s'il eût pu être instruit alors du detail des expériences qui ont été faites, & de leur réussite.

Les cendres des masses consumées par l'inflammation spontanée, sont fort chargées de particules ferrugineuses, particulierement quand on s'est servi d'huile crue avec la suie. Je m'occupe encore à analyser ces cendres. Un mêlange de suie & d'huile, qui ne s'étoit point enflammé, ayant été distillé à la retorte n'a point produit de pyrophore ni de phenomene lumineux. Je me propose

 de

de faire ſur tout cela des recherches ultérieures, dont je publierai les réſultats. En attendant je vais décrire les expériences que j'ai faites ſur l'inflammation ſpontanée du chanvre & du lin avec l'huile; afin de contribuer autant qu'il dépendra de moi à perfectioner le ſyſteme de l'inflammation ſpontanée, & à en faire connoitre les divers genres.

EXPERIENCES
rélatives à l'inflammabilité ſpontanée du chanvre & du lin.

par *Mr. J. G. Géorgi.*

Traduit de l'Allemand

On a pluſieurs exemples d'incendies qui n'ont eu probablement d'autre cauſe que l'inflammation ſpontanée du chanvre, du lin, ou des tiſſus formés de ces matieres végétales. Le terrible incendie arrivé à Rochefort en 1756 ne peut gueres être expliqué autrement. En 1757 le feu prit dans la ville de Breſt à un magazin de prélart, c'eſt à dire de toile à voiles peinte d'un côté d'une couleur compoſée de vernis à l'huile & d'ochre: autant qu'on put s'en inſtruire, on ne put attribuer cet accident à aucune négligence, ni à aucune cauſe extérieure. (Voyez le mémoire de Mr. *Montel* dans l'Hiſtoire de l'Académie de Paris, Année 1760). Dans pluſieurs ports militaires on a vu, non obſtant l'exacte police qui y regne, des incendies dont il a été impoſſible de découvrir les cauſes par les per-

perquisitions les plus soigneuses & les plus séveres. Il y a environ 20 ans, que le feu prit plusieurs fois à une manufacture de cables établie ici, & à des cabanes faites de poutres: on découvrit enfin que cette manufacture employoit à ses ouvrages du chanvre qui s'étoit gâté dans un vaisseau par des tonneaux d'huile crevassés, & que les pauvres gens qui demeuroient dans des maisonnettes de bois avoient acheté de ce chanvre peu couteux pour en calfater leurs demeures: cependant, comme il y avoit encore d'autres circonstances suspectes, on ne put rien affirmer positivement sur la cause de ces fréquens incendies. Mr. *Schroeter*, qui a toujours été attentif aux événemens qui se rapportent à la physique, se souvient d'avoir entendu dire dans ce tems-là, que les cables que l'on avoit faits de ce chanvre humecté d'huile avoient coutume de s'échaufer quand on les accumuloit en grands rouleaux les uns sur les autres, & qu'on étoit obligé de les disperser pour leur donner de l'air. L'incendie terrible de 1780 qui consuma nos magazins de chanvre, ne peut avoir été l'effet que d'une inflammation spontanée ou de la malice la plus impénétrable, vu les précautions qu'on avoit prises pour éviter de pareils accidents, & la regle qu'on observe de ne soufrir aucun feu tant sur l'ile où les magazins sont bâtis, que sur tous les vaisseaux de la Néva. Les soupçons qu'on eut à cette occasion d'une inflammation spontanée porterent Sa Majesté Impériale à ordonner des recherches physiques au sujet de la fregatte qui prit feu à Cronstadt (Voyez la Lettre de S. E. Monsieur de Comte de *Czernichef*, à l'Académie des sciences).

C'est

C'eſt ce qui donna lieu aux expériences ſur l'inflammabilité ſpontanée du chanvre que l'amirauté ajouta à celles qu'elle avoit faites ſur la ſuie & l'huile. Comme ces expériences rélatives au chanvre ont été en petit nombre & faites en petit, je vais décrire ici les miennes par rapport au même objet. Il eſt vrai qu'il n'y en a aucune qui m'ait réuſſi juſqu'ici; mais pour ceux qui font des recherches, il n'eſt pas ſuperflu de ſavoir quels ſont les eſſais qui ne réuſſiſſent point, afin qu'ils ne ſe donnent pas la peine de chercher là où on ne ſauroit rien trouver. Il faut encore remarquer que les mois d'Aout & de Septembre pendant lesquels je fis mes premieres obſervations, fournirent preſque toujours un tems ſec; mais les ſuivantes que je fis en Octobre & Novembre, furent pour la plupart accompagnées d'un ciel humide & pluvieux.

Premiere expérience.

Huit aunes de toile de lin de Ruſſie, groſſiere mais blanchie, furent peintes d'un côté moyennant une mixtion broyée d'une demi-livre de ſuie de Ruſſie, & de 3 ℔ de vernis à l'huile; & le jour ſuivant la peinture s'étant paſſablement deſſéchée, on y en mit une ſeconde couche. En triturant la ſuie avec l'huile, on obſerva que le vernis étoit devenu plus odorant qu'auparavant, & durant le premier quart d'heure il s'y forma tant de petites ampoules d'air, que la mixtion en prit une apparence écumeuſe. Le troiſieme jour après que cette toile eut été peinte pour la ſeconde fois, on la mit en rouleau bien ferme, on l'entoura de ficelle, & on la poſa en lieu de ſûreté en cas d'inflammation. Mais il il ne s'y manifesta pas la moindre chaleur, ni aucun autre changement. Au bout de 12 semaines, on ouvrit ce tapis roulé: la couleur avoit pénétré d'outre en outre la toile qui en étoit devenue fort glutineuse; mais elle se trouva au reste dans le même état qu'auparavant.

Seconde expérience.

Huit aunes de toile de lin grossiere furent peintes, comme ci devant à la maniere des tapis, avec une couleur bien broyée, composée de 4 ℔ de minium & de 3 ℔ de vernis à l'huile: on y mit deux couches de couleur: puis, la toile étant passablement seche, on la mit en rouleau. Au bout de 3 mois on trouva le rouleau considérablement collé, mais sans autre changement.

Troisieme expérience.

On prit 10 ℔ de chanvre commun, qui avoit été bien séché au four, & qui avoit perdu par l'exsiccation 8 ℔ sur le poud, c'est à dire un cinquieme de son poids. On humecta ces 10 ℔ de chanvre, d'une maniere fort égale, avec ½ ℔ d'huile de chénevis crue: on mit le chanvre en pelotte: on l'enveloppa d'un morceau de natte faite d'écorce de tilleul, de maniere que la natte ne fesoit qu'une fois le tour: on serra le tout aussi ferme que possible avec une corde, & on marqua ce paquet par No. 1. De jour je mettois le paquet au soleil & de nuit dans le laboratoire: durant la premiere semaine il reçut chaque jour la chaleur du soleil. Au bout de 8 semaines j'ouvris le paquet, & n'y vis aucun changement, à l'exception d'un peu plus de secheresse.

Quatrieme expérience.

Dix autres livres de chanvre féché furent humectées d'une livre d'huile de chénevis crue, & traitées en tout comme le paquet précédent. Le fuccès ne fut pas meilleur. Ce paquet étoit marqué No. 2.

Cinquieme expérience.

On humecta 10 ℔ de chanvre fec avec 2 ℔ d'huile de chénevis crue, on les traita comme les paquets précédents qui avoient été numérotés par 1 & 2, & on marqua celui-ci par No. 3. Huit femaines fe pafferent fans qu'on y remarquât la moindre altération.

Sixieme expérience.

On prit 10 ℔ de chanvre fec: ou l'imbiba de 4 ℔ d'huile de chénevis crue: il s'empara de toute l'huile & en fut fort mouillé. On en fit un paquet femblable aux autres, qui fut marqué No. 4. Il demeura également 8 femaines fans aucun changement.

Septieme expérience.

Six pelottes de chanvre de la groffeur du poing, furent imbibées de la quantité d'huile de chénevis qu'elles purent humer, ce qui prit 2 ℔ de cette huile. Je difpofai ces pelottes dans un tas de 10 ℔ de chanvre fec, de façon que les unes fe trouvoient vers le centre, d'autres plus près de la furface, d'autres au niveau de la furface. Le tout fut mis dans une piece de natte & lié de

cordes.

cordes. J'y mis le No. 5. Il ne s'y fit point de changement. Je fis cette expérience à l'imitation de celles que j'avois faites avec de la ſuie, & où j'avois vu que le ſuccès dépendoit beaucoup de certaines molécules imbibées d'huile, & entourées de matiere ſeche.

Huitieme expérience.

Une natte d'écorce de bouleau fut imbibée de 2 ℔ d'huile de chénevis. Dans cette natte furent enveloppées 10 ℔ de chanvre ſec, que l'on comprima avec des cordes autant que poſſible. Le paquet fut marqué No. 6. Si l'incendie des magazins à chanvre a eu pour cauſe le contact du chanvre & de l'huile, cette huile ne pouvoit y avoir été introduite que par des nattes huilées. Cependant ce paquet, ayant été ouvert au bout de 7 ſemaines, ne montra aucun ſigne de changement. Seulement le chanvre avoit contracté une odeur très forte de renfermé ou de relant, ce que j'avois auſſi obſervé dans les expériences précédentes.

Je ne fis point pour cette fois d'expériences avec des huiles cuites ou des vernis, parceque ces vernis ne peuvent gueres ſe trouver en contact avec le chanvre ou le lin ſoit dans des magazins, ſoit dans des vaiſſeaux, & y cauſer du dommage.

Il eſt connu que le foin ou le blé quand il eſt humide & entaſſé en grande quantité, s'échauffe & s'enflamme quelque fois. Ceci pourroit auſſi arriver au chanvre & au lin, quand il y a des ballots qui tombent dans l'eau, qui sont humectés par la pluie ou mouillés de quelque maniere que ce soit. Par cette raison je fis les expériences suivantes.

Neuvieme expérience.

Je pris 10 ℔ de chanvre très sec, je l'humectai uniformément & également de 2 ℔ d'eau, je le liai bien ferme dans une natte simple d'écorce, je marquai le paquet No. 7, & le posai dans le laboratoire. Il ne s'en suivit point de changement. Au bout de 7 semaines le paquet fut ouvert, il en sortit une odeur de relant très forte, & le chanvre étoit devenu friable par la moisissure: il n'avoit subi d'autre altération depuis que je l'eus empaqueté.

Dixieme expérience.

10 ℔ de chanvre, ayant été imbibées d'une maniere uniforme de 5 ℔ d'eau de Néva, empaquetées comme précédemment, & marquées No. 8; il ne s'y manifesta aucun changement. Le paquet ayant été ouvert au bout de 7 semaines, le chanvre se trouva fort blanc, & si friable qu'à l'aide d'un bâton on pouvoit presque le broyer; il n'étoit pas seulement aisé de le déchirer, mais aussi de le casser. L'odeur de relant étoit très sensible. Je le remis en paquet pour voir s'il s'y manifesteroit d'autres changements.

Onzieme expérience.

Je versai peu à peu 10 ℔ d'eau de Néva sur 10 ℔ de chanvre sec, qui en devint fort mouillé, sans qu'on qu'on pût néanmoins en exprimer l'eau à la main. Je l'emballai comme ci-devant dans une natte, & le marquai du No. 9. Au bout de 7 semaines je trouvai le chanvre comme dans la 10^e expérience: la moisissure n'étoit gueres plus sensible, quoiqu'il y eût plus d'eau. Je le rempaquetai aussi.

Il est vrai que dans de grands tas de chanvre ou de lin les effets pourroient bien être différents de ce qu'ils sont dans ces sortes de petits essais. Cependant ces expériences en petit devroient au moins, si l'on attrapoit une fois le vrai point, manifester quelque chaleur ou quelque autre phénomene, qui montreroit la route qu'on auroit à suivre pour réussir en grand, ou pour approcher de la réussite. Le tems humide qu'il fit pendant plusieurs semaines consécutives étoit sans doute un obstacle considérable, mais pourtant pas assés grand pour empêcher seul tout succès. L'expérience de l'Amirauté où il y a eu inflammation dans un mêlange de suie, de chanvre & d'huile, n'est point décisive pour le chanvre, vu que la suile & l'huile sans chanvre s'enflamment ensemble.

L'expérience journaliere nous montre que le lin, le chanvre & les étoupes ne s'échaufent & ne s'enflamment pas par eux-mêmes quand on les a fait entrer avec violence dans les interstices du bois, soit aux fenêtres, soit aux poutres ou troncs d'arbres des cabanes, & qu'ils sont exposés ainsi à une vicissitude continuelle de sécheresse & d'humidité. Le calfatage des vaisseaux & les cordages poissés dont on se sert dans la marine, prouvent aussi suffisamment que le chanvre poissé ne s'échauffe & ne s'enflamme pas à l'air libre sec ou humide. Il ne reste donc qu'à savoir ce qui arrive au chanvre ou au lin, quand il est imbibé d'huile, & employé au calfatage. C'est à ce sujet que je fis les expériences suivantes.

Douzieme expérience.

Je pris du chanvre, je l'arrosai d'huile de chénevis crue, employant $\frac{1}{2}$ once d'huile pour chaque livre de chanvre, je laissai à l'huile le tems de pénétrer le chanvre: puis je le mis par couches entre les surfaces de 4 planches neuves de bois de sapin, passablement fortes, longues de 2 piés & larges de 6 pouces. Les couches de chanvre étoient de l'épaisseur d'un doigt. Les planches qui alternoient avec le chanvre, & qui étoient par conséquent paralleles avec les couches, furent clouées ensemble avec de longs clous de fer rivés, ce qui comprima le chanvre autant que possible: j'avois fait rogner un peu les bords angulaires des planches, afin qu'elles formassent des crevasses élargies en dehors. Je fis entrer dans ces crevasses à coups de repoussoir & de marteau autant de chanvre huilé qu'elles en purent contenir. Ce faisceau de planches si bien calfaté, & marqué No. 1, reposa d'abord deux semaines dans le laboratoire, puis deux autres semaines à l'air libre. Il ne s'y fit pas le moindre changement.

Treizieme expérience.

Je fis un autre faisceau de planches exactement semblable au précédent, également rempli de couches de chanvre,

chanvre, cloué & calfaté; à l'exception que j'employai $1\frac{1}{2}$ once d'huile sur la livre de chanvre. Le chanvre dont j'eus besoin cette fois-ci pesoit environ $1\frac{1}{2}$ ℔. Ce faisceau, marqué No. 2, fut posé à côté du précédent & soigneusement observé; mais je n'y remarquai aucun phénomene.

Quatorzieme expérience.

Un autre faisceau encore, aussi composé de 4 planches juxtaposées, fut rempli de chanvre qui depuis plusieurs jours avoit été imbibé de 3 onces d'huile par livre: il fut cloué & calfaté comme les précédents, marqué No. 3, & mis avec les autres. Je n'y remarquai rien non plus.

HISTOIRE NATURELLE.

I.

Description de l'organe de génération du Rhinoceros à deux cornes.

Mr. le Docteur *Sparrmann*, connu par les observations botaniques & zoologiques qu'il a faites pendant plusieurs années au Cap de Bonne-espérance, a communiqué à l'Académie le dessin de l'organe de génération du Rhinoceros à deux cornes, qui est l'espèce ordinaire au Cap., & que les observations les plus modernes ont déja fait entrevoir comme très différente du Rhinoceros de l'Inde. La forme très caractérisée de cet organe, par lequel le Rhinoceros à deux cornes se rapproche en quelque façon du cheval, ressemble si peu à la figure que Mr. le Docteur *Passons* a donnée de cette même partie du Rhinoceros à une corne, qu'on peut alléguer ce caractère comme une nouvelle preuve de la différence spécifique de ces deux animaux.

Planche I. La Planche I^re^ représente un membre du Rhinoceros à deux cornes, en grandeur naturelle: les lettres

a a indiquent le bord coupé du prépuce retiré.

b b le frein du prépuce.

c c le corps du membre.

d d

d d deux élévations charnues ou caroncules longitudinales au deſſus de ſa baſe.

e e un rebord charnu, qui couronne le gland & s'avance au bas en demi-cercle.

f f le gland ovale & tronqué, ceint d'un bord preſque en forme de champignon.

La proportion de ce membre eſt aſſés petite pour un animal, qui a onze pieds de longueur ſur ſept de hauteur & une circonférence de 12 pieds: toute ſa longueur n'étoit que de 7 pouces, la circonférence à la baſe 6, le grand diamètre du gland 1 p. 4 lignes, le petit diamètre 1 pouce: la hauteur des caroncules paraboliques d'environ 1 p. 6 l. leur étendue en longueur 2 p l'épaiſſeur 3 l.

Dans un Rhinoceros plus avancé en age, dont la longueur excedoit de quelques pieds les meſures données, & qui avoit les cornes bien plus grandes, cette partie ne s'eſt gueres trouvée de la moitié plus grande que dans le premier. Mr. *Sparrmann* conclut de ces proportions, que l'accouplement du Rhinoceros ne ſauroit avoir lieu de la maniere conjecturée par Mr. le Comte de *Buffon*.

II.

Extraits des Rapports envoyés à l'Académie par M. le Translateur *Jährig*.

1. Teinture en jaune des Calmoucs.

Une eſpéce de *Lichen*, qui couvre en certains endroits la surface des deserts les plus arides vers la mer Caspienne & qui semble être le même que *Dillenius* a decrit sous le nom de *Lichenoides ceratophyllum obtusius & minus ramosum* (Histor. muscor. p. 154. tab. 20 fig. 49) promet une bonne teinture d'un jaune tirant sur le souci. Le Translateur *Jährig* l'a vu employer par les Calmoucs pour teindre leurs étoffes de cotton, avec une addition d'alun & d'écorce de pommier sauvage. Les garçons Calmoucs le mâchent & en enveloppent les astragales d'animaux, qui servent à leurs jeux, & ces os, après avoir reposé pendant une nuit, se pénètrent d'une belle couleur jaune, que la pâte du Lichen leur communique. Ce même Lichen mâché sert encore d'un bon cataplasme vulnéraire au peuple Calmouc.

2. Remede des Calmoucs contre les maladies de la peau.

L'Aristoloche (Aristol. Clematiles) au rapport du même voyageur, est employée par les Calmoucs en décoction, comme un remede externe contre les maladies de la peau. Ils en lavent aussi leurs faucons de chasse, lorsqu'au printemps ils se trouvent attaqués de la galle & qu'ils portent mal leurs plumes. Le bain de cette décoction de l'herbe seche, dont on fait provision pour cet effet, fait promptement tomber leur vieilles plumes & favorise le cru des nouvelles.

3. Des Rats d'eau.

Ces animaux, d'après les observations de Mr. *Jährig* se multiplient très fort sur les îles du Volga, surtout pendant l'inonl'inondation de ce fleuve qui dure fort avant dans l'été: ils ſe tranſportent auſſitôt que l'eau du fleuve eſt rentrée dans ſon lit, par une eſpece de migration, ſur les prairies qui le bordent, marchant de tous côtés par grandes troupes & s'écartant aux approches de l'hyver fort avant dans les déſerts élevés, où ils deviennent fort importuns par les dégats qu'ils font à l'économie des Calmoucs: ceux-ci s'en vengent de leur côte en employant les peaux de ces animaux pour des fourrures.

4. Remede des Calmoucs contre des tumeurs gangreneuſes.

Ces tumeurs gangreneuſes attaquent les chevaux, le bétail & même les hommes dans les baſſes-terres le long du Volga par une cauſe juſqu'a préſent inconnue. Les Calmoucs recommandent contre ce mal, comme un remede très efficace une eſpece de *Statice* qu'ils appellent *Tuſchut*. Ils découpent cette plante un peu aſtringente, & en nourriſſent les chevaux attaqués ſans leur permettre d'autre aliment.

5. Remede de ces mêmes Nomades pour exciter le ſaignement de nez.

Ils employent pour ſe procurer ce bénéfice, ſouvent très ſalutaire dans les maux des yeux & les engorgemens du cerveau, d'une eſpece de *Gramen*, décrite ſous le nom *d'Agroſtis pungens*, dans l'ouvrage de Mr. *Schreber* ſur les Graminées, & dont les Arabes ſe ſervent pour ſcarifier les hémorrhoïdaires. Les Calmoucs font des pelottes de cette plante, dont les feuilles viennent naturellement par petites touffes: ils les introduiſent dans les narines & les agitent en différens ſens, jusqu'à ce que l'effet déſiré s'enſuive.

6. De la plante appellée *Prénanthes chondrilloïdes.*

Cette plante vient communement dans les ſables le long du Volga: elle produit autour de ſa racine une eſpece de Gomme-réſine fort tenace, qui n'eſt que le ſuc laiteux de cette plante inſpiſſé dans les ſables. Les Calmoucs le recueillent & aiment à le mâcher, ce qui le change en colle extremement tenace & élaſtique, ſemblable en quelque façon à la réſine élaſtique du Bréſil.

III.

Analyſe chymique d'une eſpèce de Gomme-réſine qui ſe produit autour de la racine du Prenanthes chondrilloïdes.

par Mr. *Géorgi.*

Cette réſine que Mr. *Jährig* a envoyée du déſert des Calmoucs, eſt gluante & d'un noir tirant ſur le verd, tant qu'elle eſt fraiche. Longtems expoſée à l'air durant l'eté, elle devient un peu plus tenace & plus noire: elle ne perd que peu de ſa maſſe en ſe deſſechant. Le papier dans lequel on la garde en eſt imbibé comme d'une huile graſſe, & cette graiſſe ſe montre auſſi dans d'autres expériences.

Quand

Quand on mâche cette résine, elle cause une grande affluence de salive, mais la salive n'en change ni de couleur ni de gout, & n'en devient pas même plus glaireuse qu'elle n'étoit. Dix grains de résine ayant été mâchés fortement pendant une heure, avoient à peine perdu un grain de leur poids: elle en devint plus noire, un peu plus gluante & plus extensible, sans souffrir aucun autre changement.

Elle s'allume aisément à la flamme d'une chandelle, & produit elle même une flamme jaunatre, qui donne une suie noire & légere en grande quantité. Quand on en allume un morceau en forme de cone & qu'on le laisse bruler sur du papier blanc, ce papier s'imbibe tout à l'entour d'une graisse semblable à l'huile. Si on éteint la résine avant qu'elle ait achevé de brûler, on peut l'étendre comme de la cire à cacheter, mais elle est trop gluante & trop visqueuse pour conserver des empreintes. Si on la laisse brûler jusqu'à ce qu'elle s'éteigne d'elle même, il reste de 20 grains de résine 8 grains d'un charbon noir & tenace qui se laisse encore paitrir un peu.

Vingt grains, ayant été digérés dans l'eau pendant plusieurs jours & bouillis ensuite, perdirent à peine 2 grains, & les 18 qui restoient n'avoient subi aucun changement.

Vingt grains furent digérés pendant 24 heures dans l'Alkool, c'est à dire dans l'esprit de vin le plus rectifié; après quoi la teinture ayant été décantée on les fit digérer dans de nouvel Alkool, & de même pour la troisieme fois. Il se trouva que l'esprit avoit contracté une couleur jaunâtre, & après l'évaporation il resta 13 grains d'une résine jaune fort tenace. Ce reste se laissoit encore un peu paitrir. Une mixtion d'Alkool de vin & d'une quantité égale d'esprit de nitre en résolut encore 2 grains par digestion. Le demeurant fut jaune, terreux & après la dulcification sans goût, pesant 7 grains. Il s'alluma encore à la chandelle & se changea par là en un charbon noir.

Du vinaigre concentré put à peine par une longue digestion, de 20 grains en résoudre un, & le reste demeura sans changement. De la Naphte de Vitriol (mais qui étoit déja vielle) de 20 grains en résolut 8, qui formoient une résine jaune fort tenace.

L'huile de Térébentine, de 20 grains en résolut 16 par digestion: le demeurant étoit terreux & fort meuble ou léger.

Cette résine se résout dans l'huile d'amande par une longue digestion; mais à peu près la moitié de son poids demeure comme une fange noirâtre & indissoluble. L'huile en devient un peu plus jaune & n'a que très peu d'âpreté au goût.

Une dragme ou 60 grains ayant été mis dans un petit creuset, se fondirent aisément à une chaleur foible, en jettant une forte écume & une fumée épaisse qui avoit quelque chose de douçâtre: la matiere fondue formoit

moit autour d'elle-même un bord de graiſſe. Le réſidu fut un charbon noir & tenace, lequel étant calciné plus fortement fuma encore & s'alluma. Après un feu plus violent, il reſta 13 grains d'une cendre jaunâtre & terreuſe, qui, dulcifiée par l'eau donna deux grains de ſel Alkali. Du demeurant, que les acides faiſoient encore fermenter, on tira 3 grains de terre calcaire moyennant l'alcide de Salpetre. Le reſte bien dulcifié perdit par la digeſtion avec de l'Acide de Vitriol 1½ grain apparemment de terre alumineuſe. Et le dernier reſte ne fut qu'un ſable de caillou très fin.

Ces expériences ayant été faites, il ne reſta plus aſſés de reſine pour en faire d'autres par la diſtillation. Cependant le detail que nous venons d'expoſer montre que cette ſubſtance eſt du nombre de celles qui, de cette nature, ne ſe trouvent que dans peu de plantes; que cette maſſe réſineuſe, outre l'huile eſſentielle qu'on trouve communément dans toutes les reſines, renferme de plus une huile graſſe & particuliere; & qu'il entre dans ſa texture une partie conſidérable d'une terre fine qui mêlée intimément au reſte de la compoſition, fait que le tout réſiſte ſi opiniatrément à toute diſſolution. Cette reſine ſe montre en pluſieurs points ſemblable à la fameuſe *réſine élaſtique* de l'Amérique; cependant la nôtre ne poſſede qu'en un degré fort inférieur les qualités les plus remarquables de celle-là qui conſiſtent dans une tenacité & une élaſticité extraordinaires.

MÉTÉ-

MÉTÉOROLOGIE.

Hyver de 1778 à 1779.

Les jours ſont marqués ſuivant le nouveau ſtile.

1.

Il neigea pour la premiere fois le 10 Octobre 1778 & pour la derniere fois le 24 Avril 1779. L'intervalle entre ces des deux termes eſt de 196 jours.

2. Il géla pour la premiere fois le 11 Octobre, Therm. de Delisle $151^{d.}$, & pour la derniere fois le 19 Avril, Term. $154^{d.}$. Cet intervalle entre la premiere & la derniere gélée eſt de 190 jours.

3. La Néva fut priſe pendant 135 jours; depuis le 13 Novembre où elle ſe géla en grande partie par un froid de $162^{d.}$; jusqu'au 11 Avril, où elle debacla par une température de $145^{d.}$. Les Glaçons du Ladoga ne parurent pas ce printemps: ils furent tous pouſſés par le vent ſur les côtes du Lac.

4. Depuis le 11 Octobre juſqu'au 19 Avril ſuivant, le plus grand froid obſervé, a été de $201^{d.}$ le 21 Janvier matin: Barom. 28, 55, c'eſt à dire $28\frac{55}{100}$ pouces de

de Paris. Ciel entierement ferein, Vent de Nord-Eft. Le moidre froid à midi a été de $136^{d.}$ le 22 Mars: Barom. 27, 56, ciel couvert en grande partie, pluye & vent de l'Oueft. La différence entre ces deux froids eft de 65 degrés de Delisle.

5. Le froid moyen au matin & au foir a été trouvé

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai	161 degrés
depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin	157 ——

Le froid moyen à midi

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai	153 degrés
depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin	149 ——

6. Le froid au matin & au foir a été depuis le 11 Octobre jusqu'au 19 Avril

1 jour au delà de $200^{d.}$ le 21 Janvier

3 jours entre 190 & 200, le 20. 22. 23 Janvier

9 jours entre 180 & 190, en Decembre, Janvier & Février (*)

26 jours entre 170 & 180, en Novembre, Décembre, Janvier, Février & Mars (**)

39 jours entre 160 & 170, en Novembre —— Avril

97

(*) Le 11. 18. Déc. le 7. 19 Janv. le 9. 11. 12. 14. 16 Février.

(**) Le 20. 26. 27 Nov. le 7. 10. 12. 13. 17. 24. 25 Déc. le 2. 3. 6. 10. 13. 15. 16. 17 Janv. le 2. 3. 7. 8. 13. 17 Févr. le 4. 5. Mars.

97 jours entre 150 & 160, en Octobre —— Avril
16 jours entre 140 & 150, en Novembre, Février, Mars & Avril.

7. Le froid à midi dans ce même intervalle de temps, depuis le 11 Oct. jusqu'au 19 Avril, a été observé

6 jours moindre que 140$^{d.}$ en Mars & Avril (*)
79 jours entre 150 & 140, en Octobre —— Avril (**)
64 jours entre 160 & 150, en Octobre —— Avril
32 jours entre 170 & 160, en Novembre —— Mars
6 jours entre 180 & 170, en Novembre —— Février
2 jours entre 190 & 180, le 22 Janvier & 12 Février
2 jours entre 200 & 190, le 20 & 21 Janvier

8. L'état du Barometre depuis le 1er Novembre 1778 jusqu'au 1er Mai 1779:

La plus grande élévation 28. 83 le 22 Janvier à 9 h. du soir (***)

La plus petite élévation 26. 93 le 29 Décembre à 8 h. du soir (****)

La

(*) Le 21. 22. 25. 27 Mars, le 12. 15 Avril.

(**) Le 11. 13 —— 26 Oct., le 1 —— 5. 24. 28. 29. 30 Nov., le 1. 2. 4. 14. 15. 19. 21. 28. 29 Dec., le 5. 31 Janv. le 5. 6. 15. 18 —— 28 Fevr., le 1. 6. 9 —— 14. 17 —— 20. 23. 24. 26. 28 Mars, le 1 —— 7. 9. 10. 11. 13. 14. 16. 19 Avril.

(***) Therm. 189. ciel serein, Vent de l'Est.

(****) Therm. 154, ciel nubileux, vent fort du Sud; ensuite neige.

La variation totale - - 2.00, ou deux pouces de Paris

Le milieu - - - 27.83

La hauteur moyenne - 27.91 c. à. d. 27 $\frac{91}{100}$ pouces de Paris

Le Barometre s'est trouvé 107 jours au dessus de 27 $\frac{9}{10}$; 78 jours au dessus de 28; & 62 jours au dessus de 28 $\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9 Les vents forts pendant ce même intervalle de six mois depuis le 1er Nov. jusqu'au 1er Mai, soufflèrent:

6 jours du *Nord*: le 10. 24 Déc. 17. 18 Janv. 13 Févr. 6 Avril.

2 jours du N-E: le 16 Déc. 2 Janvier.

8 jours de *l'Est*: le 11-14, 25 Nov. 18 Déc. 16 Févr. 3 Mars.

8 jours du S-E: le 23. 28 Nov. 6. 7. 31 Déc. 16 Janv. 2 Mars, 9 Avril.

6 jours du *Sud*: le 2. 15 Nov. 29. 30 Déc. 17 Févr. 21 Avril.

8 jours du S-Ou: le 30 Nov. 28 Déc. 26. 28 Janv. 19 Févr. 5 Mars. 22. 28 Avril.

12 jours de *l'Ouest*: le 22 Déc. 3. 10. 13. 30 Janv. 6. 9. 23. 26 Févr. 6 Mars, 11. 24 Avril.

19 jours du N-Ou: le 20. 21. 22 Nov. 11. 17. 23. 25 Déc. 9. 11 Janv. 7. 20 Févr. 10. 15. 29. 30 Mars, 4. 5. 13. 18 Avril.

10. Les vents très forts regnèrent

1 jour du S-E le 6 Janvier.

3 jours du *Sud*: le 8 Déc. 7. 23 Avril.
9 jours du *S-Ou*: le 24 Nov. 12. 19 Déc. 12. 27. 31 Janv. 18 Févr. 12. 16 Avril.
8 jours de *l'Oueſt*: le 20. 21. 27 Déc. 5. 15 Févr. 14. 28 Mars, 15 Avril.
2 jours du *N-Ou*: le 10 Févrièr & le 1 Mars.

11. Les autres variations de l'Atmosphere pendant ces ſix mois d'hyver Novembre —— Avril *incl.* ſont marquées dans la table ci-jointe

Atmoſphere.	1778.		1779.				
	Nov.	Déc.	Janv.	Févr.	Mars	Avril	Somme
jours entierement ſereins.	3	1	6	4	8	4	26
jours entierement couvert	20	15	13	6	8	7	69
Brouillards - - -	1.	3	5	3	4	1	17
Pluie { médiocre - -	4.	4	0	2	3	13	26
Pluie { copieuſe - -	0	0	0	0	0	2	2
Neige { médiocre - -	11	13	13	7	7	9	60
Neige { copieuſe - -	3	1	1	0	1	1	7
Grele - - - - -	0	0	0	0	2	2	4
Aurores boréales { foibles	0	1	0	1	1	1	4
Aurores boréales { reſplen.	1	3	1	6	4	5	20

La quantité de l'eau de pluïe & de neige tombée depuis le 12 Octobre jusqu'au 12 Avril a été trouvée de 5 pouces & $\frac{91}{100}$ de Paris.

PRO-

PROMOTION.

Mr. *Pierre Inohodsof*, Adjoint pour l'Aſtronomie fut reçu & proclamé dans l'Aſſemblée du 7 Janvier Académicien extraordinaire pour la même partie.

MORTS.

Jean Burmann, ancien Profeſſeur de Botanique & Directeur du Jardin médecinal à Amſterdam.

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1776 le 29 Décembre dans l'Aſſemblée ſolemnelle, par la quelle l'Académie Impériale des Sciences célebra le cinquantieme anniverſaire de ſa fondation.

Décédé le $\frac{13}{24}$ Janvier 1779.

Grégoire Nicolaievitſch Teplof, Conſeiller-privé, Sénateur & Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski & de Ste Anne, Honoraire de l'Académie depuis 1747.

Décédé le 30 Mars 1779.

Nous ne donnerons ici qu'une eſquiſſe légere de la vie académique de ce Miniſtre ami des ſciences &

protecteur de ceux qui les cultivoient. Nous ne toucherons pas à ses autres merites envers sa patrie; ils sont à jamais consignés dans les fastes de l'Etat.

Mr. *Teplof* a fait ses premieres études au séminaire de l'Archéveque de Novogorod *Théophane Procopowitsch*, d'heureuse memoire: il y obtint même une place d'Instituteur, & s'y distingua par une traduction latine des Satyres du Prince de Cantemir & par une Géographie de l'Empire de Russie qu'il avoit composée. Ces deux ouvrages cependant ne furent point imprimés.

En 1740 Mr. *Teplof* fut employé à l'Académie des Sciences, d'abord en qualité de Translateur avec la charge de travailler au Catalogue du Cabinet d'Histoire naturelle. Cela lui donna l'envie de s'appliquer à cette science: il s'adonna surtout à la Botanique & eut pour Maître le célèbre Professeur *Amman*.

Il y fit des progrès si rapides, que déja vers la fin de l'année 1741, l'Académie pour récompenser son assiduité & encourager son zèle, le reçut au nombre des adjoints. Mais son vaste génie ne se borna pas à une seule science; en 1742 il donna des leçons de Philosophie morale & fut également applaudi.

Ensuite Mr. *Teplof* fut choisi & nommé pour accompagner en qualité de Gouverneur le jeune Comte *Kyrilke Grégorevitsch Rasoumovski* dans les païs étrangers: honneur distingué qui marquoit le grand cas que l'Impératrice *Elisabeth*, de glorieuse memoire, faisoit déja alors de

ses

ſes talens, & la confiance qu'elle avoit en ſa droiture. A ſon retour le Comte ſon éleve ayant été déclaré Préſident de l'Academie Impériale des Sciences, Mr. *Teplof* travailla au Reglement de ce corps & eut une grand part à ſon renouvellement. Depuis cette époque l'Académie le compta parmi ſes Honoraires.

Les Ouvrages que Mr. *Teplof* a donnés au jour ſont:

1. Знанїе касающееся до философїи во обще часть 1, 1751. *c. à. d.* Notice concernant la Philoſophie en general.

2. Наставленїе Сыну. Inſtruction à ſon fils.

3. Собранїе разныхъ пѣсенъ съ приложенїемъ тоновъ на три голоса. *c. à. d.* Recueil de diverſes chanſons avec la muſique à trois voix.

4. О Засѣвѣ разныхъ тобаковъ чужестранныхъ въ малой россїи *c. à. d.* Méthode de planter diverſes eſpeces étrangères de Tabac dans la petite Ruſſie; ouvrage que Sa Majeſté l'Impératrice a reçu très favorablement & qu'Elle a fait publier & diſtribuer dans tout le pais, par une ordre particulier daté du 11 Avril 1763.

OUVRA-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier sémestre de l'Année 1779.

Dans l'Assemblée du Lundi, 7 Janvier, le Secrétaire de Conférences a présenté un echantillon de la plante dont les Calmoucs se servent pour guérir les faucons de la roigne, & que Mr. le Translateur *Jährig* a envoyé à l'Académie avec un rapport daté de Yenatayefska le 3 Décembre dernier. Cette plante fut reconnue être *l'Aristoloche clematite*. Voyez ci-dessus *Histoire naturelle* pag. 66.

—— —— il a communiqué la lettre imprimée de Mr. *de Magelan* sur le *Respirateur* ou *Inhaler* des Anglois, instrument qui doit servir à guérir la toux catarrale par la respiration des vapeurs de l'eau chaude.

—— —— ensuite un avis sur une édition des ouvrages de musique de feu *Jean-Jacques Rousseau* proposée par souscription

—— enfin

—— —— enfin une lettre de Mr. de *Murr*, Patricien de Nuremberg, qui promet de communiquer à l'Académie une découverte importante pour les aſtronomes. Voyez ci après.

Le 14 Janvier. Mr. le Prof. *Krafft* a remis un catalogue imprimé des manuſcripts & divers deſſins du célébre aſtronome de Nuremberg *George Chriſtoph Eimmart*, mort au commencement de ce ſiecle. Ce catalogue lui a été adreſſé par Mr. *de Murr* pour être préſenté à l'Académie.

Le 18 Janvier. Le Secrétaire a lu & remis un écrit de Mr. *Rottboel*, Profeſſeur de Botanique à Copenhaguen, qui envoie le catalogue des plantes du Jardin de l'Académie Danoiſe, & qui ſouhaite de recevoir en échange celui du Jardin botanique de St. Pétersbourg. Il propoſe enſuite un commerce épiſtolaire entre Mrs. les Botaniſtes des deux Académies, & il offre un troc des plantes tant vivantes que ſéchées, dont l'Académie royale de Copenhaguen poſſède une collection très conſidérable, contre des plantes de Sibérie & des autres contrées du vaſte Empire de Ruſſie. L'Académie a accepté ces propoſitions avec remerciment, & elle a chargé Mr. le Prof. *Lepechin* d'envoyer à Mr. *Rottboel* le Catalogue qu'il demande, & de lier avec lui une correſpondance qui ne ſauroit qu'être très utile & agréable aux deux Académies.

Le 21 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Meſſieurs les Académiciens par Mr. le Prof. *Rottboel* qui envoie de la part de l'Univerſité de Copenhaguen

 le

le 1er volume des ses mémoires imprimés en 4to sous le titre *Acta litteraria Universitatis Hafniensis ad annum* 1778.

Le 28 Janvier. S. E. Mr. le Directeur a présenté de la part de Mr. le Comte de *Harrsch*, Chambellan de L. L. M. M. Impériales & Royales deux Exemplaires de son ouvrage intitulé:

Pyrotechnia sublimis seculi primaevi vel Liber meteororum: 4to Viennae 1778.

Le 4 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. *Wägener* de Moscou, qui envoie un paquet cacheté, à l'adresse de l'Académie Impériale des Sciences, lequel contient des Expériences sur les moyens de prolonger sa vie & de jouïr jusqu'à sa fin d'un parfaite santé. Comme l'Académie existera toujours, elle a conseillé à Mr. *Wägener* de revenir au bout d'un siecle lui présenter sa decouverte.

Le 18 Février. Mr. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de Mr. *Messier*, Astronome de la Marine à Paris, qui communique ses observations touchant la comète apparue le mois précedent.

—— —— Le S$^{r.}$ *Kouliben* Méchanicien de l'Académie a fait voir un miroir parabolique de sa construction, composé de plusieurs petits miroirs plans, qui produit un grand effet, & par le moyen du quel on peut dans des Illuminations de réjouïssance, répréſenter des *Chiffres* de telle

telle couleur que l'on voudra en interposant entre le miroir & la lampe qui est au foyer, des verres colorés. Sa Majesté l'Impératrice a daigné applaudir à cette découverte & en gratifier l'artiste.

Le 22 Février. Mr. le Prof. *Güldenstädt* a remis de la part de Mr. *Hablitzl'*, correspondant de l'Académie à Astrachan, une quantité de semences de la *Nymphaea Nelumbo*; & de la part de Mr. *Jährig* un pacquet de l'herbe nommée *Ephedra monostachya.*

Le Secrétaire a lu & communiqué une lettre circulaire de Mr. *Pahin de Champlain de la Blancherie*, qui envoie diverses feuilles imprimées; le Prospectus d'une *correspondance générale sur les sciences & les arts*; la 1^{ere} feuille des *nouvelles de la république des lettres & de arts* dédiées à l'Académie Royale des Sciences de Paris; & l'Extrait du *journal de mes voyages, ou les causes & les effets de la débauche & de la mauvaise éducation.* Mr. *de la Blancherie* invite Mrs. les Académiciens de contribuer à la perfection de son nouveau Journal, & de lui envoyer les notices & les extraits qu'ils souhaiteroient de rendre publics.

Le 1 Mars. Le Secrétaire a présenté de la part de Mr. *Klügel*, Professeur de Mathématiques à Helmstädt *Analytische Dioptrik. Leipzig* 1778, 4to, ouvrage suivi d'une traduction allemande & enrichie de diverses additions que le même auteur a faite de *l'Instruction détaillée*

 pour

pour porter les instrumens de Dioptrique au plus haut degré de perfection par Mr. Fuss.

—— —— il a lu un extrait de lettre communiqué à l'Académie par S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, dans laquelle Mr. *Jean Power*, Docteur en Médecine à Poleswerth en Angleterre fait part à Mr. *Needham* de deux guérisons remarquables de la Gangrène pratiquées par l'application de l'air fixe ou des cataplasmes fermentans.

Le 8 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. le Prof. *Spielmann* de Strasbourg, qui communique diverses nouvelles littéraires.

Le 15 Mars. Mr. le Prof. *Güldenstädt*, a présenté de la part de Mr. *Hablitzl* les observations météorologiques que ce correspondant assidu a faites à Astrachan pendant le cours de l'année 1778.

Le Secrétaire a remis de la part de Mr. l'Assesseur *Engel*, les observations météorologiques qu'il a faites à Moscou pendant les six dernieres années 1773 — 1778.

Le 8 Avril. S. E. Mr. *de Domaschnef*, Directeur de l'Académie, a notifié la mort du Conseiller-privé *Grégoire Nicolayevitsch Teplof*, Sénateur, Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski & de Ste. Anne &c. Honoraire de l'Académie Impériale des Sciences: décédé le samedi 30 Mars. Voyez ci-dessus pag. 77.

Le

Le Secrétaire a lu deux lettres de Mr. *de Magellan*, qui communique diverſes nouveautés littéraires & qui annonce avec éloge un Cours de Philoſophie expérimentale par Mr. *Atwoot* en 3 volumes in 4^{to}, qu'on imprime par voye de ſouſcription.

Le 12 Avril. Le Secrétaire a préſenté de la part de Mr. le Conſeiller de Cour *Böckmann*, Profeſſeur de Mathématiques à Carlsruh.

Wünſche und Auſſichten zur Vervollkommung der Witterungslehre

brochure de 40 pages in 8^{vo}, écrite avec beaucoup de chaleur & de zèle pour le progrès des connoiſſances météorologiques.

Le 19 Avril. Le Secrétaire a lu un Rapport de Mr. *Jährig*, daté de Yenatayefska, qui envoie une traduction allemande du *Dſchanga*, c'eſt à dire, de la Meſſe pour les trépaſſés que les prêtres Calmoucs liſent à la ſuite des autres prieres pour la délivrance des Ames.

Le 29 Avril. Le Secrétaire a lu un Rapport de Mr. *Jährig*, qui envoie une traduction allemande de *l'Arſchanüh Nomm*, ou Priere de ſacrifice bénit, qu'on fait en préparant la très ſainte offrande des Prêtres calmoucs nommée *Arſchäha*.

Le 3 Mai. Le Secrétaire a remis de la part de l'Univerſité Impériale de Moſcou les Diſcours que Mrs.

 les

les Professeurs *Schaden* & *Tschepotaref*, ont prononcés à une Assemblée solemnelle tenue le 22 Avril à l'occasion de l'Anniversaire de la Naissance de *SA MAJESTÉ L'IMPERATRICE*: le premier en latin *De* CATHARINA *Magna*, *Legislatorum Prima omnium*, *Legislationem suam*, *sapienti ac divino prorsus consilio*, *conscientiae*, *foro ei peculiari consecrato*, *directe inaedificanti*: l'autre en russe:

О способахъ и путяхъ, ведущихъ къ просвѣщенїю.

—— —— il a lu encore un rapport de Mr. le Translateur *Jährig*, qui communique diverses observations concernant les remedes usités par les calmoucs: voyez ci-dessus pag. 66.

Le 10 Mai. Le Secrétaire a remis une Quadrature de cercle, qui lui a été adressée par un anonyme, dont la lettre est sans date: elle a été mise au rebut.

Le 17 Mai. Mr. le Prof. *Laxmann*, a communiqué une lettre très intéressante de Mr. *Kalm*, Professeur d'Histoire naturelle à Abo. Ce célébre voyageur, après avoir mandé quelques nouvelles, assure que de tous les arbres qu'il avoit tirés de l'Amérique septentrionale, le noyer blanc *Juglans alba*, le cérisier noir, *Prunus virginiana* & le Crataegus, *Crus Galli* viennent & prospèrent parfaitement bien en plein air dans la Finlande. Les deux premiers se recommandent par leurs fruits, & le dernier est très propre pour des hayes. Ensuite Mr. *Kalm* qui a aussi voyagé en Russie remarque que les mines de fer

fer aux environs de Toula reſſemblent parfaitement à celles qu'il a vues en Virginie.

Mr. le Prof. *Güldenſtädt* a préſenté un journal que Mr. *Fries*, chirurgien, a tenu l'année paſſée à Samara, & qui contient diverſes obſervations ſur l'état & les variations de l'atmoſphère & ſur les glaces de la Wolga.

Le 24 Mai. Mr. le Prof. *Pallas*, a préſenté de la part de Mr. le Conſeiller d'État *Muller* de Copenhaguen, un mémoire manuſcrit : *De conſervis paluſtribus oculo nudo inviſibilibus.*

Le Secrétaire a remis le 1er volume de l'ouvrage intitulé

Engelbert Kämpfer, Geſchichte und Beſchreibung von Japan: herausgegeben von Hrn. Dohm.

Pour lequel l'Académie avoit ſouſcrit.

Mr. le Prof. *Lexell*, a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar foer Ar 1778. Vol. 39. quatre cahiers.

Danielis Melanderhjelm Fundamenta Aſtronomiae. Vol. I & II.

Torberni Bergmann Opuſcula Phyſica & Chemica.

Le 27 Mai. Mr. le Prof. *Pallas*, a communiqué la lettre de Mr. le Prof. *Burmann* à Amſterdam, qui notifie

tifie la mort de ſon pere *Jean Burmann*, ancien Profeſſeur de Botanique, & membre externe de l'Académie Impériale, décédé le $\frac{13}{24}$ Janvier. Voyez ci-deſſus pag. 77.

Le 3 Juin. Le Secrétaire a préſenté la troiſieme partie du II$^{d.}$ Tome de l'Hiſtoire & Mémoires de la Société formée à Amſterdam en faveur des Noyés, qu'elle a envoyée & adreſſée à l'Académie.

Le 14 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre circulaire du Libraire *Pierre Fréderic Goſſe* de la Haye, qui envoie un Catalogue imprimé des livres qui ſeront vendus aux plus offrans, le 30 Août & jours ſuivans.

Le 21 Juin. Mr. le Prof. *Laxmann*, a préſenté & lu le projet d'un voyage phyſico-économique, qu'il va entreprendre encouragé par l'approbation de S. E. Mr. *de Domaſchneſ.* Le Secrétaire a été chargé de dreſſer conformement à ce projet, un plan de voyage, qui enſuite ſera ſigné & expedié à Mr. *Laxmann.*

MATHEMATICA.

DE FORMATIONE
FRACTIONVM CONTINVARVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Principium vniuerſale ad fractiones continuas perducens reperitur in ſerie infinita quantitatum A, B, C etc.; quarum ternae ſibi ſuccedentes ſecundum certam legem, ſiue conſtantem ſiue vtcunque variabilem ita a ſe inuicem pendent, vt ſit

$$f\mathrm{A} = g\mathrm{B} + b\mathrm{C},\ f'\mathrm{B} = g'\mathrm{C} + b'\mathrm{D},\ f''\mathrm{C} = g'' + \mathrm{D} + b''\mathrm{E},$$
$$f'''\mathrm{D} = g'''\mathrm{E} + b'''\mathrm{F} \text{ etc.}$$

Hinc enim deducuntur ſequentes aequalitates:

$$\frac{f\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = g + \frac{b\mathrm{C}}{\mathrm{B}} = g + \frac{f'b}{f'\mathrm{B}:\mathrm{C}}$$
$$\frac{f'\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = g' + \frac{b'\mathrm{D}}{\mathrm{C}} = g' + \frac{f''b'}{f''\mathrm{C}:\mathrm{D}}$$
$$\frac{f''\mathrm{C}}{\mathrm{D}} = g'' + \frac{b''\mathrm{E}}{\mathrm{D}} = g'' + \frac{f'''b''}{f'''\mathrm{D}:\mathrm{E}}$$
$$\frac{f'''\mathrm{D}}{\mathrm{E}} = g''' + \frac{b'''\mathrm{F}}{\mathrm{E}} = g''' + \frac{f''''b'''}{f''''\mathrm{E}:\mathrm{F}}$$

etc. etc.

Quod si iam posteriores valores in prioribus continuo substituantur, sponte emerget sequens fractio continua:

$$\frac{fA}{B} = g + \cfrac{f'h}{g' + \cfrac{f''h'}{g'' + \cfrac{f'''h''}{g''' + \cfrac{f''''h'''}{g'''' + \text{etc.}}}}}$$

cuius ergo valor per solos duos primos terminos A & B seriei determinatur.

§. 2. Quoties igitur talis progressio quantitatum A, B, C, D, E etc. habetur, cuius lex ita fuerit comparata, vt terni quique eius termini sibi succedentes secundum legem quamcunque a se inuicem pendeant, toties inde deducitur fractio continua, cuius valor assignari potest. Quamobrem si formula quaecunque ita fuerit comparata, vt eius euolutio perducat ad huiusmodi seriem quantitatum A, B, C, D, E, etc. quarum quisque terminus per duos praecedentes determinatur, inde fractiones continuae deriuari poterunt, quod quomodo fiat, commodissime per aliquot exempla ostendi poterit.

I. Euolutio formulae.

$$s = x^n(\alpha - \beta x - \gamma xx).$$

§. 8. In hac formula exponens n indefinitus spectatur, successiue recipiens omnes valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc., vnde, dummodo fuerit $n > 0$, haec formula euanescit, posito $x = 0$, tum vero etiam euanescit, sumto

$x = -$

$$x = -\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}.$$

His notatis differentietur ista formula, vt fiat

$$ds = n\alpha x^{n-1}dx - (n+1)\beta x^n dx - (n+2)\gamma x^{n+1}dx,$$

vnde per partes integrando et integrationem tantum indicando fiet

$$n\alpha\int x^{n-1}dx = (n+1)\beta\int x^n dx + (n+2)\gamma\int x^{n+1}dx + s.$$

Hinc, si post quamque integrationem, ita peractam, vt integrale euanescat posito $x = 0$, statuatur

$$x = -\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma},$$

quippe quo casu fit $s = 0$, erit

$$n\alpha\int x^{n-1}dx = (n+1)\beta\int x^n dx + (n+2)\gamma\int x^{n+1}dx,$$

quae est eiusmodi relatio inter ternas formulas integrales sibi succedentes, qualem desideramus pro formatione fractionis continuae; quandoquidem hae formulae integrales, si loco n successiue scribantur numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. nobis suppeditant quantitates A, B, C, D etc.

§. 4. Scribamus igitur loco n ordine numeros naturales 1, 2, 3, 4, etc. vt prodeant istae relationes:

$$\alpha\int dx = 2\beta\int x\,dx + 3\gamma\int xx\,dx$$
$$2\alpha\int x\,dx = 3\beta\int xx\,dx + 4\gamma\int x^3dx$$
$$3\alpha\int xx\,dx = 4\beta\int x^3dx + 3\gamma\int x^4dx$$
$$4\alpha\int x^3dx = 5\beta\int x^4dx + 6\gamma\int x^5dx$$
etc. etc.

Hinc igitur habebimus

$$A = \int dx = x = -\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma},$$
$$B = \int x\,dx = \tfrac{1}{2}xx = \tfrac{1}{8}\left(\frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}\right)^2,$$
$$C = \int xx\,dx = \tfrac{1}{3}x^3,\quad D = \int x^3dx = \tfrac{1}{4}x^4$$
etc. etc.

Tunc

Tunc vero pro literis f, g, h habebuntur isti valores:

$$f = \alpha,\ f' = 2\alpha,\ f'' = 3\alpha,\ f''' = 4\alpha \text{ etc.}$$
$$g = 2\beta,\ g' = 3\beta,\ g'' = 4\beta,\ g''' = 5\beta \text{ etc.}$$
$$h = 3\gamma,\ h' = 4\gamma,\ h'' = 5\gamma,\ h''' = 6\gamma \text{ etc.}$$

ex quibus valoribus resultat sequens fractio continua:

$$\frac{\alpha A}{B} = 2\beta + \cfrac{6\alpha\gamma}{3\beta + \cfrac{12\alpha\gamma}{4\beta + \cfrac{20\alpha\gamma}{5\beta + \cfrac{30\alpha\gamma}{6\beta + \text{etc.}}}}}$$

cuius ergo valor est

$$\frac{4\alpha\gamma}{-\beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}} = \beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}.$$

§. 5. Quo haec fractio continua concinnior reddatur, loco $\alpha\gamma$ scribamus $\frac{1}{2}\delta$, et prodibit

$$\beta + \sqrt{(\beta\beta + 2\delta)} = 2\beta + \cfrac{3\delta}{3\beta + \cfrac{6\delta}{4\beta + \cfrac{10\delta}{5\beta + \cfrac{15\delta}{6\beta + \text{etc.}}}}}$$

Quoniam autem haec expressio capite truncata videtur, adiecto hoc capite ponamus

$$s = \beta + \cfrac{\delta}{2\beta + \cfrac{3\delta}{3\beta + \cfrac{6\delta}{4\beta + \cfrac{10\delta}{5\beta + \text{etc.},}}}}$$ eritque

$s = \beta$

$$s = \beta + \frac{\delta}{\beta + \sqrt{(\beta\beta + 2\delta)}}$$

quae expressio reducitur ad hanc:

$$s = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta\beta + 2\delta)}.$$

§. 6. Haec autem fractio continua adhuc ad maiorem simplicitatem reduci potest, si loco δ scribamus 2ε, vt sit

$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta\beta + 4\varepsilon)} = \beta + \cfrac{2\varepsilon}{2\beta + \cfrac{6\varepsilon}{3\beta + \cfrac{12\varepsilon}{4\beta + \cfrac{20\varepsilon}{5\beta + 20 \text{ etc.}}}}}$$

Quod si iam prima fractio deprimatur per 2, secunda per 3, tertia per 4, quarta per 5 etc. prodibit sequens forma:

$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta\beta + 4\varepsilon)} = \beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \cfrac{\varepsilon}{\beta + \text{ etc.}}}}}$$

quae est simplicissima, cuius summa si tanquam incognita spectetur, ac vocetur $= z$, erit vtique $z = \beta + \frac{\varepsilon}{z}$, ideoque $zz = \beta z + \varepsilon$, vnde fit $z = \frac{\beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\varepsilon)}}{2}$, quae est eadem.

§. 7. Verum ista summa simplicissima immediate deduci potest ex ipsa formula initio assumta

$$s = x^n(\alpha - \beta x - \gamma x x),$$

quam

quam quoniam nihilo aequalem posuimus, erit vtique $\alpha = \beta x + \gamma x x$, eodemque modo

$$\alpha x = \beta x x + \gamma x^3, \ \alpha x x = \beta x^3 + \gamma x^4, \text{ etc.}$$

ita vt pro serie A, B, C, D, etc. habeamus hanc simplicem seriem potestatum: $1, x, x^2, x^3, x^4$ etc., tum vero omnes literae, f, g, h etc. fiunt α, β, γ etc. vnde oritur ista fractio continua:

$$\frac{\alpha}{x} = \beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \text{etc.}}}}$$

vbi est $\frac{1}{x} = \frac{\beta + \sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}{2\alpha}$. Huius ergo fractionis valor est

$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}, \text{ vt ante, ob } \alpha\gamma = \varepsilon.$$

II. Euolutio formulae.

$$s = x^n (a - x).$$

§. 8. Haec igitur formula euanescit, ponendo $x = a$; hinc autem fit $ds = n a x^{n-1} dx - (n+1) x^n dx$, quae expressio cum duobus tantum constet terminis, reducatur ad fractionem, cuius denominator sit $\alpha + \beta x$, ita vt fiat

$$ds = \frac{n a \alpha x^{n-1} dx + (\beta n a - \alpha(n+1)) x^n dx - \beta(n+1) x^{n+1} dx}{\alpha + \beta x}$$

His igitur membris seorsim integratis fiet

$$s = n a \alpha \int \frac{x^{n-1} dx}{\alpha + \beta x} + (n\beta a - (n+1)\alpha) \int \frac{x^n dx}{\alpha + \beta x} - \beta(n+1) \int \frac{x^{n+1} dx}{\alpha + \beta x}$$

quae

quare si post singulas integrationes statuamus $x = a$, vt fiat $s = 0$, habebimus hanc reductionem:

$$n a \alpha \int \frac{x^{n-1} d x}{\alpha + \beta x} = ((n+1)\alpha - n\beta a) \int \frac{x^n d x}{\alpha + \beta x} + (n+1)\beta \int \frac{x^{n+1} d x}{\alpha + \beta x}.$$

§. 9. Loco n substituamus nunc successiue numeros 1, 2, 3, 4 etc. atque comparatione cum formulis generalibus instituta habebimus

$$A = \int \frac{d x}{\alpha + \beta x}, \quad B = \int \frac{x d x}{\alpha + \beta x}, \quad C = \int \frac{x x d x}{\alpha + \beta x} \text{ etc.}$$

vbi quidem post integrationem fieri debet $x = a$. Praeterea vero habebimus

$$f = a\alpha, \quad f' = 2 a \alpha, \quad f'' 3 a \alpha, \quad f''' 4 a \alpha, \text{ etc.}$$

$$g = 2\alpha - \beta a, \quad g' = 3\alpha - 2\beta a, \quad g'' = 4\alpha - 3\beta a, \text{ etc.}$$

$$h = 2\beta, \quad h' = 3\beta, \quad h'' = 4\beta, \quad h''' = 5\beta, \text{ etc.}$$

atque ex his oritur sequens fractio continua:

$$\frac{\alpha a A}{B} = (2\alpha - \beta a) + \cfrac{4 a \alpha \beta}{(3\alpha - 2\beta a) + \cfrac{9 a \alpha \beta}{(4\alpha - 3\beta a) + \cfrac{16 a \alpha \beta}{(5\alpha - 4\beta a) + \text{etc.}}}}$$

§. 10. Integratione autem instituta fit

$$\int \frac{d x}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta} l \frac{\alpha + \beta x}{\alpha},$$

quandoquidem integralia euanescere debent facto $x = 0$. Nunc igitur fiat $x = a$, eritque $A = \frac{1}{\beta} l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha}$. Porro

$$\int \frac{x d x}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{\beta} l \frac{\alpha + \beta x}{\alpha}\right), \text{ factoque } x = a \text{ fiet}$$

$$B = \frac{a}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta\beta} l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha},$$

quamobrem valor nostrae fractionis continuae erit

$$\frac{\alpha a \beta l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha}}{a \beta - \alpha l \frac{\alpha + \beta a}{\alpha}}$$

euidens autem est, nihil de vniuersalitate perire, etiamsi sumatur $a = 1$; tum enim erit

$$\frac{\alpha \beta l \frac{\alpha + \beta}{\alpha}}{\beta - \alpha l \frac{\alpha + \beta}{\alpha}} = (2\alpha - \beta) + \cfrac{4\alpha\beta}{(3\alpha - 2\beta) + \cfrac{9\alpha\beta}{(4\alpha - 3\beta) + \text{etc.}}}$$

§. 11. Tota autem haec expressio manifesto vnice pendet a ratione numerorum α et β; vnde sumamus $\alpha = 1$ et $\beta = n$, atque orietur haec fractio continua:

$$\frac{n l (1 + n)}{n - l (1 + n)} = (2 - n) + \cfrac{4n}{(3 - 2n) + \cfrac{9n}{(4 - 3n) + \cfrac{16n}{(5 - 4n) + \text{etc.}}}}$$

cui si praefigamus secundum ordinis legem $1 + n$ et summam statuamus $= s$, vt sit

$$s = 1 + \cfrac{n}{(2 - n) + \cfrac{4n}{(3 - 2n) + \cfrac{9n}{(4 - 3n) + \cfrac{16n}{(5 - 4n) + \text{etc.}}}}}$$

erit

$$s = \frac{1 + n(n - l(1 + n))}{n l (1 + n)} = \frac{1 + n - l(1 + n)}{l(1 + n)} = \frac{n}{l(1 + n)}.$$

§. 12.

§. 12. Exempla aliquot percurramus, ſitque primo $n = 1$, erit

$$\frac{1}{l\,2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \text{etc.}}}}}$$

Poſito autem $n = 2$ erit

$$\frac{2}{l\,3} = 1 + \cfrac{2}{0 + \cfrac{8}{-1 + \cfrac{18}{-2 + \cfrac{32}{-3 + \cfrac{50}{-4 + \text{etc.}}}}}}$$

quae autem expreſſio, ob quantitates negatiuas, non ſatis eſt commoda; quod cum eueniat quando $n > 1$, operae pretium erit eos caſus euoluere, quibus n vnitate minor accipitur.

§. 13. Quo hoc facilius fieri poſſit, reuertamur ad expreſſionem literas α et β continentes, atque capite, quod deerat ſuppleto, prodit iſta forma:

$$\frac{\beta}{l\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \alpha + \cfrac{\alpha\beta}{(2\alpha-\beta) + \cfrac{4\alpha\beta}{(3\alpha-2\beta) + \cfrac{9\alpha\beta}{(4\alpha-3\beta) + \text{etc.}}}}$$

Ponamus nunc $n = n - m$ et $\beta = 2m$, vt obtineamus ſequentem formam:

$$\frac{2m}{l\,\frac{n+m}{n-m}} = n-m+\cfrac{2m(n-m)}{2n-4m+\cfrac{8m(n-m)}{3n-7m+\cfrac{18m(n-m)}{4n-10m+\text{etc.}}}}$$

vnde ſequentes caſus ſpeciales deducuntur.
Si $m=1$ et $n=3$ erit

$$\frac{2}{l\,2} = 2+\cfrac{4}{2+\cfrac{16}{2+\cfrac{36}{2+\cfrac{64}{2+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio per 2 diuiſa et reducta praebet iſtam:

$$\frac{1}{l\,2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{etc.}}}}}$$

quae iam ſupra eſt inuenta.
Sit $m=1$ et $n=4$ erit

$$\frac{2}{l\,\frac{5}{3}} = 3+\cfrac{6}{4+\cfrac{24}{5+\cfrac{54}{6+\cfrac{96}{7+\text{etc.}}}}}$$

$$= 3+\cfrac{6.1}{4+\cfrac{6.4}{5+\cfrac{6.9}{6+\cfrac{6.16}{7+\text{etc.}}}}}$$

Sit

Sit $m = 1$ et $n = 5$, erit

$$\frac{2}{l\frac{3}{2}} = 4 + \cfrac{8}{6 + \cfrac{32}{8 + \cfrac{72}{10 + \cfrac{128}{12 + \text{etc.}}}}}$$

siue

$$\frac{1}{l\frac{3}{2}} = 2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{8}{4 + \cfrac{18}{5 + \cfrac{32}{6 + \text{etc.}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{2.1}{3 + \cfrac{2.4}{4 + \cfrac{2.9}{5 + \cfrac{2.16}{6 + \text{etc.}}}}}$$

III. Euolutio formulae.

$$s = x^n(1 - x^2)$$

§. 14. Haec ergo formula euanescit casibus $x = 0$ et $x = 1$. Quoniam vero hinc fit

$$ds = n x^{n-1} dx - (n+2) x^{n+1} dx,$$

reducatur hoc differentiale ad denominatorem $\alpha + \beta xx$, fietque

$$ds = \frac{n\alpha x^{n-1} dx + (n\beta - (n+2)\alpha) x^{n+1} dx - (n+2)\beta x^{n+3} dx.}{\alpha + \beta xx}$$

 Hinc

Hinc iam iterum integrando fit

$$s = n\alpha\int\frac{x^{n-1}dx}{\alpha+\beta xx} + (n\beta-(n+2)\alpha)\int\frac{x^{n+1}dx}{\alpha+\beta xx} - (n+2)\beta\int\frac{x^{n+3}dx.}{\alpha+\beta xx}$$

Quod ſi iam poſt integrationes ſtatuatur $x = 1$, prodibit haec integralium reductio:

$$n\alpha\int\frac{x^{n-1}dx}{\alpha+\beta xx} = ((n+2)\alpha - n\beta)\int\frac{x^{n+1}dx}{\alpha+\beta xx} + (n+2)\beta\int\frac{x^{n+3}dx}{\alpha+\beta xx}.$$

§. 15. Quoniam hic poteſtates ipſius x binario augentur, exponenti n ſucceſſiue tribuamus valores 1, 3, 5, 7, 9 etc. ac ſtatuatur:

$$A = \int\frac{dx}{\alpha+\beta xx},\ B = \int\frac{xxdx}{\alpha+\beta xx},\ C = \int\frac{x^4dx}{\alpha+\beta xx}\ \text{etc.}$$

Deinde vero literae f, g, h cum ſuis deriuatis erunt:

$$f = \alpha,\ f' = 3\alpha,\ f'' = 5\alpha,\ f''' = 7\alpha,\ \text{etc.}$$
$$g = 3\alpha-\beta,\ g' = 5\alpha-3\beta,\ g'' = 7\alpha-5\beta,\ \text{etc.}$$
$$h = 3\beta,\ h' = 5\beta,\ h'' = 7\beta,\ h''' = 9\beta,\ \text{etc.}$$

vnde naſcitur ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha A}{B} = 3\alpha-\beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha-3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha-5\beta + \cfrac{49\alpha\beta}{9\alpha-7\beta + \text{etc.}}}}$$

§. 16. Quia eſt $B = \int\frac{xxdx}{\alpha+\beta xx}$, erit

$B = \frac{1}{\beta}\int dx - \frac{\alpha}{\beta}\int\frac{dx}{\alpha+\beta xx}$, ideoque $B = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}A$,

quo valore ſubſtituto habebimus

$\alpha\beta A$

$$\frac{\alpha\beta A}{1-\alpha A} = 3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha - 5\beta + \text{etc.}}}$$

cui, quia caput deest, praefigamus $\alpha + \beta + \alpha\beta$; tum autem erit summa $\beta + \frac{1}{A}$, ita vt habeamus

$$\beta + \frac{1}{A} = \alpha + \beta + \cfrac{\alpha\beta}{3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \cfrac{25\alpha\beta}{7\alpha - 5\beta + \text{etc.}}}}$$

existente $A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta xx}$, integrali ita sumto, vt euanescat posito $x = 0$, tum vero facto $x = 1$.

§. 17. Euoluamus primo casum simplicissimum, quo $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, vbi erit $A = \frac{\pi}{4}$, vnde habebimus

$$1 + \frac{4}{\pi} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

siue erit

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \text{etc.}}}}$$

quae est ipsa fractio continua olim a *Brounkero* primum producta, cuius inuestigatio, cum a *Wallisio* per calculos valde taediosos sit eruta, hic quasi sponte ex nostra formula sese prodidit.

§. 18.

§. 18. Nostra autem forma generalis infinitas alias similes expressiones suppeditat, prouti literae α et β vario modo accipiuntur. Ac primo quidem, si α et β fuerint numeri positiui, valor literae A semper per arcum circularem exprimetur, contra vero per logarithmos. Sit igitur primo $\beta = 1$, eritque

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + xx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ A tang. } \frac{x}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ A tang. } \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

vnde nascitur haec fractio continua:

$$1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\text{A tang. } \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \alpha + 1 + \cfrac{\alpha}{3\alpha - 1 + \cfrac{9\alpha}{5\alpha - 3 + \cfrac{25\alpha}{7\alpha - 5 + \text{etc.}}}}$$

Hinc igitur si sumatur $\alpha = 3$, quia A tang. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, habebimus

$$1 + \frac{6\sqrt{3}}{\pi} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{27}{12 + \cfrac{75}{16 + \cfrac{147}{20 + \text{etc.}}}}}$$

siue

$$1 + \frac{6\sqrt{3}}{\pi} = 4 + \cfrac{3 \cdot 1}{8 + \cfrac{3 \cdot 9}{12 + \cfrac{3 \cdot 25}{16 + \cfrac{3 \cdot 49}{20 + \text{etc.}}}}}$$

§. 19.

§. 19. Sit nunc B numerus positiuus quicunque, et quia est

$$A = \int \frac{dx}{\alpha + \beta xx} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dx}{\frac{\alpha}{\beta} + xx},$$

integrando fit $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \text{A tang.} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Hinc igitur habebimus

$$\beta + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\text{A tang.} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} = \alpha + \beta + \cfrac{\alpha\beta}{3\alpha - \beta + \cfrac{9\alpha\beta}{5\alpha - 3\beta + \text{etc.}}}$$

Faciamus igitur $\alpha + \beta = 2n$ et $\alpha - \beta = 2m$, vt sit $\alpha = m + n$ et $\beta = n - m$, quibus valoribus positis erit

$$n - m + \frac{\sqrt{(nn - mm)}}{\text{A tang} \sqrt{\frac{n-m}{n+m}}} = 2n + \cfrac{nn - mm}{2n + 4m + \cfrac{9(nn - mm)}{2n + 8m + \text{etc.}}}$$

§. 20. Consideremus etiam casum, quo β est numerus negatiuus, et ponendo $\beta = -\gamma$, erit

$$A = \int \frac{dx}{\alpha - \gamma xx} = \frac{1}{\gamma} \int \frac{dx}{\frac{\alpha}{\gamma} - xx},$$

cuius integrale est

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}} l \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + x}{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - x};$$

facto ergo $x = 1$ erit

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}} l \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\gamma}},$$

 vnde

vnde nafcitur ifta fractio continua:

$$-\gamma+\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{l\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}}=\alpha-\gamma-\cfrac{\alpha\gamma}{3\alpha+\gamma-\cfrac{9\alpha\gamma}{5\alpha+3\gamma-\cfrac{25\alpha\gamma}{7\alpha+5\gamma-\text{etc.}}}}$$

hocque modo nacti fumus nouas fractiones continuas, quarum valores etiam per logarithmos exhibere licet, et quae prorfus difcrepant ab illis, quas ante inuenimus.

§. 21. Hic cafus prae reliquis notatu dignus fe offert, quando $\gamma=\alpha$. Siue, quod eodem redit, $\alpha=1$ et $\gamma=1$; quia enim tum eft $l\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma}}=l\infty=\infty$, habebimus

$$-1=0-\cfrac{1}{4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}}$$

fiue mutatis fignis

$$1=\cfrac{1}{4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}}$$

hinc primus denominator

$$4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}\quad\text{debet effe}=1.$$

Erit ergo $0=3-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12-\text{etc.}}}$

fiue

siue $1 = \cfrac{3}{8 - \cfrac{25}{12 - \text{etc.}}}$

vbi denominator debet esse $= 3$, vnde fit

$$0 = 5 - \cfrac{25}{12 - \text{etc.}}$$

cuius denominator debet esse $= 5$, vnde fit

$$0 = 7 - \cfrac{49}{16 - \cfrac{81}{20 - \text{etc.}}}$$

ex quo ordine facile veritas perspicitur.

§. 22. Sumamus $\alpha = 4$ et $\gamma = 1$ et nanciscemur hanc fractionem:

$$-1 + \frac{4}{l3} = 3 - \cfrac{4.1}{13 - \cfrac{4.9}{23 - \cfrac{4.25}{33 - \cfrac{4.49}{43 - \text{etc.}}}}}$$

Sin autem accipiamus $\alpha = 9$ et $\gamma = 1$ erit

$$-1 + \frac{6}{l2} = 8 - \cfrac{9.1}{28 - \cfrac{9.9}{48 - \cfrac{9.25}{68 - \cfrac{9.49}{88 - \text{etc.}}}}}$$

IV. Euolutio formulae.

$$s = x^n e^{\alpha x} (1 - x)$$

§. 22. Hic e denotat numerum cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, ita vt $d. e^{\alpha x} = \alpha d x e^{\alpha x}$. Hinc ergo erit

$$ds = n x^{n-1} d x e^{\alpha x} + (\alpha - (n+1)) x^n d x e^{\alpha x} - \alpha x^{n+1} d x e^{\alpha x},$$

vnde viciſſim integrando fit

$$s = n \int x^{n-1} d x e^{\alpha x} + (\alpha - (n+1)) \int x^n d x e^{\alpha x} - \alpha \int x^{n+1} d x e^{\alpha x}.$$

Quod ſi ergo poſt integrationem ſtatuatur $x = 1$, erit

$$n \int x^{n-1} d x e^{\alpha x} = (n + 1 - \alpha) \int x^n d x e^{\alpha x} + \alpha \int x^{n+1} d x e^{\alpha x}.$$

§. 23. Quodſi iam loco n ſucceſſiue ſcribamus numeros 1, 2, 3, 4, ac faciamus

$$A \int e^{\alpha x} d x = \tfrac{1}{\alpha}(e^{\alpha} - 1) \text{ et } B = \int x d x e^{\alpha x} = \tfrac{\alpha - 1}{\alpha\alpha} e^{\alpha} + \tfrac{1}{\alpha\alpha}$$

$$f = 1, \; f' = 2, \; f'' = 3, \; f''' = 4, \text{ etc.}$$

$$g = 2 - \alpha, \; g' = 3 - \alpha, \; g'' = 4 - \alpha, \text{ etc.}$$

$$h = \alpha, \; h' = \alpha, \; h'' = \alpha, \; h''' = \alpha, \text{ etc.}$$

prodibit iſta fractio continua:

$$\frac{A}{B} = 2 - \alpha + \cfrac{2\alpha}{3 - \alpha + \cfrac{3\alpha}{4 - \alpha + \cfrac{4\alpha}{5 - \alpha + \text{etc.}}}}$$

Adiungamus adhuc ſuperne $1 - \alpha + \alpha$, erit eius valor

$$1 - \alpha + \frac{(\alpha - 1) e^{\alpha} + 1}{e^{\alpha} - 1} = \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1},$$

vnde

vnde habebitur haec fractio continua satis concinna:

$$\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1} = 1 - \alpha + \cfrac{\alpha}{2 - \alpha + \cfrac{2\alpha}{3 - \alpha + \cfrac{3\alpha}{4 - \alpha + \text{etc.}}}}$$

vnde patet, si fuerit $\alpha = 0$, ob $e^{\alpha} - 1 = \alpha$, fore vtique $1 = 1$.

§. 24. Consideremus nonnullos casus speciales; ac primo, si sit $\alpha = 1$, erit

$$\frac{1}{e-1} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

quae fractio facile transfunditur in hanc:

$$\frac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{1}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

vnde fit

$$e - 1 = 1 + \cfrac{\frac{1}{1}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}}{1 + \text{etc.}}}}$$

Haec autem porro a fractionibus partialibus liberata dat,

$$e - 1 = + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

vnde sequitur

$$\frac{1}{e - 2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

quae formae ob simplicitatem maxime sunt notatu dignae. Ex penultima, qua fit

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

sumendo successiue 1, 2, 3, pluraue membra, orientur sequentes approximationes:

$$e = 2,0000$$
$$e = 3.0000$$
$$e = 2,6666$$
$$e = 2,7272$$
$$e = 2,7169$$

qui valores, alternatim maiores et minores, satis prompte ad veritatem conuergunt

§. 25.

§. 25. Sumamus $\alpha = 2$ erit

$$\frac{2}{ee-1} = -1 + \cfrac{2}{0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}}$$

Ex hac fractione porro deducitur ista:

$$\frac{2(ee-1)}{ee+1} = 0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

similique modo, si pro α maiores numeri accipiantur, reductio fieri poterit.

§. 26. Possunt etiam pro α numeri negativi accipi. Ita si fuerit $\alpha = -1$ fiet

$$\frac{e}{e-1} = 2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5 - \cfrac{4}{6 - \text{etc.}}}}}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{e}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{3}{-5 + \cfrac{4}{6 + \text{etc.}}}}}$$

similique modo maiores valores expediri possunt.

§. 27.

§. 27. Statuamus etiam $\alpha = \frac{1}{2}$, ac reperietur ista expressio:

$$\frac{1}{2(\sqrt{e}-1)} = \frac{1}{2} + \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \cfrac{1}{\frac{5}{2} + \cfrac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2} + \cfrac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{2} + \text{etc.}}}}}$$

quae liberata a fractionibus partialibus euadit

$$\frac{1}{-1+\sqrt{e}} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{9 + \text{etc.}}}}}$$

Simili modo si sumus $\alpha = \frac{1}{3}$ erit

$$\frac{1}{3(\sqrt[3]{e}-1)} = 2:3 + \cfrac{1:3}{5:3 + \cfrac{2:3}{8:3 + \cfrac{3:3}{11:3 + \cfrac{4:3}{14:3 + \text{etc.}}}}}$$

quae a fractionibus partialibus liberata dat

$$\frac{1}{-1+\sqrt[3]{e}} = 2 + \cfrac{3}{5 + \cfrac{6}{8 + \cfrac{9}{11 + \cfrac{12}{14 + \text{etc.}}}}}$$

At

At ſi ponatur $\alpha = \frac{2}{3}$, prodit haec fractio continua:

$$\frac{2}{3\left(\sqrt[3]{(ee-1)}\right)} = 1:3 + \cfrac{2:3}{4:3 + \cfrac{4:3}{7:3 + \cfrac{6:3}{10:3 + \cfrac{8:3}{13:3 + \text{etc.}}}}}$$

quae a fractionibus partialibus liberata fit

$$\frac{2}{\sqrt[3]{(ee-1)}} = 1 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{12}{7 + \cfrac{18}{10 + \cfrac{24}{13 + \text{etc.}}}}}$$

§. 28. His formulis tanquam principalibus ac ſimplicioribus euolutis, ſimili modo alias multo generaliores tractare licebit, quae ad fractiones continuas multo magis abſconditas perducent, vti ex caſibus qui ſequuntur patebit.

V. Euolutio formulae.

$$s = x^n (a - b\,x^\theta - c\,x^{2\theta})^\lambda.$$

§. 29. Hinc igitur erit

$$ds = (a - b\,x^\theta - c\,x^{2\theta})^{\lambda-1} (n\,a\,x^{n-1}\,dx - b\,(n+\lambda\,\theta)\,x^{n+\theta-1}\,dx - c\,(n+2\,\lambda\,\theta)\,x^{n+2\theta-1}\,dx),$$

vnde per partes integrando, tum vero ſtatuendo $a - b\,x^\theta - c\,x^{2\theta} = 0$, (quod fit ſi fuerit $x^\theta = -\frac{b+\sqrt{(bb+4ac)}}{2c}$) habebitur iſta reductio generalis:

$$n\,a \int x^{n-1}\,dx\,(a - b\,x^{\theta} - c\,x^{2\theta})^{\lambda-1}$$
$$= (n + \lambda\,\theta)\,b \int x^{n+\theta-1}\,dx\,(a - b\,x^{\theta} - c\,x^{2\theta})^{\lambda-1}$$
$$+ (n + 2\,\lambda\,\theta)\,c \int x^{n+2\theta-1}\,dx\,(a - b\,x^{\theta} - c\,x^{2\theta})^{\lambda-1}.$$

§. 30. Quodſi iam hanc formam cum noſtra generali initio tradita comparare velimus, valores pro litera n ſucceſſiue aſſumendi per differentiam θ augeri debent. Deinde non neceſſe eſt vt primus valor ipſius n, vt hactenus fecimus, ſumatur $= 1$; ſtatuamus igitur eius primum valorem $= \alpha$, et quaeramus valores binarum ſequentium formularum integralium, ſcilicet:

$$A = \int x^{\alpha-1}\,dx\,(a - b\,x^{\theta} - c\,x^{2\theta})^{\lambda-1} \text{ et}$$
$$B = \int x^{\alpha+\theta-1}\,dx\,(a - b\,x^{\theta} - c\,x^{2\theta})^{\lambda-1},$$

quae integralia ita ſunt capienda, vt euaneſcant poſito $x = 0$, quo facto ipſi x ille valor tribui debet, qui reddat formulam $a - b\,x^{\theta} - c\,x^{2\theta} = 0$. Quoniam autem hoc in genere exſequi non licet, iſtos valores per literas A et B indicare contenti ſimus, quos ergo tanquam cognitos ſpectemus.

§. 31. Praeterea vero literae f, g, h, cum ſuis deriuatis ſequentes induent valores:

$$f = \alpha\,a,\quad f' = (\alpha + \theta)\,a,\quad f'' = (\alpha + 2\,\theta)\,a,\quad f''' = (\alpha + 3\,\theta)\,a, \text{ etc.}$$
$$g = (\alpha + \lambda\,\theta)\,b,\quad g' = (\alpha + \theta + \lambda\,\theta)\,b,\quad g'' = (\alpha + 2\,\theta + \lambda\,\theta)\,b, \text{ etc.}$$
$$h = (\alpha + 2\,\lambda\,\theta)\,c,\quad h' = (\alpha + \theta + 2\,\lambda\,\theta)\,c,\quad h'' = (\alpha + 2\theta + 2\,\lambda\,\theta)\,c, \text{ etc.}$$

Ex his igitur formabitur ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha\,a\,A}{B} = (\alpha+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+\theta)(\alpha+\lambda\theta)ac}{(\alpha+\theta+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+2\theta)(\alpha+\theta+2\lambda\theta)ac}{(\alpha+2\theta+\lambda\theta)b + \cfrac{(\alpha+3\theta)(\alpha+2\theta+2\lambda\theta)ac}{(\alpha+3\theta+\lambda\theta)b\,\text{etc.}}}}$$

quae

quae forma vtique est maxime generalis, cuius autem vlteriori euolutioni non immoramur.

VI. Euolutio formulae.

$$s = x^n (1 - x^\theta)^\lambda$$

§. 32. Hinc ergo fit

$$ds = n x^{n-1} dx (1 - x^\theta)^\lambda - \lambda \theta x^{n+\theta-1} dx (1 - x^\theta)^{\lambda-1},$$

vnde tantum duae formulae integrales orirentur; quam obrem huic differentiali denominatorem arbitrarium tribuamus $a + b x^\theta$, vt habeamus:

$$ds = \frac{(1 - x^\theta)^{\lambda-1}}{a + b x^\theta} (n a x^{n-1} dx - (a(n + \lambda\theta) - b n) x^{n+\theta-1} dx$$
$$- b(n + \lambda\theta) x^{n+2\theta-1} dx.$$

Nunc igitur, ponendo post integrationem $x = 1$, deducimus hanc reductionem:

$$n a \int \frac{x^{n-1} dx (1 - x^\theta)^{\lambda-1}}{a + b x^\theta} = (a(n + \lambda\theta) - b n) \int \frac{x^{n+\theta-1} dx (1 - x^\theta)^{\lambda-1}}{a + b x^\theta}$$
$$+ b(n + \lambda\theta) \int \frac{x^{n+2\theta-1} dx (1 - x^\theta)^{\lambda-1}}{a + b x^\theta}.$$

§. 33. Hic iterum euidens est valores ipsius n per differentiam θ crescere debere. Statuatur autem primus valor ipsius $n = \alpha$, et quaerantur pro quouis casu oblato binae sequentes formulae integrales:

$$A = \int \frac{x^{\alpha-1} dx (1 - x^\theta)^{\lambda-1}}{a + b x^\theta} \text{ et } B = \int \frac{x^{\alpha+\theta-1} dx (1 - x^\theta)^{\lambda-1}}{a + b x^\theta},$$

vbi scilicet post integrationem positum sit $x = 1$. Quibus

bus inuentis, cum hinc fiat

$$f = \alpha a,\ f' = (\alpha + \theta) a,\ f'' = (\alpha + 2\theta) a,\ f''' = (\alpha + 3\theta) a, \text{ etc.}$$

$$g = (\alpha + \lambda\theta) a - \alpha b,\ g' - (\alpha + \theta + \lambda\theta) a - (\alpha + \theta) b,$$
$$g'' = (\alpha + 2\theta + \lambda\theta) a - (\alpha + 2\theta) b, \text{ etc.}$$

$$h = (\alpha + \lambda\theta) b,\ h = (\alpha + \theta + \lambda\theta) b,\ h'' = (\alpha + \theta + 2\lambda\theta) b, \text{ etc.}$$

inde formabitur ſequens fractio continua:

$$\frac{\alpha a A}{B} = (\alpha+\lambda\theta)a - \alpha b + \cfrac{(\alpha+\theta)(\alpha+\lambda\theta)ab}{(\alpha+\theta+\lambda\theta)a - (\alpha+\theta)b + \cfrac{(\alpha+2\theta)(\alpha+\theta+\lambda\theta)ab}{(\alpha+2\theta+\lambda\theta)a - (\alpha+2\theta)b + (\alpha+3\theta)(\alpha+2\theta+\lambda\theta)ab \text{ etc.}}}$$

cuius formae vberiore euolutione ſuperſedemus.

VII. Euolutio formulae.

$$s = x^n (e^{\alpha x} (1 - x)^\lambda)$$

§. 34. Hinc ergo fit

$$ds = (1 - x)^{\lambda - 1} (n x^{n-1} dx - (n + \lambda - \alpha) x^n dx - \alpha x^n dx),$$

hinc igitur ſi poſt integrationem vbique ſtatuatur $x = 1$, quippe quo caſu fit $s = 0$, habebimus hanc reductionem:

$$n \int x^{n-1} dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1} = (n + \lambda - \alpha) \int x^n dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1}$$
$$+ \alpha \int x^{n+1} dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1}.$$

§. 35. In his ergo formulis exponenti n valores vnitate creſcentes tribui debebunt, tum vero hic minimum eius valorem ſumamus $n = \delta$, atque valores literarum A et B ex his formulis erui oportebit, ponendo poſt integrationem $x = 1$,

$$A = \int x^{\delta - 1} dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1},\ B = \int x^\delta dx\, e^{\alpha x} (1 - x)^{\lambda - 1}$$

deinde vero ob hos valores:

$$f = \delta,$$

$$f = \delta,\ f' = \delta + 1,\ f'' = \delta + 2,\ f''' = \delta + 3, \text{ etc.}$$
$$g = \delta + \lambda - \alpha,\ g' = \delta + 1 + \lambda - \alpha,\ g'' = \delta + 2 + \lambda - \alpha, \text{ etc.}$$
$$h = \alpha,\ h' = \alpha,\ h'' = \alpha, \text{ etc.}$$

ſequitur iſta fractio continua:

$$\frac{\delta A}{B} = \delta + \lambda - \alpha + \cfrac{(\delta + 1)\alpha}{\delta + 1 + \lambda - \alpha + \cfrac{(\delta + 2)\alpha}{\delta + 2 + \lambda - \alpha + \cfrac{(\delta + 3)\alpha}{\delta + 3 + \lambda - \alpha + \text{etc.}}}}$$

Vbi imprimis notari oportet, exponentes λ et δ neceſſario nihilo maiores accipi debere, quia alioquin formula principalis $x^n e^{\alpha x}(1 - x)^\lambda$ caſibus $x = 1$ non euaneſceret.

§. 36. Si literis δ et λ tribuatur valor $= 1$, prodibit caſus iam ſupra tractatus; ac ſi his literis numeri integri aſſignentur, eiusmodi fractiones continuae orientur, quas per certas operationes ad priores reducere licebit. Verum ſi his literis δ et λ, vel alterutri, vel vtrique, fractiones aſſignemus, tum formae orientur ad priores prorſus irreducibiles, quarumque valor haud aliter quam per quantitates maxime tranſcendentes exprimere liceat. Velvti ſi fuerit $\delta = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, valor literae A quaeri debebit ex hac formula integrali: $A = \frac{e^{\alpha x}\, dx}{\sqrt{(x - xx)}}$, cuius integratio ad quantitates maxime tranſcendentes perducit, ita vt valor talium fractionum continuarum prodeat maxime abſtruſus.

DE TRIBVS NVMERIS QVADRATIS, QVORVM TAM SVMMA, QVAM SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS SIT QVADRATVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In Tomo nouorum Commentariorum VIII. tractaui Problema, quo tres numeri quaeruntur, quorum tam summa, quam summa productorum ex binis, vna cum producto omnium fiant quadrata, cuius Solutio cum non solum esset difficillima, sed etiam ad immensos numeros perduxisset, merito videri poterat, si insuper noua conditio adderetur, solutionem vires Analyseos penitus esse superaturam. Hoc tamen euenit in quaestione, quam hic tractabo, vbi praeter tres conditiones memoratas etiam haec postulatur, vt singuli numeri quaesiti sint quadrati. Interim tamen hac conditione adiecta, post plures conatus irritos, tandem modum inueni istud Problema satis commode resoluendi, vbi adeo numeros satis modicos assignare licet Problemati satisfacientes.

§. 2.

§. 2. Sint xx, yy, zz, terni numeri quadrati quaesiti, ita vt esse debeat,

$$\text{I. } xx + yy + zz = \square.$$

$$\text{II. } xxyy + xxzz + yyzz = \square,$$

quarum conditionum priori satisfiet, sumendo

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr \text{ et } z = 2qr;$$

tum enim erit,

$$xx + yy + zz = (pp + qq + rr)^2,$$

vnde si ponamus $xx + yy + zz = P^2$, sumtis

$$x = pp + qq - rr,\ y = 2pr,\ z = 2qr, \text{ fiet } P = pp + qq + rr.$$

§. 3. Progrediamur nunc ad alteram conditionem, quae postulat, vt sit

$$xx(yy + zz) + zzyy = Q^2;$$

quare cum sit

$$yy + zz = 4rr(pp + qq),$$

hinc orietur ista aequatio:

$$Q^2 = 4rr(pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 16ppqqr^4,$$

quae diuisa per factorem quadratum $4rr$ dabit

$$\frac{QQ}{4rr} = (pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 4ppqqrr,$$

quam ergo formulam quadratum reddi oportet. Ea autem euoluta literae p et q ad sextam potestatem ascendent, litera vero r tantum ad quartam, quae ergo commode inuestigari posse videtur, siquidem casus sponte patet, scilicet si $rr = pp + qq$, dummodo fuerit $pp + qq$ quadratum. Interim tamen hinc ne vnicam quidem aliam solutionem deriuare licet; vnde negotium prorsus alio modo aggredi

opor

oportet, quod ſequenti modo egregio ſucceſſu praeſtari poterit.

§. 4. Pono autem $r = p - nq$, ita vt hoc modo nulla reſtrictio inferatur, quoniam loco literae r noua indeterminata n introducitur; tum autem noſtra aequatio hanc induet formam:

$$\frac{QQ}{4(p-nq)^2} = (pp+qq)(2npq+(1-nn)qq)^2 - 4ppqq(p-nq)^2,$$

quae iam diuidi poteſt per qq, ita vt

$$\frac{QQ}{4qq(p-nq)^2} = (pp+qq)(2np+(1-nn)q)^2 + 4pp(p-nq)^2,$$

quod quadratum breuitatis gratia deſignemus per R^2, ita vt ſit $Q = 2q(p-nq)R$. Nunc igitur facta euolutione prodibit haec aequatio:

$$R^2 = 4(1+nn)p^4 - 4n(1+nn)p^3q + (1+6nn+n^4)ppqq$$
$$+ 4n(1-nn)pq^3 + (1-nn)^2q^4,$$

in qua formula poſtremum membrum euaſit quadratum; primum vero membrum reddi poſſet quadratum, faciendo $nn+1 = \Box$; at vero ad ſolutionem ſufficere poteſt, vt poſtremus tantum terminus ſit quadratum.

