ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXX.

PARS PRIOR.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXIII.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXX. Janvier —— Juin.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXX. Pars prior.

Cum tabulis XI. aeri incisis.

NICO-

PHYSICO-MATHEMATICA

PHYSICA

ASTRONOMICA

STE-

ERRA-

ERRATA.

Pag. 394. Poſtremorum quinque logarithmorum characteriſtica eſt 6.

HISTOI-

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXX.

Janvier —— Juin.

Le vendredi 24 Janvier, l'Académie eut l'honneur de recevoir la visite de Leurs Altesses Impériales Monseigneur le Grand Duc & Madame la Grande Duchesse accompagnés de Son Altesse Sérénissime Monseigneur le Prince Frédéric Guillaume Charles de Würtemberg-Stuttgard, frere de Madame. Ces Augustes hôtes arriverent entre onze heures & midi.

S. E. Mr. le Directeur & Messieurs les Académiciens préposés au Cabinet d'Histoire naturelle reçurent Leurs

Alteſſes au bas de l'escalier qui mène à la Bibliotheque, & Les conduiſirent par tous les Cabinets & Departemens académiques. L'Aſſemblée ordinaire des Académiciens & Adjoints Les reçut enſuite dans la ſalle de Conferences, & Mr. le Prof. *Güldenſtädt* eut l'honneur de montrer un *Corſac*, eſpece de petit Renard, que Mr. *Hablitzl*, Correſpondant de l'Académie venoit d'envoyer d'Aſtrachan pour le Cabinet académique.

Leurs Alteſſes Impériales & Monſeigneur le Prince de Würtemberg ſe rendirent de là au Departement de Geographie, à l'Imprimerie des Eſtampes & enfin au grand Globe de Gottorp; d'où Elles retournerent à la Cour, après avoir témoigné au Directeur & aux Académiciens Leur ſatisfaction dans les termes les plus gracieux.

MÉTÉOROLOGIE.

Hyver de 1779 à 1780, ſuivant le nouveau ſtile.

1.

Il neiga pour la premiere fois le 31 Octobre 1779 & pour la derniere fois le 5 Juin 1780. L'intervalle entre ces deux termes eſt de 219 jours.

2. Il géla pour la premiere fois le 13 Octobre, Thermomètre de Délisle 154^d, & pour la derniere fois le 5 Mai, Therm. 152^d. Cet intervalle entre la premiere & la derniere gélée eſt de 206 jours.

3. La Néva fut priſe pendant 142 jours, depuis le 1 Décembre où elle ſe couvrit des glaces du Ladoga par un froid de 170 degrés, jusqu'au 21 Avril qu'elle débacla par une température de 145^d. Les glaçons du Lac de Ladoga parurent le 29 Avril, & la riviere les charia jusqu'au 1. de Mai.

4. Depuis le 13 Octobre jusqu'au 5 Mai suivant, le plus grand froid a été observé de 195^d le 18 Fevrier matin: Barom. 28. 08 ou $28\frac{1}{12}$ pouces de Paris, ciel serein, puis brouillard & petit vent du Nord. Le moindre froid ou la plus grande chaleur à midi a eté de 129^d le 26 Avril: Barom. 27. 75, ciel nubileux, petit vent du Sud, ensuite pluie. La difference entre ces deux températures extrémes est de 66 degrés de Delisle.

5. Le froid moyen au matin & au soir a été trouvé; depuis le 1^er^ Novembre jusqu'au 1^er^ Mai, 162 degrés
depuis le 1^er^ Octobre jusqu'au 1^er^ Juin, 157 ——
Le froid moyen à midi;
depuis le 1^er^ Novembre jusqu'au 1^er^ Mai, 155 degrés
depuis le 1^er^ Octobre jusqu'au 1^er^ Juin, $149\frac{1}{2}$ ——,

6. Le froid au matin & au soir a été depuis le 13 Octobre jusqu'au 5 Mai:

2 jours au delà de 190^d le 17. & 18. Février.
13 jours entre 180 & 190^d en Janvier & Février. (*)
25 jours entre 170 & 180 en Novembre — Mars. (**)
62 jours entre 160 & 170 en Novembre — Avril.
57 jours entre 150 & 160 en Octobre — Mai.
45 jours entre 140 & 150 en Octobre, Novembre, Février — Mai.
2 jours entre 130 & 140 en Octobre, le 25 & 26.

7. Le

(*) le 2 — 7. 12. 13 14 Janvier, & le 15. 16. 19. 20 Février.

(**) le 30 Nov. 2. 8 — 15. 18. 20. 28 29 Déc 1. 9 22. 25. 26 28 — 31 Janvier, 5. 6. 9, 10. 14 Févr. & le 1. 2. 3 Mars.

7. Le froid à midi dans ce même intervalle de 206 jours d'hyver a été:

1 jour moindre que 130^d ſavoir le 26 Avril.
22 jours entre 140 & 130^d en Octobre, Mars — Mai. (*)
67 jours entre 150 & 140 en Octobre — Décembre, Février — Mai.
61 jours entre 160 & 150 en Novembre — Avril.
40 jours entre 170 & 160 en Novembre — Mars.
13 jours entre 180 & 170 en Décembre — Février. (**)
2 jours entre 190 & 180 le 17. 18. Février.

8. État du Baromètre depuis le 1^er^ Novembre 1779 jusqu'au 1^er^ Mai 1780:

La plus grande élévation 28. 98 le 9 Février à midi. (***)
La plus petite élévation 26. 88 le 30 Octobre matin (****) & le 4 Décembre à 4 heures du ſoir. (*****)

La variation totale - 2. 10 ou $2\frac{1}{10}$ pouces.
Le milieu - - 27. 93.
La hauteur moyenne 27. 86 c. à. d. $27\frac{86}{100}$ pouces de Paris.
Le Baromètre a été 80 jours au deſſus de $27\frac{9}{10}$; $57\frac{1}{2}$ jours au deſſus de 28 & $32\frac{1}{2}$ jours au deſſus de $28\frac{1}{10}$ pouces.

9. Les

(*) Le 18 --- 30 Oct. 16 Mars, 17. 23. 25 28. 30 Avril, & le 1. 3. 5 Mai.
(**) Le 1 Déc. 2 --- 6. 12. 13 25. 28 Janvier, & le 9 16. 19 Février.
(***) Therm 1 2, ciel entierement ſerein. & calme.
(****) Therm. 142, ciel couvert, forte pluie & vent du Sud,
(*****) Therm. 148, ciel couvert, neige, pluie & un gros vent du S - Ou.

9. Les vents forts pendant ce même intervalle de 6 mois d'hyver ont soufflé:

6 jours du *Nord* le 4 Nov. 17. Janv. 4. 5. 14. Févr. 7 Mars.

3 jours du N-E. le 5. 30 Nov. 19 Févr.

6 jours de *l'Est* le 8 Nov. 2. 13 Déc. 3. 21 Janvier, 23 Avril.

6 jours du S-E. le 6. 7. Nov. 15 Déc. 23 Janvier, 20 Févr. 19 Avril.

11 jours du *Sud* le 11. 14. 16. 20. 22 Nov. 26 Déc. 20. 22. Janv. 28 Févr. 4. 16 Mars.

10 jours du S-Ou. le 7. 12. 20. 23. 31 Déc. 26. 27 Févr. 5. 19 Mars, 7 Avril.

12 jours de *l'Ouest* le 1. 21. Nov. 30 Déc. 2. 16 Janv. 13. 24 Fevr. 10. 11. 13. 18 Mars, 14 Avril.

9 jours du N-Ou le 7. 10. 12 Janv. 1 Fevr. 29. 31 Mars, 1. 2. 13 Avril.

10. Les vents très forts sont venus:

3 jours du *Nord*: le 3 Nov. 18 Janv. 3 Mars.

1 jour de *l'Est* le 1 Décembre.

1 jour du S-E. le 25 Février.

9 jours du *Sud* le 17. 18 Nov. 14. 19. 24. 25. 27 Déc. 19 Janv. 5 Avril.

6 jours du S-Ou. le 19 Nov. 4. 22. Déc. 6. 22. 30 Mars.

4 jours de *l'Ouest* le 21 Déc. 11. 15 Janv. 4 Avril.

11. Les

11. Les autres variations de l'Atmosphère pendant ces 6 mois d'hyver ſont annotées dans la table ſuivante :

Atmosphère.	1779. Nov.	Déc.	1780. Janv.	Fevr.	Mars.	Avril.	Somme.
Jours entier. ſereins	2	3	4	6	6	1	22
Jours entier. couv.	17	11	14	13	10	10	75
Brouillards - -	1	5	5	5	2	4	22
Pluie médiocre	9	2	0	2	7	11	31
Pluie copieuſe	2	0	0	0	0	0	2
Neige médiocre	13	13	15	8	13	6	68
Neige copieuſe	2	2	1	0	1	2	8
Aur. bor. foibles	2	2	0	2	0	0	6
Aur. bor. reſplend.	1	0	0	1	1	1	4

La quantité de l'eau de pluie & de neige tombée depuis le 12 Octobre jusqu'au 12 Avril a été trouvée de $3\frac{9}{13}$ pouces de Paris.

Marche de l'aiguille magnétique obſervée pendant l'Aurore boréale du 29 Février 1780 à la Haye & à Franeker.

Extraite d'une lettre de Mr. le Prof. *J. H. van Swinden* datée de Franeker & addreſſée au Secrétaire de Conférences *J. A. Euler*, le 23 de Mars.

Je me ſers à Franeker de trois aiguilles aimantées, placées dans une grande chambre, & à des diſtances trop grandes pour qu'elles puiſſent agir l'une ſur l'autre.

La premiere aiguille marquée No. A eſt à chappe de verre & faite à la façon ordinaire. Les deux autres No. 4 & No. 6. ſont faites ſous ma direction d'après les principes etablis dans la ſeconde partie de mes *Recherches ſur les Aiguilles aimantées* qui ont partagé le Prix de l'Académie de Paris en 1777. Il en eſt de même de l'aiguille No. 3. que mon frere l'Avocat *S. P. van Swinden* emploie à la Haye. Ces trois dernieres aiguilles ont à peu près les mêmes dimenſions & portent des *Nonius* pour l'Obſervation des minutes.

Les

Les aiguilles No. 4 & A, qui étoient d'accord en 1775, diffèrent à présent de plus d'un degré: la premiere No. 4 marquant la plus grande déclinaison. Les aiguilles No. 4 et No. 6 sont d'accord à quelques minutes près: tantôt l'une prévaut, tantôt l'autre. L'aiguille No. 3 employée par mon frère n'indique qu'une déclinaison *rélative*: ainsi je supposerai qu'elle a été d'accord avec No. 4, le 29 Fevrier à 8 heures du matin.

Comme il ne s'agit ici que des variations, j'indiquerai par o (*zero*) la plus petite déclinaison de chacune de mes trois aiguilles: elle a eu lieu à 9 h. 45′ du soir pour toutes les trois. Dans ce moment le No. 4 surpassoit de 51 minutes le No. A, & de 2 minutes seulement le No. 6.

Ces éclaircissemens préallables m'ont paru nécessaires. Voici maintenant le tableau des mouvemens des aiguilles No. A, No. 4, No. 6 à Franeker & de l'aiguille No. 3 à la Haye.

An. 1780	à Franeker			à la Haye
Le 29 Févr.	No. A.	No. 4.	No. 6.	N. 3.
avant midi.	min.	min.	min.	min.
à 6. h.	38	36	31	
8.	40	40	35	40
9.	40	40	35	41
10.	42	42	37	41
11.	42	42	37	41
12.	45	45	39	41
après midi				
à 1. h.	25	25	25	48
1 30′	40	40	35	
2	54	54	53	50
3	25	20	13	48
4	20	20	13	46
5	38	35	35	
6	29	29	30	
7 15	35	60	61	
7 30				82
7 45				98
8	55	85	85	149
8 15				91
8 30	55	110	115	3
8 45	45	78	85	0
9	15	6	61	122–132
9 20				— 3 *
— —				3

An.

* — 3, c'est à dire 3′ plus à l'Est que le point que j'ai pris pour *Zero*.

An. 1780.	à Franeker			à la Haye
Le 29 Févr.	No. A.	No. 4.	No. 6.	No. 3.
après midi.	min.	min.	min.	min.
9 30	50	170	180	10
9 45	0	0	0	12
10	10	10	3	
10 12	30	30	28	
10 20				52
10 27	64	73	75	
10 45	40	35	40	
11	40	35	40	40
11 20				113
11 30	45	50	45	
11 45	50	73	70	103-109
12	55	90	35	13
12 15				77
12 30				71
1 Mars matin				
6 h. 30	38	38	41	
7	40	45	41	40
variation totale le 29 Févr.	64	170	180	152

Ces variations ont été, comme l'on voit, très considérables. Les aiguilles No. 4 & No. 6 ont eu à peu près la même marche, excepté à 9 h. du soir. Mais le No. A a beaucoup différé des deux autres aiguilles à tous égards, soit pour le moment de la plus grande déclinaison, soit pour la grandeur totale de la variation: cependant cette aiguille est également mobile: aussi est elle revenue le lendemain au point d'où elle etoit partie: la veille sa différence du No. 4 étoit de 50', quelque fois de 54': le lendemain de 51' à 56': mais pendant la durée du phénomène la différence a quelquefois été de 171' ou 2$^{d.}$ 51', comme à 9 h. 30' du soir, & quelquefois seulement de 42', comme à 9 h. (*) Ces différences rentrent dans les idées générales que j'ai proposées dans le mémoire cité & que j'avois déduites d'un très grand nombre d'observations: savoir que ces variations dépendent en grande partie des aiguilles mêmes & des changemens qui arrivent aux forces de leurs parties homologues.

Les variations observées à la Haye comparées à celles de Francker produisent des phénomènes assés remarquables quant aux momens auxquels les plus grandes & les plus petites déclinaisons ont eu lieu. La plus grande a été observée à 9 h. 30' pour les aiguilles No. 4 & No. 6: elle etoit alors la plus petite à la Haye: de sorte qu'à cet instant la différence entre les aiguilles No. 3 et No. 4, supposée nulle à 8 h. du matin, montoit à 160' ou 2$^{d.}$ 40'. La déclinaison a eté la plus grande à la Haye à 8 h. du soir, ensuite à 9 h. & à 11 h. 20': elle etoit alors à Francker à peu près au terme moyen, ou beaucoup au dessous: & la grande difference qu'il y a eu à Francker même à 9 h. du soir, entre le No. 4 & le No. 6 est tres remarquable. Peut-être le No. 4 a-t-il réelle-

(*) En ajoutant à la différence que donne la Table, les 51 minutes, dont No. 4. surpassoit N. A. pag. 11.

réellement varié pendant que j'allois de No. 4 au No. 6: car on ſent bien que je ne ſaurois obſerver les trois aiguilles à la fois: or par la diſpoſition des bouſſoles dans ma chambre, je commence l'obſervation alternativement par No A ou No. 6 & le No. 4 eſt toujours la ſeconde aiguille que j'obſerve.

Les jours précédens & ſuivans la marche des trois aiguilles a été très réguliere, & la déclinaiſon de moyenne grandeur: excepté le 2 de Mars entre 9 & 10 h. du ſoir: l'aiguille No. A a varié dans cet intervalle de 10′ Ou. l'aiguille No. 4 de 27′ Ou. l'aiguille No. 6 de 26′ Ou; variations qui ſont irrégulieres tant par leur grandeur, que parcequ'elles ſe ſont faites à l'Oueſt & non à l'Eſt. Le Ciel étoit alors fort couvert & il pleuvoit; mais on m'a dit que la nuit il y avoit eu une très belle Aurore boréale. Le lendemain matin à 6 h. le No. A étoit rétrogradé de 6′ E, le No. 4 de 22′ E, & le No. 6 de 27′ E.

Extrait

d'une lettre de M. le Brigadier Chevalier *de Brekling* addreſſée à M. le Prof. *Beſac* & communiquée à l'Académie dans ſa Séance du 1 Mai.

de Pleskow le 14 *Mars* 1780.

Nous eumes le 20 Février v. ſt. (*) une Aurore boréale des plus reſplendiſſentes. Le Ciel qui ſe trouvoit cou-

(*) C'eſt à dire le 2 Mars nouveau Stile.

couvert le matin, s'éclaircit vers midi, & le temps fut très calme. L'aurore boréale commença vers 10 h. & obtint à minuit sa plus forte splendeur: elle passa notre zénith & couvrit les trois quarts de tout l'horizon: il n'y avoit que l'espace entre l'Est & le Sud que ne fut pas enluminé. Les jets furent terminés & ressembloient à des faisceaux de fusées qui furent lancés au delà du zénith.

Le Baromètre étoit pendant ce temps à la hauteur de 28 $\frac{72}{100}$ pouces d'Angleterre (*) & le Thermomètre de Réaumur à 14 degrés au dessous du point de congélation. Ce froid s'augmenta vers le matin du 21 Février jusqu'à 16 degrés. Le plus grand froid que nous avons eu cet hyver a été de 24 degrés le 7 de Février au matin. Au reste cette aurore boréale n'a pas été jusqu'ici suivie d'autres, & les froids ont depuis diminué considérablement.

(*) 27, 87 pouces de France, ou 27 pouces 10 lignes & demie.

Quan-

Quantité de l'eau de pluie obſervée à Saint-Pétersbourg en 1778, 1779 & 1780.

par *M. Lexell.*

Mois.	Années 1778.	1779.	1780.
Janvier	pouces	0, 422	0, 260
Février	d'An-	0, 340	0, 214
Mars	gleterre	0, 735	0, 665
Avril	0, 467	2, 588	1, 348
Mai	1, 600	2, 581	1, 088
Juin	0, 322	0, 728	pouces
Juillet	3, 019	1, 446	d'Angle-
Août	1, 446	1, 084	terre.
Septembre	2, 603	2, 276	
Octobre	0, 769	0, 923	
Novembre	1, 005	0, 620	
Décembre	1, 019	0, 835	

L'Inſtrument employé pour faire ces obſervations eſt un entonnoir quarré de fer blanc, dont chaque côté contient 20 pouces d'Angleterre. La pluïe en ſort au moyen d'une pipe ſoudée à l'entonnoir, & s'écoule dans un réſervoir fait pour la ramaſſer. Enſuite en verſant l'eau de ce réservoir, on en détermine la quantité par une mesure cubique de cuivre jaune, dont chaque côté est de 2 pouces d'Angleterre, & dont la hauteur est divisée en 20 parties égales.

En supposant donc qu'il est tombé une pouce de pluie, il y aura dans le réservoir 400 pouces cubiques d'eau, parceque l'ouverture de l'entonnoir est de 400 pouces en quarré. Mais comme la mesure contient 8 pouces cubiques, il faudra la remplir 50 fois pour épuiser les 400 pouces cubique du réservoir, & par conséquent la quantité de la mesure marquera la cinquantieme partie d'un pouce d'eau de pluie tombée. De même chaque division latérale en marquera une millieme partie.

Malgré le soin employé pour noter aussi exactement qu'il a été possible la quantité de l'eau de pluïe tombée, on ne sauroit garantir ces observations comme entierement exactes, vû qu'on n'a eu d'autre emplacement pour cet instrument que la gallerie de l'observatoire, où meme on n'a pas pu l'eloigner assés du bâtiment, pour qu'un vent un peu fort venant de ce coté là, n'empechât pas l'instrument de recevoir toute la quantité de pluie qu'il recevroit, si rien n'empechoit la pluie d'y tomber de tous cotés. On prétend aussi avoir remarqué en Angleterre, qu'il tombe à une certaine hauteur de la terre une quantité de pluie beaucoup moindre, que tout près d'elle.

Hau-

Hauteurs de l'eau dans la Néva obſervées par Mr. *Lexell* en 1778. 1779 & 1780.

Année 1778.	Juin.	Juillet	Août.	Sept.	Oct.
1		− 2	+ 6	+ 5	− 10
2		− 2	+ 14	− 4	− 1
3		+ 2	+ 14	− 2	− 1
4		+ 2	+ 2	+ 6	+ 1
5		+ 3	+ 7	+ 5	+ 4
6		− 1	+ 2	+ 2	− 5
7		− 3	+ 2	+ 1	− 5
8	− 6	− 3	+ 3	− 1	+ 0
9	− 6	− 5	+ 4	+ 5	+ 2
10	− 6	− 6	+ 3	+ 6	+ 4
11	+ 8	− 6	+ 3	− 2	+ 3
12	− 2	− 7	+ 1	+ 1	− 4
13	− 2	+ 5	− 3	+ 7	− 7
14	+ 3	+ 1	− 2	+ 3	− 2
15	+ 0	+ 1	+ 3	+ 2	+ 17
16	− 2	+ 5	+ 0	+ 2	+ 7
17	+ 6	+ 3	+ 1	+ 0	+ 2
18	+ 5	− 2	+ 6	+ 15	+ 6
19	+ 0	+ 2	+ 4	+ 9	+ 1
20	− 5	+ 4	+ 5	− 1	+ 2
21	− 3	+ 0	+ 2	− 5	+ 6
22	+ 2	+ 2	+ 0	− 10	− 2
23	+ 7	+ 1	− 1	− 7	− 3
24	− 3	+ 0	+ 1	− 14	− 6
25	+ 1	+ 0	+ 8	− 1	− 6
26	− 4	− 1	− 1	− 4	− 7
27	− 7	+ 6	− 2	− 2	− 7
28	− 4	+ 4	− 3	− 5	− 8
29	− 2	+ 2	− 3	− 12	
30	− 2	+ 1	− 7	− 21	
31		+ 2	− 6		

Année 1779.

Jour du mois	Févr.	Mars	Avr.	Mai.	Juin.	Juill.
1	− 2	− 3	+ 6	− 1	− 6	+ 3
2	+ 3	− 2	+ 11	+ 1	− 5	+ 1
3	− 5	+ 6	+ 5	− 2	− 4	− 1
4	+ 3	− 4	+ 1	− 4	− 6	+ 0
5		− 1	+ 23	+ 1	− 5	+ 0
6		− 1	+ 11	+ 2	− 4	− 7
7		− 1	+ 16	− 5	− 6	+ 3
8	+ 5	+ 0	+ 3	+ 2	− 8	+ 0
9	+ 6	− 2	+ 2	+ 0	− 5	+ 2
10	+ 8	+ 1	+ 1	+ 5	− 1	+ 0
11	+ 3	− 6	+ 8	+ 0	+ 1	− 1
12		+ 0	− 2	+ 0	− 2	+ 0
13	+ 4	− 2	− 1	+ 5	− 4	− 2
14	+ 4	− 2	+ 1	+ 0	− 6	− 2
15	+ 2	+ 0	+ 5	− 2	− 5	− 3
16	+ 3	+ 0	+ 4	− 2	− 3	− 3
17	+ 5	+ 2	+ 0	− 2	− 3	− 2
18	+ 6	+ 4	− 1	− 6	− 2	− 2
19	− 2	+ 1	+ 5	− 4	− 3	− 2
20		+ 1	+ 6	+ 2	+ 6	+ 5
21	− 2	− 1	− 3	− 3	+ 4	+ 0
22	+ 5	+ 1	− 4	− 10	− 2	+ 0
23	+ 6	+ 2	− 2	− 3	+ 0	+ 2
24	+ 5	+ 3	− 4	− 5	+ 0	− 2
25	+ 4	+ 5	+ 10	− 4	− 3	+ 0
26	+ 4	+ 2	+ 3	− 4	− 3	+ 0
27	− 2	+ 5	+ 1	− 4	− 2	− 1
28	+ 0	+ 4	− 2	− 4	− 3	− 2
29		+ 1	− 1	− 6	− 1	− 2
30		+ 6	− 5	− 6	− 1	− 4
31		+ 4		− 6		− 3

An-

Année 1779.

Jour du mois	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
1	− 4	+ 5	− 6	+ 0	+ 2
2	− 8	+ 5	− 6	+ 2	+ 3
3	− 7	+ 5	− 6	+ 4	+ 1
4	− 5	+ 8	− 4	+ 2	− 2
5	− 5	+ 9	+ 0	+ 1	+ 3
6	− 4	+ 6	− 1	− 3	+ 2
7	− 3	+ 6	+ 0	− 3	+ 3
8	− 3	+ 3	+ 1	− 3	+ 0
9	− 1	+ 14	− 3	− 10	− 2
10	− 2	+ 3	− 5	+ 5	− 6
11	+ 1	+ 5	+ 2	− 13	+ 3
12	− 2	+ 5	+ 2	− 2	+ 8
13	− 3	+ 8	+ 2	+ 2	+ 14
14	− 2	+ 2	+ 3	− 5	+ 4
15	+ 2	+ 2	+ 1	− 10	+ 3
16	+ 0	+ 1	− 3	− 6	+ 10
17	− 1	+ 1	+ 1	− 5	+ 2
18	− 3	+ 2	+ 2	+ 0	+ 3
19	− 2	+ 1	+ 5		+ 3
20	+ 1	− 2	+ 7		+ 6
21	+ 1	− 2	+ 8		+ 0
22	+ 2	+ 2	+ 13		− 5
23	+ 0	+ 2	+ 13	− 1	− 3
24	− 1	+ 1	+ 6	+ 3	+ 2
25	− 1	− 1	− 2	+ 2	
26	− 4	− 4	− 2	+ 17	
27	− 2	− 6	− 2	+ 5	− 1
28	+ 7	− 5	− 2	+ 7	+ 3
29	+ 3	− 5	+ 0	+ 5	+ 3
30	+ 4	− 5	+ 0	+ 4	− 3
31	+ 5		+ 0		+ 16

Année 1780.

Jour du mois	Janv.	Févr.	Mars	Avr.	Maï.
1		− 1	+ 9	+ 2	− 4
2		− 1	+ 0	+ 2	− 4
3		+ 0	+ 6	+ 1	− 6
4	+ 8	+ 2	+ 3	− 1	− 8
5	+ 3	+ 0	+ 2	− 1	− 7
6	+ 0	− 1	+ 4	+ 0	− 6
7	+ 0	− 2	+ 4	+ 1	− 5
8	− 2	− 1	+ 6	+ 4	+ 0
9		+ 3	+ 8	+ 5	− 7
10	+ 0	+ 1	+ 12	+ 5	+ 8
11	+ 2	− 1	+ 11	+ 5	+ 3
12	+ 1	+ 0	+ 6	+ 0	+ 3
13	+ 3	+ 1	+ 9	− 5	+ 1
14	+ 2	+ 5	+ 6	− 7	− 1
15	+ 1	+ 10	+ 6	− 7	+ 0
16	+ 0	− 1	+ 4	− 8	+ 0
17	+ 0	+ 4	+ 5	− 8	− 1
18	− 2	+ 3	+ 5	− 4	+ 0
19	− 1	+ 2	+ 5	− 6	+ 0
20	− 1	+ 1	+ 8	+ 2	− 1
21	− 2	+ 2	+ 7	+ 1	+ 4
22	− 2	+ 5	+ 6	− 5	+ 1
23	− 2	+ 4	+ 1	− 2	+ 2
24	− 2	+ 5	− 3	− 4	+ 4
25	− 1	+ 8	+ 2	− 6	+ 15
26	− 1	+ 5	+ 1	− 7	+ 5
27	+ 0	+ 8	+ 2	− 6	+ 0
28	− 1	+ 8	+ 3	− 4	+ 6
29	− 2	+ 9	+ 3	− 4	+ 6
30	− 1		+ 2	− 6	+ 6
31	− 1		+ 1		+ 2

Re-

Remarques ſur ces obſervations.

1. L'Echelle qu'on a employée pour évaluer les hauteurs de l'eau dans la Néva, eſt diviſée en Verſchoks, dont 16, comme il eſt connu, ſont une Arſchine de Ruſſie. Or cette meſure étant égale à 26 pouces, $6\frac{1}{10}$ lignes, meſure de France, il eſt très aiſé de réduire ces obſervations, qui marquent la hauteur de l'eau, au deſſus ou au deſſous de ſa hauteur moyenne exprimée en Verſchoks, à quelque autre meſure connue.

2. Pour établir une valeur exacte de la hauteur moyenne, on a déterminé pour chaque mois ſéparement les hauteurs moyennes & enſuite de ces déterminations, dont la différence n'étoit pas fort ſenſible, on a pris un réſultat moyen, qui devoit marquer la hauteur moyenne de l'eau. En procédant de cette façon, la diviſion de l'echelle marquée par 26 Verſchoks eſt trouvée correſpondante à la hauteur moyenne. Cependant en cas que quelque faute ſe ſoit gliſſée dans cette détermination, on peut aiſément la découvrir pas les obſervations mêmes, où pourtant il paroit raiſonable, d'exclure de cette recherche celles, qui s'éloignent plus que de 10 Verſchoks de la hauteur moyenne.

3. Pour l'ordinaire ces obſervations ont été faites le matin, vers 8 ou 9 heures. On auroit bien pu ſe donner la peine de les répéter pluſieurs fois le jour; mais ordinairement cette aſſiduité auroit été ſuperflue, lorsque la hauteur de l'eau d'un jour à l'autre, ne change que fort peu.

4.

4. Quand on se propose de faire usage de ces observations, àfin d'en conclure les causes, qui peuvent avoir quelque influence, pour faire, ou baisser, ou monter l'eau dans la riviere; il faut necessairement les comparer avec les observations météorologiques faites chaque jour & sur tout celles qui marquent l'etat du ciel, la direction & la force du vent & la quantité de pluie. Ainsi la raison, pourquoi dans le mois de Juillet 1778 la hauteur de l'eau étoit presque toujours au dessus de la hauteur moyenne, est probablement, qu'il tomboit dans ce mois une quantité de pluie très considérable. Mais l'an 1779 dans le mois de Juillet, la hauteur de l'eau étoit pour la plus part du tems au dessous de la hauteur moyenne; aussi ne tomboit-il pendant ce mois, que fort peu de pluie.

5. Depuis le tems, que ces observations ont été commencées, leur Auteur a aussi remarqué les crues extraordinaires de l'eau dans la Neva, dont les principales sont:

l'An

l'An 1778.

le 2 d'Aoust à	10^h. avant midi	+ 26	Verschock.
	10. $30'$. - -	+ 28	
	12. - - -	+ 32	
	2. après midi	+ 34	
	3. - - -	+ 30	

l'An 1779.

le 5 d'Avril à	8^h. avant midi	+ 26	Verschock.
	9. - -	+ 24	
	10. - -	+ 18	
le 8 Sept. pendant la nuit -		+ 26	
le 10 Décemb. pendant la nuit		+ 35	
le 12 - - à	2^h. après midi	+ 36	

l'An 1780.

le 29 Mai à 7^h. matin + 22 Verschock.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier ſémeſtre de l'année 1780.

Dans l'Aſſemblée du Vendredi 10 Janvier, M. le Profeſſeur *Guldenſtädt* a lu une lettre de M. *Elterlein* datée de Witegra le 24 Déc. 1779 (*) qui lui mande qu'ayant mis le 23 au ſoir pendant un froid de 205 degrés, trois onces de mercure dans une taſſe de porcelaine, au grand air; cette maſſe s'étoit trouvée gelée le lendemain matin, le Thermomètre ayant baiſſé jusqu'au 224 degré: & qu'elle n'a enſuite repris ſa fluidité parfaite qu'au 209ᵉ degré.

Le 17 Janvier M. l'Adjoint *Ozeretskofsky* a remis un extrait des expériences faites ſur l'electricité de la glace

---

(*) Situé dans le Gouvernement de Novgorod ſous une latitude de 60° 52′ & à 6 degrés à l'Eſt de St. Pétersbourg.

glace par M. *Achard*, académicien de Berlin, que Messieurs de l'Université de Strasbourg lui ont adressé pour le présenter à Mrs. le Physiciens de l'Académie de St. Pétersbourg. (*).

Le 20 Janvier. Le Secrétaire de Conférences *J. A. Euler* a présenté de la part de M. *Jean Bernoulli* Astronome royal à Berlin, le 6e cahier de ses nouvelles littéraires de divers pays.

—— —— il a lu une lettre adressée à S. E. Mr. *de Domaschnew* par *le P. Drojat*, Prêtre au verbe incarné, datée de Grénoble le 25 Nov. 1779, qui envoie deux mémoires qu'il dédie à Sa Majesté l'Impératrice; savoir

Nouveaux phénomenes d'optique; ou propriétés singulieres, qu'a un cercle, ou un autre corps d'une figure quelconque, percé d'un petit trou.

Nouvelle maniere très-simple de déterminer par le calcul, quel que puisse être le rapport de la réfraction, le foyer des rayons, soit parallèles, soit divergens ou convergens, dans leur incidence sur une lentille quelconque.

—— —— il a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Golitzin*, Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale à la Haye, qui fait mention d'une nouvelle espèce de

(*) Ces expériences n'ont pas reussi à St. Pétersbourg malgré qu'il y fait des froids plus grands que de 20 degrés de Réaumur. Les glaces se sont toujours manifestées comme des conducteurs & jamais comme des corps isolans.

de Thermomètres propres pour mesurer les grands degrés de chaleur, imaginée par M. *Achard* académicien de Berlin.

Le 24 Janvier. Visite de Leurs Altesses Impériales Msgr. le Grand-Duc & Madame la Grande-Duchesse, accompagnées de S. A. S$^{me.}$ Msgr. le Prince *Fréderic-Guillaume* de Würtemberg frère de Madame. Voyez ci-dessus pag. 3.

Le 31 Janvier. Un Chirurgien a remis de la part de S. E. Mr. le Gouverneur Général de Smolensk Prince *de Repnin*, un monstre humain à deux visages dont une paysanne est accouchée après l'avoir porté sept mois. (*).

Le 3 Fevrier. Le Secrétaire a présenté de la part de M. *Scopuli*, Conseiller & Professeur à Pavie, le catalogue imprimé des plantes du nouveau jardin botanique institué par Ordre de S. M. l'Impératrice-Reine.

Le 7 Fevrier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. *van Swinden* à Franeker, qui envoie le Plan de son Traité sur l'Aurore boréale, tel qu'il se trouve inséré au Journal des savans, & qui fait part des ses remarques sur quelques agitations extraordinaires de l'aiguille magnétique observées en 1780.

Le 24 Fevrier. M. l'Adjoint *Géorgi* a lu une lettre adressée à M. le Prof. *Pallas* par M. le Translateur *Jäh-*

(*) Peu de temps après la naissance de ce monstre, la mère accoucha encore d'une fille bien conformée, mais qui mourut d'abord après la naissance. La mère s'est rétablie & vit encore.

Jährig, qui communique les obſervations intéreſſantes & en grande partie minéralogiques qu'il a faites dans le Déſert entre l'Oural & la Volga.

Le 9 Mars. Le Secrétaire a préſenté un écrit circulaire, par lequel M. le Docteur *Stagg* à Vilna invite les médecins à donner leur ſentiment ſur une amauroſe ou goutte ſeraine, dont ſe trouve attaqué le fils d'un Seigneur Polonois.

Le 13 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Le Robbergherr de Vauſenville*,

Eſſai Phyſico-Géométrique contenant 1° la Détermination du centre de gravité d'un ſecteur de cercle quelconque. 2° La Réſolution géometrique du Problème de la quadrature définie du cercle: expoſé à la cenſure du Public & dédié à Sa Sainteté & aux Monarques.

L'Auteur ſomme l'Académie d'examiner cet eſſai & de lui en communiquer ſon ſentiment. L'Académie de ſon coté ayant fermement réſolu de ne plus répondre à ces prétendus inventeurs de la quadrature de cercle, la brochure de M. de *Vauſenville* a été miſe au rebut.

—— —— M. le Prof. *Güldenſtädt* a rémis de la part de M. *Hablitzl*, correſpondant de l'Académie à Aſtrachan deux poiſſons conſervés dans l'eſprit de vin; un *Serougha* & un *Eſturgeon*, qui ont été dépoſés au cabinet d'hiſtoire naturelle.

Le 30 Mars M. le Prof. *Güldenstädt* a encore remis de la part de M. *Hablitzl* une espèce d'esturgeon conservé dans de l'esprit de vin & nommée *Schipcossera* qui a été déposé au cabinet d'histoire naturelle.

—— —— M. le Prof. *Laxmann* a présenté une collection de semences de la part de M. le D. *Helénius* Démonstrateur en Botanique au Jardin de l'Université d'Abo.

Le 1 Mai. Le Secrétaire a présenté

Observation d'une Aurore boréale très resplendissante annotée par M. le Brigadier Chevalier de *Brekling* à Pleskow le 20 Fevrier 1780.

& de la part de M. le Prof. *van Swinden* à Francker:

Marche de l'aiguille aimantée observée à la Haye & à Francker pendant l'Aurore boréale du 29 Fevrier 1780.

voyez ci-dessus pag. 10 & 15:

—— —— M. le Prof. *Laxmann* a remis diverses semences rares, que M. le Prof. *Allioni* de Turin lui a envoyées pour l'Académie.

Le 8 Mai. Le Secrétaire a présenté:

1) de la part de l'Académicien externe, *M. B. Wilson* à Londres

Reasons for dissenting from the Report of the committee appointed to consider of M. *Wilson's* Experiments by *Samuel Musgrave*.

2)

2) de la part de M. *Launay*, de l'Académie Impériale & Royale des Sciences & Belles-Lettres de Bruxelles.

Mémoire ſur l'Orichalque des anciens, précedé de quelques obſervations ſur le *Lapis aeroſus* de Pline.

3) de la part de M. l'Abbé *Mayer*, Aſtronome de S. A. Séréniſſime Msgr. l'Electeur Palatin

De novis in coelo ſidereo phaenomenis in miris ſtellarum fixarum comitibus *Mannhemii* detectis.

Le 18 Mai. Le Secrétaire a préſenté de la part du Lord Vicomte *Mahon*,

Principles of Electricity containing divers new Theorems and Experiments together with an Analyſis of the ſuperior advantages of high and pointed Conductors.

Le 5 Juin. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur M. *Louis Bertrand*, Profeſſeur de Mathématique à Génève,

Developpement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques, priſe dans toute ſon étendue.

Le 19 Juin. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Societé royale des Sciences de Londres,

Philoſophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXIX. for the Year 1779. Part I.

&

& de la part de M. de *Magellan* à Londres:

1. Description & usages des nouveaux Baromètres, pour mesurer la hauteur des montagnes & la profondeur des mines.

2. Essai sur la nouvelle Théorie du feu élémentaire & de la chaleur des Corps: avec la description des nouveaux Thermomètres, destinés particulièrement aux observations sur ce sujet.

MATHE-

MATHEMATICA.

SVPPLEMENTVM CALCVLI INTEGRALIS PRO INTEGRATIONE FORMVLARVM IRRATIONALIVM.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

§. 1.

Si functio X *praeter ipsam variabilem* x *etiam formulam irrationalem* $s = \sqrt{(a + b x)}$ *inuoluat: ita tamen, vt* X *sit functio rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Cum irrationalitas tantum in formula $s = \sqrt{(a + b x)}$ insit: hanc tantum ita per idoneam substitutionem tolli oportet,

portet, vt inde valor ipsius x non fiat irrationalis. Hoc autem praestabitur, ponendo $a + bx = zz$, vt fiat $s = z$ et $x = \frac{zz - a}{b}$, hincque $dx = \frac{2}{b} z\, dz$; quibus valoribus substitutis tota formula differentialis $X\, dx$, ad rationalem, nouam variabilem z complectens, perducitur.

Exemplum 1.

§. 2. Si fuerit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a + bx)}}$, seu $dy = \frac{dx}{s}$, posito $\sqrt{(a + bx)} = z$, fiet $dy = \frac{2}{b} dz$, et integrando $y = \frac{2z}{b}$, vnde facta substitutione colligitur $y = \frac{2}{b} \sqrt{(a + bx)} + C$.

Exemplum 2.

§. 3. Si fuerit $dy = dx \sqrt{(a + bx)} = s\, dx$, sumto $\sqrt{(a + bx)} = z$ erit $dy = z\, dx = \frac{2}{b} zz\, dz$, vnde integrando fit $y = \frac{2}{3b} z^3$, et facta substitutione prodit

$$y = \frac{2}{3b} (a + bx)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Quod integrale si debeat euanescere facto $x = 0$, fiet $C = -\frac{2a\sqrt{a}}{3b}$, ideoque

$$y = \frac{2(a + bx)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a}}{3b}.$$

Exemplum 3.

§. 4. Si fuerit $dy = \frac{x\, dx}{\sqrt{(a + bx)}}$, facta substitutione $\sqrt{(a + bx)} = z$, crit

$$dy = \frac{2(zz - a)\, dz}{bb} = \frac{2zz\, dz - 2a\, dz}{bb},$$

vnde

vnde fit integrando $y = \frac{2}{3bb} z^3 - \frac{2a}{bb} z + C$, et facta restitutione

$$y = \frac{2}{3bb}(a+bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2a}{bb}\sqrt{(a+bx)} + C$$
$$= \frac{2\sqrt{(a+bx)}}{bb}\left(\frac{1}{3}bx - \frac{2}{3}a\right) + C.$$

Exemplum 4.

§. 5. Si fuerit $dy = \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$, facta substitutione $\sqrt{(a+bx)} = z$ erit $dy = \frac{dx}{z^3}$; quae formula porro ob $dx = \frac{2zdz}{b}$ abit in $dy = \frac{2dz}{bzz}$, qua integrata fit $y = -\frac{2}{bz}$, seu facta restitutione, $y = \frac{-2}{b\sqrt{(a+bx)}} + C$. Vbi notetur, pro C sumi debere $\frac{2}{b\sqrt{a}}$.

Problema 2.

§. 6. *Si fuerit* X *functio quaecunque rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *existente* $s = \sqrt[n]{(a+bx)}$, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $\sqrt[3]{(a+bx)} = z$, vt sit $s = z$, erit $a+bx = z^3$, hincque $x = \frac{z^3 - a}{b}$ et $dx = \frac{3zzdz}{b}$; quibus valoribus substitutis tota formula fiet rationalis.

Exemplum 1.

§. 7. Si fuerit
$dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)}} = \frac{dx}{s}$, posito

$\sqrt[3]{(a+bx)} = z$ et substituto valore hinc nato $dx = \frac{3zzdz}{b}$, erit $dy = \frac{3zdz}{b}$, vnde integrando fit

$$y = \tfrac{3}{2b}zz = \tfrac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + C.$$

Exemplum 2.

§. 8. Si fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{dx}{ss},\ \text{posito}$$

$\sqrt[3]{(a+bx)} = z$ fiet $dy = \frac{3dz}{b}$, hinc integrando

$$y = \tfrac{3}{b}z = \tfrac{3}{b}\sqrt[3]{(a+bx)} + C.$$

Exemplum 3.

§. 9. Si fuerit $dy = dx\sqrt[3]{(a+bx)} = s\,dx$, facta substitutione fit $dy = \frac{3z^3dz}{b}$, hinc integrando

$$y = \tfrac{3}{4b}z^4 = \tfrac{3}{4b}(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)} + C.$$

Problema 3.

§. 10. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *existente* $s = \sqrt[n]{(a+bx)}$, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $\sqrt[n]{(a+bx)} = z$, vt sit $s = z$, erit $a+bx = z^n$, hinc $x = \frac{z^n - a}{b}$ et $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$; quibus valoribus

substi-

substitutis formula proposita $X\,dx$ certe fiet rationalis, si modo numerus exponentialis n fuerit integer.

Exemplum 1.

§. 11. Si fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx)}} = \frac{dx}{s}, \text{ posito}$$

$\sqrt[n]{(a+bx)} = z$ ob valorem inde natum $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$ habebitur $dy = \frac{nz^{n-2}dz}{b}$; vnde integrando colligimus

$$y = \frac{n}{b(n-1)} z^{n-1} + C, \text{ siue restitutis valoribus}$$

$$y = \frac{n}{b(n-1)} (a+bx)^{\frac{n-1}{n}} + C = \frac{n}{b(n-1)} \frac{a+bx}{\sqrt[n]{(a+bx)}} + C.$$

Exemplum 2.

§. 12. Si fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx)^{\lambda}}} = \frac{dx}{s^{\lambda}}, \text{ posito}$$

$\sqrt[n]{(a+bx)} = z$ et substituto valore $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$, fiet

$$dy = \frac{nz^{n-1}dz}{bz^{\lambda}} = \frac{n}{b} z^{n-\lambda-1} dz,$$

cuius integrale dat

$$y = \frac{n}{b(n-\lambda)} (a+bx)^{\frac{n-\lambda}{n}} + C, \text{ siue}$$

$$y = \frac{n}{b(n-\lambda)} \frac{a+bx}{\sqrt[n]{(a+bx)^{\lambda}}}.$$

Ex

Ex his autem exemplis iam apparet, integrationem non impediri, etiamsi exponentes n et λ non fuerint numeri integri.

Problema 4.

§. 13. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* x *et* s, *existente* $s = \sqrt{(a + b\sqrt{(f + gx)})}$, *quae formula ergo duplicem irrationalitatem inuoluit, formulam differentialem* X d x *ab hac duplici irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur iterum $\sqrt{(a + b\sqrt{(f + gx)})} = z$, vt sit $s = z$, erit sumtis quadratis $a + b\sqrt{(f + gx)} = zz$, hinc $b\sqrt{(f + gx)} = zz - a$: ac sumtis denuo quadratis

$$bb(f + gx) = (zz - a)^2, \text{ vnde colligitur}$$

$$x = \frac{(zz - a)^2}{bbg} - \frac{f}{g}, \text{ hincque}$$

$$dx = \frac{4zdz(zz - a)}{bbg}.$$

Quibus valoribus substitutis tota formula reddetur rationalis.

Corollarium.

§. 14. Perspicuum est, eodem modo irrationalitatem tolli posse, si fuerit multo generalius

$$s = \sqrt[n]{(a + b\sqrt[m]{(f + gx)})}.$$

Posita enim hac formula $= z$, fiet

$$a + b\sqrt[m]{(f + gx)} = z^n \text{ et } b\sqrt[m]{(f + gx)} = z^n - a.$$

Porro $b^m (f + gx) = (z^n - a)^m$, et hinc colligitur

$x =$

$$x = \frac{(z^n - a)^m}{b^m g} - \frac{f}{g}, \text{ ideoque}$$

$$dx = \frac{mnz^{n-1}dz(z^n - a)^{m-1}}{b^m g}.$$

Sicque etiam hoc modo tota formula rationalis euadet.

Problema 5.

§. 15. *Si fuerit X functio rationalis binarum quantitatum s et x, existente* $s = \sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}}$, *formulam differentialem* X d x *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$, et sumtis quadratis erit $\frac{a+bx}{f+gx} = zz$, hincque $x = \frac{fzz - a}{b - gzz}$, vnde differentiando colligitur

$$dx = \frac{2bfzdz - 2agzdz}{(b - gzz)^2}.$$

Hisque valoribus substitutis formula proposita $X\,dx$ ad rationalitatem erit perducta.

Exemplum 1.

§. 16. Si fuerit $dy = \frac{dx}{s} = \frac{dx\sqrt{(f+gx)}}{\sqrt{(a+bx)}}$, posito $\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$ erit $dy = \frac{dx}{z}$, et substituto loco dx valore supra inuento colligitur

$$dy = \frac{2(bf - ag)dz}{(b - gzz)^2};$$

quae formula, vti iam satis constat, reduci potest ad talem: $\int \frac{dz}{b - gzz}$, cuius autem integratio vel per logarithmos vel per arcus circulares expedietur.

 Exem-

Exemplum 2.

§. 17. Sit specialius $d y = \frac{d x \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}}$, vbi $f = 1$, $g = -1$, $a = 1$ et $b = 1$, ideoque

$$z = \frac{\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1-x)}} \text{ et } d x = \frac{4 z d z}{(1+z z)^2};$$

quibus valoribus substitutis fiet $d y = \frac{4 d z}{(1+z z)^2}$. Statuatur ergo:

$$\int \frac{4 d z}{(1+z z)^2} = \frac{A z}{1+z z} + B \int \frac{d z}{1+z z} = y,$$

vnde sumtis differentialibus fiet:

$$\frac{4}{(1+z z)^2} = \frac{A - A z z}{(1+z z)^2} + \frac{B}{1+z z} = \frac{A+B+(B-A) z z}{(1+z z)^2}.$$

Oportet igitur esse $A + B = 4$ et $B - A = 0$, ideoque $A = 2$ et $B = 2$; et quia $\int \frac{d z}{1+z z} = \text{A tang. } z$, adipiscimur $y = \frac{2 z}{1+z z} + 2 \text{ A tang. } z$; quocirca facta restitutione, ob $1 + z z = \frac{2}{1-x}$ obtinebitur

$$y = \sqrt{(1 - x x)} + 2 \text{ A tang. } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Cum igitur huius arcus tangens sit $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, erit eius sinus $= \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ et cosinus $= \sqrt{\frac{1-x}{2}}$; anguli vero dupli sinus erit $\sqrt{(1 - x x)}$ et cosinus $= -x$, vnde fiet

$$2 \text{ A tang. } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \text{A cos.} - x = \frac{\pi}{2} + \text{A sin. } x;$$

quocirca integrale quaesitum erit

$$y = \sqrt{(1 - x x)} + \frac{\pi}{2} + \text{A sin. } x + C,$$

quod si ita capi debeat, vt euanescat posito $x = 0$, erit

$$C = -1 - \frac{\pi}{2}, \text{ ideoque } y = \sqrt{(1 - x x)} - 1 + \text{A sin. } x.$$

Tum igitur, si sumatur $x = 1$, fiet $y = \frac{\pi}{2} - 1$, qui valor in fractionibus decimalibus dat 0, 5707963.

Pro-

Problema 6.

§. 18. *Si fuerit X functio rationalis binarum variabilium x et s, existente $s = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{f+gx}}$, formulam differentialem $X dx$ ad rationalitatem perducere.*

Solutio.

Posito $s = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$, erit $\frac{a+bx}{f+gx} = z^n$, hincque
$$x = \frac{fz^n - a}{b - gz^n}, \text{ consequenter } dx = \frac{n(bf-ag)z^{n-1}dz}{(b-gz)^{2n}};$$
hisque valoribus substitutis tota formula proposita $X dx$ ad rationalitatem erit perducta.

Problema 7.

§. 19. *Si fuerit X functio binarum quantitatum x et s, existente $s = \sqrt{(a+bxx)}$, formulam differentialem $\frac{X dx}{x}$ ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponamus $s = \sqrt{(a+bxx)} = z$, erit $a+bxx = zz$, hinc $xx = \frac{zz-a}{b}$, et quia in functione X tantum quadratum xx, eiusque ergo potestates pares occurrunt: hac substitutione iam functio X euadet rationalis. Sumtis vero logarithmis $2lx = l(zz-a) - lb$, differentiando fit
$$\frac{2dx}{x} = \frac{2zdz}{zz-a}, \text{ ideoque } \frac{dx}{x} = \frac{zdz}{zz-a}.$$
Hoc ergo modo formula proposita $X.\frac{dx}{x}$ prorsus reddetur rationalis.

Exemplum 1.

§. 20. Si fuerit

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a + bxx)}}, \text{ erit } dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{xx}{\sqrt{(a+bxx)}} = \frac{xx}{s} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Posito ergo $\sqrt{(a + bxx)} = z$ erit $dy = \frac{dz}{b}$, vnde colligitur integrando $y = \frac{z}{b} = \frac{\sqrt{(a+bxx)}}{b}$.

Exemplum 2.

§. 21. Si fuerit

$$dy = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bxx)}} = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^4}{s},$$

ponendo $\sqrt{(a + bxx)} = z$, vt sit

$$xx = \frac{zz - a}{b} \text{ et } \frac{dx}{x} = \frac{z\,dz}{zz - a},$$

erit $dy = \frac{1}{bb} dz\,(zz - a)$, hincque integrando adipiscimur $y = \frac{z}{3bb}(zz - 3a)$; vnde facta restitutione prodibit integrale quaesitum $y = \frac{bxx - 2a}{3bb}\sqrt{(a + bxx)} + C$.

Exemplum 3.

§. 22. Si fuerit

$$dy = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bxx)^3}}, \text{ erit } dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^4}{s^3};$$

hinc posito

$$\sqrt{(a + bxx)} = s = z \text{ fiet } dy = \frac{dz}{bb}\left(\frac{zz-a}{zz}\right),$$

vnde sumto integrali fiet $y = \frac{1}{bb}\left(\frac{zz+a}{z}\right)$, quocirca facta restitutione resultat $y = \frac{2a + bxx}{bb\sqrt{(a+bxx)}} + C$.

Problema 8.

§. 23. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* x^n *et* s, *existente* $s = \sqrt[m]{(a + bx^n)}$, *formulam differentialem* $X\frac{dx}{x}$ *ad rationalitatem perducere.*

Solu-

Solutio.

Posito $s = \sqrt[m]{(a + b x^n)} = z$, fiet $a + b x^n = z^m$ et $x^n = \frac{z^m - a}{b}$. Quia igitur in functione X tantum potestas x^n occurrit, ea rationalis reddetur, si hi valores substituantur. Tum vero sumtis logarithmis habebitur

$$n l x = l(z^m - a) - l b,$$

et differentiando

$$\frac{d x}{x} = \frac{m z^{m-1} d z}{n (z^m - a)},$$

sicque tota formula proposita fiet rationalis.

Exemplum.

§. 24. Sit

$$d y = \frac{x^{n-1} d x}{\sqrt[m]{(a + b x^n)}} = \frac{d x}{x} \cdot \frac{x^n}{s},$$

factaque substitutione orietur haec aequatio:

$$d y = \frac{m z^{m-2} d z}{b n},$$

qua integrata prodibit

$$y = \frac{m z^{m-1}}{n b (m-1)} = \frac{m}{n b (m-1)} \sqrt[m]{(a + b x^n)^{m-1}} + C, \text{ sive}$$

$$y = \frac{m}{n b (m-1)} \frac{a + b x^n}{\sqrt[m]{(a + b x^n)}} + C.$$

 Pro-

Problema.

§. 25. *Si fuerit X functio rationalis quantitatum* xx *et* s, *existente* $s = \sqrt{\frac{a+bxx}{f+gxx}}$, *formulam differentialem* $X\frac{dx}{x}$ *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $s = \sqrt{\frac{a+bxx}{f+gxx}} = z$, eritque $\frac{a+bxx}{f+gxx} = zz$, hinc $xx = \frac{fzz-a}{b-gzz}$, vnde functio X penitus fit rationalis. Porro sumtis logarithmis

$$2lx = l(fzz-a) - l(b-gzz)$$

differentietur, vt prodeat

$$\frac{2dx}{x} = \frac{2fzdz}{fzz-a} + \frac{2gzdz}{b-gzz} = \frac{2(bf-ag)zdz}{(fzz-a)(b-gzz)},$$

vnde fit

$$\frac{dx}{x} = \frac{(bf-ag)zdz}{(fzz-a)(b-gzz)};$$

sicque tota formula differentialis fiet rationalis.

Exemplum.

§. 26. Si fuerit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(f+gxx)}}$, repraesentemus hanc formulam ita:

$$dy = \frac{dx}{x}\frac{x}{\sqrt{(f+gxx)}} = \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{xx}{f+gxx}}.$$

Hic ergo erit $a = 0$, $b = 1$, et

$$z = \frac{x}{\sqrt{f+gxx}}, \text{ ita vt } dy = \frac{zdx}{x};$$

erit autem

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(1-gzz)}, \text{ vnde fit } dy = \frac{dz}{1-gzz},$$

cuius formulae integratio per logarithmos expedietur, si fuerit g numerus positiuus: sin autem fuerit negatiuus per arcus

arcus circulares absoluetur. Sit igitur 1°) $g = + bb$, erit

$$dy = \frac{dz}{1 - bbzz}, \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{1}{2b} l \frac{1 + bz}{1 - bz};$$

et restitutis valoribus supra indicatis erit

$$y = \frac{1}{2b} l \left(\frac{\sqrt{(f + bbxx)} + bx}{\sqrt{(f + bbxx)} - bx}\right) = \frac{1}{b} l \frac{\sqrt{(f + bbxx)} + bx}{\sqrt{f}}.$$

Sit 2°) g quantitas negatiua, puta $g = - bb$, erit

$$dy = \frac{dz}{1 + bbzz} = \frac{1}{b} \frac{bdz}{1 + bbzz},$$

vnde colligitur

$$y = \frac{1}{b} \text{A tang. } bz = \frac{1}{b} \text{A tang. } \frac{bx}{\sqrt{(f - bbxx)}}.$$

Vbi manifestum est, f esse debere quantitatem positiuam, quia alioquin formula differentialis esset imaginaria.

Corollarium.

§. 27. Hinc ergo si proponatur formula

$$dy = \sqrt{(1 + xx)}, \text{ ubi } f = 1 \text{ et } g = 1,$$

ex casu priore ob $b = + 1$ erit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}} = l(\sqrt{(1 + xx)} + x).$$

At si fuerit

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}, \text{ ubi } f = 1 \text{ et } g = - 1,$$

colligitur ex casu posteriore $y = \text{A tang. } \frac{x}{\sqrt{(1 - xx)}}$, vnde concluditur

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \text{A sin. } x = \text{A cos. } \sqrt{(1 - xx)}.$$

Problema 10.

§. 28. *Si fuerit X functio rationalis quantitatum*

x^n

x^n *et* s, *existente* $s = \sqrt[n]{\left(\frac{a + b x^n}{f + g x^n}\right)}$, *formulam differentialem* $X \frac{dx}{x}$ *rationalem efficere.*

Solutio.

Ponatur $s = \sqrt[n]{\left(\frac{a + b x^n}{f + g x^n}\right)} = z$, eritque

$$\frac{a + b x^n}{f + g x^n} = z^n, \text{ hinc } x^n = \frac{f z^n - a}{b - g z^n},$$

tum autem fumtis logarithmis erit

$$n\, l\, x = l\,(f z^n - a) - l\,(b - g z^n)$$

et differentiando

$$\frac{dx}{x} = \frac{f z^{n-1}\, dz}{f z^n - a} + \frac{g z^{n-1}\, dz}{b - g z^n} = \frac{(bf - ag)\, z^{n-1}\, dz}{(f z^n - a)(b - g z^n)};$$

quibus valoribus fubftitutis formula propofita fit rationalis.

Problema II.

§. 29. *Si fuerit* X *functio rationalis binarum quantitatum* x^n *et* s, *existente* $s = \sqrt[m]{\left(\frac{a + b x^n}{f + g x^n}\right)}$, *formulam differentialem* $X \frac{dx}{x}$ *ab omni irrationalitate liberare.*

Solutio.

Statuatur $s = \sqrt[m]{\frac{a + b x^n}{f + g x^n}} = z$, eritque

$$\frac{a + b x^n}{f + g x^n} = z^m, \text{ vnde fit } x^n = \frac{f z^m - a}{b - g z^m};$$

hinc

hinc sumtis logarithmis erit

$$n\, l\, x = l\,(f z^m - a) - l\,(b - g z^m),$$

hinc differentiando

$$\frac{n\,d\,x}{x} = \frac{m\,(b f - a g)\, z^{m-1}\, d\,z}{(f z^m - a)\,(b - g z^m)}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{d\,x}{x} = \frac{m\,(b f - a g)\, z^{m-1}\, d\,z}{n\,(f z^m - a)\,(b - g z^m)},$$

quibus valoribus substitutis irrationalitas formulae propositae penitus tollitur.

Problema 12.

§. 30. *Si fuerit* X *functio rationalis quaecunque binarum quantitatum* x *et* s, *existente* $s = \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma xx)}$, *formulam differentialem* X d x *ad rationalitatem perducere.*

Solutio.

Hic duos casus a se inuicem distingui conuenit, prout γ fuerit vel quantitas positiua vel negatiua.

I. Sit γ quantitas positiua, ac ponatur $\gamma = c\,c$ et $\beta = 2\,b\,c$, vt habeatur

$$s = \sqrt{(\alpha + 2\,b\,c\,x + c\,c\,x\,x)} = \sqrt{(\alpha - b\,b + (b + c\,x)^2)},$$

vbi loco $\alpha - b\,b$ breuitatis ergo scribatur e, vt sit

$$s = \sqrt{(e + (b + c\,x)^2)}.$$

Iam statuatur $s = b + c\,x + z$, eritque

$$s\,s = e + (b + c\,x)^2 = (b + c\,x)^2 + 2\,(b + c\,x)\,z + z\,z,$$

vnde sequitur

$$e - zz = 2z(b + cx), \text{ siue } b + cx = \frac{e - zz}{2z};$$

hincque colligitur

$$x = \frac{e - zz}{2cz} - \frac{b}{c}, \text{ seu } x = \frac{e - 2bz - zz}{2cz}.$$

Aequatio autem $b + cx = \frac{e - zz}{2z}$ differentiata praebet

$$c\,dx = -\frac{e\,dz}{2zz} - \frac{dz}{2} = -\frac{e\,dz - zz\,dz}{2zz},$$

vnde deducitur

$$dx = -\frac{dz(e + zz)}{2czz}, \text{ at ob}$$

$$b + cx = \frac{e - zz}{2z} \text{ fiet } s = \frac{e + zz}{2z}.$$

His ergo valoribus substitutis formula nostra $X\,dx$ reddetur rationalis. Postquam igitur eius integrale fuerit inventum loco z valor ante inuentus $\sqrt{(e + (b + cx)^2)} - b - cx$ erit substituendus.

II. Sin autem γ fuerit quantitas negatiua, ponatur $\gamma = -cc$ et $\beta = -2bc$, vt habeatur

$$s = \sqrt{(\alpha - 2bcx - ccxx)} = \sqrt{(\alpha + bb - (b + cx)^2)},$$

vbi euidens est, quantitatem $\alpha + bb$ necessario esse debere positiuam, quia alioquin s euaderet imaginarium. Quamobrem ponamus breuitatis gratia $\alpha + bb = aa$, vt fiat $s = \sqrt{(aa - (b + cx)^2)}$, ad quam formam rationalem efficiendam statuamus

$$\sqrt{(aa - (b + cx)^2)} = a - (b + cx)z,$$

vnde sumtis quadratis erit

$$aa - (b + cx)^2 = aa - 2az(b + cx) + (b + cx)^2 zz$$

quae aequatio reducitur ad hanc:

$$-(b + cx) = -2az + (b + cx)zz,$$

vnde reperitur

b +

$$b + c x = \frac{2 a z}{1 + z z}, \text{ ideoque}$$

$$x = \frac{2 a z - b - b z z}{c (1 + z z)}.$$

Illa autem aequatio differentiata dat

$$c d x = \frac{2 a d z (1 + z z) - 4 a z z d z}{(1 + z z)^2} = \frac{2 a d z (1 - z z)}{(1 + z z)^2};$$

vnde fit

$$d x = \frac{2 a d z (1 - z z)}{c (1 + z z)^2}.$$

Porro autem, cum fit

$$s = a - (b + c x) z, \text{ ob } b + c x = \frac{2 a z}{1 + z z}$$

erit $s = \frac{a (1 - z z)}{1 + z z}$, quocirca, fi loco x, s et $d x$ inuenti hi valores fubftituantur, formula propofita differentialis $X d x$ euadet rationalis, et per variabilem z exprimetur, cuius integrale poftquam fuerit inuentum, loco z vbique eius reftituatur valor affumtus

$$z = a - \sqrt{(a a - (b + c x)^2)},$$

et integrale obtinebitur per folam variabilem x expreffum.

Exemplum I.

§. 31. Si fuerit

$$d y = \frac{d x}{\sqrt{(e + (b + c x)^2)}},$$

quae formula ad cafum priorem pertinet, erit

$$d y = \frac{d x}{s} = - \frac{d z}{c z}, \text{ ob } d x = - \frac{d z (e + z z)}{2 e z z} \text{ et } s = \frac{e + z z}{2 z},$$

cuius integrale eft $y = - \frac{1}{c} l z$; reftituto ergo valore

$$z = \sqrt{(e + (b + c x)^2)} - b - c x, \text{ erit}$$

$$y = - \frac{1}{c} l (\sqrt{(e + (b + c x)^2)} - b - c x) + C,$$

quod integrale fi euanefcere debeat pofito $x = 0$, fiet

$$C = \frac{1}{c} l (\sqrt{(e + b b)} - b).$$

Corollarium.

§. 32. Si ponatur $b = 0$ et $c = 1$, siue

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(e + xx)}},$$ erit integrale

$$y = -l(\sqrt{(e + xx)} - x) + l\sqrt{e} = l\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{(e + xx)} - x}$$

quae formula reducitur ad hanc:

$$y = l\frac{\sqrt{(e + xx)} + x}{\sqrt{e}}.$$

Cum vero porro sit

$$d.\sqrt{(e + xx)} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(e + xx)}}$$ erit

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(e + xx)}} = \sqrt{(e + xx)}.$$

Si igitur hae duae formulae combinentur, habebitur ista integratio notatu digna:

$$\int\frac{A\,dx + B\,x\,dx}{\sqrt{(e + xx)}} = A\,l\frac{\sqrt{(e + xx)} + x}{\sqrt{e}} + B\sqrt{(e + xx)}.$$

Exemplum II.

§. 33. Sit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(aa - (b + cx)^2)}}$, quae formula ad casum secundum est referenda, ita vt sit $dy = \frac{dx}{s}$. Cum igitur sit

$$dx = \frac{2a\,dz(1 - zz)}{c(1 + zz)^2} \text{ et } s = \frac{a(1 - zz)}{1 + zz},$$ erit

$$y = \frac{dx}{s} = \frac{2}{c}\cdot\frac{dz}{1 + zz},$$

vnde fit integrando $y = \frac{2}{c}$ A tang. z.

Quia igitur est

$$z = \frac{a - \sqrt{(aa - (b + cx)^2)}}{b + cx},$$ erit

$$y = \frac{2}{c}\text{ A tang. }\frac{a - \sqrt{(aa - (b + cx)^2}}{b + cx} + C.$$

Corollarium.

§. 34. Sit igitur iterum $b = 0$ et $c = 1$, seu formu-

formula differentialis proposita $dy = \frac{dx}{\surd(aa - xx)}$, reperieturque

$$y = 2\,\text{A tang.} \frac{a - \surd(aa - xx)}{x} + C.$$

Quia igitur tangens huius arcus est $\frac{a - \surd(aa - xx)}{x}$, tangens dupli arcus erit $\frac{x}{\surd(aa - xx)}$, ita ut sit

$$y = \text{A tang.} \frac{x}{\surd(aa - xx)}:$$

huius autem arcus sinus erit $\frac{x}{a}$; sicque integrale quaesitum

$$\int \frac{dx}{\surd(aa - xx)} = \text{A sin.} \frac{x}{a}.$$

Quia porro

$$d.\surd(aa - xx) = -\frac{x\,dx}{\surd(aa - xx)}, \text{ erit}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\surd(aa - xx)} = -\surd(aa - xx),$$

quocirca ista generalior conficitur integratio:

$$\int \frac{A\,dx + B\,x\,dx}{\surd(aa - xx)} = \text{A tang.} \frac{x}{a} - B\surd(aa - xx).$$

Problema 13.

§. 35. *Si fuerit* V *functio rationalis binarum quantitatum* v^n *et* s, *existente* $s = \surd(\alpha + \beta v^n + \gamma v^{2n})$, *formulam differentialem* $V v^{n-1} dv$ *ab irrationalitate liberare.*

Solutio.

Ponatur $v^n = x$, erit

$$s = \surd(\alpha + \beta x + xx) \text{ et } v^{n-1} dv = \frac{dx}{n};$$

hic ergo iam erit V functio rationalis binarum quantitatum x et s, existente

$$s = \surd(\alpha + \beta x + \gamma xx)$$

 et

et formula ab irrationalitate liberanda erit $\frac{V\,dx}{n}$; qui caſus prorſus conuenit cum problemate praecedente, ideoque eandem habebit ſolutionem.

Scholion.

§. 36. Praecepta hactenus tradita ad omnes fere formulas differentiales, quae quidem adhuc tractari potuerunt, extenduntur. Interim tamen eiusmodi caſus occurrere poſſunt, quibus idonea ſubſtitutio, ad irrationalitatem tollendam neceſſaria, non tam facile perſpicitur: ſed acri iudicio demum inueſtigare licet, in quo negotio cum praecepta generalia tradere nondum liceat, exempla quaedam particularia ſpeciminis loco in medium afferamus.

Exemplum I.

§. 37. *Si propoſita fuerit haec formula irrationalis*: $dP = \frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}}$, *eius integrale* P *inueſtigare.*

Si quis hic eiusmodi vti vellet ſubſtitutione, qua formula $\sqrt{(1+x^4)}$ ad rationalitatem perduceretur, oleum et operam eſſet perditurus, interim tamen ſingulari artificio ſequens ſubſtitutio negotium conficere poterit. Statuatur $\frac{x\sqrt{2}}{1-xx} = p$, eritque $1 + pp = \frac{1+x^4}{(1-xx)^2}$, hinc

$$\sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-xx};$$

tum vero erit differentiando

$$dp = \frac{dx\sqrt{2}(1+xx)}{(1-xx)^2},$$

ex quibus valoribus colligitur

$$\frac{dp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dx\sqrt{2}(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}},$$

quae

quae feliciter cum formula ipsa proposita conuenit, ita vt sit

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = dP\sqrt{2}, \text{ siue } dP = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dp}{\sqrt{1+pp}},$$

vnde colligitur integrando

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\sqrt{(1+pp)}+p\right).$$

Quare si loco p et $\sqrt{(1+pp)}$ valores dati substituantur, haec obtinetur integratio satis memorabilis:

$$P = \int\frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Exemplum 2.

§. 38. *Si proposita fuerit haec formula irrationalis:* $\frac{dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}}$, *eius integrale* Q *inuestigare.*

Ad hoc praestandum fiat $\frac{x\sqrt{2}}{1+xx} = q$, eritque

$$\sqrt{(1-qq)} = \frac{\sqrt{(1+x^4)}}{1+xx};$$

tum vero erit $dq = \frac{dx(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)^2}$, atque hinc colligitur

$$\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}} = dQ\sqrt{2},$$

vnde fit

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,A\,\text{sin.}\,q.$$

Restituto ergo pro q valore assumto ista obtinebitur integratio:

$$Q = \int\frac{dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,A\,\text{sin.}\,\frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Scholion.

§. 39. Cum istae duae formulae:

$$\frac{dx(1+xx)\sqrt{2}}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} \text{ et } \frac{dx(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}},$$

per-

perductae ſint ad has ſimplices:

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } \frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}};$$

quarum vtraque facile ab irrationalitate liberatur, iſtae ipſae formulae propoſitae ope idoneae ſubſtitutionis ab irrationalitate liberari poſſunt; vnde mirum non eſt, earum integralia ſiue per logarithmum ſiue per arcum circularem exhiberi potuiſſe. Satis enim iam eſt oſtenſum: omnium formularum differentialium rationalium integralia ſemper vel per logarithmos et arcus circulares, vel adeo algebraice exhiberi poſſe; quod igitur etiam de illis formulis irrationalibus eſt tenendum, quas certae ſubſtitutionis ope ad rationalitatem perducere licet. Vnde viciſſim plures Geometrae concluſerunt: ſi quae formula differentialis nullo plane modo ab irrationalitate liberari queat, tum eius integrale etiam neque per logarithmos nec arcus circulares, multo minus algebraice exprimi poſſe, ſed ad aliud genus quantitatum tranſcendentium referri oportere. Ceterum combinatio duorum praecedentium exemplorum manuducit ab ſolutionem ſequentium.

Exemplum 3.

§. 40. *Si propoſita fuerit haec formula differentialis*: $dy = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$, *eius integrale inuenire.*

Hanc formulam per neutram ſubſtitutionem ante vſurpatam rationalem reddere licet: vtraque tamen iuncta negotium confici poterit; namque eius integrale per logarithmos et arcus circulares ſequenti artificio expedietur: Formula enim propoſita in binas ſequentes partes diſcerpi poteſt, quae ſunt

dy

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx (1 + xx)}{(1 - xx) \sqrt{(1 + x^4)}} + \frac{\frac{1}{2} dx}{(1 + xx) \sqrt{(1 + x^4)}},$$

quippe quarum ſumma ipſam formulam noſtram propoſitam producit; prodit enim

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx (1 + xx)^2 + \frac{1}{2} dx (1 - xx)^2}{(1 - x^4) \sqrt{(1 + x^4)}}$$

$$= \frac{dx (1 + x^4)}{(1 - x^4) \sqrt{(1 + x^4)}} = \frac{dx \sqrt{(1 + x^4)}}{1 - x^4}.$$

Quod ſi ergo duo praecedentia exempla in ſubſidium vocentur, manifeſto fiet $dy = \frac{1}{2} dP + \frac{1}{2} dQ$, conſequenter integrale quaeſitum erit $y = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q$, quod ſequenti modo exprimere licebit:

$$\int \frac{dx \sqrt{(1 + x^4)}}{1 - x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} l \frac{\sqrt{(1 + x^4)} + x\sqrt{2}}{1 - xx} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{A fin.} \frac{x\sqrt{2}}{1 + xx}.$$

Exemplum. 4.

§. 41. *Si propoſita fuerit haec formula differentialis:* $dy = \frac{xx\,dx}{(1 - x^4) \sqrt{(1 + x^4)}}$, *eius integrale inueſtigare.*

Haec formula ſimili modo ac praecedens tractari poteſt; diſcerpatur enim in ſequentes duas partes:

$$\frac{\frac{1}{4} dx (1 + xx)}{(1 - xx) \sqrt{(1 + x^4)}} - \frac{\frac{1}{4} dx (1 - xx)}{(1 + xx) (\sqrt{1 + x^4})},$$

quippe quae coniunctae producunt

$$dy = \frac{\frac{1}{4} dx (1 + xx)^2 - \frac{1}{4} dx (1 - xx)^2}{(1 - x^4) \sqrt{(1 + x^4)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} dx.\, 4xx}{(1 - x^4) \sqrt{(1 + x^4)}} = \frac{xx\,dx}{(1 - x^4) \sqrt{(1 + x^4)}},$$

 quae

quae cum ſit ipſa formula propoſita, erit ex praecedentibus exemplis $dy = \frac{1}{4} dP - \frac{1}{4} dQ$, conſequenter $y = \frac{1}{4}P - \frac{1}{4}Q$, hinc integrale quaeſitum ita reperietur expreſſum:

$$\int \frac{xx\,dx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2}}{1-xx} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\, \text{A ſin.}\, \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Scholion.

§. 42. Haec duo poſtrema exempla ſi nullo plane modo ope cuiuſpiam ſubſtitutionis ad rationalitatem perduci poſſent, inſigne praeberent documentum, quod concluſio ſupra memorata quandoque fallere poſſit: Re autem attentius perpenſa inueni, omnia haec quatuor exempla ope vnica ſubſtitutione immediate ad rationalitatem perduci ideoque integrari poſſe; id quod oſtendiſſe vtique operae erit pretium.

Alia reſolutio quatuor poſtremorum exemplorum.

§. 43. Statuatur pro primo exemplo

$$v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}}, \text{ eritque } \sqrt{(1+vv)} = \frac{1+xx}{\sqrt{(1+x^4)}};$$

tum vero $\sqrt{(1-vv)} = \frac{1-xx}{\sqrt{(1+x^4)}}$, vnde fit

$$\sqrt{\frac{1+vv}{1-vv}} = \frac{1+xx}{1-xx} \text{ et } \sqrt{(1-v^4)} = \frac{1-x^4}{1+x^4}.$$

At differentiando adipiſcimur

$$dv = \frac{dx(1-x^4)\sqrt{2}}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)}}.$$

Cum nunc ſit $\frac{1-x^4}{1+x^4} = \sqrt{(1-v^4)}$, erit

$$dv = \frac{dx\sqrt{2}\sqrt{(1-v^4)}}{\sqrt{(1+x^4)}}, \text{ ſiue } \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}};$$

quae aequalitas maxime eſt notatu digna. Quod ſi iam haec

haec aequatio multiplicetur per $\sqrt{\frac{1+vv}{1-vv}} = \frac{1+xx}{1-xx}$, nascetur haec aequatio:

$$\frac{dv}{1-vv} = \frac{dx(1+xx)\sqrt{2}}{(1-xx)(1+x^4)},$$

sicque erit

$$\int \frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\, \frac{1+v}{1-v}.$$

Deinde aequatio

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}$$

multiplicetur per

$$\sqrt{\frac{1-vv}{1+vv}} = \frac{1-xx}{1+xx},$$

ac prodibit formula exempli secundi

$$\int \frac{dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \text{A tang. } v.$$

Porro eadem aequatio

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}$$

diuidatur per

$$\sqrt{(1-v^4)} = \frac{1-x^4}{1+x^4} \text{ et prodibit}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{1-v^4} = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4};$$

quae est ipsa formula exempli tertii, ita vt iam sit

$$\int \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-v^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv},$$

quod integrale cum ante inuento egregie conuenit. Tandem postrema aequatio hic inuenta:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{1-v^4} = \frac{dx\sqrt{(1+x^4)}}{1-x^4}$$

ducatur in $vv = \frac{2xx}{1+x^4}$, vt prodeat

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{vvdv}{1-v^4} = \frac{2xxdx\sqrt{(1+x^4)}}{(1-x^4)(1+x^4)} = \frac{2xxdx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}},$$

vnde pro exemplo quarto colligitur

$$\int \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{vvdv}{1-v^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv},$$

 vnde

vnde cum sit $v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}}$, erit

$$\int \frac{dv}{1-vv} = \frac{1}{2} l \frac{1+v}{1-v} = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}-x\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} l \frac{(\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2})^2}{(1-xx)^2} = l \frac{\sqrt{(1+x^4)}+x\sqrt{2}}{1-xx}.$$

Deinde vero est

$$\int \frac{dv}{1+vv} = \text{A tang. } v = \text{A sin. } \frac{v}{\sqrt{(1+vv)}} = \text{A sin. } \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Scholion.

§. 44. Quanquam autem haec quatuor exempla ad rationalitatem reducere licuit: tamen conclusio supra memorata, quod omnes formulae integrales, quae nullo modo rationales effici queant, ad aliud pertineant transcendentium genus, neque per solos logarithmos et arcus circulares expediri possint, non solum manet suspecta, sed etiam falsitas eius euidenter ob oculos poni potest. Sit enim functio

$$X = \frac{a}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{b}{\sqrt[3]{(1+x^3)}} + \frac{c}{\sqrt[4]{(1+x^4)}};$$

tum certe formula differentialis $X\,dx$ nullo modo ad rationalitatem perduci poterit; interim tamen singulos eius partes

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{(1+xx)}}, \quad \frac{b\,dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)}} \quad \text{et} \quad \frac{c\,dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}$$

seorsim rationales effici et integralia per logarithmos et arcus circulares exhiberi possunt. Coronidis loco hic sequens problema notatu dignum adiungamus.

Pro-

Problema.

§. 45. *Formularum integralium* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}$ *et* $\int \frac{dv}{\sqrt{(\quad + v^4)}}$ *valores per ſeries inueſtigare, pro caſibus, quibus ponitur tam* $v = 1$ *quam* $x = 1$.

Solutio.

Cum poſito $v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x^4)}}$, vt ſupra fecimus, euidens ſit, ſumto $x = 0$ fore etiam $v = 0$, et ſumto $x = 1$ fore $v = 1$, ita vt hae duae quantitates x et v ſimul euaneſcant et ſimul vnitati aequentur: hinc deducimus iſtam aequationem differentialem attentione digniſſimam:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}},$$

quas ergo ambas formulas in ſeries conuerti oportet; erit autem

$$\frac{1}{\sqrt{(1-v^4)}} = (1-v^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}v^4 + \frac{1.3}{2.4}v^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}v^{12} + \text{etc. et}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^4)}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12} + \text{etc.}$$

Illa iam per dv multiplicata et integrata praebet

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1-v^4)}} = v + \frac{1}{2.5}v^5 + \frac{1.3}{2.4.9}v^9 + \frac{1.3.5}{2.4.6.13}v^{13} + \text{etc.}$$

vnde poſito $v = 1$ valor huius integralis erit

$$1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.17} + \text{etc.}$$

quam ſeriem littera A indicemus. Simili modo altera ſeries in dx ducta et integrata producit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} = x - \frac{1}{2.5}x^5 + \frac{1.3}{2.4.9}x^9 - \frac{1.3.5}{2.4.6.13}x^{13} + \text{etc.}$$

cuius valor facto $x = 1$ erit

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 17} - \text{etc.}$$

quem littera B designemus, ita vt sit $B = \frac{A}{\sqrt{2}}$, siue $A = B\sqrt{2}$; vnde patet, priorem seriem se habere ad posteriorem vt $\sqrt{2} : 1$.

Scholion.

§. 46. Valor formulae integralis $\int \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^4)}}$ etiam hoc modo per seriem inuestigari potest. Cum sit

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - v^4)}} = \frac{(1 + vv)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1 - vv)}} \text{ et}$$

$$(1 + vv)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} vv + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} v^4 - \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} v^6 + \text{etc.}$$

notetur esse $\int \frac{dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \frac{\pi}{2}$. Deinde pro integratione reliquorum terminorum ponatur

$$\int \frac{v^{n+2}\, dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = A\, v^{n+1} \sqrt{(1 - vv)} + B \int \frac{v^n\, dv}{\sqrt{(1 - vv)}},$$

quae aequatio differentiata dat

$$\frac{v^{n+2}}{\sqrt{(1 - vv)}} = (n + 1) A v^n \sqrt{1 - vv} - \frac{A v^{n+2}}{\sqrt{(1 - vv)}} + \frac{B v^n}{\sqrt{(1 - vv)}},$$

vnde per $\sqrt{(1 - vv)}$ multiplicando prodit

$$v^{n+2} = (n + 1) A v^n - (n + 1) A v^{n+2} - A v^{n+2} + B v^n.$$

Hinc termini in quibus inest v^{n+2} inter se aequati praebent $1 = -(n + 2) A$, ideoque $A = -\frac{1}{n+2}$; termini vero v^n continentes praebent $0 = (n + 1) A + B$, vnde fit $B = \frac{n+1}{n+2}$, ita vt in genere sit

$$\int \frac{v^{n+2}\, dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = -\frac{1}{n+2} v^{n+1} \sqrt{(1 - vv)} + \frac{n+1}{n+2} \int \frac{v^n\, dv}{\sqrt{(1 - vv)}},$$

quod

quod integrale vti requiritur euanefcit pofito $v = 0$. Ponatur nunc $v = 1$, eritque:

$$\int \frac{v^{n+2}\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \frac{n+1}{n+2} \int \frac{v^n\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}};$$

hinc ergo pro n fcribendo fucceffiue valores 0, 2, 4, 6, 8, etc. erit

$$\text{I. } \int \frac{vv\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{2};$$

$$\text{II. } \int \frac{v^4\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{2};$$

$$\text{III. } \int \frac{v^6\,dv}{\sqrt{(1 - vv)}} = \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{2};$$

etc. etc.

quibus valoribus adhibitis erit cafu $v = 1$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^4)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} \cdot \frac{\pi}{2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2} - \text{etc.} \right)$$

ita vt fit ex problemate praecedente

$$1 - \frac{1}{2 . 5} + \frac{1 . 3}{2 . 4 . 9} - \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 9 . 13} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \text{etc.} \right)$$

vnde fit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2 . 5} + \frac{1 . 3}{2 . 4 . 9} - \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 9 . 13} + \text{etc.}}{1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \text{etc.}}$$

NOVA

NOVA METHODVS
FRACTIONES QVASCVNQVE RATIONALES
IN FRACTIONES SIMPLICES
RESOLVENDI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Sit $\frac{P}{Q}$ fractio quaecunque propofita, cuius tam numerator P quam denominator Q fint functiones rationales integrae quantitatis variabilis z, denominator autem Q fit productum ex quotcunque factoribus fimplicibus formae $z \pm a$, fiue aequalibus fiue inaequalibus inter fe: et notum eft, iftam fractionem femper refolui poffe in fractiones fimplices, quarum denominatores finguli formentur ex factoribus ipfius Q, numeratores vero fint quantitates conftantes, fiquidem variabilis z in numeratore P ad pauciores dimenfiones affurgat quam in denominatore Q, quoniam aliter praeter iftas fractiones fimplices infuper partes integrae effent adiiciendae. Qui cafus cum nulla laboret difficultate, propterea quod partes iftae integrae facile reperiuntur, dum numerator P per denominatorem Q actu diuiditur, fufficiet eiusmodi tantum fractiones confideraffe, in quarum denominatore Q variabilis z ad altiores poteftates afcendit quam in numeratore P. Tum igitur,

igitur, quando pro ſingulis factoribus denominatoris Q inventae fuerint fractiones ſimplices ipſis reſpondentes, ſumma omnium harum fractionum aequabitur fractioni propoſitae $\frac{P}{Q}$. Primus quidem in Introductione mea ad Analyſin infinitorum methodum tradidi ſatis ſimplicem, cuius ope omnes iſtae fractiones partiales pro ſingulis denominatoris factoribus reperiri queant, ſine vllo reſpectu ad reliquas habito, quarum ratio antehac teneri debebat. Poſtmodum vero iſtam methodum magis excolui, et quemadmodum ope calculi differentialis facilius ad quosuis vſus accommodari poſſit, vberius oſtendi. Nunc autem penitus noua Idea ſeſe mihi obtulit eandem reſolutionem perficiendi, quae plerumque negotium non mediocriter ſubleuare videtur. Imprimis autem ad functiones tranſcendentes mira facilitate accommodari poteſt, vnde operae pretium fore exiſtimo, ſi iſtam nouam methodum adcuratius expoſuero.

§. 2. Sit igitur $z - a$ factor ſimplex denominatoris Q, ſiue ſolitarius, ſiue quotcunque ſibi aequales admittens. Ac priori caſu inde fractio ſimplex oriunda erit $\frac{\alpha}{z - a}$. Sin autem denominator binos huiusmodi factores aequales inuoluat, ſcilicet $(z - a)^2$, tum reſolutio binas dabit fractiones ſimplices $\frac{\alpha}{(z - a)^2} + \frac{\beta}{z - a}$; at ſi factorem habeat cubicum $(z - a)^3$, fractiones ſimplices inde ortae erunt $\frac{\alpha}{(z - a)^3} + \frac{\beta}{(z - a)^2} + \frac{\gamma}{z - a}$, et ita porro pro altioribus poteſtatibus. Totum igitur negotium huc redit, vt pro ſingulis huiusmodi factoribus numeratores α, β, γ, etc. definiantur, pro qua inueſtigatione iam olim praecepta dedi.

dedi. Noua autem methodus, quam hic fum traditurus, huic innititur principio, quod pofito $z = a$ omnes iftae fractiones partiales euadant infinitae, dum reliquae omnes manent finitae magnitudinis, ideoque prae illis quafi euanefcant. Hinc fi in fractione propofita $\frac{P}{Q}$ ftatuatur $z = a$, ea vtique etiam in infinitum excrefcet, eiusque valor debite euolutus praebebit ipfas illas fractiones fimplices in infinitum abeuntes, id quod hic accuratius fum perfecuturus.

§. 3. Ne igitur hic confideratio infiniti moram faceffat, ftatuamus non $z - a = o$, fed $z - a = \omega$, denotante ω quantitatem infinite paruam atque adeo ipfam euanefcentem, ac ponamus tam in numeratore P quam in denominatore Q vbique $z = a + \omega$, quo facto numerator P euoluatur in huiusmodi formam:

$$P = A + B\omega + C\omega\omega + D\omega^3 + \text{etc.}$$

denominator vero Q, quia per hypothefin euanefcit pofito $z = a$, talem induet formam:

$$Q = \mathfrak{A}\omega + \mathfrak{B}\omega\omega + \mathfrak{C}\omega^3 + \mathfrak{D}\omega^4 + \text{etc.}$$

vbi fi factor $z - a$ fuerit folitarius, primus terminus $\mathfrak{A}\omega$ neceffario aderit. Sin autem denominator Q factorem habeat $(z - a)^2$, erit $\mathfrak{A} = o$, ac denominator a termino $\mathfrak{B}\omega^2$ incipiet. Quodfi vero denominatoris factor fuerit $(z - a)^3$, primus terminus in denominatore erit $\mathfrak{C}\omega^3$, et ita porro, ita vt fi in genere factor fuerit $(z - a)^n$, infima poteftas in denominatore fit $\mathfrak{N}\omega^n$.

§. 4. Haec quidem fubftitutio, ponendo $z = a + \omega$, operationes tantum vulgares algebraicas poftulat: interim

tamen

tamen per nota principia differentialium mirifice subleuari potest. Nam si in genere loco z scribatur $z + \omega$, functio ipsius z quaecunque P accipiet istum valorem:

$$P + \frac{\omega\, dP}{1.\, dz} + \frac{\omega\omega\, ddP}{1.\,2\, dz^2} + \frac{\omega^3\, d^3P}{1.\,2.\,3\, dz^3} + \frac{\omega^4\, d^4P}{1.\,2.\,3.\,4\, dz^4} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo statim forma tam numeratoris P quam denominatoris Q secundum potestates ipsius ω disposita reperietur, tantumque opus est, vt in singulis terminis loco z vbique scribatur a. Quousque autem istas expressiones per potestates ipsius ω continuari oporteat, ex primo denominatoris termino, seu infima potestate ipsius ω facile diiudicabitur, vnde sequentes casus euoluamus.

Casus I.

Quo denominatoris Q factor est $z - a$.

§. 5. Hoc igitur casu non erit $\mathfrak{A} = 0$, vnde fractio nostra $\frac{P}{Q}$, facto $z = a + \omega$, induet hanc formam

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + etc.}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 + etc.}$$

vbi fractio ista per diuisionem euoluatur tantum vsque ad primam potestatem ω, propterea quod in fractione praefixa $\frac{1}{\omega}$ haec littera vnicam tantum habet dimensionem, vnde hoc casu tam numeratorem P quam denominatorem Q ad duos tantum terminos extendisse sufficit, ita vt sit $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{A + B\omega}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega}$. Nunc igitur ex euolutione istius fractionis $\frac{A + B\omega}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\omega}$, oriatur quotus $\alpha + \beta\omega$, eritque

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}};\ \beta = \frac{B}{\mathfrak{A}} - \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}.$$

His autem valoribus inuentis fractio nostra discerpitur in has partes: $\frac{\alpha}{\omega} + \alpha$, quarum cum prima tantum fiat infini-

 ta,

ta, ſi loco ω reſtituamus valorem $z-a$, fractio ſimplex hinc reſultans erit $\frac{\alpha}{z-a}$. Hoc igitur modo facillime fractiones ſimplices ex ſingulis denominatoris Q factoribus ſolitariis formae $z-a$ obtinentur; neque adeo opus eſt, valorem ipſius β noſſe, vnde ſufficere potuiſſet tantum primos terminos A et $\mathfrak{A}$ indagaſſe. Oritur autem A ex numeratore P, poſito $z=a$; at $\mathfrak{A}$ oritur ex formula $\frac{dQ}{dz}$, poſito itidem $z=a$. Cum enim poſito $z=a$ fiat $Q=0$, ſi loco z ſcribatur $a+\omega$, prodibit $\mathfrak{A}=\frac{dQ}{dz}$.

§. 6. Interim tamen bonum eſt, etiam valorem ipſius β noſſe, quoniam inde quaeſtio non parum curioſa facile poteſt reſolui. Cum enim ex factore $z-a$ deducta ſit fractio $\frac{\alpha}{z-a}$, ſi pro reliquis omnibus terminis ſcribamus litteram R, erit vtique $\frac{P}{Q}=\frac{\alpha}{z-a}+R$. Quod ſi ergo deſideretur ſumma omnium reliquorum terminorum R, caſu quo ponitur $z=a$, ſiue $z=a+\omega$, quippe quae ſumma eſt finita, ex aequatione modo inuenta fiet $R=\frac{P}{Q}-\frac{\alpha}{z-a}$, ideoque poſito $z=a+\omega$, erit

$$R=\frac{\alpha}{\omega}+\beta-\frac{\alpha}{\omega}=\beta;$$

ſicque valor litterae β, quem inuenimus, exprimit ſummam omnium reliquorum terminorum pro caſu $z=a$. Erat autem $\beta=\frac{B}{\mathfrak{A}}-\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2}$.

§. 7. Facile autem patet, hoc modo pro omnibus factoribus ſimplicibus denominatoris Q easdem prodire fractiones partiales, ad quas methodus antehac expoſita deducit. Si enim ponamus $\frac{P}{Q}=\frac{\alpha}{z-a}+R$, ac per $z-a$ multiplicemus, fiet

P (z

$$\frac{P(z-a)}{Q} = \alpha + R(z-a).$$

Quia nunc nouimus, numeratorem quaesitum α esse constantem, pro eo semper idem valor prodire debet, quicquid pro z scribatur. Ponatur igitur $z = a$, vt ratio reliquorum terminorum R ex calculo egrediatur, fietque $\alpha = \frac{P(z-a)}{Q}$, posito scilicet $z = a$; tum autem tam numerator quam denominator euanescit, vnde si eorum loco sua differentialia ponantur, fiet

$$\alpha = \frac{(z-a)\,dP + P\,dz}{dQ}.$$

Posito igitur $z = a$ erit $\alpha = \frac{P\,dz}{dQ}$. At vero supra assumsimus, casu $z = a$ fieri $P = A$ et $\frac{dQ}{dz} = \mathfrak{A}$, ita vt et hinc etiam prodeat $\alpha = \frac{A}{\mathfrak{A}}$.

Casus II.

Quo denominatoris Q factor est $(z-a)^2$.

§. 8. Hic igitur in forma, ad quam nostram fractionem $\frac{P}{Q}$, posito $z = a + \omega$, conuertimus, erit $\mathfrak{A} = 0$, vnde fractio pro hoc casu ita referri poterit:

$$\frac{1}{\omega\omega} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega\omega}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\omega + \mathfrak{D}\omega\omega}.$$

Hic scilicet potestates ipsius ω non vltra secundam protendimus. Nunc illa expressio in hanc formam:

$$\frac{1}{\omega^2}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega\omega),$$

reducatur, et reperietur calculo subducto

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{B}};\ \beta = \frac{B}{\mathfrak{B}} - \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2};\ \gamma = \frac{C}{\mathfrak{B}} - \frac{B\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}^2} - \frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2} + \frac{A\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{B}^3}.$$

His igitur valoribus inuentis nostra fractio discerpetur in has partes: $\frac{\alpha}{\omega^2} + \frac{\beta}{\omega} + \gamma$, quarum binae priores, ob $\omega = z - a$, praebent istas fractiones partiales: $\frac{\alpha}{(z-a)^2} + \frac{\beta}{z-a}$: at quantitas γ aequabitur summae omnium reliquorum terminorum, siquidem in illis statuatur $z = a$.

Casus III.

Quo denominatoris factor est $(z-a)^3$.

§. 9. Hic igitur ob $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$ fractio evoluenda erit

$$\frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{A + B\omega + C\omega\omega + D\omega^3}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega + \mathfrak{E}\omega\omega + \mathfrak{F}\omega^3},$$

quae reducatur ad hanc formam:

$$\frac{1}{\omega^3}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega\omega + \delta\omega^3),$$

ope harum aequalitatum:

$$A = \alpha\mathfrak{C};\ B = \alpha\mathfrak{D} + \beta\mathfrak{C};\ C = \alpha\mathfrak{E} + \beta\mathfrak{D} + \gamma\mathfrak{C};$$
$$D = \alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{E} + \gamma\mathfrak{D} + \delta\mathfrak{C},$$

quibus valoribus inuentis ex denominatoris Q factore cubico $(z-a)^3$ obtinentur istae fractiones partiales:

$$\frac{\alpha}{(z-a)^3} + \frac{\beta}{(z-a)^2} + \frac{\gamma}{z-a}.$$

At vero δ exhibet summam omnium reliquorum terminorum, si in ipsis vbique scribatur $z = a$. Facile autem intelligitur, hoc modo etiam ad altiores potestates procedi posse.

§. 10. Haec methodus etiam succedit, si factores denominatoris fuerint imaginarii, scilicet formae

$$z - a + b\sqrt{-1},$$

tum autem, quoniam etiam factor erit $z - a - b\sqrt{-1}$, binae fractiones partiales hinc ortae

a

$$\frac{\alpha}{z-a+b\sqrt{-1}}+\frac{\beta}{z-a-b\sqrt{-1}},$$

facile in factorem duplicatum realem contrahentur, cuius denominator erit $(z-a)^2+bb$. Hoc igitur sequenti exemplo ostendisse iuuabit.

Exemplum.

Si fractio proposita resoluenda fuerit $\frac{P}{Q}=\frac{\sin.\Phi}{\tang.\Phi-\cos.\Phi}$, *eam in fractiones simplices resoluere.*

Solutio.

§. 11. Hic igitur primo omnes angulos Φ quaeri oportet, quibus denominator $\tang.\Phi-\cos.\Phi$ euanescit. Ponatur igitur

$$\tang.\Phi-\cos.\Phi=0,\ \text{siue}\ \sin.\Phi-\cos.\Phi^2=0,$$

ita vt sit

$$\sin.\Phi^2+\sin.\Phi=1,\ \text{vnde colligitur}$$

$$\sin.\Phi=-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

sicque pro $\sin.\Phi$ duo habentur valores:

$$\sin.\Phi=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{et}\ \sin.\Phi=-\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

quorum prior cum sit vnitate minor, dabit valorem realem pro angulo Φ. Cum enim sit proxime

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0,618034,\ \text{erit}\ \Phi=38^\circ.\ 10'.\ 22'',$$

quem angulum breuitatis gratia ponamus $=\zeta$, ita vt sit

$$\sin.\zeta=0,618034\ \text{et}\ \cos.\zeta=0,786151$$

atque $\tang.\zeta=0,786154$, ideoque vti posuimus

$$\cos.\zeta=\tang.\zeta.$$

§. 12.

§. 12. Alter autem valor pro ſin. Φ inuentus dat ſin. $\Phi = -1,618034$, qui cum ſit vnitate maior, monſtrat hunc angulum eſſe imaginarium, ad quem definiendum notetur eſſe cof. $\theta\sqrt{-1} = \frac{e^{-\theta} + e^{+\theta}}{2}$, qui valor cum manifeſto maior ſit vnitate, et quidem poſitiuus vtamur hac formula:

$$\text{cof.}\,(\pi + \theta\sqrt{-1}) = \frac{-e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

Quodſi ergo faciamus

$$\Phi = 90^\circ - \pi - \theta\sqrt{-1} = \theta\sqrt{-1} - \tfrac{\pi}{2}, \text{ erit}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi = -\frac{e^{-\theta} - e^{+\theta}}{2},$$

quamobrem debet eſſe

$$\frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = +1,618034 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

pro quo numero breuitatis gratia ſcribamus ε, vt ſit $e^{\theta} + e^{-\theta} = 2\varepsilon$, vnde colligitur

$$e^{\theta} = \varepsilon + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 1)} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon},$$

et ſubſtituto valore fit $e^{\theta} = 2,0581710$. Hinc igitur fiet $\theta = l.\,2,0581710$, ſumendo ſcilicet logarithmum hyperbolicum, qui reperitur ſi logarithmus vulgaris multiplicetur per 2,3025851. Cum igitur logarithmus vulgaris ſit 0,3134816 erit

$$\theta = 0,3134816 \cdot 2,3025851 = 0,7218177.$$

§. 13. Inventis igitur his valoribus pro ζ et θ, ex priore $\Phi = \zeta$ omnes anguli Φ, quibus noſter denominator

nator tang. Φ — cos. Φ euanescit, sunt in genere

$$2 i \pi + \zeta \text{ et } (2 i + 1) \pi - \zeta,$$

quippe qui anguli omnes eundem habent sinum, vnde colliguntur omnes factores simplices reales. Pro imaginariis autem tantum loco ζ scribi oportet $\theta \sqrt{-1} - \frac{1}{2}\pi$, sicque simul obtinentur omnes factores imaginarii.

