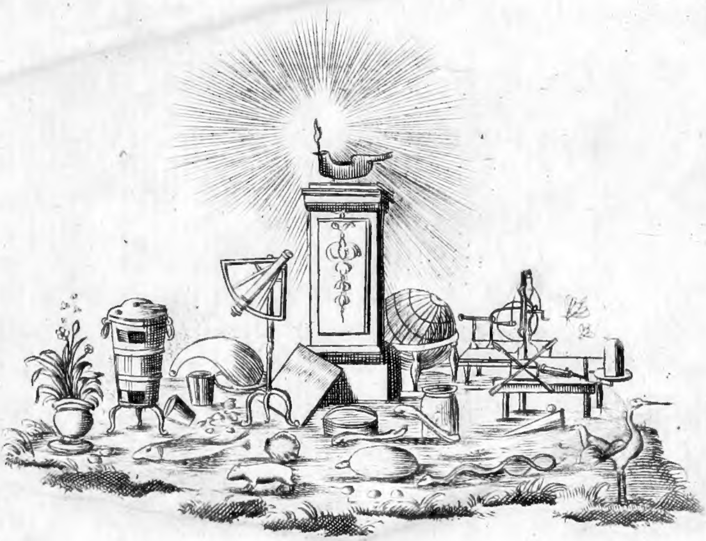
ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXXII.

PARS PRIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXVI.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXXII. Janvier —— Juin.

ÉCONOMIE ET HISTOIRE NATURELLE

ASTRONOMIE

MÉTÉOROLOGIE.

ACTA

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXXII. Pars prior.

Cum tabulis V. aeri incisis.

MATHEMATICA

ASTRO-

Fautes

Fautes à corriger.

dans la feconde Partie des Actes Académiques pour l'année 1781.

Pag. 119 ligne 3 effacés *non*

— 120 — 22 lifés $a \pm b z$.

HISTO-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXXII.

Janvier —— Juin.

POPVLATION.

Eſſai ſur les Tables des mariages, des naiſſances & des morts de la Ville de St. Pétersbourg, dans la période de 17 ans, depuis 1764 jusqu'à 1780: precédé d'une expoſition générale de l'utilité qu'auroient des pareilles Tables, ſi elles s'étendoient ſur des Gouvernements entiers de la Ruſſie. Par M. *Krafft*.

Celui qui le premier eût l'heureuſe idée de faire des relevés des mariages, des naiſſances & des morts du genre humain, ne pouvoit point encore entrevoir toute l'importance de cet objet, ni s'attendre à toute l'utilité,

 qui

qui en reſultéroit dans la ſuite. Il a fallû recueillir & comparer entre elles une grande quantité de pareilles tables, étendûes ſur une ſuite d'années & ſur pluſieurs endroits differens, pour être a portée de ſaiſir les importantes concluſions qu'on pouvoit en tirer, & d'aperçevoir la lumiere imprevûe qu'elles repandoient ſur nombre de récherches politiques qui intereſſent le bonheur public & le bien de l'humanité. Mais auſſi, dèsque les prémiers traits de cette lumiere eûrent une fois frappé les yeux de quelques Patriotes eclairés qui avoient entrepris la redaction & le calcul de ces tables, leur utilité ne tarda plus à paroitre dans tout ſon jour. Dès-lors on s'accorda bientôt a reconnoître, que non ſeulement elles préſentoient en général des vérités nouvelles, toutes dignes de l'attention de l'Hiſtorien de la Nature, du Médecin & du Philoſophe, qu'elles devoiloient un ordre conſtant & admirable qui préſide jusque dans ces evenemens du genre humain, où l'on ne voit ordinairement, que l'effet d'un aveugle haſard; mais auſſi, qu'elles expoſoient aux yeux des Souverains, des faits, qui ne ſe derobent à leur connoiſſance que trop ſouvent, & qui doivent cependant d'autant plus les intereſſer, qu'ils concernent la prémiere de toutes les richeſſes des États, la vie, le bienétre & l'accroiſſement de leurs ſujets. Ce n'eſt pas que jusqu' alors on manquât des moyens de s'aperçevoir de la varieté & des alterations de la population; mais ces moyens ne faiſoient connoitre que des faits, ſans en montrer les ſourçes; au lieu que ces tables indiquent les memes faits d'une maniere incomparablement plus inſtructive, & en rendent auſſi viſibles les cauſes probables; d'ou reſulte le grand avantage, que le Gouvernement ſe voit a portée d'y influer

fluer d'une façon efficace, de s'assurer de temps en temps du succès des soins, avec lesquels il veille au bien public, & d'apprecier l'effet des precautions qu'il prend pour en éloigner tout obstacle, & pour séconder tout ce qui le favorise. Ces tables ayant alors été étendûes sur un espace suffisant de temps, & sur une assés nombreuse quantité d'hommes, differents de climats, de moeurs & de genres de vie, étoient encore susceptibles d'une application plus générale. Prises ensemble & reunies en une seule masse, elles fournirent des résultats moyens, qui ne sont plus affectés d'aucune influence sensible des circonstances indiuiduelles & particulieres & qui présentent par consequent l'expression la moins équivoque qu'on ait, du cours ordinaire de la Nature de l'éspece humaine, dans la fecondité, les naissances, la vitalité & la mort des hommes. Connoissant ce que feroit la Nature, si elle n'étoit point troublée dans ses operations, on est garanti de l'illusion de prendre pour sa marche ce qui n'est que l'éffet & la suite des desordres, qui produits par des circonstances particulieres, physiques ou morales, en derangent l'ordre salutaire, & qui étant en grande partie du ressort du Gouvernement, en méritent l'attention la plus réflechie. Dès lors plusieurs États de l'Europe, eclairés sur leurs véritables interêts, s'imposérent l'obligation de faire des établissemens formels de pareilles tables, & plusieurs Scavans tres distingués s'appliquoient a les perfectionner & à fixer les principes de leur emploi au bien public & à des systemes d'administration. Ainsi portée à un certain degré de perfection cette nouvelle espece d'Arithmétique politique ne manqua point de compenser par des suites les plus avantageuses pour plus d'un pays les peines, qu'on y avoit priſes de la cnltiver & de la mettre en pratique & en uſage.

A peine il s'étoit ecoulé une année & demi depuis le commencement du Regne glorieux de notre tres AUGUSTE SOUVERAINE, qu'apres avoir établi un College de medecine, une Maiſon des enfans trouvés, un Comptoir de tutele des colonies, & ordonné un denombrement général de Ses ſujets, *Sa Majeſté*, attentive a tout ce qui pouvoit contribuer aux progrès de la population de Son vaſte Empire, & en faire le bonheur, ordonna auſſi de conſtruire ſur un modele diſtribué en differentes langues, des tables annuelles des mariages, des naiſſances & des morts. *Sa Majeſté* a fait à cette occaſion à l'Académie des Sciences l'honneur d'ordonner en même temps, qu'on lui remit par mois des tables génèrales, qui devoient reunir les réſultats des tables particulieres de toutes les Paroiſſes de St. Pétersbourg. Depuis le mois de Mars de l'année 1764 l'Académie reçoit ces tables bien exactement, de façon qu'aujourd'hui elle en poſſede une ſuite de 21 années conſecutives.

Ces tables n'embraſſent à la verité que la population d'une ſeule ville; d'ailleurs vû les progrès qu'a fait depuis l'Arithmétique politique, il ſeroit à deſirer, que les modeles ſur lesquels elles ont été conſtruites, quoique bons pour leur prémier établiſſement, eusſent cependant aujourd'hui des détails plus grands, qui les rendiſſent propres à ſervir pour un plus grand nombre d'objets; & même dans l'état ou elles ſont, on pourroit ſuspecter leur parfaite exactitude dans quelques points de l'exel'execution. Cependant comme elles embraſſent un long eſpace de temps; que leur plan renferme ſans contredit les détails les plus eſſentiels & les plus inſtructifs, & que leur degré de preciſion, qui n'eſt douteuſe qu'en quelques points de moindre importance, s'appreciera aiſement par leur redaction même; elles ne laiſſeront pas de fournir des réflexions intereſſantes. Ajoutons à cela, que la rédaction de ces tables telles qu'elles ſont, pourroit donner l'occaſion d'en avoir de meilleures dans la ſuite, & ſervir de modele à l'application, qu'on pourroit faire de ſemblables, étendûes à des Gouvernemens entiers. Celles-ci ſeroient alors la baſe de l'Arithmetique politique de la Ruſſie, qui non ſeulement enrichiroit de nouvelles conoiſſances cette Science en général ſi intereſſante pour les Gouvernements, mais dont auſſi cet Empire même habité de peuples d'une ſi grande varieté de climats & de moeurs, ne manqueroit certainement pas de recueillir de grands avantages pour l'acceleration des progrès de ſa nombreuſe population & pour l'accroiſſement de la proſperité publique.

Telles ont été les réflexions qui m'ont porté a entreprendre de rédiger & calculer toute la collection des tables pour la Ville de St Pétersbourg. J'en préſente dans ce Mémoire la redaction de 17 années jusqu'a 1780 incluſivement, afin d'y ajouter annuellement les années ſuivantes, & de les rediger par périodes fixées de 5 ans, ainſi que de joindre a leur reſumé général les réflexions de quelque importance, qu'elles pourroient préſenter de temps en temps. Pour le faire dans un ordre ſuivi, ſurtout ſi les tables s'étendoient à des Gouvernemens entiers; il faudra y conſerver une certaine uniformité dans les prin-

principes & dans la maniere des récherches; c'eſt pourquoi il ne ſera pas inutile de donner ici un court expoſé des principaux points de vûe, que les tables des mariages, des naiſſances & des morts preſéntent généralement.

Les nombres, que les tables les plus complettes qu'on ait, fourniſſent immediatement & qu'on peut conſequemment conſiderer dans ces ſortes de calculs comme des quantités données, ſont les ſuivans:

1) Le nombre de tous les vivans que les tables embraſſent, ſelon leurs ſexe, age & genre de vie.
2) Le nombre annuel des mariages qui ſe font entre eux.
3) celui des naiſſances.
4) celui des morts.
5) celui des morts de chaque age.
6) celui des morts de chacune des principales maladies connûes.

En combinant ces ſix nombres deux a deux, on obtient quinze rapports différens, deſquels l'Arithmetique politique tire des concluſions, qui non ſeulement preſentent a l'État le flux & reflux qui de temps en temps a lieu dans les progrès & le bienètre de ſa population, mais qui mettent auſſi le Gouvernement ſur la voie d'influer avec une activité energique ſur la conſervation & la multiplication de ſes ſujets. Pour expoſer les plus inſtructifs de ces rapports avec plus d'ordre, je les range ſous trois claſſes, ſelon qu'ils concernent. 1) *la Meſure de* *de la fécondité*; 2) *la Mesure de la mortalité* & 3) *la Mesure de la multiplication* ou des progrès de la population, qui est l'effet combiné des deux précedentes:

I. Mesure de la Fecondité.

1) *Rapport entre le nombre annuel des mariages & celui de tous les vivans.*

Ce rapport qui indique, de combien de vivans il se fait un mariage par an, est la mesure de la *fecondité intentionelle.* Il interesse très fort l'État d'en être informé de temps en temps, non seulement pour des provinces en général, mais aussi pour des endroits principaux en particulier, puisque cette mésure qui influe immediatement sur les progrès de la population, est sujette à de grandes differences pour des endroits differens, & à des changemens très sensibles pour un même endroit en temps differens ou en différentes circonstances, & que les causes physiques, morales & civiles, d'où résultent ces differences & ces changemens, sont en grande partie du ressort du Gouvernement. Nous verrons plus bas la régle qui nous apprend, qu'un païs qui doubleroit sa population en 80 ans, si la mesure de sa fecondité intentionelle est $\frac{1}{120}$, c'est à dire. si sur 120 vivans il se fait un mariage par an, y parviendroit dans la moitié de ce temps, si le Gouvernement pouvoit porter cette mésure à $\frac{1}{100}$, c'est à dire, qu'il s'en fit annuellement un sur 100 vivans.