§. 5. Pro R^2 eiusmodi quadratum ſtatuamus, quo ſublato tres vltimi termini e medio tollantur, et ex duobus prioribus relictis ratio inter p et q determinetur. Hunc in finem ſtatuatur

$$R = (1-nn)qq + 2npq + \alpha pp,$$

et α ita determinetur, vt etiam antepenultimus auferatur, quod fit ſumendo $\alpha = \frac{1+2nn+n^4}{2(1-nn)}$, quo facto aequatio relicta erit:

$$4p^4 - 4np^3q = \frac{(1+nn)^3}{4(1-nn)^2}p^4 + \frac{2n(1+nn)}{1-nn}p^3q,$$

siue per $4(1-nn)^2$ multiplicando, per p^3 diuidendo et literas p et q ad eandem partem transferendo fiet,

$$(15 - 35nn + 13n^4 - n^6)p = 8n(1-nn)(3-nn)q,$$

quae aequatio porro per $3 - nn$ diuidi potest, quo facto fit $(5 - 10nn + n^4)p = 8n(1-nn)q$, vnde deducitur

$$\frac{p}{q} = \frac{8n(1-nn)}{5-10nn+n^4}.$$

§. 6. Sumamus igitur, vt huic aequationi satisfiat, $q = 5 - 10nn + n^4$ et $p = 8n(1-nn)$, ex quibus valoribus colligitur

$$r = p - nq = n(3 + 2nn - n^4).$$

Praeterea vero his valoribus substitutis inuenimus

$$R = (1-nn)\left((5-10nn+n^4)^2 + 16nn(5-10nn+n^4) + 32(1+nn)^2\right).$$

Inuentis autem his valoribus ipsi numeri quaesiti ita formabuntur, vt sit

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr;\ z = 2qr.$$

Ope harum formularum igitur aliquot exempla euoluamus.

Exemplum I.

§. 7. Sit $n = 2$, eritque $p = -48$; $q = -19$; $r = 10$, vnde fit $R = 7035$. Erat autem

$$Q = 2qrR = 4.\ 5^2.\ 19.\ 1407.$$

Hinc vero ipsi numeri quaesiti ita se habebunt:

$$x = 2565;\ y = 2.\ 10.\ 48;\ z = 2.\ 10.\ 19.$$

 Quoni-

Quoniam autem hi numeri communem diuiſorem habent 5, per eius diuiſionem deprimi poterunt, ſimulque numerus P quinquies euadet minor, at vero Q vicies quinquies minor, hocque modo ſolutio ſequentibus valoribus continebitur:

$$P = 553;\ Q = 106932;\ x = 513;\ y = 192;\ z = 76.$$

Quadrata iam numerorum x, y, z eiusmodi erunt numeri, qui Problemati olim tractato ſatisfacient. Tales igitur numeri erunt,

$$x^2 = 263169;\ y^2 = 36864;\ z^2 = 5776,$$

qui numeri ſunt incomparabiliter minores iis, quos loco citato exhibui; vnde intelligitur, methodum, qua tum temporis ſum vſus, non ſatis eſſe accommodatam. Summa autem horum trium numerorum eſt $= 553^2$; ſumma productorum ex binis $= 35948^2$ et productum omnium $= 513^2 . 192^2 . 76^2$.

Exemplum II.

§. 8. Sit $n = 3$, eritque

$$p = -8.24 = -192;\ q = -4;\ r = -180,$$

qui numeri per -4 depreſſi euadent

$$p = 48;\ q = 1;\ r = 45;\ \text{vnde fit}$$

$$R = 14120, \text{ hincque } Q = 18.25.2824.$$

Hinc vero ipſi numeri quaeſiti erunt

$$x = 280;\ y = 90.48;\ z = 90,$$

ſiue deprimendo per 10 fiet

$$x = 28;\ y = 432;\ z = 9;\ P = 433;\ Q = 12708,$$

qui numeri adhuc praecedentibus ſunt minores, ideoque minimi

minimi omnium esse videntur qui satisfaciant. Quadrata ergo horum numerorum, quae sunt

$$x^2 = 784;\; y^2 = 186624;\; z^2 = 81,$$

erunt sine dubio minimi Problemati olim tractato satisfacientes, quippe quorum summa est 433^2; summa quadratorum ex binis $= 12708^2$ et productum omnium $28^2 . 432^2 . 9^2$.

Exemplum III.

§. 9. Sit $n = \frac{1}{2}$, fietque $p = 3$; $q = \frac{41}{16}$; $r = \frac{55}{32}$, siue, ductis his omnibus numeris in 32, fiet $p = 9$; $q = 82$; $r = 55$; vnde fit

$$R = 22515 \text{ et } Q = 2 . 82 . 55 . 22515.$$

Tum vero erit

$$x = 12915;\; y = 2 . 55 . 96;\; z = 2 . 55 . 82,$$

qui numeri per 5 deprimi possunt, quo facto fit

$$x = 2583;\; y = 2112;\; z = 1804, \text{ siue}$$

$$x = 3 . 7 . 123;\; y = 3 . 11 . 64;\; z = 4 . 11 . 41,$$

§. 10. Haec omnia ex formulae biquadraticae §. 4. allatae prima resolutione sunt deducta. Constat autem methodus, qua ex qualibet resolutione iam inuenta plures nouae deriuari possunt; verum hoc modo ad formulas nimis complicatas perueniretur, quod negotium hic non suscipio: praecipue enim in talibus inuestigationibus id solet intendi, vt solutiones saltem simpliciores eruantur.

Euolutio casuum.

quibus est $n\,n + 1$ quadratum.

§. 11. Sit igitur $n\,n + 1 = m\,m$, quod euenit, quoties fuerit $n = \frac{aa - bb}{2ab}$; tum enim erit $m = \frac{aa + bb}{2ab}$, quo obseruato retineamus in calculo literas m et n, eritque aequatio resoluenda,

$$R^2 = 4\,m\,m\,p^4 - 4\,n\,m\,m\,p^3\,q + (m^4 + 4\,n\,n)\,p\,p\,q\,q$$
$$+ 4\,n\,(1 - n\,n)\,p\,q^3 + (1 - n\,n)^2\,q^4,$$

vbi iam tam primus quam vltimus terminus sunt quadrata, ideoque praeter operationem praecedentem tres adhuc respectu primi termini institui poterunt, quas ergo ordine prosequemur.

§. 12. Primo igitur ponatur

Operat. I. $R = 2\,m\,p\,p - n\,m\,p\,q + (1 - n\,n)\,q\,q$

vbi notetur, numerum m tam positiue quam negatiue accipi posse, vnde ergo gemina solutio nascetur. Huius ergo valoris pro R quadrato a superiore expressione pro R^2 sublato orietur sequens aequatio:

$$\frac{p}{q} = \frac{4\,n + 2\,m\,n - 2\,m\,n^3 - 4\,n^3}{4\,m - 4\,m\,n\,n + m\,m\,n\,n - 4\,n\,n - m^4},$$

siue ob $n\,n = m\,m - 1$ erit

$$\frac{p}{q} = \frac{2\,n\,(4 + 2\,m - 2\,m\,m - m^3)}{4 + 8\,m - 5\,m\,m - 4\,m^3}.$$

§. 13. Quoniam literae m et n semper sunt fractiones, quo eae facilius tollantur, introducamus multiplicatorem indefinitum Δ ponamusque

$$p = 2\,\Delta\,n\,(4 + 2\,m - 2\,m\,m - m^3) \text{ et}$$
$$q = \Delta\,(4 + 8\,m - 5\,m\,m - 4\,m^3),$$

vnde

vnde ob $r = p - nq$ fiet

$$r = \Delta n (4 - 4m + mm + 2m^3).$$

§. 14. His igitur tribus valoribus inuentis numeri quaesiti x, y, z ita ex iis determinantur, vt sit

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr;\ z = 2qr.$$

Praeterea vero erit

$$P = pp - qq + rr;\ Q = 2qrR,$$

existente

$$R = 2mpp - mnpq + (1 - nn) qq.$$

§. 15. Vnicum exemplum euoluamus, vt pateat, num hinc minores numeri sint prodituri quam ante. Sumamus igitur $a = 2$ et $b = 1$, fietque

$n = \frac{3}{4}$ et $m = \pm \frac{5}{4}$, hincque fiet

$$p = \tfrac{3}{2}\Delta(4 \pm \tfrac{5}{2} - \tfrac{25}{8} \mp \tfrac{125}{64}),\ q = \Delta(4 \pm 10 - \tfrac{125}{16} \mp \tfrac{125}{16})$$

siue

$$p = \tfrac{3}{2}\Delta(\tfrac{7}{8} \pm \tfrac{35}{64}) \text{ et } q = \Delta(-\tfrac{61}{16} \pm \tfrac{35}{16}).$$

Sumamus $\Delta = 128$, fietque

$$p = 3(56 \pm 35)\ q = 8(-61 \pm 35),$$

hincque

$$r = p - \tfrac{3}{4}q = 3(178 \mp 35.$$

Valeat signum superius, quoniam hoc casu numeri resultantes per 13 deprimi possunt, quo facto reperitur:

$$p = 3.7 = 21;\ q = -2.8 = -16;\ r = 3.11 = 33,$$

vnde colligimus:

$$x = -392;\ y = 1386;\ z = -1056,$$

 qui

qui denuo, reiectis signis, per 2 deprimuntur, ita vt

$$x = 196;\ y = 693;\ z = 528.$$

Supra autem iam multo minores numeros nacti sumus.

Operat. II. §. 16. Vt praeter primum terminum etiam duo vltimi tollantur statuamus:

$$R = 2mpp + 2npq + (1 - nn)qq;$$

vnde orietur sequens aequatio:

$$\frac{p}{q} = \frac{4m - 4mnn - m^4}{4mn(2 + m)}, \text{ siue}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{8 - 4mm - m^3}{4n(2 + m)} \text{ (ob } nn = mm - 1),$$

siue etiam

$$\frac{p}{q} = \frac{(2 + m)(4 - 2m - mm)}{4n(2 + m)} = \frac{4 - 2m - mm}{4n}.$$

Fiat vt supra

$$p = \Delta(4 - 2m - mm) \text{ et } q = 4\Delta n,$$

hincque erit

$$r = p - nq = \Delta(8 - 2m - 5mm);$$

denique

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr;\ z = 2qr;$$

$$P = pp + qq + rr \text{ et } Q = 2qrR,$$

existente

$$R = 2mpp + 2npq + (1 - nn)qq.$$

§ 17. Sumamus iterum, quo res exemplo illustretur, $n = \frac{3}{4}$, ideoque $m = \pm\frac{5}{4}$, fietque,

$$p = \Delta\left(\tfrac{39}{16} \mp \tfrac{5}{2}\right) \text{ et } q = 3\Delta.$$

Sumatur $\Delta = 16$, et signo superiore valente erit $p = -1$ et et $q = 48$; hinc fit $r = -37$, vnde numeri quaeſiti prodeunt

$$x = 936;\ y = 74;\ z = 3552,$$

ſiue deprimendo

$$x = 468;\ y = 37;\ z = 1776,$$

qui praecedentibus adhuc maiores ſunt.

§. 18. Tollamus nunc tres terminos priores, ponendo Operat. III.

$$R = 2\,m\,p\,p - m\,n\,p\,q + \frac{m^4 + 3\,n\,n}{4\,m}\,q\,q,$$

ex quo haec reſultat aequatio:

$$g\left(\frac{(m^4 + 3\,n\,n)^2}{16\,m\,m} - (1 - n\,n)^2\right) = -\tfrac{n}{2}\,(m^4 - 5\,n\,n + 8)\,p.$$

Ex hac autem forma iam ſatis manifeſtum eſt, nullos numeros minores, Problemati ſatisfacientes, elici poſſe; quamobrem vlteriore euolutione ſuperſedemus.

AD

AD

DISSERTATIONEM PATRIS
DE TRIBVS NVMERIS, QVORVM TAM SVMMA QVAM SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS SIT QVADRATVM

COMMENTATIO.

Auctore
I. A. EVLERO.

Idem Problema de quo hic ſermo eſt aggreſſus, in ſolutionem incidi, particularem quidem at ab Patris Solutione plane diuerſam et numeros praebentem, qui nec magni nec in illa ſolutione contenti ſunt. Adeoque non incongruum fore arbitror conatus ac repertus meos hic Academiae communicaturus, ſupplementi inſtar ad Diſſertationem modo indicatam adiicere.

Inchoabo a Solutione maxime ſpeciali, quae primo detecta anſam mihi praebuit ſequentem generaliorem inuenire.

§. 1. Conſideremus hos tres numeros
$5(pp-1)$, $8p$ et $6p$,

quorum

quorum quadrata primae conditioni manifesto satisfaciunt: est enim

$$25(pp-1)^2+64pp+36pp=$$
$$25(pp-1)^2+100pp=25(pp+1)^2.$$

At altera conditio postulat, vt sit

$$64.25pp(pp-1)^2+36.25pp(pp-1)^2+36.64p^4$$

quadratum: vel

$$2500pp(pp-1)^2+36.64p^4=\Box,$$

siue, diuidendo per quadratum $4pp$,

$$625(pp-1)^2+579pp=\Box$$

et euoluendo

$$625p^4-674pp+625=\Box.$$

Fingamus huius quadrati radicem $=25pp-v$ et fieri debet

$$625p^4-674pp+625=625p^4-50ppv+vv,$$

vnde eruitur $pp=\frac{625-vv}{674-50v}$.

§. 2. Hic iam succedit, sumendo $vv=49$ et $v=7$ tam numeratorem fractionis pp quam denominatorem quadrata euadere: fit enim

$$625-vv=576=24^2 \text{ et}$$
$$674-50v=324=18^2, \text{ vnde } pp=\frac{24^2}{18^2}$$

et deprimendo per 6^2

$$pp=\frac{4^2}{3^2} \text{ et } p=\frac{4}{3}.$$

Hinc numeri quaesiti

$$5(pp-1)=\frac{5.7}{9}=\frac{35}{9};\ 8p=\frac{32}{3} \text{ et } 6p=\frac{24}{3},$$

qui multiplicati per 9 sequentes dabunt numeros integros

Problemati satisfacientes: 35; 96 et 72, qui certe satis parui sunt, comparatione facta cum illis minimis, quos pater inuenit scilicet: 9; 28 et 432. Nostri vero numeri 35; 96 et 72, conditiones praescriptas sequenti modo adimplent:

$$35^2 + 96^2 + 72^2 = 125^2$$
$$35^2 \cdot 96^2 + 35^2 \cdot 72^2 + 96^2 \cdot 72^2 = 8088^2.$$

Progrediamur iam ad solutionem generaliorem.

§. 3. Ex Analysi Diophantea constat esse

$$(pp-1)^2 + 4pp = (pp+1)^2, \text{ similique modo}$$
$$(qq-1)^2 + 4qq = (qq+1)^2.$$

Multiplicetur prima aequatio per $4qq$ et secunda per $(pp+1)^2$: eritque

$$4qq(pp-1)^2 + 16ppqq = 4qq(pp+1)^2,$$
$$(qq-1)^2(pp+1)^2 + 4qq(pp+1)^2 = (pp+1)^2(qq+1)^2.$$

Scribatur in hac postrema aequatione pro $4qq(pp+1)^2$ valor ex prima erutus, et obtinebitur summa trium quadratorum numero quadrato aequalis

$$(qq-1)^2(pp+1)^2 + 4qq(pp-1)^2 + 16ppqq$$
$$= (pp+1)^2(qq+1)^2.$$

§. 4. Inuentis ergo tribus numeris

$$(qq-1)(pp+1);\ 2q(pp-1) \text{ et } 4pq,$$

quorum quadrata iam primae conditioni satisfaciunt, superest vt summa productorum ex binis quadratis reddatur quadratum. Oportet ergo sit:

$$4qq(qq-1)^2(pp-1)^2(pp+1)^2 + 16ppqq(qq-1)^2(pp+1)^2$$
$$+ 64ppq^4(pp-1)^2 = \square:$$

vel

vel deprimendo per quadratum $4qq$,

$$(qq-1)^2(p^4-1)^2+4pp(qq-1)^2(pp+1)^2$$
$$+16ppqq(pp-1)^2=\square.$$

Est autem

$$(p^4-1)^2+4pp(pp+1)^2=(pp+1)^4.$$

Hinc requiritur quadratum fieri debere

$$(pp+1)^4(qq-1)^2+16ppqq(pp-1)^2=\square.$$

Quae conditio abit in illam solutionis specialis §. 1. ponendo $p=2$.

§. 5. Sit breuitatis gratia

$$(pp+1)^4=AA \text{ et } 16pp(pp-1)^2=BB,$$

vt quadratum fieri debeat haec formula:

$$AA(qq-1)^2+BBqq, \text{ vel}$$
$$AAq^4+(BB-2AA)qq+AA,$$

cuius radix ponatur $=Aqq+v$, vt fiat

$$AAq^4+(BB-2AA)qq+AA=AAq^4+2Aqqv+vv.$$

Vnde eruitur $qq=\frac{AA-vv}{2AA-BB+2Av}$.

§. 6. Hic iterum euenit, tam numeratorem quam denominatorem fractionis pro qq inuentae euadere quadratum, ponendo $vv=AA-BB$. Numerator enim $AA-vv$ abit in BB, et Denominator in

$$2AA-BB+2A\sqrt{(AA-BB)},$$

qui manifesto est quadratum formulae

$$A+\sqrt{(AA-BB)}.$$

At restitutis pro A et B valoribus supra §. 5. positis inuenietur

$$AA - BB = p^8 - 12p^6 + 38p^4 - 12p^2 + 1, \text{ id eſt}$$
$$AA - BB = (p^4 - 6p^2 + 1)^2, \text{ ideoque}$$
$$\sqrt{(AA - BB)} = p^4 - 6p^2 + 1,$$
ita vt irrationalitas prorſus e calculo egrediatur.

§. 7. Facto ergo $vv = AA - BB$ obtinetur
$$qq = \frac{BB}{(A + \sqrt{(AA - BB)})^2} \text{ et}$$
$$q = \frac{B}{A + \sqrt{(AA - BB)}}, \text{ ſiue}$$
$$q = \frac{4p(pp - 1)}{(pp + 1)^2 + p^4 - 6p^2 + 1} = \frac{4p(pp - 1)}{2p^4 - 4pp + 2},$$
hoc eſt $q = \frac{2p}{pp - 1}$.

§. 8. Subſtituto denique pro q valore modo invento, ob $qq - 1 = \frac{6pp - p^4 - 1}{(pp - 1)^2}$, tres numeri Problemati ſatisfacientes erunt
$$\frac{(6pp - p^4 - 1)(pp + 1)}{(pp - 1)^2}, \quad 4p \quad \text{et} \quad \frac{8pp}{pp - 1},$$
et multiplicando per $(pp - 1)^2$;
$$(6pp - p^4 - 1)(pp + 1);$$
$$4p(pp - 1)^2; \text{ et } 8pp(pp - 1).$$
Summa quadratorum autem horum numerorum fiet
$$(pp + 1)^2 (qq + 1)^2 (pp - 1)^4,$$
quae ob $qq + 1 = \frac{(pp + 1)^2}{(pp - 1)^2}$ transformatur in $(pp + 1)^6$, ita vt ſumma quadratorum numerorum hic inuentorum non ſolum quadratum fiat, ſed adeo poteſtas ſexta. Porro cum ſumma productorum ex binis numerorum quadratis, quadratum fiat, cuius radix
$$= 2q(Aqq + v) \times (pp - 1)^4; \text{ ob}$$
$$qq = \frac{4pp}{(pp - 1)^2}; \; A = (pp + 1)^2 \text{ et}$$

$v =$

$$v = \sqrt{(AA - BB)} = p^4 - 6pp + 1;$$

haec radix abibit in hanc formam:

$$4p(pp-1)(p^8 - 4p^6 + 22p^4 - 4pp + 1).$$

§. 9. En ergo solutionem problematis propositi: p pro lubitu assumto, tres numeri quaesiti erunt:

$$(6pp - p^4 - 1)(pp + 1) = x;$$
$$4p(pp-1)^2 = y;$$
$$8pp(pp-1) = z;$$

qui binas conditiones sequenti modo implebunt:

$$xx + yy + zz = (pp+1)^6;$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 16pp(pp-1)^2(p^8 - 4p^6 + 22p^4 - 4pp + 1)^2;$$ vel

sumto $x = (pp+1)(4pp - (pp-1)^2)$;

$$y = 4p(pp-1)^2;$$
$$z = 8pp(pp-1);$$ fiet

$$xx + yy + zz = (pp+1)^6;$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 16pp(pp-1)^2((pp-1)^4 + 16p^4)^2.$$

Exempla.

§. 10. Ponatur $p = 2$ et inuenietur

$$x = 5.(16 - 9) = 35$$
$$y = 8.9 = 72$$
$$z = 8.4.3 = 96$$
$$xx + yy + zz = 5^6 = 125^2$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 16.4.9.337^2 = 8088^2$$

quos numeros iam §. 2. per solutionem specialissimam eruimus.

§. 11. Positio $p = 3$ eosdem numeros octies sumtos praebet: at ponendo $p = 4$ fit

$$x = 17.161 = 2737$$
$$y = 16.15^2 = 3600$$
$$z = 8.16.15 = 1920$$
$$xx + yy + zz = 17^6 = 4913^2$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 16^2.15^2.50881^2 = 12211440^2.$$

§. 12. Cum $pp - 1$, $2p$ et $pp + 1$ latera trianguli rectanguli rationalis exprimant, nostra solutio sequenti modo concinnior reddi poterit. Sumantur tres numeri a, b, et c, vt sit $aa + bb = cc$: quo facto fiunt numeri Problemati satisfacientes

$$x = c(aa - bb);\ y = 2aab \text{ et } z = 2abb;$$

tum enim erit

$$xx + yy + zz = c^6 \text{ et}$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 4aabb(a^4 + b^4)^2.$$

Pro casu simplicissimo, quo $a = 4$, $b = 3$ et $c = 5$, inueniemus numeros iam supra erutos

$$x = 35;\ y = 96 \text{ et } z = 72.$$

Ponamus iam $a = 12$; $b = 5$ et $c = 13$ et obtinebimus hanc nouam solutionem:

$$x = 1547;\ y = 1440;\ z = 600;$$

vnde fit

$$xx + yy + zz = 2197^2$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = 5^2.24^2.21361^2 = 2563320^2.$$

In genere autem erit

$$a = 2mn;\ b = mm - nn \text{ et } c = mm + nn.$$

§. 13.

§. 13. Formulae pro solutione nostri Problematis modo inuentae ad aliam analysin conducunt, quae, cum concinnior sit praecedente, hic vtique locum meretur. Sint numeri quaesiti x, y et z, ita vt fieri debeat

$$xx + yy + zz = MM \text{ et}$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = NN.$$

Sumto iam $aa + bb = cc$, sit $x = am$ et $y = bm$, erit $xx + yy = ccmm$. Posito ergo

$$z = cn, \text{ erit } MM = cc(mm + nn);$$

quare fiat $m = 2pq$ et $n = pp - qq$, vt sit

$$MM = cc(pp + qq)^2, \text{ ideoque } M = c(pp + qq).$$

Deinde cum sit

$$xy = abmm; \; xz = acmn \text{ et } yz = bcmn, \text{ fit}$$
$$NN = mm(aabbmm + aaccnn + bbccnn), \text{ siue}$$
$$NN = mm(aabbmm + c^4 nn), \text{ seu}$$
$$NN = mm(4aabbppqq + c^4(pp - qq)^2) = \square.$$

Quod euadet manifesto si fuerit

$$cc(pp - qq) = aapp - bbqq.$$

Tum enim erit

$$NN = mm(aapp + bbqq)^2 \text{ et}$$
$$N = m(aapp + bbqq).$$

Vnde p et q ita definiri debent, vt fiat

$$ccpp - ccqq = aapp - bbqq,$$

vnde fit $\frac{pp}{qq} = \frac{cc - bb}{cc - aa} = \frac{aa}{bb}$, consequenter erit $p = a$ et $q = b$; hinc $m = 2ab$ et $n = aa - bb$: ergo numeri quaesiti $x = 2aab$; $y = 2abb$ et $z = c(aa - bb)$. Tum autem erit

$$M = c(aa + bb) = c^3 \text{ et } N = 2ab(a^4 + b^4).$$

§. 14.

§. 14. Denique comparationem addam meae Solutionis cum illa, quam Pater in eius dissertatione tentauit. Posuit autem

$$x = pp + qq - rr;\ y = 2pr \text{ et } z = 2qr;$$

ita vt hanc formulam:

$$(pp + qq)(pp + qq - rr)^2 + 4ppqqrr$$

adhuc quadratum reddere superſit. Praeſenti noſtro caſu erat $p = a$ et $q = b$, exiſtente $aa + bb = cc$. Erit ergo $x = cc - rr$; $y = 2ar$ et $z = 2br$; quadratum autem eſſe debet haec formula: $cc(cc - rr)^2 + 4aabbrr$, quae caſibus $r = c$ et $r = 0$ manifeſto fit quadratum: Neuter autem horum caſuum nouos valores ſuppeditat. Interim tamen omnino requiritur, vt praeterea caſus innoteſcat: talis autem caſus eſt $r = \frac{ac}{b}$; tum enim haec formula erit

$$c^6(bb - aa)^2 + 4a^4b^4cc, \text{ ſiue}$$
$$c^4(bb - aa)^2 + 4a^4b^4.$$

Eſt vero $cc(bb - aa) = b^4 - a^4$, ergo formula

$$c^4(bb - aa)^2 + 4a^4b^4 = (b^4 - a^4)^2 + 4a^4b^4 = (b^4 + a^4)^2.$$

Potuiſſet etiam poni $r = \frac{bc}{a}$. At vero nemini certe in mentem venire potuiſſet, hos valores in vſum vocare, vel diuinando reperire. Nunc vero poſito $r = \frac{ac}{b}$, numeri quaeſiti ſunt

$$x = \frac{cc(bb - aa)}{bb};\ y = \frac{2aac}{b};\ z = 2ac, \text{ ſiue}$$
$$x = c(bb - aa);\ y = 2aab;\ z = 2abb,$$

quae eſt ipſa mea ſolutio. At vero iſte caſus cognitus deducere poteſt ad infinitos alios: minimus autem eorum certe numeros enormes pro x, y et z eſſet daturus, qui forte ad Trilliones et Quadrilliones adſurgerent.

DE

DE EPICYCLOIDIBUS IN SUPERFICIE SPHAERICA DESCRIPTIS.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Illuſtris *Hermannus* in I. Tomo veterum Commentariorum, de Epicycloidibus in ſuperficie Sphaerae deſcriptis, agens, eam ipſis tribuit proprietatem, quod hae lineae curuae ſingulae rectificabiles eſſent; verum poſtmodum inuentum eſt, inſignem hunc Mathematicum in ratiocinio, quo ad iſtam perductus erat concluſionem, humani quid paſſum fuiſſe. Quamuis itaque hae curuae modo dicta proprietate non gaudeant, tamen affectiones, quae illis competunt, egregiae omnino ſunt, et formulis omnino concinnis ſe exprimi patiuntur, quamobrem eas euoluiſſe operae pretium erit.

§. 2. Si in peripheria circuli cuiusdam S G I in ſuperficie ſphaerica deſcripti capiatur punctum G, atque concipiatur circulum hunc S G I volui ſuper alio circulo immobili R I B, curua K G M, a puncto G deſcripta, nobis dicetur Epicyclois ſphaerica. Pro natura autem hu- Tab. I. Fig. 1.

 ius

ius curuae explicanda, concipiamus punctum G, quod initio rotationis fuit in B, iam perueniffe in N, ita vt arcus B F N femiffin peripheriae circuli B F N conftituat, eritque per naturam rotationis, arcus B F N $=$ arcui B I K in circulo immobili, et arcus G I $=$ arcui K I pro fitu circuli mobilis I G S. Polo A, interuallo A G, defcribatur circulus parallelus G L F E, qui occurrat peripheriae B F N in puncto F, arcubus autem A P, A D, centra circulorum mobilis et immobilis iungentibus, in punctis L et E, tumque iungantur puncta G, P, F, D, arcubus circulorum maximorum, vt etiam A G, A F. Quum nunc in triangulis A P G, A D F, fit A G $=$ A F, P G $=$ F D, A P $=$ A D, erit angulus A P G $=$ A D F, et P A G $=$ E A F, hinc fiet arc. G I $=$ arc. F B, arc. G L $=$ arc. F D, et R I $=$ Q B, ex quo colligitur G F $=$ L E et R Q $=$ I B. Nunc vero eft K I $=$ G I et K I B $=$ femip. B F N, ideoque I B $=$ arc. F N, hinc R Q $=$ arc. F N, atqui eft R Q : G F $=$ fin. A I : fin. A G, quare fiet G F $=$ arc. F N. $\frac{\text{fin. A G}}{\text{fin. A I}}$, quae proprietas inftar aequationis, naturam curuae K G M exprimeritis, inferuire poteft. Quia eft arc. F N $=$ ang. F D N. fin. F D, ifta quoque aequatio pro linea K G M adhiberi poteft: G F $=$ ang. F D N. $\frac{\text{fin. F D. fin. A G}}{\text{fin. A I}}$.

§. 3. Si communi more pro lineis curuis, in fuperficie Sphaerae defcriptis, recepto, naturam lineae curuae K G M exprimere voluiffemus, aequationem quaerere debuiffemus inter angulum B A G vel K A G et arcum A G, quae aequatio complicatior fane euadit quam vt pro fequentibus quaeftionibus, vbi de tangentibus et radiis curuedinis harum Epicycloidum agitur, cum vfu adhiberi queat. Sequenti vero ratione ad huiusmodi aequationem per-

pertingere licebit. Dicantur anguli K A G $= \Phi$, K A I $= \eta$, A P G $= \theta$, arcus vero A I, P I, A G respectiue exprimantur per a, b, v; eritque

$$\text{ang. G P I} = \frac{\text{arc. G I}}{\text{sin. P I}} = \frac{\text{arc. K I}}{\text{sin. P I}} = \text{ang. K A I.} \frac{\text{sin. A I}}{\text{sin. P I}}, \text{ seu } \theta = \eta . \frac{\text{sin. } a}{\text{sin. } b}.$$

Deinde habetur in triangulo sphaerico G P A,

$$\text{cot. } (\eta - \Phi) = \frac{\text{cos. } b . \text{sin. } (a + b) - \text{sin. } b \text{ cos. } (a + b) \text{ cos. } \theta}{\text{sin. } b . \text{sin. } \theta},$$

vbi substituto pro θ eius valore, orietur aequatio inter η et Φ, ex qua angulum η per Φ determinare oportet, vnde habebitur quoque angulus θ per Φ expressus, quare dabitur aequatio inter Φ et v, quum sit

$$\text{cos. } v = \text{cos. } b . \text{ cos. } (a + b) + \text{sin. } b . \text{ sin. } (a + b) \text{ cos. } \theta.$$

§. 4. Pro tangente Epicycloidis K I M inuestiganda, concipiamus ductum esse circulum parallelum gHlfe, proximum ipsi G L E, qui occurrat curuae K G M in puncto H, eritque per proprietatem modo inuentam Epicycloidum, Hf : fN $=$ sin. A G : sin. A I, hincque Hg : Gg $=$ sin. A G : sin. A I, ob Hg $=$ G F $-$ Hf et Gg $=$ Ff $=$ F N $-$ fN. Hinc fiet sin. H Gg : sin. G Hg $=$ sin. A G : sin. A I $=$ sin. G I P : sin. A G I $=$ sin. P G I : sin. A G I, et alternando, sin. H G g : sin. P G I $=$ sin. G Hg : sin. A G I $=$ sin. H G L : sin. A G I, vnde ob ang. P G g $= 90°$, fit cos. P G H : sin. P G I $=$ sin. H G L : cos. L G I, cui analogiae, ob P G H $+$ P G I $=$ H G L $+$ L G I, aliter satisfieri nequit, quam ponendo cos. P G H $=$ sin. P G I et sin. H G L $=$ cos. L G I, hoc est angulum I G H rectum; vnde fiet arcus circuli maximi G I normalis ad Epicycloidem, et si huic arcui ducatur per G perpendicularis, is tanget Epicycloidem in puncto G. Caeterum haec proprietas mox

 ex

ex ipsa genesi Epicycloidum innotescit, quippe quum arcus circuli, polo I, interuallo G I descripti, non possit non intime congruere cum arcu Epicycloidis G H.

§. 5. Ob $HG : Gg = \sin. HgG : \sin. HGL = \sin. AGP : \sin. AGI$, quia ang. $PGg = 90$, $AGL = 90°$, et $IGH = 90°$, vnde $\sin. HgG = \cos. PGL = \sin. AGP$ et $\sin. HGL = \cos. LGI = \sin. AGI$, habebimus

$$HG : Gg = \sin. APG. \sin. AP : \sin. PIG. \sin. AI;$$

ex quo quum sit

$$\sin. APG : \sin. PIG = \sin. GI : \sin. PG,$$

conficitur

$$Hg : Gg = \sin. GI. \sin. AP : \sin. PG. \sin. AI, \text{ siue}$$
$$Hg. = Ff. \frac{\sin. FB. \sin. AP}{\sin. DB. \sin. AB}.$$

Exprimamus nunc angulum FDB per 2ψ, arcum FB per u, DO per z, arcus autem AB, BD vt supra per a, b, eritque elementum Epicycloidis

$$= 2 d\psi \sin. u \frac{\sin. (a+b)}{\sin. a}.$$

Iam uero ob $\text{Tang. } z = \text{Tang. } b \cos. \psi$, fit

$$\frac{dz}{\cos. z^2} = - d\psi \text{ tang. } b \sin. \psi = - \frac{d\psi}{\cos. b} \sin. \tfrac{1}{2} u,$$

$$\text{ob } \sin. b \sin. \psi = \sin. \tfrac{1}{2} u.$$

Multiplicetur haec aequatio vtrinque per

$$2 \cos. \tfrac{1}{2} u = 2 \frac{\cos. b}{\cos. z}, \text{ fietque}$$

$$\frac{2 dz \cos. b}{\cos. z^3} = - \frac{2 d\psi \sin. \frac{1}{2} u \cos. \frac{1}{2} u}{\cos. b} = - \frac{d\psi \sin. u}{\cos. b},$$

hincque colligitur

$$d\psi \sin. u = - \frac{2 dz \cos. b^2}{\cos. z^3},$$

quamobrem fiet elementum Epicycloidis

=−

$$= - \frac{4\,dz}{\cos. z^3} \cdot \frac{\sin.(a+b)\cos. b^2}{\sin. a}.$$

Atqui est

$$\int \frac{dz}{\cos. z^3} = \frac{1}{2}\frac{\sin. z}{\cos. z^2} + \frac{1}{2} l \frac{\cos. z}{1-\sin. z} = \frac{1}{2}\frac{\sin. z}{\cos. z^2} + \frac{1}{2} l \frac{1+\sin. z}{\cos. z}.$$

erit igitur arcus Epicycloidis

$$KG = C - \frac{2\sin.(a+b)\cos. b^2}{\sin. a} \cdot \frac{\sin. z}{\cos. z^2} - \frac{2\sin.(a+b)\cos. b^2}{\sin. a} l \frac{1+\sin. z}{\cos. z}.$$

Quantitas autem constantis C definietur ex illo casu, quo KG euanescit, hoc est vbi $z = b$; erit igitur

$$C - \frac{2\sin.(a+b)\sin. b}{\sin. a} - \frac{2\sin.(a+b)\cos. b^2}{\sin. a} l \frac{1+\sin. b}{\cos. b} = 0,$$

ideoque in genere arcus Epicycloidis

$$KG = \frac{2\sin. a+b}{\sin. a}\left(\sin. b - \cos. b^2 \frac{\sin. z}{\cos. z^2} + \cos. b^2\, l \frac{(1+\sin. b)\cos. z}{(1+\sin. z)\cos. b}\right).$$

Patet itaque arcus Epicycloidum non esse rectificabiles, nisi pro casu $\cos. b = 0$, hoc est si circulus SGI fuerit maximus, tum vero habebitur $KG = 2\cot. a(1 - \cos. \frac{1}{2} u^2)$, ob

$$\frac{\cos. b^2}{\cos. z^2} = \cos. \tfrac{1}{2} u^2$$

et $\sin. z = \sin. b$, hinc fiet $KG = 2\cot. a \sin. \frac{1}{2} u^2$. Pro casu vbi $z = 0$, qui erit pro arcu Epicycloidis a K vsque ad N descripti, habebitur iste arcus sic expressus:

$$\frac{2\sin.(a+b)}{\sin. a}\left(\sin. b + \cos. b^2\, l\left(\frac{1+\sin. b}{\cos. b}\right)\right).$$

Existente igitur $b = 90°$, ista expressio erit $= 2\cot. a$, at posito $a = 90°$, fiet $= \sin. 2b + 2\cos. b^2\, l \frac{1+\sin. b}{\cos. b}$.

§. 6. Pro curuatura elementi GH aestimanda, quaeratur Polus V circuli in superficie sphaerica descripti, qui cum arcu GH intimum habet contactum; inuenietur autem iste Polus, vbi bini arcus circulorum maximorum inter se proximi GI, Hi ad elementum GH normales se intersecant. Iam sumatur in arcu GI elementum Im = Ii, et iungantur Ai, Hi, Gm, Pm arcubus Tab. I. Fig. 2.

 circu-

circulorum maximorum. Quum vero ſit arcus circuli maximi G I normalis ad G H, erit quoque H I ipſi normalis, et proxime $= GI$, tum vero quoque $Gm = Hi$, $Im = Ii$ et ang. $GIm = HIi$, vnde ang. $GIH = mIi$.
Tab. I. Fig. 3. Iam ſi per I concipiatur ductus arcus circuli maximi I T, tangens arcus GIm, KIi, facile demonſtrabitur eſſe $mIi = IPm.\,\text{coſ.}\,PI + IAi\,\text{coſ.}\,AI$. Eſt enim in triangulo PIm, $\text{cot.}\,PIm.\,\text{cot.}\,IPm = \text{coſ.}\,PI$, hinc $\text{cot.}\,PIm = \text{tang.}\,IPm.\,\text{coſ.}\,PI$, et ob ang. $PIT = 90°$, $\text{tang.}\,TIm = \text{tang.}\,IPm.\,\text{coſ.}\,PI$, ſiue $TIm = IPm.\,\text{coſ.}\,PI$. Similiter demonſtrabitur eſſe $TIi = IAi\,\text{coſ.}\,AI$, hinc $mIi = IPm\,\text{coſ.}\,PI + IAi.\,\text{coſ.}\,AI$; atqui ob $Im = Ii$ eſt $IPm.\,\text{ſin.}\,PI = IAi.\,\text{ſin.}\,AI$, proinde

$$GIH = mIi = IAi.\,\text{ſin.}\,AI\,(\text{cot.}\,AI + \text{cot.}\,PI)$$
$$= IAi.\frac{\text{ſin.}\,AP}{\text{ſin.}\,PI} = IPm\frac{\text{ſin.}\,AP}{\text{ſin.}\,AI}.$$

Porro ſi polo G interuallo G I deſcribatur arcus In, habetur

$$\text{ang.}\;IGm = \frac{In}{\text{ſin.}\,GI} = \frac{Im.\,\text{coſ.}\,PIG}{\text{ſin.}\,GI} = IPm\frac{\text{ſin.}\,PI\,\text{coſ.}\,PIG}{\text{ſin.}\,GI};$$

atqui eſt

$$\text{coſ.}\,PIG = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}GI.\,\text{cot.}\,PI,$$

hinc prodibit

$$IGm = IPm.\frac{\text{coſ.}\,PI.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}GI}{\text{ſin.}\,GI} = \frac{IPm\,\text{coſ.}\,PI}{2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}GI^2},\text{ ob}$$

$$\text{ſin.}\,GI = 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}GI.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}GI.$$

Fiet igitur quoque

$$IHi = IGm = \frac{IPm\,\text{coſ.}\,PI}{2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}GI^2},$$

hincque

GIH

$$GIH : IHV = \frac{\text{sin. } AP}{\text{sin. } AI} : \frac{\text{cos. } PI}{2\text{cos. } \frac{1}{2} GI^2} = \frac{\text{sin. } AP}{\text{sin. } AI} : \frac{\text{cos. } PI}{1 + \text{cos. } GI}.$$

Atqui est

$$GIH : IHV = \text{sin. } GIH : \text{sin. } IHV = \text{sin. } GV : \text{sin. } IV,$$

hinc fiet

$$\text{sin. } GV : \text{sin. } IV = \frac{\text{sin. } AP}{\text{sin. } AI} : \frac{\text{cos. } PI}{1 + \text{cos. } GI},$$

vnde ob

$$\text{sin. } GV = \text{sin. } GI \text{ cos. } IV + \text{cos. } GI \text{ sin. } IV,$$

colligitur

$$\text{sin. } GI. \text{ cot. } IV + \text{cos. } GI = \frac{\text{sin. } AP (1 + \text{cos. } GI)}{\text{sin. } AI. \text{ cos. } PI},$$

ideoque

$$\text{sin. } GI. \text{ cot. } IV = \frac{\text{sin. } AP + \text{cos. } GI (\text{sin. } AP - \text{sin. } AI \text{ cos. } PI)}{\text{sin. } AI \text{ cos. } PI}$$
$$= \frac{\text{sin. } AP + \text{cos. } GI. \text{ cos. } AI. \text{ sin. } PI}{\text{sin. } AI \text{ cos. } PI},$$

tumque

$$\text{cot. } IV = \frac{\text{sin. } AP + \text{cos. } GI \text{ cos. } AI \text{ sin. } PI}{\text{sin. } GI \text{ sin. } AI \text{ cos. } PI} \text{ vel}$$

$$\text{tang. } IV = \frac{\text{sin. } GI. \text{ sin. } AI \text{ cos. } PI}{\text{sin. } AP + \text{cos. } GI \text{ cos. } AI \text{ sin. } PI}.$$

Si PI ponatur $= 90^\circ$, fiet cos. $PI = 0$, ideoque tang. $PV = 0$, hincque punctum V cum puncto I coincidet, quod etiam per se est manifestum, eritque tum Epicyclois GKM curua, quae oritur euolutione circuli minoris KIi. Posito vero $AI = 90^\circ$ fiet cos. $AI = 0$, sin. $AP =$ cos. PI, hincque pro isto casu tang. $IV =$ sin. GI.

§. 7. Sequenti autem ratione valor arcus IV quoque determinari potest. Iungatur AV arcu circuli maximi, eritque

$$\text{cos. } AV = \text{cos. } AI. \text{ cos. } IV + \text{sin. } AI. \text{ sin. } IV. \text{ cos. } AIV.$$

Huius aequationis differentiale capiatur, solis arcu IV et

angulo

angulo A I V pro variabilibus habitis, eritque:

$$-d.\,IV\,\text{cof.}\,AI\,\text{fin.}\,IV + d.\,IV\,\text{cof.}\,IV\,\text{fin.}\,AI\,\text{cof.}\,AIV - d.\,AIV.\,\text{fin.}\,AI\,\text{fin.}\,IV\,\text{fin.}\,AIV = 0,$$ ideoque

$$\text{cot.}\,IV = \frac{d\,AIV.\,\text{fin.}\,AI\,\text{fin.}\,AIV + d.\,IV\,\text{cof.}\,AI}{d.\,IV.\,\text{fin.}\,AI.\,\text{cof.}\,AIV}.$$

Patet vero esse

$$d.\,IV = -d.\,GI = -nm = -Im.\,\text{fin.}\,PIG,$$

tumque

$$d.\,AIV = d.\,GIP = -IGm = -\frac{In}{\text{fin.}\,GI} = -Im.\frac{\text{cof.}\,PIG}{\text{fin.}\,GI},$$

his igitur valoribus substitutis prodit:

$$\text{cot.}\,IV = \frac{\text{fin.}\,AI.\,\text{cof.}\,PIG + \text{cof.}\,AI.\,\text{fin.}\,GI}{\text{fin.}\,GI\,\text{fin.}\,AI.\,\text{cof.}\,PIG};$$

tum vero quia est

$$\text{cof.}\,PG = \text{cof.}\,PI.\,\text{cof.}\,GI + \text{fin.}\,PI\,\text{fin.}\,GI\,\text{cof.}\,PIG,$$

consequemur

$$\text{cof.}\,PIG = \frac{\text{cof.}\,PG - \text{cof.}\,PI\,\text{cof.}\,GI}{\text{fin.}\,PI.\,\text{fin.}\,GI} = \frac{\text{cof.}\,PI\,(1-\text{cof.}\,GI)}{\text{fin.}\,PI.\,\text{fin.}\,GI},$$

ideoque hoc valore suffecto:

$$\text{cot.}\,IV = \frac{\text{fin.}\,AI\,\text{cof.}\,PI\,(1-\text{cof.}\,GI) + \text{cof.}\,AI.\,\text{fin.}\,PI.\,\text{fin.}\,GI^2}{\text{fin.}\,GI.\,\text{fin.}\,AI\,\text{cof.}\,PI\,(1-\text{cof.}\,GI)},$$

vnde ob

$$\text{fin.}\,GI^2 = (1-\text{cof.}\,GI)\,(1+\text{cof.}\,GI),$$

prodit

$$\text{cot.}\,IV = \frac{\text{fin.}\,AI\,\text{cof.}\,PI + \text{cof.}\,AI\,\text{fin.}\,PI\,(1+\text{cof.}\,GI)}{\text{fin.}\,GI \times \text{fin.}\,AI\,\text{cof.}\,PI}$$
$$= \frac{\text{fin.}\,AP + \text{cof.}\,AI\,\text{fin.}\,PI\,\text{cof.}\,GI}{\text{fin.}\,GI\,\text{cof.}\,PI\,\text{fin.}\,AI},$$

ob $\text{fin.}\,AP = \text{fin.}\,(AI + PI) = \text{fin.}\,AI + \text{cof.}\,PI + \text{cof.}\,AI\,\text{fin.}\,PI.$

§. 8. Iam quoque operae pretium erit, vt quadraturam spatii I K G I, arcu circuli minoris I K, arcu Epicycloidis K G et arcu circuli maximi G I, comprehensi, determinemus. Est vero elementum huius spatii, trape-

trapeziolum in superficie sphaerica $GHiI = GHV - IiV$. Iam si semissis totius superficiei sphaericae exprimatur litera S, erit $\Delta\, GHV : S = \text{ang.}\, IVi\,(1 - \text{cos.}\, GV) : 360°$

$$\text{et } \Delta\, IiV : S = \text{ang.}\, IVi\,(1 - \text{cos.}\, IV) : 360°,$$

proinde

$$GHiI = \text{ang.}\, IVi\,(\text{cos.}\, IV - \text{cos.}\, GV)\, \tfrac{S}{360°}.$$ Fig. 3.

Nunc vero est in triangulo IHV,

$$\text{ang.}\, IVi : IHi = \text{sin.}\, HI : \text{sin.}\, IV,$$

ideoque

$$IVi = \tfrac{IGm.\,\text{sin.}\, GI}{\text{sin.}\, IV}, \text{ ob } IHi = IGm \text{ et } HI = GI;$$

fiet igitur

$$GHiI = IGm.\tfrac{\text{sin.}\, GI}{\text{sin.}\, IV}\,(\text{cos.}\, IV - \text{cos.}\, GV)\, \tfrac{S}{360°}.$$

Hinc quum sit

$$\text{cos.}\, GV = \text{cos.}\, IG.\, \text{cos.}\, IV - \text{sin.}\, IG.\, \text{sin.}\, IV,$$

loco expressionis

$$\tfrac{\text{cos.}\, IV - \text{cos.}\, GV}{\text{sin.}\, IV}, \text{ habebimus}$$

$$\text{cot.}\, IV - \text{cos.}\, IG.\, \text{cot.}\, IV + \text{sin.}\, IG = \text{cot.}\, IV(1 - \text{cos.}\, IG) + \text{sin.}\, IG,$$

hincque

$$\tfrac{\text{sin.}\, IG}{\text{sin.}\, IV}(\text{cos.}\, IV - \text{cos.}\, GV) = \text{cot.}\, IV.\, \text{sin.}\, IG\,(1 - \text{cos.}\, IG)$$
$$+ \text{sin.}\, IG^2 = (1 - \text{cos.}\, IG)(\text{cot.}\, IV.\, \text{sin.}\, IG + 1 + \text{cos.}\, IG).$$

Substituto nunc pro $\text{cot.}\, IV$ valore supra inuento, fiet

$$\text{cot.}\, IV.\, \text{sin.}\, IG = \tfrac{\text{sin.}\, AP + \text{cos.}\, AI\,\text{sin.}\, PI\,\text{cos.}\, GI}{\text{cos.}\, PI\,\text{sin.}\, AI} \text{ et}$$

$$\text{cot.}\, IV\,\text{sin.}\, IG + \text{cos.}\, IG = \tfrac{\text{sin.}\, AP + (\text{sin.}\, PI\,\text{cos.}\, AI + \text{cos.}\, PI\,\text{sin.}\, AI)\,\text{cos.}\, GI}{\text{cos.}\, PI.\,\text{sin.}\, AI}$$

$$= \tfrac{\text{sin.}\, AP(1 + \text{cos.}\, GI)}{\text{sin.}\, AI\,\text{cos.}\, PI},$$

vnde demum consequemur:

$$\tfrac{\text{sin.}\, IG}{\text{sin.}\, IV}(\text{cos.}\, IV - \text{cos.}\, GV) = (1 - \text{cos.}\, IG)\left(1 + \tfrac{\text{sin.}\, AP(1 + \text{cos.}\, GI)}{\text{sin.}\, AI\,\text{cos.}\, PI}\right).$$

 Si

Si nunc angulus $QBF = 90° - GIP$ (Fig. I.) exprimatur per Φ, arcus IG per u et arcus AI, PI vt antea per a, b, erit elementum

$$GHiI = d\Phi(1 - \text{cof.}\, u)\left(1 + \frac{\text{fin.}(a+b)(1+\text{cof.}\, u)}{\text{fin.}\, a\, \text{cof.}\, b}\right)\frac{S}{360°}.$$

Iam vero pro integrali huius differentialis determinando, primum obferuo effe,

$$d\Phi(1 - \text{cof.}\, u) = 2\, d\Phi - 2\, d\psi\, \text{cof.}\, b,$$

defignante 2ψ angulum FDB. Eft enim per §. 6.

$$IGm = \frac{IPm\, \text{cof.}\, PI}{\text{cof.}\, \frac{1}{2} GI^2},\ \text{fiue}\ d\Phi = \frac{2\, d\psi\, \text{cof.}\, b}{2\, \text{cof.}\, \frac{1}{2} u^2},$$

hinc

$$d\Phi(1 + \text{cof.}\, u) = 2\, d\psi\, \text{cof.}\, b,\ \text{ob}\ 2\, \text{cof.}\, \tfrac{1}{2} u^2 = 1 + \text{cof.}\, u,$$

ideoque

$$d\Phi(1 - \text{cof.}\, u) = 2\, d\Phi - 2\, d\psi\, \text{cof.}\, b.$$

Tum vero quoque fiet

$$\begin{aligned} d\Phi(1 - \text{cof.}\, u^2)\frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a\, \text{cof.}\, b} &= 2\, d\Phi(1 + \text{cof.}\, u)\frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a\, \text{cof.}\, b} \\ &- 2\, d\psi(1 + \text{cof.}\, u)\frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a} = 4.\, d\psi.\frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a} \\ &- 4\, d\psi\, \text{cof.}\, \tfrac{1}{2} u^2 \frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a} = 4\, d\psi \frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a}\, \text{fin.}\, \tfrac{1}{2} u^2 \\ &= 4\, d\psi \frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a}\, \text{fin.}\, b^2\, \text{fin.}\, \psi^2 \\ &= 2\, d\psi \frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a}\, \text{fin.}\, b^2 (1 - \text{cof.}\, 2\psi). \end{aligned}$$

Fiet igitur

$$\begin{aligned} \int d\Phi(1 - \text{cof.}\, u^2)\frac{\text{fin.}(a+b)}{\text{fin.}\, a\, \text{cof.}\, b} &= 2\psi \frac{\text{fin.}(a+b)\, \text{fin.}\, b^2}{\text{fin.}\, a} \\ &- \text{fin.}\, 2\psi \frac{\text{fin.}(a+b)\, \text{fin.}\, b^2}{\text{fin.}\, a}. \end{aligned}$$

Praeterea vero eft $\int d\Phi(1 - \text{cof.}\, u)\frac{S}{360°}$ = fegmento fphaerae, quod continetur arcu circuli maximi FB et arcu

circuli

circuli minoris FB. Hinc pro caſu, quo punctum G in N incidit, ideoque $2\psi = 180^\circ$, fiet ſpatium illud inter Epicycloidem et arcum circuli KIB, nec non NB contentum, aequale ſpatio BFNB $+ \frac{S}{2} \cdot \frac{\sin.(a+b)\sin.b^2}{\sin.a}$, vbi ob

$$BFNB = \frac{S}{2}(1-\cos.b), \text{ erit ſpatium illud}$$
$$= \frac{S}{2}(1-\cos.b)\left(1+\frac{\sin.(a+b)(1+\cos.b)}{\sin.a}\right).$$

Hinc ſi ſtatuatur $b = 90^\circ$, fiet hoc ſpatium $= \frac{S}{2}\cot.a$, ob ſpatium BFNB hoc in caſu plane euaneſcens. At pro caſu $a = 90^\circ$, fiet $= \frac{S}{2}(1-\cos.b)(1+\cos.b+\cos.b^2)$. Praeterea quoque obſeruare conuenit, ſpatium iſtud epicycloidicum in genere ſic exprimi:

$$\frac{S}{360^\circ}\left(2\Phi - 2\psi\cos.b + 2\psi\frac{\sin.(a+a)\sin.b^2}{\sin.a}\right.$$
$$\left. - \sin.2\psi\frac{\sin.(a+b)\sin.b^2}{\sin.a}\right),$$

vnde concluditur caſu, quo

$$\Phi = \psi\cos.b - \psi\frac{\sin.(a+b)\sin.b^2}{\sin.a},$$

ſpatium iſtud abſolutam admittere quadraturam, ex qua aequatione, quum ſit $\tang.\Phi = \tang.\psi\cos.b$, valor ipſius anguli Φ vel ψ determinari poteſt.

§. 9. Praeter Epicycloidum ſpeciem iam conſideratam heic quoque attentionem meretur linea curua, quae generatur, dum voluendo circulum SHI ſuper TIB, punctum quoddam G, non quidem in ipſa peripheria circuli, ſed vel intra eandem vel extra ſumtum, curuam deſcribit. Etſi enim huius curuae proprietates non aeque elegantes ſint ac iſtae, curuae modo conſideratae, tamen nec inueſtigatio proprietatum pro hac curua valde operoſas requirit disquiſitiones. Concipiamus igitur cur-

 vam

vam a puncto G descriptam esse M C G, et ducto arcu circuli maximi P G a centro circuli mobilis S H I ad punctum G, illum occurrere peripheriae S H I in puncto H, tumque initio rotationis punctum H coincidisse cum puncto T circuli immobilis T I B, quare erit arcus H I = arcu T I. Porro si statuamus punctum H peruenisse in N, ita vt N K B aequetur semissi peripheriae circuli mobilis, erit N K B = arc. T I B, vnde fiet

arc. I B = arc. N K B − H I = S H I − H I = arc. S H.

Deinde si Polo A circuli immobilis T I B, interuallo A G, describatur circulus minor G L F E, qui occurrat arcubus circulorum maximorum, polos circuli immobilis A et mobilis P, D, iungentibus in punctis L, E, arcubus autem circulorum minorum, polis P, D, interuallis B G et F D, existente F D = F G, descriptis in G et F, tumque iungantur A G, A F, D F arcubus circulorum maximorum, erit ob P G = D F, A G = A F, A P = A D, ang. A P G = A D F et G A L = F A E, hinc arc. G L = arc. F E, et G F = L E. Est vero arcus L E: arc. I B = sin. A G: sin. A B, ideoque arc. G F: arc. I B = sin. A G: sin. A B, hincque arc. G F: arc. S H = sin A G: sin. A B; atqui est arc. S H: arc. Q G = sin. PH: sin. P G, vnde, componendo rationes, arc. G F: arc. Q G = sin. A G. sin. P H: sin. A B. sin. P G, haecque proprietas instar aequationis pro curua M C G inseruire potest.

§. 10. Sit iam per punctum C curuae M C G, puncto G proximum, descriptus, Polo A, circulus parallelus g C f, qui occurrat circulis Q G U, R F f in punctis g, f, eritque per proprietatem modo demonstratam arc. C f: arc.

arc. $Q g = $ ſin. $A G$. ſin. $P H$: ſin. $A B$. ſin. $P G$, hincque arc. $G f -$ arc. $C f$: arc. $Q G -$ arc. $Q g =$ ſin. $A G$. ſin. $P H$: ſin. $A B$ ſin $P G$, vel

$$g C : G g = \text{ſin.}\, A G\, \text{ſin.}\, P H : \text{ſin.}\, A B.\, \text{ſin.}\, P G.$$

Quum igitur ſit

$$g C : G g = \text{ſin.}\, g G C : \text{ſin.}\, G C g, \text{ et } G C g = C G L,$$

ob $C G L = C G A - 90°$, fiet

$$\text{ſin.}\, g G C : \text{coſ.}\, C G A = \text{ſin.}\, A G\, \text{ſin.}\, P H : \text{ſin.}\, A B\, \text{ſin.}\, P G.$$

Praeterea vero eſt

$$\text{ſin.}\, A G : \text{ſin.}\, A I = \text{ſin.}\, P I G : \text{ſin.}\, A G I \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\, P H : \text{ſin.}\, P G = \text{ſin.}\, P G I : \text{ſin.}\, P I G, \text{ vnde fit:}$$

$$\text{ſin.}\, A G.\, \text{ſin.}\, P H : \text{ſin.}\, A B.\, \text{ſin.}\, P G = \text{ſin.}\, P G I.\, \text{ſin.}\, A G I,$$

quamobrem conſequemur

$$\text{ſin}\; g G C : -\,\text{coſ.}\, C G A = \text{ſin.}\, P G I : \text{ſin.}\, A G I, \text{ ſiue}$$

$$\text{coſ.}\, C G P : \text{ſin.}\, P G I = \text{ſin.}\, P G L : \text{coſ.}\, L G I, \text{ ob } A G L = 90°;$$

huic autem aequationi aliter ſatisfieri nequit, quam ponendo $I G C = 90°$, ita vt ſit

$$\text{coſ.}\, G C P = \text{ſin.}\, P G I \text{ et ſin.}\, P G L = \text{coſ.}\, L G I.$$

Quare iam patet arcum circuli maximi, a puncto deſcribente G ad punctum contactus I ductum, etiam pro hoc caſu fore normalem ad curuam deſcriptam, quod caeteroquin ex ipſa geneſi curuae pateſcit. Immo in genere, quaecunque fuerit linea curua, quae ſuper alia quacunque in ſuperficie ſphaerica rotatur, ſi capiatur punctum quoddam G, ſiue in priori illa curua, ſiue intra eandem, ſeu etiam extra, curuae a puncto G deſcriptae ea erit proprietas, vt iuncto puncto G cum puncto contactus arcu circuli maximi G I, fit I G normalis ad istam curuam.

§. 11. Pro determinando arcu curuae descriptae M C G, habemus $C G : G g = \text{fin. } C g G : \text{fin. } C G L = \text{fin. } L G g : \text{fin. } C G L = \text{cof. } P G L : \text{cof. } L G I$, ob $P G g = 90°$ et $C G I = 90°$, tum vero ob $A G L = 90$, fit $\text{cof. } P G L = \text{fin. } A G P$ et $\text{cof. } L G I = \text{fin. } A G I$, hincque $C G : G g = \text{fin. } A G P : \text{fin. } A G I$. Atqui in triangulo A G P est $\text{fin. } A G . \text{fin. } A G P = \text{fin. } A P . \text{fin. } A P G$ et in triangulo A G I, $\text{fin. } A G . \text{fin. } A G I = \text{fin. } A I . \text{fin. } P I G$, vnde $\text{fin. } A G P : \text{fin. } A G I = \text{fin. } A P . \text{fin. } A P G : \text{fin. } A I . \text{fin. } P I G = \text{fin. } A P . \text{fin. } G I : \text{fin. } A I . \text{fin. } P G$, ob $\text{fin. } A P G : \text{fin. } P I G = \text{fin. } G I : \text{fin. } P G$, in triangulo P I G, fiet igitur $C G : G g = \text{fin. } A P . \text{fin. } G I : \text{fin. } A I . \text{fin. } P G$. Si igitur angulus I P G indigitetur per ψ, arcus vero G P, P I, A I, G I respectiue per litteras c, b, a, u et elementum Cycloidis C G per $d s$, erit primum $G g = d\psi . \text{fin. } c$, hincque

$$d s = d\psi . \frac{\text{fin. } (a + b) \text{ fin. } u}{\text{fin. } a},$$

existente

$$\text{cof. } u = \text{cof. } c \text{ cof. } b + \text{fin. } c \text{ fin. } b \text{ cof. } \psi,$$

ob $\text{cof. } G I = \text{cof. } P G . \text{cof. } P I + \text{fin. } P G . \text{fin. } P I . \text{cof. } G P I$.

Vt formula differentialis proposita concinnius exprimi queat, supponamus ex polo P circuli mobilis demissum esse arcum P N normalem ad I G, quem per z exprimamus, angulos autem I P N, G P N per ϕ, ϕ' et arcus I N, G N per v, v' indigitemus, ita vt fit $\psi = \phi + \phi'$ et $v + v' = u$, hincque colligitur

$$\text{fin. } u = \text{fin. } v \text{ cof. } v' + \text{fin. } v' \text{ cof. } v = \text{fin. } v . \frac{\text{cof. } c}{\text{cof. } z} + \text{fin. } v' . \frac{\text{cof. } b}{\text{cof. } z},$$

qua-

quare erit

$$d\psi \sin. u = (d\Phi + d\Phi') \frac{\sin. v \cos. c + \sin. v' \cos. b)}{\cos. z};$$

porro quia habetur

$$\sin. v = \sin. b \sin. \Phi \text{ et } \sin. v' = \sin. c \sin. \Phi',$$

haec formula differentialis sic exprimetur:

$$d\psi \sin u = (d\Phi + d\Phi') \left(\frac{\sin. \Phi \sin. b \cos. c}{\cos. z} + \frac{\sin. \Phi' \sin. c \cos. b}{\cos. z}\right).$$

Tum vero quia est

$$\text{Tang. } z = \text{Tang. } b \cos. \Phi = \text{Tang. } c \cos. \Phi',$$

fit differentiando

$$-\frac{dz}{\cos. z^2} \cot. b = d\Phi \sin. \Phi, \text{ et } -\frac{dz \cot. c}{\cos. z^2} = d\Phi' \sin. \Phi',$$

hincque

$$d\Phi \sin. \Phi \left(\frac{\sin. b \cos. c}{\cos. z} + \frac{\sin. \Phi'}{\sin. \Phi} \cdot \frac{\sin. c \cos. b}{\cos. z}\right)$$
$$+ d\Phi' \sin. \Phi' \left(\frac{\sin. c \cos. b}{\cos. z} + \frac{\sin. \Phi}{\sin. \Phi'} \cdot \frac{\sin. b \cos. c}{\cos. z}\right)$$
$$= -\frac{dz}{\cos. z^3} \left(\cos. b \cos. c + \frac{\sin. \Phi'}{\sin. \Phi} \cdot \frac{\sin. c \cos. b^2}{\sin. b}\right)$$
$$-\frac{dz}{\cos. z^3} \left(\cos. c \cos. b + \frac{\sin. \Phi}{\sin. \Phi'} \cdot \frac{\sin. b \cos. c^2}{\sin. c}\right).$$

Atqui ob

$$\cos. \Phi = \text{tang. } z \cot. b \text{ et } \cos. \Phi' = \text{tang. } z \cot. c, \text{ erit}$$

$$\sin. \Phi = \sqrt{(1 - \text{tang. } z^2 \cot. b^2)} = \cot. b \sqrt{(\text{tang. } b^2 - \text{tang. } z^2)} \text{ et}$$
$$\sin. \Phi' = \cot. c \sqrt{(\text{tang. } c^2 - \text{tang. } z^2)}, \text{ siue}$$
$$\sin. \Phi = \frac{\cos. b}{\cos. z} \sqrt{(\sin. b^2 \cos. z^2 - \sin. z^2 \cos. b^2)}$$
$$= \frac{\cos. b}{\cos. z} \sqrt{(\cos. z^2 - \cos. b^2)} \text{ et}$$
$$\sin. \Phi' = \frac{\cos. c}{\cos. z} \sqrt{(\cos. z^2 - \cos. c^2)},$$

vnde demum formula differentialis proposita fiet:

$$d\psi \sin. u = -\frac{2dz}{\cos. z^3} \cos. b \cos. c - \frac{dz}{\cos. z^3} \cdot \frac{\sin. c}{\sin. b} \cos. c \cos. b \frac{\sqrt{(\cos. z^2 - \cos. c^2)}}{\sqrt{(\cos. z^2 - \cos. b^2)}}$$
$$-\frac{dz}{\cos. z^3} \cdot \frac{\sin. b}{\sin. c} \cos. c \cos. b \frac{\sqrt{(\cos. z^2 - \cos. b^2)}}{\sqrt{(\cos. z^2 - \cos. c^2)}}.$$

Vbi

Vbi quidem primum membrum ratione in §. 5. indicata integratur, bina vero poſteriora membra integrationes difficiliores inuoluunt; nam huiusmodi formulae:

$$\frac{d.z}{\cos. z^3} \sqrt{\left(\frac{\cos. z^2 - \cos. b^2}{\cos. z^2 + \cos. c^2}\right)},$$

integratio iam quidem rectificationes ſectionum conicarum ſupponit, ideoque formulae iſtius generis

$$\frac{d\,z}{\cos. z^3} \sqrt{\left(\frac{\cos. z^2 + \cos. b^2}{\cos. z^2 - \cos. c^2}\right)}$$

adhuc difficilioris ſunt indaginis.

§. 12. Iam pro inueſtigando Polo V circuli, qui cum elemento curuae G C in G intimum habet contactum, ratiocinium conſimile illi, quo in §. 7. vſi ſumus, adhiberi poteſt. Breuitatis gratia vero figuris tum adhibitis quoque vtemur, vbi tamen intelligi debet, punctum G non amplius in ipſa peripheria circuli mobilis concipiendum eſſe. Differentiando igitur primum aequationem

Fig. 2 et 3.

$$\cos. AV = \cos. AI \cos. IV + \sin. AI. \sin. IV \cos. AIV,$$

ita vt ſolae I V, et A I V variabiles habeantur, fiet:

$$-d.IV.\cos. AI.\sin. IV + d.IV.\sin. AI.\cos. IV.\cos. AIV$$
$$- d.AIV.\sin. AI.\sin. IV.\sin. AIV = 0,$$

hincque ob

$$d.IV = -d.GI = -nm, \text{ et}$$
$$d.AIV = d.GIP = -1Gm,$$

prodibit iſta aequatio:

$$+nm.\cos. AI.\sin. IV - nm.\sin. AI.\cos. IV.\cos. AIV$$
$$+1Gm.\sin. AI.\sin. IV.\sin. AIV = 0,$$

hinc ob

$$1Gm = \frac{1n}{\sin. IG} = nm\frac{\cot. PIG}{\sin. IG},$$

fiet

ſubſtituendo hunc valorem et diuidendo totam aequationem per $\frac{n\, m}{\sin. IG}$, fiet

$$+\cos. AI. \sin. IV. \sin. IG - \sin. AI. \cos. IV \sin. IG. \cos. PIG$$
$$+\sin. AI. \sin. IV. \cos. PIG = 0,$$

ex quo colligitur:

$$\cot. IV = \frac{\cos. AI. \sin. IG + \sin. AI \cos. PIG}{\sin. AI. \sin. IG. \cos. PIG},$$

quae formula iterum transformari poteſt, introducendo pro $\cos. PIG$ eius valorem $\frac{\cos. PG - \cos. PI. \cos. GI}{\sin. PI. \sin. GI}$, eritque inde

$$\cot. IV = \frac{\cos. AI \sin. PI \sin. IG^2 + \sin. AI (\cos. PG - \cos. PI \cos. GI)}{\sin. AI. \sin. IG (\cos. PG - \cos. PI \cos. GI)}.$$

Hic vero ſtatim liquet, poſito $PG = PI$, fore huius expreſſionis tam numeratorem quam denominatorem per $1 - \cos. GI$ diuiſibilem, fierique tum

$$\cot. IV = \frac{\cos. AI \sin. PG (1 + \cos. IG) + \sin. AI \cos. PG}{\sin. AI. \sin. IG. \cos. PG}$$
$$= \frac{\sin. AP + \cos. AI \sin. PG \cos. IG}{\sin. AI \sin. IG \cos. PG}$$

prorſus vti ſupra inuenimus.

§. 13. Caſu quo ponitur $PI = 90°$, fiet

$$\cot. IV = \frac{\cos. AI. \sin. IG^2 + \sin. AI. \cos. PG}{\sin. AI. \sin. IG. \cos. PG},$$

ob $\sin. PI = 1$, et $\cos. PI = 0$, vnde inſimul poſito $PG = 90°$ deducitur $\text{Tang.}\, IV = 0$, ideoque ipſum punctum I erit polus circuli, qui cum curua propoſita eandem habet curuaturam. Tum vero ſi ſtatuatur $AI = 90°$, fiet $\cot. IV = \frac{1}{\sin. IG}$, ſiue $\text{Tang.}\, IV = \sin. IG$, quae proprietas igitur pro hac ſuppoſitione generaliter locum habet. Denique ſi ſtatuatur $PG = 90°$, fiet

$$\cot. IV = \frac{\cos. AI. \sin. PI. \sin. IG^2 - \sin. AI. \cos. PI. \cos. IG}{-\sin. AI. \sin. IG. \cos. PI. \cos. IG},$$

$$\cot. IV = \frac{cos. IG - cot. AI\,tang. PI.\,sin. IG^2}{sin. IG.\,cos. IG}$$ siue

$$= \frac{1}{sin. IG} - \cot. AI\ tang. PI\ tang. IG.$$

Tab. I Fig. 4. Caeterum generatim quoque hinc colligitur, quaecunque fuerint curuae in superficie sphaerica descriptae, tam illa immobilis T I B, quam ista S H I, quae super priori rotatur, tum simili ratione pro curua rotatione descripta M C G, definiri posse polum circuli, qui cum elemento G C eandem habet curuaturam. Nam si curua S H I tangat ipsam T I B in puncto I, sintque P et A poli circulorum, qui cum curuis propositis in I eandem habent curuaturam, distantia I V puncti V, qui est polus circuli cum elemento C G eandem curuaturam habentis, definietur per formulam modo propositam:

$$\cot. IV = \frac{cos. AI.\,sin. PI.\,sin. IG^2 + sin. AI\,(cos. PG - cos. PI.\,cos. GI)}{sin. AI.\,sin. IG\,(cos. PG - cos. PI.\,cos. IG)}.$$

§. 14. Nunc demum pro inuenienda quadratura

Fig. 3. spatii, quod comprehenditur inter curuam M C G, circulum T I et arcus circulorum maximorum G I, et similem G I pro initio rotationis, sequenti ratiocinio vtemur. Primum modo consimili, illi in §. 8 adhibiti, elementum huius spatii H G I i fiet

$$= IG\,m. \frac{sin. GI}{sin. IV}(\cos. IV - \cos. GV)\frac{S}{360^\circ}.$$

Tum vero est I G $m = -d.$ P I G, ex quo fiet elementum istud:

Fig. 4.

$$-d. PIG.\ \sin. IG\,(\cot. GV\,(1 - \cos. IG) + \sin. IG)\frac{S}{360^\circ}.$$

Iam igitur si angulus P I G indicetur littera Φ, arcus vero I G, A I respectiue per u, a indigitentur, erit per §. praeced.

$$\cot. IV = \frac{cos. a\,sin. u + sin. a\,cos. \Phi}{sin. a\,sin. u\,cos. \Phi},$$

hoc-

hocque valore introducto fiet elementum commemoratum, ſepoſito factore $\frac{S}{360^0}$,

$$-\frac{d\,\Phi}{\text{ſin.}\,a\;\text{coſ.}\,\Phi}\,\big((\text{coſ.}\,a\;\text{ſin.}\,u + \text{ſin.}\,a\;\text{coſ.}\,\Phi)\,(1-\text{coſ.}\,u) + \text{ſin.}\,a\;\text{ſin.}\,u^2\;\text{coſ.}\,\Phi\big),$$

$$= -\frac{d\,\Phi\,(1-\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,a\;\text{coſ.}\,\Phi}\,(\text{coſ}\,a\;\text{ſin.}\,u + \text{ſin.}\,a\;\text{coſ.}\,\Phi\,(2+\text{coſ.}\,u)),$$

ob $\text{ſin.}\,u^2 = (1-\text{coſ.}\,u)\,(1+\text{coſ.}\,u)$.

Vltima vero iſta expreſſio concinniorem hanc nanciſcitur formam:

$$-d\,\Phi\,\frac{\text{ſin.}\,u\;\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,a\;\text{coſ.}\,\Phi}\,(1-\text{coſ.}\,u) - d\,\Phi\,(1-\text{coſ.}\,u)\,(2+\text{coſ.}\,u).$$

Iam pro hac formula differentiali integranda ſiue u, ſiue Φ, ex calculo elidi poſſent ope aequationis

$$\text{coſ.}\,c = \text{coſ.}\,b\;\text{coſ.}\,u + \text{ſin.}\,b\;\text{ſin.}\,u\;\text{coſ.}\,\Phi;$$

vernm ſic irrationalia vix ac ne vix quidem euitari poterunt, igitur aliam viam tentabimus, introducendo in calculum angulum $GPI = \psi$. Quum igitur ſit,

$$-d\,PIG : d.\,GPI = \text{ſin.}\,PG.\;\text{coſ.}\,PGI : \text{ſin.}\,GI,$$

tumque habeatur

$$\text{coſ.}\,PGI = \frac{\text{coſ.}\,PI - \text{coſ.}\,PG\;\text{coſ.}\,GI}{\text{ſin.}\,PG\;\text{ſin.}\,GI}, \text{ fiet}$$

$$-d.\,PIG.\,\text{ſin.}\,GI^2 = d.\,GPI\,(\text{coſ.}\,PI - \text{coſ.}\,PG.\;\text{coſ.}\,GI),$$

ſiue

$$-d\,\Phi\;\text{ſin.}\,u^2 = d\,\psi\,(\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,c\;\text{coſ.}\,u);$$

praeterea vero eſt,

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{\text{coſ.}\,c - \text{coſ.}\,b\;\text{coſ.}\,u}{\text{ſin.}\,b\;\text{ſin.}\,u}, \text{ hinc}$$

$$d\,\Phi\,\frac{\text{ſin.}\,u\;\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,a\;\text{coſ.}\,\Phi}\,(1-\text{coſ.}\,u) = d\,\Phi\,\frac{\text{ſin.}\,u^2\;\text{coſ.}\,a\;\text{ſin.}\,b\,(1-\text{coſ.}\,u)}{\text{ſin.}\,a\,(\text{coſ.}\,c - \text{coſ.}\,b\;\text{coſ.}\,u)}$$

$$= -d.\,\psi\,\frac{\text{cot.}\,a\;\text{ſin.}\,b\,(1-\text{coſ.}\,u)\,(\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,c\;\text{coſ.}\,u)}{\text{coſ.}\,c - \text{coſ.}\,b\;\text{coſ.}\,u}, \text{ ideoque}$$

$$-d\,\Phi\,\frac{\text{ſin.}\,u\;\text{cot.}\,a}{\text{coſ.}\,\Phi}\,(1-\text{coſ.}\,u) - d\,\Phi\,(1-\text{coſ.}\,u) - d\,\Phi\;\text{ſin.}\,u^2$$

$= d\,\Phi$

$$= d\psi \,\text{cot.}\, a \,\text{sin.}\, b \,\frac{(1 - \text{cos.}\, u)(\text{cos.}\, b - \text{cos.}\, c \,\text{cos.}\, u)}{\text{cos.}\, c - \text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, u}$$
$$+ d\psi (\text{cos.}\, b - \text{cos.}\, c \,\text{cos.}\, u) + d\Phi (1 - \text{cos.}\, u).$$

§. 15. Heic vero bina priora membra facile per solam variabilem ψ exprimuntur, ob

$$\text{cos.}\, u = \text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, c + \text{sin.}\, b \,\text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, \psi,$$

et leui adhibita attentione liquet, expressionem

$$d\psi \,\frac{(1 - \text{cos.}\, u)(\text{cos.}\, b - \text{cos.}\, c \,\text{cos.}\, u)}{\text{cos.}\, c - \text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, u}$$

ad huiusmodi formam:

$$d\psi \left(\alpha + \beta \,\text{cos.}\, u + \frac{\delta}{\text{cos.}\, c - \text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, u}\right)$$

reduci posse, eritque

$$\beta = -\frac{\text{cos.}\, c}{\text{cos.}\, b},\quad \alpha = 1 + \frac{\text{cos.}\, c}{\text{cos.}\, b} - \frac{\text{cos.}\, c^2}{\text{cos.}\, b^2} \text{ et denique}$$
$$\delta = \text{cos.}\, b \left(1 - \frac{\text{cos.}\, c}{\text{cos.}\, b} - \frac{\text{cos.}\, c^2}{\text{cos.}\, b^2} - \frac{\text{cos.}\, c^3}{\text{cos.}\, b^3}\right);$$

praeterea vero est

$$\text{cos.}\, b - \text{cos.}\, c \,\text{cos.}\, u = \text{cos.}\, b \,\text{sin.}\, c^2 - \text{sin.}\, b \,\text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, c \,\text{cos.}\, \psi$$
$$= \text{sin.}\, c (\text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, b - \text{sin.}\, b \,\text{cos.}\, c \,\text{cos.}\, \psi) \text{ et}$$
$$\text{cos.}\, c - \text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, u = \text{sin.}\, b (\text{sin.}\, b \,\text{cos.}\, c - \text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, \psi).$$

Ex formula igitur proposita consequemur primum quantitates sola $d\psi$ affectas, quae sunt:

$$d\psi \,\text{cot.}\, a \,\text{sin.}\, b \left(1 + \frac{\text{cos.}\, c}{\text{cos.}\, b} - \frac{\text{cos.}\, c^2}{\text{cos.}\, b^2}\right)$$
$$- d\psi \,\text{cot.}\, a \,\text{sin.}\, b \,\text{cos.}\, c^2 + d\psi \,\text{cos.}\, b \,\text{sin.}\, c^2,$$

deinde occurrent expressiones factore $d\psi \,\text{cos.}\, \psi$ affectae, quae sunt:

$$- d\psi \,\text{cos.}\, \psi . \frac{\text{cot.}\, a}{\text{cos.}\, b} \,\text{sin.}\, b^2 \,\text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, c - d\psi \,\text{cos.}\, \psi \,\text{sin.}\, b \,\text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, c$$
$$= - d\psi \,\text{cos.}\, \psi \,\frac{\text{sin.}\, (a + b) \,\text{sin.}\, b \,\text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, c}{\text{sin.}\, a \,\text{cos.}\, b},$$

denique aderit quoque expressio:

$$\frac{\delta \, d\psi \,\text{cot.}\, a}{\text{sin.}\, b \,\text{cos.}\, c - \text{sin.}\, c \,\text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, \psi}.$$

Inte-

Integratio priorum expressionum per se est manifesta, pro vltima vero notetur esse

$$\int \frac{d\psi}{1-n\,cos.\psi} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}} \text{ arc. cos. } \left(\frac{cos.\psi - n}{1-n\,cos.\psi}\right),$$

ideoque pro casu praesenti, vbi $n = \text{tang. } c \text{ cot. } b$, fiet

$$\int \frac{d\psi}{1-tang.\,c\,cot.\,b\,cos.\psi} = \frac{tang.\,b}{\sqrt{(tang.\,b^2 - tang.\,c^2)}} \text{ arc. cos. } \left(\frac{cos.\psi\,tang.\,b - tang.\,c}{tang.\,b - tang.\,c\,cos.\psi}\right).$$

Iam vero notetur, expressionem

$$\frac{cos.\psi\,tang.\,b - tang.\,c}{tang.\,b - tang.\,c\,cos.\psi} = -\frac{(sin.\,c\,cos.\,b - cos.\,c\,sin.\,b\,cos.\psi)}{sin.\,b\,cos.\,c - sin.\,b\,cos.\,c\,cos.\psi},$$

sub forma valde concinna repraesentari posse; nam si angulus PGI exprimatur per q, erit per proprietates triangulorum sphaericorum: Tab. I. Fig. 4.

$$\text{cot.}\,\Phi = \frac{cos.\,c\,sin.\,b - sin.\,b\,cos.\,c\,cos.\psi}{sin.\,c\,sin.\psi} \text{ et cot.}\,\eta = \frac{cos.\,b\,sin.\,c - cos.\,c\,sin.\,b\,cos.\psi}{sin.\,b\,sin.\psi},$$

hincque fractio proposita $= -\frac{cot.\,\eta\,sin.\,b}{cot.\,\Phi\,sin.\,c}$, atque sin. b: sin. c $=$ sin. η: sin. Φ, vnde ista fractio erit $= -\frac{cos.\,\eta}{cos.\,\Phi}$. Quotiescunque igitur fuerit cos. $\eta <$ cos. Φ, problematis solutio erit in potestate, id quod eueniet dum tang. $b >$ tang. c.

§. 16. Pro casu vero vbi $n > 1$, siue tang. $b <$ tang. c, posito $z = \frac{cos.\psi - n}{1-n\,cos.\psi}$, fiet

$$dz = +\frac{d\psi\,sin.\psi\,(n^2-1)}{(1-n\,cos.\psi)^2},\quad \sqrt{(z^2-1)} = \frac{sin.\psi\,\sqrt{(n^2-1)}}{1-n\,cos.\psi},$$

ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(zz-1)}} = \frac{d\psi\,\sqrt{(n^2-1)}}{1-n\,cos.\psi}, \text{ hincque}$$

$$\frac{d\psi}{1-n\,cos.\psi} = \frac{dz}{\sqrt{(n^2-1)(z^2-1)}}; \text{ est vero}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)}} = l\,(z + \sqrt{(z^2-1)}),$$

ideoque fiet

$$\int \frac{d\psi}{1-n\,cos.\psi} = \frac{1}{(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}\, l\left(\frac{cos.\psi - n + sin.\psi\,\sqrt{(n^2-1)}}{1-n\,cos.\psi}\right).$$

Iam vero etiam restat vt explicemus, quid per

Tab. I. Fig. 6. $\int d\Phi(1-\text{cos}.\, u)$ exprimatur. Sit igitur P Polus circuli mobilis S G U, et initio rotationis ſupponamus punctum G fuiſſe in U, tumque ducantur arcus circulorum maximorum P G, P I, G I, vbi igitur G I erit $= u$ et ang. P I G $= \Phi$, hincque facile colligitur, elementum $d\Phi(1-\text{cof}.\, u)\frac{S}{360^\circ}$ eſſe elementum pro ſpatiis L U I L + G M L m, quae concluduntur arcu arculi mobilis G M L U, et arcubus circulorum maximorum G I, P I. Si in ſuperioribus ex-

Fig. 4. preſſionibus ponatur $\text{cof}.\, b = \text{cof}.\, c$, hoc eſt punctum G cum H coincidere, fiet noſtra expreſſio pro quadratura

$$= d\psi(1-\text{cof}.\, u)(\text{cot}.\, a\, \text{ſin}.\, b + \text{cof}.\, b) - d\Phi(1-\text{cof}.\, u)$$

$$= d\psi(1-\text{cof}.\, u)\frac{\text{ſin}.\,(a+b)}{\text{ſin}.\, a} - d\Phi(1-\text{cof}.\, u,$$

prorſus vti ſupra §. 8 inuenimus, nam quod ibi erat Φ iam eſt $90^\circ - \Phi$, tumque loco ψ, 2ψ adhibuimus. Vlterius ſi ponatur $\text{cof}.\, b = 0$ ob $b = 90^\circ$, expreſſio iſta §. 14 tradita fiet:

$$-d\psi\, \text{cot}.\, a(1-\text{cof}.\, u)\text{cof}.\, u - d\psi\, \text{cof}.\, c\, \text{cof}.\, u - d\Phi(1-\text{cof}.\, u),$$

vbi inſuper $\text{cof}.\, u = \text{ſin}.\, c\, \text{cof}.\, \psi$, cuius integratio eſt manifeſta. At caſu, quo ſimul $\text{cof}.\, c = 0$, formula iſta in hanc abibit:

$$d\psi\, \text{cot}.\, a\,(1-\text{cof}.\, u) = d\psi\, \text{cot}.\, a\,(1-\text{cof}.\, \psi), \text{ ob}$$

$$\text{cof}.\, b - \text{cof}.\, c\, \text{cof}.\, u = \text{cof}.\, c - \text{cof}.\, b\, \text{cof}\, u$$

atque angulum Φ. hoc caſu $= 90^\circ$, vnde $d\Phi = 0$. Deinde poſito $a = 90^\circ$, expreſſio iſta euadet:

$$d\psi\,(\text{cof}.\, b - \text{cof}.\, c\, \text{cof}.\, u) - d\Phi\,(1-\text{cof}.\, u)$$

$$= d\psi\, \text{ſin}.\, c\,(\text{cof}.\, b\, \text{ſin}.\, c - \text{cof}.\, c\, \text{ſin}.\, b\, \text{cof}.\, \psi)$$

$$- d\Phi\,(1-\text{cof}.\, u).$$

Denique, poſito $c = 90^\circ$, ſiue $\text{cof}.\, c = 0$, fiet expreſſio comme-

commemorata

$$-d\psi \frac{\cot. a \sin. b}{\cos. u}(1-\cos. u)+d\psi \cos. b-d\Phi(1-\cos. u),$$

existente $\cos. u = \sin. c \cos. \psi$, hincque pro hoc casu integrale Logarithmos inuoluet.

§. 17. Iam autem si ponatur $c = 0$, hoc est, punctum describens semper cum centro circuli mobilis coincidere, solutiones supra allatae adhiberi non possunt, etiamsi curua descripta iam sit simplicissima, quippe quae est circulus, polo A, interuallo AP descriptus. Sic pro formula elementum curuae exhibente §. 11, patet illam hoc casu locum non habere, ob angulum ψ euanescentem, ideoque $d\psi = 0$. Neque formula §. 12 allata pro interuallo circuli osculatoris locum habere potest, nam posito $\cos. PIG = 1$, fieret

$$\cot. IV = \frac{\cos. AI \sin. IG + \sin. AI}{\sin. AI \sin. IG} = \cos. AI + \frac{1}{\sin. IG},$$

quae tamen manifesto est $= \cot. AI$.

TRIGO-

TRIGONOMETRIA SPHAERICA VNIVERSA, EX PRIMIS PRINCIPIIS BREVITER ET DILVCIDE DERIVATA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab. I. Fig. 7. Propositum sit triangulum sphaericum quodcunque, cuius anguli litteris maiusculis A, B, C, latera autem minusculis *a*, *b*, *c*, in figura adscriptis, designentur, ita vt iisdem litteris maiusculis eaedem minusculae opponantur. Iam ex centro Sphaerae, cui literam O tribuamus, per singulos angulos educantur rectae O C, O *a*, O *b*, quae in centro O angulum solidum constituent, cuius anguli plani metientur latera trianguli, eorum autem inclinationes mutuae angulos trianguli.

Fig. 8. §. 2. His praemissis capiatur O C ipsi radio Sphaerae aequalis $= 1$, vnde ad O C in vtroque plano C O *a* et C O *b* normaliter statuantur rectae C *a* et C *b*; tum vero ex *b* ad C *a* demittatur perpendiculum *b p*, quod simul ad

ad planum C O a erit normale; praeterea vero ex p ad O a normalis ducatur $p\,q$, ſicque, ducta $b\,q$, ea etiam ad O a erit normalis. Hoc modo tota figura, qua indigemus, erit conſtructa.

§. 3. Cum iam ſit angulus C O a lateri b aequalis, erit

$$C\,a = \text{tang.}\, b \text{ et } O\,a = \text{ſec.}\, b = \frac{1}{\text{coſ.}\, b}.$$

Simili modo, ob angulum C O $b = a$, erit

$$C\,b = \text{tang.}\, a \text{ et } O\,b = \text{ſec.}\, a = \frac{1}{\text{coſ.}\, a}.$$

Porro autem, cum ſit angulus

$$a\,O\,b = c \text{ et } O\,b = \frac{1}{\text{coſ.}\, a} \text{ erit}$$

$$b\,q = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{coſ.}\, a} \text{ et } O\,q = \frac{\text{coſ.}\, c}{\text{coſ.}\, a}.$$

Hinc pro reliquis figurae lineis exprimendis, ob angulum

$$a\,C\,b = C, \text{ erit } b\,p = C\,b\,\text{ſin.}\, C = \text{tang.}\, a\, \text{ſin.}\, C \text{ et}$$

$$C\,p = C\,b\,\text{coſ.}\, C = \text{tang.}\, a\, \text{coſ.}\, C,$$

vnde porro colligitur

$$a\,p = C\,a - C\,p = \text{tang.}\, b - \text{tang.}\, a\, \text{coſ.}\, C,$$

et quia angulus C a O $= 90° - b$, habebitur,

$$p\,q = a\,p\,\text{coſ.}\, b = \text{ſin.}\, b - \text{tang.}\, a\, \text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, C \text{ et}$$

$$a\,q = a\,p\,\text{ſin.}\, b = \frac{\text{ſin.}\, b^2}{\text{coſ.}\, b} - \text{tang.}\, a\, \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, C.$$

Quare, cum inuenerimus O $q = \frac{\text{coſ.}\, c}{\text{coſ.}\, a}$, fiet

$$O\,a = \frac{1}{\text{coſ.}\, b} = \frac{\text{coſ.}\, c}{\text{coſ.}\, a} + \frac{\text{ſin.}\, b^2}{\text{coſ.}\, b} - \text{tang.}\, a\, \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, C,$$

ſicque erit

$$\frac{\text{coſ.}\, c}{\text{coſ.}\, a} = \text{coſ.}\, b + \text{tang.}\, a\, \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, C, \text{ ſiue}$$

$$\text{coſ.}\, c = \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b + \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, C$$

§. 4. Cum iam angulus $b\,q\,p$ praebeat inclinationem plani $a\,O\,b$ ad $a\,O\,C$, erit iste angulus $b\,q\,p = A$, vnde ex triangulo $b\,p\,q$ primo habebitur

$$\sin A = \frac{b\,p}{b\,q} = \frac{\sin. a \sin. C}{\sin. c}, \text{ siue } \frac{\sin. C}{\sin. c} = \frac{\sin. A}{\sin. a};$$

vnde iam sequitur, sinus angulorum nostri trianguli proportionales esse sinubus laterum oppositorum. Deinde aequatio

$$\cos. A = \frac{p\,q}{b\,q} = \frac{\cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C}{\sin. c},$$

cum binis praecedentibus coniuncta totam Doctrinam sphaericam complectitur, quod autem vberiorem explicationem postulat, vnde singulas has tres aequationes magis euoluamus.