§. 14. Primo igitur denominatoris nostri factor sit $\Phi - 2 i \pi - \zeta$, ponaturque hic factor $= \omega$, ita vt sit

$$\Phi = 2 i \pi + \zeta + \omega, \text{ eritque } \sin.\Phi = \sin.(\zeta + \omega)$$
$$= \sin.\zeta \cos.\omega + \cos.\zeta \sin.\omega = \sin.\zeta + \omega \cos.\zeta,$$

quoniam non vltra primam dimensionem ipsius ω progredi necesse est. Deinde vero erit

$$\cos.\Phi = \cos.(\zeta + \omega) = \cos.\zeta - \omega \sin.\zeta,$$

denique

$$\text{tang.}\Phi = \text{tang.}(\zeta + \omega) = \text{tang.}\zeta + \frac{\omega}{\cos.\zeta^2}.$$

Hinc igitur denominator erit

$$\text{tang.}\zeta - \cos.\zeta + \omega\left(\sin.\zeta + \frac{1}{\cos.\zeta^2}\right);$$

at vero per hypothesin est tang. ζ — cos. $\zeta = 0$, vnde denominator iste erit $\omega\left(\sin.\zeta + \frac{1}{\cos.\zeta^2}\right)$. Vbi notetur, si accuratius procedere voluissemus, in denominatorem insuper terminum ω^2 ingressurum fuisse, quem autem hic negligere licet, quia nullus factor bis occurrit. Hinc ergo nascitur valor infinitus nostrae fractionis

$$\frac{\sin.\zeta}{\omega\left(\sin.\zeta + \frac{1}{\cos.\zeta^2}\right)} = \frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{\omega(\sin.\zeta \cos.\zeta^2 + 1)}$$

ex quo haec fractio partialis deducitur:

fin.

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{\sin.\zeta\cos.\zeta^2+1}\cdot\frac{1}{\Phi-2i\pi-\zeta},$$

quare si pro i omnes numeros tam positiuos quam negatiuos statuamus, prodibit ista series fractionum:

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2}\left(\frac{1}{\Phi-\zeta}+\frac{1}{\Phi-2\pi-\zeta}+\frac{1}{\Phi+2\pi-\zeta}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Phi-4\pi-\zeta}+\frac{1}{\Phi+4\pi-\zeta}+\text{etc.}\right)$$

At si pro ζ scribamus $\theta\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\pi$, series fractionum imaginariarum erit

$$\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2}\left(\frac{1}{\Phi+\frac{1}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\frac{1}{\Phi-\frac{3}{2}\pi\Phi-\theta\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Phi+\frac{5}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}+\frac{1}{\Phi-\frac{7}{2}\pi-\theta\sqrt{-1}}\right).$$

§. 15. Pro altero casu, quo in genere erat factor

$$\Phi-(2i+1)\pi+\zeta=\omega,\ \text{erit}$$
$$\Phi=(2i+1)\pi-\zeta+\omega$$

hincque

$$\sin.\Phi=\sin.(\zeta-\omega)=\sin.\zeta-\omega\cos.\zeta,$$

tum vero

$$\cos.\Phi=-\cos.(\zeta-\omega)=-\cos.\zeta-\omega\sin.\zeta\ \text{et}$$
$$\text{tang.}\,\Phi=-\text{tang.}(\zeta-\omega)=-\text{tang.}\,\zeta+\frac{\omega}{\cos.\zeta^2},$$

quare totus denominator erit

$$-\text{tang.}\,\zeta+\cos.\zeta+\omega\left(\frac{1}{\cos.\zeta^2}+\sin.\zeta\right)$$
$$=\omega\left(\sin.\zeta+\frac{1}{\cos.\zeta^2}\right)\ \text{ob}\ -\text{tang.}\,\zeta+\cos.\zeta=0,$$

vnde pars infinita nostrae fractionis erit

$$\frac{\sin.\zeta}{\omega\left(\sin.\zeta+\frac{1}{\cos.\zeta^2}\right)}=\frac{\sin.\zeta\cos.\zeta^2}{\omega(1+\sin.\zeta\cos.\zeta^2)}.$$

Nunc

Nunc igitur, si loco ω scribamus valorem assumtum

$$\Phi - (2i + 1)\pi + \zeta,$$

orietur forma generalis fractionum simplicium

$$\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{(1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2)} \cdot \frac{1}{\Phi - (2i + 1)\pi + \zeta}.$$

Loco i ergo successiue scribamus omnes valores

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \text{ etc.}$$

et colligetur sequens series fractionum:

$$\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2}\left(\frac{1}{\Phi - \pi + \zeta} + \frac{1}{\Phi + \pi + \zeta} + \frac{1}{\Phi - 3\pi + \zeta} + \frac{1}{\Phi + 3\pi + \zeta} + \frac{1}{\Phi - 5\pi + \zeta} + \text{etc.}\right)$$

Quodsi iam hic pro ζ scribamus $\theta\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\pi$, orientur fractiones imaginariae, quae erunt

$$\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2}\left(\frac{1}{\Phi + \frac{1}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}} + \frac{1}{\Phi - \frac{3}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}} + \frac{1}{\Phi + \frac{5}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}} + \frac{1}{\Phi - \frac{7}{2}\pi + \theta\sqrt{-1}} + \text{etc.}\right)$$

§. 16. Colligamus nunc primo seorsim omnes fractiones reales, et cum omnes habeant eundem coefficientem constantem $\frac{\sin.\zeta \cos.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta \cos.\zeta^2}$, ante omnia in eius valorem numericum inquiramus. Primo igitur cum fuisset

$$\sin.\zeta - \cos.\zeta^2 = 0, \text{ erit } \cos.\zeta^2 = \sin.\zeta,$$

ideoque iste coefficiens $= \frac{\sin.\zeta^2}{1 + \sin.\zeta^2}$; porro vero erat

$$\sin.\zeta^2 + \sin.\zeta = 1, \text{ ideoque } \sin.\zeta^2 = 1 - \sin.\zeta$$

vnde fit coefficiens $\frac{1 - \sin.\zeta}{2 - \sin.\zeta}$. Denique vero pro factoribus realibus eruimus $\sin.\zeta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, vnde noster coefficiens evadet $\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$, cuius ergo valor erit $0,2763932$, pro quo breuitatis gratia ſcribamus α, et omnes fractiones ſimplices reales in ordinem redactae erunt

$$\frac{\alpha}{\Phi-\zeta}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta-2\pi}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta+2\pi}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta-4\pi}+\frac{\alpha}{\Phi-\zeta+4\pi}+\text{etc.}$$

$$\frac{\alpha}{\Phi+\zeta-\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta+\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta-3\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta+3\pi}+\frac{\alpha}{\Phi+\zeta-5\pi}+\text{etc.}$$

§. 17. Pro partibus autem imaginariis idem coefficiens communis

$\frac{\text{ſin.}\,\zeta\ \text{coſ.}\,\zeta^2}{1+\text{ſin.}\,\zeta\ \text{coſ.}\,\zeta^2}$, ob $\text{coſ.}\,\zeta^2=\text{ſin.}\,\zeta$ et $\text{ſin.}\,\zeta^2=1-\text{ſin.}\,\zeta$, transmutatur vt ante in hanc formam: $\frac{1-\text{ſin.}\,\zeta}{2-\text{ſin.}\,\zeta}$. At vero pro partibus imaginariis inuenimus $\text{ſin.}\,\zeta=-\frac{1-\surd 5}{2}$, in quo iam inuoluitur ſubſtitutio ante memorata $\zeta=\theta\surd-1-\frac{1}{2}\pi$. Hoc ergo valore ſubſtituto coefficiens communis erit

$$\frac{3+\surd 5}{5+\surd 5}=\frac{5+\surd 5}{10},$$

ideoque in numeris $0,7236068$, pro quo numero ſcribamus β, ita vt ſit $\alpha+\beta=1$, hanc ob rem bini ordines fractionum imaginariarum erunt

$$\frac{\beta}{\Phi-\theta\surd-1+\frac{1}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi-\theta\surd-1-\frac{3}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi-\theta\surd-1+\frac{5}{2}\pi}$$
$$+\frac{\beta}{\Phi-\theta\surd-1-\frac{7}{2}\pi}\ \text{etc.}$$

$$\frac{\beta}{\Phi+\theta\surd-1+\frac{1}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi+\theta\surd-1-\frac{3}{2}\pi}+\frac{\beta}{\Phi+\theta\surd-1+\frac{5}{2}\pi}$$
$$+\frac{\beta}{\Phi+\theta\surd-1-\frac{7}{2}\pi}\ \text{etc.}$$

Hinc ergo ſi binae harum fractionum in vnam ſummam colligantur, imaginaria ſe mutuo deſtruent, ac prodibit ſequens ſeries:

$$\frac{\beta(2\Phi+\pi)}{(\Phi+\frac{1}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\Phi-3\pi)}{(\Phi-\frac{3}{2}\pi)^2+\theta\theta}$$

$$+\frac{\beta(2\Phi+5\pi)}{(\Phi+\frac{5}{2}\pi)^2+\theta\theta}+\frac{\beta(2\Phi-7\pi)}{(\Phi-\frac{7}{2}\pi)^2+\theta\theta}, \text{ etc.}$$

vbi notetur esse $\theta\theta = 0,5210210$.

§. 18. Quoniam partes imaginariae commode se contrahi sunt passae, vt similis contractio in partibus realibus succedat statuamus $\zeta = \frac{1}{2}\pi + \eta$ et ambae series ita se habebunt:

$$\frac{\alpha}{\Phi-\frac{1}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{5}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{3}{2}\pi-\eta}$$

$$+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{5}{2}\pi-\eta}+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{7}{2}\pi-\eta}+\text{ etc.}$$

$$\frac{\alpha}{\Phi-\frac{1}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{3}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{5}{2}\pi+\eta}$$

$$+\frac{\alpha}{\Phi+\frac{7}{2}\pi+\eta}+\frac{\alpha}{\Phi-\frac{9}{2}\pi+\eta}+\text{ etc.}$$

Hic ergo cuilibet termino conuenit quasi socius, binisque contractis orietur sequens series:

$$\frac{\alpha(2\Phi-\pi)}{(\Phi-\frac{1}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\Phi+3\pi)}{(\Phi+\frac{3}{2}\pi)^2-\eta\eta}$$

$$+\frac{\alpha(2\Phi-5\pi)}{(\Phi-\frac{5}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\frac{\alpha(2\Phi+7\pi)}{(\Phi+\frac{7}{2}\pi)^2-\eta\eta}+\text{ etc.}$$

vbi notetur, cum sit $\eta = \zeta - \frac{1}{2}\pi$, quoniam in partibus radii est $\zeta = 0,6662405$ fore $\eta = -0.9045558$, ideoque $\eta\eta = 0,0182214$, cum ante fuisset $\theta\theta = 0,5210210$.

§. 19. Quae igitur hactenus sunt allata huc redeunt, vt fractio proposita $\frac{\sin.\Phi}{\tang.\Phi - \cos.\Phi}$, aequetur binis sequentibus seriebus iunctim sumtis:

$$\frac{\alpha(2\Phi - \pi)}{(\Phi - \frac{1}{2}\pi)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\Phi + 3\pi)}{(\Phi + \frac{3}{2}\pi)^2 - \eta\eta}$$

$$+ \frac{\alpha(2\Phi - 5\pi)}{(\Phi - \frac{5}{2}\pi)^2 - \eta\eta} + \frac{\alpha(2\Phi + 7\pi)}{(\Phi + \frac{7}{2}\pi)^2 - \eta\eta} + \text{etc.}$$

$$\frac{\beta(2\Phi + \pi)}{(\Phi + \frac{1}{2}\pi)^2 + \theta\theta} + \frac{\beta(2\Phi - 3\pi)}{(\Phi - \frac{3}{2}\pi)^2 + \theta\theta}$$

$$+ \frac{\beta(2\Phi + 5\pi)}{(\Phi + \frac{5}{2}\pi)^2 + \theta\theta} + \frac{\beta(2\Phi - 7\pi)}{(\Phi - \frac{7}{2}\pi)^2 + \theta\theta} + \text{etc.}$$

Hinc igitur sequitur, si sumatur $\Phi = 0$, quo casu fractio ipsa in nihilum abit, fore

$$0 = \begin{cases} -\frac{4.\,1\,\alpha\pi}{\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4.\,3.\,\alpha\pi}{9\pi\pi - 4\eta\eta} - \frac{4.\,5\,\alpha\pi}{25\pi\pi - 4\eta\eta} + \frac{4.\,7\,\alpha\pi}{49\pi\pi - 4\eta\eta} - \text{etc.} \\ +\frac{4.\,1\,\beta\pi}{\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4.\,3.\,\beta\pi}{9\pi\pi + 4\theta\theta} + \frac{4.\,5\,\beta\pi}{25\pi\pi + 4\theta\theta} - \frac{4.\,7\,\beta\pi}{49\pi\pi + 4\theta\theta} + \text{etc.} \end{cases}$$

Ceterum hoc exemplum perquam idoneum est visum, quo applicatio ad factores imaginarios illustraretur.

EVO-

EVOLVTIO PRODVCTI INFINITI $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ IN SERIEM SIMPLICEM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Poſito $s=(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. facile patet fore:

$$s=1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)-\text{etc.}$$

quae ſeries cum iam ſit infinita, quaeritur, ſi ſinguli eius termini euoluantur, qualis ſeries ſecundum ſimplices poteſtates ipſius x ſit proditura. Cum igitur duo primi termini $1-x$ iam ſint euoluti, loco reliquorum omnium ſcribatur littera A, ita vt ſit $s=1-x-A$, ideoque

$$A=xx(1-x)+x^3(1-x)(1-xx)+x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)\text{ etc.}$$

§. 2. Quoniam hi termini omnes factorem habent communem $1-x$, eo euoluto ſinguli termini diſcerpentur in binas partes quas ita repraeſentemus:

$$\begin{aligned}A=\;&xx+x^3(1-xx)+x^4(1-xx)(1-x^3)+x^5(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)\\&-x^3-x^4(1-xx)-x^5(1-xx)(1-x^3)-x^6(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)\end{aligned}$$

Hinc

Hinc iam binae partes eadem poteſtate ipſius x affectae in vnam contrahantur, ac reſultabit pro A ſequens forma:

$$A = xx - x^5 - x^7(1 - xx) - x^9(1 - xx)(1 - x^3)$$
$$- x^{11}(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) - \text{etc.}$$

vbi duo termini primi $xx - x^5$ iam ſunt euoluti; ſequentes autem procedunt per has poteſtates: x^7, x^9, x^{11}, x^{13}, x^{15} quarum exponentes binario creſcunt.

§. 3. Ponamus nunc ſimili modo vt ante

$A = xx - x^5 - B$, ita vt ſit

$$B = + x^7(1 - xx) + x^9(1 - xx)(1 - x^3)$$
$$+ x^{11}(1 - xx)(1 - x^3)(1 - x^4) + \text{etc.}$$

cuius omnes termini habent factorem communem $1 - xx$, quo euoluto ſinguli termini in binas partes diſcerpantur, vti ſequitur:

$$B = x^7 + x^9(1 - x^3) + x^{11}(1 - x^3)(1 - x^4) + x^{13}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) \text{ etc.}$$
$$- x^9 - x^{11}(1 - x^3) - x^{13}(1 - x^3)(1 - x^4) - x^{15}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) \text{ etc.}$$

Hic iterum bini termini, qui eandem poteſtatem ipſius x habent praefixam, in vnam colligantur et prodibit:

$$B = x^7 - x^{12} - x^{15}(1 - x^3) - x^{18}(1 - x^3)(1 - x^4)$$
$$- x^{21}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) - \text{etc.}$$

vbi iam poteſtates ipſius x creſcunt ternario.

§. 4. Statuatur nunc porro $B = x^7 - x^{12} - C$, ita vt ſit

$$C = x^{15}(1 - x^3) + x^{18}(1 - x^3)(1 - x^4)$$
$$+ x^{21}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) + \text{etc.}$$

et iam ſinguli termini per euolutionem factoris $1 - x^3$ in binas partes reſoluantur, fietque:

C =

$$C = x^{15} + x^{18}(1-x^4) + x^{21}(1-x^4)(1-x^5) + x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^5)$$
$$-x^{18} - x^{21}(1-x^4) - x^{24}(1-x^4)(1-x^5) - x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

vbi denuo membra, quibus eadem poteſtas ipſius x praefixa, in vnum contracta praebebunt

$$C = x^{15} - x^{22} - x^{26}(1-x^4) - x^{30}(1-x^4)(1-x^5)$$
$$- x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

vbi poteſtates praefixae quaternario creſcunt.

§. 5. Statuatur $C = x^{15} - x^{22} - D$, vt ſit

$$D = x^{26}(1-x^4) + x^{30}(1-x^4)(1-x^5)$$
$$+ x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

qui termini per euolutionem factoris $1 - x^4$ in binos diſcerpantur hoc modo:

$$D = x^{26} + x^{30}(1-x^5) + x^{34}(1-x^5)(1-x^6) + x^{38}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$
$$-x^{30} - x^{34}(1-x^5) - x^{38}(1-x^5)(1-x^6) - x^{42}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

Nunc binis vt hactenus contrahendis colligitur

$$D = x^{26} - x^{35} - x^{40}(1-x^5) - x^{45}(1-x^5)(1-x^6)$$
$$- x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

Hic igitur poteſtates ipſius x quinario creſcunt.

§. 6. Statuatur $D = x^{26} - x^{35} - E$, ita vt ſit

$$E = x^{40}(1-x^5) + x^{45}(1-x^5)(1-x^6)$$
$$+ x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

ac reſolutione in binas partes vt hactenus inſtituta prodit

$$E = x^{40} + x^{45}(1-x^6) + x^{50}(1-x^6)(1-x^7) + x^{55}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)$$
$$-x^{45} - x^{50}(1-x^6) - x^{55}(1-x^6)(1-x^7) - x^{60}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \text{ etc.}$$

Contractis vero binis terminis in vnum prodibit

$$E = x^{40} - x^{51} - x^{57}(1 - x^6) - x^{63}(1 - x^5)(1 - x^7)$$
$$- x^{69}(1 - x^6)(1 - x^7)(1 - x^8) \text{ etc.}$$

vbi poteſtates ipſius x ſenario creſcunt.

§. 7. Cum lex, qua iſtae operationes vlterius ſunt continuandae ſatis ſit perſpicua, ſi poſtremi valores pro ſingulis litteris A, B, C, D, inuenti ordine ſubſtituantur, pro ſerie quaeſita reperiemus ſequentem formam:

$$S = 1 - x, - xx + x^5, + x^7 - x^{12}, - x^{15} + x^{22},$$
$$+ x^{26} - x^{35}, - x^{40} + x^{51}, \text{ etc.}$$

Hic igitur tota quaeſtio huc reducitur, vt ordo definiatur, quo exponentes poteſtatum ipſius x continuo vlterius augentur, quandoquidem ex operationibus inſtitutis iam ſatis eſt manifeſtum ſigna terminorum $+$ et $-$ ita alternatim ſe excipere, vt ambo geminentur.

§. 8. Quo igitur in hanc legem inquiramus, videamus quomodo in ſingulis litteris iſti numeri ſint orti. Hunc in finem primos ſaltem cuiusque litterae terminos in eius forma prima exhibitos ordine diſponamus

$A = xx(1 - x)$	$7 = 3 + 4 = 3 + 1 + 3 = 3 + 1 + 1 + 2$
$B = x^7(1 - xx)$	$15 = 4 + 11 = 4 + 2 + 9 = 4 + 2 + 2 + 7$
$C = x^{15}(1 - x^3)$	$26 = 5 + 21 = 5 + 3 + 18 = 5 + 3 + 3 + 15$
$D = x^{26}(1 - x^4)$	$40 = 6 + 34 = 6 + 4 + 30 = 6 + 4 + 4 + 26$
$E = x^{40}(1 - x^5)$	$57 = 7 + 50 = 7 + 5 + 45 = 7 + 5 + 5 + 40$
etc.	etc.

Hic ſcilicet ex euolutione litterae A vidimus, numerum 7 oriri ex aggregato $3 + 4$, tum vero 4 oriri ex $1 + 3$, ac denique 3 ex $1 + 2$, quae ergo reſolutio dabit

$$7 = 3 + 4 = 3 + 1 + 3 = 3 + 1 + 1 + 2.$$

At-

Atque idem ordo in ſequentibus litteris eſt obſervatus, vbi vltimi numeri procedunt ordine 2, 7, 15, 26, 40.

§. 9. Ex his iam manifeſtum eſt, numerorum 2, 7, 15, 26, 40, 57, etc. differentias progreſſionem arithmeticam conſtituere, vnde horum numerorum terminus generalis erit:

$$2 + 5(n-1) + \frac{3(n-1)(n-2)}{1.2} = \frac{3nn+n}{2}.$$

Exponentes autem, qui hos antecedunt, erant 1, 5, 12, 22, 35, 51 ab illis numeris 1, 2, 3, 4, 5, et in genere ipſo numero n, ita vt exponens, qui formulam $\frac{3nn+n}{2}$ praecedit, futurus ſit $\frac{3nn-n}{2}$.

§. 10. Nunc igitur ſeriem ſimplicem inuentam quae aequalis eſt producto infinito propoſito

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

perfecte cognoſcimus. Cum enim haec ſeries inuenta ſit:

$$s = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26}$$
$$- x^{35} - x^{40} + x^{51} + \text{ etc.}$$

certi nunc ſumus, in ea alias poteſtates ipſius x non occurrere, niſi quarum exponentes contineantur in hac formula generali: $\frac{3nn \pm n}{2}$, et quidem ita, vt ſi n fuerit numerus impar, bini termini inde nati habituri ſint ſignum $-$, qui autem ex paribus oriuntur ſignum $+$.

Alia inueſtigatio eiusdem ſeriei.

§. 11. Eadem ſeries ſecundum poteſtates ipſius x procedens etiam ſequenti modo inueſtigari poteſt. Cum ſcilicet ſit

$$s = 1 - x - xx(1-x) - x^3(1-x)(1-xx)$$
$$- x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \text{ etc.}$$

euoluatur ſtatim ſecundum membrum $-xx(1-x)$, vt fiat

$$s = 1 - x - xx + x^3 - x^3(1-x)(1-xx)$$
$$- x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) \text{ etc.}$$

ac ſtatuatur $s = 1 - x - xx + A$ vt ſit

$$A = x^3 - x^3(1-x)(1-xx)$$
$$- x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) - \text{ etc.}$$

cuius ſingula membra per euolutionem factoris $1-x$ in duas partes diſcerpantur, vt prodeat

$$A = x^3 - x^3(1-xx) - x^4(1-xx)(1-x^3) - x^5(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$$
$$+ x^4(1-xx) + x^5(1-xx)(1-x^3) + x^6(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$$

Hic iterum bina membra eadem poteſtate ipſius x affecta contracta praebebunt:

$$A = +x^5 + x^7(1-xx) + x^9(1-xx)(1-x^3)$$
$$+ x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

§. 12. Hic nunc iterum ſecundum membrum euoluatur, vt prodeat:

$$A = x^5 + x^7 - x^9 + x^9(1-xx)(1-x^3)$$
$$+ x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

Iam ponatur $A = x^5 + x^7 - B$, vt ſit

$$B = x^9 - x^9(1-xx)(1-x^3) - x^{11}(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

quare ſi vbique factor $1-xx$ euoluatur, obtinebitur

$$B = x^9 - x^9(1-x^3) - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$$
$$+ x^{11}(1-x^3) + x^{13}(1-x^3)(1-x^4) + x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$$

tum vero contrahendis binis membris orietur

$$B = x^{12} + x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4)$$
$$+ x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.}$$

§. 13.

§. 13. Euoluatur pariter ſecundum membrum ac ſtatuatur $B = x^{12} + x^{15} - C$, eritque

$$C = x^{18} - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.}$$

Nunc termini euoluantur ſecundum factorem $1 - x^3$, fietque

$$C = x^{18} - x^{18}(1-x^4) - x^{21}(1-x^4)(1-x^5) - x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$
$$+ x^{21}(1-x^4) + x^{24}(1-x^4)(1-x^5) + x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$

Hinc binis membris contrahendis fiet

$$C = x^{22} + x^{26}(1-x^4) + x^{30}(1-x^4)(1-x^5)$$
$$+ x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

§. 14. Euoluto nunc hic iterum ſecundo membro ſtatuatur $C = x^{22} + x^{26} - D$, eritque

$$D = x^{30} - x^{30}(1-x^4)(1-x^5) - x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

vbi euolutio factoris $1 - x^4$ producet

$$D = x^{30} - x^{30}(1-x^5) - x^{34}(1-x^5)(1-x^6) - x^{38}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$
$$+ x^{34}(1-x^5) + x^{38}(1-x^5)(1-x^6) + x^{42}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

Hinc binis membris contractis fiet:

$$D = x^{35} + x^{40}(1-x^5) + x^{45}(1-x^5)(1-x^6)$$
$$+ x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

§. 15. Euoluto ſecundo membro ſtatuatur denuo $D = x^{35} + x^{40} - E$, eritque

$$E = x^{45} - x^{45}(1-x^5)(1-x^6) - x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

et euoluto factore ſecundo $1 - x^5$ fiet

$$E = x^{45} - x^{45}(1-x^6) - x^{50}(1-x^6)(1-x^7) - x^{55}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)$$
$$+ x^{50}(1-x^6) + x^{55}(1-x^6)(1-x^7) + x^{60}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \text{ etc.}$$

 binis-

binisque terminis collectis elicitur

$$E = x^{51} + x^{57}(1-x^6) + x^{63}(1-x^6)(1-x^7) + x^{69}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \text{ etc.}$$

§. 16. Inuentis igitur his valoribus litterarum A, B, C, D, E, si singuli successiue substituantur, resultabit ista series:

$$1 - x - xx, + x^5 + x^7, - x^{12} - x^{15}, + x^{22} + x^{26}, - x^{35} - x^{40}, + \text{ etc.}$$

Hic autem ordo exponentium facilius perspicitur. Cum enim in valoribus litterarum A, B, C, D, primo constitutis primi termini simplices essent x^3, x^9, x^{18}, x^{30}, x^{45}, exponentes manifesto sunt numeri trigonales triplicati, vnde generatim pro numero n erit iste exponens $\frac{3nn+3n}{2}$. Verum hi termini sequuntur binas potestates ipsius x procedentes per eandem differentium n, vnde numerum n ab hac formula bis subtrahendo orientur binae potestates in seriem quaesitam ingredientes, quarum exponentes consequenter erunt $\frac{3nn+n}{2}$ et $\frac{3nn-n}{2}$.

§. 17. Hinc igitur vicissim patet, seriem

$$s = 1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{ etc.}$$

in infinitum continuatam habere infinitos factores, qui scilicet erunt $(1-x)$, $1-xx$, $1-x^3$, $1-x^4$, $1-x^5$, etc. ita vt si primo diuidatur per $1-x$, tum vero quotus per $1-xx$, iste quotus porro per $1-x^3$, hocque modo in infinitum diuisio continuetur, vltimum quotum resultantem vnitati aequalem esse oportebit.

§. 18.

§. 18. Quod si ergo proposita fuerit ista aequatio in infinitum excurrens:

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.} = 0,$$

eius omnes radices facile assignari possunt. Primum enim radix erit $x = 1$, deinde binae radices quadratae ex vnitate, tum vero ternae radices cubicae ex vnitate, porro quaternae radices biquadratae ex vnitate, similique modo quinae radices potestatis quintae ex vnitate, et ita porro, inter quas igitur ipsa vnitas infinities occurrit; at vero -1 ibi reperietur, vbi radix potestatis paris est extrahenda.

DE

DE MIRABILIBVS PROPRIETATIBVS NVMERORVM PENTAGONALIVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Ad classem numerorum pentagonalium non solum eos refero, qui vulgo proprie ita nominari solent & in formula $\frac{3nn-n}{2}$ continentur, sed etiam eos, quos ista formula: $\frac{3nn+n}{2}$ suppeditat; ita vt formula generalis omnium horum numerorum sit $\frac{3nn\mp n}{2}$, ex qua igitur nascitur sequens geminata numerorum series, si loco n successiue scribantur ordine numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc.

n	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
Numeri	0,	1,	5,	12,	22,	35,	51
pentagon.	0,	2,	7,	15,	26,	40,	57

Quilibet scilicet numerus pro n assumtus duos producit numeros, quos hic sibi inuicem subscripsi, ita vt series superior contineat numeros pentagonales proprie ita dictos, inferior vero eos, quos hic quoque ad eandem classem refero, et qui oriuntur si superior series retro continuetur.

tur. Hic autem binos coniunctim exhibeo, qui ex eodem numero n in formula $\frac{3nn \mp n}{2}$ oriuntur, quoniam in sequentibus eos horum numerorum distinguemus, qui vel ex numeris paribus vel imparibus pro n assumtis nascuntur.

§. 2. Quod si hos numeros ordine magnitudinis in vnam seriem coniiciamus, orietur ista progressio:

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, \text{ etc.}$$

cuius ordo manifesto est interruptus, quoniam progressio differentiarum hinc fit

$$1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, \text{ etc.}$$

quae mixta est ex serie numerorum naturalium et imparium. At vero ista series ad continuitatem perduci potest, si post tertium quemque terminum certa fractio interpoletur. Scilicet inter terminos 2 et 5 constituatur $\frac{10}{3}$, tum vero $\frac{28}{3}$ inter 7 et 12, porro $\frac{55}{3}$ inter 15 et 22, ita vt series completa sit

$$1, 2, \tfrac{10}{3}, 5, 7, \tfrac{28}{3}, 12, 15, \tfrac{55}{3}, 22, 26, \text{ etc.}$$

sic enim series differentiarum lege continua procedet, dum erit

$$1, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 2, \tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}, 3, \tfrac{10}{3}, \tfrac{11}{3}, 4, \text{ etc.}$$

Manifestum autem est, illam seriem oriri, si omnes numeri trigonales per 3 diuidantur. Hinc igitur iam pulchra se offert proprietas nostrorum numerorum pentagonalium, quod singuli ter sumti euadant numeri trigonales.

§. 3. Tales autem proprietates, quas immediate ex formulis generalibus deriuare licet, etiam in aliis numeris polygonalibus locum habere possunt, ad quas igitur non respicio; cum mihi potius propositum sit quasdam proprietates admirabiles commemorare, quibus numeri pentagonales prae omnibus reliquis polygonalibus sunt praediti. Atque hic occurrit illa insignis horum numerorum proprietas, qua iam olim ostendi, istam numerorum pentagonalium seriem tam arcte cum progressione, quam summae diuisorum numerorum naturalium constituunt, esse connexam, vt eius ope adeo lex istius seriei maxime irregularis assignari possit, id quod breuiter repetere operae pretium erit.

§. 4. Quod si quilibet numerus N cum suis diuisoribus in vnam summam colligatur, quam summam hoc charactere: $\int N$ indicemus, ex numeris naturalibus sequens nascetur series primo intuitu maxime irregularis:

N	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
$\int N$	1,	3,	4,	7,	6,	12,	8,	15,	13,	18,	12

vbi termini tam inordinate progrediuntur, dum modo crescunt modo decrescunt, vt vix quisquam eorum legem deteget, quandoquidem ista series ordinem numerorum primorum manifesto in se inuoluit.

§. 5. Interim tamen demonstraui, istam progressionem, quantumuis irregularem, ad classem serierum recurrentium esse referendam, et singulos eius terminos secundum certam legem ex praecedentibus determinari posse. Quod si enim $\int N$ denotet summam omnium diuisorum huius numeri N, ipso non excepto, inueni semper fore

$$\int N = \int(N-1) + \int(N-2) - \int(N-5) - \int(N-7) + \int(N-12) + \int(N-15) - \int(N-22) - \int(N-26) + \text{etc.}$$

vbi

vbi numeri, qui ſucceſſiue ab N ſubtrahuntur, conſtituunt manifeſto noſtram ſeriem numerorum pentagonalium

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ \text{etc.}$$

ita vt termini, ex numeris imparibus pro n aſſumtis oriundi habeant ſignum $+$, qui vero ex paribus naſcuntur ſignum $-$. Tum vero, quouis caſu has formulas eo vsque continuari oportet, quoad numeri poſt ſignum $\int$ ſcripti non euadant negatiui; at ſi occurrat formula $\int(N - N)$, eius loco ſcribi debet ipſe numerus N. Ita ſi ſumamus $N = 12$, erit

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$$

ideoque erit

$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

At vero ſi ſumamus $N = 13$, erit

$$\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1$$

ſiue erit

$$\int 13 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14.$$

§. 6. Quoniam igitur ordo, quo ſummae diuiſorum progrediuntur, merito maxime irregularis videtur, nemini certe in mentem venire potuit, eum per numeros pentagonales explorari potuiſſe, ex quo iſta ſpeculatio vtique maxime eſt admiranda. Afferam autem adhuc aliam eiusmodi proprietatem, quae quidem cum expoſita arctiſſime eſt connexa, attamen ad plures non minus admirandas proprietates perducit, quae omnes pariter in natura numerorum noſtrorum pentagonalium ſunt fundatae.

§. 7. Fundamentum autem omnium harum mirabilium proprietatum in euolutione huius producti infiniti:

$$S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(\text{etc.}$$

continetur: demonstraui enim, si singuli hi factores actu in se inuicem multiplicentur, tum denique resultare illam seriem:

$$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

vbi exponentes ipsius x constituunt nostram seriem numerorum pentagonalium, ratione signorum autem + et − ambo alternatim geminantur, ita vt qui exponentes ex numeris paribus pro n assumtis oriuntur, eae potestates habeant signum +, reliqui vero ex imparibus ortis signum −. Haec igitur non minus admirationem nostram meretur quam proprietas ante commemorata, cum nulla certe appareat ratio, vnde vllus nexus intelligi possit inter euolutionem illius producti et nostros numeros pentagonales.

§. 8. Cum igitur series ista potestatum ipsius x aequalis sit producto illi infinito, si eam nihilo aequalem statuamus, vt habeamus hanc aequationem:

$$0 = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

ea omnes easdem inuoluet radices, quas productum illud nihilo aequatum includit. Ex primo scilicet factore $1-x$ erit $x = 1$; ex secundo factore $1 - xx$ erit vel $x = +1$ vel $x = -1$; ex tertio factore $1 - x^3$ nascuntur hae tres radices:

1°) $x = 1$, 2°) $x = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, 3°) $x = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$;

ex quarto autem factore $1 - x^4 = 0$ oriuntur hae quatuor radices:

1°)

$$1^\circ)\ x = +1;\quad 2^\circ)\ x = -1,\quad 3^\circ)\ x = +\sqrt{-1} \text{ et}$$
$$4^\circ)\ x = -\sqrt{-1};$$

quintus autem factor $1 - x^5 = 0$ suppeditat has quinque radices:

$$1^\circ)\ x = 1,\quad 2^\circ)\ x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$$
$$3^\circ)\ x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4},\quad 4^\circ)\ x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$$
$$5^\circ)\ x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4};$$

sextus autem factor praebet has sex radices:

$$1^\circ)\ x = 1,\quad 2^\circ)\ x = -1,\quad 3^\circ)\ x = \frac{+1+\sqrt{-3}}{2},$$
$$4^\circ)\ x = \frac{+1-\sqrt{-3}}{2},\quad 5^\circ)\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$
$$6^\circ)\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \text{ etc. etc.}$$

§. 9. Hinc igitur patet, omnes radices cuiuscunque potestatis ex vnitate simul esse radices nostrae aequationis. Ac si rem in genere consideremus, ponendo $1 - x^n = 0$, primo patet, vnam radicem semper esse $x = 1$, ac si n fuerit numerus par, aliam radicem fore $x = -1$. Pro reliquis autem radicibus considerari debent factores trinomiales formulae $1 - x^n$, qui, vti alibi satis est expositum, in hac forma generali continentur:

$$1 - 2x \cos. \frac{2i\pi}{n} + xx,$$

sumendo pro i successiue omnes numeros integros ipso $\frac{1}{2}n$ non maiores. Hoc autem factore nihilo aequato eruuntur istae duae radices:

$$x = \cos. \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n} \text{ et}$$
$$x = \cos. \frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n}.$$

Hinc enim vicissim fit

$$x^n = \operatorname{cos.} 2\,i\,\pi \pm \sqrt{-1}\operatorname{sin.} 2\,i\,\pi.$$

Eſt autem $\operatorname{cos.} 2\,i\,\pi = 1$ et $\operatorname{sin.} 2\,i\,\pi = 0$, ideoque $x^n = 1$; vnde, ſi pro n et i ſucceſſiue omnes numeri integri accipiantur, haec forma:

$$x = \operatorname{cos.} \tfrac{2\,i\,\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\operatorname{sin.} \tfrac{2\,i\,\pi}{n}$$

praebebit omnes radices noſtrae aequationis

$$0 = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

ita vt iſtius aequationis omnes plane radices aſſignare valeamus.

§. 10. Quod ſi ergo omnes radices iſtius aequationis litteris α, β, γ, δ, ε, etc. indicemus, eius factores erunt $\frac{1-x}{\alpha}$, $\frac{1-x}{\beta}$, $\frac{1-x}{\gamma}$, $\frac{1-x}{\delta}$, etc. vnde ex natura aequationum colligimus fore ſummam omnium harum fractionum: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +$ etc. $= 1$, ſummam vero productorum ex binis $= -1$, tum vero ſummam productorum ex ternis $= 0$, ſummam productorum ex quaternis $= 0$, ſummam productorum ex quinis $= -1$, ſummam productorum ex ſenis $= 0$, ſummam productorum ex ſeptenis $= -1$, etc. Hinc autem porro concludimus fore ſummam quadratorum illarum fractionum, ſcilicet

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \text{etc.} = 3,$$

ſummam cuborum

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\delta^3} + \text{etc.} = 4,$$

ſummam biquadratorum

$$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\gamma^4} + \frac{1}{\delta^4} + \text{etc.} = 7,$$

et ita porro; vbi quidem nullus ordo perſpicitur.

§. 11.

§. 11. Quod autem hic de fractionibus $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, etc. diximus, etiam de ipsius radicibus α, β, γ, etc. valet. Si enim α fuerit radix nostrae aequationis, per ea quae ostendimus haec radix continetur in hac formula:

$$\operatorname{cos.} \frac{2 i \pi}{n} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sin.} \frac{2 i \pi}{n}.$$

Hinc autem fit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos.} \frac{2 i \pi}{n} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sin.} \frac{2 i \pi}{n}} = \operatorname{cos.} \frac{2 i \pi}{n} \mp \sqrt{-1} \operatorname{sin.} \frac{2 i \pi}{n},$$

quae itidem est radix nostrae aequationis; vnde patet, si $\frac{1}{\alpha}$ fuerit radix nostrae aequationis, etiam α fore radicem.

§. 12. Denotet igitur α radicem quamcunque aequationis $1 - x^n = 0$, quandoquidem tum etiam erit radix nostrae aequationis

$$1 - x - x x + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0,$$

tum igitur erit $\alpha^n = 1$. Praeterea vero etiam omnes potestates ipsius α radices simul erunt aequationis $1 - x^n = 0$. Si enim loco x scribamus $\alpha\alpha$ fiet $1 - x^n = 1 - \alpha^{2n}$. Cum autem sit $\alpha^n = 1$, paret etiam fore $\alpha^{2n} = 1$, ideoque $1 - \alpha^{2n} = 0$, quod idem manifestum est de cubo α^3 et omnibus potestatibus altioribus. Hinc igitur sequitur fore

$$\alpha^{n+1} = \alpha \text{ et } \alpha^{n+2} = \alpha\alpha \text{ et } \alpha^{n+3} = \alpha^3.$$

Sicque in genere erit $\alpha^{in+\lambda} = \alpha^\lambda$.

§. 13. Si igitur α denotet radicem quamcunque nostrae aequationis, ita vt sit $\alpha^n = 1$, si in ea loco x scribamus α, certe euadet haec series:

$$1 - \alpha^1 - \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^7 - \alpha^{12} - \alpha^{15} + \alpha^{22} + \text{etc.} = 0.$$

Prae-

Praeterea vero etiam ponendo $x = \alpha\alpha$ erit

$$1 - \alpha^2 - \alpha^4 + \alpha^{10} + \alpha^{14} - \alpha^{24} - \alpha^{30} + \alpha^{44} + \text{etc.} = 0,$$

et in genere si loco x scribamus α^i, denotante i numerum quemcunque integrum, etiam fiet

$$1 - \alpha^i - \alpha^{2i} + \alpha^{5i} + \alpha^{7i} - \alpha^{12i} - \alpha^{15i} + \alpha^{22i} + \text{etc.} = 0.$$

Atque hoc etiam valebit, si pro i numeri negatiui accipiantur, si quidem ostendimus, radices quoque esse $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\alpha^4}$, $\frac{1}{\alpha^5}$, etc.

§. 14. Quoniam hic assumsimus α esse radicem aequationis $1 - x^n = 0$, percurramus ordine casus, quibus est n vel 1 vel 2, vel 3, vel 4, etc. Ac primo quidem, si $n = 1$, necessario est $\alpha = 1$, quo valore substituto nostra aequatio generalis induet hanc formam:

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + \text{etc.}$$

quae series manifesto ex infinitis periodis conflatur, quarum singulae continent hos terminos: $1 - 1 - 1 + 1$, vnde cuiusque periodi valor est $= 0$, ideoque etiam infinitae periodi simul sumti summam habebunt $= 0$. Quoniam autem continuata concipi debet, si percursis iam infinitis periodis insuper vnus terminus accedat, summa erit $= 0$; si tres accedant, summa erit $- 1$ et si quatuor accedant $= 0$, quo casu tota periodus est adiecta; quare, cum numerus infinitus nusquam terminetur, summa seriei infinitae medium tenebit inter 4 summas modo memoratas $1, 0, -1, 0$, quod medium reperitur, si aggregatum harum quatuor summarum per numerum, hoc est per quaternarium diuidatur; tum autem manifesto prodit 0, quae ergo vera censenda est summa nostrae seriei.

§. 15. Simile scilicet ratiocinium hic adhiberi potest, quo vulgo ostendi solet summam seriei *Leibnizianae* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. esse $= \frac{1}{2}$; hoc autem concesso veritas praesentis asserti sponte elucet. Cum enim sit

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}, \text{ erit}$$

$$- 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = - \tfrac{1}{2}$$

ergo combinandis his duabus seriebus erit

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - \text{etc.} = 0.$$

§. 16. Consideremus nunc casum quo $n = 2$ et $\alpha\alpha = 1$, vbi quidem est α vel $+ 1$ vel $- 1$. Retineamus autem litteram α pro vtrauis earum designanda, et cum sit

$$\alpha^3 = \alpha, \; \alpha^4 = 1, \; \alpha^5 = \alpha, \; \alpha^6 = 1, \text{ etc.}$$

facta substitutione nostra aequatio generalis hanc induet formam:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 \,|\, + 1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1 \text{ etc.}$$

quae series pariter per certas periodos progreditur, quae continuo replicantur, atque vnaquaeque earum constat ex his octo terminis:

$$1 - \alpha - 1 + \alpha + \alpha - 1 - \alpha + 1,$$

quorum summa est 0, sicque numerus quantumuis magnus talium integrarum periodorum certe euanescit. At si vero insuper vnus, vel duo, vel 3, vel ad eo 8 termini accedant, summae sequenti modo se habebunt:

 si in-

si insuper accedat	summa erit
vnus terminus -	1
duo - - -	$1-\alpha$
tres - - -	$-\alpha$
quatuor - -	0
quinque - -	α
sex - - -	$\alpha-1$
septem - -	-1
octo - - -	0

quarum octo summarum aggregatum est 0, vnde tuto concludimus totius huius seriei, quam inuenimus, in infinitum continuatae summam esse $= 0$.

§. 17. Hinc patet, summam huius seriei periodicae perinde nihilo aequari, quemcunque valorem habuerit littera α; verus enim valor ipsius α, quo est $\alpha\alpha = 1$, iam in considerationem est ductus, dum ipsae periodi ex eo sunt natae; quamobrem haec series in duas partes dispesci potest, quarum altera contineat solas vnitates, altera vero solas litteras α; ac necesse est, vt vtriusque summa seorsim nihilo fiat aequalis, ita vt sit

$$1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ +1-1-1+1,\ \text{etc.} = 0$$

$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha,\ \text{etc.} = 0,$$

vtriusque autem veritas ex positis principiis fit manifesta.

§. 18. Simili modo res se habebit in radicibus cubicis ipsius 1, ponendo $\alpha^3 = 1$, et quoniam periodi ad plures terminos excurrent, seriem generalem per binos terminos sibi subscriptos referamus, vt sit in genere

$1-$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha^{5} - \alpha^{12} + \alpha^{22} - \alpha^{35} \text{ etc.} \\ \quad - \alpha^{2} + \alpha^{7} - \alpha^{15} + \alpha^{26} - \alpha^{40} \text{ etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Quod si iam sumatur $\alpha^{3} = 1$, vt sit

$$\alpha^{4} = \alpha,\ \alpha^{5} = \alpha^{2},\ \alpha^{6} = 1,\ \alpha^{7} = \alpha, \text{ etc.}$$

prodibit sequens progressio periodica:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha^{2} - 1 + \alpha - \alpha^{2} + 1 \,|\, - \alpha + \alpha^{2} - 1 + \alpha - \alpha^{2} + 1 \,| \\ \quad - \alpha^{2} + \alpha - 1 + \alpha^{2} - \alpha \,|\, + 1 - \alpha^{2} + \alpha - 1 + \alpha^{2} - \alpha \,|\, + 1 \end{array}\right. \text{etc.}$$

nihilo aequalis, vbi quaelibet periodus constat duodecim terminis triplicis generis, scilicet 1, α, α^{2}. Ac facile apparet, terminos cuiusque generis seorsim sumtos seriem exhibere nihilo aequalem, vnitates enim constituunt hanc seriem:

$$1 - 1 - 1 + 1,\ + 1 - 1 - 1 + 1,\ + 1 - 1 - 1 + 1, \text{ etc.} = 0$$

litterae vero α et $\alpha\alpha$ constituunt sequentes series:

$$-\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, \text{ etc.} = 0$$

$$-\alpha^{2} + \alpha^{2} + \alpha^{2} - \alpha^{2},\ -\alpha^{2} + \alpha^{2} + \alpha^{2} - \alpha^{2},\ -\alpha^{2} + \alpha^{2} + \alpha^{2} - \alpha^{2}, \text{ etc.} = 0.$$

Harum autem singularum summas nihilo aequales esse manifestum est.

§. 19. Consideremus porro etiam radices biquadratas vnitatis, sitque $\alpha^{4} = 1$, ac prodibit sequens series periodica:

$$\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha - 1 + \alpha^{2} - \alpha^{3} + \alpha^{3} - \alpha^{2} + 1 \,|\, - \alpha + \alpha - 1 + \text{ etc.} \\ \quad - \alpha^{2} + \alpha^{3} - \alpha^{3} + \alpha^{2} - 1 + \alpha - \alpha \,|\, + 1 - \alpha^{2} + \alpha^{3} - \alpha^{3} + \text{ etc.} \end{array}$$

vbi singulae periodi constant ex sedecim terminis, qui ad quatuor genera relati praebent sequentes quatuor series, singulas nihilo aequales:

$$1 - 1 - 1 + 1\,,\ +1 - 1 - 1 + 1\,,\ +1 - 1 - 1 + 1\,,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha + \alpha + \alpha - \alpha\,,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha\,,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha\,,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ \text{etc.} = 0$$
$$+\alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^3,\ +\alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^3,\ +\alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^3,\ \text{etc.} = 0$$

§. 20. Quamquam hinc noſtra concluſio pro radicibus altioribus iam ſatis eſt confirmata, tamen neceſſe eſt inſuper caſum, quo $\alpha^5 = 1$, euoluere, quandoquidem hic non omnes poteſtates quinta inferiores occurrent. Sit igitur $\alpha^5 = 1$ et haec ſeries periodica prodibit:

$$\begin{matrix} 1 - \alpha + 1 - \alpha^2 + \alpha^2 - 1 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha^2 + 1 \,|\, -\alpha + 1 \\ -\alpha^2 + \alpha^2 - 1 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha^2 + 1 - \alpha \,|\, +1 - \alpha^2 + \alpha^2 \end{matrix} \ \text{etc.}$$

vbi poteſtates α^3 et α^4 penitus excluduntur. Quare cum quaelibet periodus 20 conſtet terminis, reliquae poteſtates ſaepius occurrant neceſſe eſt; ſingulis autem ſeorſim ſumtis tres ſequentes ſeries periodicae occurrunt:

$$1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1\,,\ 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha,\ \text{etc.} = 0$$
$$-\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2,\ -\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2,\ \text{etc.} = 0$$

Hinc iam veritas ſeriei ipſarum α ex praecedentibus eſt manifeſta; binae reliquae autem, quarum periodi octo terminis conſtant, ſi ſecundum principia hactenus ſtabilita examinentur, etiam nihilo aequales deprehendentur, quoniam non ſolum termini ſolius periodi ſe mutuo deſtruunt, ſed etiam termini ſeriei ſummatricis inde formatae. Ita ex ſerie vnitatum oritur haec ſeries ſummatrix:

$$1,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -1,\ 0:$$

cuius ſumma itidem euaneſcit, quod idem vſu venit in ſerie quadratorum.

§. 21.

§. 21. Ex his iam abunde patet, eandem proprietatem etiam in radicibus altioribus locum esse habituram, ex quotcunque etiam terminis singulae periodi fuerint compositae; quod certe eo magis est mirandum, cum ista proprietas in nullas alias series potestatum competere possit, atque penitus propria sit seriei numerorum pentagonalium.

§. 22. Vt autem rem in genere ob oculos ponamus, sit $\alpha^n = 1$, vnde nascuntur periodi ex $4n$ terminis constantes, qui erunt vel 1, vel α, vel α^2, vel α^3 etc. Plerumque autem non omnes potestates inferiores quam α^n occurrent, vnde periodi singularum potestatum ipsius α plerumque pluribus quam 4 terminis constabunt. Semper autem non solum ipsi termini cuiusque periodi se mutuo destruent, sed etiam termini seriei summatricis. Ita si consideremus potestates α^r, existente r numero minore quam n, ex serie nostra numerorum pentagonalium omnes excerpantur termini, qui per n diuisi hoc idem residuum r relinquant. Ac si cuique horum terminorum suum debitum signum praefigatur, talis prodibit series:

$$\pm\alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \text{etc.}$$

quae semper ex certis periodis ratione signorum + et — constabit, idque ita, vt cuiusque periodi omnes termini simul sumti se mutuo destruant atque idem etiam in serie summatrice eueniat.

§. 23. Verum hae proprietates hactenus commemoratae insuper innumerabiles alias non minus admirandas post se trahunt. Si enim α fuerit radix cuiusque potestatis n ex vnitate, ita vt $1-\frac{x}{\alpha}$ sit factor formulae $1-x^n$, euidens est, eum etiam fore factorem formularum $1-x^{2n}$, $1-x^{3n}$, $1-x^{4n}$, etc. in infinitum. Quare, cum hae formulae omnes sint factores nostrae progressionis

$$1-x-xx+x^5+x^7-x^{12}-\text{etc.}$$

eadem radix α in hac aequatione non tantum semel sed adeo infinities occurrit, ita vt ista aequatio infinitas habeat radices ipsi α aequales.

§. 24. Nouimus autem ex natura aequationum, si aequatio quaecunque

$$1+Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}=0,$$

habeat duas radices aequales α, tum etiam α fore radicem aequationis per differentiationem natae, scilicet:

$$A+2Bx+3Cxx+4Dx^3+\text{etc.}=0,$$

ac si habeat tres radices aequales α, tum insuper α quoque erit radix istius aequationis per differentiationem natae, postquam scilicet illam aequationem differentialem per x multiplicauerimus

$$1^2.A+2^2.Bx+3^2.Cxx+4^2.Dx^3+\text{etc.}=0,$$

vnde si haec aequatio habuerit λ radices aequales, quae singulae sint $=\alpha$, semper erit

$$1^\lambda.A+2^\lambda.B\alpha+3^\lambda.C\alpha\alpha+4^\lambda.D\alpha^3+\text{etc.}=0,$$

vnde si vniformitatis gratia hanc aequationem per α multiplicemus, erit quoque

$$1^\lambda.A\alpha+2^\lambda.B\alpha^2+3^\lambda.C\alpha^3+4^\lambda.D\alpha^4+\text{etc.}=0.$$

§. 25. Cum igitur posito $\alpha^n=1$ nostra aequatio ex numeris pentagonalibus formata

1 —

$$1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0;$$

habeat infinitas radices ipſi α aequales, erit quoque α radix omnium aequationum in hac forma generali contentarum:

$$-1^\lambda x - 2^\lambda x^2 + 5^\lambda x^5 + 7^\lambda x^7 - 12^\lambda x^{12} - \text{etc.} = 0$$

quicunque numerus integer pro λ accipiatur. Semper igitur erit

$$-1^\lambda \alpha - 2^\lambda \alpha^2 + 5^\lambda \alpha^5 + 7^\lambda \alpha^7 - 12^\lambda \alpha^{12} - \text{etc.} = 0.$$

§. 26. Ad hoc clarius oſtendendum ſumamus $\alpha = 1$, eritque ſemper

$$-1^\lambda - 2^\lambda + 5^\lambda + 7^\lambda - 12^\lambda - 15^\lambda + \text{etc.} = 0,$$

ac pro caſu $\lambda = 0$ veritatem iſtius aequationis iam probauimus. Sit igitur $\lambda = 1$ et monſtrandum erit, huius ſeriei diuergentis infinitae:

$$-1 - 2 + 5 + 7 - 12 - 15 + 22 + 26 - \text{etc.}$$

ſummam eſſe $= 0$. Quoniam autem haec ſeries eſt interrupta, ſeu potius ex duabus ſeriebus mixta, vtramque ſeorſim contemplemur, ponendo

$$s = -1 + 5 - 12 + 22 - 35 + \text{etc. et}$$
$$t = -2 + 7 - 15 + 26 - 40 + \text{etc.}$$

atque oſtendi oportet fore $s + t = 0$.

§. 27. Ex doctrina autem ſerierum, quae ſignis alternantibus procedunt, veluti $A - B + C - D + \text{etc.}$ conſtat, huius ſeriei in infinitum progredientis ſummam eſſe

$$= \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}(B - A) + \tfrac{1}{8}(C - 2B + A) - \tfrac{1}{16}(D - 3C + 3B - A) \text{ etc.}$$

quae

quae regula ita commodius per differentias exponitur, scilicet ratione signorum seposita. Ex serie numerorum A, B, C, D, E, etc. formetur series differentiarum, dum quilibet terminus illius seriei a sequente subtrahitur, quae sit a, b, c, d, etc. Eadem porro lege ex hac serie differentiarum formetur series secundarum differentiarum, quae sit a', b', c', d', etc. ex hac porro series tertiarum differentiarum, quae sit a'', b'', c'', d'', e'', etc. atque hoc modo vlterius donec ad differentias constantes perueniatur. Tum autem ex terminis primis omnium harum serierum summa seriei propositae ita determinatur, vt ea sit

$$\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}a' - \tfrac{1}{16}a'' + \tfrac{1}{32}a''' - \tfrac{1}{64}a'''' + \text{ etc.}$$

§. 28. Hac regula stabilita, cum signis mutatis sit

$$-s = 1 - 5 + 12 - 22 + 35 - 51 + 70 - \text{ etc. et}$$
$$-t = 2 - 7 + 15 - 26 + 40 - 57 + 77 - \text{ etc.}$$

hi termini sequenti modo disponantur ac differentiae subscribantur:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 etc.	2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 etc.
4, 7, 10, 13, 16, 19	5, 8, 11, 14, 17, 20
3, 3, 3, 3, 3	3, 3, 3, 3, 3
0, 0, 0, 0	0, 0, 0, 0

Hinc igitur colligitur fore

$$-s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{4} + \tfrac{3}{8} = -\tfrac{1}{8}, \text{ siue } s = \tfrac{1}{8}, \text{ porro}$$
$$-t = \tfrac{2}{2} - \tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{8}, \quad \text{siue } t = -\tfrac{1}{8}$$

vnde manifesto conficitur esse $s + t = 0$.

§. 29.

§. 29. Quanquam ipsae rationes, quibus hae proprietates innituntur, nullum plane dubium relinquunt: tamen haud inutile erit, istam veritatem etiam pro casu $\lambda = 2$ ostendisse, siue reuera esse

$$-1^2 - 2^2 + 5^2 + 7^2 - 12^2 - 15^2 + 22^2 + \text{etc.} = 0.$$

Discerpatur enim haec series itidem in duas, quae sint mutatis signis:

$$s = +1^2 - 5^2 + 12^2 - 22^2 + 35^2 - 51^2 + \text{ etc.}$$

$$t = 2^2 - 7^2 + 15^2 - 26^2 + 40^2 - 57^2 + \text{ etc.}$$

ac pro prioris summa inuenienda instituatur sequens operatio:

Series	1, 25, 144, 484, 1225, 2601, 4900
Diff. I.	24, 119, 340, 741, 1376, 2299
Diff. II.	95, 221, 401, 635, 923
Diff. III.	126, 180, 234, 288
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

Hinc igitur erit

$$s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{24}{4} + \tfrac{95}{8} - \tfrac{126}{16} + \tfrac{54}{32} = + \tfrac{3}{16}.$$

Simili modo pro altera serie

Series	4, 49, 225, 676, 1600, 3249, 5929
Diff. I.	45 176, 451, 924, 1649, 2680
Diff. II.	131, 275, 473, 725, 1031
Diff. III.	144 198, 252, 306
Diff. IV.	54, 54, 54
Diff. V.	0, 0

 Hinc

Hinc concluditur

$$t = \tfrac{6}{2} - \tfrac{45}{4} + \tfrac{131}{8} - \tfrac{144}{16} + \tfrac{54}{32} + - \tfrac{5}{16}.$$

Quamobrem euictum eſt totam ſummam fore $s + t = 0$.

§. 30. Conſideremus nunc etiam radices quadratas, ſiue ſit $\alpha^2 = 1$, hincque orietur iſta ſeries:

$$-1^\lambda.\alpha - 2^\lambda + 5^\lambda.\alpha + 7^\lambda\alpha - 12^\lambda - 15^\lambda.\alpha + 22^\lambda$$
$$+ 26^\lambda - \text{etc.} = 0,$$

vnde ſi terminos vnitatem et α continentes a ſe inuicem ſeparemus, binas obtinebimus ſeries nihilo aequales, ſcilicet:

$$-2^\lambda - 12^\lambda + 22^\lambda + 26^\lambda - 40^\lambda - 70^\lambda + 92^\lambda + \text{etc.} = 0$$

et

$$-1^\lambda.\alpha + 5^\lambda.\alpha + 7^\lambda.\alpha - 15^\lambda.\alpha - 35^\lambda.\alpha + 51^\lambda.\alpha$$
$$+ 57^\lambda.\alpha - \text{etc.} = 0.$$

Quod ſi vero harum ſerierum veritatem eodem modo, quo ante ſumus vſi, oſtendere vellemus, vnamquamque in quatuor alias ſeries diſcerpi oporteret, vt ſcilicet tandem ad differentias conſtantes perueniremus. At vero ſi quis hanc operam ſuſcipere voluerit, certus eſſe poterit, aggregatum omnium ſummarum partialium fore $= 0$.

§. 31. Nunc generaliſſime totum negotium complectamur, ſitque $\alpha^n = 1$, et quaeramus ſeriem, quae contineat tantum poteſtates α^r. Hunc in finem ex omnibus noſtris numeris pentagonalibus excerpamus eos, qui per n diuiſi relinquunt idem reſiduum r. Sint igitur iſti numeri pentagonales A, B, C, D, E, etc. omnes ſcilicet formae

mae $\gamma n + r$, et cuiusque ſignum $\pm$, quod ipſi conuenit, ſollicite notetur. Tum autem ſemper erit

$$\pm A^{\lambda} \pm B^{\lambda} \pm C^{\lambda} \pm D^{\lambda} \pm \text{etc.} = 0,$$

quicunque valor integer exponenti λ tribuatur. Atque in hac forma generaliſſima omnes ſeries, quas hactenus eruimus, et quarum ſummas nihilo aequari oſtendimus, continentur.

INTÉGRATION

d'une espèce remarquable d'équations différentielles dans l'Analyse des fonctions à deux variables, par l'introduction de nouvelles variables;

par

NICOLAS FUSS.

Si z marque une fonction quelconque des deux variables x & y, & qu'on désigne par les caractères $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$, &c. les différentielles de cette fonction, en prennant la seule x pour variable; par $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$, &c. les différentielles de la même fonction pour la variabilité de la seule y; par $\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$, $\left(\frac{d^4z}{dxdy^3}\right)$, etc. les différentielles, en ne prennant x variable qu'une fois, & ainsi de suite, & qu'on forme de ces différens ordres de différentielles les expressions suivantes:

$$P = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$Q = x^2\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2xy\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + y^2\left(\frac{ddz}{dy^2}\right),$$

$$R = x^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 3x^2y\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + 3xy^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + y^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right),$$

etc. etc.

il s'agira de trouver les intégrales complettes de ces équations:

$$P = 0,$$

$P = 0,\ Q = 0,\ R = 0,\ S = 0,$ etc.

& des équations composées de celles-là:

$Az + BP = 0,$

$Az + BP + CQ = 0,$

$Az + BP + CQ + DR = 0,$

etc.

objet qui pourra être rempli très facilement par l'usage de deux nouvelles variables t & u de la fonction proposée.

Mais avant que d'introduire ces nouvelles variables, il sera bon de chercher la relation qui subsiste entre les formules P, Q, R, S, etc. dont chacune peut être tirée de celle qui la précède immediatement, comme on verra par le Problème suivant.

Problème I.

Trouver le rapport qu'il y a entre les expressions P, Q, R, S, *etc. & leurs différentielles.*

Solution.

A cause de $P = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)$ on aura

$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) + x\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + y\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ et

$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) + y\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + x\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$, donc

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dP}{dy}\right) = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) + x^2\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2xy\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + y^2\left(\frac{ddz}{dy^2}\right),$$

équation qui se reduit évidemment à celle-ci:

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dP}{dy}\right) = P + Q.$$

L'expreſſion

$$Q = x^2 \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2xy\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + y^2\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) \text{ donne}$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + x^2\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 2y\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$$
$$+ 2xy\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + y^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right), \; \&$$

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2y\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + y^2\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) + 2x\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$$
$$+ 2xy\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + x^2\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right),$$

d'où l'on tire

$$x\left(\frac{dQ}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2x^2\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 4xy\left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$$
$$+ 2y^2\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + x^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + 3x^2y\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$$
$$+ 3xy^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + y^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

ou bien

$$x\left(\frac{dQ}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 2Q + R.$$

De la même manière en cherchant de l'équation R les différentielles $\left(\frac{dR}{dx}\right)$ & $\left(\frac{dR}{dy}\right)$, la première multipliée par x ajoutée à l'autre multipliée par y donnera la relation ſuivante:

$$x\left(\frac{dR}{dx}\right) + y\left(\frac{dR}{dy}\right) = 3R + S;$$

& cette opération continuée pour l'expreſſion S fournira

$$x\left(\frac{dS}{dx}\right) + y\left(\frac{dS}{dy}\right) = 4S + T,$$

& ainſi de ſuite; d'où l'on voit facilement comment chaque expreſſion peut être déduite de la précédente. Le Problème ſuivant enſeignera la transformation des différentielles de la fonction z, exprimées par x & y, pour d'autres variables t & u.

Pro-

Problème 2.

Quand z *exprime une fonction quelconque de deux variables* x *&* y, *& qu'au lieu de ces variables on en introduit deux autres* t *&* u, *telles que* $x = tu$ *&* $y = u$, *trouver les valeurs des différentielles*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right),\ \left(\frac{dz}{dy}\right),\ \left(\frac{ddz}{dx^2}\right),\ \left(\frac{ddz}{dxdy}\right),\ \left(\frac{ddz}{dy^2}\right),\ \&c.$$

exprimées par ces nouvelles variables.

Solution.

Soit pour les premières variables $dz = mdx + ndy$ & pour les nouvelles $dz = M\,dt + N\,du$, pour avoir

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = m,\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = n;\ \left(\frac{dz}{dt}\right) = M,\ \left(\frac{dz}{du}\right) = N;$$

& puisque

$$x = tu,\ y = u,\ dx = t\,du + u\,dt,\ dy = du,$$

nous aurons

$$mdx + ndy = mt\,du + mu\,dt + n\,du = dz = M\,dt + N\,du,$$

& partant $M = mu$ & $N = mt + n$, d'où l'on tire

$$m = \frac{M}{u}\ \&\ n = N - mt = N - \frac{t}{u}M,$$

ou bien, en introduisant au lieu de m, n, M, N les différentielles, nous aurons

$$(\mathfrak{A}).\ \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right);\ (\mathfrak{B}).\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Soit pour les différentielles secondes $\frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) = v$, & nous aurons $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$, & partant

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

(en vertu de l'équation $\mathfrak{A}$), donc

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = u\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

(à

(à cauſe de $\left(\frac{dx}{dt}\right) = u$, ou bien $dx = u\,dt$) d'où l'on tire

$$(\mathfrak{C}.\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{1}{uu}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Enſuite, à cauſe de $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$, on aura en prennant les differentielles

$$\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right).$$

Or, en mettant dans l'équation ($\mathfrak{B}$) v à la place de z, on obtient

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dv}{dt}\right);$$

mais $v = \frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)$, donc

$$\left(\frac{dv}{du}\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) \;\&\; \left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

& partant

$$\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Enfin puiſqu'il y a en vertu de l'équation $\mathfrak{B}$:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) = v'$$

(pour abréger), on aura

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \left(\frac{dv'}{dy}\right) = \left(\frac{dv'}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dv'}{dt}\right),$$

(par analogie de $\mathfrak{B}$). Mais

$$\left(\frac{dv'}{du}\right) = \left(\frac{ddz}{du^2}\right) + \frac{t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) \;\&$$

$$\left(\frac{dv'}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

& partant

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{2t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{tt}{uu}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \left(\frac{ddz}{du^2}\right).$$

Pour les troiſièmes différentielles nous mettrons pour abréger

$$(\mathfrak{C}).\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{1}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = v'',$$

pour avoir

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = \left(\frac{dv''}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right)$$

(en

(en vertu de $\mathfrak{A}$) & l'équation $\mathfrak{C}$ différentiée donne

$$\left(\frac{dv''}{dt}\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)$$

de forte que

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right).$$

On a de plus $\left(\frac{dv''}{dy}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dx \cdot dy}\right)$, & en mettant au lieu de $\left(\frac{dv'}{dy}\right)$ l'expreffion déduite de $\mathfrak{C}$, favoir :

$\left(\frac{dv''}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right)$, on aura

$\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) = \left(\frac{dv''}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right)$. Or

$\left(\frac{dv''}{du}\right) = -\frac{2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2 du}\right)$ &

$\frac{t}{u}\left(\frac{dv''}{dt}\right) = \frac{t}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right)$,

ce qui étant fubftitué, donne

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) = -\frac{2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2 du}\right) - \frac{t}{u^3}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right).$$

Enfuite en mettant l'expreffion trouvée ci deffus

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{2t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{tt}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \left(\frac{ddx}{du^2}\right) = v'''$$

nous aurons

$\left(\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right) = \left(\frac{dv'''}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dv'''}{dt}\right)$, donc

$$\left(\frac{d\ z}{dx\,dy^2}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{2}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{4t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \frac{2}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{tt}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt^2 du}\right) + \left(\frac{d^3 z}{du\ dt}\right)\right).$$

Enfin en prennant la différentielle de v''' pour y variable, on aura $\left(\frac{dv'''}{dy}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$; ce qui donne

$$\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = \frac{dv'''}{du} - \frac{t}{u}\left(\frac{dv'''}{dt}\right);$$

d'où, à caufe de

$$\frac{dv'''}{du} = -\frac{4t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{4t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{d^3 z}{dt\,du^2}\right)$$
$$+ \frac{tt}{u^2}\left(\frac{d^3 z}{dt^2 du}\right) - \frac{2tt}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^3 z}{du^3}\right), \ \&$$

$$\frac{t}{u}\left(\frac{d\,y''}{d\,t}\right) = \frac{2t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{t}{u}\left(\frac{d^3z}{dt\,du^2}\right) - \frac{2tt}{uu}\left(\frac{d^3z}{dt^2\,du}\right)$$
$$+ \frac{4tt}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{t^3}{u^3}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)$$

on obtiendra pour $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$ cette expreſſion :

$$\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = -\frac{6t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{6t}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{6tt}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \frac{t^3}{u^3}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)$$
$$+ \frac{3tt}{u^2}\left(\frac{d^3z}{dt^2\,du}\right) - \frac{3t}{u}\left(\frac{d^3z}{dt\,du^2}\right) + \left(\frac{d^3z}{du^3}\right),$$

Nous avons donc pour le premier ordre des différentielles :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$
$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{du}\right).$$

Pour le ſecond ordre:

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{1}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$
$$\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{t}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$
$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{2t}{u^2}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2t}{u}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{tt}{uu}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \left(\frac{ddz}{du^2}\right).$$

Pour le troiſième ordre:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right).$$
$$\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right) = -\frac{2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^3z}{dt^2\,du}\right) - \frac{t}{u^3}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right).$$
$$\left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right) = \frac{2}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{2}{u^2}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + \frac{4t}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{tt}{u^3}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)$$
$$- \frac{2t}{u^2}\left(\frac{d^3z}{dt^2\,du}\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{d^3z}{dt\,du^2}\right).$$
$$\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = -\frac{6t}{u^3}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{6t}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) - \frac{6t^2}{u^3}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - \frac{t^3}{u^3}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)$$
$$+ \frac{3t^2}{u^2}\left(\frac{d^3z}{dt^2\,du}\right) - \frac{3t}{u}\left(\frac{d^3z}{dt\,du^2}\right) + \left(\frac{d^3z}{du^3}\right).$$

Il ſeroit ſuperflu de continuer ces opérations pour les ordres ſupérieurs. Il ſuffit d'avoir montré par ces détails le procédé qu'il faudra ſuivre pour cet effet.

Pro-

Problème III.

Transformer les expressions P, Q, R, S, etc. en introduisant les nouvelles variables.

Solution.

Si dans l'équation $P = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right)$ on met tu au lieu de x, & u au lieu de y, & qu'on substitue aux $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ les valeurs $\frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)$ & $\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right)$,
on obtient

$$P = t\left(\frac{dz}{dt}\right) + u\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{tu}{u}\left(\frac{dz}{dt}\right) = u\left(\frac{dz}{du}\right).$$

Les équations marquées par $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, en mettant P à la place de z, donnent

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dP}{dt}\right) \;\&\; \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dP}{dt}\right),$$

d'où, à cause de $P = u\left(\frac{dz}{du}\right)$, l'on tire

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) \text{ et } \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right) + u\left(\frac{ddz}{du^2}\right) - t\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right)$$

& partant

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right) = u\left(\frac{dz}{du}\right) + u^2\left(\frac{ddz}{du^2}\right). \quad \text{Or}$$

$$x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right) = P + Q,$$

comme nous avons vu dans le premier Problème, ce qui fournit cette équation:

$$u\left(\frac{dz}{du}\right) + u^2\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = P + Q = u\left(\frac{dz}{du}\right) + Q,$$

donc

$$Q = u^2\left(\frac{ddz}{du^2}\right).$$

Les mêmes équations du second Probleme $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ donnent

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dQ}{dt}\right) \text{ et } \left(\frac{dQ}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dQ}{dt}\right),$$

 ou

ou bien, à cauſe de $Q = u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right)$, il y aura

$$\left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) = u \left(\frac{d^3\,z}{d\,t\,d\,u^2}\right) \;\&\; \left(\frac{d\,Q}{d\,y}\right) = 2\,u \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^2 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) - t\,u \left(\frac{d^3\,z}{d\,t\,d\,u^2}\right)$$

& partant

$$x \left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) + y \left(\frac{d\,Q}{d\,y}\right) = 2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right),$$

ce qui, à cauſe de

$$x \left(\frac{d\,Q}{d\,x}\right) + y \left(\frac{d\,Q}{d\,y}\right) = 2\,Q + R,$$

donne l'équation

$$2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) = 2\,Q + R = 2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + R,$$

de laquelle on tire

$$R = u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right).$$

Il y a donc par les nouvelles variables :

$$P = u \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right),\; Q = u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right),\; R = u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right),\; S = u^4 \left(\frac{d^4\,z}{d\,u^4}\right).$$

Corollaire.

La relation entre les P, Q, R, S, que nous avons trouvée dans le premier Problème, eſt encore très remarquable pour ces formules exprimées par les nouvelles variables. Car $P = u \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right)$, donc

$$u \left(\frac{d\,P}{d\,u}\right) = u \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right) + u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) = P + Q,$$

$$u \left(\frac{d\,Q}{d\,u}\right) = 2\,u^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) + u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) = 2\,Q + R.$$

$$u \left(\frac{d\,R}{d\,u}\right) = 3\,u^3 \left(\frac{d^3\,z}{d\,u^3}\right) + u^4 \left(\frac{d^4\,z}{d\,u^4}\right) = 3\,R + S,$$

& ainſi de ſuite; rapports dont nous pourrons faire uſage dans la ſuite pour l'intégration des équations

$$A\,z + B\,P + C\,Q + \text{etc.} = 0,$$

à laquelle

à laquelle nous ferons précéder celle des équations simples dans les Problèmes suivans.

Problème 1.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle: $u\left(\frac{dz}{du}\right) = 0$.

Solution.

Dans l'équation $\left(\frac{dz}{du}\right) = 0$ la quantité t est ouvertement constante; en prennant l'intégrale on a z égal à une quantité constante, pour laquelle nous écrirons une fonction quelconque F de la constante t, de sorte que $z = F : t$.

En revenant aux anciennes variables x et y on auroit $F : \frac{x}{y}$ pour l'intégrale de cette équation différentielle: $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$.

Problème 2.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du second degré: $u\,u\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = 0$.

Solution.

Comme la quantité t est aussi constante dans cette équation $\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = 0$, dont la première intégrale $\left(\frac{dz}{du}\right)$ est égale à une quantité constante, nous la mettrons égale à une fonction $F' : t$, pour avoir $\left(\frac{dz}{du}\right) = F' : t$, dont l'intégrale

$$z = \text{const.} + u\,F' : t = F : t + u\,F' : t.$$

 En

En exprimant cette équation par les variables x et y, nous aurions l'intégrale

$$z = F : \frac{x}{y} + y\, F' : \frac{x}{y},$$

pour cette équation differentielle du second degré:

$$x^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,x^2}\right) + 2\,x\,y \left(\frac{d\,d\,z}{d\,x\,d\,y}\right) + y^2 \left(\frac{d\,d\,z}{d\,y^2}\right) = 0.$$

Problème 3.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du troisième degré: $u^3 \left(\frac{d^3 z}{d\,u^3}\right) = 0.$

Solution.

Aiant donc $\left(\frac{d^3 z}{d\,u^3}\right) = 0$, si nous marquons par des fonctions de la constante t, savoir par $F : t$, $F' : t$, $F'' : t$, les constantes qui entrent par l'integration, nous aurons

$$\left(\frac{d\,d\,z}{d\,u^2}\right) = F'' : t; \; \left(\frac{d\,z}{d\,u}\right) = F' : t + u\, F'' : t \text{ et}$$

$$z = F : t + u\, F' : t + u^2\, F'' : t.$$

Ainsi en reprennant les variables x et y on a

$$z = F : \frac{x}{y} + y\, F' : \frac{x}{y} + y^2\, F'' \frac{x}{y},$$

pour l'intégrale de l'équation differentielle que voici:

$$x^3 \left(\frac{d^3 z}{d\,x^3}\right) + 3\,x^2 y \left(\frac{d^3 z}{d\,x^2\,d\,y}\right) + 3\,x\,y^2 \left(\frac{d^3 z}{d\,x\,d\,y^2}\right) + y^3 \left(\frac{d^3 z}{d\,y^3}\right) = 0.$$

On voit aisement comment procéder pour les ordres supérieurs, & il ne sera pas difficile d'assigner, en suivant le même raisonnement, l'intégrale d'une équation de cette espèce d'un ordre quelconque. Nous allons finir ce memoire par montrer l'usage de l'introduction de nos nouvelles variables dans l'intégration des équations plus compliquées, pour lesquelles il sera bon de debuter par cette observation.

Ob-

Obſervation préliminaire.

M. *Euler* a demontré dans un mémoire qui roule ſur la même matière, que l'intégrale de l'équation

$$n\,V = x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right) \text{ eſt } V = y^n\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y},$$

où $\mathfrak{A}$ marque une fonction quelconque. Chès nous il y a

$$x = t\,u,\ y = u,\ \left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{dV}{dt}\right),$$

(par l'équation marquée par $\mathfrak{A}$) &

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{du}\right) - \frac{t}{u}\left(\frac{dV}{dt}\right),$$

(par l'équation marquée $\mathfrak{B}$); donc

$$x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right) = u\left(\frac{dV}{du}\right).$$

Ainſi l'intégrale de l'équation $n\,V = u\left(\frac{dV}{du}\right)$ ſera $V = u^n\,\mathfrak{A} : t$, $\mathfrak{A}$ étant une fonction de t.

Problème 1.

Trouver l'intégrale de cette équation différentielle:

$$A\,z + B\,P = 0.$$

Solution.

Soit $V = a\,z$ & nous aurons en vertu du lemme précédent $a\,z = u^n\,\mathfrak{A} : t$ & $n\,V = n\,a\,z$ &

$$u\left(\frac{dV}{du}\right) = a\,u\left(\frac{dz}{du}\right) = n\,v = n\,a\,z.$$

Or $u\left(\frac{dz}{du}\right) = P$, donc $n\,a\,z = a\,P$, ou bien $-n\,a\,z + a\,P = 0$, équation qui, comparée avec la propoſée $A\,z + B\,P = 0$, fournit $a = B$ & $n\,a = -A$, & partant $n = -\frac{A}{B} = \alpha$, d'où l'on tire en ſubſtituant, $B\,z = u^\alpha\,\mathfrak{A} : t$, & en diviſant par B, puiſque $\mathfrak{A}$ eſt une fonction arbitraire, on pourra mettre $z = u^\alpha\,\Phi : t$.

Pro-

Problème 2.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du second degré: $A z + B P + C Q = 0$.

Solution.

Mettons $a z + b P$ à la place de V du lemme, pour avoir $a z + b P = u^n \mathfrak{A} : t$, & puisque

$$n V = n a z + n b P \ \& \ u(\tfrac{dV}{du}) = a u (\tfrac{dz}{du}) + b u (\tfrac{dP}{du}),$$

on aura

$$n a z + n b P = a u (\tfrac{dz}{du}) + b u (\tfrac{dP}{du}),$$

ou bien, à cause de

$$u (\tfrac{dz}{du}) = P \ \& \ u (\tfrac{dP}{du}) = P + Q$$

(corollaire du Problème III.), on aura

$$- n a z + (a - (n - 1) b) P + b Q = 0.$$

Cette équation comparée avec la proposée donne

$$b = C; \ a = B + (n-1) C \ \& \ A = - n a = - n B - n(n-1) C$$

ou bien

$$n (n - 1) C + n B + A = 0,$$

d'où il faut déterminer la lettre n. Soyent les deux racines de cette équation quarrée $n = \alpha$, $n = \beta$, & les valeurs correspondantes à a & b: a' & b', en substituant dans l'équation $a z + b P = u^n \mathfrak{A} : t$ on aura

$$a z + b P = u^\alpha \mathfrak{A} : t;$$
$$a' z + b' P = u^\beta \mathfrak{B} : t;$$

d'où en éliminant P, à cause des fonctions $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ arbitraires, on tirera une expression pour z de la forme suivante: $z = u^\alpha \Phi : t + u^\beta \Phi' : t$.

Pro-

Problème 3.

Trouver l'intégrale de cette équation différentielle du troisième degré: $Az + BP + CQ + DR = 0$.

Solution.

Soit $V = az + bP + cQ = u^n \mathfrak{A} : t$, & nous aurons

$$naz + nbP + ncQ = au\left(\frac{dz}{du}\right) + bu\left(\frac{dP}{du}\right) + cu\left(\frac{dQ}{du}\right)$$

ou bien

$$-naz + (a-(n-1)b)P + (b-(n-2)c)Q + cR = 0,$$

équation dont la comparaiſon avec la propoſée donne

$$c = D;\ b = C + (n-2)D;\ a = B + (n-1)C + (n-1)(n-2)D\ \&$$

$$n(n-1)(n-2)D + n(n-1)C + nB + A = 0.$$

Soyent les racines de cette équation $n = \alpha$, $n = \beta$, $n = \gamma$, & les valeurs correſpondantes aux a, b, c, ſoyent a', b', c', pour $n = \beta$ & a'', b'', c'', pour $n = \gamma$, nous aurons:

$$az + bP + cQ = u^{\alpha} \mathfrak{A} : t$$
$$a'z + b'P + c'Q = u^{\beta} \mathfrak{B} : t$$
$$a''z + b''P + c''Q = u^{\gamma} \mathfrak{C} : t$$

d'où l'on tire aiſément, après avoir éliminé les P & Q, une expreſſion pour z de cette forme:

$$z = u^{\alpha}\Phi : t + u^{\beta}\Phi' : t + u^{\gamma}\Phi'' : t.$$

On voit aſſés de quelle façon on doit continuer ces opérations pour les équations des degrés ſupérieurs & même en général pour une équation indéfinie

$$Az + BP + CQ + DR + ES + \&c. = 0$$

On trouve au reste dans le mémoire cité de M. *Euler* des éclairciss mens touchant les cas, où les racines α, β, γ renferment une ou plusieures imaginaires, aussi bien que relativement à ces cas, où deux ou plusieures de ces racines deviennent égales entre-elles. Dans le premier cas l'intégrale ne pourroit etre réelle, dans l'autre cas elle ne seroit plus que particulière, puisqu'il n'y auroit pas autant de fonctions arbitraires que le nombre des intégrations exige. L'un & l'autre inconvénient peut être-redressé par les réductions exposées dans le mémoire cité.

PROBLE-

PROBLEMATIS CVIVSDAM PAPPI ALEXANDRINI CONSTRVCTIO.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema.

Si a terminis rectae cuiuscunque A B ad circuli cuiuscunque punctum quoduis P ducantur rectae A P et B P, circulum secantes in A et B, tum vero puncta F et G ita capiantur, vt sit Tab. I. Fig. 1.

$$AF = \frac{AP.Aa}{AB} \text{ et } BG = \frac{BP.Bb}{AB},$$

tum semper erit

$$FP.Ff = GP.Gg = AF.BG.$$

Demonstratio.

Repraesentetur positio rectae A B cum punctis F et G respectu centri illius circuli O, ac ponatur $AO = a$, $BO = b$, radius circuli $Om = On = r$ et $AB = c$; tum vero sit $FO = f$, $GO = g$, eritque $AP.Aa = An.Am$. Est vero $An = a + r$ et $Am = a - r$, ideoque

$$AP.Aa = aa - rr.$$

 Simili

Simili modo erit

$$BP . Bb = B\nu . B\mu = (b+r)(b-r),$$

siue

$$BP . Bb = bb - rr.$$

Eodem modo colligitur fore

$$FP . Ff = ff - rr \text{ et } GP . Gg = gg - rr.$$

Sumtis igitur

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c},$$

demonstrandum est fore

$$ff - rr = gg - rr = \frac{(aa - rr)(bb - rr)}{cc},$$

quem in finem sequens Lemma in subsidium erit vocandum.

Lemma.

Tab. I. Fig. 2. Si ex trianguli AOB puncto O ad lateris oppositi AB punctum datum F ducatur recta OF, erit

$$FO^2 = \frac{AO^2 . BF + BO^2 . AF}{AB} - AF . BF.$$

Demonstratio.

Demisso ex E in AB perpendiculo $O\Pi$ erit

$$AO^2 = A\Pi^2 + \Pi O^2 = (AF + F\Pi)^2 + FO^2 - F\Pi^2,$$

siue

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2 AF . F\Pi;$$

eodemque modo erit

$$BO^2 = BF^2 + FO^2 - 2 BF . F\Pi.$$

Si prior harum aequationum ducta in BF ad alteram in AF ductam addatur, prodibit

AO².

$$AO^2.BF+BO^2.AF=BF(AF^2+FO^2)+AF(BF^2+FO^2)$$

siue

$$AO^2.BF+BO^2.AF=FO^2.AB+BF.AF.AB,$$

vnde

$$FO^2=\frac{AO^2.BF+BO^2AF}{AB}-AF.BF. \quad Q.\ E.\ D.$$

Continuatio prioris demonstrationis.

Ponatur $AF=\frac{aa-rr}{c}=\alpha$, $BG=\frac{bb-rr}{c}=\beta$, Tab. I. Fig. 1.
eritque

$$aa=\alpha c+rr \text{ et } bb=\beta c+rr.$$

Iam ex Lemmate erit

$$cff=aa(c-\alpha)+bb\alpha-\alpha c(c-\alpha),$$

et si loco aa et bb substituantur valores modo dati, habebitur

$$cff=crr+\alpha\beta c, \text{ siue } ff-rr=\alpha\beta.$$

Cum porro sit

$$GO^2=\frac{BO^2.AF+AO^2.BF}{AB}-AF.BF,$$

eodem modo demonstratur fore

$$cgg=crr+\alpha\beta c, \text{ siue } gg-rr=\alpha\beta$$

hincque

$$ff-rr=gg-rr=\frac{(aa-rr)(bb-rr)}{cc}. \quad Q.\ E.\ D.$$

Hinc sequens formari potest

Theorema.

Si ex trianguli ABC puncto O ad basin AB duae ducantur rectae inter se aequales OF et OG, erit $AO^2-AB.AF=BO^2-AB.BG.$ Fig. 2.

Demon-

Demonstratio.

Demisso ex vertice O perpendiculo $O\Pi$, erit

$$F\Pi = G\Pi = \tfrac{1}{2} FG.$$

Cum igitur sit

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2\,AF.F\Pi, \text{ siue}$$

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + AF.FG, \text{ erit}$$

$$AO^2 = FO^2 + AF.AG.$$

Simili modo erit $BO^2 = FO^2 + BF.BG$. Ex priore fit

$$FO^2 = AO^2 - AF.AG, \text{ vnde}$$

$$FO^2 - AF.BG = AO^2 - AB.AF.$$

Ex altera fit

$$FO^2 = BO^2 - BF.BG, \text{ consequenter}$$

$$FO^2 - AF.BG = BO^2 - AB.BG,$$

vnde sequitur

$$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG. \quad \text{Q. E. D.}$$

Corollarium.

Quotius igitur fuerit

$$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG = \Delta,$$

binae rectae FO et GO erunt inter se aequales, simulque erit $FO^2 - AF.BG = \Delta$. Quod si ergo capiatur

$$AF = \frac{AO^2 - \Delta}{AB} \text{ et } BG = \frac{BO^2 - \Delta}{AB}$$

erit $FO = GO$. At in praecedente Theoremate erat

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c}, \text{ vnde}$$

$$\Delta = rr,\ AF = \frac{AO^2 - rr}{AB},\ BG = \frac{BO^2 - rr}{AB} \text{ et}$$

$$FO^2 - rr = AF.BG.$$

Proble-

Problema.

Circulo dato, centro O descripto, triangulum $a\,b\,c$ inscribere, cuius tria latera $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, producta, per data tria puncta C, B, A, transeant. Tab. I. Fig. 3.

Constructio.

Sint A, B, C, tria puncta data, quorum distantiae a centro circuli O sint $A\,O = a$, $B\,O = b$, $C\,O = c$, radio circuli existente $= 1$. Iam ex puncto B capiatur interuallum $B\,F = \frac{b\,b - 1}{A\,B}$ eritque $F\,O^2 - 1 = \frac{B\,F\,(a\,a - 1)}{A\,B}$. Tum iuncta recta F C, super ea capiatur interuallum

$$F\,K = \frac{F\,O^2 - 1}{F\,C} = \frac{B\,F\,(a\,a - 1)}{A\,B.\,F\,C},\text{ eritque}$$

$$K\,O^2 - 1 = \frac{F\,K\,(c\,c - 1)}{F\,C}.$$

Iam ex centro O talis ducatur radius $O\,m$, vt sit cosinus anguli $K\,O\,m = \frac{\text{cof. } B\,F\,C}{K\,O}$. Tum bisecetur angulus B F C recta F S, cui ex puncto m parallela agatur recta $m\,b$, eritque b unus angulorum trianguli quaesiti, ad quem si ex puncto A ducatur recta A B, ea producta circulum in C secabit. Ex hoc puncto C ad B ducatur recta C B circulum secans in a; tum vero latus $b\,a$ productum per tertium punctum datum C transibit, eritque $a\,b\,c$ triangulum quaesitum.

Corollarium 1.

Sint duo punctorum datorum A et C infinite distantia in rectis A B A, C B C se mutuo in B decussantibus. Ex B ducatur recta $B\,c\,a$, resecans a circulo arcum $c\,a$, cui in peripheria insistant anguli, angulo C B A Fig. 4.

aequa-

aequales, tum ductis ex a rectis $a\,b$ ipsi C B C, et $b\,c$ ipsi A B A parallelis, erit $a\,b\,c$ triangulum quaesitum.

Corollarium 2.

Tab. I. Fig. 5. Cadant omnia tria puncta data ad distantias infinitas in rectis O A, O B, O C; tum rectae O A parallela agatur recta $b\,c$ ad distantiam a centro O X = cos. B O C; tum ductis rectis $b\,a$ ipsi O C et $c\,a$ ipsi O B parallelis habebitur triangulum quaesitum.

Scholion 1.

Ceterum hic probe notandum est, constructionem supra datam duas solutiones suppeditare, prout angulus K O m dextrorsum siue sinistrorsum accipitur. Praeterea vero, cum tria puncta A, B, C, inter se sint permutabilia, sex diuersis modis constructio hic data institui potest, qui ergo omnes easdem binas solutiones praebere debent, cuius rei tamen nulla ratio patet.

Scholion 2.

Fig. 6. Hoc Problema etiam pro sphaera resolui potest, ita vt circulo minori in sphaera descripto triangulum sphaericum $a\,b\,c$ inscribi debeat, ita comparatum, vt eius latera producta $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, transeant per data tria puncta in sphaerae superficie, C, B, A. Concipiatur enim planum, sphaeram in centro circuli O tangens, super quo triangulum planum modo praescripto iam sit constructum; eiusque translatio ad superficiem sphaerae erit facillima, cum omnes anguli circa centrum in superficie tam plani quam sphaerae sint iidem, distantiae vero punctorum datorum A, B, C et angulorum trianguli a, b, c a centro O in tangentes abeant.

SOLV-

SOLVTIO. PROBLEMATIS GEOMETRICI PAPPI ALEXANDRINI.

Auctore
NICOLAO FUSS.

Problematis geometrici, cuius constructionem Ill. *Eulerus* in dissertatione praecedente tradidit, casus simplicior occurrit in *Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini Libro VII*, vbi Problema ita proponitur: " Circulo A B C, " positione dato; et datis tribus punctis D, E, F, in li- " nea recta, inflectere D A E, et facere B C in directum " ipsi C F ". Huius Problematis constructio, ipsius *Pappi* eiusue Commentatoris *Commendini* verbis expressa, ita se habet: " Sit circulus A B C, data autem in recta linea " tria puncta D E F. Et quadrato eius lineae, quae a " puncto E ducta circulum contingit aequale ponatur rect- " angulum D E H, et datis duobus punctis H F, ab ipsis " in circulum inflectatur H C F, ita vt B G parallela sit " sit H F, iunctaque E C ad A producatur. Dico rectam Tab. II. Fig. 1.

" lineam esse quae per A E D transit. Quoniam vnumquodque rectangulorum A E C, D E H aequale est quadrato lineae a puncto E cotingentis, erit rectangulum A E C aequale rectangulo D E H. In circulo igitur sunt puncta D H C A. Et quoniam angulus B G C angulo C H F est aequalis, angulus autem B G C aequalis angulo B A C in circulo, erit angulus B A C aequalis ipsi C H E: et sunt in circulo A C H D puncta, ergo A B in eadem recta linea constituitur in qua est B C."

Problema hoc Solutioni prioris latius patentis ansam praebuit, cuius constructionem antequam aggrediamur, *Pappi* casum simpliciorem more nostro construxisse iuuabit, quem in finem sequens Problema praemittamus.

Problema 1.

Tab. II. Fig. 2. *Dato circulo, centro* O, *radio* O M *descripto, datisque tribus punctis* D, E, F, *in directum iacentibus, circulo triangulum* A B C *inscribere, cuius latera, producta si opus est, per terna illa puncta transeant.*

Constructio.

Iungantur puncta D, E, F, recta D F, et cum data sint interualla D E, E O, vna cum radio circuli M O, super recta D E capiatur interuallum $EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE}$, ductaque recta H O super eadem recta D E sumatur interuallum $HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}$. Iam ex puncto K ducatur recta K G circulum tangens in puncto G, et ex G agatur

tur rectae D F parallela G B; tum recta D B producta dabit punctum A, ex quo si ducatur recta A E circulum in C secans, recta B C producta per punctum F transibit, eritque A B C triangulum quaesitum.

Scholion.

Veritas huius constructionis, ingeniosissimae *Pappi* Solutioni similis, ex demonstratione constructionis Problematis sequentis generalioris patebit, vbi tria puncta data D, E, F, non in directum, sed vtcunque sita assumuntur, quippe ad quem casum praecedentis constructionis momenta etiam applicari poterunt.

Problema 2.

Dato circulo, centro O, *radio* O M *descripto, datisque tribus punctis* D, E, F, *vtcunque sitis, inscribere circulo triangulum* A B C, *ita comparatum, vt eius latera, si opus est producta, per data tria puncta transeant.* Tab. II. Fig. 3.

Constructio.

Iungantur puncta D, E, O, rectis D O, E O, quippe quae datae sunt, vna cum radio circuli M O. Capiatur in recta D E interuallum $EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE}$. Ex H ad tertium punctum inter datos F ducatur recta H F, super qua capiatur interuallum $HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}$. Super eadem recta H F sumatur interuallum H R = M O, et demisso ex R in D E perpendiculo R S, centro O, ra-

 dio

dio HS describatur circulus dato concentricus. Quo facto ex K agatur recta KG, circulum minorum tangens in T, maiorem vero secans in G et I. Tum ex G agatur recta GB parallela rectae DE, ductisque rectis DB et FB, circulum, priori producta, secantibus in A et C, recta AC producta per punctum E transibit, eritque ABC triangulum quaesitum.

Demonstratio.

Tab. III. Fig. 1. Sit ABC triangulum quaesitum, cuius terna latera AB, AC, BC, producta, per data tria puncta D, E, F transeant. Ex B rectae DE paralella agatur recta BG, atque ex G per punctum C ducatur recta GH, rectae DE occurrens in H. Ducta porro recta HF, ei normaliter agatur BI, atque ex G per I ducatur GK, rectae HF occurrens in K; et nunc demonstrandum est fore

$$1^{\circ}).\ EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE};\quad 2^{\circ}).\ HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}.$$

Primo erit angulus EHC = BGC, tum vero BGC = BAE, quia eidem arcui insistunt. Triangula igitur ECH et EDA, ob angulos EHC et EAD aequales, et communem angulum ad E, erunt similia, vnde colligitur fore

$$EC : EH = ED : EA,$$

consequenter erit

$$EC.\,EA = ED.\,EH.$$

Ducta autem ex E per centrum O recta Em, circulum secans in M et m, erit

$$EC.\,EA = EM.\,Em = (EO - MO)(EO + MO),$$

ergo

ergo

$$EC.EA = ED.EH = EO^2 - MO^2,$$

ideoque

$$EH = \frac{EO^2 - MO^2}{DE}.$$

Quod erat vnum.

Porro erunt anguli H F C et I B C aequales; I B C vero aequalis eſt angulo eidem arcui inſiſtenti I G C. Triangula igitur H F C et H G K, angulum communem ad H angulosque H F C, H G K aequales habentia, ſunt ſimilia; conſequenter erit

$$HC : HF = HK : HG,$$

vnde fit

$$HF.HK = HC.HG.$$

At ducta ex H per centrum O recta $HM'Om'$ fiet

$$HC.HG = HM'.Hm' = (HO - MO)(HO + MO)$$

ideoque

$$HF.HK = HO^2 - MO^2,$$

vnde prodit

$$HK = \frac{HO^2 - MO^2}{HF}.$$

Quod erat alterum.

Hic quidem ſuppoſuimus eſſe vi noſtrae Conſtructionis rectam B I rectae H F parallelam. Hoc reuera fieri ſequenti modo oſtenditur: Cum in conſtructione ſumſerimus interuallum H R radio circuli dati O M aequale, ductaque normali R S circulus minor deſcriptus ſit radio O T = H S, erit T I = R S, ideoque angulus

$$EHR = TOI = GBI,$$

 con-

consequenter, quoniam recta B G parallela est rectae D E, per constructionem, recta B I etiam ipsi H F parallela sit necesse est. Q. E. D.

Corollarium 1.

Si punctum E intra circulum cadat, ita vt habeatur $EO < MO$, erit $\frac{EO^2 - MO^2}{DE}$ quantitas negatiua; vnde patet, hoc casu interuallum E H, quod in constructione a puncto E versus D erat sumtum, in sensum contrarium super recta D E producta sumi debere.

Corollarium 2.

Si punctum H intra circulum cadat, id quod euenire potest, si vnum alterumue punctorum D & E in circulo fuerit situm, vel etiam, si recta D E tantum circulum secet et portio eius intra circulum cadat; tum, ob $HO < MO$, ideoque quantitatem $\frac{HO^2 - MO^2}{FH}$ negatiuam, punctum K, quod in constructione nostra a H versus F erat sumtum, nunc in contrariam plagam cadit & interuallum H K super recta F H producta sumendum erit.

Scholion 1.

Tab III. Fig. 2. Semper autem duas inflectere licet rectas K T, quae circulum minorem tangant, altera in T, quemadmodum supra est factum, altera ex parte opposita in T'; vnde duo triangula nascuntur plane inter se diuersa, quorum terna latera per data tria puncta transibunt. Determinato enim puncto K, vti supra docuimus, & descripto, secundum constructionis praecepta, circulo minore concentrico, primo ex K agatur

agatur recta K G, minorem circulum tangens in T, maiorem vero secans in I & G; tum ex superiore intersectionis puncto G rectae D E parallela agatur G B, ductisque B A versus D, B C versus F, A C punctum E versus, habebitur triangulum quaesitum prius. Iam iterum ex K agatur recta K I′ circulum minorem ex altera parte tangens in T′, maiorem vero secans in G′ et I′; nunc vero ex inferiore intersectionis puncto G′ rectae D E vel G B parallela agatur G′ B′, & recta D B′ dabit punctum A′, recta E A′, producta, dabit punctum C′, & C′ B′ producta per tertium punctum F transibit, eritque A′ C′ B′ alterum triangulum quaesito satisfaciens et a priori plane diuersum.

Scholion 2.

Eodem quo hic puncta D et E tractauimus modo operationes etiam respectu punctorum D et F, vel E et F institui poterunt; vnde tres constructiones oriuntur, quarum quaelibet duas praebet Solutiones. Tum vero, quemadmodum hic punctum E pro termino a quo in determinatione puncti H fuerat assumtum, ita etiam punctum D pro hoc termino usurpari poterit. Eodem modo res se habet respectu punctorum E et F, et D et F, quorum quodlibet pro termino a quo in determinatione puncti H sumi potest. Verum omnes duodecim constructiones hoc modo oriundae non nisi binas illas Solutiones, de quibus supra locuti sumus, producunt, quemadmodum tentanti vel ex constructione pro quouis casu instituta, vel ex analytica Problematis nostri tractatione patebit. Problema enim est planum, eiusque Solutio analytica ad aequationem secun-

secundi gradus perducit, ex qua, duas tantum Solutiones locum habere, manifestum est.

Geometricam huius veritatis demonstrationem completam dedit Cel. *Castillon* in Actorum Academiae Regiae Borussicae Tomo pro Anno 1776.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV LIBERO
PLVRIVM CORPORVM FILIS COLLIGATORVM SVPER PLANO HORIZONTALI.

Auctore

L. EVLERO.

Problema 1.

§. 1.

Si duo corpora A *et* B, *filo* $AB = a$ *colligata, super plano horizontali vtcunque proiiciantur, eorum motum determinare.* Tab. IV. Fig. 1.

Solutio.