2) *Rapport entre le nombre annuel des naiſſances & celui des mariages.*

Ce rapport qui fait voir, combien, compenſant l'un avec l'autre, chaque mariage produit d'enfans, eſt la meſure de la *fecondité réelle.* Elle n'influe pas moins, que la precédente, ſur l'accroiſſement de la population. Quoiqu'on ait reconnû par un grand nombre d'obſervations, que la fecondité réelle, conſiderée généralement, eſt en tout temps & par tout presque la même, & ne depend guere du climat ou d'autres circonſtances locales: on y rencontre cependant des differences & des changemens, qui ſont cauſés par des mariages ou trop tardifs ou prématurés, ou qui tiennent à des cauſes morales, economiques ou politiques, qui ſont un objet du Gouvernement, & c'eſt pour cela, qu'il importe a l'État de connoitre la meſure de la fecondité réelle de ſa population.

3) *Rapport entre le nombre annuel des naiſſances & celui de tous les vivans.*

Ce rapport qui eſt l'effet combiné des deux précedents, & qui indique, ſur combien de vivans on peut compter une naiſſance par an, eſt la meſure de la *fecondité générale.* Elle depend des deux autres & par là elle eſt ſubordonnée à des cauſes phyſiques, morales & civiles, dont il n'y a pas moyen d'apprecier généralement l'intenſité & l'effet; c'eſt pourquoi l'Arithmetique politique ne peut point calculer avec aſſés de preciſion le nombre de tous les vivans par celui des naiſſances annuelles. Mais quoique les nombres annuels des naiſſances ne ſuffiſent pas pour trouver le nombre *abſolû* des vivans, parmi les quels

quels elles ont eû lieu; cependant ces nombres fixés par une determination moyenne entre les résultats de plusieurs années, font connoitre avec bien de la precision les *rapports* des nombres des vivans en divers endroits, ou d'un même endroit en temps differens, pourvû qu'il n'y ait pas d'ailleurs une trop grande disparité des endroits, ou que les circonstances d'un même endroit n'ayent pas changé trop considérablement. C'est sous ces conditions, qu'on peut supposer avec beaucoup de probabilité, que les populations de divers endroits ou d'un meme endroit en temps differens, sont dans le rapport des nombres moyens des naissances annuelles. Or sans doute il interesse très fort le Governement de connoitre ces paralleles de la population de divers endroits, ou d'un meme endroit en temps differens, soit pour s'assurer, si dans chaque endroit la population est en juste rapport avec son étendûe & sa fertilité, soit pour en réchercher les causes, afin de seconder & de favoriser celles qui en accelerent les progrès, & d'en prevenir ou écarter d'autres qui les rallentissent.

II. Mesure de la Mortalité.

1) *Rapport entre le nombre annuel des morts & celui de tous les vivans.*

Ce rapport qui fait voir, de combien de vivans il en meurt un par an, est la mesure de la *mortalité generale.* Il est du plus grand interêt de l'État d'en être informé de temps en temps à l'egard de ses sujets, vûque cette mesure, qui rallentit immediatément les progrès de la multiplication, est très différente en des endroits differens & change beaucoup en un même endroit en temps

 diffe-

differens, & que, comme beaucoup d'hommes meurent par la faute des hommes & par la leur, il eſt certainement au pouvoir du Gouvernement de mettre des entraves aux cauſes qui augmentent la mortalité, de favoriſer tout ce qui la diminue, & de contribuer par des établiſſemens ſalutaires à la conſervation des citoyens, & aux progrès de la population. Le calcul nous apprend, qu'un päis qui ne doubleroit ſa population qu'après un ſiecle, ſi la meſure de ſa mortalité generale eſt $\frac{1}{30}$, c'eſt à dire, ſi ſur 30 hommes il en meurt un par an, y parviendroit en moins de la moitié de ce temps, ſi on réuſiſſoit à reduire cette meſure jusqu'à $\frac{1}{36}$. La loi de la mortalité generale, preſcrite par la Nature au genre humain, etant modifiée par nombre de cauſes particulieres de differente eſpece, dont on ne ſçauroit tenir compte en general; on ne peut non plus calculer avec affés de preciſion le nombre des vivans par celui des morts annuels; mais ces nombres moyens ſervent cependant à connoitre affés exactément les paralleles des populations en divers endroits analogues, ou d'un meme endroit en temps differens, à moins qu'il n'y fût arrivé d'ailleurs des changemens trop ſenſibles. Cette meſure, incertaine ſur tout pour des grandes villes, l'eſt cependant bien moins pour des provinces entieres, les éffets des circonſtances particulieres y étant abſorbés & devenûs inſenſibles dans la multitude des evènemens, arrivés à une maſſe nombreuſe d'hommes.

2) *Rapport entre le nombre total des morts & celui des morts de chaque âge.*

Ce rapport qui indique, dans quelle proportion le nombre total des morts eſt diſtribué ſur les differens âges

âges de la vie, êst la mesure de la *mortalité specielle de chaque âge.* On rencontre une difference trés rémarquable dans cette mesure pour l'un & l'autre sexe, ainsi que pour les habitans des villes & ceux des campagnes, où l'ordre de la Nature est supposé être moins derangé par des circonstances particulieres. Il est d'une grande importance pour l'État, de connoitre la mesure de la mortalité specielle des âges de ses sujets, parcequ'en la comparant avec l'ordre de la Nature, il decouvre les derangemens & les desordres qui s'y glissent par des circonstances particulieres & variables, & se met à portée d'en réchercher les causes, & d'y apporter les remédes. Ce qui sous ce point de vûe merite la plus grande attention du Gouvernement, c'est la mortalité des enfans nouveaux nés, & celle des âges moyens qui selon l'ordre naturel devroient étre les plus vigoureux & deployer en raison de la force de l'ame & du corps le plus d'activité pour le bien de l'État & la prosperité publique. Outre cela cette mesure de la mortalité specielle des âges entre dans plusieurs calculs politiques qui interessent l'État, & donne à connoitre, suivant quelle progression s'éteint un nombre quelconque donné d'enfans nouveaux nés ou d'hommes d'un même âge quelconque; connoissance, sans la quelle il n'y a pas moyen de faire des établissemens solides de Rentes viageres, des Tontines, des Caisses en faveur des Veuves &c. Aussi cette même mesure sert elle de base au calcul de probabilité sur plusieurs questions, dont la solution depend de la durée moyenne de la vie d'un homme d'un âge donné, & qui peuvent se présenter, soit par cet interêt naturel qu'il prend à la durée de sa vie, soit par quelque vûe d'un avantage public ou particulier.

3) *Rapport entre le nombre de tous les morts & celui des morts d'une même maladie.*

Ce rapport qui nous apprend, en quelle proportion chacune des maladies, consignées dans les tables, a contribué à la mortalité générale, est la mesure du degré de la *santé publique* & de la *force des maladies.* On observe une différence considerable & qui fournit des réflexions interessantes, sur cette mesure entre l'un & l'autre séxe & entre les habitants des villes & ceux de la campagne, où quelques maladies font bien plus de ravages que dans les villes, au lieu que le contraire arrive par rapport à plusieurs autres. Il interesse très fort l'État de connoitre cette mesure pour tous ses sujets en général & pour les endroits principaux en particulier. Comparées avec ce que de nos jours on doit prendre pour l'ordre de la Nature dans la force des maladies de la race actuelle du genre humain, ces mesures en decelent les excès qui le transgressent, & qui produits par des circonstances changeantes pourroient être diminués ou supprimés, & qu'on risque cependant de méconnoitre, faute de point de comparaison avec le moindre mal possible. C'est ainsi, qu'elles mettent le Gouvernement sur la voye, soit de surprendre les contagions dans leur naissance & d'en étouffer le prémier germe, soit de récher cher & de proteger les causes profitables qui avoient produit des diminutions sensibles de la force des maladies. Comparées entre elles memes, ces mesures font connoitre non seulement les maladies qui portant le plus d'atteinte à la population, demandent plus de recherches & de soins de la part des Colleges de Santé; mais elles designent aussi les endroits qui,

qui souffrant d'avantage de pareilles maladies, ont plus besoin de la main secourable du Gouvernement; c'est en quoi le genre des maladies, le sexe & l'âge des morts & la saison des grandes mortalités sont autant d'avis qui le guident pour rémonter à leurs sources, pour en aprofondir les causes souvent les moins soupçonnées, & pour faire le choix des arrangemens, ainsi que celui des endroits, d'où les établissemens salutaires puissent avoir l'influence la plus repandûe. C'est ainsi, qu'en prevénant les maladies, un Gouvernement éclairé agit sur la conservation de la vie des citoyens plus energiquement que la medécine même en les guérisant.

Les malheurs consignés dans les tables, les corps trouvés morts, les noyés, les enfans étouffés dans le sommeil par les meres ou les nourrices, les meres mortes dans les douleurs de l'enfantement faute du secours ou de l'habileté de la sage-femme, ne méritent pas moins l'attention du Gouvernement & lui fournissent autant d'occasions precieuses de devenir par des établissemens salutaires le conservateur de la vie d'un grand nombre de citoyens.

III. Mesure des progrès de la population.

Rapport entre le nombre annuel des naissances & celui des morts.

Ce rapport qui resulte immediatement des mesures de la fecondité & de la mortalité, est la mesure des *progrès de la population*, qui proviennent de l'état interieur d'un peuple, & qu'on peut nommer *naturels* & *spontanés*, pour les distinguer de ceux qu'on obtient par des

des établiſſemens des Colonies. Le rapport de la différence du nombre annuel des nés & des morts à celui de tous les vivans ſert à calculer le temps qu'il faut pour que la population ſoit doublée ou accrûe dans quelque autre rapport quelconque; & ce temps étant l'éxpreſſion la plus propre & la plus claire de la viteſſe ou de la lenteur des progrès de la population, fait voir d'une façon la plus convaincante, combien les progrés naturels & ſpontanés qui reſultent de l'état interieur du peuple, l'emportent ſur ceux qui ſe tirent du dehors par des établiſſemens des Colonies; il met outre cela le Gouvernement en état d'apprçier avec juſteſſe, de combien ces progrès ſont accelerés ou rallentis par des changemens qui arrivent dans la fecondité ou la mortalité générales d'un peuple, & quel eſt par conſequent le degré de l'importance des cauſes qui produiſent ces changemens *).

Je paſſe maintenant aux tables de la ville de St. Pétersbourg, pour les examiner ſelon les points de vûe, que je viens d'expoſer.

I. Table

*) Voici le calcul de ce temps: ſoit le nombre de tous les vivans $= V$; la meſure de la fecondité générale $= f$; celle de la mortalité générale $= m$. Dans le cours de la prémiere année le nombre des nés ſera $= fV$, & celui des morts $= mV$; conſequemment a la fin de la prémiere année le nombre de tous les vivans $= (1+f-m).V$. Dans le cours de la ſeconde année on aura le nombre des nés $= f(1+f-m).V$ & celui des morts $= m(1+f-m).V$; donc à la fin de la ſeconde année le nombre de tous les vivans ſera $= (1+f-m)^2.V$ & ainſi de ſuite, enſorte qu'apres x années ecoulées le nombre de tous les vivans ſera $= (1+f-m)^x.V$ Si donc x eſt le nombre d'années, apres lesquelles la population s'eſt accrûe dans le rapport $1 : a$; on aura $a = (1+f-m)^x$; d'ou l'on tire $x = \frac{\log. a}{\log. (1+f-m)}$; ou en mettant $a = 2$, le nombre d'années, qu'il faut pour doubler la Population, ſera $= \frac{\log. 2}{\log. (1+f-m)}$.