Euolutio primae formulae.

$$\frac{\sin. C}{\sin. c} = \frac{\sin. A}{\sin. a}.$$

§. 5. Cum tam litteras maiusculas A, B, C, quam minusculas a, b, c, inter se permutare liceat, si modo iisdem litteris maiusculis eaedem minusculae oppositae relinquantur, erit etiam $\frac{\sin. C}{\sin. c} = \frac{\sin. B}{\sin. b}$, sicque prodibit haec tergemina aequatio:

$$\frac{\sin. A}{\sin. B} = \frac{\sin. B}{\sin. b} = \frac{\sin. C}{\sin. c}.$$

Deinde etiam notasse iuuabit sequentes aequalitates:

$$\sin. A \sin. b = \sin. B \sin. a$$

$$\sin. A \sin. c = \sin. C \sin. a$$

$$\sin. B \sin. c = \sin. C \sin. b.$$

Euolu-

Euolutio formulae.

$$\cos. A \sin. c = \cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C$$

§. 6. Quia $\sin. A \sin. c = \sin. C \sin. a$, diuidatur huius aequationis membrum prius per $\sin. A \sin. c$, posterius vero per $\sin. C \sin. a$, atque obtinebitur

$$\cot. A = \frac{\cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C}{\sin. a \sin. C},$$

vnde iam ex datis binis lateribus a et b, cum angulo intercepto C, angulus A reperiri potest; similique modo ex iisdem datis colligetur angulus B per hanc formulam, ex illa, literas A, B, a, b permutando, deriuatam:

$$\cot. B = \frac{\cos. b. \sin. a - \cos. a \sin. b \cos. C}{\sin. b. \sin. C}.$$

§. 7. Si porro eiusdem, quam hic consideramus, formulae primum terminum per $\frac{\sin. C}{\sin. c}$, secundum per $\frac{\sin. B}{\sin. b}$, tertium vero per $\frac{\sin. A}{\sin. a}$ multiplicemus, orietur ista aequatio memorabilis:

$$\cos. A \sin. C = \cos. a \sin. B - \cos. b \sin. A \cos. C,$$

$$\cos. a = \frac{\cos. A \sin. C + \sin. A \cos. C \cos. b}{\sin. B} \text{ et}$$

litteris B et C, item b et c inter se permutandis erit

$$\cos. a = \frac{\cos. A \sin. B + \sin. A \cos. B \cos. c}{\sin. C}, \text{ siue}$$

$$\cos. a \sin. C = \cos. A \sin. B + \sin. A \cos. B \cos. c$$

quae a proposita aliter non discrepat, nisi quod literae maiusculae et minusculae inter se permutentur, insuper vero omnes cosinus negatiue accipiantur.

§. 8. Quod si iam huius postremae aequationis primum membrum per $\sin. a \sin. C$, posterius per $\sin. A \sin. c$

 diui-

diuidamus, orietur hacc aequatio:

$$\cot. a = \frac{\cos. A \sin. B + \sin. A \cos. B \cos. c}{\sin. A \sin. c},$$

quae inseruit lateri a inueniendo, ex datis duobus angulis A, B, cum latere intercepto c; tum vero ex iisdem datis etiam latus b definietur hac aequatione:

$$\cot. b = \frac{\cos. B \sin. A + \sin. B. \cos. A \cos. c}{\sin. B \sin. c}.$$

§. 9. Praeterea vero ex eadem formula proposita casus alias difficillimus, quo ex datis tribus angulis latera postulantur, eruitur. Cum enim sit

$$\cos. A \sin. c = \cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C,$$

erit simili modo, literis A et B permutatis,

$$\cos. B \sin. c = \cos. b \sin. a - \sin. b \cos. a \cos. C.$$

Si posterior, ducta in cos. C, ad priorem addatur, prodibit ista aequatio:

$$\sin. c (\cos. A + \cos. B \cos. C) = \cos. a \sin. b \sin. C^2;$$

at vero ob $\sin. b \sin. C = \sin. B \sin. c$, aequatio illa induet hanc formam:

$$\cos. A + \cos. B \cos. C = \cos. a \sin. B \sin. C;$$

siue

$$\cos. A = - \cos. B \cos. C + \sin. C \cos. a.$$

Permutatis igitur literis A et C, manente B, fiet

$$\cos. C = - \cos. B \cos. A + \sin. B \sin. A \cos. c,$$

quae ex nostra tertia formula:

$$\cos. c = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b \cos. C$$

nascitur, si litterae maiusculae et minusculae inter se permutentur, omnes autem cosinus negatiue accipiantur.

Euolu-

Euolutio formulae.

$$\text{cof. } c = \text{cof. } a \text{ cof. } b + \text{fin. } a \text{ fin. } b \text{ cof. C.}$$

§. 10. Hic ſtatim euidens eſt, hanc formulam duplicem vſum praeſtare, alterum, quo ex datis lateribus a, b, c anguli ſunt definiendi, quod fit ope huius formulae

$$\text{cof. C} = \frac{\text{cof. } c - \text{cof. } a \text{ cof. } b}{\text{fin. } a \text{ fin. } b};$$

alterum vero, quando ex binis lateribus a et b, cum angulo intercepto C, tertium latus c quaeritur, quod fit ope huius formulae:

$$\text{cof. } c = \text{cof. } a \text{ cof. } b + \text{fin. } a \text{ fin. } b \text{ cof. C.}$$

§. 11. Nunc igitur hunc vſum etiam ad angulos transferre poterimus, quoniam modo inuenimus

$$\text{cof. C} = -\text{cof. A cof. B} + \text{fin. A fin. B cof. } c.$$

Hinc enim ſtatim, ſi dentur duo anguli A, B, cum latere intercepto c determinatur tertius angulus C. Deinde vero, ſi dentur omnes tres anguli trianguli ſphaerici, quodvis latus, veluti c, hoc modo definitur:

$$\text{cof. } c = \frac{\text{cof. C} + \text{cof. A cof. B}}{\text{fin. A fin. B}}.$$

§. 12. Cum igitur tota Trigonometria Sphaerica tribus aequationibus ſupra inuentis innitatur, permutatio angulorum et laterum generaliter locum habet, ſi modo omnes coſinus negatiue accipiantur. In prima enim formula:

$$\frac{\text{fin. C}}{\text{fin. } c} = \frac{\text{fin. B}}{\text{fin. } b} = \frac{\text{fin. A}}{\text{fin. } a},$$

haec permutabilitas per ſe eſt manifeſta, quia nulli coſinus occurrunt, deinde iſta permutabilitas pro ambabus reliquis formulis iam eſt euicta, vnde ſequens Theorema inſigne naſcitur:

Theorema.

Propoſito quocunque triangulo ſphaerico, cuius anguli ſint A, B, C, *et latera* a, b, c, *ſemper aliud triangulum analogum exhiberi poteſt, cuius anguli ſint complementa laterum illius ad duos rectos, latera vero complementa angulorum ad duos rectos.* Hoc enim modo omnes ſinus manent iidem, omnes vero coſinus euadunt negatiui, ideoque etiam tangentes et cotangentes. Conſtat autem tale triangulum formari ex Polis trium laterum trianguli propoſiti.

§. 13. Ad vſum ergo practicum omnia praecepta ſub quatuor formis repraeſentari poſſunt, quarum binae adeo ita arcte colligantur, vt altera ex altera formetur, dum litterae maiuſculae et minuſculae inter ſe permutantur, coſinibus negatiue ſumtis, ita vt ſufficiat duas tantum formas memoriae mandaſſe. Has igitur quatuor formas cum omnibus variationibus, quas tranſpoſitione litterarum recipere poſſunt, ante oculos exponamus.

Forma prima.

§ 14. Haec forma duos inuoluit caſus, quorum altero ex datis tribus lateribus quidam angulus, altero vero

vero ex datis duobus lateribus, cum angulo intercepto, tertium latus inuenitur:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c} \quad \Big| \quad \cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A.$$

$$\cos. B = \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c} \quad \Big| \quad \cos. b = \cos. a \cos. c + \sin. a \sin. c \cos. B$$

$$\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\sin. a \sin. b} \quad \Big| \quad \cos. c = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \cos. C.$$

Forma ſecunda.

§. 15. Haec forma etiam duos caſus continet, quorum altero ex datis tribus angulis aliquod latus, altero vero ex datis duobus angulis, cum latere intercepto, tertius angulus quaeritur:

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C} \quad \Big| \quad \cos. A = -\cos. B \cos. C + \sin. B \sin. C \cos. a$$

$$\cos. b = \frac{\cos. B + \cos. A \cos. C}{\sin. A \sin. C} \quad \Big| \quad \cos. B = -\cos. A \cos. C + \sin. A \sin. C \cos. b$$

$$\cos. c = \frac{\cos. C + \cos. A \cos. B}{\sin. A \sin. B} \quad \Big| \quad \cos. C = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B \cos. c.$$

Forma tertia.

§. 16. Haec forma eum caſum complectitur, quo ex duobus lateribus, cum angulo intercepto, duo reliqui anguli determinantur, quae formulae cum ſuis variationibus ita ſe habebunt:

$$\cot. A = \frac{\cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C}{\sin. a \sin. C} \quad \Big| \quad \cot. B = \frac{\sin. a \cos. b - \cos. a \sin. b \cos. C}{\sin. b \sin. C}$$

$$\cot. B = \frac{\cos. b \sin. c - \sin. b \cos. c \cos. A}{\sin. b \sin. A} \quad \Big| \quad \cot. C = \frac{\sin. b \cos. c - \cos. b \sin. c \cos. A}{\sin. c \sin. A}$$

$$\cot. C = \frac{\cos. c \sin. a - \sin. c \cos. a \cos. B}{\sin. c \sin. B} \quad \Big| \quad \cot. A = \frac{\sin. c \cos. a - \cos. c \sin. a \cos. B}{\sin. a \sin. B}$$

Forma

Forma quarta.

§. 17. Haec forma respicit casum, quo ex duobus angulis, cum latere intercepto, bina reliqua latera definiuntur, quae formulae cum variationibus ita se habent:

$\cot. a = \frac{\mathit{cos}.\,A\,\mathit{sin}.\,B + \mathit{sin}.\,A\,\mathit{cos}.\,B\,\mathit{cos}.\,c}{\mathit{sin}.\,A\,\mathit{sin}.\,c}$	$\cot. b = \frac{\mathit{sin}.\,A\,\mathit{cos}.\,B + \mathit{cos}.\,A\,\mathit{sin}.\,B\,\mathit{cos}.\,c}{\mathit{sin}.\,B\,\mathit{sin}.\,c}$
$\cot. b = \frac{\mathit{cos}.\,B\,\mathit{sin}.\,C + \mathit{sin}.\,B\,\mathit{cos}.\,C\,\mathit{cos}.\,a}{\mathit{sin}.\,B\,\mathit{sin}.\,a}$	$\cot. c = \frac{\mathit{sin}.\,B\,\mathit{cos}.\,C + \mathit{cos}.\,B\,\mathit{sin}.\,C\,\mathit{cos}.\,a}{\mathit{sin}.\,C\,\mathit{sin}.\,a}$
$\cot. c = \frac{\mathit{cos}.\,C\,\mathit{sin}.\,A + \mathit{sin}.\,C\,\mathit{cos}.\,A\,\mathit{cos}.\,b}{\mathit{sin}.\,C\,\mathit{sin}.\,b}$	$\cot. a = \frac{\mathit{sin}.\,C\,\mathit{cos}.\,A + \mathit{cos}.\,C\,\mathit{sin}.\,A\,\mathit{cos}.\,b}{\mathit{sin}.\,A\,\mathit{sin}.\,b}$

§. 18. Haec simplicitas eo magis est notatu digna, quod resolutio triangulorum rectangulorum adeo sex formulas a se inuicem prorsus diuersas requirat. Quod si enim angulus C fuerit rectus, ideoque c hypothenusa et a et b ambo catheti, sex formulae requisitae sunt sequentes:

$$\mathrm{cos}.\, c = \mathrm{cos}.\, a\, \mathrm{cos}.\, b$$
$$\mathrm{cos}.\, c = \mathrm{cot}.\, A\, \mathrm{cot}.\, B$$
$$\mathrm{sin}.\, a = \mathrm{sin}.\, c\, \mathrm{sin}.\, A \quad \text{siue} \quad \mathrm{sin}.\, b = \mathrm{sin}.\, c\, \mathrm{sin}.\, B$$
$$\mathrm{tang}.\, b = \mathrm{tang}.\, c\, \mathrm{cos}.\, A \; \text{--} \; \mathrm{tang}.\, a = \mathrm{tang}.\, c\, \mathrm{cos}.\, B$$
$$\mathrm{tang}.\, a = \mathrm{tang}.\, A\, \mathrm{sin}.\, b \; \text{--} \; \mathrm{tang}.\, b = \mathrm{tang}.\, B\, \mathrm{sin}.\, a$$
$$\mathrm{cos}.\, A = \mathrm{cos}.\, a\, \mathrm{sin}.\, B \; \text{--} \; \mathrm{cos}.\, B = \mathrm{cos}.\, b\, \mathrm{sin}.\, A$$

quae formulae ex superioribus sponte deriuantur, posito
$\mathrm{cos}.\, C = 0$ et $\mathrm{sin}.\, C = 1$.

§. 19. Quo autem logarithmi in vsum vocari queant, ex formis superioribus aliae eius indolis sunt deriuandae, quae ex factoribus constent, id quod per certas transformationes obtineri potest, quibus ad semisses tam angulo-

angulorum quam laterum deducimur. Has autem transformationes ſequentibus modis ſuccincte inſtituere licet.

Transformatio prima.

§. 20. Haec transformatio ex primae formae hac formula:

$$\operatorname{cof.} A = \frac{\operatorname{cof.} a - \operatorname{cof.} b \operatorname{cof.} c}{\operatorname{fin.} b \operatorname{fin.} c},$$

commodiſſime deriuatur. Hinc enim primo ſequitur:

$$1 - \operatorname{cof.} A = \frac{\operatorname{cof.} (b - c) - \operatorname{cof.} a}{\operatorname{fin.} b \operatorname{fin.} c}$$

$$1 + \operatorname{cof.} A = \frac{\operatorname{cof.} a - \operatorname{cof.} (b + c)}{\operatorname{fin.} b \operatorname{fin.} c}.$$

Hinc cum ſit

$$\frac{1 - \operatorname{cof.} A}{1 + \operatorname{cof.} A} = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A^2, \text{ erit}$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\operatorname{cof.} (b - c) - \operatorname{cof.} a}{\operatorname{cof.} a - \operatorname{cof.} (b + c)};$$

conſtat autem eſſe

$$\operatorname{cof.} p - \operatorname{cof.} q = 2 \operatorname{fin.} \tfrac{q - p}{2} \operatorname{fin.} \tfrac{p + q}{2},$$

vnde habebimus

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{fin.} \frac{a - b + c}{2} . \operatorname{fin.} \frac{a + b - c}{2}}{\operatorname{fin.} \frac{b + c - a}{2} . \operatorname{fin.} \frac{a + b + c}{2}}}.$$

Transformatio ſecunda.

§. 21. Haec petitur ex formae prioris formula

$$\operatorname{cof.} a = \frac{\operatorname{cof.} A + \operatorname{cof.} B \operatorname{cof.} C}{\operatorname{fin.} B \operatorname{fin.} C},$$

vnde deducitur

$$1 - \operatorname{cof.} a = \frac{- \operatorname{cof.} (B + C) - \operatorname{cof.} A}{\operatorname{fin.} B \operatorname{fin.} C}$$

$$1 + \operatorname{cof.} a = \frac{\operatorname{cof.} A + \operatorname{cof.} (B - C)}{\operatorname{fin.} B \operatorname{fin.} C},$$

ſicque

ſicque erit

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos.(B+C)+\cos.A}{\cos.(B-C)+\cos.A}.$$

Cum iam ſit

$$\cos.p+\cos.q = 2\cos.\tfrac{p-q}{2}\cos.\tfrac{p+q}{2},\ \text{erit}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos.\frac{B+C-A}{2}\cos.\frac{B+C+A}{2}}{\cos.\frac{B+A-C}{2}\cos.\frac{A+C-B}{2}}}.$$

Transformatio tertia.

§. 22. Hanc transformationem etiam ex prima forma expedire licet, combinandis his duabus formulis:

$$\cos.a-\cos.b\cos.c = \sin.b\sin.c\cos.A,$$

$$\cos.b-\cos.a\cos.c = \sin.a\sin.c\cos.B;$$

quarum illa per hanc diuiſa praebet,

$$\frac{\cos.a-\cos.b\cos.c}{\cos.b-\cos.a\cos.c} = \frac{\sin.b\cos.A}{\sin.a\cos.B} = \frac{\sin.B\cos.A}{\sin.A\cos.B}.$$

Addatur vtrinque vnitas, fietque

$$(\cos.a+\cos.b)(1-\cos.c) = \frac{\sin.(A+B)}{\sin.A\cos.B},$$

ſubtrahatur vtrinque vnitas, prodibit

$$(\cos.a-\cos.b)(1+\cos.c) = \frac{\sin.(B-A)}{\sin.A\cos.B},$$

quae aequatio per priorem diuiſa dat

$$\frac{\cos.a-\cos.b}{\cos.a+\cos.b}.\cot.\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{\sin.(B-A)}{\sin.(B+A)}.$$

Conſtat autem eſſe

$$\frac{\cos.p-\cos.q}{\cos.p+\cos.q} = \text{tang.}\ \tfrac{q+p}{2}\ \text{tang.}\ \tfrac{q-p}{2},$$

vnde colligitur:

$$\text{tang.}\ \tfrac{b-a}{2}.\ \text{tang.}\ \tfrac{b+a}{2}.\cot.\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{\sin.(B-A)}{\sin.(B+A)}.$$

§. 23.

§. 23. Iam in subsidium vocemus ex proprietate primaria hanc formulam:

$$\frac{\sin. b}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. A},$$ vnde deducimus

$$\frac{\sin. b - \sin. a}{\sin. b + \sin. a} = \frac{\sin. B - \sin. A}{\sin. B + \sin. A},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\text{tang.}\ \frac{b-a}{2}\ \text{cot.}\ \frac{b+a}{2} = \text{tang.}\ \frac{B-A}{2}\ \text{cot.}\ \frac{B+A}{2}.$$

Quod si iam aequationem ante inuentam per hanc multiplicemus, prodibit ista:

$$(\text{tang.}\ \frac{b-a}{2})^2\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{(\sin.\ \frac{B-A}{2})^2}{(\sin.\ \frac{B+A}{2})^2}.$$

siue extracta radice

$$\text{tang.}\ \frac{b-a}{2}\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin.\ \frac{B-A}{2}}{\sin.\ \frac{B+A}{2}}.$$

At vero prior formula per posteriorem diuisa dat

$$\text{tang.}\ \frac{b+a}{2}\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos.\ \frac{B-A}{2}}{\cos.\ \frac{B+A}{2}}.$$

His igitur formulis resoluitur casus, quo dantur duo anguli A et B cum latere intercepto c, et quaeruntur ambo latera a et b, quod fit ope harum formularum:

$$\text{tang.}\ \frac{b-a}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c.\ \frac{\sin.\ \frac{B-A}{2}}{\sin.\ \frac{B+A}{2}}$$

$$\text{tang.}\ \frac{b+a}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c.\ \frac{\cos.\ \frac{B-A}{2}}{\cos.\ \frac{B+A}{2}}.$$

Transformatio quarta.

§. 24. Haec ſimili modo deducitur ex his formulis:

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos B + \cos A \cos C = \sin A \sin C \cos b$$

quarum illa per hanc diuiſa praebet

$$\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos B + \cos A \cos C} = \frac{\sin B \cos a}{\sin A \cos b} = \frac{\sin b \cos a}{\sin a \cos b}.$$

Vnde vnitatem tam addendo quam ſubtrahendo ſequentes nouae deriuantur aequationes:

$$(\cos A + \cos B)(1 + \cos C) = \frac{\sin (a + b)}{\sin a \cos b}$$
$$(\cos A - \cos B)(1 - \cos C) = \frac{\sin (b - a)}{\sin a \cos b},$$

et diuidendo illam per hanc nanciſcimur:

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} \cot \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{\sin (a + b)}{\sin (b - a)},\ \text{ſiue}$$
$$\tan \frac{B - A}{2} . \tan \frac{B + A}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C^2 . \frac{\sin (b - a)}{\sin (b + a)},$$

quae aequatio, multiplicata et diuiſa per iſtam:

$$\tan \frac{B - A}{2} . \cot \frac{B + A}{2} = \tan \frac{b - a}{2} \cot \frac{b + a}{2},$$

producit

$$\tan \frac{B - A}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C . \frac{\sin \frac{b - a}{2}}{\sin \frac{b + a}{2}}$$

$$\tan \frac{B + A}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C . \frac{\cos \frac{b - a}{2}}{\cos \frac{b + a}{2}}$$

quae formulae valent pro caſu, quo dantur duo latera cum angulo intercepto.

§ 25. Quoniam praecedentium formarum omnes variationes appoſuimus, etiam hos quatuor caſus cum omnibus

nibus variationibus conſpectui exponamus.

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\ \frac{a+b-c}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+c-b}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{b+c-a}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\ \frac{b+c-a}{2}.\ \text{ſin.}\ \frac{a+b-c}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{a+c-b}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\ \frac{a+c-b}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{b+c-a}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{a+b-c}{2}\ \text{ſin.}\ \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{coſ.}\ \frac{B+C-A}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B+C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{A+B-C}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+C-B}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\text{coſ.}\ \frac{A+C-B}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B+C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{B+C-A}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B-C}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\text{coſ.}\ \frac{A+B-C}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{A+B+C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{A+C-B}{2}\ \text{coſ.}\ \frac{B+C-A}{2}}}$$

$$\text{tang.}\ \frac{b-a}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{B-A}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{B+A}{2}} \qquad \text{tang.}\ \frac{b+a}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{B-A}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{B+A}{2}}$$

$$\text{tang.}\ \frac{c-b}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{C-B}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{C+B}{2}} \qquad \text{tang.}\ \frac{c+b}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{C-B}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{C+B}{2}}$$

$$\text{tang.}\ \frac{a-c}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{A-C}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{A+C}{2}} \qquad \text{tang.}\ \frac{a+c}{2} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{A-C}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{A+C}{2}}$$

$$\text{tang}\ \frac{B-A}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} C\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{b-a}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{b+a}{2}} \qquad \text{tang.}\ \frac{B+A}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} C\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{b-a}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{b+a}{2}}$$

$$\text{tang.}\ \frac{C-B}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} A\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{c-b}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{c+b}{2}} \qquad \text{tang.}\ \frac{C+B}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} A\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{c-b}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{c+b}{2}}$$

$$\text{tang.}\ \frac{A-C}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} B\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{a-c}{2}}{\text{ſin.}\ \frac{a-c}{2}} \qquad \text{tang.}\ \frac{A+C}{2} = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2} B\ \frac{\text{coſ.}\ \frac{a-c}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{a+c}{2}}$$

§. 26. Ex his poſtremis formulis iam facile expeditur caſus, quem nondum attigimus, quo dantur duo latera cum angulis oppoſitis, et vel tertium latus vel tertius angulus quaeritur, quorum vtrumque duplici modo fieri poteſt. Has ergo formulas cum variationibus apponamus.

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c = \text{tang.}\,\frac{b-a}{2}\;\frac{\text{ſin.}\,\frac{B+A}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{B-A}{2}} \qquad \Big| \qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}c = \text{tang.}\,\frac{b+a}{2}\;\frac{\text{coſ.}\,\frac{B+A}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{B-A}{2}}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}a = \text{tang.}\,\frac{c-b}{2}\;\frac{\text{ſin.}\,\frac{C+B}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{C-B}{2}} \qquad \Big| \qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}a = \text{tang.}\,\frac{c+b}{2}\;\frac{\text{coſ.}\,\frac{C+B}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{C-B}{2}}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}b = \text{tang.}\,\frac{a-c}{2}\;\frac{\text{ſin.}\,\frac{A+C}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{A-C}{2}} \qquad \Big| \qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}b = \text{tang.}\,\frac{a+c}{2}\;\frac{\text{coſ.}\,\frac{A+C}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{A-C}{2}}$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}C = \text{tang.}\,\frac{B-A}{2}\;\frac{\text{ſin.}\,\frac{b+a}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{b-a}{2}} \qquad \Big| \qquad \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}C = \text{tang.}\,\frac{B+A}{2}\;\frac{\text{coſ.}\,\frac{b+a}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{b-a}{2}}$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}A = \text{tang.}\,\frac{C-B}{2}\;\frac{\text{ſin.}\,\frac{c+b}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{c-b}{2}} \qquad \Big| \qquad \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}A = \text{tang.}\,\frac{C+B}{2}\;\frac{\text{coſ.}\,\frac{c+b}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{c-b}{2}}$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B = \text{tang.}\,\frac{A-C}{2}\;\frac{\text{ſin.}\,\frac{a+c}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{a-c}{2}} \qquad \Big| \qquad \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B = \text{tang.}\,\frac{A+C}{2}\;\frac{\text{coſ.}\,\frac{a+c}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{a-c}{2}}$$

Hoc igitur modo praeſens tractatio tanquam ſyſtema completum totius Trigonometriae ſphaericae ſpectari poteſt.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE

MOTV OSCILLATORIO MIXTO

PLVRIVM PENDVLORVM

EX EODEM CORPORE MOBILI SVSPENSORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Sit A A' A'' corpus quodcunque, quod libere gyrari queat circa punctum O, seu potius circa axem horizontalem, ad planum figurae, quod verticale est intelligendum, normalem, atque in quotcunque eius punctis A, A', A'', A''', etc. suspensa sint pendula A L, A' L', A'' L'' etc., quae ergo singula motum oscillatorium recipere possunt, dum ipsum corpus circa punctum O oscillationes peragit; quo posito quaeritur, qualis motus in hoc corpore et omnibus pendulis oriri debeat, postquam illis initio motus quicunque fuerit impressus. Per se autem manifestum est hic non nisi de oscillationibus minimis quaestionem esse posse. Tab. II. Fig. 1.

§. 2. Antequam autem in hos motus inquiram, considerari opportet statum aequilibrii, in quo corpus cum omnibus pendulis quiescere possit. Hunc in finem per O ducatur recta horizontalis E O F, et ductis ex O ad singula puncta A, A$'$, A$''$ etc., ex quibus pendula suspenduntur, rectis O A, O A$'$, O A$''$ etc. vocentur istae rectae O A $= a$, O A$'$ $= a'$, O A$''$ $= a''$ etc.; tum vero ponantur anguli E O A $= \alpha$, E O A$'$ $= \alpha'$, E O A$''$ $= \alpha''$ etc.; has scilicet distantias et angulos similibus literis designo, vt, quod de vno dicetur, simul ad omnia reliqua transferri possit. Porro huius corporis massa vocetur $= M$, eiusque momentum inertiae respectu puncti O $= M k k$; eius vero centrum grauitatis reperiatur in puncto G, pro quo sit distantia O G $= e$ et angulus E O G $= \varepsilon$, qui quidem foret rectus in statu aequilibrii, si de solo hoc corpore esset sermo; verum hic simul consideramus omnia pendula A L, A$'$ L$'$, A$''$ L$''$ etc., quae singula situm teneant verticalem; ac primo eorum longitudines ita designemus: A L $= l$, A$'$ L$'$ $= l'$, A$''$ L$''$ $= l''$ etc., quas tanquam fila grauitatis expertia spectamus, quibus appensa sint corpora L, L$'$, L$''$ etc. Cum iam in hoc statu detur aequilibrium, necesse est vt summa omnium momentorum respectu puncti O nihilo fiat aequalis, vnde oritur sequens aequatio:

$$M e \operatorname{cos.} \varepsilon + L a \operatorname{cos.} \alpha + L' a' \operatorname{cos.} \alpha' + L'' a'' \operatorname{cos.} \alpha'' + \text{etc.} = 0.$$

§. 3. Nunc autem, postquam hoc corpus cum pendulis suis de statu aequilibrii vtcunque fuerit deturbatum, elapso tempore $= t$ ipsum corpus declinet a situ aequilibrii angulo quam minimo $= \Phi$, ita vt iam singuli anguli α, α', α'' etc. vna cum angulo ε idem acceperint augmentum Φ; tum vero singula pendula declinent a directione verticali sinistrorsum angulis minimis ω, ω', ω'' etc., ac praeterea sint vires, quibus singula pendula tenduntur T, T$'$, T$''$ etc.; qui-

quibus positis inuestigandum est, quantis viribus, tam ipsum corpus, quam singula pendula, ad motum concitentur.

§. 4. Quod igitur ad ipsum corpus M, quatenus circa punctum O est mobile, attinet, id primum a proprio pondere, in centro grauitatis G collecto, sollicitatur, cuius vis momentum est

$$M.\,OG.\,\text{cos.}\,(\varepsilon + \Phi) = Me\,\text{cos.}\,(\varepsilon + \Phi).$$

Quia nunc angulus ε incrementum cepit Φ, ob hunc angulum Φ infinite paruum, erit

$$\text{cos}\,(\varepsilon + \Phi) = \text{cos.}\,\varepsilon - \Phi\,\text{sin.}\,\varepsilon$$

vnde hoc momentum erit $Me\,\text{cos.}\,\varepsilon - Me\Phi\,\text{sin}\,\varepsilon$, quod tendit dextrorsum ideoque ad inclinationem Φ augendam, si quidem positiuum habuerit valorem. Praeterea vero hoc corpus sollicitatur a singulis pendulis, quatenus scilicet fila A L, A' L', A'' L'' etc. viribus T, T', T'' tenduntur, vbi sufficiet vnicum considerasse. Igitur ex pendulo A L, si situm teneret verticalem, oriretur momentum

$$T.\,OA\,\text{sin.}\,OAL = Ta\,\text{cos.}\,(\alpha + \Phi),$$

quia scilicet angulus α incrementum cepit $= \Phi$; quoniam autem hoc pendulum sinistrorsum a situ verticali declinat angulo ω, erit hoc momentum

$$Ta\,\text{cos.}\,(\alpha + \Phi + \omega) = Ta\,\text{cos.}\,\alpha - Ta(\Phi + \omega)\,\text{sin.}\,\alpha$$

quod pariter ad inclinationem Φ augendam tendit; vnde omnia momenta ex pendulis nata erunt

$$\begin{array}{lll} Ta\,\text{cos.}\,\alpha & + T'a'\,\text{cos.}\,\alpha' & + T''a''\,\text{cos.}\,\alpha'' \\ -Ta(\Phi + \omega)\,\text{sin.}\,\alpha & - T'a'(\Phi + \omega')\,\text{sin.}\,\alpha' & - T''a''(\Phi + \omega'')\,\text{sin.}\,\alpha''. \end{array}$$

§. 5. Ponamus breuitatis gratia

$$T\,a\,\text{cof.}\,\alpha + T'\,a'\,\text{cof.}\,\alpha' + T''\,a''\,\text{cof.}\,\alpha'' + \text{etc.} = P,$$

$$T\,a\,\text{fin.}\,\alpha + T'\,a'\,\text{fin.}\,\alpha' + T''\,a''\,\text{fin.}\,\alpha'' + \text{etc.} = Q, \text{ et}$$

$$T\,a\,\omega\,\text{fin.}\,\alpha + T'\,a'\,\omega'\,\text{fin.}\,\alpha' + T''\,a''\,\omega''\,\text{fin.}\,\alpha'' + \text{etc.} = \Omega$$

ita vt totum momentum, motum gyratorium corporis A accelerans, fit

$$M\,e\,\text{cof.}\,\varepsilon - M\,e\,\Phi\,\text{fin.}\,\varepsilon + P - Q\,\Phi - \Omega;$$

vnde, cum momentum inertiae corporis M, refpectu puncti O, pofitum fit $= M\,k\,k$, principia motus hanc fuppeditant aequationem:

$$\frac{d\,d\,\Phi}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{M\,e\,\text{cof.}\,\varepsilon - M\,e\,\Phi\,\text{fin.}\,\varepsilon + P - Q\,\Phi - \Omega}{M\,k\,k}.$$

Euidens autem eft; quia fingula pendula tantum infinite parum a fitu verticali declinant, tenfiones filorum ipfis ponderibus L, L', L'' fore aequales; vnde, cum fupra pro ftatu aequilibrii effet

$$M\,e\,\text{cof.}\,\varepsilon + L\,a\,\text{cof.}\,\alpha + L'\,a'\,\text{cof.}\,\alpha' + L''\,a''\,\text{cof.}\,\alpha'' + \text{etc.} = 0$$

erit hic $M\,e\,\text{cof}\,\varepsilon + P = 0$, ita vt iam habeamus

$$\frac{d\,d\,\Phi}{2\,g\,d\,t^2} = -\frac{M\,e\,\Phi\,\text{fin.}\,\varepsilon - Q\,\Phi - \Omega}{M\,k\,k},$$

exiftente

$$Q = L\,a\,\text{fin.}\,\alpha + L'\,a'\,\text{fin.}\,\alpha' + L''\,a''\,\text{fin.}\,\alpha'' + \text{etc. et}$$

$$\Omega = L\,a\,\omega\,\text{fin.}\,\alpha + L'\,a'\,\omega'\,\text{fin.}\,\alpha' + L''\,a''\,\omega''\,\text{fin.}\,\alpha'' + \text{etc.}$$

Tab. II. Fig. 2. §. 6. Porro pro motu fingulorum pendulorum definiendo vnicum confideraffe fufficiet. Hunc in finem ex puncto L in axem horizontalem O E ducatur verticalis L P, vt pro puncto L habeamus coordinatas $O\,P = x$ et $P\,L = y$; tum autem ducta etiam verticali $a\,A\,\alpha$ et horizontali $A\,b$, ob angulum $A\,O\,P = \alpha + \Phi$, erit

O ω

$$O\,a = a\,\text{cos.}\,(\alpha + \Phi) \text{ et } A\,a = a\,\text{sin.}\,(\alpha + \Phi).$$

Deinde ob angulum $L\,A\,a = \omega$ erit

$$A\,b = l\,\text{sin.}\,\omega \text{ et } L\,b = l\,\text{cos.}\,\omega,$$

vnde colligitur

$$O\,P = x = a\,\text{cos.}\,(\alpha + \Phi) + l\,\text{sin.}\,\omega = a\,\text{cos.}\,\alpha - a\,\Phi\,\text{sin.}\,\alpha + l\,\omega, \text{ et}$$
$$P\,L = y = a\,\text{sin.}\,(\alpha + \Phi) + l\,\text{cos.}\,\omega = a\,\text{sin.}\,\alpha + a\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha + l.$$

§. 7. Vires autem corpus L vrgentes ſunt primo eius pondus $= L$, quod tendit ad quantitatem y augendam, tum vero, ob tenſionem fili T, ſurſum vrgetur vi $= T\,\text{cos.}\,\omega = T$, dextrorſum autem vi $= T\,\text{sin.}\,\omega = T\,\omega$; vnde ex principiis motus nanciſcimur has aequationes:

$$\frac{d\,d\,x}{2\,g\,d\,t^2} = -\frac{T\,\omega}{L} \text{ et } \frac{d\,d\,y}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{L - T}{L};$$

hinc, pro x et y valores ſubſtituendo, habebimus has aequationes:

$$-\frac{a\,d\,d\,\Phi\,\text{sin.}\,\alpha + l\,d\,d\,\omega}{2\,g\,d\,t^2} = -\frac{T\,\omega}{L} \text{ et } \frac{a\,d\,d\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha}{2\,g\,d\,t^2} = \frac{L - T}{L},$$

ex qua poſteriore intelligitur, tenſionem T infinite parum a pondere L diſcrepare, quia membrum $\frac{a\,d\,d\,\Phi\,\text{cos.}\,\alpha}{2\,g\,d\,t^2}$ pro infinite paruo eſt habendum. Poſito ergo $T = L$ ſola aequatio prior nobis relinquitur, quae eſt

$$\frac{-a\,d\,d\,\Phi + l\,d\,d\,\omega}{2\,g\,d\,t^2} = -\,\omega.$$

§. 8. Similes plane aequationes pro ſingulis reliquis pendulis reperiuntur. Verum quo omnes has aequationes concinniores reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$a\,\text{sin.}\,\alpha = b;\ a'\,\text{sin.}\,\alpha' = b';\ a''\,\text{sin.}\,\alpha'' = b'';\ \text{etc.}$$
$$a\,\text{cos.}\,\alpha = c;\ a'\,\text{cos.}\,\alpha' = c';\ a''\,\text{cos.}\,\alpha'' = c'';\ \text{etc.}$$

ſic enim erit

$$Q = L\,b + L'\,b' + L''\,b'' + L'''\,b''' + \text{etc. et}$$

$$\Omega = L\,b\,\omega + L'\,b'\,\omega' + L''\,b''\,\omega'' + \text{etc.}$$

vnde erit primo pro motu ipſius corporis

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{M\,e\,\Phi\,\text{ſin.}\,\varepsilon - Q\,\Phi - \Omega}{M\,k\,k};$$

pro ſingulis autem pendulis erunt aequationes

$$\text{I. } \frac{-b\,dd\Phi + l\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -\omega;$$

$$\text{II. } \frac{-b'\,dd\Phi + l'\,dd\omega'}{2g\,dt^2} = -\omega';$$

$$\text{III. } \frac{-b''\,dd\Phi + l''\,dd\omega''}{2g\,dt^2} = -\omega'';$$

$$\text{IV. } \frac{-b'''\,dd\Phi + l'''\,dd\omega'''}{2g\,dt^2} = -\omega''';$$

quibus aequationibus totus motus determinatur. Pro ſtatu autem aequilibrii recordandum eſt eſſe

$$M\,e\,\text{coſ.}\,\varepsilon + L\,c + L'\,c' + L''\,c'' + L'''\,c''' + \text{etc.} = 0.$$

§. 9. Quia in his omnibus aequationibus incognitae Φ, ω, ω', ω'', ω''' etc. vbique vnicam tantum tenent dimenſionem, pro earum reſolutione methodo iam ſaepius adhibita vtamur, vnde primo quidem tantum ſolutionem ſpecialem reperimus, qua ſinguli motus inſtar pendulorum ſimplicium abſoluuntur. Pro angulo igitur Φ ſtatuamus, pendulum ſimplex, eius motui iſochronum, eſſe $= r$, ita vt ſit $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\Phi}{r}$; vnde deducitur integrando $\Phi = F\,\text{ſin}\,(f + t\sqrt{\frac{2g}{r}})$; vbi F et f ſunt conſtantes arbitrariae per integrationes ingreſſae; quantitas autem r etiamnunc eſt incognita ex reliquis motibus determinanda, pro qua cum plures eruturi ſimus valores, iis coniungendis ſolutionem generaliſſimam completam adipiſcemur.

§. 10.

§. 10. In noſtris igitur aequationibus vbique loco formulae $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2}$ ſcribamus eius valorem $-\frac{\Phi}{r}$; tum vero ſtatuamus

$$\omega = b\Phi,\ \omega' = b'\Phi,\ \omega'' = b''\Phi, \text{ etc.}$$

vt ſit

$$\frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{b\Phi}{r},\ \frac{dd\omega'}{2g\,dt^2} = -\frac{b'\Phi}{r},\ \frac{dd\omega''}{2g\,dt^2} = -\frac{b''\Phi}{r}, \text{ etc.}$$

quibus ſubſtitutis omnes noſtras aequationes per angulum Φ diuidere licebit, hincque pro ſingulis pendulis ſequentes orientur aequalitates:

$$\text{I. } \frac{b}{r} - \frac{bl}{r} = -b, \text{ vnde fit } b = \frac{b}{l-r};$$
$$\text{II. } \frac{b'}{r} - \frac{b'l'}{r} = -b' \quad - \quad - \quad b' = \frac{b'}{l'-r};$$
$$\text{III. } \frac{b''}{r} - \frac{b''l''}{r} = -b'' \quad - \quad - \quad b'' = \frac{b''}{l''-r};$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Aequatio autem pro motu ipſius corporis euadet

$$-\frac{\Phi}{r} = -\frac{Me\Phi\,\text{ſin.}\,\varepsilon - Q\Phi - \Omega}{Mkk},$$

vbi cum ſit

$$Q = Lb + L'b' + L''b'' + L'''b''' + \text{etc. et}$$
$$\Omega = Lbb\Phi + L'b'b'\Phi + L''b''b''\Phi + \text{etc.}$$

his valoribus ſubſtitutis, ſi praeterea loco b, b', b'' etc. valores ante inuenti ſurrogentur, orietur ſequens aequatio:

$$0 = \frac{Mkk}{r} - Me\,\text{ſin.}\,\varepsilon - Q - \frac{Lbb}{l-r} - \frac{L'b'b'}{l'-r} - \frac{L''b''b''}{l''-r} - \text{etc.}$$

ex qua aequatione quantitatem incognitam r erui oportet.

§. 11. Quo hanc aequationem ad formam commodiorem redigamus, totam per $Me\,\text{ſin.}\,\varepsilon + Q$ deuidamus, ponamusque breuitatis gratia

$$\frac{Mkk}{Me\,\text{ſin.}\,\varepsilon + Q} = m,$$

tum

tum vero

$$\frac{\mathrm{I}bb}{Me\,sin.\,\varepsilon+Q}=n;\quad \frac{\mathrm{I}'b'b'}{Me\,sin.\,\varepsilon+Q}=n';\quad \frac{\mathrm{I}''b''b''}{Me\,sin.\,\varepsilon+Q}=n'';\ \text{etc.}$$

et impetrabimus hanc aequationem:

$$0=\frac{m}{r}-1-\frac{n}{l-r}-\frac{n'}{l'-r}-\frac{n''}{l''-r}-\text{etc.}$$

quae aequatio, in ordinem redacta pro incognita r, ascendet ad gradum vnitate altiorem quam est numerus pendulorum.

§. 12. Totum ergo negotium reductum est ad resolutionem aequationis algebraicae, cuius radicem r erui opportet; vnde si radix quaecunque r fuerit inuenta, ex ea solutio particularis nostri problematis deriuabitur, quae sequentibus formulis continebitur:

$$\Phi=F\,\sin.\,(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}),\quad \omega=\frac{Fb}{l-r}\sin.\,(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}),$$
$$\omega'=\frac{Fb'}{l'-r}\sin.\,(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}),\quad \omega''=\frac{Fb''}{l''-r}\sin.\,(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}}),$$
$$\omega''=\frac{Fb'''}{l'''-r}\sin.\,(f+t\sqrt{\tfrac{2g}{r}});\ \text{etc.}$$

Sicque hoc casu omnes oscillationes, tam ipsius corporis, quam singulorum pendulorum, erunt regulares et inter se isochronae, dum omnes respondent pendulo simplici, cuius longitudo $=r$, vnde tempus vniuscuiusque oscillationis erit $=\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$.

§. 13. Quotquot igitur quantitas r habuerit radices, ex singulis talis motus regularis oriri potest; singuli autem per se tantum speciem motus specialissimam complectuntur. At vero si omnes istae species inter se quomodocunque coniungantur, solutio inde resultabit generalissima, quae omnes plane motus, quos hoc systema recipere potest, in se complectitur, ita vt, quomodocunque totum

tum ſyſtema initio fuerit agitatum et de ſtatu aequilibrii deturbatum, verus motus, qui ſequetur, aſſignari valeat.

§. 14. Vt hinc igitur iſtam ſolutionem maxime generalem adipiſcamur, omnes valores ipſius r per ſequentes characteres indicemus: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. pro coefficiente autem F ſcribamus ſucceſſiue litteras Germanicas maiuſculas: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. atque formulae ſolutionem generalem praebentes erunt:

$$\Phi = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega = \frac{\mathfrak{A}\,b}{l-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b}{l-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b}{l-\mathfrak{c}}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega' = \frac{\mathfrak{A}\,b'}{l'-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b'}{l'-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b'}{l'-\mathfrak{c}}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega'' = \frac{\mathfrak{A}\,b''}{l''-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b''}{l''-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b''}{l''-\mathfrak{c}}\,\text{ſin.}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

$$\omega''' = \frac{\mathfrak{A}\,b'''}{l'''-\mathfrak{a}}\,\text{ſin.}\,(f + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{a}}}) + \frac{\mathfrak{B}\,b'''}{l'''-\mathfrak{b}}\,\text{ſin.}\,(f' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{b}}}) + \frac{\mathfrak{C}\,b'''}{l'''-\mathfrak{c}}\,\text{ſin}\,(f'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{\mathfrak{c}}}) + \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

Hic autem ſupponitur, omnes ipſius r valores eſſe inter ſe inaequales; ſi enim duo pluresue inter ſe eſſent aequales, ſolutio haec non amplius foret generalis, ſed peculiari artificio opus foret, vt inde ſolutio generalis obtineatur.

§. 15. Quod quo clarius appareat, ponamus pendulorum numerum eſſe $= \lambda$, et cum peruenerimus ad

 hanc

hanc aequationem:

$$0 = \frac{m}{r} - 1 - \frac{n}{l-r} - \frac{n'}{l'-r} - \frac{n''}{l''-r} - \text{etc.}$$

ſi eam, ad fractiones tollendas, multiplicemus per productum omnium denominatorum $r(l-r)$ $(l'-r)$ $(l''-r)$ etc. prodibit aequatio ordinis $\lambda + 1$, ſi quidem omnes denominatores fuerint inaequales, quod euenit ſi omnium pendulorum longitudines l, l', l'' etc. fuerint inaequales. At ſi duae ſint inter ſe aequales, puta $l' = l$, aequatio illa factorem habebit $l - r$, vnde radix prodiret $r = l$, qui tamen valor in noſtris formulis locum habere nequit. Si enim eſſet $a = l$, valores angulorum ω, ω', ω'' fierent infiniti; quod incommodum multo magis turbaret, ſi plura quam duo pendula haberent eandem longitudinem; vnde his caſibus aliae radices pro r admitti nequeunt, niſi quae ex noſtra aequatione reſultant, poſtquam ea fuerit diuiſa per $l - r$, vel $(l-r)^2$, vel $(l-r)^3$ etc., prout plura pendula fuerint inter ſe aequalia; quare, ob diminutum numerum valorum ipſius r, non amplius tot conſtantes arbitrariae in calculum introducentur, quot requiruntur ad ſolutionem generalem reddendam.

§. 16. Quin etiam apparet, ſi eſſet $\lambda' = \lambda$, tum valores angulorum ω et ω' datam inter ſe habituros eſſe rationem, ſcilicet vt b ad b', ſiue valores fractionum $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$ inter ſe futuros eſſe aequales; quod ſi vero inſuper $l'' = l' = l$, hi tres valores: $\frac{\omega}{b}$, $\frac{\omega'}{b'}$ et $\frac{\omega''}{b''}$ inter ſe forent aequales, ſicque haec pendula ſimilem motum oſcillatorium eſſent habitura. Neque ergo haec ſolutio amplius eſſet generalis, cum iam in ipſo initio his pendulis diuerſus motus imprimi poſſet; quocirca his caſibus formulae noſtrae

ſtrae inuentae quadam correctione indigebunt, qua tot nouae conſtantes introducantur, quot ad ſolutionem completam poſtulantur. Has igitur correctiones omnino neceſſe erit inueſtigare.

§. 17. Ponamus igitur duo pendula longitudine inter ſe eſſe aequalia, ſiue eſſe $l' = l$; hinc autem duae aequationes differentio differentiales primae erunt:

$$-\frac{b\,dd\Phi + l\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -\omega, \text{ et}$$

$$-\frac{b'\,dd\Phi + l\,dd\omega'}{2g\,dt^2} = -\omega';$$

vnde, ſi poſterior per b' diuiſa a priore per b diuiſa ſubtrahatur, remanebit:

$$\frac{l}{2g\,dt^2}\left(\frac{dd\omega}{b} - \frac{dd\omega'}{b'}\right) = -\frac{\omega}{b} + \frac{\omega'}{b'}.$$

Hinc ſi ponamus

$$\frac{\omega}{b} + \frac{\omega'}{b'} = 2p \text{ et } \frac{\omega}{b} - \frac{\omega'}{b'} = 2q, \text{ vt fiat}$$

$$\frac{\omega}{b} = p + q \text{ et } \frac{\omega'}{b'} = p - q$$

litera p manifeſto exprimit valores illos aequales, qui ex ſuperiori ſolutione pro $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$ prodierunt, ita vt nunc ad alterum quantitas q addi, ab altero vero ſubtrahi debeat. Aequatio autem inuenta nunc induet hanc formam:

$$\frac{l}{2g\,dt^2}\,2\,ddq = -2q, \text{ ſiue } \frac{ddq}{2g\,dt^2} = -\frac{q}{l},$$

qua motus penduli ſimplicis longitudinis $= l$ exprimitur, ita vt ſit $q = \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\left(i + t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right)$. Hinc ergo quaeſita correctio pro caſu, quo $l' = l$, in hoc conſiſtit, vt, ſi p denotet valores ſupra exhibitos pro $\frac{\omega}{b}$ et $\frac{\omega'}{b'}$, nunc reuera ſit

$$\frac{\omega}{b} = p + \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\left(i + t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right) \text{ et}$$

$$\frac{\omega'}{b'} = p - \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\left(i + t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right);$$

N 2 ſicque

ſicque duae nouae conſtantes $\mathfrak{J}$ et i in calculum ſunt introductae. Reliquorum autem pendulorum pariter atque ipſius corporis motus iidem manent ac ſupra ſunt inuenti.

§. 18. Sint nunc tria pendula l, l' et l'' inter ſe aequalia, tum praeter duas ſuperiores aequationes accedit nunc inſuper tertia

$$-\frac{b''\,dd\Phi + l\,dd\omega''}{2g\,dt^2} = -\omega'';$$

Nunc igitur ex prima et tertia colligitur:

$$\frac{l}{2g\,dt^2}\left(\frac{dd\omega}{b} - \frac{dd\omega''}{b''}\right) = -\frac{\omega}{b} + \frac{\omega''}{b''};$$

at vero ex ſecunda ac tertia

$$\frac{l}{2g\,dt^2}\left(\frac{dd\omega'}{b'} - \frac{dd\omega''}{b''}\right) = -\frac{\omega'}{b'} + \frac{\omega''}{b''}.$$

Hinc, ſi vt ſupra operemur, reperiemus ſimili modo

$$\frac{\omega}{b} - \frac{\omega'}{b'} = \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\left(i + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\right)$$

$$\frac{\omega'}{b'} - \frac{\omega''}{b''} = \mathfrak{J}'\,\text{ſin.}\left(i' + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\right) \text{ et}$$

$$\frac{\omega''}{b''} - \frac{\omega}{b} = \mathfrak{J}''\,\text{ſin.}\left(i'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\right),$$

quarum ergo trium formularum ſumma nihilo debet eſſe aequalis, vnde ſequitur fore

$$\mathfrak{J}\,\text{ſin.}\,i + \mathfrak{J}'\,\text{ſin.}\,i' + \mathfrak{J}''\,\text{ſin.}\,i'' = 0 \text{ et}$$

$$\mathfrak{J}\,\text{coſ.}\,i + \mathfrak{J}'\,\text{coſ.}\,i' + \mathfrak{J}''\,\text{coſ.}\,i'' = 0,$$

vnde numerus conſtantium ad quatuor reducitur. His notatis, ſi p denotet quantitatem, quae ſupra pro formulis $\frac{\omega}{b}$, $\frac{\omega'}{b'}$, $\frac{\omega''}{b''}$ fuit inuenta, nunc, correctione adiecta, habebimus

$$\frac{\omega}{b} = p + \mathfrak{J}\,\text{ſin.}\left(i + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\right)$$

$$\frac{\omega'}{b'} = p + \mathfrak{J}'\,\text{ſin.}\left(i' + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\right) \text{ et}$$

$$\frac{\omega''}{b''} = p + \mathfrak{J}''\,\text{ſin.}\left(i'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{l}}\right),$$

vbi

vbi constantes ita comparatas esse oportet, vt summa trium harum formularum fiat aequalis $3p$.

§. 19. Eodem modo ratiocinium erit instituendum, si plura pendula inter se fuerint aequalia; ita vt nunc super hoc problemate nihil amplius sit desiderandum, quotcunque etiam pondera fuerint appensa. Atque hinc etiam clarissime elucet summus vsus faecundissimi principii Illustr. *Dan. Bernoullii*, quo omnes huiusmodi motus oscillatorios semper ex aliquot motibus pendulorum simplicium compositos esse statuit. Imprimis vero etiam hinc patet, quam egregie istud principium cum primis Mechanicae principiis conspiret, atque adeo ex iis immediate deduci queat. Pulcherrime scilicet hoc principium connexum est cum ea conditione, qua in omnibus huiusmodi motibus definiendis peruenitur ad eiusmodi aequationes differentiales secundi gradus, in quibus omnes incognitae vnicam vbique habent dimensionem, ita vt semper dentur eiusmodi solutiones speciales, in quibus omnes incognitae constantes inter se teneant rationes, quo ipso oscillationes regulares ac simplices innuuntur. Tum vero ex omnibus his solutionibus specialibus per ipsam naturam huiusmodi aequationum solutio generalis et completa formari potest.

§. 20. Quanquam autem haec solutio maxime est generalis, et omnes plane casus in se complectitur, siue omnia pendula sint longitudine aequalia siue inaequalia, si quidem pro aequalibus correctio exposita adhibeatur: tamen dantur insuper casus, qui peculiarem resolutionem requirunt, qui sunt: quando pendula ab ipso axe horizontali E O F ſuſpenduntur, veluti ſi punctum A cadat in iſtum axem, ideoque angulus A O E $= \alpha$ euaneſcat; tum enim diſtantia $b = a$ ſin. α euaneſcet, vnde expreſſio noſtra, pro angulo ω inuenta, nullum plane motum huius penduli indicabit, cum tamen vtique motum recipere queat. Hoc autem caſu aequatio differentialis pro hoc pendulo non amplius inuoluet angulum Φ, ſed erit ſimpliciter

$$\frac{l\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -\omega;$$

vnde patet, iſtud pendulum motum oſcillatorium regularem recipere, perinde ac ſi ex puncto fixo eſſet ſuſpenſum, ita vt eius motus neque ab ipſo corpore M, neque a reliquis pendulis afficiatur. Ac viciſſim quoque hoc pendulum nihil plane conferet ad motum corporis M; quia enim $b = 0$, in quantitatem Q plane non ingreditur; ſimulque etiam quantitas n euaneſcit; vnde patet ab hoc pendulo motum corporis M nullo modo perturbari. Eodem modo res ſe habebit, ſi plura pendula ex ipſo axe E O F fuerint ſuſpenſa, tum enim ſingula libere ſuas oſcillationes peragent, neque vllo modo in motum reliquorum pendulorum, neque ipſius corporis M effectum exerent, quorum igitur motus perinde ſe habebit, ac ſi illa pendula prorſus abeſſent.

INVESTI-

INVESTIGATIO MOTVVM, QVIBVS LAMINAE ET VIRGAE ELASTICAE CONTREMISCVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Quanquam hoc argumentum iam pridem tam ab Illustriss. *D. Bernoulli*, quam a me fusius est pertractatum: tamen quia illo tempore neque principia, vnde huiusmodi motus determinari opportet, satis erant exculta, neque ea Analyseos pars, quae circa functiones binarum variabilium versatur, satis explorata, actum agere non videbor, si nunc idem argumentum accuratius inuestigauero. Praeterea vero etiam tot diuersa motuum genera in huiusmodi corporibus locum habere possunt, quae accuratiorem enucleationem postulant; quamobrem hic operam dabo, vt vniuersam huius rei disquisitionem ex primis principiis deducam, et clarius, quam quidem ante est factum, proponam. Imprimis autem omnia diuersa motuum genera, quae quidem occurrere possunt, dilucide sum expositurus. Quo igitur omnia fiant magis perspicua, duo praemittam Lemmata, quorum altero status aequilibrii, altero vero motus virgarum vtcunque elasticarum et a potentiis quibuscunque

que sollicitatarum definietur; vbi quidem tam virgam quam potentias perpetuo in eodem plano sitas esse assumo. Demonstrationem autem horum lemmatum non addo, quoniam eam alio loco iam dedi, atque adeo etiam ad eos casus, quibus motus non fit in eodem plano, accommodaui.

Lemma I.

Tab. II. Fig. 3. §. 1. *Si virgae vtcunque elasticae* E Y F *in singulis elementis potentiae quaecunque fuerint applicatae, statum aequilibrii definire.*

Solutio.

Referatur virga ad axem fixum O V, et pro eius puncto quocunque Y statuantur coordinatae orthogonales $OX = x$ et $XY = y$, portio autem virgae $EY = s$, vt sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; tum vero elementi $Yy = ds$ sit massa $= S\,ds$, ac in eodem loco elasticitas absoluta $= V$, ita vt, posito radio osculi $= r$, vis, seu potius momentum elasticitatis sit $= \frac{V}{r}$; hincque, loco r substituta formula differentiali, istud momentum erit

$$= \frac{V(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

vbi scilicet nullum differentiale pro constanti est assumtum. Deinde omnes potentiae, quibus hoc elementum Yy sollicitatur, resoluantur secundum directiones coordinatarum, ac ponatur vis inde secundum directionem Y P resultans $= P\,ds$ et secnndum directionem $YQ = Q\,ds$: quibus positis pro statu aequilibrii requiritur, vt sit

$$\int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}\right).$$

Praeter

Praeterea vero tenſio, qua elementum Y y ſecundum tangentem antrorſum verſus E tenditur, erit

$$-\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\,ds.$$

Scholion.

§. 2. Hic aſſumſimus virgam in ſtatu naturali in directum eſſe extenſam, ita vt in hoc ſtatu radius oſculi vbique ſit infinitus. Sin autem virga naturaliter iam fuerit incuruata, et pro eius puncto Y radius oſculi ponatur $= \varrho$, tum, quia vis elaſticitatis eatenus tantum ſe exſerit, quatenus iſta curuatura in ſtatu naturali ſiue augetur ſiue diminuitur, pro ſtatu aequilibrii habebitur iſta aequatio:

$$\int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = V\left(\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3}\right) - \frac{V}{\varrho}.$$

Caeterum quia formulae integrales $\int P\,ds$ et $\int Q\,ds$ denotant ſummam omnium virium elementarium, portioni virgae E Y $= s$ applicatarum, manifeſtum eſt, ſi virga in ipſo termino E a viribus finitis ſollicitetur, eas ſimul in his formulis integralibus comprehendi debere.

Lemma 2.

§. 3. *Si eadem virga elaſtica, quam deſcripſimus, quomodocunque ſuper eodem plano fuerit proiecta, eius motum inueſtigare, hoc eſt, eius ſitum et figuram ad quoduis tempus definire.*

Solutio.

Maneant igitur omnes denominationes, vt modo ſunt conſtitutae, atque elapſo tempore $= t$ (perpetuo in minutis secundis exprimendo) teneat virga figuram in tabula repraesentatam, ita vt portioni E Y $= s$ respondeant coordinatae O X $= x$ et X Y $= y$, quae, quia cum tempore continuo variantur, hic tanquam functiones duarum variabilium s et t spectari debent. Hinc igitur colligantur formulae $\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right)$ et $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right)$, quibus vncinulis ( ) indicatur, in vtraque differentiatione solum tempus t variabile esse assumtum, arcum vero s pro constante esse habitum. Hinc iam ex viribus elementaribus, virgae in singulis punctis applicatis, formentur sequentes valores:

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\right) \text{ et } Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right),$$

vbi g denotat altitudinem lapsus grauium in vno minuto secundo; atque ex his status virgae pro hoc tempore isthac exprimetur aequatione:

$$\int d\,y \int P'\,d\,s - \int d\,x \int Q'\,d\,s = V\left(\frac{d\,y\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,y}{d\,s^3}\right) - \frac{V}{\varrho},$$

si quidem virga in statu naturali iam ita fuerit incuruata, vt eius puncto Y conueniat radius osculi ϱ; vnde si virga fuerit naturaliter recta, ob $\varrho = \infty$ terminus postremus $\frac{V}{\varrho}$ omitti poterit. Denique, quod ad tensionem in singulis punctis attinet, erit simili modo quo supra tensio in y versus E vergens

$$-\left(\frac{d\,x}{d\,s}\right)\int P'\,d\,s - \left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)\int Q'\,d\,s.$$

His igitur formulis, si quidem eas euoluere licuerit, totus virgae motus determinabitur.

Problema I.

Tab. II. Fig. 4. §. 4. *Si virga datae longitudinis* E F, *naturaliter recta et vbique tam aequaliter crassa quam aequaliter ela-*

sti. a

ſtica vtcunque contremiſcat, aequationem inuenire, qua omnes motus, qui in virga locum habere poſſunt, contineantur.

Solutio.

Referat igitur E F virgam noſtram in ſtatu naturali conſtitutam, cuius longitudo ſit $EF = a$, eiusque craſſities $= cc$, ita vt eius volumen ſit acc; ac per talia volumina tam maſſas quam vires ſollicitantes exprimamus, ita vt, ſi dicamus quampiam vim eſſe $= b^3$, ea tanta ſit intelligenda, quantum foret pondus eiusdem materiae, ex qua virga conſtat, ſub volumine b^3 contentum. Hinc ſi in virga capiatur portio $EX = x = s$, quandoquidem in vibrationibus minimis arcus s perpetuo abſciſſae x aequari poteſt, elementi $Xx = ds$ maſſula erit $= ccds$, ita vt, quod ſupra vocavimus S, hic nobis ſit $= cc$. Tempore autem elapſo t, ob tremorem conceptum tranſierit punctum X in Y, poſito $XY = y$, et quia vibrationes quam minimae ſtatuuntur, iſta applicata y prae abſciſſa $EX = x$, ſiue arcu s, quaſi euaneſcet; ſicque idem punctum x alium motum habere nequit, niſi in directione applicatae XY; vnde motus ſecundum directionem x erit nullus, ideoque $\frac{ddx}{dt^2} = 0$; atque hinc ob $ddx = 0$, radius osculi erit

$$\frac{ds^3}{-dx\,ddy} = -\frac{ds^2}{ddy};$$

praeterea vero erit $\varrho = \infty$. Quod autem ad elaſticitatem abſolutam attinet, ea pro ſimilibus virgis recte quadrato craſſitiei reputatur proportionalis, ita vt ſit V vt c^4; vnde ſtatuamus $V = bc^4$, vbi b denotat quantitatem ab indole materiae virgae pendentem, et quia $\frac{V}{r}$ momentum

 virium

virium exhibet, vis autem nobis per volumen denotatur, formula $\frac{V}{r}$ quatuor dimensiones lineares complecti debet; vnde patet, literam b certam longitudinem referre.

Quia porro virgam a nullis viribus elementaribus vrgeri statuimus, erit tam $P = o$ quam $Q = o$. Interim tamen, si sumamus virgam in termino E duas sustinere vires, alteram in directione $EF = E$, alteram vero in directione $Ef = F$. fieri debebit

$$\int P\,ds = E \text{ et } \int Q\,ds = F.$$

Cum igitur ob $S = cc$ poni oporteat

$$P' = P - \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = P, \text{ ob } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = o,$$

fit $\int P'\,ds = E$; tum vero erit

$$Q' = Q - \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \text{ hincque porro}$$

$$\int Q'\,ds = F - \frac{cc}{2g}\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

His igitur valoribus substitutis aequatio pro motu virgae induet hanc formam:

$$Ey - Fx + \frac{cc}{2g}\int dx\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,ddy}{ds^2}.$$

Pro tensione autem, qua punctum y versus E tenditur, habebimus $-E - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q'\,ds$, vbi, quia $\frac{dy}{ds}$ quasi euanescit, tensio simpliciter erit $-E$, vnde casu quo $E = o$ tensio vbique etiam erit nulla.

Differentiemus igitur aequationem pro motu inventam, sumto solo elemento $ds = dx$ constante, fietque

$$E\,dy - F\,dx + \frac{cc}{2g}\,ds\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,d^3y}{ds^2}$$

et per ds diuidendo

$$\frac{E\,dy}{ds} - F + \frac{cc}{2g}\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,d^3y}{ds^3};$$

haec

haec aequatio denuo differentiata ac per ds diuisa praebebit istam:

$$\frac{E\,ddy}{ds^2} + \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{bc^4\,d^4y}{ds^4},$$

quae, quo discrimen inter binas variabiles s et t clarius ob oculos ponatur, more solito ita repraesentetur:

$$E\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) + \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right).$$

Corollarium I.

§. 5. Quod si ergo virga a nullis plane viribus externis extendatur, ita vt sit $E = 0$, aequatio motum virgae determinans erit

$$\frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),\ \text{siue}$$

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

ita vt totum negotium huc sit reductum, quemadmodum ista aequatio differentialis quarti gradus integrari queat; vbi quidem in limine confiteri cogimur, eius integrale nullo adhuc modo inueniri potuisse, ita vt contenti esse debeamus in solutiones particulares inquirere.

Corollarium II.

§. 6. Sin autem accedat vis litera E indicata, eius duo casus perpendendi occurrunt: prouti virga ab ea vel extenditur vel comprimitur. Talis enim virga, quatenus est rigida, etiam vires sustinere potest, quae ipsam comprimere conantur, cuiusmodi vires eo maiores esse possunt, quo maior fuerit elasticitas; si enim esset perfecte flexilis, nulla plane vis comprimens admitti posset, vnde pro quouis elasticitatis gradu indagandum erit, quantam vim comprimentem sustinere valeat, antequam in-

 curue-

curuetur, quam quidem quaestionem iam olim solutam dedi, vbi vires, quas columnae sustentare valent, sum perscrutatus. Quod autem ad alteram vim extendentem attinet, ab ea virga, quasi esset chorda perfecte flexilis, ex-
Tab. II. Fig. 5. tendi poterit. Concipiatur scilicet eius termino E filum seu chorda alligata, quae per foraminulum *o* fulcri immobilis *m n* traducta circa trochleam T certum pondus P habeat appensum. Hoc igitur modo virga non solum ob propriam elasticitatem, sed etiam ob pondus tendens P motum tremulum concipiet, vnde sonum edet mixtum seu medium quendam inter sonum virgae elasticae proprium et sonum chordae tensae.

Corollarium III.

§. 7. Ponamus igitur huiusmodi vim tendentem esse $= c\,c\,h$, et quia in plagam contrariam dirigitur, erit $E = -c\,c\,h$, vnde pro isto motu habebimus sequentem aequationem:

$$-h\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) + \frac{1}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -b\,c\,c\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right),$$

quae ergo aequatio, si fuerit $b = 0$, quo casu elasticitas euanescit, motum chordae perfecte flexilis exprimet; erit enim

$$\frac{1}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = h.\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right),$$

quemadmodum contra, si $h = 0$, orietur sonus virgae elasticae proprius, fietque

$$\frac{1}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = -b\,c\,c\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right);$$

et si casus ex vtroque fuerit mixtus, habebimus

$$\frac{1}{2\,g}\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = h.\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) - b\,c\,c\left(\frac{d^4\,y}{d\,s^4}\right).$$

Scho-

Scholion.

§. 8. Quoniam igitur vires ſecundum ipſam virgae directionem agentes, quibus ea vel extenderetur vel comprimeretur, ad aequationem finalem magis complicatam perducunt, eas in hac tractatione penitus remoueamus, et noſtras inueſtigationes ad eos tantum motus reſtringamus, quos virga, ſiue a nullis viribus ſollicitata, ſiue a talibus tantum, quae in virgae directionem normaliter agunt, quas ſupra litera F deſignauimus, recipere poteſt. Ipſam vero virgam hic perpetuo naturaliter rectam et per totam longitudinem vbique aequaliter craſſam et aequaliter elaſticam ſtatuamus, easdem denominationes retinentes, quae hactenus ſunt deſcriptae. At quia aequatio finalis per duplicem differentiationem eſt orta, etiam praecedentes aquationes, quae ad eam deduxerunt, conſideraſſe iuuabit, quae ſunt:

$$\text{I. } -Fx + \frac{cc}{2g}\int dx \int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{ddy}{ds^2}\right).$$

$$\text{II. } -F + \frac{cc}{2g}\int ds \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right).$$

$$\text{III. } \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right), \text{ ſiue } \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

vbi in priores adhuc vis F, qua virga normaliter vrgeri poteſt, ingreditur, cuius ratio erit habenda, quando virga non omnino eſt libera, ſed in vno pluribusue punctis quaſi ope ſtyli eſt fixa, circa quem tamen ſit mobilis; vnde ſtatim intelligitur, virgam infinitis modis per tales ſtylos affigi poſſe, quibus eius motus diuerſimode temperetur; quos diuerſos caſus in ſequentibus accuratius euoluemus.

Proble-

Problema II.

§. 9. *Cum virga noſtra infinitis modis contremiſcere queat, eos caſus in genere inueſtigare, quibus eius motus vibratorius euadet regularis, ſeu minimis oſcillationibus penduli cuiuspiam ſimplicis conformis.*

Solutio.

Ponamus igitur longitudinem iſtius penduli ſimplicis $= k$, atque vt motus virgae pari modo peragatur, neceſſe eſt vt ſit $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{k}$; in qua aequatione cum ſolum tempus t pro variabili habeatur, longitudo vero s vt conſtans ſpectetur, per duplicem integrationem pervenitur ad iſtam formulam generalem:

$$y = M \text{ ſin. } (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}),$$

vbi quantitas, M non ſolum eſt conſtans, ſed etiam functionem quamcunque ipſius s deſignare poteſt. Cum igitur per aequationem finalem ſit

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

erit etiam $bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = \frac{y}{k}$; in qua aequatione ſola quantitas s pro variabili aſſumitur, cuius ergo integrale inueſtigari oportet. Quod quo facilius fieri poſſit ponamus breuitatis gratia $bcck = f^4$, vt remotis clauſulis iam ſit $y = \frac{f^4 d^4 y}{ds^4}$, cui ſatisfieri poſſe euidens eſt huiusmodi valore: $y = e^{\lambda s}$. Quia enim hinc fit

$$\frac{dy}{ds} = \lambda e^{\lambda s}, \quad \frac{ddy}{ds^2} = \lambda\lambda e^{\lambda s}, \quad \frac{d^3y}{ds^3} = \lambda^3 e^{\lambda s}, \quad \frac{d^4y}{ds^4} = \lambda^4 e^{\lambda s},$$

his ſubſtitutis prodit iſta aequalitas: $1 = \lambda^4 f^4$, ſiue

$\lambda^4 =$

$\lambda^4 = \frac{1}{f^4}$, vnde sequentes quatuor valores pro litera λ eliciuntur, scilicet:

$$1^{\circ}.\ \lambda = \frac{1}{f};\quad 2^{\circ}.\ \lambda = -\frac{1}{f};\quad 3^{\circ}.\ \lambda = \frac{\sqrt{-1}}{f};\quad 4^{\circ}.\ \lambda = -\frac{\sqrt{-1}}{f},$$

quibus valoribus inuentis constat, eos etiam vtcunque combinatos satisfacere, ita vt statuere queamus

$$y = \alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma e^{\frac{s\sqrt{-1}}{f}} + \delta e^{-\frac{s\sqrt{-1}}{f}},$$

quae forma, cum quatuor contineat constantes arbitrarias, vtique continet integrale completum nostrae aequationis. Notum autem est bina posteriora membra imaginaria reduci ad sinum et cosinum anguli realis $\frac{s}{f}$. Hinc igitur multiplicando per communem factorem N, qui, ob tempus t constans assumtum, pro functione temporis quacunque haberi potest, habebimus

$$y = N\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{fin.}\,\frac{s}{f} + \delta\,\text{cof.}\,\frac{s}{f}\right);$$

qui ergo valor ante inuento $y = M\,\text{fin.}\,(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}})$ aequalis reddi debet, id quod facillime praestabitur statuendo:

$$N = C\,\text{fin.}\,(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}) \text{ et}$$

$$M = C\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{fin.}\,\frac{s}{f} + \delta\,\text{cof.}\,\frac{s}{f}\right),$$

sic enim vterque valor reducetur ad istam aequationem:

$$y = C\left(\text{fin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{fin.}\,\frac{s}{f} + \delta\,\text{cof.}\,\frac{s}{f}\right),$$

vbi iam literae C, α, β, γ, δ, cum angulo ζ denotant veras quantitates constantes pro arbitrio accipiendas; quomodocunque autem accipiantur motus virgae semper ita erit comparatus, vt congruat cum oscillationibus penduli simplicis, cuius longitudo est $= k$, vnde tempus cuiusque vibrationis erit $= \pi \sqrt{\frac{k}{2g}}$, expressum in minutis secundis, hincque porro numerus vibrationum vno minuto secundo editarum erit $= \frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{k}}$, qui numerus etiam pro mensura soni, quem chorda edet, haberi solet.

Corollarium 1.

§. 10. Formulae illae exponentiales, perinde ac sinus et cosinus, commode per series infinitas exhiberi possunt, quae ita se habebunt:

$$y = C\,\text{sin.}\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(1 + \frac{s}{f} + \frac{ss}{1.2ff} + \frac{s^3}{1.2.3f^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4f^4} + \text{etc.}\right. \\ +\beta\left(1 - \frac{s}{f} + \frac{ss}{1.2ff} - \frac{s^3}{1.2.3f^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4f^4} + \text{etc.}\right. \\ +\gamma\left(\quad \frac{s}{f} \qquad\qquad - \frac{s^3}{1.2.3f^3} \qquad\qquad + \text{etc.}\right. \\ +\delta\left(1 \qquad - \frac{ss}{1.2ff} \qquad\qquad + \frac{s^4}{1.2.3.4f^4} - \text{etc.}\right. \end{array}\right.$$

Hinc igitur, si breuitatis gratia ponamus

$y = C\,\text{sin.}\left(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}}\right) S$, erit per seriem infinitam

$$\begin{aligned} S = {} & (\alpha + \beta + \delta)\, 1 + (\alpha - \beta + \gamma)\frac{s}{f} \\ & + (\alpha + \beta - \delta)\frac{ss}{1.2ff} + (\alpha - \beta - \gamma)\frac{s^3}{1.2.3f^3} \\ & + (\alpha + \beta + \delta)\frac{s^4}{1.2.3.4f^4} + (\alpha - \beta + \gamma)\frac{s^5}{1.2.3.4.5f^5} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hae igitur series eo magis conuergent, quo maior fuerit quantitas f prae arcu s; vbi recordemur esse $f = \sqrt[4]{bcck}$, ita vt simul longitudinem penduli simplicis k in se complectatur.

Corollarium 2.

§. 11. Inuento valore ipsius y, eius quoque valores per differentiationem eruti assignari possunt: reperietur autem

autem

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)=\frac{C}{f}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}-\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}-\delta\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{ddy}{ds^2}\right)=\frac{C}{ff}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}-\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}-\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)=\frac{C}{f^3}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}-\beta e^{\frac{-s}{f}}-\gamma\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}\right)$$

$$\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)=\frac{C}{f^4}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right)$$

Corollarium 3.

§. 12. Quod ſi autem tantum tempus t variabile accipiamus, ipſum motum cognoſcemus, quo ſingulae virgae ciebuntur; namque celeritas, qua virqae punctum X in directione XY mouetur, eſt $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, quae ergo per valorem inuentum erit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{C\sqrt{2g}}{\sqrt{k}}\,\text{cof.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right);$$

et quia incrementum celeritatis, per elementum temporis dt diuiſum, praebet accelerationem, erit ea

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=-\frac{2Cg}{k}\,\text{fin.}\left(\zeta+t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}}+\beta e^{\frac{-s}{f}}+\gamma\,\text{fin.}\tfrac{s}{f}+\delta\,\text{cof.}\tfrac{s}{f}\right);$$

ex quibus formulis perſpicitur, quomodo omnibus conditionibus praeſcriptis ſatisfiat.

Scholion 1.

§. 13. Quanquam igitur hic tantum motus vibratorios regulares contemplamur: tamen ob ingentem quantitatum conſtantium arbitrariarum numerum infinita varietas locum habere poteſt, prouti iſtae conſtantes aliter atque aliter determinantur. In hoc autem negotio imprimis

mis ad ſtatum virgae eſt reſpiciendum, vtrum ea perfecte ſit libera et nullis plane viribus coerceatur, an vero alicubi ſit fixa vel ope vnius pluriumue ſtylorum. Statim enim ac virgae ſtatus fuerit definitus, etiam conſtantium α, β, γ, δ, ratio non ſolum perfecte determinatur, ſed etiam obtinebitur aequatio, ex qua valorem quantitatis f determinare licebit, hincque igitur ipſa penduli ſimplicis longitudo k elicietur. Praecipue autem in hoc negotio ad totam virgae longitudinem $EF = a$, cuius hactenus nulla ratio eſt habita, reſpici oportet. Quod ſi autem nullas alias vires F admittamus, niſi quae virgae in vtroque termino ſint applicatae, ſtatus vtriusque termini triplex occurrere poteſt, quos igitur caſus hic euoluere conueniet; vbi quod determino E definiemus ſimul pro altero F intelligi debet.

I. Primus igitur caſus eſto, quo virgae terminus E plane eſt liber et a nulla vi coercetur; tum igitur poſito $s = 0$, tribus aequationibus ſupra (§. 8.) memoratis ſatisfieri oportet, vnde, quia vis $F = 0$ et vtrumque integrale

$$\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } \int ds \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

perpetuo ita accipi ſupponitur, vt evaneſcat poſito $s = 0$, ex prima pro termino E, vbi $s = 0$, oportet eſſe $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$; ex ſecunda autem aequatione naſcitur iſta conditio: $\left(\frac{d^3 y}{ds^3}\right) = 0$, ita vt hic ſtatus duas determinationes poſtulet.

II. Secundus caſus eſto, quo virgae terminus E ope ſtyli ita figitur, vt circa eum libere moueri poſſit; quo ergo caſu vis quaedam F ſtylum retinens aderit. Primum igitur, quia terminus E in ſuo loco fixus detinetur, poſito $s = 0$, hoc caſu fieri debet $y = 0$; praeterea vero prima memo-

memoratarum aequationum ſupeditat hanc conditionem: $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$; ſecunda aequatio determinabit ipſam vim

$$F = + b c^4 \left(\frac{d^3 y}{ds^3}\right),$$

quam autem noſſe parum nobis refert, quia in motum vibratorium non influit; ſicque iſte caſus etiam duas continet determinationes, ſcilicet:

$$y = 0 \text{ et } \left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0;$$

hunc igitur vocemus ſimpliciter fixum.

III. Tertius caſus eſto, quo terminus virgae E ita muro quaſi eſt infixus, vt hoc loco non moueri ſed tantum incuruari queat. Hoc igitur caſu manifeſtum eſt, poſito $s = 0$ non ſolum fieri debere $y = 0$, ſed etiam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, quia in hoc termino tangens in ipſum axem incidere debet; hunc autem caſum vocemus infixum.

Cum igitur hi ſinguli caſus binas determinationes inuoluant, ſi etiam ad alterum terminum F reſpiciamus, pro quo habebimus $x = s = a$, quicunque caſus in vtroque locum habeant, ſemper inde quatuor orientur determinationes, quibus non ſolum conſtantes illae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ definientur, ſed inſuper aequatio reſultabit, ex qua ipſam quantitatem f, hincque pendulum ſimplex k aſſignare licebit.

Scholion 2

§. 14. Cum igitur pro vtroque termino E et F terni caſus locum habere queant, hinc omnino ſex caſus diuerſi naſcuntur, quos ordine reſolui conueniet, ſi quidem hoc argumentum in omni extenſione pertractare voluerimus; hos igitur ſex caſus ſequenti modo deſignabimus:

I.	Terminus E liber;		terminus F liber
II.	- - - - E liber;	- - - - - - - -	F simplic. fixus
III.	- - - - E liber;	- - - - - - -	F infixus
IV.	- - - - E simpliciter fixus;	- - -	F simplic. fixus
V.	- - - - E simpliciter fixus;	- - -	F infixus
VI.	- - - - E infixus;	- - - - - -	F infixus.

Plures quidem casus videntur occurrere, veluti si E esset fixus et F liber; sed quia ambos terminos inter se permutare licet, hic casus in illis memoratis sex iam continetur. His igitur positis sex nobis supersunt Problemata, quae breuiter ordine pertractabimus.

Euolutio casus I.
quo virgae elasticae vterque terminus prorsus est liber.

Problema.

§. 15. *Si virga elastica a nullis plane viribus sollicitetur et plano horizontali politissimo libere incumbat, inuestigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiscere potest.*

Solutio.

Quoniam vterque terminus E et F liber assumitur, pro vtroque erit tam $\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right)=0$ quam $\left(\frac{d^3\,s}{d\,s^3}\right)=0$, hinc ergo pro termino E posito $s=0$ nascuntur hae duae aequationes:

$$\text{I. } \alpha+\beta-\delta=0;\ \text{II. } \alpha-\beta-\gamma=0;$$

pro altero termino F erit $s=a$, et posito breuitatis gratia $\frac{a}{f}=\omega$, istae oriuntur aequationes:

III.

$$\text{III. } \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \sin. \omega - \delta \cos. \omega = 0;$$
$$\text{IV. } \alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} - \gamma \cos. \omega + \delta \sin. \omega = 0.$$

Iam ex duabus prioribus colligitur $\delta = \alpha + \beta$ et $\gamma = \alpha - \beta$, qui valores in duabus posterioribus substituti praebent:

$$\text{III. } \alpha(e^{\omega} - \sin. \omega - \cos. \omega) + \beta(e^{-\omega} + \sin. \omega - \cos. \omega) = 0;$$
$$\text{IV. } \alpha(e^{\omega} + \sin. \omega - \cos. \omega) - \beta(e^{-\omega} - \sin. \omega - \cos. \omega) = 0;$$

vnde duplici modo concluditur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} - \sin. \omega + \cos. \omega}{e^{\omega} - \sin. \omega - \cos. \omega} = \frac{e^{-\omega} - \sin. \omega - \cos. \omega}{e^{\omega} + \sin. \omega - \cos. \omega}.$$

Statuamus hic breuitatis gratia $\sin. \omega + \cos. \omega = p$ et $\sin. \omega - \cos. \omega = q$, vt habeamus

$$\frac{-e^{-\omega} - q}{e^{\omega} - p} = \frac{e^{-\omega} - p}{e^{\omega} + q};$$

vnde deducitur haec aequatio:

$$-1 - qq - qe^{\omega} - qe^{-\omega} = 1 + pp - pe^{\omega} - pe^{-\omega}, \text{ siue}$$
$$2 + pp + qq + (q - p)e^{\omega} + (q - p)e^{-\omega} = 0.$$

Cum igitur sit

$$pp + qq = 2 \text{ et } q - p = -2 \cos. \omega, \text{ erit}$$
$$2 - \cos. \omega (e^{\omega} + e^{-\omega}) = 0, \text{ hincque}$$
$$\cos. \omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

quocirca totum negotium huc est reductum, vt ex ista aequatione valores literae ω eliciantur, vbi quidem statim apparet, valorem $\omega = 0$ satisfacere; quia autem hinc oritur $f = \infty$, hincque etiam k infinitum, hoc casu virga nullum plane motum concipiet, sed in quiete perseuerabit. Pro reliquis autem valoribus, quotcunque fuerint inuenti, habebimus

bimus $f = \frac{a}{\omega}$, hincque $k = \frac{a^4}{bcc\omega^4}$; tum vero erit

$$\sqrt{\frac{2g}{k}} = \frac{c\omega\omega\sqrt{2bg}}{aa};$$

quocirca tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}}$, hincque ipſe ſonus a virga editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$. Denique cum ſit

$$\text{coſ.}\,\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}},\ \text{erit ſin.}\,\omega = \frac{+(e^{\omega} - e^{-\omega})}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

ex priore autem valore, quo ſinus ω eſt poſitiuus, erit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - e^{-2\omega} - e^{\omega} + e^{-\omega}}{-1 + e^{2\omega} - e^{\omega} + e^{-\omega}},\ \text{hincque}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}e^{\omega} = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega} - e^{2\omega} + 1}{-e^{\omega} + e^{-\omega} + e^{2\omega} - 1} = -1,$$

ita vt ſit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1}{e^{\omega}} = -e^{-\omega}$; altero autem caſu quo ſinus ω eſt negatiuus, reperitur $\frac{\alpha}{\beta} = +\frac{1}{e^{\omega}} = +e^{-\omega}$; quare ſi ſumamus $\alpha = 1$, erit $\beta = \mp e^{\omega}$, hincque $\gamma = 1 \pm e^{\omega}$ et $\delta = 1 \mp e^{\omega}$, vbi ſigna ſuperiora valent, ſi ſin. ω eſt poſitiuus, inferiora ſi negatiuus. His igitur valoribus inuentis aequatio pro motu virgae perfecte eſt determinata, quae quo ſimplicius repraeſentetur, notetur, ob $f = \frac{a}{\Phi}$ eſſe $\frac{s}{f} = \frac{s}{\omega}$; vnde ſi ponatur breuitatis gratia $\frac{s}{a} = \omega$, vt ſit $\frac{s}{f} = u\,\omega$, hoc valore poſito aequatio noſtra pro motu erit:

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega + (1 \mp e^{\omega})\,\text{cſ.}\,u\omega\right)$$

ex qua ad quoduis tempus t ſtatus virgae elaſticae cognoſcitur, ſi modo valor literae ω rite fuerit definitus.

Corol-

Corollarium 1.

§. 16. Cum igitur ω denotet arcum circuli, cuius radius est $= 1$, in primo quadrante haud difficulter perspicitur, post casum $\omega = 0$ nullum alium angulum satisfacere; semper enim erit cos. $\omega < \frac{2}{e^\omega + e^{-\omega}}$, quod ita ostendi potest. Cum sit per series

$$\text{cos. } \omega = 1 - \frac{\omega\omega}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1...6} + \text{ etc. et}$$

$$e^\omega + e^{-\omega} = 2\left(1 + \frac{\omega\omega}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6}{1......6} + \text{ etc. erit}\right.$$

$$\text{cos. } \omega\,(e^\omega + e^{-\omega}) = 2\left(1 - \frac{\omega^4}{6}\right),$$

qui valor manifesto minor est quam 2, nisi valor ipsius ω angulum rectum superet.

Corollarium 2.

§. 17. Deinde manifestum est, neque in secundo neque in tertio quadrante reperiri valorem ipsius ω, quia in his quadrantibus cosinus sunt negatiui, formula autem $\frac{2}{e^\omega + e^{-\omega}}$ semper est positiua. At in quarto quadrante, vbi cosinus iterum fiunt positiui, dabitur valor non multum tres angulos rectos superans. Sit igitur ϱ signum anguli recti, siue $\varrho = \frac{\pi}{2}$, ac ponatur $\omega = 3\varrho + \Phi$, fietque cos. $\omega =$ sin. Φ, vnde fieri debet sin. $\Phi = \frac{2}{e^{3\varrho + \Phi} + e^{-3\varrho - \Phi}}$; vbi facile perspicitur, angulum Φ valde esse paruum, quia numerus $e^{3\varrho}$, ob $3\varrho = 4,71239$ et $e = 2,71828$, est satis magnus, scilicet proxime $= 111,31$, pro quo scribamus n. Iam quia sin. $\Phi = \Phi$, proxime, $e^\Phi = 1 + \Phi$ et $e^{-\Phi}$

 $= 1$

$= 1 - \Phi$, noſtra aequatio erit

$$\Phi = \frac{2n}{nn(1+\Phi)+1-\Phi}, \text{ ſiue } \Phi = \frac{2n}{nn+1} \text{ proxime;}$$

ſumi igitur circiter poterit $\Phi = \frac{2}{n} = \frac{1}{50}$; vnde patet angulum Φ vix vnum gradum ſuperare, ita vt ſit $\omega = 3\varrho + 1^{\circ}$ circiter.

Corollarium 3.

§. 18. Progrediamur ad quintum quadrantem, et manifeſtum eſt hic iterum dari valorem tantillo minorem quam 5ϱ; defectus enim aliquot minuta prima non excedet. Porro vero ſextus et ſeptimus vacui manebant; in octavo autem reperietur $\omega = 7\varrho$, tam prope vt exceſſus ſentiri nequeat; ſicque valores vlteriores erunt continuo exactius $\omega = 9\varrho$, $\omega = 11, \varrho$, etc.

Corollarium 4.

§. 19. Quod ſi ergo in primo valore exiguum diſcrimen vnius gradus negligamus, omnes valores anguli ω erunt 3ϱ, 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ, 11ϱ, etc. qui ſecundum numeros impares in infinitum progrediuntur, vnde noſtra virga infinitos ſonos ſimplices edere poterit, qui ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{9\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{25\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{49\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \frac{81\varrho c\sqrt{2gb}}{2aa};\ \text{etc.}$$

qui ergo ſoni ſecundum numeros, 9, 25, 49, 81 etc. progrediuntur, quorum primus pro fundamentali haberi poteſt; proximus vero ad hunc rationem tenebit vt 25:9, quod interuallum complectitur vnam octauam cum tritono. Vnde ſi ſonus fundamentalis fuerit G, ſequens futurus erit *cis*, qui ergo ſonus ſimul auditus valde ingratam diſſonantiam referet.

Scho-

Scholion 1.

§. 20. Quodsi igitur pro singulis istis valoribus anguli ω formentur valores ipsius y, eorum quotcunque inuicem coniuncti exhibebunt motus, quos nostra virga recipere poterit. Si hoc modo omnes infiniti valores ipsius ω inuicem coniungantur, ac pro quolibet literis C et ζ generatim quicunque alii valores tribuantur, aequatio obtinebitur generalis, quae omnes plane motus, qui in virga locum habere possunt, in se complectatur. Haec igitur aequatio generalis, si valores anguli ω per ω, ω', ω'', etc. designemus, sequentem habebit formam:

$$y = C\,\text{fin.}\left(\zeta + t\,\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega})\,\text{fin.}\,u\omega + (1 \mp e^{\omega})\,\text{cof.}\,u\omega\right)$$
$$+ C'\,\text{fin.}\left(\zeta' + t\,\frac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega'} \mp e^{\omega'(1-u)} + (1 \pm e^{\omega'})\,\text{fin.}\,u\omega' + (1 \mp e^{\omega'})\,\text{cof.}\,u\omega'\right)$$
$$+ C''\,\text{fin.}\left(\zeta'' + t\,\frac{\omega''\omega'' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega''} \mp e^{\omega''(1-u)} + (1 \pm e^{\omega''})\,\text{fin.}\,u\omega'' + (1 \mp e^{\omega''})\,\text{cof.}\,u\omega''\right).$$

etc. etc. etc.

vbi litera u denotat fractionem $\frac{s}{a}$, et signa superiora valent si angulorum ω, ω', ω'' sinus fuerint positiui, inferiora vero si fuerint negatiui.

Scholion 2.

§. 21. Quod si sonum fundamentalem, quo est proxime $\omega = 3\varrho$, et qui continet motum simplicissimum, quo virga contremiscere potest, attentius consideremus, facile colligere licet, curuam, quam virga inter vibrandum induit, axem ad minimum in duobus punctis secare debere,

 ita,

ita vt quaſi duos nodos formet. Si enim axem nusquam ſecaret, dum ſingula eius puncta ab axe recedunt, eodem motu continuo vlterius recedere deberent, quia virga a nullis plane viribus coercetur; quod inde etiam perſpicuum eſt, quod hoc caſu centrum grauitatis virgae immotum eſſe debet. Si porro virga in motu ſuo vnicum nodum formaret, circa quem quaſi gyraretur, motum ſemel conceptum gyratorium perpetuo conſeruare deberet. Hinc igitur patet, virgam inter vibrandum eiusmodi formam $e\,I\,o\,M\,f$ eſſe habituram, quae ſitum naturalem, ſeu axem E F in duobus punctis L, M ſecet. Hoc idem vero etiam noſtra formula declarat: quia enim angulus ω hic ſubito tres angulos rectos ſuperat, anguli $u\,\omega$, ſiue $\frac{\omega s}{a}$, dum quantitas s vsque ad a augetur, angulos referenta o vsque ad $3\,\varrho$ continuo aſcendentes, quorum ſinus et coſinus interea bis contraria ſigna recipiunt, vnde duobus caſibus contingere poteſt, vt applicata y euaneſcat. Eodem modo intelligere licet, pro ſecundo ipſius ω valore $=5\,\varrho$ curuam virgae tres nodos habere debere, pro ſequente, $\omega=7\,\varrho$, quatuor, et ita porro. Singuli autem iſti nodi ſiue interſectiones cum axe E F pro quouis valore ipſius ω ex hacc aequatione elici poterunt:

Tab. II. Fig. 6.

$$e^{u\omega}+e^{\omega(1-u)}+(1\pm e^{\omega})\,\text{ſin.}\,\omega u+(1\mp e^{\omega})\,\text{coſ.}\,\omega u=0$$

quippe ex qua valores literae $u=\frac{s}{a}$ ipſos nodos declarabunt. Scilicet literae u, incipiendo a o, continuo maiores tribuantur valores vsque ad 1, et caſus notentur, quibus iſta formula euaneſcit; ſi enim quiſpiam valor iam euadat valde paruus, per regulam approximationis veri eius valores facile deteguntur.

Scho-

Scholion 3.