Elapso tempore t habeant corpora situm in figura repraesentatum, et pro vtroque ponantur coordinatae

$$OP = x,\ PA = y \text{ et } OQ = x' \text{ et } QB = y';$$

porro ponatur angulus $BAp = p$, eritque

$$Ap = a \operatorname{cos.} p \text{ et } Bp = a \operatorname{sin.} p,$$

vnde fit

$$x' = x + a \operatorname{cos.} p \text{ et } y' = y + a \operatorname{sin.} p.$$

Iam ſit tenſio fili $AB = P$, qua corpus A ſecundum directiones ſuarum coordinatarum protrahitur viribus $P \operatorname{coſ}. p$ et $P \operatorname{ſin}. p$; corpus vero B iisdem viribus retrahitur; vnde principia motus ſequentes praebent aequationes:

I. $\frac{A\,d\,d\,x}{2\,g\,d\,t^2} = P \operatorname{coſ}. p$;

II. $\frac{A\,d\,d\,y}{2\,g\,d\,t^2} = P \operatorname{ſin}. p$;

III. $\frac{B\,d\,d\,x'}{2\,g\,d\,t^2} = -P \operatorname{coſ}. p$;

IV. $\frac{B\,d\,d\,y'}{2\,g\,d\,t^2} = -P \operatorname{ſin}. p$.

Hinc iam ſtatim prima ac tertia additae dant

$$A\,d\,d\,x + B\,d\,d\,x' = 0$$

et ſecunda et quarta dat

$$A\,d\,d\,y + B\,d\,d\,y' = 0;$$

ex quibus integratis colligitur

$$A\,x + B\,x' = \alpha\,t + \beta;$$
$$A\,y + B\,y' = \gamma\,t + \delta.$$

Hinc cognoſcimus, ambo corpora ita moueri, vt eorum commune centrum grauitatis in linea recta vniformiter progrediatur. Quod ſi nunc toto ſpatio aequalem motum in directionem contrariam mente imprimamus, centrum grauitatis in quiete manebit, quod ergo ponamus eſſe in ipſo puncto O, ac pro hoc caſu motum corporum inueſtigemus, quo inuento, centro grauitatis iterum motus vniformis rectilineus, quem dempſimus, imprimatur, et prodibit verus motus amborum corporum, hocque modo obtinebimus vt fiat:

$$A\,x + B\,x' = 0 \text{ et } A\,y + B\,y' = 0.$$

Cum igitur ſit

$$x' = x + a \operatorname{coſ}. p \text{ et } y' = y + a \operatorname{ſin}. p;$$

hinc

hinc fiet

$$(A+B)x+Ba\,\text{cof.}\,p=0 \text{ et } (A+B)y+Ba\,\text{fin.}\,p$$

vnde porro colligitur

$$(A+B)^2(xx+yy)=BBaa, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(xx+yy)}=\frac{Ba}{A+B},$$

vbi $\sqrt{(xx+yy)}$ denotat diſtantiam corporis A a centro O, quae ergo manet conſtans, perinde ac diſtantia alterius corporis B ab O. Sit igitur A O B ſitus amborum corporum poſt tempus $=t$, eritque A O B linea recta $=a$, ac diſtantiae Tab. IV. Fig. 2.

$$AO=\frac{Ba}{A+B} \text{ et } BO=\frac{Aa}{A+B}.$$

Supereſt ergo tantum vt angulus A O P vel B O Q, quem filum A B cum axe conſtituit, definiatur; hic vero angulus cum ſit p, ex aequationibus prima et ſecunda definiri poteſt, vnde fit:

$$A\,ddx\,\text{fin.}\,p-A\,ddy\,\text{cof.}\,p=0, \text{ ſiue}$$

$$ddx\,\text{fin.}\,p-ddy\,\text{cof.}\,p=0.$$

Quare, cum ex ſupra inuentis ſit

$$x=-\frac{Ba\,\text{cof.}\,p}{A+B} \text{ et } y=-\frac{Ba\,\text{fin.}\,p}{A+B},$$

his valoribus ſubſtitutis fiet

$$-\text{fin.}\,p.\,dd.\,\text{cof.}\,p+\text{cof.}\,p.\,dd.\,\text{fin.}\,p=0.$$

Eſt vero:

$$dd.\,\text{cof.}\,p=-ddp\,\text{fin.}\,p-dp^2\,\text{cof.}\,p \text{ et}$$

$$dd.\,\text{fin.}\,p=ddp\,\text{cof.}\,p-dp^2\,\text{fin.}\,p,$$

vnde fit $ddp=0$, ſicque adipiſcimur $p=\alpha t+\beta$; vnde diſcimus, celeritatem angularem fili A B, quae eſt $\frac{dp}{dt}=\alpha$, eſſe conſtantem, quocirca ſolutio noſtri problematis ita ſe habet: Quomodocunque noſtra corpora filo A B colligata

O 3 pro-

proiiciantur, eorum motus ita erit comparatus, vt eorum commune centrum grauitatis g vniformiter in directum progrediatur, interea vero ambo corpora circa hoc ipsum punctum g vniformiter gyrentur, prouti scilicet motus primo impressus postulat.

Problema 2.

Tab. IV. Fig. 3. §. 2. *Si tria corpora* A, B, C, *filis* $AB = a$ *et* $BC = b$ *connexa, vtcunque super plano horizontali proiiciantur, eorum motum inuestigare.*

Solutio.

Ponantur pro singulis corporibus coordinatae

$OP = x$, $PA = y$; $OQ = x'$, $QB = y'$;

$OR = x''$, $RC = y''$;

tum vero inclinatio filorum, scilicet anguli $BAp = p$ et $CBq = q$, hincque statim fit

$$x' = x + a \operatorname{cof.} p; \quad x'' = x + a \operatorname{cof.} p + b \operatorname{cof.} q$$
$$y' = y + a \operatorname{fin.} p \quad y'' = y + a \operatorname{fin.} p + b \operatorname{fin.} q.$$

Porro denotet P tensionem fili AB et Q tensionem fili BC, ex quibus oriuntur sequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{A\,ddx}{2g\,dt^2} = P \operatorname{cof.} p;$$
$$\text{II. } \frac{A\,ddy}{2g\,dt^2} = P \operatorname{fin.} p;$$
$$\text{III. } \frac{B\,ddx'}{2g\,dt^2} = -P \operatorname{cof.} p + Q \operatorname{cof.} q;$$
$$\text{IV. } \frac{B\,ddy'}{2g\,dt^2} = -P \operatorname{fin.} p + Q \operatorname{fin.} q;$$
$$\text{V. } \frac{C\,ddx''}{2g\,dt^2} = -Q \operatorname{cof.} q;$$
$$\text{VI. } \frac{C\,ddy''}{2g\,dt^2} = -Q \operatorname{fin.} q;$$

qua-

quarum prima, tertia et quinta additae manifesto praebent

$$A\,ddx + B\,ddx' + C\,ddx'' = 0;$$

similique modo II. IV et VI additae praebent

$$A\,ddy + B\,ddy' + C\,ddy'' = 0;$$

quibus vt ante motus aequabilis rectilineus centri grauitatis communis indicabitur, qui motus cum iam vt cognitus spectari possit, centrum grauitatis quasi in O fixum iam concipiamus, hincque habebimus has aequationes:

$$A\,x + B\,x' + C\,x'' = 0 \text{ et } A\,y + B\,y' + C\,y'' = 0,$$

hincque porro colligimus sequentes aequationes:

$$(A+B+C)x + (B+C)a\,\text{cos}.\,p + C\,b\,\text{cos}.\,q = 0 \text{ et}$$
$$(A+B+C)y + (B+C)a\,\text{sin}.\,p + C\,b\,\text{sin}.\,q = 0$$

vnde ipsae coordinatae sequenti modo exprimentur:

$$x = \frac{-(B+C)a\,\text{cos}.\,p - C\,b\,\text{cos}.\,q}{A+B+C};\quad y = \frac{-(B+C)a\,\text{sin}.\,p - C\,b\,\text{sin}.\,q}{A+B+C}$$
$$x' = \frac{A\,a\,\text{cos}.\,p - C\,b\,\text{cos}.\,q}{A+B+C};\quad y' = \frac{A\,a\,\text{sin}.\,p - C\,b\,\text{sin}.\,q}{A+B+C}$$
$$x'' = \frac{A\,a\,\text{cos}.\,p + (A+B)\,b\,\text{cos}.\,q}{A+B+C};\quad y'' = \frac{A\,a\,\text{sin}.\,p + (A+B)\,b\,\text{sin}.\,q}{A+B+C}$$

Nunc igitur superest vt bini anguli p et q definiantur. Hunc in finem ex aequationum I et II eliminemus tensionem P, vnde fit $ddx\,\text{sin}.\,p - ddy\,\text{cos}.\,p = 0$; similique modo ex V et VI, eliminando tensionem Q, habebimus

$$ddx''\,\text{sin}.\,q - ddy''\,\text{cos}.\,q = 0;$$

quarum prior, restitutis valoribus, abit in sequentem:

$$\left.\begin{aligned} &+(B+C)a(\text{cos}.\,p.\,dd.\,\text{sin}.\,p - \text{sin}.\,p.\,dd.\,\text{cos}.\,p)\\ &+C\,b\,(\text{cos}.\,p.\,dd.\,\text{sin}.\,q - \text{sin}.\,p.\,dd.\,\text{cos}.\,q)\end{aligned}\right\} = 0$$

posterior vero eodem modo tractata praebet

+ (A-

$$\left.\begin{array}{l}+(A+B)\,b\,(\sin.\,q.\,dd.\cos.\,q-\cos.\,q.\,dd.\sin.\,q)\\ +A\,a\,(\sin.\,q.\,dd.\cos.\,p-\cos.\,q.\,dd.\sin.\,p)\end{array}\right\}=0.$$

Ad has aequationes resoluendas notemus esse:

$$\cos.\,p.\,dd.\sin.\,p-\sin.\,p.\,dd.\cos.\,p=ddp$$

$$\cos.\,p.\,dd.\sin.\,q-\sin.\,p.\,dd.\cos.\,q=ddq\cos.\,(q-p)$$
$$-dq^2\sin.\,(q-p)$$

$$\sin.\,q.\,dd.\cos.\,q-\cos.\,q.\,dd.\sin.\,q=-ddq$$

$$\sin.\,q\,dd.\cos.\,p-\cos.\,q.\,dd.\sin.\,p=-ddp\cos.\,(q-p)$$
$$-dp^2\sin.\,(q-p).$$

Hi ergo valores in superioribus aequationibus substituti praebent istas:

$$(B+C)\,a\,ddp+C\,b(ddq\cos.\,(q-p)-dq^2\sin.\,(q-p))=0$$

et

$$-(A+B)\,b\,ddq-A\,a\,(ddp\cos.\,(q-p)+dp^2\sin\,(q-p))=0.$$

Ponamus

$$\frac{(B+C)\,a}{C\,b}=m \text{ et } \frac{(A+B)\,b}{A\,a}=n,$$

vt habeamus has duas aequationes:

$$1^\circ.\ m\,ddp+ddq\cos.\,(q-p)-dq^2\sin.\,(q-p)=0$$

$$2^\circ.\ n\,ddq+ddp\cos.\,(q-p)+dp^2\sin.\,(q-p)=0$$

ex quibus ambos angulos incognitos p et q elicere oportet, id quod sequenti modo succedet.

Integrentur hae duae aequationes, quod fieri licet more solito, ac reperietur:

$$m\,dp+dq\cos.\,(q-p)-\int dp\,dq\sin.\,(q-p)=\text{const.}$$

$$n\,dq+dp\cos.\,(q-p)+\int dp\,dq\sin.\,(q-p)=\text{const.}$$

vnde patet, summam harum formularum a formulis integralibus fore liberam, ita vt hinc adipiscamur hanc aequaquationem integratam:

$$3^\circ.\ m\,dp + n\,dq + (dp + dq)\,\mathrm{cof.}\,(q-p) = \tfrac{1}{2}\alpha\,dt.$$

Deinde vero ista combinatio: $1^a.\ dp + 2^a.\ dq$ fit integrabilis et praebet hanc aequationem:

$$\tfrac{1}{2} m\,dp^2 + \tfrac{1}{2} n\,dq^2 + dp\,dq\,\mathrm{cof.}\,(q-p) = \tfrac{1}{8}\beta\,dt^2,$$

ita vt nunc loco binarum aequationum differentialium secundi gradus habeamus sequentes duas aequationes tantum primi gradus:

$$\text{I.}\ 2m\,dp + 2n\,dq + 2(dp + dq)\,\mathrm{cof.}\,(q-p) = \alpha\,dt;$$

$$\text{II.}\ 4m\,dp^2 + 4n\,dq^2 + 4\,dp\,dq\,\mathrm{cof.}\,(q-p) = \beta\,dt^2;$$

quarum tamen vlterior resolutio non parum dexteritatis postulat. Sequenti autem modo negotium expediri poterit.

Faciamus scilicet sequentes substitutiones: Primo fiat $q - p = \Phi$, vt sit $dq - dp = d\Phi$; ac ponamus porro

$$dp = \left(\tfrac{u-1}{2}\right) d\Phi \text{ et } dq = \left(\tfrac{u+1}{2}\right) d\Phi;$$

denique vero etiam ponatur $dt = \theta\,d\Phi$, vt omnia elementa ad idem differentiale $d\Phi$ reducamus, hocque modo nostrae aequationes induent formas sequentes:

$$\text{I.}\ (m+n)\,u + n - m + 2\,u\,\mathrm{cof.}\,\Phi = \alpha\,\theta$$

$$\text{II.}\ (m+n)\,uu + 2(n-m)\,u + m + n + 2(uu-1)\,\mathrm{cof.}\,\Phi = \beta\,\theta\,\theta$$

ex quarum priore colligitur $u = \frac{\alpha\theta + m - n}{m + n + 2\,\mathrm{cof.}\,\Phi}$.

Iam cum aequatio altera sit

$$uu(m+n+2\,\mathrm{cof.}\,\Phi) + 2u(n-m) + m + n - 2\,\mathrm{cof.}\,\Phi = \beta\,\theta\,\theta,$$

in hac loco u valor modo inuentus substituatur et prodibit

$$\beta\,\theta^2 = \frac{\alpha\alpha\theta\theta - 2(n-m)\alpha\theta + (n-m)^2}{m+n+2\cos.\Phi} + \frac{2(n-m)\alpha\theta - 2(n-m)^2}{m+n+2\cos.\Phi}$$
$$+ m + n - 2\cos.\Phi\,,$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$\alpha\alpha\theta\theta + 4mn - 4\cos.\Phi^2 = \beta\theta\theta(m+n+2\cos.\Phi),$$

ex qua aequatione commode elicitur

$$\theta\theta = \frac{4(mn - \cos.\Phi^2)}{\beta(m+n+2\cos.\Phi) - \alpha\alpha}, \text{ ita vt fit}$$
$$\theta = \frac{2\sqrt{(mn - \cos.\Phi^2)}}{\sqrt{(\beta(m+n+2\cos.\Phi) - \alpha\alpha)}}.$$

Quia ergo posuimus $dt = \theta\, d\Phi$, erit

$$dt = \frac{2\,d\Phi\sqrt{(mn - \cos.\Phi^2)}}{\sqrt{(\beta(m+n+2\cos.\Phi) - \alpha\alpha)}}.$$

Sicque iam habemus relationem inter tempus t et angulum Φ, ita vt inde ad quoduis tempus angulus Φ definiri possit.

Quodsi iam loco θ hunc valorem substituamus, nanciscemur pro u istam formulam:

$$u = \frac{(n-m)}{m+n+2\cos.\Phi} + \frac{2\alpha\sqrt{(mn - \cos.\Phi^2)}}{m+n+2\cos.\Phi\sqrt{(\beta(m+n+2\cos.\Phi) - \alpha\alpha)}},$$

ita vt hic u per solum angulum Φ definiatur. Hinc ergo quaeratur integrale $\int u\, d\Phi$, quo inuento innotescent ambo anguli p et q: erit enim

$$p = \tfrac{1}{2}\int u\, d\Phi - \tfrac{1}{2}\Phi \text{ et } q = \tfrac{1}{2}\int u\, d\Phi + \tfrac{1}{2}\Phi,$$

vbi integrale $\int u\, d\Phi$ nouam quantitatem constantem includit, quemadmodum etiam $t \int \theta\, d\Phi$ constantem arbitrariam complectitur, ita vt cum literis α et β omnino quatuor constantes arbitrariae in nostra solutione contineantur, prorsus vt integratio completa postulat. Statim enim deducti sumus ad sex aequationes differentiales, quarum duae autem inseruiebant vtrique tensioni P et Q definiendis, ita vt tantum quatuor ipsam solutionem contineant;

at

at vero duae aequationes integrales initio ſtatim inuentae

$$A x + B x' + C x'' = \mathfrak{A} t + \mathfrak{B} \text{ et}$$

$$A y + B y' + C y'' = \mathfrak{C} t + \mathfrak{D}$$

iam continebant quatuor conſtantes arbitrarias, etiamſi eas nihilo aequales aſſumſimus, vt commune centrum grauitatis ad quietem redigeremus; vnde patet, per quatuor illas conſtantes nunc introductas ſolutionem completam reddi.

Quod autem ad iſtas conſtantes attinet, manifeſtum eſt conſtantem β neque euaneſcentem neque negatiuam accipi poſſe, quia aliquoquin formula pro tempore fieret imaginaria; quin etiam ſemper eſſe debet

$$\beta > \frac{\alpha \alpha}{m + n + 2 \operatorname{cof.} \Phi};$$

ac ſi angulus Φ vsque ad 180° augeri poſſit, tum eſſe oportet $\beta > \frac{\alpha \alpha}{m + n - 1}$. Circa quantitates autem m et n notaſſe iuuabit eſſe $m n = \frac{(A + B)(B + C)}{A C}$, quae quantitas ſemper vnitate maior eſt, niſi fuerit $B = 0$, qui autem caſus ad problema prius reuolueretur; tum vero erit

$$m + n = \frac{a a A (B + C) + b b C (A + B)}{A C a b},$$

quae quantitas in infinitum augeri poteſt, ſi fiat vel $a = 0$ vel $b = 0$, minima autem euadet caſu quo $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{C (A + B)}{A (B + C)}}$, tum autem eius valor minimus erit $= 2 \sqrt{\frac{(A + B)(B + C)}{A C}}$, qui ergo ſemper binario eſt maior.

At ſi ſumere velimus tam $\alpha = 0$ quam $\beta = 0$, peculiarem hic caſus euolutionem poſtulat, cum inde ſit $4 m n - 4 \operatorname{cof.} \Phi^2 = 0$; inde enim fit $m n = \operatorname{cof.} \Phi^2$, quod autem ob $mn > 1$ nunquam fieri poteſt, niſi ſit $B = 0$, hoc eſt niſi corpus B abſit, quo caſu fieret $\Phi = 0$ vel $\Phi = 180^\circ$, hincque $u = \frac{m - n}{m + n \pm 2}$; foret autem $m + n > 2$. Hoc igitur caſu nullus plane motus ſequeretur, ſed omnia tria corpora in ſtatu quietis perpetuo perſeuerarent.

Poſtquam autem motum trium corporum A, B, C feliciter determinare nobis contigit, operae quoque pretium erit tenſionem vtriusque fili inueſtigare, quam ex ipſis primis aequationibus elici oportet, vbi

$$\text{I. } \operatorname{coſ.} p + \text{II. } \operatorname{ſin.} p \text{ dat } P = \frac{A(ddx \operatorname{coſ.} p + ddy \operatorname{ſin.} p)}{2g\,dt^2}.$$

Cum igitur ſit

$$x = \frac{-(B+C)a \operatorname{coſ.} p - Cb \operatorname{coſ.} q}{A + B + C} \text{ et}$$

$$y = \frac{-(B+C)a \operatorname{ſin.} p - Cb \operatorname{ſin.} q}{A + B + C}$$

erit pro tenſione

$$\frac{P}{A} = \frac{-a(B+C)(\operatorname{coſ.} p.\, dd \operatorname{coſ.} p + \operatorname{ſin.} p\, dd.\operatorname{ſin.} p) - bC(\operatorname{coſ.} q.\, dd.\operatorname{coſ.} p + \operatorname{ſin.} q\, dd.\operatorname{ſin.} p)}{(A + B + C)\, 2g\,dt^2}$$

quae aequatio euoluta praebet

$$\frac{P}{A} = \frac{a(B+C)dp^2 - bC(ddp \operatorname{ſin.}(q-p) - dp^2 \operatorname{coſ.}(q-p))}{(A + B + C)\, 2g\,dt^2}.$$

Statuamus vt ſupra breuitatis gratia $\frac{(B+C)c}{Cb} = m$, fietque

$$\frac{P}{ACb} = \frac{m\,dp^2 - ddp \operatorname{ſin.}(q-p) + dp^2 \operatorname{coſ.}(q-p)}{(A + B + C)\, 2g\,dt^2}.$$

Vtamur hic porro ſuperioribus valoribus introductis ſcil. $q - p = \Phi$, $dp = \frac{1}{2}(u - 1)d\Phi$, $dq = \frac{1}{2}(u + 1)d\Phi$, et $dt = \theta\, d\Phi$, eritque $\frac{dp}{dt} = \frac{u-1}{2\theta}$, hinc $\frac{ddp}{dt} = \frac{1}{2}d.\frac{u-1}{\theta}$ et

$$\frac{ddp}{dt^2} = \frac{1}{2\theta\, d\Phi}d.\frac{u-1}{\theta},$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus:

P

$$\frac{P}{ACb} = \frac{m(u-1)^2 - \frac{2\theta}{d\Phi} d.\frac{u-1}{\theta} \text{fin.}\,\Phi + (u-1)^2 \text{cof.}\,\Phi}{8\,g\,\theta\,\theta\,(A+B+C)}$$

vnde tenſio quaeſita erit:

$$P = \frac{b\,A\,C}{8\,g\,(A+B+C)\theta\,\theta}\left(m(u-1)^2 - \frac{2\theta}{d\Phi} d.\frac{u-1}{\theta} \text{fin.}\,\Phi + (u-1)^2 \text{cof.}\,\Phi\right)$$

vbi, quia literas u et θ per angulum Φ determinauimus, tota haec expreſſio ad quantitates finitas reducetur. Eodem autem modo etiam altera tenſio Q definiri poterit, neque vero opus erit has ſubſtitutiones actu euoluere, cum inde nullae formulae concinnae expectari queant.

Caſus ſpecialioris euolutio.

§. 3. Illuſtremus ſolutionem noſtri Problematis caſu ſimpliciſſimo, quo tria corpora A, B, C ſunt inter ſe aequalia; tum vero ſint etiam ambo fila A et B eiusdem longitudinis, ac primo pro ſingulis coordinatis habebimus ſequentes valores:

$$x = -\tfrac{1}{3}a(2\,\text{cof.}\,p + \text{cof.}\,q);\quad y = -\tfrac{1}{3}a(2\,\text{fin.}\,p + \text{fin.}\,q);$$
$$x' = \tfrac{1}{3}a\,(\text{cof.}\,p - \text{cof.}\,q);\quad y' = \tfrac{1}{3}a(\text{fin.}\,p - \text{fin.}\,q);$$
$$x'' = \tfrac{1}{3}a\,(\text{cof.}\,p + 2\,\text{cof.}\,q);\quad y'' = \tfrac{1}{3}a\,(\text{fin.}\,p + 2\,\text{fin.}\,q);$$

vnde vtique ſequitur fore

$$x + x' + x'' = 0 \text{ et } y + y' + y'' = 0,$$

quemadmodum ſcilicet hypotheſis noſtra poſtulat, qua commune centrum grauitatis trium corporum in puncto O ad quietem reduximus, ita vt tota determinatio ad ambos angulos p et q ſit perducta; pro quibus inueniendis, ob numeros $n = m = 2$, ſolutio generalis ſupra data ita omnia ad angulum Φ accommodat, vt ſit

$$1^\circ.\; dt = \frac{2\,d\,\Phi\,\sqrt{(4 - \text{cof.}\,\Phi^2)}}{\sqrt{(\beta\,(4 + 2\,\text{cof.}\,\Phi) - \alpha\,\alpha)}};$$

tum vero, ſumto

$$u = \frac{\alpha \sqrt{(4 - cos. \Phi^2)}}{2 + cos. \Phi \sqrt{(3 (4 + 2 cos. \Phi) - \alpha\alpha)}}$$

ex hoc valore nanciſcimur:

$$p = \tfrac{1}{2} \int u \, d\Phi - \tfrac{1}{2} \Phi \text{ et } q = \tfrac{1}{2} \int u \, d\Phi + \tfrac{1}{2} \Phi.$$

§. 4. Quod ſi eadem methodo motum plurium corporum, filis connexorum inueſtigare velimus, nullum eſt dubium, quin ſimilibus artificiis in ſubſidium vocandis tota ſolutio ad ternas aequationes differentiales primi gradus reduci queat, in quibus ſcilicet inſint terni anguli p, q et r, ſub quibus terna fila ad axem inclinantur. Verum vtcunque labor iſte ſucceſſerit, ſemper ad formulas vehementer intricatas perueniri neceſſe eſt, quam ob cauſam iſtam inueſtigationem vlterius non proſequor.

DE

DE VI FLVMINIS AD NAVES SVRSVM TRAHENDAS APPLICANDA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Naui, quae aduersis fluuii cursum, in directione a V protrahi debet, applicetur vtrinque rota, palmulis, vti A a, instructa, quae impetum aquae, secundum directionem V a impingentis, excipiant, ita vt vtraque rota ab hac vi circumagatur circa axem C, ambas rotas iungentem, qui idem axis intus in naui gerat cylindrum, cuius radius sit C R, circa quem funis O R circumuoluatur. Funis autem in O obici fixo sit alligatus. Quibus ita paratis manifestum est, dum rotae ab incurrente aqua in gyrum aguntur, cum iisque simul cylindrus, tum totam nauem a fune O R protrahi versus O debere, propterea quod longitudo funis O R, dum cylindro circumuoluitur, continuo fit breuior, hocque modo nauis versus O accedere cogitur. Tab. IV. Fig. 4.

§. 2. Tali igitur machina instructa, examinemus quanta celeritate nauis contra cursum fluminis sit ascensura.

ra. Hunc in finem ponatur primo celeritas fluuii secundum directionem V $a = c$; 2°. sit celeritas, qua punctum palmulae a circa axem C in directione $a\alpha$ mouetur $= u$; 3°. vero sit v celeritas, qua nauis contra cursum fluminis promouetur. Praeterea vero vocetur radius rotae C $a = a$ et radius cylindri C R $= r$; hinc ergo celeritas, qua punctum R circa axem C gyratur, erit $\frac{ru}{a}$; quare cum longitudo funis O R hac ipsa celeritate curtetur, euidens est, fore celeritatem nauis $v = \frac{ru}{a}$, vnde ergo fit $u = \frac{av}{r}$.

§. 3. Vt nunc ipsam vim, qua aqua in palmulam impingit, rite determinemus, spectemus punctum a tanquam centrum palmulae; at bb exprimat superficiem vtriusque palmulae simul impetum aquae excipientis. Hic scilicet ambas palmulas, quae vtrinque vim fluuii sustinent, iunctim consideramus; deinde hic quidem istas palmulas in situ verticali contemplamur, ita vt impulsio aquae in eas sit perpendicularis; quoniam vero mox in situm obliquum detruduntur, vis aquae impellens vtique diminuetur; sed quia sequens palmula B b aquae immergitur, illa iactura hoc modo quasi compensatur, ita vt sine notabili errore impulsionem aquae ita definire liceat, quasi fluuius normaliter in superficiem $= bb$ impingeret.

§. 4. Cum igitur superficies plana $= bb$ impetum fluuii excipiat, eiusque vis proportionalis sit quadrato celeritatis relatiuae, qua aqua superficiem ferit, euidens est, si superficies bb quiescceret, tum fluuium in eam incurrere celeritate sua $= c$. At vero ipsae palmulae motu suo fugiunt quasi impetum aquae celeritate $= u$,

ita

ita vt aqua tantum excessu illius celeritatis super hanc, hoc est celeritate $c - u$ incurrere sit censenda. Hoc modo res se haberet si nauis quiesceret, quia vero ea celeritate $= v$ contra fluuium mouetur, palmulae quoque tanta celeritate aduersus fluuium assurgunt, vnde vera celeritas impulsionis erit $c - u + v$. Sicque vis impulsus erit vt $bb(c - u + v)^2$.

§ 5. Quo nunc istam vim ad mensuras absolutas reuocemus, denotent litterae c, u et v spatia, quae his celeritatibus vno minuto secundo percurri possent, at vero sit g altitudo, per quam grauia uno minuto secundo delabuntur; hisque constitutis notum est, vim illam, quam quaerimus, aequalem esse ponderi massae aqueae, cuius volumen $= \frac{bb(c - u + v)^2}{4g}$, hanc ergo vim designemus littera P, ita vt sit

$$P = bb(c - u + v)^2.$$

Quoniam igitur iam supra inuenimus $u = \frac{av}{r}$, hoc valore substituto erit

$$P = \frac{bb(cr - v(a - r))^2}{4grr}.$$

§. 6. Inuenta iam hac vi, qua palmulae in puncto a secundum directionem $a\alpha$ vrgentur, consideremus vim, qua funis OR tenditur, quae sit $= Q$, ac manifestum est hanc vim Q in R applicatam aequilibrari debere cum vi P in a applicata, id quod euenit quando momenta harum virum respectu axis C inter se aequantur. Hinc igitur adipiscimur istam aequationem: $Pa = Qr$, ita vt sit tensio funis $Q = \frac{Pa}{r}$.

§. 7. Praeter has autem duas vires P et Q praecipue adhuc considerari debet resistentia, quam nauis in motu suo patitur, quamque designemus littera R. Haec autem vis etiam proportionalis est quadrato celeritatis, qua aqua in nauem incurrit; vnde quia celeritas fluuii est $= c$, nauis autem in directione contraria mouetur celeritate $= v$, erit celeritas relatiua $c + v$, ideoque resistentia huius quadrato proportionalis. Quod autem ad nauis figuram attinet, denotet ff superficiem planam, quae eandem resistentiam patiatur, quam ipsa nauis, siquidem aqua directe incurrat, quam superficiem vocari liceat resistentiam nauis absolutam, qua cognita tota resistentia R aequabitur ponderi massae aqueae, cuius volumen $= \frac{ff(c+v)^2}{4g}$, ita vt sit $R = \frac{ff(c+v)^2}{4g}$.

§. 8. Iam ex his tribus viribus P, Q, R, quibus nauis sollicitatur, eius motum verum determinare poterimus. Primo autem nauis sursum pellitur a tensione funis Q; tum vero non solum vis resistentiae R in plagam contrariam vrget, sed etiam vis P, quam palmulae in directione $a\alpha$ sustinent, quamobrem si motus nauis iam ad vniformitatem fuerit perductus, id quod mox a primo initio fieri solet, necesse est, vt illae vires se mutuo in aequilibrio teneant, ideoque habebitur istae aequatio: $Q = P + R$.

§. 9. Quoniam igitur iam supra inuenimus $Q = \frac{Pa}{r}$, haec aequatio induet hanc formam: $\frac{P(a-r)}{r} = R$, quare si loco P et R valores supra inuenti substituantur, aequatio resultabit ista:

$$\frac{(a-r)bb(cr-v(a-r))^2}{r^3} = ff(c+v)^2.$$

Quod

Quod ſi iam ex hac aequatione radicem quadratam extrahamus, colligitur:

$$\frac{b((cr - v(a-r))}{r} \sqrt{\frac{a-r}{r}} = f(c+v), \text{ ſiue}$$

$$b\left(c - v\frac{(a-r)}{r}\right)\sqrt{\frac{a-r}{r}} = f(c+v)$$

ex qua ergo aequatione celeritas nauis v innoteſcit.

§. 10. Pendet igitur iſta nauis celeritas v a ſequentibus elementis: 1°. a celeritate fluuii $= c$; 2°. a ſuperficie palmularum, impetum aquae in rota excipientium, quam ſuppoſuimus $= bb$; 3°. a reſiſtentia nauis abſoluta, quam per ſuperficiem $= ff$ indicauimus; et 4°. a ratione, quam radii rotarum $C a = a$ ad radium cylindri $C R = r$ tenent. Neutra enim harum duarum quantitatum a et r abſolute in calculum ingreditur, ſed tantum relatio, quam inter ſe tenent.

§ 11. Quo igitur noſtram aequationem ſimpliciorem reddamus, ſtatuamus $\frac{a-r}{r} = nn$, vt ſit $\frac{r}{a} = \frac{1}{nn+1}$, tum autem noſtra aequatio erit $b(c - nnv)n = f(c+v)$, ex qua aequatione colligimus $v = \frac{c(nb-f)}{n^3 b + f}$; vnde patet, hanc celeritatem v tantum a ratione, quae inter quantitates b et f intercedit, pendere. Ita ſi ponamus $\frac{f}{b} = \lambda$, erit

$$v = \frac{c(n-\lambda)}{n^3+\lambda}, \text{ ſiue } \frac{v}{c} = \frac{n-\lambda}{n^3+\lambda}.$$

Ex qua aequatione ſtatim intelligitur, nauem aſcendere plane non poſſe, niſi fuerit $n > \lambda$, ſiue $nn > \lambda\lambda$. Erat autem $nn = \frac{a-r}{r}$ et $\lambda\lambda = \frac{ff}{bb}$, quamobrem ante omnia neceſſe eſt ſit $\frac{a-r}{r} > \frac{ff}{bb}$, ex qua conditione radius cylindri r ita definitur, vt ſit $r < \frac{abb}{bb+ff}$.

§. 12. Cum igitur esse debeat $n > \lambda$, hic imprimis quaeritur, quantus valor numero n tribui debeat, vt celeritas nauis v euadat maxima; quemadmodum enim ea euanescit casu $n = \lambda$, etiam manifesto euanescit sumendo $n = \infty$, quo casu radius cylindri r euanesceret. Dabitur ergo certus valor pro numero n, quo ista fractio: $\frac{n-\lambda}{n^3+\lambda}$ omnium maximum valorem adipiscitur. Ad hunc igitur valorem inueniendum differentiale istius fractionis, ex variabilitate numeri n orivndum, nihilo aequale statuatur, vnde sequens emerget aequatio: $2n^3 = \lambda(3nn+1)$, vnde ergo pro quouis valore λ per resolutionem aequationis cubicae maxime idoneus valor numeri n erui poterit.

§. 13. Neque vero opus est ad resolutionem aequationis cubicae confugere: Eodem enim iure, quo litteram λ tanquam datam spectamus, possumus ipsam quantitatem n, quasi data esset, spectare, tum autem facillime λ definietur; erit scilicet $\lambda = \frac{2n^3}{3nn+1}$. Hinc igitur, constituta pro lubitu ratione inter a et r, seu inter radios rotae et cylindri, vnde fit $n = \sqrt{\frac{a-r}{r}}$, valor ipsius λ dabit rationem $\frac{f}{b}$, vnde colligitur $bb = \frac{ff}{\lambda\lambda}$, ideoque superficies palmularum ad maximum effectum producendum requisita.

§. 14. Quod si vero sumamus $\lambda = \frac{2n^3}{3nn+1}$, ipsa celeritas, qua nauis contra flumen ascendit, satis simpliciter exprimetur, namque ob $n - \lambda = \frac{n(nn+1)}{3nn+1}$ et

$$n^3 + \lambda = \frac{3n^3(nn+1)}{3nn+1}, \text{ fiet } v = \frac{c}{3nn}.$$

Erit igitur $v = \frac{c}{3nn}$ maxima celeritas, quae naui imprimi poterit, dum palmulis rotarum tanta superficies tribuitur,

quan-

quantam pro $b\,b$ inuenimus, ſcilicet $b\,b = \frac{ff}{\lambda\lambda}$. Vnde intelligitur, quo celerius nauem promoueri deſideremus, eo minorem numerum pro n aſſumi debere; tum autem numerus λ eo minor reſultat; hinc autem porro ſuperficies palmularum $b\,b$ eo maior prodit. Vnde ſequitur, quod quidem per ſe eſt perſpicuum, quo magis palmulae rotarum amplificantur, eo maiorem celeritatem naui imprimi poſſe. Maxima autem celeritas quouis caſu obtinebitur, ſi inter radios rotae et cylindri ea ratio ſtabiliatur, quam numerus n poſtulat, ſcilicet vt ſit $r = \frac{a}{nn+1}$.

§. 15. Quo igitur quouis caſu facilius iſtum effectum maxime lucroſum diiudicare valeamus, ſequentem tabulam computemus, quae pro pluribus valoribus numeri n reſpondentes valores numeri λ exhibeat. Pro v autem ſucceſſiue ſumamus valores $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3 etc. ſemiſſe vnitatis creſcentes, vsque ad decem, id quod ſufficit, cum ex valore $n = 10$ pro nauis celeritate v tantum pars trecenteſima celeritatis fluuii obtineatur; tam exiguus autem effectus vix attendi meretur.

n	$l\,\lambda$	λ	$\frac{r}{a}$	$\frac{v}{c}$
$\frac{1}{2}$	9,1549020	$0,14285 = \frac{1}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$
1	9,6989700	$0,50000 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	9,9400021	$0,87097 = \frac{27}{31}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{27}$
2	0,0901766	$1,23077 = \frac{16}{13}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{5}{2}$	0,1992829	$1,58228 = \frac{125}{79}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{4}{75}$
3	0,2852358	$1,92857 = \frac{27}{14}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{27}$
$\frac{7}{2}$	0,3563172	$2,27153 = \frac{343}{151}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{4}{147}$
4	0,4170139	$2,61224 = \frac{128}{49}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{48}$

n	$l\lambda$	λ	$\frac{r}{a}$	$\frac{v}{c}$
$\frac{9}{2}$	0,4700305	$2,95142 = \frac{729}{247}$	$\frac{4}{85}$	$\frac{4}{243}$
5	0,5171264	$3,28947 = \frac{125}{38}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{75}$
$\frac{11}{2}$	0,5595220	$3,62670 = \frac{1331}{367}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{4}{363}$
6	0,5980572	$3,96330 = \frac{432}{109}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{108}$
$\frac{13}{2}$	0,6334092	$4,29942 = \frac{2197}{511}$	$\frac{4}{173}$	$\frac{4}{507}$
7	0,6660624	$4,63514 = \frac{343}{74}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{147}$
$\frac{15}{2}$	0,6964040	$4,97054 = \frac{3375}{679}$	$\frac{4}{229}$	$\frac{4}{675}$
8	0,7247427	$5,30570 = \frac{1024}{193}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{192}$
$\frac{17}{2}$	0,7513286	$5,64064 = \frac{4913}{871}$	$\frac{4}{293}$	$\frac{4}{867}$
9	0,7763677	$5,97541 = \frac{729}{122}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{243}$
$\frac{19}{2}$	0,8000313	$6,31003 = \frac{6859}{1087}$	$\frac{4}{365}$	$\frac{4}{1083}$
10	0,8224635	$6,64452 = \frac{2000}{301}$	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{300}$

§. 16. Ex hac iam tabula conficiatur alia, ad vſum practicum imprimis accommodata, cuius prima columna exhibeat planitiem palmularum bb, quae ſimul impetum aquae excipiat. Exprimetur autem ea per ſuperficiem ff, reſiſtentiam nauis metientem, eritque $bb = \frac{ff}{\lambda\lambda}$. Secunda columna referat radium cylindri $CR = r$ ad radium rotae $Ca = a$ relatum, vbi erit $r = \frac{a}{nn+1}$. Tertia columna exhibeat celeritatem v, qua nauis actu contra fluuium aſſurgit: ea exprimetur per celeritatem ipſius fluminis c, eritque $v = \frac{c}{3nn}$. Quarta denique columna exhibeat celeritatem u, qua palmulae rotae in gyrum mouentur; pro qua eſt

$$u = \frac{av}{r} = \frac{nn+1}{3nn} \cdot c = \frac{1}{3}c + v,$$

ita vt tantum opus ſit tertiam partem ipſius c ad v inſuper addere. Omnes autem iſtos valores in fractionibus decimalibus exprimamus.

bb

bb	r	v	u
49,000. ff	0,800. a	1,333. c	1,667. c
4,000. ff	0,500. a	0,333. c	0,667. c
1,318. ff	0,308. a	0,148. c	0,481. c
0,660. ff	0,200. a	0,083. c	0,417. c
0,399. ff	0,138. a	0,053. c	0,387. c
0,269. ff	0,100. a	0,037. c	0,371. c
0,194. ff	0,075. a	0,027. c	0,361. c
0,146. ff	0,058. a	0,021. c	0,354. c
0,115. ff	0,047. a	0,017. c	0,349. c
0,092. ff	0,038. a	0,014. c	0,347. c
0,076. ff	0,032. a	0,011. c	0,344. c
0,064. ff	0,027. a	0,009. c	0,342. c
0,054. ff	0,023. a	0,008. c	0,341. c
0,046. ff	0,020. a	0,007. c	0,340. c
0,040. ff	0,018. a	0,006. c	0,339. c
0,035. ff	0,016. a	0,005. c	0,338. c
0,031. ff	0,014. a	0,004. c	0,337. c
0,028. ff	0,012. a	0,004. c	0,337. c
0,025. ff	0,011. a	0,003. c	0,336. c
0,023. ff	0,009. a	0,003. c	0,336. c

§. 17. Vt vſum huius tabulae exemplo illuſtremus, ponamus palmulas rotarum tantas eſſe, vt earum ſuperficies bb ſit pars tertia reſiſtentiae abſolutae ff, ſiue $bb = 0,333 ff$ cum quo numero in prima columna proxime conuenivnt numeri 0, 399 et 0, 269 ideoque medium inter iis tenet. Hinc ex ſecunda columna fiet circiter $r = 0,119\, a$, ſiue radius cylindri nonae parti radii rotae aequalis capi debebit. Tum autem nauis contra curſum fluminis promouebuebitur celeritate 0, 0460, siue aequabitur circiter parti vigesimae secundae celeritatis fluminis; celeritas autem rotae circa medium palmularum erit quasi $= 0, 379\, c$ siue aliquanto maior erit quam tertia pars celeritatis fluuii.

§. 18. Quod autem ad vsum practicum huiusmodi machinarum attinet, merito dubitamus, an vnquam consultum esse possit, talem machinam adhibere. Cum enim eius apparatus haud exiguos sumtus requirat, plerumque praestabit operas hominum adhibere, quandoquidem naues iis carere nequevnt, praecipue cum tantus effectus a satis mediocri hominum numero obtineri possit. Interim tamen problema in se spectatum vtique dignum videri debet, vt eius solutio per principia mechanica euolueretur.

Supplementum, in quo totus nauis motus determinatur.

§. 19. Maneant omnes determinationes vti supra sunt factae, nisi quod iam v sit quantitas variabilis, ac celeritatem post tempus t minutorum secundorum acquisitam denotet. Deinde tensio funis Q nunc ante explorari debet quam motus explorari potest. Praeterea nunc in computum duci debent 1°.) Massa seu pondus totius nauis, quae sit $= N$, per volumen aequae aequiponderans exprimendum; 2°.) Pro motu gyratorio nosse oportet momentum inertiae rotarum circa axem gyrantium, quod sit Mkk.

§. 20.

§. 20. Cum iam quaeſtio verſetur circa duplicem motum, alterum progreſſiuum, quo tota nauis contra curſum fluminis progreditur, cuius celeritas $= v$, alterum vero gyratorium, cuius celeritas angularis $= \frac{v}{r}$: pro priore vis acceleratrix erit $\frac{Q - P - R}{N}$, ipſa autem acceleratio $= \frac{dv}{2g\,dt}$, vnde haec oritur aequatio:

$$\frac{N\,dv}{2g\,dt} = Q - P - R.$$

Pro motu autem gyratorio, poſita breuitatis gratia diſtantia $a = mr$, momentum virium accelerantium erit $\frac{Pmr - Qr}{Mkk}$, acceleratio autem huius motus, ob celeritatem angularem $= \frac{v}{r}$, erit $\frac{dv}{2gr\,dt}$; vnde naſcitur iſta aequatio:

$$\frac{Mkk\,dv}{2g\,dt} = (mP - Q)\,rr.$$

Quod ſi iam iſta aequatio per praecedentem diuidatur, orietur iſta: $\frac{Mkk}{Nrr} = \frac{mP - Q}{P - Q - R}$, ex qua aequatione tenſio funis Q, hactenus incognita, determinari poteſt.

§. 21. Hunc in finem ponamus breuitatis ergo $\frac{Mkk}{Nrr} = \alpha$, vt habeamus $mP - Q = \alpha(Q - P - R)$, vnde deducimus $Q = \frac{(\alpha + m)P + \alpha R}{\alpha + 1}$. Hinc fit

$$Q - P - R = \frac{(m - 1)P - R}{\alpha + 1},$$

qui valor in prima aequatione ſubſtitutus praebebit hanc:

$$\frac{N\,dv}{2g\,dt} = \frac{(m - 1)P - R}{\alpha + 1},$$

vnde iam elementum temporis commode ita definitur:

$$\frac{2g\,dt}{N(\alpha + 1)} = \frac{dv}{(m - 1)P - R}.$$

§. 22. Subſtituamus nunc loco virium P et R valores iam ante inuentos, qui erant

$$P = \frac{(c - (m-1)v)^2\, bb}{4g} \text{ et } R = \frac{(c+v)^2\, ff}{4g},$$

vnde aequatio praecedens induet hanc formam:

$$\frac{dt}{2N(\alpha+1)} = \frac{dv}{(m-1)bb(c-(m-1)v)^2 - (c+v)^2 ff}.$$

Quo iam haec aequatio commodior reddatur, statuamus

$m - 1 = nn$ et $f = \lambda b$, vt fiat

$$\frac{bb\,dt}{2N(\alpha+1)} = \frac{dv}{nn(c-nnv)^2 - \lambda\lambda(c+v)^2}.$$

§. 23. Quia igitur denominator hic est differentia duorum quadratorum, ista formula resolui poterit in duas partes, quae sint

$$\frac{bb\,dt}{2N(\alpha+1)} = \frac{A\,dv}{(n+\lambda)c - (n^3-\lambda)v} + \frac{B\,dv}{(n-\lambda)c - (n^3+\lambda)v},$$

vnde calculo subducto reperitur

$$A = \frac{-(n^3-\lambda)}{2\lambda nc(1+nn)} \text{ et } B = \frac{n^3+\lambda}{2\lambda nc(1+nn)},$$

vnde patet, vtramque formulam simpliciter ad logarithmum deduci; vnde integrale, ita sumtum, vt euanescat posito $v = 0$, erit

$$\frac{\lambda n(1+nn)bbc}{(\alpha+1)N}\, t = l\frac{(n+\lambda)c - (n^3-\lambda)v}{(n-\lambda)c - (n^3+\lambda)v} - l\frac{n+\lambda}{n-\lambda}.$$

Hinc patet, demum post tempus infinite magnum fieri $v = \frac{(n-\lambda)c}{n^3+\lambda}$, quae erat celeritas iam ad statum vniformitatis reducta.

§. 24. Hic igitur operae pretium erit casum accuratius euoluere, quo celeritas ad vniformitatem reducta sit maxima, pro quo supra inuenimus $2n^3 = \lambda(1+3nn)$. Quamobrem in aequatione nostra inuenta loco λ valorem hinc natum scribamus $\lambda = \frac{2n^3}{1+3nn}$, vnde fit

$$n + \lambda = \frac{n+5n^3}{1+3nn};\quad n - \lambda = \frac{n+n^3}{1+3nn};$$

$$n^3 - \lambda = \frac{3n^5 - n^3}{1+3nn};\quad n^3 + \lambda = \frac{3n^3(1+nn)}{1+3nn};$$

quibus

quibus ſubſtitutis aequatio tranſit in hac formam:

$$\frac{\lambda n (1 + nn) bbc}{(\alpha + 1) N} t = l \frac{(1 + 5nn) c - nn (3nn - 1) v}{(1 + nn) (c - 3nnv)} - l \frac{1 + 5nn}{1 + nn}.$$

§. 25. Quo hinc facilius celeritatem v pro quovis tempore t obtineamus, ponamus

$$\frac{\lambda n (1 + nn) bbc}{(\alpha + 1) N} = \Delta$$

ſitque $e^{\Delta t} = T$, ita vt ex t hinc facile aſſignetur T, tum autem erit:

$$T = \frac{(1 + 5nn) c - nn (3nn - 1) v}{(1 + 5nn) (c - 3nnv)},$$

vnde fit

$$\frac{v}{c} = \frac{(1 + 5nn) (T - 1)}{3Tnn (1 + 5nn) - nn (3nn - 1)},$$

quae expreſſio pro initio, vbi $t = 0$ et $T = 1$, manifeſto euaneſcit.

§. 26. Ponamus tempus infinitum iam eſſe elapſum, ſeu eſſe $T = \infty$, hincque orietur vt ante $\frac{v}{c} = \frac{1}{3nn}$. Vt autem inueſtigemus, quam cito celeritas v ad hunc valorem proxime propinquat, conſideremus caſum, quo $\Delta = 1$ et $T = e^t$, vnde ob $e = 2,71828$ poſt 7 minuta ſecunda valor ipſius T circiter ad 1000 exſurgit. Hinc patet, elapſis $7''$ celeritatem v nulla amplius incrementa capere, hocque adeo multo citius eueniet, ſi fuerit $\Delta > 1$, contra autem tardius, ſi $\Delta < 1$.

§. 27. Denique adhuc notetur fractionis $\frac{c}{v}$ valorem ſequenti modo ſatis concinne exhiberi poſſe:

$$\frac{c}{v} = \frac{4nn (1 + 3nn)}{(T - 1) (1 + 5nn)}.$$

DE STATV AEQVILIBRII MARIS A VIRIBVS SOLIS ET LVNAE SOLLICITATI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum olim quaestio de fluxu et refluxu maris summo studio sit pertractata, atque adeo tres dissertationes ab Academia Regia Scientiarum Parisina praemio sint condecoratae, hoc argumentum iam penitus exhaustum videbitur, ita vt nihil amplius desiderari queat. Quoniam vero illo tempore theoria de aequilibrio et motu fluidorum adhuc parum erat exculta, plurima ibi occurrunt, quae vel nimis operose et per plures ambages ex primis principiis sunt deducta, vel etiam hypothesibus precario assumtis et a veritate alienis sunt superstructa. Variae opiniones a veritate abhorrentes inualuerunt, cuiusmodi sunt, quod quantitas aestus marini potissimum ab interna Terrae structura, quae nobis penitus est incognita, atque adeo etiam a grauitate specifica aquae pendeat, ita vt, si ea esset

esset vel maior vel minor, etiam aestus marini inde prodirent vel minores vel maiores, cum tamen secundum vera principia huius Theoriae postmodum stabilita hae circumstantiae nihil ad scopum conferant.

§. 2. Quanquam autem hic praecipua quaestio circa motum maris versabatur, tamen omnes, qui eius enodationem illo tempore susceperunt, vnanimi consensu agnouerunt, nihil in hac re determinari posse, nisi status aequilibrii, in quo oceanus, a viribus tam Solis quam Lunae agitatus, aequiescere queat, accuratae definiatur; vnde etiam istum aequilibrii statum ex principiis tum temporis cognitis determinare sunt conati, dum ex viribus, quibus singula puncta in superficie maris sollicitantur, eam curuam inuestigarunt, quae ad omnes earum virium directiones medias esset normalis, quod principium vtique in natura rei est fundatum, sed difficillimas euolutiones analyticas postulat, quas vix, ac ne vix quidem, expedire licuit. Tum vero etiam ad canales vsque ad centrum Terrae excauatos confugerunt et in eam figuram maris inquisiuerunt, vt omnes iste columnae fierent aequiponderantes, quae inuestigatio vtique exactam cognitionem structurae internae globi terraquei requirebat, quam quisque pro arbitrio ita finxerat, prouti scopo proposito maxime conuenire videbatur, cum tamen nuncquidem actum sit, inde vix quicquam ad hunc scopum conferri.

§. 3. Cum igitur post illud tempus theoriam de aequilibrio fluidorum ita mihi excolere et in lucem constituere contigerit, vt nihil insuper desiderari queat, his veris principiis insistens istud argumentum denuo sum suscepturus, quoniam hinc ad accuratam cognitionem ſtatus aequilibrii maris a viribus quibuscunque ſollicitati perueniemus, qua omnes illae opiniones peruerſae penitus remoueantur. Praeterea vero per haec noua principia tota iſta inueſtigatio a maximis illis difficultatibus, quibus ante premebatur, penitus liberabitur; atque hic imprimis ſummus vſus principii minimae actionis, quod illuſtriſſimo Praeſidi de Maupertuis acceptum referre debemus, clariſſime elucebit, cum eo vtentes plurimas easque difficillimas integrationes euitare queamus. Ab iſto igitur principio inchoëmus.

Principium Vniuerſale
Aequilibrii Fluidorum.

Tab. V. Fig. 1. §. 4. Si ſingulae fluidi particulae Z ad quotcunque virium centra fixa C, C′, C″ vrgeantur, viribus, quae ſint cuicunque functioni diſtantiarum proportionales, tum ſuperficies fluidi A Z B erit in aequilibrio, ſi ſumma actionum, quas vires in ſingula puncta Z exerunt, vbique fuerit eadem. Hinc ergo ſi vocentur diſtantiae

$$C Z = z,\ C' Z = z,\ C'' Z = z'' \text{ etc.},$$

ipſae autem vires ad haec centra tendentes ſint Z, Z′, Z″, etc., tum quia actiones harum virium per iſtas formulas exprimuntur: $\int Z\,dz$, $\int Z'\,dz'$, $\int Z''\,dz''$, pro ſtatu aequilibrii ſtatim habemus iſtam aequationem:

$$C = \int Z\,dz + \int Z'\,dz' + \int Z''\,dz'',$$

vbi C′ denotat quantitatem conſtantem ex circumſtantiis definiendam.

Status

Status quaestionis.

§. 5. Consideremus igitur totum globum terraqueum, siue circumquaque aqua circumfusum, siue ex aliqua tantum parte, cuius figura foret perfecte sphaerica, si nullae vires externae adessent; eius centrum sit in C, radius vero C A vnitate designetur. Hic enim a motu vertiginis Terrae animum abstrahimus, ita vt totus globus in perfecta quiete versetur, et singulae eius particulae a sola grauitate versus centrum C vrgeantur, viribus vtcunque a distantia pendentibus. In ipsa autem superficie vis grauitatis vnitate exprimatur. Quamcunque enim legem grauitas ad centrum accedendo tenuerit, si mutationes, quae eius figurae a viribus externis induci possunt, respectu totius magnitudinis Terrae fuerint quam minimae, prouti eas fore nouimus prope superficiem, vis grauitatis nunquam ab vnitate discrepare censeri potest. Tum vero facile intelligitur, quamcunque mutationem vires externae superficiei aquae induxerint in hypothesi perfectae quietis, tum etiam admisso motu vertiginis eandem mutationem verae figurae Terrae, quae tum erit sphaeroidica, accidere debere, quandoquidem etiam hoc casu differentia a figura sphaerica est quam minima. Tota enim inuestigatio in eo versatur, vt, quantum superficies aquae a viribus externis vltra statum naturalem siue attollatur siue deprimatur, inquiri debeat, ac tum perinde erit, siue figura naturalis fuerit sphaerica, siue paulisper ab ea recedat. His igitur constitutis quaestio eo redit; vt dum vel Sol vel Luna in quocunque coeli loco versentur, ibique tanquam fixi concipiantur, pro singulis punctis in superficie maris assumtis quantitas actionis a viribus horum corporum nata rite defi-

definiatur. Vires autem tam Solis quam Lunae quadrato distantiarum reciproce proportionales assumemus.

De quantitate actionis a viribus Solis et Lunae orta.

§. 6. Quoniam pro statu aequilibrii maris indagando ad quoduis tempus tam Sol quam Luna in eodem coeli loco permanere concipi debent, siquidem pro singulis momentis status aequilibrii variatur, ponamus distantiam Solis a centro Terrae perpetuo $= a$, distantiam vero Lunae ab eodem centro $= b$, quae igitur pro diuerso luminarium situ diuersos valores recipere possunt, inter quos medium sumendo hae distantiae per radium Terrae vnitate designatum ita definientur, vt sit $a = 24000$ et $b = 60\frac{1}{4}$ circiter. Praeterea vero vis Solis absoluta tanta sit, vt in distantia a centro Solis $= \alpha$ aequetur vi grauitatis $= 1$; pro Luna autem sit ista distantia, in qua eius vis grauitati aequaretur $= \beta$, vnde, si distantia a Sole fuerit $= z$, vis Solis erit $\frac{\alpha\alpha}{zz}$; sin autem z sit distantia a Luna, vis ibi ad Lunam tendens erit $= \frac{\beta\beta}{zz}$, ita vt hoc loco quantitates $\alpha\alpha$ et $\beta\beta$ idem denotent, quod vulgo per massam Solis vel Lunae indicari solet. Colligitur autem ex nouissimis parallaxis solaris determinationibus, fore $\alpha\alpha = 355426$, vnde fit $\alpha = 596$, ita vt in distantia Solis tot semidiametris Terrae aequali vis Solis aequetur ipsi vi grauitatis in superficie Terrae. Pro Luna autem quantitas $\beta\beta$ a *Newtono* aestimata est $\frac{1}{40}$, Celeb. autem *Bernoulli* ostendit, eam esse notabiliter minorem, ita vt propemodum aestimari possit $\beta = \frac{1}{8}$, vnde fieret $\beta\beta = \frac{1}{64}$.

§. 7.

§. 7. His igitur positis, si distantia siue Solis siue Lunae a puncto quocunque Z fuerit $= z$, erit vis hoc punctum sollicitans, scilicet $Z = \frac{\alpha\alpha}{zz}$, pro Sole, et $Z = \frac{\beta\beta}{zz}$, pro Luna. Hinc ergo quantitas actionis pro Sole erit $\int Z\,dz = -\frac{\alpha\alpha}{z}$ et pro Luna $= -\frac{\beta\beta}{z}$. Sit igitur C centrum Terrae et S centrum Solis, ac ponatur distantia $CS = a$; tum vero consideretur in superficie maris, postquam se iam ad aequilibrium composuerit, punctum quodcunque Z, cuius distantia a centro Terrae, quae iam erit aliquantillum siue maior siue minor vnitate, sit $CZ = r$, angulus vero SCZ vocetur $= \Phi$, eritque distantia Tab. V. Fig. 3.

$$ZS = z = \sqrt{(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)},$$

sicque quantitas actionis erit $= \frac{-\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)}}$. Simili modo pro Luna, cuius distantiam a centro Terrae ponimus $= b$, si eius elongationem ab eodem puncto Z statuamus $= \psi$, erit actio Lunae in punctum Z

$$= \frac{-\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br\cos.\psi + rr)}}.$$

§. 8. Hic autem probe perpendendum est, Solem et Lunam eatenus tantum in punctum Z agere, quatenus actio discrepat ab ea, quae in centrum Terrae exeritur. Cum igitur hoc centrum in S in directione CS sollicitetur vi $= \frac{\alpha\alpha}{zz}$, punctum Z a pari vi in directione contraria ZX vrgeri censendum est, existente ZX parallela ipsi CS; ad eam igitur ex C ducatur perdendicularis CX, voceturque interuallum $ZX = x$. Haec igitur vis ad punctum fixum, in recta ZX infinite remotum, trahere censenda est, ita vt distantia, quam in genere posuimus $= z$, hic sit $x + \infty$. Quia igitur ipsa vis, quam posuimus Z, hic est constans $= \frac{\alpha\alpha}{aa}$, erit eius actio in punctum Z

$$\int Z\,dz = \int \frac{\alpha\alpha}{aa}\,dx = \frac{\alpha\alpha}{aa}\,x.$$

Cum igitur ob angulum $SCZ = \Phi$ sit $ZX = x = r\cos.\Phi$, ista actio erit $\frac{\alpha\alpha r\cos.\Phi}{aa}$, vnde actio tota a Sole oriunda in punctum Z erit:

$$-\frac{\alpha\alpha}{\surd(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)} + \frac{\alpha\alpha r\cos.\Phi}{aa},$$

similique modo tota actio a Luna in punctum Z exerta:

$$= -\frac{\beta\beta}{(\surd bb - 2br\cos.\psi + rr)} + \frac{\beta\beta r\cos.\psi}{bb}.$$

Aequatio
pro statu aequilibrii maris a viribus Solis et Lunae sollicitati.

Tab. V. Fig. 4. §. 9. Hic igitur ante omnia vis grauitatis, qua punctum maris quodcunque Z ad ipsum centrum Terrae C vrgetur, considerari debet, quam, quia nullam mutationem sensibilem subire potest, ob variatam distantiam $CZ = r$, vnitate designamus, ita vt hoc casu sit $z = r$ et $Z = 1$. Hinc ergo actio grauitatis in punctum maris Z erit $= r$. Quam ob rem si curua AZB denotet superficiem maris iam ad aequilibrium reductam; tum vero hoc tempore Sol et Luna versentur in punctis S et L, ita vt distantiae sint $CS = a$ et $CL = b$, anguli vero $SCZ = \Phi$ et $LCZ = \psi$, summa omnium actionum, quibus punctum Z vrgetur, erit:

$$= r - \frac{\alpha\alpha}{\surd(aa - 2ar\cos.\Phi + rr)} + \frac{\alpha\alpha r\cos.\Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\surd(bb - 2br\cos.\psi + rr)}$$
$$+ \frac{\beta\beta r\cos.\psi}{bb}$$

quae

quae ergo pro ſtatu aequilibrii debet aequari quantitati conſtanti, quam deſignemus littera C, atque hoc modo pro figura, quam mare accipiet, ſtatim nanciſcimur iſtam aequationem finitam atque adeo algebraicam:

$$C = r - \frac{\alpha\alpha}{\sqrt{(aa - 2ar\,\mathrm{coſ}.\Phi + rr)}} + \frac{\alpha\alpha r\,\mathrm{coſ}.\Phi}{aa} - \frac{\beta\beta}{\sqrt{(bb - 2br\,\mathrm{coſ}.\Psi + rr)}} + \frac{\beta\beta r\,\mathrm{coſ}.\Psi}{bb}.$$

Hinc igitur praeſtantia huius methodi, principio minimae actionis innixae, clariſſime elucet, cum nobis ſtatim aequationem algebraicam pro ſtatu aequilibrii maris ſit largita, dum olim iſta determinatio per calculos moleſtiſſimos, ex hypotheſibus precario aſſumtis, deriuari debuerit. Hi enim calculi plerumque abſtruſiſſimas ſectionum conicarum proprietates requirebant, ſimulque ita erant comparati, vt nullo modo pateret, quomodo ad aequationem algebraicam perueniri poſſet, niſi adhibitis approximationibus. Hic autem nulla adhuc approximatione ſumus vſi.

§. 10. Nunc autem facillime eas approximationes, quae ad ſcopum noſtrum erant accommodatae, expedire poterimus. Cum enim diſtantiae a et b ſint praegrandes ratione radii $CZ = r$, euoluamus in genere hanc formulam irrationalem: $(aa - \Omega)^{-\frac{1}{2}}$, quae praebet ſequentem ſeriem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1.\,\Omega}{2.\,a^3} + \frac{1.\,3.\,\Omega^2}{2.\,4\,a^5} + \frac{1.\,3.\,5.\,\Omega^3}{2.\,4.\,6.\,a^7} + \text{etc.}$$

Nunc igitur pro Sole habemus $\Omega = 2ar\,\mathrm{coſ}.\Phi - rr$, vnde elicimus

$$\frac{1}{\sqrt{(aa - 2ar\,\mathrm{coſ}.\Phi + rr)}} = \frac{1}{a} + \frac{r\,\mathrm{coſ}.\Phi}{aa} - \frac{rr}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ}.\Phi^2) - \frac{r^3\,\mathrm{coſ}.\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ}.\Phi^2),$$

ſimili autem modo erit pro Luna:

$$\frac{1}{\sqrt{(bb - 2br\,\mathrm{coſ.}\,\psi + rr)}} = \frac{1}{b} + \frac{r\,\mathrm{coſ.}\,\psi}{bb} - \frac{rr}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2)$$
$$- \frac{r^3\,\mathrm{coſ.}\,\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2).$$

Quoniam igitur hic prima membra conſtantia ſub conſtante C complecti licet, tota aequatio in ſequentem formam contrahetur:

$$0 = C + r + \frac{\alpha\alpha rr}{2a^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha r^3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi}{2a^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2)$$
$$+ \frac{\beta\beta rr}{2b^3}(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2) + \frac{\beta\beta r^3\,\mathrm{coſ.}\,\psi}{2b^4}(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2).$$

Quod ſi ergo breuitatis gratia ſtatuamus $\frac{\alpha\alpha}{2a^3} = A$ et $\frac{\alpha\alpha}{2a^4} = \mathfrak{A}$, tum vero $\frac{\beta\beta}{2b^3} = B$ et $\frac{\beta\beta}{2b^4} = \mathfrak{B}$, aequatio noſtra erit:

$$0 = C + r + Arr(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2) + \mathfrak{A}r^3\,\mathrm{coſ.}\,\Phi(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\Phi^2)$$
$$+ Brr(1 - 3\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2) + \mathfrak{B}r^3\,\mathrm{coſ.}\,\psi(3 - 5\,\mathrm{coſ.}\,\psi^2)$$

mox autem patebit litteras A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, fractiones eſſe quam minimas.

§. 11. Hactenus radium Terrae in ſtatu naturali vnitate expreſſimus. Quoniam vero exceſſum vel defectum quantitatis r ſupra vel infra hanc vnitatem in menſuris abſolutis, ſcilicet pedibus, deſideramus, ponamus radium Terrae naturalem $= k$, ita vt ſit vti ſupra oſtendimus $\alpha = 596\,k$ et $\beta = \frac{k}{2}$; tum vero pro diſtantiis mediis Solis et Lunae $a = 24000\,k$ et $b = 60\,k$, tantum opus eſt, vt hac littera k omnes termini aequationis inuentae ad eundem dimenſionum numerum reducantur; vnde cum in termino principali, qui eſt r, vnica ſit dimenſio, etiam in reliquis terminis vnica dimenſio ineſſe debet; quare quia litterae α, β, a et b iam vnam dimenſionem continent, aequatio noſtra ſequenti modo exhiberi debet:

0 =

$$0 = C + r + \frac{\alpha\alpha rr}{2a^3}(1 - 3\cos.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha r^3 \cos.\Phi}{2a^4}(3 - 5\cos.\Phi^2)$$
$$+ \frac{\beta\beta rr}{2b^3}(1 - 3\cos.\psi^2) + \frac{\beta 3 r^3 \cos.\psi}{2a^4}(3 - 5\cos.\psi^2)$$

quae ergo a praecedente non differt, et hoc nobis praestat commodum, vt nunc radium Terrae k tuto per quamcunque mensuram absolutam exprimere possimus, veluti in pedibus. Ex mensuris autem actu institutis iste radius terrae k deprehensus est continere 19601352 pedes parisinos.

§. 12. Quoniam igitur iam certi sumus distantiam r non vltra aliquot pedes a radio naturali k differre posse, statuamus $r = k + v$, ita vt v sit quantitas quam minima prae k, ideoque

$$rr = kk + 2kv \text{ et } r^3 = k^3 + 3kkv,$$

quibus valoribus introductis aequatio nostra pro quantitate v determinanda ita se habebit:

$$0 = C + k + \frac{\alpha\alpha kk}{2a^3}(1 - 3\cos.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha k^3 \cos.\Phi}{2a^4}(9 - \cos.\Phi^2)$$
$$+ \frac{\beta\beta kk}{2b^3}(1 - 3\cos.\psi^2) + \frac{\beta\beta k^3 \cos.\psi}{2b^4}(3 - 5\cos.\psi^2)$$
$$+ v\left(1 + \frac{\alpha\alpha k}{a^3}(1 - 3\cos.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha kk \cos.\Phi}{2a^4}(9 - \cos.\Phi^2)\right)$$
$$+ \frac{\beta\beta k}{b^3} v\left((1 - 3\cos.\psi^2) + \frac{\beta\beta kk \cos.\psi}{2b^4}(3 - 5\cos.\psi^2)\right),$$

vbi ergo $C + k$ quantitatem minimam exprimere debebit. Quod si ergo loco $C + k$ scribamus $-c$ et priores terminos ad alteram partem aequationis transferamus, aequatio nostra hanc induet formam:

$$v\left(1 + \frac{\alpha\alpha k}{a^3}(1 - 3\cos.\Phi^2) + \frac{\alpha\alpha kk \cos.\Phi}{2a^4}(9 - \cos.\Phi^2)\right.$$
$$\left. + \frac{\beta\beta k}{b^3}(1 - 3\cos.\psi^2) + \frac{\beta\beta kk \cos.\psi}{2b^4}(3 - 5\cos.\psi^2)\right)$$
$$= c - \frac{\alpha\alpha kk}{2a^3}(1 - 3\cos.\Phi^2) - \frac{\alpha\alpha k^3 \cos.\Phi}{2a^4}(9 - \cos.\Phi^2)$$
$$- \frac{\beta\beta kk}{2b^3}(1 - 3\cos.\psi^2) - \frac{\beta\beta k^3 \cos.\psi}{2b^4}(3 - 5\cos.\psi^2),$$

vbi c eſt conſtans per integrationem ingreſſa, quam quovis caſu ita determinari oportet, vt totum mare in ſtatu mutato adhuc eandem aquae quantitatem contineat atque in ſtatu naturali.

Euolutio numerica Aequationis inuentae per Pedes Pariſinos.

§. 13. Primo igitur littera c certum numerum pedum deſignabit, ex quantitate omnis aquae, quam mare continet, definiendum; tum vero, vt ſupra vidimus, eſt $\alpha = 596\,k$, $\beta = \frac{k}{8}$, pro diſtantiis autem mediis Solis et Lunae ſumamus $a = 24000\,k$ et $b = 60\,k$. Hinc ergo pro aequationis noſtrae parte priore habebimus vt ſequitur:

$$\frac{\alpha\alpha k}{a^3} = \frac{596^2}{24000^3} = 0,0000000257$$
$$\frac{\alpha\alpha kk}{2a^4} = \frac{596^2}{2.\,24000^4} = 0,0000000000$$
$$\frac{\beta\beta k}{b^3} = \frac{1}{64.\,60^3} = 0,0000000723$$
$$\frac{\beta\beta kk}{2b^4} = \frac{1}{128.\,60^4} = 0,0000000006$$

vnde patet, pro pɪima parte noſtrae aequationis ſine vllo errore ſcribi poſſe v. Pro altera autem aequationis parte habebimus:

$$\frac{\alpha\alpha kk}{2a^3} = \frac{596^2.\,k}{2.\,24000^3} = 0,25183$$
$$\frac{\alpha\alpha k^3}{6a^4} = \frac{596^2.\,k}{6.\,24000^4} = 0,00000$$
$$\frac{\beta\beta kk}{2b^3} = \frac{k}{2.\,64.\,60^3} = 0,70896$$
$$\frac{\beta\beta k^3}{2b^4} = \frac{k}{6.\,64.\,60^4} = 0,00399.$$

Hinc

Hinc igitur aequatio noſtra hanc induet formam:

$$v = c - 0,25183\,(1 - 3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2) - 0,70896\,(1 - 3\,\mathrm{cof.}\,\psi^2)$$
$$-0,00000\,\mathrm{cof.}\,\Phi\,(3 - 5\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2) - 0,01197\,\mathrm{cof.}\,\psi\,(3 - 5\,\mathrm{cof.}\,\psi^2)$$

vnde valor ipſius v in pedibus Pariſinis elicietur.

§. 14. Ponamus breuitatis gratia iſtos valores numericos modo inuentos, pro Sole: $0,25183 = m$, pro Luna autem: $0,70896 = n$ et $\nu = 0,01197$, vt ſit:

$$v = c + m\,(3\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2 - 1) + n\,(3\,\mathrm{cof.}\,\psi^2 - 1)$$
$$+ \nu\,\mathrm{cof.}\,\psi\,(5\,\mathrm{cof.}\,\psi^2 - 3).$$

Vbi notetur, valorem ipſius m, ad Solem pertinentem, ſatis eſſe iuſtum, dummodo ad diſtantiam mediam Solis et Terrae referatur, at vero valores n et ν quodammodo adhuc eſſe incertos, quoniam a maſſa Lunae pendent, pro qua aſſumſimus litteram $\beta = \frac{1}{8}k$, quemadmodum praeceſſio aequinoxiorum poſtulare videtur; fieri igitur poſſet vt aliquanto maior vel minor accipi deberet. Praeterea vero etiam hi valores ad diſtantiam mediam Lunae a Terra ſunt accomodati, vnde eos, ſi Luminaria fuerint in Apogeo, paulisper diminui, in Perigeo autem augeri oportet. Quare cum excentricitas Solis ſit quaſi $\frac{1}{60}$, ſi Sol fuerit in Apogeo, littera m diminui debet in ratione triplicata diſtantiae, ſiue vt $1 : (1 + \frac{1}{60})^3$, quae ratio proxime eſt vt $1 : 1\frac{1}{20}$, vnde pro Apogeo Solis fit $m = 0,23924$, pro Perigeo autem tanto maior, id eſt $m = 0,26442$. Deinde quia Lunae excentricitas eſt quaſi $\frac{1}{18}$, pro eius Apogeo valor litterae n diminui debet ſua parte ſexta, ita vt ſit $n = 0,59080$, pro Perigeo vero tantundem augeri, fietque $n = 0,82712$. Littera denique ν, quae biquadrato

drato distantiae reciproce est proportionalis, pro Apogeo fiet $\nu = 0,00931$, pro Perigeo vero $\nu = 0,01463$. Hoc igitur modo harum litterarum valores minimi, medii et maximi ita se habebunt:

Valor	min.	med.	max.
m	0, 23924	0, 25183	0, 26442
n	0, 59080	0, 70896	0, 82712
ν	0, 00931	0, 01197	0, 01463

Sufficiet autem hos valores nosse, quoniam ridiculum foret, in hoc negotio minutiis inhaerere.

Applicatio Formulae inuentae
ad superficiem Sphaericam.

Tab. V. Fig. 5

§. 15. Repraesentet iam circulus A B C D globum terraqueum, in cuius superficie notentur puncta S et L, quibus hoc tempore Sol et Luna verticaliter immineant, ita vt Sol versetur in zenith loci S, Luna vero in zenith loci L, et quaeramus statum maris, quem pro hoc luminarium situ esset accepturum. Consideremus igitur in maris superficie quodcunque punctum Z, quod supra libellam naturalem ab actione luminarium attollatur per internallum $= v$, in pedibus Parisinis determinandum. Hinc ergo ad puncta S et L ducantur arcus circulorum maximorum ZS et ZL, qui vocentur $ZS = \Phi$ et $ZL = \psi$, ac manifestum est angulum Φ exprimere distantiam Solis a puncto zenith loci Z, similique modo angulus ψ distantiam Lunae ab eodem zenith, quibus positis spatium elevationis v supra libellam definietur hac aequatione:

$v =$

$$v = c + m(3\cos.\Phi^2 - 1) + n(3\cos.\psi^2 - 1)$$
$$+ \nu\cos.\psi(5\cos.\psi^2 - 3),$$

vbi quantitas constans c quouis casu ita debet determinari, vt facta mutatione status etiamnunc eadem copia aquae in mari proposito reperiatur.

§. 16. Ad hanc igitur constantem c inueniendam, tota figura eius maris, cuius status quaeritur, probe est perpendenda, nisi quaestio instituatur de vniuerso oceano totam Terram ambiente. Sit igitur $a\,b\,c\,d$ mare illud vndequaque clausum et terminatum, cuius status aequilibrii pro descripto luminarium situ desideretur; eius quoduis elementum circa punctum Z situm designetur per $d\,S$, cui ergo insistit columna aquea altitudinis $= v$, ita vt eius volumen sit $v\,d\,S$. Haec igitur formula differentialis integretur, eiusque integrale per totum spatium $a\,b\,c\,d$ extendatur, vt obtineatur tota massa aquea huic spatio insistens, quae cum esse debeat nihilo aequalis, ex aequatione $\int v\,d\,S = 0$ colligetur valor constantis c. Perspicuum autem est, hoc fieri non posse, nisi per totum spatium $a\,b\,c\,d$ valores negatiui ipsius v valoribus positiuis aequiualeant. Ex quo facile intelligitur, valorem istius constantis c non solum a figura maris propositi $a\,b\,c\,d$, sed etiam a positione luminarium S et L potissimum pendere, ita vt pro quouis alio situ ista inuestigatio de nouo institui debeat. Deinceps autem videbimus, quomodo hanc rationem expedire conueniat.

Tab. V. Fig. 5.

§. 17. Hic autem assumamus, istius litterae c valorem iam rite esse assignatum, et spatium $a\,b\,c\,d$ per totam

tam Terrae superficiem esse extensum, vt, quantum aqua in singulis Terrae locis siue supra libellam attolli siue infra eam deprimi debeat, definire queamus. Ac primo quidem facile patet, aquam maxime eleuari debere in loco quodam inter puncta S et L sito, qui sit in E, quandoquidem nouimus, ab vtriusque luminaris actione seorsim considerata aquam maxime attolli in eo loco, cui luminare verticaliter imminet. Ponamus igitur distantiam luminarium $SL = \zeta$, ac translato puncto indefinito Z in E habebimus arcum $SE = \Phi$, arcum vero $LE = \zeta - \Phi = \psi$, ita vt sit $d\psi = - d\Phi$. Quare pro maximo valore ipsius v inueniendo, eius differentiale nihilo aequemus, at ob $d\psi = - d\Phi$ prodibit ista aequatio:

$$- 6 m \sin.\Phi \cos.\Phi + 6 n \sin.\psi \cos.\psi + 15 \nu \sin.\psi \cos.\psi^2$$
$$- 3 \nu \sin.\psi = 0,$$

vbi cum ν sit valde paruum prae m et n, erit proxime:

$$- m \sin.\Phi \cos.\Phi + n \sin.\psi \cos.\psi = 0, \text{ siue}$$
$$m \sin.2\Phi = n \sin.2\psi = n \sin.(2\zeta - 2\Phi),$$

sicque punctum E ibi reperietur, vbi erit

$$m \sin.2\,SE = n \sin.2\,LE.$$

§. 18. Cum igitur sit

$$\sin.(2\zeta - 2\Phi) = \sin.2\zeta \cos.2\Phi - \cos.2\zeta \sin.2\Phi,$$

hinc colligitur fore $\tang.2\Phi = \frac{n \sin.2\zeta}{m + n \cos.2\zeta}$. Quaeratur ergo angulus θ, cuius tangens sit $= \frac{n \sin.2\zeta}{m + n \cos.2\zeta}$, et cum eadem quoque sit tangens anguli $\theta + 180°$, hinc nanciscemur duos valores pro angulo Φ, quorum alter erit $\Phi = \frac{1}{2}\theta$, alter vero $\Phi = \frac{1}{2}\theta + 90°$. Prior igitur manifesto dat locum

cum E, vbi aqua maxime eleuabitur, posterior vero eum locum, vbi maxime deprimetur, qui ergo a loco E interuallo quadrantis erit remotus in arcu S L producto. Simul vero etiam patet, in locis diametraliter oppositis aquam fore vel maxime eleuatam vel depressam.

§. 19. Haec autem, quoniam ad distantiam quamcunque inter luminaria spectant, nimis sunt generalia, quam vt inde conclusiones concinnas deriuare queamus. Infra autem has determinationes ad casus particulares accommodabimus. Nunc autem rem in genere considerantes videamus statum aquae tam in ipso loco S quam in loco L. Pro priore igitur, translato puncto Z in S, erit $\Phi = 0$ et $\psi = \zeta$, vnde fit

$$v = c + 2m + n(3\,\mathrm{cos}.\,\zeta^2 - 1) + \nu\,\mathrm{cos}.\,\zeta(5\,\mathrm{cos}.\,\zeta^2 - 3);$$

at vero translato Z in L erit $\Phi = \zeta$ et $\psi = 0$, hincque

$$v = c + m(3\,\mathrm{cos}.\,\zeta^2 - 1) + 2n + 2\nu.$$

Sin autem punctum Z ita capiatur, vt ambo arcus S Z et L Z fiant quadrantes, tum ob $\Phi = 90°$ et $\psi = 90°$ erit $v = c - m - n$, vbi ergo aqua semper erit maxime depressa.

Applicatio ad hypothesin,

qua tota Terra aqua circumdata ponitur.

§ 20. Contemplemur nunc casum, quo tota Terra esset fluida, vel saltem continuo maris tractu cincta, et quaeramus valorem quantitatis constantis c pro quouis situ amborum luminarium, vt inde vera eleuatio maris super libellam naturalem in omnibus locis assignari queat.

Ad hoc igitur necesse est, vt formula integralis $\int v\, d S$ per totam Terrae superficiem extendatur et valor resultans nihilo aequetur; sic enim perueniettur ad aequationem, ex qua quantitas c facile determinari poterit. Vbi notetur, differentiale $d S$ exprimere elementum quodcunque superficiei sphaericae.

§. 21. Cum igitur valor quantitatis v ex quatuor partibus sit compositus, quarum prima est ipsa constans c, quae quaeritur; secunda, actio a Sole orta $m(3 \cos. \Phi^2 - 1)$; tertia, actio principalis a Luna orta $n(3 \cos. \psi^2 - 1)$; quarta denique, correctio istius actionis $= \nu \cos. \psi (5 \cos. \psi^2 - 3)$: singulas istas partes in elementum superficiei $d S$ ducamus et integralia per totam superficiem Terrae extendamus, quo facto aggregatum omnium nihilo aequari debebit. Prima igitur pars, seu constans c statim praebet $\int c\, d S = c S$, vbi loco S totam superficiem Terrae assumi oportet. Hic iterum radium Terrae vnitate designemus, quandoquidem non quantitas absoluta spectatur, ac posita ratione diametri ad peripheriam vt $1 : \pi$, notum est, totam superficiem Sphaere esse $= 4 \pi$, vnde integrale ex prima parte ortum erit $= 4 \pi c$.

Tab. V. Fig. 6. §. 22. Pro secunda parte $m(3 \cos. \Phi^2 - 1)$ circa punctum S in superficie sphaerica describamus circulum, interuallo $S Z = \Phi$, eritque $\sin. \Phi$ radius huius circuli in plano considerati, eiusque propterea peripheria $= 2 \pi \sin. \Phi$. Iam tribuamus arcui $S Z = \Phi$ incrementum infinite paruum $Z z = d \Phi$, quod in peripheriam $2 \pi \sin. \Phi$ ductum dabit incrementum areae istius areae circularis in superficie sphaerica, quod ergo erit $= 2 \pi\, d \Phi \sin. \Phi$; quamobrem istud

istud incrementum per secundam partem $m(3 \cos. \Phi^2 - 1)$ multiplicetur, et integrari debebit ista formula:

$$2 m \pi d \Phi \sin. \Phi (3 \cos. \Phi^2 - 1).$$

Hunc in finem ponamus

$$\cos. \Phi = x, \text{ eritque } d \Phi \sin. \Phi = - d x,$$

et formula integranda euadet $= - 2 m \pi d x (3 x x - 1)$, cuius ergo integrale fit

$$2 m \pi (x - x^3) + C = 2 m \pi (\cos. \Phi - \cos. \Phi^3) + C,$$

quae constans C autem euanescit, quia integrale inuentum sponte fit $= 0$, sumto arcu $\Phi = 0$, ita vt integrale ex hac parte ortum sit $2 m \pi \cos. \Phi \sin. \Phi^2$, cuius valor vt per totam superficiem sphaericam extendatur, arcus indefinitus Φ sumi debet semicirculo aequalis; vnde, cum fiat $\sin. \Phi = 0$, euidens est, integrale ex secunda parte ipsius v natum sponte fieri $= 0$, atque hinc simul manifestum est, etiam integrale ex tertia parte oriundum ad nihilum reduci.

§. 23. Pro parte quarta ipsius v in figura loco S sumatur punctum L, voceturque arcus $LZ = SZ = \psi$, et quia elementum spatii circularis nunc erit $2 \pi d \psi \sin. \psi$, formula differentialis ex quarta parte nata erit

$$2 \nu \pi d \psi \sin. \psi \cos. \psi (5 \cos. \psi^2 - 3).$$

Faciamus hic iterum $\cos. \psi = x$, vt habeamus hanc formulam: $- 2 \nu \pi x d x (5 x x - 3)$, cuius integrale est

$$- 2 \nu \pi (\tfrac{5}{4} x^4 - \tfrac{3}{2} x x) = 2 \nu \pi (\tfrac{5}{4} \cos. \psi^4 - \tfrac{3}{2} \cos. \psi^2) + C.$$

Erit autem $C = \frac{1}{2} \nu \pi$. Extendatur nunc hoc integrale per totum Sphaeram, ponendo $\psi = 180$, atque etiam haec quarta pars euadet $= 0$.

§. 24. Hinc igitur patet, ſi tota terra continuo oceano eſſet obducta, tum ſemper fore conſtantem $c = 0$, in quocunque loco coeli ambo luminaria verſentur, ita vt pro hac hypotheſi ſemper valeat iſta aequatio:

$$v = m(3 \cos. \Phi^2 - 1) + n(3 \cos. \psi^2 - 1)$$
$$+ \nu \cos. \psi (5 \cos. \psi^2 - 3),$$

vnde pro ſingulis Terrae locis eleuatio aquae ſupra libellam in pedibus pariſinis definiri poterit. Scilicet ſi valor ipſius v prodeat poſitiuus, eleuatio ſupra libellam naturalem indicabitur; vbi autem obtinuerit valorem negatiuum, ibi depreſſio infra libellam indicabitur. Haec autem omnia intelligenda ſunt de ſtatu aequilibrii, quem actio luminarium Terrae eſſet inductura, ſi tam Terra quam ipſa luminaria perpetuo in eodem loco quieſcerent. In hac igitur hypotheſi ſequens Problema reſolui poterit.

Problema.

§. 25. In hypotheſi Terrae quieſcentis et oceano continuo circumdatae, ſi dentur in coelo loca Solis et Lunae, vbi per aliquot tempus commorari concipi debent, vt totus Oceanus ſe ad ſtatum aequilibrii componere poſſit, in omnibus Terrae locis ſiue eleuationem ſiue depresſionem aquae ſupra vel infra libellam naturalem determinare.

Solutio.

Tab. V. Fig. 7. Referat circulus AEBF ſuperficiem Terrae, vbi A et B ſint Poli borealis et auſtralis, ſemicirculus vero AEB repraeſentet primum meridianum, tum vero puncta S et L ea ſint loca, quibus Sol et Luna verticaliter immineant,

pro

pro quibus ductis meridianis A S et A L, ſint longitudines E A S $= \zeta$ et E A L $= \eta$, diſtantiae vero a polo boreali A vocentur A S $= f$ et A L $= g$. Iam proponatur Terrae locus quicunque Z, cuius longitudo ſit E A Z $= \omega$, et diſtantia a Polo A Z $= z$. Quo igitur pro hoc loco quantitas v poſſit definiri, eius diſtantiae a punctis S et L, ſcilicet arcus Z S $= \phi$ et Z L $= \psi$ quaeri debent. Pro priore Z S $= \phi$ ex triangulo ſpaerico Z A S, in quo habentur latera A Z $= z$ et A S $= f$, cum angulo intercepto Z A S $= \zeta - \omega$, deducitur:

$$\text{coſ. } SZ = \text{coſ. } \phi = \text{coſ. } f \text{ coſ. } z + \text{ſin. } f \text{ ſin. } z \text{ coſ. } (\zeta - \omega).$$

Simili modo ex triangulo Z A L, in quo habentur latera ZA $= z$ et AL $= g$, cum angulo intercepto ZAL $= \eta - \omega$, colligitur

$$\text{coſ. } LZ = \text{coſ. } \psi = \text{coſ } g \text{ coſ. } z + \text{ſin. } g \text{ ſin. } z \text{ coſ. } (\eta - \omega).$$

His igitur duobus angulis ϕ et ψ inuentis, erit eleuatio aquae in loco Z ſupra libellam naturalem:

$$v = m(3 \text{ coſ. } \phi^2 - 1) + n(3 \text{ coſ. } \psi^2 - 1) + \nu \text{ coſ. } \psi (5 \text{ coſ. } \psi^2 - 3),$$

vbi litterarum m, n et ν valores pro ratione diſtantiae tam Solis quam Lunae ex §. 14 ſunt deſumendi.

Corollarium 1.

§. 26. Quod ſi ergo locus Z in ipſo polo boreali A accipiatur, vt ſit $z = 0$, ſtatim habebitur $\phi = f$ et $\psi = g$, vnde pro hoc loco erit

$$v = m(3 \text{ coſ. } f^2 - 1) + n(3 \text{ coſ. } g^2 - 1) + \nu \text{ coſ. } g (5 \text{ coſ. } g^2 - 3).$$

Sin autem punctum Z in polo auſtrali B accipiatur, fiet

$\phi =$

$$\Phi = 180^\circ - f \text{ et } \psi = 180^\circ - g,$$

et pro hoc loco erit

$$v = m(3\,\text{cof.}\,f^2 - 1) + n(3\,\text{cof.}\,g^2 - 1) - \nu\,\text{cof.}\,g(5\,\text{cof.}\,g^2 - 3),$$

vbi vltimum membrum contrario ſigno eſt affectum.

Corollarium 2.

§. 27. Si punctum Z in aequatore accipiatur, vt ſit $z = 90^\circ$, manente longitudine indefinita $EAZ = \omega$, reperietur

$$\text{cof.}\,\Phi = \text{ſin.}\,f\,\text{cof.}(\zeta - \omega) \text{ et } \text{cof.}\,\psi = \text{ſin.}\,g\,\text{cof.}(\eta - \omega),$$

vnde eleuatio aquae erit,

$$v = m(3\,\text{ſin.}\,f^2\,\text{cof.}(\zeta - \omega)^2 - 1) + n(3\,\text{ſin.}\,g^2\,\text{cof.}(\eta - \omega)^2 - 1)$$
$$+ \nu\,\text{ſin.}\,g\,\text{cof.}(\eta - \omega)(5\,\text{ſin.}\,g^2\,\text{cof.}(\eta - \omega)^2 - 3).$$

Corollorium 3.

§. 28. Si Sol et Luna fuerint in coniunctione, vt ſit $\eta = \zeta$ et $g = f$, erit

$$\text{cof.}\,\Phi = \text{cof.}\,\psi = \text{cof.}\,f\,\text{cof.}\,z + \text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,z\,\text{cof.}(z - \omega),$$

quibus inuentis eleuatio in loco z reperietur:

$$v = (m + n)(3\,\text{cof.}\,\Phi^2 - 1) + \nu\,\text{cof.}\,\Phi(5\,\text{cof.}\,\Phi^2 - 3).$$

Sin autem Sol et Luna fuerint in oppoſitione, erit $\eta - \zeta = 180$ et $g = 180^\circ - f$, vnde cum ſit

$$\text{ſin.}\,\eta = -\,\text{ſin.}\,\zeta,\ \text{cof.}\,\eta = -\,\text{cof.}\,\zeta,$$
$$\text{ſin.}\,g = \text{ſin.}\,f, \text{ et } \text{cof.}\,g = -\,\text{cof.}\,f,$$

ſequitur fore

$$\text{cof.}\,\Phi = \text{cof.}\,f\,\text{cof.}\,z + \text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,z\,\text{cof.}(\zeta - \omega) \text{ et}$$
$$\text{cof.}\,\psi = -\,\text{cof.}\,f\,\text{cof.}\,z - \text{ſin.}\,f\,\text{ſin.}\,z\,\text{cof.}(\zeta - \omega).$$

Sicque

Sicque patet fore cof. $\psi = - \cos. \Phi$, ex quibus eleuatio aquae in z colligitur:

$$v = (m + n)(3 \cos. \Phi^2 - 1) - \nu \cos. \Phi (5 \cos. \Phi^2 - 3).$$

Scholion.

§. 29. In hac hypothefi commode accidit, vt pro omnibus locis Solis et Lunae quantitas conftans c eundem valorem nancifcatur. Sin autem mare vndique claufum proponatur, quod tantum modicam portionem fuperficiei Terrae occuparet, tum pro quouis fitu luminarium valor iftius quantitatis conftantis c feorfim computari deberet, quod vtique calculum non parum moleftum poftularet. Plerumque autem fufficiere poterit differentiam tantum inter eleuationem aquae in variis locis talis maris determinaffe, ita vt tum non opus fit veram quantitatem litterae c definire. Ceterum quoniam hoc loco mihi tantum fuit propofitum, pro quouis fitu Solis ac Lunae, ftatum aequilibrii, in quo maria acquiefcere queant, ex veris principiis determinare, hoc argumentum vlterius non profequor, neque quicquam de Phaenomenis fluxus et refluxus maris hic attingam, quippe quae iam dudum fatis dilucide funt tractata.

DISQVISITIO
DE
METHODO CONSTRVENDI TABVLAS
PRO
MOTV PROIECTILIVM IN AËRE RESISTENTE.

Auctore
W. L. Krafft.

§. 1.

Postquam in difficillimo problemate, de proiectilium motu in hypothesi resistentiae medii, celeritatis quadrato proportionalis, summi Geometrae tanto studio et tam felici successu sunt versati, vt, quantum Analyseos adhuc excultae ferunt vires, id, theoriam quod attinet, euolutum censendum sit: quod primarium in hac re momentum est et ad practicum vsum omnium maxime desideratur, ad tabularum ballisticarum non nimis operosam constructionem redit, quae nec difficilis aut complicatae applicationis in ipsa praxi sint, et experimentis, quantum opus est, congruant. Neque etiam practico huic vsui defuit mathematicorum sagax industria; inprimis enim Ill.

Eule-

Eulerus in Commentariis Berolinensibus anni 1753 non plenam modo tradidit huius problematis solutionem, sed ex eadem quoque *tabulas* construere *ballisticas* docuit; et in iisdem Commentariis anni 1773 Ill. *Lambertus scalae ballisticae*, ipsis his tabulis superstructae, constructionem haud mediocri ingenio in lucem protulit; quo tamen egregio labore vtroque id effectum esse nondum constat, vt, ballisticam qui exercent artem, tabulas in promtu habeant, ex quibus in aëre resistente, calculo non operosiore, quam in vacuo ex tabulis *Belidorianis*, dati iactus amplitudinem computari liceat. Quamuis enim Ill. Comes *de Graeuenitz* octodecim eiusmodi tabulas ad ductum theoriae *Eulerianae* computauerit, quae, si species traiectoriarum inter octodecim istas intermediae commoda interpolatione definiri possent, ad omnem artis ballisticae vsum practicum sufficere videri possent: tamen, si vel maxime istae tabulae facillimae ad praxin adplicationis essent, ad experimenta istas adplicanti facile patebit, iis in casibus, in quibus traiectoria globi inter octodecim istarum specierum binas intermedia est, ab experimentis saepe nimium dissentire eas, atque adeo sub certis iactuum conditionibus plane non applicabiles esse, non vitio theoriae, aut tabularum erroribus, sed ob vnam interpolationis insufficientiam. Adde, quod in ipso tabularum a Comite *Graeuenitz* constructarum vsu binae amplitudinis iactus partes pro traiectoriae ramo ascendente et descendente separatim computandae sint, et quod ii casus, qui ob interpolationis insufficientiam ex tabulis modo dictis computari non possunt, si quis eos ex ipsis formulis fundamentalibus computare vellet, calculos requirant operosissimos. Quae cum ita sint, operae mihi pretium visum eſt, inquirere, annon ſolutionum hoc de problemate a ſummis Geometris datarum vna alteraue modo a talibus incommodis libero ad vſum practicum reuocari queant, et inter alias ſolutionem a Cel. *Bezoutio* datam hoc ſcopo ſcrutatus in aliquem conſtructionis tabularum methodum incidi, quae ſatis facili et commodo calculo exhiberi poſſunt, et ex quibus, ſimpliciſſima Logarithmorum tractatione, integram computari licet iactus ſuper plano horizontali amplitudinem, quibusque, ſi qua opus interpolatione ſit, ea tam anguſtis circumſcribatur limitibus, vt erroris nimium inde non ſit pertimeſcendum; quod igitur qualecunque tentamen, ſi quis forte eius in arte balliſtica vſus eſſe poſſit, hic exponere mihi propoſitum eſt; vnde ipſam problematis ſolutionem ad *Eulerianae* et *Bezoutianae* theoriae ductum hic, mutatis nonnullis et ſcopo meo accommodatis, praemitti neceſſe eſt.

Tab. III. Fig. 3. §. 2. Globus, cuius maſſa $= M$, et in aëre pondus $= P$, proiiciatur ex puncto A ſecundum directionem A B ſub dato ad horizontem angulo B A C $= I$ celeritate initiali $= c$, debita altitudini $= h$, vt ſit $c = 2\sqrt{gh}$, deſignante g altitudinem, per quam grauia prope terrae ſuperficiem primo minuto ſecundo ex quiete libere delabuntur. Globi per aërem lati ſit traiectoria A M N C, et ad curuae punctum M, ad quod peruenerit globus poſt elapſum tempus $= t$, ſit in axe horizontali A C abſciſſa A P $= x$ et applicata P M $= y$, arcus vero A M $= s$, cuius elementum M $m = ds$ inclinetur ad horizontem angulo m M $n = \Phi$, vt ſit $dy = dx . \text{tang.}\, \Phi$. In puncto M ſit globi ſecundum tangentem M m celeritas

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{\text{cof.}\, \Phi\, dt},$$

debita

debita altitudini $= v$, hincque $u = 2\sqrt{g v}$, et aëris in globum resistentia $= R$, motui eius in directione tangentis $m M$ opposita, qua secundum binas directiones $n M$ et $m n$ resoluta, sollicitabitur globus secundum directionem abscissae A P vi $= - R. \cos. \Phi$ et secundum directionem applicatae P M vi $= - P - R. \sin. \Phi$; vnde, sumto temporis elemento $d t$ constante, ex principiis mechanicis habetur

$$\frac{d d x}{2 g d t^2} = \frac{- R. \cos. \Phi}{M} \text{ et } \frac{d d y}{2 g d t^2} = \frac{- P - R. \sin. \Phi}{M}.$$

Combinatis his duabus aequationibus colligitur

$$\tang. \Phi. d d x - d d y = \frac{2 g. P. d t^2}{M};$$

vnde ob $d y = d x. \tang. \Phi$, hincque

$$d d y = d d x. \tang. \Phi + \frac{d \Phi. d x}{\cos. \Phi^2}$$

erit $\frac{d \Phi. d x}{\cos. \Phi^2} = \frac{- 2 g P. d t^2}{M}$; siue

$$2 g d t^2 = \frac{- M. d \Phi. d x}{P. \cos. \Phi^2};$$

quo valore in prima aequatione substituto erit

$$\frac{d d x}{d x} = \frac{R. d \Phi}{P. \cos. \Phi}.$$

Posita nunc aëris resistentia quadrato celeritatis proportionali, fit

$$R = \lambda u^2 = \frac{\lambda. d x^2}{\cos. \Phi^2 d t^2};$$

quo valore substituto habebitur

$$\frac{P. d t^2}{\lambda}. \frac{d d x}{d x^3} = \frac{d \Phi}{\cos. \Phi^3}$$

hincque integrando

$$\text{Const.} - \frac{P d t^2}{2 \lambda. d x^2} = \int. \frac{d \Phi}{\cos. \Phi^3},$$

vbi quidem ex praeceptis calculi integralis constat, esse

$$\int. \frac{d \Phi}{\cos. \Phi^3} = \tfrac{1}{2} \tang. \Phi. \sec. \Phi + \tfrac{1}{2} \text{Log. hyp. tang.} (45^\circ + \tfrac{1}{2} \Phi),$$

 inte-

integrali ita sumto, vt euanescat casu $\Phi = 0$; et cum hinc sit

$$\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{2\lambda}{P}\left(\text{Const.} - \int \frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3}\right)$$

et $\frac{dx}{dt}$ designet globi in traiectoriae puncto M celeritatem horizontalem, haecque fuerit initio iactus $= c.\cos.\mathrm{I}$, oportet, vt sit

$$c^2.\cos.\mathrm{I}^2 = \frac{P}{2\lambda\left(\text{Const.} - \int.\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3}\right)},$$

posito post integrationem $\Phi = \mathrm{I}$, vnde quantitatis constantis per superiorem integrationem ingressae valor colligitur

$$C = \frac{P}{2\lambda c^2.\cos.\mathrm{I}^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\mathrm{I}\,\text{sec.}\,\mathrm{I} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\mathrm{I}).$$

Hoc igitur quantitatis constantis C valore notato, erit

$$dx^2 = \frac{P.\,dt^2}{2\lambda\left(C - \int\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3}\right)};$$

vnde ob $dt^2 = \frac{-M.\,d\Phi.\,dx}{2g\,P.\cos.\Phi^2}$ habebitur

$$dx = \frac{-M.\,d\Phi}{4\lambda g\cos.\Phi^2\left(C - \int.\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3}\right)};$$

adeoque

$$dy = \frac{-M.\,\text{tang.}\,\Phi.\,d\Phi}{4\lambda g.\cos.\Phi^2\left(C - \int.\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3}\right)}.$$

Pro aequationum harum differentialium primi gradus integratione Cel. *Bezout* duplicem proponit approximationem, quarum vna statuit $\int.\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3} = a.\,\text{tang.}\,\Phi$;
altera autem $\int.\frac{d\Phi}{\cos.\Phi^3} = \text{tang.}\,\Phi + b.\,\text{tang.}\,\Phi^3$,
vt sit

$$a = \tfrac{1}{2}\,\text{sec.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\Phi.\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi) \text{ et}$$

$b =$

$$b = \frac{\frac{1}{2}\text{tang.}\Phi.\,\text{sec.}\Phi + \frac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) - \text{tang.}\,\Phi}{\text{tang.}\,\Phi^3}$$

quorum valorum variabilitas quanta ſit, vt innoteſcat, pro vtroque ſubiunctam computaui tabulam,

Φ	a	b
0°	1, 00000	0, 16666
25°	1, 03514	0, 16161
45°	1, 14779	0, 14779
65°	1, 53433	0, 11618
75°	2, 20349	0, 08641
85°	5, 87249	0, 03730

ex qua patet, priorem a $\Phi = 0$ ad $\Phi = 45^\circ$ et vltra parum excedere vnitatem parumque variari; poſteriorem vero et ſemper eſſe perexiguam atque adeo inter limites $\Phi = 0$ et $\Phi = 65^\circ$ non niſi a valore 0, 17 ad valorem 0, 12 decreſcere; vnde has quantitates intra memoratos pro vtraque limites, approximatione parum erronea, pro conſtantibus haberi licebit.