I. Table generale des nombres annuels des mariages, des naiſſances & des morts.

	Année.	Mariages.	Naiſſan.	Morts.
a]	1764	787	4293	3673
	1765	1501	5136	4357
	1766	1544	5295	5349
b]	1767	1103	4371	4361
	1768	1224	4883	3721
	1769	1300	5378	4512
	1770	1187	4919	5444
	1771	1143	4781	4975
	1772	1205	4759	4910
	1773	1165	5483	5168
	1774	1372	5437	4631
c]	1775	991	4969	3636
	1776	1267	5397	4498
	1777	1332	5864	4442
	1778	1347	5481	4016
	1779	1251	5909	4313
	1780	1320	5539	4287
d]	6150 Jours	21039	87894	76293

a] Les tables de l'année 1764 ne ſont, que de 10 mois; ſçavoir depuis le 1 de Mars jusqu'a la fin de l'année.

b] L'an 1767 la Cour Imperiale étoit à Moscou. Elle partit de St Petersbourg le 21 de Février & y revint le 23 de Janvier l'an 1768.

c] L'an 1775 la Cour Imperiale étoit à Moscou. Elle quitta St. Petersbourg le 8 de Janvier & y fut de retour le 26 de Decembre.

d] Dans les deux premieres années les tables diſtinguent les Ruſſes & les Etrangers de St. Petersbourg; mais enſuite elles les comprennent tous indiſtinctement dans les memes ſommes. Les nombres conſignés içi pour les deux premieres années ſont auſſi les ſommes generales. On en trouvera apart les nombres ſpeciels pour les Etrangers dans la table XIII. & les ſuiv.

II.

II. Table ſpecielle des nombres annuels des mariages.

	Année.	A.	B.	C.	D.	Somme.	
*]	1764	493	66	154	74	787	Dix mois.
	1765	961	126	259	155	1501	
	1766	1017	117	238	172	1544	
*]	1767	680	89	212	122	1103	La Cour Imp. abſente.
	1768	824	90	185	125	1224	
	1769	927	94	176	103	1300	
	1770	804	102	175	106	1187	
	1771	771	96	170	106	1143	
	1772	803	122	171	109	1205	
	1773	782	79	193	111	1165	
	1774	932	108	214	118	1372	
*]	1775	535	162	138	156	991	La Cour Imp. abſente.
	1776	825	104	221	117	1267	
	1777	914	106	185	127	1332	
	1778	963	116	165	103	1347	
	1779	892	97	168	94	1251	
	1780	957	109	163	91	1320	
	6150 Jours	14080	1783	3187	1989	21039	

A. Mariages entre des Garçons & des Filles.
B. Mariages entre des Veufs & des Filles.
C. Mariages entre des Garçons & des Veuves.
D. Mariages entre des Veufs & des Veuves.

III. Table ſpecielle des nombres annuels des naiſſances.

					Dans ce nombre il y a des Enfans venûs morts au monde.			
	Année	Garçons.	Filles.	Somme.	Garçons.	Filles.	Somme.	
*]	1764	2193	2100	4293	46	28	74	Dix mois.
	1765	2583	2553	5136	37	30	67	
	1766	2652	2643	5295	36	11	47	
*]	1767	2185	2186	4371	20	7	27	La Cour Imp. abſente.
	1768	2501	2382	4883	24	11	35	
	1769	2713	2665	5378	27	15	42	
	1770	2511	2408	4919	35	16	51	
	1771	2459	2322	4781	24	9	33	
	1772	2397	2362	4759	25	15	40	
	1773	2860	2623	5483	22	14	36	
	1774	2839	2598	5437	21	9	30	
*]	1775	2576	2393	4969	27	17	44	La Cour Imp. abſente.
	1776	2816	2581	5397	12	5	17	
	1777	2971	2893	5864	14	5	19	
	1778	2876	2605	5481	20	7	27	
	1779	2980	2929	5909	15	6	21	
	1780	2846	2693	5539	11	2	13	
	6150J.	44958	42936	87894	416	207	623	

Sous le titre des Enfans venûs morts au monde les tables comprennent auſſi ceux qui ſont morts avant le baptême.

IV. Table ſpecielle des nombres annuels des morts.

	Année.	Males.	Femell.	Somme.	Dans ce nombre il y a des corps trouvés morts. Males.	Femell.	Somme.	
*]	1764	2296	1377	3673	52	10	62	Dix mois.
	1765	2706	1651	4357	78	28	106	
	1766	3460	1889	5349	82	14	96	
*]	1767	2724	1637	4361				La Cour Imp. abſente.
	1768	2301	1420	3721	77	25	102	
	1769	2837	1675	4512	67	16	83	
	1770	3877	1567	5444	69	13	82	
	1771	3296	1679	4975	99	28	127	
	1772	3104	1806	4910	121	22	143	
	1773	3548	1620	5168	88	13	101	
	1774	3027	1604	4631	99	29	128	
*]	1775	2114	1522	3636	68	17	85	La Cour Imp. abſente.
	1776	2705	1793	4498	94	19	113	
	1777	2859	1583	4442	162	53	215	
	1778	2634	1382	4016	125	17	142	
	1779	2798	1515	4313	128	25	153	
	1780	2764	1523	4287	103	15	118	
	6150J.	49050	27243	76293	1512	344	1856	

Dans ces nombres des morts ſont auſſi compris les enfans venus morts au monde ou morts avant le baptême, conſignés dans la table precedente.

V.

1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
21	27	12	14	20	15	11	416
652	415	638	515	507	579	501	10722
109	170	120	133	145	137	170	2061
91	111	116	58	49	52	53	1412
65	74	91	58	57	52	51	1185
71	62	85	54	39	57	48	1019
40	64	53	34	32	42	36	669
111	76	71	58	75	113	76	364
531	162	164	203	181	235	188	14752
181	114	231	225	269	272	267	3751
315	140	150	290	250	171	234	4412
131	91	149	173	178	190	229	2852
126	130	142	208	143	141	132	2923
108	80	148	117	145	149	151	2401
87	74	110	156	114	132	138	1970
64	39	78	86	85	82	81	1503
71	54	79	104	76	108	93	1320
59	42	57	66	42	48	62	958
41	46	61	70	58	37	61	803
25	45	35	38	21	26	31	496
21	21	16	19	17	18	28	330
5	9	2	8	3	5	11	109
0	0	1	6	2	7	4	54
2	0	0	3	2	2	2	38
1	0	2	1	0	0	1	18
2928	2046	2611	2697	2509	2670	2661	47538

VI.

V. Table ſpecielle des morts du ſexe masculin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Enfans venûs morts au monde.	46	37	36	20	24	27	35	24	25	22	21	27	12	14	20	15	11	416
Entre 0 — 1 an.	579	633	744	687	638	790	703	717	724	700	652	415	638	515	507	579	501	10722
1 — 2	152	159	157	128	59	77	74	63	88	120	109	170	120	133	145	137	170	2061
2 — 3	50	71	83	81	64	112	93	111	135	82	91	111	116	58	49	52	53	1412
3 — 5	34	67	92	73	52	107	90	69	94	59	65	74	91	58	57	52	51	1185
5 — 10	32	51	77	50	51	60	66	67	85	64	71	62	85	54	39	57	48	1019
10 — 15	26	28	41	44	16	26	52	48	45	42	40	64	53	34	32	42	36	669
15 — 20	69	93	71	59	47	67	91	82	117	97	111	76	71	58	75	113	76	364
20 — 25	142	158	216	155	92	188	815	454	242	626	531	162	164	203	181	235	188	14752
25 — 30	180	215	264	139	134	217	197	278	250	318	181	114	231	225	269	272	267	3751
30 — 35	178	189	281	234	164	172	674	353	231	386	315	140	150	290	250	171	234	4412
35 — 40	167	188	237	173	156	172	120	142	169	187	131	91	149	173	178	190	229	2852
40 — 45	142	198	232	238	157	178	253	183	157	163	126	130	142	208	143	141	132	2923
45 — 50	103	147	264	127	142	142	119	167	150	142	108	80	148	117	145	149	151	2401
50 — 55	84	92	154	159	115	123	117	108	89	118	87	74	110	156	114	132	138	1970
55 — 60	59	82	155	85	112	103	88	103	112	89	64	39	78	86	85	82	81	1503
60 — 65	72	63	67	100	59	66	94	68	68	78	71	54	79	104	76	108	93	1320
65 — 70	42	69	67	48	56	52	60	61	67	60	59	42	57	66	42	48	62	958
70 — 75	24	42	39	76	37	36	31	50	51	43	41	46	61	70	58	37	61	803
75 — 80	27	10	40	22	26	35	17	26	43	29	25	45	35	38	21	26	31	496
80 — 85	19	17	36	19	15	18	10	7	21	28	21	21	16	19	17	18	28	330
85 — 90	9	9	8	4	7	5	4	8	10	2	5	9	2	8	3	5	11	109
90 — 95	2	4	9	1	0	1	2	4	7	4	0	0	1	6	2	7	4	54
95 — 100	3	5	5	2	0	6	2	3	1	1	2	0	0	3	2	2	2	38
deſſûs 100	3	1	3	0	1	1	1	1	2	0	1	0	2	1	0	0	1	18
Somme.	2244	2628	3378	2724	2224	2770	3808	3197	2983	3460	2928	2046	2611	2697	2509	2670	2661	47538

6	1777	1778	1779	1780	Somme.
5	5	7	6	2	207
7	429	473	500	504	9870
3	105	91	79	96	1620
1	72	39	45	46	1224
2	69	45	64	71	1135
9	34	30	43	36	725
1	26	21	24	15	421
2	24	42	46	43	671
0	65	36	63	42	973
3	62	68	69	88	1195
0	57	62	64	44	1107
6	59	69	71	69	1118
6	88	58	59	56	949
9	62	43	55	56	834
8	72	55	53	62	843
9	56	55	60	45	719
5	70	49	56	62	803
3	41	41	37	40	687
2	50	35	48	66	791
8	33	22	17	23	451
3	33	17	19	31	335
7	10	3	4	7	113
4	6	2	5	2	58
0	0	1	1	2	29
1	1	1	2	0	21
4	1530	1365	1490	1508	26899

VII.

VI. Table ſpecielle des morts du ſexe feminin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Enfans venûs morts au monde.	28	30	11	7	11	15	16	9	15	14	9	17	5	5	7	6	2	207
Entre 0 — 1 an.	550	635	769	642	593	741	625	650	694	613	559	346	547	429	473	500	504	9870
1 — 2	91	123	111	108	47	72	68	81	83	86	114	142	123	105	91	79	96	1620
2 — 3	26	53	87	74	43	89	72	87	128	98	79	85	101	72	39	45	46	1224
3 — 5	42	73	74	52	49	82	69	64	103	44	52	60	122	69	45	64	71	1135
5 — 10	13	32	47	28	25	44	53	39	71	41	48	62	79	34	30	43	36	725
10 — 15	19	22	35	26	16	14	28	23	35	25	23	48	21	26	21	24	15	421
15 — 20	42	37	36	42	23	40	41	44	35	36	35	73	32	24	42	46	43	671
20 — 25	43	44	71	63	40	38	69	72	55	73	56	93	50	65	36	63	42	973
25 — 30	66	75	78	62	57	59	63	78	65	78	81	73	73	62	68	69	88	1195
30 — 35	61	64	64	83	50	57	63	73	74	62	72	77	80	57	62	64	44	1107
35 — 40	70	46	76	68	64	76	75	61	50	60	67	71	66	59	69	71	69	1118
40 — 45	45	49	61	65	53	46	48	63	41	38	56	57	66	88	58	59	56	949
45 — 50	32	42	47	52	45	51	49	50	50	63	42	46	49	62	43	55	56	834
50 — 55	28	40	49	53	38	35	36	47	39	50	59	48	78	72	55	53	62	843
55 — 60	38	41	51	36	36	37	32	26	44	33	42	38	49	56	55	60	45	719
60 — 65	26	52	41	34	54	41	39	47	44	44	41	38	65	70	49	56	62	803
65 — 70	45	47	52	42	36	31	34	40	43	37	45	43	33	41	41	37	40	687
70 — 75	28	40	45	46	51	46	36	40	46	53	42	47	62	50	35	48	66	791
75 — 80	40	38	23	33	38	22	21	29	32	16	22	24	18	33	22	17	23	451
80 — 85	13	17	25	9	15	13	8	16	23	29	21	13	33	33	17	19	31	335
85 — 90	9	11	12	8	5	4	7	7	7	4	4	4	7	10	3	4	7	113
90 — 95	7	6	2	2	3	3	1	2	3	5	5	0	4	6	2	5	2	58
95 — 100	4	2	5	1	3	3	1	0	3	2	1	0	0	0	1	1	2	29
deſſûs 100	1	4	3	1	0	0	0	3	1	3	0	0	1	1	1	2	0	21
Somme.	1367	1623	1875	1637	1395	1659	1554	1651	1784	1607	1575	1505	1774	1530	1365	1490	1508	26899