§. 22. Quo haec clarius perſpiciantur, caſum primum, quo $\omega = 3\,\varrho$ circiter, ideoque eius ſinus negatiuus, accuratius perpendamus. Erit igitur, primo factore, conſtante ſeu a tempore pendente, omiſſo:

$y = - - - - e^{u\omega} + e^{\omega(1-u)} + (1-e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega + (1+e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega$, cuius valores pro tribus caſibus $u = 0$, $u = 1$ et $u = \frac{1}{2}$ definiamus, vt applicatas non ſolum pro vtroque termino E et F, ſed etiam pro puncto medio O, ſcilicet Ee, Ff et Oo obtineamus. Primo igitur, poſito $u = 0$ erit $Ee = 2(1+e^{\omega})$; poſito autem $u = 1$, prodit applicata

$$Ff = e^{\omega} + 1 + (1-e^{\omega})\,\text{ſin.}\,\omega + (1+e^{\omega})\,\text{coſ.}\,\omega,$$

qui valor, ob ſin. $\omega = -1$ et coſ. $\omega = \frac{2}{e^{\omega}+e^{-\omega}}$, abit in hunc: $Ff = 2(1+e^{\omega})$, ſicque hae duae applicatae Ee et Ff inter ſe erunt aequales; at pro puncto medio O, vbi fit $u = \frac{1}{2}$, hincque ſin. $\frac{1}{2}\omega = \text{ſin.}\,\frac{3}{2}\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et coſ. $\frac{1}{2}\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, erit applicata

$$Oo = e^{\frac{\omega}{2}} + e^{\frac{\omega}{2}} + \frac{(1-e^{\omega})}{\sqrt{2}} - \frac{(1+e^{\omega})}{\sqrt{2}} = 2e^{\frac{\omega}{2}} - e^{\omega}\sqrt{2},$$

qui valor, ob $e^{\omega} = 111$ et $e^{\frac{\omega}{2}} = 10\frac{1}{2}$, abit in $21 - 111.\sqrt{2}$; vnde patet, hanc applicatam eſſe negatiuam, prorſus vti figura refert. Poſſumus etiam ſimili modo poſitionem tangentium pro his locis exhibere ex formula

$\left(\frac{dy}{ds}\right) = - - - e^{u\omega} - e^{\omega(1-u)} + (1-e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega - (1+e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega$, quae formula, poſito $u = 0$, pro termino E praebet:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = 1 - e^{\omega} + 1 - e^{\omega} = 2(1-e^{\omega}) = -2(e^{\omega}-1);$$

tum vero, posito $u = 1$, pro termino F erit

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = e^{\omega} - 1 + (1 - e^{\omega}) \operatorname{cos.} \omega - (1 + e^{\omega}) \operatorname{sin.} \omega,$$

qui valor, ob $\operatorname{cos.} \omega = -1$ et $\operatorname{sin.} \omega = \frac{2}{e^{\omega}}$, reiecto termino $e^{-\omega}$, vtpote minimo, reducitur ad $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 2(e^{\omega} - 1)$; vnde patet angulos $E e L$ et $F f M$ esse inter se aequales. Pro puncto autem medio O, vbi $u = \frac{1}{2}$, prodit

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = (1 - e^{\omega}) \operatorname{cos.} \tfrac{1}{2} \omega - (1 + e^{\omega}) \operatorname{sin.} \tfrac{1}{2} \omega = -\sqrt{2},$$

qui valor, si calculus accuratius institueretur, prodiret $= 0$, ita vt tangens in puncto o axi sit parallela. Simili prorsus modo etiam sequentes casus, vbi $\omega = 5\varrho$, vel 7ϱ, vel 9ϱ expendere licebit.

Euolutio casus II.

Quo alter terminus liber relinquitur, alter vero, circa stylum mobilis, figitur.

Problema.

§. 23. *Si virga elastica in termino* E *fuerit libera, in altero vero* F *stylo affixa, circa quem tamen libere moveri possit, inuestigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiscere potest.*

Solutio.

Quia ergo pro termino E, vbi $s = 0$, vt ante est $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$ et $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) = 0$, erit etiam vt ante $\alpha + \beta - \delta = 0$ et $\alpha - \beta - \gamma = 0$, vnde fit $\gamma = \alpha - \beta$ et $\delta = \alpha + \beta$. Pro altero autem termino simpliciter fixo, vbi $s = a$, posito ite-

iterum $\frac{a}{y} = \omega$, primo debet esse $y = 0$, tum vero etiam $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$. Prior conditio dat

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \sin.\omega + \delta \cos.\omega = 0,$$

posterior vero

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \sin.\omega - \delta \cos.\omega = 0,$$

quae aequationes, loco γ et δ substitutis valoribus, abeunt in sequentes:

$$\alpha(e^{\omega} + \sin.\omega + \cos.\omega) + \beta(e^{-\omega} - \sin.\omega + \cos.\omega) = 0 \text{ et}$$
$$\alpha(e^{\omega} - \sin.\omega - \cos.\omega) + \beta(e^{-\omega} + \sin.\omega - \cos.\omega) = 0;$$

vnde geminus valor oritur

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{(e^{-\omega} - \sin.\omega + \cos.\omega)}{e^{\omega} + \sin.\omega + \cos.\omega} = -\frac{(e^{-\omega} + \sin.\omega - \cos.\omega)}{e^{\omega} - \sin.\omega - \cos.\omega}.$$

Ponatur iterum $\sin.\omega + \cos.\omega = p$ et $\sin.\omega - \cos.\omega = q$, vt sit

$$\frac{-e^{-\omega} + q}{e^{\omega} + p} = \frac{-e^{-\omega} - q}{e^{\omega} - p},$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$-1 + pe^{-\omega} + qe^{\omega} - pq = -1 - qe^{\omega} - pe^{-\omega} - pq$$

siue $pe^{-\omega} + qe^{\omega} = 0$, vnde concluditur $\tang.\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quocirca habebimus, vel

$$\sin.\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}, \text{ vel}$$

$$\sin.\omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{-e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}.$$

Ex prioribus valoribus colligitur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega}\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})} - 2e^{-\omega}}{e^{\omega}\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})} + 2e^{\omega}},$$

ideo-

ideoque $\frac{\alpha}{\beta} e^{2\omega} = -1$, vnde fit $\frac{\alpha}{\beta} = -e^{-2\omega}$. Posteriore vero casu colligetur

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega}\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}+2e^{-\omega}}{e^{\omega}\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}-2e^{\omega}} = \frac{-1}{e^{2\omega}} = -e^{-\omega}.$$

Vtroque ergo casu, siue sinus et cosinus anguli ω sint ambo positiui, siue ambo negatiui, pro fractione $\frac{\alpha}{\beta}$ idem valor obtinetur. Quare si ponatur $\alpha = 1$, erit $\beta = -e^{2\omega}$, hincque $\gamma = 1 + e^{2\omega}$ et $\delta = 1 - e^{2\omega}$; quibus valoribus inuentis aequatio pro motu virgae, si iterum loco $\frac{s}{a}$ scribamus u, erit haec:

$$y = C\,\mathrm{fin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})(e^{u\omega} - e^{\omega(2-u)} + (1+e^{2\omega})\,\mathrm{fin.}\,u\omega + (1-e^{2\omega})\,\mathrm{cof.}\,u\omega).$$

Quicunque autem valores pro angulo ω ex aequatione

$$\mathrm{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$$

eruantur, ex singulis habetur

$$f = \frac{a}{\omega}, \text{ hincque } f^4 = \frac{a^4}{\omega^4} = bcck, \text{ vnde fit}$$

$$k = \frac{a^4}{bcc\omega^4} \text{ et } \frac{\sqrt{2g}}{k} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa},$$

hincque porro vt ante tempus vnius oscillationis erit:

$$\pi\sqrt{\frac{k}{2g}} = \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}},$$

et sonus a virga elastica editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$. Totum ergo negotium huc est reductum, vt ex aequatione

$$\mathrm{tang.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$$

omnes valores anguli ω eruantur; vbi quidem statim liquet, valorem $\omega = 0$ satisfacere, vnde autem nullus motus sequitur; quare pro reliquis valoribus singulos quadrantes percurramus. Pro primo igitur quadrante per series habebimus:

fin. ω

$$\sin.\omega\,(e^{\omega}+e^{-\omega}) = 2\,\omega\,(1+\tfrac{1}{3}\,\omega\,\omega-\tfrac{1}{30}\,\omega^4) \text{ et}$$
$$\cos.\omega\,(e^{\omega}-e^{-\omega}) = 2\,\omega\,(1-\tfrac{1}{3}\,\omega\,\omega-\tfrac{1}{30}\,\omega^4);$$

vnde patet, priorem formulam per totum primum quadrantem maiorem esse quam posteriorem, ita vt in hoc quadrante nullus reperiatur valor pro angulo ω. In secundo autem quadrante, vbi omnes tangentes sunt negatiui, nullus iterum dari potest, neque etiam in quarto, sexto, octavo et omnibus paribus. Reliquos quadrantes in corollariis percurramus.

Corollarium 1.

§. 24. Consideremus igitur tertium quadrantem, vbi, cum sit ω maius quam π, formula $\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{e^{\omega}+e^{-\omega}}$ parum ab vnitate deficiet, vnde angulus ω aliquanto minor erit quam $\pi + 45^{\circ}$. Hinc sumto iterum ϱ pro signo anguli recti statuamus $\omega = \pi + \frac{1}{2}\varrho - \Phi$, eritque

$$\text{tang.}\,\omega = \text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\varrho - \Phi) = \frac{1-\text{tang.}\,\Phi}{1+\text{tang.}\,\Phi}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{1-\text{tang.}\,\Phi}{1+\text{tang.}\,\Phi} = \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{e^{\omega}+e^{-\omega}} = \frac{1-e^{-2\omega}}{1+e^{-2\omega}},$$

hinc manifesto est $\text{tang.}\,\Phi = e^{-2\omega} = \frac{1}{e^{2\pi+\varrho-2\Phi}}$, in quo exponente angulum exiguum Φ negligere licet, ita vt subducto calculo reperiatur $\text{tang.}\,\Phi = \frac{1}{2576}$; sicque angulus Φ vix vnum minutum superat, id quod tuto negligi potest, ita vt primus valor sit $\omega = \pi + \frac{1}{2}\varrho = 225^{\circ}$, cuius tam sinus quam cosinus est $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corollarium 2.

§. 25. Pergamus igitur ad quartum quadrantem, vbi angulus ω multo minus discrepabit a $2\pi + 45°$. Hic autem tam sinus quam cosinus erit $= + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Simili modo ex septimo quadrante nanciscimur $\omega = 3\pi + \frac{1}{2}\varrho$, tam sinu quam cosinu existente $= - \frac{1}{\sqrt{2}}$; nonus vero quadrans suppeditat $\omega = 4\pi + \frac{1}{2}\varrho$; vndecimus $\omega = 5\pi + \frac{1}{2}\varrho$, et ita porro.

Corollarium 3.

§. 26. Cum igitur sit $\varrho = \frac{\pi}{4}$, omnes valores pro angulo ω hactenus inuenti sequenti modo progrediuntur:

$$1^{dus}\ \omega = \frac{5\pi}{4};\ 2^{dus}\ \omega = \frac{9\pi}{4};\ 3^{us}\ \omega = \frac{13\pi}{4};\ 4^{tus}\ \omega = \frac{17\pi}{4},\ \text{etc.}$$

vnde omnes soni simplices, quos ista virga edere potest, sequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa},\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{16aa},\ \frac{169\pi c\sqrt{2gb}}{16aa},\ \frac{289\pi c\sqrt{2gb}}{16aa};$$

quorum primus fundamentalis censetur; vnde si secundus simul exaudiatur, erit primus ad secundum vt 25 ad 81 hoc est vt $1 : 3\frac{6}{25}$, seu proxime vt $1 : 3\frac{1}{4}$. Ergo si sonus fundamentalis fuerit C, sequens erit *gis*, quem tamen sonum vno commate superabit, sicque harmonia parum grata existet.

Corollarium 4.

§. 27. Cum hic sonus fundamentalis, ceu grauissimus, quem virga haec edere potest, sit $= \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa}$, casu autem

autem primo, quo vterque virgae terminus erat liber, sonus fundamentalis repertus fuerit $= \frac{9 \varrho c \sqrt{2gb}}{2aa} = \frac{9 \pi c \sqrt{2gb}}{4aa}$, ille se habebit ad hunc vt $25:36$, ita vt casu primo eadem virga sonum edat fere vna quinta acutiorem. Scilicet si sonus casu primo editus fuerit g, tum sonus secundo casu editus erit grauior *Cis*, quod interuallum a musicis falsa quinta appellatur. Hic igitur vtique notari meretur, quod si virga vtrinque libera edat sonum g, tum eadem virga altero termino simpliciter fixa subito editura sit sonum grauiorem *Cis*, id quod experientia facile comprobari potest.

Scholion 1.

§. 28. Inuentis igitur omnibus valoribus anguli ω, quos designemus per ω, ω', ω'', ω''', ω'''' etc. omnes motus irregulares, quos nostra virga edere potest, per combinationem generalissimam formularum ex his valoribus natarum in sequenti expressione continebuntur:

$$\begin{aligned}
y = {} & C \sin. \left(\zeta + t \tfrac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa}\right) \left(e^{u\omega} - e^{\omega(2-u)} + (1 + e^{2\omega}) \right. \\
& \qquad \left. \sin. u\omega + (1 - e^{2\omega}) \cos. u\omega\right) \\
& + C' \sin. \left(\zeta' + t \tfrac{\omega'\omega' c \sqrt{2gb}}{aa}\right) \left(e^{u\omega'} - e^{\omega'(2-u)} + (1 + e^{2\omega'}) \right. \\
& \qquad \left. \sin. u\omega' + (1 - e^{2\omega'}) \cos. u\omega'\right) \\
& + C'' \sin. \left(\zeta'' + t \tfrac{\omega''\omega'' \sqrt{2gb}}{aa}\right) \left(e^{u\omega''} - e^{\omega''(2-u)} + (1 + e^{2\omega''}) \right. \\
& \qquad \left. \sin. u\omega'' + (1 - e^{2\omega''}) \cos. u\omega''\right).
\end{aligned}$$

Scholion 2.

§. 29. Examinemus etiam figuram, quam virga induet dum sonum principalem purum reddit. Hunc in-

 finem

finem euoluamus expressionem pro applicata y inuentam, neglecto iterum factore constante seu a tempore pendente, atque habebimus

$$y = 1\,(e^{u\omega} + \sin u\omega + \cos. u\omega) - e^{2\omega}(e^{-u\omega} - \sin. u\omega + \cos. u\omega),$$

vbi iam vidimus, ob $\omega = \frac{5\pi}{4}$ esse $e^{2\omega} = 2576$; tum vero loco u sumamus successiue sequentes valores:

$$u = 0,\ u = \tfrac{1}{5},\ u = \tfrac{2}{5},\ u = \tfrac{3}{5},\ u = \tfrac{4}{5},\ u = 1$$

vbi pro postremo casu iam nouimus esse $y = 0$.

I. Sit igitur $u = 0$, siue $s = 0$, eritque

$$y = 2 - 2\,e^{2\omega} = -5150,$$

quae ergo est applicata pro termino E.

II. Sit $u = \frac{1}{5}$, siue $s = \frac{1}{5}a$, erit

$$y = (e^{\frac{1}{5}\omega} + \sin. \tfrac{1}{5}\omega + \cos. \tfrac{1}{5}\omega)$$
$$- e^{2\omega}(e^{-\frac{1}{5}\omega} - \sin. \tfrac{1}{5}\omega + \cos. \tfrac{1}{5}\omega).$$

Hic autem ob $\omega = \frac{5\pi}{4}$ erit

$$\tfrac{1}{5}\omega = \tfrac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ et } e^{\frac{1}{5}\omega} = 2,1933 \text{ et}$$
$$e^{-\frac{1}{5}\omega} = 0,4559,$$

hincque fiet

$$y = 3,6075 - 2576.\ 0,4559 = -1172.$$

III. Sit $u = \frac{2}{5}$ seu $s = \frac{2}{5}a$, erit

$$y = (e^{\frac{2}{5}\omega} + \sin. \tfrac{2}{5}\omega + \cos. \tfrac{2}{5}\omega)$$
$$- e^{2\omega}(e^{-\frac{2}{5}\omega} - \sin. \tfrac{2}{5}\omega + \cos. \tfrac{2}{5}\omega).$$ Iam ob

$\omega =$

$\omega = \frac{5\pi}{4}$ erit $\frac{2}{5}\omega = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$ et

$$e^{\frac{2}{5}\omega} = 4,8104 \text{ et } e^{-\frac{2}{5}\omega} = 0,2079,$$

hincque colligitur:

$$y = 5,8104 + 2576.\, 0,7921 = 0,2079.$$

IV. Sit nunc $u = \frac{3}{5}$, siue $s = \frac{3}{5}a$, eritque

$$y = (e^{\frac{3}{5}\omega} + \sin.\tfrac{3}{5}\omega + \cos.\tfrac{3}{5}\omega) - e^{2\omega}(e^{-\frac{3}{5}\omega} - \sin.\tfrac{3}{5}\omega + \cos.\tfrac{3}{5}\omega),$$

vbi est

$$\tfrac{3}{5}\omega = \tfrac{3}{4}\pi = 135^\circ, \text{ ideoque}$$

$$e^{\frac{3}{5}\omega} = 10,550 \text{ et } e^{-\frac{3}{5}\omega} = 0,0948, \text{ hincque erit}$$

$$y = 10,550 + 2576.\, 1,3194 = 3387.$$

V. Sit nunc $u = \frac{4}{5}$, seu $s = \frac{4}{5}\omega$, ac fiet

$$y = (e^{\frac{4}{5}\omega} + \sin.\tfrac{4}{5}\omega + \cos.\tfrac{4}{5}\omega) - e^{2\omega}(e^{-\frac{4}{5}\omega} - \sin.\tfrac{4}{5}\omega + \cos.\tfrac{4}{5}\omega)$$

et ob

$$\tfrac{3}{5}\omega = \pi = 180^\circ, \; e^{\frac{4}{5}\omega} = 23,140 \text{ et } e^{-\frac{4}{5}\omega} = 0,0432$$

erit

$$y = 22,140 + 2576.\, 0,9568 = 2487.$$

Talis igitur forma quam virga inter vibrandum recipiet in Tabula (fig. 7.) exhibetur, vbi neminem offendat magnitudo applicatarum, quippe quae per numerum quempiam praegrandem diuisae sunt intelligendae. Haec ergo curua non nisi vnicum habet nodum in puncto O, vnde satis tuto concludere licet, sequentem curuam, quae ex valore $\omega = \frac{9\pi}{4}$ nascitur, habituram esse duos nodos, sequentem tres, et ita porro. Tab. II. Fig. 7.

Euolutio casus III.

quo alter terminos liber, alter vero muro firmiter infixus statuitur.

Problema.

§. 30. *Si virga elastica in termino E fuerit libera, in altero autem termino F quasi muro infixa, inuestigare omnes vibrationes regulares, quibus ea contremiscere potest.*

Solutio.

Conditio ad terminum E pertinens statim nobis praebet vt ante $\gamma = \alpha - \beta$ et $\delta = \alpha + \beta$; tum vero, posito $s = a$ factoque $\frac{a}{f} = \omega$, debet esse tam $y = 0$, quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$; vnde istas deducimus aequationes:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ fin. } \omega + \delta \text{ cof. } \omega = 0 \text{ et}$$

$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ cof. } \omega - \delta \text{ fin. } \omega = 0,$$

in quibus si loco γ et δ valores inuenti substituantur, prodibunt sequentes:

$$\alpha (e^{\omega} + \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega) + \beta (e^{-\omega} - \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega) = 0 \text{ et}$$

$$\alpha (e^{\omega} + \text{cof. } \omega - \text{fin. } \omega) - \beta (e^{-\omega} + \text{cof. } \omega + \text{fin. } \omega) = 0,$$

hincque duplici modo elicitur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-e^{-\omega} + \text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega}{e^{\omega} + \text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega} = \frac{e^{-\omega} + \text{cof. } \omega + \text{fin. } \omega}{e^{\omega} + \text{cof. } \omega - \text{fin. } \omega}.$$

Ponatur iterum, vti hactenus fecimus, $\text{fin. } \omega + \text{cof. } \omega = p$ et $\text{fin. } \omega - \text{cof. } \omega = g$, vt habeamus

$$\frac{-e^{-\omega} + q}{e^{\omega} + p} = \frac{e^{-\omega} + p}{e^{\omega} - q},$$

cuius

cuius aequationis resolutio praebet

$$2 + (p - q)(e^{\omega} + e^{-\omega}) + pp + qq = 0,$$

vnde ob

$$pp + qq = 2 \text{ et } p - q = 2 \operatorname{cos\!f.} \omega \text{ reperitur}$$

$$\operatorname{cos\!f.} \omega = \frac{-2}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

vnde patet Cosinum anguli ω semper fore negatiuum, ideoque angulum ω in quadrantibus secundo et tertio, item sexto et septimo, item decimo et vndecimo, etc. quaeri debere. Ex cognito autem cosinu ω concluditur vel

$$\operatorname{fin.} \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}, \text{ vel } \operatorname{fin.} \omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

quos duos casus sollicite a se inuicem distingui oportet. At ex priore casu colligitur:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - e^{-2\omega} + e^{\omega} - e^{-\omega}}{-1 + e^{2\omega} + e^{\omega} - e^{-\omega}} = \frac{1}{e^{\omega}};$$

ex altero autem valore ipsius fin. ω colligitur $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{e^{\omega}}$.

Rite igitur his casibus combinandis impetrabimus sequentes valores:

$$\alpha = 1, \; \beta = \pm e^{\omega}, \; \gamma = 1 \mp e^{\omega} \text{ et } \delta = 1 \pm e^{\omega},$$

quibus substitutis aequatio pro hoc motu simplici erit

$$y = C \operatorname{fin.} (\zeta + t \sqrt{\tfrac{2g}{k}})$$

$$(e^{u\omega} \pm e^{\omega(1-u)} + (1 \mp e^{\omega}) \operatorname{fin.} u\omega + (1 \pm e^{\omega}) \operatorname{cos\!f.} u\omega),$$

vbi, vt hactenus, denotat u fractionem $\frac{s}{a}$, denique erit vt ante

$$f = \frac{a}{\omega}, \; k = \frac{a^4}{bcc\omega^4}, \; \sqrt{\tfrac{2g}{k}} = \frac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa},$$

tempus

tempus vnius oscillationis $= \frac{\pi a a}{\omega\omega c \sqrt{2gb}}$ et sonus editus $= \frac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{\pi a a}$.
Valores anguli ω in corollariis inuestigabimus.

Corollarium 1.

§. 31. Pro secundo quadrante ponamus $\omega = \varrho + \Phi$, vbi ϱ iterum est character anguli recti, eritque cos. $\omega = -$ sin. Φ, ita vt esse debeat

$$\text{sin.}\,\Phi = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}} = \frac{2}{e^{\varrho+\Phi} + e^{-\varrho-\Phi}},$$

vnde fieri debet

$$e^{\varrho+\Phi}\,\text{sin.}\,\Phi + e^{-\varrho-\Phi}\,\text{sin.}\,\Phi = 2.$$

Est vero per series

$$e^{\varrho+\Phi} = e^{\varrho}(1 + \Phi + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi + \tfrac{1}{6}\Phi^3) \text{ et}$$
$$e^{-\varrho-\Phi} = e^{-\varrho}(1 - \Phi + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3);$$

quare cum sit sin. $\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$, erit

$$e^{\varrho}(\Phi + \Phi\Phi + \tfrac{1}{3}\Phi^3) + e^{-\varrho}(\Phi - \Phi\Phi + \tfrac{1}{3}\Phi^3) = 2.$$

Hinc si altiores ipsius Φ potestates negligantur, erit

$$\Phi = \frac{2}{e^{\varrho} + e^{-\varrho}};$$ vbi notetur esse

$$e^{\varrho} = e^{\frac{1}{2}\pi} = 4{,}8104 \text{ et } e^{-\varrho} = 0{,}2079,$$

ita vt sit

$$\text{sin.}\,\Phi = \frac{2}{5{,}0183} = \frac{1}{2{,}5091}, \text{ hinc } \Phi = 23^{\circ}, 29'.$$

Cum igitur sit $\Phi = 0{,}3985$, admittamus etiam potestatem $\Phi\Phi$, eiusque loco scribamus $0{,}3985^2$, quo facto erit

$$\Phi = \frac{2}{e^{\varrho}\cdot 1{,}3985 + e^{-\varrho}\cdot 0{,}6015} = \frac{2}{6{,}8524} = \frac{1}{3{,}4262},$$

vnde

vnde fit $\Phi = 16^\circ, 58'$. Hic autem angulus adhuc minor prodiret, si etiam cubi Φ^3 rationem haberemus: interim tamen haec methodus nimis est incerta, vt tantum vero proxime angulum Φ elicere queamus, vnde aliam methodum ingredi conuenit.

Corollarium 2.

§. 32. Quando angulus Φ, iam propemodum est cognitus, conuertatur is in minuta secunda, quorum numerus sit n; hinc quaeratur idem arcus Φ in partibus radii, et cum sit $\pi = 180^\circ = 648000''$, fiat vt $648000'' : \pi$, ita n'' ad arcum, qui sit $= m$, eritque $m = \frac{n\pi}{648000}$, hincque

$$l\,m = l\,n - 5,3144251, \text{ siue } l\,m = l\,n + 4,6855749;$$

tum igitur erit $\Phi = m$, et esse oportet

$$\text{sin.}\, \Phi = \frac{2}{e^{\varrho+m} + e^{-\varrho-m}}.$$

Hinc iam pro lubitu sumatur aliquis valor pro Φ, multum a veritate abludens, verbi gratia $\Phi = 12^\circ$, eritque $n = 43200''$, vnde reperitur $m = 0,20944$. Cum ergo sit

$$\varrho = \tfrac{\pi}{2} = 1,57079, \text{ erit } \varrho + m = 1,78023, \text{ hinc}$$

$$l\,e^{\varrho+m} = 1,78023 \times 0,43429 = 0,77314,$$

sicque erit

$$e^{\varrho+m} = 5,9312 \text{ et } e^{-\varrho-m} = 0,1686;$$

quocirca debebit esse

$$\text{sin.}\, 12^\circ = \frac{2}{6,0998} = \frac{1}{3,0499}; \text{ est vero}$$

$$l\,\text{sin.}\, 12^\circ = 9,31788 \text{ et } l\,\frac{1}{3,0499} = 9,51572,$$

qui posterior logarithmus quia nimis est magnus, signum est angulum Φ maiorem accipi debere. Medium inter hos

 duos

duos valores praebet $\Phi = 15° = \frac{\pi}{12}$, vnde ſtatim colligitur

$$m = 0,26180, \text{ hinc } \varrho + m = 1,83259 \text{ et}$$
$$l\, e^{\varrho + m} = 1,83259 \cdot 0,43429 = 0,79405, \text{ ergo}$$
$$e^{\varrho + m} = 6,22380 \text{ et } e^{-\varrho - m} = 0,16067,$$

conſequenter

$$\text{ſin. } 15° = \frac{2}{6,38447} = \frac{1}{3,19223}; \text{ eſt vero}$$
$$l\,\text{ſin. } 15° = 9,412996 \text{ et } l\frac{1}{3,19223} = 495905.$$

Si ergo pro ſin. Φ, medium inter hos valores accipiamus, reperietur $\Phi = 16°. 33$. Quia igitur ſuperius medium erat nimis paruum, etiam hoc erit aliquantillo nimis paruum, vnde ſatis tuto concludimus fore $\Phi = 16°. 45'$, id quod pro noſtro inſtituto ſufficit, eritque ergo

$$\omega = \varrho + 16°. 45' = 106°. 45',$$

ſiue erit proxime $\omega = \frac{3}{5}\pi$, ita vt ſonus hinc oriundus prodeat $= \frac{9\pi c \sqrt{2gb}}{25\,aa}$, qui eſt fundamentalis pro hoc caſu, et ſe habet ad fundamentalem caſus primi vt $\frac{9}{25}$ ad $\frac{9}{4}$, hoc eſt vt 4 ad 25, ſeu vt 1 ad $6\frac{1}{4}$, ita vt iſte ſonus ſit fere duabus octauis cum ſemiſſe grauior quam primo caſu; vnde
Tab. II. Fig. 8. ſi ſonus iſte fuerit C, ſonus primi caſus ſit $\overline{gis}$, ſonus autem ſecundi caſus $\overline{d}$. Hunc autem motum figura octaua repraeſentat.

Corollarium 3.

§. 33. In tertio quadrante reperiemus ſecundum ſonum, ponendo $\omega = 3\varrho - \Phi$, vnde fit

$$\text{ſin. } \Phi = \frac{2}{e^{3\varrho - \Phi} + e^{-3\varrho + \Phi}},$$

et

et quia angulus Φ negligi poteſt, hinc ſequitur, vti ſupra §. 17, angulum Φ vix vnum gradum ſuperare, ita vt pro noſtro inſtituto penitus negligi queat. Sequentes vero valores ipſius ω erunt 5ϱ, 7ϱ, 9ϱ, etc. ita vt ſoni ex omnibus his valoribus oriundi ſint:

$$\frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \frac{49\pi c\sqrt{2gb}}{4ba},\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{4aa},\ \text{etc.}$$

vnde patet, poſt ſonum fundamentalem ſequentes omnes prorſus conuenire cum iis, quos eadem virga caſu primo edebat.

Scholion.

§. 34. Quodſi iam omnes valores anguli ω deſignentur per ω, ω', ω'', ω''' etc., et loco $\frac{s}{a}$ ſcribatur u, aequatio generalis, omnes plane ſonos ſeu motus mixtos complectens, erit

$$\begin{aligned} y = {} & C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\ & \left(e^{u\omega} \pm e^{\omega(1-u)} + (1 \mp e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega + (1 \pm e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega\right) \\ + {} & C'\,\text{ſin.}\left(\zeta' + t\frac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\ & \left(e^{u\omega'} \pm e^{\omega'(1-u)} + (1 \mp e^{\omega'})\,\text{ſin.}\,u\omega' + (1 \pm e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega'\right) \\ + {} & C''\,\text{ſin.}\left(\zeta'' + t\frac{\omega''\omega'' c\sqrt{2gb}}{aa}\right) \\ & \left(e^{u\omega''} \pm e^{\omega''(1-u)} + (1 \mp e^{\omega''})\,\text{ſin.}\,u\omega'' + (1 \pm e^{\omega''})\,\text{coſ.}\,u\omega''\right) \\ & \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperiora valent pro iis angulis ω, ω', ω'', quorum ſinus ſunt poſitiui, inferiora autem pro negatiuis.

Euolutio casus IV.

quo virgae vterque terminus simpliciter stylo est fixus.

Problema.

§. 35. *Si virgae elasticae tam terminus* E *quam* F *simpliciter fuerit fixus, inuestigare omnes motus, quibus ea contremiscere potest.*

Solutio.

Posito igitur tam $s = 0$ quam $s = a$, vtroque casu fieri oportet et $y = 0$ et $\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = 0$; ex priore casu hae deducuntur aequationes:

$$1^\circ)\ \alpha + \beta + \delta = 0, \text{ et } 2^\circ)\ \alpha + \beta - \delta = 0,$$

ex quibus statim colligitur

$$\alpha + \beta = 0 \text{ et } \delta = 0, \text{ ideoque } \beta = -\alpha.$$

Alter vero casus, quo $s = a$, ponendo $\frac{a}{f} = \omega$, has suppeditat aequationes:

$$3^\circ)\ \alpha e^\omega + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{fin.} \omega + \delta \operatorname{cof.} \omega = 0 \text{ et}$$

$$4^\circ)\ \alpha e^\omega + \beta e^{-\omega} - \gamma \operatorname{fin.} \omega - \delta \operatorname{cof.} \omega = 0,$$

quae, superioribus valoribus substitutis, reducuntur ad has:

$$\alpha (e^\omega - e^{-\omega}) + \gamma \operatorname{fin.} \omega = 0 \text{ et } \alpha (e^\omega - e^{-\omega}) - \gamma \operatorname{fin.} \alpha\, \omega = 0,$$

quarum summa praebet

$$2\, \alpha (e^\omega - e^{-\omega}) = 0, \text{ ideoque } \alpha = 0,$$

differentia vero dat $2 \gamma \operatorname{fin.} \omega = 0$, vnde si sumeremus $\gamma = 0$, tota virga in quiete esset mansura; necesse igitur

est

eſt vt ſit ſin. $\omega = 0$. Hinc ergo ſtatim innoteſcunt omnes valores pro angulo ω, quippe qui ſunt:

$$\omega = 0,\ \omega = \pi,\ \omega = 2\pi,\ \omega = 3\pi,\ \omega = 4\pi \text{ etc.}$$

quorum primus locum habet in ſtatu quietis, ſecundus autem ſonum fundamentalem hoc caſu exhibet, ex quo, vt in praecedentibus caſibus, oriuntur ſequentes ſoni:

$$\frac{\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{aa},\ \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa} \text{ etc.}$$

qui igitur ſoni ſecundum numeros quadratos 1, 4, 9, 16 aſcendunt, ita vt, ſi fundamentalis fuerit C, iſti ſoni conſtituant hanc ſeriem: C, $\bar{c}$, $\bar{\bar{d}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, $\overline{\overline{\overline{gis}}}$, $\bar{\bar{\bar{d}}}$, etc. Quod ſi ergo omnes iſtos motus generaliter coniungamus, formula generalis, omnes plane motus, quos virga noſtra recipere poteſt, complectens, erit

$$y = C \sin.\left(\zeta + t\frac{\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\sin.\pi u + C' \sin.\left(\zeta' + t\frac{4\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\sin.2\pi u$$
$$+ C'' \sin.\left(\zeta'' + t\frac{9\pi\pi c\sqrt{2bg}}{aa}\right)\sin.3\pi u + C''' \sin.\left(\zeta''' + t\frac{16\pi\pi c\sqrt{2gb}}{aa}\right)\sin.4\pi u$$
$$+ \text{ etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

vbi ſcripſimus u loco $\frac{s}{a}$.

Corollarium 1.

§. 36. Quando ergo virga ſonum edit fundamentalem, eandem recipiet curuaturam quam chordae ſimpliciter vibrantes, quippe quae erit linea ſinuum, qualem figura prima refert. Pro ſono autem ſimplici ſecundo, quo $\omega = 2\pi$, figura chordae erit (fig. 2), habens vnum nodum in medio O. Pro ſequentibus autem ſonis ſimplicibus numerus nodorum ſemper vnitate augetur. Tab. III. Fig. 1.

Corollarium 2.

§. 37. Quodsi sonos fundamentales omnium horum quatuor casuum, quos hactenus tractauimus, inter se comparemus, iam vidimus, si sonus primi casus exprimatur per $\overline{gis}$, pro secundo casu eum fore $\overline{d}$, ac pro tertio C, qui soni his numeris exprimuntur: $\frac{9}{4}, \frac{25}{16}, \frac{9}{25}$. Hinc cum praesenti casu quarto sonus fundamentalis exprimatur vnitate, sonus erit *fis*; seriem igitur hoc modo referamus:

I. $\frac{9}{4}$.	II. $\frac{25}{16}$.	III. $\frac{9}{25}$.	IV. 1.
$\overline{gis}$	$\overline{d}$	C	*fis*

Scholion.

§. 38. Hic igitur casus, quo vterque virgae terminus simpliciter est fixus, prae reliquis hac insigni gaudet praerogatiua, quod omnes valores anguli ω accurate sine vllo errore definire licuit, propterea quod formulae exponentiales, quae hanc determinationem turbabant et non parum irregularem reddebant, penitus ex calculo euanuerunt; vnde soni hoc casu editi multo magis ad harmoniam sunt accommodati, et quidem adhuc magis quam in chordis simplicibus vsu venit. Cum enim soni ab eadem chorda editi secundum numeros 1, 2, 3, 4 etc. progrediantur, fere semper plures horum sonorum simul audiuntur, inter quos etiam non parum dissoni occurrere possunt. Verum quia a nostra virga alii soni edi non possunt, nisi qui numeris 1, 4, 9, 16, 25 exprimuntur, praeter fundamentalem potissimum exaudietur eius duplex octaua, harmoniam nihil turbans, postea vero sequetur sonus numero 9 respondens, qui, cum fundamentamentalem vltra tres octauas ſuperet, ob nimium acumen vix vnquam audietur, ita vt tantum duplex octaua ſimul cum fundamentali tinniat. Talis igitur virga ſonos multo puriores reddere eſt cenſenda quam chordae ſimplices, vnde etiam ſoni hoc modo editi in muſica peculiarem ſuauitatem habere debebunt.

Euolutio caſus V.

quo virgae elaſticae alter terminus ſimpliciter eſt fixus, alter vero quaſi muro firmiter infixus.

Problema.

§. 39. *Si virgae elaſticae terminus* E *fuerit ſimpliciter fixus, alter vero* F *prorſus infixus, inueſtigare omnes motus, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Quia terminus E, vbi fit $s = 0$, ſimpliciter eſt fixus, habebimus ſtatim, vti in caſu praecedente, $\beta = -\alpha$ et $\delta = 0$; pro altero autem termino, vbi $s = a$, erit tam $y = 0$ quam $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, vnde poſito $\frac{a}{f} = \omega$ oriuntur hae duae aequationes:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ ſin. } \omega + \delta \text{ coſ. } \omega = 0,$$

$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ coſ. } \omega - \delta \text{ ſin. } \omega = 0,$$

quae, ſubſtitutis praecedentibus valoribus, abeunt in has:

$$\alpha (e^{\omega} - e^{-\omega}) + \gamma \text{ ſin. } \omega = 0 \text{ et}$$

$$\alpha (e^{\omega} + e^{-\omega}) + \gamma \text{ coſ. } \omega = 0.$$

Ex

Ex priore fit

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\text{ſin.}\,\omega}{e^{\omega} - e^{-\omega}}, \text{ ex altera vero } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\text{coſ.}\,\omega}{e^{\omega} + e^{-\omega}};$$

ex quibus porro colligitur tang. $\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$, quae formula plane conuenit cum ea, quam caſu ſecundo inuenimus, eritque idcirco, vt ibi, vel

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et coſ.}\,\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}, \text{ vel}$$

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{-e^{\omega} + e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}} \text{ et coſ.}\,\omega = \frac{-e^{\omega} - e^{-\omega}}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}.$$

Ex prioribus valoribus elicitur $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-1}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}$, ex alteris autem valoribus fit $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{+1}{\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}}$; vnde his binis caſibus coniungendis habebimus $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \mp\sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}$ et $\delta = 0$; vbi vt hactenus ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi anguli ω tam ſinus quam coſinus fuerint poſitiui, inferius autem ſi ambo fuerint negatiui, vnde pro quouis valore ω habebitur

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}}\right)\left(e^{u\omega} - e^{-u\omega} \mp \sqrt{2(e^{2\omega} + e^{-2\omega})}\,\text{ſin.}\,u\omega\right);$$

praeterea vero vt hactenus erit $\frac{\sqrt{2g}}{k} = \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}$, tempus vnius oſcillationis $= \frac{\pi aa}{\omega\omega c\sqrt{2gb}}$ et ſonus editus $= \frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{\pi aa}$.

Corollarium 1.

§. 40. Quia aequatio reſoluenda: tang. $\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}$ prorſus conuenit cum ea, quam caſu ſecundo iam reſoluimus

mus omnes valores anguli ω erunt, vt ibi, sequentes:

$$\omega = \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \text{ etc.}$$

vnde etiam omnes soni simplices, quos haec virga edere potest, sequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{16aa}; \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{16aa}; \frac{169\pi c\sqrt{2gb}}{16aa}; \frac{289\pi c\sqrt{2gb}}{16aa}; \text{ etc.}$$

quorum primus etiam pro fundamentali habetur, et secundum superiorem determinationem respondet claui $\overline{d}$ (vide §. 32.)

Corollarium 2.

§. 41. Quanquam autem hic casus eosdem plane sonos simplices producit, quos casu secundo inuenimus, tamen ipsa virga maxime diuersas recipit figuras. Ita pro sono fundamentali, vbi $\omega = \frac{5\pi}{4}$, ideoque tam sinus quam cosinus sunt negatiui, scilicet $\sin.\,\omega = \cos.\,\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, omisso coefficiente erit

$$y = \text{- - - -}\; e^{u\omega} - e^{-u\omega} + \sqrt{2}.(e^{2\omega} + e^{-2\omega}) \sin.\, u\,\omega,$$

qui valor pro vtroque termino $u = 0$ et $u = 1$ fit $= 0$. Pro reliqua figura cognoscenda, quia supra iam vidimus esse $e^{2\omega} = e^{\frac{5}{2}\pi} = 2576$, erit $\sqrt{2}\,(e^{2\omega} + e^{-2\omega}) = 72$, proxime. Tribuamus igitur literae u sequentes valores: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, et pro singulis sequentes valores ipsius y prodibunt:

I. Si $u = \frac{1}{5}$, erit $u\omega = \frac{\pi}{4} = 45°$ et $y = 1{,}7374 + \frac{72}{\sqrt{2}} = 58$ proxime;
II. Sit $u = \frac{2}{5}$, erit $u\omega = \frac{\pi}{2} = 90°$ et $y = 4{,}6025 + 72 = 76$ proxime;
III. Si $u = \frac{3}{5}$, erit $u\omega = \frac{3\pi}{4} = 135°$ et $y = 10.46 + \frac{72}{\sqrt{2}} = 61$ proxime; Tab. III. Fig. 3.
IV. Sit $u = \frac{4}{5}$, erit $u\omega = \pi = 180°$ et $y = 23{,}10 + 0 = 23$ proxime.
Ista figura repraesentatur per figuram tertiam.

Scholion.

§. 42. Vt iam omnes plane motus ex inuentis ſimplicibus concinne repraeſentemus, pro formula irrationali $\sqrt{2(e^{2\omega}+e^{-2\omega})}$ ſcribamus characterem Ω, cui pro variis valoribus ω, ω', ω'', ω''' etc. tribuamus valores Ω, Ω', Ω'', Ω''' etc. et ſcribendo, vt hactenus, u loco $\frac{s}{a}$, aequatio generalis erit:

$$
\begin{aligned}
y = {} & C \,\text{ſin.}\left(\zeta + \tfrac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa}\, t\right)\left(e^{\omega} - e^{-\omega} \mp \Omega \,\text{ſin.}\, u\,\omega\right) \\
& + C' \,\text{ſin.}\left(\zeta' + \tfrac{\omega'\omega' \sqrt{2gb}}{aa}\, t\right)\left(e^{\omega'} - e^{-\omega'} \mp \Omega' \,\text{ſin.}\, u\,\omega'\right) \\
& + C'' \,\text{ſin.}\left(\zeta'' + \tfrac{\omega''\omega'' \sqrt{2gb}}{aa}\, t\right)\left(e^{\omega''} - e^{-\omega''} \mp \Omega'' \,\text{ſin.}\, u\,\omega''\right) \\
& + C''' \,\text{ſin.}\left(\zeta''' + \tfrac{\omega'''\omega''' \sqrt{2gb}}{aa}\, t\right)\left(e^{\omega'''} - e^{-\omega'''} \mp \Omega''' \,\text{ſin.}\, u\,\omega'''\right) \\
& \qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

vbi ſignum ſuperius valet pro angulis ω, ω', ω'' etc. quorum ſinus et coſinus ſunt poſitiui, inferius autem vbi ſunt negatiui.

Euolutio caſus VI.

quo virgae elaſticae vterque terminus firmiter quaſi muro eſt infixus.

Problema.

§. 43. *Si virgae elaſticae vterque terminus firmiter fuerit infixus, inueſtigare motus, quibus ea contremiſcere poteſt.*

Solutio.

Hoc igitur caſu pro vtroque termino debet eſſe tam $y=0$ quam $\left(\frac{dy}{ds}\right)=0$; pro priore termino ergo habebibebimus has aequationes:

$$\alpha+\beta+\delta=0 \text{ et } \alpha-\beta+\gamma=0,$$

vnde consequimur $\delta=-\alpha-\beta$ et $\gamma=-\alpha+\beta$; posterior vero, quo $s=a$ et $\frac{a}{f}=\omega$, praebet

$$\alpha e^{\omega}+\beta e^{-\omega}+\gamma \operatorname{fin.} \omega+\delta \operatorname{cof.} \omega=0 \text{ et}$$

$$\alpha e^{\omega}-\beta e^{-\omega}+\gamma \operatorname{cof.} \omega-\delta \operatorname{fin.} \omega=0;$$

vbi si priores valores substituantur, orientur hae aequationes:

$$\alpha(e^{\omega}-\operatorname{fin.}\omega-\operatorname{cof.}\omega)+\beta(e^{-\omega}+\operatorname{fin.}\omega-\operatorname{cof.}\omega) \text{ et}$$

$$\alpha(e^{\omega}-\operatorname{cof.}\omega+\operatorname{fin.}\omega)-\beta(e^{-\omega}-\operatorname{cof.}\omega-\operatorname{fin.}\omega);$$

vnde duplici modo colligitur

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-e^{-\omega}-\operatorname{fin.}\omega+\operatorname{cof.}\omega}{e^{\omega}-\operatorname{fin.}\omega-\operatorname{cof.}\omega}=\frac{e^{-\omega}-\operatorname{fin.}\omega-\operatorname{cof.}\omega}{e^{\omega}+\operatorname{fin.}\omega-\operatorname{cof.}\omega},$$

qui valores cum prorsus conueniant cum iis, quos casu primo sumus nacti, inde etiam sequitur fore $\operatorname{cof.}\omega=\frac{2}{e^{\omega}+e^{-\omega}}$; sicque etiam omnes valores anguli ω iidem erunt, qui primo casu iam sunt exhibiti, scilicet $\omega=\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, etc. vnde etiam ista virga eosdem edet sonos, qui erunt:

$$\frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{25\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{49\pi c\sqrt{2gb}}{4aa};\ \frac{81\pi c\sqrt{2gb}}{4aa}; \text{ etc.}$$

Praeterea vero etiam erit $\operatorname{fin.}\omega=\pm\frac{(e^{\omega}-e^{-\omega})}{e^{\omega}+e^{-\omega}}$, vbi signum superius valet pro casibus vbi sinus est positiuus, inferius si negatiuus; vnde porro obtinemus $\alpha=1$, $\beta=\mp e^{\omega}$, hincque porro $\gamma=-(1\pm e^{\omega})$ et $\delta=-(1\mp e^{\omega})$. Aequatio igitur pro motu a casu primo in eo tantum differt, quod hic coefficientes γ et δ contraria signa sunt nacti;

sicque

ſicque, ſi ω, ω′, ω″, ω‴ denotent omnes valores ipſius ω, aequatio generalis, omnes motus virgae complectens, erit:

$$y = C\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\,\frac{\omega\omega c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega} \mp e^{\omega(1-u)} - (1 \pm e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega - (1 \mp e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega\right)$$
$$+ C'\,\text{ſin.}\left(\zeta' + t\,\frac{\omega'\omega' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega'} \mp e^{\omega'(1-u)} - (1 \pm e^{\omega'})\,\text{ſin.}\,u\omega' - (1 \mp e^{\omega'})\,\text{coſ.}\,u\omega'\right)$$
$$+ C''\,\text{ſin.}\left(\zeta'' + t\,\frac{\omega''\omega'' c\sqrt{2gb}}{aa}\right)$$
$$\left(e^{u\omega''} \mp e^{\omega''(1-u)} - (1 \pm e^{\omega''})\,\text{ſin.}\,u\omega'' - (1 \mp e^{\omega''})\,\text{coſ.}\,u\omega''\right).$$

etc. etc. etc.

Corollarium I.

§. 44. Quanquam autem omnes motus cum caſu primo perfecte conueniunt: tamen figura, quam virga inter vibrandum recipit, toto coelo eſt diuerſa. Ad quod oſtendendum euoluamus figuram pro ſono fundamentali, vbi eſt $\omega = \frac{3\pi}{2}$, cuius ſinus cum ſit negatiuus, ſigna valebunt inferiora, eritque omiſſo coefficiente

$$y = \text{- - - -}\ e^{u\omega} + e^{\omega(1-u)} - (1 - e^{\omega})\,\text{ſin.}\,u\omega - (1 + e^{\omega})\,\text{coſ.}\,u\omega,$$

vbi eſt $e^{\omega} = 111$. Nunc autem ipſi ω tribuamus duos valores $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, ac reperiemus:

I. Si $u = \frac{1}{3}$, $u\omega = \frac{1}{2}\pi = 90°$ et $e^{u\omega} = 4,8104$ et $e^{-u\omega} = 0,2079$ hincque $y = 4,8104 + 23,0769 + 110 = 138$.

II. Si $u = \frac{2}{3}$, erit $u\omega = \pi = 180°$ et $e^{u\omega} = 23,140$ et $e^{\omega(1-u)} = 4,810$, hincque $y = 23,140 + 4,810 + 112 = 140$. Hi autem duo valores, ſi calculum accuratius inſtituiſſemus, prodiiſ-
Tab. III. ſent aequales. Curua igitur, quam virga hoc caſu induit,
Fig. 4. habebit figuram $ErsF$, fig. 4 repraeſentata. Pro ſequentibus

tibus autem ſonis ſimplicibus vel vnus nodus, vel duo, vel tres ſucceſſiue ingredientur.

Corollarium 2.

§. 45. Ope formularum, quas pro ſingulis his caſibus eruimus, non ſolum omnes ſoni, quos eadem virga elaſtica, diuerſimode conſtituta, edere valet, inter ſe comparari poſſunt, ſed etiam ſoni diuerſarum virgarum, quae tam longitudine quam craſſitie inter ſe diſcrepant, diiudicari poſſunt, dummodo craſſities in omnibus fuerit ſimilis: veluti ſi virgae fuerint cylindricae, quo caſu craſſities cuiusque circulo repraeſentatur; ſi enim talium virgarum diameter craſſitiei fuerit $= c$, longitudo $= a$, tum ſub ſimilibus circumſtantiis ſoni erunt vt $\frac{c}{aa}$, hoc eſt directe vt diameter craſſitiei et reciproce vt quadratum longitudinis, ita vt quo craſſior fuerit virga pro eadem longitudine, ſonus edatur tanto acutior; contra vero quo longior fuerit virga pro eadem craſſitie, eo grauior ſonus ſit proditurus, idque in ratione duplicata.

Scholion.

§. 46. Hic ſcilicet aſſumſimus, in diuerſis virgis craſſitiem ſimilem figuram habere, veluti circularem, quippe quo caſu virgae ſunt cylindricae et verſus omnes plagas aequaliter inflexioni reſiſtunt. Verum etiam noſtrae formulae ad eiusmodi virgas applicari poſſunt, quarum craſſities alia quacunque figura exhibetur. Ad quod oſtendendum conſideremus eiusmodi virgam, cuius ſectiones transuerſales ad longitudinem normaliter factae ſint parallelogramma rectangula A B C D, in quibus ergo duplex Tab. III. Fig. 5.

 po-

potiſſimum inflexio locum habere poteſt, quarum altera fit ſecundum axem A B, quando ſcilicet lineae A C et B D circa hunc axem inflectuntur; altera autem inflexio principalis fieri poteſt circa axem A C. Illo caſu litera noſtra c, quae in ſuperioribus formulis ineſt, aequabitur lateri A C, poſteriore vero caſu lateri A B, vtroque vero caſu alterum latus plane non in computum venitur. Litera enim b pendet, vti iam ſupra notauimus, ab elaſticitate abſoluta materiae, ex qua virgae ſunt fabricatae. Ita ſi virga, cuius longitudo eſt $= a$, incuruetur circa axem A B, ſonus editus erit vt $\frac{AC}{aa}$; at ſi virga incuruetur circa axem
Tab. III. Fig. 6. A C, ſonus editus erit vt $\frac{AB}{aa}$, ſi ſcilicet reliquae circumſtantiae fuerint pares. At ſi ſectio virgae transverſalis fuerit circulus, diametro A B deſcriptus (fig. 6.), tum pro formulis noſtris erit $c = \frac{1}{4}$ A B; vbi perinde eſt, circa quemnam axem fiat incuruatio. Hic quidem alios caſus non ſumus contemplati, niſi in quibus ambo virgae termini vel ſunt liberi, vel ſimpliciter fixi, vel firmiter infixi. Fieri autem poſſet vt eadem virga inſuper in vno vel pluribus locis mediis ſimpliciter figatur, quandoquidem hoc pacto communicatio inter motus diuerſarum partium non tolleretur: ſed omnium huiusmodi caſuum euolutio requireret tractationem infinitam. Vt autem ratio, calculum ad huiusmodi caſum applicandi, intelligatur, ſufficiet vnum talem caſum hic ſubiunxiſſe.

Problema.

§. 47. *Si virga elaſtica non ſolum in vtroque termino*
Fig. 7. *E et F fuerit ſimpliciter fixa, ſed etiam in puncto quocunque medio L ope ſtyli figatur, inueſtigare omnes motus, quibus iſta virga contremiſcere poteſt.*

So-

Solutio.

Maneat virgae tota longitudo $EF = a$, ac vocetur portio $EL = \lambda a$, ita vt λ denotare possit fractionem quamcunque vnitate minorem. Ac primo quidem patet, si virga in puncto L firmiter esset infixa, omnem plane communicationem inter ambas portiones E L et F L tolli, ita vt vtriusque motus a motu alterius neutiquam perturbetur. Verum si in puncto L tantum stylo figatur, circa quem virga gyrari possit, tum neutra pars motum recipere potest, quin cum altera is certo modo communicetur. Interim tamen hoc stilo continuitas curuae per ambas portiones interrumpitur, ita, vt portio $E\,m\,L$ alia aequatione exprimatur atque altera portio $L\,n\,F$: scilicet dum hic etiam principio tantum motus regulares inuestigamus, qui conformes sunt pendulo simplici $= k$, pro motu vtriusque portionis primus factor $C \sin.(\zeta + t\sqrt{\tfrac{g}{k}})$ necessario idem manere debet, quoniam ambae portiones suas vibrationes eodem tempore similique modo peragere debent. Alteri autem factores diuersi esse poterunt ratione coëfficientium α, β, γ, δ. Omisso igitur primo factore vt hactenus faciamus $\frac{a}{s} = \omega$ et $\frac{\beta}{a} = u$; tum vero pro portione E L statuamus

$$y = \ldots\ldots \alpha e^{u\omega} + \beta e^{-u\omega} + \gamma \sin u\omega + \delta \cos. u\omega,$$

pro altera portione L F statuamus

$$y + \ldots\ldots \alpha' e^{u\omega} + \beta' e^{-u\omega} + \gamma' \sin. u\omega + \delta' \cos. u\omega,$$

qui coëfficientes a prioribus vtcunque discrepare possunt, dummodo obseruetur, pro puncto L, vbi fit $u = \lambda$, ex vtraque formula eosdem valores tam pro $(\frac{dy}{ds})$ quam pro $(\frac{ddy}{ds^2})$ prodire debere, quandoquidem anguli, quos vtraque portio

portio in L cum axe facit, neceſſario aequales eſſe debent; neque vero etiam radius oſculi in hoc puncto L vtrinque diuerſus eſſe poteſt. His obſeruatis pro hoc puncto L, vbi fit $u = \lambda$, quia vtraque applicata y euaneſcere debet, habebimus ſequentes quatuor aequationes:

$$\text{I.}\quad \alpha e^{\lambda\omega} + \beta e^{-\lambda\omega} + \gamma \operatorname{ſin.} \lambda\omega + \delta \operatorname{coſ.} \lambda\omega = 0.$$

$$\text{II.}\quad \alpha' e^{\lambda\omega} + \beta' e^{-\lambda\omega} + \gamma' \operatorname{ſin.} \lambda\omega = \delta' \operatorname{coſ.} \lambda\omega = 0.$$

$$\text{III.}\quad \alpha e^{\lambda\omega} - \beta e^{-\lambda\omega} + \gamma \operatorname{coſ.} \lambda\omega - \delta \operatorname{ſin.} \lambda\omega$$
$$= \alpha' e^{\lambda\omega} - \beta' e^{-\lambda\omega} + \gamma' \operatorname{coſ.} \lambda\omega - \delta' \operatorname{ſin.} \lambda\omega. \text{ ſiue}$$

$$\text{III.}\quad (\alpha - \alpha') e^{\lambda\omega} - (\beta - \beta') e^{-\lambda\omega} + (\gamma - \gamma') \operatorname{coſ.} \lambda\omega$$
$$- (\delta - \delta') \operatorname{ſin.} \lambda\omega = 0.$$

$$\text{IV.}\quad (\alpha - \alpha') e^{\lambda\omega} + (\beta - \beta') e^{-\lambda\omega} - (\gamma - \gamma') \operatorname{ſin.} \lambda\omega$$
$$- (\delta - \delta') \operatorname{coſ.} \lambda\omega = 0.$$

Nunc igitur ad vtrumque quoque terminum ſpectemus, vnde etiam quatuor reſultabunt aequationes, prouti fuerit vel $\lambda = 0$ vel $\lambda = 1$; terminus ſcilicet E, vbi $u = 0$, praebet:

$$\text{V.}\quad \alpha + \beta + \delta = 0 \quad \text{et} \quad \text{VI.}\quad \alpha + \beta - \delta = 0,$$

terminus autem F, vbi $u = 1$, dat

$$\text{VII.}\quad \alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} + \gamma' \operatorname{ſin.} \omega + \delta' \operatorname{coſ} \omega = 0 \quad \text{et}$$

$$\text{VIII.}\quad \alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} - \gamma' \operatorname{ſin.} \omega - \delta' \operatorname{coſ.} \omega = 0.$$

Nacti ſcilicet ſumus octo aequationes pro definiendis octo coëfficientibus, α, β, γ, δ et α', β', γ', δ'; ac tum ſupererit adhuc aequatio, vnde angulum ω definiri apportebit. Incipiamus ab aequatione V et VI, ex quibus ſtatim colligitur $\beta = -\alpha$ et $\delta = 0$; deinde VII et VIII, inuicem additae dant $\alpha' e^{\omega} + \beta' e^{-\omega} = 0$, ſubtractae vero dant

γ' ſin.

$$\gamma' \operatorname{fin.} \omega + \delta' \operatorname{cof.} \omega = 0, \text{ vnde fit}$$

$$\beta' = -\alpha' e^{2\omega} \text{ et } \delta' = -\gamma' \operatorname{tang.} \omega.$$

Hi valores in prima et fecunda fubftituti praebent

$$\text{I. } \alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) + \gamma \operatorname{fin.} \lambda\omega = 0 \text{ et}$$

$$\text{II. } \alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) + \gamma' \operatorname{fin.} \lambda\omega - \gamma' \operatorname{cof.} \lambda\omega \operatorname{tang.} \omega = 0,$$

ex quibus aequationibus reperiuntur valores:

$$\gamma = -\alpha \frac{(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})}{\operatorname{fin.} \lambda\omega} \text{ et } \gamma' = -\frac{\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})}{\operatorname{fin.} \lambda\omega - \operatorname{cof.} \lambda\omega \operatorname{tang.} \omega},$$

vnde fit

$$\delta' = \frac{\alpha'({}^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) \operatorname{tang.} \omega}{\operatorname{fin.} \lambda\omega - \operatorname{cof.} \lambda\omega \operatorname{tang.} \omega}.$$

Ex his valoribus nunc pro reliquis aequationibus colligimus: $\beta - \beta' = -\alpha + \alpha' e^{2\omega}$ et

$$\gamma - \gamma' = -\frac{\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})}{\operatorname{fin.} \lambda\omega} + \frac{\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})}{\operatorname{fin.} \lambda\omega - \operatorname{cof.} \lambda\omega \operatorname{tang.} \omega} \text{ et}$$

$$\delta - \delta' = -\frac{\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) \operatorname{tang.} \omega}{\operatorname{fin.} \lambda\omega - \operatorname{cof.} \lambda\omega \operatorname{tang.} \omega}.$$

Nunc autem fit

$$\text{III. } \alpha\left((e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}) - (e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) \operatorname{cot.} \lambda\omega\right)$$
$$= \alpha'(e^{\lambda\omega} + e^{\omega(2-\lambda)}) - (e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}) \left(\frac{\operatorname{cof.} \lambda\omega + \operatorname{fin.} \lambda\omega \operatorname{tang.} \omega}{\operatorname{fin.} \lambda\omega - \operatorname{cof.} \lambda\omega \operatorname{tang.} \omega}\right),$$

quae aequatio contrahitur in fequentem formam:

$$\alpha(e^{\lambda\omega} + e^{-\lambda\omega}) - (e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) \operatorname{cot.} \lambda\omega)$$
$$= \alpha'\left((e^{\lambda\omega} + e^{\omega(2-\lambda)}) + e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)} \operatorname{cot.} (1-\lambda)\omega)\right),$$

quarta vero aequatio praebet iftam:

$$2\alpha(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}) = 2\alpha'(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)});$$

ex hac postrema deducitur

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}}{e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}},$$

vnde capere licebit

$$\alpha = e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)} \text{ et } \alpha' = e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega},$$

quos valores iam in tertia aequatione substitui oportet: vnde facta reductione prodibit

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - (e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})(\cot.\lambda\omega + \cot.(1-\lambda)\omega$$

siue

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - (e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)})(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega})\frac{\sin.\omega}{\sin.\lambda\omega \sin.(1-\lambda)\omega}.$$

Sicque totum negotium huc est perductum, vt ex ista aequatione valores anguli ω eliciantur, quem quidem laborem, ob formulas tantopere complicatas, suscipere non ausim, si quidem hoc loco sufficit methodum tradidisse, qua huiusmodi quaestiones arduae sint tractandae. Caeterum patet, si fuerit $\lambda = 0$, vt portio E L fiat infinite parua, nullum motum communem inter ambas partes existere posse, id quod etiam calculus ostendet, quippe qui praebet

$$0 = 2(1 - e^{2\omega}),$$

vnde sequitur $e^{2\omega} = 1$, ideoque $\omega = 0$, quo valore status quietis innuitur, quod idem eueniet, si statuatur $\lambda = 1$, tum enim terminus F erit quasi muro infixus. At casus, quo $\lambda = \frac{1}{2}$, singularem euolutionem meretur.

Euolu-

Euolutio casus,

quo virga elastica EF non solum in vtroque termino E et F, sed etiam in eius medio L stylo est fixa.

§. 48. Cum igitur hoc casu sit $\lambda = \frac{1}{2}$, aequatio finalis hanc induet formam: Tab. III. Fig 8.

$$o = 2 - 2e^{2\omega} - (e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega})(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega})\frac{\sin.\,\omega}{\sin.\frac{1}{2}\omega^2},$$

quae reducitur ad hanc:

$$o = 2(1 - e^{2\omega})\sin.\tfrac{1}{2}\omega^2 - (1 - e^{\omega})(e^{\omega} - 1)\sin.\,\omega,$$

quae per factorem communem $1 - e^{\omega}$ diuisa, (quippe ex quo oriretur $e^{\omega} = 1$, hinc $\omega = o$,) pro statu quietis producit hanc aequationem:

$$o = 2(1 + e^{\omega})\sin.\tfrac{1}{2}\omega^2 - (e^{\omega} - 1)\sin.\,\omega,$$

quae, si loco $\sin.\,\omega$ scribatur $2\sin.\frac{1}{2}\omega\cos.\frac{1}{2}\omega$, abit in hanc:

$$o = (1 + e^{\omega})\sin.\tfrac{1}{2}\omega^2 - (e^{\omega} - 1)\sin.\tfrac{1}{2}\omega\cos.\tfrac{1}{2}\omega,$$

quae manifesto duos habet factores, alterum $\sin.\frac{1}{2}\omega$, alterum vero

$$(1 + e^{\omega})\sin.\tfrac{1}{2}\omega - (e^{\omega} - 1)\cos.\tfrac{1}{2}\omega,$$

quorum vterque nihilo aequatus praebet solutionem: ambas igitur seorsim perpendamus.

§. 49. Pro priore igitur casu statuamus $\sin.\frac{1}{2}\omega = o$, eritque in genere $\frac{1}{2}\omega = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, ita vt hic iam innumerabiles motus regulares contineantur; ac manifestum est hunc casum prorsus conuenire cum casu quarto supra euoluto, nisi

 quod

quod hic fit $\frac{1}{2}\omega$ quod ibi erat ω; ſcilicet hic pro vtraque portione longitudo tantum eſt $\frac{1}{2}a$. Vtraque igitur ſemiſſis eodem modo ſuas vibrationes peragit, ac ſi ſeorſim exiſteret et in vtroque termino ſtylo ſimpliciter eſſet fixa; quamobrem omnes ſoni ſimplices, quos vtraque portio edere poteſt, ſequentibus numeris exprimentur:

$$\frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\quad \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\quad \frac{36\pi c\sqrt{2gb}}{aa};\quad \frac{64\pi c\sqrt{2gb}}{aa};$$

qui ergo omnes duplici octaua altiores ſunt quam caſu IV; cuius diſcriminis ratio in hoc eſt ſita, quod longitudo hoc caſu tantum ſemiſſis eſt illius.

§. 50. Hoc igitur caſu coëfficientes α, β, γ, δ, et α', β', γ', δ', ſequenti modo determinabuntur:

$$\alpha = e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega};\ \beta = e^{\frac{3}{2}\omega} - e^{\frac{1}{2}\omega};\ \gamma = -\frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega};\ \delta = 0$$

$$\alpha' = e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega};\ \beta' = -e^{2\omega}\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right);\ \gamma' = -\frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega - \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{tang.}\,\omega}\ \text{et}$$

$$\delta' = \frac{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)\text{tang.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega - \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{tang.}\,\omega}.$$

Eſt vero

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\omega - \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{coſ.}\,\omega - \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\omega} = -\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega}{\text{coſ.}\,\omega},$$

vbi, quia eſt $\omega = 2i\pi$, erit $\text{coſ.}\,\omega = 1$, at $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega = 0$. Multiplicemus igitur omnes hos coëfficientes per $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\omega$ eritque

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = -(1 - e^{\omega})(e^{\omega} - 1)\ \text{et}\ \delta = 0;$$

porro

porro

$$\alpha' = 0, \; \beta' = 0, \; \gamma' = (e^{\omega} - 1)(1 - e^{\omega}), \text{ et } \delta' = 0.$$

Quia igitur omnes euanefcunt praeter γ et γ', ac praeterea eft $\gamma' = -\gamma$, fi ponamus $\gamma = 1$ erit $\gamma' = -1$; pro portione E L igitur aequatio motum exprimens erit

$$y = C \text{ fin. } (\zeta + t \frac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa}) \text{ fin. } u\omega$$

et pro altera portione L F

$$y = -C \text{ fin. } (\zeta + t \frac{\omega\omega c \sqrt{2gb}}{aa}) \text{ fin. } u\omega,$$

vbi eft $u = \frac{1}{a}$.

§. 51. Praeterea vero datur adhuc alia folutio ex altero factore oriunda, ex quo fit

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\omega = \frac{e^{\omega} - 1}{1 + e^{\omega}} = \frac{e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}},$$

qui valor congruit cum eo, qui fupra, cafu quinto, eft erutus: totum enim difcrimen in hoc confiftit, quod hic fit $\frac{1}{2}\omega$ quod ibi erat ω, quemadmodum rei natura poftulat, quoniam hic vtriusque portionis longitudo tantum eft $\frac{1}{2}a$. Hinc ergo intelligimus, vtramque portionem E L et L F perinde contremifcere poffe ac fi vtraque in E et F ftylo fimpliciter effet fixa, in L vero firmiter prorfus infixa. Hic autem valores pro ω erunt $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{2}$, $\frac{21\pi}{2}$, etc. ficque hinc foni orientur duabus octauis altiores quam cafu quinto. Hic igitur maxime notatu dignum contigit, quod ambas portiones E L et L F duplici modo contremifcere poffunt, altero, qui cum cafu fuperiore quarto, altero vero, qui cum cafu quinto congruit. Caeterum valores coëfficientium

ficientium perinde se habebunt, vti iam supra sunt euoluti, nisi quod pro hoc casu non sit sin. $\frac{1}{2}\omega = c$.

Scholion.

§. 52. Hactenus perpetuo assumsimus, virgam elasticam in statu naturali esse rectam. Nihilo vero difficilior euadit investigatio, si virga in statu naturali habuerit figuram quamcunque incuruatam. Veluti si eius figura naturalis fuerit curua quaecunque E X F, totum discrimen huc reducetur, vt ipsam hanc lineam curuam E X F pro axe accipiamus, dum ante axis nobis erat linea recta cum figura curuae congruens. Hic scilicet sumta portione quacunque E X $= x = s$, punctum virgae X alium motum recipere nequit, nisi in directione X Y, ad ipsam curuam normali. Quare si concipiamus durante motu punctum X translatum esse in Y, ac vocemus hanc applicatam X Y $= y$, formulae differentiales, quas theoria nobis suggessit etiam hic locum habebunt, atque adeo formula $-\frac{ddy}{ds^2}$, hic iam excessum curuaturae in Y supra curuaturam naturalem in X exprimet; quo obseruato aequatio motum determinans manebit prorsus vt ante, scilicet

Tab. III. Fig. 9.

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bcc\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

vnde etiam pro singulis motibus regularibus habebitur eadem aequatio integralis:

$$y = C\,\text{sin.}\left(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}}\right)\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma\,\text{sin.}\frac{s}{f} + \delta\,\text{cos.}\frac{s}{f}\right)$$

existente $f^4 = bcck$. Quare si tota virgae longitudo E X F statuatur $= a$, omnes casus, quos supra pertractauimus etiam hic sine vlla mutatione locum habebunt, et ista virga ga omnes illos sonos edere poterit, quos supra assignauimus, prouti scilicet virgae termini fuerint liberi, vel simpliciter fixi, vel etiam firmiter infixi, ita vt pro talibus virgis naturaliter incuruatis nulla noua inuestigatione sit opus. Interim tamen hinc ii casus sunt excipiendi, quibus virga ita est incuruata, vt figuram in se redeuntem referat, quandoquidem similis casus in virgis naturaliter rectis locum habere nequit, quamobrem istum casum coronidis loco hic subiungamus.

Euolutio casus,

quo virga elastica in statu naturali figuram in se redeuntem habet, siue de sonis annulorum elasticorum.

§. 53. Sit igitur figura virgae elasticae circulus AXBC, siue alia quaecunque curua in se rediens, cuius tota peripheria sit $= a$, crassities vero et elasticitas virgae maneant eaedem vt ante sunt stabilitae; tum vero pro motibus regularibus, quos haec virga recipere potest, sit k longitudo penduli simplicis isochroni, vnde formetur Tab. III. Fig. 10.

quantitas $f = \sqrt[4]{bcck}$; tum pro quacunque portione indefinita $AX = s$ sit Y punctum, in quod praesenti tempore $= t$ punctum X sit translatum, et iam vidimus, aequationem integralem in genere fore,

$$Y = C \sin.(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{k}})(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{\frac{-s}{f}} + \gamma \sin.\tfrac{s}{f}. + \delta \cos.\tfrac{s}{f}).$$

Sicque totum negotium iam huc est perductum, vt coëfficientibus α, β, γ, δ debiti valores assignentur, vbi res longe

longe aliter se habere deprehenditur ac supra, quoniam hic neque termini liberi, neque simpliciter fixi, neque firmiter infixi occurrunt.

§. 54. At vero ipsa indoles, qua figura virgae in se rediens assumitur facilem viam nobis aperit hos coëfficientes determinandi. Consideremus enim ipsum punctum A, vbi est $s = 0$, quod ita accipi potest, vt ibi fiat etiam $y = 0$. Pro hoc ergo puncto, omisso factore partim constante partim a tempore pendente, fieri debet $0 = \alpha + \beta + \delta$. Iam statuamus $s = a$, et quia iterum in idem punctum A incidimus ponendo breuitatis gratia $\frac{a}{f} = \omega$, fieri oportet

$$0 = \alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \sin. \omega + \delta \cos. \omega,$$

atque idem euenire debet, si ponamus $s = 2a$, siue $3a$, siue $4a$ etc., vnde nascentur sequentes aequationes:

$$0 = \alpha e^{2\omega} + \beta e^{-2\omega} + \gamma \sin. 2\omega + \delta \cos. 2\omega,$$

$$0 = \alpha e^{3\omega} + \beta e^{-3\omega} + \gamma \sin. 3\omega + \delta \cos. 3\omega,$$

etc. etc.

quibus omnibus simul satisfieri nequit, nisi sit $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\delta = 0$; tum vero necesse est, vt simul fiat

$$\sin. \omega = 0, \ \sin. 2\omega = 0, \ \sin. 3\omega = 0 \text{ etc.}$$

quod in genere eueniet, sumendo $\omega = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque; vnde vt supra oritur sonus $= \frac{ii\pi c\sqrt{2gb}}{aa}$, ita vt soni simplices progrediantur in hac progressione:

$$\frac{\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{4\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{9\pi c\sqrt{2gb}}{aa}, \ \frac{16\pi c\sqrt{2gb}}{aa} \text{ etc.}$$

§. 55.

§. 55. Sonus igitur principalis, quem talis virga edere poteſt, continetur in formula $\frac{\pi c \sqrt{2gb}}{aa}$; reliqui vero ſoni ſimplices ſecundum numeros quadratos 4, 9, 16, 25, progrediuntur, qui cum mox nimis fiant alti quam vt exaudiri queant, praeter ſonum fundamentalem plerumque alius non ſentietur, niſi duplex octaua, quo ipſo harmonia gratiſſima percipietur. Tales igitur annuli elaſtici prae chordis muſicis hac inſigni proprietate ſunt praediti, vt ſonos multo puriores reddant, id quod etiam in integris diſcis et catinis campaniformibus euenire debere videtur, cuiusmodi corpora inter inſtrumenta muſica iam ſunt recepta, quorumque ſoni ſingulari ſuauitate ſenſum auditus afficere feruntur. Caeterum manente eadem elaſticitate hi ſoni tenent rationem reciprocam duplicatam totius perimetri a, prorſus vti iam ſupra circa virgas rectas obſeruauimus.

CONIECTVRA
CIRCA NATVRAM AERIS,
PRO EXPLICANDIS PHAENOMENIS IN ATMOSPHAERA OBSERVATIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quanquam nobis in intima naturae mysteria penetrare, indeque veras caussas Phaenomenorum agnoscere neutiquam est concessum: tamen euenire potest, vt hypothesis quaedam ficta pluribus phaenomenis explicandis aeque satisfaciat, ac si vera caussa nobis esset perspecta, quemadmodum felicissimo successu omnes fere motus coelestes ex hypothesi attractionis vniuersalis determinari solent, etiamsi haec ipsa hypothesis ex Physica prorsus sit profliganda.

§. 2. Quam ob rem fortasse similimodo quaepiam hypothesis excogitare poterit, quae omnibus Phaenomenis aëris et atmosphaerae explicandis sufficiat. Talem ideam iam ante quinquaginta annos in Tomo II. veterum Commentariorum proposui, quae ad plura aëris phaenomena explicanda satis apta videbatur, etiamsi facile agnouissem, talem aëris structuram reuera admitti non posse. Imprimis

mis huius Phaenomeni explicatio: quod, dum aër vaporibus eſt inquinatus, eius elaſticitas diminuatur, mihi omni attentione digna eſt viſa, cum eius cauſſa a nemine adhuc dilucide ſit expoſita. Illo vero tempore Theoria fluidorum nondum ſatis erat exculta, vt iſtam ideam penitus euoluere valuiſſem; quamobrem operae pretium fore exiſtimo, illam aëris ſtructuram, quam finxeram, accuratius examinare, et quaenam Phaenomena inde oriri debeant, maiori curua inquirere.

§. 3. Naturam aëris autem ita animo conceperam, quaſi ex innumerabilibus minimis bullulis ſeu ſphaerulis eſſet compoſitus, quae ſingulae cuticula tenuiſſima aquoſa circumdarentur, intra quas propria aëris materia motu rapidiſſimo in gyrum circumagatur, in cuius vi centrifuga elaſticitas aëris produci erat viſa. Totum negotium igitur huc redit, vt iſta hypotheſis accuratius perpendatur, et ad cuiusmodi phaenomena producenda ſit accommodata, inquiratur. Niſi enim manifeſtas contradictiones inuoluat, ſatis probabile videtur, aëris phaenomena, actu obſeruata, non multum diſcrepare poſſe.

§. 4. Quod igitur primo ad pelliculas illas aqueas ſiue vaporoſas attinet, earum realitas in aqua ſpumoſa atque bullis ſaponaceis manifeſto deprehenditur, vnde recte concludere poterimus, vapores in aëre adſcendentes ita diſſipari, vt elementa aërea inſtar cuticulae inuoluant, quae ſi per omnia elementa aequaliter diſpergatur, atmoſphaera nihil de pelluciditate amittet, ſin autem intra ſphaerulas aëreas confuſe hoſpitentur, refractio radiorum lucis eorumque tranſitus non mediocriter perturbabitur, vnde in aëre inferiore nebulae, in ſuperiore autem nubes oriri videntur. Praeterea, quo plures vapores aëri fuerint admixti, cuticulae illae, ſphaerulas aëreas ambientes, euadent denſiores, quoad ſcilicet conſtitutio harum ſphaerularum ſufferre valet.

§. 5. Deinde etiam non deſunt rationes, quae ſuadent, propriam aëris materiam in his ſphaerulis motu rapidiſſimo circumagi, cum aliunde cauſſa elaſticitatis repeti nequeat. Praeterea cum iam ſatis euictum ſit, calorem in certa agitatione aetheris conſiſtere, hinc vtique materia illa aëris in ſphaerulis motum quendam recipere debet, qui cum in tali anguſto ſpatio ſit incluſus, non aliter niſi per motum vorticoſum continuari poteſt, id quod eo magis ſit probabile, quod aucto calore, indeque propterea motu iſto verticoſo, elaſticitas aëris quoque augeatur; vnde manifeſtum eſt, motum gyratorium in ſphaerulis aëreis cum cauſſa caloris arctiſſime eſſe connexum.

§. 6. Deinde vero etiam aſſumſi, ſingula aëris elementa in memoratis ſphaerulis per circulos maximos circumagi, vt in iis vndequaque aequalis vis centrifuga, a centro cuiusque ſphaerulae recedens, oriatur. haecque hypotheſis nuncquidem cum principiis mechanicis neutiquam conſiſtere poſſe videtur, cum demonſtratum ſit, nullum alium motum circa punctum quodpiam fixum in corporibus dari poſſe, niſi qui peragatur circa axem quempiam fixum. A tali autem motu alia vis centrifuga generari non poteſt, niſi quae ab axe gyrationis recedat, ideoque in eadem ſphaerula maxime eſſet irregularis, cum certum ſit, elaſticitatem aëris in omnes plagas aequaliter tendere.

§. 7.

§. 7. Obiectio autem hinc ab illo motu oriunda tantum locum habet in corporibus solidis: in fluidis enim res longe aliter se habere potest; atque adeo clare hic demonstrabo, motum illum intestinum in singulis sphaerulis reuera ita comparatum esse debere, ac si singula elementa in circulis maximis circa centrum reuoluerentur.

§. 8. Primo autem, cum materia aërea sit homogenea, omnes eius particulas inter se aequales concipere licet, quibus adeo initio celeritates aequales sint impressae, quibus ergo singulae, si essent solitariae, in plano vniformiter in directum ferrentur, in superficie autem sphaerica in circulis maximis essent progressurae; vnde si cuiusque celeritas fuerit $= c$ et r radius sphaerae, cuiusque vis centrifuga foret $= \frac{cc}{2gr}$, qua scilicet a centro sphaerae recedere conaretur; vbi g exprimit altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, siquidem celeritas per spatium vno minuto secundo percursum definiatur.

§. 9. Consideremus iam duas huiusmodi particulas A et B, secundum directiones A C et B C ita motas, vt in C conuenirent et collisionem paterentur, quippe sine qua corpusculum A descripturum esset spatium $C a = c$, alterum vero B C secundum directionem $C b$ celeritate eadem c. Iam vt videamus quamnam mutationem collisio sit productura, toti systemati, mente saltem, imprimamus celeritatem $= c$, secundum directionem b C, quo pacto corpusculum B in quiete sistetur in puncto C, corpusculum vero A, sumto $C B = C b = c$, motum habebit secundum diagonalem C D parallelogrammi C B D a, qua retro producta in d, collisio perinde peragetur, ac si Tab. IV. Fig. 1.

 cor-

corpufculum A motu d C in alterum corpusculum B, in C quiefcens, impingeret. Conftat autem, tum corpusculum A in C effe quieturum, alterum vero B celeritatem effe acquifiturum C D. Iam reftituatur motus mente impreffus celeritate C b. Hoc modo corpus prius A nunc motum acquiret C b, alterius vero B motus componetur ex motu C D et C b, vnde fi compleatur parallelogrammam C D a b, iftud corpus iam motum habebit C a. Vnde patet, motus vtriusque corporis per collifionem inter fe permutari, ita vt vtriusque motus ab altero continuetur. Hinc cum inter bina corpuscula nullum difcrimen intercedat, totus motus fe habebit ac fi vtrumque corpusculum motum infitum fine vlla mutatione profequeretur, vnde etiam vtriusque vis centrifuga nullam mutationem ob collifionem fubibit.

§. 10. Quod fi iam tales collifiones in infinitum multiplicentur, omnes motus nihilominus in circulis fphaerae maximis, at vero fucceffiue ab aliis aliisque corpusculis, peragentur; quamobrem omnes vires centrifugae directe a centro recedent, et quidem eadem quantitate $\frac{cc}{2gr}$.

§. 11. In motu ergo vorticofo, quem materiae aëris propriae, in fingulis fphaerulis memoratis, tribuimus, tuto affumere poffumus, omnes plane motus in circulis maximis peragi, atque fingulas particulas pari vi centrifuga a centro fphaerulae recedere conari; quamobrem omnes obiectiones, quae olim contra vortices Cartefianos funt motae, omnem vim amittunt. Neque tamen idcirco arbitror, illos Cartefii vortices admitti poffe; at vero illi vortices, per quos Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* olim attractionem vni-

vniuerſalem in mundo explicare eſt annifus, hinc ſummam vim acquirunt, ita vt omnes obiectiones contra factae quaſi ſponte euaneſcant.

§. 12. Contemplemur nunc ſphaerulam quamcunque, naturam aëris conſtituentem, cuius extrema cruſta aqua, ſeu materia vaporoſa conſtet, intra quam materia aëris propria motu ante deſcripto in gyrum agatur. Sumto igitur centro ſphaerulae in O, ſit $OR = r$ radius totius ſphaerulae, ſeu extimae eius ſuperficiei, ſitque RS craſſities cruſtae aqueae, ponaturque $OS = s$, ita vt craſſities cruſtae aqueae ſit $RS = r - s$; tum vero ſit ST craſſities cruſtae aëreae gyrantis, quae ergo, poſito $OT = t$, erit $= s - t$. Intimum autem huius ſphaerulae ſpatium, a centro O vsque ad T, repletum ſit aethere puro, grauitate deſtituto, a cuius ſcilicet agitatione materia aëris propria perpetuo ad motum cieatur, modo magis modo minus, pro gradu caloris ſeu frigoris. Tab. IV. Fig. 2.

§. 13. Hinc ergo, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$, erit volumen totius ſphaerulae $= \frac{4}{3}\pi r^3$; vnde patet, volumen cruſtae aqueae fore $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$, et volumen cruſtae aëreae $\frac{4}{3}\pi(s^3 - t^3)$; volumen denique aethereum erit $\frac{4}{3}\pi t^3$. Quod ſi iam denſitatem aquae vnitate deſignemus, erit maſſa cruſtae aqueae $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$. At ſi denſitatem materiae aëris propriae vocemus δ, erit eius maſſa $\frac{4}{3}\pi\delta(s^3 - t^3)$. Quare cum ipſe aether denſitate carere ſit cenſendus, erit tota maſſa in ſphaerula contenta $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3 + \delta s^3 - \delta t^3)$, quae ſcilicet ſimul exprimet pondus totius ſphaerulae, cuius radius

dius $= r$; vnde manifeſtum eſt, aetherem in medio contentum recte negligi poſſe.

§. 14. Hic autem ſtatim liquet, denſitatem δ non ex ſtatu aëris ordinarii, qui iam ob elaſticitatem plurimum eſt expanſus, aeſtimari debere. Cum enim aër, in ſpatio S T incluſus, omni elaſticitate deſtituatur, quandoquidem demum eius agitatione elaſticitas aëris naturalis producitur, iſte aër in noſtra ſphaerula contentus in eo ſtatu reperiri cenſendus eſt, ac ſi ad ſummum denſitatis gradum iam eſſet compreſſus. Phaenomena autem conſulentes deprehendimus, aërem naturalem in ſpatium quaſi octingenties minus comprimi poſſe, qui numerus reſpondet rationi inter denſitatem aëris et aquae; neque ergo errabimus, ſi denſitatem aëris, ad ſummum compreſſionis gradum reductum, denſitati aquae aequalem ſtatuamus, ita vt ſit $\delta = 1$. Probabile autem admodum videtur, aërem ad talem ſtatum reductum, ſimulque omni elaſticitate carentem, vix a natura aquae eſſe diſcrepaturum. Hinc igitur, poſito $\delta = 1$, maſſa atque etiam pondus noſtrae ſphaerulae erit $\frac{4}{3}\pi(r^3 - t^3)$ ſiue aequabitur ponderi maſſae aqueae idem volumen habentis.

§. 15. Inueſtigemus nunc totam vim centrifugam, quae ex motu gyratorio cruſtae aëreae S T oriri debet; quem in finem conſideremus punctum quoddam medium X, poſita eius diſtantia a centro $OX = x$, eiusque celeritate gyratoria $= c$, erit vis centrifuga in puncto $X = \frac{cc}{2gx}$. Hac ſcilicet vi elementum materiae in X conatur a centro O recedere, vnde in iſta cruſta aërea orietur ſtatus preſſionis a termino T ad S continuo creſcens.

§. 16.

§. 16. Constat autem, in fluidis statum pressionis commodissime exprimi posse per certam altitudinem, quam hic vocemus $= p$, qua designatur, pressionem fluidi aequalem esse ponderi cylindri, ex eadem materia constantis, et cuius altitudo sit $= p$. Pro nostro ergo casu designet p altitudinem columnae aqueae, cuius pondus aequetur pressioni in puncto X, dum scilicet in eandem basin premit. Hinc ergo, sumto elemento $Xx = dx$, ita vt pressio in x sit $p + dp$, euidens est, incrementum pressionis dp aequari debere vi centrifugae, qua elementum Xx a centro repellitur; vnde patet fore $dp = \frac{cc}{2gx} dx$, sicque integrando nanciscimur $p = \frac{cc}{2g} l x$, quod integrale ita determinari debet, vt sumto $x = t$ euanescat, ita vt pro puncto X pressio sit $p = \frac{cc}{2g} l \frac{x}{t}$. Quare promoto puncto X vsque ad S, pressio hoc loco erit $p = \frac{cc}{2g} l \frac{s}{t}$. Tanta scilicet pressione ista crusta aërea, simulque tota prorsus sphaerula, conabitur se expandere, ac reuera se expanderet, nisi vndequaque paribusque viribus comprimeretur.

§. 17. Quantumuis autem talis bullula siue expandatur siue comprimatur, in ea semper eadem quantitas materiae manet inclusa, quia neque materiae contentae exitus, neque nouae ingressus conceditur. Ponamus ergo quantitatem materiae inclusae aequari globulo aqueo, cuius radius $= a$, quandoquidem omnem calculum ad densitatem aquae reducimus. Hinc ergo quantitas materiae in hac bullula contentae erit $\frac{4}{3} \pi a^3$, quae cum partim ex crusta aquea partim ex aërea eiusdem cum aqua densitatis constet, ponamus massam aqueam esse $\frac{4}{3} \pi \lambda a^3$, ita vt quantitas materiae aëreae propriae sit $\frac{4}{3} \pi (1 - \lambda) a^3$: quantitas ergo aquae per aërem dispersae erit ad quantitatem aëris propriam, vt $\lambda : 1 - \lambda$.

§ 18. Supra autem inuenimus, volumen crustae aqueae esse $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3)$, vnde erit $r^3 - s^3 = \lambda a^3$. Deinde cum volumen materiae aëreae inuentum sit $\frac{4}{3}\pi^3(s^3 - t^3)$, erit $s^3 - t^3 = (1 - \lambda) a^3$. Hinc igitur tam s^3 quam t^3 per a^3 et r^3 definire poterimus: erit scilicet $s^3 = r^3 - \lambda a^3$ et $t^3 = r^3 - a^3$. Quare cum altitudinem pressioni debitam inuenerimus

$$p = \frac{cc}{2g} l \frac{s}{t} = \frac{cc}{6g} l \frac{s^3}{t^3}, \text{ erit nunc } p = \frac{cc}{6g} l \frac{r^3 - \lambda a^3}{r^3 - a^3}.$$

§. 19. Cum porro densitas reperiatur, si massa per volumen diuidatur, quia nostro casu massa est $\frac{4}{3}\pi a^3$, volumen autem $\frac{4}{3}\pi r^3$, erit densitas hoc loco $\frac{a^3}{r^3}$. Quod si ergo densitatem hanc designemus littera q, erit $q = \frac{a^3}{r^3}$, ideoque $r^3 = \frac{a^3}{q}$, qui valor in nostra formula substitutus praebet $p = \frac{cc}{6g} l \frac{1 - \lambda q}{1 - q}$; vbi, vt notauimus, q exprimit densitatem aëris, dum aquae densitas vnitate designatur, ideoque q semper erit fractio quam minima. In superficie scilicet Terrae erit quasi $q = \frac{1}{700}$, vel $q = \frac{1}{800}$.

§. 20. Cum igitur q sit fractio tam exigua, erit satis exacte

$$l(1 - \lambda q) = -\lambda q - \tfrac{1}{2}\lambda^2 q^2 - \tfrac{1}{3}\lambda^3 q^3 \text{ et}$$
$$l(1 - q) = -q - \tfrac{1}{2} q^2 - \tfrac{1}{3} q^3,$$

qui posterior logarithmus a priore subtractus relinquit

$$l \frac{1 - \lambda q}{1 - q} = (1 - \lambda) q + \tfrac{1}{2}(1 - \lambda^2) q^2 + \tfrac{1}{3}(1 - \lambda^3) q^3,$$

quocirca habebimus pro pressione p hanc formulam:

$$p = \frac{cc}{6g}\left((1 - \lambda) q + \tfrac{1}{2}(1 - \lambda^2) q^2 + \tfrac{1}{3}(1 - \lambda^3) q^3\right)$$

cuius

cuius feriei plerumque sufficiet primum terminum, vel ad summum bina priora accepisse.

§. 21. Iam igitur insignem relationem inter densitatem aëris q et altitudinem pressioni debitam p sumus adepti, cum sit

$$p = \frac{cc}{6g}\left((1-\lambda)q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)q^3\right),$$

vbi tam litterae p et q quam λ determinatos sortiuntur valores. Erit scilicet p altitudo Barometri aquei, pressionem Atmosphaerae aequilibrantem, cuius igitur pars circiter decima quarta dabit altitudinem Barometri mercurialis; tum vero erit q ad 1 vt densitas aëris ad densitatem aequae. Denique λ exprimit portionem vaporum aqueorum per Atmosphaeram dispersorum. His obseruatis solus primus terminus seriei pro p inuentae, $\frac{cc}{6g}(1-\lambda)q$, insigne phaenomenon iam nobis egregie explicat. Inde enim patet, quo plures vapores cum aëre sint permixti, quorum quantitas est vt λ, pressionem p esse debere tanto minorem, pro eadem scilicet aëris densitate q, atque haec explicatio, quam iam olim loco supra citato inueneram, notatu maxime digna est visa.

§. 22. Neque vero solus primus seriei terminus istam elasticitatis aëris diminutionem declarat, sed etiam omnes sequentes termini minores sunt quam si esset $\lambda = 0$, nullique vapores in aëre versarentur. Ceterum hic quoque notari oportet, etiam litteram c insignem variationem subire posse, pro rapiditate motus gyratorii in nostris sphaerulis vel bullulis, quae cum gradui caloris proportionalis

 nalis

nalis esse videatur, aucto vel diminuto calore etiam quantitas $c\,c$ vel increscet vel diminuetur.