Hac igitur tantisper hypotheſi facta, poſitoque

$$\text{tang.}\,\Phi = p;\ \frac{M}{4\lambda g} = D \text{ et } b = \frac{1}{B};$$

habebitur pro priori approximatione

$$dx = \frac{-D.\,dp}{C - ap} \text{ et } dy = \frac{-D.\,p\,dp}{C - ap},$$

hincque integrando, cum integralia caſu $\Phi = I$ euaneſcere debeant,

$$x = \frac{D}{a}\,\text{Log. hyp.}\,\frac{C - a\,\text{tang.}\,\Phi}{C - a\,\text{tang.}\,I} \text{ et}$$

$$y = \frac{C.\,D}{a^2}\left(\text{Log. hyp.}\,\frac{C - a.\,\text{tang.}\,\Phi}{C - a\,\text{tang.}\,I} - \frac{a}{C}\,(\text{tang.}\,I - \text{tang.}\,\Phi)\right)$$

Pro

Pro posteriori autem approximatione, sit aequationis cubicae $p^3 + Bp - BC = 0$ radix realis $= k$, vt sit

$$k^3 + Bk - BC = 0; \text{ eritque}$$

$$BC - Bp - p^3 = (k-p)(B + k^2 + kp + p^2); \text{ hincque}$$

$$dx = \frac{-BD.\,dp}{(k-p)(B+k^2+kp+p^2)} \text{ et } dy = \frac{-BD.\,p\,dp}{(k-p)(B+k^2+kp+p^2)}$$

quae aequationes, posito

$$p = q - \tfrac{1}{2}k; \; \frac{B}{B+3k^2} = E \text{ et } B + \tfrac{3}{4}k^2 = f^2,$$

adhibitaque fractionis vtriusque resolutione in fractiones partiales, in has abeunt:

$$dx = -DE.\left(\frac{q\,dq}{f^2+q^2} + \frac{dq}{\tfrac{3}{2}k - q} + \frac{3k}{2}.\frac{dq}{f^2+q^2}\right)$$

$$dy = -DE.k\left(\frac{q\,dq}{f^2+q^2} + \frac{dq}{\tfrac{3}{2}k - q} - (B+\tfrac{3}{2}k^2).\frac{dq}{f^2+q^2}\right)$$

quarum, posito breuitatis gratia $\frac{B+\frac{3}{2}k^2}{kf} = g$, colliguntur integralia

$$x = \text{Const.} - DE.\left(\text{Log. hyp. } \frac{\sqrt{(f^2+q^2)}}{\tfrac{3}{2}k - q} + \frac{3k}{2f}\text{ Arc. tang. } \frac{q}{f}\right)$$

$$y = \text{Const.} - DE.k\left(\text{Log. hyp. } \frac{\sqrt{(f^2+q^2)}}{\tfrac{3}{2}k - q} - g.\text{ Arc. tang. } \frac{q}{f}\right)$$

siue, posito ad contrahendas has formulas Arc. tang. $\frac{q}{f} = X$ et sumto Arcu N tali, vt sit $\frac{2f}{3k} = \text{tang. } N$,

habebitur

$$x = \text{Const.} - DE\left(\text{Log. hyp. } \frac{\text{sin. } N}{\text{cos. }(N+X)} + \frac{3k}{2f}X\right)$$

$$y = \text{Const.} - DEk\left(\text{Log. hyp. } \frac{\text{sin. } N}{\text{cos. }(N+X)} - gX\right),$$

quae integralia cum euanescere debeant casu $\Phi = I$ adeoque

que si fuerit $X = \text{Arc. tang.} \frac{\text{tang. I} + \frac{1}{2} k}{f}$, ponamus

$$\text{Arc. tang.} \frac{\text{tang. I} + \frac{1}{2} k}{f} = M,$$

ita, vt ista integralia euanescere debeant casu $X = M$, vnde integralia habebuntur completa atque ipsae formulae *Bezoutianae*

$$x = D\,E\,(\text{Log. hyp.} \frac{\text{cos.}(N + X)}{\text{cos.}(N + M)} + \frac{1k}{2f}(M - X))$$

$$y = D\,E\,k\,(\text{Log. hyp.} \frac{\text{cos.}(N + X)}{\text{cos.}(N + M)} - g\,(M - X)).$$

Binarum harum methodorum non nisi priorem Cel. *Bezout* ad practicum vsum applicat neque etiam hanc ipsam ad constructionem vsque tabularum perduxit; posteriorem vero ob nimis complicati in ea et perquam operosi calculi necessitatem priore minus ad ipsam praxin valere existimat; atuero cum ex superioribus constet, quantitatem b potiori iure, quam quantitatem a, atque adeo inter multo latiores limites valorum anguli Φ pro constante haberi posse: in eo iam labor noster versabitur, vt artificia inuestigemus, quorum ope posterior haec methodus non calculis solum multo concinnioribus ad propositum quodvis exemplum applicari, sed ad ipsas quoque tabulas ballisticas construendas reuocari queat, quarum vsus practicus non nisi simplicem logarithmorum tractationem requirat.

§. 3. Hunc in finem ante omnia quantitatum ex iactus conditione datarum, adeoque a iactus obliquitate I, globi pondere P, eiusque celeritate initiali c et ab aëris resistentia R pendentium valores accuratius definiri oportet. Occurrit vero in superioribus formulis

1) Coëfficiens λ, cum fuerit $R = \lambda u^2 = 4\lambda g v$. Poſita iam globi diametro $= \delta$, et diametri ad peripheriam ratione $= 1 : \pi$; aequabitur, ex communi phyſicorum hypotheſi, aëris in globum reſiſtentia R ponderi cylindri aërei, cuius volumen $= \frac{\pi\,\delta.\,v}{8}$ ſiue ponderi cylindri aquei, cuius volumen $= \frac{\pi\,\delta^2\,v}{8\,b}$, poſita ratione grauitatis ſpecificae aquae et aeris $= b : 1$. Si ergo δ et v in pedibus, eorumque partibus decimalibus, exprimantur, ſitque pedis aquae cubici pondus $= a$; erit $R = \frac{\pi\,\delta^2.\,v}{8.\,b}.\,a$; hincque $\lambda = \frac{\pi\,\delta^2.\,a}{32.\,g.\,b}$. Cum igitur in ſequentibus calculis pede rhenano vtamur; erit $g = 15,625$. ped.; et $a = 64$ libr. vnde cum communiter ſtatuatur $b = 850$; erit $\lambda = 0,00047309.\,\delta^2$. Talis foret ipſius λ valor, ſi aëris reſiſtentiam communi huic hypotheſi exacte conſentaneam ſupponamus. Si vero ex Ill. *Euleri* ſententia, experimentis *Robinſianis* ſuperſtructa, etiam illius reſiſtentiae aëris rationem haberi oporteat, quae ex eo naſcitur, quod globus inſigni per aërem velocitate latus vacuum poſt ſe, non plane momentaneum, relinquat, totamque tantiſper ex anteriori parte preſſionem atmoſphaerae ſuſtineat; valor ipſius λ inde haud parum augebitur; vnde ponamus

$$\lambda = 0,00047309.\,\mu.\,\delta^2$$

ita, vt in communi pro reſiſtentia aëris hypotheſi ſit $\mu = 1$; ex Ill. autem *Euleri* calculis $\mu = 3,0615$; ceterum ipſe hic ipſius μ valor experimentorum ope exactius determinari poterit.

2) quantitas C, exiſtente

$C = \frac{1}{2}$ tang. I. ſec. I $+ \frac{1}{2}$ Log. hyp. tang. $(45^\circ + \frac{1}{2} I) + \frac{P}{2 \lambda c^2 . \cos. I^2}$, cuius poſterior pars, ſubſtituto ipſius λ valore, in hunc $1056, 888 . \frac{P}{\mu \delta^2 c^2 . \cos. I^2}$ abit. Huius igitur quantitatis conſtantis C valores pro ſingulis proiectionum obliquitatibus ex datis globi pondere, diametro et celeritate initiali ope ſequentis tabulae facile computare licet, cuius prima columna angulum proiectionis per quinos gradus, altera valorem

$\frac{1}{2}$ tang. I. ſec. I $+ \frac{1}{2}$ Log. hyp. tang. $(45^\circ + \frac{1}{2} I)$;

tertia denique logarithmum quantitatis $\frac{1056,888}{\cos. I^2}$ complectitur.

I.	$\frac{1}{2}$tg.I.ſec.I$+\frac{1}{2}$Log.tg.$(45^\circ+\frac{1}{2}I)$	Log. $\frac{1056,888}{\cos. I^2}$	B
0°	0, 000000.	3, 0240294.	. . 6,00000.
5°	0, 087600.	3, 0273410.	. . 6,01132.
10°	0, 177236.	3, 0373264.	. . 6,02773.
15°	0, 271122.	3, 0541418.	. . 6,06300.
20°	0, 371854.	3, 0780578.	. . 6,11577.
25°	0, 482694.	3, 1094780.	. . 6,18792.
30°	0, 607986.	3, 1489682.	. . 6,28183.
35°	0, 753816.	3, 1973004.	. . 6,40387.
40°	0, 929138.	3, 2555214.	. . 6,56160.
45°	1, 147793.	3, 3250594.	. . 6,76622.
50°	1, 432361.	3, 4078944.	. . 7,03476.
55°	1, 822067.	3, 5068468.	. . 7,39456.
60°	2, 390330.	3, 6260894.	. . 7,89354.
65°	3, 290396.	3, 7721328.	. . 8,60676.
70°	4, 884250.	3, 9559260.	. . 9,70608.

3) quantitas B, existente $B = \frac{1}{b}$, siue

$$B = \frac{\text{tang.}\,\Phi^{2}}{\frac{1}{2}\text{tang.}\,\Phi\,\text{sec.}\,\Phi + \frac{1}{2}\text{Log.hyp.tang.}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\Phi) - \text{tang.}\,\Phi}$$

cui Cel. *Bezout* valorem tribuit constantem pro tota traiectoriae extensione, atque eum quidem, quem reuera ipso iactus initio habet. Cum scilicet valor ipsius Φ in ramo traiectoriae ascendente a $\Phi = I$ ad $\Phi = o$ extendatur, valor autem ipsius b (§. 2) a $\Phi = 65^{\circ}$, qua raro solet maior esse iactuum obliquitas I, vsque ad $\Phi = o$ non nisi quinque partibus centesimis varietur: is ipsi valor constans commodissime tribuitur, quem in ipsa hac valoris sui in se iam exigua variabilitate diutissime seruat, quique ipse eius valor initialis est. Ceterum cum in hac hypothesi valor, qui ipsi b in aequatione $d\,x = \frac{-\,D.\,d\,p}{C - p - b\,p^{3}}$ tanquam constans tribuitur, sit minimus omnium eorum, quos quantitas b in toto traiectoriae ramo ascendente reuera successiue obtinet: intelligitur, iactus pro solo ramo ascendente amplitudinem ista approximatione paulo minorem vera reddi. In ramo curuae descendente, si ponatur appulsus globi, ad horizontem recidentis, obliquitas $= \zeta$, valor ipsius anguli Φ a $\Phi = o$ ad $\Phi = -\zeta$ extenditur: hinc, cum quantitas b pro eodem angulo Φ siue negatiue siue positiue sumto valorem seruet eundem, et valor eius initialis prope sit inter omnes intermedius, quos in toto ramo descendente obtinet: amplitudo iactus pro solo ramo descendente ex hac hypothesi computata quam proxime cum vera coincidere censenda est; ita,

ita, vt, approximatione in practico vsu certe parum erronea cuiusque exiguus error ad paulo abbreuiandam veramiactus amplitudinem tendit, statui possit

$$B = \frac{\text{tang. } I^3}{\frac{1}{2}\text{tang. I. sec. I} + \frac{1}{2}\text{Log. hyp. tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} I) - \text{tang. I}};$$

quos valores pro singulis proiectionum per quinos gradus angulis in quarta superioris tabulae columna exhibuimus.

4) valor k ex aequatione cubica $k^3 + Bk - BC = 0$ definiendus, pro cuius radice reali inuenienda resolutio ad scopum nostrum commodissime ita instituitur: Ponatur $k = x + y$; eritque

$$x^3 + y^3 - BC + (x + y)(3xy + B) = 0;$$

quem in finem statuamus

$$x^3 + y^3 - BC = 0, \text{ et } 3xy + B = 0$$

vnde cum sit $x = -\frac{B}{3y}$, valore hoc in priori aequatione substituto erit $y^6 - BC.y^3 - \frac{B^3}{27} = 0$ hinque

$$y^3 = \frac{BC}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B^2C^2}{4} + \frac{B^3}{27}\right)};$$

ex qua aequatione inuento valore y erit $k = y - \frac{B}{3y}$.

5) Hisce igitur valoribus computatis habebitur

$$D = 33,82045.\frac{P}{\mu.\delta^2};\quad E = \frac{D}{B + 3k^2}.$$

$$f = \sqrt{(B + \tfrac{3}{4}k^2)};\quad g = \frac{B + \frac{3}{2}k^2}{fk}.$$

$$N = \text{Arc. tang. } \frac{2f}{3k};\quad M = \text{Arc. tang. } \frac{\text{tang. I} + \frac{3}{2}k}{f}$$

vbi quidem constat, cum sit $D = \frac{P}{R}.v$, hanc quantitatem in pedibus rhenanis expressum iri.

§. 4. Hisce praemissis patet

1) haberi *altitudinem iactus*, si integrale pro traiectoriae adplicata y supra inuentum ad $\Phi = 0$, quod in summo obtinet traiectoriae apice, extendatur, adeoque si ponatur $X = \text{Arc. tang.} \frac{k}{2f}$; posito itaque hoc arcu $= H$, habitaque ratione reductionis logarithmorum hyperbolicorum ad communes tabulares et arcuum circularium in minutis primis expressorum ad partes radii decimales, erit

Altitudo iactus

$$= 2,30258509\, D\, E\, k \begin{cases} \text{Log. tab. cos. } (N + H) \\ - \text{Log. tab. cos. } (N + M) \\ -0,00012633 . g\, (M - H) \end{cases}$$

2) Idem hic arcus H loco X in aequatione pro abscissa x supra inuenta substitutus dabit *iactus pro solo ramo ascendente amplitudinem*, siue cum sit

$$x = \frac{y}{k} + \frac{BD}{Kf} (M - X)$$

erit Amplitudo iactus pro solo ramo ascendente

$$= \frac{\text{Altit. iactus}}{k} + 0,000290888 . \frac{BD}{kf} (M - H),$$

habita scilicet ratione reductionum modo dictarum.

3) haberi *totam iactus amplitudinem*, si integrale pro abscissa x supra inuentum ad $\Phi = -\zeta$ extendatur, adeoque si ponatur

$$X = \text{Arc. tang.} \frac{\frac{1}{2}k - \text{tang.}\, \zeta}{f}.$$

Posito itaque hoc aarcu $= Z$, cum idem hic angulus

gulus in aequatione pro adplicata y loco X substitutus efficere debeat $y = o$; pro definiendo hoc arcu Z sequens habebitur aequatio:

$$\text{Log. hyp.}\ \frac{\text{cos.}(N+Z)}{\text{cos.}(N+M)} - g(M-Z) = o.$$

siue, reductione modo dicta instituta, positoque

$$M - Z = V \text{ et } N + M = R, \text{ erit}$$

$$\text{Log tab.cos.}(R-V) - 0{,}000126331.g.V = \text{Log.tab.cos.}R;$$

ex qua aequatione inuento angulo V in minutis primis expresso, erit

$$\text{Amplitudo tota iactus} = 0{,}000290888.\frac{B.V.D}{fk}.$$

4) haberi, inuento arcu V, *angulum* ζ, *sub quo globus ad horizontem recidit*; cum enim sit $Z = M - V$; erit

$$\text{tang.}(M-V) = \frac{\frac{1}{2}k - \text{tang.}\zeta}{f}; \text{ adeoque}$$

$$\text{tang.}\zeta = \tfrac{1}{2}k + f.\text{tang.}(V-M).$$

5) haberi, *celeritatem globi in summitate traiectoriae* et inuento angulo ζ, *celeritatem appulsus globi ad horizontem recidentis*: cum enim in traiectoriae puncto quocunque M fuerit (§. 2.) globi celeritas

$$u = \frac{dx}{\text{cos.}\Phi.dt} \text{ et } \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{P}{2\lambda(C - \int.\frac{d\Phi}{\text{cos.}\Phi^3})}$$

erit

$$u^2 = \frac{P}{2\lambda.\text{cos.}\Phi^2(C - \int.\frac{d\Phi}{\text{cos.}\Phi^3})};$$

vnde posito $\Phi = o$, quo casu $\int.\frac{d\Phi}{\text{cos.}\Phi^3}$ euanescit (§. 2.); erit celeritas globi in vertice traiectoriae $= \sqrt{\frac{P}{2\lambda C}}$;

et

et globi ad horizontem impellentis celeritas

$$= \sqrt{\frac{P}{2\lambda . \cos.\zeta^2 (C + \frac{1}{2} \tang \zeta \sec. \zeta + \frac{1}{2} \text{Log. hyp tg} (45^\circ + \frac{1}{2}\zeta))}}$$

§ 5. Antequam huius calculi satis operosi compendium exponimus: cum exemplo illustrasse iuuabit. Comparemus hunc in finem methodum hic traditam cum tabulis *Eulerianis*:

Exemplum.

Globus, cuius diameter 6 poll. rhen. et pondus $= \frac{9}{10}$ ponderis pedis aquae cubici rhenani, proiicitur sub angulo 45° celeritate initiali $= 485, 7.$ ped. rhen (*). Quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Cum pondus pedis aquae cubici rhenani supra posuerimus $= 64.$ libr. erit pro hoc exemplo

$P = 57, 6;\ \delta = 0, 5;\ c = 485, 7;\ I = 45°$

et in Ill. *Euleri* hypothesi pro resistentia aëris erit

$\mu = 3, 0615.$

Hisce positis, habebitur

Ex tabula §. 3. . . .		$B = 6, 76622.$
Ex eadem tabula . . .		$C = 1, 82212.$
$33, 82045 \cdot \frac{P}{\mu\delta^2}$	$==$	$D = 2545.$ ped. rhen.

Ex

(*) In Comm. Berl. supra allegatis Ill. *Eulerus* hoc exemplum ex suis tabulis computauit; ibique dicit, esse globi celeritatem initialem

$= 1, 7222525 \cdot \sqrt{2 \alpha g c};\ \alpha = 1;\ g = 15, 625$ ped. rhen. et

$c = 2544.$ ped. rhen.

Hinc ergo prodit celeritas ista initialis $= 485, 7.$ ped. rhen.

Ex resolutione aeq. cubicae $k = 1,40884.$

$\frac{B}{B + 3k^2} = E = 0,53190.$

$\sqrt{(B + \frac{3}{4}k^2)} = f = 2,87312.$

$\frac{B + \frac{3}{2}k^2}{kf} = g = 2,40712.$

$\text{Arc. tang. } \frac{2f}{3k} = N = 53^\circ\ 39'\ 52''$

$\text{Arc. tang. } \frac{\text{tang. I} + \frac{3}{2}k}{f} = M = 30^\circ\ 40'\ 39''.$

$N + M = R = 84^\circ\ 20'\ 31''.$

$\text{Arc. tang. } \frac{k}{2f} = H = 13^\circ\ 46'\ 32''.$

hinc $N + H = 67^\circ\ 26'\ 24''.$

$M - H = 16^\circ\ 54'\ 7''.$

ex quibus pro angulo V colligitur aequatio

$\text{Log. tab. cof. } (R - V) - 0,00030409.\ V = 8,9938380.$

cui satisfacit angulus $V = 50^\circ\ 48'.\ 6 = 3048,6.$

Stabilitis hisce elementis calculi, ex superioribus formulis prodit

		Ex tab. *Eul.*
Altitudo iactus - - - -	1237. ped. rhen.	1235. ped. rh.
Amplit. iactus pro ramo asc.	2133. ——	2139. ——
Amplitudo iactus tota - -	3774. ——	3779. ——
Celeritas globi recidentis -	276. ——	276. ——
Celeritas globi in vertice -	209. ——	209. ——
Angulus recidentiae globi -	60° 22'.	60° 13'.

§. 6. Quantumuis vero haec methodus cum experimentis consentiret: valores tamen k, f et g vna cum angulis N et M; et aequationis potiſſimum termino logarithmico et arcu circulari complicatae reſolutio calculos requirunt operoſiores, quam vt in ipſa praxi ad iſtas formulas recurri poſſit; neque magis patet, quomodo hae formulae, in quibus modo memoratae quantitates, a pondere partim et diametro globi, partim a iactus obliquitate et celeritate initiali pendentes, diuerſimode inter ſe complicantur, ad conſtructionem tabularum reuocari queant; id quod ſequenti commodiſſime fieri ratione reperi.

Totus ſcilicet calculus pro dato quolibet iactu inſtituendus a valore k, per quem quantitates f et g vna cum angulis N et M determinantur, (§. 3.) adeoque ab aequatione cubica $k^3 + B\,k - B\,C = 0$, in qua data ſunt B et C per conditionem iactus, primario pendet; cuius aequationis reſolutionem §. 3. datam iam ſequenti modo adornari conueniet:

Sumto angulo $2\,\omega$ tali, vt ſit $\frac{B^2\,C^2}{4} = \frac{B^3}{27}.\,\overline{\text{tang.}\ 2\,\omega}^2$, ſiue

$$\text{tang.}\ 2\,\omega = \frac{3\sqrt{3}}{2}.\ \frac{C}{\sqrt{B}},$$

erit $y^3 = \frac{B\sqrt{B}}{3\sqrt{3}}\,(\text{tang.}\ 2\,\omega + \text{ſec.}\ 2\,\omega) = \frac{B\sqrt{B}}{3\sqrt{3}}\,\text{tang.}\,(45^\circ + \omega)$ adeoque

$$k = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{3}}.\left(\sqrt[3]{\text{tang.}\,(45^\circ + \omega)} - \frac{1}{\sqrt[3]{\text{tang.}\,(45^\circ + \omega)}}\right).$$

Si igitur ſumatur angulus $2\,\psi$ talis, vt ſit

$$\sqrt[3]{\text{tang.}\,(45^\circ + \omega)} = \text{tang.}\,(45^\circ + \psi)$$

erit $k = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{3}}.\,(\text{tang.}\,(45^\circ + \psi) - \text{cotang.}\,(45^\circ + \psi))$

ſiue $k = \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{3}}.\ \text{tang.}\ 2\,\psi.$

Quare

Quare ob $k^2 + B\,k - B\,C = 0$, habebitur

$$\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} .\ \text{tang.}\ 2\,\psi \left(\frac{3 + \overline{\text{ſin.}\ 2\,\psi}^2}{\overline{\text{coſ.}\ 2\,\psi}^2}\right)$$

vnde ſi pro ſingulis valoribus anguli $2\,\psi$ a $2\,\psi = 0$ ad $2\,\psi = 90°$ quaerantur valores $\frac{C}{\sqrt{B}}$; viciſſim ex quantitatibus B et C per iactus conditionem datis angulus $2\,\psi$ correſpondens definiri poterit; per quem angulum omnes quantitates ad abſoluendum calculum neceſſariae determinantur; erit enim

$$k = \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{3}}\ \text{tang.}\ 2\,\psi; \qquad \text{tang.}\ N = \frac{1}{\sqrt{3}.\ \text{ſin.}\ 2\,\psi};$$

$$f = \frac{\sqrt{B}}{\text{coſ.}\ 2\,\psi}; \qquad \text{tang.}\ M = \frac{\text{tang.}\ I\ \text{coſ.}\ 2\,\psi}{\sqrt{B}} + \frac{\text{ſin.}\ 2\,\psi}{\sqrt{3}}$$

ſiue

$$g = \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{ſin.}\,2\,\psi + \text{coſec.}\,2\,\psi); \ \text{tang.}\ M = \frac{\text{ſin.}\ (\eta + 2\,\psi)}{\sqrt{3}.\ \text{coſ.}\ \eta}$$

poſito $\text{tang.}\ \eta = \frac{\sqrt{3}.\ \text{tang.}\ I}{\sqrt{B}}$.

Cum igitur hinc ſit (§. 4.)

$$0,000126331.\ g = 0,000109406.\ (\text{ſin.}\ 2\,\psi + \text{coſec.}\ 2\,\psi)$$

$$0,000290888.\ \frac{B}{f\,k} = 0,000251916.\ \text{coſ.}\ 2\,\psi .\ \text{cotang.}\ 2\,\psi$$

erit, poſito horum valorum priori $= \Delta$, poſteriori $= \Pi$, reſoluenda aequatio

$$\text{Log. coſ.}\ (R - V) - \Delta\ V = \text{Log. coſ.}\ R.$$

et tota iactus amplitudo $= \Pi.\ V.\ D.$ ped rhen.; vbi logarithmi tabulares et arcus circulares in minutis primis expreſſi intelliguntur.

Cum igitur in conſtruendis ad hanc methodum tabulis balliſticis pro ſingulis valoribus $\frac{C}{\sqrt{B}}$ ex iactus conditione datis angulos $2\,\psi$ reſpondentes vna cum angulis N et valoribus Δ et Π noſſe oporteat: iſta elementa ſequenti tabula exhibuimus:

$\frac{c}{\sqrt{B}}$	2ψ	N	Δ	Π
0,000000	0°.	90°. 0'. 0''.	∞	∞
0,020117	1.	88. 16. 7.	0,006271	0,014430
0,040388	2.	86. 32. 27.	0,003139	0,007209
0,060737	3.	84. 49. 13.	0,002096	0,004800
0,081271	4.	83. 6. 39.	0,001576	0,003594
0,102054	5.	81. 24. 56.	0,001265	0,002868
0 123152	6.	79. 44. 16.	0,001058	0,002384
0.144629	7.	78. 4. 51.	0,000911	0,002036
0,166556	8.	76. 26. 50.	0,000802	0,001775
0,189003	9.	74. 50. 22.	0,000716	0,001571
0,212045	10.	73. 15. 37.	0,000649	0,001407
0,235758	11.	71. 42. 42.	0,000594	0,001272
0,260224	12.	70. 11. 43.	0,000549	0,001159
0,285530	13.	68. 42. 46.	0,000511	0,001063
0,311762	14	67. 15. 55.	0,000478	0,000980
0,339020	15.	65. 51. 14.	0,000451	0,000908
0,367404	16.	64. 28. 46.	0,000427	0,000845
0,397024	17.	63. 8. 32.	0,000406	0,000788
0,427997	18.	61. 50. 34.	0 000388	0,000737
0.460448	19.	60. 34. 53.	0,000371	0,000691
0,494511	20.	59. 21. 28.	0,000357	0,000651
0,530333	21.	58. 10. 18.	0,000344	0,000613
0,568069	22.	57. 1. 23.	0,000333	0,000578
0,607892	23.	55. 54. 40.	0,000322	0,000546
0,649986	24.	54. 50. 9.	0,000313	0,000517
0,694554	25.	53. 47. 46.	0,000305	0,000490

0,69

$\frac{C}{VB}$	2ψ	N	Δ	Π
0,694554	25°.	53°. 47′. 46″.	0,000305	0,000490
0,741814	26.	52. 47. 29.	0,000297	0,000464
0,792009	27.	51. 49. 15.	0,000291	0,000441
0,845402	28.	50. 53. 1.	0,000284	0,000419
0,902279	29.	49. 58. 45.	0,000279	0,000397
0,962963	30.	49. 6. 24.	0,000273	0,000378
1,027800	31.	48. 15. 53.	0,000269	0,000359
1,097179	32.	47. 27. 10.	0,000264	0,000341
1,171529	33.	46. 40. 12.	0,000260	0,000325
1,251321	34.	45. 54. 55.	0,000257	0,000309
1,337083	35.	45. 11. 16.	0,000253	0,000294
1,4[illegible]9400	36.	44. 29. 13.	0,000251	0,000280
1,528933	37.	43. 48. 41.	0,000248	0,000267
1,636390	38.	43. 9. 38.	0,000245	0,000254
1,752610	39.	42. 32. 2.	0,000242	0,000242
1,878505	40.	41. 55. 48.	0,000240	0,000230
2,015107	41.	41. 20. 55.	0,000238	0,000219
2,163577	42.	40. 47. 20.	0,000236	0,000208
2,325238	43.	40. 14. 59.	0,000235	0,000197
2,501580	44.	39. 43. 51.	0,000233	0,000188
2,694300	45.	39. 13. 53.	0,000232	0,000178
2,905335	46.	38. 45. 3.	0,000231	0,000169
3,136894	47.	38. 17. 19.	0,000230	0,000160
3,391518	48.	37. 50. 37.	0,000229	0,000152
3,672122	49.	37. 24. 57.	0,000228	0,000144
3,982077	50.	37. 0. 16.	0,000227	0,000136

$\frac{c}{\sqrt{B}}$	2ψ	N	Δ	Π
3,982077	50°.	37° 0′. 16″.	0,000227	0,000136
4,325285	51.	36. 36. 33.	0,000226	0,000128
4,706283	52.	36. 13. 44.	0,000225	0,000121
5,130371	53.	35. 51. 50.	0,000224	0,000114
5,603748	54.	35. 30 48.	0,000224	0,000107
6,133583	55.	35. 10. 36.	0,000223	0,000101
6,728935	56.	34. 51. 13.	0,000223	0,000095
7,399640	57.	34. 32. 38.	0,000222	0,000089
8,158072	58.	34. 14. 49.	0,000222	0,000083
9,019152	59.	33. 57. 45.	0,000221	0,000078
10,00000	60.	33. 41. 24.	0,000221	0,000073
11,12280	61.	33. 25. 46.	0,000221	0,000068
12,41367	62.	33. 10. 49.	0,000220	0,000063
13,90508	63.	32. 56. 32.	0,000220	0,000058
15,63738	64.	32. 42. 54.	0,000220	0,000054
17,66041	65.	32. 29. 55.	0,000220	0,000050
20,03800	66.	32. 17. 33.	0,000220	0,000046
22,85070	67.	32. 5. 47.	0,000219	0,000042
26,20214	68.	31. 54. 37.	0,000219	0,000038
30,22725	69.	31. 44. 1.	0,000219	0,000035
35,10336	70.	31. 34. 0.	0,000219	0,000031
41,06662	71.	31. 24. 32.	0,000219	0,000028
48,43659	72.	31. 15. 37.	0,000219	0,000025
57,65234	73.	31. 7. 14.	0,000219	0,000022
69,32776	74.	30. 59. 23.	0,000219	0,000020
84,33902	75.	30. 52. 3.	0,000219	0,000018

$\frac{C}{VB}$	2ψ	N	Δ	Π
84,33902	75°.	30°.52′. 3″.	0,000219	0,000018
103,9645	76.	30. 45. 13.	0,000219	0,000015
130,1184	77.	30. 38. 54.	0,000219	0,000013
165,7513	78.	30. 33. 44.	0,000219	0,000011
215,5694	79.	30. 27. 44.	0,000219	0,000009
287,3841	80.	30. 22. 52.	0,000219	0,000008
394,7896	81.	30. 18. 30.	0,000219	0,000006
562,8426	82.	30. 14. 35.	0,000219	0,000005
841,1230	83.	30. 11. 9.	0,000219	0,000004
1336,998	84.	30. 8. 11.	0,000219	0,000003
2312,270	85.	30. 5. 41.	0,000219	0,000002
4519,252	86.	30. 3. 38.	0,000219	0,000001
10718,01	87.	30. 2. 2.	0,000219	0,000001
36187,07	88.	30. 0. 54.	0,000219	0,000000
289562,8	89.	30. 0. 14.	0,000219	0,000000
∞	90.	30. 0. 0.	0,000219	0,000000

Tabula pro angulo η.

I	η	I	η	I	η
0°.	0°. 0′. 0″.	25°.	17°.59′.18″.	50°.	37°.53′ 31″.
5.	3. 32. 15.	30.	21. 45. 4.	55.	42. 17. 29.
10.	7. 5. 27.	35.	25. 36. 22.	60.	46. 52. 35.
15.	10. 40. 23.	40.	29. 34. 9.	65.	51. 41. 50.
20.	14. 18. 3.	45.	33. 39. 30.	70.	56. 47. 17.

§. 7.

§. 7. Vsum huius methodi tabulaeque, quam praemisimus, subsidiariae sequentia illustrabunt exempla:

Exempl. I. Pro iactu §. 5. dato quaeritur amplitudo super plano horizontali.

Cum pro hoc iactu sit - - - -	$\frac{c}{\sqrt{B}} = 0,700491.$
erit ex praecedenti tabula - - -	$2\,\psi = 25^\circ.\ 7'.\ 32''.$
	$N = 53.\ 40.\ 12.$
	$\Delta = 0,000304.$
	$\Pi = 0,000487.$
et cum sit ex praecedenti tabula -	$\eta = 33^\circ.\ 39'.\ 30''.$
erit - -	$M = 30.\ 40.\ 36.$
adeoque - -	$R = 84.\ 20.\ 48.$

vnde ex resolutione aequationis logarithmicae, qui vnicus est calculus operosior, reperitur $V = 3049.$ min. prim. ex quo, cum sit, vt ante - - $D = 2545.$ ped. rhen. erit tota iactus amplitudo, vt ante, $= 3775.$ ped. rhen.

Exempl. II. Bombarda, cuius diameter 1. ped. rhen. et pondus $= 138.$ libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhen. proiicitur sub angulo $15^\circ.$ celeritate initiali $= 400.$ ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Erit ergo pro hoc iactu

$$P = 138;\ \delta = 1;\ c = 400;\ I = 15^\circ.$$

et statuamus, vt ante, $\mu = 3,0615.$

Hinc

Hinc habebitur

Ex tabula §. 3. - - $B = 6,06300$.

et $C = 0,59025$.

Porro habebitur - - - $D = 1524,4$. ped. rhen.

Hinc cum sit - - - $\frac{C}{\sqrt{B}} = 0,239713$.

erit ex tabula §. 6. - - - $2\psi = 11^\circ.\ 9'.\ 42''$.

$N = 71.\ 28.\ 0.$

$\Delta = 0,000587$.

$\Pi = 0,001254$.

Et cum sit ex eadem tabula - $\eta = 10^\circ.\ 40'.\ 23''$.

erit - - $M = 12.\ 20.\ 45$.

adeoque - - $R = 83.\ 48.\ 45$.

quibus inuentis, ex resolutione aequationis logarithmicae prodit - - - - - $V = 14^\circ.\ 49'$,

$= 889$.

hincque tota iactus amplitudo $=$ 1699. 4 ped. rhen.

Ex tabulis vero Eulerianis $=$ 1719. —— ——

et ex ipsa experientia Belidorii $=$ 1705. —— ——

ita, vt amplitudo ex superiori methodo pro hoc iactu computata non nisi 6 pedibus minor sit ea, quam Belidorius experimento reperit, a quo tabulae Eulerianae itidem non nisi 14. pedibus in excessu discrepant.

§. 8. Quamuis vero etiamnum, inprimis ob aequationis termino logarithmico et arcu circulari complicatae resolutionem, nimis operosi sint hi calculi, quam vt promtus eorum in ipsa praxi et expeditus esse vsus queat: tamen, quod praecipuum est, methodus hic exposita facili negotio ad tabularum ballisticarum constructionem applicari potest, quarum vsus non nisi simplicissimam Logarithmorum tractationem requirit, quod vt exemplo patefcat, conftruendae fint tales tabulae pro angulo proiectionis 45°; ita, vt fit

$$\text{tang.}\, M = 0,69363.\, \text{fin.} (33^\circ.\, 39'.\, 30'' + 2\,\psi).$$

Cum igitur iam angulus $R = N + M$ cum valoribus Δ et Π vnice ab angulo $2\,\psi$ pendeat; pro fingulis angulis $2\,\psi$ habebitur aequatio pro definiendo valore V, qui in $\Pi\, D$ ductus dabit amplitudinem iactus, cui datus ifte angulus $2\,\psi$ competit; neque vero aequationum harum logarithmis et arcubus circularibus complicatarum refolutiones multum negotii faceffunt, cum fcilicet, angulo $2\,\psi$ per fingulos gradus crefcente, etiam angulus R et valor Δ, adeoque tota ifta aequatio non nifi paruas fubeant variationes; harum aequationum refoluta prima, etiam fubfequens facili labore refoluitur. Neque etiam opus eft, calculos inde a valore $2\,\psi = 0$ incipi, cum enim fit

$$C = \tfrac{1}{2}\,\text{tang. I fec. I} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.} (45^\circ. + \tfrac{1}{2}\,I) + \frac{P}{2\,\lambda.\, c^2.\, \text{cof.}\, I^2} \quad (\S.\ 2.);$$

minimus poffibilis ipfius C valor erit

$$\tfrac{1}{2}\,\text{tang. I. fec. I} + \tfrac{1}{2}\,\text{Log. hyp. tang.} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\,I)$$

pofito fcilicet $\frac{P}{c^2} = 0$. adeoque affumta celeritate globi initiali $= \infty$; quo pofito erit $B = \frac{\text{tang.} I^3}{C - \text{tang.}\, I}$; hincque $\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{\text{tang.} I\, (B + \text{tang.} I^2)}{B.\, \sqrt{B}}$. Cafu ergo $I = 45^\circ$; minimus poffibilis ipfius $\frac{C}{\sqrt{B}}$ valor erit $= 0,441256$; cui in tabula §. 6. refpondet angulus $2\,\psi = 18^\circ.\, 24'.\, 46''$; a quo igitur ipfius $2\,\psi$ valore tabulam inchoari oportet. Ceterum cum ex quantitate $\frac{C}{\sqrt{B}}$ per conditionem iactus et affumtam pro aëris refiftentia hypothefin data colligatur angulus $2\,\psi$ dato iactui competens; argumentum tabulae erit $\frac{C}{\sqrt{B}}$ fiue fimpliciter C, ob B conftans in tota tabula; quare, cum dato valore $\frac{C}{\sqrt{B}}$ detur etiam valor $\frac{P}{c^2.\, \delta^2.}$ (§. 3.); conftitui pote-

poterit $\frac{P}{c^2 . \delta^2}$ argumentum totius tabulae. Porro cum ſit tota iactus amplitudo

$$\Pi\, V\, D = 33, 82045 . \Pi . V . \frac{P}{\delta^2 . \mu};$$

coëfficiens $33, 82045 . \frac{\Pi . V}{\mu}$ in tabula exhibebitur, qui in $\frac{P}{\delta^2}$ ductus totam dabit iactus amplitudinem. Hisce principiis ſuperſtructa eſt ſequens tabula, in qua Euleriana pro aëris reſiſtentia hypotheſis eſt aſſumta, ita, vt poſuerimus $\mu = 3, 0615$. Ceterum pro vſu eiusmodi tabularum notari oportet, ſi celeritas globi initialis non ex theoria, aut penduli ope, aliave ab aëris reſiſtentia independente methodo, ſed ex iactus cuiusdam probatorii amplitudine quaerenda ſit; tum in ea definienda eandem aſſumi debere, quae in tabulis, pro aëris reſiſtentia hypotheſin, ſi deinceps, celeritate globi initiali ex iactu probatorio cognita, iisdem his tabulis ad computandas eiusdem globi eadem pulueris pyrii quantitate proiecti ſub aliis proiectionum angulis amplitudines vti velimus. At vero etiam ad definiendam ex iactus probatorii amplitudine celeritatem globi initialem tabulae noſtrae facilem admittunt inuerſionem et ad formam in praxi percommodam redigi ſe patiuntur; poſita enim iactus amplitudine $= \Omega$; cum ſit

$$\Omega = \Pi\, V\, D = 33, 82045 . \frac{\Pi . V}{\mu} . \frac{P}{\delta^2}; \text{ erit}$$

$$\frac{\Omega . \delta^2}{P} = 33, 82045 . \frac{\Pi . V}{\mu};$$

haec vero quantitas in tabula eſt exhibita, eiusque eſt argumentum $= \frac{P}{\delta^2 c^2}$; poſito itaque hoc argumento $= A$; erit $c^2 = \frac{P}{\delta^2 . A}$; facili ergo labore conſtruitur noua tabula, cuius erit argumentum $= \frac{\Omega . \delta^2}{P}$, et quae exhibet valores reſpondentes $\frac{1}{A}$, qui in $\frac{P}{\delta^2}$ ducti dabunt quadrata celeritatum initialium.

Tabulam itaque pro angulo proiectionis 45°. sub duplici hac forma exempli caussa hic exhibebimus:

Tabula Prima

pro inuenienda amplitudine iactus globi sub angulo 45° super plano horizontali in aëre resistente proiecti, ex datis pondere, diametro et celeritate initiali globi.

Argumentum:

Pondus globi diuisum per productum quadratorum diametri et celeritatis initialis globi.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 000000.	∞	
0, 000072.	1, 6189926.	4, 8792860.
0, 000201.	1, 5027108.	4, 5793437.
0, 000336.	1, 4264457.	4, 3942458.
0, 000478.	1, 3650393.	4, 2496433.
0, 000628.	1, 3119830.	4, 1323637.
0, 000786.	1, 2640577.	4, 0255108.
0, 000954.	1, 2197464.	3, 9304917.
0, 001132.	1, 1780971.	3, 8400731.
0, 001322.	1, 1384523.	3, 7589111.
0, 001523.	1, 1004050.	3, 6805007.
0, 001737.	1, 0635417.	3, 6045008.
0, 001965.	1, 0276924.	3, 5282166.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 002210.	0, 9926262.	3, 4585696.
0, 002471.	0, 9581521.	3, 3877717.
0, 002751.	0, 9241544.	3, 3176442.
0, 003052.	0, 8905389.	3, 2501518.
0, 003375.	0, 8571832.	3, 1820652.
0, 003723.	0, 8240147.	3, 1151922.
0, 004098.	0, 7909457.	3, 0481934.
0, 004503.	0, 7579166.	2, 9805222.
0, 004941.	0, 7249365.	2, 9160762.
0, 005415.	0, 6917319.	2, 8481377.
0, 005930.	0, 6584242.	2, 7803314.
0, 006489.	0, 6250284.	2, 7134312.
0, 007098.	0, 5913351.	2, 6455244.
0, 007762.	0, 5573717.	2, 5775029.
0, 008488.	0, 5230226.	2, 5069847.
0, 009283.	0, 4884042.	2, 4378433.
0, 010155.	0, 4533155.	2, 3665981.
0, 011115.	0, 4177526.	2, 2950707.
0, 012172.	0, 3816878.	2, 2218495.
0, 013340.	0, 3450807.	2, 1484919.
0, 014633.	0, 3078164.	2, 0730490.
0, 016068.	0, 2699125.	1, 9965894.
0, 017666.	0, 2312560.	1, 9181003.
0, 019450.	0, 1918490.	1, 8386378.
0, 021446.	0, 1516046.	1, 7576477.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 023689.	0, 1103849.	1, 6732118.
0, 026216.	0, 0683041.	1, 5885787.
0, 029073.	0, 0251172.	1, 5003306.
0, 032317.	9, 9807449.	1, 4106483.
0, 036012.	9, 9352622.	1, 3185320.
0, 040242.	9, 8884237.	1, 2228779.
0, 045106.	9, 8402164.	1, 1259231.
0, 050725.	9, 7903461.	1, 0247555.
0, 057251.	9, 7387794.	0, 9185863.
0, 064873.	9, 6855691.	0, 8104641.
0, 073832.	9, 6303271.	0, 6993220.
0, 084428.	9, 5728717.	0, 5810869.
0, 097054.	9, 5130536.	0, 4584448.
0, 112219.	9, 4507057.	0, 3307788.
0, 130590.	9, 3855174.	0, 1978331.
0, 153056.	9, 3170620.	0, 0569290.
0, 180822.	9, 2451811.	9, 9097618.
0, 215542.	9, 1692642.	9, 7525511.
0, 259530.	9, 0891203.	9, 5879731.
0, 316085.	9, 0037972.	9, 4105652.
0, 390024.	8, 9130060.	9, 2233404.
0, 488559.	8, 8153747.	9, 0208556.
0, 622805.	8, 7099855.	8, 8012291.
0, 810495.	8, 5955830.	8, 5573610.
1, 081057.	8, 4719390.	8, 3027439.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
1, 485707.	8, 3328347.	8, 0093381.
2, 118846.	8, 1775489.	7, 6793016.
3, 167268.	8, 0017315.	7, 3023746.
5, 035475.	7, 7987962.	6, 8885581.
8, 709814.	7, 5610079.	6, 3293455.
17, 024616.	7, 2703947.	5, 6634545.
40, 378427.	6, 8963717.	4, 7614436.
136, 333125.	6, 3692481.	3, 3319086.
1090, 985747.	5, 4683489.	
∞	$-\infty$	

In conſtruenda hac, exempli loco, tabula, ab initiali ſupra dicto valore $2\psi = 18° \; 24' \; 46''$ per ſingulos anguli 2ψ gradus *integros* ſumus progreſſi. At vero, pro ipſa praxi balliſtica ſi conſtruendae forent tales tabulae, ab initiali valore anguli 2ψ, pro quo fit tabulae argumentum $= 0$, ad gradum proximum, per ſingula huius anguli minuta prima progredi oportebit; et ab eo inde gradu, vsque dum logarithmus interpolatorius ſatis decreverit, ad ſingulos anguli 2ψ ſemigradus tabulam extendi conueniet. Ceterum cum in hac tabula ſuppoſitum ſit $\mu = 3,0615$; ea, quae de definienda ex iactu quodam probatorio celeritate globi initiali modo notata ſunt, huic de aëris reſiſtentia hypotheſi in tabulae ad experimenta applicatione conformari neceſſe eſt.

Tabula

Tabula Secunda.

pro inueniendo celeritate initiali globi ſub angulo 45° ſuper plano horizontali in aëre reſiſtente ad datam diſtantiam proiiciendi, ex datis pondere et diametro globi.

Argumentum:

Diſtantia ducta in quadratum diametri globi et diuiſa per pondus globi.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
∾	∾	
41, 590358.	4, 1408267.	2, 9568733.
31, 820781.	3, 6975865.	2, 5922939.
26, 695974.	3, 4741813.	2, 4012377.
23. 176093.	3. 3207831.	2, 2734178.
20, 510814.	3, 2021780.	2, 1757953.
18, 367821.	3, 1043620.	2, 0989235.
16, 586180.	3, 0203151.	2, 0359928.
15, 069438.	2, 9460186.	1, 9828173.
13, 754738.	2. 8789455.	1, 9378059.
12, 601000.	2, 8174086.	1, 8977313.
11, 57555[illegible].	2, 7602241.	1, 8633798.
10, 658410.	2, 7065202.	1, 8326626.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
9, 831644.	2, 6556463.	1, 8048533.
9, 081387.	2, 6070940.	1, 7799675.
8, 397586.	2, 5604616.	1, 7576723.
7, 772110.	2, 5154270.	1, 7371602.
7, 197525.	2, 4717227.	1, 7185217.
6, 668295.	2, 4291267.	1, 7013584.
6, 179391.	2, 3874468.	1, 6855882.
5, 726860.	2, 3465302.	1, 6720288.
5, 308070.	2, 3062270.	1, 6570991.
4, 917360.	2, 2664149.	1, 6447176.
4, 554328.	2, 2269833.	1, 6348212.
4, 217240.	2, 1878329.	1, 6231830.
3, 902430.	2, 1488702.	1, 6136548.
3, 608873	2, 1100114.	1, 6037421.
3, 334438.	2, 0711773.	1, 5965394.
3, 078961.	2, 0322923.	1, 5877819.
2, 839982.	1, 9932855.	1, 5805496.
2, 616692	1, 9540863.	1, 5740611.
2, 408173.	1, 9146279.	1, 5674366.
2, 213506.	1, 8748430.	1, 5607676.
2, 031498.	1, 8346645.	1, 5561403.
1, 861712.	1, 7940252.	1, 5495701.
1, 703162.	1, 7528560.	1, 5465081.
1, 555423.	1, 7110875.	1, 5406296.
1, 417766.	1, 6686571.	1, 5369453.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
1, 289392	1, 6254566.	1, 5337774.
1, 170318.	1, 5814386.	1, 5283827.
1, 059531.	1, 5365088.	1, 5276647.
0, 956632.	1, 4905661.	1, 5227966.
0, 861514.	1, 4435461.	1, 5205105.
0, 773435.	1, 3953128.	1, 5182633.
0, 692176.	1, 3457651.	1, 5153530.
0, 617086.	1, 2947784.	1, 5127799.
0, 547998.	1, 2422140.	1, 5110987.
0, 484807.	1, 1879351.	1, 5091180.
0, 426901.	1, 1317628.	1, 5069850.
0, 374000.	1, 0735156.	1, 5051680.
0, 325877.	1, 0129862.	1, 5037276.
0, 282297.	0, 9499348.	1, 5021859.
0, 242950.	0, 8840921.	1, 5014074.
0, 207521.	0, 8151497.	1, 5009885.
0, 175866.	0, 7427479.	1, 5003458.
0, 147660.	0, 6664668.	1, 4997030.
0, 122778.	0, 5858128.	1, 4988651.
0 100878.	0, 5001966.	1, 4980272.
0, 081848.	0, 4089088.	1, 4913694.
0, 065369.	0, 3110833.	1, 4847116.
0, 051284.	0, 2056477.	1, 4818752.
0, 039408.	0, 0912496.	1, 4790388.
0, 029644.	9, 9661516.	1, 4762024.

Argu-

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 021519.	9, 8280669.	1, 4733660.
0, 015050.	9, 6739005.	1, 4705296.
0, 010040.	9, 4993153.	1, 4676931.
0, 006292.	9, 2979596.	1, 4587324.
0, 003639.	9, 0599911.	1, 4497716.
0, 001864.	8, 7689227.	1, 4453090.
0, 000788.	8, 3938506.	
0, 000234.	7, 8653987.	
0, 000029.	6, 9622048.	
0, 000000.		

§. 9. Vtriusque iam huius tabulae vſum paucae ſequentes docebunt regulae et ſubiuncta illuſtrabunt exempla:

Problema 1.

Datis globi pondere $= P$ et diametro $= \delta$, tormenti eleuatione $= I$, et obiecti ſuper horizontali plano feriendi diſtantia $= \Omega$; quaeritur celeritas initialis, quacum globus proiici debet, vt ſcopus feriatur.

Totus iam calculus ex ſuperiori tabula ſequenti operatione, ſimplici logarithmorum additione, abſoluitur:

I.) Exprimatur obiecti feriendi diſtantia et globi diameter in pedibus rhenanis eorumque partibus decimalibus, pondus vero globi in eiusmodi libris et partibus earum decimalibus, quarum librarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani. Diſtantia obiecti multiplicetur per quadratum diametri

 globi

globi et productum diuidatur per pondus globi; habebitur *argumentum* exempli $= \frac{\delta^2 . \Omega}{P}$.

II.) Cum hoc argumento in Tabula, dato angulo proiectionis respondente, quaeratur argumentum proxime maius, eique correspondens excerpatur Logarithmus Coëfficientis et Logarithmus Interpolatorius. Ad Logarithmum Coëfficientis addatur logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuisi; numerus, horum logarithmorum summae respondens, erit quadratum celeritatis initialis quaesitae prope verum; quod vt exactius habeatur, siquidem differentia inter argumentum exempli propositi et argumentum tabulae proxime maius notabilis sit,

III.) Ad Logarithmum huius differentiae addatur logarithmus interpolatorius et logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuisi, supra iam inventus; numerus trium horum logarithmorum summae respondens erit correctio quadrati prope veri modo inuenti, quae correctio semper est subtractiua; habebitur ergo quadratum verum hincque ipsa celeritas initialis quaesita vera in pedibus rhenanis expressa.

Exemplum I.

In dissertatione III. *Euleri* supra citata et Commentariis Berolinensibus inserta sequens exemplum occurrit, quod iam supra §. 5. ad calculum reuocauimus.

Globus, diametri dimidii pedis rhenani, et cuius pondus $= \frac{9}{10}$ ponderis pedis aquae cubici rhenani, super plano

plano horizontali ſub angulo $45°$ proiicitur celeritate initiali $= 485,716$. ped. rhen. et ex tabulis *Eulerianis* prodit iactus amplitudo $= 3779$. ped. rhen.

Inuerſo iam caſu, ponamus obiecti feriendi diſtantiam eſſe 3779. ped. rhen. et quaeri celeritatem initialem, globo huic imprimendam, vt ſub memoratis circumſtantiis feriatur obiectum; quod *inuerſum* problema ex tabulis iſtis ſolui non poteſt.

Ex tabulis hic exhibitis operatio ſequenti facili calculo abſoluitur:

Cum ſit $P = 57,6$; $\delta = 0,5$; $\Omega = 3779$.

erit *argumentum* exempli $= \frac{\delta^2 \Omega}{P} = 16,403211$.

In tabula, angulo proiectionis $45°$ reſpondente, invenitur argumentum proxime maius $= 16,586180$

cui reſpondet Logarithmus coëfficientis $= 3,0203151$.
addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$ $= 2,3624825$.

erit Log. quadrati prope veri cel. quaeſitae $= 5,3827976$.
adeoque quadrat. prope verum celer. quaeſ. $= 241433$
hincque ipſa celeritas initialis quaeſita
prope vera $= 491$.
quae igitur non niſi 5 pedibus maior eſt vera.
Vt exactius definiatur,
capiatur argumentorum differentia $= 0,182969$

Ad cuius Logarithmum $= 9,2623776$.

 adde

adde Logarithmum interpolatorium tabulae	=	2, 0359928
et Logarithmum $\frac{P}{\delta^2}$	=	2, 3624825
habebitur Log. correctionis subtractiuae	=	3, 6608529.
Hinc Correctio	=	− 4578.
erat autem quadratum cel. prope verum	=	241433
Hinc quadratum verum celeritatis quaes.	=	236855.
et ipsa celeritas quaesita	=	486, 6.

quae igitur non nisi nouem partibus decimalibus a vera = 485, 7 in excessu aberrat.

Exemplum 2.

Globus, cuius diameter = 1. ped. rhen. et cuius pondus = 138 libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhen. proiicitur sub angulo 45° celeritate initiali = 400. ped. rhen. atque ex tabulis *Eulerianis* colligitur amplitudo iactus super plano horizontali = 2467. ped. rhen.

Inuerso igitur casu, quaeritur celeritas initialis globo imprimenda, vt sub datis hisce circumstantiis obiectum feriatur ad 2467. ped. rhen. remotum.

Erit ergo $P = 138$; $\delta = 1$; $\Omega = 2467$.

Hinc *argumentum* exempli $= \frac{\delta^2 \Omega}{P} = 17, 876812$.

In tabula angulo proiectionis 45° respondente, inuenitur

argumentum proxime maius	=	18, 367821.
cui respondet Log. coëfficientis	=	3, 1043620.
adde Log. $\frac{P}{\delta^2}$	=	2, 1398791.
erit Log. quadrati prope veri cel. quaes.	=	5, 2442411.
hinc quadratum prope verum cel. quaes.	=	175485.
atque ipsa celeritas quaesita prope vera	=	419.

quae

quae igitur adhuc 19 pedibus maior eſt vera.
Vt exactius definiatur,

capiatur argumentorum differentia	=	0, 491009.
Ad cuius Logarithmum	=	9, 6910895.
adde Logarithmum interpolat. tabulae	=	2, 0989235
et Logarithmum $\frac{p}{\delta^2}$	=	2, 1398791.
habebitur Log. correct. ſubtractiuae	=	3, 9298921.
Hinc ipſa correctio	=	— 8509.
Erat autem quadratum prope verum cel.	=	175485
Hinc quadratum verum cel. quaeſitae	=	166976
et ipſa celeritas quaeſita	=	408.

quae igitur octo pedibus maior eſt ea, quam in calculo ex tabulis *Eulerianis* inſtituendo ſuppoſuimus; neque vero etiam maior conſenſus in hoc exemplo ſperari poterat, cum caſus propoſitus inter duas ſpecies tabularum a Ill. Comite de *Craevenitz* ſecundum methodum *Eulerianam* conſtructarum medius ſit, hincque amplitudo iactus non niſi ſumto medio proportionali computari potuerit, quae approximatio inter angulos aſymptoticos quinque graduum interuallo diſtantes nimis incerta eſt. Ceterum et hanc differentiam partis $\frac{1}{50}$ totius propemodum pro nulla eſſe reputandam ob experimentorum, ſummo ſtudio inſtitutorum, diſcrepantiam incomparabiliter maiorem, ex ſequenti exemplo abunde patebit.

Exemplum 3.

Inter experimenta Pariſiis a Ill. Domino *de Beauvoir* inſtituta ſequens huc pertinens occurrit:

Diame-

Diameter globi erat 11 poll. 10. lin. pedis regii gallici, et pondus globi 142 librarum, quarum 70 efficiont pondus pedis aquae cubici gallici. (*) Proiiciebatur hic globus sub angulo 45° pulueris pyrii libris $3\frac{1}{4}$, idemque iactus, seruatis, quam fieri potuit, exactissime omnibus circumstantiis iisdem quinquies repetebatur, iactuumque amplitudines erant 490; 536; 505; 489; et 554 hexapedarum gallicarum; ita, vt differentia inter maximam et minimam amplitudinem fuerit = 65 hexapedis = 390 ped. gall. media vero amplitudo = 515. hexaped.; vnde patet, vim motricem seu celeritatem initialem, non obstante reliquarum iactus circumstantiarum aequalitate, insigniter variasse; quae variationes ex tabulis hic exhibitis iam facile ad calculum reuocantur, et sequenti tabula exhibentur: Cum scilicet pes gallicus regius sit ad rhenanum vti 1000 : 1035; et 63, 1 librae gallicae efficiant pondus pedis aquae cubici rhen.; erit pro tabulis nostris P = 144; et δ = 1, 0206, assumtisque singulis horum iactuum amplitudinibus sequentes prodeunt celeritates globi initiales:

Iactus	Amplitudo ped. rheh.	Cel. globi initial.
I.	. . 3043 - - -	. . . 509. ped. rhen.
II.	. . 3328 - - -	. . . 566. - - -
III.	. . 3136 - - -	. . . 526. - - -
IV.	. . 3036 - - -	. . . 508. - - -
V.	. . 3440 - - -	. . . 591. - - -

Variatio itaque celeritatis initialis a maxima ad minimam ad 83. ped. rhen. excurrit et media inter omnes 540 ped. rhen. fuit; ex quo tamen ipso patet, haec experimenta

(*) vid. Cours de Mathematiques a l'usage du Corps Royal de l'Artillerie par M. *Bezout* Tome IV. pag. 456.

menta non mediocri cura fuisse instituta, si perpendamus, quod in Cel. *Huttoni* dissertatione Transactionibus Anglicanis inserta, de vi pulueris pyrii legitur, accidisse ipsi in experimentis circa globorum celeritatem initialem pendulorum ope institutis, vt haec celeritas, circumstantiis omnibus, quantum fieri potest, iisdem, vltra trecentos pedes, seu partem totius plus quam dimidiam variauerit.

§. 10. Haec igitur allata exempla cum sufficiant pro ostendenda facili applicatione tabulae, cuius ope ex datis globi pondere et diametro, eleuatione mortarii et obiecti feriendi distantia colligitur celeritas initialis, globo, vt propositum feriat scopum, imprimenda; et cuius ope, quod primarium in re ballistica problema est, ex data *iactus probatorii sic dicti* amplitudine computari queat etiam in aëre resistente aeque facile, ac in vacuo, celeritas initialis, globo a data pulueris pyrii quantitate impressa; sequitur alterius tabulae hic exhibitae vsus in resoluendo sequenti problemate:

Problema 2.

Datis globi pondere $= P$; diametro $= \delta$ et celeritate initiali $= c$ cum angulo proiectionis $= I$; quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Hoc problema ex tabula superiori facili et prompto calculo resoluitur:

I.) Exprimatur globi pondus in libris, quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani; diameter globi eiusque celeritas initialis in pedibus rhenanis eorumque partibus decimalibus. Diuidatur pondus

 globi

globi per productum quadratorum diametri et celeritatis initialis globi; habebitur *argumentum* Exempli $= \frac{P}{\delta^2 c^2}$.

II.) Cum hoc argumento in tabula, dato proiectionis angulo respondente, quaeratur argumentum proxime minus, eique correspondens excerpatur Logarithmus coëfficientis et Logarithmus interpolatorius. Ad hunc Logarithmum coëfficientis addatur Logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuisi; numerus horum Logarithmorum summae respondens erit amplitudo iactus quaesita prope vera in pedibus rhen. expressa; quae vt exactius habeatur, siquidem differentia inter argumentum casus propositi et argumentum tabulae proxime minus notabilis sit,

III.) Ad Logarithmum huius differentiae addatur Logarithmus interpolatorius et Logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuisi; numerus trium horum Logarithmorum summae respondens erit correctio amplitudinis prope verae modo inuentae, quae correctio semper est subtractiua; habebitur ergo vera iactus amplitudo in pedibus rhen. expressa.

Exemplum 1.

Globus, diametri dimidii pedis rhen. et ponderis 57. 6 libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, proiicitur sub angulo 45°. celeritate initiali

=

$= 485, 7$ ped. rhen. [Quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Ex tabulis hic exhibitis calculus ita se habet: Cum sit $P = 57, 6$; $\delta = 0, 5$; $c = 485, 7$. Erit *argumentum* exempli $= \frac{P}{\delta^2 c^2} = 0, 000976$. In tabula, angulo proiectionis 45° respondente, inuenitur argumentum proximo minus - - - - - $= 0, 000954$

cui respondet Log. coëfficientis	$= 1, 2197464$
addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - -	$= 2, 3624825$
erit Log. amplitudinis prope verae	$= 3, 5822289$
hinc amplitudo iactus prope vera	$= 3821.$
Vt exactius definiatur	
capiatur argumentorum differentia	$= 0, 000022$
Ad cuius Logarithmum - -	$= 5, 3424227$
adde Log. interpolatorium tabulae	$= 3, 9304917$
et Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - -	$= 2, 3624825$
habebitur Log. correct. subtractiuae	$= 1, 6353969$
hinc correctio - - -	$= -43$
erat autem amplitudo prope vera	$= 3821$
Ergo vera amplitudo iactus, vt ante §. 5 et 7, - -	$= 3778$ ped. rhen.

Exemplum 2.

Globus, cuius diameter $= 1$. ped. rhen. et cuius pondus $= 138$ libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, proiicitur sub angulo 45°. celeritate initiali $= 400$. ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Ex tabulis Ill. *Euleri*, computando hoc exemplum pro binis tabularum ſpeciebus, inter quas cadit, et ex binis amplitudinibus iactuum ita inuentis ſumendo proportionale debitum, colligitur amplitudo iactus $= 2467$. ped. rhen.

Ex ſuperioribus tabulis calculus facile ita expeditur: Cum ſit $P = 138$; $\delta = 1$ et $c = 400$;

erit *argumentum* exempli $= \frac{P}{\delta^2 c^2} = 0,000862$.

In tabula, angulo proiectionis 45°. reſpondente, inuenitur argumentum proxime minus - $= 0,000786$,

cui reſpondet Log. coëfficientis $= 1,2640577$.
addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - - $= 2,1398791$.

erit Log. amplitudinis prope verae $= 3,4039368$.
hinc amplitudo iactus prope vera $=$ 2535. ped. rhen.
Quae vt exactius definiatur,
capiatur argumentorum differentia $= 0,000076$.

Ad cuius Logarithmum - - $= 5,8808136$.
adde Log. Interpolat. tabulae - $= 4,0255108$.
et Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - - - - $= 2,1398791$.

habebitur Log. correct. ſubtractiuae $= 2,0462035$.
hinc correctio amplitudinis - $= -$ 111.
Erat autem amplitudo prope vera $=$ 2535,

Ergo amplitudo iactus vera - $=$ 2424. ped. rhen.

quae ergo ab Ill. *Euleri* tabulis 43 pedibus ſeu parte $\frac{1}{60}$ totius in exceſſu ob rationes ſupra §. 9. allegatas differt.

Vt nunc tabulas noſtras etiam ad experimentum adplicemus, reuocemus ad calculum id experimentum, quod

quod ex eorum, quae Ill. *de Beauvoir* Parisiis instituit, numero supra recensuimus; vbi quidem nunc supponamus globi celeritatem initialem mediam supra ex ipsis his tabulis conclusam, cum hic non nisi de methodo harum tabularum exemplis illustranda quaestio sit.

Exemplum 3.

Globus cuius diameter 11 poll. 10 lin. pedis regii gall. et cuius pondus 142 libr. gall., proiicitur sub angulo 45°. celeritate initiali 521, 7 ped. gall. Quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Cum, reductis mensura gallica ad rhenanam et pondere globi ad eiusmodi libras, quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, in hoc exemplo sit

$P = 144$, $\delta = 1,0206$ et $c = 540$;

erit *argumentum* exempli $= \frac{P}{\delta^2 c^2} = 0,000474$.

In tabula, angulo proiectionis 45°. respondente inuenitur argumentum 0,000478, quod tam prope ad argumentum exempli accedit, vt tantillae differentiae rationem habere etsi facile, tamen superfluum foret:
Huic argumento respondet

Log. coëffic. - -	=	1, 3650393
cui addatur Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - -	=	2, 1406513
habebitur Log. amplitud. quaesitae	=	3, 5056896.
adeoque amplitudo iactus quaesita	=	3203. ped. rhen.

quae non nisi 16 pedibus seu $\frac{1}{188}$ totius a media iactus amplitudine = 3197. differt, cum in ipsis experimentis inter eosdem iactus differentia amplitudinum vltra 400 ped. adeoque vltra $\frac{1}{9}$ totius fuerit reperta.

§. 11. Ex hisce igitur exemplis aliisque concludi posse videtur, tabulas ballisticas methodo, in superioribus exposita constructas et satis cum experientia consentire et, cum earum vsus non nisi simplicissimam Logarithmorum tractationem exigat, ad praxin apprime aptas esse; qua applicationis practicae facilitate exigua illa a summo theoriae rigore aberratio, quam in methodo memorata approximationis necessitati indulsimus, optime compensatur, inprimis cum summus theoriae rigor ob varias in tormentorum explosione circumstantias, in quas nullum est artis imperium, vacillante executionis incertitudine absorbeatur.

Neque tamen de gradu praecisionis eiusmodi tabularum ante iudicari velim, quam praeter ea, quae ad earum constructionem, pag. 183. monita sunt, etiam argumenta earum ad paullo vlteriores, quam quidem in superioribus, fractiones decimales fuerint euoluta. Ceterum etiam id notari conuenit, quod, licet in superiorum tabularum constructione determinatam quandam pro aëris resistentia hypothesin assumserimus ponendo $\mu = 3,0615$, (§. 3.) tamen ex praecedentibus perspiciatur, eas etiam ita adornari posse, vt valor μ maneat indefinitus. Cum scilicet sit

$$\frac{C}{\sqrt{B}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ Tang. } 2\psi \left(\frac{1 + \overline{\sin. 2\psi}^2}{\cos. 2\psi^2} \right). \quad \text{§. 6.}$$

$$\text{et } C = \Theta + \frac{1056{,}888 . P}{\mu . \delta^2 . c^2 . \overline{\cos. I}^2} . \quad \text{§. 3.}$$

$$\text{posito } \tfrac{1}{2} \text{ tang. I sec. I} + \tfrac{1}{2} \text{ Log. hyp. tang. } (45° + \tfrac{1}{2} I) = \Theta$$

$$\text{erit } \left(\frac{2\sqrt{B}}{3\sqrt{3}} \text{ tang. } 2\psi \left(\frac{1 + \overline{\sin. 2\psi}^2}{\cos. 2\psi^2} \right) - \Theta \right) . \frac{\cos. I^2}{1056{,}888} = \frac{P}{\mu . \delta^2 c^2}$$

ita, vt tabulae argumentum etiam constitui possit $\frac{P}{\mu . \delta^2 . c^2}$; et cum sit tota iactus amplitudo

II.

$$\Pi . V . D = 33,82045 . \frac{\Pi . V . P}{\delta^2 . \mu} . \text{ §. } 8;$$

coëfficiens $33,82045 . \Pi V$ in tabula exhibebitur, qui in $\frac{P}{\delta^2 . \mu}$ ductus totam dabit iactus amplitudinem; quales tabulae definiendo per experimenta valori ipsius μ inseruire possunt. Adde, quod etiam tabulas pro certo quodam ipsius μ valore constructas ad alium valorem (μ) facile reducere liceat; quem in finem talis tabulae argumenta per $\frac{(\mu)}{\mu}$ multiplicari, et ad Logarithmum coëfficientis in tabula exhibitum Logarithmum ipsius $\frac{\mu}{(\mu)}$, eiusque duplum ad Logarithmum interpolatorium addi oportebit; exactius vero, si ex tabulis pro valore μ constructis propositum aliquod exemplum in hypothesi valoris (μ) computare velimus: fiat argumentum exempli $\frac{P}{\delta^2 c^2} . \frac{\mu}{(\mu)}$ et ad Logarithmos coëfficientis et interpolatorium in tabula pro argumento proxime minori exhibitos addatur Logarithmus ipsius $\frac{\mu}{(\mu)}$; qui calculus sequenti exemplo illustrabitur: Iactus §. 5. descripti quaeratur amplitudo in communi pro aëris resistentia hypothesi. Erit ergo $(\mu) = 1$. §. 3; et $\mu = 3,0615$.

Hincque Argumentum - - -	$\frac{P}{\delta^2 c^2} . \frac{\mu}{(\mu)}$	$= 0,002990$
At argumento tabulae proxime minori - - -		$= 0,002751$
cuius differentia - - - - -		$= 0,000239$

competit Log. coëfficientis		Log. Interpolat
	0, 9241544	3, 3176442
adde Log. $\frac{P}{\delta^2}$	= 2, 3624825	2, 3624825
Log. $\frac{\mu}{(\mu)}$	= 0, 4859343	0, 4859343
Log. diff. =		6, 3783979
erit Log. amplitud.	= 3, 7725712	2, 5444589 = Log. Corr.

prope verae.

Hinc

Hinc amplitudo prope vera $= 5923$ et correctio $= - 350$. adeoque vera iactus amplitudo $= 5573$. ped. rhen. Si nunc iactus huius amplitudinem ex ipsis formulis fundamentalibus §. 4. datis computemus: erit

$B = 6,76622$; $C = 3,21225$; $D = 7794$. ped. rhen.

$k = 2,010746$; $f = 3,13026$; $g = 2,03853$.

$R = 78^\circ. 42'. 32''$; $V = 38^\circ. 4'. 45'' = 2284,7$.

vnde tota iactus amplitudo

$$= 0,000290888. \frac{B.V.D}{f\,k} = 5568. \text{ ped. rhen.}$$

quae ab ea ex tabulis modo inuenta sensibiliter non differt.

PHY-

PHYSICA.

DE

PVLLO MONSTROSO,

QVATVOR PEDIBVS, TOTIDEMQVE ALIS INSTRVCTO.

Auctore

C. F. WOLFF.

Vere anni 1777 cum ex ouis, quae gallinae incubanda suppofueram, aliquot reftarent, ex quibus pulli non prodierant; haec aperui. Reperi alia fterilia, alia pullis faecunda, fed mortuis. Inter haec vnum erat, ex quo pullum, quem hic trado, monftrofum extraxi. Ifte, vt reliqui mortui omnes, duodeuiginti circiter dierum effe videbatur, fiquidem partibus corporis omnibus perfectis, plumisque gaudebat et folo tumore abdominis, quo vitellus continetur, a pullis natis differebat.

Capite, collo, thorace et abdomine fimplex eft hic pullus et recte formatus, folis extremitatibus duplex, bigeminas alas gerens bigeminosque pedes. Et ipfe vitellus fimplex eft, vt totum ouum fuit.

Extremitates autem ita diſpoſitae ſunt vt facile naturales a praeternaturalibus et acceſſoriis dignocas. Illae enim non modo maiores ſed ſolitis locis ſitae quoque ſunt. Alae lateribus thoracis ſolito modo adſident, et pedes e regione iliaca vtrinque egrediuntur. Praeternaturales autem pullo, hactenus recte formato, additae, in ima eius regione lumbari, vel potius in ipſa ſede oſſis ſacri, collocatae exiſtunt; ea quidem ratione, vt pedes ſuperius ſint poſitae, alae inferius.

In ea nimirum regione, quam os ſacrum in animalibus occupat, duo femora apparent, ita collocata, vt radicibus ſuis ad ſpinam dorſalem conueniant, extremitatibus autem, genua referentibus, extrorſum diuergant. His tibiae cum tarſis, metatarſis et digitis ſuis ea ratione inarticulantur, vt pedes iſti monſtroſi ſurſum extendantur, ſitumque habeant, pedibus naturalibus et toti pullo oppoſitum. Quo pullum, ſi pedibus illis inſiſtere vel incedere vellet, inuerſum, capite directum deorſum, incedere oporteret.

Alae pedibus ſitu reſpondent. Proxime infra radices femorum illae radicibus ſuis loco uropygii adhaerent. Inde vtrinque extenduntur eo modo, vt coſtis deorſum marginibus pennatis ſurſum reſpiciant, adeoque alis naturalibus recta opponantur.

Hac ſitus conformitate alae pedesque omnino ad vnum pullum pertinere videntur, ſecundarium, et diuerſum a pullo, cui ſuperfluae adhaerent, ſed imperfectum, et ita po tum, quaſi capite et collo intra anum vel paulo magis antrorſum intra pubem primarii pulli abſconditus, pe-

re

ctore et abdomine autem in os facrum eius immerfus effet, et folis alis pedibusque furfum directis emergeret.

Haec fere externa huius pulli monftrofi conformatio eft, de qua tamen aliquid addendum erit, poftquam internarum partium conditionem expofuero. Vt autem partes accefloriae offis facri imprimis fedem et vropygii et ani et pubis occupare videntur; ita omnino quoque orificium ani extus fruftra quaefiui. Alae accefforiae radicibus fuis in fede vropygii inter fe confluunt, regionemque ibi interfcapularem pulli fpurii efficiunt (Tab. VI.) fub his alis igitur orificium ani quaerendum effe cenfebam. Incipit autem continuo a margine alarum deorfum tumor abdominis, vitellum continens, flauus et deplumis, fine vllo orificii veftigio. Neque de ani defectu dubitabam cum et *Hallerus* in caniculo monftrofo, cui tertius pes pofterior loco caudae erat excretus, eundem defectum inueniffet, et mihi fimilem obferuare contigiffet in monftro humano tripede. Sed haec res me fefellit et inteftina exitum monftrauerunt, vbi eum haud quaefiueram.

Incifo tumore abdominis, quo vitellus continetur, vidi illius tunicam tenuem et pellucidam, per quam flavus vitellus tranfparet, continuationem effe abdominis. Hac tunica remota, vitellus eximi poterat et feparari a canale inteftinorum tenuium, cui angufto collo adhaeret. Tum vifcera abdominis apparuerunt. Magnus mole ventriculus, vt folet in pullis, fimplex primo in confpectum venit cum hepate; deinde retro illum paruum volumen inteftinulorum; quo euoluto cognoui, praeter aliquas appendices, canalem fimiliter fimplicem effe. Duodenum

 enim

enim ſimplex a ſimplici ventriculo producitur. Hoc in ſimplex ieiunum et ileum continuat, quod tandem in duos canales diuiditur, quorum alter in craſſa inteſtina abit alter autem inteſtinulum producit, aliqua longitudine procedens, tum ſine caeco clauſum. Deinde loco duorum inteſtinorum caecorum, quae in gallinis ſunt, tria erant in hoc pullo aequali longitudine et figura ſimili, vt quaenam eorum naturalia, quod acceſſorium eſſet, definiri non poſſet. Caetera viſcera omnia thoracis et abdominis ſimplicia et naturalia ſunt. Ipſi renes, ipſumque inteſtinum rectum ſimplicia ſunt. Omnia ita formata ita poſita ſunt, qualia pullo primario, ad quem pertinent, conueniunt. Quod referri poſſet ad pullum ſpurium, nihil quidquam apparuit. Vt collo ergo vt capite, vt abdomine et thorace, viſceribus quoque hic caret omnibus.

Proſequendo autem inteſtinum rectum, nullum eius finem intra abdomen reperi, qui ſaccum caecum referret. Stylo in cauitatem inteſtini adacto, exitum huius, et verum orificium ani externe inter plumas detexi. Hoc iuxta femur ſiniſtrum pulli ſecundarii, quod pulli primarii acceſſorium femur dextrum eſt, in ea ſede aperiebatur, quae iuxta marginem dextrum oſſis ſacri eſt. Magnitudo ea eſt, vt aciculam aegrius admittat.

Hoc ſitu orificii conſiderato apparet, illud ſecundario non minus quam primario pullo conuenire, et vtrique commune eſſe. Vnde porro ſingularis haec pullorum compoſitio accuratius intelligitur et cuinam monſtrorum generi illa proxime accedat. Connati ſunt proprie perfectus

fectus pullus primarius et imperfectus secundarius regione peluis inferiori, vnde situ et positione sibi inuicem oppositi sunt, vt pedes vnius contra pedes alterius, alae contra alas dirigantur. Hactenus ergo hic pullus monstrosus conuenit cum monstro Duverneii in actis Parisinis descripto, et cum alio, quod in musaeo Academiae nostrae conseruatur; in quibus puellae integrae totis peluium partibus inferioribus, diductis cruribus, connatae sunt, vt vuluae et ani, solitis locis denegatis vtrinque inter vtriusque puellae crura existant. Differt autem ab his monstris humanis, quod minor et imperfectus pullus pelui non modo sed toto sui, quatenus exstat, corpore pelui maioris innatus sit, colloque capite thorace et abdomine careat.

Tabulae VI, huc pertinentis, prior figura pullum a tergo demonstrat, cuius in regione sacrali superius accessorii pedes, quibus pullum inuersum incedere oporteret, naturales, quibus ille erectus fertur, inferius, inter vtrosque alae apparent accessoriae.

Figura posterior viscera repraesentat, in quibus nihil praeter naturam est, exceptis caecis intestinulis, quorum tria recto adiuncta sunt, loco solitorum duorum.

GALE-

GALEOPITHECVS. VOLANS, CAMELLII. DESCRIPTVS

A

P. S. *PALLAS.*

Prodeat tandem, quam dudum promiſeram (*a*), ante ſexdecim fere annos parata deſcriptio animalis ex Indiae orientalis continenti et Inſulis rariſſimi, quod Zoologis, etiam recentiſſimis, vel perfunctorie tractatum, vel prorſus non ex autopſia cognitum fuit. Contigit nempe mihi in variis, quae paſſim perluſtraui, Muſeis quatuor huius animalis, ſub Linneano *Lemuris volantis* nomine alias ſatis noti, diuerſae aetatis ſpecimina examinare; in quibus, quicquid obſeruaui, ſcripto prodere iuuabit, dum Zoologus aliquis peregrinator Indicos nobis aperiat theſauros.

Antequam proprias obſeruationes exponam, non alienum erit Auctorum, qui Animal de quo dico adtigerunt, excerptum apponere. Primus, ni fallor, mentionem eius fecit *Bontius* (*hiſtor. Ind. natur.* ad calcem *Piſonis*

(*a*) Spicileg. Zoolog. *Faſcic.* III. p. 4.

nis cap. 16. *p.* 68.), idemque plura fere, quam quisquam alius, de eodem reliquit. Scribit, "in Guzurata Indiae "dari *Vespertiliones* (vt non male vocat) *mirabiles*, qui "gregatim, anserum syluestrium more, volent, circa ve-"speram in aëre oberrantes vel ex arboribus pendulos; "quique vti mole sua, qua felem aequant, ita et forma "singulari, aduenis sint miraculo. Belgas illis nomen *Si-* "*miarum alatarum* indidisse." Adiecit *Bontius* iconem animalis, rudem illam quidem, attamen ex vnguibus, pelle corpus totum ambiente et variegatione velleris apprime dignoscendam. Descriptio quoque eius satis verax est; in qua praesertim notandum, quod dicat: "*tripedales* repe-"riri, cauda spithamea; *vellere* supra cuniculorum more "mollissimo, cano nigroque vario vestiri; *capite* esse ob-"longo, adspectu foedo, rictu imbelli, *dentibus* exiguis, ad "rapinam compositis; *auriculis* paruis, membranaceis, ro-"tundis, et *vngues* habere in omnibus pedibus quinos, "quibus mordicus obuia quaeque retinet, imprimis arborum "fructus, quos depopulatur."

Post *Bontium* in *Miscellan. Nat. Curios. Dec. I. an.* 9. *et* 10. *obs.* 194. *p.* 455. *Hellbigius* inter varia Indiae curiosa recenset Feles volantes, quo sub nomine *Sciuros petauristas* (*b*) intellexisse videtur, et *Simias volantes*, huc verosimillime facientes, quas in Halmahera insula reperiri acceperat; noui caeteroquin nihil de earum indole atque forma adferens.

Melius

(*b*) *Miscellanea Zoolog. Hagae Com.* 1766. *edita p.* 54. *tab. VI. Pennant synops. of quadrup. p.* 292. *t.* 27.

Melius de historia huius animalis meruit *Camelli*, in Faunula Insularum Philippinensium per *Petiuerium Actis Anglicis* fasciculatim inserta. Extat descriptio, quam de *Galeopitheco* seu *Cato-simio volante* suo, vt satis concinne appellauit, communicauerat *Camellius*, anglico idiomate in *Actorum angl. vol. XXIII, n.* 277. *p.* 1065. eademque latine in *Vol. XXV. n.* 305. *p.* 2197. Recensentur ibi nomina animalis barbara apud Insularum Philippicarum incolas vsitata, Bisayarum *Colago* et *Caguang*, Pampangorum et Taghalanum *Gigua*. Describitur animal mole felis, forma simiae sed graciliore, longitudine a capite ad caudam trispithamali, latitudine inter expansa brachia bispithamea, inter extremos digitos trium spithamarum; trunci latitudo vulgo palmaris ponitur, pellis vero vtrinque expansae spithamea. Sed addit *Camellius* in Pampanga prouincia dari tantos, vt Chinensium vmbracula, seu spithamarum sex amplitudinem exaequent. *Colorem* (paulo aliter quam mihi describendus est) fuscescentem indicat, in dorso striis albidis, trunco longioribus, per membranas volaticas breuioribus, eleganter varium. *Faciem* adsimilat Cercopitheco, et explicat quomodo animal pelle totum corpus ambiente expansa, adinstar Sciuri volantis, ab vnius arboris cacumine ad medium alterius, *lento quasi volatu* descendat, tumque vt in aliam sese librare queat, huius iterum in cacumen saltabundum enitatur. Narrat denique *Pullos* geminis matrum mammis vnguium pariter ope et suctione adhaerescere; *victum* autem dubium pronunciat, tamen verosimillime in fructibus arborum positum, e quibus animal vix vnquam descendit.

Iconem

Iconem Galeopitheci a *Camellio* transmissam, sed rudem et inconditam, e solis fere pedum falculis, ambeunte membrana, lineolisque velleris dignoscendam *Petiverius Gazophylacio* suo inseruit (*Oper. Vol. I. tab.* 9. *fig.* 8. *catal. n.* 175.). Paulo meliorem deinde communicauit *Seba* (*thesaur. Vol. I. p.* 93. *tab.* 58. *fig.* 2. 3.), quae tamen neque proportionem palmarum recte seruat, neque strias velleris exprimit, et in coloratis exemplaribus huius operis prorsus alieno colore, gryseo-fusco, vniformi obducta cernitur. Idem est vitium iconis *Frischianae*, Sebana etiam peioris, cui pellis farcta *Musei Academiae Regiae Berolinensis* pro archetypo fuit, puluere et antiquitate fuscata, totaque (quum eam vidi) depilis, vti et pictura *Frischii*, meo quidem iudicio, optime refert, quanquam auctor pilos molles, talparum velleri similes adfuisse dicat (*Icon. avium class. VIII. tab.* 104.) et colorem quoque velleris, sed alium plane, quam fuscum istum iconi illitum, describat. Nescio sic etiam vnde sumserit *Frischius* quae de *Fele* sua *volante* (sic enim praeeunte *Seba* vocauit, sed *Martis volantis* nomen, nescio quo fundamento, aptius fore putat) ibidem retulit: "celerrimi esse volatus, "in inferiore tamen regione aëris morari, vbi gyratim "volans praedam sectetur;" — haec enim omnia supra adlatis *Bontii* atque *Camellii*, fide dignissimorum per autopsiam auctorum, e directo fere contradicunt.

Non praetermittendus, etiam hic, *Valentyn*, qui in verboso opere belgico (*Oud en nieuw Oostindien Vol. III. p.* 269.) Galeopitheci quoque videtur mentionem fecisse. Habet autem haec quae huc possunt referri: „Nautas na„uis cuiusdam (*'t Jacht van Boero*) quae Anno 1677.

„ prope Ternatam in insula Halemahera (Philippinensibus „ proxima) adpulerat, vidisse Animal quod in arboribus versabatur, ex vna in alteram transuolans. Habuerunt statim pro Sciuro, sed caput acutius visum est, similiusque „ capiti Didelphidis orientalis (quam in Moluccanis insulis vulgarem esse docet Idem). Villo innuitur fuisse cinereo, stria a rostro per dorsum ducta nigra. Neque in hoc solo vitiosa e relatis descriptio: „ pellis laterum a primorum pedum digitis vsque ad digitos posticorum expansa dicitur; „ recte vero „ pilo vestita et subtus instar „ abdominis alba „ describitur. „ Quum per arbores saltabat animal has pelles simul extendebat. Inquilini vero „ asseruerunt similia animalia ibi prius nunquam apparuisse. “ E quo concludi posset Galeopithecum volantem continentis Indiae, praecipue transgangeticae, atque Philippicarum insularum maxime inquilinum, rarius in proximas transire, et in Moluccanis, quas Belgae tenent, ignotum fere esse, quemadmodum etiam ad curiosorum in Belgio Musea rarissime peruenire solet.

Galeopithecum denique nostrum subindigitat *Nieuhofius* (*Gedenkwaardige brasilian. Zee en Lantreize p.* 283.) vbi de Sciuro petaurista agens addit: „ Dari analoga animalia specie simiarum, instar huius Sciuri pellibus inter „ pedes alata, quibus dentes vnguesque peracuti, oculi autem viuidi serique adspectus sint. “ Immo forsan et huc referendus esset locus in *Relationibus* german. *Missionariorum Halensibus Continuat.* 26. *Vol.* 3. *p.* 74. vbi sit mentio Vespertilionum magnitudine paruae felis, quos Missionariorum aliquis inter ramos arboris rhizophorae antemeridianis horis suspensos et ad solem sibilantes vidit; nisi ala-

alarum ſimul volatura fere biulnaris, et volatus longinquus indicarentur.

Praeter iſtos itaque nullus, quantum memini, itineratorum Galeopithecos expreſſis verbis adtigit. Miror etiam *Briſſonium*, quod nullam eius notitiam *operi* ſuo inſeruit, atque *Cel. Allamand* qui *Epitomen*, quam eius dedit, ſingulari hacce ſpecie, in Belgio tamen ſatis nota, non auxit. Plane etiam neglexit illud *Buffonius*, ne quidem inter animalia dubia, quorum elenchum in fine *Operis* tetrapodologici ſubnexuit, eiusdem mentione iniecta; vt videatur *Sebae* et *Camellio* omnem in hoc fidem denegaſſe. Magis aequus fuit *Illuſtr. Linnaeus* atque ſecundum ea, quae proſtabant, animal in *Syſtemate* ſuo ad genus naturale reducere tentauit; neque longe a veritate abſuit, *Lemuris volantis* titulo illud recenſens. Eſt enim vere media et ambigua ſpecies inter Lemurum et Veſpertilionum anomalas gentes, cuius adfinitatis ex vtraque parte momenta ſigillatim exponam.

Cum Lemuribus, quas Proſimias non male vocat *Briſſonius*, ſimilitudinem omnem conficiunt: *Capitis* forma; ſimplices *auriculae* atque naſus; *oris* ſtructura praeſertim interior; *dentium* primorum inferiorum ſitus inclinatus; *mammarum* ſitus pectoralis, et geminae ſingularum papillae; gracilitas *colli* et totius *trunci*, armorumque ſimul longitudo. Conueniunt etiam vtcunque: *digitorum* numerus, *myſtacis* teneritudo, *coſtarum* atque *vertebrarum* numerus et *clauicularum* praeſentia; quae tamen Veſpertilionibus pariter contigerunt.

Plura vero, fateor, in Galeopitheci volantis conformatione occurrunt, quibus a Lemurum etiam anomalis speciebus, quarum vna (*c*) dentibus atque tarsis, non digitis discrepat, abhorret, et quorum in nullo genere, praeter Vespertiliones, analoga exempla inueniuntur. Talia sunt: *dentium* forma anomala, *primorum* inferiorum crenae, superiorum defectus; *aurium* striae transuersae, quarum loco potius lobuli seu laminae intus transuersae Lemuribus; *pedum* primorum longitudo insignis et magni digiti; *pollicum* diuaricatio nulla, ne in plantis quidem, quarum digiti aequales, vt in Vespertilionibus semper sunt; *vnguium* seu falcularum magnitudo; *penis* cum scroto exsertus, omniumque maxime *pellis* volatica, omnes artus, inde a collo, ipsamque caudam, vt in Vespertilionibus deorsum inflexam, in vnum connectens, et *inter digitos* quoque, maxime palmarum expansa. — Vt alia nunc omittam, e quibus omnibus quis est? qui non videat per Galeopithecum volantem Naturam Vespertiliones (nimium abnormia a reliquis mammatis animalia) ferici quadrupedum et speciatim Lemurum generi, inter Simias et Didelphides intermedio, arctissimo affinitatis vinculo innectere voluisse; quemadmodum Phocas, per Trichechum ad Cetaceorum formam nimium tendentes, per anomalam *Lutram marinam* Kamtschatico-Americanam (*), terrestrium ferarum saeclis temperato transitu continuauit.

Equi-

(*c*) Lemur Spectrum. de quo varia monui in *Nou. Speciebus Quadrup. e Glir. ordine p.* 275. et quem sub nomine *Tarsier* habet *Buffonius.*

(*) I speciminibus pro Museo Petropolitano adlatis didici, quod *dentes primores* (supra seni), infra tantum quaterni, *pedum* situs, propor-

Equidem *Galeopithecus volans* secundum characteres dentium atque pedum, pelli volaticae habituique additos, peculiare genus videtur solus constituere. Si tamen generi cuidam naturali, inter iam confirmata, sit addendus (in vniuersum enim genera ex vnica anomala specie creata paucissima mihi arrident et vix vlla, praeter maximarum quadrupedum aliqua, naturalia sunt) debet ad Vespertiliones migrare, quibus inconstantissimum esse dentium numerum, alibi satis probaui. Interim *Camellii* nomen graecum feci, vt dubium animal appellarem, aptius enim non inueni (*c*) et nouum fingere nolui.

Specimina, e quibus sequens descriptio *Galeopitheci volantis* coaluit, sunt: primo, *foetus* elegantissimus, quem e *Museo Academiae Lugduno batauae* humaniter concessit *Cel. Allamand*, in *secunda Tabula fig.* 1. naturali magnitudine delineatus; deinde — *iuniora animalia* duo, alterum in *Museo Grouesteyniano* quod Hagae-Comitum latebat, alterum in *Museum Academiae Petropolitanae* e Belgio translatum, cuius iconem *Tabula VII.* sistit; — denique *pellis* farcta *adulti*, *Frischio* descripta, mihique a *Celeb. Gleditschio* perhumaniter communicata, cuius cranium et pedum ossa delinea-

portio et structura, maximeque *posticorum* forma remos Phocarum referentium, cum totius corporis habitu atque circumcaesura, et breuitate caudae, insignem Lutridis cum Phocarum genere affinitatem praeferunt.

(*c*.) Posset aliquis locum *Aristotelis* (*Hist. Anim. Lib. I. cap.* 5.) Galeopitheco nostro adplicare, vbi dicit; cute volare animalia quaedam, vt *Vulpeculam* et Vespertilionem. — Potuit autem Vespertiliones magnos, canino capite, hoc nomine subintellexissa Stagirita.

lineari curaui. Ex horum confideratione collecta funt, quae hic traditurus fum; pleniora fpero, quam vllus antea memoriae prodidit, lucemque Animanti remotiffimae Indiae addicto faltem aliquam adlatura.

Defcriptio

Galeopitheci volantis.

Tab. I. et II.

Moles adultorum minoris felis, funt autem forma longiores et graciliores.

Caput oblongum, macilentum, minime buccatum, roftroque vix adtenuato, obtufo, rotundato. (*Tab. VIII. fig.* 1. *b.*) *Nares* lunatae, transuerfae, approximatae. *Labia* tenuia, fuperius integrum, obfoleta ftria inter nares exaratum. *Rictus* mediocris. *Pili* teneri per labia et mentum fparfiffimi, vix myftacis nomine digni (*Tab. VII.*).

Os intus fpatiofum. *Palatum* planiufculum, laeue, medio longitudinali ftria eleuatum, et transuerfis vtrinque rectiufculis, circiter octonis fcamnatum. *Carina* oris aequaliter concaua. — *Lingua* in faucibus tantum adnata, maximam partem libera, carnofa, lata, depreffa, rotundata, tenuiter papillofa, extremo margine extenuato, papillis ciliato (vt in Didelphidum genere). *Funguli* duo obfoleti verfus bafin, et ftria fuperius verfus apicem longitudinalis (*Tab. VIII. fig.* 8.).

Den-

Dentes primores adultis in maxilla ſuperiore nulli; in *inferiore* ſex (*Tab VIII. fig.* 2. 5. *a a.*) pronati, diſtantes, lati, breues, margine pectinati, radice breui, conica, depreſſa, alueolis fragiliſſimis male inhaerentes. Horum par medium octies dentati, proximi nouies, extimi denticulis breuioribus, craſſioribus, obtuſis quinis.

Laniarii breuiſſimi, anomali, forma gloſſopetras contractas referentes, mucrone medio extus conuexi, acutiſſimi, et denticulis vtrinque circiter ternis ſerrati. Horum *infra verus* vtrinque tantum vnicus (*fig* 2. 5. *b b.*), proximus (*c.*) anteriore parte canino, poſteriore molaribus ſimilis; at *ſupra* laniarii duo (*fig.* 2. β. δ. 4. *c. d.*) quorum poſterior craſſior, maiorque molaribus adproximatus eſt; praeterea *acceſſorius* ante priorem denticulus tridentatus (*fig.* 2. α. *fig.* 4. *b.*)

Molares conferti, ſupra infraque quaterni, truncati, prominentiisque conicis muricati et inter ſe coëuntes (*fig.* 2. *et* 5. *d d. fig.* 4. *e—f.*).

In duobus *catulis* mihi viſis, quorum adultiorem exprimit *Tab. VII.* dentium primorum medii pectinata corona primi prominebant; reliquorum adhuc veſtigium nullum.

Oculi ad latera capitis maiuſculi; fiſſura palpebrarum longitudinalis; *Cilia* nulla.

Auriculae tantum baſi vellere veſtitae, paruae, tenues, rotundatae, verſus meatum contractae; intus ſtriis

 creber-

creberrimis, transuerſis, ſubtiliter ſcamnatae, vt in Veſpertilionibus.

Collum elongatum; *corpus* gracile, *thorax* ſterno planiusculus, poſtice compreſſior.

Pedes primores (maxime antibrachio) longi, macilenti; omnes pentadactyli. *Tibiae* poſticorum curuatae, muſculis adductoribus laxe ab inguine deſcendentibus ſubadſtrictae femori.

Digiti palmarum magni, exteriores tres aequales, duo interiores gradu breuiores; *plantarum* aequales, praeter pollicem: omnes plano-compreſſi, dorſali margine cute continua nexi (*Tab. VIII. fig.* 1.), pollices paulo laxiore. *Vngues* (*fig.* 6. 7. *e e.*) maximi, flaueſcentes, compreſſo-lati, velut ſemicordati, ſubtus in argutam aciem extenuati et mucrone exquiſite incuruo, acutiſſimo adunci. In *Foetu* Muſei Lugduno-bataui (*Fig.* 1.) vngues vix extra cutaneas vaginas proruperant.

Pellis volatica a baſi maxillae inferioris incipit, ſenſimque in latitudinem expanſa pedibus omnibus, caudaeque veli inſtar obtenditur, tenuis, limbo craſſiuſculo, integerrima; ſuperne digitos connectit totos et in plantis arctius conſtringit, caudam vero vsque ad apicem fraenat atque vt in Veſpertilionibus, verſus abdomen intorquet.

Anus ad baſin caudae, in ſinu quem efformant plicae duo ab imo inguine verſus caudam conuergentes. *Penis* exos, cum *ſcroto* didymo ante pubem exſertus (*Tab. VIII. fig.*

fig. 1.). *Papillae mammarum* vtrinque in thorace geminae, supra secundam tertiamque costam approximatae, obsoletissimae masculis. *Vberis* vtrinque solitarii vestigia in femineis exuuiis notaui.

Vellus tenerum, breuipile, laeuissimum, subtus rariusculum, et in iunioribus vix vllum, vt in Lemurum, Simiarumque catulis prona parte semper nudis. *Sutura* pilorum insignis a vertice, per ceruicem vsque ad scapulas fere longitudinalis. *Foetus*, quem delineaui (*Tab. VIII. fig.* 1.), plane depilis.

Color (cutis vbique albidus;) velleris in iunioribus (*Tab. VII*) subtus albo-pallidus; supra (vt icone expressum est) variegatus, e gryseo-lutescente cinereus, in capite immixtis pilis nigricantibus fuscescens. *Strigae* vtrinque duo atrae, parallelae, per pellem ceruicis dilatatam longitudinales, quae ad brachia in lineolas tenuiores sparguntur. Dorsum et pars membranarum corpori proxima lineolis transuersis nigris, supra scapulas et femora creberrimis et anastomosantibus, virgato-reticulata. *Area* gryseo-lutea, immaculata, supra genua pedum posticorum. *Puncta* sparsa nigra per ambitum membranae volaticae, praesertim versus caudam. In adulto Galeopitheco *Musei Berolinensis Frischius* fuscum depinxit vellus. Ego specimen a Tineis totum depilatum inueni, vix apparentibus in dorso passim reliquiis pilorum fusco-gryseorum.