VII. Table reduite des morts rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en general il y a
Enfans venûs morts au monde.	8, 75	7, 69	8, 37
Entre 0 — 1 an.	225, 55	366, 93	276, 66
1 — 2	43, 35	60, 22	49, 45
2 — 3	29, 70	45, 50	35, 41
3 — 5	24, 93	42, 19	31, 17
5 — 10	21, 43	26, 95	23, 43
10 — 15	14, 07	15, 65	14, 64
15 — 20	28, 69	24, 95	27, 34
20 — 25	99, 96	36, 17	76, 91
25 — 30	78, 90	44, 43	66, 44
30 — 35	92, 81	41, 15	74, 14
35 — 40	59, 99	41, 56	53, 33
40 — 45	61, 49	35, 28	52, 02
45 — 50	50, 51	31, 00	43, 46
50 — 55	41, 44	31, 34	37, 79
55 — 60	31, 62	26, 73	29, 85
60 — 65	27, 77	29, 85	28, 52
65 — 70	20, 15	25, 54	22, 10
70 — 75	16, 89	29, 41	21, 41
75 — 80	10, 43	16, 77	12, 72
80 — 85	6, 94	12, 45	8, 93
85 — 90	2, 39	4, 20	2, 98
90 — 95	1, 14	2, 16	1, 50
95 — 100	0, 80	1, 08	0, 90
deſſûs 100	0, 30	0, 80	0, 52

VIII. Table de la Vitalité des âges des hommes à St. Petersbourg,

telle, qu'elle sert aux calculs des Rentes viagerês & d'autres Etablissements de ce genre.

	De 1000 Garçons nouveaux nés.	De 1000 Filles nouvellemeut nées.	De 1000 Enfans nouveaux nés en general.
Viennent vivans au monde	991, 25	992, 31	991, 63
Accompliſſent la 1. année	765, 70	625, 38	714, 97
2	722, 35	565, 16	665, 52
3	692, 65	519, 66	630, 11
5	667, 72	477, 47	598, 94
10	646, 29	450, 52	575, 51
15	632, 22	434, 87	560, 87
20	603, 53	409, 92	533, 53
25	503, 57	373, 75	456, 62
30	424, 67	329, 32	390, 18
35	331, 86	288, 17	316, 04
40	271, 87	246, 61	262, 71
45	210, 38	211, 33	210. 69
50	159, 87	180, 33	167, 23
55	118, 43	148, 99	129. 44
60	86, 81	122, 26	99, 59
65	59, 04	92, 41	71, 07
70	38, 98	66, 87	48, 97
75	22, 00	37, 46	27, 56
80	11, 57	20, 69	18, 84
85	4, 63	8, 24	5, 91
90	2, 24	4, 04	2, 93
95	1, 10	1, 88	1, 43
100	0, 30	0, 80	0, 52

es

774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
756	666	672	663	700	727	729	12458
924	361	632	849	889	886	954	13489
438	327	447	437	392	472	398	7356
115	96	96	96	93	118	120	2030
54	102	69	90	59	69	96	1383
312	51	127	139	83	100	89	2432
31	84	255	62	5	7	2	1378
119	114	128	107	84	62	82	1858
27	39	24	62	55	83	40	630
30	64	30	31	19	51	67	466
9	0	9	28	12	8	28	640
16	1	15	10	20	25	9	303
7	0	10	22	15	15	0	191
7	43	3	2	0	1	0	202
3	8	2	1	0	0	0	88
2	0	4	5	9	2	4	97
3	0	2	2	2	1	1	32
0	0	0	0	0	1	0	10
0	0	1	2	1	0	0	11
0	0	0	0	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	0	1
54	63	73	75	51	27	30	2059
07	2019	2599	2683	2489	2655	2649	47122

X.

IX. Table ſpecielle des morts du ſexe masculin rangés ſelon les maladies, ou les cauſes de mort.

Maladies & cauſes d. mort.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Pleureſie (колотье)	561	693	844	809	678	790	833	783	734	820	756	666	672	663	700	727	729	12458
Fievre chaude	490	629	803	618	467	717	1438	982	710	1140	924	361	632	849	889	886	954	13489
Conſomption (Phtiſie, чахотка)	353	420	515	418	362	373	459	500	494	551	438	327	447	437	392	472	398	7356
Convulſions (родимецъ)	127	132	129	135	117	119	126	160	129	122	115	96	96	96	93	118	120	2030
Vieilleſſe	76	75	126	104	77	103	73	57	87	66	54	102	69	90	59	69	96	1383
Dyſſenterie	56	74	112	86	81	144	320	171	158	329	312	51	127	139	83	100	89	2432
Petite verole	6	61	95	73	54	170	63	115	258	37	31	84	255	62	5	7	2	1378
Hydropiſie	110	79	149	122	107	96	138	105	133	123	119	114	128	107	84	62	82	1858
Malheur	36	31	24	95	19	20	22	18	14	21	27	39	24	62	55	83	40	630
Apoplexie	23	17	16	24	21	12	10	13	17	21	30	64	30	31	19	51	67	466
Scorbut	17	12	186	17	41	53	66	62	69	23	9	0	9	28	12	8	28	640
Dentition	24	37	24	12	39	15	27	8	6	15	16	1	15	10	20	25	9	303
Epilepſie	4	16	27	12	10	7	8	10	19	9	7	0	10	22	15	15	0	191
Verole	14	29	21	13	30	10	11	5	2	11	7	43	3	2	0	1	0	202
Rougeole	7	12	9	16	7	11	6	0	4	2	3	8	2	1	0	0	0	88
Esquinancie	18	2	7	2	18	4	2	13	1	4	2	0	4	5	9	2	4	97
Phreneſie	5	1	0	2	1	6	1	2	3	0	3	0	2	2	2	1	1	32
Etouffem. des enfans au ſommeil par les meres	1	2	1	0	0	1	2	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	10
Yvrognerie	1	3	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	2	1	0	0	11
Fievre	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
Pierre	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Maladies inconnûes	260	266	253	146	71	92	167	169	119	142	54	63	73	75	51	27	30	2059
	2198	2591	3342	2704	2200	2743	3773	3173	2958	3438	2907	2019	2599	2683	2489	2655	2649	47122

1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
646	537	524	504	548	585	619	10283
201	184	245	291	223	246	257	3539
288	243	296	255	243	249	247	3957
93	69	77	83	84	87	100	1658
89	109	91	104	70	86	104	1617
26	26	46	33	25	33	14	490
33	61	298	63	5	1	1	1451
63	59	59	41	56	50	47	824
9	39	7	28	20	30	13	245
16	28	22	18	15	19	29	276
2	0	1	3	1	2	1	67
40	48	46	43	23	27	29	587
22	2	15	16	13	25	8	254
3	0	3	3	9	11	0	99
0	22	6	2	0	0	0	43
1	9	1	0	0	0	1	81
2	0	1	4	0	5	6	47
2	0	0	2	1	0	2	15
0	0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	3
30	52	31	32	22	28	29	1148
1566	1488	1769	1525	1358	1484	1507	26692

XI. Ta-

X. Table specielle des morts du sexe feminin rangés selon les maladies ou les causes de mort.

Maladies & causes de mort.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Pleuresie (колотье) - - - -	473	610	744	660	581	664	627	653	611	697	646	537	524	504	548	585	619	10283
Fievre chaude - - - - - - -	151	168	222	201	165	158	215	207	184	221	201	184	245	291	223	246	257	3539
Consomption (Phtisie, чахотка) -	179	193	224	222	178	236	192	211	250	251	288	243	296	255	243	249	247	3957
Convulsions (родимецъ) - - -	97	104	109	120	88	92	83	151	128	93	93	69	77	83	84	87	100	1658
Vieillesse - - - - - - -	107	122	123	92	117	99	78	72	83	71	89	109	91	104	70	86	104	1617
Dyssenterie - - - - - - - -	16	19	30	35	32	26	22	27	34	46	26	26	46	33	25	33	14	490
Petite verole - - - - - - -	11	73	114	56	37	185	84	91	298	40	33	61	298	63	5	1	1	1451
Hydropisie - - - - - - - -	47	44	52	38	41	36	50	44	55	42	63	59	59	41	56	50	47	824
Malheur - - - - - - -	5	14	3	27	4	6	7	15	10	8	9	39	7	28	20	30	13	245
Apoplexie - - - - - - - -	13	19	18	7	7	13	13	13	10	16	16	28	22	18	15	19	29	276
Scorbut - - - - - - -	4	2	7	8	23	2	1	3	4	3	2	0	1	3	1	2	1	67
Enfantement (въ родахъ) - - -	48	27	30	25	21	20	40	47	33	40	40	48	46	43	23	27	29	587
Dentition - - - - - - - -	20	13	18	16	13	17	15	19	11	11	22	2	15	16	13	25	8	254
Epilepsie - - - - -	5	4	14	5	9	8	5	12	6	2	3	0	3	3	9	11	0	99
Verole - - - - - - -	2	1	1	0	0	1	0	5	2	1	0	22	6	2	0	0	0	43
Rougeole - - - - - - -	10	3	5	9	13	13	12	0	4	0	1	9	1	0	0	0	1	81
Esquinancie - - - - - - -	10	4	1	3	3	2	2	2	0	2	2	0	1	4	0	5	6	47
Phrenesie - - - - - -	2	0	1	4	0	0	1	0	0	0	2	0	0	2	1	0	2	15
Etouffem. des enfans au sommeil par les meres	0	4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
Yvrognerie - - - - - -	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
Pierre - - - - - -	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
Maladies inconnûes - - - -	135	169	147	102	52	66	90	70	46	48	30	52	31	32	22	28	29	1148
	1339	1593	1864	1630	1384	1644	1538	1642	1769	1593	1566	1488	1769	1525	1358	1484	1507	26692

XI. Table reduite des morts rangés selon les maladies ou les causes de mort.

Maladies & causes de mort.	De 1000 morts du sexe masculin il y a	De 1000 morts du sexe feminin il y a	De 1000 morts pris en general il y a
Pleuresie	264, 37	385, 24	308, 09
Fievre chaude	286, 25	132, 59	230, 69
Consomption (Phtisie)	156, 11	148, 25	153, 26
Convulsions	43, 08	62, 12	49, 96
Vieillesse	29, 35	60, 58	40, 64
Dyssenterie	51, 61	18, 36	39. 59
Petite Verole	29, 24	54, 36	38, 33
Hydropisie	39, 43	30, 87	36, 33
Malheur	13, 37	9, 18	11, 85
Apoplexie	9, 89	10, 34	10, 05
Scorbut	13, 59	2, 51	9, 58
Enfantement		21, 99	7, 95
Dentition	6, 43	9, 51	7, 54
Epilepsie	4, 06	3, 71	3. 92
Verole	4, 29	1, 62	3, 32
Rougeole	1, 87	3, 03	2, 29
Esquinancie	2, 06	1, 76	1, 95
Phrenesie	0, 68	0, 56	0, 64
Etouffem. des enfans au sommeil par les meres	0, 21	0, 22	0, 22
Yvrognerie	0, 23	0, 07	0, 18
Fievre	0, 17	0, 00	0, 11
Pierre	0, 02	0, 11	0, 05
Maladies inconnûes	43, 69	43, 02	43, 45

XII.

XII. Table des morts rangés ſelon les Mois.

	Males.	Femell.	Somme.		Males.	Femell.	Somme.
Janvier	3503	2105	5608	Juillet	4089	2380	6469
Fevrier	3481	2020	5501	Aout	3686	2532	6218
Mars	4238	2289	6527	Septemb.	3344	2148	5492
Avril	4985	2403	7388	Octobre	3177	1955	5132
Mai	5559	2425	7984	Novemb.	3157	2025	5182
Juin	4587	2383	6970	Decemb.	3316	2027	5343

Dans ces nombres les Enfans venûs morts, & les corps trouvés morts ne ſont pas compris.