§. 23. Quin etiam hinc ipsa celeritas c, qua materia aërea in bullulis gyratur, absolute determinari potest, pro data scilicet altitudine p et densitate q cum humiditate λ. Sumto enim primo tantum seriei termino, qui ad hoc institutum prorsus sufficit, erit $c\,c = \frac{6\,g}{1-\lambda}\,\frac{p}{q}$; vnde patet, hanc celeritatem directe proportionalem esse altitudini Barometri p, reciproce vero densitati aëris q; tum vero, auctam ob humiditatem λ, celeritatem c etiam augeri. Constat autem in pedibus Rhenanis esse $6\,g = 93\frac{3}{4}$. Istius igitur formulae radix quadrata dabit celeritatem gyrationis in paribus pedibus expressam: Indicabit enim numerum pedum, qui hac celeritate vno minuto secundo percurrerentur.

§. 24. Cum calor a celeritate procul dubio pendeat, indagemus istam celeritatem tam pro maximo calore, qui in aëre aperto obseruari solet, et qui in Thermometro *Delisliano* respondet quasi centum gradibus, quam pro summo frigore, quod respondet 200 gradibus in eodem Thermometro. Pro priore ergo casu, quia aër est rarissimus, sumamus $q = \frac{1}{1000}$, simulque ipsi p summam altitudinem tribuamus, quae est quasi 34 pedum in Barometro aqueo. Ipsam humiditatem vero hic penitus negligamus, vt sit $\lambda = 0$. Ex his iam valoribus colligitur

$$c\,c = 93,75 \times 34 \times 1000 = 3187500,$$

ideoque ipsa celeritas $c = 1790$ ped. quae ergo respondet 100 gradibus Thermometri *Delisliani*.

§. 25.

§. 25. Simili modo pro ſummo frigore 200 gradibus reſpondente, ſumamus denſitatem $q = \frac{1}{700}$, altitudinem vero Barometri etiam minimam accipiamus, ſcilicet $p = 31$ pedum, hincque colligitur

$$cc = 93,75 \times 31 \times 700 = 2034375,$$

ideoque $c = 1330$, quae ergo celeritas ducentis gradibus Thermometri *Delisliani* reſpondet, ita vt differentia inter has duas celeritates ſit 360 pedum. Hinc intelligitur, ſi plura huiusmodi experimenta inſtituantur, haud difficile fore pro ſingulis gradibus huius Thermometri reſpondentes celeritates aſſignare. Quo pacto iſtud Thermometrum ad multo maiorem perfectionis gradum euehetur.

§. 26. Eodem modo etiam reliqua inſtrumenta, quibus aëris indoles explorare ſolet, beneficio noſtrae formulae magis perfici poterunt. Quod quidem ad Barometrum attinet, id vix vlla emendatione indiget, ſi modo pro quouis caloris gradu ratio denſitatis mercurii habeatur; quo enim mercurius minorem habuerit denſitatem, quod fit in magno calore, tum altitudo barometrica ſecundum eandem rationem imminui debet, vt ad certam denſitatem fixam reuocetur. Summo autem frigore, quo Mercurius in ſpatium aliquanto minus contrahitur, ideoque eius denſitas augetur, ob hanc rationem altitudo Barometri obſeruata aliquantillum augeri debebit.

§. 27. Praecipuum autem inſtrumentum, quod ad Theoriam noſtram explorandam requiritur, eſt Manometrum, nunc quidem fere prorſus obſoletum, quo denſitas aëris indicatur, et cuius deſcriptio exſtat in *Wolſii*

 Elemen-

Elementis Mathescos Tomo II, vt et in *Mémoires de l'Académie Royale de Paris* 1705. Pro usu autem nostro optandum esset, vt gradibus arbitrariis in tali instrumento signatis adscriberentur numeri, indicantes, quoties densitas aëris minor sit quam densitas aquae, quam tanquam fixam spectare possumus, quippe cuius exiguae variationis, a maiore vel minore calore oriundae, ratio facile haberi poterit. Pluribus autem experimentis erit opus, antequam hoc instrumentum ad summum perfectionis gradum perducatur.

§. 28. Superest autem adhuc instrumentum, humiditati aëris dimetiendae aptum, quod Hygrometrum appellare solet. Plura huiusmodi instrumenta passim exstant descripta; verum valde dubitandum videtur, num veram aquae quantitatem, per aërem dispersam, declarent. Interim tamen plurimis etiam nouis experimentis opus erit, haec instrumenta ita instruere, vt quouis tempore verum valorem nostrae litterae λ, hoc est eam fractionem, quae indicet, quotam totius voluminis partem aqua seu humiditas in aëre occupet, doceat, a quo perfectionis gradu etiamnunc plurimum sumus remoti.

§. 29. Cum igitur in Thermometro *Delisliano* gradui 200, quo insigne frigus indicatur, respondeat celeritas 1430 pedum in minuto secundo, quia congelatio Mercurii adhuc maiorem gradum frigoris postulat, ei circiter respondebit celeritas 1200 ped. ita vt, nisi celeritas ista fuerit maior, Mercurius fluiditatem penitus amittat. Deinde cum gradui 100 respondeat celeritas 1790 pedum, quia terminus congelationis in gradum 150 cadit, cui

cui ergo respondebit celeritas 1610 ped., celeritate maiore opus erit, ad aquam in statu fluiditatis conseruandam.

§. 30. Quia porro gradus ebullitionis aquae in hoc Thermometro est 0, ei propemodum conueniet celeritas 2150 ped. vbi ergo aqua ebullire incipiet. Et quia in nostra formula altitudo Barometri potissimum ingreditur, hinc intelligere licet, cur, aucta aëris elasticitate, maior gradus ad ebullitionem aquae requiratur, et cur, minuta elasticitate, aqua etiam in minore gradu caloris ebullire queat, quemadmodum experimentis est comprobatum, cuius phaenomeni ergo caussa in nostra formula sine dubio erit quaerenda.

§. 31. Neque vero celeritas, ad quemuis caloris gradum aëri inducendum requisita, tantum ad aërem spectare est censenda, cuius scilicet minimae particulae tanta celeritate commoueri debent, sed etiam in omnibus plane corporibus perinde locum habere videtur. Omnes quoque naturae scrutatores in hoc conueniunt, quod caussa caloris in motu quodam pernicissimo minimarum particularum consistat. Quae ergo sententia non solum nostrae Theoriae maxime est conformis, sed etiam ipsam celeritatem, cuilibet gradui caloris conuenientem, assignare valemus. Quanquam autem haec celeritas maxime enormis videatur, tamen perpendendum est, in natura dari celeritates adhuc incomparabiliter maiores, cuiusmodi est celeritas radiorum lucis, in quibus cum caussa omnis caloris sit quaerenda, mirum non est, hinc tam insignem celeritatis gradum generari posse.

§. 32.

§. 32. Sed reuertamur ad nostram formulam supra inuentam et ad solum aërem proprie accommodatam, quae haec quatuor elementa: 1°) altitudinem pressioni debitam p; 2°) densitatem aëris q; 3°) gradum caloris, formula $\frac{cc}{6g}$ contentum et 4°) gradum humiditatis λ complectitur. Ex datis horum elementorum ternis quibusque quartum assignari potest; ita, si dentur densitas aëris q, gradus caloris $\frac{cc}{6g}$, cuius loco br. gr. scribamus b et gradus humiditatis λ, hinc altitudo, pressioni debita, p in genere ita exprimitur, vt sit $p = b\, l\, \frac{1-\lambda q}{1-q}$, quam pro faciliori calculo in hanc seriem resoluimus:

$$p = b((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3 + \text{etc.})$$

cuius applicatio iam satis est exposita.

§. 33. Ponamus nunc dari primo altitudinem pressioni debitam p, secundo densitatem aëris q, et tertio humiditatem λ, hinc gradus caloris $b = \frac{cc}{6g}$ ita definitur, vt sit $b = \frac{p}{l\, \frac{1-\lambda q}{1-q}}$, hincque, logarithmis per seriem expressis, erit

$$b = p : ((1-\lambda)\, q + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\, qq + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)\, q^3 + \text{etc.})$$

cuius seriei plerumque sufficit solum primum terminum cum secundo sumsisse.

§. 34. Sin autem detur altitudo pressioni debita p, mensura caloris b, ac tertio humiditas λ, inde ad densitatem q inueniendam recurrendum est ad exponentialia, cum sit $e^{\frac{p}{b}} = \frac{1-\lambda q}{1-q}$, vnde posito br. gr. $e^{\frac{p}{b}} = k$, erit $q = \frac{k-1}{k-\lambda}$,

et

et quia b plerumque plurimum excedit p, cum per seriem sit

$$k = 1 + \frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.}$$

erit

$$q = \left(\frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3} + \text{etc.}\right) : \left(1 - \lambda + \frac{p}{b} + \frac{pp}{2bb} + \frac{p^3}{6b^3}\ \text{etc.}\right)$$

§. 35. Denique si detur altitudo pressioni debita p, mensura caloris b, et densitas q, per formulam exponentialem $e^{\frac{p}{b}} = k = \frac{1-\lambda l}{1-l}$ humiditas λ ita determinetur, vt sit $\lambda = \frac{1-k(1-l)}{q}$, quae expressio hoc laborat defectu, vt minimus error, in elementis datis p, k et q commissus, enormes errores in valore λ producat.

§. 36. Imprimis autem nostra formula commodissime adhiberi potest ad Problema aërometricum maximi momenti resoluendum, quo quaeri solet, quanta vi opus sit ad aërem in spatium quantumuis minus coarctandum, cuius ergo solutionem hic subiungimus.

Problema.

Inuestigare, quanta vis requiratur, ad datum aëris volumen in spatium quantumuis minus comprimendum.

Solutio.

§. 37. Ponamus aërem comprimendum in tubo cylindrico contineri, cuius amplitudo sit $= ff$ et compressionem per emboli intrusionem produci; tum si altitudo, pressioni debita, fuerit $= p$, vis requisita aequabitur ponderi columne aqueae, cuius basis $= ff$ et altitudo $= p$, ita vt ista vis per massam aqueam expressa sit $= ffp$. Ponamus in statu naturali, vnde compressio inchoat, altitudinem pressioni debitam esse $= a$, densitatem vero aëris naturalem $= b$; at vero mensurae caloris cum humiditate, quoniam durante compressione nullam mutationem patiuntur, sint vt ante h et λ, ita vt sit $a = h\,l\,\frac{1-\lambda b}{1-b}$, siue proxime $a = (1-\lambda)\,\bar{b}\,h$.

§. 38. Ponamus nunc intrusione emboli istud aëris volumen iam in spatium n vicibus minus esse compressum, ita vt iam eius densitas sit $q = n\,b$, vnde quaeri debet altitudo pressioni debita p, huic densitati respondens, que ergo, loco q scribendo $n\,b$, erit $h\,l\,\frac{1-\lambda n b}{1-n b}$; vnde nisi compressio iam satis sit notabilis, satis exacte erit $p = h\,(1-\lambda)\,n\,b$. Hinc patet, pressionem p exacte proportionalem esse numero n, siue pressionem semper densitati esse proportionalem, nisi compressio iam sit vehementer magna.

§. 39. In maioribus autem compressionibus adhiberi etiam conueniet secundum seriei terminum, ita vt sit

$$p = h\left((1-\lambda)\,n\,b + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)\,n\,n\,b\,b\right),$$

cum initio fuisset $p = a$, quae ergo altitudo quanto iam sit maior, definiri debet ex hac formula:

$$\frac{p}{a} = n + \tfrac{1}{2}(1+\lambda)\,n\,n\,b;$$

vnde patet, vim comprimentem plusquam n vicibus esse maiorem, prorsus vti per experimenta est obseruatum.

§. 40.

§. 40. Sin autem compressio longe vlterius continuari concipiatur, recurrendum erit ad formulum logarithmicam $p = b\, l \frac{1 - \lambda n b}{1 - n b}$, quae, comparata cum pressione initiali $a = b\, l \frac{1 - \lambda b}{1 - b}$, dabit

$$\frac{p}{a} = l \frac{1 - \lambda n b}{1 - n b} : l \frac{1 - \lambda b}{1 - b}.$$

Quia autem posterior logarithmus est satis exacte $(1 - \lambda) b$, erit

$$\frac{p}{a} = \frac{1}{(1 - \lambda) b} \cdot l \frac{1 - \lambda u b}{1 - n b};$$

vnde patet, casu $n b = 1$ siue $n = \frac{1}{b}$, vim requisitam fieri infinitam.

§. 41. Quo haec clarius perspiciantur, ponamus pro statu initiali esse $b = \frac{1}{800}$, siue densitatem aëris ad aquae densitatem esse vt 1 ad 800, humiditatem autem λ penitus seponamus, eritque ergo a pressio Atmosphaerae naturalis, et quaeramus nunc, quotuplo maior pressio requiratur ad aëris volumen in spatium n vicibus minus coarctandum; tum igitur formula ante data nobis praebebit, $\frac{p}{a} = 800\, l \frac{800}{800 - n}$, vbi logarithmis vtendum erit hyperbolicis. Ita si aër in spatium quadringenties minus comprimatur, hoc est, si $n = 400$, fiet $\frac{p}{a} = 554$; scilicet vis, quae tantum esset quadringenties maior, non sufficit, sed requiritur vis 554 vicibus maior. Quodsi autem condensatio in spatium 700^{es} minus postulatur, vi opus erit 1663 vicibus maiore.

§. 42. Operae igitur pretium videtur, pro hac hypothesi $b = \frac{1}{800}$ et $\lambda = 0$ tabulam construere, indicantem, quotuplo maior fiat vis comprimens requisita ad aërem in ſpatium n cuplo minus redigendum. Sequens tabula igitur oſtendet pro ſingulis numeris n valorem formulae

$$\frac{p}{a} = 800\, l \frac{800}{800 - n},$$

vbi pro condenſationibus minoribus erit

$$\frac{p}{a} = n + \frac{1}{2} \frac{nn}{800} + \frac{1}{3} \frac{n^3}{800^2},$$

ita vt tantum logarithmis hyperbolicis indigeamus, quando numerus n vltra 100 aſſurgit.

n	$p : a$	n	$p : a$
1	1, 0006	125	135, 92
2	2, 0025	150	166, 11
3	3, 0056	175	197, 49
4	4, 0100	200	230, 14
5	5, 0157	225	264, 19
6	6, 0226	250	299, 75
7	7, 0308	275	336, 97
8	8, 0403	300	376, 00
9	9, 0510	350	460, 28
10	10. 063	400	554, 48
20	20, 254	450	661, 34
30	30, 577	500	784, 64
40	41, 035	550	930, 52
50	51, 630	600	1109, 0
60	62, 369	650	1339, 2
70	73, 254	700	1663, 5
80	84, 288	750	2218, 1
90	95, 477	800	infinit.
100	106, 82		

§. 43.

§. 43. Manifeſtum eſt vires, ad aërem comprimendum requiſitas, in hac tabula exhibitas, iam in ſe complecti preſſionem Atmoſphaerae; vnde ſi tantum vires actu adhibendae quaerantur, ſubtrahi debet inde illa preſſio, ſeu, quod eodem redit, ab omnibus his viribus ſubtrahi debet vis caſui $n = 1$ reſpondens. Praeterea ob humiditatem, quam hic neglеximus, omnes vires hic deſignatae aliquod incrementum nanciſcuntur; ſcilicet, ſi pro compreſſione n cupla vis fuerit $= n + \pi$, ob humiditatem λ iſta vis erit $n + (1 + \lambda)\pi$.

De variatione ſtatus aëris per vniuerſam Atmoſphaeram.

§. 44. Quae hactenus ſunt tradita ad aërem in certo loco exiſtentem reſtringuntur. Nunc autem videamus, qua lege ſtatus aëris per Atmoſphaeram ſiue aſcendendo ſiue deſcendendo immutetur. Hic igitur in certo Terrae loco A ſtatum aëris tanquam cognitum aſſumemus, hincque verticaliter aſcendendo inueſtigabimus, quomodo pro quauis altitudine $AZ = z$, ſtatus aëris ſe ſit habiturus; vbi evidens eſt, ſi ad interiora Terrae deſcendere velimus, altitudinem z tantum negatiuam eſſe accipiendam. Hic igitur ante omnia pro loco fixo A ſtatum aëris definiri oportet, ſiquidem pro quauis altitudine $AZ = z$ elementa calculi cum hoc loco comparari conueniat. Tab. IV. Fig. 3.

§. 45. Sit igitur primo altitudo Barometri aquei pro loco $A = a$, et pro loco $Z = p$; ſecundo denſitas aëris in A ſit $= b$, in Z vero $= q$; tertio ſit humiditas in $A = \lambda$, in Z vero $= \Phi$; quarto denique ponatur celeritas motus gyratorii in subsidium vocati pro loco A $= c$, pro Z vero $= u$. Tum vero pro loco A sit breuitatis gratia $\frac{cc}{6g} = b$, pro loco Z autem sit $\frac{uu}{6g} = v$; vbi notetur, quantitates b et v longitudinem plurium millium pedum designare, propterea quod celeritas c plerumque inter terminos 1400 et 1800 pedum continetur. Quia igitur valores litterae c iam ad gradus Thermometri relatos assumimus, pro praecipuis valoribus celeritatis c valores quantitatis b in sequenti tabula adiungamus, incipiendo a $c = 1200$ vsque ad $c = 2000$ per 50 ascendendo:

c	b	c	b
1200	15360	1650	29040
1250	16667	1700	30827
1300	18026	1750	32667
1350	19440	1800	34560
1400	20907	1850	36507
1450	22427	1900	38507
1500	24000	1950	40560
1550	25627	2000	42667
1600	27307		

§. 45. Quia densitas aëris ascendendo decrescit, euidens est, solum primum terminum seriei supra datae abunde sufficere; vnde statuere licebit $p = (1 - \Phi) v q$, quae formula etiam tuto adhiberi poterit, si in viscera terrae descendamus. Hinc igitur densitas in loco Z erit $q = \frac{p}{(1-\Phi) v}$, vnde si per elementum $Zz = dz$ vlterius ascendamus, pressio in z erit $p + dp$, quae autem minor erit

erit quam in Z ponduſculo aëris in interuallo Zz contenti, quod reperiemus, ſi elementum dz per denſitatem q multiplicemus, vnde fit $dp = -q\,dz$. Ergo, loco q ſubſtituto valore modo dato erit $dp = -\frac{p\,dz}{(1-\Phi)v}$, hincque $dz = -\frac{(1-\Phi)v\,dp}{p}$, quae aequatio, quia tam v quam Φ tanquam functiones altitudinis z ſunt ſpectandae, ita repraeſentari debet: $\frac{dz}{(1-\Phi)v} = -\frac{dp}{p}$, cuius integrale eſt

$$\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = C - l\,p\,,$$

quam conſtantem C ita definiri oportet, vt caſu $z = 0$, quo ſimul integrale $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v}$ euaneſcere debet, euadat $p = a$, vnde erit $C = l\,a$, ideoque $\int \frac{dz}{(1-\Phi)v} = l\,\frac{a}{p}$.

§. 46. Siniſtrum igitur membrum huius aequationis erit certa functio ipſius z, pendens a ratione, ſecundum quam tam calor quam humiditas aſcendendo ſiue creſcit ſiue decreſcit; membrum vero dextrum tantum altitudinem barometricam tam in A quam in Z inuoluit, cuius logarithmus hyperbolicus ſumi debet. Atque hic perinde eſt, ſiue altitudo Barometri aquei ſiue mercurialis in calculum introducatur, quia fractio $\frac{a}{p}$ inde non mutatur. Cum igitur ſit $l\,\frac{a}{p} = l\,a - l\,p$, valores horum logarithmorum hyperbolicorum pro ſingulis altitudinibus Barometri mercurialis, quae per digitos indicari ſolent, in ſequenti tabula ab altitudine 36 pollicum, ad quam certe infra Terram deſcendendo nunquam peruenietur, diminuendo per ſemipollices, exhibeamus:

Alt.

Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.	Alt. Bar.	Logar. hyperb.
36,0	3.583519	26,0	3,258097	16,0	2,772589
35.5	3,569533	25,5	3,238679	15,5	2,740840
35,0	3.555348	25,0	3,218876	15,0	2,708050
34,5	3,540960	24,5	3,198673	14.5	2,674149
34,0	3,526361	24,0	3,178054	14,0	2,639057
33,5	3,511545	23,5	3,157001	13,5	2,602690
33,0	3,496508	23,0	3,135494	13,0	2,564949
32,5	3,481240	22,5	3,113515	12,5	2,525729
32,0	3,465736	22,0	3,091042	12,0	2,484907
31,5	3,449988	21,5	3,068053	11,5	2,442347
31,0	3,433987	21,0	3,044522	11,0	2.397895
30,5	3,417727	20,5	3,020425	10,5	2,351375
30,0	3,401197	20,0	2,995732	10,0	2,302585
29,5	3,384390	19,5	2,970415	9,5	2,251292
29,0	3,367296	19,0	2,944439	9,0	2,197225
28,5	3,349904	18,5	2,917771	8,5	2,140066
28,0	3,332205	18,0	2,890372	8,0	2,079442
27,5	3,314186	17,5	2,862201	7,5	2,014903
27,0	3,295837	17,0	2,833213	7,0	1,945910
26,5	3,277145	16,5	2,803361	6,5	1,871802

Hic perinde eſt quanam digitorum menſura vti velimus, quia tantum ratio in computum ingreditur.

§. 47. Quod ſi tam calor quam humiditas per totam altitudinem z conſtans aſſumatur, vt ſit $v = b$ et $\Phi = \lambda$, aequatio noſtra integralis erit $\frac{z}{(1-\lambda)b} = l\,\frac{a}{p}$, vnde pro quauis altitudine barometrica altitudo $AZ = z$ innoteſcit,

tescit, cum sit $z = (1 - \lambda) b l \frac{a}{p}$. Viciſſim vero pro altitudine A Z data, poſito

$$e^{\frac{z}{(1-\lambda)b}} = y, \text{ erit } y = \frac{a}{p}, \text{ ideoque } p = \frac{a}{y}.$$

Quia autem haec fractio $\frac{z}{(1-\lambda)b}$ eſt plerumque quam minima, erit proxime

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{z}{(1-\lambda)b} + \frac{zz}{2(1-\lambda)^2 bb} - \text{etc.}$$

ideoque

$$p = a\left(1 - \frac{z}{(1-\lambda)b} + \frac{zz}{2(1-\lambda)^2 bb} - \frac{z^3}{6(1-\lambda)^3 b^3} + \text{etc.}\right)$$

§. 48. Hic autem caſus vix vsquam locum habebit: certum enim eſt, per Atmosphaeram aſcendendo, gradum caloris continuo diminui. Etſi autem ratio diminutionis maxime latet, tamen non multum a veritate aberrabimus, ſi valorem ipſius v hoc modo repraeſentemus: $v = \frac{b}{1 + \frac{z}{f}}$, ita vt in altitudine $z = f$ valor ipſius v ad dimidium redigatur; tum enim, cognita hac altitudine f, iſta formula vix a veritate aberrare poterit. Hanc ob rem ſumamus $v = \frac{bf}{f + z}$, humiditatem vero per totam altitudinem inuariatam ſpectemus, vt ſit $\Phi = \lambda$, quia plane non conſtat, quomodo variatio humiditatis in calculum introduci poſſet, cuius etiam effectus vix ſenſibilis eſſe poteſt, quia maximus valor ipſius λ nunquam $\frac{1}{30}$ ſuperare poſſe videtur.

§. 49. His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$\frac{1}{b(1-\lambda)} \int \frac{(f+z)\,dz}{f} = l\,\frac{a}{p},$$

vnde integratione instituta erit

$$\frac{1}{(1-\lambda)b}\left(z+\frac{zz}{2f}\right)=l\,\frac{a}{p},$$

ex qua aequatione, si modo constet altitudo f, vbi mensura caloris v ad dimidium redigitur, ad quamuis altitudinem z assignari poterit altitudo barometrica p.

§. 50. Hic autem occurrit quaestio maximi momenti, quomodo pro quauis altitudine Barometri, supra Terram ascendendo obseruata, inde ipsa eleuatio loci, siue altitudo $AZ=z$ definiri possit. Euidens autem est, talem conclusionem ex sola altitudine Barometri neutiquam deriuari posse, nisi simul innotescat quantitas illa f. Quod si autem insuper in Z obseruetur altitudo Thermometri, ex ea valor ipsius v concludi poterit, quandoquidem hic assumere licet, pro quolibet gradu Thermometri innotescere celeritatem motus gyratorii c, siue nostro casu u, vnde fit $v=\frac{uu}{6g}$. Inuento igitur vero valore ipsius v, ob $v=\frac{fb}{f+z}$, erit vicissim $f=\frac{vz}{b-v}$, qui valor in nostra postrema aequatione substitutus dabit hanc: $\frac{(b+v)z}{2(1-\lambda)bv}=l\,\frac{a}{p}$, consequenter habebimus $z=\frac{2(1-\lambda)bv}{b+v}\,l\,\frac{a}{p}$.

§. 51. Ope igitur huius formulae per solas obseruationes barometricas et thermometricas eleuatio cuiusque loci super horizontem assignari poterit, quae, cum sit $b=\frac{cc}{6g}$ et $v=\frac{uu}{6g}$, ita se habebit: $z=\frac{2(1-\lambda)buu}{cc+uu}\,l\,\frac{a}{p}$; vnde si Thermometrum iam sit instructum, vti supra monuimus, quaeuis altitudo satis facile assignari poterit ope obseruationum barometricarum et thermometricarum. Ac si pro z prodeat valor negatiuus, quod euenit quando $p>a$, inde profunditas infra superficiem Terrae patescet.

§. 52. Quia autem celeritatum *c* et *u* valores adhuc quandam incertitudinem inuoluunt, propterea quod obſeruationes multo accuratiores requirunt, quam quidem inſtituere licet, optandum eſſet, vt noſtra formula primum ad caſus tales, vbi eleuatio loci aliunde iam eſt cognita, applicetur; hinc enim facile accuratiores determinationes litterarum *c* et *u* concludi poterunt; hocque pacto ſimul conſtructio Thermometrorum ad maiorem perfectionis gradum perducetur. Qui autem indolem noſtrarum formularum omni ſtudio perpendere dignabitur, longe plura ad ſcientiam naturalem promouendam inde deriuare poterit.

DESCRIPTIO INSTRVMENTI AD DECLIVITATEM LOCORVM MENSVRANDAM APTI.

Auctore

P. INOCHODSOF.

In operationibus Geodeticis, circa communicationem Wolgae et Tanais explorandam inſtitutis, adhibuimus peculiare inſtrumentum, cuius ope non ſolum diſtantias horizontales omnium linearum pro baſi aſſumtarum, ſed etiam earum decliuitates, vt eleuationem vnius extremitatis ratione alterius notam haberemus, atque ſectiones aluei Camyſchenkae cum ſucceſſu menſurauimus. Succinctam huius inſtrumenti deſcriptionem, ob ſingularem eius ſtructuram, et praeſertim quum iſtud in nonnullis caſibus libellationi fluuii Newae propediem ſuſcipiendae inſeruire poteſt, non ingratam fore confidimus.

Tab. V. Fig. I. Adpoſita figura repraeſentat hoc inſtrumentum: A C B eſt aſſis ex ligno duro et probe exſiccato parata, cuius craſſities ſeſquipolicem non excedit; longitudo vero cum cruribus ipſi ad angulos rectos ſubnexis aliquantum excurrit pedes Londinenſes decem. Altitudo crurum A F,

B D,

B D, ab inferiori aſſis parte duorum pedum; extremitatibus eorum affixi ſunt coni ex orichalco tornati, quorum cuſpides decem pedes exacte diſtant. Prope conorum vertices prominent orbiculi, determinaturi quousque crura terrae defigenda ſint; quod in qualibet inſtrumenti collocatione probe aduertendum: ſin autem occurrat ſolum durum, cuſpides ſolummodo ponendi, et bene notetur veſtigium cruris anterioris, vt ſequens in eodem puncto locetur. Poſſunt etiam hi coni ad dictam normam ex ferro parari viliori pretio. Aſſis et crura, ne mutationem a humore ſubeant, pigmento tinguntur.

F G H ſemicirculus orichalceus aſſi affixus, atque in gradus integros et dimidios diuiſus, quibus ad vitandam angulorum confuſionem numeri ſerie interrupta adſcripti.

K M N regula orichalcea, facile mobilis ſupra axem chalybeum bene poſitum, et centro ſemicirculi inſertum, cui illa, ne decidat, peculiari cochlea M adnectitur. Pars regulae ſuperior geſtat Nonnium, cuius beneficio ſingula minuta prima aeſtimari poſſunt. Vt ambae diuiſiones circuli ac Nonnii propius ad ſe inuicem accedant, pars haec aliquantum reclinata. Inferiori vero extremitati adplicatum eſt pondus X, regulam in ſitu verticali ſemper tenens: conſtat illud duobus globis iunctis, quorum poſticus mouetur in canaliculo ſemicirculari excauato; atque ope cochleae *r*, per adnexas regulae laminas tranſeuntis, promouetur vel remouetur, prout res exigit, vsque dum initium Nonnii gradui 90mo, in ſitu

 inſtru-

instrumenti horizontali, exacte respondeat. Hoc modo alteratio ex quacunque caussa orta corrigenda est.

Collocato instrumento super solo decliui, regula ostendit gradus et minuta inclinationis; quam obseruationem maioris certitudinis gratia, excitata regula repetere licet.

Ante operationem ipsam sequens verificatio instituitur. Locatis principio cruribus D ad dextram et E ad sinistram, notetur decliuitas soli, deinde permutatis crurum locis instrumentum obuertatur et angulus inclinationis denuo obseruetur. Dimidium excessus vel defectus horum angulorum a duobus rectis indicat errorem, quo anguli obseruati minuendi vel augendi sunt. Potest etiam hic error, si placet, ope cochleae *r* tolli, vt supra notatum.

In mensurandis distantiis designatur funiculo linea recta, ad quam locatur et transportatur instrumentum, ita vt crus posterius veniat in locum anterioris.

Alterutrum extremum A vel B priorem occupare potest locum, modo vnum idemque ad finem vsque lineae praeeat. Duo homines illud transportant, et tertius obseruat, vt crura iusto modo ponantur, simulque capit decliuitatis angulos.

Tab. V. Fig. 2. Ex figura 2da liquet $D = L \cos. \Phi$, $E = L \sin. \Phi$; tum vero pro Φ sumitur hic $90° \pm \Phi$ et

$$\sin. (90° \pm \Phi) = \cos. \Phi; \quad \cos. (90° \pm \Phi) = \sin. \Phi.$$

Hinc

Hinc

$$D = L\,\text{ſin.}\,(90^\circ \pm \Phi) \text{ et } E = \pm L\,\text{coſ.}\,(90^\circ \mp \Phi).$$

Hoc eſt diſtantia horizontalis intra pedes inſtrumenti obtinebitur, ſi longitudo ipſius per coſinum anguli obſeruati multiplicetur, eſtque ſemper poſitiua; quantitas vero decliuitatis habebitur, ſi eadem longitudo in coſinum dicti anguli ducatur, et fit modo poſitiua modo negatiua, provt angulus acutus vel obtuſus ſit.

Quia longitudo inſtrumenti 10 pedum, diſtantiam horizontalem ſinus, et decliuitatis altitudinem coſinus angulorum obſeruatorum ex tabulis depromti indicabant, poſita prima illorum figura pro numero pedum integro.

Quod ſi extremum diſtantiae menſurandae integrum inſtrumentum non capiat, reſiduum ſeorſim dimetiendum erit: poſito crure anteriori in ipſa lineae extremitate A (fig. 3.), notetur intervallum $a a'$ et habebitur: Tab. V. Fig. 3.

$d = a\,a'$ ſin. inclin.

$e = a\,a'$ coſin. inclin.;

vbi prima cifra ſinus et coſinus pro parte pedis decima ſumenda eſt.

TVBI

TVBI ICONANTIDIPTICI
SIVE
DVPLICANTIS EMENDATIO.

Auctore
C. G. KRATZENSTEIN.

In transactionibus anglicanis clariff. *Ieaurat* nuper descripsit constructionem tubi optici, cuius binae imagines obiectorum sub regulari progressione tubi aut obiecti campum tubi ab vtroque latere simul intrant, sibi obuiam eunt, in axi coincidunt, deinde contrariis directionibus discedunt et demum simul in oppositis lateribus e campo tubi egrediuntur.

Eiusmodi tubum in obseruationibus astronomicis nocturnis, praesertim in itinere instituendis, diu exoptatum obseruatori commodum praestare posse quisque rerum peritus haud difficulter perspiciet. Quodsi enim eiusmodi tubus pro simplici in quadrante astronomico substituatur, aut in instrumento culminatorio adhibeatur, nec reticulo aut filo in foco obiectiui, nec illuminatione huius fili amplius opus erit; siquidem exacta vtriusque imaginis coniunctio indicat, obiectum haerere in axi prolongato tubi. Contactus limborum vtriusque imaginis inter

se,

ſe, (e. g. ſolaris) in congreſſu et digreſſu et tempus interceptum inter vtrumque contactum eadem momenta & obſeruationis requiſita ſuppeditat aſtronomo, quaſi is adpulſum vtriusque limbi ad ſitum reticuli obſeruaſſet. Valde autem incommoda eſt in obſeruationibus nocturnis filorum reticuli illuminatio. Non ſolum enim in vſu quadrantis vmbraculo vel alio munimento opus eſt, ne oculi ſimul colluſtrentur et ad conſpiciendas ſtellas inepti reddantur, ſed quoque ſocio plerumque opus eſt, illuminationis negotium peragente. In culminatorio quidem adparatus illuminationis paullo commodius ipſi tubo inſiſtere poteſt, ipſae tamen fixae primae magnitudinis prope horizontem obſeruandae coelo licet ſereno diſparent, quam primum filum reticuli illuminatur. De hoc impedimento iam olim conqueſtus eſt celeberr. *Monnier* in praefatione ad hiſtoriam coeleſtem pag. 23. Haud inutile negotium itaque me ſuſcipere confido, tentando, anne hanc tubi optici ſpeciem eousque perficere liceat, vt eadem aeque commode ac vulgaris tubus aſtronomicus inſtrumentis, fixarum obſeruationibus deſtinatis, adplicari queat.

Diſpoſitionem lentium in tubo iconantidiptico, quam clariſſ. *Ieaurat* in transactionibus anglicanis expoſuit, figura 4 ſiſtit. Scilicet lens obiectiua A in medio perforata zona ſua exteriori imaginem obiecti inuerſam in ſuo foco D depingit. Altera lens obiectiua minor *a* eiusdem obiecti imaginem inuerſam, ſed minorem, in ſuo foco B ſiſtit. Hanc imaginem erigit et per foramen lentis A in huius focum proiicit lens C, cuius focus parallelorum in Φ incidit. Eadem ſimul imaginem B imagini lentis A aequalem reddit. Vt huic intentioni ſatisfiat, clariſſ. Auctor

Tab IV. Fig 4.

tor sequentes commendat focorum et interuallorum proportiones: sit e. g. distantia foci lentis A 12 pedum $= 144''$; erunt distantiae focales lentium *a* et C $= 34''$; interualla *a* B $=$ *a* C $= 34''$; B C $= 42''$, 02; inde resultabit tota tubi longitudo *a* D $= 254'' = 21'$, $2''$. Ita quidem erecta imago in focum communem D proiecta $4\frac{1}{4}$ vicibus maior erit imagine prima B, et simul imagini inuersae eiusdem obiecti in eodem foco aequalis. Est enim *a* B : A D $=$ B C : C D.

Cum idem effectus multo compendiosiori et commodiori modo obtineri queat, mihi quidem videtur clar. inuentorem in hac dispositione aut primam suam ideam tantummodo exposuisse, aut magis perfectam huius tubi constructionem sibi reseruasse. In proposita enim lentium dispositione integer tubus duplo fere longior deuenit, quam subsidia optica id exigunt. Deinde e lente obiectiva maiori A media pars exscindenda est, vt radii imaginem erectam formantes illud foramen transire queant. Denique imaginis primae B augmentum maius est illo, quod conditiones instrumenti exposcunt; inde vero aberratio vltra necessitatem augetur.

Meum itaque negotium in perficiendo hoc tubo in eo versabitur, vt 1) eius longitudo non superet distantiam foci lentis obiectiuae principalis A; 2) Vt perforatione huius obiectiui non opus sit; 3) Vt augmentum imaginis B per lentem C erectae minimum sit, quod in-
Tab. IV. doles huius tubi admittit. 4) Ne lens G H (*fig.* 5.) ima-
Fig. 5 ginem inuersam Φ erigens radios luminis ab obiectiuo maiori M N ad imaginem inuersam D E missos intercipiat;

5) vt

5) vt tam inuerſa quam erecta obiecti imago in foco communi D E aequali propemodum claritate et magnitudine appareat; rigoroſa tamen vtriusque aequalitas non requiritur.

Vt ſingulis hiſce conditionibus ſimul ſatisfieri queat, primo loco ad datam tubi longitudinem augmentum diametri apparentis obiecti ipſi conueniens et apertura obiectiui minoris, quam illud augmentum expoſcit determinanda ſunt. Sint autem diſtantiae focales lentis obiectiuae maioris $MN = F$; (*fig.* 5.) minoris $AB = f$, lentis inuertentis $GH = \mathfrak{f}$, obiectiui compoſiti e lentibus MN et $AB = \Phi$, apertura lentis $MN = A$, lentis $AB = a$, lentis $GH = \alpha$, exceſſus foci huius lentis vltra focum $\Phi = e$, latitudo imaginis D E, quam campus tubi comprehendit $= c$, augmentum diametri apparentis $= m$, augmentum imaginis primae $\beta\Phi$ in foco communi D E, quod illam imagini inuerſae, quam lens M N ibidem depingit, aequalem reddit $= n$, ita, vt ſit $\Phi : F = 1 : n$. Quoniam in hoc tubo aberratio radiorum vtramque imaginem formantium paullo maior eſt ea, quam ſimplex obiectiuum producit, ſuadeo, vt augmentum datae longitudini tubi aut diſtantiae focali F in tabula hugeniana reſpondens ad dimidium reducatur, apertura vero longitudini reſpondens minori obiectiuo concedatur.

Datae itaque longitudini tubi F in digitis reſpondebit $a = 0,16\sqrt{F}$; diſtantia foci lentis ocularis

$$\omega = \tfrac{11}{5}a = 2,2\,a;\ m = \tfrac{F}{2,2\,a};\ c = \tfrac{1}{2}\omega = 1,1\,a.$$

Ita quidem minus augmentum tubi duplo maiori claritate

 obiecti

obiecti apparentis compensabitur et minor imaginis praecisio minus erit sensibilis.

Quia vero augmentum n imaginis primae in foco Φ depictae eo magis increscit, quo maior campus tubi eiusdem longitudinis desideratur, campus modo inuentus $c = 1, 1\, a$ in tubo quatuor pedum vltra duos Soles duasve Lunas complectens sine detrimento vtilitatis tubi et cum lucro praecisionis imaginis erectae ad eam amplitudinem reducitur, vt paullo plus, quam integrum Solem capiat. Cum enim telescopium huius indolis non nisi obseruationibus astronomicis inseruire possit, eiusmodi campus abunde sufficiet. Statuendo itaque latitudinem imaginum in foco communi vtriusque obiectiui D E $= c = \frac{F}{100}$, angulus campi complectetur $34', 22''$. Inde prodibunt diameter imaginis primae huic campo respondentis

$$\beta\Phi = \frac{\Phi}{100} = \frac{F}{100 . n},$$

diuergentia radiorum extremorum huius imaginis centrum obiectiui A B transeuntium in loco lentis G H $= \frac{AG}{100}$, cui apertura lentis G H $= \alpha$ saltem aequalis esse debet, immo praestat, eam illa paullo maiorem esse, vt lens G H omnes radios illam imaginem formantes excipere queat. Ex altera autem parte diameter lentis G H vna cum sua armilla non transgredi debet angulum A T B, ne radii ab obiectiuo maiori ad imaginem inuersam D E transeuntes ab illa intercipiantur. Huic requisito satisfiet faciendo G H vel $\alpha = \frac{c \cdot GT}{AT} = \frac{AG}{100}$. Est vero A T $= \frac{100\, a F}{100\, a + F}$. Quoniam interuallum Φ D vnitate maius esse debet augmento n imaginis $\beta\Phi$, erit

$$e + f = \frac{F - \Phi}{n + 1} = \frac{F - (F : n)}{n + 1}, \text{ adeoque}$$

A G

$$A G = \frac{F}{n} + \frac{F - (F:n)}{n+1} = \frac{2F}{n+1};$$

$$G T = \frac{100\,a\,F}{100\,a + F} - \frac{2F}{n+1}, \text{ et } G H = \frac{2F}{100.\,n+1} = \frac{a.GT}{AT};$$

vnde

$$\frac{2F.AT}{100\,a\,[AT - 2F:(n+1)]} = n + 1,$$

et denique $n = \frac{4F}{100\,a} + 1$. Inuento autem augmento n, ſingula reliqua quaeſita dabuntur. In tubo enim iconantidiptico, cuius longitudo vel obiectiui maioris diſtantia focalis data $= F$, erit

$$\Phi = \frac{F}{n};\ e = \frac{F - \Phi}{(n+1)^2};\ e + \mathfrak{f} = \frac{F - \Phi}{n+1};\ \mathfrak{f} = e\,n = \frac{n(F - \Phi)}{(n+1)^2};$$

$$G H = \alpha = \frac{2F}{100(n+1)};\ A G = \frac{2F}{n+1}.$$

Quia $e : \mathfrak{f} = e + \mathfrak{f} : D G$, erit diſtantia imaginis erectae in foco communi a lente $G H = D G = \frac{n}{n+1}.\,F - \Phi$. Vt eadem imago imagini inuerſae in foco communi aequalis ſit, neceſſe eſt, vt fiat $\Phi : F = e + \mathfrak{f} : D G$, adeoque

$$\frac{n}{n+1}.\,F - \Phi = \frac{F}{\Phi}.\,e + \mathfrak{f}.$$

Eſt vero

$$\frac{F}{\Phi} = n, \text{ et } e + \mathfrak{f} = \frac{F - \Phi}{n+1},$$

quibus ſubſtitutis pro $\frac{F}{\Phi}.\,e + \mathfrak{f}$ aequalitas vtriusque quantitatis eluceſcit. Conſtat itaque aequationes inuentas requiſitis huius tubi omnino ſatisfacere.

Ex inuenta diſtantia focali Φ obiectiui compoſiti e lentibus A B et M N diſtantia foci f lentis obiectiuae ſimplicis minoris A B nunc determinanda eſt, quae diſtantiam foci obiectiui maioris F ad diſtantiam Φ reducere valeat. Eſt vero ſecundum Dioptricae leges $\frac{F\,f}{F+f} = \Phi$, adeoque $f = \frac{F\,\Phi}{F - \Phi} = \frac{F}{n-1}$.

Vt denique ambae imagines in foco communi aequali

quali claritate gaudeant, apertura obiectiui maioris A tanta esse debet, vt eius zona, obiectiuum minus ambiens aream aperturae huius lentis aequalem complectatur. Erit itaque $AA = 2\,aa$, adeoque $A = a\sqrt{2} = 1,4\,a$. Quia vero armilla obiectiuum minus sustinens partem huius zonae tegit, eadem apertura pro varia crassitie huius armillae ad $1,5\,a$ vel $1,6\,a$ augeri poterit.

Licet apertura obiectiui maioris in nostro tubo maior sit ea, quam tubus hugenianus eiusdem longitudinis admittit, inde tamen confusionis imaginis sensibile augmentum non metuendum est. Erit enim illa in nostro tubo ad eam in tubo hugeniano vt $\frac{A}{2\omega} : \frac{a}{\omega} = 3 : 4$.

In gratiam eorum, qui praxin opticam exercent, distantias focales lentium et interualla earum in duobus eiusmodi tubis iconantidipticis hic adiungam, quorum alter tripedalis quadranti astronomico, alter 4 pedum instrumento culminatorio adplicari potest. Posita scilicet in primo distantia focali obiectiui maioris $F = 36''$, erit apertura eiusdem $A = 1'',5$; $n = 2\frac{1}{2}$; distantia foci obiectiui minoris $f = 24''$; apertura eiusdem $a = 0'',96$; distantia foci obiectiui compositi $\Phi = 14'',4$; lentis G H distantia foci $\mathfrak{f} = 5'',184$; interuallum $AG = 23'',04$; $e = 3'',456$; $e + \mathfrak{f} = 8'',64$; lentis G H apertura $\alpha = 0'',21$ ad $0'',25$; augmentum diametri apparentis $m = 17$; $\omega = 2'',11$.

In tubo meridiano sit $F = 48''$. Huic conueniunt $a = 1'',09$; $A = 1'',6$ vel $1'',7$; $n = 2\frac{3}{4}$; $f = 27'',43$; $\Phi = 17'',45$; $\mathfrak{f} = 5'',973$; $e = 2'',17$; $e + \mathfrak{f} = 8'',14$; $AG = 25'',596$; denique $GH = \alpha = 0'',26$ ad $0'',3$; et $\omega = 2'',4$.

Haud

Haud quidem me fugit, diſtantias focales in praxi ea praeciſione non obtineri poſſe, quam calculus indicat; ſed neque indoles huius tubi eam exigit, quia in vſu eius nihil intereſt, vtrum ambae imagines in foco ocularis exacte aequales ſint nec ne. Interuallum enim temporis, quod inter ambos contactus limborum Solis aut Lunae intercedit, nihilo minus praeciſe idem manet, et coincidentia centrorum forſan melius diiudicari poteſt, ſi vna imago paullo minor et obſcurior fuerit altera, ac ſi ambae praeciſe aequales fuerint. Multo magis vero eo reſpiciendum eſt, vt ambae imagines exacte in eodem loco vel in eadem diſtantia a lente oculari diſtincte formentur, ne parallaxis ſenſibilis oriatur. Hunc in finem lens G H eadem ratione ſuſtineatur et per exiguum interuallum mobilis reddatur, qua ſpeculum oculare in teleſcopio gregoriano fulcitur et mouetur. Deinde in foco lentis ocularis filum ſimplex ſericum ita firmetur, vt eius minimae aſperitates ſine oculi intenſione diſtincte conſpiciantur. Directo nunc tubo ad obiectum aliquod acutum valde remotum et tecto obiectiuo minori lens ocularis cum ſuo filo ad illam diſtantiam ab obiectiuo maiori conſtituatur et firmetur, in qua parallaxis imaginis filum contingentis plane euaneſcit. Aperiatur deinde obiectiuum minus, maius vero obtegatur, et examinetur, vtrum imago erecta limbo ſuo filum tangens ſimiliter parallaxi careat, nec ne; ſin minus, interuallum lentium A B et G H eovsque mutetur, donec illa euaneſcat. In hoc ſitu ſingulae lentes probe firmandae ſunt, ita tamen, vt axes earum ſimul in vnam lineam coincidant. Methodus, hanc axium coincidentiam obtinendi magis prolixa quam difficilis eſt, et eadem fere encheireſi

resi absoluitur, quam clar. *Passement* in practica compositione telescopii gregoriani descripsit.

Qui aberrationem radiorum ex figura lentium sphaerica oriundam proportionibus radiorum conuexitatis lentium inter se aliquatenus imminuere student, lentibus obiectiuis tribuant radios in ratione 1 ad 6 vel 7 vel 8, et magis conuexam faciem obiecto obuertant. Lentis G H radii conuexitatum sint in ratione 1 ad 2 vel 3, et planior facies imagini β Φ exponatur. Aliqui quidem opticorum arbitrantur, aberrationem figurae sphaericae debitam respectu confusionis multo maioris e diuersa radiorum refrangibilitate oriundae plane negligi posse. Sed experientia me docuit, aberrationem debitam figurae lentium sphaericae in ipsis tubis achromaticis, in quibus radii conuexitatis et concauitatis debitam proportionem in lente obiectiua composita non habebant, obiecta conspicua molesta nebula obfuscare.

Cum nostro aeuo methodus innotuerit, quomodo sola encheiresi in laeuigando et poliendo adhibita speculis et lentibus figura parabolica, hyperbolica et elliptica induci queat, operae pretium foret, vt geometriae sublimioris periti opticae practicos vberius instruerent, quodnam emolumentum in imaginibus obiectorum perfectius depingendis a qualibet sectione conica lentibus inducta expectandum sit. Quas enim Cartesius olim eiusmodi lentium qualitates exposuit, nouo examine indigere videntur, siquidem valde dubium est, idem de obiecto latiori radiante valere, quod de puncto radiante valet.

ANNO-

ANNOTATIO
IN
PRAECEDENTEM DISSERTATIONEM.

Auctore
I. EVLERO.

Huiusmodi tubus, idem obiectum ſimul tam ſitu erecto quam inuerſo repraeſentans, ſequenti modo facillime conſtrui poſſe videtur:

Eligatur pro lubitu tubus terreſtris ordinarius, quatuor lentibus pp, qq, rr, ss, inſtructus, cuius ſecunda imago erecta cadat in $g\eta$, vnde per lentem ocularem ss oculo in O collocato repraeſentetur. Sit huius lentis ocularis ss diſtantia focalis $= s$ et ratio multiplicationis, qua iſte tubus obiecta auget, ſit vt $m:1$. Vt iam tubus aſtronomicus per eandem lentem ocularem obiecta ſub aequali multiplicatione oſtendat, eius lentis obiectiuae diſtantia focalis debet eſſe $= ms$. Haec autem lens obiectiua in medio perforata ſit, tanto foramine, per quod prior tubus transmitti poſſit. Talis autem lens in medio foramen gerens haud difficulter parari poteſt. Tum igitur prior tubus terreſtris immittatur per foramen huius lentis obiecti- Tab. IV. Fig. 6.

uae, quae ſit Π Π. At vero interioris tubi portio inter binas poſtremas lentes $r\ r$ et $s\ s$ contenta penitus auffera-tur, vt etiam lens obiectiua Π Π imaginem ſuam inuerſam in ipſo loco $g\ \eta$ proiicere queat. Hoc igitur modo vtra-que imago per lentem ocularem $s\ s$ ab oculo in O con-ſtituto conſpicietur, eodem ſcilicet modo, ac ſi per vtrum-que tubum ſeorſim ſpectaretur.

PHYSICA.

DE VESICVLAE FELLEAE HVMANAE DVCTVSQVE HVMANI CYSTICI ET CHOLEDOCHI SVPERFICIEBVS INTERNIS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Si quis partes corporis humani inuestigare occipiat eo consilio, vt aliquid noui in iis detegat; huic neque minimas, mea quidem sententia, neque quae maxime intra alias absconditae sint, particulas adeundum erit. Nullus est ductus in corpore humano, nulla forte arteria vel vena, nulla sane cauitas vasis alicuius aut visceris tunicati, nullusque meatus, qui non ab aliis iam; immo etiam a multis, eodem ipsissimo consilio sit saepius apertus et minutissime perlustratus. Neque in minutioribus subtilioribusque particulis auri cumulos inuenire sperato, quae ipsae quippe eae imprimis sunt, quas omnium maxime ab aliis iam saepius saepiusque microscopiorum adminiculo examinatas esse putes. Si quid forte sperandum superest, in iis potius operam locandam esse partibus arbitror, quae quotidie quasi anatomicorum sub oculis versantur, quas manubus quotidie tractant, quae omnium primo, inciso vel aperto cadauere, etiam nolenti occurrunt, quas remouere celeriter, occulta vt inuestigent, magisque latentia, summo cum studio conantur. Ad eas enim, vtpote a Galeno iam vsque descriptas, delineatasque et examinatas, animum minus aduertunt.

Quicquid autem sit eorum, quae dixi, non plane inutilis tamen haec mea interioris structurae vesiculae felleae, ductuumque biliariorum inuestigatio fuit. Quam haud animo inueniendi tamen, sed solo eo consilio, susceperam, vt iconem mihi conficerem bonam, quam possem cum leonina et cum tigridis structura comparare, et singularia, quae in his posterioribus essent, tanto facilius percipere atque obseruare.

Plicas continuo reperi egregias in collo vesciculae, quae tamen non in singulis corporibus reperiuntur, et ob ipsam hanc causam procul dubio non satis descriptae iconibusue demonstratae esse videntur. Cysticus ductus plenus deinde est trabeculis et cellulis singulari structura, cuius rei anatomici, nescio quam ob causam, nullam, quantum scio, mentionem faciunt. Et ductus hepaticus, imprimis choledochus, conspersus est intus lacunis copiosissimis muciferis, de quibus haec pauca verba apud Hallerum reperio: esse, qui sibi persuadeant, se lacunas (in his ductibus) vidisse. Operae pretium igitur esse, duxi, de rebus tam dubiis, vel etiam ignotis, vt iconem, quam mihi proprium priuatumque in vsum comparaueram, vna cum illis, quae tigridis structuram repraesentant, publici iuris faciam, descriptionemque aliquam succinctam illi adiungam.

Vesi-

Vesiculâ igitur humanâ, secundum longitudinem incisa et aperta, bileque elota, pulchra eius superficies interna, villosa plerumque dicta, apparet, quam tunica efficit tenera, mollis et quasi pulposa, cuiusmodi omnes fere illae siue internae siue externae esse solent, quae teneram sericeam illam, siue villosam, naturam ostendunt. In ea praeter villos, (*) qui apparere videntur, dum vesicula sub aqua leniter motatur, rugulae imprimis, quibus vniuersa interna superficies ornata est, et pori quidam muciferi notabiles sunt.

Veluti in tigridis et in leonis vesicula, laxior membrana est interna et amplior exterioribus, iisque ea ratione applicata, vt rugulas vndique efficiat, multo quidem quam in leone et tigride leuiores minoresque et subtiliores, at simili fere modo tamen in reticulatam structuram dispositas. Tam tenues sunt rugulae, vt filum mediocre crassitie in plurimis sedibus vix excedant, tamque subtile reticulum, quod faciunt, vt areolae rugis inclusae, lenticulam rarius, saepe vix granulum papauerinum, recipiant. Imprimis in parte collo propiori, tum etiam in ipso fundo, et passim in ampliori vesiculae parte, tenerior eiusmodi, eoque pulchrior, reticulata structura obseruatur. Obscurior alibi est, idque eo magis quo maiores areolae sunt, quas rugae includunt. Nusquam tamen vel plane reticularis fabrica euanescit, vel in aliam rugarum dispositio-

(*) Veros villos, siue vasa solitaria nuda exserta in his tunicis non existere, Lieberkühnii praeparata docuerunt. Visum est tamen, receptum et inueteratum nomen retinere eo magis, cum oculis inermibus visae hae tunicae omnino sericeam eius modi faciem prae se ferant.

ſitionem abit, quemadmodum hoc in tigridis et in leonis veſicula contingit, vbi vndulatae paſſim rugae, paſſim circulares, vel alia ratione diſpoſitae, iuxta reticulatas inveniuntur.

Veris rugulis autem membranae internae laxioris totum hoc in humana cyſtide reticulum deberi, nec fibris illud propriis reticulatim ductis effici, vt ſententia eſſe videtur nonnullorum anatomicorum, magnae in leonina et in tigridis veſicula rugae facile demonſtrant, quae aeque ac plicae, dum membrana interna ab exterioribus membranis ſeparatur, eo ipſo deſtruuntur et euaneſcunt.

In iis reticuli areolis, haud tamen in ſingulis, ſed in paucis modo earum, pori muciferi inueniuntur, ſparſim per omnem ſuperficiem internam, ſed adeo rari, diſtributi, vt in vniuerſa veſiculae cauitate vix vltra viginti numerauerim. Minimi ſunt, ſetamque porcinam vix admittunt, et proprio adeo nomine meritoque pori vocantur. Interdum totam areolam ſuam occupant; ſaepius minorem eius tantummodo partem. Ab areolis ſimplicibus ipſis autem profunditate ſua facillime diſtinguuntur.

Mucum in his ſecerni, ſeu viſcidum aliquem liquorem, qui aptus ſit ad leniendum parietem veſiculae, et quo munere proinde vero folliculorum muciferorum hi pori fungantur, dubitari non poteſt, cum halitus arterioſus ipſe vel ſerum arterioſum exhalatum in caueis eiusmodi, quamuis paruis, collectum, ipſa mora neceſſario lentorem contrahat, quo ad defendendum parietem contra acredinem aptus euadit. Quare de omnibus etiam

in

in vniuerſum huius generis poris vel foraminulis caecis, maioribus minoribusue, quae in cauitatibus viſcerum vel meatuum et ductuum inueniuntur, affirmari poteſt, eſſe in iis hunc finem naturae, vt ſuperficies internae viſcerum aut meatuum iſtorum lubricentur et contra acorem defendantur ope liquidi alicuius ſpiſſiuſculi, quod neceſſario in his criptis aut poris generatur.

Quamuis plicae in veſicula fellea humana omnino notatae ſint ab Auctoribus; multa tamen incerta, dubioſa, imo et falſa, in deſcriptionibus eorum continentur. *Winslovus* (*) tunicam internam veſiculae *magnum numerum repraeſentare* afferit *plicarum reticularium.* Neque in humana vero vnquam, neque in ipſa leonis aut tigridis veſicula, plicae reticulares exſtiterunt, neque magnus numerus plicarum eſt, quo humana gauderet. Quae rugulae autem reticulares vniuerſam omnino ſuperficiem internam replent, quas Vir. Celeberrimus confudiſſe cum plicis videtur, hae adeo vsque a plicis differunt, vt qui vtrasque non diſtinguat, eum vix vnquam credas vidiſſe veſiculae exemplar, in quo plicae rite conformatae fuerint. Idem ſummus anatomicus paulo poſt (**) addit, dari plicas imprimis verſus collum veſiculae, vbi *longitudinales fierent.* Sed nusquam longitudinales neque in collo neque in corpore veſiculae, neque etiam in ductu cyſtico, reperiuntur. Deinde idem Auctor in ſequentibus (***) plicas omnino

(*) Expoſ. Anat. Tom. III. n. 295.
(**) Loc. cit.
(***) Ibo. 299.

nino a rugis diſtinguit, ponit autem rugas, vbi nullae dantur, et cui parti plicas attribuit, eam tamen eiusdem ſtructurae eſſe affirmat cum reliqua veſicula: *Collum veſiculae* inquit *eiusdem fere ſtructurae eſt quam reliqua pars veſiculae. Inſtructum eſt intus pluribus rugis reticularibus et plicis quibusdam.* Neque autem rugae in collo dantur nec plicae in reliqua veſiculae parte. *Hallerus* in primis lin. Phyſiol. §. 688. tum collo veſiculae tum ductui etiam cyſtico *rugas* adſcribit *molles quae a flexionibus colli et ductus intus producerentur in ſiccatoque folliculo aliquam valuulae ſpiralis ſpeciem referrent*; quae idea autem remotiſſima a vero et omnino falſa eſt, cum plicae colli minime a flexionibus eius pendeant, ſed ſola interna tunica duplicata efficiantur, conſtantesque maneant, etiamſi veſicula et ductus ab omni vinculo externo ſoluantur et extendantur. In Elementis ſuis (*) Vir olim perilluſtris ita ſcripſit: *Verſus ceruicem plicae longitudinem magis ſequuntur.* Neque quidquam praeter haec pauca verba de plicis veſiculae humanae in magno hoc opere reperio. Nunquam autem longitudinales plicas in humana veſicula vidi, nec credo, eas vnquam exſtitiſſe; cum Vir perill. haec verba allegata a *Winslowo* potius, cuius is ipſe locus, quem ſupra memoraui, in notis ad ea verba citatur, et a *Duvernejo*, mutuaſſe, quam propria experientia edoctus ſcripſiſſe videtur.

Sunt igitur verae plicae, diſtinctae a rugis, diſtinctaeque et independentes a flexionibus, quas collum veſiculae et ductus cyſticus progrediendo efficiunt. Hae ſolum

(*) Tom. VI. p. 527.

ſolum collum, ſeu partem, ductui cylindrico proximam, anguſtiorem veſiculae ad ſeptem quaſi linearum longitudinem vsque a principio ductus, occupant; nec quidquam iis ſimile in reliqua ampliori veſiculae parte obſeruatur. Transuerſim collocatae exiſtunt ad ductum veſiculae, et circulos quaſi integros in integra veſicula repraeſentare videntur; quae ſimplices ſcilicet plurimam partem et ſeparatae vna ab altera nihil aut compoſitionis aut reticulatae ſtructurae in ſe admittunt. In eo, cuius iconem trado, exemplare quinque eiusmodi plicas numeraui, nec facile eas hunc numerum in corpore humano excedere puto. Prima, quae ductui cyſtico proxima, minima eſt et ſimilis fere trabeculis illis transuerſalibus, quibus ductus ipſe occupatur; reliquae inde, prout cauitas colli veſiculae ſenſim amplior fit, latiores et maiores euadunt. Secunda et tertia in inciſa et aperta veſicula ſemilunares figura plicas referunt; circulares autem in integra eſſe videntur. Illa minor, haec maior eſt, vtraque ſimplex autem et integerrima. Idem de quarta dicendum, quae figura binis prioribus ſimilis, magnitudine tertiae aequalis eſt. Quintam autem, ſi tanquam vnam conſideraueris, compoſitam in hoc exemplare, et aliquo modo reticulatam, appellare poſſes. Conſtat enim ex quatuor minoribus plicis, irregulariter connexis, et cum praecedenti quarta quoque in parte ſiniſteriori cohaerentibus. Tota natura autem diuerſa eſt a rugis reticulatis, ampliorem veſiculae partem occupantibus, quas vt magnitudine et eminentia multum ſuperat, ita contra regularitate iis longe eſt poſtponenda. (*)

 Hae

(*) Loco harum plicarum in alio corpore non niſi vnicam reperi magnam

Hac plicae, vt monui, omnes ſola interna veſiculae tunica duplicata efficiuntur, laminis, quibus conſtant, duplicibus teneriori celluloſa coniunctis. Neque euaneſcunt, etiamſi ab omni celluloſa externa veſicula, imo ab inuolucro externo, quod ab hepate habet, liberatur. Eo mamagis ergo miratus ſum, cum in Elementis ſupra laudatis (Tom. VI. p. 527.) ſcriptum eſſe viderem, verbis quidem *Buffonianis*: etiam in leoninae et in tigridis veſiculis vti in felis, lyncis, pantherae et catopardi, plicas ingentes deſtructa celluloſa tela aboleri; quae ſane in leonis et tigridis veſiculis, quas examinaui, niſi veſicula ipſa deſtructa, ſolutisque a ſe inuicem tunicis ſingulis, multo etiam minus quam in humana, abolentur.

Plicae

---

gnam et latam plicam, ea ratione ad oſtium ductus cyſtici poſitam, vt vi quacunque, a parte veſiculae applicata, hoc oſtium perfecte clauderet. Compreſſeram digitis veſiculam eam, cum integra adhuc omnibus vinculis ſuis hepati adnata exiſteret. Intumuit capitulum, ſeu pars colli extrema, ex qua recuruata ductus oritur. Quo magis premebam, eo magis capitulum extendebatur; in ductu ipſo ne vmbra quidem intumeſcentiae aut motus alicuius percipi poterat Repetii experimentum idem, cum tunica ſua externa, quam a peritonaeo habet, veſicula exuta et ab hepate ſoluta eſſet. Euentus omnino idem fuit. Videntur ſequentia mihi inde deduci poſſe: 1) Portionem nonniſi valde exiguam bilis ſuis temporibus ex veſicula paullatim ſubrepere et mixtam cum bile hepatica in duodenum venire. 2) Hunc motum bilis minime preſſione veſiculae, a pleno ventriculo facta, ſed vi alia, excitari, quin ipſum id potius, ne quauis fieri poſſit aut concuſſione aut compreſſione abdominis, tantis a natura obſtaculis, plicis, flexionibus, trabeculis, et cellulis, eſſe proſpectum. Poros muciferos, ſuperius deſcriptos, in hac veſicula non reperi; lacunae vero choledochi ductus, quae deſcribentur, copioſae fuerunt.

Plicae caeterum, vti a rugis, ita et a valuulis, probe ſunt diſtinguendae; quamuis fabrica his et figura ſint ſaepe ſimillimae. *Plica* ſimplex tunicae internae vaſis, aut receptaculi alicuius, duplicatura eſt, quae intra cauitatem notabiliter eminet, et margine tenui, plerumque exciſo, terminatur; quae fluidum remorari quidem in ſuo progreſſu, at iter dirigere fluidi huius aut determinare nullo modo poteſt. *Ruga* minus eminet, nec margine acuto terminatur, ſed dorſo potius, ſeu facie connexa, cylindrica, in cauitatem ſpectat. *Valuula* duplicatura ſimilis plicarum eſt, cuiuscunque figurae, et ita diſpoſita, parietique adhaerens vaſis, in quo continetur, vt fluido, ex altera vaſis parte veniente, ad parietem applicetur, plenamque ſic tranſituro fluido viam concedat; veniente autem ex parte oppoſita extendatur, et viam occludat; eaque ratione fluidi iter dirigat. Hoc ſolo mechaniſmo et inde pendente vſu valuula ſe a plica diſtinguit.

Ab his veſiculae plicis, quae collum modo tenent, et a rugis reticularibus, quae reliquam eius partem ampliorem occupant, ea luculenter differt ſtructura, quae in cyſtici ductus cauitate obſeruatur. Sunt fila craſſa et breuia, ſiue trabeculae, vt ſolent huius indolis particulae vocari, transuerſae, irregulares figura, triquetrae, quadrangulae vel teretes, quibus in eo ſane, cuius iconem trado, exemplo totus breuis ductus cyſticus quaſi repletus eſſe videtur. Sunt latiores aliae craſſioresque, aliae tenuiores; nonnullae ſimplices ſunt, pleraeque autem compoſitae et quaſi ramificatae. Extremis plerumque latioribus parietibus ductus adhaerent; in media ſui parte tenuiores exiſtunt. Pleraeque transuerſae ſunt et ab vno ductus pariete recta in op-positum transeunt; vna tamen vel duae possunt longitudinales censeri. Fabrica harum trabecularum cellulosa tela est, tenui interna membrana ductus inuestita.

Vti ad nouem vel decem vsque harum trabecularum transuersalium in toto cystico ductu, cuius longitudo pollicem haud multo superat, numerantur; in totidem quoque folliculos seu cellulas, cauitas ductus his trabibus quasi distinguitur. Hae, vt septula ipsa, variae figurae sunt et magnitudinis, profundae tamen omnes et anfractuosae. Interstitiis variis aut osculis foraminibusque, saepe exiguis, inter se comunicant, et bilis lento gradu in iis promoueri, nec raro retineri, aut diutius comorari, videtur, vt in folliculis vesiculae tigridis et leonis, quibuscum hae ductus cystici cellulae aliquam analogiam habere videntur. In fundis harum cellularum pori muciferi quoque passim obseruantur. Ex ipsa autem tam trabium quam cellularum, vel in primo exemplo, conformatione facile patet, fieri non posse, quin figura, magnitudine et numero in variis corporibus variae quoque inueniantur. (*)

Haud magis haec cystici ductus structura interna, quam illa vesiculae felleae, recte obseruata et intellecta esse vide-

(*) In proximo, in quo hanc structuram inquisiui, corpore, vltra viginti harum trabecularum reperi. quibus tota ductus cauitas repleta erat. Tenuiores erant trabeculae sed figura situ fabrica et natura eadem. Transuersae ab vno ductus pariete ad alterum extendebantur, totumque ductum quasi cauernosum intus efficiebant; vt facile pateret, non nisi lentissimo gradu et reptando, sensim bilem ex vesicula ad ductum choledochum venire posse. Cauendum autem est, ne ductus longitudinaliter incisus ilico nimis extendatur et trabeculae ea ratione rumpantur.

videtur. Quam fabricam eius *in vniuerſum eandem eſſe* ſcribit beatus *Hallerus* (*) quam *veſiculae*, eam manifeſto quidem de tunicis huius ductus, non de interna ſuperficie, Vir ſummus intellexit. Addit enim, membranas eum habere easdem cum aliqua non manifeſtiſſima irritabilitate. Verum in proxime ſequentibus nullum dubium eſt, quin ipſam cauitatis et ſuperficiei internae naturam indigitauerit. Tumque rugas ductui attribuit intus, quae a vinculis externis, ductum varie flexum retinentibus, in eius cauitate producerentur. *Qua vinculis*, inquit, *cellulosis extus in ſulcos colligitur, ibi intus rugae tunicae villoſae et nerueae eminent, quae poſſint aliquam ſpiralis fabricae imaginem referre, valuulaeque nomen ferre.* Notaui in ſuperioribus, non rugas eſſe, ſed fila craſſa transuerſa, ſiue trabeculas, ex altero pariete recta in alterum tranſeuntes, parietibusque firmiter affixas. Addit deinde Vir Perilluſtris haec verba de rugis illis ductus cyſtici: *vt tamen molles alternae transuerſae aut obliquae plicae ſingulares deorſum, ſiue ad inteſtinum, concauae ſint, neque tamen iter bilis valde morentur, etſi videntur morari*: Nullum dubium autem eſt, quin, quam deſcripſi, folliculoſa ductus ſtructura valdopere bilis iter moretur. Caeterum plicas cum rugis in his deſcriptionibus confundi facile patet, imo confuſas eſſe cum valuulis, ſequentia verba docent, quibus, de iisdem ſemper rugis ductus cyſtici loquendo, ſic Auctor pergit: *Prima valuula maxima eſt, et ſaepe pene totum oſtium veſiculae claudit, reliquae ex ordine minores.*

Non

(*) Element. Phyſ. Tom. VI. p. 530.

Non immorabor extricandis inutiliter litibus priorum anatomicorum, quorum alii valuulas vesiculae aut ductui attribuerunt cystico, quae nullae neque in ductu neque in ipsa leonis aut tigridis, nedum in humana, vesicula dantur; alii perperam, valuulas negando, omnem propterea peculiarem structuram internam vesiculae et ductui negandam esse arbitrati sunt.

Nec certius tamen constitit de lacunis ductuum hepatici et choledochi. *Sequitur tunc neruea tunica*, inquit Hallerus (*), *cum villosa superinducta, ex intestino continuata vtraque, haec eleganter reticulata, iugis teneris, vario ductu intricatis, et interceptis scrobibus fossulisque, in quibus sunt, qui cryptas se vidisse persuadeantur.* Atque haec sunt, quae de his cryptis siue lacunis in ductibus hepatico et choledocho Vir olim Perillustris monuit, vnde patet, eum ipsum de existentia harum lacunarum persuasum non fuisse. Se vidisse aiunt imprimis Duverney et Malpighi. Negat contra eas Bertrandi.

Nullum sane dubium est, quin tunica interna choledochi ductus originem trahat a villosa intestinorum, vel tamen continua ab ea ducatur per totum biliferorum meatuum systema. Non sequitur perinde, vt eandem propterea naturam retineat. Velut aliter cutis comparata est corporis externa, aliter villosa intestinorum, quae tamen manifesto ex illa continuatur, rursusque in eam abit; velut adnata oculorum, corneae addita, vehementer a cute eadem differt, cui illa similiter continua est; sic aeque tunica

(*) Elem. Physiol. Tom. VI. p. 507.

nica interna choledochi et ductus hepatici diuersa est a villosa intestinorum. Nullum indicium villorum in meis quidem exemplaribus reperi. Tunica vbique laeuis est in homine aeque ac in leone et in tigride. Neque reticulatam structuram in his ductibus vidi, nisi in primo choledochi ab intestino initio, et in ea eius parte, quae inter tunicas intestini continetur.

In ea reticulum conspicitur, imprimis in ipso ductus in intestinum introitu, quod teneritate et elegantia structurae multum etiam illud superat, quo vesicula intus ornatur. Inde deorsum ad ostium vsque, quo ductus pancreaticus in choledochum inseritur, et porro vsque ad aperturam huius in intestinum, fabrica reticularis paulo obscurior est. Super eam sedem autem, qua se sub intestini membranas ductus recipit, vsque ad ortum eius ex hepatico et cystico ductu, simplex et laeuis superficies est, superius quidem, et propius ductui cystico, striis longitudinalibus, leuiter impressis notata, inferius autem his aeque et rugis carens reticularibus.

Haec laeuis superficies ergo tota lacunis conspersa est muciferis. Copiosissimae istae et quasi congregatae existunt in media ductus parte, quae, striis et rugis vacua, laeuis plane et aequalis est, inde deorsum ad duodenum vsque, sed paulo rariores, occurrunt; rarissimae superius in parte striata inueniuntur.

Differunt hae lacunae aliquantum a poris illis, quibus vesicula instructa est. Paruae equidem et istae sunt, sed insinuant sese oblique, quin fere parallelae ad super-

 ficiem,

ficiem, ſub tenuem ductus tunicam internam, quae cauitatem lacunulae tegit, et tenero margine exciſo oſtium eius format. Saepeque ex oſtio ſulcus quaſi continuatur, in quo liquidum expreſſum defluere videtur. Atque in hoc ſitu et conformatione ſimiliores hae lacunulae illis ſunt, quae in viis vrinariis et in vagina muliebri inueniuntur. Pori veſiculae contra recta in ſuperficiem membranae internae deſcendunt et tanquam foraminula caeca profunda apparent.

Ductus hepaticus aliquam reticuli ſpeciem, ſed obſoleti, habet. Tenuiſſimae ſunt rugulae, quae illud efficiunt, areolaeque incluſae vix ſeminis papauerini granulum admittunt. Illae quidem ad latitudinem meatus ductae ſunt, hae figuram habent transuerſim oblongam. Imprimis tamen ad finem ductus inferiorem modo, vbi cum cyſtico ille coniungitur, haec ſubtilior, quaſi reticulata, ſtructura obſeruatur. Superius ſuperficies laeuis et aequalis eſt, vt in choledocho.

Lacunas quoque, nec raras, ductus hepaticus habet, imprimis in parte ſua ſuperiori, vbi laeuis et aequalis ſuperficies eſt. Hae ſatis ſimiles ſunt choledochi lacunis. Quae autem in inferiori ſubreticulata parte rariores occurrunt, ad poros potius, quales veſicula habet, quam ad illas lacunas referendae eſſe videntur. Atque hoc eo magis mihi notabile viſum eſt, cum etiam in ima choledochi parte, quae intra duodeni membranas continetur, quaeque ſimiliter reticulata eſt, mucifera organula reperiantur, quae pariter et rariora occurrunt et cum poris veſiculae ſtructura et ſitu conueniunt.

Haec

Haec ſunt, quae in internis veſiculae et ductuum biliferorum ſuperficiebus non ſatis notata et deſcripta fuiſſe credidi. Mirum autem videri oportet, vt tanta copia cryptarum muciferarum munitos eſſe videmus hepaticum ductum et choledochum, quos tamen bilis modo tranſit; tam ſparſos contra raroſque inueniri poros in ipſa veſicula fellea, in qua bilis colligitur, diutiusque moratur, et maiorem acredinem contrahit. Sed ratio ſapientis naturae haud plane latet. In vniuerſum minus ſenſibiles minusque irritabiles eſſe videntur tunicae villoſae, quam illae quae laeues aequales et tenſae ſunt, ſiquidem pariter vtraeque ex cute continuantur. Videnturque ipſi villi, ſeu particulae eminentes, quas nerui non ingrediuntur, aliquod munimentorum contra acredinem genus ſuppeditare. Quodſi nunc ipſe primarius naturae finis in fellea veſicula fuerit, vt bilis morando maiorem acredinem contrahat; ſi inutiliter illa et praeter neceſſitatem muco onerata fuiſſet leniente, ſibi ipſi naturam ſuoque fini contrariam fuiſſe facile vides. Villis igitur potius abſorbentibus ipſis et ad acredinem in bile procreandam et ad defendendam veſiculam contra eam acredinem in cyſtide, lacunis in ductibus vtebatur, quos bilem celerius tranſire oportebat.

Sed haec ad aliam nos porro ducunt ſpeculationem. Saepius, reticulata intus et villoſa membrana inueſtitos eſſe, ſcriptum eſt, hos ductus, choledochum et hepaticum; et pauci contra Auctores de lacunis loquuntur. An villis ergo et rugis in aliis natura vtitur corporibus, in aliis potius muco et lacunis? Conſentire videntur ea quae de variis ſedibus ductus choledochi et hepatici notaui, quae poris erant inſtructae rarioribus, vbicunque reticulata ſedes, copioſis contra lacunis, vbi lacuis erat. Si vera haec ſunt; ſi ſaepius ſimilia occurrunt exempla; duplices corporis humani ſtructurae dantur, et duplicibus ergo nobis ad eam repraeſentandam exemplaribus iconibusque opus erit.

Tab. VI.

Veſicula fellea humana, aperta, cum ductibus cyſtico, hepatico et choledocho, ſimiliter apertis.

A. B. C. Veſicula fellea. *A.* fundus. *A. B.* Corpus veſiculae *B. C.* Collum veſiculae. *C.* Capitulum, quod, compreſſa veſicula integra, bile turget et intumeſcit.

D. Ductus cyſticus, inciſus, et, quantum ſine laceratione fieri poteſt, apertus.

E. Ductus hepaticus apertus.

F. G. H. I. Rami eius, ex foſſa transuerſali hepatis exciſi.

F. Ramus transuerſalis dexterior, ex lobo hepatis dextro adueniens, (veſicula ſcilicet, quamuis ex carne hepatis euoluta, tamen in inferiori ſua ſuperficie, auerſa ab hepate, inciſa eſt.)

G. G. Duo rami transuerſales ſiniſtri, ex lobo hepatis ſiniſtro orti.

H. Ramus anterior, ab anteriori parte hepatis adductus.

I. Ramus poſterior apertus.

K. Ductus choledochus apertus.

L. Duodeni aperti pars, obiter expreſſa.

M. Du-

M. Ductus choledochus, vbi inter membranas inteſtini ſe inſinuat, anguſtior.

N. Eius pars inter membranas inteſtini contenta, ad internam huius ſuperficiem aperta.

O. Communis ductuum choledochi et pancreatici breviſſimus truncus, quo ſe in inteſtinum aperiunt, ſimiliter inciſus.

a. a. a. a. Rugae accidentales, vt fortuito in collabeſcente veſicula producuntur.

b. b. b. Villoſa, vt in his ſedibus rugatis imprimis ſuperficies interna apparet, dum veſicula ſub fluido aliquo ſubmerſa tenetur. Non ſunt tamen veri villi.

c. c. c. etc. Pori muciferi, qui non in omnibus veſiculis felleis reperiuntur.

d. d. d. Rugae reticulares conſtantes, quibus tota interna ſuperficies veſiculae ornatur. Manifeſtiſſimae, eoque pulchriores, in his ſedibus indicatis ſunt.

e. e. e. Rugae reticulares, vt paſſim occurrunt leuiores obſcurioresque, areolis incluſis maioribus.

f. Rugulae ſimiles areolis minoribus.

g. Rugulae lineares, quae in ſola hac ſede huius veſiculae reperiuntur.

h. i. k. l. m. Plicae colli veſiculae. *h.* Haec prima a ductu cyſtico, inter caeteras minima, poſſetque aliquomodo ad trabeculas ductus cyſtici referri. *i* Secunda, maior manifeſtiorque plica. *k.* Tertia et praecedente maior, omniumque latiſſima. *l.* Quarta.

ta. *m.* Quinta, quae ex pluribus minoribus composita est.

n. o. p. q. r. s. t. v. Trabeculae transuersae ductus cystici. *n.* Prima latior in extremitatibus suis diuisa, quo bilis eam penetrare potest. *o.* Secunda angustior. *p.* Tertia singularis figurae et fere obliqua. *q.* Quarta transuersa perforata. *r.* Quinta. *s.* Sexta. *t.* Septima. *v.* Octaua.

w. w. w. Cellulae inter trabeculas, quas bilis quaerit rependo et transeundo; vti et inter trabeculas et parietes ductus, anteriorem et posteriorem, penetrare potest.

x. Pori muciferi in fundis cellularum.

y. Orificium rami anterioris (*H.*) ductus hepatici.

z. Orificium commune ramorum (*G. G.* et *F.*)

1. Lacunae muciferae sparsae in ductu hepatico.

2. Lacunae similes in hac sede copiosiores.

3. Foraminula minima, potius poris vesiculae similia.

4. Sedes in ductu choledocho lacunis vacua, at striis longitudinalibus ornata.

5. Sedes in eadem lacunis confertissima. Hac manifesto differunt lacunae a poris visiculae, quod sursum margine acuto exciso terminantur, deorsum saepius quasi in sulcum se effundunt, deinde quod maiores sunt.

6. Lacunae in hac sede rariores.

7. Ru-

7. Rugulae reticulares in hac choledochi ductus parte, qua membranas intestini subit, quaeque poris et lacunis caret.

8. Rugae reticulares obsoletae in tota hac parte, qua inter tunicas intestini ductus choledochus continetur.

9. Orificium ductus choledochi dissectum, quo iste in eam partem ductus aperitur, quae quasi truncus communis est choledochi et pancreatici ductus.

10. Orificium ductus pancreatici.

11. Superficies interna trunci communis, obsolete reticulata.

ANATOME MVSCVLI SVBCVTANEI IN ERINACEO EVROPAEO LINN.

Auctore

BASILIO ZOUIEW.

Quo magis miramur ſingularem in Erinaceo naturam in globum ſe conuoluendi, eo magis videtur res, in qua facultas haec reſidet, attentionem noſtram mereri; attamen multi viri eruditi, qui animal hocce anatomice perquiſiuerunt, vel prorſus nullam, vel valde breuem Myologiae eius faciunt mentionem: inter recentiſſimos Comes de *Buffon* hiſtoriam ſuam de Erinaceo non alio niſi hoc ſingulari animalis inſtinctu ornauit, de quo tamen in Anatomia ne verbulum quidem dixit ſocius eius *Daubentonus.* Hinc non propter exiguum huncce defectum tantum quantum curioſae admirationi ſatisfacere volens muſculum ſubcutaneum deſcribere ſtatui; qui quum non ſoli huic ferae, ſed pluribus mammalium proprius eſt, hinc deſcriptio mea erit ſaltem exemplo faciendae in caeteris quoque obſeruationis.

Dicitur

Dicitur ſubcutaneus a ſitu, quod proxime ſub cute reperiatur, quamuis inter illum et corium adhucdum tenue ſtratum pinguedinis inueniri ſolet, tamen nil impedit, quin fibrae tenuiſſimis ſuis apicibus directe, praeſertim in dorſo, aut ope celluloſae, vbique cum interna cutis facie vniantur. Sublato corio ſpinoſo, abſumptaque ſuper carnes iacente adipe apparet muſculus a parte poſteriore rotundus, quaſi ſcutum repraeſentans, totum dorſum a nucha per brachia, coxas, ad caudaē baſin tegens, in medio tenuis, fere tranſparens, fibris longitudinalibus parallelis, transuerſalibusque exiguis; in circumferentia vero craſſus, laxus, ſuper latera effluens, fibris circularibus, continuis, contiguisque ad latera cum fibris rectis muſculi ſubcutanei ventralis.

Ex fibris ſub margine craſſo deliteſcentibus emittuntur faſciculi lataeque ſeries fibrarum ceu appendices ad diuerſas corporis partes tum pro ſui infixione, tum pro communicatione cum reliquo muſculo ſubcutaneo partem pronam inueſtiente. Illas, tametſi poſſent pro muſculis ſpecialibus reſpici, a punctis fixis in oſſibus ortis inque dorſalem ſcutiformem inſertis, habui tamen pro partibus eiusdem, quoniam in loco inſertionis nullum ſignum diſcontinuitatis fibrarum ad partes infra memorandas apparuit. Prima itaque fibrarum ſeries muſculi ſcutiformis ab interno eius margine ceruicem integente paululum lateraliter exorta dirigitur antrorſum per frontem ac latera capitis relicto in vertice nudo interſtitio, inſeriturque vno faſciculo in oſſa naſalia, reliquis vero fibris vel in muſculum orbicularem oculi, vel ſub orbita tranſeuntibus in conſtrictorem labiorum; inferiora autem verſus ex eodem loco per latera colli emittuntur

tuntur fibrae latiſſima ſerie circa humerum ſe flectentes ad pectus, vbi totam mediam ſterni longitudinem occupant ſibi pro inſertione; ſed ex ipſo ſterno ſurgunt quoque aliae fibrae, quae formantes tunicam collum anterius plenarie obtegentem tendunt tum oblique ad latera faciei poſtea cum fibris feriei ceruicalis ſe coniungentes, tum recta ad mentum totamque faciem capitis inferiorem ſe inſerentes cum reliquis vel in conſtrictorem labiorum, vel in marginem maxillae inferioris.

In lateribus relinquitur primo amplum foramen pro pedibus anterioribus, quorum ſub axilla in parua ab illa diſtantia fibrae ſubmarginales muſculi ſcutiformis coniunguntur cum fibris rectis muſculi ſubcutanei ventralis, ita vt vnum muſculum efficiant atque ſic deſcendant ad femora vsque, vbi iterum ſeparantur, dorſalesque concomitantur circularem ſuum marginem ad caudae baſin, circa quam illae rurſum ſecedunt vno faſciculo ſat lato deorſum ſe circa clunes inflectentes, confunduntur que ad ſcrotum cum fibris rectis muſculi ſubcutanei ventralis; altero vero anguſtiore adeunt caudam.

Quoad partem autem Erinacei pronam iam vidimus ſupra quomodo muſculus collum tegens ſe habeat, neque amplius reſtat memorandus, quam ventralis et pectorales, qui vltimi quanquam ad rem noſtram non pertinent, tamen quoniam directe poſt detractam pellem ſub aſpectum prodeunt et in eundem locum, in quem fere ventralis vtriusque lateris inſeritur, non poſſunt hic ſine aliqua mentione praetermitti. Naſcuntur enim directe ex eodem loco ſterni, vnde tunica muſcularis partem anteriorem

orem colli inuestiens oritur, transuersaliterque principio sub illa decurrentes, postea emergentes insiguntur in medium ossis brachii. Ex eodem ipso loco ab vtroque brachio venit series fibrarum primum non valde lata, sed vnitae simul circa apophysin ensiformem diffunduntur per totum ventrem musculum subcutaneum ventralem e fibris rectis constituentes, quae in lateribus cum fibris musculi scutiformis dorsalis iunctae, relicto prius pro libero motu pedum anteriorum spatio, glandulis axillaribus implendo, faciunt trunci quasi tunicam communem; quae iterum non prius finditur quam ad originem femorum, vbi fibrae laterales rectae secedunt quaedam posterius modo supra descripto, aliae anterius descendentes fere recta per inguines cum rectis ventralibus parallelae, et incuruantes se in semicirculum ad basin scroti inseruntur in fibras ad scrotum ab altero latere venientes; exteriores vero harum incuruatarum fibrae post insertionem in se fasciculi a dorsali per clunes venientis secedunt ibidem integro fasciculo, descenduntque ad caudae basin, in quam inseruntur.

Ex praemissa nunc musculi descriptione, factaque fibrarum muscularium directionis commemoratione iam fere neminem latebit, quem ille vsum et quo modo in animali praestet; appendices nimirum antrorsum in caput retrorsumque in caudam se inserentes, atque laterales contiguitates cum subcutaneo ventrali inseruiunt pro retentione musculi dorsalis scutiformis in suo situ per dorsum expanso, vt nempe in conuolutione animalis in globum ille extendatur in omnes partes corpusque totum obtegat; vel cum animal aculeos suos erigere dorsumque solum constringere vellet, ne musculus dorsalis cum fibris suis circularibus fluctuet, hae appendices retinent illum in debito ei situ. Tunicam subcollarem pro ratione originis atque insertionis suae patet inseruire tum pro capitis ad sternum adductione, tum pro musculi dorsalis quoque ad sternum fixatione. Musculus subcutaneus ventralis praeter quod iuuet pedum anteriorum per pectorales complicationem inflectit integrum corpus adducendo anum ad caput, applicatque simul ope seiunctorum fasciculorum caudam ad scrotum.

Explicatio Tabulae VII.

Fig. 1. Erinaceus a tergo repraesentatus.

a. Musculus subcutaneus dorsum obtegens.

b. b. Fasciculi ad ossa nasalia, tenuesque series fibrarum ad M. orbicularem oculi et maxillam inferiorem tendentes, vt melius patet in fig. 2.

c. c. Series fibrarum circa brachium ad pectus tendens.

d. d. Appendices circa clunes se flectentes.

e. e. Appendices pro cauda.

Fig. 2.

a. Tunica subcollaris.

b. b. Musculi pectorales.

c. c. Interstitia fibrarum longitudinalium pro pedibus anterioribus glandulisque subaxillaribus.

d. Musculus subcutaneus ventrem inuestiens.

e. e. Appendices a dorsali in ventralem venientes.

f. f. Appendices a ventrali in caudam se inserentes.

DE-

DESCRIPTIO PISCIS NON DESCRIPTI, QVI PERTINET AD GENVS SCARORVM FORSKALII.

Auctore

B. ZOUIEW.

Scarus graeca vox antiquiſſimis maris mediterranei accolis vſitata deſignabat piſcem ſaxatilem, ſquamoſum eſu delicioſiſſimum ſapidiſſimumque, hodie obſcurus refertur a Linnaeo in ſyſtemate ſuo ad Labros; ſed cum notae eius ſpecificae cum charactere generico *Linnaeano* minus conueniant, et genus ipſum Labri male determinatum inter affines ſuos ſparos, ſciaenas et percas vacillet, hinc varii auctores tentarunt ex hiſce quatuor generibus formare noua accuratius definita; Clariſſimus igitur *Gronovius* et poſt illum Celeberrimus noſter *Pallas* diſtincto huic veterum ſcarorum generi indiderunt nomen Callyodontis; *Kleinius* idem voluit intelligere ſub nomine *Sargi*; ſed Clariſſimus *Forskall* in itinere ſuo orientem verſus inſtituto obſeruans longe plures in natali eorum plaga, quam quot *Gronouio* fuerant noti, Callyodontes maluit potius vetus nomen inſigni ſuae Scarorum collectioni reſtituere et retinere. Ideoque hic noſter piſcis, quem deſcribendum mihi propoſui et e longo iam tempore in

 muſaeo

musaeo nostro asseruatus pertinet etiam ad scaros Forskalii, cui ne deficiat quoque specifica denominatio, ob porrectas eius antrorsum maxillas addo nomen maxillosi.

Scarus Maxillosus.

Forma et magnitudo Cyprini Carpionis.

Tab. V. Fig. 1.

	Poll.	Lin.
Longitudo totius - - -	11.	0.
Latitudo maxima sub pinnis pectoralibus -	3.	5.
—— pone nucham circa exordium pinnae dorsalis	3.	-
—— Apicis rostri per extrema labia -	-	9.
—— Mediae caudae inter pin. dors. desinentem et pinnam caudae - -	1.	3.
Crassities sub pinnis pectoralibus - -	1.	6.
—— Capitis per oculos - -	1.	3.
—— rostri ante oculos - -	-	$7\frac{1}{2}$.
—— mediae caudae - - -	-	9.
Pars prominens maxillae superioris ab extremo labio ad apicem - -	-	4.
—— —— maxillae inferioris - -	-	3.
Ab apice maxillae superioris ad rictum -	-	8.
A rictu ad nares posteriores - -	-	8.
A naribus posticis ad medium pupillae -	-	7.
A med. pupill. ad basin pin. dors. -	2.	
Longitud. pinn. dors. per basin - -	5.	2.
Altitudo eiusdem - - -	-	6.
Distantia a media pupilla ad exordium pinnae pectoralis - - -	1.	7.
Longit. eiusdem - - -	2.	2.
Longit. pinn. ventr. - - -	1.	7.

Lon-

	Poll.	Lin.
Longit. pinn. ani - - - -	2.	1.
Altitud. eiusdem - - - -	-	10.
Longit. laciniae pinnae caudae - -	2.	1.
Latitud. caudae per basin - -	1.	9.

Corpus cathetoplateum, ouato-oblongum, pingue, squamosum; squamis magnis, orbiculatis, rigidis, imbricatis, striatis, ciliatis; vittatum, vittis in spiritu obsoletis, perque solas maculas in medio squamarum restantes recognoscendis.

Caput proportionale, cathetoplateum, decliue, squamosum praeter frontem, genas, gulamque alepidotas; rostro subporrecto; maxillis ceu dentibus extra os prominulis, latis, conuexis, per medium fissis, margine acuto, subcrenulato, inferiore subeunte superiorem, cuius ad rictus labiorum vtrinque lateraliter extrorsum prominent apophyses subulatae, acutae, longitudine paulo extra labium.