Mensurae.

Specimen adultum *Musei Academiae Berolinensis*, extensa nempe animalis pellis, ab extremo rostro ad caudae

 api-

apicem aequat $1^{\prime}. 9^{\prime\prime}. 6^{\prime\prime\prime}$. caudae longitudo fere $7^{\prime\prime}$. cranii pedumque magnitudo *Tab. VIII.* accurate expressa est.

Mensurae Speciminum iuniorum, quae ex *Museis Grouesteyniano* atque *Petropolitano* pro descriptione habui, comparatae hoc modo habent:

	In Specim. Mus. Grouest.		In Specim. Petropolit.
Longitudo corporis totius a rostri extremo ad ortum caudae - -	$6^{\prime\prime}. 6^{\prime\prime\prime}$.	—	$6^{\prime\prime}. 8^{\prime\prime\prime}$.
—— caudae - - - - -	2. 9.	—	3. 1.
—— capitis, ad nucham - - -	2. 3.	—	2. 4.
—— —— circinno - - - -	1. 10.	—	- -
Distantia oculorum a nasi apice -	0. 10.	—	0. 10.
Longitudo scissurae palpebrarum - -	0. 4.	—	0. $4\frac{1}{6}$.
—— interualli ab oculo ad aurem -	0. $4\frac{1}{5}$.	—	0. 5.
—— colli circiter - - - -	1. 2.	—	1. 3.
—— humerorum - - - -	1. 4.	—	1. $5\frac{1}{5}$.
—— antibrachii - - - -	1. 6.	—	1. $7\frac{1}{6}$.
—— carpi cum metacarpo - -	0. 6.	—	0. $7\frac{1}{6}$.
—— phalangum priorum - -	0. $3\frac{1}{3}$.	—	0. 4.
—— phalangum vltimarum - -	0. $4\frac{1}{5}$.	—	0. $4\frac{1}{4}$.
Latitudo verticalis phalangum media	0. $1\frac{1}{2}$.	—	- -
Longitudo vnguium ab articulo - -	0. 3.	—	- -
—— partis extra cutem prominentis -	0. $1\frac{2}{3}$.	—	- -
—— femorum - - - -	1. 2.	—	1. $3\frac{1}{4}$.
—— tibiarum - - - -	1. 5.	—	1. $6\frac{1}{6}$.
—— tarsi cum metatarso - -	0. 9.	—	0. 9.
—— digitorum phalangis primae -	0. $2\frac{1}{6}$.	—	0. 3.
—— —— secundae phalangis - -	0. 3.	—	0. $3\frac{1}{4}$.
—— vnguium - - -	0. $2\frac{1}{3}$.	—	- -
Inter pedum priorum expansorum vngues	- -	—	9. 2.
—— —— posticorum expansor. vngues	- -	—	6. 4.

Ex

Ex *Foetu* tandem menſuras ſequentes conſignaui:

Longitudo tota ab apice roſtri ad extremum caudae	4''.	6'''.
—— —— caudae - - - -	1.	6.
Interuallum inter expanſas palmas - -	3.	10.
Diſtantia vmbilici a gula - - -	1.	8.
—— —— a genitali - - - -	0.	3½.

Reliquas proportiones figura exactiſſima (*Tab. VIII. fig.* 1.) fideliter exponit.

Anatomica.

Tab. VIII. fig. 2 — 7.

In vnico ſpecimine potui obſeruare *Hepar*, quod erat bipartitum: *dextra* portio integra, latior; *ſiniſtra* multo longior, ad lumbos longitudinaliter deſcendens, in tres fiſſa lacinias, quarum infima erat anguſtiſſima.

Linguam et *dentes* ſupra deſcripſi. *Cranium* praeſertim ſingulare: *plicis* a proceſſu ſupraciliari verſus occiput tendentibus, figura Zygomatis et ſuperioris maxillae, palati conſtitutione, aliisque *Tabulae* noſtrae *fig.* 1 — 4. graphice expreſſis. — *Coſtae* duodecim, quarum ſeptem verae. — Adſunt etiam in ſceleto *Clauiculae.*

Pedum digiti omnes, praeter falculam, biarticulati; ſed pollices tantum vnica phalange et oſſe metacarpi vel metatarſi breuiore et robuſtiore conſtant. *Phalanges* omnium digitorum *primae*, vt et phalanx pollicis (*Tab. VIII. fig.* 6. 7. *c c c.*) compreſſae, ſubarcuatae, ſubtus acie gemina, verſus extremitatem decreſcente criſtatae atque pro tendinibus canaliculatae. *Extremae* phalanges (*ddd*) rectae, teretiuscu ae, longiores. *Officula fefamoidea* ad omnes articulos metacarpi cum phalangibus fupernae; et cartilaginea *rotula* ad articulos priorum et extimarum phalangum fubtus. *Falcularum* officula (*eee.*) ad condylum vsque cornea vagina obducta. — In plantis *os metatarfi* extimi digiti ad carpum obtufe productum (*fig.* 7. *g*) vt in homine. *Tarfus* quoque (*a.*) aftragalo (*f.*), quem includunt malleoli, et calcaneo (*h.*) humanae ftructurae perfimilis. — *Radius* in anticis pedibus verfus carpum nullus, fed fola *vlna* (*fig.* 6. *A.*), ope carpi breuiffimi (*a.*) metatarfo (*b.*) commiffa; Radiis vero fuperne vlnae coadunatus, vt in Vefpertilionibus.

In liquore afferuatis obferuaui *mufculum* fub axilla ortum, interne brachium legentem, a cubito infigni tendine (*Tab. VIII fig.* 1. *aa.*) in velum late excurrere et comitantibus vafis fanguiferis fpargi verfus marginem. Eodemque modo in Vefpertilionibus vafa alas adeunt.

In pofticis pedibus *fartorius* robuftus, latus, a fummo inguine oritur, et adtenuatus in tendinem anguloque fubtenfus, tibiam fortiter adducit. *Flexores* etiam laxius femori accubant.

SER-

SERTVLARIAE SPECIES DVAE DETERMINATAE.

Ab

I. LEPECHIN.

In parte poſteriore actorum Academiae pro ann. 1778 propoſui ſpeciem nouam ſertulariae ſub nomine *ſertulariae obſoletae* circa promontorium *Kanin Nos* lectae; nunc in medium profero nouas ſpecies duas, ibidem repertas, quae primo intuitu referunt ſpecies ſertulariae iam ſatis clare deſcriptas atque delineatas ſub nomine *ſertulariae abietinae* et *ſertulariae cupreſſinae* (a). Aſt multae adſunt notae characteriſticae, quae noſtras a dictis ſeparandas ſuadent; quaeque familiam ſertulariae adaucturae, propriam ſibi denominationem iure expoſtulant. Prima igitur earum eſto.

Sertularia pinaſter.

Sertularia pinnata, pinnis ſubalternis, cylindricis; ob calyculos plerumque ſexfariam diſpoſitos, echinatis; ouariis vtricularibus turgidis, ſubdiaphanis, oſculo ſimplici.

De-

(*) Confer celeberrimi *Pallas* Elenchi Zoophytor. p. 133. no. 81. et pag. 141. no. 89.

Deſcriptio.

Pro radice inſeruiunt ipſi fibrillae reptantes, teſtaceis aut lapillis infixae. Ex his exeunt ſtirpes cornei, vt plurimum ſimplices, aliquando inferne diuiſi, verſus inferiora coloris brunnei, ſed quo magis aſcendunt, eo pellucidiores atque luteſcentes euadunt, extrema tamen eorum tanquam aduſta apparent; altitudo vix vltra dimidium pedem excurrit. Ramuli alternatim pinnati, rotundi, filiformes, inter denticulos caulis, plerumque ternos, albicantes oxoriuntur. Calyces non, pro vti in *ſertularia abietina* appoximate alterni, ſed vndique ramulos, et plerumque ſexfariam, ambiunt, oſculoque ocute effuſo, prominulo, eos echinatos reddunt, ita vt fere ramulos deſoliatos pinaſtri referant. Ouaria non raro per vtrumque latus ita denſe diſpoſita, vt quaſi imbricata videantur, vtricularia, ſubdiaphana, verſus ſuperiora obſcure flaua, oſculo ſimplici, annulo craſſiore brunneo cincto. Fig. 1. repraeſentat partem trunci cum ramulo per mycroſcopium adauctos, (*a*) calyculum ſeparatum, (*b*) ouarium. Fig. 2. habitum et magitudinem naturalem.

II.

Sertularia Cupreſſoides.

Sertularia caule paniculato, ramis dihotomis ſparſis, calyculis vix oſculo priminulo, ſimplicibus, oblique truncatis, ouariis ouatis oſculo ſubtubuloſo, trunco ramisque articulatis, commiſſuris biannulatis.

De-

Deſcriptio.

Radiculam format tuberculum applanatum cartilagineum. Caules ſimplices, aliquando inferne ramoſi, ſubdiaphani, coloris flauicantis, vix pedem dimidium excurrentes, articulati, articulis ſeu commiſſaris omnibus biannulatis. Rami paniculam efformantes, vlta medium caulem plerumque detriti, vti in ſertularia Thuia, exeunt ex caule alternatim oppoſiti, modo ex omnibus plagis protruſi, patentes, crebri, ramulorum ſurculis eandem diuiſionem ſeruantibus. Huc vsque fere omnia ſertularia noſtra habet communia cum *S. Cupreſſina.* Aſt rachis ramulorum multo latior et minus ſerrata eſt in noſtra, quam in illa; quia calyculi veſiculares oppoſiti vix prominuli oſculo, quod eſt ſimplex, oblique truncatum, ariſtis denticulisque nullis. Ouaria ex oblongo ouata, baſi ſubattenuata, ſubdiaphana tenerrime-rugoſa, modo e latere dextro, modo ex ſiniſtro, non raro per vtrumque diſpoſita.

Fig. 3. Siſtit ramulum per mycroſcopium auctum (*a*) calyculos ſeparatos. (*bb*) ouaria. (*c*) comiſſuras articulorum biannulatas, Fig. 4. habitum et magnitudinem naturalem.

ADIPIS PORCINAE,
RECENTIS ET RANCIDAE,
EXAMEN CHEMICVM.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. 1.

Quamuis pinguedo in omnibus adeo animalibus abundet, et magnam in sano, morbidoque eorum statu vim exserat, quantumuis etiam in Oeconomia praestat vtilitatis: attamen pauca circa illam in chemicis acta sunt, neque, quod sciam, rancidus adiposae substantiae status a quopiam minutiose examinatus fuit. Suggessit autem Clariss. D. *Oraeus*, qui in Peste Moscuam Anno 1772. deuastante famam insignem assecutus est, multum lucis accessurum theoriae morborum epidemicorum, e consideratione corrupti status adipis, quam insignem in his morbis scenam ludere ex obseruationibus suis persuasus est; et hinc nata est adipis analysis quam hic trado, quaeque nisi omnia Physiologiae atque Therapiae dubia soluat, tamen ad illustrandum huius animalis substantiae naturam qualitercunque conducere poterit.

§. 2.

§. 2. Deficiente mihi pro experimentis instituendis adipe humana pura, quam *Pharmacopoea Rossica* Anno 1778 edita e serie officinalium iure exclusit, *Suillam adipem* pro analysi elegi, cuius natura ad istam propius accedit et quam in sufficienti copia iam rancidam, adeoque statim experimentis aptam, obtinere facile erat. Praeterea suilla adeps nondum a quoquam examini chemico subiecta fuit; humana autem saepius et accurate a Celebb. Viris *Rhades* (*a*), *Segner* (*b*) et *Crell* (*c*). Necessaria autem pro comparatione fuit analysis adipis etiam recentis, quam igitur prius exponam.

Experimenta circa adipem Suillam recentem instituta.

§. 3. Animalium diuersorum pinguedines, quae consistentia inter sebaceam solidam et oleosam fluidam media occurrunt, conueniunt in genere cum reliquis pinguedinosae substantiae speciebus: insolubilitate ad menstrua aquosa et spirituosa; saponificatione cum salibus alcalicis; productione hepatis sulphurei, per coctionem cum sulphure; dissolutione plumbi calcinati in speciem vnguenti vel saponis; coagulatione cum acidis mineralibus concentratis; plenaria consumptione per ellychnium lampadis vel candelae; ignitione spontanea in calore sexcentorum circiter graduum scalae Farenheitianae, aliisque; differunt autem inter se consistentia, colore, gustu, magis vel minus prompta ranciditate; quae quidem differentiae sensibus nostris facile, at vix chemicis experimentis deteguntur, quippe quae nimium destruunt, et gene-

(a) Diss. de Ferro in Sanguine humano 4. Gott. 1753.
(b) Segneri Diss. de Acido pinguedinis, Resp. Kop. 4. Gott. 1754.
(c) Crell. *Chemisch Journal.* P. I. p. 102.

generatim ex omni pinguedine tantum oleum empireumaticum, phlegma acidum et carbonem igni resistentem producunt. Horum principiorum proportio, nec non indoles in variis adipis speciebus tantum differt, vt in chemica quoque analysi facile occurrat. *Segnerus* (Diss. de Acido Pinguedinis) adipem suillam dicit destillatione vix quidquam phlegmatis suppeditare, carbonis autem ita parum ex eo superesse, vt oleum eductum fere aequet pondere massam adipis adhibitae. Hinc insignis ab aliorum animalium pinguedine differentia sequeretur; experientiae autem non respondet *Segneri* assertum, vt in sequentibus apparebit.

Experimentum 1.

§. 4. Adeps suilla recens et pura comminuta, in retorta arenae imposita, lento calore solui, et tranquille soluebatur, nullo aëris indicio dato. Chartae probatoriae in collo retortae suspensae (caeruleae inducta rubedine) indicabant, etiam leni caloris gradu *acidos* emanasse *vapores*.

Experimentum 2.

§. 5. Dissoluta calore, perque linteum caute percolata adeps, aquam tepidam copiosam, qua abluebatur, pinguinose turbidam reddidit. Illa aqua percolata et euaporata, residuam dedit *mucaginem cineream*, ex vnciis decem pondus quadraginta granorum aequantem, sine vllo Salini cuiusdam indicio.

Experimentum 3.

Adipis vncia, in quatuor vnciis alcoholis digesta, tincturam flauescentem effecit, quae aquam instillata turbabat, indicio, *oleosi* quiddam solutum fuisse.

Expe-

Experimentum 4.

§. 6. Adipis suillae recentis, igne solutae, decem vnciae e retorta, recipiente adglutinato instructa, sensim aucto in balneo arenae et demum fortissimo igne destillaui. Intra octodecim horarum spatium prodiit:

1. *Oleum flauescens butyrosum* ad ℥iiß.
2. *Oleum nigricans fluidum* ad ℥jv. ʒvj. et cum vtroque, praesertim simul cum priore.
3. *Phlegma acidum*, flauum, cuius pondus segregati aequauit ℥j. ʒvij. Residuum fuit Carbo niger, durus, quem in retorta integra reliqui. Oleum, praesertim illud butyrosum, odore volatili intolerabili, pungente et suffocante emicabat, et vaporibus oculos et guttur adficiebat. Chartae coloratae acidam horum vaporum indolem indicarunt, quare oleum quatuor circiter unciis aquae ablutum, et aqua dehinc separata fuit. Phlegmatis odor etiam volatilis erat, sed minus acer.

Experimentum 5.

§. 7. Oleum ablutum praecedentis processus supra carbonem residuum cohobaui. Sic prodiit:

1. Oleum fluidius, fusco-flauum et
2. Dein Oleum nigrescens, vtriusque ℥vjß. quae odorem minus volatilem, raphani rusticani aemulum edebant;
3. Phlegmatis ℥iiß, flaui, acidi, priori similis.

Experimentum 6.

Oleum, propter vapores acidos, denuo ablutum et iterum ſuper reſiduo cohobatum fuit. Prodiit tunc e fuſcouireſcente colore, pondere ſex vnciarum; Phlegmatis autem ſemidrachma adfuit. Reſiduum praecedentium trium deſtillationum *Caput mortuum* pondus vnciae cum ſeſquidrachma aequauit. Oleum iterum ablutum fuit.

Experimentum 7.

§. 8. Oleum tertiae deſtillationis, denuo e Retorta noua deſtillabam. Tranſiit ſtatim Oleum flauum, limpidum, tenue, boni odoris, quantitate ℥ i iß. dein rubro-flauum, magis empireumaticum ad ℥ i i j, ſimul cum vtroque Phlegmatis ʒß. Adfuit iterum reſiduum carbonaceum pondere ſesquidrachmae, quod cum priore effecit pondus unciae cum tribus drachmis. Phlegmatis quatuor ſimul deſtillationum prodiere ad ℥ i j. ʒ j ß. Amiſſum igitur his proceſſibus fuit pondus ʒ v i i ß.

§. 9. Olea praecedentis experimenti, ſibi relicta, intenſiorem ſenſim acquiſiuerunt colorem, tandemque turbida ſunt facta. Vlteriora in hoc oleo tentamina non inſtitui, cum perfecte eſſet ſimile illi quod e ſebo bouillo obtinuit et accurate examinauit Cel. *Crell* (Chem. Iourn. I. p. 75).

Experimentum 8.

§. 10. A Phlegmate quatuor deſtillationum (Exp. IV. ad v i j), itidem ab aqua, qua Oleum iterato ablutum

tum fuit, flocculi ſeceſſerant, quos filtro ſeparaui. Reagentia in liquidis ſolam acedinem, pinguinoſitati iunctam indicarunt.

Quandoquidem vero acidum pinguedinis ſola deſtillatione depurari et concentrari nequit, ſaturaui liquorem contrito et puriſſimo ſale tartari (e nitro et cryſtallis tartari), quod huius ſalis ſesquidrachma exactiſſime effectum eſt. Liquor ſaturatus euaporatione nullas produxit cryſtallos, ſed ſal informe, nigreſcens, empireumatici odoris, aërei humoris bibulum, quod pondus ʒii. gr. XL. aequauit.

In vaſe porcellaneo hic Sal fluxit facillime, fumans et ſpumeſcens inſigniter. Poſtquam ceſſauerat fumus, reliquum ſolutum et per filtrum traiectum euaporavi. Iterum defuit forma cryſtallina, ſed maſſa ſalina lamelloſa remanſit, quae non ſatis ſaturata, humidum aëris attraxit. Tubo ferruminatorio oppoſita intumeſcebat eadem, fumum luminoſum emiſit et reſiduum mere alcalicum album tandem exhibuit.

Illuſtr. *Segnerus* (Diſſ. citat.) et Cel. *Crell* (l. c. p. 60. Part. II. p. 112 et IV. p. 47.) ſolita ſua diligentia et acumine *acidi pinguedinis* naturam, eiusque ad alcohol, ſalia varia, terras et metalla relationem indagarunt, vt vlteriora in hoc tentamina ſuperflua mihi viderentur; neque exigua e ſalibus ſaturatis expulſa acidi copia ſufficiebat. *Crellius* praeterea (loc. cit.) docuit ingenioſe, quomodo acidum illud e vulgari ſapone copioſe parari poſſit.

§. 11.

§. 11. *Carbonaceum residuum* Exper. 6 et 7, cuius coniunctim pondus vnciam cum tribus drachmis aequabat, erat exaridum, nigrum, durum, quasi scorificatum; empireuma oluit et cum acidis efferbuit. Hoc pulverisatum sequentibus experimentis inseruiit.

Experimentum 9.

Elixivatio ope aquae praebuit liquorem alcalinum album, e quo grana quinquaginta salis imperfecte crystallisati obtinui, quod in aëre siccitatem seruauit. Acidi vitriolici ad saturationem huius salis tantundem insumsi, quantum ad eandem quantitatem salis alcali mineralis requiritur; prodiitque inde sal mirabilis Glauberi perfectus. Durante saturatione nihil calcarei neque heterogenei praecipitabatur. Residuum carbonis desiccatum vix euidenter cum acidis feruescebat.

Experimentum 10.

§. 12. Elota terra carbonum nigra (Exper. IX.) a relicto *phlogisto* erat depuranda, quod calcinatione in testa quinque horarum spatio ad continuum ignem lambatorium, et circumagitatione continua vix effectum est. Primum cinerea sic euasit, dein rubescens, leuiorque vt ponderis tantum ʒj. cum gr. XII. superesset. Ex hisce cineribus particulae copiosae *Magneti* adhaerescebant; cum acidis efferuescebant acriter et elotae ope aquae destillatae, iterum gr. v ß Salis alcali mineralis puri exhibuerunt.

Experimentum 11.

§. 13. Terra edulcorata (Exper. 10.) cum acidis etiamnum feruescebat, ideoque in tribus drachmis acidi nitrosi

nitroſi digeſta fuit. Phlegma acidum percolatum et aqua ad edulcorandum reſiduum terreum adhibita, ſolutione Salis tartari ſaturabantur. Circa ſaturationis punctum apparuit demum praecipitatum quoddam albidum, quaſi mucilaginoſum, quod edulcoratum et ſiccatum gr. XI. pondus aequabat et pura fuit *terra calcarea.* Ex reſiduo denique *particulae* adhuc *martiales* ſatis copioſe magneti adhaeſerunt.

Experimentum 12.

§. 14. Vt praeſens forte pars argilloſa huius terrei reſidui in apricum educeretur, cum drachma Olei Vitrioli digeſtum fuit; tum effuſum acidum in porcellaneo vaſe arenae impoſito ſupra ignem euaporaui, relictam vero inſolubilem partem aqua edulcoraui. Praecipitatum ablutum argilloſam quidem, ſeu *aluminarem terram* referebat, ſed fuſcam, licet nullas particulas magneticas praeberet. Pondus ſiccati fuit granorum trium cum dimidio.

Relicta vltimo terra ſubtiliſſimam *arenam quartſoſam* referre viſa eſt, ferro plane carebat et pondus ʒß et iv granorum aequauit.

Experimentum 13.

§. 15. Haec eadem reſidua terra cum drachma et XL granis ſalis tartari intrita et crucibulo candenti infuſa, ſtatim cum intumeſcentia fluxit. Scoria vitrificata refrigerata humore aëris madeſcere viſa eſt; cum crucibulo aquae immiſſa in gelatinam cineream diſſoluta fuit, e qua, copiosiore adhibita aqua, gr. xxxiiß *terrae siliceae* sordide albae, obtinui.

§. 16. Secundum allegata experimenta patet:

1. *Vapores* adipis suillae recentis dum supra ignem diffluit, *acidos* esse (Exp. 1.).

2. In decem unciis eiusdem adipis recenter igni dissolutae *mucilaginis* grana XL, dum exsiccatur, contineri (Exp. 2.).

3. Eandem quantitatem adipis non ablutae destillatione praebere, post quatuor cohobationes, vncias quinque cum dimidia *veri olei* tenuissimi, haud ingrate olentis (Exp. 7.); porro

4. Phlegmatis acidi iisdem destillationibus prodire ℥ij ʒiiß, quod simul cum aqua acidula, ad abluendum oleum adhibita (Exp. citat.) *veri acidi* continet grana XLV.

5. Post quartam destillationem superesse ex supra dicto quanto adipis *carbonis fixi* vnciam cum tribus drachmis (Exp. 6. 7.); in quo contenta erant:

a. Salis alcali mineralis gr. LV. (Exp. 9. 10.).
b. Terrae calcareae gr. XI. (Exp. 11.)
c. - - aluminis gr. iiiß. (Exp. 12.)
d. - - siliceae gr. XXXII. (Exp. 13.), atque
e. - - particulae martiales magneti adhaerescentes (Exp. 11.)

f. Bal-

f. Calcinatione carbonis periisse phlogisti ad ℥ix. et particulas etiam fixas dissipatas variis processibus.

Pondus septem cum dimidia drachmarum, quod in destillationibus euaporatione vel adhaesione ad vasa chemica amissum fuit, itemque gr. xxxi, quae in analysi residui perierunt, supra enumeratorum productorum et constitutiuarum partium pondera proportione iusta augere debent.

§. 17. F *sebo bouillo* Cel. *Crell* (Diar. chem. P. I. p. 68.) eadem fere proportione obtinuit *oleum* post destillationum similem numerum, et *Phlegmatis acidi* tantundem, in quo etiam acidi paene eadem quantitas contenta fuit, vt in phlegmate suillae adipis. *Carbonacei* autem residui maior fuit copia in experimentis *Crellianis*, scilicet e triginta duobus vnciis sebi, decem vnciae cum ℥vj. carbonis. E carbone idem *terrae calcareae* et *siliceae* tantillum cum vestigio *terrae argillosae* obtinuit. Sal e carbone elixiuatus, erat *acidum phosphoreum*, terra calcarea saturatum. Ferri nullum aderat vestigium.

Differt igitur *sebum bouillum* a porcina adipe:

1. Maiore terrei fixi copia,
2. Sale phosphoreo et
3. Martialium particularum defectu.

Porcina vero *adeps* priuum habet 1 *Sal Alcali minerale* et 2 *Particulas martiales.*

* * * * * * * *

Experimenta digeſtione recentis Adipis Porcinae inſtituta.

§. 18. Sequentia experimenta inſtituta ſunt, vt obſeruarem mutationes, quas in recenti adipe calor moderatus, febrili circiter aequalis, diu continuatus, produceret.

Experimentum 14.

Adipis ſuillae recentis ſumſi vncias XVI. et in retorta, veſica obturata, in balneo arenae, ſuſtentato, lampadis ope, calori aequabili, inter 98 et 106 gradus Thermometri *Farenheitnani* medio, commiſi. Poſt quatriduum ſedimentum tenaciuſculum, nigreſcens ſeceſſit. Octiduo adeps ſupra ſedimentum flaua facta eſt, vt exempta particula et refrigerata pulchre flaueſceret; poſtea color ſenſim in fuſcedinem tendere coepit. Subinde chartae coloratae in retorta ſuſpenſae fuerunt, quae acidam vaporum indolem prodebant. Poſt decimam diem ſubinde bullae aëreae in adipe aſſurgebant.

Poſt ſeptemdecim dierum digeſtionem adeps refrigerata, ſupra exiguum ſedimentum nigreſcens fuſcida erat facta, guſtu vappida, foetorem nauſeoſum ſubuolatilem ſpargens, qui oculis nocere, eosque obfuſcare viſus eſt.

Expe-

Experimentum 15.

§. 19. Vt experirer, nonne portio adipis digestione in *mucilaginem* mutata fuerit, itemque an adeps ablutione denuo restitui in pristinum statum posset, vncias eius binas saepius aqua feruida ablui curaui, et refrigeratam singulis vicibus aquam effudi. Prima aqua nauseosi erat odoris, absque salsedinis indicio vllo; sequentium ablutionum aqua pinguinoso-turbida, quasi mucilaginosa euasit. Post filtrationem trans linteum euaporata reliquit *mucum cinereum*, cuius siccati pondus drachmam aequauit, quique facile aqua dissoluebatur. Adeps nunc euasit cinerea, sine odore nauseoso, multum quidem emendata, at non ad pristinum gradum.

Experimentum 16.

§. 20. Digestae adipis vncia, cum quadruplo alcoholis digesta, tincturam effecit gustu et odore admodum nauseabundam, quae instillata aquae lactescebat, posteaque guttulas oleosas in superficie formabat.

Experimentum 17.

§. 21. Decem vnciae adipis recentis, digestionem passae, e retorta balneo arenae imposita, instar recentis Experimento 4. adipis destillatae sunt. Initio statim aëris bullae copiosae ascenderunt; transiit mox *oleum butyraceum*, sordide flauum, dein fluidius coloris saturati, simul vtriusque vnciae ℥viiß. cum socia *phlegmatis* vncia O-lei pariter et phlegmatis odor volatilis, pungens, attamen multo minore gradu quam recentis, crudae adipis (Exper. 4.). Vapores olei chartis tinctis notam acedinis impresserunt, vnde aliquod aquae vnciis illud ablui, quod de subsequentibus etiam destillationibus intelligi volo.

Experimentum 18.

§. 22. *Oleum* praecedentis tentaminis supra proprium carbonem cohobaui. Transiit limpidum, obscure flauum et pondus vnciarum sex aequauit. Simul prodiere Phlegmatis acidi drachmae tres. Vtriusque producti odor minus pungens fuit quam e prima destillatione.

Experimentum 19.

Oleum illud tertio per eandem retortam, carbone intus loricatam, cohobatum transiit limpidum, obscure flauum, pondere vnciarum V. et totidem drachmarum. Acidi phlegmatis simul prodiit sesquidrachma. Vtrisque odor fuit parum empyreumaticus.

Carbo, a tribus hisce destillationibus residuus, qui fractae Retortae intus intime adhaerebat, pondus ℥ i ß aequauit. Similis illi, quem recens praebuit adeps, neque vlterius, vti nec oleum destillationes passum, chemice examinatus fuit.

Experimentum 20.

§. 23. *Phlegma* ex his destillationibus (Exp. 16. 17. 19.) collectum effecit mensuram sescunciae cum semidrachma;

drachma; flauum, volatile, empireumatico odore, in chartis probatoriis acidi effectus exseruit. Aliquantum acidi etiam aqua prodebat, (Exp. citat), quae abluendo oleo inseruierat. Vtrumque igitur liquorum sale tartari puro, contrito saturaui exactissime eoque quinquaginta grana salis huius adhibui. Liquor filtratus neutralisatus, praebuit salem simillimum illi, quem adeps recens (Exp. 8.) suppeditauerat, drachmam cum quadraginta granis aequabat, et nulla vlteriore depuratione curatus fuit.

§. 24. Igitur decem vnciis adipis recentis, digestione tractatae, continebatur:

1. *Mucilago*, cuius desiccatum pondus aequauit drachmas V. (Exp. 15.)

2. *Phlegma acidum*, tribus destillationibus ad ℥iß. ʒß. (Exp. 17 – 19.) idque, simul cum lotura olei, grana quinquaginta *acidi* dedit.

3. *Oleum* pellucidum rufo-flauum, quod post tertiam destillationem (Exp. 19.) pondus ℥v et ʒv. aequavit:

4. *Carbonis* terrei eodem Exp. 19. superfuit sescuncia.

Producta igitur, pondere massae adhibitae drachmarum quinque et dimidiae valore minora fuerunt, iustaque ex hoc amisso pondere proportione augenda sunt.

Si cum his conferas producta adipis recentis non digestae, apparebit:

1. Ran-

1. Ranciditatem insignem digestione fuisse inductam adipi (Exp. 14. cet.);

2. Mucositatem maiorem ortam, et muci plus secessisse (Exp. 15.);

3. Acidi partem destructam (Exp. 20.):

Superest nunc analysis comparatiua adipis sponte rancidae factae, quam in altera huius Dissertationis parte propediem exponam.

DETER-

ASTRONOMICA.

DETERMINATIO FACILIS
ORBITAE COMETAE
CVIVS TRANSITVM PER ECLIPTICAM BIS OBSERVARE LICVIT.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Quod si eueniat vt cuiuspiam Cometae vterque transitus per planum eclipticae obseruari possit, etiamsi hoc rarissime contingat, tamen iste casus ideo summa attentione dignus est censendus, quod duae tales obseruationes sufficiant, ad orbitam Cometae parabolicam perfecte determinandam, idque methodo directa; ita vt ad nullas approximationes sit confugiendum, dum contra ex aliis obseruationibus motus Cometarum neutiquam methodo directa definiri potest, sed demum post plura tentamina appropinquando erui soleat, atque adeo sperari nequeat, vnquam fore, vt eiusmodi methodus directa detegatur, cuius ope ex aliquibus obseruationibus orbitae Cometarum certo determinari queant.

§. 2. Ponamus igitur eiusmodi Cometam apparere, cuius transitum per eclipticam bis obseruare liceat, ita vt eius latitudo in vtraque obseruatione nulla fuerit deprehensa. His igitur temporibus necesse est vt Cometa in ipsa linea nodorum sit versatus; altero scilicet in nodo ascendente, altero vero in descendente, cuiusmodi igitur duas
Tab X. Fig. 1. obseruationes sequenti modo ad calculum reuocemus. Repraesentet tabula planum eclipticae, in quo punctum S sit centrum Solis, ac tempore prioris obseruationis Terra fuerit in puncto T, ponaturque eius distantia a Sole $ST = a$; cometa autem apparuerit in directione T Z, atque innotescet angulus S T Z, quem vocemus $= \alpha$. Cum igitur cometa nullam habuerit latitudinem, necesse est vt alicubi in ipsa linea T Z haeserit, cuius locum ponamus fuisse in puncto Z, eritque recta ex Sole ducta S Z ☊ linea nodorum, siue intersectio orbitae Cometae cum ecliptica, cuius positio cum etiamnunc sit incognita, vocemus angulum $TS☊ = \Phi$, quae adeo erit vnica incognita, quam in calculum introduci necesse est. Hinc igitur erit angulus externus $TZ☊ = \alpha + \Phi$, vnde cum habeatur distantia $ST = a$, reperietur distantia Cometae a Sole $SZ = \frac{a \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \Phi)}$.

§. 3. Iam elapso tempore $= \Theta$, quod exprimamus per motum medium Solis interea percursum, ita vt Θ designet certum quendam angulum, cuius mensura sit arcus ipse Θ in circulo cuius radius $= 1$, dum huius circuli tota peripheria 2π repraesentat quantitatem vnius anni, cometa iterum in ipsa ecliptica sine latitudine obseruetur; interea autem Terra progressa sit per angulum $TST' = \theta$; cometa vero apparuerit in directione $T'Z'$, existente angulo $ST'Z' = \alpha'$. Necesse igitur est vt hoc tempore Cometa

meta versatus sit in linea nodorum ☊ S retro S ☋ continuata, atque adeo in ipso puncto Z'. Cum igitur sit angulus $T' S Z' = 180° - \phi - \theta$, erit angulus externus $T' Z'$ ☋ $= 180° + \alpha' - \phi - \theta$, ideoque ipse angulus $T' Z' S = \phi + \theta - \alpha'$. Posita igitur distantia $S T' = a'$, fiat

$$\text{sin.}\,(\phi + \theta - \alpha') : a' = \text{sin.}\,\alpha' : S Z',$$

vnde colligitur distantia $S Z' = \frac{a' \,\text{sin.}\,\alpha'}{\text{sin.}\,(\phi + \theta - \alpha')}$. Sic itaque nacti sumus duas Cometae a Sole distantias, scilicet

$$S Z = \frac{a \,\text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,(\alpha + \phi)} \text{ et } S Z' = \frac{a' \,\text{sin.}\,\alpha'}{\text{sin.}\,(\phi + \theta - \alpha')}$$

quae adeo in directum sibi sunt oppositae, ita vt anomalia vera inter haec duo loca interiecta sit 180°.

§. 4. Referat nunc tabula planum ipsius orbitae cometae, in quo sit S centrum Solis et recta ☊ ☋ intersectio orbitae cometae cum plano eclipticae, in qua sint puncta Z et Z' bina illa loca Cometae obseruata. Hic autem ponamus distantias $S Z = f$ et $S Z' = g$, ita vt sit Tab. X. Fig. 2.

$$f = \frac{a \,\text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,(\alpha + \phi)} \text{ et } g = \frac{a' \,\text{sin.}\,\alpha'}{\text{sin.}\,(\phi + \theta - \alpha')},$$

in quibus formulis vnica inest quantitas incognita, scilicet angulus ϕ. Praeterea vero nouimus, cometam de loco Z peruenisse in locum Z', elapso tempore $= \Theta$. Sit igitur parabola $Z \Pi Z'$ orbita a cometa interea descripta, cuius axis sit recta ΠS, ideoque Π eius perihelium, cuius distantia a Sole ponatur $S \Pi = p$, ideoque semiparameter orbitae $= 2 p$; tum vero vocemus angulum $\Pi S Z = \psi$, eritque angulus $\Pi S Z' = 180° - \psi$. Hinc iam ex natura parabolae erit

$$S Z = f = \frac{2 p}{1 + \text{cos.}\,\psi} = \frac{p}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}\psi^2}$$

 S Z

$$S Z' = g = \frac{2 p}{1 - \text{cos.}\, \psi} = \frac{p}{\text{sin.}\, \frac{1}{2} \psi^2}$$

ex quibus aequationibus tam distantia p quam angulus ψ facile determinabuntur, siquidem quantitates f et g vt cognitae spectentur.

§. 5. Cum igitur ex priore aequatione sit cos. $\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{p}{f}$, ex posteriore vero sin. $\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{p}{g}$, his additis sit $\frac{p}{f} + \frac{p}{g} = 1$, ita vt sit $p = \frac{fg}{f+g}$; quo valore inuento erit cos. $\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{g}{f+g}$ et sin. $\frac{1}{2}\psi^2 = \frac{f}{f+g}$; vnde colligitur tang. $\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{f}{g}}$ et sin. $\psi = \frac{2\sqrt{fg}}{f+g}$. Dummodo igitur binae distantiae f et g fuerint cognitae, orbita parabolica Cometae perfecte erit determinata. Verum quia ipsae distantiae f et g adhuc incognitam, scilicet angulum Φ, inuoluunt, insuper indigemus vna aequatione, cuius ope etiam hanc incognitam determinare liceat.

§. 6. Istam autem nouam aequationem nobis suppeditat consideratio temporis Θ, quo Cometa de loco Z per Π vsque ad Z' peruenit, quandoquidem huic tempori area a Cometa interea descripta est proportionalis. Quod si enim haec area ponatur $Z\,\Pi\,Z' = S$, ac distantia Terrae a Sole media designetur littera c, quia huius orbitae semiparameter est $= 2p$, ex theoria motus planetarum constat fore $S = \frac{1}{2}\Theta c \sqrt{2cp}$; quamobrem tantum opus erit vt in quantitatem huius areae inquiramus.

§. 7. Quoniam posuimus angulum $\Pi S Z = \psi$, vocemus tantisper distantiam $S Z = z$, et quia ex natura para-

parabolae est $z = \frac{p}{\cos. \frac{1}{2}\psi^2}$, quaeramus primo aream Π S Z, quam designemus per Σ, ita vt sit $d\Sigma = \frac{1}{2} z z d\psi$, eritque

$$d\Sigma = \frac{\frac{1}{2} p p d\psi}{\cos. \frac{1}{2}\psi^4}.$$

Ad hanc formulam integrandam statuamus tang. $\frac{1}{2}\psi = t$, eritque

$$\sin. \tfrac{1}{2}\psi = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \text{ et } \cos. \tfrac{1}{2}\psi = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}},$$

et $\frac{1}{2} d\psi = \frac{dt}{1+tt}$, ideoque habebimus

$$d\Sigma = p p. \frac{dt}{(1+tt)\cos. \frac{1}{2}\psi^4} = p p\, d t\, (1+tt),$$

vnde integrando nanciscimur aream $\Sigma = p p t + \frac{1}{3} p p t^3$, existente scilicet $t =$ tang. $\frac{1}{2}\psi$.

§. 8. Hinc autem facile deriuatur altera area Π S Z', quam vocemus $= \Sigma'$, si modo in formula praecedente loco ψ scribamus $180° - \psi$, ideoque loco $\frac{1}{2}\psi$ scribendum erit $90° - \frac{1}{2}\psi$, cuius tangens cum sit cot. $\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{t}$, statim reperitur area ista $\Sigma' = \frac{pp}{t} + \frac{pp}{3t^3}$. His igitur duabus areis iungendis colligitur tota area

$$Z \Pi Z' = S = \Sigma + \Sigma' = \frac{pp}{3t^3}(tt+1)^3.$$

Cum igitur sit $S = \frac{pp}{3}\left(\frac{tt+1}{t}\right)^3$, angulum ψ iterum introducendo erit

$$S = \frac{pp}{3}\left(\frac{1}{\sin. \frac{1}{2}\psi \cos. \frac{1}{2}\psi}\right)^3 \text{ siue}$$

$$S = \frac{pp}{3}.\left(\frac{2}{\sin.\psi}\right)^3 = \frac{8pp}{3\sin.\psi^3}.$$

§. 9.

§. 9. Hac igitur area S inuenta relatio ſupra memorata inter tempus et hanc aream nobis ſuppeditat hanc aequationem:

$$\frac{8pp}{3\,\text{ſin.}\,\psi^3} = \tfrac{1}{2}\Theta c \sqrt{2cp},$$

quae diuiſa per $\sqrt{p}$ fit

$$\frac{8p\sqrt{p}}{3\,\text{ſin.}\,\psi^3} = \tfrac{1}{2}\Theta c \sqrt{2c}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{8p\sqrt{p}}{\text{ſin.}\,\psi^3} = \tfrac{3}{2}\Theta c \sqrt{2c},$$

vnde radicem cubicam extrahendo prodit

$$\frac{2\sqrt{p}}{\text{ſin.}\,\psi} = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}\Theta c \sqrt{2c}}.$$

Supra autem vidimus eſſe

$$p = \frac{fg}{f+g} \text{ et ſin.}\,\psi = \frac{2\sqrt{fg}}{f+g}, \text{ vnde fit } \frac{2\sqrt{p}}{\text{ſin.}\,\psi} = \sqrt{(f+g)},$$

ita vt deducti ſimus ad hanc aequationem:

$$\sqrt{(f+g)} = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}\Theta c \sqrt{2c}}$$

ſumtisque quadratis erit $f+g = c\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta}$. Subſtituamus igitur loco f et g valores ſupra inuentos, et habebimus hanc aequationem:

$$\frac{a\,\text{ſin.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,(\alpha+\Phi)} + \frac{a'\,\text{ſin.}\,\alpha'}{\text{ſin.}\,(\Phi+\theta-\alpha')} = c\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta}$$

in qua cum vnica ſuperſit incognita, ſcilicet angulus Φ, totum negotium huc eſt perductum, vt ex hac aequatione valor anguli Φ eliciatur, quod quomodo commodiſſime praeſtari poſſit in ſequentibus oſtendemus.

§. 10. Quo reſolutionem huius aequationis facilius ſuſcipere queamus, eam ſub hac forma repraeſentemus:

$$\frac{A}{\text{ſin.}\,(\omega-\gamma)} + \frac{B}{\text{ſin.}\,(\omega+\gamma)} = C,$$

ita

ita vt fit

$$A = a \sin. \alpha, \quad B = a' \sin. \alpha', \quad C = c \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta};$$

tum vero

$$\omega - \gamma = \alpha + \Phi \text{ et } \omega + \gamma = \Phi + \theta - \alpha'$$

hincque

$$2\omega = \alpha + 2\Phi + \theta - \alpha' \text{ et } 2\gamma = \theta - \alpha - \alpha'$$

qui ergo posterior angulus prorsus est cognitus, cum sit $\gamma = \frac{\theta - \alpha - \alpha'}{2}$; at vero angulus incognitus erit $\omega = \frac{\alpha + 2\Phi + \theta - \alpha'}{2}$, ita vt si determinatus fuerit angulus ω, tum futurus sit angulus quaesitus $\Phi = \omega + \frac{\alpha' - \alpha - \theta}{2}$. Nunc igitur pro angulo ω inueniendo aequatio nostra a fractionibus liberata erit

$$A \sin.(\omega + \gamma) + B \sin.(\omega - \gamma) = C \sin.(\omega + \gamma) \sin.(\omega - \gamma)$$

quae porro euoluta praebet

$$\left.\begin{array}{l} A \sin.\omega \cos.\gamma + A \cos.\omega \sin.\gamma \\ + B \sin.\omega \cos.\gamma - B \cos.\omega \sin.\gamma \end{array}\right\} = C(\sin.\omega^2 \cos.\gamma^2 - \cos.\omega^2 \sin.\gamma^2)$$

ex qua angulum ω definiri oportet. Quem in finem si poneremus $\sin.\omega = s$, tum foret $\cos.\omega = \sqrt{(1 - ss)}$; atque hanc aequationem, vt ab irrationalitate liberetur, denuo quadrari oporteret. Hanc autem operationem sequenti modo euitare poterimus.

§. 11. Scilicet quo haec aequatio statim rationalis reddatur, statuatur $\tang.\frac{1}{2}\omega = x$, eritque $\sin.\frac{1}{2}\omega = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ et $\cos.\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$, vnde porro fit

$$\sin.\omega = \frac{2x}{1+xx} \text{ et } \cos.\omega = \frac{1-xx}{1+xx},$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra erit

$$\frac{2\,x\,\mathrm{cof.}\,\gamma}{1+xx}(A+B)+\frac{(1-xx)\,\mathrm{fin.}\,\gamma}{1+xx}(A-B)$$
$$=C\,\frac{(4\,xx\,\mathrm{cof.}\,\gamma^2-(1-xx)^2\,\mathrm{fin.}\,\gamma^2)}{(1+xx)^2}.$$

Ponatur igitur porro breuitatis gratia $(A+B)\,\mathrm{cof.}\,\gamma=F$ et $(A-B)\,\mathrm{fin.}\,\gamma=G$ et multiplicando per $(1+xx)^2$ aequatio nostra resoluenda erit

$$2\,F\,x\,(1+xx)+G\,(1-x^4)$$
$$=C\,(4\,xx\,\mathrm{cof.}\,\gamma^2-(1-xx)^2\,\mathrm{fin.}\,\gamma^2),$$

quae euoluta reducitur ad hanc aequationem quarti gradus:

$$(G-C\,\mathrm{fin.}\,\gamma^2)\,x^4-2\,F\,x^3+2\,C\,xx\,(1+\mathrm{cof.}\,\gamma^2)$$
$$-2\,F\,x-C\,\mathrm{fin.}\,\gamma^2-G=0,$$

ex qua, si forte duas vel omnes adeo radices habeat reales, totidem orientur solutiones nostri problematis, quarum quae reuera locum habeat facile definietur, si insuper tertia quaepiam obseruatio in subsidium vocetur, vnde simul inclinatio orbitae ad eclipticam innotescet.

§. 12. Ex qualibet autem radice huius aequationis inuenta x statim colligitur angulus ω, cum sit $\mathrm{tang.}\,\frac{1}{2}\omega=x$, tum vero ex cognito angulo ω deriuabitur angulus

$$\Phi=\omega+\frac{\alpha'-\alpha-\theta}{2}$$

ex quo cognoscetur vera positio lineae nodorum, cum sit angulus ☊ $S\,T=\Phi$. Deinde vero ex cognito angulo Φ vtraque distantia Cometae a Sole definietur, cum sit

$$S\,Z=f=\frac{a\,\mathrm{fin.}\,\alpha}{\mathrm{fin.}\,(\alpha+\Phi)}\ \text{et}\ S\,Z'=g=\frac{a'\,\mathrm{fin.}\,\alpha'}{\mathrm{fin.}\,(\Phi+\theta-\alpha')},$$

siue $f=\frac{A}{\mathrm{fin.}\,(\omega-\gamma)}$ et $g=\frac{B}{\mathrm{fin.}\,(\omega+\gamma)}$, existente $\gamma=\frac{\theta-\alpha-\alpha'}{2}$, quibus inuentis habebitur distantia perihelii a sole

$$S\,\Pi=p=\frac{fg}{f+g},$$

atque simul cognoscetur angulus $\Pi\,S\,Z=\psi$, cum sit

tang.

$\tan\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{f}{g}}$. Sic igitur tota Cometae orbita perfecte erit terminata, et nihil aliud restat, nisi vt eius inclinatio ad eclipticam assignetur, id quod ex qualibet alia obseruatione, vbi Cometae latitudo fuerit obseruata, facile praestabitur.

13. Quin etiam ex iis, quae iam sunt allata, tempus, quo Cometa per perihelium Π transierit, haud difficulter assignari poterit. Si enim tempus, quo cometa ex loco Z in perihelium peruenerit, ponatur $= T$, quoniam supra inuenimus aream $\Pi S Z = \Sigma = pp(t + \frac{1}{3}t^3)$, existente $t = \text{tang.}\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{f}{g}}$, erit per relationem inter areanet tempus $\Sigma = \frac{1}{2} T c \sqrt{2cp}$, vnde tempus istud quaesitum erit

$$T = \frac{2\Sigma}{c\sqrt{2cp}} = \frac{2p\sqrt{p}(t + \frac{1}{3}t^3)}{c\sqrt{2c}}.$$

Cum igitur sit $p = \frac{fg}{f+g}$ et $t = \sqrt{\frac{f}{g}}$, his valoribus substitutis repetietur tempus quaesitum

$$T = \frac{2ff(g + \frac{1}{3}f)}{(f+g)^{\frac{3}{2}} c\sqrt{2c}}$$

siue cum sit $f + g = c\sqrt[3]{\frac{9}{2}\Theta\Theta}$, ideoque

$$(f+g)^{\frac{3}{2}} = c\sqrt{c}.\frac{3\Theta}{\sqrt{2}},\ \text{erit}\ T = \frac{2ff(g + \frac{1}{3}f)}{3c^3\Theta},$$

sicque tempus transitus per perihelium erit cognitum, si modo per x iusta radix aequationis illius quarti gradus fuerit assumta, id quod aliae obseruationes in subsidium vocatae mox decident.

§. 14. Maxime notatu digna est aequatio, ad quam sumus perducti, quae erat $f + g = c \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta}$, propte quod $f + g$ exprimit distantiam punctorum Z et Z', e est duorum locorum Cometae in sua orbita, quae ex le visa sibi sunt opposita, quare cum quaelibet recta p So- lem ducta vicem lineae nodorum gerere possit, q olo tempore, quo Cometa ex vno termino huius rectae al- terum defertur, quantitas huius rectae, siue distantia int bina illa loca sibi opposita absolute assignari potest, quod operae pretium erit sequenti theoremate complect.

Theorema generale.
pro motu Cometarum in orbitis parabolicis.

Tab. X. Fig. 3. §. 25. Si Cometa in orbita parabolica quacunq. F Π G circa Solem, in eius foco S positum, circumferatu, atque innotescat tempus, quo Cometa ex loco quocunq: F in eius oppositum G fuerit delatus, ex eo quantits huius rectae F G absolute assignari potest. Ex tabulis e nim solaribus excerpatur motus medius Solis illi tempoi respondens, qui cum detur in signis, gradibus et minuti, ponatur = N gradibus; tum fiat vt $360° : N =$ tota pe- ripheria circuli 2π ad Θ, ita vt sit $\Theta = \frac{2\pi N°}{360°}$. Tum au- tem si distantia media Solis a Terra ponatur $= c$, di- stantia illorum duorum locorum F et G, siue recta F G semper aequabitur huic formulae: $c \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta}$. Ex quo in- telligitur, cubum huius rectae F G semper proportiona- lem esse quadrato temporis, quo Cometa ex F in G per- venerit.

§. 16.

§. 16. Cum autem aequatio vltima quarti gradus, ad quam pertigimus, plures habere queat radices x, videamus quomodo ex iis eam, quae reuera locum habet, dignoscere valeamus. Hunc in finem in subsidium vocemus tertiam quandam obseruationem, qua tam longitudo quam latitudo cometae fuerit determinata, atque pro hoc tempore ex orbita iam cognita quaeratur locus cometae in sua orbita, qui sit V, ita vt pro hoc tempore innotescat tam distantia Cometae a Sole S V, quam angulus seu argumentum latitudinis ☊ S V. Ponatur igitur distantia S V $= v$ et angulus ille ☊ S V $= \eta$. Tab. X. Fig. 2.

§. 17. Nunc igitur in plano eclipticae iterum sit recta S ☊ linea nodorum cometae, ac pro tempore tertiae obseruationis versetur Terra in t, sitque distantia S $t = b$. Sit iam verus cometae locus in z, vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculum $z\,x$ ductisque rectis $t\,x\,u$ et $t\,z$, quia tam longitudinem quam latitudinem cometae obseruatam esse assumimus, hinc innotescent anguli S $t\,u$ et $t\,u\,z$. Ac si ducta intelligatur recta S z, etiam cognitus erit angulus ☊ S $z = \eta$, cum ipsa distantiae S $z = v$. Vnde si ex puncto x ad lineam nodorum ducatur normalis $x\,p$, iungaturque recta $p\,z$, erit $p\,z = v$ sin. η et S $p = v$ cos. η, hincque innotescet ipsum punctum x, ideoque et recta $t\,x$ hincque porro perpendiculum $z\,x$, ex quo definietur inclinatio orbitae cometae, siue angulus $x\,p\,z$. Simul vero patet, si calculus hoc modo instituatur, non solum inueniri posse inclinationem orbitae ad eclipticam, sed etiam facile iudicari posse, vtrum determinationes ex theoria deductae, scilicet distantia v cum angulo η, congruant cum quantitatibus per obseruationem datis nec ne. Fig. 4.

 §. 18.

§. 18. Quod quo clarius appareat, ad ſequentia momenta attendatur. 1) Ex triangulo $S\,t\,u$, in quo dantur omnes anguli cum latere $S\,t$, dabuntur latera $S\,u$ et $t\,u$. 2) Ex diſtantia $S\,z$ cum angulo ☊ $S\,z$ dabuntur rectae $S\,p$ et $p\,z$, poſtquam ſcilicet ex loco cometae z ad lineam nodorum ducta eſt perpendicularis $z\,p$. 3) Hinc igitur conſtabit interuallum $u\,p$, ideoque, ducta in plano eclipticae ex puncto p normali ad lineam nodorum $p\,x$ rectae $t\,u$ occurrente in puncto x, ex interuallo $u\,p$ et angulo $t\,u\,p$ definietur tam interuallum $p\,x$ quam $u\,x$, quo oblato a recta $t\,u$ remanebit interuallum $t\,x$. 4) Porro ex obſeruata latitudine ſeu angulo $x\,t\,z$ concluditur eleuatio cometae ſupra eclipticam, ſcilicet recta $x\,z$, ita vt iam determinata ſint tria latera trianguli rectanguli $z\,p\,x$; quamobrem ſi deprehendatur fore reuera $z\,p^2 = p\,x^2 + x\,z^2$, id ſignum erit iuſtam radicem aequationis illius quarti gradus eſſe aſſumtam; ſin autem haec aequalitas non locum inueniat, alia radix illius aequationis conſiderari calculusque ſimili modo inſtitui debebit. Poſtquam autem vera radix fuerit inuenta, ita vt ſit $p\,z^2 = p\,x^2 + x\,z^2$, tum angulus $z\,p\,x$ dabit inclinationem orbitae cometae ad eclipticam. Hoc igitur modo iis caſibus, quibus cuiuspiam cometae ambos tranſitus per eclipticam obſeruare licuit, eius vera orbita parabolica abſolute ſine tentamine vel approximatione determinari poterit.

DE

DE VARIIS MOTVVM GENERIBVS, QVI IN SATELLITIBVS PLANETARVM LOCVM HABERE POSSVNT.

Auctore

L. EVLERO

§. 1.

Quamquam nunc quidem tabulae lunares non vltra vnum minutum primum a veritate aberrare perhibentur, tamen, quantum adhuc in ipsa theoria sit desiderandum, exinde intelligi potest, quod, si orbitae lunaris excentricitas multo maior existeret, vel etiam sub maiore angulo ad eclipticam inclinaretur, cognitio motus Lunae etiamnunc fere penitus lateret, ita vt in computo eclipsium fortasse adhuc pluribus horis essemus aberraturi. Cum enim in praesenti statu determinatio loci Lunae circiter 30 correctiones exigat, pro maiori excentricitate et inclinatione forsitan centum correctiones vel adeo ne mille quidem sufficerent. Ob tantum autem correctionum numerum, etiamsi singulae essent exactae, enormes errores plane euitari non possent.

§. 2.

§. 2. Multo maior vero incertitudo eſſet metuenda, ſi luna ad multo maiorem diſtantiam a terra fuiſſet remota, quippe quo caſu omnes correctiones nunc quidem adhiberi ſolitae nullum amplius locum inuenire poſſent, propterea quod hoc caſu mox incertum eſſet futurum, verum talem Lunam ad ordinem ſatellitum potius referri conueniat, quam ad planetas primarios, ſicque hoc caſu omnia ſubſidia, quibus Aſtronomi hactenus vſi ſunt, omni vſu eſſent caritura, et nos adhuc in craſſiſſima ignoratione talis motus verſaremur. Ex quo abunde intelligere licet, nostram theoriam motuum coeleſtium adhuc maximo defectu laborare, et, niſi inſignia incrementa in Analyſi detegantur, meliorem ſucceſſum nullo modo ſperari poſſe.

§. 3. His igitur ſummis difficultatibus perpenſis nulla alia via patere videtur, hanc ſcientiam ad maiorem perfectionis gradum euehendi, niſi vt plures huiusmodi motus omni ſtudio perpendantur, atque tales caſus fingantur, qui continuo propius ad eiusmodi motus nobis adhuc penitus abſconditos accedant. Hunc in finem vtique a caſibus ſimplicioribus inchoari conueniet, dum ſcilicet omnes circumſtantiae, quibus difficultates multiplicantur, quantum fieri poteſt, remoueantur. Quemadmodum enim in Geometria, ante quam problemata difficillima ſoluenda ſuſcipiuntur, plura alia ſimpliciora praemitti ſolent, quae continuo propius ad illa perducant, ita etiam in Aſtronomia ſimili methodo verſari conueniet.

§. 4. Vt igitur in omnes motus, qui in Lunam cadere poſſunt, feliciori ſucceſſu inquiramus, primo Lunam

nam in ipſo plano eclipticae circumferri aſſumemus, deinde quoque ipſam terram motu vniformi circa Solem in circulo reuolui ſtatuemus. Praeterea vero, ne actio Lunae terram afficere queat, maſſam Lunae tanquam minimam ſpectabimus, vnde haec quaeſtio nobis euoluenda proponatur:

Problema.

Si, dum terra motu aequabili in circulo circa Solem promouetur, corpori cuipium, quaſi Lunae, extra terram in ipſo plano eclipticae poſito, motus quicunque imprimatur, inueſtigere motum, quo hoc corpus, ex centro terrae ſpectatum, progredi videbitur.

§. 5. Quoniam motus, qualis ex centro terrae ſpectabitur, deſideratur, ipſam terram tanquam quieſcentem et fixam in T ſpectabimus, vnde in ipſo plano eclipticae rectam pariter fixam T A ducamus, a qua ad quoduis tempus elongationem noſtri corporis, ſeu Lunae, aſſignari oporteat. Elapſo igitur quocunque tempore reperiatur Sol in S, Luna vero in L, et quia nunc Sol circa terram vniformiter in circulo promoueri videbitur, eius diſtantiam a terra T S vnitate deſignabimus. Praeterea vero, quia motus Solis eſt vniformis, ipſe angulus A T S, quem vocemus $= \theta$, commodiſſimam menſuram temporis nobis ſuppeditabit. Pro Luna autem ponamus eius diſtantiam a terra $TL = v$, eiusque longitudinem, a directione T A computatam, ſeu angulum $ATL = \Phi$. Tum vero ſtatuamus breuitatis gratia angulum $STL = \Phi - \theta = \eta$, eritque recta $SL = \sqrt{(1 - 2v \operatorname{cof.} \eta + vv)}$, quam breuitatis gratia deſignemus per u. Praeterea ex punctis L Tab. X Fig. 5.

et S ad rectam T A demittantur perpendicula L X et S P, et pro puncto L vocatis coordinatis $TX = x$ et $XL = y$, erit $x = v \operatorname{cos.} \Phi$ et $y = v \operatorname{sin.} \Phi$, pro Sole autem erit $TP = \operatorname{cos.} \theta$ et $SP = \operatorname{sin.} \theta$.

§. 6. Nunc vt principia motus huc applicemus, primo ipse angulus $ATS = \theta$ nobis exprimat mensuram temporis, ita vt elementum temporis sit $d\theta$; deinde ipsam Solis massam pariter vnitate designemus, cuius respectu sit massa terrae $= m$, cuius valor ex vera parallaxi Solis deducitur $m = \frac{1}{[illegible]}$, Lunae autem massam, vt iam notauimus, nullam statuamus. His positis Luna primo sollicitabitur ad terram vi $= \frac{m}{vv}$, in directione L T; secundo autem ad Solem trahitur vi $= \frac{1}{uu}$, in directione L S. Tertio vero, quia terram in quiete spectamus, vires, quibus terra sollicitatur, contrarie Lunae applicari oportet, vnde cum Sol terram attrahat vi $= 1$, in directione T S, eadem vis $= 1$ Lunae applicata est intelligenda secundum directionem S T.

§. 7. Nunc singulas has vires secundum binas directiones coordinatarum x et y resolui oportet, vnde prima vis $= \frac{m}{vv}$ secundum L T per resolutionem dabit pro directione X T vim $= \frac{mx}{v^3} = \frac{m \operatorname{cos.} \Phi}{vv}$ et pro directione L X vim $= \frac{my}{v^3} = \frac{m \operatorname{sin.} \Phi}{vv}$. Secundo vis secundum L S, quae est $\frac{1}{uu}$, dabit pro directione T X vim $= \frac{\operatorname{cos.} \theta - x}{u^3} = \frac{\operatorname{cos.} \theta - v \operatorname{cos.} \Phi}{u^3}$ et pro directione X L vim $= \frac{\operatorname{sin.} \theta - y}{u^3} = \frac{\operatorname{sin.} \theta - v \operatorname{sin.} \Phi}{u^3}$. Denique tertia vis $= 1$, in directione S T agens, praebet pro directione X T vim $= \operatorname{cos.} \theta$ et pro directione L X vim $= \operatorname{sin.} \theta$; vnde colligendo tota vis in directione X T vrgens erit

$$\frac{m \cos. \Phi}{v v} - \frac{\cos. \theta + v \cos. \Phi}{v^3} + \cos. \theta;$$

tota autem vis in directione L X vrgens erit

$$= \frac{m \sin. \Phi}{v v} - \frac{\sin. \theta + v \sin. \Phi}{u^3} + \sin. \theta.$$

§. 8. Iam per principia motus his viribus proportionales esse debent accelerationes corporis L secundum easdem directiones, quae cum sint $\frac{d d x}{d \theta^2}$ et $\frac{d d y}{d \theta^2}$, sumto temporis elemento $d \theta$ constante, constituta massarum et temporis ratione vt fecimus, istae accelerationes per $1 + m$ multiplicari debent, vt viribus illis euadant aequales, quae cum coordinatas x et y diminuere tendant, binae aequationes motum corporis L determinantes erunt

$$1^{\circ}.\ (1 + m) \frac{d d x}{d \theta^2} = - \frac{m \cos. \Phi}{v v} + \frac{\cos. \theta - v \cos. \Phi}{u^3} - \cos. \theta \text{ et}$$

$$2^{\circ}.\ (1 + m) \frac{d d y}{d \theta^2} = - \frac{m \sin. \Phi}{v v} + \frac{\sin. \theta - v \sin. \Phi}{u^3} - \sin. \theta.$$

Vbi loco $1 + m$ tuto scribere licet 1, non solum quia massa m tam est parua, scilicet $\frac{3}{1000000}$, sed etiam quia nobis massas corporum coelestium tam accurate nosse non conceditur.

§. 9. Quo has aequationes propius ad vsum nostrum accommodemus, notasse iuuabit esse

$$x \cos. \Phi + y \sin. \Phi = v \text{ et } y \cos. \Phi - x \sin. \Phi = 0.$$

Hinc differentiando habebimus

$$d x \cos. \Phi + d y \sin. \Phi = d v \text{ et } d y \cos. \Phi - d x \sin. \Phi = v d \Phi;$$

porro igitur differentiando reperietur

$$d d x \cos. \Phi + d d y \sin. \Phi = d d v - v d \Phi^2 \text{ et}$$

$$d d y \cos. \Phi - d d x \sin. \Phi = 2 d v d \Phi + v d d \Phi.$$

Quodsi nunc loco $d d x$ et $d d y$ valores supra dati substituantuantur, prodibunt sequentes nouae aequationes:

$$1^{\circ}.\ \frac{(1+m)(ddv - v\,d\Phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{\operatorname{cos}.\eta}{u^3} - \frac{v}{u^3} - \operatorname{cos}.\eta;$$

$$2^{\circ}.\ \frac{(1+m)(2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi)}{d\theta^2} = -\frac{\operatorname{sin}.\eta}{u^3} + \operatorname{sin}.\eta.$$

Hoc scilicet modo non solum coordinatas x et y, sed etiam angulorum Φ et θ tam sinus quam cosinus ex calculo expulimus; interim tamen hi ambo anguli in angulo η continentur, siquidem est $\eta = \Phi - \theta$.

§. 10. Quoniam in his duabus formulis innumerae diuersae motuum species continentur, videamus ante omnia, vtrum inter eas eiusmodi detur species, qua Luna circa Terram vniformiter in circulo reuolui queat, nec ne? Hunc in finem ponamus distantiam Lunae a terra, quae debet esse constans, $v = a$, et cum eius celeritas angularis sit $= \frac{d\Phi}{d\theta}$, faciamus $\frac{d\Phi}{d\theta} = n$, ita vt sit $d\Phi = n\,d\theta$ et $dd\Phi = 0$. His autem valoribus introductis ambae nostrae aequationes euadent:

$$1^{\circ}.\ -ann(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{\operatorname{cos}.\eta}{u^3} - \frac{a}{u^3} - \operatorname{cos}.\eta \text{ et}$$

$$2^{\circ}.\ 0 = -\frac{\operatorname{sin}.\eta}{u^3} + \operatorname{sin}.\eta, \text{ vbi erit}$$

$$u = \sqrt{(1 - 2a\operatorname{cos}.\eta + aa)}.$$

§. 11. Ex secunda aequatione statim patet, eam subsistere non posse, nisi sit vel $\operatorname{sin}.\eta = 0$, vel $u = 1$. At vero posterius fieri nequit, nisi angulus η sit constans, propterea quod esse deberet $\operatorname{cos}\,\eta = \frac{1}{2}a$. Quia vero est $d\Phi = n\,d\theta$, ideoque $\Phi = n\theta$, erit $\eta = (n-1)\theta$, qui angulus constans esse nequit, nisi $n = 1$. Hic autem casus iam in priore continetur, quo esse debet $\operatorname{sin}.\eta = 0$, id quod duplici modo fieri potest, vel sumendo $\eta = 0$, vel $\eta = 180^{\circ}$. Quare cum sit $\eta = (n-1)\theta$, priore casu debet esse

esse $n = 1$. Pro altero vero casu, quo $\eta = 180°$, ex valore differentiali $d\Phi = n\,d\theta$ fit

$$\Phi = n\theta + \alpha, \text{ ideoque } \eta = (n-1)\theta + \alpha = 180°,$$

quod fieri nequit, nisi sit $n = 1$ et $\alpha = 180°$, sicque duos habebimus casus euoluendos, alterum quo $\eta = 0$, alterum vero quo $\eta = 180°$. Vtrumque ergo seorsim euoluamus.

§. 12. Sit igitur primo $\eta = 0$, ideoque sin. $\eta = 0$ et cos. $\eta = 1$, vnde fiet $u = 1 - a$. Quare cum posteriori aequationi iam est satisfactum, sumendo $n = 1$ prior aequatio hanc praebet conditionem:

$$-a(1+m) = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{(1-a)^2} - 1$$

quae vnicam tantum continet incognitam a, cuius ergo valorem hinc determinari oportet. Reducitur autem ista aequatio ad hanc formam:

$$0 = a^3(1-a)^2(1+m) - m(1-a)^2 + a^3(2-a)$$

quae aequatio ad quinque dimensiones exsurgit. Quia autem m est fractio quam minima, haec aequatio subsistere nequit, nisi ipsa quantitas a sit quam minima; tum autem loco $(1-a)^2$ scribere licebit 1, quo facto habebimus

$$a^3(1+m) - m + 2a^3 = 0,$$

vnde colligitur

$$a^3 = \frac{m}{3+m}, \text{ ideoque } a = \sqrt[3]{\frac{m}{3+m}} = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}.$$

§. 13. Sin autem sit $\eta = 180°$ et cos. $\eta = -1$, ob $n = 1$ et $u = 1 + a$ prior aequatio dabit

$$0 = +a(1+m) - \frac{m}{aa} - \frac{1}{(1+a)^2} + 1;$$

vbi etiam facile patet a esse debere minimum, atque adeo, facta euolutione et neglectis terminis minimis, prorſus vt ante prodibit $a^3 = \frac{m}{1+m}$. Hi autem valores proxime tantum ſunt veri, et aliquod diſcrimen prodiret, ſi approximationem vlterius proſequi vellemus, quod autem operae pretium non videtur, cum ſufficiat iſtum valorem ipſius a proxime noſſe.

Euolutio caſus,

quo Luna motu vniformi in circulo circa terram reuolui poſſit.

§. 14. Iam oſtendimus, hoc fieri non poſſe, niſi angulus $STL = \eta = \Phi - \theta$ fuerit vel nullus vel 180 graduum. Priore igitur caſu Luna perpetuo Soli maneret coniuncta, ſeu in perpetua coniunctione cum Sole cerneretur; poſteriori vero caſu perpetuo in oppoſitione Solis verſaretur, ideoque pleno lumine luceret. Vtroque ergo caſu talis Luna reuolutiones ſuas ſingulis annis abſolueret, et tempus menſtruum exacte cum duratione anni conueniret.

§. 15. Deinde etiam vidimus, diſtantiam talis Lunae a terra eſſe $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$. Cum igitur ſit $m = \frac{1}{333333}$, erit $a = \frac{1}{100}$, ſiue haec diſtantia aequabitur centeſimae parti diſtantiae Solis a Terra. Quare cum diſtantia media verae Lunae a Terra ſit quaſi $\frac{1}{400}$ diſtantiae Solis, talis Luna quadruplo longius a terra diſtaret quam vera Luna, ideoque in ſemidiametris terrae eius diſtantia foret circiter 240 ſemidiametrorum terreſtrium. Vnde patet, quantopere tempus periodicum talis Lunae a regula *Kepleri* eſſet diſcrepaturum, quoniam ſecundum hanc regulam tempus perioriodicum talis Lunae se habere deberet ad tempus menstruum vt 8 : 1, vel talis Luna octo mensibus suos circuitus absoluere deberet, cum tamen integrum annum postulet, ratio autem manifesto sita est in eo, quod vis centripeta terrae in maioribus distantiis continuo magis a vi Solis diminuitur.

§. 16. Quoniam porro talis Luna etiam a Sole perpetuo eandem distantiam seruaret, dum scilicet priori casu, quo $\eta = 0$, eius distantia a Sole perpetuo foret $= 1 - a$, posteriori vero casu, quo $\eta = 180^\circ$, ea foret $= 1 + a$, talis Luna ex Sole spectata etiam circulum describere cerneretur, idque motu vniformi, quandoquidem perpetuo terrae coniuncta maneret, eodemque tempore suas reuolutiones perageret; perpetuo enim vel in coniunctione inferiore, vel in superiore versaretur.

§. 17. Maxime notatu dignus est iste casus, quo existere posset corpus coeleste, quod tam circa terram, quam circa Solem circulum describere cerneretur, quatenus enim circa terram in circulo reuoluitur, eatenus rite tanquam satelles terrae spectari potest, quatenus autem circa Solem in circulo reuoluitur, eatenus pro planeta primario haberi potest. Quare cum distantia a terra sit $a = \frac{1}{105}$, ad hanc vsque distantiam sphaera lunaris extendenda merito videtur, ita vt omnia corpora, quae intra hoc spatium circa terram voluuntur, ad classem satellitum merito referri queant; quae autem extra hoc spatium cursum suum absoluunt, ea ad classem planetarum principalium numerari debeant.

§. 18.

§. 18. Quemadmodum autem terrae ſuam ſphaeram lunarem aſſignauimus, ita etiam reliquis planetis ſuae ſphaerae ſatellitiae conſtitui poterunt. Formulae enim ſupra datae ad planetam Iouem transferentur, ſi diſtantia media Iouis a Sole vnitate deſignetur, littera vero m maſſam Iouis denotet, quae cum ſit circiter $\frac{1}{1103}$, radius ſphaerae ſatellitiae Iouis reperietur $a = \sqrt[3]{\frac{1}{3.1103}} = \frac{1}{15}$. Ex quo ſequitur, quaecunque corpora circa Iouem intra hanc diſtantiam reuoluuntur, ea inter eius ſatellites eſſe numeranda, dum contra omnia, quae extra motus ſuos peragunt, in ordinem planetarum principalium redigi debeant. Simili modo ſphaera ſatellitia Saturni ad diſtantiam $\frac{1}{21}$ ſuae diſtantiae a Sole extendenda reperietur.

Propior applicatio
ſuperiorum formularum ad motus lunares.

§. 19. Quoniam igitur ad genus lunare alia corpora referri non conuenit, niſi quorum diſtantia a terra non excedit partem centeſimam diſtantiae Solis a Terra, in formulis noſtris diſtantia $TL = v$ ſemper minor ſpectari poterit quam $\frac{1}{100}$, vnde cum iſta diſtantia ſit valde exigua, valorem litterae $u = \sqrt{(1 - 2v \operatorname{coſ.} \eta + vv)}$ ſatis commode vero proxime exprimere licebit; erit enim

$$\frac{1}{u^3} = (1 - 2v \operatorname{coſ.} \eta + vv)^{-\frac{3}{2}};$$

vnde ſi altiores ipſius v poteſtates negligere velimus, erit $\frac{1}{u^3} = 1 + 3v \operatorname{coſ.} \eta$; ſin autem etiam poteſtatem ſecundam vv admittere vellemus, foret

$$\frac{1}{u^3} = 1 + 3v \operatorname{coſ.} \eta - \frac{3}{2} vv + \frac{15}{2} vv \operatorname{coſ.} \eta^2.$$

Verum quia v ſemper minus eſt quam $\frac{1}{100}$, hos poſtremos ter-

terminos facile negligere licebit, ita vt sufficiat sumsisse $\frac{1}{u^3} = 1 + 3\,v\,\text{cos}.\,\eta$.

§. 20. Hoc autem valore introducto binae aequationes motum determinantes supra §. 9. inuentae erunt:

$$1^\circ.\ \frac{d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} = -\frac{m}{v\,v} - v\,(1 - 3\,\text{cos}.\,\eta^2) \text{ et}$$

$$2^\circ.\ \frac{2\,d\,v\,d\,\Phi + x\,d\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -3\,v\,\text{cos}.\,\eta\,\text{sin}.\,\eta.$$

Cum igitur sit

$$\text{cos}.\,\eta^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{cos}.\,2\,\eta \text{ et } \text{cos}.\,\eta\,\text{sin}.\,\eta = \tfrac{1}{2}\,\text{sin}.\,2\,\eta,$$

hae aequationes induent sequentes formas:

$$1^\circ.\ \frac{d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} = -\frac{m}{v\,v} + \tfrac{1}{2}\,v\,(1 + 3\,\text{cos}.\,2\,\eta) \text{ et}$$

$$2^\circ.\ \frac{2\,d\,v\,d\,\Phi + v\,d\,d\,\Phi}{d\,\theta^2} = -\tfrac{3}{2}\,v\,\text{sin}.\,2\,\eta.$$

Hinc iam multo facilius casus deriuari potest, quo corpus circulum motu vniformi describit. Posito enim $v = a$ et $d\,\Phi = n\,d\,\theta$, hae aequationes dabunt

$$1^\circ.\ -a\,n\,n = -\frac{m}{a\,a} + \tfrac{1}{2}\,a\,(1 + 3\,\text{cos}.\,2\,\eta) \text{ et}$$

$$2^\circ.\ 0 = -\tfrac{3}{2}\,a\,\text{sin}.\,2\,\eta,$$

vbi vt ante esse debet vel $\eta = 0$, vel $\eta = 180^\circ$, tum vero $n = 1$. Pro priore casu autem vtrinque erit $\text{cos}.\,2\,\eta = 1$, vnde ista aequatio fiet $3\,a^3 = m$, ideoque $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}$, vt ante.

§. 21. Caeterum hinc videri posset, etiam sumi posse $\eta = 90^\circ$. Quoniam enim hoc modo posteriori aequationi satisfit, tum autem ob $d\,\Phi = n\,d\,\theta$ est angulus $\Phi = n\,\theta + \alpha$, ideoque $\eta = (n - 1)\,\theta + \alpha = 90^\circ$, foret vtique $\alpha = 90^\circ$ et $n = 1$. At vero pro priore aequatione habebitur $\text{cos}.\,2\,\eta = -1$, vnde prodiret $0 = \frac{-m}{a\,a}$,

 qui

qui ergo casus manifesto locum habere nequit. Quemadmodum autem hinc casum elicuimus, quo motus corporis fit circularis, etiam operae pretium erit in eos casus inquirere, vbi motus tantum quam minime, seu infinite parum a circulari discrepat.

Inuestigatio casuum, quibus motus Lunae infinite parum a circulari esset discrepaturus.

§. 22. Quia motus proxime in circulo absolui debet, distantia v semper quam minime a constante discrepare debet. Ponatur igitur $v = a\,(1 + \alpha \cos. 2\,\eta)$, vbi α fractionem prae vnitate quam minimam denotet, ita vt eius potestates tuto negligi queant. Ex ipsa enim aequationum forma facile intelligitur, partem istam minimam inuoluere debere cosinum anguli $2\,\eta$. Deinde quia etiam motus proxime debet esse vniformis, statuatur simili modo $\frac{d\Phi}{d\theta} = n\,(1 + \beta \cos. 2\,\eta)$, ita vt etiam β sit fractio quam minima. Hinc cum sit $d\eta = d\Phi - d\theta$, erit

$$\frac{d\eta}{d\theta} = n\,(1 + \beta \cos. 2\,\eta) - 1, \text{ siue } \frac{d\eta}{d\theta} = n - 1,$$

ob β fractionem minimam. His positis erit

$$\frac{dv}{d\theta} = -2\,a\,\alpha\,(n-1) \sin. 2\,\eta \text{ et}$$

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -4\,a\,\alpha\,(n-1)^2 \cos. 2\,\eta,$$

tum vero habebitur

$$\frac{dd\Phi}{d\theta^2} = -2\,n\,\beta\,(n-1) \sin. 2\,\eta.$$

§. 23. His iam valoribus introductis pro aequatione posteriore habebimus

$$\frac{v\,dd\Phi}{d\theta^2} = -2\,a\,n\,\beta\,(n-1)\,\text{fin.}\,2\,\eta \quad \text{et}$$

$$\frac{2\,dv\,d\Phi}{d\theta^2} = -4\,n\,a\,\alpha\,(n-1)\,\text{fin.}\,2\,\eta.$$

His porro valoribus introductis aequatio posterior erit

$$-2an\beta(n-1)\,\text{fin.}\,2\eta - 4an\alpha(n-1)\,\text{fin.}\,2\eta = -\tfrac{3}{2}a\,\text{fin.}\,2\eta,$$

neglecta in parte dextra particula infinite parua. Hinc per a fin. $2\,\eta$ diuidendo habebimus

$$4\,n\,(n-1)\,(\beta + 2\,\alpha) = 3, \text{ ideoque}$$

$$\beta + 2\,\alpha = \frac{3}{4\,n\,(n-1)},$$

Vnde iam patet, quia α et β debent esse fractiones quam minimae, hunc casum locum habere non posse, nisi fuerit numerus n satis notabilis, hoc est nisi Luna admodum celeriter circa terram reuoluatur.

§. 24. Expediamus nunc etiam priorem aequationem, pro qua erit primo

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = -4\,a\,\alpha\,(n-1)^2\,\text{cof.}\,2\,\eta,$$

deinde vero erit

$$\frac{v\,d\Phi}{d\theta^2} = a\,n\,n\,(1 + (\alpha + 2\,\beta)\,\text{cof.}\,2\,\eta).$$

Porro pro parte dextra habebitur

$$\frac{m}{vv} = \frac{m}{aa}(1 + \alpha\,\text{cof.}\,2\,\eta)^{-2} = \frac{m}{aa}(1 - 2\,\alpha\,\text{cof.}\,2\,\eta),$$

ac denique

$$\tfrac{1}{2}v\,(1 + 3\,\text{cof.}\,2\,\eta) = \tfrac{1}{2}a\,(1 + (\alpha + 3)\,\text{cof.}\,2\,\eta)$$
$$= \tfrac{1}{2}a\,(1 + 3\,\text{cof.}\,2\,\eta),$$

ob α minimum. Ex his igitur prior aequatio colligitur fore

$$-4\,a\,\alpha\,(n-1)^2\,\text{cof.}\,2\,\eta - a\,n\,n\,(1 + (\alpha + 2\,\beta)\,\text{cof.}\,2\,\eta)$$
$$= -\frac{m}{aa}(1 - 2\,\alpha\,\text{cof.}\,2\,\eta) + \tfrac{1}{2}a\,(1 + 3\,\text{cof.}\,2\,\eta).$$

 In qua

In qua aequatione duplicis generis termini occurrunt: alteri absoluti, alteri vero per cos. 2η affecti, quos ergo seorsim inter se aequari conuenit. Ex terminis igitur absolutis orietur

$$-ann = -\frac{m}{aa} + \frac{1}{2}a, \text{ siue } nn = \frac{m}{a^3} - \frac{1}{2},$$

vnde fit $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$; at alteri termini, per cos. 2η diuisi, praebent

$$-4a\alpha(n-1)^2 - ann(\alpha + 2\beta) = \frac{2m\alpha}{aa} + \frac{3}{2}a, \text{ siue}$$
$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \frac{3}{2} = -\frac{2m\alpha}{a^3}.$$

§. 25. Tres igitur adepti sumus conditiones, quas adimpleri oportet, ex quarum secunda $\frac{m}{a^3} = nn + \frac{1}{2}$, statim deduci potest distantia $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$. Quodsi porro in tertia aequatione loco $\frac{m}{a^3}$, scribatur valor $nn + \frac{1}{2}$, ea erit

$$4\alpha(n-1)^2 + nn(\alpha + 2\beta) + \frac{3}{2} = -2\alpha nn - \alpha,$$

siue

$$4\alpha(n-1)^2 + 3\alpha nn + 2\beta nn + \alpha + \frac{3}{2} = 0.$$

Prima vero conditio dederat $\beta + 2\alpha = \frac{3}{4n(n-1)}$, vnde fit $\beta = \frac{3}{4n(n-1)} - 2\alpha$, qui valor in illa aequatione substitatus producit

$$4\alpha(n-1)^2 + \frac{3n}{2(n-1)} - \alpha nn + \alpha + \frac{3}{2} = 0,$$

siue

$$\alpha(3nn - 8n + 5) = \frac{-3n}{2(n-1)} - \frac{3}{2} = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)},$$

vnde elicitur $\alpha = \frac{-3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)}$, hincque

$$\beta = \frac{3(11nn - 12n + 5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}.$$

Pro distantia autem a inuenimus $a = \sqrt[3]{\frac{2m}{2nn+1}}$.

§. 26.

§. 26. Hic autem probe notandum eſt, hos valores locum habere non poſſe, niſi numeri α et β fuerint valde exigui, vt earum quadrata et producta tuto negligi queant; vnde ſtatim patet, id fieri non poſſe, niſi numerus n accipiatur praegrandis. Ad hunc limitem aeſtimandum, quoniam poſuimus

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{coſ.} 2\eta) \text{ et } \frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{coſ.} 2\eta),$$

hinc quaeramus ipſum angulum Φ, qui erit

$$\Phi = n\theta + \beta n \int d\theta \operatorname{coſ.} 2\eta,$$

vbi quia eſt

$$d\eta = d\Phi - d\theta = (n-1)d\theta, \text{ erit } d\theta = \frac{d\eta}{n-1};$$

vnde fit

$$\int d\theta \operatorname{coſ.} 2\eta = \int \frac{d\eta \operatorname{coſ.} 2\eta}{n-1} = \frac{\operatorname{ſin.} 2\eta}{2(n-1)}$$

quamobrem habebimus $\Phi = n\theta + \frac{\beta n \operatorname{ſin.} 2\eta}{2(n-1)}$; ex qua forma facile intelligitur, dummodo poſterior pars non ſuperet aliquot minuta prima, terminos neglectos tuto omitti poſſe. At vero vnum minutum primum in partibus radii eſt 0,00029, vnde ſi ſumamus $n = 100$, valor formulae $\frac{\beta n}{2(n-1)}$, producit tantum 0,000142, ideoque ſemi-minutum primum. Ex quo tuto concludere licet, limitem, quem numerus n ſuperare debet, ſatis tuto conſtitui poſſe $n = 50$. Poſito autem $n = 50$ fit

$$\beta = \frac{3.26905}{200.49^2.145} = 0,001159, \text{ hincque}$$

$$\frac{n\beta}{2(n-1)} = \frac{50.\beta}{98} = 0,00059,$$

quae fractio valet ſatis exacte duo minuta prima; quamobrem ſtatui poſſe videtur, quamdiu numerus n maior fuerit quam 50, formulas inuentas tam exacte cum veritate conſentire, vt error prorſus ſentiri nequeat; contra vero, ro, quo minor numerus n accipiatur quam 50, tum formulas nostras continuo magis a veritate esse aberraturas, propterea quod his casibus terminos, quos neglecimus, non amplius omittere licet.

§. 27. Consideremus igitur propius casum quo $n = 50$, et quoniam iam inuenimus esse $\beta = 0,001159$, quaeramus etiam valorem ipsius $\alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)}$, qui reperitur $\alpha = -0,000425$. Pro distantia autem a inueniendа, quia inuenimus $a^3 = \frac{2m}{2nn+1}$, erit

$$\frac{1}{a^3} = \frac{2nn+1}{2m} = \frac{1000000(2nn+1)}{6}, \text{ ob } m = \frac{3}{1000000}.$$

Cum igitur sit $2nn+1 = 5001$, erit $l\frac{1}{a^3} = 8,9209056$, ideoque $l\frac{1}{a} = 2,9736352$, consequenter $\frac{1}{a} = 941$, ideoque $a = \frac{1}{941}$. Quare cum distantia Solis, quam hic vnitate designamus, contineat satis exacte 24000 semidiametros terrae, distantia huius Lunae a terra erit quasi 25 semidiametrorum terrestrium, ideoque plus quam duplo minor, quam distantia Lunae verae. Hinc autem motus talis Lunae per sequentes duas aequationes exprimetur:

$$1^\circ.\; v = a(1 - 0,000425 \cos. 2\eta);$$

$$2^\circ.\; \Phi = 50\,\theta + 0,00059 \sin. 2\eta$$

siue in minutis secundis $\Phi = 50\,\theta + 122'' \sin. 2\eta$.

§. 28. Talis igitur Luna in distantia a Terra 25 semidiametrorum terrestrium propemodum circulum motu vniformi esset descriptura, eiusque tempus periodicum praecise foret pars quinquagesima vnius anni, ideoque suas reuolutiones perageret tempore $7^d. 7^h$. Interim tamen in eius motu quaedam exiguae inaequalitates deprehendentur

dentur ab elongatione huius Lunae a Sole pendentes, quas ergo, vti in vera Luna fieri ſolet, variationem appellare liceat, quibus tam diſtantia a terra, quam locus medius, in formula 50 θ contentus, afficietur; has ergo pro praecipuis angulis η hic ob oculos ponamus.

Variatio	$\eta = 0$ vel $= 180°$	$\eta = 45°$ vel $= 225°$
Diſtantiae	$-0,000425\,a$	0
Longitudo	0	$122''$

Variatio	$\eta = 90°$ vel $= 270°$	$\eta = 135°$ vel $= 315°$
Diſtantia	$0,000425\,a$	0
Longitudo	0	$-122''$

Scilicet in coniunctionibus et oppoſitionibus diſtantiam mediam a diminui oportet particula $\frac{a}{2352}$, quae tantum facit partem nonageſimam quartam ſemidiametri terrae, ſive circiter 9 milliaria Germanica; tum vero longitudo nulla eget correctione. Contra vero in quadraturis diſtantiam Lunae augeri oportet particula $\frac{a}{94}$, longitudo autem pariter nulla correctione indiget. At vero in octantibus, vbi $\eta = \begin{cases} 45° \\ 225 \end{cases}$ vel $\eta = \begin{cases} 135° \\ 315 \end{cases}$, diſtantia nullam correctionem poſtulat, longitudinem vero ϕ priori caſu augeri, poſteriori vero diminui oportet quantitate $122''$, hoc eſt $2'$, $2''$. Multo minus autem motus talis Lunae a circulari vniformi foret diſcrepaturus, ſi eius diſtantia minor eſſet quam 25 ſemidiametrorum terrae.

§. 29. Quodſi velimus, vt talis Luna in ipſa ſuperficie terrae reuoluatur, ita vt ſit $a = \frac{1}{24000}$, hinc primo com-

computari debet valor numeri n, qui indicat, quot reuolutiones talis Luna interuallo vnius anni circa terram esset peractura. Cum igitur inuenerimus $nn + \frac{1}{2} = \frac{m}{a^3}$, erit

$$nn + \tfrac{1}{2} = 3 \cdot 240^5 \text{ ideoque } n = \sqrt{3 \cdot 240^5}$$

ex quo reperitur $n = 6439$. Toties scilicet talis Luna vno anno reuolueretur, qui numerus per 365 diuisus ostendet quoties talis Luna tempore 24 horarum circumferetur, scilicet $17\frac{2}{3}$, quod satis egregie conuenit cum calculo *Hugenii*, Euidens autem est valores α et β hoc casu prorsus euanescere.

§. 30. Quanquam autem his casibus, quibus distantia a non vltra 25 semidiametros terrestres exsurgit, eius distantia a terra exiguam variationem patitur, ita vt orbita non perfecte sit circularis, tamen tali orbitae ab Astronomis nulla excentricitas tribui solet, propterea quod inaequalitates a solo angulo ν pendent, dum effectus excentricitatis ab Anomalia pendet, cuius hic nullum vestigium apparet. Quemadmodum etiam distantiae verae Lunae a terra, haud exiguam variationem paterentur, etiamsi eius excentricitas euanesceret.

§. 31. Cum determinationes hactenus inuentae tanquam exactissimae spectari queant, dummodo distantia talium Lunarum non notabiliter 25 semidiametros terrestres superet, hoc intelligi oportet, quando orbitae omni excentricitate carent, ita vt omnes inaequalitates tam in distantia, quam motus celeritate a sola elongatione Solis, siue angulo η pendeant, ad cuiusmodi motum producendum manifestum est tali Lunae initio certum motum imprimi

primi debuiſſe. Sin autem motus impreſſus tantillo fuerit maior vel minor, inde ſtatim orietur quaepiam excentricitas, quae, dummodo fuerit ſatis parua, ſequenti modo definiri poterit.

Inueſtigatio motuum, qui oriuntur, ſi in caſibus praecedentibus praeter variationem etiam quam minima excentricitas acceſſerit.

§. 32. Quoniam pro effectu ab excentricitate oriundo certus quidam angulus in computum trahi debet, qui anomalia vocari ſolet, deſignemus iſtum angulum littera ζ, pro quo ponamus $d\zeta = i\,d\theta$, quem numerum i ex ipſis formulis noſtris determinari oportet. Simili igitur modo, quo ſupra angulum η in calculum introduximus, nunc quoque angulum ζ introducamus, ideoque ponamus

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{cof.} 2\eta + \gamma \operatorname{cof.} \zeta);$$
$$\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{cof.} 2\eta + \delta \operatorname{cof.} \zeta);$$

vbi pariter ſupponimus coefficientes γ et δ eſſe quam minimos, ita vt earum combinationes tam inter ſe quam cum litteris α et β negligi queant. Hinc igitur ſimilis calculus inſtitui debebit, vt ante, et quoniam litterae α et β iam ſunt inuentae, hic tantum habebimus has formulas:

$$v = a(1 + \gamma \operatorname{cof.} \zeta) \text{ et } \frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \delta \operatorname{cof.} \zeta).$$

Praeterea cum per litteras α et β omnes termini angulum η vel 2η inuoluentes iam ex aequationibus principalibus ſint ſublati, nunc ſufficiet has aequationes conſideraſſe:

$$1^\circ. \ \frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \frac{1}{a}v \text{ et}$$
$$2^\circ. \ \frac{2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = 0.$$

§. 33. His obferuatis, cum fit $d\zeta = i\,d\theta$, per differentiationem nancifcemur

$$\frac{dv}{d\theta} = -i\,a\,\gamma\,\text{fin.}\,\zeta \text{ et } \frac{ddv}{d\theta^2} = -i\,i\,a\,\gamma\,\text{cof.}\,\zeta;$$

tum vero $\frac{dd\Phi}{d\theta^2} = -i\,n\,\delta\,\text{fin.}\,\zeta$. Praeterea vero habebimus

$$\frac{1}{vv} = \frac{1}{aa}(1 + \gamma\,\text{cof.}\,\zeta) = \frac{1}{aa}(1 - 2\gamma\,\text{cof.}\,\zeta).$$

Hinc igitur pofterior aequatio induet hanc formam:

$$-2\,i\,n\,a\,\gamma\,\text{fin.}\,\zeta - i\,a\,n\,\delta\,\text{fin.}\,\zeta = 0,$$

vnde oritur $\gamma = -\frac{1}{2}\delta$. Prior autem aequatio facta fubftitutione induet hanc formam:

$$-i\,i\,a\,\gamma\,\text{cof.}\,\zeta - a\,n\,n - a\,n\,n(2\delta + \gamma)\text{cof.}\,\zeta$$
$$= -\frac{m}{aa} + \frac{2m\gamma}{aa}\text{cof.}\,\zeta + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\,\gamma\,\text{cof.}\,\zeta;$$

hinc termini abfoluti praebent, vt iam fupra inuenimus,

$$\frac{m}{aa} = a\,(n\,n + \tfrac{1}{2}),$$

reliqui vero per $a\,\text{cof.}\,\zeta$ diuifi dant

$$-i\,i\,\gamma - n\,n(2\delta + \gamma) = \frac{2m\gamma}{a^3} + \tfrac{1}{2}\gamma = (2\,n\,n + \tfrac{3}{2})\gamma.$$

Ante autem inuenimus $\delta = -2\gamma$, vnde fit

$$-i\,i + 3\,n\,n = 2\,n\,n + \tfrac{3}{2}, \text{ ideoque } i\,i = n\,n - \tfrac{3}{2}$$

fiue $i = \sqrt{(nn - \frac{3}{2})}$. Ipfa autem quantitas γ hinc non definitur, fed arbitrio noftro relinquitur; tam paruus autem valor ipfi tribui debet, vt hypothefis confiftere poffit.

§. 34. Hic quantitas ifta γ idem denotat, quod vulgo excentricitas vocari folet, at vero angulus ζ eft anomalia media et tempori θ ita proportionalis, vt fit

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = i = \sqrt{(n\,n - \tfrac{3}{2})};$$

vbi notetur, fi effet $i = n$, tum anomaliam $\zeta = n\,\theta$ ipfi motui

motui medio fore aequalem, ideoque lineam abſidum quieſcere. Quia autem hinc valor ipſius i tantillo fit minor, ſcilicet $i = n - \frac{3}{4n}$, motus anomaliae aliquanto tardior erit, ideoque linea abſidum aliquantillum progreditur; tum vero formulae motum determinantes erunt:

$$v = a(1 + \alpha \operatorname{coſ.} 2\eta + \gamma \operatorname{coſ.} \zeta) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{d\theta} = n(1 + \beta \operatorname{coſ.} 2\eta + \delta \operatorname{coſ.} \zeta).$$

Ex poſteriore colligitur

$$\Phi = n\theta + \frac{\beta n}{2(n-1)} \operatorname{ſin.} 2\eta - \frac{2n\gamma \operatorname{ſin.} \zeta}{i};$$

vbi meminiſſe conuenit eſſe, vti ſupra inuenimus

$$a = \sqrt{\frac{2m}{2nn+1}};\ \alpha = -\frac{3(2n-1)}{2(n-1)^2(3n-5)} \text{ et}$$
$$\beta = \frac{3(11nn - 12n + 5)}{4n(n-1)^2(3n-5)}$$

quibus ergo motus talis Lunae accurate exprimitur, ſi modo fuerit $n > 50$, ſiue $a < 25$ ſemidiametrorum terreſtrium, ipſa autem excentricitas γ tam parua, vt inaequalitas inde in motu orta, ſcilicet $\frac{2n\gamma}{i}$, in angulum conuerſa, non vltra aliquot minuta prima aſcendat; quod ob $i = n$ proxime euenit, ſi γ non ſuperet 0, 00029, qui eſt valor vnius minuti primi. Ex his enim formulis ad quoduis tempus tam diſtantiam talis Lunae a terra, quam eius veram longitudinem aſſignare licebit. Quod autem ad ipſum motum abſidum attinet, quoniam tempore vnius anni n reuolutiones peraguntur a termino fixo, at vero, reuolutiones a linea abſidum computando, pauciores reuolutiones, ſcilicet $i = n - \frac{3}{4n}$ abſoluuntur, linea abſidum interea proceſſiſſe cenſenda eſt per $\frac{3}{4n} \cdot 360° = \frac{270°}{n}$. Vnde ſi $n = 50$, motus annuus apogaei erit $\frac{27°}{5} = 5°, 24'$; quo maior autem fuerit numerus n, eo tardior erit iſte motus.

Tab. X. Fig. 6. §. 35. Vt iste motus lineae absidum clarius percipiatur, sit $T\Pi$ recta ad apogaeum Π ducta, voceturque angulus $AT\Pi = \pi$, Luna autem versetur in L, ita vt sit angulus $ATL = \Phi$ et anomalia $\Pi TL = \zeta$, eritque $\Phi = \pi + \zeta$. Cum iam secundum motum medium sit $d\Phi = n\,d\theta$ et $d\zeta = i\,d\theta$, erit $d\pi = (n-1)\,d\theta$, vbi $\frac{d\pi}{d\theta}$ denotat celeritatem lineae absidum, vnde, tempore per angulum θ expresso, linea absidum promouebitur per angulum $(n-1)\theta$, ideoque tempore vnius anni, quo fit $\theta = 360^\circ$, linea absidum progredietur per angulum $(n-1)\,360^\circ$. Ex quo patet, si esset $i = n$, tum lineam absidum perfecte quiescere. In casu vero oblato vidimus esse $i = \sqrt{(nn - \frac{3}{2})} = n - \frac{3}{4n}$; vnde sequitur, interuallo vnius anni apogaeum Lunae promoueri per angulum $\frac{270^\circ}{n}$, sicque quo maior fuerit numerus n, hoc est, quo minor fuerit distantia a, eo tardiorem fore motum apogaei; contra vero eo celeriorem, quo minor fuerit n. Hoc autem tantum intelligi debet, quando $n > 50$ et $a < 25$ semidiametrorum terrestrium; pro maioribus distantiis autem, vbi motus magis erit perturbatus, promotio lineae absidum aliam sequetur rationem, namque pro Luna vera est propemodum $n = 13$, vnde pro motu annuo apogaei ista formula tantum praeberet $\frac{10}{13}.\,20^\circ$, qui tamen reuera propemodum duplo est maior.

§. 36. In casibus igitur hactenus tractatis, quibus $n > 50$ et excentricitas γ tam exigua vti supponimus, determinatio loci talis Lunae duas tantum correctiones postulat, quarum altera ab angulo 2η pendet, quae variatio vocatur, altera vero ab angulo ζ, quo anomalia designatur. Quando autem excentricitas γ notabiliter maior est quam

o,

o, 00029, hoc est quam $\frac{1}{10000}$, tum insuper in calculum introduci necesse est terminos, qui oriuntur ex combinatione binorum terminorum, qui iam angulos 2η et ζ continent, vnde nascuntur noui anguli, scilicet 2ζ, atque adeo porro 3ζ, 4ζ etc. ac praeterea etiam anguli $2\eta \pm \zeta$; imo etiam porro $2\eta \pm 2\zeta$, $2\eta \pm 3\zeta$ etc. Ex quo intelligitur, quo maior fuerit excentricitas γ, eo pluribus opus esse correctionibus ad locum talis Lunae determinandum.