	Le plus grand nombre des morts.				Le plus petit nombre des morts.			
	Males.		Femelles.		Males.		Femelles.	
1764	Mai	344	Mai	156	Octobre	167	Mars Octobr.	119
1765	Avril	263	Janvier	177	Octobre	157	Juin Aout	111
1766	Mai	454	Mai	200	Novembre	207	Octobre	116
1767	Mai	331	Mai	160	Novembre	127	Octobre	83
1768	Mai	225	Juin	148	Novembre	141	Octobre	75
1769	Mai	362	Mai	167	Novembre	146	Fevrier Nov.	111
1770	Mai	509	Mars	170	Octobre	209	Decembre	91
1771	Mai	351	Novemb.	162	Octobre	212	Janvier	101
1772	Mai	370	Mai	186	Octobre	148	Decembre	87
1773	Mai	375	Aout	193	Fevrier	216	Fevrier	99
1774	Mai	348	Juill.	148	Octobre	168	Fevrier Decemb.	116
1775	Mai	212	Juin Aout	148	Septembre	129	Mars	93
1776	Juin	260	Aout	205	Octobr. Mars	185	Octobre	112
1777	Mai	330	Juin	168	Novbr.	176	Octobre	93
1778	Mai	305	Mars Aout	133	Decembr.	139	Novembre	78
1779	Juin	276	Aout	167	Fevrier	157	Janvier Mars	93
1780	Mai	278	Janv.	145	Septembre	183	Octobre	97

XIII.

XIII. Table générale des mariages, des naiſſances & des morts des Etrangers à St. Pétersbourg, pour 22 Mois, depuis le 1 de Mars 1764 jusqu'à la fin de l'année 1765.

Mariages.	A. 196	B. 24	C. 38	D. 18	Somme. 276	
Naiſſances.	Males.	Femelles	Somme.	au quel nombre il y a des enfans venüs morts au monde.		
				Males.	Femelles	Somme.
	558	560	1118	15	12	27
Morts.	578	514	1092	Point de corps trouvés morts.		

Quoique cette table, & les ſuivantes, qui ſe rapportent aux habitans étrangers de la ville, ne ſont que pour 22 mois, par la raiſon alleguée cy deſſûs, & qu'à cauſe de cela on remarque dans les tables XIV & XV. quelques irregularités, qui auroient été inſenſibles, ſi ces tables euſſent embraſſé une plus longue période: j'ai crû cependant les devoir joindre-ici, ſoit pour en tirer quelques concluſions, qui pour cela ne laiſſent pas d'etre aſſés juſtes, ſoit pour faire voir qu'il ſeroit à deſirer, que pour l'avenir on diſtinguât dans les tables de St. Pétersbourg les habitans étrangers, de la ville & les nationaux, pour étre à portée de faire le parallele de leur fecondité & de leur mortalité relatives, ce qui ne manquera pas de donner des lumieres intereſſantes.

XIV. Table ſpecielle des morts des Etrangers rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	Males.	Femelles.	Somme.
Enfans venûs morts au monde	15	12	27
Entre - 0 — 1 année	154	175	329
1 — 2	71	49	120
2 — 3	21	13	34
3 — 5	18	27	45
5 — 10	19	11	30
10 — 15	16	9	25
15 — 20	16	24	40
20 — 25	22	19	41
25 — 30	20	20	40
30 — 35	24	19	43
35 — 40	24	23	47
40 — 45	47	17	64
45 — 50	24	15	39
50 — 55	20	13	33
55 — 60	16	15	31
60 — 65	19	8	27
65 — 70	18	13	31
70 — 75	6	5	11
75 — 80	5	17	22
80 — 85	3	7	10
85 — 90	0	3	3
90 — 95	0	0	0
Somme.	578	514	1092

XV. Ta-

XV. Table réduite des morts des Etrangers rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	De 1000 morts du ſexe maſc. il y a	De 1000 morts du ſexe fem. il y a.	De 1000 morts pris en général il y a
Enfans venûs morts au monde	25,95	23,35	24,73
Entre - 0 — 1 année	266,44	340,46	301,27
1 — 2	122,84	95,33	109,89
2 — 3	36,33	25,29	31,14
3 — 5	31,14	52,53	41,21
5 — 10	32,87	21,40	27,49
10 — 15	27,68	17,51	22,89
15 — 20	27,68	46,69	36,63
20 — 25	38,06	36,96	37,55
25 — 30	34,60	38,91	36,63
30 — 35	41,52	36,96	39,38
35 — 40	41,52	44,75	43,04
40 — 45	81,31	33,07	58,61
45 — 50	41,52	29,14	35,71
50 — 55	34,60	25,29	30,22
55 — 60	27,68	29,18	28 39
60 — 65	32,87	15,56	24,72
65 — 70	31,18	25,29	28,39
70 — 75	10,38	9,72	10,07
75 — 80	8,65	33,07	20,14
80 — 85	5,19	13,62	9,16
85 — 90	0,00	5,84	2,75
90 — 95	0,00	0,00	0,00

XVI. Table de la Vitalité des âges des Etrangers à St. Pétersbourg.

telle, qu'elle fert aux calculs des rentes viageres & d'autres établiffements de ce genre.

	De 1000 garçons nouveaux nés.	De 1000 filles nouvellement nées.	De 1000 Enfans nouveaux nés en général.
Viennent vivans au monde -	974, 05	976, 65	975, 28
ac omplissent. la 1 année.	707, 61	636, 19	674, 01
2 - - -	584, 77	540, 86	564, 12
3 - - -	548, 44	515, 57	532, 98
5 - - -	517, 30	463, 04	491, 77
10 - - -	484, 43	441, 64	464. 28
15 - - -	456, 75	424, 13	441, 39
20 - - -	429, 07	377, 44	404, 76
25 - - -	391, 01	340, 48	367, 21
30 - - -	356, 41	301, 57	330, 58
35 - - -	314, 89	264, 61	291, 20
40 - - -	273, 37	219, 86	248, 16
45 - - -	192, 06	186, 79	189, 55
50 - - -	150, 54	157, 61	153, 84
55 - - -	115, 94	132, 32	123, 62
60 - - -	88, 26	103, 14	95, 23
65 - - -	55, 39	87, 58	70, 51
70 - - -	24, 25	62, 29	42, 12
75 - - -	13, 87	52, 57	32, 05
80 - - -	5, 20	19, 50	11, 91
85 - - -	0, 00	5, 84	2, 75
90 - - -	0, 00	0, 00	0, 00

XVII. Ta-

XVII. Table réduite des morts des Etrangers à St. Pétersbourg, rangés ſelon les maladies ou les cauſes de mort.

Maladies & Cauſes de mort.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a.	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en général il y a.
Pleuréſie - - - -	- - 23, 09	- - 11, 95	- - 17, 84
Fievre chaude - - -	- - 223, 80	- - 137, 45	- - 183, 10
Conſomption - - -	- - 115, 45	- - 111, 55	- - 113, 62
Convulſions - - -	- - 204, 26	- - 199, 20	- - 201, 88
Vieilleſſe - - - -	- - 14, 21	- - 33, 86	- - 23, 47
Dyſſenterie - - -	- - 14, 24	- - 21, 91	- - 17, 84
Petite verole - - -	- - 42, 63	- - 75, 70	- - 58, 22
Hydropiſie - - -	- - 33, 75	- - 33, 86	- - 33, 80
Malheur - - -	- - 10, 66	- - 13, 94	- - 12, 21
Apoplexie - - -	- - 21, 31	- - 25, 90	- - 23, 47
Scorbut - - - -	- - 0, 00	- - 5, 97	- - 2, 87
Enfantement - - -	- - - -	- - 33, 86	- - 15, 96
Dentition - - - -	- - 101, 24	- - 65, 74	- - 84, 51
Epilepſie - - - -	- - 10, 66	- - 9, 95	- - 10, 33
Verole - - - -	- - 5, 32	- - 1, 99	- - 3, 75
Rougeole - - - -	- - 21, 31	- - 11, 95	- - 16, 90
Eſquinancie - - -	- - 0, 00	- - 3, 98	- - 1, 87
Phreneſie - - -	- - 1, 77	- - 0, 00	- - 0, 94
Etouffement des nourriçons au ſommeil par les meres - - - -	- - 3, 55	- - 5, 97	- - 4, 69
Pierre - - - - -	- - 0, 00	- - 3, 98	- - 1, 88
Maladies inconnûes - -	- - 152, 75	- - 191, 23	- - 170, 89

Les tables precedentes nous fourniſſent d'abord les reſultats ſuivans generaux:

I.) Etat moyen de la population à St. Petersbourg pour tout l'intervalle du temps depuis l'année 1764 jusqu'à l'année 1780. (*)

1.) Il ſe fit annuellement à St. Petersbourg 1297 mariages.

2.) Il y naquit annuellement 5292 enfans; ſçavoir 2710 garçons & 2582 filles.

3.) Il y mourût annuellement 4616. perſonnes, ſçavoir 2993 males & 1623 femelles.

4.) Conſequemment il y eût un ſurçroit annuel des naiſſances ſur les morts de 676 perſonnes; ſçavoir il y naquit 959 femelles plus, qu'il n'en mourût, & il y mourût 283 males plus, qu'il n'en naquit; enſorte que le ſurcroit des naiſſances ſur les morts etoit uniquement du côté des femmes.

Voyons, s'il en eſt de même dans les periodes ſpecielles de tout cet intervalle du temps.

II.) Etat comparé de la population à St. Petersbourg dans les trois dernieres periodes conſecutives:

Premiere periode de 1764 – 1770.

Le nombre annuel des mariages fut 1351.

Il

(*) Du calcul de ces nombres moyens j'ai exclû l'année 1764, dont les tables ne ſont que pour dix mois, & les années 1767 & 1775, à cauſe de l'abſence de la Cour Imperiale de St. Petersbourg dans ces deux années.

Il naquit annuellement 5122 enfans, ſçavoir 2592 males & 2530 femelles.

Il mourût annuellement 4677 perſonnes, ſçavoir 3036. males & 1641. femelles.

Donc le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts a été de 445 perſonnes; & ce ſurcroit eſt uniquement du côté des femmes.

Seconde periode de 1771 — 1775.

Le nombre annuel des mariages a été 1221.

Il naquit annuellement 5115 enfans; ſçavoir 2639 males & 2476 femelles.

Il mourût annuellement 4921 perſonnes; ſçavoir 3244 males & 1677 femelles.

Donc le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts a été de 194 perſonnes; & ce petit ſurcroit a été encore uniquement du côté des femmes.

Troiſieme periode de 1776 — 1780.

Le nombre annuel des mariages a été 1305.

Il naquit annuellement 5638 enfans; ſçavoir 2898 garçons & 2740 filles.

Il mourut annuellement 4311 perſonnes; ſçavoir 2752 males & 1559 femelles.

Donc le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts a été de 1327 perſonnes; & ce grand ſurcroit a outre cela l'avantage de venir & de l'un & de l'autre ſexe.

Nous aurons dans les remarques ſuivantes, l'occaſion d'obſerver encore d'autres avantages, par lesquels cette derniere periode ſe diſtingue des deux précedentes.

Je

Je passe maintenant aux Remarques abregées *sur les tables précédentes de la fécondité & de la mortalité dans la Ville de St. Pétersbourg*: & pour plus d'ordre, je les range sous les titres suivans, conformement au plan donné ci devant:

I. Nombre moyen des vivans dans la ville de St. Pétersbourg pour la periode de 1764 jusqu'à 1780, & proportion entre le nombre des habitans étrangers & celui des nationaux.