Labia carnosa, ad marginem adtenuata, simplicia, ad rictus duplicata, interiora introrsum papillosa.

Nares geminae, superae, oculis proximiores, remotiusculae, anteriore minore subrotundo, posteriore maiore, semiorbiculato.

Oculi proportionales, superi, depressi, rotundi; membrana nictitante circulari semitecti; iridibus aureo-nitentibus, pupilla subglobosa.

Opercula branchialia duplicia, flexilia, ad marginem cute circumdata, arcuato-acuminata, libera, in media superficie squamis tecta; membrana branchialis quadriradiata.

Aper-

Apertura branchialis in latere, arcuata, ampla, tecta.

Gula, thorax, abdomen, dorſumque rotunda; lateribus planis, aequalibus.

Linea lateralis duplex; altera dorſo parallela ab aperturae branchialis angulo ſuperiore incipiens cumque pinna dorſi deſinens, altera ab hocce loco in medio latere inchoans, recta ad baſin caudae tendens.

Anus poſt aequilibrium.

Cauda carnoſa.

Pinna Dorſi ſolitaria, longitudinalis, continua, aequalis, coriaceo-radiata, radiis robuſtis numero 19. quorum nouem priores ſimplices, reliqui ramoſi.

Pinnae Pectorales ſub linea longitudinali, proportionales, acuminatae, radiis 14.

Pinnae Ventrales paulo poſt pinnas pectorales, vicinae, minimae, acutiuſculae, radiis robuſtioribus, numero 6.; ſquama inter illas lanceolata, a lateribus oblongo-acuminata.

Pinna Ani aequalis, ab ano per duas tertias partes caudae excurrens, radiis firmis 11. quorum duo ſolummodo anteriores ſimplices, reliqui ad apicem in ramos ſoluti.

Pinna Caudae ſubaequalis; laciniis acuminatis, radiis validiſſimis, ad baſin ſquamis ſtipatis.

Habitat in mari rubro, etiam mediterraneo.

ASTRO-

EXEMPLVM ELECTRICITATIS PRAETERNATVRALIS.

Auctore
N. OSERETSKOVSKY.

Quo rariora sunt phoenomena in corpore humano apparentia, eo diligentius a physicis obseruari atque indagari merentur; per ea enim cognitio corporis humani lucem atque augmentum nanciscitur. Nihil rarius est electricitate praeternaturali, quae in vnico tantummodo aegro nouissime est obseruata, cuius et origo et causa huc vsque physicos latet. Vnicum enim exemplum non sufficit, vt de re tam momentosa certi quid statui possit. Idcirco Celeberrimus *Gaubius*, qui historiam illius aegri, in publicis lectionibus, discipulis suis saepe narrare solebat, opinionem suam hac de re ita proponit: " Vtrum „ morbosa affectio etiam in homine ignem ciere electri-

„ cum poteſt, qui fulgurante ictu ſe ſe manifeſtet, cum „ corpora aliena contactum minantur? Symptomatis inauditi ſuſpicionem nouiſſimum quidem exemplum mouit, „ nec plura tamen deinceps confirmarunt" (*).

Non dubitaret omnino vir eruditiſſimus, id fieri poſſe per morbos, ſi compertum haberet, dari homines, qui etiam in ſtatu ſano, absque vllo morbo manifeſto, praeternaturali eiusmodi electricitati ſunt obnoxii. In vtroque enim ſtatu, tam morboſo quam ſano, phoenomenon hoc ex eodem profluere principio plus quam veriſimile eſt, vel ita ſaltem mihi videtur. Exemplum habeo eiusdem phoenomeni, quod tamen non in aegro, ſed in homine ſano eſt obſeruatum; de cuius veritate eo minus dubitare licet, quod homo ille, quem in exemplum propono, etiam nunc viuit, viuit et eundem ignem in corpore ſuo hactenus alit.

Eſt ille *Michael Puſchkin*, incola vrbis Tobolsk, qui ab anno 1775 in hunc vsque diem per ſe adeo eſt electricus, vt qui ipſum tangunt, ictu admodum ſenſibili exinde afficiantur. Neque opus eſt id experiri in ipſo eius corpore, ſed ſufficit tantummodo digito tangere ſericea eius tibialia, ſtatim ac ea de pedibus ſuis detraxit; parem tunc ictum accipiunt illi, qui experimentum hoc inſtituere tentant.

(*) Gaubii Inſtitution. Pathologiae §. 660.

tant. Primus, qui phoenomenon hoc in illo *Puſchkin* obſeruauit, fuit eius ſeruus, qui cum detrahere parabatur ſericea de pedibus domini ſui tibialia, admotis manibus illico ictum accepit, ſcintillam vidit, et repulſus attonitusque ab incepto deſtitit. Ex eo ipſo tempore cognouit *Puſchkin*, ſibi hoc praeter naturam eſſe, notumque id fecit in tota vrbe in qua habitat, litteras etiam ſcripſit ad illuſtrem Dominum *Meliſſino*, Vniuerſitatis Caeſareae Mosquenſis Curatorem, et, quid cum ipſo agatur, ei retulit. Nunc fere omnes incolae vrbis Tobolsk per experientiam norunt, dari in homine iſto ignem electricum, qui fulgurante ictu ſe manifeſtat, quam primum manus alius hominis vel quaecunque alia pars corporis ipſi admouetur.

Multifaria autem experimenta docuerunt, hominem iſtum non omni tempore nec ſub omnibus circumſtantiis tanta gaudere virtutis electricae copia, vt illa clare ſe manifeſtet, ſtatim ac quis tangere ipſum tentauerit. Si res ita ſe haberet, pateretur omnino bona eius valetudo, qua fruitur, neque ille tangi ſe a quocunque ſineret, cum attactus aliorum, certo tempore certisque ſub conditionibus, vel nunc etiam ſit ipſi dolorificus. Limitata ineſt ei virtus electrica, quae non niſi tempore hiemali ſe manifeſtat; aeſtate autem, licet omnes adfuerint requiſitae conditiones, nulla eius apparent indicia. Hieme etiam requiritur, vt laneum ille plantis pedum ſupponat pannum, et pellem, qua induitur, ſibi demat, quando aliis ſe electricum probare ſuſcipit. Cum enim pelle in-

 dutus

dutus ligneo insistit pauimento, inermis est adeo vt ab omnibus impune tangatur. Obseruatum quoque est, senes, quibus calor internus multum est imminutus, a contactu eius multo vehementius affici, quam iuuenes; et haec obseruatio tam vera tamque est constans, vt in genere statui possit, eos plus ignis electrici attrahere, qui minus caloris in se habent, et vice versa. Idem enim homo tum fortiorem tum debiliorem ictum accipit, prout magis vel minus excalefactus tangere ipsum adoritur; imo et plane nihil experitur, qui corpus suum nimio motu supra modum calefecit; ast idem ipse, quando quietus accedit, post contactum non impune recedit.

Vxor illius *Puschkin*, per commercium cum suo marito, eiusdem virtutis electricae facta est particeps. Norunt hoc matronae vrbis Tobolsk, cum quibus ei consuetudo intercedit. Accidit enim interdum, idque semper hieme, vt, quando simul conueniunt, et pro more feminarum oscula sibi mutuo figunt, illico repellantur ab ea ictu electrico, quo basia earum inuita persoluit.

Accepi historiam hanc a viris omni fide dignissimis, qui in ipsa siberia sunt nati, et hominem illum electricum in praesenti eius statu multoties viderunt, multaque pericula cum eo ipsi fecerunt. Sunt illi *Nicolaus Pochodiaschin*, *Iohannes Panaew et Alexander Pavlutsky*, omnes hic Petropoli notissimi, et mihi valde familiares, qui etiam retulerunt, memoratum illum *Puschkin* esse iam in in aetate ſatis provecta, nimirum quadraginta et quinque circiter annos natum, macilentum, tenuem atque procerum, ex nigro-fuſcum, colericum et in venerem propenſiſſimum; vitam nunc agere valde ſobriam, nihilominus in praeſenti iam ſtatu, ſub initium hiemis, ardenti laboraſſe febri, quam momentanei artuum ſuperiorum et inferiorum torpores ſatis diu praeceſſerant, eius que quaſi prodromi fuerunt.

En tota rariſſimi phoenomeni hiſtoria, quae attentionem eruditorum eo magis meretur, quod nuperrime illuſtris comes *de Caſſini* actis Academiae regiae ſcientiarum Pariſinae (*) ſimilem inſeruerit hiſtoriam de quodam Ruſſo, qui diuerſis vitae ſuae annis eandem habebat virtutem electricam, quam piſcis torpedo habet. Si eius hiſtoria, quae nondum ad nos peruenit, eadem eſt cum noſtra, tanto magis vtraque eſt vera; ſi vero ambae ſunt diuerſae, eo magis confirmant theoriam in diſſertatione de colore ſanguinis (**), quae iudicio huius Academiae proximos praemio honores tulit, pulcherrime propoſitam, quae his verbis comprehenditur: "Nerueum fluidum igneum eſſe perſuaſum habeo. Poterit, inſtar electrici, phlogiſto ſemidecompoſito, aliisque peregrinis, eſſe modifi-

 „catum.

(*) Hiſtoire de l'Acad Royale des Sciences pour l'année 1777. Voyez journal des ſavans au mois de Mai 1781.

(**) Diſſert. de igne, ſanguini prae chylo lacteque, eſſentiali, etc. §. XXIV. quae anno 1777. Petropoli eſt impreſſa.

„ catum. Non obſtat diffuſio per totum corpus, cum dif-
„ fundi videamus, in actione citius, praeſertim mentis.
„ Nec obſtant non videndi tubuli, cum tubulis non indi-
„ geat ſubtiliſſimum fluidum, per ſolida apta, et ſecun-
„ dum illa, mobile, arctiſſimae compagis interſtitia liber-
„ rime penetrans. Fauent theoriae citiſſimus effectus, in-
„ fluxus in ſanguinis craſin, digeſtionem, corporis robur
„ et, quas ab iis patitur, affectiones. Peccat modis non-
„ dum ſat perſpectis, probabiliter copia, motu."

ASTRO-

ASTRONOMICA.

THEORIA PARALLAXEOS,
AD
FIGVRAM TERRAE SPHAEROIDICAM
ACCOMMODATA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quo omnia, quae ad hoc arduum argumentum pertinent, clarius exponamus, atque ad praecepta calculi simplicissima reuocemus, ab ipso Parallaxeos fundamento vniuersam inuestigationem repeti conueniet. Sit igitur C centrum Terrae, in eiusque superficie vbicunque sit L locus observatoris, ideoque eius distantia a centro recta CL, quae ad coelum vsque producta dabit huius loci zenith Z. Sit porro in S sidus quodcunque, cuius distantia a centro Terrae CS, quod obseruator cernet in directione LS, ideoque ipsi a suo zenith Z angulo ZLS distare videbitur, dum ex ipso centro C sub angulo ZCS a zenith distare videretur. Quod si ergo ex L ipsi CS parallela $L\Sigma$ in coelum vsque ducatur, monstrabit punctum Σ locum sideris geocentricum, dum punctum S denotat eius Tab IX. Fig. 1.

locum apparentem; ſicque angulus S L Σ praebebit elongationem loci apparentis a loco geocentrico, ideoque ipſam Parallaxin. Cum igitur angulus S L Σ aequetur angulo C S L, reſolutio trianguli C L S ſuppeditabit veram relationem inter locum geocentricum et obſeruatum. Semper enim ſe habebit diſtantia ſideris a centro Terrae C S ad ſinum anguli Z L S, vt diſtantia obſeruatoris a centro Terrae C L ad ſinum Parallaxeos.

§. 2. Vt iam clarius intelligatur, quid de his elementis tenendum ſit in hypotheſi Terrae ſphaeroïdicae, ante omnia comparationem inſtituamus cum hypotheſi Terrae ſphaericae; vbi ſtatim recta C L aequabitur radio Terrae, ideoque vbique eandem quantitatem retinet. Tum vero punctum Z obſeruatori perpendiculariter imminet, quandoquidem recta C L ad ſuperficiem Terrae eſt normalis et cum directione grauitatis congruit; tum vero angulus obſeruatus S L Z erit elongatio ſideris a zenith, atque in hac hypotheſi ſemper erit diſtantia ſideris ad radium Terrae vti ſinus elongationis ad ſinum Parallaxeos.

§. 3. Quod ſi iam figurae Terrae ſphaeroïdicae rationem habeamus, primo quidem in ipſo ſideris loco nihil plane erit mutandum; at vero, quia locus obſeruatoris L non vbique Terrarum eandem a centro C tenet diſtantiam, pro quouis obſeruatoris loco hanc diſtantiam accurate aſſignari oportet. Deinde, quia haec diſtantia C L non vbique eſt normalis ad Terrae ſuperficiem, neque igitur cum directione grauitatis congruit, punctum Z non ſemper verticaliter imminebit loco obſeruatoris L, ſed a directione L Z modo magis modo minus declinare

poterit,

poterit, pro situ obseruatoris in superficie Terrae. Neque ergo angulus S L Z amplius erit elongatio sideris a vero coeli puncto verticali, quod obseruatoris loco imminet; neque propterea amplius erit complementum altitudinis supra horizontem, sub qua sidus conspicitur.

§. 4. Totum negotium igitur iam huc est perductum, vt pro quouis Terrae loco L, non solum eius vera distantia a centro, sed etiam declinatio verae lineae verticalis a zenith exacte determinetur. Tribuamus ergo Terrae eam figuram, quae ex obseruationibus exactissimis est conclusa, statuendo rationem axis Terrae ad diametrum aequatoris vt 200 ad 201; praeterea vero ipsam Terram tanquam Sphaeroïdes ellipticum consideremus, ortum ex reuolutione ellipsis circa axem. Principio quidem hanc inuestigationem generaliter incipiamus.

§ 5. Sit igitur C centrum Terrae, $CA = a$ semidiameter aequatoris et $CB = b$ semiaxis Terrae, atque A L B quadrans ellipticus, cuius conuersione circa axem B C Terrae figura oriatur, punctum vero L denotet locum quemcunque in Terrae superficie, vnde ad aequatorem A C perpendiculum demittamus L P. Iam ponamus pro hoc puncto L abscissam $CP = x$ et applicatam $PL = y$, sitque ipsa distantia $CL = \surd(xx + yy) = z$. Hinc ergo erit ex natura ellipsis $y = \frac{b}{a}\surd(aa - xx)$. Iam ducta ad curuam normali L N erit subnormalis Tab. IX. Fig. 2.

$$PN = -\frac{y\,dy}{dx} = \frac{bbx}{aa},$$

vnde fit interuallum $CN = \frac{(aa - bb)x}{aa}$, ac porro

$$zz = bb + \frac{(aa - bb)}{aa}xx.$$

 §. 6.

§. 6. At vero, quando in Aſtronomia locus Terrae pro cognito aſſumitur, eius eleuatio poli, ſiue latitudo in ſuperficie Terrae, tanquam cognita ſpectatur. Latitudo autem loci L ſemper aequalis eſt angulo A N L, quem directio grauitatis, quae ſemper in N L incidit, cum aequatore conſtituit. Vocemus ergo latitudinem loci L, ſiue angulum A N L $= \Phi$, atque ex eo omnia reliqua elementa figurae determinari debebunt. Cum igitur ſit

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{PL}{PN} = \frac{aay}{bbx}, \text{ erit tang.}\,\Phi = \frac{a}{bx}\sqrt{(aa - xx)},$$

vnde colligimus fore

$$x = \frac{aa\,\text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{(aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Hinc igitur porro erit

$$y = \frac{bb\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Ex his iam deducimus diſtantiam loci L a centro Terrae

$$CL = z = \sqrt{\frac{a^4\,\text{coſ.}\,a^2 + b^4\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2}},$$

id quod alterum eſt elementum, quo in calculo Parallaxeos indigemus.

§. 7. Quod iam ad alterum elementum, ſiue declinationem rectae L N ad L C attinet, vocemus iſtum angulum C L N $= \omega$, et in rectam L N productam ex C ducamus normalem C Q, tum quia ex valore pro x invento eſt interuallum

$$CN = \frac{(aa - bb)x}{aa} = \frac{(aa - bb)\,\text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{(aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}},$$

ob angulum C N Q $= \Phi$, erit hoc perpendiculum

$$CQ = \frac{(aa - bb)\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{(aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}},$$

hincque deducimus

ſin.

$$\sin.\,\omega = \frac{CQ}{CL} = \frac{(aa - bb)\sin.\Phi\cos.\Phi}{\sqrt{(a^4\cos.\Phi^2 + b^4\sin.\Phi^2)}},$$

vnde porro fiet

$$\cos.\,\omega = \frac{aa\cos.\Phi^2 + bb\sin.\Phi^2}{\sqrt{(a^4\cos.\Phi^2 + b^4\sin.\Phi^2)}},$$

consequenter

$$\tang.\,\omega = \frac{(aa - bb)\sin.\Phi\cos.\Phi}{aa\cos.\Phi^2 + bb\sin.\Phi^2}.$$

§. 8. Quia angulus $ANL = \Phi$ exprimit amplitudinem arcus AL, inuestigemus quoque curuaturam in ipso puncto L, siue radium osculi, quippe cui proportionales erunt gradus latitudinis in quolibet Meridiano ALB. Hunc in finem vocemus arcum $AL = s$, et constat radium osculi in L esse $= \frac{ds}{d\Phi}$; quare ad elementum ds inueniendum quaeramus differentialia dx et dy, quae repeiuntur:

$$dx = \frac{-aabb\,d\Phi\sin.\Phi}{(aa\cos.\Phi^2 + bb\sin.\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$dy = \frac{+aabb\,d\Phi\cos.\Phi}{(aa\cos.\Phi^2 + bb\sin.\Phi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde colligitur ipsum curuae elementum ds, siue ipse radius osculi

$$\frac{ds}{d\Phi} = \frac{aabb}{(aa\cos.\Phi^2 + bb\sin.\Phi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ex quo sequitur, in aequatore esse radium osculi $= \frac{bb}{a}$, sub ipso autem polo $= \frac{aa}{b}$.

§. 9. Transferamus nunc haec ad veram Terrae figuram, qua est $b : a = 200 : 201$, vnde sumto semiaxe

CB = 1 erit ſemidiameter aequatoris $a = 1 + \frac{1}{200}$, pro quo ſcribamus $a = 1 + \delta$, vbi δ tam exigua eſt fractio, vt eius poteſtates in calculo tuto negligi queant. Hinc ergo pro elemento priore reperiemus

$$CL = z\sqrt{\frac{(1+4\delta)\cos.\Phi^2 + \sin.\Phi^2}{(1+2\delta)\cos.\Phi^2 + \sin.\Phi^2}} = \sqrt{\frac{1+4\delta\cos.\Phi^2}{1+4\delta\cos.\Phi^2}},$$

ſiue proxime

$$z = \frac{1+2\delta\cos.\Phi^2}{1+\delta\cos.\Phi^2} = 1 + \delta\cos.\Phi^2,$$

qui valor adhuc commodius ita exprimitur:

$$CL = z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta\cos.2\Phi.$$

§. 10. Deinde habebimus

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{2\delta\sin.\Phi\cos.\Phi}{1+2\delta\cos.\Phi^2},$$

et quia poteſtates ipſius δ negligimus, erit ſimpliciter

$$\text{tang.}\,\omega = 2\delta\sin.\Phi\cos.\Phi = \delta\sin.2\Phi;$$

vnde cum ſit $\delta = \frac{1}{200}$, pro latitudine $\Phi = 45^\circ$ erit

$$\text{tang.}\,\omega = \tfrac{1}{200} = 0{,}0050000, \text{ ideoque } \omega = 17', 11''.$$

Denique radius oſculi in puncto L erit

$$\frac{1+2\delta}{(1+2\delta\cos.\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 + 2\delta\sin.\Phi^2 = 1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{2}\delta\cos.2\Phi.$$

Praeterea vero hinc patet, angulum ACL eſſe $= \Phi - \omega$, qui ergo angulus ſemper minor eſt quam elevatio poli, ab eaque deficit interuallo ω.

Tab. IX. Fig. 3. §. 11. Repraeſentemus haec elementa in figura ſphaerica ſolita, vbi AB referat horizontem, ſemicirculus AVB Meridianum loco obſeruatoris reſpondentem, in quo V ſit punctum verticale in coelo, quod ſimpliciter nomine

nomine verticis indicemus; tum vero P denotet Polum, ita vt arcus $BP = \Phi$. Nisi ergo polus P vel in B vel in V incidat, punctum, quod zenith vocamus, semper a vertice V discrepabit. Si enim in figura praecedente rectae C B, C L et N L vsque in coelum producantur, prima C B tendebit in polum P, secunda C L dabit punctum Z, quod est zenith, at tertia N L in coelo dabit verticem V. Vnde patet, haec tria puncta, P, V, Z in idem planum, scilicet in planum meridiani loci L incidere, atque zenith Z semper longius a Polo P distare quam verticem V, idque interuallo Z L V, quem angulum vocauimus ω. Quare a vertice V ad partem Polo oppositam capiamus interuallum $VZ = \omega$, eritque Z verum zenith loci propositi; vnde si sidus quodcunque obseruetur in puncto S, eius distantia apparens a zenith erit arcus Z S, in quo producto existet locus geocentricus eiusdem sideris Σ, sumto scilicet interuallo $S\Sigma$ aequali Parallaxi, quemadmodum ex prima figura est manifestum; vnde patet, respectu verticis V haec puncta S et Σ notabiliter discrepare a hypothesi Terrae sphaericae, hocque discrimen plurimum variare, tam pro variis loci altitudinibus, quam pro situ sideris S. Tab. IX. Fig. 2. Fig. 3.

§. 12. Nunc, quoniam effectus Parallaxeos $S\Sigma$ pendet vel ab arcu Z S vel ab arcu $Z\Sigma$, praemittamus duo Problemata, prouti vel arcus Z S, vel arcus $Z\Sigma$ fuerit datus; vnde oporteat ipsam Parallaxin $S\Sigma$ definire. In vtroque autem assumamus, praeter distantiam obseruatoris a centro Terrae, quam posuimus $= z$, etiam datam esse distantiam sideris a centro Terrae, quam ponemus $= s$, ita vt fractio $\frac{z}{s}$ denotet id quod Astronomi appellant Parallaxin

hori-

horizontalem. Quia autem hacc denominatio desumta est ex hypothesi Terrae sphaericae, in sequentibus calculis potius hanc ipsam fractionem $\frac{z}{s}$ retineamus, eiusque loco breu. gr. scribamus literam π, cuius valor pro Luna vix vltra $\frac{1}{60}$ assurgit; pro aliis vero sideribus incomparabiliter est minor.

Problema praeliminare I.

Tab. IX, Fig. 1. §. 13. *Data distantia obseruatoris a centro Terrae* $CL = z$, *vna cum distantia sideris ab hoc centro* $CS = s$, *si cognitus fuerit angulus* ZLS, *inuenire angulum* $ZL\Sigma$, *hincque Parallaxin, siue angulum* $SL\Sigma$.

Solutio.

Ponatur igitur angulus $ZLS = \zeta$, atque ex triangulo CLS statim habemus hanc analogiam:

$$CS : CL = \text{fin.}\, \zeta : \text{fin.}\, SL\Sigma,$$

vnde statim colligitur

$$\text{fin.}\, SL\Sigma = \frac{CL\, \text{fin.}\, \zeta}{CS} = \pi\, \text{fin.}\, \zeta,$$

hocque angulo subtracto ab angulo $ZLS = \zeta$, relinquetur angulus $ZL\Sigma$ siue ZCS. Quod si iam haec ad figuram tertiam transferamus, erit arcus $ZS = \zeta$ et arcus
Fig. 3.
$S\Sigma = \pi\, \text{fin.}\, \zeta$, hincque porro arcus $Z\Sigma = \zeta - \pi\, \text{fin.}\, \zeta$.

§. 14. Quia Parallaxis $S\Sigma$ vix vnquam vnum gradum superare solet, eius sinus ab ipso arcu non discrepabit, hincque statim ipsa Parallaxis in minutis secundis expressa obtineri potest, si a logarithmo formulae $\pi\, \text{fin.}\, \zeta$

subtra-

ſubtrahatur iſte logarithmus conſtans 4,6855749; ac ſi iſte logarithmus a $l\,\pi$ ſubtrahatur, habebitur Parallaxis horizontalis vulgo ſic dicta, quae cum reſpondeat angulo $\zeta = 90^\circ$, euidens eſt, punctum S hoc caſu non in horizontem incidere, quippe qui 90 gradibus diſtat, non a zenith Z, ſed a vertice V. Tab. IX. Fig. 3.

Problema praeliminare II.

§. 15. *Data diſtantia obſeruatoris a centro Terrae, vna cum diſtantia ſideris ab eodem centro, ſi cognitus fuerit angulus* $Z\,L\,\Sigma$ *ſiue* $Z\,C\,S = \eta$, *inuenire Parallaxin, ſiue angulum* L S C.

Solutio.

Ex L in rectam CS demittatur perpendiculum L M, eritque $L\,M = z$ ſin. η et $C\,M = z$ coſ. η, hincque fiet $S\,M = s - z$ coſ. η, vnde iam ſequitur tangens anguli L S C, ſiue Parallaxeos, cum ſit Fig. 1.

$$\text{tang. } L\,S\,C = \frac{z\,\text{ſin.}\,\eta}{s - z\,\text{coſ.}\,\eta} = \frac{\pi\,\text{ſin.}\,\eta}{1 - \pi\,\text{coſ.}\,\eta},$$

et quia π ſemper eſt fractio ſatis parua, erit

$$\frac{1}{1 - \pi\,\text{coſ.}\,\eta} = 1 + \pi\,\text{coſ.}\,\eta,$$

hincque deducitur

$$\text{tang. } L\,S\,C = \text{tang. } S\,L\,\Sigma = \pi\,\text{ſin.}\,\eta + \pi\pi\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta$$
$$= \pi\,\text{ſin.}\,\eta + \tfrac{1}{2}\pi\pi\,\text{ſin.}\,2\,\eta;$$

hic autem angulus, ſi ad angulum $Z\,L\,\Sigma = \eta$ addatur, producit angulum Z L S, quem ante nominauimus $= \zeta$. Transferantur nunc haec ad figuram ſphaericam, vbi L Fig. 3.

conci-

concipitur in centro Sphaerae, eritque arcus $Z\Sigma = \eta$, vnde ergo erit

$$\text{tang. } S\Sigma = \pi \text{ fin. } \eta + \tfrac{1}{2}\pi\pi \text{ fin. } 2\eta.$$

§. 16. Vulgo quidem in determinatione Parallaxeos hi duo arcus $ZS = \zeta$ et $Z\Sigma = \eta$ promiscue vsurpari solent: at vero pro Luna discrimen notabile oriri potest, quod ex termino $\frac{1}{2}\pi\pi$ fin. 2η aestimari poterit. Sumto enim $\pi = \frac{1}{60}$ et $\eta = 45°$, valor formae $\frac{1}{2}\pi\pi$ fin. 2η fiet $= \frac{1}{7200}$. Quia nunc vnitas aequivalet angulo $57°, 17' = 3437'$, euidens est, eius valorem circiter ad semiminutum siue 30 circiter minuta secunda assurgi posse.

§. 17. Haec duo Problemata fundamenta constituunt omnium sequentium inuestigationum circa Parallaxin; verum antequam omnes quaestiones huc pertinentes rite euoluere licet, tabulam computemus, quae pro singulis latitudinibus loci obseruatoris Φ exhibeat sequentia elementa:

1°. Distantiam obseruatoris a centro Terrae $CL = z$.

2°. Differentiam inter verticem et zenith, siue interuallum $VZ = \omega$, ac

3°. Radium osculi pro loco obseruatoris, quem ponamus $= r$.

Hic calculus ex formulis ante inuentis facile expedietur, cum sit

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \text{ cof. } 2\Phi$$

$$\text{tang. } \omega = \delta \text{ fin. } 2\Phi$$

$$r = 1 + \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{3}{2}\delta \text{ cof. } 2\Phi.$$

Tabu-

Tabulam autem hanc construemus ad hypothesin

$$\delta = \tfrac{1}{200} = 0,00500;$$

vnde, si forte valor exactior innotuerit, correctiones inde fluentes facile assignare licebit. Interim autem, loco δ hunc valorem substituendo, formulae ternae pro tabula construenda necessariae hanc formam induunt:

$$z = 1,002500 + \tfrac{1}{400} \cos. 2\,\Phi$$

$$\text{tang.}\, \omega = \tfrac{1}{200} \sin. 2\,\Phi$$

$$r = 1,002500 - \tfrac{3}{200} \cos. 2\,\Phi.$$

Φ	z	ω		r
0°	1,005000	0′	0″	0,995000
1	1,004998	0	36	0,995005
2	1,004994	1	12	0,995018
3	1,004986	1	48	0,995041
4	1,004976	2	24	0,995073
5	1,004962	2	59	0,995114
6	1,004945	3	34	0,995164
7	1,004926	4	9	0,995223
8	1,004903	4	44	0,995291
9	1,004878	5	18	0,995367
10	1,004849	5	53	0,995452
11	1,004818	6	26	0,995546
12	1,004784	6	59	0,995648
13	1,004747	7	32	0,995759
14	1,004707	8	4	0,995878
15	1,004665	8	36	0,996005
16	1,004620	9	7	0,996140
17	1,004573	9	37	0,996282
18	1,004523	10	6	0,996433

Φ	z	ω		r
19°	1, 004470	10′	35″	0, 996590
20	1, 004415	11	3	0, 996755
21	1, 004358	11	30	0, 996926
22	1, 004298	11	56	0, 997105
23	1, 004237	12	22	0, 997290
24	1, 004173	12	46	0, 997482
25	1, 004107	13	10	0, 997679
26	1, 004039	13	33	0, 997883
27	1, 003969	13	54	0, 998011
28	1, 003898	14	15	0, 998306
29	1, 003825	14	35	0, 998526
30	1, 003750	14	53	0, 998750
31	1, 003674	15	11	0, 998978
32	1, 003596	15	27	0, 999212
33	1, 003517	15	42	0, 999450
34	1, 003436	15	56	0, 999692
35	1, 003355	16	9	0, 999935
36	1, 003272	16	21	0, 000283
37	1, 003189	16	31	1, 000433
38	1, 003105	16	41	1, 000686
39	1, 003020	16	49	1, 000940
40	1, 002934	16	55	1, 001198
41	1, 002896	17	1	1, 001456
42	1, 002761	17	6	1, 001716
43	1, 002674	17	9	1, 001977
44	1, 002587	17	10	1, 002239
45	1, 002500	17	11	1, 002500
46	1, 002413	17	10	1, 002761
47	1, 002326	17	9	1, 003023

Φ

ϕ	z	ω		r
48°	1, 002239	17′	6″	1, 003284
49	1, 002153	17	1	1, 003544
50	1, 002066	16	55	1, 003802
51	1, 001980	16	49	1, 004060
52	1, 001895	16	41	1, 004314
53	1, 001811	16	31	1, 004567
54	1, 001728	16	21	1, 004717
55	1, 001645	16	9	1, 004065
56	1, 001564	15	56	1, 005308
57	1, 001483	15	42	1, 005550
58	1, 001404	15	27	1, 005788
59	1, 001326	15	11	1, 006022
60	1, 001250	14	53	1, 006250
61	1, 001175	14	35	1, 006474
62	1, 001102	14	15	1, 006694
63	1, 001031	13	54	1, 006989
64	1, 000961	13	33	1, 007117
65	1, 000893	13	10	1, 007321
66	1, 000827	12	46	1, 007518
67	1, 000763	12	22	1, 007710
68	1, 000702	11	56	1, 007895
69	1, 000642	11	30	1, 008074
70	1, 000585	11	3	1, 008245
71	1, 000530	10	35	1, 008410
72	1, 000478	10	6	1, 008567
73	1, 000427	9	37	1, 008718
74	1, 000380	9	7	1, 008860
75	1, 000335	8	36	1, 008995
76	1, 000293	8	4	1, 009122

Φ	z	ω		r
77°	1, 000253	7′	32″	1, 009241
78	1, 000216	6	59	1, 009352
79	1, 000182	6	26	1, 009454
80	1, 000151	5	53	1, 009547
81	1, 000122	5	18	1, 009633
82	1, 000097	4	44	1, 009709
83	1, 000074	4	9	1, 009777
84	1, 000055	3	34	1, 009836
85	1, 000038	2	59	1, 009886
86	1, 000024	2	24	1, 009927
87	1, 000014	1	48	1, 009959
88	1, 000006	1	12	1, 009982
89	1, 000002	0	36	1, 009995
90	1, 000000	0	0	1, 010000

§. 18. Circa hanc tabulam ante omnia eſt obſeruandum, eam potiſſimum Parallaxi Lunae determinandae eſſe deſtinatam, quippe quae adeo integrum gradum ſuperare ſolet. Quoniam enim Parallaxes Planetarum vix vnquam ſemiminutum primum excedere poſſunt, hypotheſis Terrae ſphaericae iis definiendis omnino ſufficit, atque ſuperfluum foret iſtam tabulam in ſubſidium vocare. Quin etiam, ſi quando aliquis Cometa ad Terram tam prope accederet, vt vſus huius Tabulae neceſſarius videri poſſet, tum plerumque nunquam eius loca tam exacte definire licet, vt aberratio plurium ſecundorum ſpectari mereretur.

§. 19. Quoniam igitur haec tabula vnice motui Lunae determinando inſeruire eſt cenſenda, notandum eſt, in in tabulis lunaribus non eius veram diſtantiam a Terra aſſignari, ſed eius loco Parallaxin horizontalem ſub ipſo Aequatore exhiberi ſolere. Hanc ergo deſignemus litera ae, cuius valor, cum ante diſtantia Lunae a Terra poſita ſit $= s$, et ſemidiamer Aequatoris $= 1 + \delta$, erit

$$ae = \frac{1 + \delta}{s}.$$

Quare cum ſupra poſuerimus pro Terrae loco quocunque eius diſtantiam a centro $= z$, ibique Parallaxin horizontalem $\frac{z}{s} = \pi$, ſemper erit $\pi = \frac{ae\, z}{1 + \delta}$. Cum igitur pro eleuatione Poli $= \Phi$ invenerimus

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{cof.} 2\Phi = 1 + \delta \operatorname{cof.} \Phi^2, \text{ erit}$$

$$\pi = \frac{ae\,(1 + \delta \operatorname{cof.} \Phi^2)}{1 + \delta},$$

quae formula, ob $\frac{1}{1 + \delta} = 1 - \delta$, reducitur ad hanc:

$$\pi = ae\,(1 - \delta + \delta \operatorname{cof.} \Phi^2) = ae\,(1 - \delta \operatorname{fin.} \Phi^2)$$

ſiue etiam

$$z = ae\,(1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{cof.} 2\Phi).$$

Quia igitur erat

$$z = 1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{cof.} 2\Phi, \text{ erit quoque } \pi = ae\,(z - \delta).$$

§. 20. Quoniam igitur Parallaxis Lunae *aequatorea* pro variis eius locis in ſua orbita ab $54'$ vsque ad $62'$ increſcere circiter poteſt, pro quolibet eius valore ad omnes latitudines loci Parallaxin Lunae horizontalem facile computare licebit, quem infinem ſequentem Tabulam adiiciemus, in qua pro his nouem Parallaxibus aequatoreis: 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 et 62. Parallaxin horizontalem ad Latitudines quinis gradibus increſcentes exhibebimus. Et quia hae Parallaxes ab Aequatore vsque ad Polum continuo decreſcunt, haec Tabula oſtendet, quot

minuta

minuta secunda a Parallaxi aequatorea subtrahi debeant, vt Parallaxis horizontalis pro quolibet obseruatoris loco obtineatur, siue ostendet valorem formulae $ae - \pi$, qui est $ae\,(\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta \operatorname{cos.} 2\Phi)$; atque ob $\delta = \frac{1}{200}$ erit

$$ae - \pi = \frac{ae}{400}(1 - \operatorname{cos.} 2\Phi).$$

TABVLA
Valores $ae - \pi$ exhibens, ad quinos gradus Latitudinis computata.

Lat. loci Φ	Parallaxis aequatorea. 54′	55′	56′	57′	58′	59′	60′	61′	62′
0°	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00
5	0, 12	0, 12	0, 12	0, 13	0, 13	0, 13	0, 13	0, 14	0, 14
10	0, 49	0, 50	0, 51	0, 52	0, 53	0, 54	0, 54	0, 55	0, 56
15	1, 08	1, 10	1 13	1, 16	1, 17	1, 19	1, 21	1, 23	1, 25
20	1, 89	1, 91	1, 95	2, 00	2, 03	2, 07	2, 10	2, 13	2, 17
25	2, 89	2, 94	2, 99	3, 05	3, 10	3, 15	3, 20	3, 25	3, 31
30	4, 05	4, 12	4, 19	4, 27	4, 34	4, 41	4, 49	4, 57	4, 65
35	5, 33	5, 43	5, 53	5, 63	5, 72	5, 82	5, 92	6, 02	6, 12
40	6, 69	6, 81	6, 94	7, 07	7, 19	7, 31	7, 44	7, 56	7, 68
45	8, 10	8, 25	8, 40	8, 55	8, 70	8, 85	9, 00	9, 15	9, 30
50	9, 51	9, 67	9, 83	10, 00	10, 18	10, 36	10, 54	10, 72	10, 91
55	10, 87	11, 07	11, 27	11, 47	11, 67	11, 87	12, 07	12, 27	12, 47
60	12, 15	12, 37	12, 59	12, 82	13, 05	13, 27	13, 50	13, 72	13, 96
65	13, 30	13, 55	13, 80	14, 05	14, 29	14, 53	14, 78	15, 02	15, 27
70	14, 30	14, 56	14, 83	15, 10	15, 36	15, 62	15, 89	16, 15	16, 42
75	15, 11	15, 39	15, 67	15, 95	16, 23	16, 51	16, 79	17, 07	17, 35
80	15, 71	15, 99	16, 28	16, 58	16, 87	17, 16	17, 45	17, 74	18, 03
85	16, 08	16, 37	16, 67	16, 97	17, 26	17, 56	17, 86	18, 16	18, 45
90	16, 20	16, 50	16, 80	17, 10	17, 40	17, 70	18, 00	18, 30	18, 60

§. 21. Haec tabula vsque ad partes centesimas minuti secundi est computata, quo ordo in his numeris clarius pateret; in vsu enim has partes tuto omittere licebit. Tum vero minuta secunda in hac tabula consignata semper a Parallaxi aequatorea subtrahi oportet, vt prodeat Parallaxis horizontalis pro latitudine proposita. Ita si obseruator reperiatur sub latitudine 60°, et Parallaxis aequatorea Lunae tempore obseruationis sit 55′, inde subtrahi debent 12 minuta sec. sicque Parallaxis horizontalis hoc loco erit 54′, 48″. Sin autem eo tempore Parallaxis aequatorea fuerit 61′, Parallaxis horizontalis erit 61′ — 14″ = 60′, 46″. Ceterum, quamquam haec tabula tantum ad integra minuta prima Parallaxis aequatoreae est computata, facile tamen erit interpolationem pro omnibus valoribus intermediis instituere, id quod etiam tenendum est, si latitudo obseruatoris non in hac tabula reperiatur: vtroque enim casu interpolatio sine calculo, sola aestimatione fieri poterit.

§. 22. Quo iam vsum huius Tabulae clarius ostendamus, primo assumemus, Lunam in ipso Meridiano esse obseruatam, et docebimus, quomodo inde eius verus locus geocentricus determinari debeat. Deinde quaestionem invertemus, et ex dato loco Lunae geocentrico tempore culminationis inquiremus, sub quanam altitudine obseruatori apparere debeat. Porro vero vtramque quaestionem pro iis casibus resoluemus, quibus Luna in ipso Horizonte obseruatur. Denique vero procedemus ad Lunae loca quaecunque alia, quibus non solum distantia Lunae a vertice, sed etiam eius Azimuth quaeri debebit.

Tab. IX. Fig. 4.

Problema I.

Si Luna in ipso Meridiano ab obseruatore ad datam latitudinem constituto in S obseruetur, eiusque distantia a vertice, siue arcus V S innotescat, inuestigare eius verum locum geocentricum Σ, siquidem pro hoc tempore Parallaxis Lunae aequatorea fuerit cognita.

Solutio.

§. 23. In Meridiano loci A V B, Horizonte A B insistente, sit V vertex loci, in quo obseruator versatur, et P Polus, cuius eleuatio, siue latitudo obseruatoris sit $BP = \phi$, vnde ex tabula desumatur interuallum $VZ = \omega$; porro vero vocetur arcus $VS = f$, cuius ergo complementum dabit altitudinem Lunae obseruatam, siue arcum A S. Praeterea sit *ae* Parallaxis aequatorea Lunae, pro qua postrema Tabula statim dabit π, siue Parallaxin horizontalem pro loco proposito.

§. 24. Iam ad punctum S, seu locum Lunae geocentricum inuestigandum, notemus esse arcum $ZS = f - \omega$, quem in Problemate praeliminari priori vocauimus $= \zeta$, siquidem hic arcus Z S praebet distantiam loci obseruati S a zenith Z, vnde idem illud Problema nobis dabit

$$S\Sigma = \pi \sin.(f - \omega) = \pi \sin. f \cos. \omega - \pi \cos. f \sin. \omega.$$

Hic autem, ob arculum $VZ = \omega$ tam exiguum, vt eius potestates tuto negligi queant, sumere licebit $\cos. \omega = 1$ et $\sin. \omega = \omega$, vnde fiet $S\Sigma = \pi \sin. f - \pi \omega \cos. f$, hincque ergo erit distantia $V\Sigma = f - S\Sigma$, cui si addatur arcus $PV = 90° - \phi$, prodibit distantia loci geocentrici Σ a polo P, P, cuius complementum est eius declinatio, hincque porro tam Lunae longitudo quam latitudo per praecepta cognita inueniri poterit, quandoquidem ex tempore culminationis innotescit ascensio recta.

§. 25. Verum si hypothesi Terrae sphaericae in hoc calculo essemus vsi, prodiisset hoc interuallum $S\Sigma = \pi$ sin. f; vnde patet, hanc hypothesin errorem valde notabilem producere posse, cum sit $= \pi \cdot \omega$ cos. f. Quo hoc clarius perspiciatur consideretur casus, quo $\pi = \frac{1}{60}$, $\omega = 17'$, ita vt eleuatio Poli $= 45°$; tum vero arcum f statuamus $= 30°$, eritque error $= \frac{1}{4}$ proxime, siue $= 15''$, qui error, mutatis circumstantiis, propemodum vsque ad $18''$ ascendere potest, et cum iste error $\pi \omega$ cos. f semper sit negatiuus, euidens est, verum punctum Σ, siue locum Lunae geocentricum, aliquanto longius a Polo P distare, quam si Terra sphaerica assumeretur. Ex hoc autem errore adhuc maior error in longitudinem et latitudinem Lunae influere potest. Ac si perpendamus, in altitudine Lunae obseruata errorem quoque plurium secundorum committi posse, dum insuper ipsa Poli eleuatio nunquam ad aliquot minuta secunda certa esse solet, distantia a Polo P fortasse vltra 30 minuta secunda a veritate aberrare poterit. Praeterea in ipso momento obseruationis, vnde ascensio recta deduci debet, error vnius secundi temporis, vnde $15''$ in ascensione recta oriuntur, vix euitari potest. Quin etiam, quia haec ascensio recta a loco Solis computatur, quem raro intra quindecim minuta secunda assignare exactum licet, manifestum est, omnes hos errores iunctim sumtos facile integrum minutum primum superari posse; ex quo intelligitur, loca Lunae, ex huiusmodi obſeruationibus concluſa, plus quam minuto primo fallere poſſe.

§. 26. Cum error hypotheſis ſphaericae ſit $-\pi\omega \cos. f$, patet, eum duobus caſibus euaneſcere poſſe: altero quo $\omega = 0$, quod euenit, vel quando obſeruator ſub ipſo Aequatore verſatur, vel ſub ipſo Polo; altero vero, quando $f = 90°$, hoc eſt, quando Luna in Horizonte conſpicitur. Hinc igitur aſcendendo error continuo increſcet, atque adeo vsque ad verticem V, vel zenith Z. Si enim punctum S in zenith Z cadat, Parallaxis reuera erit nulla, cum tamen in hypotheſi ſphaerica ſit π ſin. ω, cuius valor, caſu quo $\pi = 63'$ et $\omega = 17'$ fit $19''$. Verum quia hic $\omega = 17'$, ideoque altitudo Poli $= 45°$, Luna nunquam vsque ad zenith aſcendere poteſt. Idem euenit, ſi Luna vsque ad verticem aſcenderet, tum enim Parallaxis euaneſceret in hypotheſi Terrae ſphaericae; reuera autem iterum erit $= \pi$ ſin. ω, quo interuallo Luna magis a Polo remouetur. Quo autem applicatio noſtrae Tabulae clarius appareat, aliquot exempla ſubiungamus.

Exemplum I.

§. 27. *Sub eleuatione Poli* 40°, 30′, *altitudo centri Lunae meridiana obſeruata eſt* 77°, 30′, *quo tempore Parallaxis aequatorea erat* 61′, *inuenire verum locum geocentricum.*

Hic ergo erat $\Phi = 40°, 30'$, vnde reperitur interuallum $VZ = \omega = 16', 58''$. Deinde erit diſtantia Lunae obſeruata a vertice $12°, 30' = f$. Porro vero Parallaxis ae-

aequatorea $61'$ diminui debebit $8''$, ita vt ſit Parallaxis horizontalis $\pi = 60', 52''$. Hinc ergo ob $f - \omega = 12°, 13', 2''$ calculus pro interuallo Σ S ita inſtituetur:

$$l\,\pi = 3,56253$$
$$l\,\text{ſin.}\,(f - \omega) = 9,32553$$
$$l\,S\,\Sigma = 2,88806$$
$$\text{ergo } S\,\Sigma = 773'' = 12', 53'',$$

quod ergo interuallum, ad altitudinem obſeruatam additum, dabit altitudinem Lunae veram $= 77°, 42', 53''$, ſiue ſubtractum ab angulo f, relinquet diſtantiam a vertice $V\Sigma = 12°, 17', 7''$, ideoque eius diſtantia a Polo P erit $= 61°, 47', 7''$. At vero in hypotheſi Terrae ſphaericae calculus ita ſe habebit:

$$l\,\pi = 3,56253$$
$$l\,\text{ſin.}\,f = 9,33534$$
$$l\,S\,\Sigma = 2,89787$$
$$\text{ergo } S\,\Sigma = 790'' = 13', 10'',$$

ſicque error huius hypotheſis eſt $17''$.

Exemplum 2.

§. 28. *Sub eleuatione Poli 59°, 56', in ipſo Meridiano obſeruata eſt altitudo centri Lunae 8°, 43', quo tempore Parallaxis aequatorea erat 57', 27'', quaeritur locus Lunae geocentricus.*

Hic ergo eſt $\Phi = 59°, 56'$, tum vero arcus V S $= f = 81°, 17'$. Iam a Parallaxi aequatorea ſubtrahi oportet $13''$, ita vt ſit $\pi = 57', 14''$. Hinc ergo erit intervallum $VZ = \omega = 14', 53''$, vnde fit $f - \omega = 81°, 2', 7''$, hincque porro $S\Sigma = \pi$ fin. $(f - \omega)$, fiue $S\Sigma = 3434$ fin. $81°, 2', 7''$; calculus igitur, fimul inftitutus pro hypothefi fphaerica, ita fe habet:

$$l\,\pi = 3,53580 \qquad\qquad l\,\pi = 3,53580$$
$$\underline{l\,\text{fin.}\,f = 9,99495} \qquad \underline{l\,\text{fin.}\,(f-\omega) = 9,99466}$$
$$l\,S\Sigma = 3,53075 \qquad\qquad l\,S\Sigma = 3,53046$$

ergo $S\Sigma = 3394'' = 56', 34''$ ergo $S\Sigma = 3392'' = 56', 32''$

ficque error tantum eft $2''$. Altitudo ergo Lunae vera erit $9°, 39', 32''$, ideoque diftantia a vertice $80°, 20', 28''$, ita vt, ob $VP = 30°, 4'$, diftantia a Polo fit $110°, 24', 28''$, ficque declinatio Lunae Auftralis $= 20°, 24', 28''$.

Exemplum 3.

§. 29. *Sub altitudine Poli $72°, 15'$ obferuatur altitudo centri Lunae in Meridiano Septemtrionem verfus $= 9°, 45'$, quo tempore Parallaxis aequatorea fuerit $59', 40''$, quaeritur locus Lunae geocentricus.*

Tab. IX. Fig. 5. Hic ergo eft $\Phi = BP = 72°, 15'$ et arcus $VS = f = 80°, 15'$. Iam a Parallaxi aequatorea fubtrahi debent $16''$, vnde fit $\pi = 59', 24'' = 3564''$. At vero ob $\Phi = 72°, 15'$ erit interuallum $VZ = \omega = 10'$, ficque erit $ZS = 80°, 25'$. Scilicet hoc cafu ω vt negatiuum fpectari debet refpectu puncti S, ita vt fumi debeat $f + \omega = 80°, 25'$ et iam erit $S\Sigma = \pi$ fin. $(f + \omega)$.

$l\,\pi$

$$l\,\pi = 3,55194$$
$$l\,\text{fin.}\,(f + \omega) = 9,99390$$
$$l\,S\,\Sigma = 3,54584$$

ideoque $S\Sigma = 3514'' = 58', 34''$
ideoque vera altitudo ſuper horizonte erat $10°, 43', 34''$.

Problema II.

Si in duobus Terrae locis, ſub eodem Meridiano ſitis, culminatio Lunae eiusque altitudo ſimul obſeruentur, ex comparatione harum duarum obſeruationum Parallaxin Lunae aequatoream ad idem tempus definire.

Solutio.

§. 30. Conſideremus hic integrum Meridianum, in quo puncta P et P′ ſint ambo Poli oppoſiti, vt bini obſeruatores citra et vltra Aequatorem ſupponi queant; quandoquidem, vt ex huiusmodi obſeruationibus concluſio certa deduci queat, obſeruatores a ſe inuicem maxime remoti aſſumi debent. Sit ergo prioris obſeruatoris in ſuperiore Hemiſphaerio vertex in V, eiusque latitudo $= \Phi$, ideoque arcus $PV = 90° - \Phi$. Tum vero ſit S locus Lunae obſeruatus, eiusque diſtantia $VS = f$. Alterius vero Obſeruatoris in Hemiſphaerio Auſtrali vertex ſit in V′, cuius latitudo ſit $= \Phi'$, quae ergo reſpectu prioris vt negatiua eſt ſpectanda, ita vt eius diſtantia a Polo P ſit $90° + \Phi'$. Luna autem ab eo obſeruetur in puncto S′, ponaturque arcus $V'S' = f'$. Verus autem locus Lunae geocentricus ſit in Σ, qui ergo vtrique obſeruatori eſt communis. Hoc autem punctum, ſi vt ſupra pro vtroque obſeruatore determinetur, neceſſe eſt, vt ſumma arcuum $V\Sigma$ Tab. IX. Fig. 6.

et

et $V' \Sigma$ aequetur ſummae ambarum Latitudinum, hoc eſt $\Phi + \Phi'$, ex qua porro aequatione Parallaxis aequatorea Lunae, quae ſit $= ae$, erui debet.

§. 31. Nunc igitur vtramque obſeruationem euoluamus vt ante, ſitque pro priore obſeruatore zenith in Z, eritque $V Z = \delta$ ſin. 2Φ, Parallaxis autem horizontalis pro iſto loco erit $\pi = ae (1 - \delta \text{ ſin. } \Phi^2)$. Hinc ergo interuallum $S \Sigma$ erit $= \pi$ ſin. ZS, hoc eſt

$$S \Sigma = ae (1 - \delta \text{ ſin. } \Phi^2) \text{ ſin. } (f - \delta \text{ ſin. } 2 \Phi),$$

quae formula transmutatur in hanc:

$$S \Sigma = ae (\text{ſin. } f - \delta \text{ ſin. } \Phi^2 \text{ ſin. } f - \delta \text{ ſin. } 2 \Phi \text{ coſ. } f).$$

Hinc ergo habebimus arcum $V \Sigma = f - S \Sigma$, ſiue

$$V \Sigma = f - ae (\text{ſin. } f - \delta \text{ ſin. } \Phi^2 \text{ ſin. } f - \delta \text{ ſin. } 2 \Phi \text{ coſ. } f).$$

Ac poſito brev. gr.

$$\text{ſin. } f - \delta \text{ ſin. } \Phi^2 \text{ ſin. } f - \delta \text{ ſin. } 2 \Phi \text{ coſ. } f = F$$

fiet arcus $V \Sigma = f - ae F$.

§. 32. Simili modo pro altero obſeruatore, cuius vertex eſt in V', ſit Z' eius zenith, eritque $V' Z' = \delta$ ſin. $2 \Phi'$, parallaxis vero horizontalis hoc loco, quae ſit $= \pi'$, erit $\pi' = ae (1 - \delta \text{ ſin. } \Phi'^2)$. Quamobrem, ſi iterum breuitatis gratia ponamus, vt ſupra

$$\text{ſin. } f' - \delta \text{ ſin. } \Phi'^2 \text{ ſin. } f' - \delta \text{ ſin. } 2 \Phi' \text{ coſ. } f' = F'$$

erit interuallum $V' \Sigma = f' - ae F'$. His inuentis, cum ſumma arcuum $V \Sigma$ et $V' \Sigma$ ſit $\Phi + \Phi'$, habebimus hanc aequationem $\Phi + \Phi' = f + f' - ae (F + F')$, ex qua aequatione elicimus Parallaxin aequatoream

$$ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{F + F'}.$$

§. 33.

§. 33. Restituamus nunc loco F et F' valores assumtos, eritque Parallaxis quaesita:

$$ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\sin.f + \sin.f' - \delta\,(\sin.f\sin.\Phi^2 + \sin.f'\sin.\Phi'^2 - \delta\,(\cos.f\sin.2\Phi + \cos.f'\sin.2\Phi')}$$

quae formula ob figuram Terrae sphaeroidicam satis quidem est complicata; interim tamen facili calculo expeditur, sumto scilicet $\delta = \frac{1}{305}$. Sin autem Terra perfecte esset sphaerica et $\delta = 0$, aequatio nostra satis simplex euaderet, cum inde sit $ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\sin.f + \sin.f'}$. Praeterea vero si distantia Lunae esset infinita, ideoque eius Parallaxis nulla, vtique foret $f + f' = \Phi + \Phi'$, ideoque numerator euanesceret.

§. 34. Immediate ergo ex obseruationibus constant quatuor arcus Φ, Φ', f', f', atque neglectis partibus a δ pendentibus iam satis exacte habebitur $ae = \frac{f + f' - \Phi - \Phi'}{\sin.f + \sin.f'}$, quo inuento facile erit inuestigare, quanta sui parte Parallaxis, ob terminos litera δ affectos, augere debeat. Perspicuum enim est, ob veram Terrae figuram Parallaxin ae semper aliquanto maiorem prodire debere. Haec enim augmentatio semper fieri debet in ratione:

$$1 : 1 + \frac{\delta\,(\sin.f\sin.\Phi^2 + \sin.f'\sin.\Phi'^2 + \cos.f\sin.2\Phi + \cos.f'\sin.2\Phi')}{\sin.f + \sin.f'}.$$

Quoniam autem exemplum completum afferre non licet, inquiramus tantum in correctionem, quam vera Terrae figura producit, vbi quidem facile intelligitur, sufficere, si arcus f et f' propemodum tantum innotescant. Assumamus igitur esse $\Phi = 52°, 30'$ et $\Phi' = 35°$; tum vero $f = 42°$ et $f' = 46°, 30'$, atque numeratoris nostrae fractionis quatuor partes erunt:

I. $= 0,42117$
II. $= 0,23864$
III. $= 0,71782$
IV. $= 0,64685$ Hinc numerator prodit

$= 2,02448$, cuius pars 200^{ma} fit $0,010122$, quae, diuisa per $\sin. f + \sin. f' = 1,39450$, praebet correctionem quaesitam $= 0,007259$, quae scilicet est augmentatio Parallaxis aequatoreae ex hypothesi Terrae sphaericae conclusa, quae ergo si fuerit Parallaxis $= 60' = 3600''$, erit $= 25''$, ita vt vera Parallaxis aequatorea sit $60', 25''$.

§. 35. Tales binae obseruationes annis abhinc 27 institutae sunt a duobus obseruatoribus, quorum alter, Abbas *la Caille*, missus fuerat ad Promontorium bonae spei, alter vero, Cel. *de la Lande*, Berolinum, quoniam haec duo loca propemodum sub eodem Meridiano sita credebantur, cum tamen deinceps notabilis differentia fuerit deprehensa; vnde necesse erat, ambas obseruationes per multas ambages ad eundem Meridianum reducere. Tandem vero, peractis obseruationibus, ingenti labore conclusionem inde deduxerunt, dum scilicet chordam, a Berolino intra Terram ad Caput bonae spei ductam, in computum traxerunt, cum tamen nostra methodo idem negotium multo facilius confici potuisset.

Problema III.

Si locus Lunae geocentricus ad datum tempus, quo Luna per Meridianum dati loci transire debet, fuerit cognitus, vna cum Parallaxi aequatorea pro eodem tempore, inuenire eius altitudinem apparentem super Horizonte loci dati.

Solu-

Solutio.

§. 36. Quia locus Lunae geocentricus cognitus assumitur, nota erit eius distantia a vertice obseruatoris V. Ponatur ergo arcus $V\Sigma = g$, latitudo vero loci sit $= \Phi$, vnde ex nostra Tabula definiatur zenith Z, eritque $VZ = \omega = \delta \sin. 2\,\Phi$. Porro quia etiam Parallaxis aequatorea ae datur, ex ea ex posteriori Tabula excerpatur Parallaxis horizontalis π, quae ex formulis nostris generalibus est $\pi = ae\,(1 - \delta \sin. \Phi^2)$.

§. 37. Nunc recurramus ad Problema praeliminare secundum, vbi arcus $Z\Sigma$ litera η indicatur; erit ergo $\eta = V\Sigma - VZ = g - \omega$. Quodsi nunc S designet locum centri Lunae apparentem, ibi ostendimus, esse

$$\Sigma S = \pi \sin. (g - \omega) + \tfrac{1}{2}\pi\pi \sin. 2\,(g - \omega).$$

Computata ergo hac formula innotescet interuallum $S\Sigma$, eritque idcirco distantia loci apparentis S a vertice V $= g + \Sigma S$, vbi ergo interuallum $S\Sigma$ est effectus Parallaxeos.

§. 38. Quodsi Terram tanquam sphaericam spectemus, quia tum puncta V et Z conueniunt, erit in hac Hypothesi

$$S\Sigma = \pi \sin. g + \tfrac{1}{2}\pi\pi \sin. 2\,g,$$

vnde facile error commissus definiri potest. Cum enim sit

$$\sin. (g - \omega) = \sin. g - \omega \cos. g \text{ et}$$
$$\sin. 2\,(g - \omega) = \sin. 2\,g - 2\,\omega \cos. 2\,g,$$

discrimen inter haec duo loca erit

$\pi\,\omega$ cof. $g + \pi\,\pi\,\omega$ cof. $2\,g$

Hac fcilicet quantitate verus valor ipfius $S\,\Sigma$ minor erit quam in Hypothefi Terrae fphaericae.

§. 39. Quo hoc difcrimen clarius pateat, fumamus $\phi = 45°$, ita vt fit $\omega = 17', 11'' = \frac{1}{200}$; deinde fit Parallaxis aequatorea $= 61'$, vnde pro $45°$ gradibus fubtrahi debent $9'$, ita vt Parallaxis horizontalis fit $\pi = 60', 51''$. Error igitur erit

$$\tfrac{\pi}{200}\ \text{cof.}\ 18° + \tfrac{\pi\pi}{200}\ \text{cof.}\ 36°,$$

fumto fcilicet $g = 18°$. Vbi in pofteriore termino loco alterius π fcribi debet fractio $\frac{1}{56}$, ficque error erit

$$3651''\left(\frac{\text{cof. } 18°}{200} + \frac{\text{cof. } 36°}{11300}\right) = 3651.\ 0,00483.$$

confequenter error penitus euolutus erit $= 18''$, qui in calculo fatis eft notabilis, atque eo magis obferuari meretur, quod non ceffat, etiamfi Luna proxime ad verticem vel zenith accedat.

Problema IV.

Si centrum Lunae obferuetur in ipfo Horizonte fub data altitudine Poli, ac pro eo tempore detur Lunae Parallaxis aequatorea, inueftigare locum Lunae geocentricum.

Tab. IX. Fig. 7. §. 40. Quando hic de locis Lunae obferuatis fermo eft, femper fupponimus, eam iam refractione effe purgatam, quod tam de praecedentibus quam de fequentibus probe eft tenendum. Sit iam V vertex obferuatoris, cuius latitudo fit $= \phi$; tum circulus A V B referat

referat Meridianum et A S B Horizontem, in quo centrum Lunae obſeruatum ſit in S, eritque arcus V S quadrans circuli, ita vt ſit $f = 90°$; praeterea vero ſit arcus in Horizonte A S ſiue angulus A V S $= a$. Iam pro latitudine loci Φ ex noſtra Tabula excerpatur interuallum V Z $= \omega$, quod eſt δ ſin. 2 Φ, et poſita Parallaxi aequatorea $= ae$, inde ex poſteriore tabula colligatur Parallaxis pro loco propoſito, quae ſit $= \pi$, ita vt ſit

$$\pi = ae\,(1 - \delta\ \text{ſin.}\ \Phi^2).$$

Iam ex puncto Z ducatur arcus Z S, quem ſecundum Problema praeliminare prius ſtatuamus Z S $= \zeta$, ad quem inueniendum ex Z ad V S ducatur arculus perpendicularis $Z u$, et quia triangulum $V Z u$ eſt minimum, erit

$$V u = \omega\ \text{coſ.}\ a \ \text{ et } \ Z u = \omega\ \text{ſin.}\ a,$$

atque euidens eſt fore

$$\zeta = S u = 90° - \omega\ \text{coſ.}\ a.$$

Hinc ergo locus Lunae geocentricus reperietur in Σ, ita vt ſit $S \Sigma = \pi\ \text{ſin.}\ \zeta = \pi$. Hic igitur notandum eſt, punctum Σ non in circulum verticalem V S ſed in arcum Z S cadere.

§. 41. Sin autem Terra eſſet ſphaerica, punctum Σ vtique caderet in ipſam verticalem V S, ad altitudinem $S \sigma = \pi$, ita vt error inde ortus ſit particula $\Sigma \sigma$. Hinc enim diſcrimen inter Parallaxin horizontalem et aequatoream negligere licet, quia totum negotium redit ad arculum $\Sigma \sigma$ definiendum. Ad hoc autem noſſe neceſſe eſt, angulum V S Z, qui eſt $= \frac{Z u}{\text{ſin.}\ Z S} = \omega\ \text{ſin.}\ a$, quia arcus Z S a quadrante quam minime diſcrepat. Hinc ergo

 erit

erit error $\Sigma\sigma = \pi\omega$ fin. a, qui ergo maximus euadet in medio Horizontis O, hoc eſt in cardine vel Orientis vel Occidentis, vbi igitur, ob fin. $a = 1$, erit $\Sigma\sigma = \pi\omega$. Hoc igitur loco, ſi ſumamus $\Phi = 45°$, vbi fit $\omega = 17', 11''$, Parallaxin vero π ſtatuendo $= 61'. 30''$, ob $\omega = \frac{1}{200}$, erit error $\Sigma\sigma = \frac{3690''}{200} = 18''$.

§. 42. Ob veram igitur Figuram Terrae non ſolum Parallaxis in S aliquantillum mutatur, ſed etiam Azimuthum puncti Σ aliquantillum imminuitur, angulo ſcilicet $\Sigma V S$, qui angulus ergo erit $\frac{\Sigma\sigma}{\text{fin. } V\Sigma}$ $\Sigma\sigma = \pi\omega$ fin. a, cuius valor etiam, vt modo vidimus, in puncto O vsque ad 18 minuta ſecunda augeri poteſt. Vnde ſi hinc aſcenſio recta et declinatio computentur, hincque porro Longitudo et Latitudo, error ſatis notabilis reſultare poterit. Verum quia obſeruationes horizontales ſemper ob refractionem ſunt incertae, ab iſto errore nihil plane erit metuendum.

Problema V.

Tab. IX. Fig. 2. *Reperiatur nunc locus Lunae obſeruatus vbicunque in S, haecque obſeruatio facta ſit ſub eleuatione Poli Φ, quo tempore fuerit Parallaxis aequatorea $= ae$, inuenire verum Lunae locum geocentricum Σ.*

Solutio.

§. 43. Pro loco igitur obſeruato S noſſe oportet tam eius altitudinem, ſiue diſtantiam a vertice $V S = f$, quam eius Azimuth ſiue angulum $A V S = a$, ita vt quatuor

tuor res nobis ſint cognitae, nempe Φ, ae, f et a, ex quibus locum Σ quaeri oportet.

§. 44 Primo igitur ex eleuatione Poli Φ quaeratur interuallum $VZ = \omega$, ex priore tabula; deinde vero ex valore ae quaeratur Parallaxis horizontalis pro hoc loco, quae ſit $= \pi$. Iam ex Z ad arcum VS ducatur arculus normalis Zu, eritque vt ante $Vu = \omega = \operatorname{coſ.} a$ et $Zu = \omega \operatorname{ſin.} a$, vnde cum arcus $ZS = \zeta$ non differat ab arcu Su, erit $\zeta = f - \omega \operatorname{coſ.} a$. Hinc ergo per Problema praeliminare prius erit interuallum

$$S\Sigma = \pi \operatorname{ſin.} \zeta = \pi \operatorname{ſin.} (f - \omega \operatorname{coſ.} a),$$

quod interuallum vocemus $= \xi$, ita vt ξ nobis denotet Parallaxin $S\Sigma$.

§. 45. Cum igitur punctum Σ cadat in arcum ZS, non ſolum eius diſtantia a vertice V, ſed etiam Azimuth a immutabitur. Primo igitur quaeratur angulus ZSV, qui erit $= \frac{Zu}{\operatorname{ſin.} \zeta} = \frac{\omega \operatorname{ſin.} a}{\operatorname{ſin.} \zeta}$. Tum ex puncto Σ ducatur arculus $\Sigma\sigma$ ad VS normalis, eritque

$$\Sigma\sigma = \xi \operatorname{ſin.} \frac{\omega \operatorname{ſin.} a}{\operatorname{ſin.} \zeta} = \xi \frac{\omega \operatorname{ſin.} a}{\operatorname{ſin.} \zeta}.$$

Hinc ergo cum ſit $V\Sigma = V\sigma$ et $S\sigma = \xi$, primo diſtantia a vertice $VS = f$ diminuetur ipſa Parallaxi $S\sigma = \xi$, ita vt iam ſit $V\Sigma = f - \xi$. Praeterea vero Azimuth a diminuetur angulo $\Sigma V\sigma$, qui eſt

$$\frac{\Sigma\sigma}{\operatorname{ſin.} V\Sigma} = \frac{\xi\omega \operatorname{ſin.} a}{\operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{ſin.} (f - \xi)} = \frac{\xi\omega \operatorname{ſin.} a}{\operatorname{ſin.} f} \text{ proxime.}$$

Cognita autem puncti Σ diſtantia a vertice ΣV vna cum Azimutho $ZV\Sigma$, inde more ſolito determinabitur tam Declinatio quam Aſcenſio recta.

Pro-

Problema VI.

Si ad datum tempus ex Tabulis lunaribus computata fuerit Lunae tam longitudo quam latitudo, indeque porro Ascensio recta et declinatio, inuenire, vbi hoc tempore Obseruatori, in dato Terrae loco constituto, centrum Lunae sit appariturum.

Solutio.

Tab. IX. Fig 9. §. 46. Sit loci propositi latitudo vt hactenus Φ et vertex in V, ita vt sit $PV = 90° - \Phi$, tum pro loco obseruatoris cognito, ex ascensione recta, vnde deducitur angulus horarius $VP\Sigma$ et distantia loci cogniti Σ a Polo computetur tam distantia a vertice $V\Sigma$, quae sit $= g$ quam eius Azimuthum, seu angulus $AV\Sigma$, qui sit $= b$.

§. 47. Iam ex latitudine Φ quaeratur interuallum $VZ = \omega$, atque Parallaxis horizontalis pro isto loco $= \pi$, siquidem ex tabulis lunaribus Parallaxis aequatorea constet, quo facto ex zenith Z per locum Lunae datum producatur arcus $Z\Sigma S$, ponaturque $Z\Sigma = \eta$, vti in Problemate praeliminari altero, ad quem angulum inuenien dum ex Z in $V\Sigma$ demittatur perpendiculum Zv, eritque $Vv = \omega \operatorname{cos.} b$ et $Zv = \omega \operatorname{sin.} b$, et quia arcus ΣZ ipsi Σv aequalis reputari potest, erit $\eta = g - \omega \operatorname{cos.} b$. Quamobrem locus apparens S reperietur in arcu $Z\Sigma$, producto ad in teruallum $S\Sigma = \pi \operatorname{sin.} \eta + \frac{1}{2}\pi\pi \operatorname{sin.} 2\eta$, quae expressio ergo dat Parallaxin $\Sigma S = \xi$.

§. 48.

§. 48. Inuento ergo puncto S primo eius distantia a vertice V S, tum vero Azimuth, siue angulus Z V S quaeri debet. Demisso autem ex puncto Σ in arcum V S perpendiculo $\Sigma\sigma$, erit vtique $S\sigma = S\Sigma$ et $V\sigma = V\Sigma = g$, vnde patet fore $VS = g + \xi$. Porro vero cum sit angulus $ZSV = \frac{\omega\, sin.\, b}{sin.\, g}$, erit perpendiculum $\Sigma\sigma = \frac{\xi\,\omega\, sin.\, b}{sin.\, g}$, quod diuisum per sin. g dabit angulum ΣVS, qui erit $\xi \frac{\omega\, sin.\, b}{sin.\, g^2}$, huncque angulum addi oportet ad angulum b, vt obtineatur verum Azimuth loci S.

§. 49. Per se autem manifestum est, solutiones tam huius quam praecedentis Problematis tuto adhiberi non posse, nisi loca S et Σ ad satis notabilem distantiam a binis punctis V et Z cadant. Si enim vertici satis fuerint propinqua, tunc totum calculum secundum praecepta Trigonometriae sphaericae institui conueniet. Quin etiam totum spatium inter puncta V, Z, S, Σ satis tuto pro plano haberi poterit, ita vt tum vniuersus calculus ad Trigonometriam planam reducatur.

§. 50. Hoc autem Problema postremum summum vsum praestare poterit in Ecclipsibus solaribus computandis. Postquam enim ex loco geocentrico Σ inuentus fuerit locus centri Lunae apparens S, is cum loco centri Solis in coelo facile comparabitur, quod si pro pluribus temporis momentis durante Ecclipsi repetatur, omnia Phoenomena facile, atque adeo exactissime, determinari poterunt, cum hoc calculo etiam verae Terrae figurae ratio habeatur, quae vulgo plerumque negligi solet.

Supplementum.

De Diametro Lunae apparente,

pro quouis loco, ad quoduis tempus determinando.

Tab. IX, Fig 10. §. 51. Sit $l\,m\,l\,n$ globus Lunae, eiusque centrum in c, vnde ad centrum Terrae C ducatur recta C c, quae vocetur s, et ex C ad Lunam ducantur tangentes C l, C l. Hinc ergo si spectator in ipso centro Terrae esset constitutus, Luna ipsi appareret sub angulo l C l, quem vocemus Diametrum Lunae *centralem* et litera Δ denotemus, cuius ergo semissis sinus erit $\frac{c\,l}{C\,c}$, ideoque sin. $\frac{1}{2}\Delta = \frac{c\,l}{s}$. Quia autem angulus l C l semigradum nunquam notabiliter superare potest, erit proxime

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{c\,l}{s}, \text{ ideoque } \Delta = \frac{2\,c\,l}{s} = \frac{l\,l}{s}.$$

Vbi notetur, numeratorem $l\,l$ semper esse quantitatem constantem, dum denominator C $c = s$ haud mediocriter variari potest.

§. 52. Supra autem vidimus, posita Parallaxi aequatorea $= ae$, esse $ae = \frac{1+\delta}{s}$, vbi $1+\delta$ denotat semidiametrum Aequatoris Terrae, ex quo manifestum est Diametrum Lunae centralem Δ ad Parallaxin aequatoream ae esse vt $l\,l$ ad $1+\delta$, ideoque in ratione constante. Hanc ob rem statuamus $\Delta = \alpha\,ae$, atque ex Theoria Lunae istum coefficientem α definire liceret.

§. 53. Verum quia Diameter centralis non datur, videamus, quomodo se habeat ad Diametrum horizontalem

lem. Sit igitur L locus quicunque in ſuperficie Terrae, atque vidimus, eius diſtantiam a centro C ſemper intra limites 1 et $1+\delta$ contineri, exiſtente $\delta = \frac{1}{250}$. Sit porro angulus CLc rectus, ita vt Luna ſpectatori in L in ipſo Horizonte appareat. Quanquam enim linea horizontalis Lc aliquantum a poſitione normali differre poteſt, tamen inde longitudo rectae s nihil mutatur; vnde ſequitur, Diametrum Lunae horizontalem ex L viſam eſſe ad diametrum centralem ex C viſam in ratione reciproca diſtantiarum, hoc eſt vt Cc ad Lc, quae ratio ab aequalitate tam parum differt, vt differentia tuto negligi queat. Cum enim diſtantia $Cc = s$ reſpectu CL ſit circiter 60, erit $Lc = \sqrt{60^2 - 1} = 60 - \frac{1}{120}$; hinc ergo erit $Lc : Cc = 1 : 1 - \frac{1}{7200}$, ſicque diameter horizontalis ſuperabit diametrum centralem Δ ſui parte 7200^{ma}. Quare cum diameter Lunae horizontalis ſit quaſi $30' = 180''$, iſtud augmentum tantum valebit partem quartam minuti ſecundi, quod ergo tuto omitti poterit, ita vt littera Δ nobis ſemper etiam diametrum Lunae horizontalem denotare poſſit.

§. 54. Hinc ergo intelligimus, diametrum Lunae apparentem in Horizonte prorſus non a figura Terrae pendere atque perpetuo perinde ſe habere, ac ſi Terra eſſet ſphaerica; vnde cum poſuerimus $\Delta = \alpha\, ae$, ex Ephemeridibus, vbi tam Parallaxis aequatorea quam diameter Lunae horizontalis refertur, iſte coefficiens α colligi poterit, ſcilicet valor fractionis $\frac{\Delta}{ae}$. Collatis autem ex nouiſſimis Ephemeridibus inter ſe pluribus caſibus, valor noſter, ſumto medio, tuto aſſumere licet $\alpha = 0,545$ ita vt proxime ſit $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} - \frac{1}{200}$.

§. 55. Cognito ergo valore litterae α, erit $\Delta = 0,545 \cdot ae$. Hinc facile erit pro quauis Parallaxi aequatorea ae diametrum Lunae horizontalem assignare, et cum ae variari possit a $54'$ vsque ad $62'$, tabulam subiungamus, quae ad singula semiminuta prima diametrum horizontalem ostendat.

Parall. ae	Diam. Δ	Parall. ae	Diam. Δ
54′ 0″	29′ 48″	58′ 0″	31′ 37″
54 30	29 54	58 30	31 53
55 0	30 0	59 0	32 9
55 30	30 15	59 30	32 25
56 0	30 31	60 0	32 42
56 30	30 47	60 30	32 58
57 0	31 4	61 0	33 15
57 30	31 20	61 30	33 31
58 0	31 37	62 0	33 47

Tab. IX. Fig. 1. §. 56. Cognito autem Diametro Lunae horizontali Δ, cui proxime aequalis est vti vidimus, diameter centralis, siquidem tantum deficit parte quarta minuti secundi, ex figura, vbi C est centrum Terrae, L locus obseruatoris, Z eius zenith et S locus Lunae, euidens est, eius diametrum apparentam, qui sit $= D$, se habere ad diametrum centralem Δ in ratione reciproca distantiarum, hoc est vt CS ad LS, ita vt sit $D = \Delta . \frac{CS}{LS}$, vnde sequitur fore $D = \Delta . \frac{\sin. ZLS}{\sin. \angle L\Sigma}$. Hinc ad Trigonometricam sphaericam reducendo erit $D = \Delta \frac{\sin. ZS}{\sin. Z\Sigma}$.
Fig. 3.

§. 57.

§. 57. Vocauimus autem arcum $ZS = \zeta$ et arcum $Z\Sigma = \eta$, atque pro data loci latitudine $= \Phi$ et Parallaxi $= \pi$ inuenimus interuallum $S\Sigma = \pi$ fin. ζ. Hinc ergo erit

$$D = \frac{\Delta \text{ fin. } \zeta}{\text{fin. } (ZS - S\Sigma)} = \frac{\Delta \text{ fin. } \zeta}{\text{fin. } (\zeta - \pi \text{ fin. } \zeta)}.$$

At vero eſt proxime

$$\text{fin. } (\zeta - \pi \text{ fin. } \zeta) = \text{fin. } \zeta \text{ cof. } (\pi \text{ fin. } \zeta) - \pi \text{ cof. } \zeta \text{ fin. } \zeta,$$

ideoque

$$\frac{\text{fin. } (\zeta - \pi \text{ fin. } \zeta)}{\text{fin. } \zeta} = \text{cof. } (\pi \text{ fin. } \zeta) - \pi \text{ cof. } \zeta,$$

et quia cof. π fin. $\zeta = 1 - \frac{1}{2} \pi \pi$ fin. ζ^2, vbi quidem poſtremum membrum ſatis tuto negligere liceret, habebimus

$$D = \frac{\Delta}{1 - \pi \text{ cof. } \zeta - \frac{1}{2} \pi \pi \text{ fin. } \zeta^2}.$$

Translato igitur denominatore in numeratorem, ob $\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha\alpha$, quia hic $\alpha = \pi$ cof. $\zeta + \frac{1}{2} \pi \pi$ fin. ζ^2, reperietur

$$D = \Delta (1 + \pi \text{ cof. } \zeta + \tfrac{1}{2} \pi \pi \text{ fin. } \zeta^2 + \pi \pi \text{ cof. } \zeta^2), \text{ ſiue}$$

$$D = \Delta (1 + \pi \text{ cof. } \zeta + \tfrac{1}{2} \pi \pi (1 + \text{cof. } \zeta^2)),$$

quod poſtremum membrum num poſſit omitti ſine errore ſenſibili videamus. Sumamus igitur $\pi = \frac{1}{60}$ et $\zeta = 0$, fietque $\frac{1}{2} \pi \pi (1 + \text{cof. } \zeta^2) = \frac{1}{3600}$, et cum Δ ſit circiter $32'$, eius pars 3600^{ma} facit circiter ſemi-minutum ſecundum, vnde hoc membrum tuto reiicere licet.

§. 58. Ex Diametro igitur horizontali Δ Diameter apparens D erit $D = \Delta (1 + \pi \text{ cof. } \zeta)$. Quoniam ergo in determinatione Parallaxeos ſupra vbique arcum

$ZS = \zeta$ aſſignauimus, facile erit omnibus caſibus Diametrum apparentem D determinare ope ſequentis regulae:

Primo tenendum eſt, Diametrum apparentem non a vertice Obſeruatoris V, *ſed ab eius zenith* Z *pendere; tum vero, cognitam eſſe debere Parallaxin Lunae horizontalem* π *vna cum Diametro horizontali* Δ. *Hincque, ſi diſtantia loci Lunae apparentis* S *a zenith* Z, *fuerit* $ZS = \zeta$, *erit Diameter apparens hoc loco* $D = \Delta(1 + \pi \operatorname{cof.} \zeta)$; *vnde patet in ipſo zenith, vbi* $\zeta = 0$, *diametrum apparentem fore* $D = \Delta(1 + \pi)$, *ſicque non in vertice ſed in zenith Diameter Lunae erit maximus.*

DE

DE AESTIMANDO TEMPORE, QVO DIAMETER SOLIS PER CIRCVLVM QVENDAM, SIVE VERTICALEM, SEV HORIZONTI PARALLELVM, TRANSIRE VIDETVR.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Regulae quae hucusque ab Aſtronomis traditae ſunt, pro aeſtimando tempore, quo diameter Solis per filum quoddam ſiue verticale, ſiue horizontale, in Quadrante vel alio Inſtrumento aſtronomico, tranſire videtur, licet in caſibus plerumque obuiis concluſiones ſatis exactas ſuppeditent; examine tamen exactius inſtituto, facile deprehendetur, eas a rigore geometrico adeo abludere, vt nonnunquam ad concluſiones enormiter a vero aberrantes perducere queant. Vt igitur hac de quaeſtione omni in caſu iudicium certum et nulli dubio obnoxium formari poſſit, disquiſitionem hanc omni rigore inſtituere ſuſcepi, quo ipſo euidens fiet, quid de formulis hucusque adhibitis, ſtatuendum ſit.

§. 2.

Tab. X. Fig. 1.

§. 2. Supponamus igitur primum disquirendum esse de tempore, quo Diameter Solis arcum verticalem Z O N percurrit, et statuamus centrum Solis tempore, quo hunc arcum transit, versari in O, dum vero imago Solis istum arcum tangit, centrum Solis reperiri in Q, adeo vt ducto arcu circuli maximi N Q, normali ad arcum Z O N, N Q aequetur semidiametro Solis. Tum vero si ponatur P polus Aequatoris, et Z zenith loci, atque iungantur P Z, P O, P Q, O Q; facile patet quaestionem propositam nunc eo reduci, vt in quadrilatero P O N Q ex datis arcubus P O, P Q, N Q et angulis P O N, Q N O, quorum hic rectus est, determinetur angulus O P Q; cognito enim isto angulo, tempus innotescet, quo centrum Solis a puncto Q ad punctum O peruenerit. Iam in formulis hucusque adhibitis Astronomi triangulum Q O N vt rectilineum tractare consueuerunt, vnde deducitur $QO = \frac{NQ}{\sin. QON}$. Porro si supponatur $PQ = PO$, et arcum Q O, descriptum polo P, interuallo P O, cum linea Q O coincidere, erit vti ex sphaericis constat, $OPQ = \frac{QO}{\sin. PO}$, vnde fiet

$$\text{ang. } OPQ = \frac{NQ}{\sin. PO . \sin. QON},$$

vbi pro sin. Q O N adhibere solent cos. Z O P, supposito nimirum quod ang. P O Q sit rectus.

§. 3. Cum facile perspiciatur in hoc ratiocinio varia supponi, quae non quidem exacte vera haberi queant, videamus qua ratione ad aequationem omni rigore veram, pro determinando valore anguli O P Q peruenire liceat. Ponamus igitur arcus P O, P Q, N Q, respectiue indigitari per literas a, b, c, angulos autem O P Q, Z O P $= 180 - PON$, per α, β, existente $QNO = 90°$. Cum igitur

igitur ſit in Triangulo Q O N, ſin. N Q = ſin. Q O. ſin. N O Q, ſi facilitatis gratia exprimatur Q O per e, P O Q per θ et Q O N per ε, erit

$$\text{ſin.}\, c = \text{ſin.}\, e.\, \text{ſin.}\, \varepsilon = \text{ſin.}\, e.\, \text{ſin.}\, (180^\circ - \theta - \beta) =$$
$$\text{ſin.}\, e.\, \text{ſin.}\, (\theta + \beta) = \text{ſin.}\, e\, (\text{ſin.}\, \theta.\, \text{coſ.}\, \beta + \text{coſ.}\, \theta.\, \text{ſin.}\, \beta) =$$
$$\text{ſin.}\, e.\, \text{ſin.}\, \theta\, (\text{coſ.}\, \beta + \text{cot.}\, \theta.\, \text{ſin.}\, \beta).$$

Atqui in Triangulo P O Q eſt, ſin. Q O. ſin. P O Q = ſin. P Q. ſin. O P Q, ſeu ſin. e. ſin. θ = ſin. b. ſin. α, tumque

$$\text{cot.}\, \theta = \frac{\text{cot.}\, b.\, \text{ſin.}\, a - \text{coſ.}\, a.\, \text{coſ.}\, \alpha}{\text{ſin.}\, \alpha.}.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis, prodibit ſequens aequatio:

$$\text{ſin.}\, c = \text{ſin.}\, b.\, (\text{coſ.}\, \beta.\, \text{ſin.}\, \alpha. + \text{ſin.}\, \beta\, \text{cot.}\, b.\, \text{ſin.}\, a - \text{ſin.}\, \beta.\text{coſ.}\, \alpha.\text{coſ.}\, a),$$

ideoque

$$\frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b} - \text{cot.}\, b.\, \text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, \beta = \text{ſin.}\, \alpha.\, \text{coſ.}\, \beta. - \text{coſ.}\, \alpha.\, \text{ſin.}\, \beta.\, \text{coſ.}\, a.$$

Quare ſi ponatur tang. β. coſ. a = tang. δ, fiet

$$\frac{\text{ſin.}\, c - \text{coſ.}\, b.\, \text{ſin.}\, c.\, \text{ſin.}\, \beta}{\text{ſin.}\, b.\, \text{coſ.}\, \beta.} = \text{ſin.}\, \alpha - \text{coſ.}\, \alpha.\, \text{tang.}\, \delta,$$

hincque

$$\frac{\text{coſ.}\, \delta\, (\text{ſin.}\, c - \text{coſ.}\, b.\, \text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, \beta)}{\text{ſin.}\, b.\, \text{coſ.}\, \beta.} = \text{ſin.}\, (\alpha - \delta),$$

vnde ob cognitos valores ipſorum a, b, c, β, δ, innoteſcet angulus α.

§. 4. Pro caſu ſpeciali, quo $b = a$, formula aliquanto fiet concinnior; erit enim

$$\frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b} - \text{ſin.}\, \beta.\, \text{coſ.}\, b = \text{ſin.}\, \alpha.\, \text{coſ.}\, \beta - \text{coſ.}\, \alpha.\, \text{ſin.}\, \beta.\, \text{coſ.}\, b,$$

vbi quidem, ſi angulus α valde ſit exiguus, ita vt ſtatui queat coſ. $\alpha = 1$, fiet

$$\frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b} = \text{ſin.}\, \alpha.\, \text{coſ.}\, \beta, \quad \text{hinc ſin.}\, \alpha = \frac{\text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, b.\, \text{coſ.}\, \beta},$$

quae formula cum ſuperius allata congruit, ſi loco ſin. c, sin. α, adhibeantur ipsi arcus c, α. Caeterum pro hoc quoque casu valorem exactiorem ipsius α sequenti approximatione obtinere licebit. Quia est

$$\frac{\sin. c}{\sin. b} = \sin. \alpha. \cos. \beta + (1 - \cos. \alpha) \sin. \beta. \cos. b,$$

ob $1 - \cos. \alpha = 2 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha^2$ fiet

$$\frac{\sin. c}{\sin. b} = 2 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha (\cos. \tfrac{1}{2} \alpha. \cos. \beta + \sin. \tfrac{1}{2} \alpha. \sin. \beta. \cos. b.),$$

vbi si iam ponatur $\cos. \tfrac{1}{2} \alpha = 1$, et terminum $\sin. \tfrac{1}{2} \alpha. \sin. \beta. \cos. b$ prae $\cos. \beta$ euanescere, fiet $2 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\sin. c}{\sin. b. \cos. \beta}$ proxime; tum vero exactius erit:

$$\frac{\sin. c}{\sin. b} = \sin. \alpha. \cos. \beta + 2 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha^2 \sin. \beta. \cos. b =$$

$$\sin. \alpha. \cos. \beta + \frac{\sin. c^2. \cos. b. \sin. \beta}{2 \sin. b^2 \cos. \beta^2},$$ ideoque

$$\sin. \alpha = \frac{\sin. c}{\sin. b. \cos. \beta} - \frac{\sin. c^2. \cos. b. \sin. \beta}{2 \sin. b^2 \cos. \beta^3}.$$

§. 5. Caeterum cum multo faciliori et concinniori ratione aequatio pro determinando angulo α obtineri queat, eam heic proponere aequum est. Ducantur scilicet ex punctis O, N normales ad arcum Z O N, qui sibi invicem occurrant in Π, ita vt sit $\Pi O = \Pi N = 90°$; tumque iungatur arcus P Π, qui si exprimatur per e, angulo O P Π per ζ indigitato, habebimus in triangulo O P Π,

$$0 = \cos. O\Pi = \cos. OP. \cos. P\Pi + \sin. OP. \sin. P\Pi. \cos. OP\Pi,$$

et in triangulo Q P Π,

$$\sin. NQ = \cos. \Pi Q = \cos. PQ. \cos. P\Pi + \sin. PQ. \sin. P\Pi. \cos. QP\Pi,$$

siue $0 = \cos. a. \cos. e + \sin. a. \sin. e. \cos. \zeta$, et

$$\sin. c = \cos. b. \cos. e + \sin. b. \sin. e. \cos. (\zeta - \alpha).$$

In posteriori aequatione, substituto pro $\cos. \zeta$ eius valore $= - \cot. a. \cot. e$, fiet

$$\sin. c = \cos. e. \cos. b + \sin. e. \sin. b. \sin. \zeta. \sin. \alpha - \cos. \alpha. \sin. b \cot. a. \cos. e,$$

hinc

hinc

$$\text{fin. } c - \text{cof. } e \text{ cof. } b = \text{fin. } b \text{ fin. } e \text{ fin. } \zeta \text{ fin. } \alpha$$
$$- \text{cof. } \alpha \text{ fin. } b \text{ cot. } a \text{ cof. } e.$$

Quare cum fit in triangulo O P Π, $\text{cof. } e = \text{fin. } a. \text{ fin. } \beta$, ob $\text{cof. P}\,\Pi = \text{fin. P O. cof. P O}\,\Pi$, et $\text{fin. } e. \text{ fin. } \zeta = \text{cof. } \beta$, ob $\text{fin. P}\,\Pi. \text{ fin. }\Pi \text{ P O} = \text{fin. P O}\,\Pi$, tumque $\text{cot. } e = -\frac{\text{cof. } a}{\text{cof. } \beta}$, fiet his valoribus fuffectis

$$\text{fin. } c - \text{fin. } a \text{ cof. } b \text{ fin. } \beta = \text{fin. } \alpha. \text{ fin. } b \text{ cof. } \beta$$
$$- \text{cof. } \alpha \text{ fin. } b. \text{ cof. } a \text{ fin. } \beta.$$

quae aequatio prorfus eadem eft ac illa, ad quam in §. 3. pertigimus.