§. 37. Haec ita se habent, quando numerus reuolutionum quotannis peractarum non notabiliter minor est quam 50, siue distantia media non multum superat 25 semidiametros terrestres. Consideremus nunc etiam casus, quibus distantia a multum superat hunc limitem. Ac primo quidem omnem excentricitatem remoueamus, ita vt omnes inaequalitates a solo angulo η pendeant, et quoniam tum binos pluresue huiusmodi angulos inuicem combinari oportet, praeter angulum 2η etiam eius multipla in computum ingredientur, scilicet 4η, 6η etc.; tum vero, aucta distantia a vel v, series pro $\frac{1}{u^3}$ inuenta vsque ad tertium terminum extendi debebit, vnde in nostras aequationes etiam anguli η et 3η ingredientur, a quibus eae correctiones pendent, quae parallacticae vocari solent, quoniam a vera distantia Solis a Terra pendent.

§. 38. Quodsi iam praeterea excentricitas quam minima accedat, cui respondeat anomalia ζ, praeter angulos ante memoratos insuper introducentur anguli $2\eta \pm \zeta$; $4\eta + \zeta$ ac fortasse etiam $6\eta \pm \zeta$; tum vero etiam ex parallacticis natae: $\eta \pm \zeta$ et $3\eta \pm \zeta$. Sin autem excentricitas maior euadat, vt etiam angulorum 2ζ, 3ζ, 4ζ etc. ratio haberi debeat, per combinationem insuper accedent anguli $2\eta \pm 2\zeta$; $4\eta \pm 2\zeta$; $6\eta \pm 2\zeta$; etc. itemque porro anguli $2\eta \pm 3\zeta$; $4\eta \pm 3\zeta$; etc. quin etiam $\eta \pm 2\zeta$; $3\eta \pm 2\zeta$. Vnde patet, quo maior fuerit distantia Lunae a Terra, simulque excentricitas, numerum angulorum, a quibus omnes correctiones pendent, continuo magis increscere, atque adeo tandem tam magnum euadere posse, vt ob ipsam multitudinem determinatio fiat incerta, praeterquam quod labor, omnes istas correctiones per calculum definiendi, mox vires Analyseos esset superaturus.

§. 39. Haec clariora reddentur, si tabulas pro motu verae Lunae determinando contemplemur, quae primo manifesto inuoluunt angulos 2η, 4η, item 3η, ex quibus coniunctis variatio Lunae emergit; deinde secundo angulos ζ, 2ζ, 3ζ et 4ζ, qui coniunctim exhibent aequationem centri; tertio vero insuper accedunt anguli per combinationem orti, scilicet:

$2\eta \pm \zeta$; $4\eta \pm \zeta$; $2\eta \pm 2\zeta$; $4\eta \pm 2\zeta$; $2\eta \pm 3\zeta$; tum vero etiam $\eta \pm \zeta$; $3\eta \pm \zeta$. Hae scilicet correctiones solae sufficerent, si terra circa Solem vniformiter in circulo reuolueretur, simulque tota Lunae orbita in eclipticam incideret; verum ob motum Solis inaequabilem, anomalia etiam Solis et, ob inclinationem orbitae Lunaris, etiam argumentum Latitudinis in computum ingrediuntur, quos duos nouos angulos cum singulis praecedentium combinari oportet, vnde tantus correctionum numerus originem traxit.

§. 40. His perpensis abunde intelligitur, si daretur eiusmodi Luna, quae in multo maiori distantia circa ter-

terram reuolueretur, tum numerum omnium correctionum tantopere multiplicatum iri, vt motus plane non amplius per huiusmodi tabulas repraesentari posset, ideoque nobis etiamnunc foret inperscrutabilis; quamobrem summopere necesse erit, in alium modum maxime diuersum, huiusmodi Lunae motum repraesentandi, inquirere, cuius quidem adhuc ne vel minimam notionem nobis formare valemus. Hae autem difficultates eo magis increscent, quo propius orbita talis Lunae ad limitem sphaerae lunaris supra fixum, scilicet $a = \frac{1}{105}$ accesserit. Ac si talis Luna existeret, fateri cogeremur, nos nullam prorsus ideam eius motus ne mente quidem concipere posse, talemque motum prorsus fore inextricabilem, nisi forte nostra scientia analytica insignibus incrementis fuerit locupletata.

§. 41. Cum igitur, quo propius distantia talis Lunae ad limitem supra definitum $a = \frac{1}{105}$ appropinquauerit, eius motus continuo magis fiat irregularis, atque adeo vires nostri ingenii superet, eo magis est mirandum, quod in ipso limite $a = \frac{1}{100}$ contingere posset, vt Luna motu adeo vniformi in circulo circumferretur. Verum istum casum comparari conueniet cum eiusmodi statu aequilibrii, qui labilis seu caducus appellari solet. Veluti quando acus cuspide insistit: simul ac enim quam minime ob hoc statu fuerit aberratus, tota machina in ruinam delabitur. Simili modo si motus huiusmodi Lunae quam minime a motu illo regulari deficiat, subito maxime euadet irregularis, neque vllis regulis vel tabulis comprehendi poterit.

DE

DE MOTIBVS
MAXIME IRREGVLARIBVS, QVI IN SYSTEMATE MVNDANO LOCVM HABERE POSSENT, VNA CVM METHODO HVIVSMODI MOTVS PER TEMPORIS SPATIVM QVANTVMVIS MAGNVM PROSEQVENDI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In praecedente dissertatione nobis licuit limites naturales definire, quos inter planetas primarios et secundarios stabilire conuenit. Ostendimus enim sphaeram lunarem a centro terrae vsque ad partem centesimam distantiae Solis extendi, quandoquidem in hac distantia euenire posset, vt corpus certo modo proiectum, tam circa terram, quam circa Solem, circulum motu vniformi describeret; similique modo sphaeram satellitiam Iouis circiter ad partem decimam quintam eius distantiae a Sole, Saturni autem ad partem vicesimam circiter distantiae a Sole porrigi obseruauimus. Quibus limitibus constitutis omnia corpora, quae intra eos reuolutiones suas peragunt, ad classem Satellitellitum, quae autem extra eos motum ſuum abſoluunt, inter planetas principales referri conueniet.

§. 2. Quanquam autem in ipſis his limitibus motus exiſtere poteſt maxime regularis, quippe qui in circulo vniformiter perageretur: tamen hic ſe maximum paradoxon obtulit, in hoc conſiſtens, quod ſi motus vel minime ab iſta regularitate diſcrepauerit: in eo ſtatim maximae perturbationes ſe admiſceant, quas nullo adhuc modo in Aſtronomia vſitato ad certam legem reuocare liceat. Neque enim his caſibus tales perturbationes more ſolito per certas tabulas aequationum, proxime ſaltem, repraeſentari poterunt, quaecunque etiam talium tabularum argumenta in ſubſidium vocentur; atque hae perturbationes eo erunt maiores, quo propius huiusmodi motus ad ipſos limites deſignatos acceſſerint.

§. 3. Hinc intelligitur, tria genera huiusmodi motuum maxime perturbatorum conſtitui debere, quorum primum ea complectatur corpora, quae totum ſuum motum intra limites deſignatos circa planetam primarium abſoluant, quae ergo ad claſſem Lunarum ſeu ſatellitum referri oportet. Quae autem corpora extra ſphaeram lunarem ſeu ſatellitiam non procul a limitibus motum ſuum circa Solem abſoluunt, ea ſine dubio planetis principalibus annumerari debebunt, etiamſi eorum motus tantopere perturbetur, vt nullis plane aequationibus ad certam legem reduci queat. Tertium denique genus eiusmodi comprehendet corpora, quae ita oblique moueantur, vt modo ex ſphaera lunari egrediantur, modo ſe iterum in eam immergant; talia enim corpora alio tempore tanquam ſa-

 telli-

tellites, alio vero tanquam planetae principales spectari debebunt, cuiusmodi motus quemadmodum saltem menti vero tantum proxime repraesentari queat, nequaquam adhuc intelligere licet. Si enim talia corpora in systemate nostro solari occurrerent, eorum motus nobis adhuc penitus foret ignotus, ita vt eius loca in coelo nunquam sine crassissimo errore praedicere valeremus.

§. 4. His summis difficultatibus perpensis, quilibet facile agnoscet, quam diu in tanta ignoratione circa huiusmodi motus versabimur, nos nullo modo sperare posse, vt vnquam ad accuratam cognitionem omnium perturbationum, quibus vel planetae primarii, vel satellites revera premuntur, pertingere valeamus. Quamdiu enim nobis impossibile manebit, motum alius Lunae, quae ad distantiam vel duplo, vel triplo, vel adeo quadruplo maiorem circa terram reuolueretur, perscrutari, nullo modo perfectam cognitionem omnium inaequalitatum verae Lunae assequi poterimus. Simili modo quoniam, si inter orbitas Iouis et Saturni existeret planeta primarius, eius motus nobis plane futurus esset imperscrutabilis, hinc manifesto sequitur, etiam nullam perfectam cognitionem omnium perturbationum, quae in motu Saturni obseruantur, exspectari posse.

§. 5. Haec autem tanta impedimenta nullo modo superari poterunt, nisi maxima incrementa in scientiam nostram analyticam inferantur. Cum enim omnes motus, quantumuis fuerint perturbati, nunc quidem sine vlla difficultate aequationibus analyticis comprehendi queant, totum negotium ad idoneam harum aequationum resolutionem reuo-

reuoluitur. Ad hoc autem tanta incrementa desiderantur, qualia vix adhuc, vel ne vix quidem, sperari posse videntur. Interim tamen nullum est dubium, si talis motus reuera in mundo existeret, quem per longum temporis spatium nobis obseruare licuisset, quin Astronomi in eiusmodi artificia incidissent, quibus vero saltem proxime talem motum ad certam legem quodammodo reuocare potuissent. Hanc ob rem si satis longam seriem talium obseruationum, quales eiusmodi corpus suppeditaret, ob oculos exponere possemus, earum contemplatio vsu certe non esset caritura, eaque fortasse tutissimam viam nobis aperiret ad pleniorem cognitionem huiusmodi motuum appropinquandi.

§. 6. Quanquam autem vix vlla spes superest, aequationes analyticas, quibus tales motus continentur, perfecte resoluendi: tamen iam pridem eiusmodi methodum proposui, cuius beneficio huiusmodi motus quantumvis irregulares quasi gradatim ita prosequi licet, vt si modo pro certo quodam tempore talis corporis tam locum quam motum nouerimus, inde ad quaeuis temporum interualla sequentia verus locus satis exacte determinari queat. Haec igitur methodus nobis istum eximium vsum praestare potest, vt si talis motus existeret, longissimam seriem obseruationum exhibere valeamus, quibus per longum temporis spatium vera loca talis corporis in coelo definiantur, quarum ergo contemplatio nos ad pleniorem cognitionem manuducere poterit.

§. 7. Vt igitur hanc viam ineamus et impedimenta minoris momenti remoueamus, fingamus terram in

 plano

plano eclipticae motu vniformi circa Solem in circulo reuolui, cuius radium vnitate exprimamus, eiusque motus commodissimam temporis mensuram suppeditabit. Deinde massam Solis pariter vnitate designemus, cuius respectu massa terrae sit $= m$, existente $m =$ [illegible]. Iam in ipso plano eclipticae moueatur tale corpus lunare, cuius mo-
Tab. XI. Fig. 1. tum scrutamur, atque ad certum quodpiam tempus, dum terram in T quiescentem spectamus, sit centrum Solis in S, existente $TS = 1$, Luna autem, quam consideramus, in L, cuius distantiam a Terra vocemus $TL = v$, et angulus $ATL = \Phi$, pro Sole vero ponatur angulus $ATS = \theta$, qui ergo nobis mensuram temporis praebebit, cuius elementum $d\theta$ in sequentibus aequationibus constans est assumtum. Praeterea vero ponamus breuitatis gratia angulum $STL = \Phi - \theta = \eta$ et distantiam Lunae a Sole $LS = u$, ita vt sit

$$u = \sqrt{(1 - 2v \operatorname{cos.} \eta + vv)},$$

quibus positis motus quaesitus istius Lunae L binis sequentibus aequationibus exprimetur:

$$1^\circ.\ \frac{(1+m)(ddv - vd\Phi^2)}{d\theta^2} = \frac{m}{vv} - \operatorname{cos.} \eta \left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{v}{u^3}.$$

$$2^\circ.\ \frac{(1+m)(2dvd\Phi + vdd\Phi)}{d\theta^2} = \operatorname{sin.} \eta \left(1 - \frac{1}{u^3}\right),$$

vti scilicet in praecedente dissertatione ostendimus.

§. 8. Hae aequationes tam sunt generales, vt aeque pateant ad omnia corpora, quae tam intra sphaeram lunarem quam extra in plano eclipticae reuoluuntur. Quoniam autem hic nobis potissimum est propositum in motus lunares inquirere, ita vt distantia v nunquam superet partem centesimam distantiae Solis, siue $\frac{1}{100}$, satis ex-

exacte ſtatuere licebit $\frac{1}{u^3} = 1 + 3v$ coſ. η, et quoniam fractio $m = \frac{3}{1000000}$ eſt quaſi euaneſcens, loco $1 + m$ tuto ſcribere licebit 1, vnde binae aequationes modo traditae ſequentes formas adipiſcentur:

$$\text{I. } \frac{ddv - vd\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v(1 + 3 \operatorname{coſ.} 2\eta) \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{d\theta^2} = -\tfrac{3}{2}v \operatorname{ſin.} 2\eta,$$

ex quibus quemadmodum motum iſtius Lunae gradatim proſequi queamus, vt ad quoduis tempus, poſtquam fuerit in L, eius locus innoteſcat, hic imprimis explicemus.

§. 9. Sumamus igitur pro certa epocha iſtam Lunam fuiſſe in L, cuius tam diſtantia a Terra $TL = v$ quam angulus $ATL = \Phi$ fuerit cognitus, perinde ac locus Solis, ſeu angulus $ATS = \theta$, quo ſimul tempus iſtius epochae definiatur, ſi quidem ponamus ipſo motus initio Solem fuiſſe in A, Lunam vero in I. Hinc igitur pro epocha aſſumta etiam datus erit angulus $STL = \eta = \Phi - \theta$. Praeterea quia etiam motus huius Lunae in L vt cognitas ſpectatur, etiam dabitur tam eius motus, quo a Terra recedit, cuius celeritas eſt $\frac{dv}{d\theta}$, quam eius motus angularis, cuius celeritas celeritas eſt $\frac{d\Phi}{d\theta}$, quae binae celeritates cum ſint cognitae, ponamus $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$, et cum hinc ſit

$$\frac{ddv}{d\theta^2} = \frac{dp}{d\theta} \text{ et } \frac{dd\Phi}{d\theta^2} = \frac{dq}{d\theta},$$

his valoribus ſubſtitutis noſtrae ambae aequationes erunt

$$\text{I}^\circ.\ \frac{dp}{d\theta} - qqv = -\frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v(1 + 3 \operatorname{coſ.} 2\eta)$$

$$\text{II}^\circ.\ 2pq + \frac{vdq}{d\theta} = -\tfrac{3}{2}v \operatorname{ſin.} 2\eta.$$

Hinc iam cognoſcimus mutationes momentaneas, quas litterae p et q accipiunt; erit enim

$$\frac{dp}{d\theta} = qqv - \frac{m}{vv} + \tfrac{1}{2}v(1 + 3\,\text{cof.}\,2\eta) \text{ et}$$
$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \tfrac{3}{2}\,\text{fin.}\,2\eta,$$

dum ipfarum quantitatum v et Φ mutationes momentaneae funt $\frac{dv}{d\theta} = p$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$.

§. 10. Ex cognitis autem his mutationibus, feu differentialibus primis, etiam differentialia altiora elici poterunt. Cum enim fit $d\eta = d\Phi - d\theta$, erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, vnde differentiando reperiemus

$$\text{I}^\circ.\ \frac{ddp}{d\theta^2} = pqq + 2qv\frac{dq}{d\theta} + \frac{2mp}{v^3} + \tfrac{1}{2}p(1 + 3\,\text{cof.}\,2\eta)$$
$$- 3v(q-1)\,\text{fin.}\,2\eta$$

$$\text{II}^\circ.\ \frac{ddq}{d\theta^2} = -\frac{2q}{v}\frac{dp}{d\theta} - \frac{2p}{v}\frac{dq}{d\theta} + \frac{2ppq}{vv} - 3(q-1)\,\text{cof.}\,2\eta,$$

quae expreffiones reducuntur ad fequentes:

$$\text{I}^\circ.\ \frac{ddp}{d\theta^2} = -3pqq + \frac{2mp}{v^3} + \tfrac{1}{2}p(1 + 3\,\text{cof.}\,2\eta)$$
$$- 3v(2q-1)\,\text{fin.}\,2\eta$$

$$\text{II}^\circ.\ \frac{ddq}{d\theta^2} = -q(2qq + 1) + \frac{2mq}{v^3} + \frac{6ppq}{vv} + \frac{3p\,\text{fin.}\,2\eta}{v}$$
$$- 3(2q-1)\,\text{cof.}\,2\eta.$$

Similique modo etiam altiora differentialia, fi opus fuerit, definiri poterunt.

§. 11. His autem differentialibus inuentis, tam fitus quam motus noftrae Lunae, quae nunc erat in L, ad datum quoduis tempus hinc elapfum, quod fit $= \omega$, affignari poterit. Si enim pro tempore ab initio elapfo $\theta + \omega$, quod defignemus per θ', quatuor quantitates fitum et motum continentes ponantur p', q', v' et Φ', eas

tales

tales functiones ipsius $\theta + \omega$ esse oportet, quales ipsae quantitates primitiuae p, q, v et Φ erant functiones ipsius θ tantum; vnde ex principiis calculi differentialis constat fore:

$$v' = v + \omega \frac{dv}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddv}{1.2.d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 v}{1.2.3 d\theta^3} + \frac{\omega^4 d^4 v}{1.2.3.4.d\theta^4} + \text{etc.}$$

Hinc igitur, si loco $\frac{dv}{d\theta}$ scribatur p, habebitur

$$v' = v + \omega p + \frac{\omega^2 dp}{2 d\theta} + \frac{\omega^3 ddp}{6 d\theta^2} + \frac{\omega^4 d^3 p}{24 d\theta^3} + \text{etc.}$$

atque eodem modo tres reliquae quantitates definientur:

$$\Phi' = \Phi + \omega q + \frac{\omega^2 dq}{2 d\theta} + \frac{\omega^3 ddq}{6 d\theta^2} + \frac{\omega^4 d^3 q}{24 d\theta^3} + \text{etc.}$$

$$p' = p + \frac{\omega dp}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddp}{2 d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 p}{6 d\theta^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\omega dq}{d\theta} + \frac{\omega^2 ddq}{2 d\theta^2} + \frac{\omega^3 d^3 q}{6 d\theta^3} + \text{etc.}$$

§. 12. Si has series in infinitum extendere vellemus, ad quoduis tempus ω, post epocham elapsum, quantumuis fuerit magnum, tam situm quam motum Lunae assignare valeremus, quod quidem laborem infinitum exigeret. Verum etiam manifestum est, has series eo promtius conuergere, quo minus accipiatur interuallum temporis ω; quam ob causam ipsi maiorem valorem tribui non conueniet, quam vt sufficiat, tres tantum, vel ad summum quatuor terminos illarum serierum sumsisse; tum quouis casu haud difficulter diiudicabitur, quovsque hoc temporis interuallum ω augere liceat, ne error sensibilis sit metuendus. Postquam autem hoc modo ad tempus $\theta + \omega$ fuerit peruentum, in eo constituatur noua epocha, a qua pari modo vlterius per simile tempus ω progredi licebit; haecque operationes, quoties lubuerit, repeti poterunt. Vnde perspicuum est, hac ratione plurima Lunae loca per satis mag-

magnum temporis interuallum assignari, ac talem obseruationum seriem pro lubitu vlterius continuari posse.

§. 13. Quoniam inuestigatio altiorum differentialium binarum quantitatum p et q satis molestum calculum postulat et mox ad enormem terminorum numerum excrescit: hoc labore facile supersedere poterimus, si modo interuallo temporis ω aliquanto minorem valorem tribuamus; tum autem istas operationes pluries repetere oportebit. Neque vero etiam necesse erit, in his determinationibus summum rigorem obseruare, quasi talis motus in coelo reuera existeret; sed quoniam nostrum institutum eo tantum dirigitur, vt ex contemplatione satis longae seriei huiusmodi obseruationum certum quendam ordinem et legem, quasi diuinando eliciamus: parum referet, vtrum loca assignata summo rigore fuerint computata, siue parumper a veritate discrepauerint. Qui ergo talem laborem suscipere voluerit, haud exiguum fructum in Astronomiam attulisse erit censendus.

Exemplum.

§. 14. Ponamus primo initio, cum Sol versaretur in A, corpus nostrum lunare in ipso plano eclipticae ad distantiam a Terra $TI = 0,008$ ita normaliter ad directionem TA fuisse proiectum, vt eius motus angularis circa Terram duplo rapidior fuerit quam motus Solis, atque ex hac determinatione status naturalis inuestigabimus motum, quo hoc corpus deinceps est progressurum. In hoc igitur tempore primam epocham constituamus, pro qua propterea habebimus sequentes conditiones:

1°.

1°. Longitudinem Solis $\theta = 0$, eius distantia a Terra perpetuo manente $= 1$.

2°. Longitudinem Lunae $\Phi = 0$, ideoque etiam $\eta = 0$.

3°. Distantiam Lunae a Terra $v = 0,008$, ideoque $l\,v = 7,9030900$.

4°. Quia prima motus directio in puncto I erat ad rectam T A normalis, habebimus $\frac{dv}{d\theta} = p = 0$.

5°. Quia motum angularem Lunae impressum duplo celeriorem statuimus quam motum Solis, erit $\frac{d\Phi}{d\theta} = q = 2$.

§. 15. His iam pro prima epocha constitutis, ex formulis nostris supra inuentis erit:

$$1°.\ \frac{dp}{d\theta} = 4.0,008 - \frac{m}{vv} + 2v;\quad 2°.\ \frac{dq}{d\theta} = 0.$$

Pro priore autem formula erit $4v = 0,032$; deinde ob $m = \frac{3}{1000000}$, ideoque $l\,m = 4,4771213$, erit

$$\frac{m}{v.v} = 0,046875 \text{ et } 2v = 0,016,$$

vnde habebimus $\frac{dp}{d\theta} = 0,001125$. Simili modo pro differentialibus secundis ipsarum p et q habebimus

$$3pqq = 0;\ \frac{2mp}{v^3} = 0;\ \tfrac{1}{2}p(1 + 3\,\text{cos}.\,2\eta) = 0;$$

$$3v(2q - 1)\,\text{sin}.\,2\eta = 0,\ \text{ideoque}\ \frac{ddp}{d\theta} = 0,$$

Tum vero ob

$$-q(2qq + 1) = -18;\ \frac{2mq}{v^3} = 23,43750;$$

$$\frac{6ppq}{vv} = 0;\ \frac{3p\,\text{sin}.\,2\eta}{v} = 0;$$

$$-3(2q - 1)\,\text{cos}.\,2\eta = -9,\ \text{erit}$$

$$\frac{ddq}{d\theta^2} = -3,5625.$$

§. 16. Hinc iam, postquam elapsum fuerit tempus $= \omega$, pro statu corporis lunaris habebimus sequentes determinationes:

1°. $\theta' = \omega$.

2°. $v' = 0,008 + \omega . 0 + \omega^2 . 0,000562 + \frac{1}{6}\omega^3 . 0$.

3°. $\Phi' = 0 + 2\omega + \frac{1}{2}\omega^2 . 0 - \omega^3 . 0,59375$.

4°. $p' = 0 + \omega . 0,001125 + \frac{1}{2}\omega^2 . 0$.

5°. $q' = 2 + \omega . 0 - \omega^2 . 1,78125$.

Vbi iam pro ω quaecuis tempora, dummodo satis fuerint exigua, assumere licebit. Quia autem tempora per ipsum motum Solis, seu angulum θ exhibere instituimus, per singulos gradus progrediemus, ponendo successiue $\omega = 1°$; $\omega = 2°$; $\omega = 3°$; etc. vbi notetur tempus vni gradui respondens fore $= 1^d, 0^h, 21'$. In subsidium autem calculi apponamus valores ipsius ω in partibus radii, simulque logarithmos adiungamus.

	$\omega = 1°$.	$\omega = 2°$.	$\omega = 3°$.	$\omega = 4°$.	$\omega = 5°$.
ω.	0,017452	0,034904	0,052356	0,069808	0,087260
$l\,\omega$.	8,241845	8.542875	8,718966	8.843905	8.940815
$l\,\omega^2$.	6,483690	7,085750	7,437932	7,687810	7,881630
$l\,\omega^3$.	4,725535	5,628625	6,156898	6,531715	6,822445

§. 17. His praemissis facile erit ad singula tempora per 1°, 2°, 3°, 4°, etc. expressa et ab epocha elapsa statum nostrae Lunae assignare; vbi tantum notetur, quoniam longitudo Φ in gradibus et minutis exprimi debet, formulam inuentam in genere ita esse repraesentandam:

$$\Phi' = \Phi + \omega\left(q + \frac{1}{2}\omega . \frac{dq}{d\theta} + \frac{1}{6}\omega^2 . \frac{ddq}{d\theta^2} + \text{etc.}\right)$$

at-

atque in membro posteriore factorem ω in gradibus, alterum vero factorem vncinulis inclusum in partibus radii exprimi debere. Quo obseruato ab ipsa epocha per singulos gradus progrediamus, ac statum nostrae Lunae in sequenti tabula repraesentemus:

	$\omega = 1^\circ.$	$\omega = 2^\circ.$	$\omega = 3^\circ.$	$\omega = 4^\circ.$	$\omega = 5^\circ.$
$\theta'.$	$1^\circ, 0'$	$2^\circ, 0'$	$3^\circ, 0'$	$4^\circ, 0'$	$5^\circ, 0'$
$\Phi'.$	$2^\circ, 0'$	$3^\circ, 59'$	$5^\circ, 59'$	$7^\circ, 59'$	$9^\circ, 58'$
$\eta'.$	$1^\circ, 0'$	$1^\circ, 59'$	$2^\circ, 59'$	$3^\circ, 59'$	$4^\circ, 58'$
$v'.$	0,008000	0,008000	0,008001	0,008003	0,008004
$p'.$	0,000019	0,000039	0,000059	0,000078	0,000098
$q'.$	1,999458	1,997830	1,995117	1,991319	1,986437

Videtur igitur in hac epocha prima satis tuto ad tempus $\omega = 5^\circ$ progredi licere, neque a terminis neglectis, seu altioribus potestatibus ipsius ω vllum notabilem errorem esse metuendum; hanc ob rem cum primam epocham ad tempus $\theta = 0$ constituerimus, sequentes epochas ad tempora $\theta = 5^\circ$; $\theta = 10^\circ$; etc. constituamus.

Epocha secunda.

§. 18. Secunda igitur epocha constituatur ad tempus $\theta = 5^\circ$, pro qua ergo elementa nostra erunt:

$\theta = 5^\circ, 0'$	$v = 0,008004$	$lv = 7,903307$
$\Phi = 9^\circ, 58'$	$p = 0,000098$	$lp = 5,991226$
$\eta = 4^\circ, 58'$	$q = 1,986437$	$lq = 0,297075$
$2\eta = 9^\circ, 56'$		

Nunc pro differentialibus primis dp et dq quaerantur sequentes valores:

$qqv = 0,031438$	$\frac{2pq}{v} = 0,048530$
$\frac{m}{vv} = 0,046875$	$\frac{1}{2}$ fin. $2\eta = 0,258753$
$\frac{1}{2}v = 0,004002$	$\frac{1}{2}v$ cof. $2\eta = 0,011826$

vnde colligitur fore

$$\frac{dp}{d\theta} = 0,000391 \text{ et } \frac{dq}{d\theta} = -0,307283.$$

Pro differentialibus autem fecundis quaeri oportet fequentes valores:

$3pqq = 0,001154$	$q(2qq+1) = 17,555237$
$\frac{2mp}{v^3} = 0,001146$	$\frac{2mq}{v^3} = 23,19022$
$\frac{1}{2}p = 0,000049$	$\frac{6ppq}{vv} = 0,001782$
$\frac{3}{2}p$ cof. $2\eta = 0,000144$	$\frac{2p\,\text{fin.}\,2\eta}{v} = 0,006336$
$6vq$ fin $2\eta = 0,016417$	$3(2q-1)$ cof. $2\eta = 8,78490$
$3v$ fin. $2\eta = 0,004142$	

vnde colligitur

$$\frac{ddp}{d\theta^2} = -0,012090 \text{ et } \frac{ddq}{d\theta^2} = -3,141799.$$

Quodfi iam iterum fucceffiue pro ω fcribamus 1°, 2°, 4°, 5° prodit fequens tabella:

	$\omega = 1^\circ.$	$\omega = 2^\circ.$	$\omega = 3^\circ.$	$\omega = 4^\circ.$	$\omega = 5^\circ.$
Φ'.	$11^\circ. 57'$	$13^\circ, 55'$	$15^\circ, 53'$	$17^\circ, 51'$	$19^\circ, 48'$
θ'.	$6^\circ, 0'$	$7^\circ, 0'$	$8^\circ, 0'$	$9^\circ, 0'$	$10^\circ, 0'$
η'.	$5^\circ, 57'$	$6^\circ, 55'$	$8^\circ, 53'$	$9^\circ, 51'$	$10^\circ, 48'$
v'.	0,008006	0,008007	0,008009	0,008011	0,008013
p'.	0,000103	0,000104	0,000102	0,000096	0,000086
q'.	1,980598	1,973793	1,966053	1,957349	1,947691

§. 19. Si hos calculos attentius confideremus, deprehendimus, valores ex formulis differentialibus fecundis

ddp

$\frac{ddp}{d\theta^2}$ et $\frac{ddq}{d\theta^2}$ oriundos tum demum notabiles euasisse, vbi sumsimus $\omega = 5°$, quippe qui pro $\omega = 3°$, tam parui prodierunt, vt tuto negligi potuerint. Quam ob rem, si interualla non vltra $\omega = 3°$ constituere velimus, formulas differentiales secundi gradus sine errore praetermittere licebit; vnde totus calculus mirifice contrahetur. Nam quoniam inuestigatio istarum formularum haud parum prolixum calculum postulat, hoc modo labor magnopere subleuabitur; quamquam enim tum numerus epocharum multiplicari debet, tamen totum negotium multo minori opera confici poterit.

§. 20. Quodsi ergo pro initio cuiuspiam epochae habeantur primo anguli θ et Φ, vnde prodit $\eta = \Phi - \theta$, vna cum quantitatibus v, p et q, inde statim colligantur valores:

$$\frac{dp}{dv} = qqv - \frac{m}{vv} + \frac{1}{2}v(1 + 3\operatorname{cos}.2\eta) \text{ et}$$

$$\frac{dq}{d\theta} = -\frac{2pq}{v} - \frac{3}{2}\operatorname{sin}.2\eta,$$

quibus inuentis erit pro sequente epocha, vbi $\theta' = \theta + \omega$.

1°. $\Phi' = \Phi + \omega(q + \frac{1}{2}\omega\frac{dq}{d\theta})$;

2°. $v' = v + \omega p + \frac{1}{2}\omega^2.\frac{dp}{d\theta}$;

3°. $p' = p + \omega\frac{dp}{d\theta}$ et

4°. $q' = q + \omega\frac{dq}{d\theta}$;

vnde si statim statuamus $\omega = 3°$, erit pro euolutione harum formularum:

$$l\omega = 8,718966 \text{ et } l\omega^2 = 7,437932,$$

vnde calculum vt supra pro epocha sequente $\theta = 10°$ expediamus.

Epocha tertia.

qua $\theta = 10^\circ$.

§. 21. Hic ergo ex iam inuentis erit

$\Phi = 19^\circ, 48'$	$v = 0,008013$	$l\,v = 7,903795$
$\theta = 10^\circ, \;0'$	$p = 0,000086$	$l\,p = 5,934498$
$\eta = 9^\circ, 48'$	$q = 1,947691$	$l\,q = 0,289520$
$2\eta = 19^\circ, 36'$		

Hinc iam calculos in extenso hic apponamus:

Pro $\frac{dp}{d\theta}$.	Pro $\frac{dq}{d\theta}$.
$lqq = 0,579040$	$lp = 5,934498$
$lv = 7,903795$	$lq = 0,289520$
$lqqv = 8,482835$	$lpq = 6,224018$
I. $qqv = 0,030397$	$lv = 7,903795$
$lm = 4,477121$	
$lvv = 5,807590$	$l\frac{pq}{v} = 8,320223$
$l\frac{m}{vv} = 8,669531$	$\frac{pq}{v} = 0,020903$
II. $\frac{m}{vv} = 0,046723$	I. $\frac{2pq}{v} = 0,041806$
III. $\frac{1}{2}v = 0,004006$	II. $\frac{3}{2}\,\text{fin.}\,2\eta = 0,503177$
$l\frac{3}{2} = 0,176091$	hinc $\frac{dq}{d\theta} = -\;0,544983$
$lv = 7,903795$	$l\frac{dq}{d\theta} = (-)\;9,736383$
$l\frac{3}{2}v = 8,079886$	$l\,\omega = \quad 8,718966$
$l\,\text{cof.}\,2\eta = 9,974077$	
$l\frac{3}{2}v\,\text{cof.}\,2\eta = 8,053963$	$l\frac{\omega dq}{d\theta} = (-)\;8,455349$
IV. $\frac{3}{2}v\,\text{cof.}\,2\eta = 0,011323$	ergo $\frac{\omega dq}{d\theta} = -\;0,028533$
Hinc fequitur	Cum nunc ob $\omega = 3$ fit

dp

$\frac{dp}{d\theta} = -0,000997$	$\Phi' = 19°, 48' + 3\,(q + \frac{1}{2}\omega . \frac{dq}{d\theta})$
$l\frac{dp}{d\theta} = (-)\,6,998695$	erit
$l\omega = 8,718966$	$\Phi' = 25°, 36'$.
$l\omega^2 = 7,437932$	Deinde reperitur
$l\frac{\omega dp}{d\theta} = (-)\,5,717661$	$q' = 1,919158$.
$l\frac{\omega^2 dp}{d\theta} = (-)\,4,436627$	Praeterea erit
ergo $\frac{\omega dp}{d\theta} = -0,0000522$	$v' = 0,008016$ et
$\frac{\omega^2 dp}{d\theta} = -0,0000027$	$p' = 0,000034$

Quocirca in fine huius epochae, pro quo eſt $\theta = 13°$ reliqua elementa ita ſe habent:

$\Phi' = 25°, 36'$	$p' = 0,000034$
$v' = 0,008016$	$q' = 1,919158$.

Quarta epocha.

vbi $\theta = 13°$.

§. 22. Elementa pro initio huius epochae ita ſe habebunt:

$\Phi = 25°, 36'$	$v = 0,008016$	$l\,v = 7,903957$
$\theta = 13°, 0'$	$p = 0,000034$	$l\,p = 5,531479$
$\eta = 12°, 36'$	$q = 1,191958$	$l\,q = 0,283110$
$2\eta = 25°, 12'$		

Hinc iam calculus, vt ſupra factum eſt, euoluatur, iterumque ſumatur $\omega = 3°$, et valores pro fine huius epochae $\theta = 16°$, ita ſe habebunt:

$\Phi' = 31°, 18'$	$p' = -0,000085$
$v' = 0,008015$	$q' = 1,884868$.

Quinta

Quinta epocha.

vbi $\theta = 16^\circ$.

§. 23. Elementa pro initio huius epochae sunt sequentia:

$\Phi = 31^\circ, 18'$	$v = 0,008015$	$lv = 7,903903$
$\theta = 16^\circ, 0'$	$p = -0,000085$	$lp = (-) 5,929419$
$\eta = 15^\circ, 18'$	$q = 1,88486$	$lq = 0,275281$
$2\eta = 30^\circ, 36'$		

Hinc iam pro fine huius epochae sequentes prodierunt valores:

$\Phi' = 36^\circ, 53'$	$p' = -0,000287$
$v' = 0,008006$	$q' = 1,846984$.

Sexta epocha.

vbi $\theta = 19^\circ$.

§. 24. Elementa pro initio huius epochae ita se habebant:

$\Phi = 36^\circ, 53'$	$v = 0,008006$	$lv = 7,903415$
$\theta = 19^\circ, 0'$	$p = -0,000287$	$lp = (-) 6,457882$
$\eta = 17^\circ, 53'$	$q = 1,846984$	$lq = 0,266463$
$2\eta = 35^\circ, 46'$		

Hinc iam pro fine huius epochae valores ita se habebunt:

$\Phi' = 42^\circ, 33'$	$p' = -0,000487$
$v' = 0,007993$	$q' = 1,821005$

hocque modo, quousque lubuerit, progredi licebit.

§. 25. Quae hactenus computauimus, in sequenti tabella coniunctim repraesentemus, quo facilius progressio talis motus perspici queat, vbi distantiam Solis a terra loco unitatis per 1000000 exprimemus.

θ	Φ	η	v	p	q
0°, 0′	0°, 0′	0°, 0′	8000	0	2, 000
1, 0	2, 0	1, 0	8000	19	1, 999
2, 0	3, 59	1, 59	8000	39	1, 997
3, 0	5, 59	2, 59	8001	59	1, 995
4, 0	7, 59	2, 59	8003	78	1, 991
5, 0	9, 58	4, 58	8004	98	1, 986
6, 0	11, 57	5, 57	8006	103	1, 980
7, 0	13, 55	6, 55	8007	104	1, 974
8, 0	15, 53	7, 53	8009	102	1, 966
9, 0	17, 51	8, 51	8011	96	1, 957
10, 0	19, 48	9, 49	8013	86	1, 948
11, 0	21, 44	10, 44	8014	69	1, 938
12, 0	23, 40	11, 40	8015	51	1, 928
13, 0	25, 36	12, 36	8016	34	1, 919
14, 0	27, 30	13, 27	8016	− 5	1, 907
15, 0	29, 25	14, 25	8016	− 45	1, 896
16, 0	31, 18	15, 18	8015	− 85	1, 884
17, 0	33, 10	16, 10	8014	− 152	1, 872
18, 0	35, 2	17, 2	8010	− 220	1, 859
19, 0	36, 53	17, 53	8006	− 287	1, 847
20, 0	38, 43	18, 43	8006	− 387	1, 834
21, 0	40, 33	19, 33	7993	− 487	1, 821
22, 0	42, 22	20, 22	7983	− 588	1, 808
23, 0	44, 10	21, 10	7972	− 726	1, 795
24, 0	45, 57	21, 57	7959	− 864	1, 783
25, 0	47, 44	22, 44	7942	− 1002	1, 770
26, 0	49, 30	23, 30	7924	− 1184	1, 759
27, 0	51, 15	24, 15	7901	− 1366	1. 749
28, 0	52, 59	24, 59	7876	− 1549	1, 738
29, 0	54, 43	25, 43	7847	− 1776	1, 730
30, 0	56, 26	26, 26	7815	− 2003	1, 722

 Hunc

Hunc calculum tantum ſpeciminis loco hic appoſuimus. Optandum autem foret, vt quis laborem ſuſciperet, hanc ſeriem maiori cura multo longius vsque ad integram reuolutionem, atque adeo duas pluresue proſequendi, tum enim facilius iudicari poterit, vtrum certus ordo in progreſſione horum numerorum detegi queat, nec ne.

§. 23. Quanquam in hoc exemplo diſtantia v ab initio creſcere incepit, tamen mox maximum valorem aſſequitur, a quo deinceps iterum decreſcit; ſicque nullum eſt dubium, quin tale corpus totum ſuum motum intra ſphaeram lunarem ſit peracturum. Sin autem hoc corpus ab initio in I oblique fuiſſet proiectum, tum euidens eſt, id mox e ſphaera lunari egreſſurum et in regionem planetarum primariorum tranſiturum fuiſſe; hoc igitur modo tandem ad tantam diſtantiam a terra remouebitur, vt ea non amplius reſpectu diſtantiae Solis tanquam infinite parua ſpectari queat, vnde etiam eius diſtantia a Sole quam poſuimus $= u = (1 - 2 v \text{ coſ. } 2 \eta)$ non amplius per formulam $1 + v \text{ coſ. } \eta$, exprimi poterit, ſed ad plures terminos progredi oportebit. Quin etiam fieri poterit, vt hoc corpus ad tantam diſtantiam a Terra recedat, vt iſta formula non amplius per ſeriem conuergentem exhiberi queat, ſicque neceſſe erit ipſam litteram ω in calculo retinere, id quod ſemper continget, quando corpus motum ſuum extra ſphaeram lunarem abſoluit. Quemadmodum igitur his caſibus motum proſequi conueniat, in ſequenti problemate doceamus.

Proble-

Problema.

Si daretur corpus coeleste, quod non procul extra sphaeram lunarem fuisset proiectum, eius motum continuo prosequendo inuestigare.

Solutio.

§. 24. Cum igitur tale corpus non amplius tanquam satelles Terrae considerari posset, eius motum potius ad Solem referri conueniet. Constituto igitur centro Solis in puncto fixo S, assumamus iterum Terram circa Solem motu vniformi in circulo AT reuolui, cuius radium $SA = ST$ vnitate designemus, atque hic iterum angulum $AST = \theta$, quem quouis tempore descripserit, vt ante pro mensura temporis accipiamus, maneatque pariter vt ante massa Solis $= 1$, cuius respectu vocetur massa Terrae $= m$, sicque hoc casu in formulis supra datis has duas massas 1 et m inter se permutari oportebit. Tab. XI. Fig. 2.

§. 25 Ponamus nunc, dum Terra egrediebatur ex puncto A, corpus quodpiam coeleste in I fuisse quomodocunque proiectum, ita vt distantia SI non multo fuerit minor maiorue quam distantia $SA = 1$; vbi tamen assumimus, distantiam AI maiorem fuisse radio sphaerae lunaris, quem censere possumus $= \frac{1}{100}$; tum vero, elapso tempore quo terra angulum $TSA = \theta$ confecerit, istud corpus in ipso plano eclipticae peruenerit in L, voceturque nunc eius distantia a Sole $SL = v$, eiusque longitudo seu angulus $ASL = \Phi$, sitque vt ante breuitatis gratia angulus $TSL = \Phi - \theta = \eta$; at vero distantiam a Terra vocemus nunc $LT = u$, ita vt sit $u = \sqrt{(1 - 2v \cos.\eta + vv)}$

 vbi

vbi cum distantia v non multum discrepet a distantia $= 1$, euolutio huius formulae in seriem non amplius locum habere poterit, quippe quae non amplius foret conuergens. Quod quo clarius appareat, haec formula ita repraesentetur: $u = \sqrt{(1 + vv)}\sqrt{(1 - \frac{2v\,cos.\,\eta}{1+vv})}$, vbi cum coefficiens $\frac{2v}{1+vv}$ non multum discrepet ab 1, notum est talem formulam $\sqrt{(1 \pm n\,cos.\,\eta)}$, in qua propemodum sit $n = 1$, nullo modo in eiusmodi seriem conuerti posse, quae pro omnibus angulis η conuergat.

§. 26. Quoniam igitur hic ipsam quantitatem u in calculo retinere coacti sumus, formulae §. 7. pro motu determinando ad hunc casum accommodabuntur, si modo ambae massae 1 et m inter se permutentur. Hinc igitur binae aequationes motum quaesitum definientes ita se habebunt:

$$\text{I}^{\circ}.\ \frac{(1+m)(ddv - vd\Phi^2)}{d\theta^2} = -\frac{1}{vv} - m\,cos.\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3}$$

$$\text{II}^{\circ}.\ \frac{(1+m)(2dvd\Phi + vdd\Phi)}{d\theta^2} = m\,sin.\,\eta\left(1 - \frac{1}{u^3}\right)$$

vbi cum sit $m = \frac{1}{1\ldots\ldots}$, loco $1 + m$, tuto scribi poterit 1. Verum vt hae formulae etiam valere queant, si loco terrae substituatur alius planeta primarius, veluti Iupiter, cuius massa multo est maior, retinebimus multiplicatorem $(1 + m)$. Calculus enim perpetuo eodem modo institui debebit pro quouis alio planeta loco terrae assumto, si modo eius motum tanquam circularem et vniformem spectare velimus.

§. 27. Quodsi iam motum corporis L per interualla satis exigua, vt ante fecimus, prosequi velimus, pro eius

eius loco quocunque L quantitates v et Φ cum angulo θ pro cognitis habebimus, vnde ſimul erit $\eta = \Phi - \theta$. Praeterea vero, quia etiam motum corporis in L vt cognitum ſpectamus, ſtatuamus vt ante $\frac{dv}{d\theta} = p$; et $\frac{d\Phi}{d\theta} = q$, vnde erit $\frac{d\eta}{d\theta} = q - 1$, quibus poſitis ambae noſtrae aequationes erunt.

$$\text{I}^{\circ}.\ (1+m)\left(\frac{dp}{d\theta} - vqq\right) = -\frac{1}{vv} - m\cos.\eta\left(1-\frac{1}{u^3}\right) - \frac{mv}{u^3} \text{ et}$$

$$\text{II}^{\circ}.\ (1+m)\left(2pq + \frac{vdq}{d\theta}\right) = m\sin.\eta\left(1-\frac{1}{u^3}\right),$$

vnde valores binarum formularum differentialium $\frac{dp}{d\theta}$ et $\frac{dq}{d\theta}$ definiri poterunt.

§. 28. His autem valoribus inuentis, quoniam praeſens tempus per angulum θ exprimimus, poſtquam hinc elapſum fuerit tempus $= \omega$, pro tempore $\theta + \omega$ valores eorundem elementorum, quos per v', θ', Φ', p' et q' deſignemus, ſequenti modo determinabuntur

$$\theta' = \theta + \omega$$

$$\Phi' = \Phi + \omega q + \tfrac{1}{2}\omega^2 . \frac{dq}{d\theta},$$

$\eta' = \Phi' - \theta'$. Simili modo erit

$v' = v + \omega p + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dp}{d\theta}$; ac denique etiam

$p' = p \frac{\omega dp}{d\theta}$ et $q' = q + \frac{\omega dq}{d\theta}$

ſi modo interuallum ω non nimis magnum accipiatur, cuius limitem quouis caſu facile diiudicare licebit, quem vt vidimus plerumque vsque ad 3° augere licebit. Imprimis autem hinc neceſſe erit valorem u' colligere, quippe ſe qui ſequente interuallo erit

$$u' = \sqrt{(1 - 2v' \cos. \eta' + v'v')},$$

quibus obſeruatis motum talis corporis quousque lubuerit proſequi licebit; calculus autem ob formulam irrationalem u aliquanto moleſtior euadet quam ſupra. Facile autem intelligitur, hinc motus maxime intricatos reſultare poſſe, quos nullo plane modo adhuc cognito ſaltem vero proxime ad ordinem quendam reuocare licebit.

RECHERCHES SUR LA NOUVELLE PLANÈTE, DÉCOUVERTE PAR MR. *HERSCHEL* ET NOMMÉ *GEORGIUM* SIDUS.

par

A. J. LEXELL.

§. 1.

En réfléchiſſant ſur les progrès conſiderables qu'a fait l'Aſtronomie pendant ce dernier ſiecle, tant par rapport à la Théorie du mouvement des corps céleſtes, que rélativement à la perfection des Inſtruments dont les Aſtronomes ſe ſervent pour faire leurs obſervations, & la grande ſcrupuloſité qu'on met dans l'art d'obſerver; il étoit à peine à ſuppoſer qu'il manquât encore aux Aſtronomes la connoiſſance de quelques uns des aſtres qui principalement conſtituent notre ſyſtême Planètaire, ou qu'il reſtât à découvrir quelque nouvelle Planète. Comme il y a déja presque vingt deux ſiecles de paſſés depuis qu' Eudoxe célebre Philoſophe Grec apporta d'Egypte la connoiſance des cinq Planètes principales du Syſtême Solaire; il eſt certainement très ſurprenant, que pendant un ſi long eſpace

ſpace de temps, quelque Planète ait pû échapper aux ſoins attentifs des Aſtronomes. Cependant ſi l'on conſidere que les cinq Planètes principales découvertes par les Egyptiens & Chaldéens, ne ſont pas plus eloignees du Soleil, qu'elles ne ſe préſentent à la vue ſimple, & qu'elles ſe ſont d'ailleurs aiſément diſtinguer des étoiles fixes par leur grandeur apparente & par leur lumiere; on doit preſumer que s'il exiſte des Planètes dont la diſtance du Soleil ſurpaſſe celle du Saturne deux ou pluſieurs fois, elles ne peuvent qu'avoir une lumiere bien foible, un Diametre fort petit & un mouvement extremement lent, en ſorte que leur découverte doit avoir incomparablement plus de difficulte, que celle des cinq Planètes connues jusqu'ici.

§. 2. C'eſt donc par un bonheur extremement rare & inattendu, que Mr. *Herſchel* célebre par ſes nouvelles découvertes Optiques & Aſtronomiques, a réuſſi à découvrir au mois de Mars de l'Annee 1781, dans la conſtellation des Jumeaux une nouvelle étoile à la quelle il remarquoit un mouvement propre très ſenſible & dont toutes les apparences ſembloient indiquer, qu'elle méritoit d'être comptée parmi les Planètes. Car les Comètes étant environnées d'une nebuloſite, on ne remarque rien de pareil à cette nouvelle étoile, au contraire elle eſt très bien terminee, & quelque petite qu'elle ſoit, on obſerve pourtant que ſa lumiere differe aſſez de celle des etoiles fixes. D'ailleurs le peu de changement qu'on obſerve dans ſa Latitude, (par quoi il eſt aiſé de prouver, que l'inclinaiſon de ſon orbite à l'Ecliptique eſt fort petite) & ſon mouvement qui ſe fait ſelon les ordres des ſignes, comme celui des autres Planètes, ſont autant d'indications

pour

pour ranger cet Aſtre nouveau parmi les Planètes principales du Syſtême Solaire. C'eſt auſſi par ces raiſons, qu'auſſi-tôt que Mr. *Herſchel* eut fait part de cette importante découverte à la Societé Royale des Sciences de Londres, le Docteur *Maskelyne* & les autres Aſtronomes Anglois qui avoient obſervé la nouvelle étoile, paroiſſoient perſuadés, qu'elle pourroit bien être une nouvelle Planète. Cependant comme les apparences ne ſont pas aſſez déciſives pour former une concluſion ſûre & infaillible ſur cette queſtion, il reſtoit encore à examiner, ſi le mouvement de cette nouvelle étoile pourroit être expliqué par une orbite fort peu Elliptique ou presque circulaire.

§. 3. Depuis que pluſieurs Aſtronomes ſe ſont occupés de ce ſujet & qu'ils ont même publié le réſultat de leur recherches; j'eſpere qu'il me ſera d'autant plus permis de donner un Expoſé des calculs que j'ai faits ſur cette matiere, que je ſuis certainement le premier, qui ait eſſayé de calculer le mouvement de cet Aſtre dans une orbite circulaire, comme je pourrois le prouver par le temoignage de pluſieurs Aſtronomes Anglois & François. Mais avant que de détailler le réſultat des calculs, que j'ai faits ſur cette étoile pendant mon ſéjour à Londres, d'après les obſervations que Mr. *Maskelyne* a eu la bonté de me communiquer, & qui ont été faites pendant la premiere apparition depuis le 17 de Mars jusqu'au 28 de Mai 1781; j'indiquerai en peu de mots les tentatives que quelques Aſtronomes & Mathématiciens de l'Académie de Sciences de Paris, ont faites pour expliquer le mouvement de cette Planète par une orbite Parabolique.

Dans une lettre de Mr. *Messier* à Mr. *Maskelyne* du mois de Mai ou Juin 1781 il etoit marqué, que Mr. *Méchain* avoit trouvé pour la nouvelle étoile, ces Elémens d'une orbite Parabolique:

Longitude du Noeud 2ˢ. 28°. 39′;
Inclinaison de l'orbite 14′;
Lieu du Périhélie 8ˢ. 0°. 19′;
Distance du Périhélie 0, 459874;

Passage par le Périhélie 1781. 23 Mai à 1ʰ. 32′. temps moyen de Paris.

Ces Elémens m'ayant été communiqués par Mr. *Maskelyne* je fus curieux de voir comment ils s'accorderoient avec les observations; mais je trouvai à ma grande surprise, qu'il y avoit des observations, qui s'en éloignoient, de plus d'un dégré. Et réflechissant ensuite un peu sur cet objet, je remarquai que comme l'inclinaison de l'orbite est extremement petite, on peut considérer cette orbite, comme si elle étoit décrite dans le plan même de l'Ecliptique. Or il aisé de voir, que lorsqu'il s'agit de trouver une ligne Parabolique qui satisfasse à trois lieux Géocentriques d'un Astre, situés dans le plan de l'Ecliptique, la nature du Probleme fournira deux solutions dont l'une sera la vraie & satisfera à toutes les observations, mais l'autre quoiqu'elle remplisse les trois observations proposées differera considérablement du reste des observations. (*) Et ayant ensuite entrepris moi-même

(*) C'est aussi par cette même raison, que la Théorie du mouvement dans une orbite Parabolique calculée par Mr. le Baron *Pacassi*, se trouve si peu d'accord avec les observations. Voyez les Ephemerides de Berlin pour l'An 1785. pag. 187.

me la recherche d'une orbite Parabolique pour la nouvelle étoile, je trouvai que dans celle qui satisferait aux observations faites pendant la premiere apparition, la distance Périhélie devroit surpasser au moins huit fois la distance du Soleil à la terre. Ayant communiqué ces réflexions à Mr. *Magellan* qui séjournoit alors à Paris, il eut la bonté de communiquer les résultats de mes calculs à l'Académie des Sciences de Paris. Ils servirent à convaincre ceux des Académiciens, qui doutoient des résultats trouvés par le digne & respectable Président *de Saron*, lequel en examinant quatre observations de ce nouvel Astre, avoit trouvé, qu'une orbite Parabolique dont la distance Périhélie égale 14 fois celle du Soleil à la terre, satisferoit assez bien aux observations faites durant la premiere apparition. Dans les Elémens du mouvement Parabolique, que Mr. *Jeaurat* a inserés dans la Connoissance de temps pour 1784, d'après les calculs de Mr. *de la Place*, la distance Périhélie est supposée 9 fois plus grande que celle du Soleil à la terre. Or d'après les observations de la premiere apparition, il étoit aussi vraisemblable que la distance Périhélie fut supposée 18 fois, que 9 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, comme nous verrons bien-tôt.

§. 4. En faisant usage de l'observation de la nouvelle étoile faite par Mr. *Herschel* lui même, l'An 1781 le 17 de Mars à $10^h. 40'$ Temps moyen de Greenwich & de celle que Mr. *Maskelyne* a faite à l'Observatoire de Greenwich le 11 de Mai à $8^h. 28'$ du temps moyen, j'ai trouvé qu'une orbite circulaire, dont le rayon est égal à 18, 928 fois la distance moyenne du Soleil à la terre, satisferoit à ces deux observations & que la Longitude

Héliocentrique de la nouvelle Planète eſt:

1781 le 17 Mars à $10^h.40'$ Temps moy. de Gren. $2^s.27°.30'.27''.6$
11 Mai 8.28. 2.28. 9.53.4.

Au moyen de ces ſuppoſitions j'ai calculé les lieux de la nouvelle étoile pour les autres moments obſervés à Greenwich, dont les réſultats ſont répréſentés dant la Table qui ſuit:

Temps moy. de Greenv.				Longitude de l'étoile.		
1781.				obſervée.	calculée.	Differ.
Mars	17.	10^h.	$40'$.	$2^s.24°.29'.46''$.	$2^s.24°.29'.46''$	
Avril	1.	9.	58.	- 24. 49. 30.	- 24. 47. 59.	$-1'.31''$.
	9.	10.	41.	- 25. 3. 19.	- 25. 2. 1.	$-$ 1. 18.
	18.	8.	0.	- 25. 22. 14.	- 25. 21. 27.	$-$ 47.
May	2.	8.	30.	- 25. 58. 36.	- 25. 57. 48.	$-$ 48.
	11.	8.	28.	- 26. 24. 32.	- 26. 24. 32.	
	28.	9.	2.	- 27. 19. 59.	- 27. 20. 37.	+ 38.

Quoique cette orbite circulaire ne différe pas trop conſidérablement des obſervations faites pendant l'intervalle de temps entre le 17 de Mars & le 28 de Mai; cependant comme l'angle que l'aſtre a décrit autour du Soleil entre les deux obſervations employées dans le calcul, n'eſt que de $39'$, $26''$ à peu près, il eſt aiſé de voir que de petits changements dans l'une ou l'autre obſervation pourroient un peu changer l'orbite circulaire en queſtion.

§. 5. Le mouvement de la nouvelle étoile étant extrêmement lent, puisque dans l'hypothèſe de l'orbite circulaire, il ne fait que 4°. 20' à peu près par an, j'ai bientôt conçu que pour les obſervations faites pendant la premiere apparition, c'eſt à dire depuis le 17 de Mars jus-

jusqu'au 28 de Mai, on pourroit trouver des orbites Paraboliques qui ſatisferoient à ces obſervations, & que même la détermination de ces orbites admettroit une très grande Latitude. Et ce ſentiment s'eſt trouvé enſuite vérifié par les calculs qui m'ont convaincu que pour ſatisfaire aux obſervations du 17 de Mars & 28 de Mai, on peut employer des orbites Paraboliques, dont les diſtances Perihélies varient depuis 6 à 8 fois la diſtance du Soleil à la terre, jusqu'à 20 à 22 fois, ſans qu'il en réſulte des erreurs trôp groſſières dans les obſervations intermédiaires. On a moyen de s'en convaincre par la Table qui donne le réſultat de mes calculs dans l'Hypothèſe de l'orbite Parabolique:

Elémens de l'orbite.

Diſtance Périhelie.	Lieu du Périhélie	Temps du Périhélie compté de Mars 1781.
6.	$6^s. 17^\circ. 9'. 45''$	2867^j, 9606
8.	6. 5. 34. 8	3101, 7468
10.	5. 24. 43. 15	3244, 4691
12.	5. 14. 5. 55	3283, 6554
14.	5. 3. 16. 34	3200, 5067
16.	4. 21. 43. 53	2960, 6933

Longitude de l'Aſtre.

Temps moyen de Greenwich 1781.

Diſt. Périh.	Avril 1. $9^h. 58'$	Avr. 18. $8^h. 0'$	May 22. $9^h. 6'$
6.	$2^s.24^\circ.46'.32''$	$2^s.25^\circ.19'.29''$	$2^s.26^\circ.59'. 1''$
8.	- - 47. 8	- - 20. 0	- - 59. 15
10.	- - 47. 36	- - 20. 43	- - 59. 23
12.	- - 48. 5	- - 21. 20	- - 59. 37
14.	- - 48. 27	- - 21. 50	- - 59. 47
16.	- - 48. 50	- - 22. 20	- - 59. 53
obſervée	- - 49. 30	- - 22. 14	- - 59. 50

Il

Il eſt donc prouvé par ces recherches que pour ſatisfaire aux obſervations faites pendant la premiere apparition, on peut trouver une infinité d'orbites, ce qui doit d'autant moins paroître ſingulier, que l'angle décrit par l'Aſtre autour du Soleil n'eſt que de 51′ à peu près. Quoiqu'il en ſoit, même ces premières obſervations ſervent à établir un élément fort eſſentiel du mouvement de la nouvelle Planète, ſavoir ſa diſtance actuelle au Soleil; car quelle que ſoit l'eſpece de ſon orbite, on ne ſauroit douter, que ſa diſtance au Soleil n'égale à peu près 19 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre.

§. 6. Ayant reçu après mon retour à Pétersbourg plusieurs obſervations de la nouvelle Planète, faites vers la fin de l'An 1781 & au commencement de l'An 1782 à Paris, Milan, Toulouſe, Stockholm etc; je croyois que ces obſervations me fourniroient un moyen très propre à déterminer l'orbite circulaire plus exactement, que je n'avois fait & qu'elles ſerviroient même à examiner ſi une Parabolique ſatisfait aux obſervations ou non? Pour l'orbite circulaire je commençai d'abord mes recherches par la combinaiſon de l'obſervation de Mr. *Herſchel* du 17 de Mars 1781 avec celle, qui a été faite à Milan par Mr. *Oriani* le 22 d'Octobre de la même année. Ces deux obſervations m'ont fourni une orbite circulaire dont le rayon eſt égal à 18,91724 fois la diſtance moyenne du Soleil à la terre & les Longitudes Heliocentriques déduites de là ſont:

1781 le 17 Mars à $10^h.40'$ Tems moy. de Greenv. $2^s.27°.30'.37'',7$
22 d'Oct. 17.27. $3.\ 0.\ 8.\ 14,4$

Afin qu'on puiſſe juger de l'exactitude de ces Elémens, il il est bon de réprésenter comment les lieux calculés de la nouvelle Planète, s'accordent avec les observés.

Temps moyen de Greenv. 1781.					Longitude de la Planète calculée.				observ.
Mars	17.	10^h.	40$'$.	0$''$.	2^s.	24°.	29$'$.	46$''$.	+ 0$''$.
Avril	1.	9.	58.	0.	-	24.	48.	6.	+ 1$'$. 24.
	9.	10.	41.	0.	-	25.	2.	26.	+ 53.
	18.	8.	0.	0.	-	25.	22.	14.	+ 0.
Mai	2.	8.	30.	0.	-	25.	57.	58.	+ 38.
	11.	8.	28.	0.	-	26.	24.	40.	− 8.
	22.	9.	6.	0.	-	27.	0.	12.	− 22.
Juill.	19.	15.	10.	36.	3.	0.	24.	22.	− 11.
	29.	15.	26.	55.	-	0.	56.	2.	+ 19.
Août.	8.	15.	58.	48.	-	1.	25.	22.	− 13.
	19.	14.	56.	25.	-	1.	53.	34.	− 2.
Sept.	1.	16.	0.	51.	-	2.	20.	58.	+ 14.
	14.	16.	37.	6.	-	2.	40.	45.	+ 8.
	28.	16.	43.	0.	-	2.	52.	32.	+ 12.
Octob.	10.	10.	5.	0.	-	2.	54.	29.	+ 10.
	22.	17.	27.	0.	-	2.	49.	0.	+ 0.
Nov.	4.	8.	24.	25.	-	2.	34.	46.	+ 16.
	14.	8.	35.	15.	-	2.	18.	32.	+ 34.
	20.	7.	26.	28.	-	2.	7.	0.	+ 37.
Decemb.	4.	6.	35.	55.	-	1.	35.	39.	+ 32.
	14.	6.	0.	29.	-	1.	11.	14.	+ 4.
1782. Janv.	1.	7.	37.	32.	-	0.	24.	20.	+ 1. 14.
	12.	6.	23.	10.	2.	29.	57.	17.	+ 1. 0.
	23.	5.	40.	25.	-	29.	33.	49.	+ 49.
Fevr.	20.	6.	23.	0.	-	28.	53.	58.	+ 1. 14.
	27.	9.	55.	11.	-	28.	49.	56.	+ 1. 7.

clu-

Comme presque tous les lieux calculés d'après ces Elémens, se trouvent en défaut, depuis l'observation du 28 d'Octobre il en faut conclure, que le rayon de l'orbite circulaire doit encore être un peu diminué. Et en effet si l'on compare l'observation du 17 de Mars 1781 avec celle du 27 Fevrier 1782, on trouve qu'une orbite circulaire satisfait à ces observations en prenant le rayon égal à 18, 86425 fois la distance moyenne du Soleil à la terre, d'on l'on tire les Longitudes Héliocentriques pour

Temps moy. de Greenv.		
le 17 Mars 1781 à	$10^b. 40'$.	$2^s. 27°. 31'. 8'', 2$;
27 Fevr. 1782	9. 55	3. 1. 41. 33'. 1.

D'ailleurs l'observation du 17 de Mars étant peut-être sujette à caution, aussi bien que celle du 1 d'Avril 1781, j'ai pensé d'y substituer celle du 9 d'Avril 1781 & moyennant cela, j'ai trouvé que pour satisfaire aux observations du 9 d'Avril 1781 & 27 Fevrier 1782, on peut employer une orbite circulaire, dont le rayon égale 18, 88612 fois la distance moyenne du Soleil à la terre; ce qui fournit les Longitudes Héliocentriques

Tems moy. de Greenv.		
1781 le 9 d'Avril	$10^b. 41'$.	$2^s. 27°. 48'. 17'', 6$;
1782 27 de Fevr.	9. 55.	3. 1. 41. 21, 1.

En fin en faisant la combinaison de l'observation du 9 d'Avril, avec celle de Mr. *Wargentin* faite à Stockholm le 21 d'Octob. 1782 à $8^b. 50'. 25''$ Temps moyen de Greenwich, par la quelle il a trouvé la Longitude de la nouvelle Planète $3^s. 7°. 20'. 56''$, on parvient à une orbite circulaire dont le rayon = 18, 8780 fois la distance moyenne

enne du Soleil à la terre & par la quelle les Longitudes Héliocentriques sont déterminées de cette maniere:

Temps moy. de Greenv.	
1781 le 9 d'Avril $10^h. 41'$.	$2^s. 27°. 48' 25'', 2$
1782 21 d'Octob. 8. 50	3. 4. 32. 7, 9

Comme tous ces calculs s'accordent assez bien ensemble, il seroit superflu d'entreprendre d'autres combinaisons des observations; car comme il est prouvé par celles-ci, qu'une orbite circulaire s'accorde à peu de chose près avec les observations, de meme on a raison de présumer que quelque exacte que soit une orbite circulaire pour une petite portion de l'orbe de la Planète, elle ne manquera pas de s'en éloigner à mesure qu'on augmente la portion de l'orbite décrite par la Planète. Et même parcequ'en augmentant l'intervalle entre les observations, on est obligé de diminuer le rayon de l'orbite circulaire; cette diminution semble indiquer que l'orbite de la Planète ne sauroit être exactement circulaire, mais qu'elle a une excentricité sensible. Cependant quelle que soit cette excentricité, il est bien vraisemblable, que la distance moyenne dans la vraie orbite Elliptique décrite par la Planète ne surpassera pas 19 fois la distance moyenne du Soleil à la terre; d'où il faut aussi conclure, que le temps de la révolution de la Planète autour du Soleil ne surpassera pas 82 Ans & 10 Mois, comme de l'autre coté il est prouvé, qu'il sera certainement plus grand que 82 Ans & 1 Mois.

§. 7. Quoi qu'il soit donc constaté, aussi bien par les calculs que j'ai faits que par des recherches faites par plusieurs autres Astronomes, qu'une orbite circulaire est très bien d'accord avec les obſervations, cette preuve affirmative n'eſt pas encore aſſez concluante, pour demontrer que le nouvel Aſtre ne ſauroit ſe mouvoir que dans une orbite à peu près circulaire. Mais pour établir la verité de cette propoſition, il faut commencer par prouver, qu'une orbite Parabolique ne ſatisfait pas aux obſervations & enſuite que même des orbites Elliptiques ne ſauroient être ſatisfaiſantes, à moins qu'elles n'ayent une excentricité très peu conſiderable. Pour vérifier la premiere partie de cette diſcuſſion, j'ai cherché des orbites Paraboliques, qui ſatisfiſſent aux obſervations faites le 17 de Mars 1781 et le 23 de Janv. 1782, dont la derniere a été faite à Stockholm par Mr. *Wargentin.* En faiſant pluſieurs ſuppoſitions pour la diſtance Perihelie, j'ai trouvé les autres Elémens tels, que je les ai repréſentés dans cette Table :

Diſt. Périh.	Lieu du Périhél.	Temps du Périh. compté de Mars 1781
10	$5^s. 25^\circ. 41'. 3''$	$3329^j, 5577$
14	5. 6. 56. 49	3501, 3152
16	4. 27. 18. 44	3140, 4724
18	4. 16. 53. 48	3403, 9470

Enſuite j'ai examiné quels ſont les lieux calculés d'après ces Elémens, correſpondants aux obſervations faites le 28 de Mai 1781 & le 22 d'Octobre de la même Année.

Temps

Temps moy. de Greenv. 1781.

	28 Mai $9^h. 2'$	22 Oct. $17^h. 47'$
Longit. obferv.	$2^s. 27°. 19'. 59''$	$3^s. 2°. 49'. 0''$
Dift. Perih.	Differ. entre le calcul & l'obferv.	
10	$- 3'. 33''$	$+ 1. 31$
14	$- 9. 22$	$- 20. 49$
16	$- 11. 41$	$- 28. 37$
18	$- 13. 17$	$- 35. 44$

Le réfultat de cette recherche eft, que pour une diftance Périhélie 10 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, la Longitude obfervée le 28 de Maii 1781 furpaffe la calculée de $3'. 33''$ & que fi on augmente la diftance Périhélie cette différence ira auffi en augmentant. Mais pour l'obfervation du 22 d'Octobre la Longitude obfervée differe de la calculée de $1'. 31''$ & fi l'on augmente la diftance Périhélie cette différence fera diminuée & même bientôt la Longitude obfervée furpaffera la calculée. Il faut donc en conclure, que fi on vouloit rendre l'obfervation du 22 d'Octobre tout à fait d'accord avec le calcul, il faudroit qu'on augmentât un peu la diftance Périhélie, mais en revange on augmentera en même temps l'erreur pour l'obfervation du 28 de Mai; & au contraire fi l'on tâchoit de diminuer l'erreur de l'obfervation du 28 de Mai, ce qui ne peut fe faire, fans diminuer la diftance Périhélie, l'erreur de l'obfervation du 22 d'Octobre en fera confidérablement augmentée. Il eft donc certain que quelques Elémens d'une orbite Parabolique qu'on choififfe, on ne fauroit éviter pour les obfervations faites depuis le 17 de Mars 1781 jufqu'au 23 Janvier 1782 des erreurs de trois Minutes & comme il n'eſt pas vraiſemblable que de telles erreurs ſoient commiſes dans les obſervations, ſurtout lorsqu'on en trouve pour pluſieurs jours conſecutifs; il eſt ce me ſemble évidemment prouvé, qu'une orbite Parabolique ne ſatisfait en aucune maniere aux obſervations. Afin que nos Lecteurs ſoient en état de juger du dégré d'exactitude des Elémens Paraboliques pour la diſtance Périhélie 10, il vaudra la peine d'expoſer les lieux calculés d'après ces Elémens pour quelques obſervations faites depuis le 17 Mars 1781, jusqu'au 27 Fevr. 1782.

Temps moy. de Greenv.			Longitude de la Planète obſervée	Longitude de la Planète calculée
1781	Mars	17. 10^h.40$'$	2^s. 24°. 29$'$. 46$''$	2^s. 24°. 29$'$. 46$''$
	Mai	28. 9. 2	27. 19. 59	27. 16. 26
	Jul.	19. 15. 11	3. 0. 24. 11	3. 0. 21. 5
	Sept.	1. 16. 1	2. 21. 12	2. 19. 8
	Octob.	22. 17. 27	2. 49. 0	2. 50. 31
	Dec.	14. 6. 0	1. 11. 8	1. 14. 1
1782	Janv.	1. 7. 37	0. 25. 34	0. 27. 16
		23. 5. 40	2. 29. 34. 29	2. 29. 34. 29
	Febr.	27. 9. 55	28. 51. 3	28. 49. 39

§. 8. Pour achever notre démonſtration, il ne nous reſteroit donc qu'à prouver, que des orbites Elliptiques, dont l'Excentricité eſt un peu remarquable ne ſauroient ſatisfaire au mouvement de la nouvelle Planète; mais comme pour celle des orbites Paraboliques, qui approche le plus des obſervations, on ne trouve que des erreurs de trois Minutes, de même on peut s'imaginer, que

que pour les orbites Elliptiques les erreurs deviendroient encore plus petites & que par cette raison il faut des observations de quelques années pour déterminer la vraie quantité de l'excentricité. Tout ce qu'on peut faire en attendant, c'est d'exclure successivement plusieurs sortes d'Ellipses & en continuant ce travail on ne manquera pas à la fin, de trouver la vraie & celle qui seule remplit les observations. Cependant on trouveroit moyen d'abreger cette discussion très considérablement, en faisant usage de la très importante remarque de Mr. *Bode* célebre Astronome de Berlin, le quel en se donnant la peine d'examiner plusieurs étoiles fixes du Zodiaque marquées dans les Catalogues, remarqua qu'une de celles que le célebre Mr. *Mayer* de Göttingue avoit observées l'an 1756 dans le signe des poissons, ne se trouvoit plus à la place où *Mayer* l'avoit vue. En tenant compte des Elémens de la nouvelle Planète, il paroît en verité bien vraisemblable, qu'elle se soit trouvée le 25 de Sept. 1756 à l'endroit où *Mayer* a observé cette étoile, qui ne se trouvoit pas dans les Catalogues de *Flamsteed*, ou d'autres alors connus; au moins la différence qu'il y a entre le calcul & l'observation, peut être expliquée en partie par l'incertitude sur la distance moyenne & en partie aussi per l'équation du centre inconue. Cette observation servira donc aux Astronomes pour faciliter leurs récherches sur cette Planète, & on peut se flatter que l'excentricité ne manquera pas d'en être determinée assez exactement, vû que le lieu de la Planéte pour cette observation est éloigné du lieu pour l'observation faite le 17 de Mars 1781, de plus de 100°.

 §. 9.

§. 9. J'ai toujours ſuppoſé dans mes recherches ſur l'orbite de ce nouvel Aſtre, qu'elle eſt décrite dans le plan de l'Ecliptique, croyant inutile de pouſſer l'exactitude plus loin, vû que l'inclinaiſon de l'orbite eſt extrémement petite. Cependant la Longitude du Noeud & l'inclinaiſon de l'orbite étant des Elémens très importants dans la Théorie du mouvement des Aſtres; il me ſera permis d'obſerver, que faiſant pluſieurs combinaiſons des obſervations & prenant une quantité moyenne entre tous les réſultats, qui en ont été deduits, j'ai trouvé la Longitude du Noeud $2^s. 12^\circ. 50'. 15''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $46'. 35''$. Mais-comme dans ces déterminations il y a pour les expreſſions de la Longitude du Noeud des différences d'un dégré & 28 Minutes & pour celles de l'inclinaiſon de l'orbite des différences de $4'. 28''$; les valeurs trouvées pour ces Elémens pourroient bien admettre des corrections fort ſenſibles. Un des moyens les plus ſûrs pour déterminer ces Elémens avec plus d'exactitude ſera de n'employer pour cet uſage, que des obſervations faites dans les oppoſitions de la Planète, au moins on gagnera par ce moyen cet avantage, qu'il n'y aura presque aucune incertitude à craindre par rapport aux Longitudes Heliocentriques, qui donnent l'angle décrit autour du Soleil entre les deux obſervations.

Les obſervations dont nous avons fait uſage pour déterminer la Longitude du Noeud & l'inclinaiſon de l'orbite, ſont celles-ci:

Temp.

Temp. moy. de Greenv.				Longitude.				Latitude.	
1781 Mars	17.	10^h.	$40'$	2^s.	24°.	$29'$.	$46''$	$11'$.	$48''$,4
Avril	9.	10.	41		25.	3.	19	11.	55,3
Octob.	22.	17.	27	3.	2.	49.	0	14.	16,0
1782 Janv.	23.	5.	40	2.	29.	34.	29	15.	22,4
Fevr.	20.	6.	23	2.	28.	55.	12	15.	17,3
	21.	6.	20		28.	54.	26	15.	16,2
Mars	16.	6.	17		28.	52.	20	15.	11,0
Juil.	23.	14.	58	3.	4.	49.	37	15.	23,0
Aout	17.	13.	33		6.	4.	11	16.	10
Octob.	2.	10.	13		7.	19.	58	17.	10
	13.	8.	48		7.	23.	27	17	37
	21.	8.	50		7.	20.	56	17.	44

De là on a tiré ces conclusions:

Observat. combinées	Longit. du Noeud				Inclinaison de l'orbite	
1781. 17 Mars. 22 Octob.	2^s.	12°.	$59'$.	$26''$	$47'$.	$10''$
1782. 23 Janv.		12.	41.	3	46	13
20 Fevr.		12.	26.	53	45.	27
21 Fevr.		12.	22.	33	45.	15
1781. 9 Avril 1782 16 Mars		12.	37.	35	45.	51
23 Juil.		13.	13.	46	44.	12
17 Aout		13.	6.	20	47.	42
2 Octob.		12.	2.	56	47.	18
13 Octob.		13.	31.	38	48.	40
21 Octob.		13.	20.	23	48.	3
Quantité moyenne	2.	12.	50.	15	46.	35

§. 10.

§. 10. Le diamètre de la nouvelle Planète étant extrèmement petit, ce feroit en vain que les Aftronomes tâcheroient de le determiner au moyen des mefures faites par des Micromètres appliqués aux Inftruments Aftronomiques: les erreurs qu'on pourroit commettre dans ces obfervations ne manqueroient pas de les rendre infructueufes. Et fi quelque Aftronome en venoit à bout ce feroit affurément Mr. *Herfchel* lui-même, qui ayant procuré à fes Telefcopes une force d'aggrandiffement, qui furpaffe de beaucoup celle que les meilleurs Inftruments Aftronomiques, foit Telefcopes, foit Lunettes Dioptriques ont poffedé jusqu'ici, pourroit auffi determiner le plus commodément & exactement de fort petites quantités & même jusqu'à des dixiemes parties de fecondes. Cependant les effais qu'il a faits à l'egard de la nouvelle Planète, n'ont pas trop bien réuffi, car ayant trouvé le 17 de Mars 1781 que le Diamètre étoit à peu près 3″, il croit l'avoir trouvé le 15 d'Avril de 5½″ environ. Mais fi l'on fait attention à la très grande diftance de cette Planète à la terre, on conçoit aifement qu'un fi grand changement dans le Diamètre ne fauroit être admiffible. Je foupçonnerois donc que la difference dans ces mefures, vient de ce que Mr. *Herfchel* employoit pour la derniere obfervation un oculaire beaucoup plus fort, que pour la premiere. Mr. *Maskelyne* ayant examiné cette Planète avec un Telefcope de fix pieds, qui eft à l'obfervatoire de Greenwich évaluoit le Diamètre à 3″. Les Aftronomes de Milan l'eftiment de 6″ à 7″ et Mr. *Mayer* de Manheim croit le pouvoir évaluer à 10″. Les fentiments des Aftronomes etant donc fi peu d'accord entre eux par rapport à ce fujet, j'ai cru que pour fixer mon

mon jugement, le meilleur expedient ſeroit de comparer la nouvelle Planète, avec quelque autre dont le Diamètre ſoit connu. Et comme il arrivoit que la Planète ſe trouvoit l'année paſſée au mois d'Avril et Mai, dans le voiſinage de Mars, j'ai examiné lequel des deux Aſtres paroitroit le plus grand & j'ai trouvé que le Diamètre de Mars ſurpaſſoit conſidérablement celui de notre Planète. Or Mars étant dans ce temps-là dans les environs de ſon Apogée, ſon Diamètre ne ſurpaſſoit pas 5″; d'où je conclus que le Diamètre de la nouvelle Planète eſt certainement plus petit que 5″ & même j'eſtime, qu'il ne ſurpaſſe pas 3″. Suppoſant donc que ce Diamètre ſoit effectivement de 3″, parceque la Planète eſt vue d'une diſtance presque 19 fois plus grande que celle du Soleil à la terre; ſi la Planète étoit auſſi éloignée de la terre que le Soleil, elle ſe préſenteroit à nous ſous un angle de 57″ à peu près; d'où il faut conclure qu'elle ſurpaſſe en grandeur les autres Planètes, excepté Jupiter & Saturne & qu'elle eſt à peu près 36 fois plus volumineuſe que la terre. Mais ſi ſon Diamètre étoit comme Mr. *Mayer* le ſoutient de 10″ elle ſurpaſſeroit même Saturne en grandeur & ne différeroit que fort peu de Jupiter.

§. 11. Le mouvement de cette nouvelle Planète, de même qu'il ſert à nous convaincre, que cet Aſtre doit être compté parmi les autres Planètes du Syſtême Solaire, fait auſſi en même temps ſoupçonner, qu'il pourroit y avoir pluſieurs autres Planètes, à des diſtances plus conſidérables du Soleil. Car ſi l'on conſidere, que la diſtance des étoiles fixes, n'a presque aucun rapport ſenſible avec les dimenſions connues du Syſtême Planètaire; il n'y a rien qui empêche d'imaginér que les limites de ce Syſtême s'étendent encore cent fois plus loin que l'orbe de Saturne & même au de-là ſi l'on veut. Le mouvement des Comètes qui d'après les ſentiments des Aſtronomes ſe fait dans des orbites Elliptiques très excentriques, fait préſumer que parmi ces Aſtres il y en a, dont les Aphélies ſe trouvent pluſieurs centaines de fois plus éloignées du Soleil, que la terre. Mais ſi l'on aimoit mieux croire que la plus grande partie des Comètes paſſent dans d'autres Syſtèmes, il faut au moins avouer, que celles des Comètes dont on connoit le retour, doivent être comptées parmi les habitans du Syſtème Solaire. D'abord on ſait que la celebre Comète obſervée en 1759 & dont la dernière Période de révolution étoit de 77 Ans, eſt dans ſon Aphélie à peu près 36 fois plus éloignée du Soleil que la terre, en ſorte que ſa diſtance Aphélie ſurpaſſe presque deux fois la diſtance de la nouvelle Planète. Les Comètes obſervées en 1532 & 1661 ont des Elémens fort reſſemblans, d'où l'on a conclu que la Comète obſervée en 1661, eſt la même que celle de 1532, ſon temps Periodique ſera donc de 129 Ans, par conſéquent ſa diſtance Aphélie ſurpaſſera la diſtance du Soleil à la terre 50 fois. De même les Elémens des Comètes obſervées en 1264, 1556 ſe reſſemblent très bien, & ſi c'eſt la même Comète qui a reparu, ſon temps Périodique ſera de 292 Ans & ſa diſtance Aphelie à peu près 87 fois plus grande que celle du Soleil à la terre. On voit donc que ſi on vouloit borner l'étendue du notre Syſtème Solaire à une diſtance cent fois ſeulement plus grande que celle du Soleil à la terre, il y auroit pourtant aſſez de place depuis la Planète dérnierement découverte jusqu'à

ces

ces limites pour y placer plusieurs Planètes. Quelque difficile que soit la découverte de ces corps célestes, qui par la foiblesse de leur lumiere & la lenteur de leur mouvement, échapperont peut-être longtemps aux recherches des Astronomes; cette tâche laborieuse & pénible ne manquera pas pourtant de nous procurer des connoissances plus complettes & plus étendues sur la vraie constitution du Systême Solaire.

Supplément aux recherches sur la nouvelle Planète.

I. Afin de détruire tous les doutes, qui pourroient se présenter par rapport aux calculs par les quels j'ai prouvé qu'une orbite Parabolique ne sauroit satisfaire aux observations faites depuis le 17 de Mars 1781, jusqu'au 23 de Janvier 1782, si par hazard la première de ces observations, qui est celle du 17 de Mars ne se trouvoit pas assez exacte; j'ai cru qu'il valoit bien la peine de faire le calcul de l'orbite Parabolique en employant des observations plus éloignées entre elles. Pour cet effet ayant cherché des orbites Paraboliques, qui satisfont aux observations du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octobre 1782 (dont la dernière a été faite à Stockholm par Mr. *Wargentin*) & supposant les distances Perihélies de ces lignes Paraboliques, successivement 6, 8 & 10 fois plus grandes, que la distance moyenne du Soleil à la terre, j'ai trouvé les Elémens de ces orbites déterminés de la maniere qui suit:

Diſtance Périhél.	6	8	10
Lieu du Périhél.	$6^s.19^\circ.6'.3''$	$6^s.8^\circ.15'.2''$	$5^s.28^\circ.10'.12''$
Temps du Périh. compté d'Av. 1781	$3037^j,6784$	$3328^j,0674$	$3525^j,2789$

Enſuite ayant entrepris le calcul pour pluſieurs lieux obſervés de la nouvelle Planète, je les ai trouvé déterminés d'après ces Elémens, de cette ſorte:

Longitude de la Planète

1781 Temps moy. de Green.	6	8	10	obſervée
Avr. $9.10^h.41'$	$2^s.25^\circ.\ 3'.19''$	$2^s.25^\circ.\ 3'.19''$	$2^s.25^\circ.\ 3'.19''$	$2^s.25^\circ.\ 3'.19''$
Mai 28. 9. 2	27. 14. 52	27. 13. 0	27. 12. 52	27. 19. 59
Juil. 19. 15. 11	3. 0. 16. 4	3. 0. 10. 29	3. 0. 6. 10	3. 0. 24. 11
Sept. 1. 16. 1	2. 12. 20	2. 4. 14	1. 58. 17	2. 21. 12
Oct. 22. 17. 27	2. 37. 22	2. 30. 15	2. 25. 16	2. 49. 0
1782				
Janv. 1. 7. 37	2. 29. 54. 52	3. 0. 0. 33	3. 0. 4. 56	3. 0. 25. 34
Fevr. 27. 9. 55	28. 5. 27	2. 28. 20. 7	2. 28. 29. 33	2. 28. 51. 3
Avr. 27. 7. 55	29. 13 32	29. 27. 47	29. 39. 41	29. 58. 34
Juil. 23. 14. 58	3. 4. 30. 17	3. 4. 34. 23	3. 4. 37. 39	3. 4 49. 37
Aout 17. 13. 33	5. 54. 5	5. 55. 19	5. 56. 19	6. 4. 11
Oct. 2. 10. 12	7. 20. 23	7. 18. 49	7. 18. 32	7. 19. 58
21. 8. 50	7. 20. 56	7. 20. 56	7. 20. 56	7. 20. 56

§. 2.

§. 2. Il eſt d'abord clair que presque tous les lieux calculés de la Planète ſe trouvent en défaut & même quelquefois d'une quantité très conſidérable comme de 30 à 40 Minutes. Depuis la première obſervation jusqu'à celle du 22 d'Octobre 1781 le premier Syſtême des Elémens donne les réſultats qui s'éloignent le moins des obſervations; mais enſuite depuis l'obſervation du 1 de Janvier 1782 jusqu'à celle du 17 d'Aout de la même Année les réſultats trouvés d'après ce premier Syſtême different beaucoup plus des obſervations, que les lieux calculés d'après les deux derniers. De là on conclut, que ſi l'on tâchoit de trouver une orbite Parabolique, la quelle en même temps qu'elle ſatisfairoit aux obſervations du 9 d'Avril 1781 & du 22 d'Octobre 1782, fût auſſi d'accord avec quelque obſervation intermédiaire; cette orbite Parabolique ne manqueroit pas de ſe trouver pour un grand nombre d'obſervations en défaut au moins de 30 Minutes. Par exemple ſi l'obſervation à la quelle on ſe propoſe de ſatisfaire eſt celle du 22 d'Octobre 1781, on voit bien que cela ſe fera par une orbite Parabolique dont la diſtance Périhélie eſt à peu près fois 4 plus grande que celle du Soleil à la terre; mais en réflechiſſant ſur la manière dont les erreurs des lieux calculés d'après nos trois hypothèſes procedent, il eſt éuident, que pour une diſtance Périhélie 4 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, le lieu calculé pour le moment obſervé le 27 d'Avril 1782, différera de l'obſervation presque d'un dégré entier. En revange ſi l'on tâchoit de ſatisfaire à cette obſervation du 27 d'Avril 1782, en même temps qu'aux celles du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octobre 1782, ce qui s'effectueroit par un orbite Parabo-

 lique

lique dont la diſtance Périhélie eſt 13 à 14 fois plus grande que celle du Soleil à la terre, il eſt aiſé de s'appercevoir qu'il en réſulteroit pour l'obſervation du 22 d'Octobre 1781 des erreurs de 30 Minutes à peu près. Il eſt donc inconteſtablement prouvé qu'une orbite Parabolique ne ſauroit abſolument ſatisfai.e & même les erreurs devenant ſi conſidérables, on a raiſon de préſumer, que des Ellipſes dont les Excentricités ſont tant ſoit peu conſidérables ſe trouveront tout à fait exclues.

§. 3. Pour mieux conſtater la Longitude du Noeud de la nouvelle Planète & l'inclinaiſon de ſon orbite, j'ai combiné l'obſervation de cet aſtre faite par Mr. *Mayer* à Göttingue le 25 de Sept. 1756 avec quelques unes de celles qui ont été faites l'Année paſſee à Stockholm par Mr. *Wargentin.* L'intervalle de temps entre ces obſervations étant ſi conſidérable, il eſt évident que quand même on ſe ſeroit trompé un peu par rapport aux Longitudes Héliocentriques de la Planète, cela ne changeroit que fort peu dans les Elémens que je me ſuis propoſé de déterminer. Pour cet effet j'ai conſervé l'obſervation de Mr. *Mayer* réduite à ſon lieu Héliocentrique, telle que Mr. *Bode* l'a préſenté dans les Ephemerides de Berlin pour 1785: ſavoir la Longitude Héliocentrique $11^s. 17^\circ. 29'. 21''$ & la Latitude Auſtrale $44'. 45''$. Or on trouve par la combinaiſon de cette obſervation avec celle que Mr. *Wargentin* a faite à Stockholm le 17 d'Août 1782, la Longitude du Noeud $2^s. 11^\circ. 55'. 27''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $44'. 58''$; & par la combinaiſon de l'obſervation de Mr. *Mayer* avec celle que Mr. *Wargentin* a faite le 13 d'Octobre 1782: la Longitude du Noeud $2^s. 11^\circ. 42'. 55''$

&

& l'inclinaiſon de l'orbite 44′. 59″. D'où il eſt clair ſurtout par rapport au dernier élément, que quelques petits changements dans les obſervations, avec lesquelles, celle de *Mayer* eſt combinée, ne causeront que de petites variations dans les réſultats.

§. 4. Dailleurs ſi l'on ſuppoſe qu'il y a une correction de 10′ à ajouter pour l'angle que la Planète a décrit autour du Soleil entre les deux obſervations, il en réſultera une correction négative de 21″ pour la Longitude du Noeud & auſſi une correction négative ſeulement d'une ſeconde pour l'inclinaiſon de l'orbite. On voit donc que la détermination des deux Elémens en queſtion, au moyen de la combinaiſon de l'obſervation de Mr. *Mayer* avec quelqu'une de celles, qui ont été faites depuis la découverte de Mr *Herſchel*, eſt presque indépendante de toute Théorie; car ſuppoſant même (ce qui ne ſauroit être) que ſelon la vraie Théorie la Longitude Héliocentrique pour le 25 de Septembre 1756 dût être diminuée d'un dégré entier, ce changement produiroit pour l'angle entre les deux lieux Héliocentriques une correction additive d'un dégré & de là il ne réſulteroit pour la Longitude du Noeud qu'une correction de 3′. 30″ à peu près à ſouſtraire & pour l'inclinaiſon de l'orbite une correction de 6″ auſſi négative. Quoique la Latitude Héliocentrique obſervée le 25 Sept. 1782 ſoit fort peu affectée par les défauts de la Théorie, au moins en tant qu'on ſuppoſe que l'orbite eſt une Ellipſe fort approchante du cercle, cependant les fautes commiſes dans la Latitude Géocentrique obſervée ſont d'une aſſés grande conſéquence. Car ſuppoſant que la correction de la Latitude ſoit de 30″ & additive, la Longitude du Noeud ſe trouve-

ra

ra par la première combinaiſon $2^s. 12^\circ. 10'. 6''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $45'. 27''$. En tout cas, l'obſervation du 25 de Sept. 1756 eſt certainement fort propre pour déterminer l'inclinaiſon de l'orbite de la Planète, ayant été faite lorsque cet Aſtre ſe trouvoit vers la limite de ſa plus grande Latitude auſtrale.

§. 5. Les obſervations des oppoſitions des Planètes étant à pluſieurs égards très intéreſſantes puisqu'elles donnent les Longitudes Héliocentriques ſans aucune conſidération de la Théorie; j'ai cherché l'oppoſition de la Planète avec le Soleil dans le mois de Decembre 1781, par les obſervations, qui ont été faites par Mr. *Mechain* à Paris le 20 & 22 Decembre & par Mr. *Mayer* à Manheim le 21 & 23 du même mois. Voici les obſervations:

	Temps moy. de Greenv.		Longitude de la Planète.
1781. Déc.	20. $8^h. 49'. 14''$	-	$3^s. 0^\circ. 56'. 1''$.
	21. 11. 26. 38	-	3. 0. 53. 8.
	22. 9. 5. 24	-	3. 0. 51. 4.
	23. 11. 18. 20	-	3. 0. 47. 52.

Ayant enſuite calculé les lieux du Soleil pour ces quatre moments du temps & les diſtances du Soleil à la terre, ſi l'on ſuppoſé la diſtance de la Planète au Soleil 18,886, on trouvera les lieux Héliocentriques de la Planète déterminés en ſorte:

1781. Déc.	20. $8^h. 49'. 14''$	-	$3^s. 0^\circ. 51'. 25''$.
	21. 11. 26. 38	-	3. 0. 52. 14.
	22. 9. 5. 24	-	3. 0. 53. 11.
	23. 11. 18. 20	-	3. 0. 53. 35.

Donc

Donc pour le 21 Dec. 18^h. temps moyen de Greenv. on aura la Longitude Héliocentrique:

Par la I^{re}.	Obſervation	$3^s. 0°. 52'. 25''$.
II^{de}.	Obſervation	3. 0. 52. 26.
III^{me}.	Obſervation	3. 0. 52. 44.
IV^{me}.	Obſervation	3. 0. 52. 21.

La quantité moyenne eſt $3^h. 0°. 52'. 29''$, mais comme le réſultat pour la troiſième obſervation paroît un peu douteux, en donnant l'excluſion à ce réſultat, nous aurons la Longitude Héliocentrique pour le 21 Décembre à 18^h. Temps moyen de Greenv. $3^s. 0°. 52'. 24''$. Par conſéquent le moment de l'oppoſition du Soleil & de la Planète ſera le 21 Decembre 1781 à $18^h. 3'$. temps moyen de Greenwich, la Longitude du Soleil étant alors $9^s. 0°. 52'. 24''$. Or la Latitude Géocentrique ayant été obſervée $15'. 3''$ à peu près, il s'enſuivra, la Latitude Héliocentrique $14'. 27''$. Quoique la conſidération de la Théorie de la Planète, entre dans cette détermination du temps de la conjonction; chacun voit pourtant qu'il y eſt pour ſi peu de choſe, qu'il ne peut s'en ſuivre aucune erreur ſenſible dans le réſultat. D'ailleurs l'accord ſurprenant des obſervations du 20, 21 & 23 de Décembre, fournit une preuve inconteſtable, que la Longitude de la Planète trouvée pour le temps de l'oppoſition eſt fort exacte.

SOLVTIONES QVORVNDAM PROBLEMATVM ASTRONOMICORVM, AD DOCTRINAM DE MOTV PLANETARVM ET COMETARVM IN SECTIONIBVS CONICIS PERTINENTIVM.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Cum in inuestigandis Elementis orbitae pro Cometa Anno 1770 obseruato, occupatus essem, in plura incidi Problemata Astronomica, quorum solutiones pro negotio meo perficiendo, mihi eruere necesse erat; inter quae, nonnulla equidem non prorsus obuia esse, mihi visa sunt, vnde confido omnino operae pretium fore, vt eorum solutiones accurate exponam. Quae autem heic tradenda sunt Problemata, singula in eo versantur, vt si cognita fuerint bina loca Planetae vel Cometae Heliocentrica, tumque praeterea detur quodpiam Elementorum ad eius orbitam pertinentium, vtpote vel axis maior, vel parameter, vel excentricitas, ipsa orbita horum datorum ope determinetur. In principiis Mathematicis Philosophiae Nat. Illustris

lustris *Newtoni*, Lib. I. Sect. IV., solutiones quidem traduntur variorum Problematum ad hoc genus pertinentium; verum quum omnes istae Solutiones Geometricae sint et per constructiones perficiantur; facile intelligitur, eas nostro instituto non accommodatas esse, quippe quum hic solutiones praeprimis desiderentur analyticae et quorum applicatio ad casus datos motuum Cometarum vel Planetarum per calculum numericum perfici queat.

Problema 1.

§. 2. *Si dentur bina loca Planetae vel Cometae Heliocentrica et parameter orbitae in qua hic Planeta vel Cometa mouetur, reliqua Elementa eiusdem orbitae inuenire.*

§. 3. Ponamus axem orbitae A M N a Planeta descriptae esse A B, Perihelio in A existente, & bina loca Planetae cognita esse M atque N, ita vt pro datis haberi queant distantiae F M, F N et angulus M F N. Si igitur indigitentur F M per c, F N per c' et anguli A F M, A F N per Φ et Φ' respectiue, problematis nostri solutio eo reducitur, vt valores horum angulorum Φ et Φ' inuestigentur; quippe quibus inuentis, ex dato simul parametro, excentricitas nullo negotio eruetur. Dicatur itaque semiparameter orbitae b, excentricitas autem e, et quum sit Tab. XI. Fig. 3.

$$c(1 + e\,\text{cos.}\,\Phi) = b \text{ et } c'(1 + e\,\text{cos.}\,\Phi') = b, \text{ fiet}$$

$$e\,\text{cos.}\,\Phi = \frac{b}{c} - 1, \quad e\,\text{cos.}\,\Phi' = \frac{b}{c'} - 1, \text{ hincque}$$

$$\frac{\text{cos.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi'} = \frac{c'(b-c)}{c(b-c')}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{\text{cos.}\,\Phi' - \text{cos.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\Phi' + \text{cos.}\,\Phi} = \frac{c(b-c') - c'(b-c)}{c(b-c') + c'(b-c)}, \text{ seu}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi)\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = \frac{b(c'-c)}{b(c'+c') - 2cc'};$$

 quae

quae aequalitas etiam sequentibus modis exprimi potest:

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi)\ \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$$
$$= \frac{b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c'}\right)}{b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right) - 2} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{c'}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{c'} - \frac{2}{b}}.$$

Cognito igitur angulo $MFN = \Phi' - \Phi$, ope formularum traditarum inueniri potest $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$, hincque elicietur

$$AFM = \Phi = \tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) - \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi) \text{ et}$$
$$AFN = \tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) + \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi),$$

tum vero erit $e = \frac{b - c}{c \cos. \Phi} = \frac{b - c'}{c' \cos. \Phi'}$. Ex quibus denique reliqua orbitae Elementa sponte innotescunt; erit enim distantia Perihelii $= \frac{b}{1 + e}$; distantia Aphelii $= \frac{b}{1 - e}$ et semiaxis maior $= \frac{b}{1 - e^2}$.