Pour etre à même de faire tout l'emploi dont de pareilles tables sont susceptibles, & pour en tirer toute l'utilité qu'elles promettent, il faudroit, que le nombre de tous les vivans qu'elles embrassent, fût connu par des dénombremens exacts, faits de periode en periode, & que ce nombre entrât comme une quantité connue dans ces sortes de calculs. En Suede, où l'on a perfectionné le plus la construction & l'emploi de telles tables, le Bureau qui en est dépositaire & chargé d'en faire la redaction & le calcul, reçoit aussi tous les trois ans des relevés detaillés de tous les vivans, selon leur sexe, leur âge & leur genre de vie. Dans l'incertitude où je suis sur le nombre des vivans de St. Pétersbourg dans la période dont il s'agit, voici la manière, qui m'a paru la plus sûre pour le calculer avec un degré suffisant de précision: Je compare le nombre de tous les vivans qu'on a trouvés à St. Pétersbourg par le dénombrement fait en 1784, avec le nombre des naissances de cette même année; d'où j'obtiens la mesure de la fécondité générale $= \frac{1}{31}$, c'est-à-dire, qu'en l'année 1784, on comptoit à St. Pétersbourg 31 vivans sur

ſur chaque naiſſance; & cette meſure de fecondité générale eſt parfaitement d'accord avec celle, qui a ordinairement lieu dans les grandes villes. En ſuppoſant donc, que cette même meſure de la fecondité générale $= \frac{1}{31}$ a également eu lieu à St. Petersbourg dans la periode de 1764 jusqu'à 1780, pour la quelle les tables précédentes nous apprennent le nombre moyen des naiſſances annuelles $= 5292$, on obtient 164052 pour le nombre moyen des vivans à St. Petersbourg dans cette même période. Ce nombre eſt le nombre moyen de la population de cette ville pour toute la durée de cette période; nous verrons dans la ſuite, que dans les dernieres cinq années de cette période, il doit être ſuppoſé probablement de 174778.

Dans les tables des deux premieres années de cette période on a eu ſoin de diſtinguer les nationaux des étrangers; ce qui nous offre le moyen de calculer avec aſſez de préciſion le rapport, qui alors eut lieu entre le nombre des habitans ètrangers de la ville & celui des nationaux. En prenant ces deux années enſemble, on trouve le nombre des mariages des étrangers être au nombre des mariages des ruſſes, comme 10 à 73;
celui des naiſſances, comme 10 à 74;
& celui des morts, comme 10 à 63.
Le rapport moyen entre ces trois eſt celui de 1. à 7; de façon, qu'on peut établir avec bien de la probabilité, qu'en 1764 & 1765 on comptoit à St. Petersbourg ſept ruſſes contre un étranger. Il s'enſuit, que le nombre moyen de la population étant ſuppoſé 164000, il y avoit alors dans ce nombre 143800 ruſſes & 20500 étrangers.

II.) Fécondité intentionnelle.

1.) Le nombre moyen annuel des mariages a été = 1297; calcul moyen de 14 ans, en excluant les deux années de l'abſence de la Cour ainſi que l'année 1764, dont les tables ne ſont que pour 10 mois. J'en tire la meſure de la fécondité intentionnelle = $\frac{1}{126}$; c'eſt à-dire, qu'entre 126 perſonnes il ſe fait un mariage par an, ou que de 63 perſonnes il y en a annuellement une, qui ſe marie. Cette meſure de la fécondité intentionnelle n'eſt que médiocre tout au plus, vû qu'il y a de grandes villes où elle eſt $\frac{1}{110}$ ou même $\frac{1}{83}$, quoiqu'il y en ait auſſi d'autres, où elle n'eſt que $\frac{1}{137}$. Il ſera intéreſſant de voir par la continuation des tables de St. Petersbourg, quels ſeront dans la ſuite les progrès de cette fécondité. La régle que j'ai expoſée ci-deſſus pour trouver le temps du doublement de la population, fait voir l'avantage ou le détriment, qui reſulte pour l'Etat ſelon que p. e. dans un Gouvernement de 500000 hommes la meſure de leur fécondité intentionnelle eſt $\frac{1}{110}$ ou $\frac{1}{126}$. D'ailleurs il eſt à préſumer, que des tables pour des provinces entiéres montreroient bien plus de fécondité intentionnelle, puisqu'à cauſe d'un plus grand nombre de célibataires, elle eſt plus petite dans les villes, que parmi les gens de la campagne. En diſtribuant les 17 années de nos tables en 3 périodes, on obtient les nombres moyens annuels des mariages

pour la période		Calcul moyen
de 1764 — 1770	1351	de 5 ans
de 1771 — 1775	1221	— 4
de 1776 — 1780	1305	— 5

d'où

d'où l'on voit, que ce nombre a été le plus grand dans la premiere periode; qu'il a baissé sensiblement dans la seconde, mais que dans la troisiéme il a derechef augmenté presqu' autant.

2.) Il est remarquable, qu'à St. Petersbourg le nombre des veuves qui se remarient, est plus grand que celui des veufs qui passent à de secondes nôces, & cela dans le rapport de 7 à 5; aulieu que par tout ailleurs il en arrive le contraire.

3.) Il seroit à désirer, que dans les tables, surtout lorsqu'elles seront dans la suite étendues à des Gouvernemens entiers, on marquât aussi l'âge des personnes qui se marient. Le Gouvernement en jugeroit, si les mariages se font à l'age, qu'indique la nature sans être ni tardifs, ni prématurés, ce, qui a dans l'un ou l'autre cas une influence bien sensible sur la fécondité réelle (*). Il seroit bon aussi, que dans les listes des morts on comptât, combien de mariages ont été dissous par la mort de l'un ou de l'autre des mariés. On en calculeroit la durée moyenne des mariages.

(*) M. Francklin assure (Oeuvr. T. II. pag. 119.) que dans les Etats de l'Amérique, où la constitution politique & économique encourage les jeunes gens à se marier de bonne heure en leur offrant la perspective d'une subsistance aisée, on compte 8 enfans sur chaque mariage, & que par cette raison, la population y double au moins tous les 20 ans.

III. Fécondité réelle.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été 5292, dans le quel il y a 2710 garçons & 2582 filles: Calcul moyen de 14 ans. D'où réſulte la meſure de la fécondité réelle pour cet eſpace de temps en général = 4, 08, c'eſt-à-dire, qu'on compoit 408 enfans ſur 100 mariages. Mais en le diviſant en 3 périodes, comme ci-deſſus, on a plus exactement pour la période:

	le nombr. moyen des naiſſ. annu.	le nombr. moyen des mariages.	donc la meſure de la fec. réelle.
de 1764 — 1770	5122	1351	3, 7
de 1771 — 1775	5115	1221	4, 1
de 1776 — 1780	5638	1305	4, 2

Dans cette dernière période de 1776 — 1780 chaque mariage, l'un compenſant l'autre, produiſoit 4, 2, c'eſt-a-dire, 10 mariages 42 enfans; ce, qui eſt une aſſez forte fécondité réelle. Dans des provinces entières elle eſt ordinairement 4, & dans les grandes villes 3, 3 jusqu'à 3, 8; il y a cependant auſſi des grandes villes, où elle eſt portée jusqu'à 4, 6. Il ſeroit bon auſſi de connoître la meſure de la fécondite réelle pour les villes de Gouvernement, les villes provinciales, les villes de cercles & les bourgades de la Ruſſie.

Il eſt digne d'attention, que la meſure de la fécondité réelle, qui depuis 1764 à 1770 n'a été, que 3, 7, eſt portée à 4, 2 dans la période ſuivante. Un Gouvernement, qui n'obtenant que 37 enfans de 10 mariages, ne doubleroit ſa population, qu'après un ſiécle,

ſiécle, y parviendroit déja après 65 ans, ſi la fécondité réelle y étoit portée au point qu'il pût compter 42 enfans provenus de 10 mariages. Ce changement favorable ſemble annoncer des mariages moins tardifs dans cette période, que dans les précédentes.

2.) On a appris par un accord parfait de toutes les tables des naiſſances, qu'on ait eûes jusqu'à preſent, que par tout & en tout temps dans toute quantité conſiderable d'enfans, il y a plus de garçons que de filles, & que le nombre des garçons ſurpaſſe celui des filles préciſement dans le rapport de 105 : 100 ou à peu de choſe près. Cette régularité dans la naiſſance des enfans des deux ſexes eſt ſi conſtante, que ſelon le calcul de probabilité, tant-s'en-faut, qu'elle puiſſe être l'éffet du haſard, qu'elle eſt plutôt une preuve frappante que la providence préſide au ſort du genre humain. C'eſt préciſement ce même rapport, qu'indiquent auſſi les tables de St. Pétersbourg. Le nombre moyen annuel des garçons (2710) eſt à celui des filles (2582) dans le rapport de 105 à 100. Dans le nombre total des naiſſances (87894) qui ont eu lieu dans la période de 17 ans, il y a 44958 garçons & 42936 filles; ces deux nombres ſont entre eux dans le rapport de 1047 : 1000, qui ne differe pas ſenſiblement de celui de 105 : 100.

IV. Fécondité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été 5292. Calcul moyen de 14 ans. Par ce nombre nous avons calculé celui de tous les vivans, en évaluant en conféquence d'un dénombrement actuel & de la façon alleguée ci-deffus, la méfure de la fécondité générale $= \frac{1}{31}$; c'eft-à-dire, que dans la période mentionnée on comptoit à St. Petersbourg une naiffance par an fur 31 vivans.

Cette mefure de la fécondité générale eft bien d'accord avec celle, qui a le plus frequemment lieu dans les grandes villes, où elle eft ordinairement $\frac{1}{30}$, au lieu, que dans les petites villes & les villages elle monte fouvent jusqu'à $\frac{1}{24}$ ou même à $\frac{1}{22}$. Il eft cependant auffi des grandes villes, où elle va jusqu'à $\frac{1}{28}$.

2.) Il feroit certainement d'une grande utilité, de connoître les mefures de la fécondité générale des provinces & des Gouvernemens entiers de la Ruffie, & de les comparer entre elles de temps en temps, ce qui ne laifferoit pas de fournir des rémarques bien intéreffantes. Ailleurs dans des provinces entieres elle eft ordinairement $= \frac{1}{28}$. La différence entre ces mefures de $\frac{1}{31}$ & $\frac{1}{28}$, en produit une de presque 2000 naiffances annuelles dans un nombre de 500000 hommes, que je prends pour la population moyenne d'un Gouvernement de Ruffie, & l'epoque du doublement de la population en eft rapprochée ou reculée de presqu'un fiecle. Au refte dans tout endroit la mefure de la fécondité réelle a des limites naturelles, aux quelles une fois parvenûe elle ceffe d'augmenter; mais ces limites, n'étant que celles d'une fubfiftance aifée libre & affurée, font affujetties aux foins du Gouvernement.

3) Si

3.) Si nous ſuppoſons, que la même meſure de la fécondité générale a eû lieu dans les 3 périodes mentionnées; il y avoit à St. Pétersbourg dans la période:

de 1764 — 1770	158782 hommes
de 1771 — 1775	158565 — —
de 1776 — 1780	174778 — —

conſéquemment dans la dernière période 16000 hommes de plus, que dans les deux précédentes, & la population s'eſt accrue d'un dixiéme. Le nombre moyen pour ces trois périodes priſes enſemble eſt 164052, comme il a été dit ci-deſſus.

4.) Les nombres moyens des naiſſances annuelles, qui nous ont ſervi à comparer la population de St. Pétersbourg à elle-meme en temps differens, ſervent auſſi à la comparer avec celle d'autres grandes villes. Il en réſulte par exemple que la population de cette ville eſt environ le tiers de celle de Londres ou de Paris, & qu'elle eſt à celle de Vienne dans le rapport de 10 à 13.

V. Mortalité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des morts a été de 4616, dans le quel il y avoit 2993 hommes & 1623 femmes. Calcul moyen de 14 ans. Tout l'intervalle de temps, que les tables embraſſent, étant diviſé, comme ci-deſſus, en 3 périodes: on a pour la période

	Nombre moyen annuel des morts.
de 1764 — 1770	4677
de 1771 — 1775	4921
de 1776 — 1780	4311

où

où il est a remarquer, que la période de 1771 — 1775 se distingue par le plus grand nombre moyen annuel des morts & le plus petit des mariages & des naissances, (pag. 40.) & qu'au contraire la période suivante de 1776 — 1780 est remarquable par le plus petit nombre moyen annuel des morts & le plus grand des naissances.