§. 6. **Ex** folutione modo allata iam perfpicitur, quaeftionem aeque facile refolui, quemcunque fitum habuerit arcus Z O N, nec prorfus requiri, vt hic arcus ad circulum maximum pertineat. Sic nimirum fupponatur M O N effe arcum cuiuscunque circuli minoris in fuperficie fphaerae coeleftis defcripti, eiusque Polum effe Π, Polo Aequatoris in P exiftente, centrum vero Solis, tranfeuntis per arcum M O N, fuiffe in O, et ante tranfitum, dum imago Solis arcum O N tangere videbatur, centrum iftud fuiffe in Q; vnde ductis arcubus circulorum maximorum Π O, Π Q, erunt hi arcus normales ad M O N, et Q N aequabitur femidiametro Solis. Porro concipiatur per O ductum effe arcum circuli maximi R O, qui iftum M O N ibidem tangit; tumque iungantur P O, P Q arculus circulorum maximorum. Nunc fi arcus P O, P Q, P Π, Q N, Π O, exprimantur per a, b, e, c, f, et anguli R O P, O P Π, O P Q per β, ζ, α, erit ex triangulis O P Π, Q P Π, Tab. X. Fig. 2.

 cof.

$$\text{cof. } \Pi O = \text{cof. } PO . \text{cof. } P\Pi + \text{fin. } PO \text{ fin. } P\Pi . \text{cof. } O\Pi P$$

$$\text{cof. } \Pi Q = \text{cof. } PQ . \text{cof. } P\Pi + \text{fin. } PQ \text{ fin. } P\Pi . \text{cof. } QP\Pi .$$

feu introductis litteris:

$$\text{cof. } f = \quad \text{cof. } a . \text{cof. } e + \text{fin. } a . \text{fin. } e \text{ cof. } \zeta .$$

$$\text{cof. } (f - c) = \text{cof. } b . \text{cof. } e + \text{fin. } b . \text{fin. } e . \text{cof. } (\zeta - \alpha)$$

$$= \text{cof. } b . \text{cof. } e + \text{fin. } b . \text{fin. } e (\text{cof. } \zeta \text{ cof. } \alpha + \text{fin. } \zeta \text{ fin. } \alpha).$$

In pofteriori aequatione pro cof. ζ fubftituatur eius valor $\frac{\text{cof. } (f - \text{cof. } a . \text{cof. } e}{\text{fin. } a \text{ fin. } e}$, fiet $\text{cof. } (f - c) - \text{cof. } b \text{ cof. } e$

$$= \text{fin. } b . \text{fin. } e . \text{fin. } \zeta . \text{fin. } \alpha + \frac{\text{cof. } \alpha . \text{ fin. } b}{\text{fin. } a .} (\text{cof. } f - \text{cof. } a . \text{cof. } e),$$

vnde fi iterum pro cof. e fubftituatur

$$\text{cof. } a . \text{cof. } f + \text{fin. } a . \text{fin. } f \text{ fin. } \beta ,$$

ob $P O \Pi = 90^\circ - R O P$, tumque $\text{fin. } e . \text{fin. } \zeta = \text{fin. } f . \text{cof. } \beta$, haec prodibit aequatio:

$$\text{cof. } (f - c) - \text{cof. } b (\text{cof. } a \text{ cof. } f . + \text{fin. } a \text{ fin. } f \text{ fin. } \beta) = \text{fin. } \alpha \text{ fin. } b \text{ fin. } f . \text{cof. } \beta$$

$$+ \frac{\text{cof. } \alpha \text{ fin. } b}{\text{fin. } a} (\text{cof. } f - \text{cof. } a (\text{cof. } a . \text{cof. } f + \text{fin. } a \text{ fin. } f \text{ fin. } \beta))$$

$$= \text{fin. } \alpha \text{ fin. } b . \text{fin. } f . \text{cof. } \beta$$

$$+ \frac{\text{cof. } \alpha \text{ fin. } b}{\text{fin. } a} (\text{fin. } a^2 \text{ cof. } f - \text{fin. } a \text{ cof. } a \text{ fin. } f \text{ fin. } \beta)$$

$$= \text{fin. } \alpha . \text{fin. } b . \text{fin. } f . \text{cof. } \beta$$

$$+ \text{cof. } \alpha \text{ fin. } b (\text{fin. } a \text{ cof. } f - \text{cof. } a \text{ fin. } f . \text{fin. } \beta)$$

hinc

$$\frac{\text{cof. } (f - c) - \text{cof. } b (\text{cof. } a . \text{cof. } f + \text{fin. } a . \text{fin. } f \text{ fin. } \beta)}{\text{fin. } b . \text{fin. } f \text{ cof. } \beta}$$

$$= \text{fin. } \alpha + \frac{\text{cof. } \alpha}{\text{fin. } f . \text{cof. } \beta} (\text{fin. } a \text{ cof. } f - \text{cof. } a \text{ fin. } f \text{ fin. } \beta .)$$

§. 7. Si formulas, tam in § praeced. quam 5to allatas, attente confideremus, facile perfpicietur, earum computum facillimo modo iniri, fi in Triangulo $\Pi P O$, ex datis lateribus $P O$, $O \Pi$ et angulo $P O \Pi$, quaerantur

tur latus P Π et angul. O P Π; tum enim fiet pro §. 5,

$$\text{cos.}\,(\zeta - \alpha) = \frac{\text{sin.}\,c - \text{cos.}\,b.\,\text{cos.}\,e}{\text{sin.}\,b.\,\text{sin.}\,e}$$

et pro § praecedente,

$$\text{cos.}\,(\zeta - \alpha) = \frac{\text{cos.}\,(f - c) - \text{cos.}\,b.\,\text{cos.}\,e}{\text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,e}\,.$$

Pro priori enim casu, ad constructionem problematis pertinebit primum, vt quaeratur $\text{cot.}\,\zeta = -\text{tang.}\,\beta.\,\text{cos.}\,a$, tum enim erit:

$$\frac{\text{sin.}\,\zeta\,(\text{sin.}\,c - \text{sin.}\,a.\,\text{cos.}\,b.\,\text{sin.}\,\beta)}{\text{sin.}\,b.\,\text{cos.}\,\beta} = \text{cos.}\,(\zeta - \alpha),$$

deinde vero ob

$$\frac{\text{sin.}\,\zeta}{\text{cos.}\,\beta} = \frac{1}{\text{sin.}\,e} \text{ et sin. } a\,\text{sin.}\,\beta = \text{cos.}\,e\,,$$

prodibit formula proposita. Pro posteriori casu constructio reducitur ad quaerendum angulum ζ ope formulae

$$\text{cot.}\,\zeta = \frac{\text{cos.}\,f.\,\text{sin.}\,a. - \text{sin.}\,f.\,\text{cos.}\,a.\,\text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,f.\,\text{cos.}\,\beta}, \text{ et}$$

$$\text{cos.}\,e = \text{cos.}\,a.\,\text{cos.}\,f + \text{sin.}\,a.\,\text{sin.}\,f.\,\text{sin.}\,\beta.$$

§. 8. Si in formula §. 6. allata, ponatur $b = a$, fiet

$$\frac{\text{cos.}\,(f - c) - \text{cos.}\,a^2\,\text{cos.}\,f. - \text{sin.}\,a.\,\text{cos.}\,a\,\text{sin.}\,f.\,\text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,a.\,\text{sin.}\,f.\,\text{cos.}\,\beta}$$

$$= \text{sin.}\,\alpha + \frac{\text{cos.}\,\alpha}{\text{sin.}\,f.\,\text{cos.}\,\beta}\,(\text{sin.}\,a.\,\text{cos.}\,f - \text{cos.}\,\alpha.\,\text{sin.}\,f.\,\text{sin.}\,\beta),$$

et si ponatur $\text{cos.}\,\alpha = 1$, quod fiet, vbi angulus α est valde paruus, obtinebitur,

$$\frac{\text{cos.}\,(f - c)\,\text{cos.}\,f}{\text{sin.}\,a.\,\text{sin.}\,f.\,\text{cos.}\,\beta} = \text{sin.}\,\alpha, \text{ seu}$$

$$\text{sin.}\,\alpha. = \frac{2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c.\,\text{sin.}\,(f - \tfrac{1}{2}\,c)}{\text{sin.}\,a.\,\text{sin.}\,f.\,\text{cos.}\,\beta.},$$

quae formula, si ponatur $f = 90°$, prorsus congruit cum valore approximato, $\text{sin.}\,\alpha = \frac{\text{sin.}\,c}{\text{sin.}\,a.\,\text{cos.}\,\beta}$. Caeterum cum sit

 cos.

$$\frac{\text{cof.}(f-c)-\text{cof.}f}{\text{fin.}a.\text{fin.}f.\text{cof.}\beta}=\text{fin.}\alpha-\frac{(1-\text{cof.}\alpha)}{\text{fin.}f.\text{cof.}\beta}(\text{fin.}a.\text{cof.}f-\text{cof.}a\,\text{fin.}f\,\text{fin.}\beta)$$

$$=2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\text{fin.}\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{fin.}f.\text{cof.}\beta}(\text{fin.}a.\text{cof.}f-\text{cof.}a\,\text{fin.}f.\text{fin.}\beta),$$

fi primum fupponatur

$$2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\text{cof.}(f-c)-\text{cof.}f}{\text{fin.}a.\text{fin.}f.\text{cof.}\beta},\ \text{feu}$$

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\text{fin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{fin.}(f-\tfrac{1}{2}c)}{\text{fin.}a.\text{fin.}f.\text{cof.}\beta},$$

adhibito hoc valore pro $1-\text{cof.}\,\alpha$, valorem propiorem pro fin. α obtinebimus, qui tamen prolixior eft, quam eius vt vfum in calculis aftronomicis facere liceat.

§. 9. Hucusque contemplati quidem non fumus nifi illud tempus, quo centrum Solis a puncto Q ad O peruenit, id eft, quod elabitur inter momentum, quo margo Solis arcum M O N tangere videtur, et illud quo centrum Solis per hunc arcum tranfit. Nunc autem fimul ratio habenda eft temporis, quod inter tranfitum centri per arcum modo dictum et contactum imaginis ab altera parte huius arcus elabitur; neque enim exiftimandum eft, interualla haec temporum praecife aequalia effe. Scilicet fi centrum Solis tempore fecundi contactus verfetur in Q′, puncto contactus exiftente N′, fi iungantur P N′ Q′, Π N′, iamque exprimatur P Q′ per b', nunc disquirendum de formula, quae valorem anguli O P N′ $=\alpha'$ exhibet. Caeterum facili adhibita attentione perfpicietur, aequationem quaefitam huiusmodi effe formae:

$$\frac{\text{cof.}(f+c)-\text{cof.}b'(\text{cof.}a.\text{cof.}f+\text{fin.}a.\text{fin.}f.\text{fin.}\beta)}{\text{fin.}c.\text{fin.}f.\text{cof.}\beta}$$

$$=-\text{fin.}\alpha'+\frac{\text{cof.}\alpha'}{\text{fin.}f.\text{cof.}\beta}(\text{fin.}a.\text{cof.}f-\text{cof.}a.\text{fin.}f.\text{fin.}\beta).$$

Pro

Pro illis igitur casibus vbi anguli α, α' sunt valde parui, ideoque etiam parum inter se differunt, ita vt supponere liceat $\cos. \alpha = \cos. \alpha'$, et $\cos. \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = 1$, si insuper supponatur facilitatis gratia $a = b = b'$, prodibit,

$$\sin. \alpha + \sin. \alpha' = \frac{\cos.(f - c) - \cos.(f + c)}{\sin. a. \sin. f. \cos. \beta},$$

ideoque

$$\sin. \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{\sin. c. \sin. f}{\sin. a. \sin. f. \cos. \beta} = \frac{\sin. c}{\sin. a. \cos. \beta},$$

ita vt nunc quidem liquido patescat, valorem approximatum ipsius $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ per istam formulam:

$$\sin. \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') \frac{\sin. c}{\sin. a. \cos. \beta},$$

seu etiam per hanc: $\alpha + \alpha' = \frac{2c}{\sin. a. \cos. \beta}$ exprimi, denotante c semidiametrum Solis.

§. 10. Caeterum haec formula multo facilius deducitur ex istis binis aequationibus principalibus:

$$\cos.(f - c) = \cos. a. \cos. e + \sin. a. \sin. e \cos.(\zeta - \alpha)$$
$$\cos.(f + c) = \cos. a. \cos. e + \sin. a. \sin. e \cos.(\zeta + \alpha')$$

vnde habetur

$$\frac{\cos.(f - c) - \cos.(f + c)}{\sin. a. \sin. e} = \cos.(\zeta - \alpha) - \cos.(\zeta + \alpha'),$$

ideoque

$$\frac{\sin. c. \sin. f}{\sin. a. \sin. e} = \sin.\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) \sin.\left(\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2}\right),$$

vbi si ponatur $\alpha - \alpha' = 0$, fiet

$$\sin.\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) = \frac{\sin. c \sin. f}{\sin. a \sin. e \sin. \zeta} = \frac{\sin. c}{\sin. \alpha. \cos. \beta}, \text{ ob}$$
$$\sin. f \cos. \beta = \sin. e. \sin. \zeta.$$

Tum vero simul patet, si innotescat $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$, exacte fore

$$\sin. \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{\sin. c. \sin. f}{\sin. a. \sin. e. \sin.\left(\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)}$$

$= \sin.$

$$= \frac{\text{ſin. } c \text{ ſin. } \zeta}{\text{ſin. } c. \text{ coſ. } \beta. \text{ ſin. } (\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2})},$$

vbi tamen, vt in ſuperioribus, ſupponitur $b = b' = a$. Praeterea quia eſt

$$\text{ſin.} (\zeta + \tfrac{\alpha' - \alpha}{2}) = \text{ſin. } \zeta. \text{ coſ. } (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2}) + \text{coſ. } \zeta \text{ ſin. } (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2})]$$
$$= \text{ſin. } \zeta + \text{coſ. } \zeta. \text{ ſin. } (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2}),$$

hinc

$$\frac{\text{ſin. } (\zeta + \frac{\alpha' - \alpha}{2})}{\text{ſin. } \zeta} = 1 + \text{cot. } \zeta \text{ ſin. } (\tfrac{\alpha' - \alpha}{2}),$$

adeoque, ob ſin. $(\frac{\alpha' - \alpha}{2})$ valde paruum, loco

$$\frac{1}{1 + \text{cot. } \zeta. \text{ ſin. } (\frac{\alpha' - \alpha}{2})} \text{ adhibere licebit}$$

$1 - \text{cot. } \zeta. \text{ ſin. } (\frac{\alpha' - \alpha}{2})$; quare fiet

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha') = \frac{\text{ſin. } c}{\text{ſin. } a \text{ coſ. } \beta} (1 - \text{cot. } \zeta. \text{ ſin. } \tfrac{\alpha' - \alpha}{2}),$$

quae formula valorem ſatis propinquum ipſius $\alpha + \alpha'$ exprimit.

§. 11. Pro inueniendo autem valore anguli $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$, ſequenti ratiocinio vti licebit: quia eſt

$$\text{coſ. } (f - c) = \text{coſ. } a. \text{ coſ. } e + \text{ſin. } a. \text{ ſin. } e \text{ coſ. } (\zeta - \alpha) \text{ et}$$
$$\text{coſ. } (f + c) = \text{coſ. } a. \text{ coſ. } e + \text{ſin. } a. \text{ ſin. } e \text{ coſ. } (\zeta + \alpha'),$$

fiet

$$\frac{\text{coſ. } (f - c) + \text{coſ. } (f + c) - 2 \text{ coſ. } a. \text{ coſ. } e}{\text{ſin. } a. \text{ ſin. } e} = \text{coſ. } (\zeta - \alpha) + \text{coſ. } (\zeta + \alpha'),$$

hincque

$$\frac{\text{coſ. } f \text{ coſ. } c - \text{coſ. } a \text{ coſ. } e}{\text{ſin. } a. \text{ ſin. } e} = \text{coſ. } (\zeta + \tfrac{1}{2} (\alpha' - \alpha)) \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha'),$$

vnde

coſ.

$$\frac{\text{cof. } f.\ \text{cof. } c - \text{cof. } a.\ \text{cof. } e}{\text{fin. } a.\ \text{fin. } e.\ \text{cof. } \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')} = \text{cof. } \zeta\ \text{cof. } \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$$
$$- \text{fin. } \zeta.\ \text{fin. } \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha),$$

hinc igitur obtinebimus

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \frac{-\text{cof. } f.\ \text{cof. } c + \text{cof. } a.\ \text{cof. } e}{\text{fin. } \zeta.\ \text{fin. } a.\ \text{fin. } e.\ \text{cof. } \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')},$$

vbi quidem fi ponantur cof. $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$, cof. $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ vnitati aequales, tum vero loco cot. ζ, cof. e, et fin. ζ. fin. e fubftituantur eorum valores:

$$\frac{\text{cof. } f.\ \text{fin. } a. - \text{fin. } f.\ \text{cof. } a.\ \text{fin. } \beta}{\text{fin. } f\ \text{cof. } \beta},\ \text{cof. } a\ \text{cof. } f + \text{fin. } a\ \text{fin. } f.\ \text{fin. } \beta,$$

fin. f. cof. β, fiet

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \frac{\text{cot. } f.\ (1 - \text{cof. } c)}{\text{fin. } a\ \text{cof. } \beta} = \frac{2\ \text{cot. } f.\ \text{fin. } \frac{1}{2} c^2}{\text{fin. } a\ \text{cof. } \beta}.$$

Caeterum quia correctio cot. ζ. fin. $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ valorem anguli ζ involuit, facile perfpicitur, iis in cafibus, vbi huius correctionis rationem habere neceffe fit, multum praeftare, vt ex inuentis valoribus anguli ζ et lateris e, quaerantur anguli $\zeta - \alpha$, $\zeta + \alpha'$ per formulas faepius propofitas, pro quarum faciliori computo ftatuere licebit, cof. a. cof. e = cof. g, vnde fiet

$$\text{cof. } (\zeta - \alpha) = \frac{\text{cof. } (f - c) - \text{cof. } g}{\text{fin. } a.\ \text{fin. } e}$$
$$= \frac{2\ \text{fin. } \frac{1}{2}(f + c + g)\ \text{fin. } \frac{1}{2}(g - f + c)}{\text{fin. } a\ \text{fin. } e} \quad \text{et}$$
$$\text{cof. } (\zeta + \alpha') = \frac{\text{cof. } (f + c) - \text{cof. } g}{\text{fin. } a\ \text{fin. } e}$$
$$= \frac{2\ \text{fin. } \frac{1}{2}(f + c + g)\ \text{fin. } \frac{1}{2}(g - f - c)}{\text{fin. } a\ \text{fin. } e}.$$

 §. 12.

§. 12. Quia eſt

$$\frac{\sin. c.\ \sin. f}{\sin. a.\ \sin. e.\ \sin. \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)} = \sin. \zeta + \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)$$

$$= \sin. \zeta.\ \cos. \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) + \cos. \zeta\ \sin. \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) \text{ et}$$

$$\frac{\cos. f.\ \cos. c - \cos. a\ \cos. e}{\sin. a.\ \sin. e.\ \cos. \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)} = \cos. \zeta.\ \cos. \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$$

$$- \sin. \zeta.\ \sin. \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha),$$

ſi breuitatis gratia ponatur

$$\frac{\alpha' + \alpha}{2} = s;\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = d;\ \frac{\sin. c.\ \sin. f}{\sin. a.\ \sin. e} = M \text{ et}$$

$$\frac{\cos. f.\ \cos. c - \cos. a.\ \cos. e}{\sin. a\ \sin. e} = N, \text{ erit}$$

$$\frac{M}{\sin. s} = \sin. \zeta.\ \cos. d + \cos. \zeta.\ \sin. d, \text{ et}$$

$$\frac{N}{\cos. s} = \cot. \zeta.\ \cos. d - \sin. \zeta.\ \sin. d,$$

vnde ſumtis quadratis, illisque inuicem additis, obtinebitur

$$\frac{M^2}{\sin. s^2} + \frac{N^2}{\cos. s^2} = 1, \text{ hinc}$$

$$M^2 (1 - \sin. s^2) + N^2 \sin. s^2 = \sin. s^2 - \sin. s^4,$$

ideoque

$$\sin. s^4 - \sin. s^2 (1 - N^2 + M^2) + M^2 = 0,$$

vbi igitur valor ipſius s ope aequationis biquadraticae determinari debet, quae tamen inſtar quadraticae tractari poteſt. Caeterum quia $\sin. s^2$ ſupponitur valde paruum, habebitur approximando,

$$\sin. s^2 = \frac{M^2}{1 - N^2},\ \cos. s^2 = \frac{1 - N^2 - M^2}{1 - N^2},$$

tumque porro

$$\sin. s^2 = \frac{M^2.\ \cos. s^2}{\cos. s^2 - N^2} = \frac{M^2 (1 - N^2 - M^2)}{1 - 2N^2 - M^2 + N^4}.$$

§. 13.

§. 13. In superioribus supposuimus esse $b = b' = a$. Quod si vero rationem quoque habere velimus discrepantiae, quae inter hos arcus intercedit, inuestigatio anguli $\alpha + \alpha'$ sequenti ratione expedienda est: Ob

$$\cos.(f-c) = \cos. b \cos. e + \sin. b \sin. e \cos.(\zeta - \alpha),$$
$$\cos.(f+c) = \cos. b' \cos. e + \sin. b' \sin. e \cos.(\zeta + \alpha'),$$

si prior aequatio multiplicetur per $\sin. b'$, posterior per $\sin. b$, earumque differentia capiatur, erit

$$\cos.(f-c)\sin. b' - \cos.(f+c)\sin. b = \cos. e \sin.(b'-b)$$
$$+ \sin. b. \sin. b' \sin. e. (\cos.(\zeta-\alpha) - \cos.(\zeta+\alpha')),$$

hincque

$$\frac{\cos.(f-c).\sin. b' - \cos.(f+c)\sin. b - \cos. e. \sin.(b'-b)}{\sin. b' \sin. b \sin. e}$$
$$= 2 \sin. \tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) \sin.(\zeta + \tfrac{\alpha'-\alpha}{2}), \text{ siue}$$

$$\cos. f. \cos. c. (\sin. b' - \sin. b) + \sin. f. \sin. c (\sin. b' + \sin. b)$$
$$- \cos. e. \sin.(b'-b) = 2 \sin. b' \sin. b \sin. e. \sin.(\tfrac{\alpha'+\alpha}{2}) \sin.(\zeta + (\tfrac{\alpha'-\alpha}{2})).$$

Tumque ob

$$\sin. b' - \sin. b = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(b'-b) \cos. \tfrac{1}{2}(b'+b),$$
$$\sin. b' + \sin. b = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(b'+b) \cos. \tfrac{1}{2}(b'-b),$$
$$\sin.(b'-b) = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(b'-b) \cos. \tfrac{1}{2}(b'-b),$$

colligitur

$$\sin. f. \sin. c. \sin. \tfrac{b'+b}{2} \cos. \tfrac{b'-b}{2}$$
$$+ \cos. f \cos. c \sin. \tfrac{b'-b}{2} \cos. \tfrac{b'+b}{2} - \cos. e \sin. \tfrac{b'-b}{2} \cos. \tfrac{b'-b}{2}$$
$$= \sin. b'. \sin. b. \sin. e. \sin. \tfrac{\alpha'+\alpha}{2}. \sin.(\zeta + \tfrac{\alpha'-\alpha}{2});$$

ex qua formula, si ponatur

$$\tfrac{b'+b}{2} = a, \cos. \tfrac{b'-b}{2} = 1 \text{ et } \sin.(\zeta + \tfrac{\alpha'-\alpha}{2}) = \sin. \zeta,$$

prodibit

 sin.

$$\text{fin.}\,\frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{\text{fin.}f.\text{fin.}c.\text{fin.}a + \text{cof.}f.\text{cof.}c.\text{cof.}a.\text{fin.}\frac{b'-b}{2} - \text{cof.}e.\,\text{fin.}\frac{b'-b}{2}}{\text{fin.}b.\,\text{fin.}b'.\,\text{fin.}e.\,\text{fin.}\zeta}$$

$$= \frac{\text{fin.}c.\,\text{fin.}a}{\text{fin.}b.\,\text{fin.}b'.\,\text{cof.}\beta} - \frac{\text{fin.}\frac{b'-b}{2}.\,\text{cof.}f.\,\text{cof.}a\,(1-\text{cof.}c)}{\text{fin.}b.\,\text{fin.}b'.\,\text{fin.}f.\,\text{cof.}\beta}$$

$$- \frac{\text{fin.}a.\,\text{fin.}\beta.\,\text{fin.}\frac{b'-b}{2}}{\text{fin.}b.\,\text{fin.}b'.\,\text{cof.}\beta},$$

ob cot. $e = \text{cof.}\,a : \text{cof.}\,f + \text{fin.}\,a.\,\text{fin.}\,f.\,\text{fin.}\,\beta$ et $\text{fin.}\,e\,\text{fin.}\,\zeta = \text{fin.}\,f.\,\text{cof.}\,\beta$. Heic autem membrum intermedium, ob factorem $\text{fin.}\,\frac{b'-b}{2}\,(1-\text{cof.}\,c)$ prorſus exiguum, tuto omitti poſſe videtur, vnde conficitur

$$\text{fin.}\,\frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{\text{fin.}c.\,\text{fin.}a}{\text{fin.}b.\,\text{fin.}b'.\,\text{cof.}\beta} - \frac{\text{fin.}a.\,\text{tang.}\beta.\,\text{fin.}\frac{b'-b}{2}}{\text{fin.}b.\,\text{fin.}b'}.$$

Caeterum inutile foret heic prolixius inquirere, quomodo haec expreſſio alteriori approximatione ad maiorem adhuc exactitudinem perduci queat, cum iſtis in caſibus, vbi valores angulorum α', α, multum inter ſe discrepantes prodire queant, ſine dubio praeſtabit formulis omni rigore veris vti.

§. 14. Plerumque quidem euenit, vt arcus P O, interuallo temporis angulo O P Q vel O P Q′ reſpondens, vix ſenſibilem patiatur mutationem; interim tamen vt iſta mutatio ſenſibilis fieret, quin cognita ſupponi non poteſt, niſi ipſe angulus O P Q vel O P Q′ innotuerit, negotium ita perfici poterit, vt primum exquiratur angul. O P Q vel O P Q′, qui pro valore conſtanti ipſius P O locum haberet, quo ipſo innoteſcet, quantam mutationem declinatio interuallo temporis, quod angulo O P Q vel O P Q′ reſponspondet, subierit, vnde denuo variatio anguli O P Q ex mutato valore ipsius P Q innotescet. Constat autem ex Trigonometria sphaerica, esse variationem anguli Π P Q in triangulo Π P Q ad variationem lateris P Q $= -$ sin. P Q Π : sin. P Q, vbi loco anguli P Q Π plerisque in casibus angulus P O Π adhiberi poterit. Tab. X. Fig. 3.

§. 15. In §. sup. 12, vbi de inuestigando valore anguli $s = \frac{\alpha' + \alpha}{2}$ egimus, inuenimus aequationem biquadraticam huic proposito inseruientem. Conueniet igitur vt examinemus, an ipsa quaestionis indoles ad aequationem biquadraticam perducat. Sit igitur M O N arcus circuli, quem centrum Solis in puncto O transit, punctis contactuum imaginis Solis existentibus in Q, Q'; tum ducto ad polum Aequatoris arcu circuli maximi P O, facile patet, circulum Polo P, interuallo P O descriptum, circulum M O N in alio quodam puncto O' secturum fore, ibique centrum Solis hunc arcum transiturum esse; vnde huic puncto correspondentes dabuntur, in quibus imago Solis arcum M O' contingere videbitur. Haec igitur puncta si indigitentur per R, R'; angulus α designabit vel Q P O vel R P O, et α' designabit vel O P Q' vel O P R', quare iam patet, sin. s quatuor habere posse valores, vbi tamen singuli bini non nisi signis differunt; sic enim fiet

$$\text{sin. } QPQ' = -\text{sin. }(RPO + OPR') = \text{sin. }(360^\circ - QPQ'),$$

tumque

$$\text{sin. }(RPO + OPQ') = -\text{sin. }(OPQ + OPR'), \text{ nam}$$

$$RPO + OPQ + OPQ' + OPR' = 360^\circ, \text{ ob}$$

$$OPQ = O'PR; \; OPQ' = R'PO'.$$

§. 16. Quae hucusque exposita fuerunt, de transitu Solis per arcum cuiuscunque circuli in superficie sphaerae coelestis descripti valent, ideoque eorum applicatio facile ad transitum imaginis Solis per fila verticalia et horizontalia quadrantis et alius instrumenti astronomici fieri potest. Filum enim verticale exprimit tangentem circuli verticalis, et filum horizontale exprimet tangentem circuli maximi, per punctum, vbi bina fila se decussant, ad circulum verticalem perpendiculariter descripti. Pro reliquis vero casibus, vbi de transitu per alios circulos quaestio est, obseruari conuenit, situm huiusmodi circuli in sphaera coelesti ita determinari, vt per polum Aequatoris et polum circuli propositi ducatur circulus maximus, circulo isto in puncto M occurrens, tum vero descriptus intelligatur meridianus P Z per polum aequatoris et zenith loci: his enim factis, situs circuli istius innotescet, ex cognitis arcubus Π P, Π M, et angulo Z P M vel Z P Π.

§. 17. Quoniam in valoribus approximatis pro $\alpha + \alpha'$ valor anguli R O P $= \beta$ ingreditur, necesse erit vt ostendamus, qua ratione hunc angulum inuestigare conueniet. Primum igitur, quia tempus quo transitus Solis obseruatus est, cognitum habeatur, dabitur etiam valor arcus P O; tumque si circulus, per quem transitus factus sit, fuerit maximus, ponamus illum occurrere meridiano loci in Z, vnde ex cognitis Z P, P O, Z P O, dabitur angulus Z O P. At si circulus fuerit minor, ex cognitis angulis Z P Π, Z P O, innotescit O P Π, vnde ex datis P O, P Π et angulo O P Π cognoscetur angulus P O Π $= 90° -$ R O P, vel etiam ex cognitis lateribus P Π, Π O et angulo Π P O, quaerendus est angulus P O Π. Caeterum consideratio postesterioris huius casus in praxi astronomica inutilis est, quia, dum obseruatur transitus imaginis Solis per filum quomodocunque dispositum, facile intelligitur hoc filum repraesentare tangentem circuli alicuius maximi.

§. 18. Vt autem vsus eorum, quae in praecedentibus allata sunt, eo euidentius innotescat, ad exempla nonnulla descendamus. Ponamus igitur quaestionem esse de tempore, quo imago Solis filum verticale transit, existente $c = 15', 30''$, $PO = a = 67°$ et angulo $POZ = \beta = 85°$. Per formulam igitur ab Astronomis vsitatam, $\alpha + \alpha' = \frac{2c}{\text{sin.}\, a.\, \text{cos.}\, \beta}$, fiet $\alpha + \alpha' = 6°, 26', 24''$. At calculo secundum formulas nostras exacte veras instituto, reperitur primum $e = 23°, 30', 30''$ et $\zeta = 167°, 22', 44'', 6$, tum vero $\zeta - \alpha$, $164°, 29', 3'', 8$, et $\zeta + \alpha' = 171°, 9', 29'', 7$, ita vt sit $\alpha' + \alpha = 6°, 40', 25'', 9$; $\alpha = 2°, 53', 40'', 8$; $\alpha' = 3°, 46', 45'', 1$; hinc $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 26', 32'', 1$. Tum vero si formulae:

$$\text{sin.}\, \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\text{sin.}\, c.\, \text{sin.}\, \zeta.}{\text{sin.}\, a.\, \text{cos.}\, \beta.\, \text{sin.}\, (\zeta + \frac{\alpha' + \alpha}{2})}$$

vsum facere velimus, reperiemus $\frac{\alpha' + \alpha}{2} = 3°, 20', 13'', 1$. ex quo prior noster calculus satis confirmatur, dissensu vtriusque conclusionis $\frac{1}{5}$ scrupuli secundi vix exsuperante Hoc igitur exemplum commonstrat, variis in casibus fieri posse, vt formula ab Astronomis proposita pro computando transitu diametri Solis per filum siue verticale seu horizontale, ad erroneas perducat conclusiones, errore quidem in casu proposito existente 14 minut. primor., vnde pro tempore transitus error 56 secund. resultaret.

§. 19.

§. 19. Approximatio pro valore ipſius ſin. $\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ ſupra §. 11. allata, caſu quo $f = 90°$, omnino incongrua euadit; interim tamen re bene perpenſa, aliam approximationem pro hoc caſu adferre licebit. Cum nimirum ſit

$$\text{ſin.}\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,e.\,\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{coſ.}\frac{\alpha' + \alpha}{2}} + \text{cot.}\,\zeta\,\text{coſ.}\frac{\alpha' - \alpha}{2}$$

ſi ponatur coſ. $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 1$, tumque pro cot. ζ, coſ. e, ſin. e. ſin. ζ introducantur eorum valores

$$-\text{tang.}\,\beta.\,\text{coſ.}\,a,\ \text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,\beta \text{ et coſ.}\,\beta; \text{ fiet}$$

$$\text{ſin.}\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\text{tang}\,\beta\,\text{coſ}\,\alpha\left(1 - \text{coſ.}\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right)}{-\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)} = \frac{\text{tang.}\,\beta.\,\text{coſ.}\,a.\,2\,\text{ſin.}\frac{(\alpha' + \alpha)^2}{4}}{-\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)},$$

ſeu etiam, quia plerumque $\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ valde paruum eſt,

$$\alpha' - \alpha = \alpha' + \alpha.\,\text{ſin.}\frac{\alpha' + \alpha}{4}\,\text{tang}\,\beta\ \text{coſ.}\,\alpha.$$
$$= -(\alpha' + \alpha)\,\text{ſin.}\frac{\alpha' + \alpha}{4}\,\text{cot.}\,\zeta.$$

Verumtamen ſi pro caſu propoſito huius approximationis vſum facere velimus, ponendo $\alpha' + \alpha = 6°, 26', 34''$, inuenimus $\alpha' - \alpha = 47', 24''$, diſſenſu a veritate plusquam quinque minutorum primorum exiſtente, adeo vt in caſibus dubiis vix vllo cum vſu haec approximatio adhiberi queat.

§. 20. Quia valores angulorum α', α, adeo diuerſi eſſe poſſunt, facile quidem perſpicitur, caſus incidere, vbi pro ang. α' valores conuenientes proponi nequeant; quod fiet vbi $\frac{\text{ſin.}\,c + \text{coſ.}\,a.\,\text{coſ.}\,e}{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,e} > 1$, hoc eſt, ſin. $c > -$ coſ. $(a + e)$, vel ſin. $c >$ ſin. $(a + e - 90)$. Limes ergo valorem realium ipſius α' pro caſu, quo $a = 67°$ et $c = 15', 30''$, is erit, vbi $\beta = 86°, 26', 43''$, tum ſcilicet fiet $e = 23°, 15'$, 30'',

$30''$, ideoque $a + e - 90 = 15', 30'' = c$, hinc habebitur $\zeta + \alpha' = 180$, et $\zeta - \alpha = 167°, 12', 39''. 4$, existente $\zeta = 170°, 57', 58'', 9$, ex quo colligitur $\alpha' + \alpha = 12°, 47', 20'', 6$, et $\alpha' - \alpha = 5°, 16', 41'', 6$, ita vt haec differentia angulorum α', α, angulum minorem α magnitudine excedat. Manentibus autem valoribus ipsorum a et c, si β vltra $86°, 26', 42''$ augeatur, liquet pro α' nullos valores reales adferri posse.

§. 21. Praeterea illi quoque incidunt casus, vbi neque angulus α valorem sortitur realem; patet autem limitem valorum realium pro α ibi constituendum, vbi ang. $\beta = 90°$, hoc est vbi circulus minor, polo P, interuallo P O descriptus, tangit circulum Z O in O. Pro hoc autem casu valor anguli $OPQ = \alpha$, sequentem in modum indagatur. In Triang. $QP\Pi$ erit $\text{cof.}\,\Pi Q = \text{fin.}\,NQ = \text{cof.}\,PQ\ \text{cof.}\,P\Pi + \text{fin.}\,PQ.\ \text{fin.}\,P\Pi.\ \text{cof.}\,QP\Pi = \text{cof}\,OP.\ \text{cof.}\,P\Pi + \text{fin}\,OP.\ \text{fin}\,P\Pi.\ \text{cof.}\,QP\Pi = \text{cof.}\,OP.\ \text{fin.}\,OP\ (1 - \text{cof.}\,OPQ)$, ob $OP + PO = 90°$ et $OPQ = 180 - QP\Pi$, hinc fiet Tab. X. Fig. 4.

$$\text{fin.}\,c = \text{fin.}\,2\,a.\ \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \quad \text{et} \quad \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2 = \frac{\text{fin.}\,c}{\text{fin.}\,2\,a}.$$

Idem vero et sic demonstratur:

$\text{fin.}\,NQ = \text{fin.}\,OQ.\ \text{cof.}\,POQ = 2\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\,OQ.\ \text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\,OQ.\text{cof.}POQ$, atqui est

$$\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\,OQ = \text{fin.}\,OP.\ \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\,OPQ. \quad \text{et} \quad \text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\,OQ = \frac{\text{cof.}\,OP}{\text{cof.}\,PS},$$

tumque denuo

$$\frac{\text{cof.}\,POQ}{\text{cof.}\,PS} = \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\,POQ, \ \text{proinde}$$

$$\text{fin.}\,NQ = 2\,\text{fin.}\,OP.\ \text{cof.}\,OP.\ \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\,OPQ^2.$$

Tab X. Fig. 5 §. 22. Denique ſi ſitus circuli maximi S M N talis ſit, vt imago Solis eum in N tangat, centrum autem Solis non propius quam ad diſtantiam datam M O, ſemidiametro Solis minorem, huic arcui appropinquare poſſit, quaeritur valor anguli O P Q, qui reſpondet tempori, quo centrum Solis a Q ad O peruenerit. Adhibita igitur eadem conſtructione ac in praecedentibus, ſi arcus O M littera e exprimatur, erit $P \Pi = 90 - a - e$, hinc ob

$$\text{coſ.}\ \Pi Q = \text{coſ.}\ P Q.\ \text{coſ.}\ \Pi P + \text{ſin.}\ P Q.\ \text{ſin.}\ \Pi P.\ \text{coſ.}\ Q P \Pi,$$

$$\text{ſin.}\ c = \text{coſ.}\ a.\ \text{ſin.}\ (a + e) - \text{ſin.}\ a.\ \text{coſ.}\ (a + e)\ \text{coſ.}\ \alpha,$$

tumque

$$\text{ſin}\ c - \text{coſ.}\ a\ \text{ſin.}(a+e) + \text{ſin.}\ a\ \text{coſ.}(a+e) = \text{ſin.}\ a\ \text{coſ}(a+e)(1 - \text{coſ}\ \alpha)$$

ſiue $\text{ſin.}\ c - \text{ſin.}\ e = \text{ſin.}\ a\ \text{coſ.}\ (a + e)\ (1 - \text{coſ.}\ \alpha)$ et

$$\frac{\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}(c - e)\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(c + e)}{\text{ſin.}\ a.\ \text{coſ.}\ (a + e)} = \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ \alpha^2.$$

§. 23. Etiamſi vero caſus exiſtant, quibus formula iſta approximatione eruta: $\text{ſin.}\ \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\text{ſin.}\ c}{\text{ſin.}\ \alpha.\ \text{coſ}\ \beta.}$ ad valde erroneas ducat concluſiones: tamen, eo non obſtante, eius vſus rite in calculis aſtronomicis adhibetur, quod hi caſus non prodeant, niſi vbi angulus valde fuerit magnus. Inuenimus, autem calculo inſtituto pro angulo $\beta = 78°$, exiſtente $a = 67$, et $c = 15', 30''$, per formulas noſtras omni rigore veras, $\alpha' + \alpha = 2°, 42', 8'', 8$, et per formulam approximatione erutam, $\alpha' + \alpha = 2°, 42'\ 0''$, diſſenſu non maiore quam $8'', 8$, exiſtente; vnde ſi approximatione vti quis vellet, in determinando tempore tranſitus nonniſi errorem ſemiſſis minuti ſecundi committere poterit. Hinc igitur concludimus, pro angulis β minoribus quam $78°$,

ſine

fine fenfibilis erroris periculo formulam fin. $\frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{\text{fin.}\, c}{\text{fin.}\, a.\, \text{cof.}\, \beta}$, in vfum reuocari poffe.

§. 24. Cum maxima variatio in declinatione Solis, interuallo 24 horarum, 23 minuta prima cum dimidio vix excedat, pro inueftigando angulo $\alpha' + \alpha$, variationis in declinatione Solis rationem habere neceffe non erit, nifi illis in cafibus, vbi ang. β propius ad 90° accedit. Tum vero fi arcus P Q dicatur b et arcus P Q', b', horum arcuum differentia ab arcu P O inuenietur, fi primum pro computando angulo O P Q' adhibeatur formula: fin. $\frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{\text{fin.}\, c}{\text{fin.}\, a\, \text{cof.}\, \beta}$, tum vero exquiratur variatio in declinatione Solis, refpondens tempori per angulum modo inuentum $\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)$ expreffo, quae fi dicatur δ, erit $b = a - \delta$, et $b' = a + \delta$, proxime; quibus valoribus adhibitis fiet vt antea

$$\text{fin.}\, c - \text{cof.}\, b.\, \text{cof.}\, e = \text{fin.}\, b.\, \text{fin.}\, e.\, \text{cof.}\, (\zeta - \alpha), \text{ et}$$
$$-\text{fin.}\, c - \text{cof.}\, b'.\, \text{cof.}\, e = \text{fin.}\, b'.\, \text{fin.}\, e.\, \text{cof.}\, (\zeta + \alpha').$$

Quodfi vero valores ipforum b, b' fatis exacti nondum habeantur, eos denuo noua correctione emendare licebit.

§. 25. Quae in praecedentibus allata funt, applicari quidem quoque poterunt ad tranfitum Lunae per filum quodpiam in foco cuiusdam tubi collocatum; verum tum praeter cautelas modo commemoratas obferuandas, infuper ratio habenda eft fitus Lunae per Parallaxin immutati, nec non motus Lunae in afcenfionem rectam; ita vt loco declinationis verae adhiberi debeat declinatio apparens, tum vero conuerfio anguli O P Q in tempus debet fieri in ratione, qua 15° excedunt differentiam inter motum horarium Lunae et Solis in afcenfionem rectam, fi fcilicet tempus motui Solis accommodatum adhibeatur.

OBSERVATIONES DE PROBLEMATE, QVO QVAERITVR ELEVATIO POLI, EX OBSERVATA ALTITVDINE SOLIS, ET OBSERVATO QVOQVE TEMPORE, QVO DIAMETER SOLIS FILVM ALIQVOD, SIVE VERTICALITER, SIVE HORIZONTALITER DISPOSITVM, PERTRANSIT.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Problema hoc a celebri Anglorum Astronomo *Lyons* in Ephemeridibus nauticis pro Anno 1778 propositum habetur, cumque primo intuitu valde speciosum videatur, omnino meretur vt accuratiori examini subiiciatur. Re autem bene pensitata liquet, Problema eo reduci, vt in triangulo sphaerico ZSP, vbi Z designat zenith loci, P polum Aequatoris et S locum Solis, ex datis lateribus ZS, PS et angulo ZSP, quaeratur latus PZ, seu, vti Astro-

Tab. XI. Fig. 1.

Aſtronomi loqui ſolent, vt ex datis altitudine et declinatione Solis, nec non angulo parallactico, quaeratur eleuatio poli. Scilicet per obſeruatum tempus, quod diameter Solis impendit ad percurrendum filum commemoratum, dabitur quantitas anguli parallactici, vt mox declarabimus. Prius autem operae pretium erit, vt examinemus, quanti errores in valorem arcus P Z deriuentur, ex illis erroribus, qui in obſeruando ſiue arcu Z S, ſeu angulo Z S P commiſſi fuerunt. Nam de arcu P S, cuius valor ex tabulis deſumitur, vix vllum eſſe poteſt dubium, modo Longitudo geographica loci, in quo obſeruatio facta eſt, et tempus ipſum obſeruationis proxime cognita habentur.

§. 2. Primum igitur, ſi quaeratur variatio ipſius P Z ex variatione S Z oriunda, exprimantur arcus P Z, P S, Z S per z, a, v, et angulus Z S P per η, eritque vt ex doctrina triangulorum ſphaericorum conſtat

$$\cos. z = \cos. a . \cos. v + \sin. a \sin. v \cos. \eta ,$$

hinc ſumtis differentialibus fiet:

$$-dz \sin. z = -dv (\cos. a . \sin. v - \sin. a . \cos. v . \cos. \eta) - d\eta \sin a . \sin. v . \sin. \eta .$$

Heic igitur ſi ponatur η conſtans, fiet variatio arcus z ex variatione $d\,v$ oriunda

$$= d\,v \frac{\cos. a . \sin. v - \sin. a . \cos. v \cos. \eta}{\sin. z} .$$

Iam ſi angulus P Q S indigitetur per θ, conſtat eſſe

$$\cot. \theta = \frac{\cos. a . \sin. v - \sin. a \cos. v . \cos. \eta}{\sin. a \sin. \eta} ,$$

hinc $\cos. a \sin. v - \sin. a \cos. v \cos. \eta = \sin. a \sin. \eta \cot. \theta$, et

$$d\,z = d\,v \frac{\sin. a . \sin. \eta . \cot. \theta}{\sin. z} = d\,v \cos. \theta ,$$

ideoque erit variatio ipſius arcus P Z, ex variatione arcus

Z S oriunda, in proportione anguli azimuthalis P Z S, ideoque minima vbi hic angulus fuerit rectus.

§. 3. Deinde pro variatione arcus z ex variabilitate anguli η deriuanda, fit

$$d\,z = d\,\eta \frac{\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,v\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}\,z} = d\,\eta\,\text{ſin.}\,a.\,\text{ſin.}\,\Phi = d\,\eta\,\text{ſin.}\,v.\,\text{ſin.}\,\theta,$$

deſignante Φ angulum Z P S. Heic igitur liquet, variationem ipſius z, ex variatione anguli η oriundam, cum angulo Φ increſcere, maximamque eſſe vbi $\Phi = 90°$, minimam vero, ſeu nullam, vbi $\Phi = 0$, hoc eſt in ipſo Meridiano, quod etiam ſponte liquet, quia tum erit $P Z = P S \mp Z S$, ideoque valor anguli η in determinationem ipſius P Z non ingreditur. Hinc igitur patet, errores in altitudine Solis commiſſos eo maiorem habere influxum ad immutandum valorem arcus P Z, quo propius ad Meridianum obſeruatio inſtituta ſit, cum contra errores, in angulo Z S P commiſſi, eo maioris ſint momenti, quo maior fuerit angulus P Z S.

Tab. XI, Fig 2. §. 4. Pro determinando angulo Z S P ope temporis, quo diameter Solis filum verticale ſeu horizontale percurrit, obſeruare conuenit, quod ſi in genere N′ O N deſignet arcum circuli maximi, quem imago Solis in binis punctis N, N′ tangere viſa eſt, cognitusque ſupponatur angulus P O N′, deſignante P O circulum declinationis a polo Aequatoris P ad punctum O ductum, vbi centrum Solis arcum N O N′ tranſire ſupponitur, tumque intelligatur centrum Solis in Q et Q′ exitiſſe, eo tempore, quo contactus imaginis Solis cum arcu N′ O N in punctis N, N′ obſeruatus eſt; ſi ducti concipiantur arcus P Q, P Q′, angulus

Q P Q′

Q P Q′ exprimet tempus, quo diameter Solis per arcum M O N tranſit. Quod ſi igitur anguli P O N′, Q P O, reſpectiue per ζ et α indigitentur, c autem deſignet ſemidiametrum Solis, erit proxime ſin. $\frac{1}{2}\alpha = \frac{\text{ſin. } c}{\text{ſin. } a. \text{ coſ. } \zeta}$, ſi ſcilicet angulus ζ non valde fuerit magnus, id eſt, non prope ad 90° accedat, vt hoc prolixius demonſtrauimus in diſſertatione praecedente de aeſtimando tempore, quo diameter Solis per arcum quendam ſiue verticalem, ſeu horizonti parallelum tranſire videtur.

§. 5. Si angulus α per obſeruationes cognitus ſupponatur, erit

$$\text{coſ. } \zeta = \frac{\text{ſin. } c}{\text{ſin. } a. \text{ ſin. } \frac{1}{2}\alpha};$$

applicatione igitur ad caſum praeſentem facta, primum ſi arcus N′ O N deſignet circulum verticalem, erit $\zeta = \eta$, hinc

$$\text{coſ. } \zeta = \text{coſ. } \eta = \frac{\text{ſin. } c}{\text{ſin. } a. \text{ ſin. } \frac{1}{2}\alpha}.$$

Tum vero ſupra vidimus eſſe

$$\text{coſ. } z = \text{coſ. } a. \text{ coſ. } v + \text{ſin. } a. \text{ ſin. } v \text{ coſ. } \eta,$$

ideoque pro ſin. a coſ. η introducendo eius valorem,

$$\text{coſ. } z = \text{coſ. } a. \text{ coſ. } v + \frac{\text{ſin. } v. \text{ ſin. } c}{\text{ſin. } \frac{1}{2}\alpha} = \text{coſ. } a \left(\text{coſ. } v + \frac{\text{ſin. } v. \text{ ſin. } c}{\text{coſ. } a \text{ ſin. } \frac{1}{2} a}\right).$$

Si igitur ſtatuatur

$$\frac{\text{ſin. } c}{\text{coſ. } a \text{ ſin. } \frac{1}{2}\alpha} = \text{Tang. } x, \quad \text{fiet}$$

fiet coſ. $z = \frac{\text{coſ. } a. \text{ coſ. } (v - x)}{\text{coſ. } x}$, quae formula ſatis concinna eſt; ſaltem pro caſu praeſenti ſimpliciſſimam ſuppeditat ſolutionem.

§. 6.

§. 6. Si vero arcus N′ O N defignet circulum maximum, quem filum horizontale in puncto O tangit, erit cof. $\zeta =$ fin. η, ideoque pro hoc cafu ex formula

$$\text{cof.}\ \zeta = \frac{\text{fin.}\ c}{\text{fin.}\ a.\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}\alpha}$$

quaeratur angulus ζ, tumque erit $\eta = 90 - \zeta$, poftmodum vero erit

$$\text{cof.}\ z = \text{cof.}\ a.\ \text{cof.}\ v + \text{fin.}\ a.\ \text{fin.}\ v.\ \text{cof.}\ \eta., \quad \text{fiue}$$
$$\text{cof.}\ z = \text{cof.}\ (a - v) - 2\ \text{fin.}\ a.\ \text{fin.}\ v.\ \text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\eta^2., \quad \text{vel}$$
$$\text{cof.}\ z = \text{cof.}\ (a + v) + 2\ \text{fin.}\ a.\ \text{fin.}\ v.\ \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\zeta^2;$$

tumque

$$\text{fin}\ \tfrac{1}{2}z^2 = \left(\text{fin.}\left(\tfrac{a-v}{2}\right)\right)^2 + \text{fin.}a.\text{fin.}v.\text{fin.}\tfrac{1}{2}\eta^2 = \left(\text{fin.}\left(\tfrac{a+v}{2}\right)\right)^2 - \text{fin.}a.\text{fin.}v.\text{cof.}\tfrac{1}{2}\eta^2;$$
$$\text{cof.}\tfrac{1}{2}z^2 = \left(\text{cof.}\left(\tfrac{a-v}{2}\right)\right)^2 - \text{fin.}a.\text{fin.}v.\text{fin.}\tfrac{1}{2}\eta^2 = \left(\text{cof.}\left(\tfrac{a+v}{2}\right)\right)^2 + \text{fin.}a.\text{fin.}v.\text{cof.}\tfrac{1}{2}\eta^2,$$

vnde iterum quatuor formulae pro Tang. $\frac{1}{2}z^2$ deriuari posfunt. Caeterum loco filorum fiue horizontalium fiue verticalium filum alio quocunque modo difpofitum hunc in vfum adhiberi poffet, modo angulus, quem hoc filum cum filo verticali conftituit, cognitus habeatur; nam fi hic angulus dicatur ε, erit $\eta = \varepsilon \pm \zeta$, ideoque cognitis angulis ε, ζ, innotefcet angulus η.

§. 7. In praecedente differtatione §. 23. obferuauimus, formulam fin. $\frac{1}{2}\alpha = \frac{\text{fin.}\ c}{\text{fin.}\ a.\ \text{cof.}\ \zeta}$ proxime ad veritatem accedere, quando angulus ζ non nimis eft magnus; et fi a ponatur 67°, hanc formulam vsque ad valorem anguli $\zeta = 78°$, non nifi in 9″ errores inducere. Quare fi de tranfitu per filum verticale fermo eft, concludimus, obferuationem eo tutiores fuppeditare conclufiones, quo propius ad meridiem

diem instituta fuerit, ob angulum ζ eo acutiorem, quo propius circulus verticalis Z S ad Meridianum accedit, ideoque nouum hinc prodit argumentum, vt huiusmodi obseruatio, quam prope ad meridiem fieri possit, instituatur. Interim tamen propter defectum formulae errores sensibiles extimescendi non sunt, nisi pro casibus vbi ζ valorem 78° maiorem sortitur, qui casus rarius obueniunt.

§. 8. Sin vero de transitu per filum horizontale agatur, facile perspicitur, pro hoc casu angulum ζ eo euadere maiorem, quo propius circulus P O ad Meridianum accedit, ideoque formulam $\sin. \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin. c}{\sin. a. \cos. \zeta}$, eo minus fore exactam, quo propius ad transitum per Meridianum obseruatio instituta est, cui insuper accedit, quod in huiusmodi obseruationibus prope Meridianum institutis, altitudo Solis non nisi variatione lentissima afficiatur, ita vt errores insignes in ipsis obseruationibus vix ac ne vix quidem euitare liceat. Has igitur obseruationes eo tempore instituere quam maxime conducet, quo angulus azimuthalis P Z S recto aequetur, quo etiam id commodi obtinemus, vt error in altitudine commissus in arcu P Z vix vllam producat variationem. Praeterea cum inuenerimus §. 3. $d z = d \eta \sin. a \sin. \Phi$, intelligitur, errorem vnius minuti primi in angulo parallactico nondum aeque magnum errorem in eleuatione poli producere.

§. 9. Vt applicatio problematis propositi ad casus obuenientes eo melius fieri possit, eam exemplo quodam illustrare conueniet. Sit igitur pro transitu per circulum verticalem, tempus transitus $3' = 180''$, existenre $PO = 67^\circ\, 20'$, $ZS = 69^\circ.\, 12'$ et diameter Solis $= 2c = 31'.\, 31''$, hinc fiet $\frac{1}{2}\alpha = 22'.\, 30''$, ex quo, ob $\tang. x = \frac{\sin. c}{\cos. a \sin. \frac{1}{2}\alpha}$, inuenitur $x = 61^\circ.\, 10'.\, 44''$, hinc

$$v - x = 69^\circ.\, 12'.\, 0'' - 61^\circ.\, 10'.\, 44'' = 8^\circ.\, 1'.\, 16'',$$

ideoque ob

$$\cos. z = \frac{\cos. a.\cos. (v - x)}{\cos. x},\ \text{erit}\ z = 37^\circ.\, 40'.\, 2'',$$

et eleuatio Poli $= 52^\circ.\, 19'.\, 58''$. Nunc si ponamus in tempore transitus $\frac{8}{10}$ scrupulis secundis fuisse aberratum, ita vt hoc tempus statui debeat $179'', 2$, fiet $\frac{1}{2}\alpha = 22', 24''$, hinc $x = 61^\circ.\, 17'.\, 13''$, $v - x = 7^\circ.\, 54'.\, 47''$ et $z = 37^\circ.\, 23'.\, 30''$, vnde eleuatio Poli $52^\circ.\, 36'.\, 30''$, differentia a priori conclusione ad 16 minuta cum dimidio, exsurgente. Hoc igitur exemplo comprobatur, methodum hoc problemate propositam inveniendi eleuationem Poli, conclusiones non nisi valde dubias suppeditare, id quod facile patebit, si perpendatur, quam insignem influxum leuiusculi errores in obseruando tempore transitus habeant ad immutandum valorem anguli parallactici. Quia enim est

$$\sin. \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin. c}{\sin. a \cos. \eta},\ \text{fiet}\ d\alpha \cos. \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2\, d\eta \sin. c \sin. \eta}{\sin. a \cos. \eta^2},$$

supra autem inuenimus esse $dz = d\eta \sin. a \sin. \Phi$, quare erit

$$dz = \frac{d\alpha}{2 \sin. c} \cdot \frac{\sin. a^2 \cos. \eta^2 \cdot \sin. \Phi}{\sin. \eta} = \frac{d\alpha. \sin. c}{2 \sin. \frac{1}{2}\alpha^2} \cdot \frac{\sin. \Phi}{\sin. \eta}$$

$$= \frac{d\alpha}{2 \sin. c} \cdot \frac{\sin. a^2 \sin. v \cos. \eta^2}{\sin. z}.$$

Minima variatio proinde in dz ex $d\alpha$ oriunda ibi erit, vbi $\sin. v \cos. \eta^2$ fit minimum, siquidem heic z pro constanti haberi potest. Hinc fiet

$+ dv$

$$+ dv \cos. v \cos. \eta^2 = 2\, d\eta \sin. v \sin. \eta \cos. \eta, \text{ ſeu}$$
$$dv \cot. v = 2\, d\eta \operatorname{tang}. \eta.$$

Iam vero ob

$$\cos. z = \cos. a \cos. v + \sin. a \sin. v \cos. \eta,$$

fiet:

$$dv\,(-\sin. v \cos. a + \sin. a \cos. v \cos. \eta)$$
$$- d\eta \sin. a \sin. v \sin. \eta = 0,$$

et cum ſit $\cos. a \sin. v - \sin. a \cos. v \cos. \eta = \cot. \theta \sin. a \sin. \eta$, fiet $dv \cot. \theta + d\eta \sin. v = 0$, hincque

$$\cos. v = \frac{2\, d\eta \sin. v. \operatorname{tang}. \eta}{dv} = -2 \cot. \theta \operatorname{tang}. \eta,$$

ex quo per varias ſubſtitutiones tandem elicietur

$$-\frac{\cos. \Phi}{\cos. \theta} = \frac{1 + \sin. \eta^2}{\cos. \eta}.$$

§. 10. Statuamus nunc, vt in exemplo a Celeb. *Lyons* allato, tranſitum per filum horizontale fuiſſe obſeruatum, exiſtente

$$c = 16'\, 18'',3,\ \tfrac{1}{2}\alpha = 39'.\, 45'',\ PS = 113^\circ.\, 27'.\, 57'',$$

et $ZS = 85^\circ.\, 0'.\, 0''$, hinc fiet ang. $\zeta = 90 - \eta = 26^\circ.\, 33'.\, 46''$, tumque obtinebitur arcus $PZ = 38^\circ.\, 29'.\, 48$, et eleuatio poli $= 51^\circ.\, 30'.\, 12''$. Iam ſi ſupponatur in obſeruando errorem vnius minuti ſecundi eſſe commiſſum, ita vt ſit

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 39'.\, 52'',5,\ \text{fiet } \zeta = 26^\circ.\, 28'.\, 24'',$$

hincque $PZ = 38^\circ.\, 26'.\, 16''$, et eleuatio poli $= 51^\circ.\, 33'.\, 46''$, vbi iam quidem multo minor variatio prodit, quam in caſu praecedenti. Cum tamen et hic error ſatis ſenſibilis ſit, liquet, methodum propoſitam non niſi iis in caſibus adhiberi poſſe, vbi ſufficit eleuationem poli prope cognouiſſe.

§. 11. Cum exemplo modo propoſito altitudo Solis non aſſumta ſit niſi 5°, intelligitur, pro huiusmodi caſu refractionem non ſolum ad altitudinem Solis immutandam valere, ſed etiam propter eandem angulum parallacticum Solis immutari. Vt igitur pro huiusmodi caſu verus valor latitudinis loci eruatur, ſequenti modo rationes ſubducendae erunt. Sit Z S circulus verticalis, vbi verus locus centri Solis ſupponatur S, per refractionem autem correctus s, et ducantur circuli declinationis P S, P s: tum primum ex obſeruato tranſitu imaginis Solis per filum ſiue verticale ſeu horizontale et cognito arcu P S, quaeratur angulus parallacticus Z S P, tumque ob cognitum arcum S s, propter effectum refractionis dabitur S U $=$ S s coſ. z S Φ, hincque P s $=$ P S $-$ S U. Tum vero denuo, ſi ex obſeruata duratione tranſitus et arcu P s, quaeratur angulus P s Z, ex reſolutione trianguli Z s P inuenietur valor arcus Z P ſaltem proxime verus.

§. 12. In problemate hucusque conſiderato, praeter declinationem Solis et angulum parallacticum, altitudinem Solis cognitam ſuppoſuimus, ex quibus cognitis latitudinem loci inuenire oportuit. Verum iam et aliud proponi poteſt problema, quo ex datis declinatione Solis et angulo parallactico, modo ſupra allato inueſtigando, nec non tempore vero obſeruationis, quaeratur eleuatio poli, quod eo reuenit, vt in triangulo Z S P, ex datis binis angulis Z P S, Z S P et latere P S, inueniatur Z P. Erit vero, vt ex doctrina triangulorum ſphaericorum conſtat

$$\text{cot.}\, z = \frac{\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,a}{\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,a} = \frac{\text{cot.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,a} + \text{cot.}\,a\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

deſigna-

deſignantibus, vt antea, z, a, arcus P Z, P A, et Φ, η, angulos Z P S, Z S P.

§. 13. Si pro hoc problemate quaerantur variationes, quae in valorem ipſius Z deriuantur, propter errores in aeſtimandis angulis η, Φ, commiſſos, obtinebimus primum

$$\frac{-dz}{\text{ſin } z^2} = \frac{-d\eta \,\text{ſin.}\, \Phi}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \eta}, \text{ ſeu } dz = \frac{d\eta\, \text{ſin.}\, \Phi\, \text{ſin.}\, z^2}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \eta^2} = \frac{d\eta\, \text{ſin.}\, v}{\text{ſin.}\, \theta},$$

tumque

$$\frac{-dz}{\text{ſin.}\, z^2} = d\Phi \left(\frac{\text{coſ.}\, \eta.\, \text{coſ.}\, \Phi}{\text{ſin.}\, a} - \text{cot.}\, a\, \text{ſin.}\, \Phi\right) = \frac{-d\Phi\, \text{coſ.}\, \theta}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \eta},$$

hincque

$$dz = \frac{d\Phi\, \text{coſ.}\, \theta\, \text{ſin.}\, z^2}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \eta} = d\Phi.\, \text{cot.}\, \theta\, \text{ſin.}\, z,$$

vbi quidem intelligitur, pro ang. $\theta = 90^\circ$, minimos errores in valorem ipſius z, ex erroribus in valore ipſius Φ commiſſis, induci.

RÉFLEXIONS
SUR LES PRINCIPALES METHODES DE CORRIGER LES DISTANCES APPARENTES
DE LA LUNE À UNE ÉTOILE,
RÉLATIVEMENT AUX EFFETS DE LA RÉFRACTION ET DE LA PARALLAXE.

par
NICOLAS FUSS.

Les obſervations des diſtances de la Lune à une étoile fourniſſent, de l'aveu de pluſieurs Aſtronomes du premier rang, le meilleur moyen pour déterminer la longitude en mer. La préférence qu'ils donnent à cette méthode, lorsqu'on peut l'employer, ſur toutes les autres, dont on peut ſe ſervir pour cette importante recherche, eſt fondée principalement ſur les raiſons ſuivantes: 1°) Qu'elle ne demande pas un Horizon extrémement clair & terminé; que par conſéquent on peut 2°) ſe contenter de connoître à quelques minutes près la hauteur de l'étoile & du centre de la Lune; 3°) qu'elle ne dépend ni de la latitude de l'obſervateur ni de la déclinaiſon de la la Lune, ni d'aucun autre élément, dont les erreurs influent considérablement dans la détermination de la longitude, & qu'il est pourtant si difficile d'éviter en mer; 4°) qu'elle n'exige que la seule distance observée avec quelque précision & ne suppose pas 5°) des calculs aussi longs que bien d'autres.

La seule difficulté dans l'emploi de cette méthode consiste à déterminer l'effet combiné de la réfraction qui élève tous les objets, & de la Parallaxe qui diminue la hauteur de la Lune. Car ce n'est qu'après avoir dégagé la distance observée de cette double inégalité, qu'on parvient à la distance vraie qui, comparée à celle qu'on trouve moyennant les Éphémérides pour un autre Méridien fixe, donne la différence en temps & la longitude cherchée du lieu de l'observation.

Pour écarter cette difficulté quantité d'Astronomes se sont occupés de la recherche de cette correction qu'il faut apporter aux distances observées. M. *Maskelyne*, après son retour de l'Isle de S^te. Hélène, où ce célèbre Astronome avoit eu l'occasion de faire usage en allant & en revenant de cette méthode avec le plus grand succès, n'eut rien de plus pressé que de la recommender comme la plus exacte à tous les marins, & d'en faciliter le calcul par des préceptes aussi nouveaux qu'ingénieux. Depuis ce temps-là on n'a cessé de multiplier les méthodes de déterminer l'effet de la réfraction & de la Parallaxe; les unes sont recommendables par des formules élégantes, les autres par des tables subsidiaires toutes calculées pour la

commo-

commodité de ceux qui veulent fe fervir de la méthode des diftances pour la recherche de la Longitude. (*) On ne doit donc plus être embarraffé actuellement, que fur le choix à faire parmi cette quantité de méthodes, dont les unes font ou plus expéditives ou plus exactes que les autres.

Les réflexions fuivantes m'ont paru pouvoir contribuer à faciliter ce choix par la réduction de toutes les formules, produites pour la diftance vraie, à deux feulement, qui fe déduifent de la double Solution du Problème énoncé de la manière fuivante:

> *Ayant obfervé*: 1°) *la hauteur du Centre de la Lune*; 2°) *la hauteur d'une étoile fixe & 3°) la diftance de l'étoile au Centre de la Lune, trouver la diftance vraie, dégagée de l'effet de la réfraction & de la Parallaxe.*

Car je ferai voir que toutes les Solutions de ce Problème qui ont paru jusqu'ici, ou du moins les principales, quelques differentes qu'elles paroiffent au premier coup d'oeil, fe réduifent facilement aux deux fuivantes, dont la première n'eft qu'approchante & peut donner dans bien des cas des réfultats fort erronnés; l'autre eft directe & rigoureufe. En comparant enfuite chaque formule

---

(*) Le bureau anglois pour les Longitudes a même fait exécuter d'après le plan de M. Maskelyne & la méthode de M. Lyons une fuite précieufe de tables, propres à abréger le Calcul de ces corrections, & dignes par le travail étonnant qu'elles ont couté, des vues généreufes & patriotiques de cette compagnie refpectable.

mule avec l'une ou l'autre de ces deux Solutions, on ſera en état de juger de la commodité de ſon calcul & de ſon degré d'exactitude. Voici les Solutions:

Solution par approximation.

Soit A B un arc de l'horizon, Z le zénith de l'obſervateur, L le lieu obſervé du centre de la Lune, S le lieu obſervé de l'étoile. Menés par ces points L & S & par le zénith Z les arcs verticaux Z L A & Z S B. Soit enſuite le lieu vrai du centre de la Lune en l & celui de l'étoile en s; tirons les arcs L S et $l\,s$ & nommons les élémens qui entreront dans le calcul, de la manière ſuivante: Tab. XI. Fig. 3.

La hauteur apparente de ☽, ou l'arc A L $= h$
La hauteur apparente de ✱, ou l'arc B S $= h'$
La diſtance apparente de ☽ & ✱, ou l'arc L S $= d$
La diſtance vraie de ☽ & ✱, ou l'arc $l\,s = d'$
La réfraction pour la hauteur de la Lune $= r$
La réfraction pour la hauteur de l'étoile $= r'$
La parallaxe horizontale de la Lune $= \pi$
La parallaxe de hauteur de la Lune $= \pi'$.

Maintenant, puisque l'arc L l eſt le double effet de la parallaxe de la Lune qui abaiſſe ſon lieu obſervé & de la réfraction qui l'élève, il y aura L $l = \pi \operatorname{coſ.} h - r$, ce que nous nommerons δ, pour avoir L $l = \delta = \pi' - r$. Enſuite S s ſera l'effet de la réfraction qui élève l'étoile, & partant S $s = r'$. Enfin $l\,s$ eſt la diſtance vraie qu'il s'agit de trouver.

Traçons pour cet effet, du point d'interfection O pris pour centre, les petits arcs $l\lambda$ & $S\sigma$, & puisque les angles LOl & SOs ne sauroient être bien considérables, nous regarderons les arcs Ol & $O\lambda$ comme égaux entre-eux, aussi bien que OS & $O\sigma$, pour avoir $Ol = OL - L\lambda$ & $Os = OS + s\sigma$; d'où l'on obtient la distance vraie $ls = d' = Ol + Os = OL + OS - L\lambda + s\sigma$, ou bien, à cause de $OL + OS = d$, il y aura $ls = d' = d - L\lambda + s\sigma$.

Considérons maintenant les triangles $Ll\lambda$ & $Ss\sigma$ qui, à cause de leur petitesse, pourront être regardés comme plans & rectangles, & qui nous fourniront conséquemment,

$$L\lambda = Ll.\ \text{cof.}\ lL\lambda = Ll.\ \text{cof.}\ ZLS$$

$$s\sigma = Ss.\ \text{cof.}\ Ss\sigma = Ss.\ \text{cof.}\ ZSL$$

ce qui étant substitué dans l'expression précédente pour d', donnera la vraie distance cherchée:

$$ls = d' = d - Ll.\ \text{cof.}\ ZLS + Ss.\ \text{cof.}\ ZSL.$$

Enfin, en considerant le triangle ZLS, où l'on connoit les trois côtés $ZL = 90° - h$; $ZS = 90° - h'$ & $LS = d$, on trouve par les formules connues de Trigonométrie sphérique

$$\text{cof.}\ ZLS = \text{fin.}\ h'\ \text{fec.}\ h\ \text{cofec.}\ d - \text{tang.}\ h\ \text{cot.}\ d$$

$$\text{cof.}\ ZSL = \text{fin.}\ h\ \text{fec.}\ h'\ \text{cofec.}\ d - \text{tang.}\ h'\ \text{cot.}\ d.$$

En substituant donc au lieu de cof. ZLS & cof. ZSL ces valeurs, & mettant les quantités δ & r' à la place de Ll & de Ss, on trouve pour d' l'expression suivante:

$d' =$

$$d' = d - \delta \text{ fin. } b' \text{ fec. } b \text{ cofec. } d + \delta \text{ tang. } b \text{ cot. } d$$
$$+ r' \text{ fin. } b \text{ fec. } b' \text{ cofec. } d - r' \text{ tang. } b' \text{ cot. } d.$$

Solution rigoureuſe.

Gardons toutes les dénominations précédentes & conſidérons d'abord le triangle Z L S, où nous connoiſſons les arcs $ZL = 90° - b$; $ZS = 90° - b'$ et $LS = d$, d'où l'on trouve l'angle au zénith $LZS = \zeta$ par l'expreſſion: Tab. XI. Fig. 4.

$$\text{cof. } \zeta = \text{fec. } b \text{ fec. } b' \text{ cof. } d - \text{tang. } b \text{ tang. } b'$$

ce qui étant trouvé, on aura par le triangle Zls, où l'on connoît l'angle $lZs = \zeta$, & les côtés

$$Zl = 90° - (b + \delta) \text{ \& } Zs = 90° - (b' - r'),$$

le coſinus de la vraie diſtance:

$$\text{cof. } ls = \text{cof. } d' = \text{fin. } (b + \delta) \text{ fin. } (b' - r')$$
$$+ \text{cof. } \zeta \text{ cof. } (b + \delta) \text{ fin. } (b' - r').$$

Avant que de comparer, moyennant la conſidération d'un cas particulier, la facilité du calcul de la première de nos deux formules avec l'exactitude de la ſeconde, il ſera bon de faire voir la liaiſon qui ſubſiſte entre l'une & l'autre. Pour cet effet je mettrai dans la dernière expreſſion $d' = d + \omega$, pour avoir

$$\text{cof. } d' = \text{cof. } d - \omega \text{ fin. } d,$$

& en regardant δ & r comme très petits par rapport à b & b', on pourra mettre de la même façon

$$\text{fin. } (b + \delta) = \text{fin. } b + \delta \text{ cof. } b; \quad \text{cof. } (b + \delta) = \text{cof. } b - \delta \text{ fin. } b$$
$$\text{fin. } (b' - r') + \text{fin. } b' - r' \text{ cof. } b'; \quad \text{cof. } (b' - r') = \text{cof. } b' + r' \text{ fin. } b'$$

 &

& il y aura en négligeant le produit δr:]

$$\sin.(h+\delta)\sin.(h'-r') = \sin.h\sin.h' + \delta\sin.h'\cos.h - r'\sin.h\cos.h';$$

$$\cos.\zeta\cos.(h+\delta)\cos.(h'-r') = \cos.d - \frac{\delta\sin.h\cos.d}{\cos.h} + \frac{r'\sin.h'\cos.d}{\cos.h'} - \sin.h\sin.h' + \frac{\delta\sin.h^2\sin.h'}{\cos.h} - \frac{r'\sin.h\sin.h'^2}{\cos.h'}$$

ce qui étant substitué dans la dernière expression pour $\cos.d'$, fournit celle qui suit:

$$\cos.d - \omega\sin.d = \sin.h\sin.h' + \delta\sin.h'\cos.h - r'\sin.h\cos.h' + \cos.d - \frac{\delta\sin.h\cos.d}{\cos.h} + \frac{r'\sin.h'\cos.d}{\cos.h'} - \sin.h\sin.h' + \frac{\delta\sin.h^2\sin.h'}{\cos.h} - \frac{r'\sin.h\sin.h'^2}{\cos.h'}.$$

Or : $\delta\sin.h'\cos.h - \frac{\delta\sin.h\cos.d}{\cos.h} + \frac{\delta\sin.h^2\sin.h'}{\cos.h} = \frac{\delta\sin.h' - \delta\cos.d\sin.h}{\cos.h}$,

& $-r'\sin.h\cos.h' + \frac{r'\sin.h'\cos.d}{\cos.h'} - \frac{r'\sin.h\sin.h'^2}{\cos.h'} = -\frac{r'\sin.h + r'\cos.d\sin.h'}{\cos.h'}$.

Donc

$$\omega = \frac{-\delta\sin.h'}{\cos.h\sin.d} + \frac{\delta\sin.h\cos.d}{\cos.h\sin.d} + \frac{r'\sin.h}{\cos.h'\sin.d} - \frac{r'\sin.h'\cos.d}{\cos.h'\sin.d},$$

ce qui convient parfaitement avec l'expression que nous a fourni la première Solution.

Cette réduction de la formule rigoureuse à l'approximation précédente fait voir en même temps, & mieux que les suppositions immédiatement employées, qu'il doit être bien des cas, où l'expression approchante peut s'écarter très sensiblement de la vérité. Pour le faire sentir d'avantage on n'a qu'à calculer un cas particulier d'après l'une & l'autre de ces expressions.

Exemple.

Soit la hauteur observée du centre de la Lune $h = 20°, 9'$; la hauteur observée d'une étoile fixe

$h' =$

$b' = 12° \, 27'$; la distance apparente de l'une à l'autre $d = 38°, 22', 17''$; la Parallaxe horizontale $\pi = 57', 24'' = 3444''$; & il y aura

$$r = 2', 34''; \; r' = 4', 14''; \; \pi' = 3233'' \;\&\; \delta = 3079''.$$

Calcul pour l'expression:

$$d' = d - \delta \text{ sin. } b' \text{ sec. } b \text{ cosec. } d + \delta \text{ tang. } b \text{ cot. } d$$
$$+ r' \text{ sin. } b \text{ sec. } b' \text{ cosec. } d - r' \text{ tang. } b' \text{ cot. } d$$

$l\,\delta = 3{,}48841$	$l\,\delta = 3{,}48841$	$l\,r' = 2{,}40483$	$l\,r' = 2{,}40483$
$l \text{ sin.} b' = 9{,}33362$	$l \text{ tg. } b = 9{,}56459$	$l \text{ sin.} b = 9{,}53716$	$l \text{ tg. } b' = 9{,}34396$
$l \text{ sec.} b = 0{,}02743$	$l \text{ cot. } d = 0{,}10140$	$l \text{ sec.} b' = 0{,}01033$	$l \text{ cot. } d = 0{,}10140$
$l \text{ cosec.} d = 0{,}20708$	$l \text{ II} = 3{,}15440$	$l \text{ cosec.} d = 0{,}20708$	$l \text{ IV} = 1{,}85019$
$l \text{ I} = 3{,}05654$		$l \text{ III} = 2{,}15940$	

Donc $- \text{I} + \text{II} + \text{III} - \text{IV} = 361'', 3 = 6', 1'', 3$ & partant $d' = 38°, 28', 18'', 3$.

Calcul pour l'expression:

$\text{cos. } d' = \text{sin. } (b + \delta) \text{ sin. } (b' - r') + \text{cos. } \zeta \text{ cos. } (b + \delta) \text{ cos. } (b' - r')$; où $b + \delta = 21°, 0', 19''$; $b' - r' = 12°, 22', 46''$ & $\text{cos. } \zeta = \text{sec. } b \text{ sec. } b' \text{ cos. } d - \text{tang. } b \text{ tang. } b'$

$l \text{ sec.} b = 0{,}0274297$	$l \text{ tang.} b = 9{,}5645925$	$+0{,}8552288$
$l \text{ sec.} b' = 0{,}0103346$	$l \text{ tang.} b' = 9{,}3439583$	$-0{,}0810123$
$l \text{ cos.} d = 9{,}8943180$	$8{,}9085508$	$0{,}7742165$
$9{,}9320823$		

$l \text{ sin.} (b+\delta) = 9{,}5544333$	$l \text{ cos.} (b+\delta) = 9{,}9701364$	$0{,}07684710$
$l \text{ sin.} (b'-r') = 9{,}3311942$	$l \text{ cos} (b'-r') = 9{,}9897831$	$0{,}70596300$
$8{,}8856275$	$l \text{ cos. } \zeta = 9{,}8888625$	$0{,}78281010$
	$9{,}8487820$	

Donc cof. $d' = 0,7828101$ & $d' = 38°, 28', 53'', 1$
Par la formule précédente $d' = 38, 28, 18, 3$

Erreur de l'approximation $= 34'', 8$

Sans cette erreur, beaucoup trop confidérable pour être tolérée dans quelque cas que ce foit, il n'y auroit pas à balancer fur le choix de ces deux formules, la précédente étant exempte des interpolations qu'il faut faire dans l'autre pour les fecondes des hauteurs corrigées & de la diftance apparente, puisqu'il fuffit de prendre les logarithmes, quoiqu'en plus grand nombre, jusqu'à cinq chiffres décimaux. Il n'y aura même que des cas extrêmement rares, où l'on puiffe s'en fervir avec affés de confiance fans l'emploi de quelques corrections, qui en rendent le calcul confidérablement plus prolixe. Je parlerai de ces corrections après avoir expofé la méthode de M. *Lyons* par laquelle je vais commencer à parcourir celles qui font venues à ma connoiffance.

Solution de M. Lyons. (*)

M. Lyons détermine féparément l'effet de la réfraction et celui de la Parallaxe. Pour le premier il confidère le triangle Z L S, où il y a fuivant mes denominations $ZL = 90° - h$; $ZS = 90° - h'$; $LS = d$ et partant:

Tab. XI Fig. 5.

$$\text{cof. } ZLS = \frac{\text{fin. } h' - \text{cof. } d \text{ fin. } h}{\text{fin. } d \text{ cof. } h} \quad \text{et}$$

$$\text{cof. } ZSL = \frac{\text{fin. } h - \text{cof. } d \text{ fin. } h'}{\text{fin. } d \text{ cof. } h'}.$$

Or

(*) Tables to be ufed with the Aftronomical and Nautical Ephemeris. London 1766. pag. 44.

Or puisque les angles $Z L' S'$ et $Z S' L'$ ne diffèrent pas ſenſiblement de $Z L S$ et $Z S L$ et que les arcs $L L'$ et $S S'$ ſont l'effet de la réfraction en hauteur, que j'ai déſignée par r et r', en abaiſſant de L et S ſur la diſtance corrigée à l'égard de la réfraction $L' S'$ les arcs perpendiculaires $L \lambda$ et $S \sigma$, il y aura $L' S' = d + L' \lambda + S' \sigma$. Donc, à cauſe de $L' \lambda = r \cos. Z L S$ et $S' \sigma = r' \cos. Z S L$, la diſtance corrigée de l'effet de la réfraction ſera

$$L' S' = d + r \cos. Z L S + r' \cos. Z S L.$$

Pour l'effet de la Parallaxe $L \lambda$, en mettant la Parallaxe de hauteur $L l = \pi \cos. b = \pi'$, la correction de la Parallaxe $L \lambda$ ſera $L l \cos. Z L S = \pi' \cos. Z L S$, ce qui étant ſouſtrait de l'expreſſion précédente pour $L' S'$, à cauſe de $\pi' - r = \delta$, laiſſe Tab. XI. Fig. 6.

$$d' = d - \delta \cos. Z L S + r' \cos. Z S L \text{ ou bien}$$

$$d' = d - \frac{\delta \sin. b'}{\cos. b \sin. d} + \frac{\delta \sin. b \cos. d}{\cos. b \sin. d} + \frac{r' \sin. b}{\cos. b' \sin. d} - \frac{r' \sin. b' \cos. d}{\cos. b' \sin. d},$$

comme nous l'avions trouvé par la première ſolution.

Remarques.

M. Lyons paroit avoir préféré cette ſolution approchante à la ſolution rigoureuſe pour les belles transformations ſimplificatives que les formules ſéparées pour les deux effets de la réfraction & de la Parallaxe admettent dans pluſieurs cas, & pour la facilité qu'elle offre, d'en abréger le calcul par des tables ſubſidiaires. Auſſi doit-on rendre juſtice à ſon adreſſe à remplir l'un & l'autre de ces objets.

Il préſente l'expreſſion pour l'effet de la réfraction $r \cos. Z L S + r' \cos. Z S L$ ſous cette forme:

coſec

$$\text{cosec.}\, d\left(\frac{r' \sin. h}{\cos. h'} + \frac{r \sin. h'}{\cos. h}\right) - \cot.\, d\,(r' \text{tang.}\, h' + r\, \text{tang.}\, h)$$

& il donne dans une table les logarithmes du facteur $\frac{r' \sin. h}{\cos. h'} + \frac{r \sin. h'}{\cos. h}$. Ensuite il observe à l'égard du second membre cot. $d\,(r' \text{tang.}\, h' + r\, \text{tang.}\, h)$ que la plus grande des deux hauteurs observées, par exemple h, ne sauroit gueres être moindre de 10°, et que par conséquent le terme r tag. h peut être regardé comme constant & égal à la réfraction pour la hauteur de 45°, égale à e, ce qui donne pour le second membre de l'expression précédente cot. $d\,(r' \text{tang.}\, h' + e)$, formule pour laquelle M. Lyons a calculé une seconde table, accompagnée de deux autres supplémentaires, qui renferment les corrections qu'il faut apporter aux nombres de l'autre, pour les cas qui exigent plus de précision.

L'expression pour l'effet total de la réfraction devient encore plus commode, si l'on suppose la réfraction en hauteur proportionelle à la tangente de la distance au zénith, pour les hauteurs au-delà de 10°. M. *Lyons* met en conséquence $r = e$ cot. h & $r' = e$ cot. h', & à cause de cot. $d =$ cosec. $d -$ tang. $\frac{1}{2} d$, il obtient cette expression pour l'effet total de réfraction:

$$2\, e\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2} d + \frac{e\, \text{cosec.}\, d\, (\sin. h - \sin. h')^2}{\sin. h \sin. h'}.$$

Formule dont le second membre ne surpasse gueres 8 secondes pour les cas, où les deux hauteurs surpassent 50 degrés. Quant au premier membre $2\, e$ tag. $\frac{1}{2} d$ ses valeurs se trouvent calculées dans une troisième table. Et si l'on demande plus de justesse, il y a deux autres tables, l'une pour le membre $\frac{e(\sin. h - \sin. h')^2}{\sin. h \sin. h'}$ & l'autre pour la la multiplication de cette quantité par la coſécante de la diſtance, ce qui fournit la juſte valeur du ſecond membre.

Outre ces ſept tables pour le calcul de l'effet de la réfraction, il y en a quatre encore pour l'effet de la Parallaxe qui eſt π' coſ. Z L S $=$ π coſ. h coſ. Z L S, ou bien π ſin. h' coſec. $d - \pi$ ſin. h cot. d; ſavoir deux tables pour l'effet de la Parallaxe du Soleil, lorsqu'on ſe ſert de cet aſtre au-lieu d'une étoile, une troiſième table très étendue de logarithmes proportionaux de la Parallaxe horizontale, & une quatrième contenant les produits des ſinus verſes de la Parallaxe en hauteur & en diſtance dans la cotangente de la diſtance convertie en ſecondes.

On voit par ce détail que M. *Lyons* n'a rien épargné pour rendre la formule approchante auſſi traitable & auſſi exacte que poſſible. Mais malgré les artifices employés pour la rendre plus commode, & malgré le travail ingrat & ennuiant de tant de tables qui devoient en abreger le calcul, ſa méthode me paroît toujours très compliquée, par l'emploi de tant de tables & par les diſtinctions qu'il y a à faire dans les différens cas qui peuvent ſe préſenter. En calculant ſéparément, comme fait Mr. *Lyons*, l'effet de la Parallaxe, on gagne à la vérité par l'emploi des hauteurs & de la diſtance corrigée, mais on perd d'un autre côté cet avantage, avec celui des tables ſubſidiaires, lorsqu'il y en a, puisque ſon calcul demande presque la moitié du temps qu'on emploieroit pour la formule directe, & qu'il faut le corriger encore des erreurs de l'approximation, ſans quoi le réſultat eſt presque toujours ſenſiblement fautif.

 Ces

Ces corrections doivent monter pour le cas particulier que nous avons examiné ci-dessus à $34''$, 8, si le résultat doit être égal à celui qui a été fourni par la solution directe. Voyons ce qu'elles nous fourniront en déduisant une formule plus approchante de la solution rigoureuse.

Pour cet effet il faut remarquer d'abord par rapport à la supposition principale de la solution par approximation, savoir l'angle $S s \sigma = Z S L$, qu'elle ne sauroit avoir lieu, que lorsque la distance apparente L S est très grande, aussi bien que la hauteur de l'étoile B S, puisque pour les petites distances les angles $L O l$ & $S O s$ ne sont pas, comme nous avons supposé, très petits, ni les arcs $O l$ & $O \lambda$, $O S$ & $O \sigma$ égaux entre-eux; & pour les petites hauteurs, l'arc $S s$, effet de la réfraction, est trop grand, pour qu'on puisse mettre sans erreur $s \sigma = S s$ cos. Z S L.

Les mêmes réflexions se présentent encore plus naturellement, en jettant les yeux sur le calcul que nous avons fait ci-dessus, pour déduire l'expression approchante de la juste valeur; attendu que si δ n'est pas extrèmement petit par rapport à h; r' par rapport à h' & ω par rapport à d, les positions de la transformation mentionnée ne sont plus admissibles; car au-lieu de cos. $\delta = 1$, cos. $\omega = 1$ & cos. $r' = 1$ il faudra avoir égard aux secondes puissances & mettre cos. $\delta = 1 - \frac{1}{2}\delta^2$, cos. $\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2$ & cos. $r' = 1 - \frac{1}{2}r'^2$, pour avoir

sin.

$$\sin.(b+\delta) = \sin.b + \delta\cos.b - \tfrac{1}{2}\delta\delta\sin.b$$
$$\sin.(b'-r') = \sin.b' - r'\cos.b' - \tfrac{1}{2}r'r'\sin.b'$$
$$\cos.(b+\delta) = \cos.b - \delta\sin.b - \tfrac{1}{2}\delta\delta\cos.b$$
$$\cos.(b'-r') = \cos.b' + r'\sin.b' - \tfrac{1}{2}r'r'\cos.b'$$
$$\cos.(d+\omega) = \cos.d - \omega\sin.d - \tfrac{1}{2}\omega\omega\cos.d$$

ce qui donne en négligeant les troiſiémes dimenſions:

$$\begin{aligned}\sin.(b+\delta)\sin.(b'-r') = {} & \sin.b\sin.b' + \delta\sin.b'\cos.b - \tfrac{1}{2}\delta^2\sin.b\sin.b' \\ & - r'\sin.b\cos.b' - \delta r'\cos.b\cos.b' - \tfrac{1}{2}r'r'\sin.b\sin.b'\end{aligned}$$

$$\cos.\zeta\cos.(b+\delta)\cos.(b'-r') = \left\{\begin{aligned} & +\cos.d - \frac{\delta\sin.b\cos.d}{\cos.b} - \tfrac{1}{2}\delta^2\cos.d \\ & -\sin.b\sin.b' + \frac{\delta\sin.b^2\sin.b'}{\cos.b} + \tfrac{1}{2}\delta^2\sin.b\sin.b' \\ & + \frac{r'\sin.b'\cos.d}{\cos.b'} - \frac{\delta r'\sin.b\sin.b'\cos.d}{\cos.b\cos.b'} - \tfrac{1}{2}r'r'\cos.d \\ & - \frac{r'\sin.b'^2\sin.b}{\cos.b'} + \frac{\delta r'\sin.b^2\sin.b'}{\cos.b\cos.b'} + \tfrac{1}{2}r'r'\sin.b\sin.b' \end{aligned}\right\}$$

& après avoir ſubſtitué ces valeurs dans l'expreſſion

$$\cos.d' = \sin.(b+\delta)\sin.(b'-r') + \cos.\zeta\cos.(b+\delta)\cos(b'-r'),$$

on obtient celle-ci:

$$\omega = d'-d = \Delta + \tfrac{1}{2}(\delta^2 + r'^2 - \omega^2)\cot.d + \frac{\delta r(\cos.b^2 - \sin.b'^2 + \sin.b\sin.b'\cos.d)}{\cos.b\cos.b'},$$

où Δ exprime la valeur trouvée par l'approximation précédente.

En calculant cette nouvelle correction:

$$\tfrac{1}{2}(\delta\delta + r'r' - \omega\omega)\cot.d + \frac{\delta r'(\cos.b^2 - \sin.b'^2 + \sin.b\sin.b'\cos.d)}{\cos.b\cos.b'}$$

il ſuffit de prendre pour ω la valeur telle qu'elle nait après avoir ajouté le terme $\tfrac{1}{2}\delta\delta\cot.d$ à la valeur Δ; & pour convertir tout en ſecondes, il faut ajouter au logarithme de chaque terme le logarithme de $\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{648000''}$ qui eſt 4,68557, π étant ici la demie périphérie du cercle dont le rayon $= 1$.

Cal-

Calculons séparément chaque terme de cette correction, pour être en état de distinguer ceux qui par leur petitesse peuvent en général être negligés:

$l\frac{1}{2}\delta\delta = 6,6758$	$l\frac{1}{2}r'r' = 4,5086$	$l\frac{1}{2}\omega\omega = 4,8811$
$l\,\text{cot.}\,d = 10,0998$	$l\,\text{cot.}\,d = 0,0998$	$l\,\text{cot.}\,d = 0,0998$
$l\,\text{conft.} = 4,6856$	$l\,\text{conft.} = 4,6856$	$l\,\text{conft.} = 4,6856$
$1,4612$	$9,2940$	$(-)\,9,6665$

$\text{cof.}\,b = 0,9391$		$l\,\text{cof.}\,b = 9,9727$	$l\,\text{tg.}\,b = 9,5634$
$\text{fin.}\,b' = 0,2144$		$l\,\text{cof.}\,b' = 9,9898$	$l\,\text{tg.}\,b' = 9,3415$
			$l\,\text{cof.}\,d = 9,8938$
$\text{cof}\,b + \text{fin.}\,b' = 1,1535$	$\log. = 0,0620$	$9,9625$	
$\text{cof.}\,b - \text{fin.}\,b' = 0,7247$	$\log. = 9,8601$	$9,9221$	$8,7987$
$l(\text{cof.}\,b^2 - \text{fin.}\,b'^2) = 9,9221$		$9,9596$	

corr. IV. pars I. $= 0,9113$	$l\delta = 3,4884$	corr. $1 = 28'', 92$
—— —— II. $= 0,0629$	$lr = 2,4048$	—— $2 = 0, 20$
$0,9742$	$4,6856$	—— $3 = -0, 46$
	$9,9886$	—— $4 = 3, 69$
	$0,5674$	$32, 35$

Ainsi la somme des corrections est $= 32'', 4$, qui ajoutées à $38°, 28', 18'', 3$ donnent $d' = 38°, 28', 50'', 7$. Or la solution rigoureuse donne $d' = 38, 28, 53, 1$ de-sorte qu'après toutes ces corrections laborieuses on s'écarte encore de la vraie valeur de $2'', 4$. Cette petite différence n'est pas à la vérité un objet, sur lequel on doive s'appésantir pour en chercher scrupuleusement l'origine ou pour trouver les moyens de la réparer: vu que les variations dans les tables de réfraction & plus ou moins d'incertitude sur la distance observée, en peuvent produire

duire d'auſſi grandes. (*) Mais pourquoi ſe ſervir d'une méthode qui, pour être tant-ſoit-peu exacte demande beaucoup plus de temps que ne fait celle qui conduit d'abord à la juſte valeur? Ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe donner une forme beaucoup plus commode à cette correction, & en rejetter même, comme on voit par cet exemple, quelques termes, tels que $\frac{1}{2} r' r'$ cot. d pour les hauteurs conſidérables, & $\frac{1}{2}\, \omega\, \omega$ cot. d pour les petites diſtances; mais il ne vaut pas la peine de s'y arrêter, d'autant que cela méne à des diſtinctions néceſſaires de différens cas, leſquelles, ſans augmenter proprement la longueur des calculs, peuvent en multiplier au moins les préparatifs, ce qui revient au même. Le réſultat de tout cela me paroît être, que la méthode directe mérite d'être miſe en uſage préférablement à l'autre dans tous les cas, où l'on n'oſe rejetter toutes les dernières corrections, ou dans leſquels on ne peut ſe contenter tout au plus du terme premier $\frac{1}{2}\delta\delta$ cot. d, qui ſera toujours aſſés grand, lorſque d eſt moindre que 100°.