§. 4. Si quis loco angulorum Φ et Φ', huius Problematis solutionem, per inuestigationem excentricitatis e adgredi vellet, solutio quidem non adeo concinna prodiret, interim tamen forsan haud praeter rem erit, eiusdem heic meminisse. Quum itaque sit

$$MFN = \Phi' - \Phi = 2\delta, \text{ vnde}$$
$$\cos. \Phi' = \cos. 2\delta \cos. \Phi - \sin. 2\delta \sin. \Phi,$$

tumque habeatur

$$\cos. \Phi' = \frac{b - c'}{e c'};\ \cos. \Phi = \frac{b - c}{e c};$$

suffectis pro $\cos. \Phi'$, $\cos. \Phi$, eorum valoribus, erit

$$\frac{b - c'}{e c'} = \frac{b - c}{e c}.\cos. 2\delta - \sin. \Phi \sin. 2\delta \text{ et}$$
$$\sin. \Phi = \frac{b - c}{e c}\cot. 2\delta + \frac{c' - b}{e c' \sin. 2\delta}, \text{ hinc fit}$$
$$1 = \sin. \Phi^2 + \cos. \Phi^2 = \frac{(b - c)^2}{e^2 c^2}$$
$$+ \frac{(b - c)^2}{e^2 c^2}\cot. 2\delta^2 - \frac{2(b - c)(b - c')\cos. 2\delta}{e^2 c c'. \sin. 2\delta^2} + \frac{(b - c')^2}{e^2 c'^2 \sin. 2\delta^2},$$

ideo-

ideoque

$$e^2 = \frac{(b-c)^2}{c^2 \sin. 2\delta^2} - \frac{2(b-c)(b-c')\cos. 2\delta}{c c' \sin. 2\delta^2} + \frac{(b-c')^2}{c'^2 \sin. 2\delta^2}.$$

Exprimatur breuitatis gratia $\frac{b}{c}$ per m et $\frac{b}{c'}$ per n, fietque

$$e^2 = \frac{(m-1)^2}{\sin. 2\delta^2} - \frac{2(m-1)(n-1)\cos. 2\delta}{\sin. 2\delta^2} + \frac{(n-1)^2}{\sin. 2\delta^2}, \text{ siue}$$

$$e^2 \sin. 2\delta^2 = (m-1)^2 - 2(m-1)(n-1)\cos. 2\delta$$
$$+ (n-1)^2 = (m-n)^2 + 2(m-1)(n-1)(1-\cos. 2\delta)$$
$$= (m-n)^2 + 4(m-1)(n-1)\sin. \delta^2, \text{ hinc}$$
$$e^2 \sin. 2\delta^2 = (m-n)^2 \left(1 + \frac{4(m-1)(n-1)\sin. \delta^2}{(m-n)^2}\right),$$

vnde si statuatur

$$\frac{4(m-1)(n-1)\sin. \delta^2}{(m-n)^2} = \text{Tang. } \theta^2, \text{ fiet}$$
$$e \sin. 2\delta = \frac{m-n}{\cos. \theta} \text{ et } e = \frac{m-n}{\sin. 2\delta \cos. \theta}.$$

§. 4. Quum sit $\frac{\cos. \Phi'}{\cos. \Phi} = \frac{c(b-c')}{c'(b-c)}$, si ponatur

$\Phi' = 2\delta + \Phi$, erit $\cos. \Phi' = \cos. 2\delta \cos. \Phi - \sin. 2\delta \sin. \Phi$, hinc

$$\frac{\cos. \Phi'}{\cos. \Phi} = \frac{c(b-c')}{c'(b-c)} = \cos. 2\delta - \sin. 2\delta. \text{Tang. } \Phi,$$

ex qua aequatione, angulus Φ erui potest, id quod commodissime fiet, si ponatur

$$\frac{c(b-c')}{c'(b-c)\sin. 2\delta} = \cot. 2\eta,$$

tum enim erit

$$\text{Tang. } \Phi = \cot. 2\delta - \cot. 2\eta, \text{ ideoque}$$
$$\text{Tang. } \Phi = \frac{\sin. (2\eta - 2\delta)}{\sin. 2\eta \sin. 2\delta},$$

verum tamen formula pro Tang. $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$ supra allata commodior omnino esse videtur.

§. 5. Quo melius applicatio formularum ſupra traditarum pateſcat, exemplo quodam eandem illuſtrare e re erit. Ponamus itaque eſſe:

$$c = 0,6798945;\ c' = 1,0864448;$$

$$\mathrm{L}\,b = 0,0808000 \text{ et } \Phi' - \Phi = 89^\circ.\ 43'.\ 8'',$$

et calculus pro formulis §. 2. allatis erit:

$$\mathrm{L}\,2 = 0,3010300$$
$$\mathrm{L}.\,b = 0,0808000$$
$$\mathrm{L}.\,\tfrac{2}{b} = 0,2202300$$
$$\mathrm{L}.\,c = 9,8324416$$
$$\mathrm{L}.\,c' = 0,0360077$$
$$\mathrm{L}.\,\tfrac{2cc'}{b} = 0,0886793$$

$$\mathrm{L}.\,(c'-c) = 9,6091143$$
$$\mathrm{L}.\,\mathrm{D}. = 9,7322378$$
$$9,8768765$$
$$\mathrm{L.cot.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi'-\Phi) = 0,0021308$$
$$\mathrm{L.tg.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi'+\Phi) = 9,8790073$$

$$\mathrm{L}.\,b = 0,0808000$$
$$\mathrm{L}.\,\tfrac{1}{c} = 0,1675584$$
$$\mathrm{L}.\,\tfrac{b}{c} = 0,2483584$$
$$\tfrac{b}{c} - 1 = 0,7715700$$

$$\mathrm{L}.\,b = 0,0808000$$
$$\mathrm{L}.\,\tfrac{1}{c'} = 9,9639923$$
$$\mathrm{L}.\,\tfrac{b}{c'} = 0,0447923$$
$$\tfrac{b}{c'} - 1 = 0,1086445$$

$$c' = 1,0864448$$
$$c = 0,6798945$$
$$c' - c = 0,4065503$$
$$c' + c = 1,7663393$$
$$\tfrac{2cc'}{b} = 1,2265331$$
$$\mathrm{D} = c' + c - \tfrac{2cc'}{b} = 0,5398062$$

$$\tfrac{1}{2}(\Phi'+\Phi) = 37^\circ.\,7'.\,12'',3$$
$$\tfrac{1}{2}(\Phi'-\Phi) = 44.\,51.\,34,$$
$$\Phi' = 81.\,58.\,46,\,3$$
$$\Phi = -\ 7.\,44.\,21,\,7$$

$$\mathrm{L}.\,\tfrac{b}{c} - 1 = 9,8873753$$
$$\mathrm{L.\,cof.}\,\Phi' = 9,9960257$$
$$\mathrm{L}.\,e = 9,8913496$$
$$e = 0,77865$$

$$\mathrm{L}.\,(\tfrac{b}{c'} - 1) = 9,0360078$$
$$\mathrm{L.\,cof.}\,\Phi' = 9,1446578$$
$$\mathrm{L}.\,e = 9,8913500$$

Hinc

Hinc quum bini valores pro e inuenti, tam prope inter se conueniant, id indicio est calculum bene esse institutum.

§. 6. Si ope formulae §. 3. allatae angulus Φ inuestigandus sit, calculus hunc in modum procedet:

$$L.\left(\tfrac{b}{c'}-1\right) = 9,0360078$$
$$L.F = 9,8873701$$
$$L.\cot.2\eta = 9,1486377$$

$$2\eta = 81^\circ.59'.5'',3$$
$$2\delta = 89.43.8,0$$
$$2\delta - 2\eta = 8.44.2,7$$
$$\Phi = 7^\circ.44'.21'',8$$

$$L.\left(\tfrac{b}{c}-1\right) = 9,8873753$$
$$L.\sin.2\delta = 9,9999948$$
$$L.F = L.\left(\tfrac{b}{c'}-1\right)\sin.2\delta = 9,8873701$$

$$L.\sin.2\delta = 9,9999948$$
$$L.\sin.2\eta = 9,9957345$$
$$9,9957293$$
$$L.\sin.(2\delta-2\eta) = 9,1289663$$
$$L.\cot.\Phi = 0,8667630$$

vbi valor ipsius Φ non nisi decima parte scrupuli secundi a prius inuento differt. Denique in subsidium vocata formula pro e §. 4. allata, inuenietur angulus $\theta = 31^\circ.38'.19''$, $m-n = 0,6629255$, hincque $\text{Log.}\,e = 9,8913498$, qui valor cum supra inuentis admodum bene consentit.

Problema 2.

§. 7. *Datis binis locis Planetae vel Cometae Heliocentricis et excentricitate orbitae, inuenire reliqua eiusdem orbitae Elementa.*

Excentricitatem heic eo sensu accipio, quo in Astronomia communiter accipi solet, ita vt designet rationem inter

inter diſtantiam foci a centro et ſemiaxem maiorem orbitae, ideoque ſi ſemiaxis maior vnitate deſignetur, excentricitas ipſam diſtantiam foci a centro exprimet. Retentis igitur iisdem denominationibus ac in Problemate praecedenti, habebimus

$$c(1+e\operatorname{cof.}\Phi)=c'(1+e\operatorname{cof.}\Phi'), \text{ hinc}$$
$$c'-c=e(c\operatorname{cof.}\Phi-c'\operatorname{cof.}\Phi').$$

Statuamus nunc eſſe $\Phi'+\Phi=2\varepsilon$ et $\Phi'-\Phi=2\delta$, ideoque $\Phi'=\varepsilon+\delta$ et $\Phi=\varepsilon-\delta$, erit

$$\operatorname{cof.}\Phi=\operatorname{cof.}\varepsilon\operatorname{cof.}\delta+\operatorname{fin.}\varepsilon\operatorname{fin.}\delta \text{ et}$$
$$\operatorname{cof.}\Phi'=\operatorname{cof.}\varepsilon\operatorname{cof.}\delta-\operatorname{fin.}\varepsilon\operatorname{fin.}\delta, \text{ proinde}$$
$$c'-c=e((c-c')\operatorname{cof.}\varepsilon\operatorname{cof.}\delta+(c'+c)\operatorname{fin.}\varepsilon\operatorname{fin.}\delta),$$

vnde colligitur

$$\frac{1}{e}=-\operatorname{cof.}\varepsilon\operatorname{cof.}\delta+\frac{c'+c}{c'-c}\operatorname{fin.}\varepsilon\operatorname{fin.}\delta.$$

Ponamus itaque $\frac{c'+c}{c'-c}\operatorname{tang.}\delta=\operatorname{tang.}\eta$, fietque

$$\frac{1}{e\operatorname{cof.}\delta}=-\operatorname{cof.}\varepsilon+\operatorname{fin.}\varepsilon\operatorname{tang.}\eta, \text{ hincque}$$
$$\frac{\operatorname{cof.}\eta}{e\operatorname{cof.}\delta}=-\operatorname{cof.}\varepsilon\operatorname{cof.}\eta+\operatorname{fin.}\varepsilon\operatorname{fin.}\eta=-\operatorname{cof.}(\varepsilon+\eta),$$

cuius aequationis ſubſidio inuenietur angulus $\varepsilon+\eta$, hincque cognito iam angulo η determinabitur ε, ideoque $\Phi=\varepsilon-\delta$ et $\Phi'=\varepsilon+\delta$, tum vero erit

$$b=c(1+e\operatorname{cof.}\Phi)=c'(1+e\operatorname{cof.}\Phi').$$

§. 8. Tum hac quoque ratione negotium perfici poteſt: ob

$$\Phi'=2\delta+\Phi, \text{ erit } \operatorname{cof.}\Phi'=\operatorname{cof.}2\delta\operatorname{cof.}\Phi-\operatorname{fin.}2\delta\operatorname{fin.}\Phi,$$

hincque

$$c'-c=e(c\operatorname{cof.}\Phi-c'\operatorname{cof.}2\delta\operatorname{cof.}\Phi+c'\operatorname{fin.}2\delta\operatorname{fin.}\Phi),$$

quae-

quaeratur nunc $\cot.\gamma = \frac{c - c' \cos. 2\delta}{c' \sin. 2\delta}$, eritque

$$\frac{c' - c}{e\, c' \sin. 2\delta} = \cot.\gamma \cos.\Phi + \sin.\Phi,$$

nec non

$$\frac{(c' - c)\sin.\gamma}{c' e \sin. 2\delta} = \cos.\gamma \cos.\Phi + \sin.\gamma \sin.\Phi = \cos.(\gamma - \Phi),$$

per quam formulam inuenietur angulus $\gamma - \Phi$, hincque ob datum angulum γ innotefcet Φ. Denique fi aequatio cuius ope §. 4. inueftigauimus valorem ipfius e, euoluatur, confequemur:

$$e^2 \sin. 2\delta^2 = b^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{2 \cos. 2\delta}{c c'} + \frac{1}{c'^2}\right)$$
$$- 2 b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'}\right)(1 - \cos. 2\delta) + 2(1 - \cos. 2\delta),$$

quae aequatio inferuire poterit determinando valori ipfius b, quod tamen quum non nifi operofo fatis labore praeftari poffit, folutionibus fupra allatis merito acquiefcere licebit.

§. 9. Quo vfus formularum fupra allatarum eo euidentius ob oculos ponatur, earum adplicationem fequenti exemplo illuftrare placebit. Sit

$$c = 0,6700308 \quad c' = 1,1159573,$$

$$\Phi' - \Phi = 89^\circ.27'.31'',0, \text{ hinc } \delta = 44^\circ.43'.45'',5$$

ponatur item effe $L\,e = 9,9500000$, eritque calculus:

$$\begin{array}{rl} c' = & 1,1159573 \\ c = & 0,6700308 \\ \hline c' + c = & 1,7859881 \\ c' - c = & 0,4459265 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{L. tang.}\,\delta = & 9,9958962 \\ \text{L.}\, c' + c = & 0,2518787 \\ \hline & 0,2477749 \\ \text{L.}\, c' - c = & 9,6492633 \\ \hline \text{L. tang.}\,\eta = & 0,5985116 \end{array}$$

$\eta =$

$\eta = 75^\circ.\ 51'.\ 11'',6$

$\varepsilon + \eta = 112.\ 42.\ 20,\ 8$

$\varepsilon = 36.\ 51.\ 9,\ 2$

$\delta = 44.\ 43.\ 45,\ 5$

$\phi = -\ 7.\ 52.\ 36,\ 3$

$\phi' = 81.\ 34.\ 54,\ 7$

$L.\ e = 9,9500000$

$L.\ \mathrm{cos}.\ \phi = 9,9958829$

$L.\ e\ \mathrm{cos}.\ \phi = 9,9458829$

$1 + e\ \mathrm{cos}.\ \phi = 1,8828418$

$L.\ c = 9,8260947$

$L.(1 + e\ \mathrm{cos}.\phi) = 0,2748138$

$L.\ b = 0,1009085$

$L.\ (1 + e) = 0,2767491$

$9,8241594$

$L.\ (1 - e) = 9,0364253$

$L.\ a = 0,7877341$

$L.\ \mathrm{cos}.\ \eta = 9,3881132$

$L.\ \frac{1}{e} = 0,0500000$

$9,4381132$

$L.\ \mathrm{cos}.\ \delta = 9,8515271$

$L. - \mathrm{cos}.(\varepsilon + \eta) = 9,5865861$

$L.\ e = 9,9500000$

$L.\ \mathrm{cos}.\ \phi' = 9,1655298$

$L.\ e\ \mathrm{cos}.\ \phi' = 9,1155298$

$1 + e'\ \mathrm{cos}.\ \phi' = 1,1304753$

$L.\ c' = 0,0476478$

$L.(1 + e\ \mathrm{cos}.\phi') = 0,0532608$

$L.\ b = 0,1009086$

$b = 1,2615620$

$\frac{b}{1+e} =$ Dist.Perih. $= 0,6670515$

Sem. maior $= a = 6,1338630$

Problema 3.

§. 10. *Si vt supra bina cognita fuerint loca Heliocentrica Planetae vel Cometae, praetereaque detur eius distantia Perihelii, reliqua orbitae Elementa determinare.*

Indigitetur distantia Perihelii per d, reliquae autem denominationes in prioribus allatae maneant, eritque

$d =$

$d = \frac{b}{1+e}$. Quum autem ſit

$$\frac{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}{b} = \frac{1}{c} \text{ et } \frac{1 + e \operatorname{cof.} \Phi'}{b} = \frac{1}{c'},$$

hinc colligetur

$$\frac{1+e}{b} - \frac{e(1 - \operatorname{cof.} \Phi)}{b} = \frac{1}{c}, \text{ et } \frac{1+e}{b} - \frac{e(1 - \operatorname{cof.} \Phi')}{b} = \frac{1}{c'},$$

ſeu quod eodem redit

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{c} = \frac{e}{b}(1 - \operatorname{cof.} \Phi), \; \frac{1}{d} - \frac{1}{c'} = \frac{e}{b}(1 - \operatorname{cof.} \Phi'),$$

hincque

$$\frac{1 - \operatorname{cof.} \Phi}{1 - \operatorname{cof.} \Phi'} = \frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{c'}},$$

vnde colligitur

$$\frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi^2}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi'^2} = \frac{1 - \frac{d}{c}}{1 - \frac{d}{c'}} \text{ et } \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi'} = \frac{\sqrt{(1 - \frac{d}{c})}}{\sqrt{(1 - \frac{d}{c'})}}.$$

Vt haec formula eo commodius tractari queat, ſtatuamus:

$\frac{d}{c} = \operatorname{cof.} \alpha$; $\frac{d}{c'} = \operatorname{cof.} \alpha'$, eritque

$$\frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi'} = \frac{\sqrt{(1 - \operatorname{cof.} \alpha)}}{\sqrt{(1 - \operatorname{cof.} \alpha')}} = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\alpha'},$$

ex quo deducitur

$$\frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi' - \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi' + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\Phi} = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\alpha' - \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\alpha' + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\alpha},$$

hincque

$$\frac{\operatorname{tang.} \frac{1}{4}(\Phi' - \Phi)}{\operatorname{tang.} \frac{1}{4}(\Phi' + \Phi)} = \frac{\operatorname{tang.} \frac{1}{4}(\alpha' - \alpha)}{\operatorname{tang.} \frac{1}{4}(\alpha' + \alpha)},$$

ideoque fiet

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(\Phi' + \Phi) = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(\Phi' - \Phi) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(\alpha' + \alpha) \operatorname{cot.} \tfrac{1}{4}(\alpha' - \alpha).$$

Deinde ob

$$1 + e \operatorname{cof.} \Phi = \tfrac{b}{c} = (1 + e) \tfrac{d}{c} = (1 + e) \operatorname{cof.} \alpha,$$

fiet

$$e = \frac{1 - \operatorname{cof.} \alpha}{\operatorname{cof.} \alpha - \operatorname{cof.} \Phi} = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha^2}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} (\Phi - \alpha) \operatorname{fin.} \frac{1}{2} (\Phi + \alpha)}$$

$$= \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha'^2}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} (\Phi' - \alpha'). \operatorname{fin.} \frac{1}{2} (\Phi' + \alpha')};$$

caeterum ad inueniendum valorem ipfius e, adhiberi quoque poterit formula $e = \frac{c' - c}{c \operatorname{cof.} \Phi - c' \operatorname{cof.} \Phi'}$; inuenta autem excentricitate, reliqua orbitae elementa prouti diftantia Perihelii et femiaxis maior nullo labore inueftigantur.

§. 11. In fuperioribus inuenimus $\frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi'}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi} = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha'}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha}$, fi igitur ftatuatur $\Phi' = \varepsilon + \delta$ et $\Phi = \varepsilon - \delta$ erit $\Phi' - \Phi = 2\delta$ et $\frac{1}{2} \Phi' = \delta + \frac{1}{2} \Phi$, hinc

$$\operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} \Phi' = \operatorname{fin.} \delta \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} \Phi + \operatorname{cof.} \delta \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} \Phi,$$

quo valore in noftra formula fubftituto, confequimur

$$\operatorname{fin.} \delta \operatorname{cot.} \tfrac{1}{2} \Phi + \operatorname{cof.} \delta = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha'}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha},$$

ideoque

$$\operatorname{cot.} \tfrac{1}{2} \Phi = \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha'}{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{fin.} \delta} - \operatorname{cot.} \delta;$$

cuius formulae ope valor anguli Φ innotefcet. Tum vero fi in aequatione §. 8 allata:

$$c^2 \operatorname{fin.} 2\delta^2 = b^2 \left(\tfrac{1}{c^2} - \tfrac{2 \operatorname{cof.} 2\delta}{c c'} + \tfrac{1}{c'^2}\right) - 2 b \left(\tfrac{1}{c} + \tfrac{1}{c'}\right) (1 - \operatorname{cof.} 2\delta)$$
$$+ 2 (1 - \operatorname{cof.} 2\delta),$$

loco b fubftituatur $d(1 + e)$, prodibit aequatio, quae praeter

ter quantitates cognitas, ſolam incognitam e complectitur, ex qua autem non niſi operoſo aliquantum labore, valor huius incognitae e elicitur, quamobrem huius aequationis vlteriori euolutioni nihil eſt vt immoremur.

§. 12. Species ſectionis conicae exvalore ipſius e innoteſcit, quippe quum ſi fuerit $e < 1$, ſectio conica certe erit ellipſis, ſin autem ſit $e > 1$, haec ſectio in hyperbolam abibit, tumque poſito $e = 1$, ſectio conica erit Parabola. Quum igitur ſit $e = \frac{1 - \cos.\,\alpha}{\cos.\,\alpha - \cos.\,\Phi}$, indoles huius fractionis naturam ſectionis conicae declarabit. Pro ellipſi igitur habebimus $1 - \cos.\,\alpha < \cos.\,\alpha - \cos.\,\Phi$ hinc

$1 < 2\cos.\,\alpha - \cos.\,\Phi$ et $1 + \cos.\,\Phi < 2\cos.\,\alpha$, ſiue $\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^2 > \cos.\,\alpha$, pro Parabola erit $\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^2 = \cos.\,\alpha$ et pro Hyperbola $\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^2 > \cos.\,\alpha$. Tum vero ex formula $e = \frac{c' - c}{c\cos.\,\Phi - c'\cos.\,\Phi'}$, erit pro Ellipſi: $c' - c < c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi'$, ſiue

$c'(1 + \cos.\,\Phi') < c(1 + \cos.\,\Phi)$,

hoc eſt $\frac{c'}{c} < \frac{\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^2}{\cos.\tfrac{1}{2}\Phi'^2}$; pro Parabola

$\frac{c'}{c} = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^2}{\cos.\tfrac{1}{2}\Phi'^2}$, et pro Hyperbola $\frac{c'}{c} > \frac{\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^2}{\cos.\tfrac{1}{2}\Phi'^2}$.

§. 13. In ſolutione noſtra §. 10. allata, ſupponitur datam eſſe diſtantiam Perihelii, non vero diſtantiam Aphelii, quippe quum pro hac poſteriori ſuppoſitione, iſtae conditiones $\frac{d}{c} = \cos.\,\alpha$ et $\frac{d}{c'} = \cos.\,\alpha'$, nequaquam locum habere queant. Interim tamen ſi pro caſu Ellipſeos data fuerit diſtantia Aphelii, conſequemur huiusmodi aequationem:

$$\frac{1 + \operatorname{cos.} \Phi}{1 + \operatorname{cos.} \Phi'} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{c'} - \frac{1}{d}}, \text{ hinc}$$

$$\frac{\operatorname{cos.} \frac{1}{2} \Phi}{\operatorname{cos.} \frac{1}{2} \Phi'} = \frac{\surd(\frac{1}{c} - \frac{1}{d})}{\surd(\frac{1}{c'} - \frac{1}{d})} \text{ et}$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = \frac{\surd(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}) - \surd(\frac{1}{c'} - \frac{1}{d})}{\surd(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}) + \surd(\frac{1}{c'} - \frac{1}{d})}.$$

§. 14. More consueto nunc quoque adplicationem solutionis supra allatae exemplo quodam illustrare conueniet. Ponamus igitur esse

$$d = 0{,}6745280,\ \tfrac{1}{c} = 0{,}8250919;\ \tfrac{1}{c'} = 0{,}9158540$$
$$\text{et } \Phi' - \Phi = 172°.\ 44'.\ 10''.$$

$$\begin{array}{rcl} L\,d &=& 9{,}8290000 \\ L\,\frac{1}{c} &=& 9{,}9165023 \\ \hline L \operatorname{cos.} \alpha &=& 9{,}7455023 \\ \alpha &=& 56°.\ 10'.\ 57'',45 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl} L\,d &=& 9{,}8290000 \\ L\,\frac{1}{c'} &=& 9{,}9618262 \\ \hline L \operatorname{cos.} \alpha' &=& 9{,}7908262 \\ \alpha' &=& 51°.\ 50'.\ 47'',\ 72 \\ \alpha &=& 56.\ 10.\ 57,\ 45 \\ \hline \alpha + \alpha' &=& 108.\ \ 1.\ 45,\ 17 \\ \alpha - \alpha' &=& 4.\ 20.\ \ 9,\ 73 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') &=& 27.\ \ 0.\ 26'',29 \\ \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') &=& 1.\ \ 5.\ \ 2,\ 43 \\ \frac{1}{2}(\Phi' - \Phi) &=& 43.\ 11.\ \ 2,\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L \operatorname{tang.} \frac{1}{2}(\Phi' - \Phi) &=& 9{,}9724518 \\ L \operatorname{tang.} \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') &=& 8{,}2769625 \\ \hline && 8{,}2494143 \\ L \operatorname{tang.} \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') &=& 9{,}7073028 \\ \hline L \operatorname{tang.} \frac{1}{2}(\Phi' + \Phi) &=& 8{,}5421115 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(\Phi' + \Phi) &=& -\ \ 1°.\ 59'.\ 43'',91 \\ \frac{1}{2}(\Phi' - \Phi) &=& 43.\ 11.\ \ 2,\ 50 \\ \hline \frac{1}{2}\Phi' &=& 41.\ 11.\ 18,\ 59 \\ \frac{1}{2}\Phi &=& -45.\ 10.\ 46,\ 41 \\ \Phi' &=& 82.\ 22.\ 37,\ 18 \\ \Phi &=& -90.\ 21.\ 32,\ 82 \end{array}$$

$\frac{1}{2}(\Phi-\alpha) = 73^\circ.\ 16'.\ 15'',\ 13$

$\frac{1}{2}(\Phi+\alpha) = -17.\ \ 5.\ 17,\ 68$

$L\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}(\Phi-\alpha) = 9,\ 9812187$

$L\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}(\Phi+\alpha) = 9,\ 4681172$

$9,\ 4493359$

$L\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}\alpha^2 = 9,\ 3458172$

$L\ e = 9,\ \ 8964813$

$e = 0,\ \ 7879186$

$L\ d = 9,\ \ 8290000$

$L\ (1+e) = 0,\ \ 2523476$

$L\ b = 0,\ \ 0813476$

$\frac{1}{2}(\Phi'-\alpha') = 15^\circ.\ 15'.\ 54'',\ 73$

$\frac{1}{2}(\Phi'+\alpha') = 67.\ \ 6.\ 42,\ 45$

$L\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}(\Phi'-\alpha') = 9,\ 4204304$

$L\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}(\Phi'+\alpha') = 9,\ 9643848$

$9,\ 3848152$

$L\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}\alpha'^2 = 9,\ 2812954$

$L\ e = 9,\ 8964802$

$L\ d = 9,\ 8290000$

$L\ (1-e) = 9,\ 3265025$

$L\ a = 0,\ 5024975$

Problema 4.

§. 15. *Si cognita supponantur bina loca Cometae vel Planetae in orbita sua, eiusdemque orbitae semiaxis maior, reliqua orbitae Elementa inuestigare.*

Denominationibus supra adhibitis in subsidium vocatis, consequimur

$$c\,(1 + e\ \text{cos.}\ \Phi) = c'\,(1 + e\ \text{cos.}\ \Phi'),$$

vnde colligitur

$$e = \frac{c' - c}{c\ \text{cos.}\ \Phi - c'\ \text{cos.}\ \Phi'};\ \text{hinc}$$

$$c\,(1 + e\ \text{cos.}\ \Phi) = \frac{c\,(c\ \text{cos.}\ \Phi - c'\ \text{cos.}\ \Phi' + c'\ \text{cos.}\ \Phi - c\ \text{cos.}\ \Phi)}{c\ \text{cos.}\ \Phi - c'\ \text{cos.}\ \Phi'}$$

$$= \frac{c\,c'\,(\text{cos.}\ \Phi - \text{cos.}\ \Phi')}{c\ \text{cos.}\ \Phi - c'\ \text{cos.}\ \Phi'} = b = a\,(1 - e^2);$$

fiet igitur

$$\frac{c\,c'\,(\cos.\Phi - \cos.\Phi')}{a\,(c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi')} = 1 - e^2 = 1 - \frac{(c'-c)^2}{(c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi')^2},$$

ideoque multiplicatione per $(c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi')^2$ instituta:

$$\tfrac{c\,c'}{a}(\cos.\Phi - \cos.\Phi')(c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi')$$
$$= (c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi')^2 - (c'-c)^2,$$

quae aequatio in hanc euoluitur:

$$\tfrac{c\,c'}{a}(c\cos.\Phi^2 - (c+c')\cos.\Phi\cos.\Phi' + c'\cos.\Phi'^2)$$
$$= 2\,c\,c'(1-\cos.\Phi\cos.\Phi') - c^2\sin.\Phi^2 - c'^2\sin.\Phi'^2,$$

siue quod eodem redit in istam:

$$\tfrac{c\,c'}{a}((c+c')(1-\cos.\Phi\cos.\Phi') - c\sin.\Phi^2 - c'\sin.\Phi'^2)$$
$$= 2\,c\,c'(1-\cos.\Phi\cos.\Phi') - c^2\sin.\Phi^2 - c'^2\sin.\Phi'^2.$$

Ponamus nunc esse $\Phi' + \Phi = \varepsilon$ et $\Phi' - \Phi = \delta$, erit

$$\cos.\Phi\cos.\Phi' = \tfrac{1}{2}\cos.\delta - \tfrac{1}{2}\cos.\varepsilon,$$

tumque

$$\sin.\Phi^2 = \frac{1-\cos.2\Phi}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos.(\varepsilon-\delta) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos.\varepsilon\cos.\delta + \sin.\varepsilon\sin.\delta)$$

et

$$\sin.\Phi'^2 = \frac{1-\cos.2\Phi'}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos.(\varepsilon+\delta) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos.\varepsilon\cos.\delta - \sin.\varepsilon\sin.\delta).$$

Quum igitur per superius inuenta sit:

$$2\,c\,c\,(\tfrac{c+c'}{a} - 2)(1-\cos.\Phi\cos.\Phi') - 2\,c^2(\tfrac{c'}{a} - 1)\sin.\Phi^2$$
$$- 2\,c'^2(\tfrac{c}{a} - 1)\sin.\Phi'^2 = 0,$$

pro $\cos.\Phi$, $\cos.\Phi'$, $\sin.\Phi^2$ et $\sin.\Phi'^2$ suffectis eorum valoribus, ad hanc pertingemus aequationem:

$$c\,c'(\tfrac{c+c'}{a} - 2)(2 - \cos.\delta - \cos.\varepsilon),$$
$$- c^2(\tfrac{c'}{a} - 1)(1 - \cos.\varepsilon\cos.\delta - \sin.\varepsilon\sin.\delta)$$
$$- c'^2(\tfrac{c}{a} - 1)(1 - \cos.\varepsilon\cos.\delta + \sin.\varepsilon\sin.\delta) = 0.$$

Ex hac autem aequatione deducitur,

$(c'-c)$

$$(c' - c)\,(a\,(c' + c) - c\,c')\,\text{sin.}\,\varepsilon\,\text{sin.}\,\delta$$
$$-c^2(c'-a)(1-\text{cos.}\delta\,\text{cos.}\varepsilon)-c'^2(c-a)(1-\text{cos.}\varepsilon\,\text{cos.}\delta)$$
$$+\,c\,c'\,(c + c' - 2\,a)\,(2 - \text{cos.}\,\delta - \text{cos.}\,\varepsilon) = 0$$

Iam ſi ad hanc aequationem ſimul addatur et inde ſubtrahatur

$$c\,c'\,(c + c' - 2\,a)\,(1 - \text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\delta),$$

erunt termini per $(1 - \text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\delta)$ multiplicati

$$-c^2\,(c'+a)\,(1-\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\delta)-c'^2\,(c+a)\,(1-\text{cos.}\varepsilon\,\text{cos.}\delta)$$
$$+\,c\,c'\,(c + c' - 2\,a)\,(1 - \text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\delta),$$

qui ergo contrahuntur in iſtum terminum

$$+\,a\,(c' - c)^2\,(1 - \text{cos.}\,\delta\,\text{cos.}\,\varepsilon),$$

deinde reliqui termini erunt

$$c\,c'\,(c+c'-2\,a)\,(2-\text{cos.}\delta-\text{cos.}\varepsilon-1+\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\delta)$$
$$= c\,c'(c+c'-2\,a)\,(1-\text{cos.}\delta)\,(1-\text{cos.}\,\varepsilon).$$

Hinc tota aequatio noſtra ſatis concinne hac ratione exprimetur:

$$(c'-c)(a(c'+c)-c\,c')\,\text{sin.}\delta\,\text{sin.}\,\varepsilon+a\,(c'-c)^2(1-\text{cos.}\delta\,\text{cos.}\varepsilon)$$
$$-\,c\,c'(2\,a-c'-c)(1-\text{cos.}\,\delta)(1-\text{cos.}\,\varepsilon)=0,$$

ex qua iam dato angulo δ, angulus ε inueſtigari poteſt et viciſſim.

§. 16. Hunc in finem aequatio noſtra ita euoluatur, vt illi termini ſeorſim tractentur qui incognitum angulum δ continent, quo facto erit

$$(c'-c)\,(a\,(c'+c)-c\,c')\,\text{sin.}\,\delta\,\text{sin.}\,\varepsilon-a\,(c'-c)^2\,\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\delta$$
$$+\,2\,c\,c'\,(2\,a-c'-c)\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\,\text{cos.}\,\delta+a\,(c'-c)^2$$
$$-\,2\,c\,c'(2\,a-c-c')\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2=0.$$

 Nunc

Nunc quaeratur angulus β vt sit

$$\frac{(c'-c)\,(a\,(c'+c)-c\,c')\,\text{sin.}\,\varepsilon}{2\,c\,c'\,(2\,a-c'-c)\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\varepsilon^2-a\,(c'-c)^2\,\text{cos.}\,\varepsilon}=\text{tang.}\,\beta \text{ et}$$

$$\text{M}=\frac{2\,c\,c'\,(2\,a-c-c')\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\varepsilon^2-a\,(c'-c)^2}{a\,c\,c'\,(2\,a-c-c')\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\varepsilon^2-a\,(c'-c)^2\,\text{cos.}\,\varepsilon},$$

eritque

$$\text{tang.}\,\beta\,\text{sin.}\,\delta+\text{cos.}\,\delta=\text{M}, \text{ hincque}$$
$$\text{cos.}\,(\delta-\beta)=\text{M}\,\text{cos.}\,\beta,$$

hinc quum detur M cos. β, cognoscetur cos. $(\delta-\beta)$, ex quo ob cognitum angulum β, dabitur angulus δ.

§. 17. Quum in superioribus sit

$$2\,c\,c'\,(c+c'-2\,a)\,(1-\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi')-2\,c^2\,(c'-a)\,\text{sin.}\,\Phi^2$$
$$-2\,c'^2\,(c-a)\,\text{sin.}\,\Phi'^2=0, \text{ ob}$$

$$2\,\text{sin.}\,\Phi^2=1-\text{cos.}\,2\,\Phi;\;\; 2\,\text{sin.}\,\Phi'^2=1-\text{cos.}\,2\,\Phi',$$

fiet

$$2\,c\,c'\,(c+c'-2\,a)\,(1-\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi')$$
$$-c^2\,(c'-a)\,(1-\text{cos.}\,2\,\Phi)-2\,c'^2\,(c-a)\,(1-\text{cos.}\,2\,\Phi'),$$

tumque quum sit $\Phi'=\varepsilon-\Phi$, erit

$$\text{cos.}\,\Phi'=\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\Phi+\text{sin.}\,\varepsilon\,\text{sin.}\,\Phi \text{ et}$$
$$\text{cos.}\,2\,\Phi'=\text{cos.}\,2\,\varepsilon\,\text{cos.}\,2\,\Phi+\text{sin.}\,2\,\varepsilon\,\text{sin.}\,2\,\Phi,$$

hinc prodibit ista aequatio:

$$0=2\,c\,c'\,(c+c'-2\,a)\,(1-\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\Phi^2-\text{sin.}\,\varepsilon\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi)$$
$$-c^2\,(c'-a)\,(1-\text{cos.}\,2\,\Phi)-c'^2\,(c-a)\,(1-\text{cos.}\,2\,\varepsilon\,\text{cos.}\,2\,\Phi-\text{sin.}\,2\,\varepsilon\,\text{sin.}\,2\,\Phi),$$

tum vero ob

2 cos.

$2 \cos.\phi^2 = 1 - \cos. 2\phi$, et $2 \sin.\phi \cos.\phi = \sin. 2\phi$, haec aequatio ita transformabitur:

$$cc'(c+c'-2a)(2-\cos.\varepsilon-\cos.\varepsilon\cos.2\phi-\sin.\varepsilon\sin.2\phi)$$
$$-c^2(c'-a)(1-\cos.2\phi)$$
$$-c'^2(c-a)(1-\cos.2\varepsilon\cos.2\phi-\sin.2\varepsilon\sin.2\phi)=0,$$

cuius aequationis ope nunc quidem angulus ϕ inuestigari potest, interim tamen aequatio supra allata pro hoc instituto commodior esse videtur. Denique subsidio aequationis §. 8. allatae, quae ob $e^2 = 1 - \frac{b}{a}$ in hanc abit:

$$(1-\tfrac{b}{a})\sin.2\delta^2 = b^2(\tfrac{1}{c^2}-\tfrac{2\cos.2\delta}{cc'}+\tfrac{1}{c'^2})$$
$$-2b(\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{c'})(1-\cos.2\delta)+2(1-\cos.2\delta),$$

valor ipsius b inuestigari potest, quod tamen non nisi operoso aliquantum labore praestabitur.

§. 18. Nunc igitur restat vt vsum formulae nostrae §. 16. allatae, exemplo illustremus. Supponamus itaque esse:

$$c' = 1{,}0738911,\quad c = 0{,}6871881,\quad a = 3{,}3019276$$

et angulum $\varepsilon = 95°, 49'. 38''$.

$c' = 1{,}0738911$	$L(c'+c) = 0{,}2457789$
$c = 0{,}6871881$	$La = 0{,}5187675$
$c'+c = 1{,}7610792$	$La(c'+c) = 0{,}7645464$
$c'-c = 0{,}3867030$	$a(c'+c) = 5{,}8149554$
$2a = 6{,}6038552$	$Lc' = 0{,}0309603$
$2a-c'-c = 4{,}8427760$	$Lc = 9{,}8370756$
	$Lc'c = 9{,}8680359$
	$L.\,2a-c-c' = 0{,}6850943$
	$Lcc'(2a-c-c') = 0{,}5531302$

$La =$

$$\mathrm{L}\, a = 0,5187675$$
$$\mathrm{L}\, (c' - c)^2 = 9,1747552$$
$$\mathrm{L}\, a\, (c' - c)^2 = 9,6935227$$
$$a\, (c' + c) = 5,8149554$$
$$c\, c' = 0,7379650$$
$$a(c' + c) - cc' = 5,0769904$$
$$2\, cc'\, (2\, a - c - c')\, \text{fin.}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = \mathrm{A}$$
$$a\, (c' - c)^2\, \text{cof.}\, \varepsilon = \mathrm{C}$$
$$a\, (c' - c)^2 = \mathrm{D}$$
$$\mathrm{A} = 3,9366445$$
$$\mathrm{D} = 0,4937677$$
$$\mathrm{A} - \mathrm{D} = 3,4428768$$
$$\mathrm{A} = 3,9366445$$
$$\mathrm{C} = -0,0501317$$
$$\mathrm{A} - \mathrm{C} = 3,9867762$$
$$\mathrm{L}\, (\mathrm{A} - \mathrm{D}) = 0,5369215$$
$$\mathrm{L}\, (\mathrm{A} - \mathrm{C}) = 0,6006218$$
$$\mathrm{L\, M} = 9,9362997$$
$$\mathrm{L}\, \text{cof.}\, \beta = 9,9532877$$
$$\mathrm{L}\, \text{cof.}(\delta - \beta) = 9,8895874$$

$$\mathrm{L}\, \text{fin.}\, \tfrac{1}{2}\varepsilon = 9,8704830$$
$$\mathrm{L}\, \text{fin.}\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 9,7409660$$
$$\mathrm{L}\, 2 = 0,3010300$$
$$\mathrm{L}\, cc'\, (2\, a - c - c') = 0,5531302$$
$$\mathrm{L}\, 2cc'\, (2a - c - c')\, \text{fin.}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 0,5951262$$
$$\mathrm{L}\, a\, (c' - c)^2 = 9,6935227$$
$$\mathrm{L}\, \text{cof.}\, \varepsilon = 9,0065899$$
$$\mathrm{L}\, a\, (c' - c)^2\, \text{cof.}\, \varepsilon = 8,7001126$$
$$\mathrm{L}\, a\, (c' + c) - c\, c' = 0,7056064$$
$$\mathrm{L}\, (c' - c) = 9,5873776$$
$$\mathrm{L}\, \text{fin.}\, \varepsilon = 9,9977500$$
$$\mathrm{L.B} = 0,2907340$$
$$\mathrm{L}\, (\mathrm{A} - \mathrm{C}) = 0,6006218$$
$$\mathrm{L}\, \text{tang.}\, \beta = 9,6901122$$

$$\beta = 26^\circ.\ 6'.\ 1'',91$$
$$\delta - \beta = 39.\ 8.\ 55,\ 35$$
$$\delta = 65.\ 14.\ 57,\ 26$$
$$\varepsilon = 95.\ 49.\ 38$$
$$\varepsilon + \delta = 161.\ 4.\ 35,\ 26$$
$$\varepsilon - \delta = 30.\ 34.\ 40,\ 74$$
$$\phi' = 80.\ 32.\ 17,\ 63$$
$$\phi = 15.\ 17.\ 20,\ 37$$

§. 19.

§. 19. Nunc pro inuestiganda excentricitate in subsidium vocare licebit formulam $e = \frac{c' - c}{c \cos. \phi - c' \cos. \phi'}$.

$L. c = 9,8370756$	$L. c' = 0,0309603$
$L. \cos. \phi = 9,9843509$	$L. \cos. \phi' = 9,2158740$
$L. c \cos. \phi = 9,8214265$	$L. c' \cos. \phi' = 9,2468343$
$c \cos. \phi = 0,6628671$	$L. (c' - c) = 9,5873776$
$c' \cos. \phi' = 0,1765364$	$L. (c \cos. \phi - c' \cos. \phi') = 9,6869317$
$c \cos. \phi - c' \cos. \phi' = 0,4863307$	$L. e = 9,9004459$
$1 + e \cos. \phi = 1,7670025$	$L. \cos. \phi = 9,9843509$
	$L. e \cos. \phi = 9,8847968$
$L. c = 9,8370756$	$L. (1 + e) = 0,2540987$
$L. (1 + e \cos. \phi) = 0,2472371$	$L. (1 - e) = 9,3114483$
$L. b = 0,0843127$	$L. (1 - e^2) = 9,5655470$
$L. (1 + e) = 0,2540987$	$L. b = 0,0843127$
$L. d = 9,8302140$	$L. a = 0,5187657$

Quum igitur valor pro a inuentus, cum eo satis bene congruat, quem in calculo supposuimus, id indicio est computum bene esse institutum.

§. 20. Problematibus modo allatis, quae potuissimum quidem occurrere solent, propter affinitatem materiae adhuc bina adiiciemus, licet inuestigatio orbitarum pro Planetis vel Cometis, rarius ad eadem perducere soleat.

Problema 5.

Si cognitis binis Planetae vel Cometae locis Heliocentricis, insuper detur semiaxis coniugatus orbitae in qua Astrum motum suum perficit, indolem huius orbitae indagare.

Si denominationes ſupra adhibitae retineantur, ſemiaxis autem coniungatus orbitae per f indigitetur, erit vti ex doctrina Sectionum Conicarum conſtat: $b = f\sqrt{(1 - e^2)}$, Quum igitur ſupra §. 15. inuenerimus:

$$\frac{c c' (\mathrm{coſ.}\,\Phi - \mathrm{coſ.}\,\Phi')}{c\,\mathrm{coſ.}\,\Phi - c'\,\mathrm{coſ.}\,\Phi'} = b = f\sqrt{(1 - e^2)} \text{ et } e = \frac{c' - c}{c\,\mathrm{coſ.}\,\Phi - c'\,\mathrm{coſ.}\,\Phi'},$$

erit quadratis vtrinque ſumtis:

$$c^2 c'^2 (\mathrm{coſ.}\,\Phi - \mathrm{coſ.}\,\Phi')^2 = f^2 (c\,\mathrm{coſ.}\,\Phi - c'\,\mathrm{coſ.}\,\Phi')^2 - f^2 (c' - c)^2$$

quae aequatio euolutione facta ita erit comparata:

$$\frac{c^2 c'^2}{f^2} (\mathrm{coſ.}\,\Phi^2 - 2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi\,\mathrm{coſ.}\,\Phi' + \mathrm{coſ.}\,\Phi'^2)$$
$$= + 2 c c' (1 - \mathrm{coſ.}\,\Phi'\,\mathrm{coſ.}\,\Phi) - c^2\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^2 - c'^2\,\mathrm{ſin.}\,\Phi'^2,$$

vnde iterum iſthaec deducitur,

$$2\left(1 - \frac{f^2}{c c'}\right)(1 - \mathrm{coſ.}\,\Phi\,\mathrm{coſ.}\,\Phi') - \left(1 - \frac{f^2}{c'^2}\right)\mathrm{ſin.}\,\Phi^2$$
$$- \left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)\mathrm{ſin.}\,\Phi'^2 = 0.$$

Si igitur vti in antecedentibus, ſtatuatur $\Phi' + \Phi = \varepsilon$ et $\Phi' - \Phi = \delta$, fiet

$$2\,\mathrm{coſ.}\,\Phi\,\mathrm{coſ.}\,\Phi' = \mathrm{coſ.}\,\delta + \mathrm{coſ.}\,\varepsilon, \text{ tumque}$$
$$2\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^2 = 1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon\,\mathrm{coſ.}\,\delta - \mathrm{ſin.}\,\varepsilon\,\mathrm{ſin.}\,\delta;$$
$$2\,\mathrm{ſin.}\,\Phi'^2 = 1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon\,\mathrm{coſ.}\,\delta + \mathrm{ſin.}\,\varepsilon\,\mathrm{ſin.}\,\delta,$$

his igitur valoribus ſubſtitutis noſtra aequatio in ſequentem abibit:

$$2\left(1 - \frac{f^2}{c c'}\right)(2 - \mathrm{coſ.}\,\delta - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon) - \left(1 - \frac{f^2}{c'^2}\right)(1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon\,\mathrm{coſ.}\,\delta - \mathrm{ſin.}\,\varepsilon\,\mathrm{ſin.}\,\delta)$$
$$\left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)(1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon\,\mathrm{coſ.}\,\delta + \mathrm{ſin.}\,\varepsilon\,\mathrm{ſin.}\,\delta) = 0,$$

quae etiam ſequenti modo repraeſentari poteſt:

$$0 = f^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c'^2}\right)\mathrm{ſin.}\,\varepsilon\,\mathrm{ſin.}\,\delta + 2\left(1 - \frac{f^2}{c c'}\right)(1 - \mathrm{coſ.}\,\delta)(1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$- \left(1 - \frac{f^2}{c'^2}\right)(1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon\,\mathrm{coſ.}\,\delta) - \left(1 - \frac{f^2}{c^2}\right)(1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon\,\mathrm{coſ.}\,\delta)$$
$$+ 2\left(1 - \frac{f^2}{c c'}\right)(1 - \mathrm{coſ.}\,\varepsilon\,\mathrm{coſ.}\,\delta),$$

vnde

vnde demum habetur

$$(c'^2 - c^2)\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,\delta + (c' - c)^2(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ 2cc'\left(\tfrac{cc'}{f^2} - 1\right)(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon) = 0.$$

Huius igitur aequationis ope, cognito angulo δ, angulus ε facile determinabitur.

§. 21. Ad aequationem modo allatam facile quoque pertingere licebit, ſi perpendatur aequationem §. adductam ſub huiusmodi forma repraeſentari poſſe:

$$-(c' - c)\,\text{ſin}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon + (c + c')(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$= \tfrac{2cc'}{b}(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon),$$

ſi igitur haec aequatio multiplicetur per cc' et ſubtrahatur ab aequatione finali §. 15. allata, reſiduum dabit:

$$a(c' + c)(c' - c)\,\text{ſin.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon + a(c' - c)^2(1 - \text{coſ.}\,\delta\,\text{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$- 2cc'\left(a - \tfrac{cc'}{b}\right)(1 - \text{coſ.}\,\delta)(1 - \text{coſ.}\,\varepsilon) = 0,$$

vnde ob $ab = f^2$, aequatio §. praecedenti allata ſtatim elicitur. Caeterum ſi cui volupe fuerit, loco anguli ε, alterutrum angulorum Φ vel Φ', vel potius eorum dupla inueſtigare, haud obſcurum eſſe poterit, quomodo in ſubſidium vocata aequatione:

$$2\left(1 - \tfrac{f^2}{cc'}\right)(1 - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi') - \left(1 - \tfrac{f^2}{c'^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi^2$$
$$- \left(1 - \tfrac{f^2}{c^2}\right)\text{ſin.}\,\Phi'^2 = 0,$$

iſtud negotium facile perficiatur.

Problema 6.

§. 22. *Datis binis Planetae vel Cometae locis Heliocentricis et diſtantia focorum in orbita, inuenire reliqua Elementa eiusdem orbitae.*

In-

Indigitetur nunc ſemiſſis diſtantiae focorum per litteram g, eritque vti ex Conicis conſtat $g = \frac{be}{1-e^2}$. Quum igitur ſit

$$b = \frac{cc'(\cos.\Phi - \cos.\Phi')}{c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi'} \text{ et } e = \frac{c'-c}{c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi'},$$

fiet his valoribus adhibitis

$$\frac{cc'}{g}(c'-c)(\cos.\Phi - \cos.\Phi') = (c\cos.\Phi - c'\cos.\Phi')^2 - (c'-c)^2$$

et facta euolutione:

$$\frac{cc'(c'-c)(\cos.\Phi - \cos.\Phi')}{g} = 2cc'(1 - \cos.\Phi\cos.\Phi')$$
$$- c^2 \sin.\Phi^2 - c'^2 \sin.\Phi'^2.$$

Si nunc vt ſupra ſtatuatur $\Phi' + \Phi = \varepsilon$; $\Phi' - \Phi = \delta$ fiet

$$\frac{4cc'(c'-c)}{g}\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin.\tfrac{1}{2}\delta = 2cc'(2 - \cos.\varepsilon - \cos.\delta)$$
$$- c^2(1 - \cos.\varepsilon\cos.\delta - \sin.\varepsilon\sin.\delta)$$
$$- c'^2(1 - \cos.\varepsilon\cos.\delta + \sin.\varepsilon\sin.\delta);$$

vnde colligitur

$$(c'^2 - c^2)\sin.\varepsilon\sin.\delta + (c'-c)^2(1 - \cos.\varepsilon\cos.\delta)$$
$$- 2cc'(1-\cos.\varepsilon)(1-\cos.\delta)$$
$$+ \frac{4cc'(c'-c)}{g}\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin.\tfrac{1}{2}\delta = 0.$$

Ad hanc autem aequationem etiam ope illius, quae §. 20. adhibita eſt, facile perueniettur; quum enim ſit

$$\frac{b}{e} = \frac{cc'(\cos.\Phi - \cos.\Phi')}{c'-c} = \frac{2cc'\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin.\tfrac{1}{2}\delta}{c'-c};$$

tumque ſit $f^2 = \frac{b^2}{1-e^2}$ et $g = \frac{be}{1-e^2}$, erit $\frac{b}{e} = \frac{f^2}{g}$, hincque

$$\frac{c-c'}{g} = \frac{2cc'\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin.\tfrac{1}{2}\delta}{f^2}.$$

Inde autem multiplicando vtrinque per $4cc'.\sin.\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin.\tfrac{1}{2}\delta$, fiet

fiet $\frac{4cc'(c'-c)}{g}$ fin. $\frac{1}{2}\varepsilon$ fin. $\frac{1}{2}\delta = \frac{8c'^2c^2}{f^2}$ fin. $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ fin. $\frac{1}{2}\delta^2$

$$= \frac{2c^2c'^2}{f^2}(1-\text{cof.}\,\varepsilon)(1-\text{cof.}\,\delta).$$

Quum igitur §. 20. inuenerimus:

$$(c'^2-c^2)\,\text{fin.}\,\varepsilon\,\text{fin.}\,\delta + (c'-c)^2(1-\text{cof.}\,\varepsilon\,\text{cof.}\,\delta)$$
$$+2cc'\left(\frac{cc'}{f^2}-1\right)(1-\text{cof.}\,\delta)(1-\text{cof.}\,\varepsilon)=0,$$

inde colligitur vti fupra habuimus:

$$(c'^2-c^2)\,\text{fin.}\,\varepsilon\,\text{fin.}\,\delta + (c'-c)^2(1-\text{cof.}\,\varepsilon\,\text{cof.}\,\delta)$$
$$-2cc'(1-\text{cof.}\,\varepsilon)(1-\text{cof.}\,\delta)$$
$$+\frac{4cc'(c'-c)}{g}\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta=0,$$

cuius ope dato angulo ε, angulus δ inueftigari debet.

§. 23. Facile autem perfpicitur aequationem huic negotio inferuientem, fi ad formam algebraicam reducatur, quarti effe gradus, ideoque quatuor omnino folutiones admittere, vbi tamen fieri poteft, vt illarum folutionum non nifi binae ad valores deducant reales. Caeterum ita commodiffime aequatio noftra refolui poffe videtur, vt concipiamus eam exortam effe ex multiplicatione binarum huiusmodi expreffionum:

$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\delta + m\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + n = 0 \quad \text{et}$$
$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\delta + m'\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + n' = 0.$$

Hinc enim orietur productum:

$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2 + (m+m')\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\delta\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + mm'\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2$$
$$+(n+n')\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\delta + (mn'+m'n)\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta + nn' = 0,$$

fiue ob

$$2\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2 = 1+\text{cof.}\,\delta;\quad 2\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta^2 = 1-\text{cof.}\,\delta;$$
$$2\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\delta\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\delta = \text{fin.}\,\delta;$$

$$1 + m m' + (1 - m m') \operatorname{cof.} \delta$$
$$+ (m + m') \operatorname{fin.} \delta + 2 (n + n') \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} \delta$$
$$+ 2 (m n' + m' n) \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} \delta + 2 n n' = 0.$$

Quum vero in aequatione propofita nullibi occurrat $\operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} \delta$, ftatim perfpicitur fore $n' = -n$, vnde iftud productum hanc nancifcetur formam:

$$(1 - m m') \operatorname{cof.} \delta + (m + m') \operatorname{fin.} \delta + 2 n (m' - m) \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} \delta$$
$$+ 1 + m m' - 2 n^2 = 0.$$

Quum igitur ex aequatione modo allata fit:

$$\operatorname{fin.} \delta + \frac{2 c c' - (c'^2 + c^2) \operatorname{cof.} \varepsilon \operatorname{cof.} \delta}{(c'^2 - c^2) \operatorname{fin.} \varepsilon} + \frac{2 c c'. \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} \delta}{g (c' + c) \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} \varepsilon}$$
$$+ \frac{(c' - c)}{(c' + c) \operatorname{fin.} \varepsilon} - \frac{4 c c'}{c'^2 - c^2} \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} \varepsilon = 0,$$

hinc fiet

$$\frac{1 - m m'}{m + m'} = \frac{2 c c' - (c'^2 + c^2) \operatorname{cof.} \varepsilon}{(c'^2 - c^2) \operatorname{fin.} \varepsilon};$$
$$\frac{2 n (m' - m)}{m' + m} = \frac{2 c c'}{g (c' + c) \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} \varepsilon}$$
$$\frac{1 + m m' - 2 n^2}{m' + m} = \frac{c' - c}{(c' + c) \operatorname{fin.} \varepsilon} - \frac{4 c c'}{c'^2 - c^2} \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} \varepsilon,$$

quarum aequalitatum ope, quantitates incognitae m, m', n determinandae funt.

§. 24. Breuitatis gratia defignentur quantitates datae:

$$\frac{2 c c' - (c'^2 + c^2) \operatorname{cof.} \varepsilon}{(c'^2 - c^2) \operatorname{fin.} \varepsilon}; \quad \frac{2 c c'}{g (c' + c) \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} \varepsilon};$$
$$\frac{c' - c}{(c' + c) \operatorname{fin.} \varepsilon} - \frac{4 c c'}{c'^2 - c^2} \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} \varepsilon$$

re-

respectiue per litteras λ, $2\,\mu$, ν eritque:

$$\frac{1-m\,m'}{m+m'}=\lambda;\ \frac{n(m'-m)}{m'+m}=\mu;\ \frac{1+m\,m'-2n^2}{m'+m}=\nu;$$

hinc si ad primam harum aequationum addatur vltima prodibit:

$$2(1-n^2)=(\lambda+\nu)(m'+m),\ \text{hinc}\ n^2=1-(\lambda+\nu)\frac{(m'+m)}{2},$$

at ex aequalitate secunda est

$$n^2=\frac{\mu^2(m'+m)^2}{(m'-m)^2},\ \text{hincque fit}$$

$$\frac{\mu^2(m'+m)^2}{(m'-m)^2}=1-(\lambda+\nu)\frac{(m'+m)}{2};$$

et quum sit

$$m'm=\tfrac{1}{4}(m'+m)^2-\tfrac{1}{4}(m'-m)^2$$

hoc valore in aequatione prima substituto, erit

$$4-(m'+m)^2+(m'-m)^2=4\lambda(m+m'),$$

ideoque

$$4+(m'-m)^2=(m'+m)^2+4\lambda(m+m'),$$

at in superioribus erat

$$\frac{(m'-m)^2}{\mu^2}=(m'+m)^2+\frac{(\lambda+\nu)(m'-m)^2}{2\mu^2}(m'+m),$$

hinc demum colligitur

$$(m+m')\left(4\lambda-\frac{(\lambda+\nu)(m'-m)^2}{2\mu^2}\right)=4+(m'-m)^2\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right),$$

et substituto valore ipsius $m+m'$, prodibit aequatio tertii gradus, quae solam incognitam $m'-m$ inuoluit. Concinnius autem ad huiusmodi aequationem sequenti ratione perueniemus: quum sit

$$4\,m'm=(m'+m)^2-(m'-m)^2\ \text{erit}$$

$$4-4\,m\,m'=4-(m'+m)^2+(m'-m)^2=4\lambda(m'+m),$$

deinde ob $m'-m=\frac{\mu(m'+m)}{n}$, hoc valore substituto, colligitur:

$$4 - (m' + m)^2 + \frac{\mu^2 (m' + m)^2}{n^2} = 4\lambda (m' + m),$$

hineque

$$\mu^2 (m' + m)^2 + n^2 (4 - (m' + m)^2 - 4\lambda (m' + m)) = 0,$$

atqui ob

$$2(1 - n^2) = (\lambda + \nu)(m' + m), \text{ erit } n^2 = 1 - \frac{(\lambda + \nu)}{2}(m' + m),$$

vnde demum fiet

$$\mu^2 (m' + m)^2 + \left(1 - \frac{(\lambda + \nu)}{2}(m' + m)\right)(4 - (m' + m)^2 - 4\lambda (m' + m)) = 0,$$

quae euoluta praebet:

$$\left(\frac{\lambda + \nu}{2}\right)(m' + m)^3 + (m' + m)^2 (\mu^2 - 1 + 2\lambda (\lambda + \nu))$$
$$- (m' + m)(6\lambda + 2\nu) + 4 = 0,$$

fiue pofito $\frac{m' + m}{2} = q$;

$$(\lambda + \nu) q^3 + q^2 (\mu^2 - 1 + 2\lambda (\lambda + \nu)) - q (3\lambda + \nu) + 1 = 0,$$

cuius tamen aequationis refolutionem vlterius profequi inutile foret.

§. 25. Quemadmodum refolutio Problematis vltimo loco allati, per refolutionem aequationis biquadraticae abfoluitur, ita facile perfpicitur reliquorum Problematum folutiones, in terminis Algebraicis expreffas ad aequationes quadraticas reduci; ideoque fingulas harum folutionum duplices dari, quas quemadmodum comparatas effe oportet, nunc accuratius expendere haud inutile erit, quum id in praecedentibus plane fit praetermiffum. Quod igitur attinet problema Primum, ftatim patet pro angulo $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$ duplicem emergere valorem ex formula

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi) \cdot \frac{b(c' - c)}{b(c' + c) - 2cc'},$$

fi

ſi enim ponatur

$$\text{tang.}\ \zeta = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi)\ \frac{b(c'-c)}{b(c'+c)-2cc'},$$

erit $\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi)$ vel $= \zeta$, vel $= 180 + \zeta$, pro exemplo §. 5. allato priorem iam conſiderauimus ſolutionem, pro altera autem erit:

$$\tfrac{1}{2}(\Phi' + \Phi) = 217°.\ 7'.12'',3;\ \text{hinc}\ \Phi' = 261°.58'.46'',3$$
$$\tfrac{1}{2}(\Phi' - \Phi) = 44.\ 51.\ 34. \qquad \Phi = 172.\ 15.\ 38,\ 3$$

valor autem pro e hinc deducendus cum priori prorſus conſentit, niſi quod negatiuum accipiat valorem, quod indicat angulos anomaliarum ab Aphelio eſſe computatos, ideoque haec ſolutio a priori nihil prorſus diſcrepat.

§. 26. In Problemate autem ſecundo, dum inuentus fuerit $-\text{coſ.}(\varepsilon + \eta) = \frac{\text{coſ.}\,\eta}{e\,\text{coſ.}\,\delta}$, ſi ſtatuatur $\text{coſ.}\ \zeta = \frac{\text{coſ.}\,\eta}{e\,\text{coſ.}\,\delta}$, erit $\varepsilon + \eta$ vel $= 180 - \zeta$, vel $= 180 + \zeta$, in exemplo §. 9. allato priorem horum caſuum contemplauimus, pro poſteriori vero erit:

$\varepsilon + \eta = 247.\ 17.\ 39,\ 2$	$\text{L.}\ e = 9,9500000$
$\eta = 75.\ 51.\ 11,\ 6$	$\text{L. coſ.}\ \Phi' = 9,9070170$
$\varepsilon = 171.\ 26.\ 27,\ 6$	$\text{L.}\ e\ \text{coſ.}\ \Phi' = 9,8570170$
$\delta = 44.\ 43.\ 45,\ 5$	$e\ \text{coſ.}\ \Phi' = -0,7194772$
$\Phi' = 216.\ 10.\ 13,\ 1$	$1 + e\ \text{coſ.}\ \Phi' = +0,2805228$
$\Phi = 126.\ 42.\ 42,\ 1$	$\text{L.}\ c' = 0,0476478$
	$\text{L.}(1 + e\ \text{coſ.}\ \Phi) = 9,4479681$
	$\text{L.}\ b = 9,4956159$

haec igitur ſolutio a priori prorſus diuerſa eſt. Quod Problema Tertium attinet, binae ſolutiones illi ſatisfacientes ad eandem reducuntur, id quod ex valore pro tang. $\frac{1}{4}(\Phi' + \Phi)$

mox patet; verum de valore quem ibi pro excentricitate attulimus, vix obuium esse poterit, eundem non nisi vnicam admittere determinationem. Perspicuum autem idem mox fiet, si quaeramus valorem ipsius $\frac{e}{b}$ ope formulae

$$\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\operatorname{cos}.\Phi}\right)=\frac{e}{b},\ \text{siue}\ \frac{b}{e}=\frac{1-\operatorname{cos}.\Phi}{\frac{1}{d}-\frac{1}{c}}.$$

Quum enim esset

$$\operatorname{cot}.\tfrac{1}{2}\Phi=\frac{\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'}{\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha\operatorname{sin}.\delta}-\operatorname{cot}.\delta,\ \text{fiet}$$

$$\frac{\operatorname{cot}.\frac{1}{2}\Phi^2-1}{\operatorname{cot}.\frac{1}{2}\Phi^2+1}=\operatorname{cos}.\Phi=\frac{\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'^2-2\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha\operatorname{cos}.\delta+\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha^2\operatorname{cos}.2\delta}{\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'^2-2\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha\operatorname{cos}.\delta+\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha^2},$$

hinc

$$1-\operatorname{cos}.\Phi=\frac{\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha^2(1-\operatorname{cos}.2\delta)}{\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'^2-2\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha\operatorname{cos}.\delta+\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha^2},$$

hinc ob

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=\frac{1}{d}\left(1-\frac{d}{c}\right)=\frac{1}{d}(1-\operatorname{cos}.\alpha)=\frac{2\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha^2}{d},\ \text{fiet}$$

$$\frac{e}{b}=\frac{1}{d}\left(1-\frac{d}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\operatorname{cos}.\Phi}\right)$$

$$=\frac{2}{d}\,\frac{(\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'^2-2\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha'\operatorname{cos}.\delta+\operatorname{sin}.\frac{1}{2}\alpha^2)}{1-\operatorname{cos}.2\delta}.$$

Inuento igitur per hanc aequationem $\frac{e}{b}$, ob $\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{e}{b}$, innotescet quoque $\frac{1}{b}$.

§. 27. Problema Quartum binas iterum admittit solutiones, quum enim inuentus sit $\operatorname{cos}.(\delta-\beta)=M\operatorname{cos}.\beta$, si ponatur $M\operatorname{cos}.\beta=\operatorname{cos}.\mu$, erit $\delta-\beta$ vel $=\mu$, vel $=-\mu$, priorem casum in exemplo §. 18. allato considerauimus. Verum enimuero si ponatur:

$\beta-$

$$\begin{array}{rl}
\beta-\delta = & 39^\circ.\ 8'.55'',35 \\
\text{ob}\quad \beta = & 26.\ 6.\ 1,\ 91 \\
\text{fiet}\quad \delta = & -13.\ 2.\ 53,\ 44 \\
\varepsilon = & \underline{95.\ 49.\ 38,\ 00} \\
\varepsilon+\delta = & 82.\ 46.\ 44,\ 56 \\
\varepsilon-\delta = & 108.\ 52.\ 31,\ 44 \\
\phi' = & 41.\ 23.\ 22,\ 28 \\
\phi = & 54.\ 26.\ 15,\ 72
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{L. } e = & 9,9788434 \\
\text{L. cos}\,\phi = & 9,7646151 \\
\text{L. cos}\,\phi' = & \underline{9,8751957} \\
\text{L. } e \text{ cos}\,\phi = & 9,7434585 \\
\text{L. } e \text{ cos}\,\phi' = & 9,8540391
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{L. } c = & 9,8370756 \\
\text{L.}(1+e\,\text{cos}.\phi) = & \underline{9,6493986} \\
\text{L. } b = & 9,4864742
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{L. } c = & 9,8370756 \\
\text{L. cos}\,\phi = & \underline{9,7646151} \\
\text{L. } c \text{ cos}\,\phi = & 9,6016907 \\
\text{L. } c' = & 0,0309603 \\
\text{L. cos}\,\phi' = & \underline{9,8751957} \\
\text{L. } c' \text{ cos}\,\phi' = & 9,9061560 \\
c' \text{ cos}\,\phi' = & 0,8056676 \\
c \text{ cos}\,\phi = & \underline{0,3996600} \\
& 0,4060076 \\
\text{L. } (c'-c) = & 9,5873776 \\
\text{L } (c'\text{cos}.\phi' - c\,\text{cos}.\phi) = & \underline{9,6085342} \\
\text{L. } e = & 9,9788434 \\
\text{L. } c' = & 0,0309603 \\
\text{L.}(1+e\,\text{cos}.\phi') = & \underline{9,4555137} \\
\text{L. } b = & 9,4864740 \\
\text{L. } (1+e) = & 8,6771286 \\
\text{L. } (1-e) = & \underline{0,2905804} \\
& 8,9677090 \\
\text{L. } a = & 0,5187650
\end{array}$$

Denique Problema Quintum quoque binas suppeditabit solutiones, quippe quum in hoc Problemate aequatio determinando angulo δ inseruiens eiusdem plane sit formae, ac illa, qua hic angulus in Problemate Quarto determinatur.

§. 28.

§. 28. Praeter Problemata modo commemorata, varia quoque alia tradi possunt, quorum solutiones cum praecedentibus affinitatem quandam habent. Ex hoc genere istud est Problema, quo quaeritur orbita Cometae vel Planetae per bina eius loca data transiens, et in qua semiparameter per excentricitatem diuisa cognita habetur, cuius omnino facilis est solutio per formulam §. 22. traditam, qua erat $\frac{b}{e} = \frac{2\,c\,c'\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\delta\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\varepsilon}{c' - c}$. Verum quum hoc et alia eiusdem generis Problemata vix vnquam in Astronomia occurrere soleant, invtile esset iisdem vlterius explicandis, operam impendere. Multo autem maiorem attentionem meretur Problema, quo ex datis binis Planetae vel Cometae locis Heliocentricis, et dato temporis interuallo inter momenta quo Astrum in his locis versatum fuerit, quaeritur vera eiusdem Astri orbita. At tamen siquidem in genere supponatur hanc orbitam ad Sectiones Conicas pertinere et speciatim inter Ellipses referendam esse; notum est, tempus quod dato angulo anomaliae respondet, non nisi transcendenter ope huius anomaliae determinari, vnde resolutio huius Problematis non nisi per series infinitas praestari poterit.

§. 29. Occasione data nunc quoque solutiones Geometricas nonnullorum Problematum in superioribus propositorum adiungere placet, quippe quod huic materiae illustrandae non parum inseruiet. Nunc igitur propositum
Tab. XI. Fig. 4. istud sit Problema; quo datis binis punctis sectionis conicae M, N, foco F et semiparametro principali, quaeruntur reliqua sectionis Elementa. Heic vero mox liquet omne negotium eo redire, vt situs axis principalis F T U indagetur,

getur, quippe quo inuento determinatio alterius foci et reliquorum Elementorum nullam habebit difficultatem. Supponamus igitur iam inuentam esse directionem axis F T U, sumtisque M V, N X semiparametro principali aequalibus, ducantur rectae V T, X U, istis M F, N F normales, quae axi in punctis T et U occurrant; tum vero ducta supponatur T Y normalis ad N F et ipsi U X parallela, et iungantur M T, N U. Quia igitur M V aequalis semiparametro principali, et V T normalis ad V M, erit iuncta T M normalis ad Sectionem Conicam in puncto M. Simili quoque ratione erit U N normalis ad Sectionem Conicam in puncto N. Tum vero si puncta M, N iuncta supponantur cum altero foco f, patet per ea quae in conicis demonstrantur, angulos F M f, F N f bisecari per rectas M T, N U, vnde fiet $MF : TF = MF + Mf : Ff = FN + fN : Ff = NF : UF$. Atqui est $UF : TF = XF : YF$, hinc erit $NF : MF = XF : YF$, quum igitur dentur N F, M F, X F, dabitur Y F, ideoque punctum Y, hinc recta Y F normalis ad N F, ideoque punctum T in quo rectae V T, Y T se intersecant.

§. 30. Solutio Problematis igitur ita componetur, vt per X ducatur linea X Z ipsi N M parallela, tum vero centro F interuallo F Z, resecetur F Y, et ducatur Y T normalis ad N F, et V T normalis ad M F, harum rectarum intersectio T cum puncto F iuncta, dabit axin principalem orbitae. Ex constructione enim allata patet esse $YF : XF = MF : NF$, hinc $TF : UF = MF : NF$ et alternando $TF : MF = UF : NF$, ex quo patet esse $TF : MF$ in data ratione, hincque colligitur axem principalem sectionis conicae cum linea F T U coincidere, si ea quae in § praecedenti allata sunt in vsum vocentur. Caeterum si ad rigorem Geometricum huius demonstrationis quidquam desideretur, illi defectui supplendo scrupulosius non est vt inuigilemus, quia mox aliam constructionem huius Problematis adferemus; praemisso nimirum Theoremate quodam Geometrico admodum eleganti ab Ill. *Eulero* primum inuento.

Theorema Geometricum.

Tab. XI. Fig. 3. §. 31. *Si ex foco* F *sectionis conicae erigatur ad axem principalem* A B *normalis* F E, *qui curuae occurrit in* E, *et si insuper ex foco ad curuam ductae fuerint lineae quaecunque* F M, F N, *tumque linea* N M *producatur, vsque dum lineae* F E, *si opus est productae, occurrat in* P *et ex* P *in lineam* F L, *quae angulum* M F N *bisecat, ducatur normalis* P R *ipsis* F M, F N *in* m, n *occurrens, erit* F m = F n, *aequalis semiparametro principali Sectionis conicae.*

Cum hoc Theorema Geometricum variis quidem rationibus demonstrari possit, tum illam praecipue demonstrationem heic adferre constituimus, quae maxime concinna videtur. Si igitur supponantur ductae Lineae M T, N U ad sectionem conicam normales, quae axi principali in punctis T et U occurrant, tumque U X, T V normales ad rectas F N, F M; simili ratione ac supra demonstrabitur esse M V = N X aequalis semiparametro principali et F T : F M = F U : F N. Deinde si ex punctis M et N in rectam F P normales demittantur M I, N K erit

Fig. 4

Δ I M F

$$\Delta\, I M F \sim V F T \text{ et } K N F \sim F X U, \text{ hinc}$$

$$I M : F V = F M : F T = F N : F U = K N : F X,$$

ideoque $I M : K N = F V : F X$, tumque

$$P M : P N = F V : F X = F M - E F : F N - E F, \text{ ob}$$

$$M V = E F = N X.$$

Porro ſi concipiatur recta $N S$ ipſi $F M$ parallela, erit angulus $N S n = F M n = F n m = N n S$ hincque $N S = N n$. Nunc vero eſt ob $M m$ parallelam ipſi $N S$,

$$P M : P N = M m : N S = M m : N n = F M - F m : F N - F n$$

ideoque fiet

$$F M - F E : F N - F E = F M - F m : F N - F n,$$

quamobrem oportet eſſe $F E = F m = F n$.

§. 32. Hinc igitur Problematis noſtri Primi ſequens elicitur conſtructio: centro F, radio $F E =$ ſemiparametro principali, reſecentur $F m = F n$, tum vero ducta recta $n m P$ quae ipſi $N M$ productae in P occurrat, ſi iungatur $P F$, ad eamque perpendicularis erigatur $A F B$, coincidet haec recta cum ſemiaxe principali ſectionis conicae. Vnde quum ſectionis conicae detur focus, ſemiparameter principalis, et axis principalis poſitione cognitus ſit, ipſa conſtructio obuia eſt. Ex Theoremate enim praecedente liquet, nullam aliam rectam per F ductam praeter illam $A F B$ pro axe principali haberi poſſe.

§. 33. Progrediamur nunc ad Problema noſtrum ſecundum, quod more Geometris vſitato expreſſum poſtulat, vt datis ſectionis conicae foco et binis in illa punctis, deſcribatur ſectio conica per data illa puncta tranſiens et quae specie sit cognita. Quum enim per excentricitatem intelligamus proportionem inter distantiam focorum et semiaxem principalem; si haec excentricitas supponatur data, species sectionis conicae omnino erit cognita, omnes enim sectiones conicae eadem excentricitate praeditae prorsus inter se sunt similes. Huius Problematis solutio quum iterum eo reducatur vt situs axis principalis A F B inuestigetur; supponamus hunc axem esse ductum eiusque verticem A, tum in F A producta sumatur A D : A F, vti axis principalis ad distantiam focorum et per D concipiatur D H G normalis ad axem principalem, tumque ex punctis M, N, in rectam D G ducantur perpendiculares M G, N H. Quum itaque in conicis demonstretur esse

Tab. XI Fig. 3.

$$G M : F M = H N : F N = D A : A F,$$

nunc Problematis constructio obuia fiet; nam ob datas F M, F N, dabuntur magnitudine M G, N H, ideoque dabitur positione linea G D, quippe quae tanget binos circulos centris M, N et interuallis M G, N H descriptos; hinc dabitur linea D B normalis ad G B, eritque ipse axis principalis super hac linea situs. Constructio hinc deducenda prorsus coincidet cum illa, quam in Principiis Phil. Nat. Illustris *Newtoni* Lib. I. Sect. IV. Prop. XX. Cas. 1, allatam inuenimus.

§. 34. Nunc igitur aliam quoque solutionem subiungere haud superfluum erit. Quum itaque sit

$$\Delta\, F I M \infty V F T, \text{ erit } I M : M F = V F : F T,$$

hinc alternando $I M : V F = M F : F T$, est vero

$$V F = M F - E F = M F - F m,$$

per Theorema supra demonstratum, ideoque

I M

$$I M : M m = M F : T F$$

in ratione data. Porro ob

$$\text{ang. } F M N = M P m + F m R \text{ et}$$

$$\text{ang. } F N P = \text{ang. } N n S - \text{ang. } M P m = F n R - M P m,$$

fiet

$$F M N - F N P = 2 M P m,$$

ideoque dabitur angulus

$$M P m = \tfrac{1}{2}(F M N - F N P),$$

praeterea quum detur angulus $P M m$, triangulum $P M m$ erit ſpecie datum, hincque ratio $P M : M m$ erit data, tum vero ob datam rationem $I M : M m$; dabitur ratio $P M : I M$ in triangulo ad I rectangulo, hincque dabitur angulus $P M I$ et recta $I M$ erit poſitione data, nec non $A F B$, quae priori eſt parallela.

§. 35. Conſtructio autem Problematis hinc deducenda, ita commodiſſime abſoluitur: vt ſumta pro lubitu linea $P M$ ſuper ea deſcribatur ſemicirculus, tumque in illo aptetur linea $M I$, quae ad $P M$ datam habeat rationem, hoc eſt vt ſit

$$I M : P M = \frac{I M}{M m} \cdot \frac{M m}{P M} = \frac{\text{ſin. } M P m}{e \text{ ſin. } P m M}$$

$$= \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2}(F M N - F N M)}{e \text{ coſ. } M F L} = \frac{\text{coſ. } M L F}{e \text{ coſ. } M F L},$$

deinde vero ducatur linea $A F B$ ipſi $M I$ parallela, eritque axis principalis ſectionis conicae (vti ex praecedentibus conſtat) ſitus ſuper hac linea $A F B$. Vel etiam conſtructio Problematis ſequentem in modum adornari poteſt:

$$\text{Ob ſin. } M P F = \frac{I M}{P M} = \frac{\text{ſin. } M P m}{e \text{ ſin. } P m M}$$

 dabi-

dabitur angulus M P F, hincque super M F describatur segmentum circuli quod anguli $=$ M P F capax est, recta N M producta isti segmento occurrens in P, dabit lineam F P ideoque axem A F B ipsi F P perpendicularem.

§. 36. Si vt supra ducta intelligatur recta D H normalis ad D B, quae M N productae in Q occurrit, et M I producta concipiatur vsque ad G, tumque iungatur recta Q F, erit Q M : G M $=$ P M : I M et

$$GM : MF = IM : Mm = 1 : e;$$

hinc ex aequo Q M : M F $=$ P M : M m ex quo liquet rectam Q F fore ipsi P R parallelam et normalem ad F L, vnde dabitur punctum Q. Porro erit

$$\frac{GM}{QM} = \frac{IM}{PM} = \frac{IM}{Mm} \cdot \frac{Mm}{PM} = \frac{1}{e} \cdot \frac{FM}{QM},$$

hincque G M $= \frac{FM}{e}$, vnde ista deducitur constructio, super Q M describatur semicirculus, in quo aptetur G M : M F $= 1 : e$, inuenietur situs axis principalis ducendo per F lineam D B ipsi G M parallelam, atque haec quidem constructio illa a *Newtono* proposita aliquanto facilior esse videtur.

§ 37. Operae pretium nunc quoque erit, vt ostendamus quomodo Analysis nostra in superioribus §. 7. allata, ad hanc perducat constructionem. Quia igitur ibi

Fig. 3 habebatur tang. $\eta =$ tang. $\delta . \frac{1+e}{1-e}$, adplicatione ad nostram Figuram facta, erit

$$\cot. LPR = \cot. \tfrac{1}{2}(FMN - FNM)$$
$$= \text{tang. } MFL \frac{(FN + FM)}{FN - FM},$$

hinc L P R $= 90 - \eta$. Porro quum sit

— cos.

$- \cos. (\varepsilon + \eta) = \frac{\cos. \eta}{e \cos. \delta}$, fiet

$$\sin. (A F L - L P R) = \frac{1}{e} \cdot \frac{\sin. L P R}{\cos. M F L} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\sin. L P R}{\sin. P m M} = \frac{1}{e} \frac{M m}{P M},$$

nunc vero eſt

$$\sin. (A F L - L P R) = \sin. (90 + P F L - L P R)$$
$$= \sin. (180 - F P R - L P R) = \sin. F P M,$$

ideoque $\frac{I M}{P M} = \frac{1}{e} \cdot \frac{M m}{P M}$, hincque $e = \frac{M m}{I M}$, quod omnino conſentit cum iis, quae ſupra demonſtrauimus.

§. 39. Problematis tertii ſolutionem quandam Geometricam ſatis concinnam quum adepti non fuerimus; ad Problema quartum progrediamur, pro quo ſolutio Geometrica admodum facilis et vnicuique fere obuia ſtatim occurrit. Scilicet quum ibi quaeratur ſectio conica datum habens focum, per bina puncta data tranſiens, et cuius axis principalis etiam magnitudine ſit datus, quia in Elementis Sectionum conicarum demonſtratur, binas rectas F M, f M ex focis F, f ſectionis conicae ad quodvis eius punctum M ductas, ſimul ſumtas aequales eſſe axi principali ſectionis, ob datas F M, F N et ſummas F M + f M, F N + f N, dabuntur itidem rectae fM, fN, ideoque punctum f ſeu alter focorum, qui nimirum definietur interſectione binorum circulorum centris M, N et interuallis datis M f, N f deſcriptorum.

§. 39. Quum ſolutio Problematis quarti Geometrica tam facile expediatur, ſingulare forſan videri poſſet, quod ſolutio per Analyſin perficienda aliquanto abſtruſior videatur. Verum enim vero ſi ipſam hanc ſolutionem Geometricam attente perpendamus, facile patebit ſolutionem

nem Analyticam ex ea deriuandam vix facilius adornari posse, ac §. 15 praestitimus. Id enim hic agitur, vt datis pro quadrilatero $FMfN$, singulis lateribus, FM, Mf, FN, Nf, cum angulo MFN, quaeratur angulus quem alterutrum laterum MF, NF cum diagonali Ff constituit; cuius Problematis solutio expeditiorem solutionem admittere non videtur, ac illa quae §. 15 allata est. Immo quia in hoc casu speciali Problematis propositi, summa laterum $FM + Mf = FN + Nf$, solutio Problematis eo ipso aliquanto fit concinnior, quam si nulla huiusmodi laterum relatio supponeretur.

Tab. XI. Fig. 5.

§. 40. Problematis sexti quum quatuor omnino habeantur solutiones, constructionem Geometricam per rectam et circulum non admittit, verum descriptiones linearum secundi generis seu sectionum conicarum requirit; et quidem mox liquet, si focis M, N et axi principali $= FN - FM$ describatur hyperbola, tumque centro F radio Ff, circulus, intersectiones huius circuli cum ista hyperbola, praebere puncta in quibus alterum focum sectionis quaesitae statuere oportet. Hinc si eueniat, vt iste circulus hyperbolam in quatuor punctis intersecet, Problematis quatuor omnino erunt solutiones; at si binae tantum dentur intersectiones solutionum realium numerus binarium non excedet, reliquis duobus in imaginarias abeuntibus.

§. 41. Antequam huic disquisitioni finem imponamus, monuisse nonnulla attinet de solutione Problematis II^{di}, casu quo excentricitas supponatur $= 1$, id est si sectio conica fuerit Parabola. Tum vero fiet

$c(1 +$

$$c\,(1 + \text{cos}.\,\Phi) = c'\,(1 + \text{cos}.\,\Phi'),$$

hincque

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c'}} = \frac{\text{cos}.\,\frac{1}{2}\Phi'}{\text{cos}.\,\frac{1}{2}\Phi}, \text{ nec non}$$

$$\frac{\text{cos}.\,\frac{1}{2}\Phi - \text{cos}.\,\frac{1}{2}\Phi'}{\text{cos}.\,\frac{1}{2}\Phi + \text{cos}.\,\frac{1}{2}\Phi} = \frac{\sqrt{c'} - \sqrt{c}}{\sqrt{c'} + \sqrt{c}}, \text{ siue}$$

$$\text{tang}.\,\tfrac{1}{4}(\Phi' - \Phi)\,\text{tang}.\,\tfrac{1}{4}(\Phi' + \Phi) = \frac{\sqrt{c'} - \sqrt{c}}{\sqrt{c'} + \sqrt{c}},$$

ideoque si statuatur $\sqrt{\frac{c}{c'}} = \text{cos}.\,\lambda$ fiet

$$\text{tang}.\,\tfrac{1}{4}(\Phi' - \Phi)\,\text{tang}.\,\tfrac{1}{4}(\Phi' + \Phi) = \frac{1 - \text{cos}.\,\lambda}{1 + \text{cos}.\,\lambda} = \text{tang}.\,\tfrac{1}{2}\lambda^2,$$

proinde

$$\text{tang}.\,\tfrac{1}{4}(\Phi' + \Phi) = \text{cot}.\,\tfrac{1}{4}(\Phi' - \Phi)\,\text{tang}.\,\tfrac{1}{2}\lambda^2$$

DETERMINATIO LATITVDINIS ET LONGITVDINIS VRBIS OREL, DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS ANNO 1781 HABITIS.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Perficiendae Geographiae Russicae, quae nostris diebus nouam induit faciem, annuit AVGVSTISSIMA IMPERATRIX, vt mitterentur obseruatores ad determinandum situm locorum magni EIVS imperii celebriorum. Inter haec prima statio vrbis Orel, quae iacet ad fluuium Ocam et distat a fonte ipsius 73 werstis, mihi erat constituta. Instrumenta, quibus ab illustrissima Academia scientiarum ad obseruationes has faciendas instructus, fuere sequentia egregiae bonitatis:

1. Qua-

1. Quadrans duorum pedum Londini a Siſſon fabrefactus.
2. Bina horologia pendula Pariſiis a le Paute conſtructa.
3. Tubus achromaticus Dollondianus 12 pedum.
4. Tubus achromaticus 3^{ium} pedum eiusdem artificis.
5. Teleſcopium Gregorianum 80 pollicum heliometro inſtructum a Short elaboratum.
6. Pyxis magnetica declinatoria Pariſiis conſtructa.
7. Acus inclinationis Petropoli fabricata.
8. Thermometra et Barometra ibidem conſtructa.

Examen quadrantis.

1. Ad horizontem

Factis in trabe quatuor metis, quarum diſtantiae erant $22\frac{1}{2}$ pollicum, aequales nempe differentiae altitudinum tubi, dum quadrans e ſitu erecto in ſitum inuerſum conuertitur; hacque trabe ad diſtantiam dimidiae circiter werſtae erecta, cepi ſucceſſiue altitudines trium ſuperiorum metarum in ſitu quadrantis recto, et trium proxime inferiorum prioribus reſpondentium in ſitu inuerſo. Ex repetitis operationibus ſequentes pro errore quadrantis reperi valores:

Dies operationis	metae desuper	in situ recto	metae desuper	in sit. inuers.	error quadrant. subtract.
	I	— 0°.26'.43"	II	+ 0°.38'.20"	5'.48½"
$\frac{9}{20}$ Aug.	II	— 0. 34. 17	III	0. 45. 56	5. 49½
	III	— 0. 41. 45	IV	0. 53. 26	5. 50½
	I	— 0. 26. 45	II	0. 38. 22	5. 48½
$\frac{11}{22}$ Aug.	II	— 0. 34. 28	III	0. 45. 58	5. 45
	III	— 0. 41. 53	IV	0. 53. 25	5. 46
	I	— 0. 26. 55	II	0. 38. 28	5. 46½
$\frac{12}{23}$ Aug.	II	— 0. 34. 33	III	0. 46. 1	5. 44
	III	— 0. 42. 6	IV	0. 53. 34	5. 44
	I	— 0. 27. 7	II	0. 38. 51	5. 52
$\frac{2}{13}$ Sept.	II	— 0. 34. 45	III	0. 46. 15	5. 45½
	III	— 0. 42. 8	IV	0. 53. 52	5. 52
				Ex omnibus medius - -	5. 47.

2. Ex altitudinibus fixarum ad Austrum et Boream captis

Quum rectificatio huius instrumenti ad Zenith, ob prominentiam Nonnii situm penduli deturbantem, tuto institui non possit, elegi fixas sub eadem fere altitudine ad Austrum et ad Boream culminantes: in illarum numero occurrunt α, δ Lyrae et η Pegasi, inter has vero δ Draconis, β et γ Cephei. Collatis obseruationibus cum calculo deprehendi errorem subtractiuum, vt sequitur.

Ex α Lyrae et δ Draconis in altitudine 75°

die $\frac{26 \text{ Aug.}}{6 \text{ Sept.}}$ - - - - -	5′.	59″$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{13}$ Sept. - - - - -	6.	2
$\frac{4}{15}$ Sept. - - - - -	6.	3
$\frac{11}{22}$ Sept. - - - - - -	5.	59
med.	6.	2

Ex δ Lyrae et β Cephei in altitudine 73°

$\frac{26 \text{ Aug.}}{6 \text{ Sept.}}$ - - - - -	5	51
$\frac{2}{13}$ Sept. - - - - -	5.	53
med.	5.	52

Ex η Pegasi et γ Cephei in altitudine 66°

$\frac{23 \text{ Aug.}}{3 \text{ Sept.}}$ - - - - - -	5.	51
$\frac{26 \text{ Aug.}}{6 \text{ Sept.}}$ - - - - -	5.	51
$\frac{2}{13}$ Sept. - - - - - -	5.	49
med.	5.	50

His addi possunt aliae comparationes

Ex α Lyrae et β Cephei - -	6.	2
δ Lyrae et δ Draconis - -	5.	50
β Cygni et γ Cephei - -	5.	53
γ Lyrae et β Cephei - -	5.	54
eadem et γ Cephei - -	5.	50
γ Aquarii et α Vrsae maioris - -	5.	48$\frac{1}{2}$
Medium ex omnibus	5.	53$\frac{1}{2}$

Ex allatis exemplis ſatis liquet, errorem Quadrantis prope Zenith parum differre ab errore eiusdem ad horizontem: diſcrepantia paucorum ſecundorum partim obſeruationibus partim tabulis et reductionibus adſcribi poteſt. Hinc ſumto ex vtroque medio prodit ille $-5' 50''$; quem a vero 5 ſecundis vix abludere veriſimillimum eſt.

Determinatio latitudinis ex altitudinibus Solis et fixarum meridianis.

Poſitionem meridiani determinabam ope circuli azimuthalis, pedi Quadrantis adnexi, cuius diameter eſt $12\frac{1}{2}$ pollicum. Capiendo altitudines Solis correſpondentes in ipſo tubi centro, notabam gradus et minuta in circulo memorato; atque ex obſeruationibus matutinis et pomeridianis ſumebam medium, cui ob variationem declinationis Solis hanc applicui correctionem.

Denotantibus P eleuatione Poli
D declinatione Solis boreali
m correctione meridiei in ſecundis,

correctio quaeſita $= \frac{15\, m\, \text{coſ.}\, D}{\text{ſin.}\,(P - D)} = 15\, m$ coſ. D coſec. $(P - D)$ quae in minuta prima commutata eodem modo ac correctio meridiei applicatur, in ſignis nempe deſcendentibus additur, in aſcendentibus ſubtrahitur. Poſito hoc modo Quadrante in meridianum, differentia inter appulſum centri ſolis ad filum micrometri verticale, et meridiem verum per altitudines correſpondentes repertum, raro ad 6 vel 8 ſcrupula temporis ſecunda aſſurgebat.

Circa

Circa altitudines Solis et fixarum meridianas notandum venit, eas, vt ſpatio parceretur, ab errore Quadrantis ſupra definito iam purgatas eſſe; porro in computanda declinatione Solis differentiam meridianorum inter Pariſios et Orel rotunde $2\frac{1}{4}$ horarum aſſumtam; Declinationes vero fixarum apparentes ex tabulis ephemeridum anni currentis calculatas; tabulam denique refractionis D. de la *Caille* adhibitam.

Dies obſ. St. Nou.	alt. obſeru.	Refract. — Parall.	ſemid. ⊙	Declin. ⊙	eleu. Poli
		Altitud. limbi auſtralis.			
3 Aug.	54°.12'.47"	0'. 43"		17°.24'.39"	52°.56'.46"
5	53. 40. 42	0. 44	15'. 49	16. 52. 26	39
6	53. 24. 5	0. 44		16. 35. 56	46
		Altitud. limbi borealis.			
7	53. 39. 4	0. 44	15. 49	16. 19. 8	52°.56'.37"
10	52. 47. 24	0. 45	15. 50	15. 27. 12	23
13	51. 53. 15	0. 47		14. 33. 3	25
15	51. 15. 45	0. 49		13. 55. 45	40
16	50. 57. 0		15. 51	13. 36. 47	27
17	50. 37. 40			13. 17. 32	33
18	50. 18. 29	0. 50		12. 58 11	24
19	49. 58. 40		15. 52	12 38. 34	36
21	49. 18. 50	0. 52		11. 58. 45	39
23	48. 38. 26	0. 53		11. 18. 10	30
24	48. 17. 40	0. 54	15. 53	10. 57. 37	44
25	47. 57 6			10. 36. 53	34
27	47. 15. 6	0. 55		9. 54. 55	37
30	46. 10. 55	0. 58	15. 54	8. 50. 46	43

Dies

Dies obs. St. Nou.	alt. obseru.	Refract. − Parall.	semid. ⊙	Declin. ⊙	eleu. Poli
3 Sept.	44°.43'.25	1'. 1"	15'.55"	7°.23.'18"	52°.56'.49"
4	44. 21. 20	1. 2		7. 1. 7	44
6	43. 36. 42	1. 4	15. 56	6. 16. 24	42
7	43. 14. 6	1. 5		5. 53. 53	48
8	42. 51. 40	1. 6		5. 31. 16	38
12	41. 20. 22	1. 10	15. 57	3. 59. 56	41
13	40. 57. 25			3. 36. 55	37
14	40. 34. 30	1. 12	15. 58	3. 13. 50	30
15	40. 11. 10	1. 13		2. 50. 41	42
18	39. 1. 38	1. 15	15. 59	1. 40. 50	31
22	37. 28. 10	1. 20	16. 0	0. 7. 25	35

Medium ex omnibus 52. 56 37.

Altitudines fixarum meridianae.

Dies obs. St. Nou	Nom. fix.	alt. obseru.	refract.	Decl. appar. ad diem obs.	Latitudo.
10 Aug	δ Hercul.	62°.10'.35"	0'. 35"	25°. 6'.40"	52°.56'.45"
	α Ophiuc.	49. 48. 14	0. 56	12. 44. 12	54
	β - -	41. 47. 57	1. 14	4. 40. 24	41
24	θ Hercul.	74. 21. 8	0. 19	37. 17. 32	43
	α Lyrae	75. 39. 10	0. 17	38. 35. 28	35
30	α Lyrae	75. 39. 12	0. 17	38. 35. 29	34
	β - -	70. 11. 0	0. 24	33. 7. 26	50
	δ - -	73. 41. 33	0. 20	36. 38. 5	52
2 Sept.	α Lyrae	75 39. 14	0. 17	38. 35. 30	33
	β - -	70. 10. 59	0. 24	33. 7. 27	52
	δ - -	73. 41. 35	0. 20	36. 38. 5	50

3 Sept.

Dies obs. St. Nou.	Nom. fix.	alt. obseru.	refract.	Decl. appar. ad diem obs.	Latitudo.
3 Sept.	γ Lyrae	69°. 28'. 0"	0'. 25"	32°. 24'. 15"	52°. 56'. 40"
	γ Aquar.	34. 35. 58	1. 36	2. 28. 48	50
	η Pegasi	66. 8. 49	0. 30	29. 5. 7	48
	α Vrs. mai.	25. 54. 40	2. 15	62. 55. 49	36
	γ Cephei	66. 32. 46	0. 29	76. 24. 34	51
6. - -	α Lyrae	75. 39. 14	0. 17	38. 35. 30	33
	β - -	70. 11. 0	0. 24	33. 7. 27	51
	δ - -	73. 41. 32	0. 19	36. 38. 6	53
	γ - -	69. 27. 55	0. 25	32. 24. 16	46
	δ Draconis	75. 40. 22	0. 17	67. 16. 47	52
	α Sagittar.	54. 55. 38	0. 47	17. 31. 34	43
	γ Cygni	76. 37. 47	0. 16	39. 34. 0	29
	β Cephei	73. 20. 58	0. 20	69. 36. 17	55
	γ Aquarii	34. 35. 58	1. 36	2. 28. 48	50
	η Pegasi	66. 8. 54	0. 30	29. 5. 8	44
	α Vrs. mai.	25. 54. 38	2. 15	62. 55. 48	35
	γ Cephei	66. 32. 40	0. 29	76. 24. 35	46
7. - -	ε Cygni	70. 13. 10	0. 24	33. 9. 38	52
	β Cephei	73. 20. 50	0. 20	69. 36. 18	48
	γ - -	66. 32. 41	0. 29	76. 24. 36	48
13. - -	α Lyrae	75. 39. 16	0. 17	38. 35. 30	31
	β - -	70. 10. 59	0. 24	33. 7. 28	53
	δ - -	71. 41. 32	0. 19	36. 38. 7	54
	γ - -	69. 27. 50	0. 25	32. 24. 16	51
	δ Dracon.	75. 40. 25	0. 17	67. 16. 48	56
	β Cephei	73. 20. 58	0. 20	69. 36. 19	57
	η Pegasi	66. 8. 54	0. 30	29. 5. 10	46
	γ Cephei	66. 32. 35	0. 29	76. 24. 36	42

Dies obſ St Nou	Nom. fix	alt. obſeru.	refract.	Decl. appar. ad diem obſ.	Latitudo.
15 Sept.	α Lyrae	75°. 39′. 18″	0′. 17″	38°. 35′. 31″	52°. 56′. 30″
	β - -	70. 11. 10	0. 24	33. 7. 28	42
	δ Dracon.	75. 40. 24	0. 17	67. 16. 49	56
19 - -	Aldebaran	57. 3. 50	0. 50	16. 3. 35	35
22 - -	α Lyrae	75. 39. 12	0. 17	38. 35. 31	36
	β - -	70. 11. 8	0. 24	33. 7. 29	45
	δ Dracon.	75. 40. 23	0. 17	67. 16 50	- - 56

Medium ex omnibus 52. 56. 45

Hinc ſequitur latitudinem vrbis Orel, ſine ſenſibili errore ſtatui poſſe 52°. 56′. 40″.

De longitudine geographica eiusdem vrbis.

Pro ſtabilienda longitudine duas emerſiones ſatellitum Iouis obſeruare mihi licuit. Alias vero apparentias coeleſtes huic ſcopo inſeruientes et quae hic videri potuiſſent, tempeſtas nubila reddidit inuiſibiles.

I. Emerſio 2^{di} ſatellitis die [illegible] Iulii obſeruata tubo Dollondiano

Satelles ex vmbra emergit	9^h.	35′.	50″	temp. ver.
clarior apparet	9.	36.	14	
Eandem emerſionem D. *Tschernoi* telescopio Gregoriano notauit	9.	35.	45.	
II. Emerſ. 1^{mi} ſatell. die [illegible] Aug. obſ.	7.	47.	25	dub.
	7.	47.	30	certa.

Socius

Socius impeditus 20 ſcrupulis ſecundis tardius eandem obſeruauit.

De vtraque obſeruatione a me facta non habeo quod dubitem; ambae enim inſtitutae coelo fauente, Ioue bene terminato et faſciis ſat conſpicuis. Motus horologii per altitudines Solis correſpondentes diebus obſeruationes has praecedentibus et inſequentibus captas bene exploratus.

Deficientibus obſeruationibus correſpondentibus nihil reſtat agendum niſi vt comparentur illae cum momentis ex ephemeridibus depromtis:

Emerſio 2^{di} ſatellitis Pariſiis e calculo	7^h.	$21'$.	$12''$
collata cum obſeruatione mea praebet differentiam meridianorum	2.	14.	38
Emerſio autem 1^{mi} ibidem notata	5.	33.	4
dat differentiam	2.	14.	26
Media igitur differentia meridianorum	2.	14.	32

Ob maiorem certitudinem contuli easdem cum calculis ephemeridum Berolinenſium: prior ibi notata 8^h. $5'$. $13''$ dat differentiam 1^h. $30'$. $37''$; altera vero 6^h. $17'$. $37''$ praebet 1^h. $29'$. $53''$; medium ex vtraque 1^h. $30'$. $15''$ Cum iam longitudo Berolini a Pariſiis ſit 0^h. $44'$. $10''$ longituto vrbis Orel a Lutetiis Pariſiorum eruitur 2^h. $14'$. $25''$. Quum concluſiones hae tam egregie inter ſe conſentiant, longitudo media ſtatui poteſt 2^h. $14'$. $28''$; adeoque in partibus aequatoris $33°$. $37'$. et a meridiano primo $53°$ $37'$; quam ſi pro exacta aſſerere non audeam, illam tamen

 haud

haud procul a veritate declinare et pro vſu geographico ſufficientem eſſe confido.