2.) Le nombre moyen annuel des morts, 4616, nous fournit la mesure de la mortalité générale $= \frac{1}{35}$; c'est-à-dire, que dans le temps mentionné, de 35 personnes il en mourut une par an à St. Pétersbourg, ou que de 1000 personnes il en mourut annuellement 28.

3.) Une si petite mortalité générale dans une si grande ville est peut-être sans exemple. Ailleurs la mesure de la mortalité générale est ordinairement $\frac{1}{24}$ pour les plus grandes villes; $\frac{1}{28}$ pour les villes médiocres; $\frac{1}{32}$ pour les petites villes, & $\frac{1}{45}$ pour les habitans de la campagne; c'est-à-dire, que d'un nombre égale de 1000 vivans, les habitans de la campagne font une perte annuelle de 25; les plus grandes villes de 42; les villes médiocres de 36; les petites villes de 31; mais St. Pétersbourg n'en perd annuellement, que 28.

4.) Cette mortalité extraordinairement petite pourroit peut-être rendre suspecte l'exactitude des tables sur les relevés des morts. Mais dèsqu'on y réfléchit, le doute paroit de plus en plus être destitué de fondement. Nous avons trouvé ci-dessus que la mesure de la fécondité générale,

nérale est $\frac{1}{31}$; étant tirée d'un denombrement actuel & parfaitement d'accord avec celle qui a ordinairement lieu dans les grandes villes, elle est solidement établie, à moins qu'on ne tienne aussi pour suspecte la précision du dénombrement-même. Or si la mesure de la mortalité générale surpassoit ou égaloit celle de la fécondité générale; il est évident par la regle donnée ci-dessus, que dans le premier cas St. Pétersbourg se dépeupleroit annuellement, & qu'au second cas, il n'y auroit, qu'une même population, permanente & qui ne feroit aucun progrès. Mais l'un & l'autre de ces deux états sont également contredits par l'experience; les progrès de la population y étant sensibles par plusieurs circonstances. Il faut donc, que la mésure de la mortalité générale y soit plus petite que $\frac{1}{31}$, & puisqu'il faut qu'elle soit *sensiblement* plus petite, elle pourra bien être $\frac{1}{35}$. D'ailleurs cette petite mortalité générale s'explique par la nature robuste & vigoureuse des nationaux, de la quelle la mesure de la mortalité specielle des âges va nous fournir dans l'article suivant des preuves convaincantes; & outre cela la salubrité-même de cette ville du Nord, bâtie spacieusement, percée par des rûes larges & libres, & traversée par un fleuve d'une fort bonne eau exclut une des causes principales de la grande mortalité des grandes villes.

5) Au nombre des 17 ans que les tables embrassent, il n'y en a eu que quatre, où le nombre des naissances fût inférieur à celui des morts. Pour la somme de ces 17 années prises ensemble, le nombre moyen an-

nuel des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts dans le rapport de 114 à 100; c'eſt-à-dire, que contre 100 perſonnes, qui moururent, il naquit 114 enfans. En diſtribuant cet intervalle de temps, comme ci-deſſus, en 3 périodes: on trouve pour la période:

	le rapport du nombre moyen annuel des naiſſances à celui des morts.
de 1764 — 1770	109 : 100
de 1771 — 1775	104 : 100
de 1776 — 1780	130 : 100

où il eſt ſatisfaiſant de voir, quel eſt l'avantage de la derniere période de 1776 — 1780 ſur les deux précédentes par rapport aux progrès de la population, ce que nous détaillerons plus amplement dans la ſuite.

6.) C'eſt une choſe digne de remarque, que le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts à St. Pétersbourg pris pour tout l'intervalle de temps que les tables embraſſent, ne provienne uniquement que du ſexe féminin; car pour le *ſexe maſculin* le nombre moyen annuel des naiſſances eſt inferieur à celui des morts dans le rapport de 90 à 100, au lieu que pour les femmes le nombre moyen annuel des naiſſances ſurpaſſe celui des morts dans le rapport de 159 à 100; cependant la dernière période de 1776 à 1780 a l'avantage, comme nous l'avons vû ci-devant, de tirer ſon ſurcroit des naiſſances ſur les morts & de l'un & de l'autre ſexe.

7.) Le

7.) Le rapport des nombres moyens annuels des morts des deux ſexes nous préſente une obſervation intéresſante à faire. Le nombre moyen annuel des hommes morts eſt à celui des femmes mortes dans le rapport de 184 à 100. Ce rapport extraordinairement fort s'explique par la multitude d'hommes qui excède à St. Pétersbourg beaucoup plus qu'ailleurs, le nombre des femmes, inegalité qui cependant (rémarque 6) diminue chaque année; d'ailleurs la mortalité des hommes, qui jusqu'à la 20ième année de l'âge eſt moindre que celle des femmes, commence dès lors à la ſurpaſſer de beaucoup; enſorte qu'entre la 20ième & la 25ième année de l'âge, de 1000 hommes il en meurt 165, au lieu que de 1000 femmes de même âge il n'en meurt dans un égal intervalle que 88 (voyez l'article ſuivant ſur la méſure de la mortalité ſpecielle de chaque âge).

8.) La mortalité générale à St. Pétersbourg, quelque petite qu'elle ſoit, doit cependant naturellement ſe resſentir de l'effet de la plûpart des cauſes, qui augmentent la mortalité dans les grandes villes. Il s'enſuit néceſſairement, qu'on a lieu de s'attendre à une moindre mortalité générale dans les moindres villes de l'Empire & bien moindre encore parmi les habitans de la campagne. Il ſeroit très intéreſſant pour l'État & en général & en particulier d'en connoitre les véritables meſures, qui entrent ſi eſſentiellement dans le choix des moyens de réaliſer le degré de population que comporte la Ruſſie, & dont tout s'accorde à conſtater la poſſibilité.

VI. Mortalité ſpecielle de chaque âge.

Les tables de St. Pétersbourg nous offrent pluſiéurs rêmarques intéreſſantes à faire, ſur la meſure de la mortalité ſpecielle de chaque âge dans cette ville. Pour plus d'ordre je les range ſous les titres ſuivans:

1) *Nombre des enfans venus morts au monde.*

1.) Dans le nombre de 87894 naiſſances arrivées pendant tout l'intervalle de temps que comprennent les tables, il n'y a eu que 623 enfans de venus morts au monde, ou ce qui revient au même, il n'y en a eu que 7, ſur 1000 naiſſances; en quoi il eſt encore digne de rémarque, que ce nombre moyen, dejà ſi petit en lui-même, diminuoit encore ſenſiblement dans les periodes ſucceſſives; car le temps que les tables embraſſent, étant comme ci-deſſus diſtribué en 3 périodes, on voit, que ſur 1000 naiſſances il y a eu dans la période

	Enfans venus morts au monde.
de 1764 — 1770	10
de 1771 — 1775	7
de 1776 — 1780	3.

Nos tables font voir à cet égard une différence ſenſible dans la mortalité des deux ſexes: ſur 1000 garçons il y a eu 9 enfants morts nés, au lieu qu'il n'y en a eu que 5, ſur 1000 filles; cette proportion eſt bien d'accord avec celle qui a auſſi lieu en ce point dans d'autres endroits, ainſi qu'on le voit par exemple par les tables ſuedoiſes.

2.) Un

2.) Un ſi petit nombre d'enfans morts-nés (7 ſur 1000 naiſſances) eſt peut être ſans exemple. Voudroit on ſoupçonner la précision des tables à cet égard? leur accord avec d'autres, quant à la proportion de cette mortalité pour les deux ſexes, que je viens de faire remarquer, eſt un préjugé en leur faveur. On eſt beaucoup plus en droit d'attribuer cet avantage de la population à la forte conſtitution des nationaux, parceque les mêmes tables démontrent, que parmi les étrangers à St. Pétersbourg ſur 1000 naiſſances il y a 25 enfans morts-nés, conſéquemment plus de 3 fois autant, que parmi les Ruſſes. Ajoutons que ce qui contribue à rendre chez les Ruſſes ce malheur plus rare, c'eſt la facilité avec la quelle les meres ruſſes mettent au monde leurs enfans; car les tables font voir que de 1000 femmes ruſſes qui accouchent, il n'y a que 7 qui periſſent dans les travaux de l'enfantement; aulieu que chez les habitans étrangers de la ville ſur autant de femmes en couche 15 en ſont ordinairement les victimes.

3.) Le grand avantage qui en réſulte pour les progrès de la population, s'apprécie facilement, quand on conſidère que la Ruſſie comptant jusqu'à un million de naiſſances annuelles, jouit par cette circonſtance heureuſe d'un gain national annuel de 17000 enfans, qui ne verroient pas le jour, ſi le rapport du nombre des enfans morts-nés à celui des naiſſances, étoit chez les nationaux le même que chez les étrangers.

2.) *Mortalité des enfans nouveaux-nés.*

1.) La mefure de la mortalité fpecielle pour la première année de l'âge humain eft à St. Pétersbourg telle, que de 1000 enfans nouveaux-nés & venus vivans au monde il en meurt 279 avant de l'accomplir, de façon que la mortalité de cet âge en enleve 5 de 18, c'eft un peu plus du quart de la totalité des naiffances. Cette mortalité eft donc à la verité plus grande que celle que prefcrit le cours ordinaire de la nature, felon le quel de 1000 enfans il ne meurt à cet âge que 245, mais elle eft cependant bien moindre que celle qui a lieu non feulement en d'autres grandes villes, mais auffi dans St. Pétersbourg même parmi les habitans étrangers de cette ville, chez qui d'autant d'enfans nouveaux-nés il en meurt 309 pendant le cours de la première année de la vie. Les tables montrent une grande différence entre les mefures de cette mortalité de l'un à l'autre fexe à St. Pétersbourg; car de 1000 garçons nouveaux-nés il n'en meurt dans la première année que 227, ou 10 de 44; au lieu que d'autant de filles la mortalité de cet âge en enleve 370, ou 10 de 27. Ce rapport eft donc chez les nationaux de 5 à 8, & chez les étrangers établis à St. Pétersbourg il eft à peu près de 5 à 6.

2.) La forte mortalité des enfans parmi les habitans de la campagne & dans les grandes villes, étant un des principaux obftacles aux progrès de la population, il eft certainement de l'interêt de l'État, que chaque Gouvernement en connoiffe pour l'avantage des fujets

jets la véritable mesure & en fasse un objet de son attention & de ses soins. En la supposant pour toute la Russie la même que nous venons de la trouver pour St. Pétersbourg; cette mortalité de la prémiere année y enleve annuellement 277000 enfans, dont il seroit possible de sauver une bonne partie.

Répandre parmi le peuple par quelque voye bien imaginée de saines idées sur les premiers secours qu'il convient de donner aux enfans, ainsi que sur leurs maladies, s'opposer aux mauvais procédes que l'ignorance, le préjugé & l'indolence même leur font éprouver, voilà les premiers moyens, & qui dans la suite peuvent encore donner lieu à d'autres, de suppléer dans un païs fort étendu à l'impossibilité du secours général de la médicine.

3.) Il seroit bon aussi, que les tables de mortalité des villes marquassent pour chaque enfant mort à cet âge-là, s'il a été allaité par sa mere ou par une nourrice. Ailleurs on a constaté, & les tables de St. Pétersbourg ne manqueroient pas de le constater de même, que le nombre des enfans qui meurent entre les mains des nourrices surpasse le nombre de ceux, que la mort enleve à la mammelle de leurs meres, dans le rapport de 5 à 3; ajoutons-y, que les enfans mêmes des nourrices sont aussi pour l'ordinaire les victimes de l'abandon où les laissent leurs meres; & nous aurons une expression arithmétique de la perte, qui s'ensuit pour l'État d'un service mercenaire des nourrices malheuheureusement trop repandu. Pour les cas de necessité les Comptoirs des nourrices, tels qu'on les à établis en Suede, & la défense d'en prendre d'autres, que celles jugées dignes d'allaiter un enfant de la patrie, sont des institutions dignes d'etre imitées pour le bien de l'humanité.