Pour donner un exemple, où l'on peut employer la formule approchante ſans correction, ſoit

$$h = 18°,\ 47',\ 27''; \ h' = 56°,\ 16',\ 50'';$$
$$d = 101°,\ 46',\ 43''; \ \delta = 51',\ 19'' \ \& \ r' = 34'',$$

& il y aura par la méthode directe $d' = 100°,\ 57',\ 31,\ 7$. L'approximation

$$d' = d - \delta \text{ coſ. } ZLS + r' \text{ coſ. } ZSL$$

donne

$d' = 100°,\ 57',\ 31'',\ 9$, à cauſe de angles

 ZLS

(*) Pour le cas préſent les tables citées donnent par exemple 38°, 28', 56'' pour la vraie diſtance.

$$Z L S = 14^\circ,\ 25',\ 58'' \ \& \ Z S L = 25^\circ,\ 9',\ 14'',$$

deſorte que l'erreur de l'approximation n'eſt ici que de $0'', 2$.

Dans tous les cas qui admettent cette approximation

$$d' = d - \delta \operatorname{coſ.} Z L S + r' \operatorname{coſ.} Z S L,$$

on peut auſſi avec avantage commencer par calculer les angles Z L S & Z S L, moyennant les formules connues:

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} Z L S = \sqrt{\frac{\operatorname{ſin.}(s - h')\operatorname{coſ.} s}{\operatorname{coſ.}(s - d)\operatorname{ſin.}(s - h)}} \ \&$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} Z S L = \sqrt{\frac{\operatorname{ſin.}(s - h)\operatorname{coſ.} s}{\operatorname{coſ.}(s - d)\operatorname{ſin.}(s - h')}}$$

où $s = \frac{h + h' + d}{2}$. Car on n'a qu'à chercher deux valeurs

$$A = \operatorname{coſ.} s \operatorname{ſec.}(s - d) \ \& \ B = \operatorname{ſin.}(s - h')\operatorname{coſec.}(s - h),$$

on aura facilement

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} Z L S = \sqrt{A B} \ \& \ \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} Z S L = \sqrt{\tfrac{A}{B}}$$

& enfin

$$d' = d - \delta \operatorname{coſ.} Z L S + r' \operatorname{coſ.} Z S L.$$

Ce procédé qui eſt effectivement très expéditif, a été propoſé par M. *Lexell.* (*) Le notre n'en diffère que par l'emploi immédiat des hauteurs obſervées, qui nous diſpenſe de les réduire aux diſtances du zénith.

Je vais parler encore de deux autres méthodes, réductibles à notre première expreſſion & très ingénieuſes. Elles n'ont d'autre défaut que celui de ne faire qu' appro-

---

(*) Dans le mémoire: *Obſervationes circa methodum inveniendi longitudinem loci ex obſervata diſtantia Lunae a ſtella fixa*, inſéré dans le ſecond volume des Actes de l'Académie p. 355.

procher de la ſolution approchante, tout comme celle de M. *Lyons*, ſavoir en faiſant vſage de ſes tables; car ſa ſolution convient, comme nous avons vu, avec la notre. L'une de ces méthodes appartient à M. *Maskelyne*, l'autre à M. *Witchell* & elles ſe trouvent toutes deux dans l'Almanac nautique pour l'année 1772.

Méthode de M. Maskelyne (*).

Pour la détermination de l'effet de la réfraction (**) M. *Maskelyne* enſeigne à calculer un arc A, dont la tangente eſt $=$ tang. $\frac{b - b'}{2}$ cot. $\frac{b + b'}{2}$, & un autre B, dont la tangente eſt $=$ tang. A cot. $\frac{1}{2} d$, après quoi l'effet total de la réfraction eſt ſelon lui $\frac{2\, x\, tang.\, 2\, A}{ſin.\, 2\, B}$, la lettre x marquant la quantité de réfraction pour la hauteur de 45°.

Remarques.

Réduiſons premièrement cette expreſſion aux ſimples arcs A & B, & là cauſe de

$$\text{tang. } 2\,A = \frac{2\, tang.\, A}{1 - tang.\, A^2} \quad \& \quad \text{ſin. } 2\,B = \frac{2\, tang.\, B}{1 + tang.\, B^2},$$

nous aurons

$$\frac{2\, x\, tang.\, 2\, A}{ſin.\, 2\, B} = 2\, x.\ \frac{tang.\, A}{tang.\, B} \times \frac{1 + tang.\, B^2}{1 - tang.\, A^2}$$

$$= \frac{2\, x}{\text{cot. } \frac{1}{2} d} \cdot \frac{1 + \text{tang } B^2}{1 - \text{tang. } A^2}.$$

Enſuite parceque

$$\text{tang. } A = \frac{ſin\ b - ſin.\ b'}{ſin.\ b + ſin.\ b'} \quad \& \text{ tang. } B = \frac{ſin.\ b - ſin.\ b'}{ſin.\ b + ſin.\ b'} \sqrt{\frac{1 + coſ.\ d}{1 - coſ.\ d}}$$

on

(*) V. *A correct and eaſy Method of clearing the apparent diſtance of the Moon from a Star: &c. Nautical Almanac* 1772. Elle y ſert de ſupplément.

(**) Je me borne à conſidérer la formule qu'il donne pour ce ſeul effet, comme étant préférablement remarquable par ſon élégance.

on trouve

$$1 - \text{tang. } A^2 = \frac{4 \text{ fin. } b \text{ fin. } b'}{(\text{fin. } b + \text{fin. } b)^2} \quad \&$$

$$1 + \text{tang. } B^2 = \frac{\text{fin. } b^2 + \text{fin. } b'^2 - 2 \text{ fin. } b \text{ fin. } b' \text{ cof. } d}{2 \text{ fin. } b \text{ fin. } b' (1 - \text{cof. } d)}$$

donc

$$\frac{2\, x \text{ tang. } 2\, A}{\text{fin. } 2\, B} = \frac{x}{\text{cot. } \frac{1}{2} d (1 - \text{cof. } d)} \times \frac{\text{fin. } b^2 + \text{fin. } b'^2 - 2 \text{ fin. } b \text{ fin. } b' \text{ cof. } d}{\text{fin. } b \text{ fin. } b'}$$

ou bien à cause de $\text{cot. } \frac{1}{2} d (1 - \text{cof. } d) = \text{fin. } d$

$$\frac{2\, x \text{ tang. } 2\, A}{\text{fin. } 2\, B} = \frac{x (\text{fin. } b - \text{fin. } b' \text{ cof. } d)}{\text{fin. } b' \text{ fin. } d} + \frac{x (\text{fin. } b' - \text{fin. } b \text{ cof. } d)}{\text{fin. } b \text{ fin. } d}$$

Or M. *Maskelyne* a ſuppoſé que les effets de la réfraction en hauteur ſont $r = x \text{ cot. } b$ & $r' = x \text{ cot. } b'$; ainſi il faudra mettre dans l'expreſſion précédente $x = r \text{ tang. } b$ & $x = r' \text{ tang. } b'$, ce qui étant fait on obtient pour l'effet total de la réfraction en diſtance

$$\frac{r (\text{fin. } b' - \text{fin. } b \text{ cof. } d)}{\text{cof. } b \text{ fin. } d} + \frac{r' (\text{fin. } b - \text{fin. } b' \text{ cof. } d)}{\text{cof. } b' \text{ fin. } d},$$

expreſſion qui convient avec celle de M. *Lyons* & avec la partie de la notre qui renferme la réfraction.

M. *Maskelyne* a facilité le calcul de cette formule par trois tables ſubſidiaires, qui ſervent en même temps pour la détermination de l'effet de la Parallaxe. Mais il faut bien remarquer que cette belle expreſſion n'eſt qu'une approximation à l'approximation même, puiſque pour les hauteurs moindres de 20° on s'écarte de plus en plus de la iuſte valeur en mettant

$$r = x \text{ cot. } b \quad \& \quad r' = x \text{ cot. } b'.$$

Les préceptes de M. *Maskelyne* renferment bien les corrections néceſſaires pour approcher d'avantage en cas de beſoin; mais le calcul, augmenté par là, détruit l'avantage

tage de l'élégance de la correction principale; & celui qu'on est obligé de faire encore séparément pour l'effet de la Parallaxe, rend cette méthode plus laborieuse que la plûpart des autres.

Méthode de M. Witchell (*).

Comme M. *Witchell*, dans l'ouvrage cité, ne donne ni l'expression analytique ni l'Analyse même, sur laquelle ses préceptes sont fondés, & que sa méthode me paroît très ingénieuse, je crois bien faire, en représentant les corrections qu'il propose, par des formules. La liaison avec notre formule approchée leur servira en même temps de démonstration.

M. *Witchell* calcule un arc A, dont la tangente est égale à

$$\text{cot.} \tfrac{h + h'}{2} \text{ tang.} \tfrac{h - h'}{2} \text{ cot.} \tfrac{1}{2} d,$$

& il prétend que la premiere correction à apporter à la distance observée est égale à la réfraction correspondante à une hauteur $= 90° - (\frac{1}{2} d + A)$, & que la seconde correction sera $= - \delta \text{ tang. } h \text{ tang. } (\frac{1}{2} d - A)$,

$$\text{Or tang. } (\tfrac{1}{2} d - A) = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} d - \text{tang. } A}{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} d \text{ tang. } A},$$

ou bien

$$\text{tang. } (\tfrac{1}{2} d - A) = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} d - \text{tang. } \frac{h - h'}{2} \text{ cot. } \frac{h + h'}{2} \text{ cot. } \frac{1}{2} d}{1 + \text{tang. } \frac{h - h'}{2} \text{ cot. } \frac{h + h'}{2}}.$$

Le

(*) Supplément du *Nautical Almanac* année 1772. pag. 18.

Le numérateur de cette expreſſion ſe réduit à

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}d}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}d} - \frac{\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'}{\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b'} \times \frac{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}d}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}d},$$

ou bien à

$$\frac{\text{ſin.}\,b' - \text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,d}{\frac{1}{2}(\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b')\,\text{ſin.}\,d};$$

& le dénominateur

$1 + \frac{\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'}{\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b'}$ prend cette forme:

$\frac{2\,\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,b + \text{ſin.}\,b'}$; d'où l'on tire

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}d - A) = \frac{\text{ſin.}\,b' - \text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,d}{\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,d},$$

ce qui fournit pour la ſeconde correction:

$$-\delta\,\text{tang.}\,b\,\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}d - A) = -\frac{\delta\,(\text{ſin.}\,b' - \text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,d)}{\text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,d}.$$

Enſuite M. *Witchell* ſuppoſe auſſi que les réfractions ſont en raiſon des tangentes des diſtances au zénith, ſavoir $r' : \text{cot.}\,b'$; donc l'analogie

$$\text{cot.}\,b' : r' = \text{cot.}\,(90^\circ - (\tfrac{1}{2}d + A))$$

donnera la réfraction pour la hauteur $90^\circ - (\frac{1}{2}d + A)$, qui ſera $\frac{r'\,\text{tang.}\,(\frac{1}{2}d + A)}{\text{cot.}\,b'}$. On trouve par des opérations ſemblables aux précédentes

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}d + A) = \frac{\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'\,\text{coſ.}\,d}{\text{ſin.}\,b'\,\text{ſin.}\,d},$$

ce qui étant ſubſtitué fournit la première correction égale à $\frac{r'(\text{ſin.}\,b - \text{ſin.}\,b'\,\text{coſ.}\,d)}{\text{coſ.}\,b'\,\text{ſin.}\,d}$; & la ſomme de ces deux corrections eſt égale à l'expreſſion approchante de notre premiere Solution.

Pour

Pour corriger les erreurs, qui peuvent naître de la ſuppoſition, que les réfractions ſont proportionelles aux cotangentes des hauteurs apparentes, l'auteur donne une quatrieme correction pour les cas qui peuvent l'exiger. Auſſi corrige-t-il les erreurs de l'approximation fondamentale d'une manière aſſés facile, dont l'expreſſion ne peut gueres différer de la notre pag. 323. Cette belle méthode paroit avoir échappé à M. *Lexell*, qui n'en parle pas, quoiqu'elle ſoit plus facile à calculer que la précédente.

Les deux méthodes ſuivantes ſont rigoureuſement vraies: mais leurs formules ne ſont pas à beaucoup près auſſi faciles à calculer que celle de notre ſeconde Solution.

Solution de M. Dunthorne (*).

Puisqu'il y a dans le triangle Z L S — Tab XI. Fig. 4.

$$\text{coſ.}\, h\, \text{coſ.}\, h' : 1 = \text{coſ.}\, d - \text{coſ.}\, (h' - h) : \text{coſ.}\, Z$$

& dans l'autre triangle $Z\,l\,s$:

$$\text{coſ.}\, (h+\delta)\, \text{coſ.}\, (h'-r') : 1 = \text{coſ.}\, d' - \text{coſ.}\, ((h'-r') - (h+\delta)) : \text{coſ.}\, Z$$

il y aura

$$\text{coſ.}\, d - \text{coſ.}\, (h' - h) = \text{coſ.}\, h\, \text{coſ.}\, h'\, \text{coſ.}\, Z \quad \&$$

$$\text{coſ.}\, d' - \text{coſ.}\, ((h'-r') - (h+\delta)) = \text{coſ.}\, (h+\delta)\, \text{coſ.}\, (h'-r')\, \text{coſ.}\, Z.$$

En multipliant la premiere de ces equations par coſ. $(h+\delta)$ coſ $(h'-r')$ & la ſeconde par coſ. h coſ. h' & prennant la difference on obtient

$$(\text{A}),\ \text{coſ.}\, h\, \text{coſ.}\, h'\, (\text{coſ.}\, ((h'-r') - (h+\delta)) - \text{coſ.}\, d')$$
$$- \text{coſ.}\, (h+\delta)\, \text{coſ.}\, (h'-r')\, (\text{coſ.}\, (h'-h) - \text{coſ.}\, d) = 0.$$

 Donc

(*) *Requiſite Tables annexed to the nautical Almanac, pag. 66.*

Donc en prennant les logarithmus:

$$l(\text{cof.}(h'-h)-\text{cof.}\,d)+l\,\text{cof.}(h+\delta)+l\,\text{cof.}(h'-r')$$
$$=l\,\text{cof.}\,h+l\,\text{cof.}\,h'+l(\text{cof.}((h'-r')-(h+\delta))-\text{cof.}\,d').$$

Puis en mettant

$$l\,\text{cof}\,h+l\,\text{cof.}\,h'-l\,\text{cof.}(h+\delta)-l\,\text{cof.}(h'-r')=l\,m$$

il y a

$$l(\text{cof.}((h'-r')-(h+\delta))-\text{cof.}\,d')$$
$$=l(\text{cof.}(h'-h)-\text{cof.}\,d)-l\,m=l\,n;\ \text{donc}$$
$$n=\text{cof.}((h'-r')-(h+\delta))-\text{cof.}\,d'$$

& partant

$$\text{cof.}\,d'=\text{cof.}((h'-r')-(h+\delta))-n.$$

Formule dont M. *Dunthorne* a foulagé le calcul par des tables pour log. m & pour δ, qui ne font pas d'une grande reffource & par leur peu d'étendue & par la nature de l'expreffion.

Au refte il eft facile à voir que l'équation (A) fe réduit à la fuivante:

$$\text{cof.}\,d'=\text{cof.}((h'-r')-(h+\delta))-\frac{\text{cof.}(h+\delta)\,\text{cof.}(h'-r')\,\text{cof.}(h'-h)}{\text{cof.}\,h\ \text{cof.}\,h'}$$
$$+\frac{\text{cof.}(h+\delta)\ \text{cof.}(h'-r')\ \text{cof.}\,d}{\text{cof.}\,h\ \text{cof.}\,h'},$$

qui étant développée, en mettant

$$\frac{\text{cof.}\ d-\text{fin.}\,h\,\text{fin.}\,h'}{\text{cof.}\,h\ \text{cof.}\,h'}=\text{cof.}\,\zeta,$$

prend la forme de notre équation:

$$\text{cof.}\,d'=\text{fin.}(h+\delta)\,\text{fin.}(h'-r')+\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}(h+\delta)\,\text{cof.}(h'-r').$$

(*) Expreffion de M. le Chevalier de Borda.

La règle de M. *de Borda* enfeigne à calculer un arc

(*) Elle fe trouve dans la *Connoiffance des temps* pour 1780.

arc M, dont le cosinus est exprimé par cette forme:

$$\sqrt{\frac{\text{cos.}\, s\ \text{cos.}\,(s-d).\ \text{cos.}\,(b+\delta)\ \text{cos.}\,(b'-r')}{\text{cos.}\, b\ \text{cos.}\, b'\ \text{cos.}\tfrac{1}{2}\,((b+\delta)+(b'-r'))}},$$

pour avoir

$$\text{sin.}\tfrac{1}{2}\, d' = \text{cos.}\tfrac{1}{2}\,((b+\delta)+(b'-r'))\ \text{sin.}\, M,$$

où $s = \frac{b+b'+d}{2}$; desorte qu'il y a

$$\text{sin.}\tfrac{1}{2}\, d'^2 = \text{cos.}\tfrac{1}{2}\,((b+\delta)+(b'-r'))^2 - \frac{\text{cos.}\, s.\ \text{cos.}\,(s-d)\ \text{cos.}\,(b+\delta)\ \text{cos.}\,(b'-r')}{\text{cos.}\, b\ \text{cos.}\, b'}.$$

Cette formule très compliquée se réduit à la notre de la manière suivante:

$$\frac{1-\text{cos.}\, d'}{2} = \frac{1+\text{cos.}\,((b+\delta)+(b'-r'))}{2} - \frac{\text{cos.}\, s.\ \text{cos.}\,(s-d)\ \text{cos.}\,(b+\delta)\ \text{cos.}\,(b'-r')}{\text{cos.}\, b\ \text{cos.}\, b'}$$

où bien

$$\text{cos.}\, d' = \frac{2\ \text{cos.}\, s.\ \text{cos.}\,(s-d)\ \text{cos.}\,(b+\delta)\ \text{cos.}\,(b'-r')}{\text{cos.}\, b\ \text{cos.}\, b'} - \text{cos.}\,(b+\delta+b'-r')$$

or

$$2\ \text{cos.}\, s\ \text{cos.}\,(s-d) = \text{cos.}\, d + \text{cos.}\,(2\, s-d) = \text{cos.}\, d + \text{cos.}\,(b+b')$$

donc

$$\text{cos.}\, d' = \frac{(\text{cos.}\, d + \text{cos.}\,(b+b'))\ \text{cos.}\,(b+\delta)\ \text{cos.}\,(b'-r')}{\text{cos.}\, b\ \text{cos.}\, b'} - \text{cos.}\,(b+\delta+b'-r'),$$

& en développant

$$\text{cos.}\,((b+\delta)+(b'-r'))\ \ \&\ \ \text{cos.}\,(b+b'),$$

on obtient

$$\text{cos.}\, d' = \text{sin.}\,(b+\delta)\ \text{sin.}\,(b'-r') + \text{cos.}\,\zeta\ \text{cos.}\,(b+\delta)\ \text{cos.}\,(b'-r'),$$

où

$$\text{cos.}\,\zeta = \frac{\text{cos.}\, d - \text{sin.}\, b\ \text{sin.}\, b'}{\text{cos.}\, b\ \text{cos.}\, b'}.$$

Mais on voit sans que je le fasse remarquer, que la dernière formule a un grand avantage sur l'autre par sa simplicité.

Nous voyons par toutes ces réflexions 1°) que les deux expressions:

$$d' = d - \delta \text{ sin. } h' \text{ sec. } h \text{ cosec. } d + \delta \text{ tang. } h \text{ cot. } d$$
$$+ r' \text{ sin. } h \text{ sec. } h' \text{ cosec. } d - r' \text{ tang. } h' \text{ cot. } d \quad \&$$
$$\text{cos. } d' = \text{sin.} (h + \delta (\text{sin.} (h' - r') + \text{cos. } \zeta \text{ cos.} (h + \delta) \text{ sin.} (h' - r'),$$

ont été fondamentales pour toutes les Solutions alléguées du Probléme de la correction des distances apparentes de la Lune à une étoile. 2°) Que les trois méthodes de Mrs. *Maskelyne*, *Lyons* & *Witchell*, qui ont été déduites de la première de ces deux formules, quelque ingénieuses qu'elles soient, n'étant que des approximations de l'approximation même, exigent quantité de corrections qui détruisent l'avantage des belles transformations qui en font le principal mérite. 3°) Qu'elles sont d'autant plus incertaines qu'il est très difficile de distinguer exactement les cas, où l'on doit en emploier plus ou moins. 4°) Que la méthode de M. *Lyons*, qui par la forme des tables subsidiaires se prête le plus facilement à cet examen, est telle, qu'il faut être bien habitué aux calculs qu'elle exige, s'ils doivent prendre moins de temps que le calcul immédiat de l'une ou l'autre des expressions fondamentales. 5°) Qu'il en est de même à plus forte raison des deux dernières expressions qui conviennent avec la Solution rigoureuse.

Il me paroît donc que sans qu'on soit obligé de sacrifier la commodité du calcul à la justesse du résultat on se serviroit avec le plus grand avantage de la formule

$$\text{cos.} d' = \text{sin.} (h + \delta) \text{ sin.} (h' - r') + \text{cos.} \zeta \text{ cos.} (h + \delta) \text{ cos.} (h' - r')$$

pour

pour tous les cas, où la diſtance obſervée eſt au-deſſous de 90° & de l'autre formule approchée

$$d' = d - \delta \operatorname{cof.} ZLS + r' \operatorname{cof.} ZSL,$$

pour les cas où cette diſtance ſurpaſſe 90°, à moins que les hauteurs ne ſoient très petites, & qu'on ne puiſſe pas négliger la correction $\frac{1}{2}(\delta - \omega)(\delta + \omega) \operatorname{cot.} d$; ſoit qu'on calcule cette formule immédiatement de la façon aſſignée ci-deſſus, ſoit qu'on faſſe uſage de la règle de M. *Lexell.* Car je crois que le travail ſera à peu près le même pour l'une & l'autre manière.

L'excellent Mémoire de M. *Lexell*, que j'ai allégué dant la note, pag. 326. contient encore quelques expreſſions pour le ſinus & pour le coſinus de la demie diſtance vraie, d'un uſage auſſi commode que la formule

$$\operatorname{cof.} d' = \operatorname{ſin.}(h + \delta) \operatorname{ſin.}(h' - r') + \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.}(h + \delta) \operatorname{cof.}(h' - r'),$$

dont ce célebre Académicien les a déduites. Mais je ne crois pas devoir m'y arrêter, d'autant que je n'ai rien à ajouter à ſes transformations ingénieuſes & que leur comparaiſon avec la formule fondamentale, par rapport au calcul, eſt aſſés facile par la ſeule inſpection.

Je terminerai cependant ces réflexions par une méthode qui, par ſa ſimplicité & par la facilité du calcul, doit l'emporter ſur toutes les autres, tant vraies qu'approchantes, que je connois & dont j'ai parlé jusqu'ici. Elle eſt fondée ſur la transformation ſuivante de la formule rigoureuſe:

$$\operatorname{cof} d' = \operatorname{ſin.}(h + \delta) \operatorname{ſin.}(h' - r') + \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.}(h + \delta) \operatorname{cof.}(h' - r')$$

qui équivaut à celle-ci:

cof.

$$\cos. d' = \sin.(h+\delta)\sin.(h'-r') + \cos.(h+\delta)\cos.(h'-r')\cos.\zeta$$
$$-\cos.(h+\delta)\cos.(h'-r') + \cos.(h+\delta)\cos.(h'-r').$$

Donc

$$\cos. d' = (1+\cos.\zeta)\cos.(h+\delta)\cos.(h'-r') - \cos.(h+\delta+h'-r')$$

ou bien

$$\cos. d' = 2\cos.\tfrac{1}{2}\zeta^2\cos.(h+\delta)\cos.(h'-r') - \cos.(h+\delta+h'-r'),$$

où il y a, comme ou fait par les Sphériques,

$$\cos.\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \frac{\sin.(90^\circ - \frac{1}{2}(h+h'-d))\sin.(90^\circ - \frac{1}{2}(h+h'+d))}{\sin.(90^\circ - h)\sin.(90^\circ - h')}$$

ou bien, en mettant pour abréger

$$\frac{h+h'+d}{2} = s \;\&\; h+\delta+h'-r' = \sigma$$

il y a

$$\cos.\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \cos. s\cos.(s-d)\sec. h\sec. h',$$

donc

$$\cos d' = \cos. s\cos.(s-d)\sec. h\sec. h'\cos.(h+\delta)\cos.(h'-r') - \cos.\sigma.$$

Il est bon de remarquer par rapport à cette expression, que comme les angles h, h', $(h+\delta)$, $(h'-r')$ & $(s-d)$ ne peuvent jamais surpasser 90°, le premier membre

$$\cos. s\cos.(s-d)\sec. h\sec. h'\cos.(h+\delta)\cos.(h'-r'),$$

sera toujours positif, à moins que s ne surpasse 90°.

Exemple.

Soit

$$h = 64^\circ, 30'; \; h' = 48^\circ, 20'; \; d = 33^\circ, 15', \pi = 55', 29''$$

& il y aura

$$s = 73^\circ, 2', 30'' \;\&\; s-d = 39^\circ, 47', 30''$$
$$h+\delta = 64^\circ, 53', 26''; \; h'-r' = 48^\circ, 19', 10''.$$

Donc

Donc

$$\begin{array}{lcl} l \text{ cos. } s & = & 9,4649010 \\ l \text{ cos. } (s-d) & = & 9,8855741 \\ l \text{ sec. } h & = & 0,3660156 \\ l \text{ sec. } h' & = & 0,1773117 \\ l \text{ cos. } (h+\delta) & = & 9,6277229 \\ l \text{ cos. } (h'-r') & = & 9,8228066 \\ \hline l.\ \text{part. } \tfrac{1}{2}\text{I} & = & 9,3443319 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl} \tfrac{1}{2}\text{I} & = & \underline{0,22091925} \\ \text{I} & = & 0,4419385 \\ \text{II} & = & 0,3941023 \\ \hline \text{cos. } d' & = & 0,8360408 \\ d' & = & 33^\circ, 16', 32'' \end{array}$$

Il me paroît impoſſible de donner une forme plus commode pour l'expreſſion rigoureuſe, & comme elle ne demande que ſix logarithmes & une ſeule opération qui eſt d'en prendre la ſomme, elle peut être employée généralement dans tous les cas avec le plus grand avantage.

Quoiqu'on puiſſe raiſonnablement ſuppoſer, que ceux qui ſont dans le cas d'avoir beſoin de pareilles formules, ſoient en état de les calculer, on a coûtume pourtant de les traduire, en montrant leur uſage par des préceptes plus détaillés. Je vais faire de même à l'égard de l'expreſſion propoſée ici pour la correction des diſtances apparentes, ſavoir:

$$\text{cos. } d' = 2 \text{ cos. } s \text{ cos. } (s-d) \text{ sec. } h \text{ sec. } h' \text{ cos. } (h+\delta) \times \\ \times \text{ cos. } (h'-r') - \text{cos. } \sigma,$$

pour faire voir qu'elle peut être rendüe très intelligible à ceux même qui ne comprennent rien à la ſolution qui l'a fournie. Voici les préceptes qui expliqueront ſon uſage.

I. Prenez les ſix logarithmes ſuivans:

1 & 2. Du coſinus de la demie ſomme & de la demie différence des hauteurs & de la diſtance apparentes.

3 & 4. De la ſécante de la hauteur obſervée de la Lune & de l'étoile.

5 & 6. Du coſinus de la hauteur corrigée de la Lune & de l'étoile.

II. Rejettez le premier chiffre de la caractériſtique de la ſomme de ces ſix logarithmes: cherchez le nombre qui lui répond & prenez en le double.

III. Cherchez le coſinus de la ſomme des hauteurs corrigées, ou celui de ſon complément à 180°, ſi elle ſurpaſſe 90°.

IV. De ces deux nombres, trouvés par l'Art. II & III. vous prendrez ou la ſomme ou la différence, ſelon les quatre cas ſuivans:

1) Si $s < 90°$ & $\sigma < 90°$, c'eſt leur différence qu'on doit prendre, en lui donnant le ſigne $+$, lorſque le premier membre eſt le plus grand, & le ſigne $-$, lorſqu'il eſt le plus petit.

2) Si $s < 90°$ & $\sigma > 90°$, il faudra prendre la ſomme de ces nombres, qui ſera conſtamment poſitive $+$.

3) Si

3) Si $s > 90°$ & $\sigma > 90°$, ou prendra leur différence, qui aura le ſigne $+$, lorsque le ſecond membre ſurpaſſe le premier, & le ſigne $-$, lorsque celui-ci eſt le plus grand.

4) Si $s > 90°$ & $\sigma < 90°$, on prendra la ſomme, qui aura toujours le ſigne $-$.

V. Cette ſomme ou différence étant le coſinus de la vraie diſtance, on n'a qu'à chercher l'angle qui lui répond. Si elle eſt poſitive cet angle donne la diſtance corrigée de l'éffet de la réfraction & de la Parallaxe; ſi elle eſt négative, il faudra prendre ſon complément à 180°.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI HABITAE.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKI.

Anno 1775.

Eclipſis ☉lis die $\frac{15}{26}$ Auguſti.

Die $\frac{13}{24}$ Aug. meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus eſt - $11^h. 40'. 44'',5$

Die $\frac{15}{26}$ Aug. Cl. D^nus^ *Islenieff* et ego obſeruauimus finem tantum Eclipſeos Solis, quia initium illius contigit ſole ſub horizonte adhuc latente; Ille tubo Achromatico trium pedum triplici lente obiectiua praedito - - 6. 19. 20 t. h.

Ego vero tubo Gregoriano 24 pollicum 6. 19. 16

Eodem die merid. verus ex alt. ☉lis correſpondentibus - - - 11. 37. 40,5

Hinc tempus verum finis Eclipſeos habetur
ex obſeruatione Cl. D^ni^ *Islenieff* - 6. 41. 19.
ex mea - - - - - 6. 41. 15.

Anno

Anno 1778.

Die $\frac{28\ Febr.}{11\ Mart.}$ Em. II. ſatellitis Iouis - - $9^h. 58'. 12''$ t. v.

Obſeruatio inſtituta eſt Luna non procul a Ioue remota, et tardius ſatellitem ſeſe mihi obtuliſſe exinde iudico, quod intenſiori iam, quam par eſt, fulgere videbatur lumine.

Die $\frac{9}{20}$ Mart. Em. I. ſatellitis Iouis - 11. 16. 25.

Obſeruatio bona, peracta eſt coelo ſereno.

Die $\frac{25\ Mart.}{5\ April.}$ Em. I. Satellitis Iouis - - 10. 38. 48. t. v.
Imm. IV. Satellitis - - 11. 46. 20.

Cum IV Satellites lumine iam diminuto gauderet, tam exiguo interuallo a primo ſeiunctus fuit, vt cum illo interdum cohaerere viderentur, id circo poſterior obſeruatio non eſt exacta.

Die $\frac{30\ Mart.}{10\ Apr.}$ Em. III. Satellitis Iouis.

Dubito, vtrum Satellitem videam, nam tardius illum expectaueram - - - 9. 30. 1.
Certus ſum de illius praeſentia - - 9. 30. 7.

Obſeruatio inſtituta eſt coelo ſereno, aere tranquillo, ſed Luna ſplendente.

Die $\frac{1}{12}$ April. Em. II. Satellitis.
Dubito de praeſentia Satellitis - - 9. 54. 22.
Certus ſum ſatellitem prodiiſſe - - - 9. 54. 32.

Eodem die Em. I. Satellitis.

Satelles prodit inconſpectum - -	12^h.	$35'$.	$20''$.	
Pari lumine cum reliquis fulget - -	12.	36.	0.	

Eclipſis ☉lis die $\frac{13}{24}$ Iunii.

Praecedentibus proxime Eclipſin ſolis diebus non licuit motum horologii per altitudines Solis correſpondentes explorare; interim tamen per obſeruationes die 16 et 20 Iunii captas conſtitit motum horologii ante Eclipſim aeque ac poſt Eclipſim Solis fuiſſe vniformem, conſtanter ſcilicet ſpatio diei ſolaris medii ratardaſſe $5''$; quamobrem vt in reductione temporis horologii ad tempus verum ſenſibilis error ineſſe poſſit, non facile crediderim.

Video exiguam partem diſci ſolaris Eclipſim iam eſſe paſſam - - -	5^h.	$2'$.	$0''$.	t. v.
Finis Eclipſis exacte obſeruatus - -	6.	52.	38.	

Vir Celeber. *Lexell* in diſſertatione nuper Academiae tradita plurimas obſeruationes huius Eclipſeos in aliis locis peractas ad computum more ſuo reuocauit, earumque comparationem inſtituit, inanem igitur operam facturus eſſem, ſi finem, a me obſeruatum, non niſi $7''$ ab obſeruatione Cel. *Lexell* deficientem ad calculum reuocarem. Cum vero concluſiones a Cel. *Lexell* ibidem deductae vt plurimum momentis ab illo Petropoli obſervatis innitantur, hoc ſaltem pretium obſervationi meae erit tribuendum, quod illa ad concluſiones Cel. *Lexell* confirmandas conducat.

Anno

Anno 1779.

Die $\frac{29 \text{ April}}{10 \text{ Maii}}$ Em. I. Satellitis Iouis.

Credo Satellitem ex vmbra prodire	$10^h. 10'. 21''$.
Certus sum de eius praesentia -	10. 10. 31.

Eclipsis Solis die $\frac{3}{14}$ Iunii.

Die $\frac{30 \text{ Maii}}{10 \text{ Iun.}}$ meridies verus ex altitudinibus Solis correspondentibus - -	$0^h. 7'. 0'', 2$
Die $\frac{31 \text{ Maii}}{11 \text{ Iun.}}$ - - -	0. 8. 15, 8

Die $\frac{3}{14}$ Iunii.

Initium Eclipsis Solis telescopio Gregor. 24 poll. - - - - - - -	$10^h. 12'. 57''$t.h.
Finis eodem telescopio - -	11. 34. 25.
Dominus Tchernoi tubo Achromatico 3. ped.	34. 28.
Meridies verus ex altitudinibus Solis corresp.	0. 12. 9.
Hinc computo peracto tempus astronomicum verum initii eclipseos die $\frac{2}{13}$ Iunii reperitur - - -	22. 0. 55.
Finis per meam obseruationem - -	23. 22. 18.
Per obseruationem Socii - - -	23. 22. 21.

Cum vtrumque momentum initii aeque ac finis exacte fuisse obseruata mihi persuasus sim, e re esse existimaui illa ad computum reuocare. Hunc in finem assumta differentia meridianorum Grenouicensis et Petropolitani $2^h. 1'. 16''$ ex Tabulis Maieri Londini editis sequentia computaui elementa.

Temp.

Temp. ver. Gr.	19^h.	20^h.	21^h.	22^h.
Temp. med.	$18^h. 59'. 39''$.	$19^h. 59'. 39''$.	$20^h. 59'. 40''$.	$21^h. 59'. 40''$.
Long. ☉ med.	$2^s.22°.25'.12'',1$	$2^s.22°.27'.40''$.	$2^s\ 22°.30'.\ 7'',8$	$2^s\ 22°.32'.35'',8$
—— ☉ vera	2. 22. 57. 31, 3	59. 54, 6	2. 23. 2. 18.	2. 23. 4. 41, 5
Obliqu. Eclipt.	23. 28. 8, 5			
½ Diam. Solis	15. 47, 5		15. 47, 5	
Long. ☽ vera	2. 21. 45. 54, 8	2. 22. 33. 26.	2. 23. 0, 58, 2	2. 23. 38 32.
Latit. ☽ Bor.	57. 24.	1. 0. 48.	1. 4. 12.	1. 7. 36.
Parall. Aequat.	61. 4, 2		61. 5, 8	
—— Correct.	60. 55, 7		60. 57, 3	
$l\,\Pi$	3. 5629705		3.5631606	
Mot. hor. ☽ rel.	35. 7, 9		35. 10, 3	
Log. pro reduct. spat. in tempus	0. 232	4525 0.232	2671 0,231	9583

Pro initio Eclipsis.

Posita iam ratione diametri aequatoris ad axem telluris = 201 : 200, Latitudine Petropolis 59°. 56'. 23'' pro computandis parallaxibus Lunae iuxta methodum Celeber. *Lexell* habetur distantia zenith veri a polo 30°. 18'. 32'' $l\varepsilon = 9.9983816$. Tempus verum initii Eclipsis $22^h. 0'. 55''$ ad meridianum Grenouicensem reductum et in medium conuersum fit $19^h. 59'. 18''$ pro quo habetur:

Longitudo Solis media	- -	$2^s. 22°. 27'. 40''$.
Longitudo ☽ vera	- -	2. 22. 23. 13.
Latitudo ☽ Bor.	- -	1. 0. 46, 9
Parall. ☽ aequ. — parall. ☉	-	60. 56, 5
Parallaxis Longit.	- -	+ 12. 53, 7
—— Latit.	- -	— 38. 5, 3
½ Diam. ☽ apparens	- -	16. 52, 2

et

et tempus verum coniunctionis $23^h. 3'. 3''$. Denotantibus vero δ, y et π correctionibus, quas summa semidiametrorum Solis et Lunae, Latitudo Lunae et parallaxis eiusdem aequatorea admittere possunt, tempus coniunctionis correctum prodit $23^h. 3'. 3'' + 2,37\,\delta - 1,64\,y + 1,39\,\pi$.

Pro fine Eclipsis.

Pro tempore vero obseruationis $23^h. 22'. 18''$. ad meridianum Grenouicensem reducto $21^h\ 21'. 2''$. atque in medium conuerso $21^h. 20'. 42''$ habetur.

Longitudo Solis media - -		2^s.	22°.	$30'$.	$59''$, 6
Longitudo ☽ vera - -		2.	23.	14.	8, 2
Latitudo ☽ Bor. - -			1.	5.	23, 5
Parall. ☽ aequat. — parall. ☉ -				60.	57. 3
Parall. Longit. - -	+			3.	18, 9
—— Latit. - -	—			36.	0, 3
½ Diam. ☽ apparens - - -				16.	53, 4

Vnde tempus verum coniunctionis deducitur $23^h. 3'. 34''$. vel per obseruationem socii $23^h. 3'. 37''$. quam meae praeferendam esse existimo; introductis vero correctionibus δ, y et π orietur expressio pro tempore coniunctionis:

$$23^h. 3'. 37'' - 3.89\,\delta + 3,50\,y - 1.98\,\pi$$

subtrahamus ab hac expressione prius inuentam et habebimus $34' - 6,26\,\delta + 5,14\,y - 3,37\,\pi = 0$. Cuius pars tertia (A) $11,3 - 2.09.\,\delta + 1,71\,y - 1,12\,\pi = 0$ addita ad primam expressionem coniunctionis praebet:

$$23^h. 3'. 14''. 3 - 0,28\,\delta + 0,07\,y + 0,27\,\pi.$$

Cum nunc correctionum δ et π limites sint ad modum arcti, prout patet ex rei natura, variisque disquisitioni-

 bus

bus Cel. *Lexell*, coefficiens vero ipſius y tam ſit exiguus, vt non niſi enormis in Latitudine Lunae error exiguam mutationem in ipſa expreſſione producere valeat tempus coniunctionis ad meridianum Petropolitanum prodit $23^h. 3'. 14''$ ſi ipſas obſeruationes nullis erroribus inquinatas ſtatuere velimus.

Praeter obſeruationem Petropolitanam nulla niſi Göttingae habita ad manus meas peruenit, quam ſimilem in modum ad calculum reuocaui.

Obſeruatio Göttingenſis a Celeb. *Maiero* peracta ita ſe habet:

Initium	$20^h. 9'. 55''$.
Finis	21. 23. 22.

Poſita igitur Latitudine Göttingae $51°. 31'. 54''$. Diſtantiam zenith apparentis a vero reperi $16'. 44''$, $l\varepsilon = 9.9906734$. Dein poſita Longitudine Göttingae a Grenouico $39'. 32''$. pro initio Eclipſis deduxi parallaxin Lunae Longitudinis $+ 29'. 54'', 1$. Latitudinis $- 36'. 51'', 7$. Diametrum ☽ apparentem $33'. 40'', 1$ et tempus verum coniunctionis ad meridianum Göttingenſem

$$21^h. 41'. 43'' + 2,33\,\delta - 1.59\,y + 1.79\,\pi.$$

Ex fine vero exiſtente parallaxi Longitudinis $+ 22'. 28'', 3$ parallaxi Latitudinis $- 32'. 41'', 3$ et Diametro apparente $33'. 45'', 2$ idem momentum reperitur

$$21^h. 42'. 5'' - 4,86\,\delta + 4,55\,y - 1.81\,\pi$$

ab hac expreſſione ſubtracta priori oritur

$$22'' - 7.19\,\delta + 6,14\,y - 3,60\,\pi = 0$$

cuius

cuius rurſum pars tertia

$$(B)\ 7'',3 - 2.39\,\delta + 2,05\,y - 1,20\,\pi = 0,$$

addita ad momentum coniunctionis ex initio deductum dabit idem

$$21^h.\ 41'.\ 50'' - 0,06\,\delta + 0,46\,y + 0,59\,\pi.$$

Collatis interſe momentis coniunctionum a correctionibus δ, y et π fere non pendentibus Longitudo Petropolis a meridiano Göttingenſi prodit $1^h.\ 21'.\ 24''$. Aſt cum ex aliis obſeruationibus conſtet eam eſſe $1^h.\ 21'.\ 44''$ quam proxime, neceſſum eſt vt vel Petropolitanis vel Göttingenſibus obſeruationibus error $20''$ circiter inſit. Quo appareat, vbi nam ille lateat, comparentur inter ſe momenta coniunctionis ex fine deducta, vt pote maioris praeciſionis capacia, et prodit expreſſio pro differentia meridianorum

$$1^h.\ 21'.\ 32'' + 0,97\,\delta - 1.05\,y - 0,17\,\pi$$

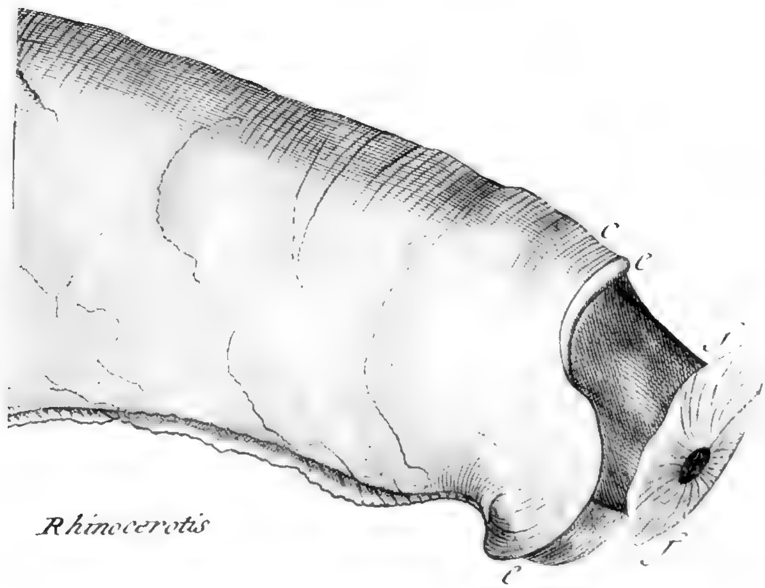
quae neglectis correctionibus δ et π, ſtatuendo $y = -10$ vel -12 facile ad conſenſum cum ſupra allata reducitur, cum contra ſimilis expreſſio ex initio deducta

$$1^h.\ 21'.\ 20' + 0,04\,\delta - 0,05\,y - 0,40\,\pi$$

non niſi enormen ipſi y valorem tribuendo ad conſenſum reuocari poterit. Vnde apparet vel in Petropolitana vel in Göttingenſi obſeruatione initii Eclipſeos notabilem errorem eſſe commiſſum. Vtra vero peccet per obſeruationes in aliis locis peractas erit dirimendum.

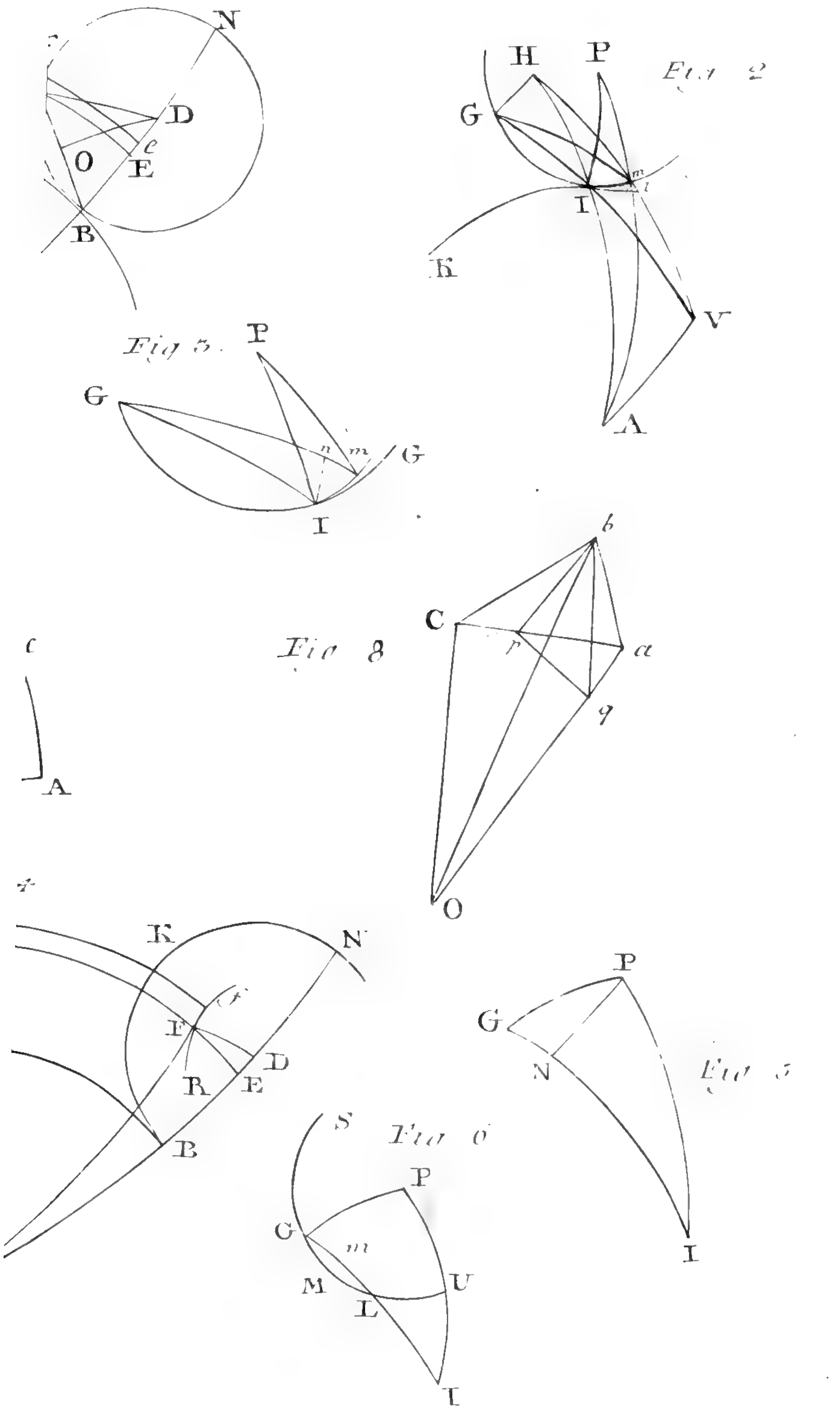
Attamen obſeruationi Petropoli peractae ſequentia fauere videntur: Si obſeruatio iſta ponatur erronea, neceſſe eſt, vt initium Eclipſis $20''$ citius quam par eſt fuerit obſeruatum, quod minime probabile videtur. Dein admiſſo hoc errore et neglecta correctione π, aequationes ſupra allatae A et B debite mutatae poſito $y = -10''$ praebent $\delta = -6''$, poſito vero $y = -12''$ dant $\delta = -8''$ quam proxime; cum contra aſſumto initium Eclipſeos Göttingae $20''$ tardius eſſe obſeruatum, quod probabilius eſt, eaedem aequationes praebent $\delta = -2'', 8$ vel $\delta = -4'', 4$ prout $y = -10''$ vel $-12''$ aſſumitur, ex quo apparet vero ſimilius eſſe in obſeruatione Göttingenſi quam in Petropolitana errorem eſſe commiſſum.

Poſito iam tempore coniunctionis Solis et Lunae ſecundum Eclipticam ad meridianum Petropolitanum $23^h. 3'. 14''$, et Longitudine Petropolis a Grenouico $2^h. 1'. 16''$ tempus verum coniunctionis ad meridianum Grenouicenſem erit $21^h. 1'. 58''$, pro quo Longitudo vera ☉ et ☽ eſt $2^s. 23^\circ. 2'. 22'', 4$ et cum Tabulae *Maieri* pro eodem temporis momento dent Longitudinem Lunae $2^s. 23^\circ. 2'. 14''$, colligitur correctio pro Longitudine $-8'', 4$ correctio vero Latitudinis $-10''$, aut $-12''$ ſtatui poterit, donec obſeruationes in aliis locis peractae aliud quid ſuadae videantur; et Longitudo Gottingae a Petropoli ex fine Eclipſis $1^h. 21'. 42''$.



Rhinocerotis

Penis Rhinocerotis


N
D
e
O
E
B
H
P
Fig 2
G
m
I
K
V
A
Fig 3.
P
G
n
m
G
I
b
C
Fig 8
r
a
q
O
c
A
4
K
N
F
R
E
D
B
P
G
N
Fig 5
I
S
Fig 6
P
G
m
M
L
U
I

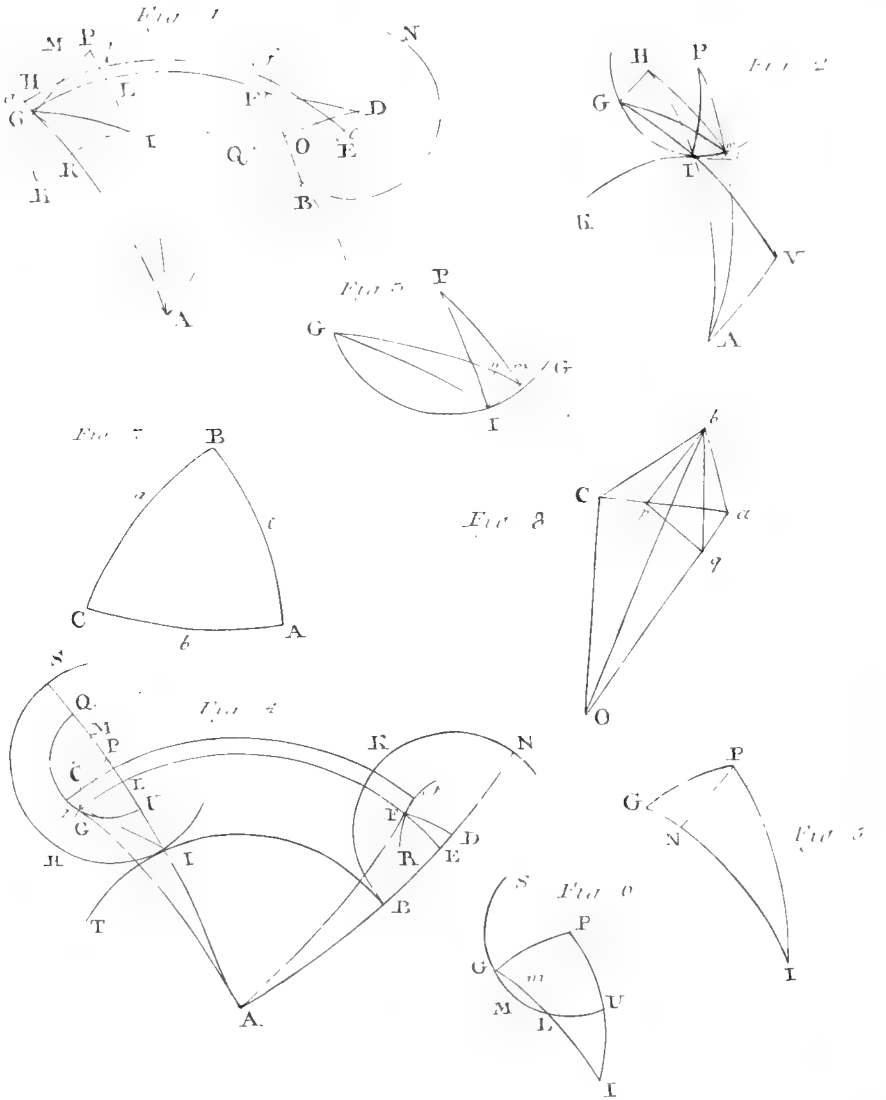


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8

Fig. 2.

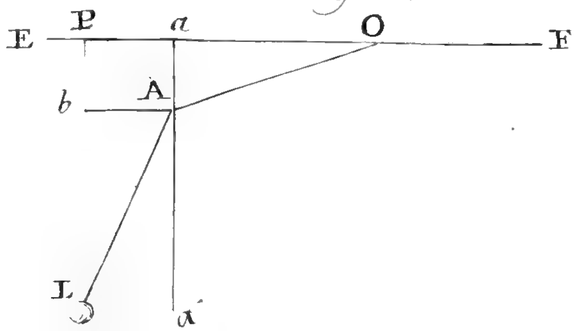


Fig. 4.

Fig. 6.

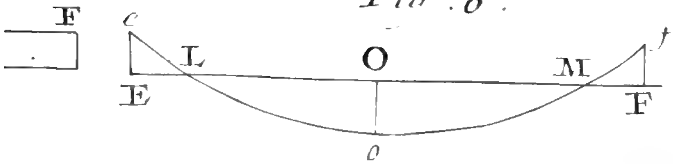


Fig. 8.

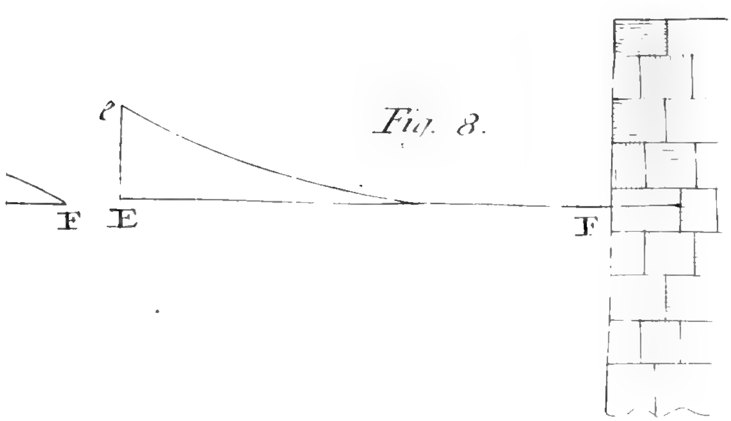


Fig. 1.

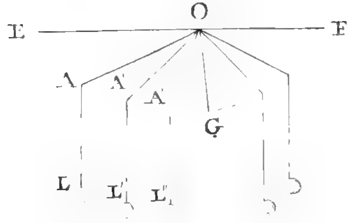
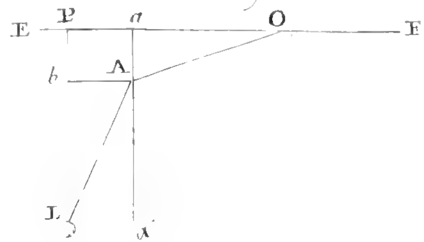


Fig. 2.



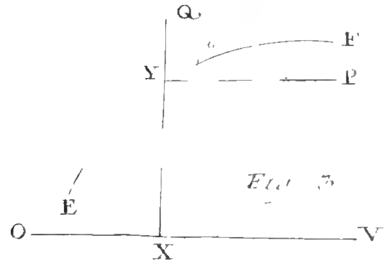


Fig. 3.

Fig. 4.

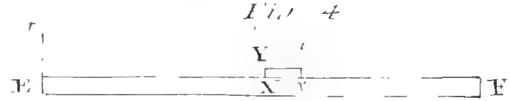


Fig. 5.

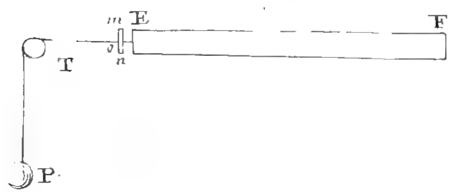


Fig. 6.

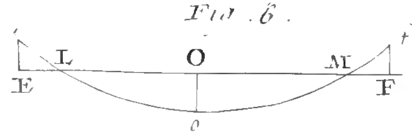


Fig. 7.

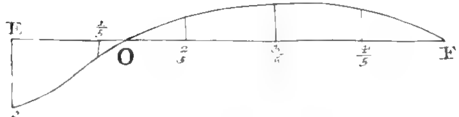


Fig. 8.

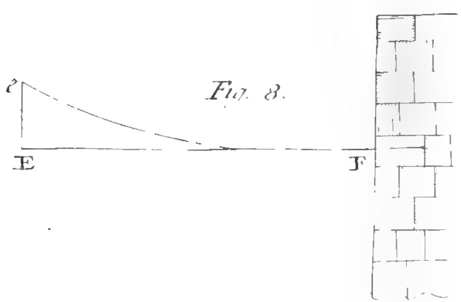
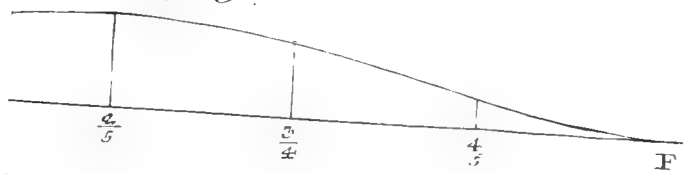


Fig. 1.

Fig. 3.



4.

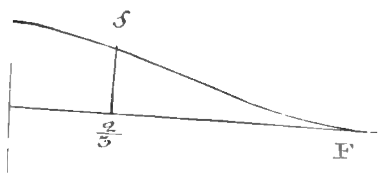
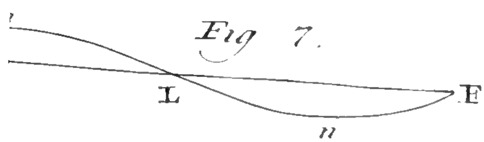
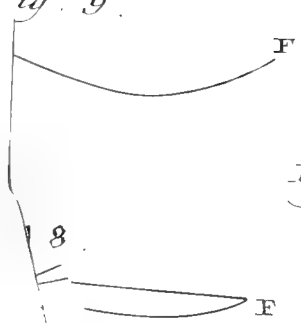


Fig. 5

Fig. 7.



ig. 9.



8.

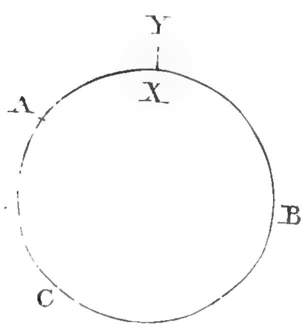


Fig. 10.

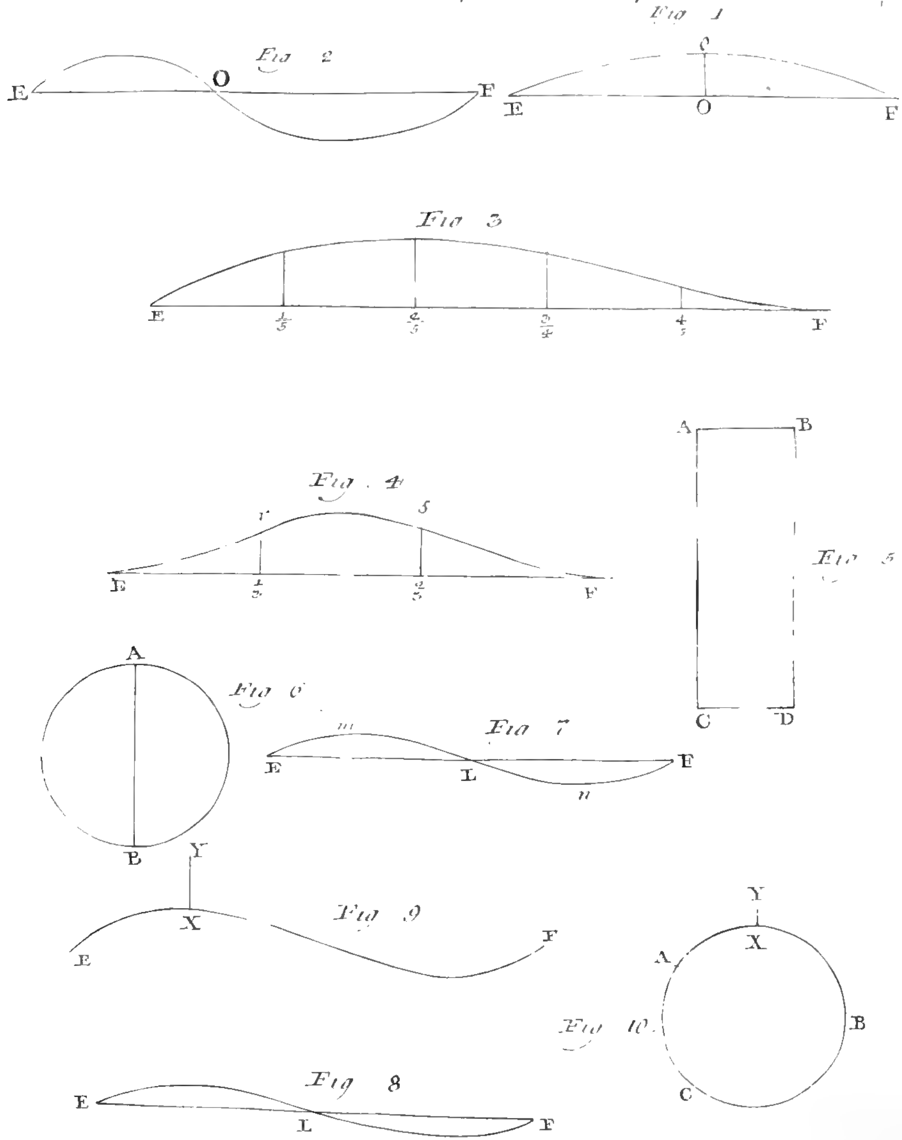


Fig 1
E
O
F
Fig 2
E
O
F
Fig 3
E
F
Fig . 4
r
s
E
F
A
B
Fig 5
C
D
A
Fig 6
B
m
Fig 7
E
L
F
n
Y
X
Fig 9
E
F
Y
X
A
B
Fig 10
C
Fig 8
E
L
F

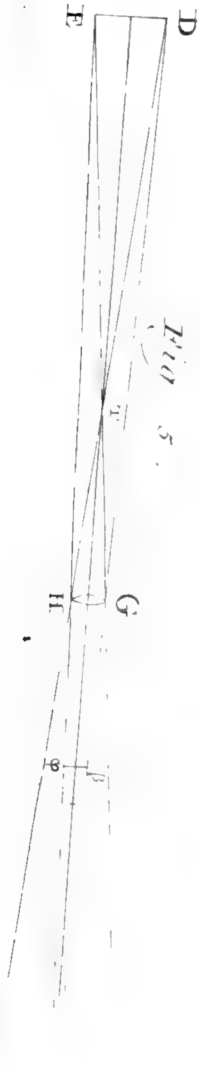


Fig. 5.

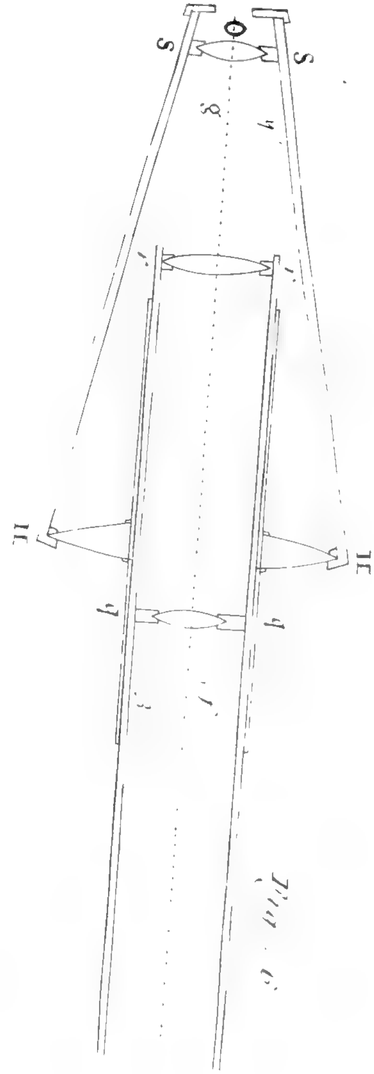
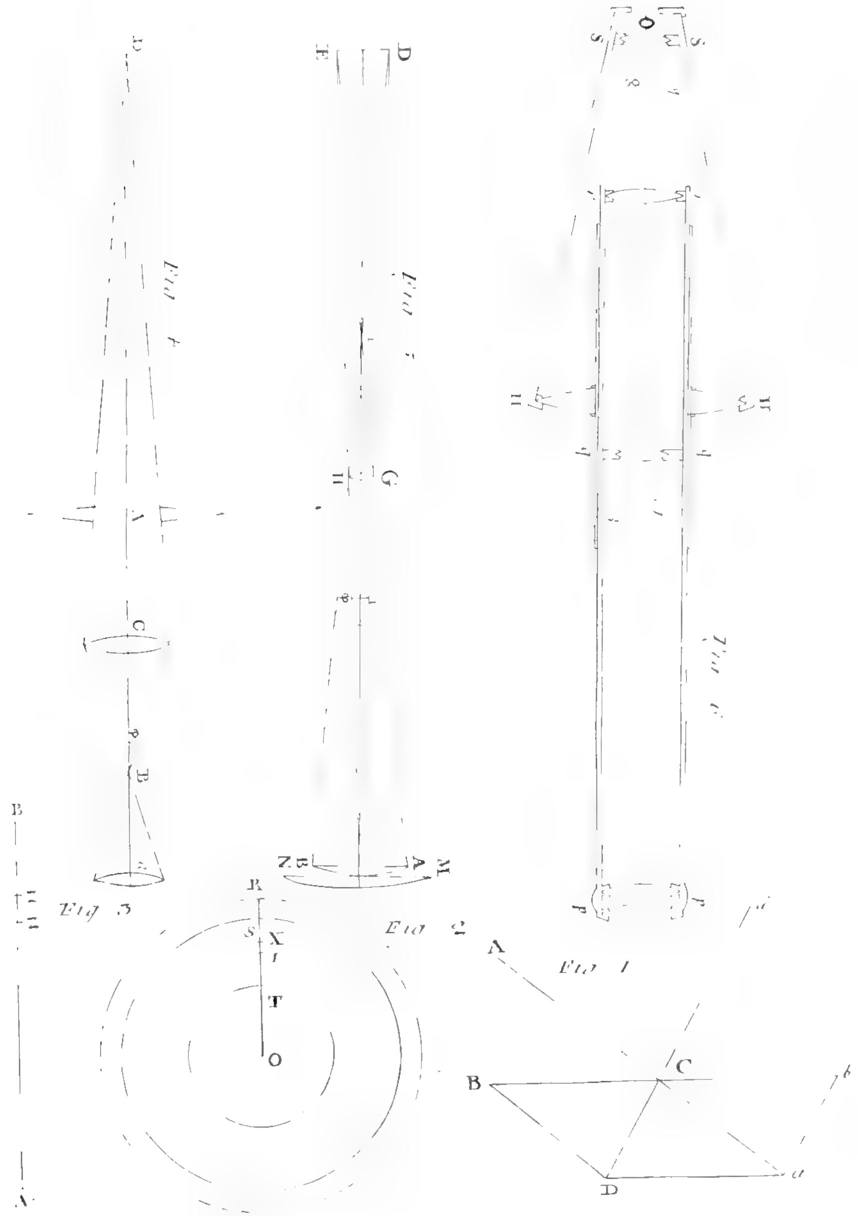
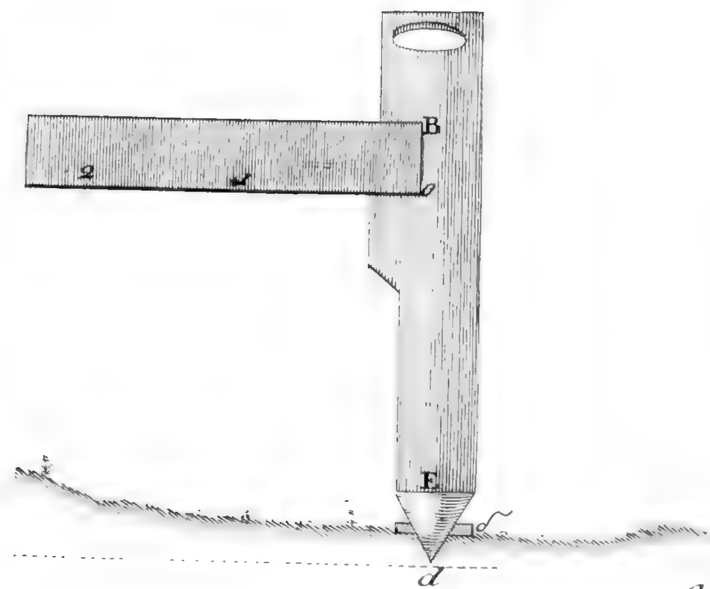


Fig. 6.





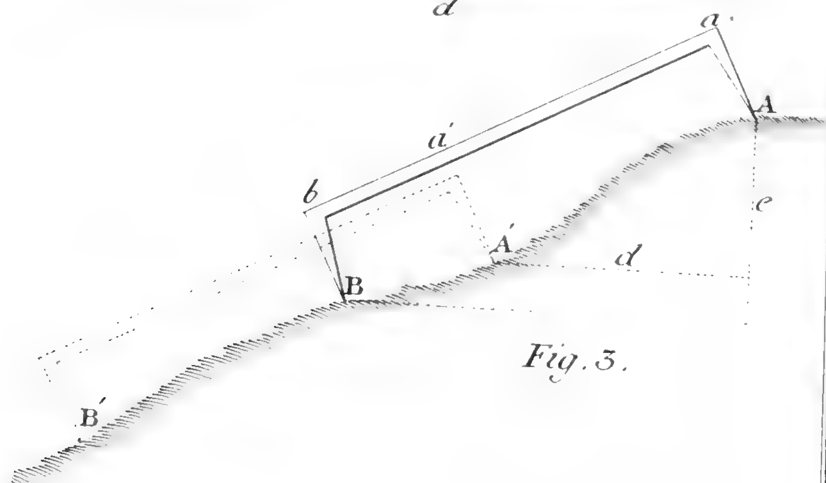
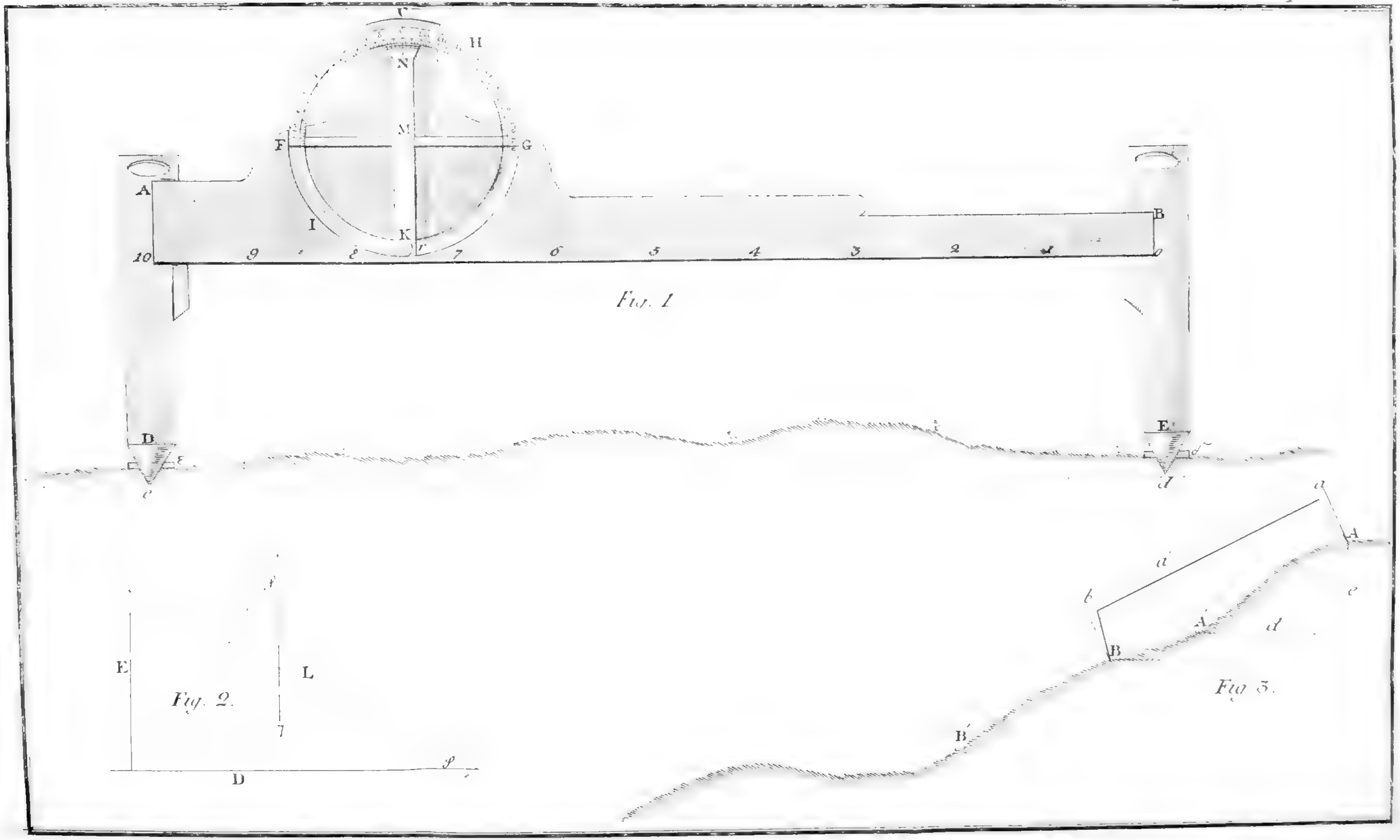


Fig. 3.

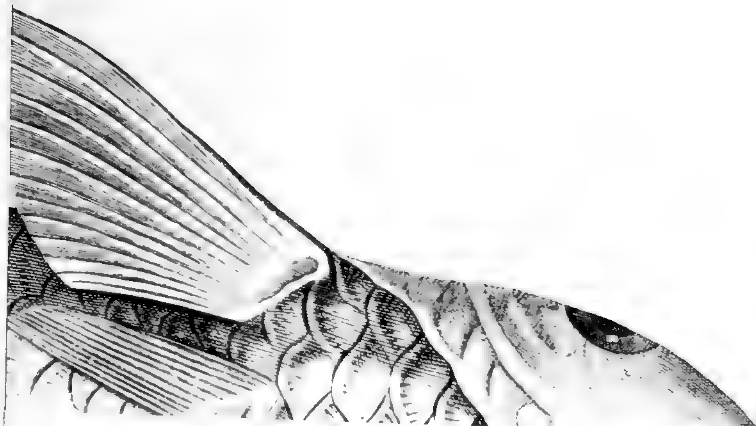

C
H
N
M
F
G
A
B
I
K
r
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
D
E
e
d
Fig. 1
a
A
a'
b
e
A'
d
B
B'
Fig. 3.
E
L
D
Fig. 2.


H
I
F
z
E
2
3
D
C
K
B
P
Q
R
S
a
b
c
M
d
R
S
a
Q

Fig. 2.

Fig. 1.

Fig. 2.



Acta. Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom III p I. Tab. VIII.

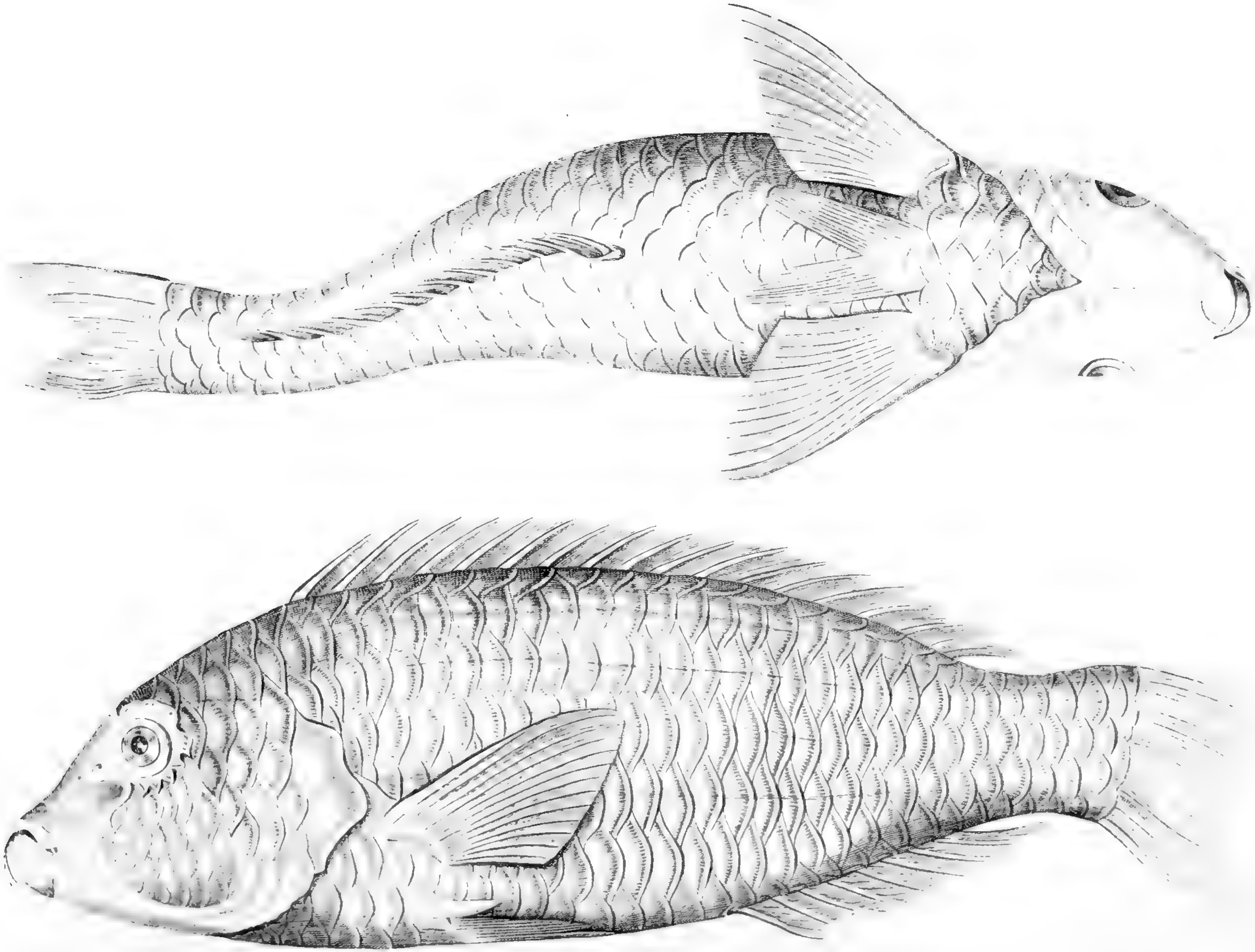


Fig 2.

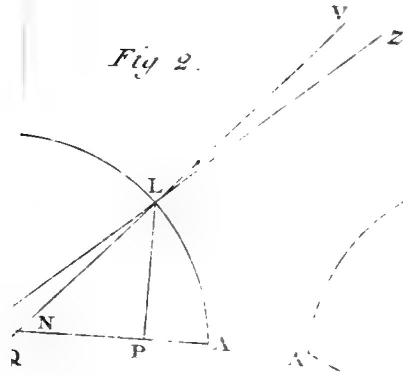


Fig 3.

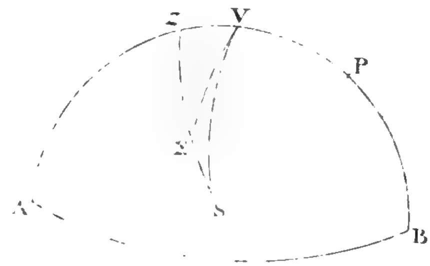


Fig. 5

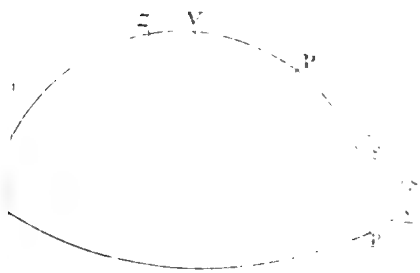


Fig 6.

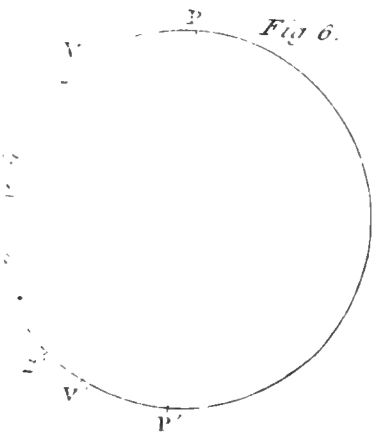


Fig 8

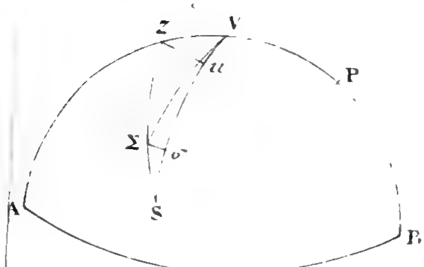
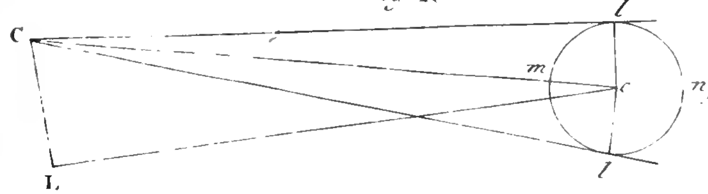


Fig 10



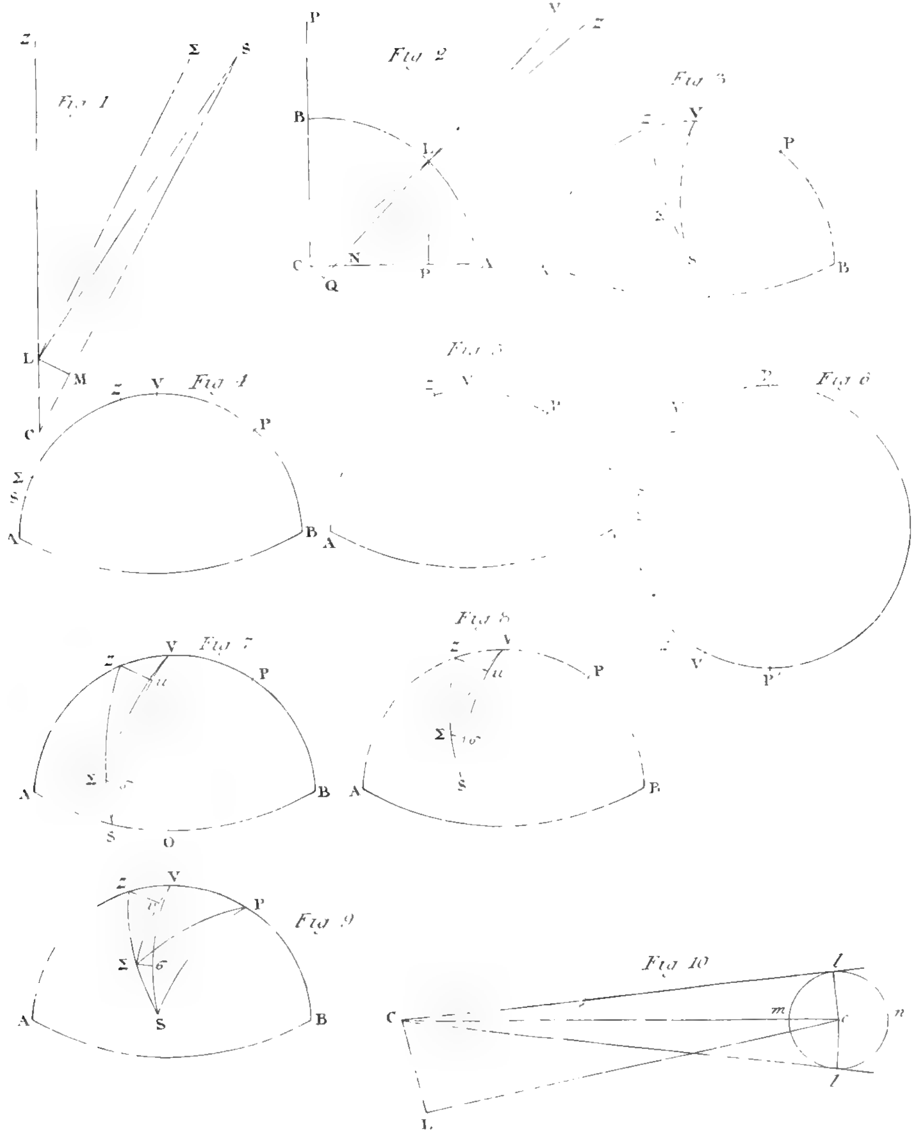


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10

Fig. 2.

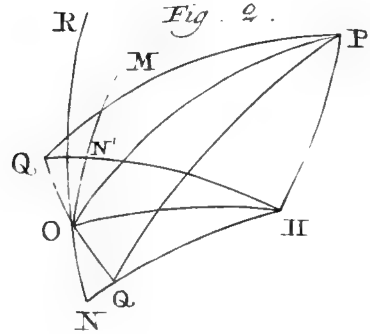


Fig. 3.

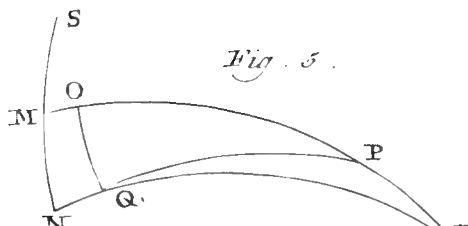
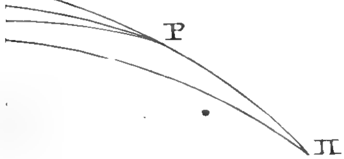


Fig. 4.



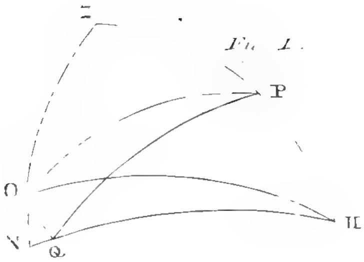


Fig. 1.

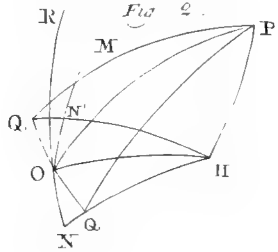


Fig. 2.

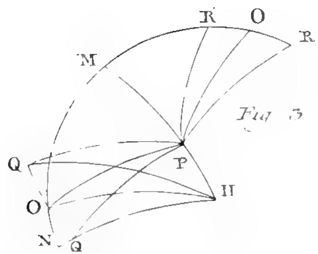


Fig. 3.

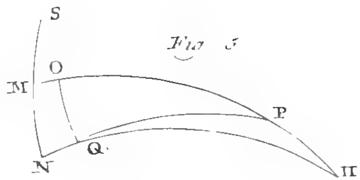


Fig. 5.

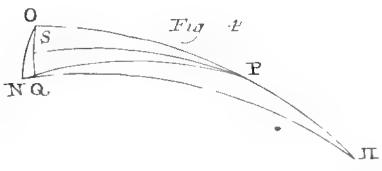


Fig. 4.

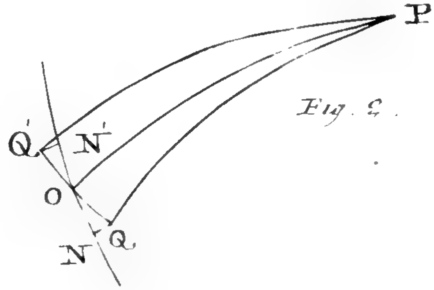


Fig. 2.

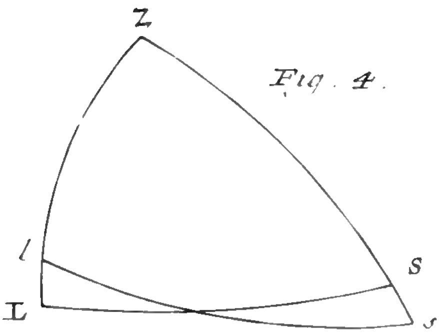
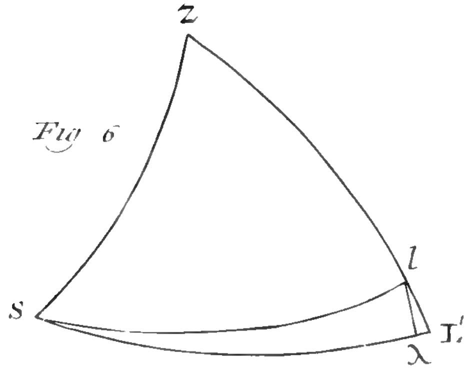
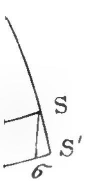


Fig. 4.

Fig 6





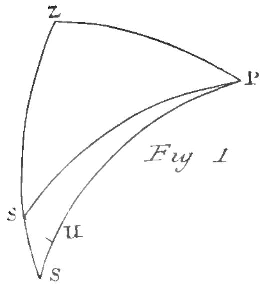


Fig 1

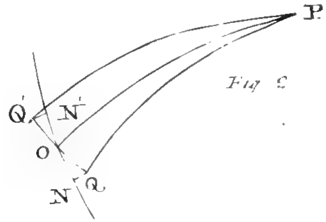


Fig 2

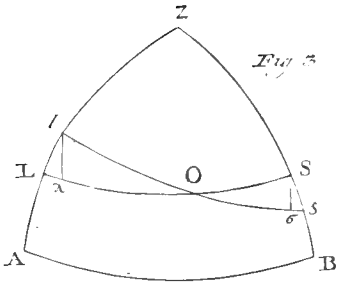


Fig 3

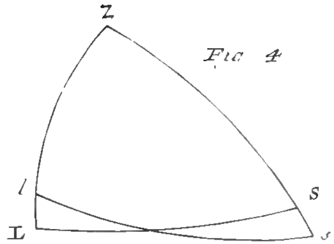


Fig 4

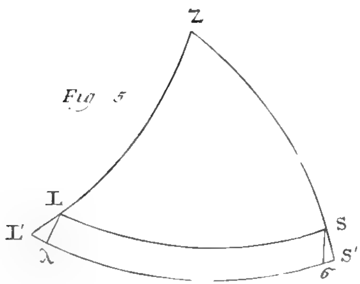


Fig 5

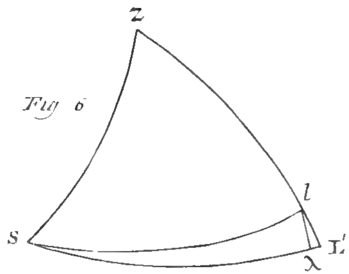


Fig 6