De declinatione & inclinatione acus magneticae.

Declinationem acus magneticae obſeruaturus probe examinaui latus pyxidis parallelum eſſe lineae per cardines ſeptentrionalem et auſtralem tranſeuntis: dein applicato latere pyxidis ad planum quadrantis in meridiano conſiſtentis, ex repetitis ſaepiſſime obſeruationibus inueni declinationem 9° a Septentrione verſus Occaſum; nullamque ſenſibilem mutationem animaduerti. Inclinationem acus deprehendi inter 65 et 70 gradus; verum his experimentis ob vitium inſtrumenti ex itinere acceptum non ſum contentus, iisque referendis ſuperſedeo.

NOU-

NOUVELLES RECHERCHES
SUR LES INÉGALITÉS
DANS LE MOUVEMENT DE LA TERRE
CAUSÉES PAR L'ACTION DE VENUS;

par

NICOLAS FUSS.

En calculant la table des corrections du lieu de la Terre dérangée par l'action de Venus, laquelle se trouve dans le second Volume des nouveaux Actes de l'Académie, à la fin du second mémoire sur ce sujet important, je n'eus pas, à la verité, beaucoup de confiance en la méthode qui servit de base à mon calcul. Cette méthode, quoique très belle en elle même & préférable à certains égards à celle que son illustre Auteur avoit proposée dans le XVI^e. Volume des nouveaux Commentaires, ne me parût pas susceptible, dans l'exécution, d'un degré suffisant de précision, à moins de faire des calculs capables de rebuter le plus intrépide calculateur. J'avois appris à me défier des approximations suivies de substitutions trop souvent repétées. Mes doutes cesserent pourtant, lorsqu'après avoir achevé ma table j'ai vu qu'elle s'accordoit assés bien avec celle de feu Mr. *de la Caille*, aux différences près qui ont du naître de son rapport des masses, adopté avant la dernière détermination de la Parallaxe du Soleil. J'avois perdu de vue la comparaison de sa table avec celle du premier mémoire de Mr. *Euler*, qui auroit achevé de me jetter dans l'incertitude, si j'y eusse fait attention.

Frappé cependant de la différence entre les deux tables de Mr. *Euler*, dont je m'apperçus pendant l'impression des deux derniers mémoires, j'ai toujours pensé à refaire mon calcul, lorsque Mr. *Lexell*, Geomètre aussi consommé qu'habile Astronome, engagé par les sollicitations de MM. *de la Place* & *de la Lande* se mit à examiner le premier mémoire & y apporta les corrections qui se trouvent dans son mémoire inséré au VI^e. Volume des Actes. La table qui est à la suite de ce mémoire s'accorde très bien avec la mienne, à quelques petites différences près, que j'ai d'abord attribuées à la supposition differente de la distance moyenne de Venus au Soleil & du rapport des masses; & cet accord inattendu a du dissiper naturellement jusqu'au moindre doute sur la certitude de la seconde méthode de Mr. *Euler*, qui paroit l'emporter aussi sur la première par la facilité du calcul.

En parcourant de nouveau cette méthode j'ai vu qu'elle peut non seulement être présentée d'une manière plus lumineuse & plus suivie, mais que le calcul numérique, dont je n'avois mis que le résultat dans le second memoire, est susceptible d'une grande diminution de travail, c'est ce qui m'a engagé à le refaire, & j'en vais présenter ici les détails à la suite de la Théorie même, que je vais reprendre, sans m'arrêter pourtant à toutes les pe-

petites opérations préliminaires, me reſervant la liberté d'être plus étendu dans les paſſages, où je me ſuis écarté de la route tracée par Mr. *Euler*, ſurtout dans la réſolution des équations principales que fourniſſent les principes du mouvement, & dans le développement du binome $(1 - n \operatorname{coſ.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$, en gardant cependant pour l'une & l'autre les mêmes dénominations.

§. 1. Soyent ⊙, B, A, les lieux du Soleil, de Venus & Tab. XI. Fig. 6.
de la Terre, pour le moment de la conjonction des deux Planètes, tous trois dans le plan de l'écliptique, & ſuppoſons qu'après un intervalle de temps t, répondant au moyen mouvement de la Terre θ, les deux Planètes ayent décrits les angles A ⊙ ♁ $= \phi$ & B ⊙ ♀ $= \psi$, nous aurons l'angle d'élongation ♁ ⊙ ♀ $= \eta = \psi - \phi$. Soyent les diſtances au Soleil ⊙ ♁ $= v$ & ⊙ ♀ $= a$, & la diſtance des deux Planètes ♁ ♀ $= w = \sqrt{(aa + vv - 2av \operatorname{coſ.} \eta)}$. Enfin nous exprimons la maſſe du Soleil par l'unité & celle des deux Planètes, que nous ſuppoſons égales, par m. Cela poſé la force dont le Soleil agit ſur la Terre dans la direction ♁ ⊙ ſera $= \frac{m+1}{vv}$, & celle de Venus qui agit dans la direction ♁ ♀ $= \frac{m}{ww}$. A ces deux forces il faut ajouter une troiſième provenant de l'action de Venus ſur le Soleil dans la direction ♀ ⊙ $= \frac{m}{aa}$. Mais ces trois forces ſe réduiſent à deux, parce que la force ſelon ♁ ♀ équivaut à deux autres, l'une ſelon ♁ ⊙ $= \frac{mv}{w^3}$, l'autre ſelon ⊙ ♀ $= \frac{ma}{w^3}$; de ſorte que les deux forces qui agiſſent ſur la Terre dans les directions ♁ ⊙ & ♀ ⊙ ſont, la premiere $= \frac{1+m}{vv} + \frac{mv}{w^3}$, la ſeconde $= \frac{m}{aa} - \frac{ma}{w^3}$.

§. 2.

§. 2. Soyent les ordonnées pour le lieu de la Terre $\odot X = x$, $X \female = y$, & les forces qui agissent dans la direction de ces ordonnées seront:

$$\text{selon } \odot X = -\left(\frac{1+m}{vv} + \frac{mv}{w^3}\right)\text{cos.}\,\Phi - \left(\frac{m}{aa} - \frac{ma}{w^3}\right)\text{cos.}\,\psi$$

$$\text{selon } X \female = -\left(\frac{1+m}{vv} + \frac{mv}{w^3}\right)\text{sin.}\,\Phi - \left(\frac{m}{aa} - \frac{ma}{w^3}\right)\text{sin.}\,\psi$$

qui doivent être égales aux forces accélératrices $\frac{ddx}{d\theta^2}$ & $\frac{ddy}{d\theta^2}$, d'où l'on tire les deux équations suivantes:

$$\frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{1+m}{vv}\,\text{cos.}\,\Phi - \frac{mv}{w^3}\,\text{cos.}\,\Phi - \frac{m}{aa}\,\text{cos.}\,\psi + \frac{ma}{w^3}\,\text{cos.}\,\psi$$

$$\frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{1+m}{vv}\,\text{sin.}\,\Phi - \frac{mv}{w^3}\,\text{sin.}\,\Phi - \frac{m}{aa}\,\text{sin.}\,\psi + \frac{ma}{w^3}\,\text{sin.}\,\psi$$

qui combinées fournissent ces deux autres:

$$\frac{ddy\,\text{cos.}\,\Phi - ddx\,\text{sin.}\,\Phi}{d\theta^2} = -\frac{m}{aa}\,\text{sin.}\,\eta + \frac{ma}{w^3}\,\text{sin.}\,\eta,$$

$$\frac{ddx\,\text{cos.}\,\Phi + ddy\,\text{sin.}\,\Phi}{d\theta^2} = -\frac{1+m}{vv} - \frac{mv}{w^3} - \frac{m}{aa}\,\text{cos.}\,\eta + \frac{ma}{w^3}\,\text{cos.}\,\eta,$$

à cause de $\psi - \Phi = \eta$. Mais les secondes differentielles de l'abscisse $x = v\,\text{cos.}\,\Phi$ & de l'ordonnée $y = v\,\text{sin.}\,\Phi$ étant:

$$ddx = ddv\,\text{cos.}\,\Phi - 2\,dv\,d\Phi\,\text{sin.}\,\Phi - v\,d\Phi^2\,\text{cos.}\,\Phi - v\,dd\Phi\,\text{sin.}\,\Phi$$

$$ddy = ddv\,\text{sin.}\,\Phi + 2\,dv\,d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi - v\,d\Phi^2\,\text{sin.}\,\Phi + v\,dd\Phi\,\text{cos.}\,\Phi$$

on en tire par les mêmes combinaisons:

$$\frac{ddy\,\text{cos.}\,\Phi - ddx\,\text{sin.}\,\Phi}{d\theta^2} = \frac{2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2}$$

$$\frac{ddx\,\text{cos.}\,\Phi + ddy\,\text{sin.}\,\Phi}{d\theta^2} = \frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2},$$

ce qui donne les deux équations suivantes:

$$\frac{2\,dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = -\frac{m}{aa}\,\text{sin.}\,\eta + \frac{ma}{w^3}\,\text{sin.}\,\eta,$$

$$\frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{1+m}{vv} - \frac{mv}{w^3} - \frac{m}{aa}\,\text{cos.}\,\eta + \frac{ma}{w^3}\,\text{cos.}\,\eta.$$

§ 3. Avant que de résoudre ces deux équations il faut observer que pour les termes affectés du coëfficient $\frac{m}{w^3}$, com-

comme très petits, on pourra dans l'expreſſion de la diſtance $w = \sqrt{(aa + vv - 2av \operatorname{cof.} \eta)}$ mettre à la place de v la diſtance moyenne de la Terre au Soleil que nous ſuppoſons $= 1$, & nous aurons

$$w = \sqrt{(1 + aa - 2a \operatorname{cof.} \eta)} = \sqrt{1 + aa}\sqrt{1 - \frac{2a}{1+aa} \operatorname{cof.} \eta},$$

ou bien

$$w = \sqrt{(1 + aa)}(1 - n \operatorname{cof.} \eta)^{\frac{1}{2}},$$

en mettant pour abréger $n = \frac{2a}{1+aa}$; d'où l'on obtient

$$\frac{m}{w^3} = \frac{m}{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}}(1 - n \operatorname{cof.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

ou bien $\frac{m}{w^3} = \mu(1 - n \operatorname{cof.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$, en mettant $\frac{m}{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}} = \mu$.

En ſubſtituant donc cette valeur dans les deux équations principales, elles prendront la forme ſuivante:

$$\frac{2dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = -\frac{m}{aa} \operatorname{fin.} \eta + \mu a \operatorname{fin.} \eta (1 - n \operatorname{cof.} \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} = -\frac{m}{aa} \operatorname{cof.} \eta + \mu a \operatorname{cof.} \eta (1 - n \operatorname{cof.} \eta)^{-\frac{3}{2}}$$
$$- \mu(1 - n \operatorname{cof.} \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où il s'agit de tirer la valeur de v & de Φ exprimée par l'angle d'élongation η.

§. 4. Soyent pour cet effet nos deux équations

$$\frac{2dv\,d\Phi + v\,dd\Phi}{d\theta^2} = \mu P \quad \& \quad \frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} = \mu Q,$$

& mettant

$$v = 1 + \mu p \quad \& \quad \frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu q,$$

la première de ces équations, multipliée par $v = 1 + \mu p$, deviendra

$$\frac{2 v\, dv\, d\Phi + vv\, dd\Phi}{d\theta^2} = \mu (1 + \mu p) P = \mu P,$$

à cause de μ^2 infiniment petit du second degré. L'intégrale de cette équation est

$$\frac{vv\, d\Phi}{d\theta} = C + \mu \int P\, d\theta,$$

ou bien, en substituant & mettant la constante $C = 1$,

$$(1 + \mu p)^2 (1 + \mu q) = 1 + 2 \mu p + \mu q = 1 + \mu \int P\, d\theta,$$

d'où l'on tire $\int P\, d\theta = 2 p + q$.

§. 5. La seconde équation devient

$$\frac{\mu\, dd p}{d\theta^2} - (1 + \mu p)(1 + \mu q)^2 + \frac{1 + m}{vv} = \mu Q,$$

ce qui à cause de

$$(1 + \mu p)(1 + \mu q)^2 = 1 + \mu p + 2 \mu q \text{ \&}$$

$$\frac{1 + m}{vv} = \frac{1 + m}{1 + 2 \mu p} = (1 + m)(1 - 2 \mu p) = 1 + m - 2 \mu p$$

se reduit à

$$\frac{\mu\, dd p}{d\theta^2} + m - 3 \mu p - 2 \mu q = \mu Q,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mu\, dd p}{d\theta^2} + m + \mu p - 2 \mu \int P\, d\theta = \mu Q,$$

d'où enfin il résulte

$$\frac{dd p}{d\theta^2} + p = Q + 2 \int P\, d\theta - \frac{m}{\mu},$$

où il y a

$$P = - k \sin. \eta + a \sin. \eta (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

$$Q = - k \cos. \eta + a \cos. \eta (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}} - (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

en mettant pour abrèger $\frac{m}{\mu a a} = \frac{(1 + a a)^{\frac{3}{2}}}{a a} = k$.

Soit

§. 6. Soit $(1-n\cos.\eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B\cos.\eta + C\cos.2\eta + D\cos.3\eta + \text{etc.}$

& parceque

$$\cos.y\sin.z = \tfrac{1}{2}\sin.(y+z) - \tfrac{1}{2}\sin.(y-z) \text{ \&}$$
$$\cos.y\cos.z = \tfrac{1}{2}\cos.(y-z) + \tfrac{1}{2}\cos.(y+z),$$

on aura

$$\begin{aligned}P = {} & Aa\sin.\eta + \tfrac{1}{2}Ba\sin.2\eta + \tfrac{1}{2}Ca\sin.3\eta + \tfrac{1}{2}Da\sin.4\eta + \text{etc.}\\ & -\tfrac{1}{2}Ca\sin.\eta - \tfrac{1}{2}Da\sin.2\eta - \tfrac{1}{2}Ea\sin.3\eta - \tfrac{1}{2}Fa\sin.4\eta - \text{etc.}\\ & -k\sin.\eta\end{aligned}$$

ou bien, si l'on met pour abrèger

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}a(2A - C) - k;\quad \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}a(B - D);$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}a(C - E);\quad \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}a(D - F);\ \text{etc.}$$

on aura pour P la série suivante:

$$P = \mathfrak{B}\sin.\eta + \mathfrak{C}\sin.2\eta + \mathfrak{D}\sin.3\eta + \mathfrak{E}\sin.4\eta + \text{etc.}$$

§. 7. Pour convertir la valeur de Q en série, soit

$$Q = A' + B'\cos.\eta + C'\cos.2\eta + D'\cos.3\eta + \&c.$$

& parceque

$$\begin{aligned}a\cos.\eta(1-n\cos.\eta)^{-\frac{3}{2}} = {} & +Aa\cos.\eta + \tfrac{1}{2}Ba\cos.2\eta + \tfrac{1}{2}Ca\cos.3\eta + \&c.\\ & +\tfrac{1}{2}Ba + \tfrac{1}{2}Ca\cos.\eta + \tfrac{1}{2}Da\cos.2\eta + \tfrac{1}{2}Ea\cos.3\eta + \&c.\\ -(1-n\cos.\eta)^{-\frac{3}{2}} = {} & -A - B\cos.\eta - C\cos.2\eta - D\cos.3\eta - \&c.\\ -k\cos.\eta = {} & -k\cos.\eta\end{aligned}$$

on aura pour les coëfficiens A', B', C', &c. ces valeurs:

$$A' = \tfrac{1}{2}Ba - A;\quad B' = \tfrac{1}{2}a(2A + C) - B - k;$$
$$C' = \tfrac{1}{2}a(B + D) - C;\ D' = \tfrac{1}{2}a(C + E) - D;\ \&c.$$

qui étant déterminés, la série adoptée, sçavoir:

$$Q = A' + B' \cos.\, \eta + C' \cos.\, 2\,\eta + D' \cos.\, 3\,\eta + \&c.$$

pourra être miſe en uſage.

§. 8. Pour exprimer par une ſérie ſemblable la valeur de $\frac{ddp}{d\theta^2} + p$, il ne reſte à déterminer que l'intégrale $2 \int P\, d\theta$, qui en mettant $d\theta = i\, d\eta$ ſe trouve être

$$2 \int P\, d\theta = 2\, i \int P\, d\eta = 2\,\Delta - \tfrac{2i}{1} \mathfrak{B} \cos.\, \eta - \tfrac{2i}{2} \mathfrak{C} \cos.\, 2\,\eta$$
$$- \tfrac{2i}{3} \mathfrak{D} \cos.\, 3\,\eta - \&c.$$

à laquelle ſi l'on ajoute $Q - \frac{m}{\mu}$, on aura

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = A' + 2\,\Delta - \frac{m}{\mu} + (B' - \tfrac{2i}{1} \mathfrak{B}) \cos.\, \eta$$
$$+ (C' - \tfrac{2i}{2} \mathfrak{C}) \cos.\, 2\,\eta + (D' - \tfrac{2i}{3} \mathfrak{D}) \cos.\, 3\,\eta + \&c.$$

ou bien, ſi l'on met

$$A' + 2\,\Delta - \frac{m}{\mu} = \mathfrak{A}'; \quad B' - \tfrac{2i}{1} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}';$$
$$C' - \tfrac{2i}{2} \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'; \qquad D' - \tfrac{2i}{3} \mathfrak{D} = \mathfrak{D}'; \quad \&c.$$

on aura

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' \cos.\, \eta + \mathfrak{C}' \cos.\, 2\,\eta + \mathfrak{D}' \cos.\, 3\,\eta + \&c.$$

§. 9. Tout dépend maintenant de la valeur de p, qui doit être telle que $\frac{ddp}{d\theta^2} + p$ ſoit égal à la ſérie que nous venons de trouver. Suppoſons cette valeur

$$p = \alpha + \beta \cos.\, \eta + \gamma \cos.\, 2\,\eta + \delta \cos.\, 3\,\eta + \&c.,$$

& nous aurons

$$\frac{ddp}{d\theta^2} = - \frac{\beta}{ii} \cos.\, \eta - \frac{4\gamma}{ii} \cos.\, 2\,\eta - \frac{9\delta}{ii} \cos.\, 3\,\eta - \&c.$$

& partant

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = \alpha + \beta \left(1 - \frac{1}{ii}\right) \cos.\, \eta + \gamma \left(1 - \frac{4}{ii}\right) \cos.\, 2\,\eta$$
$$+ \delta \left(1 - \frac{9}{ii}\right) \cos.\, 3\,\eta + \&c.$$

ſérie

ſérie qui eſt égale à la précedente, en mettant

$$\alpha = \mathfrak{A}'; \ \beta = \frac{\mathfrak{B}'}{1 - \frac{1}{ii}}; \ \gamma = \frac{\mathfrak{C}}{1 - \frac{4}{ii}}; \ \delta = \frac{\mathfrak{D}}{1 - \frac{9}{ii}}; \ \&c.$$

§. 10. Ayant trouvé p on en déduit facilement $q = \int P d\theta - 2p$, ce qui fournit la ſérie ſuivante:

$$q = \Delta - 2a - (i\mathfrak{B} + 2\beta) \cos \eta - (\tfrac{1}{2} i\mathfrak{C} + 2\gamma) \cos. 2\eta - (\tfrac{1}{3} i\mathfrak{D} + 2\delta) \cos. 3\eta + \&c.$$

ou bien en mettant pour abrèger

$$\Delta - 2\alpha = \alpha'; \ i\mathfrak{B} + 2\beta = -\beta';$$
$$\tfrac{1}{2} i\mathfrak{C} + 2\gamma = -\gamma'; \ \tfrac{1}{3} i\mathfrak{D} + 2\delta = -\delta; \ \&c.$$

la lettre q ſera exprimée par cette ſérie:

$$q = \alpha' + \beta' \cos. \eta + \gamma' \cos. 2\eta + \delta' \cos. 3\eta + \varepsilon \cos. 4\eta + \&c.$$

§. 11. De cette valeur de q on déduit

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu\alpha' + \mu\beta' \cos. \eta + \mu\gamma' \cos. 2\eta + \text{etc.}$$

& de là

$$d\Phi = (1 + \mu\alpha') d\theta + \mu i \beta' d\eta \cos. \eta + \mu i \gamma' d\eta \cos. 2\eta + \text{etc.}$$

ſérie dont l'intégrale nous fournit d'abord

$$\Phi = (1 + \mu\alpha') \theta + \mu i \beta' \sin. \eta + \tfrac{1}{2} \mu i \gamma' \sin. 2\eta + \tfrac{1}{3} \mu i \delta' \sin. 3\eta + \text{etc.}$$

où le premier terme $(1 + \mu\alpha')\theta$ doit être égal à la longitude moyenne de la Terre θ; nous aurons par conſéquent $\alpha' = \Delta - 2\alpha = 0$, et partant $\Delta = 2\alpha$, et les deux corrections cherchées pour la diſtance & la longitude de la Terre ſeront

$$v - 1 = \mu(\alpha + \beta \cos. \eta + \gamma \cos. 2\eta + \delta \cos. 3\eta + \text{etc.})$$
$$\Phi - \theta = \mu i (\beta' \sin. \eta + \tfrac{1}{2}\gamma' \sin. 2\eta + \tfrac{1}{3}\delta' \sin. 3\eta + \text{etc.})$$

§. 12. Pour déterminer maintenant les premiers coefficiens A, B, C, etc. auxquels tous les autres se rapportent jusqu'aux derniers, soit

$$(1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B \cos. \eta + C \cos. 2\eta + \text{etc.} = V$$

et en prenant les differentielles logarithmiques

$$\frac{dV}{V} = -\frac{3 n d\eta \sin. \eta}{2(1 - n \cos. \eta)} = \frac{-B d\eta \sin. \eta - 2C d\eta \sin. 2\eta - \text{etc.}}{A + B \cos. \eta + C \cos. 2\eta + D \cos. 3\eta + \text{etc.}}$$

on aura cette équation:

$$\frac{3 n \sin. \eta}{1 - n \cos. \eta} = \frac{2B \sin. \eta + 4C \sin. 2\eta + 6D \sin. 3\eta + \text{etc.}}{A + B \cos. \eta + C \cos. 2\eta + D \cos. 3\eta + \text{etc.}} = \frac{S}{V},$$

ou bien $3nV \sin. \eta - S + nS \cos. \eta = 0$. Or il y a

$$\begin{aligned}
3nV \sin. \eta &= 3nA \sin. \eta + \tfrac{3}{2} nB \sin. 2\eta + \tfrac{3}{2} nC \sin. 3\eta + \text{etc.} \\
&\quad - \tfrac{3}{2} nC \sin. \eta - \tfrac{3}{2} nD \sin. 2\eta - \tfrac{3}{2} nE \sin. 3\eta - \text{etc.} \\
nS \cos. \eta &= \qquad\qquad + nB \sin. 2\eta + 2nC \sin. 3\eta + \text{etc.} \\
&\quad + 2nC \sin. \eta + 3nD \sin. 2\eta + 4nE \sin. 3\eta + \text{etc.} \\
-S &= -2B \sin. \eta - 4D \sin. 2\eta - 6D \sin. 3\eta - \text{etc.}
\end{aligned}$$

§. 13. Pour rendre cette expression égale à zero, il faudra faire évanouir chaque terme séparément, ce qui fournira les déterminations suivantes:

$$\begin{aligned}
3nA &= 2B - \tfrac{1}{2} nC, \text{ ou bien } & 3n\tfrac{A}{B} &= 2 - \tfrac{1}{2} n \tfrac{C}{B} \\
\tfrac{5}{2} nB &= 4G - \tfrac{3}{2} nD & \tfrac{5}{2} n \tfrac{B}{C} &= 4 - \tfrac{3}{2} n \tfrac{D}{C} \\
\tfrac{7}{2} nC &= 6D - \tfrac{5}{2} nE & \tfrac{7}{2} n \tfrac{C}{D} &= 6 - \tfrac{5}{2} n \tfrac{E}{D} \\
\tfrac{9}{2} nD &= 8E - \tfrac{7}{2} nF & \tfrac{9}{2} n \tfrac{D}{E} &= 8 - \tfrac{7}{2} n \tfrac{F}{E}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit facilement en fractions continues:

$$\mathfrak{a} = 3n\frac{A}{B} = 2 - \cfrac{\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{2} nn}{4 - \cfrac{\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{7}{2} nn}{6 - \cfrac{\tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{9}{2} nn}{8 - \text{etc.}}}}$$

$\mathfrak{b} =$

$$\mathfrak{b} = \tfrac{5}{2} n \frac{B}{C} = 4 - \cfrac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} nn}{6 - \cfrac{\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2} nn}{8 - \cfrac{\frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2} nn}{10 - \text{etc.}}}}$$

$$\mathfrak{c} = \tfrac{7}{2} n \frac{C}{D} = 6 - \cfrac{\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2} nn}{8 - \cfrac{\frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2} nn}{10 - \cfrac{\frac{9}{2} \cdot \frac{12}{2} nn}{12 - \text{etc.}}}}$$

$$\mathfrak{d} = \tfrac{9}{2} n \frac{D}{E} = 8 - \cfrac{\frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2} nn}{10 - \cfrac{\frac{9}{2} \cdot \frac{13}{2} nn}{12 - \cfrac{\frac{11}{2} \cdot \frac{15}{2} nn}{14 - \text{etc.}}}}$$

& en général

$$\mathfrak{y} = (r+\tfrac{3}{2}) n \frac{Y}{Z} = 2(r+1) - \cfrac{(r+\frac{1}{2})(r+\frac{5}{2}) nn}{2(r+2) - \cfrac{(r+\frac{3}{2})(r+\frac{7}{2}) nn}{2(r+3) - \cfrac{(r+\frac{5}{2})(r+\frac{9}{2}) nn}{2(r+4) - \text{etc.}}}}$$

où le nombre r est pour la fraction $\mathfrak{b}$ égal à 1; pour la fraction $\mathfrak{c}$ il est $= 2$; pour $\mathfrak{d}$ il y a $r = 3$, & ainsi de suite. Et si ce nombre r est assés grand, au lieu de cette fraction continue on pourra se servir, sans se tromper sensiblement dans les premières lettres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, etc. de la fraction suivante:

$$\mathfrak{y} = (r+\tfrac{3}{2}) n \frac{Y}{Z} = 2(r+1) - \cfrac{(r+1)(r+2) nn}{2(r+2) - \cfrac{(r+2)(r+3) nn}{2(r+3) - \cfrac{(r+3)(r+4) nn}{2(r+4) - \text{etc.}}}}$$

qui

qui divisée par $r+1$ & déprimée se reduit à

$$\frac{r+\frac{1}{2}}{r+1}\,n\,\frac{Y}{Z} = s = 2 - \cfrac{nn}{2 - \cfrac{nn}{2 - \cfrac{nn}{2 - \text{etc.}}}} = 2 - \frac{nn}{s},$$

doù l'on tire

$$ss = 2s - nn \;\; \& \;\; s = 1 + \sqrt{(1-nn)}$$

ce qui donne

$$\mathfrak{y} = (r+1)\,(1+\sqrt{(1-nn)})$$

Ayant trouvé cette valeur, il sera facile de déterminer, en remontant, les valeurs des caractères $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, &c. Car il y a

$$\mathfrak{a} = 2 - \frac{1.5\,nn}{4\mathfrak{b}};\;\; \mathfrak{b} = 4 - \frac{3.7\,nn}{4\mathfrak{c}};\;\; \mathfrak{c} = 6 - \frac{5.9\,nn}{4\mathfrak{d}};\;\; \text{etc.}$$

d'où l'on tire ensuite les coëfficiens cherchés

$$B = \frac{3nA}{\mathfrak{a}};\;\; C = \frac{5nB}{2\mathfrak{b}};\;\; D = \frac{7nC}{2\mathfrak{c}};\;\; E = \frac{9nD}{2\mathfrak{d}};\;\; \&c.$$

§. 14. Il ne reste donc plus que la lettre A à determiner, pour laquelle il faut avoir recours au développement actuel du binome, qui donne

$$(1-n\,\text{cos}.\eta)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2}n\,\text{cos}.\eta + \tfrac{3.5}{2.4}n^2\,\text{cos}.\eta^2 + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}n^3\,\text{cos}.\eta^3 + \&c.$$

Or il y a par les transformations connues

$$\text{cos}.\,\eta^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{cos}.\,2\,\eta$$
$$\text{cos}.\,\eta^3 = \tfrac{3}{4}\,\text{cos}.\,\eta + \tfrac{1}{4}\,\text{cos}.\,3\,\eta$$
$$\text{cos}.\,\eta^4 = \tfrac{1.3}{2.4} + \tfrac{4}{8}\,\text{cos}.\,2\,\eta + \tfrac{1}{8}\,\text{cos}.\,4\,\eta$$
$$\text{cos}.\,\eta^5 = \tfrac{5}{8}\,\text{cos}.\,\eta + \tfrac{5}{16}\,\text{cos}.\,3\,\eta + \tfrac{1}{16}\,\text{cos}.\,5\,\eta$$
$$\text{cos}.\,\eta^6 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6} + \tfrac{15}{32}\,\text{cos}.\,2\,\eta + \tfrac{6}{32}\,\text{cos}.\,4\,\eta + \tfrac{1}{32}\,\text{cos}.\,6\,\eta$$
$$\&c.$$

d'où

d'où l'on obtient, en prenant les termes abſolus

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3.5}{2.4} n^2 + \tfrac{1.3}{2.4} \cdot \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8} n^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \tfrac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12} n^6 + \&c.$$

& cette expreſſion ſe reduit facilement à celle-ci:

$$A = 1 + \tfrac{3.5}{4.4} n^2 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^4 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} \cdot \tfrac{11.13}{12.12} n^6 + \&c.$$

Mais cette ſérie eſt trop peu convergente, pour qu'on puiſſe s'en ſervir avec ſuccès. Voilà pourtant un moyen très facile de la rendre aſſéz convergente.

Puisque $A = 1 + \tfrac{3.5}{4.4} n^2 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^4 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} \cdot \tfrac{11.13}{12.12} n^6 + \&c.$

on aura $n n A = n n + \tfrac{3.5}{4.4} n^4 + \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^6 + \&c.$

& la différence de ces deux ſéries nous fournira

$$(1 - n n) A = 1 - \tfrac{1}{16} n^2 - \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{3.5}{4.4} n^4 - \tfrac{1}{144} \cdot \tfrac{3.5}{4.4} \cdot \tfrac{7.9}{8.8} n^6 - \&c.$$

& nous aurons enfin pour A cette expreſſion:

$$A = \tfrac{1}{1 - n n} \left(1 - \tfrac{1.1}{4.4} n^2 - \tfrac{1.1}{4.4} \cdot \tfrac{3.5}{8.8} n^4 - \tfrac{1.1}{4.4} \cdot \tfrac{3.5}{8.8} \cdot \tfrac{7.9}{12.12} n^6 - \&c.\right)$$

car on voit qu'on n'a qu'à changer l'ordre des dénominateurs 4.4; 8.8; 12.12; &c. ce qui facilite le calcul numérique des coëfficiens, que nous allons faire.

§. 15. Pour cet effet il faut connoître la valeur de a qui eſt ſuivant *Halley* $a = 0,72333$, d'où l'on tire

$$n = \tfrac{2a}{1 + a a} = 0,94975 \quad \text{et} \quad l\,n = 9,977608$$

& partant

	Coëfficiens	Logarithmes	Termes
$l\,n^2 = 9,955216$	0, 062500	8, 795880	0, 05638
$l\,n^4 = 9,910432$	0, 014648	8, 165778	0, 01192
$l\,n^6 = 9,865648$	0, 006409	7, 806769	0, 00470
$l\,n^8 = 9,820864$	0, 003580	7, 553865	0, 00237
$l\,n^{10} = 9,776080$	0, 002282	7, 358346	0, 00136
$l\,n^{12} = 9,731296$	0, 001581	7, 198896	0, 00085
$l\,n^{14} = 9,686512$	0, 001159	7, 064248	0, 00056
$l\,n^{16} = 9,641728$	0, 000887	7, 947709	0, 00039
$l\,n^{18} = 9,596944$	0, 000700	7, 844980	0, 00028
$l\,n^{20} = 9,552160$	0, 000566	7, 753130	0, 00020
$l\,n^{22} = 9,507376$	0, 000468	7, 670073	0, 00015
$l\,n^{24} = 9,462592$	0, 000393	7, 594271	0, 00011

La ſomme de ces douze termes fait 0, 07937, à laquelle ſi l'on ajoute pour les ſuivans 0, 00033, on aura

$$A = \frac{1 - 0,07970}{1 - nn} = \frac{0,92030}{1 - nn} = 9,3927.$$

§. 16. Pour les caractères $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, &c. nous nous arrêterons au quinzième $\mathfrak{p}$, où $r = 14$, & nous aurons

$$\mathfrak{p} = 15\,(1 + \sqrt{(1 - nn)}) = 19,6953$$
$$\mathfrak{o} = 28 - \frac{27.31\,nn}{4\,\mathfrak{p}} = 18,4166$$
$$\mathfrak{n} = 26 - \frac{25.29\,nn}{4\,\mathfrak{o}} = 17,1226$$
$$\mathfrak{m} = 24 - \frac{23.27\,nn}{4\,\mathfrak{n}} = 15,8214$$
$$\mathfrak{l} = 22 - \frac{21.25\,nn}{4\,\mathfrak{m}} = 14,5171$$
$$\mathfrak{k} = 20 - \frac{19.23\,nn}{4\,\mathfrak{l}} = 13,2117$$
$$\mathfrak{i} = 18 - \frac{17.21\,nn}{4\,\mathfrak{k}} = 11,9065$$
$$\mathfrak{h} = 16 - \frac{15.19\,nn}{4\,\mathfrak{i}} = 10,6022$$
$$\mathfrak{g} = 14 - \frac{13.17\,nn}{4\,\mathfrak{h}} = 9,2994$$

$\mathfrak{f} =$

$$\mathfrak{f} = 12 - \frac{11 \cdot 15\, nn}{4\,\mathfrak{g}} = 7,9989$$
$$\mathfrak{e} = 10 - \frac{9 \cdot 13\, nn}{4\,\mathfrak{f}} = 6,7015$$
$$\mathfrak{d} = 8 - \frac{7 \cdot 11\, nn}{4\,\mathfrak{e}} = 5,4090$$
$$\mathfrak{c} = 6 - \frac{5 \cdot 9\, nn}{4\,\mathfrak{d}} = 4,1239$$
$$\mathfrak{b} = 4 - \frac{3 \cdot 7\, nn}{4\,\mathfrak{c}} = 2,8517$$
$$\mathfrak{a} = 2 - \frac{1 \cdot 5\, nn}{4\,\mathfrak{b}} = 1,6046$$

Il auroit ſuffi, à la verité, de s'arrêter au caractère $\mathfrak{i}$ ou $\mathfrak{k}$; mais comme les expreſſions ſont très ſimples, j'ai trouvé mieux d'aller un peu plus loin, d'autant que tout le reſte de notre calcul dépend de ces quantités $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, &c.

§. 17. Ces valeurs étant trouvés, on en déduit les coëfficiens du binome qui, en y joignant le premier, feront

$A = \frac{0,9202}{1 - nn} = 9,3927$	$F = \frac{11\, n E}{2\,\mathfrak{e}} = 6,8940$
$B = \frac{3\, n A}{\mathfrak{a}} = 16,6783$	$G = \frac{13\, n F}{2\,\mathfrak{f}} = 5,3207$
$C = \frac{5\, n B}{2\,\mathfrak{b}} = 13,8868$	$H = \frac{15\, n G}{2\,\mathfrak{g}} = 4,0755$
$D = \frac{7\, n C}{2\,\mathfrak{c}} = 11,1936$	$I = \frac{17\, n H}{2\,\mathfrak{h}} = 3,1032$
$E = \frac{9\, n D}{2\,\mathfrak{d}} = 8,8445$	&c.

§. 18. La quantité k, qui entre dans la détermination des coëfficiens $\mathfrak{B}$ et B' ſe trouve

$$k = \frac{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}}{aa} = 3,5931$$

& la ſuite de ces coëfficiens ſera:

$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}a(2A - C) - k = -1,8214$	$A' = \frac{1}{2}aB - A = -3,3607$
$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}a(B - D) = +1,9840$	$B' = \frac{1}{2}a(2A + C) - B - k = -8,4549$
$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}a(C - E) = +1,8236$	$C' = \frac{1}{2}a(B + D) - C = -3,8065$
$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}a(D - F) = +1,5550$	$D' = \frac{1}{2}a(C + E) - D = -2,9724$
$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}a(E - G) = +1,2744$	$E' = \frac{1}{2}a(D + F) - E = -2,3028$
$\mathfrak{G} = \frac{1}{2}a(F - H) = +1,0194$	$F' = \frac{1}{2}a(E + G) - F = -1,7709$
$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}a(G - I) = +0,8020$	$G' = \frac{1}{2}a(F + H) - G = -1,3534$
&c.	$H' = \frac{1}{2}a(G + I) - H = -1,0289$
	&c.

§. 19. Dans les coëfficiens ſuivans il entre la quantité

$$\frac{m}{\mu} = (1 + aa)^{\frac{3}{2}} = 1,8799,$$

& la quantité $i = \frac{d\vartheta}{d\eta}$. Pour déterminer celle-ci il faut remarquer, qu'en regardant le mouvement des deux Planètes comme uniforme, il y aura $\frac{d\Phi}{d\vartheta} = 1$ & $\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{5768}{3548}$, le mouvement diurne de Venus étant $1°.\ 36'.\ 8'' = 5768''$ & celui de la Terre $59'.\ 8'' = 3548''$. On aura donc

$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{2220}{3548}$ & partant

$i = \frac{3548}{2220} = 1,59819$. Donc les coëfficiens:

$\mathfrak{A}' = A' + 2\Delta - \frac{m}{\mu} = 2\Delta - 5,2406$	$\mathfrak{E}' = E' - \frac{2i}{4}\mathfrak{E} = -3,5454$
$\mathfrak{B}' = B' - \frac{2i}{1}\mathfrak{B} = -2,6330$	$\mathfrak{F}' = F' - \frac{2i}{5}\mathfrak{F} = -2,5856$
$\mathfrak{C}' = C' - \frac{2i}{2}\mathfrak{C} = -6,9773$	$\mathfrak{G}' = G' - \frac{2i}{6}\mathfrak{G} = -1,8964$
$\mathfrak{D}' = D' - \frac{2i}{3}\mathfrak{D} = -4,9153$	$\mathfrak{H}' = H' - \frac{2i}{7}\mathfrak{H} = -1,3951$
	&c.

§. 20. Par rapport à la conſtante Δ il faut remarquer que, puisque $\alpha' = \Delta - 2\alpha = 0$ & $\alpha = \mathfrak{A}'$, il y aura

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\Delta = \mathfrak{A}' = 2\Delta - 5,2406$$

&

& partant $\Delta = 3,4937$. Nous aurons donc enfin

$\alpha = \mathfrak{A}' \qquad = \quad 1,747$	$\beta' = -(2\beta + i\mathfrak{B}) \qquad = + 11,565$
$\beta = \dfrac{\mathfrak{B}'}{1-\frac{1}{ii}} = - \quad 4,327$	$\frac{1}{2}\gamma' = -\frac{1}{2}(2\gamma + \frac{1}{2} i\mathfrak{C}) = - 13,120$
$\gamma = \dfrac{\mathfrak{C}'}{1-\frac{4}{ii}} \qquad = 12,327$	$\frac{1}{3}\delta' = -\frac{1}{3}(2\delta + \frac{1}{3} i\mathfrak{D}) = - \quad 1,622$
$\delta = \dfrac{\mathfrak{D}'}{1-\frac{9}{ii}} \qquad = \quad 1,948$	$\frac{1}{4}\varepsilon' = -\frac{1}{4}(2\varepsilon + \frac{1}{4} i\mathfrak{E}) = - \quad 0,492$
$\varepsilon = \dfrac{\mathfrak{E}'}{1-\frac{16}{ii}} \qquad = \quad 0,673$	$\frac{1}{5}\zeta' = -\frac{1}{5}(2\zeta + \frac{1}{5} i\mathfrak{F}) = - \quad 0,199$
$\zeta = \dfrac{\mathfrak{F}'}{1-\frac{25}{ii}} \qquad = \quad 0,294$	$\frac{1}{6}\eta' = -\frac{1}{6}(2\eta + \frac{1}{6} i\mathfrak{G}) = - \quad 0,093$
$\eta = \dfrac{\mathfrak{G}'}{1-\frac{36}{ii}} \qquad = \quad 0,145$	$\frac{1}{7}\theta' = -\frac{1}{7}(2\theta + \frac{1}{7} i\mathfrak{H}) = - \quad 0,041$
&c.	&c.

§. 21. Ces valeurs étant trouvées, les corrections cherchées seront

$$v - 1 = \mu\,(\alpha + \beta\,\text{cof.}\,\eta + \gamma\,\text{cof.}\,2\,\eta + \delta\,\text{cof.}\,3\,\eta + \&c.)$$

$$\Phi - \theta = \mu i\,(\beta'\,\text{fin.}\,\eta + \tfrac{1}{2}\gamma'\,\text{fin.}\,2\,\eta + \tfrac{1}{3}\delta'\,\text{fin.}\,3\,\eta + \&c.)$$

où, en mettant la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $= 1000000$, il y a $\mu = 1,519$ & $\mu i = 0,501''$, d'où il ſera facile de calculer la table ſuivante, en donnant à l'angle η ſucceſſivement les valeurs $0°$, $10°$, $20°$, $30°$, &c.

§. 22. Cette table convient parfaitement, quant à la forme, avec celle de feu M. *de la Caille*. Quant à la correction des Longitudes, elle eſt plus petite dans la

 mienne

mienne d'un tiers à peu près. Les corrections de distances ne diffèrent pas tant: La plus grande correction étant d'après *de la Caille* de 31 & 26 d'après ma table.

§. 23. En comparant notre table avec celle de M. *Lexell*, nous voyons que les corrections des Longitudes sont les mêmes dans l'une & l'autre: La petite différence dans celles des longitudes n'est d'aucune conséquence.

§. 24. Si nous confrontons cette nouvelle table avec celle que j'ai calculée autrefois sur les mêmes principes, nous voyons que les legères differences qui s'y trouvent, ne peuvent venir que des valeurs de *a* & de *m* un peu différentes de celles que j'avois adoptées en calculant la première table.

§. 25. Tant que nous ne serons pas mieux instruits sur la masse de Venus, l'une & l'autre de ces deux nouvelles tables, calculées en différent tems, par deux différentes personnes &, ce qui plus est, d'après deux méthodes entièrement différentes, doit donc mériter la confiance la plus entière des Astronomes.

TABLE

+	−	+	+	D
10, 6	1, 1	7, 9	17, 4	30
10, 6	0, 4	7, 8	17, 9	29
10, 6	+	7, 6	18, 4	28
10, 6	0, 9	7, 3	18, 9	27
10, 5	1, 5	7, 1	19, 4	26
10, 5	2, 1	6, 9	19, 9	25
10, 5	2, 7	6, 8	20, 3	24
10, 5	3, 3	6, 5	20, 7	23
10, 5	4, 0	6, 3	21, 1	22
10, 4	4, 7	6, 0	21, 5	21
10, 4	5, 4	5, 7	21, 9	20
10, 4	6, 1	5, 4	22, 2	19
10, 3	6, 8	5, 1	22, 5	18
10, 3	7, 5	4, 9	22, 8	17
10, 2	8, 2	4, 6	23, 1	16
10, 1	8, 8	4, 3	23, 4	15
10, 0	9, 4	4, 1	23, 7	14
9, 9	10, 0	3, 8	24, 0	13
9, 8	10, 6	3, 5	24, 3	12
9, 7	11, 2	3, 2	24, 5	11
9, 6	11, 8	3, 0	24, 7	10
9, 4	12, 4	2, 7	24, 9	9
9, 3	13, 0	2, 4	25, 1	8
9, 1	13, 6	2, 1	25, 2	7
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

TABLE DES CORRECTIONS DU LIEU DE LA TERRE
DÉRANGÉ PAR L'ACTION DE VENUS.

ARGUMENT:
DIFFÉRENCE DES LONGITUDES HELIOCENTRIQUES DE ♀ ET ♁.

Sign.	0		I		II		III		IV		V		Sign.
Degr.	Long. −	Dist. +	Long −	Dist. +	Long. −	Dist. −	Long. +	Dist. −	Long. +	Dist. −	Long. +	Dist. +	Degr.
0	0, 0	19, 7	3, 9	5, 1	0, 4	13, 1	6, 5	15, 2	10, 6	1, 1	7, 9	17, 4	30
1	0, 2	19, 6	3, 8	4, 2	0, 2	13, 5	6, 7	14, 9	10, 6	0, 4	7, 8	17, 9	29
2	0, 4	19, 5	3, 8	3, 3	+	14, 0	6, 9	14, 6	10, 6	+	7, 6	18, 4	28
3	0, 6	19, 4	3, 8	2, 4	0, 2	14, 3	7, 2	14, 3	10, 6	0, 9	7, 3	18, 9	27
4	0, 8	19, 3	3, 8	1, 5	0, 4	14, 6	7, 4	14, 0	10, 5	1, 5	7, 1	19, 4	26
5	1, 0	19, 1	3, 7	0, 6	0, 7	14, 9	7, 6	13, 7	10, 5	2, 1	6, 9	19, 9	25
6	1, 2	18, 8	3, 7	——	0, 9	15, 1	7, 7	13, 4	10, 5	2, 7	6, 8	20, 3	24
7	1, 4	18, 5	3, 6	0, 6	1, 1	15, 5	7, 9	13, 1	10, 5	3, 3	6, 5	20, 7	23
8	1, 6	18, 2	3, 6	1, 1	1, 3	15, 7	8, 1	12, 7	10, 5	4, 0	6, 3	21, 1	22
9	1, 8	17, 9	3, 5	1, 6	1, 6	15, 9	8, 3	12, 3	10, 4	4, 7	6, 0	21, 5	21
10	2, 0	17, 6	3, 4	2, 1	1, 8	16, 0	8, 5	11, 9	10, 4	5, 4	5, 7	21, 9	20
11	2, 1	17, 2	3, 3	2, 7	2, 1	16, 1	8, 6	11, 5	10, 4	6, 1	5, 4	22, 2	19
12	2, 3	16, 7	3, 2	3, 3	2, 3	16, 2	8, 8	11, 0	10, 3	6, 8	5, 1	22, 5	18
13	2, 4	16, 2	3, 1	3, 9	2, 5	16, 3	8, 9	10, 5	10, 3	7, 5	4, 9	22, 8	17
14	2, 6	15, 7	3, 0	4, 5	2, 8	16, 4	9, 1	10, 0	10, 2	8, 2	4, 6	23, 1	16
15	2, 7	15, 2	2, 9	5, 1	3, 0	16, 5	9, 2	9, 5	10, 1	8, 8	4, 3	23, 4	15
16	2, 9	14, 7	2, 8	5, 7	3, 3	16, 6	9, 4	9, 0	10, 0	9, 4	4, 1	23, 7	14
17	3, 0	14, 1	2, 7	6, 3	3, 5	16, 6	9, 5	8, 5	9, 9	10, 0	3, 8	24, 0	13
18	3, 1	13, 5	2, 5	6, 9	3, 7	16, 7	9, 6	8, 0	9, 8	10, 6	3, 5	24, 3	12
19	3, 2	12, 8	2, 4	7, 5	4, 0	16, 7	9, 7	7, 5	9, 7	11, 2	3, 2	24, 5	11
20	3, 4	12, 1	2, 2	8, 2	4, 2	16, 7	9, 9	7, 0	9, 6	11, 8	3, 0	24, 7	10
21	3, 4	11, 4	2, 1	8, 8	4, 5	16, 6	10, 0	6, 5	9, 4	12, 4	2, 7	24, 9	9
22	3, 5	10, 7	1, 9	9, 4	4, 7	16, 6	10, 1	5, 9	9, 3	13, 0	2, 4	25, 1	8
23	3, 6	10, 0	1, 7	10, 0	4, 9	16, 5	10, 2	5, 3	9, 1	13, 6	2, 1	25, 2	7
24	3, 6	9, 3	1, 6	10, 5	5, 2	16, 4	10, 2	4, 7	8, 9	14, 2	1, 8	25, 3	6
25	3, 7	8, 7	1, 4	11, 0	5, 4	16, 2	10, 3	4, 1	8, 8	14, 8	1, 5	25, 4	5
26	3, 7	8, 0	1, 2	11, 5	5, 6	16, 0	10, 4	3, 5	8, 6	15, 4	1, 2	25, 5	4
27	3, 8	7, 3	1, 0	11, 9	5, 9	15, 8	10, 4	2, 9	8, 5	15, 9	0, 9	25, 6	3
28	3, 8	6, 6	0, 8	12, 3	6, 1	15, 6	10, 5	2, 3	8, 3	16, 4	0, 6	25, 6	2
29	3, 8	5, 9	0, 6	12, 7	6, 3	15, 4	10, 5	1, 7	8, 1	16, 9	0, 3	25, 7	1
30	3, 9	5, 1	0, 4	13, 1	6, 5	15, 2	10, 6	1, 1	7, 9	17, 4	0, 0	25, 7	0
Degr.	+ Long.	+ Dist.	+ Long.	− Dist.	− Long.	− Dist.	− Long.	− Dist.	− Long.	+ Dist.	− Long.	+ Dist.	Degr.
Sign.	XI		X		IX		VIII		VII		VI		Sign.

LOCVS LVNAE
EX OCCVLTATIONE γ VIRGINIS ANNO 1780. DIE $\frac{9}{20}$ MARTII OBSERVATA DETERMINATVS.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKI.

Horologii, ad quod occultationem γ Virginis obſeruaui motum fuiſſe vniformem concluſi ex altitudinibus Solis correſpondentibus, reperi enim:

Die 5. Martii ſt. vet. merid. verum	-	$0^h. 2'. 34'', 4$
—— 9. ——	- - - -	0. 3. 58, 4
—— 10. ——	- - - - -	0. 4 18, 4

Hinc acceleratio horologii ſpatio diei Solaris medii a die 5 ad 9 Martii colligitur $39'', 1$ et a die 9 ad 10 Martii $38''. 8$.

Die $\frac{9}{20}$ Martii.

Immerſio γ ♍ ad limbum ☽ lucidum $14^h. 26'. 59''$. t. h.
Emerſio eiusdem ad limbum obſcurum 15. 25. 52.

Momentum primum certum eſt ad vnum minutum ſecundum, poſterius vero non item, quia oculo non in id ipſum punctum, ad quod Emerſio contigit, directo ſtellam exili iam interuallo a limbo Lunae ſeiunctam conſpexi; vera

vera igitur Emersio aliquot secundis, attamen paucis, a me obseruatam praecesserit necesse est.

Momentis horologii ad tempus verum reductis habebitur

Petropoli	Immersio γ ♍	- - -	$14^h. 22'. 48''$.
	Emersio	- - - - -	15. 21. 41.
Eadem occultatio obseruata est			
Stockholmiae	Immersio	- - -	13. 25. 13.
——	Emersio	- - -	14. 28. 28.
Gedani	Immersio	- - -	13. 33. 47.
——	Emersio	- - -	14. 38. 4.

conferatur Calendarium astronomicum Berolinense pro anno 1783 pag. 112 et 152.

Antequam ad conclusiones ex obseruationibus his deducendas progrediar, non abs re erit, vt Elementa locum stellae et Lunae spectantia ob oculos ponam. Ex Calendario astronomico Berolinensi pro anno 1780 Longitudo stellae pro initio anni est $6^s. 7°. 6'. 16''$. et ob Praecessionem + $11''$, Aberrationem + $19''$, 9 et Nutationem — $1''$, 2 Longitudo stellae ad tempus obseruationis fit $6^s. 7°. 6'. 45''$, 7. Latitudo vero $2°. 48'. 56''$. Bor. Porro ex Tabulis *Maieri* Londini editis die ♀ Martii $12^h. 22'. 44''$ siue $12^h. 30'$. tempore medio Grenouicensi est:

Longitudo ☉lis media	- -	$11^s. 29°.$	$7'$.	$12''$, 9
Longitudo ☉lis vera	- -	0. 1.	1.	3, 4
Motus horarius ☉lis	- -		2.	27, 8
Obliquitas Eclipticae	- -	23.	28.	10, 5
Longitudo ☽ vera	- -	6. 6.	43.	54, 6
Latitudo ☽ Bor.	- -	3.	45.	24, 7
Motus horar. ☽ in Longit.			36.	58,
in Latit.		—	2.	13, 2
Parall. aequat.	- - -		60.	30,
Diam. ☽ horiz.	- - -		32.	58, 3

Posito

Posita iam differentia meridianorum Petropolitani et Grenovicensis $2^h. 1'. 16''$. ratione diametri aequatoris ad axem telluris $= 201:200$ pro Immersione Petropoli obseruata reperi Parallaxin Lunae in Longitudinem $+ 6'. 58''. 2$ in Latitudinem $- 53'. 42'', 8$. Diametrum Lunae apparentem $33'. 14'', 2$ et denotantibus δ, y et π correctiones, quas Diameter, Latitudo et Parallaxis Lunae horizontalis admittere possunt, tempus verum coniunctionis ex Immersione prodit:

$$15^h. 0'. 44'' + 1.64\,\delta - 0,27\,y + 0,43\,\pi.$$

Pro Emersione vero computo instituto reperi Parallaxin in Longitudinem $+ 3'. 30'', 4$, in Latitudinem $- 56'. 13'', 9$. Diametrum Lunae apparentem $33'. 11'', 3$ et tempus verum coniunctionis:

$$15^h. 0'. 36'' - 1.63\,\delta + 0,18\,y + 0,08\,\pi$$

Hinc $8'' + 3,27\,\delta - 0,45\,y + 0,35\,\pi = 0.$

Immersio Stockholmiae obseruata similem in modum ad computum reuocata, posita Longitudine illius a meridiano Grenouicensi $1^h. 12'. 8''$, dat Parallaxin Lunae in Longitudinem $+ 13'. 15''$, in Latitudinem $- 50'. 39'', 1$. Diametrum Lunae apparentem $33'. 16'', 1$ et tempus verum coniunctionis:

$$14^h. 11'. 49'' + 1,75\,\delta - 0,65\,y + 0,90\,\pi$$

Pro Emersione autem reperitur Parallaxis Lunae in Longitudinem $+ 6'. 13'', 4$ in Latitudinem $- 53'. 49''$, Diameter Lunae apparens $33'. 14''$: Hinc tempus verum coniunctionis:

$$14^h. 11'. 36'' - 1,62\,\delta + 0,06\,y + 0,10\,\pi$$

ac tandem

$$13'' + 3,37\,\delta - 0,71\,y + 0,80\,\pi = 0.$$

Pro Immersione Gedani obseruata, posita illius Longitudine a Grenouico $1^h. 14'. 0''$ inuenitur Parallaxis Lunae in Longitudinem $+ 9'. 54'', 4$ in Latitudinem $- 48'. 57'', 2$, Diameter Lunae apparens $33'. 15'', 3$ et tempus verum coniunctionis

$$14^h. 13'. 55'' + 1,82\,\delta - 0,83\,y + 0,94\,\pi.$$

Emersio autem dat tempus verum coniunctionis $14^h. 19'. 27''$, quae licet pro exacte obseruata in Calendario astronomico Berolinensi annuncietur, attamen illam ad aliquot minuta prima erroneam esse exinde patet, quod momentum coniunctionis ex ea deductum plus, quam par est, differat a momento coniunctionis ex Immersione elicito, et quod differentia meridianorum Stockholmiam et Gedanum inter ex Emersione $7'. 51''$. resultet, cum per alias obseruationes constet eam duo minuta prima non superare. Seposita itaque obseruatione Gedanensi remanebunt sequentes aequationes adimplendae:

$$8'' + 3,27\,\delta - 0,46\,y + 0,35\,\pi = 0$$
$$13 + 3,37\,\delta - 0,71\,y + 0,80\,\pi = 0.$$

Quibus, si ponatur $\pi = 0$, satisfaciunt $\delta = 0'', 4$ et $y = 20''$, posito vero $\pi = 1$ prodit $\delta = 0, 5$ et $y = 22''$, ast cum per varias disquisitiones Celeber. *Lexell* Diametrum Lunae e Tabulis depromtam minuendam potius quam augendam esse constet, vero simile est alterutrius harum aequationum numerum absolutum correctione aliqua indigere, vt pro δ prodeat valor negatiuus; admisso vero exiguo errore in Emersione Petropoli obseruata requisito hoc satis fieri poterit; posito enim veram Emersionem Petropoli, prout suadet circumstantia supra commemorata, duobus minutis secundis praecessisse illam, quae in computo hoc est adhibi-

ta,

ta, et retento $\pi = 0$ prodibunt eiusmodi aequationes, quibus satis fit $\delta = 1'', 5$ et $\gamma = + 11''$. posito vero Emersionem tribus minutis secundis iusto tardius esse obseruatam reperitur $\delta = - 2'', 4$ et $\gamma = + 8''$. Hinc momenta pro tempore coniunctionis et differentia meridianorum Petropolitani et Stockholmiensis habebunt se vt sequitur:

	Temp. coniunct.	Differ. merid.
Petropoli ex Immersione	$15^h. 0'. 38''.$	$0^h. 48'. 58''.$
ex Emersione	15. 0. 38.	0. 48. 58.
Stockholm. ex Immersione	14. 11. 40.	
ex Emersione	14. 11. 40.	

Retentis valoribus $\delta = - 2'', 4$ et $\gamma = + 8''$. Immersio Gedani obseruata dat tempus coniunctionis $14^h. 13'. 44''$. Hinc Longitudo illius a Petroburgo prodit $46'. 54''$ versus occasum et a Stockholmia $2'. 44''$ versus ortum. Posita iam Longitudine Stockholmiae a Grenouico $1^h. 12'. 8''$ tempus verum coniunctionis ad meridianum Grenouicensem habetur $12^h. 59'. 32''$, pro quo Longitudo Lunae est $6^s. 7°. 6'. 34'', 6$ et cum Longitudo stellae sit $6^s. 7°. 6'. 45'', 7$ concluditur correctio Tabularum in Longitudinem $+ 11''$; quodsi Longitudo Stockholmiae a Grenouico statuatur maxima, quam praebent non nullae obseruationes sc. $1^h. 12' 24''$ prodit correctio Tabularum in Longitudinem $+ 20'', 4$. Ex quo apparet correctionem Tabularum in Longitudinem pro tempore obseruationis non maiorem $+ 20''$ nec minorem $+ 11''$, in Latitudinem vero $+ 8''$ aut $+ 11''$ statui debere.

Fig. 2.

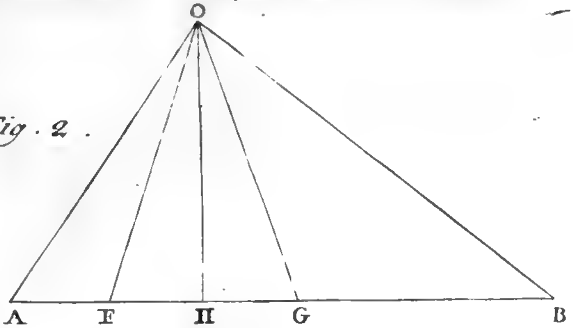
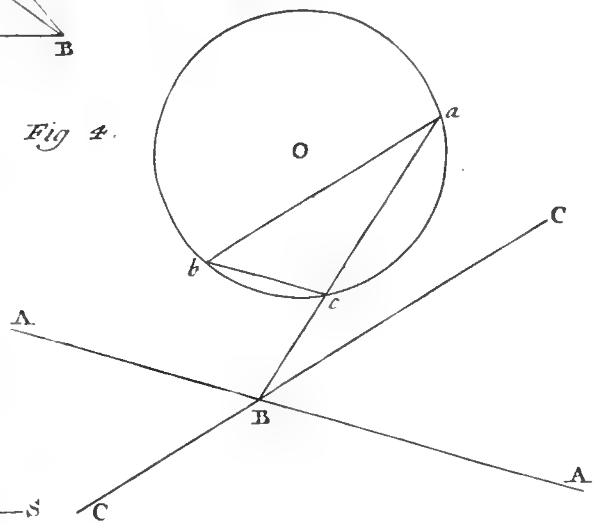


Fig. 4.



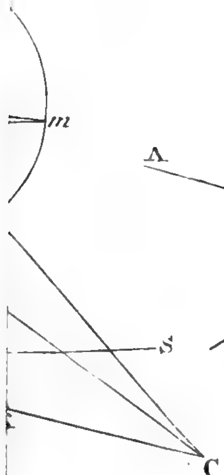


Fig. 5.

Fig. 6.

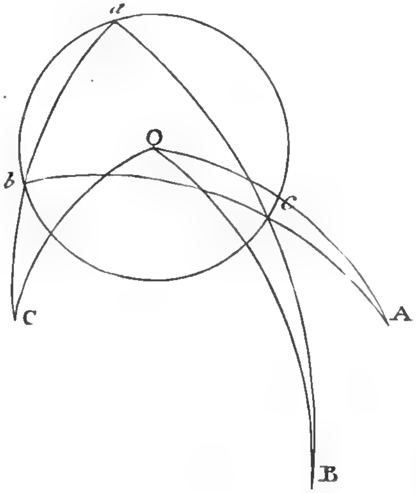


Fig. 1.

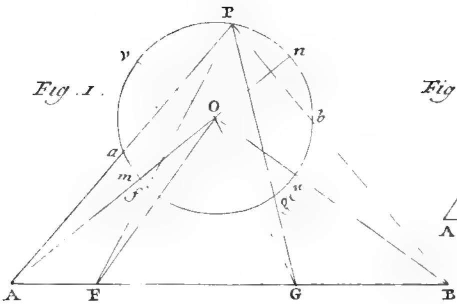


Fig. 2.

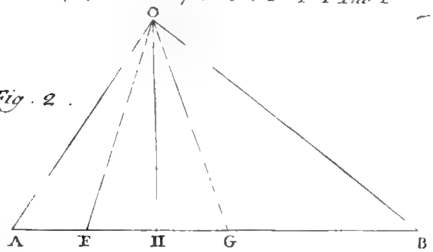


Fig. 3.

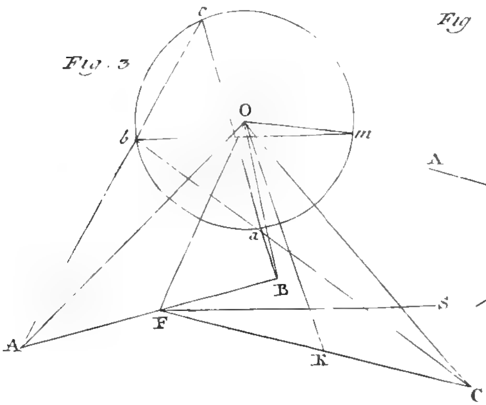


Fig. 4

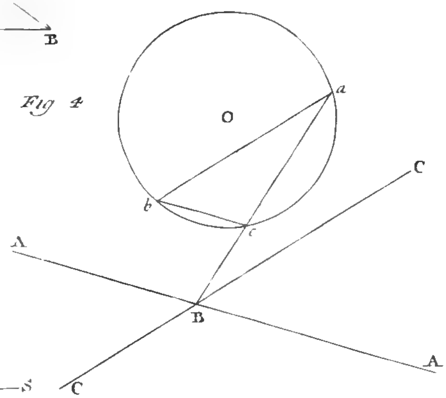


Fig. 5.

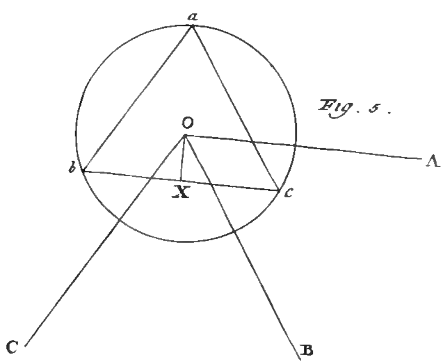


Fig. 6

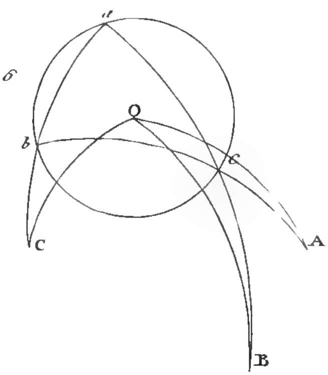


Fig. 2.

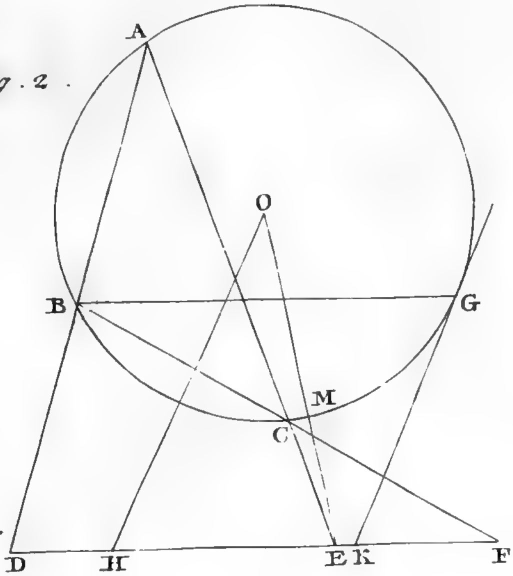


Fig. 3.

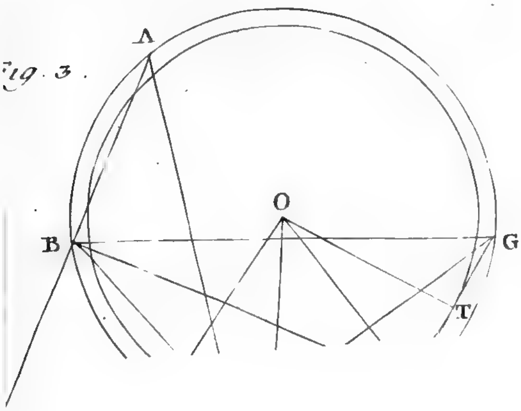


Fig 1

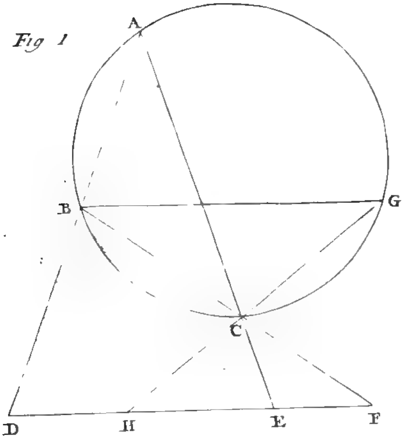


Fig. 2.

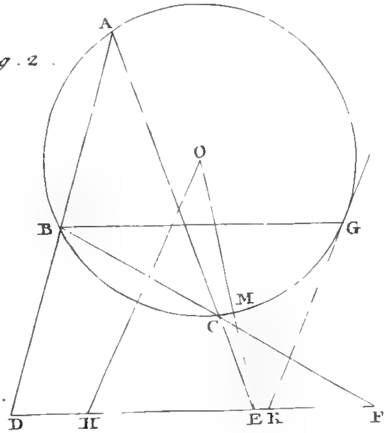
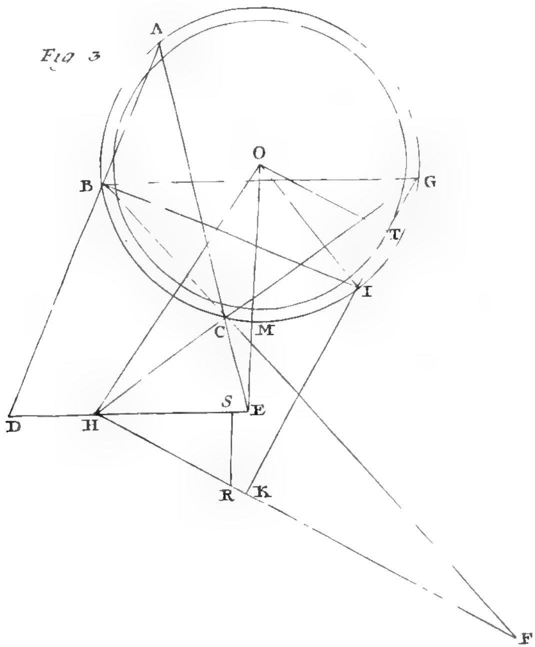


Fig 3



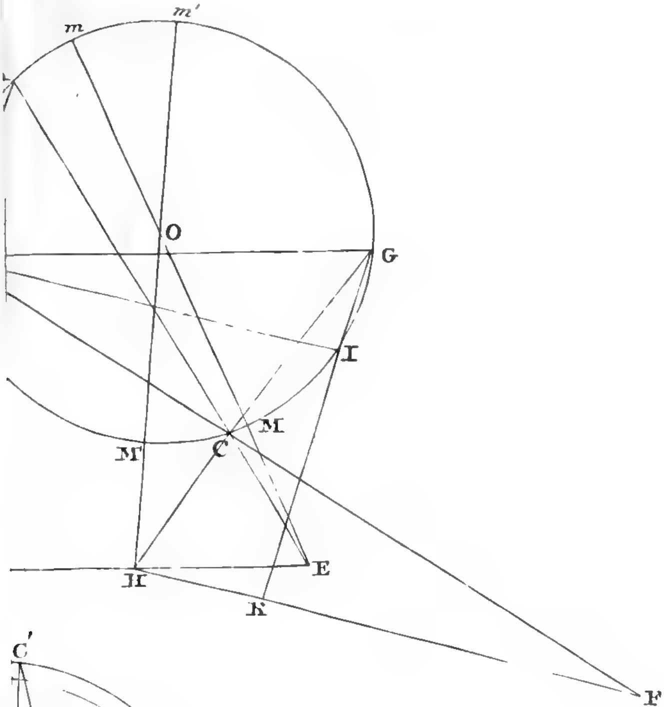


Fig. 2.

Fig 1

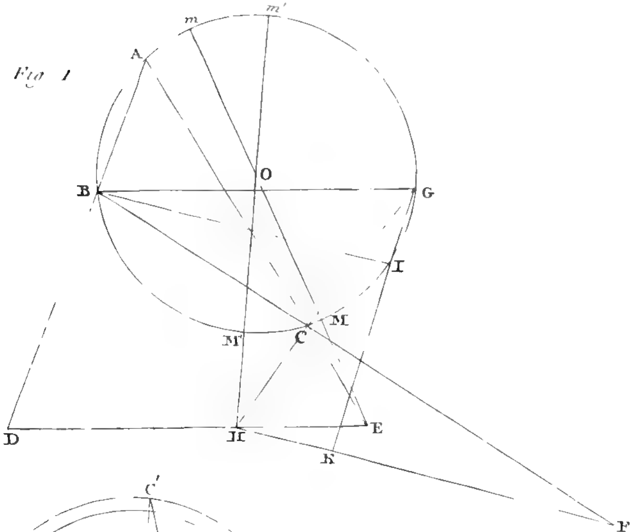


Fig 2

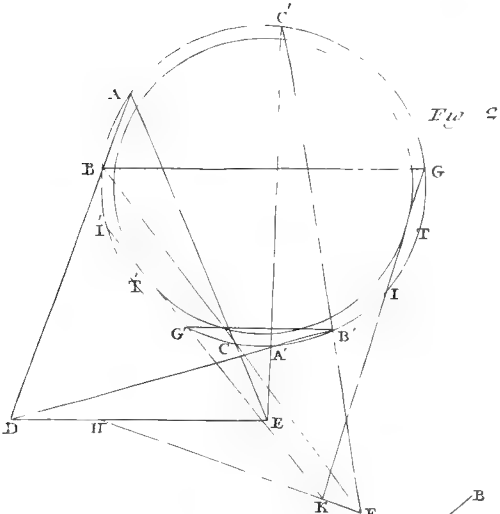
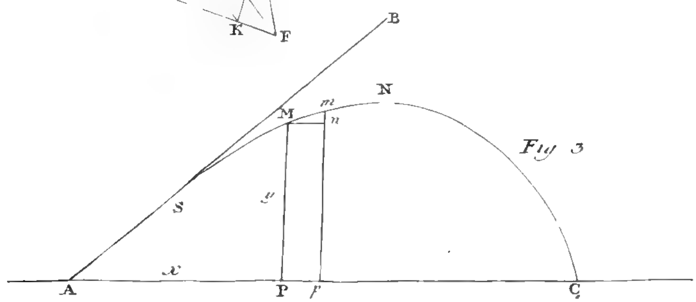


Fig 3



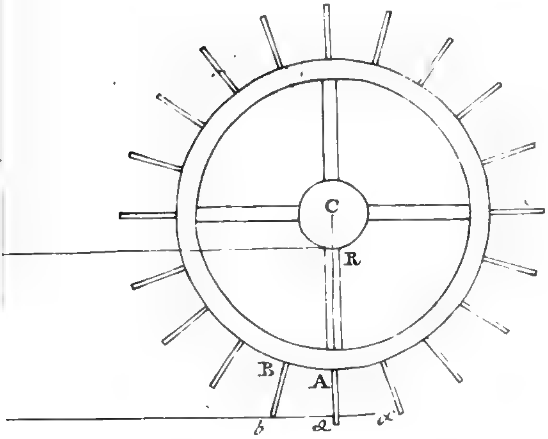
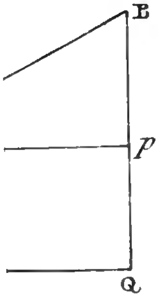


Fig. 4.



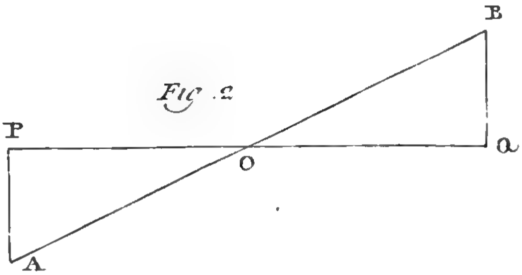


Fig. 2

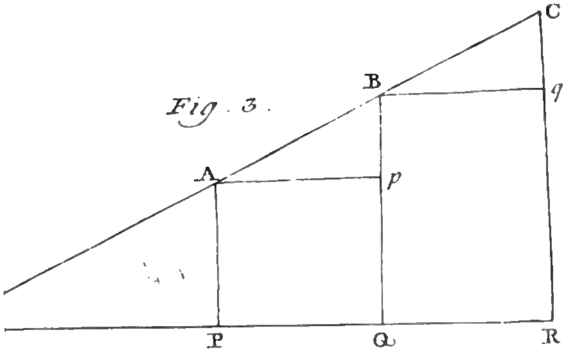


Fig. 3.

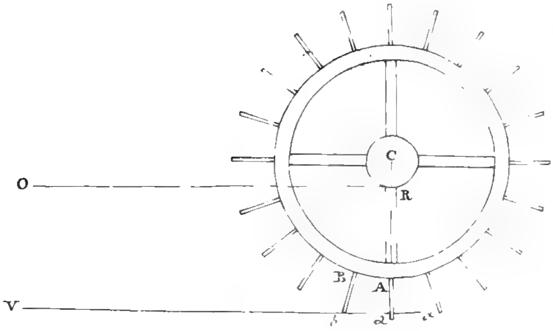


Fig 4

Fig 1

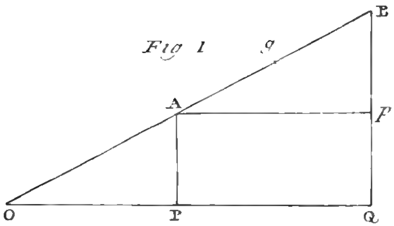


Fig 2

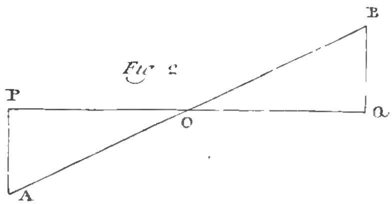
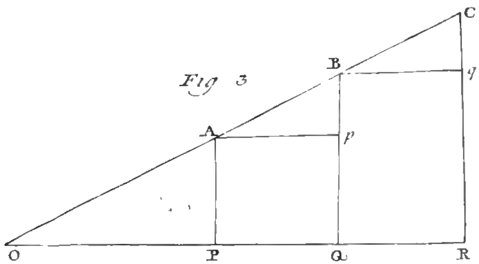
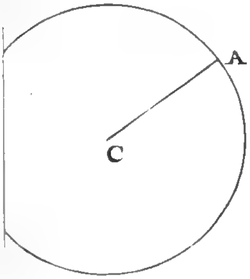


Fig 3





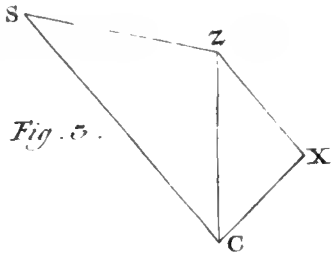


Fig. 5.

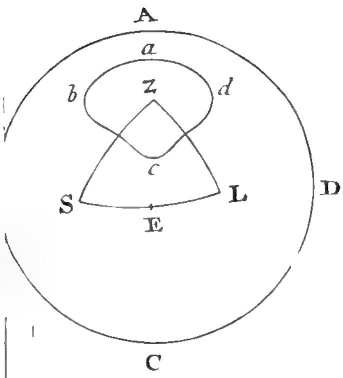


Fig. 6.

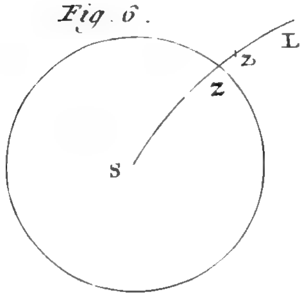


Fig. 4.

Fig. 7.

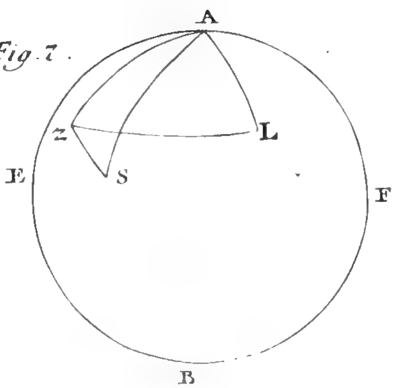


Fig 2

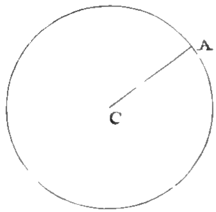


Fig 3

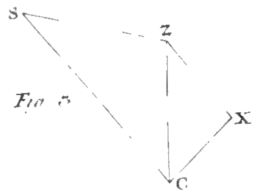


Fig 1

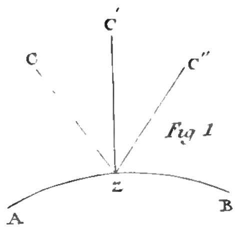


Fig 5

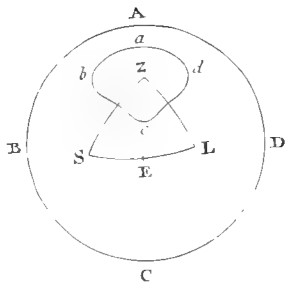


Fig 6

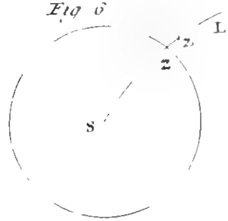


Fig 4

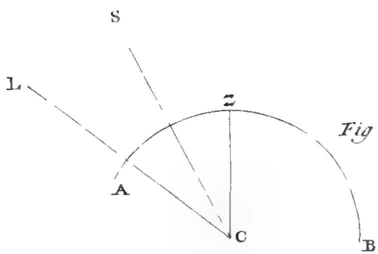
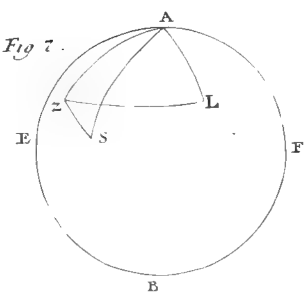
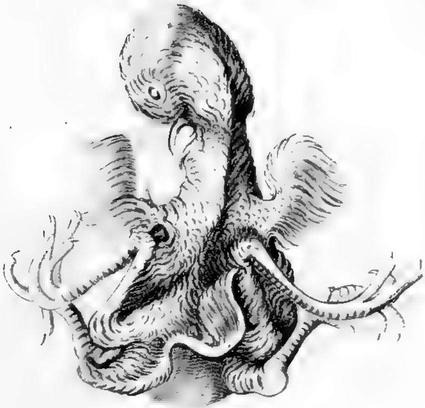
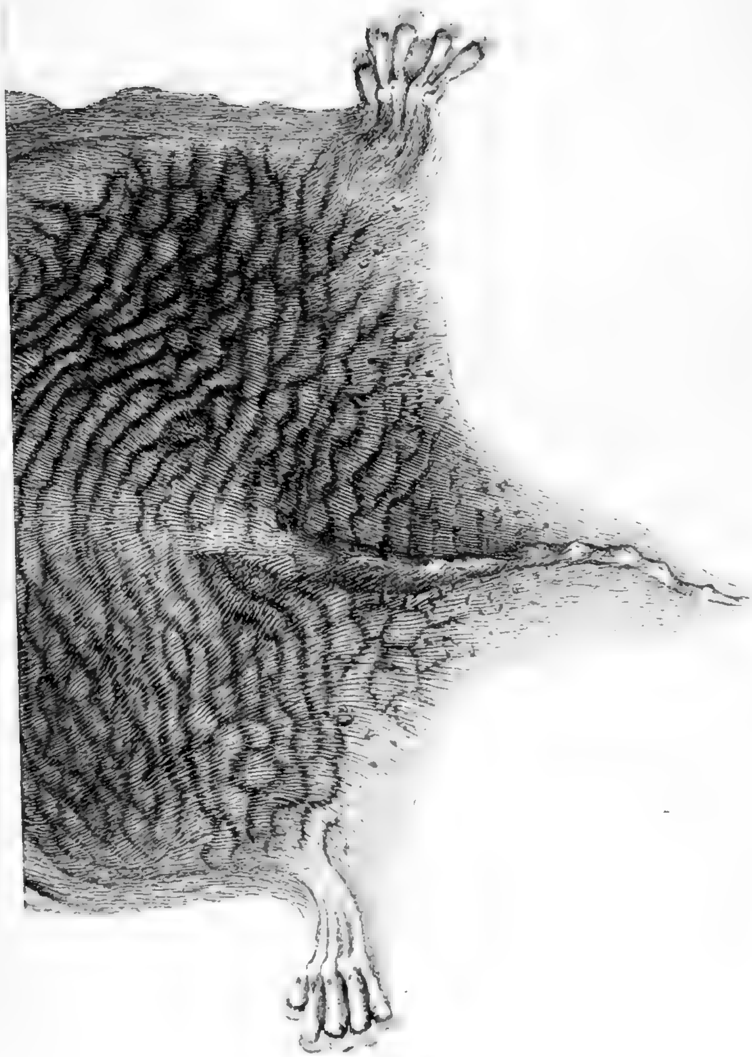


Fig 7.







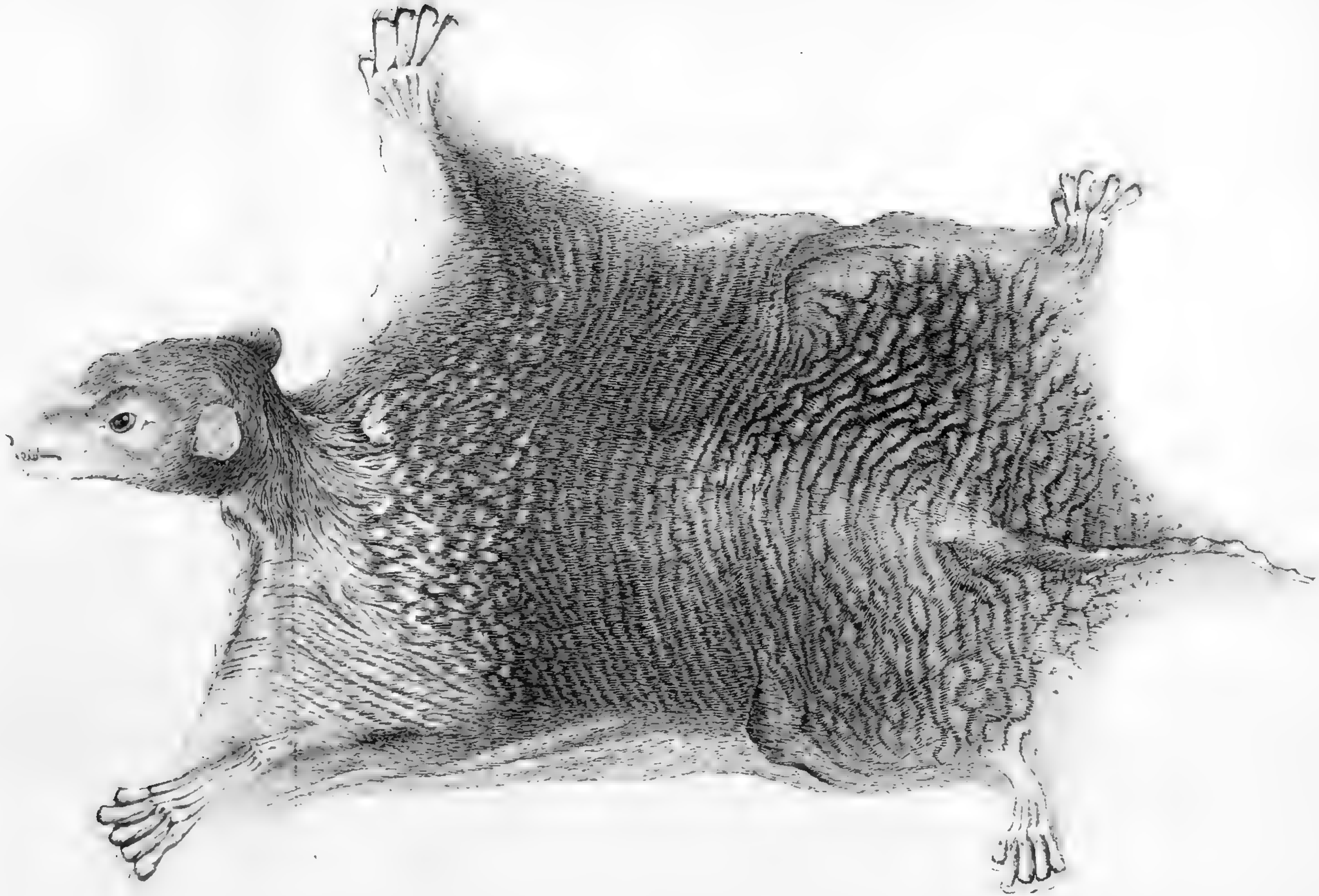


Fig. 1. b.

Fig. 1.

Fig. 8.

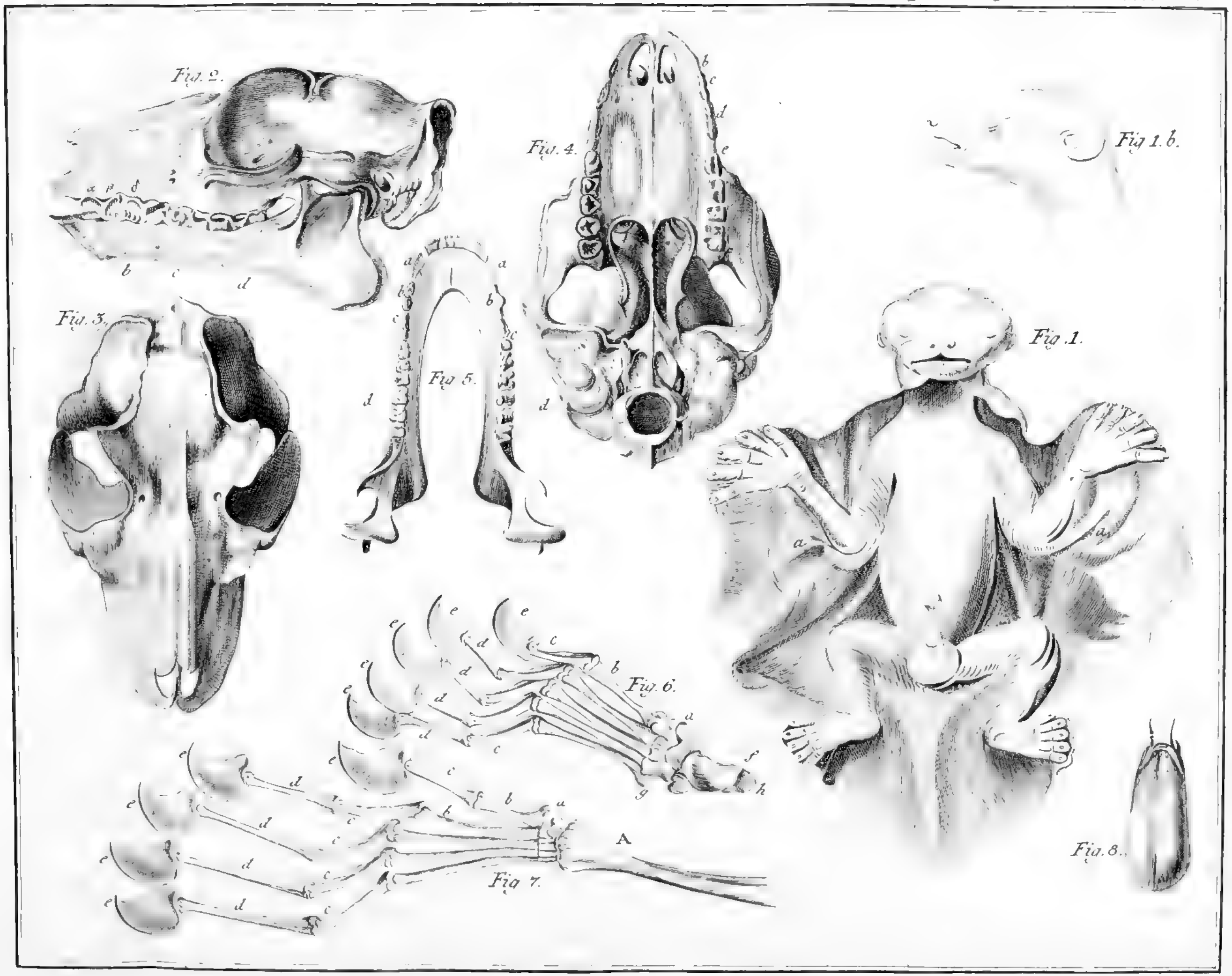


Fig. 1.
Fig 1. b.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig 7.
Fig. 8.

g. 3.

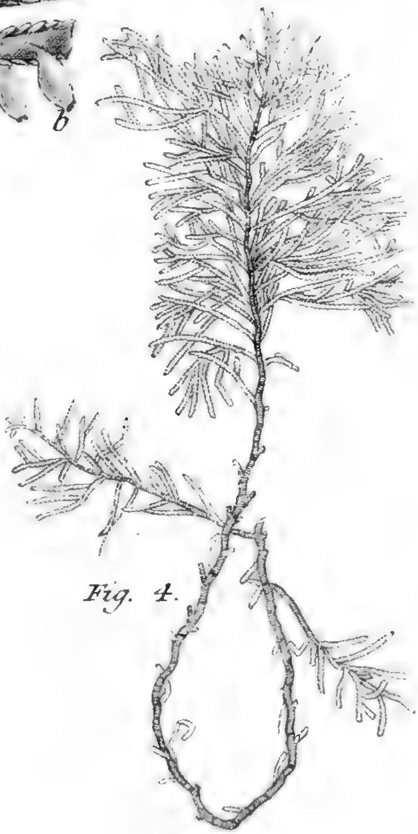


Fig. 4.

Fig. 1.

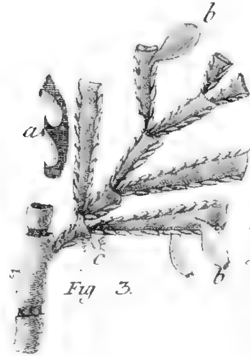


Fig. 3.

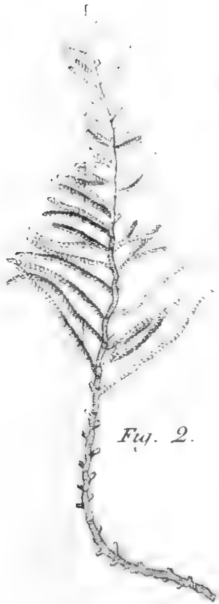


Fig. 2.

Fig. 4.

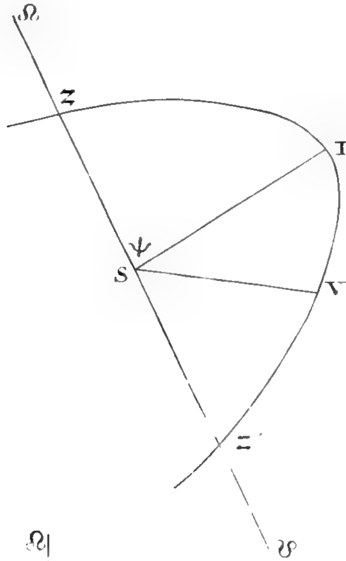
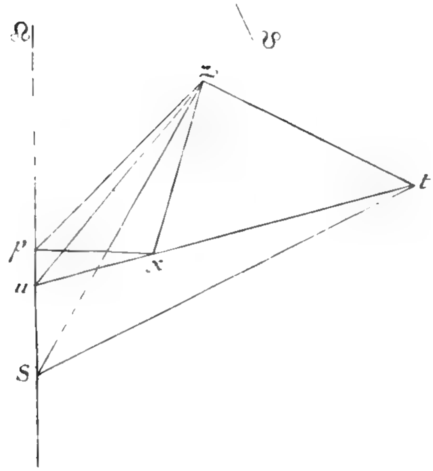


Fig. 2.

Fig. 4.



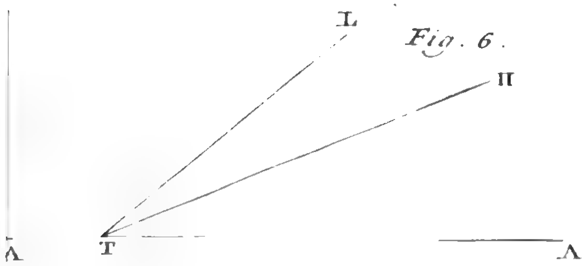


Fig. 6.

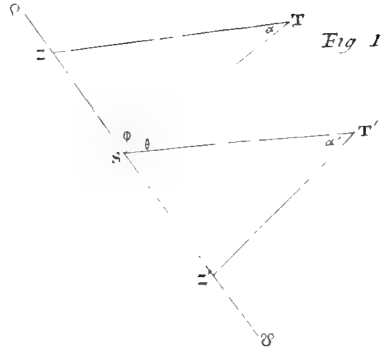


Fig 1

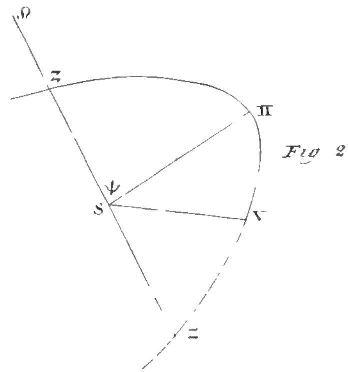


Fig 2

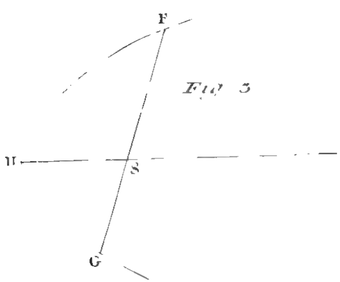


Fig 3

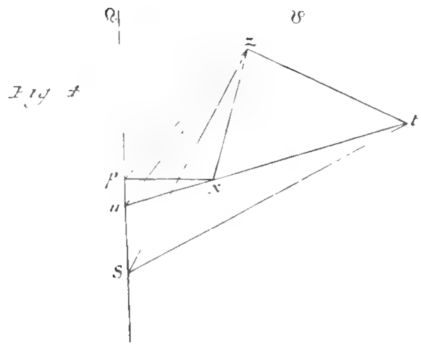


Fig 4

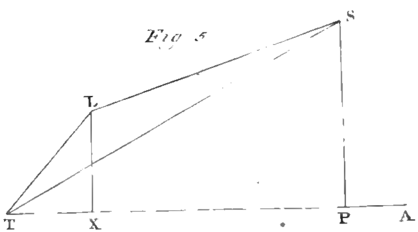


Fig 5

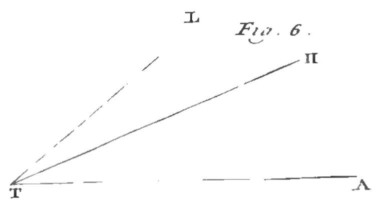


Fig. 6.

Fig. 2.

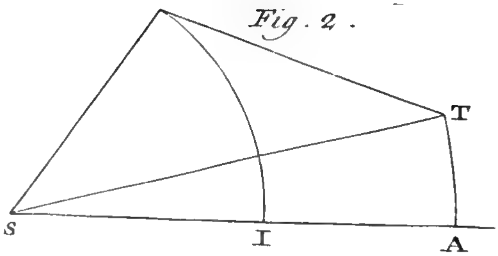


Fig. 4.

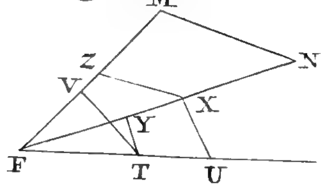


Fig 6.

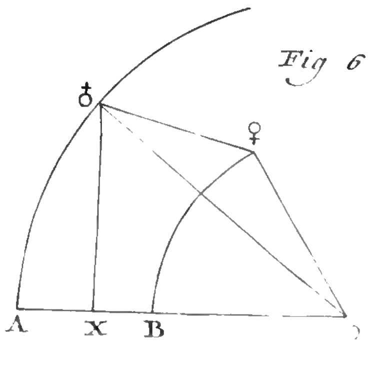


Fig. 1.

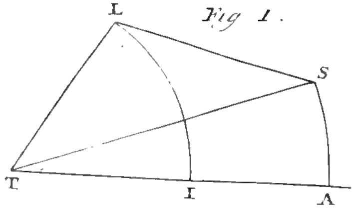


Fig. 2.

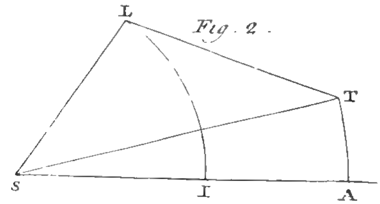


Fig. 3.

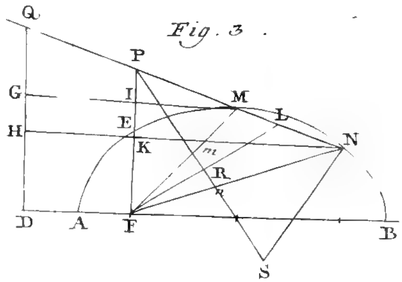


Fig. 4.

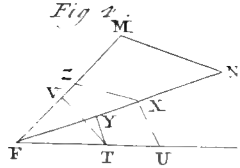


Fig. 5.

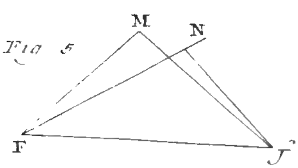
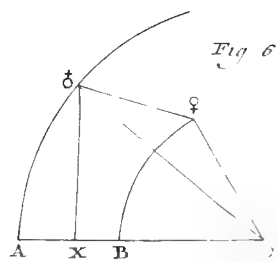


Fig. 6.



Acta acad. scient. Petropol. 1780 P. I.

Wolff de pullo monstroso, quatuor pedibus totidemque alis instructo p. 203. t. VI.

Galeopithecus volans Camellii descriptus a Pallas. p. 208. t. VII. VIII.

Sertulariae duae determinatae a Lepechin.

1) Sertularia pinaster. p. 223. t. IX f. 1. 2.

2.) Sertularia cupressoides p. 224. t. IX. f. 3. 4.

Adipis porcinae recentis et rancidae examen chemicum auctore Georgi. p. 226.