3.) *Mortalité de l'Enfance.*

1.) La mesure de la mortalité specielle de l'enfance à St. Pétersbourg nous offre une nouvelle preuve de la constitution forte & vigoureuse des nationaux, & nous fait entrevoir les dispositions favorables de la nature pour l'accroissement d'un peuple, qu'elle a doué de tant de vitalité, même dans une période de l'âge humain, où les forces de l'homme loin d'être portées à leur perfection, ne font encore que se deployer. Cette mésure est telle à St. Pétersbourg, que de 1000 enfans, tous agés d'un an, il y en a 785, qui accomplissent la 15ieme année, & qu'il n'y en a, que 215 d'enlevés par la mort pendant cette periode; au lieu que d'autant d'enfans âgés d'un an, il en meurt en général, avant d'atteindre la 15ieme année, 290 en d'autres païs; 279 nommement en Suede; 258 à Stockholm; 435 à Londres &c. & 346 même à St. Pétersbourg chez les habitans étrangers de cette ville. Il resulte de cet avantage de la nature, que la Russie, de son million des naissances annuelles conserve jusqu'au-de-là de 15 ans, au moins 562000 enfans, dont elle perdroit 94000 dans cet intervalle de temps, si la mesure de la mortalité spécielle de cette période étoit cette période étoit pour les nationaux la même, que pour les étrangers établis à St. Pétersbourg *).

2.) Il eſt cependant digne de rémarque, que la forte vitalité des enfans ruſſes en général dans cette période de la vie, resulte uniquement des mâles en particulier; car de 1000 filles agées d'un an, il en meurt 305 avant l'âge de 15 ans, au lieu que d'autant de garçons de même âge, il n'en meurt que 174 dans le même intervalle de temps; enſorte, que la mortalité des filles, qui dans la premiere année de la vie ſurpaſſoit celle des garçons dans le rapport de 8 à 5, la ſurpaſſe dans cette période en raiſon de 9 à 5.**) On en déduit par un calcul aiſé, que 1000 perſonnes, toutes agées de 15 ans, conſiſtent à St. Pétersbourg en 602 mâles & 398 femelles, ce rapport s'accorde très bien avec ce qui a été dit cy deſſûs de l'excès plus fort à St. Pétersbourg qu'ailleurs, du nombre des mâles ſur celui de femelles.

4.) *Mor-*

*) Dans les grandes villes la moitié de tous les enfans meurt ordinairement avant l'âge de 10 ans, à Londres avant l'âge de 3 ans, & chez les étrangers de St. Pétersbourg avant celui de 5 ans. Mais chez les nationaux elle atteint à St. Pétersbourg l'âge au-de-là de 20 ans.

**) Chez les étrangers établis à St. Pétersbourg la mortalité des filles eſt dans cette même periode inferieure à celle des garçons dans le rapport de 50 à 53.

4.) Mortalité du moyen âge & de la vieilleſſe.

1.) La meſure de la mortalité ſpécielle du moyen âge à St. Pétersbourg nous découvre un phénomène auſſi disgracieux qu'inattendu; une très grande mortalité ſurvient tout à coup à l'age de 20 ans, qui ſemble éteindre ſubitement la plus grande partie de l'heureuſe vitalité que nous avons eu le plaiſir de remarquer dans les périodes précédentes, & qui attaque l'age le plus beau de la vie & le plus précieux à l'Etat, celui de 20 à 60 ans. La meſure de la mortalité ſpécielle de cette période eſt à St. Pétersbourg telle, que de 1000 perſonnes toutes agées de 20 ans, il n'y en a que 187 qui accompliſſent la 60. année & qu'il y en a conſequemment 813 d'enlevées par la mort durant cette belle periode de la vie; au lieu que de 1000 perſonnes toutes agées de 20 ans, il n'en meurt avant la 60. année que 544 en d'autres païs en général; 516 nommement en Suede; 712 à Stockholm, 720 à Londres & 764 chez les habitans étrangers de St. Pétersbourg. Les tables nous montrent, que cette mortalité qui eſt exceſſive pour l'un & l'autre ſexe, l'eſt cependant beaucoup plus pour les hommes que pour les femmes; car de 1000 hommes agés de 20 ans, elle en enleve 856, au lieu que d'autant de femmes de même age il n'y en a que 702, qui en ſont les victimes. La mortalité des hommes, qui dans la période de l'enfance étoit bien inférieure à celle des femmes, devient tout à coup deux fois auſſi grande dès l'entrée dans la 20. année. Il y a beaucoup moins de disproportion entre les meſures de cette mortalité pour les deux ſexes parmi les habitans étrangers de la ville.

2.)

2.) Une chose digne de remarque & qui fournit des réflexions intéressantes sur la cause probable de la grande mortalité de cette période, c'est qu'elle survient subitement après une grande vitalité. La mortalité des enfans diminue rapidement dès la fin de la premiere année, & à l'age de 10 à 15 ans elle est si petite, qu'il ne meurt dans cet intervalle de 5 ans, qu'un de 50 mâles & une de 29 femelles. Tout à coup ces heureuses dispositions changent de face. A l'âge de 20 à 25 ans la mortalité est deja si grande, que dans cet égal intervalle de temps il meurt un de 6 mâles & une de 11 femelles; ensorte, que l'âge de 15 à 20 ans, dans lequel selon le cours ordinaire de la nature la force de la vie est dans un état de permanence, ou du moins ne diminue que très peu, est ici l'époque marquée de cette funeste catastrophe. Or une dégradation aussi prématurée & aussi brusque que celle cy, ne sçauroit être en aucune maniere l'effet de la nature, qui n'eteint les forces de la vie que par dégrés lents & successifs. On est d'abord tenté de soupçonner, que cet excès de mortalité n'est qu'en apparence, & que cette espece d'illusion est causée par le grand nombre des gens de cet âge-là qui arrivent des provinces dans la Capitale, & dont les morts augmentent la mesure de la mortalité de cette période, au lieu que celle de la periode précédente est tirée uniquement du nombre des morts des habitans propres de la ville. Sans doute, pour que les consequences fussent hors de tout équivoque il faudroit ne consulter que des tables, qui continssent des indiuidûs nés & morts dans la ville. Mais nos tables nous présentent cependant des raiſons aſſès plauſibles, qui donnent lieu de ſoupçonner que le mal eſt réel, & qu'il eſt une ſuite des déſordres & des excès, qui dès l'entrée de cette période troublent l'ordre de la nature, en épuiſant promptement les ſources de la vitalité. Un enſeignement digne de remarque que les tables nous donnent ſur l'eſpece de cette débauche, c'eſt qu'elle tue par des fiévres chaudes & des maladies de conſomption. Des recherches plus approfondies ſur cet objet & étendues à des Gouvernemens entiers, ne ſçauroient manquer d'eclaircir cette queſtion & d'être d'un grand intéret pour l'Etat, à qui il doit certainement importer, de ne pas perdre à la fleur de la jeuneſſe ou dans l'âge viril, une multitude de citoyens, qui ſelon les intentions de la nature auroient dû parvenir à l'âge des vieillards & qui conſequemment auroient dû pour le bien public fournir une beaucoup plus longue carriere qu'ils ne font actuellement, & laiſſer à l'Etat une poſterité nombreuſe & vigoureuſe. Pour faciliter ces recherches il ſeroit néceſſaire, que les tables euſſent plus de détail ſur ce point là, & qu'on en eut auſſi pour d'autres villes & pour des Gouvernemens entiers.

3.) Après la remarque précédente, on ne ſcauroit s'attendre qu'à un bien petit nombre de gens très vieux à St. Petersbourg. Nos tables démontrent, qu'il n'y a qu'un de 332 enfans, qui atteigne l'âge de 90 ans; au lieu que ſelon le cours régulier de la nature, plus que 3 fois autant devroient y parvenir. Elles font voir auſſi, & cela n'eſt pas moins d'accord avec la remarque précédente, que dans le petit nombre des vieilles perſonnes il y a moins d'hommes que de femmes.

4.)

4.) Cependánt il n'eſt pas moins remarquable, que dans ce petit nombre il en eſt pourtant quelques unes, qui touchent à ce que de nos jours on peut appeller le dernier âge de la vie; car dans l'intervalle de 17 ans que les tables embraſſent, il y a eu 39 perſonnes qui ſont mortes à l'âge de plus d'un ſiécle, & trois qui ont pouſſé leur carrière jusqu'à l'âge de 120 & 130 ans.

VII.) Force des maladies & Etat de la ſanté publique.

La meſure de la force des maladies & de l'Etat de la ſanté publique, dont j'ai expoſé cy-deſſus les applications les plus utiles, eſt de tous les articles de nos tables celui qui a le plus de beſoin d'être mieux arrangé dans la ſuite, & qui le mérite à pluſieurs égards. Non ſeulement il ſeroit à deſirer, qu'on en fit le plan ſur une enumération plus préciſe des maladies, & qu'on y établît autant de conformité que poſſible avec les meilleures tables des autres païs, pour être à même d'en faire la comparaiſon; mais on apperçoit auſſi dans l'exécution du plan tel qu'il eſt, des mépriſes & des erreurs qui jettent trop d'incertitude ſur pluſieurs conſéquences qu'on voudroit en tirer, & qui rendent inutile presque toute comparaiſon de nos tables avec celles des étrangers. Or de bonnes tables ſur cet objet, étendues à différentes contrées de la Ruſſie, en formeroient une eſpece de Topographie médicinale, qui par la diverſité des climats & des nations indigénes ſeroit intéreſſante pour l'Hiſtoire naturelle de l'homme en général, & qui par la comparaiſon des divers endroits entre eux & avec le cours ordinaire de la nature, indiqueroit aussi au Gouvernement les avantages des uns & les nécessités publiques des autres, & serviroit de base à des établissemens salutaires pour la conservation & la santé de leurs populations. Quoiqu'il en soit de cette partie des tables de St. Petersbourg, j'ai jugé bon d'en exposer ci-dessus le tableau rédigé, soit dans la vûe d'en faire sentir les defauts, afin qu'on y remedie dans la suite & surtout lorsqu'on donnera à ces tables une plus grande étendue, soit dans l'esperance que telles qu'elles sont elles pourroient cependant présenter quelque point de vue utile aux citoyens. Je n'ai à y ajouter que quelques remarques générales, qui se sont offertes à moi à la vue de ce tableau.

1.) De toutes les maladies, consignées dans les tables, celles qui causent à St. Petersbourg la plus grande mortalité, sont les Fièvres chaudes, qui enlevent le plus d'hommes, & les Pleuresies, qui enlevent le plus de femmes. Dans la période qu'embrassent nos tables, la multitude des victimes de leur malignité a fourni plus de la moitié de la somme totale des morts. La maladie dont la force approche le plus de celle des Fièvres chaudes & des Pleuresies, c'est la Consomption; elle fait plus de ravage parmi les hommes que parmi les femmes, & de celles cy elle enleve un plus grand nombre que la Fièvre chaude. Voici les nombres moyens de ceux qui meurent annuellement à St. Petersbourg de ces trois maladies:

Pleu-

	H.	F.	Somme.
Pleurefie	739	609	1348
Fièvre chaude	798	209	1007
Confomption	436	235	671
	1973	1053	3026

Or le nombre moyen annuel de tous les morts étant 4616; on voit, que la force de ces trois maladies eft telle, qu'enfemble elles contribuent pour plus de $\frac{3}{5}$ dans la totalité.

2.) Au nombre des maladies des enfans, dont il eft fait mention dans nos tables telles, que les Convulfions, la petite Vérole, la Dentition, la Rougeole, il n'en eft aucune, qui ne paroiffe être beaucoup moins violente à St. Petersbourg qu'ailleurs, & qui n'y caufe une bien moins grande mortalité que dans d'autres grandes villes. Il n'en eft aucune auffi, qui n'exerce plus de force fur les filles, que fur les garçons. Les Convulfions, qui font le plus de ravage & qui fous ce point de vue méritent le plus de recherches de la part des medecins, enlevent annuellement 218 enfans ou la 24^{ieme} partie de toutes les naiffances; cependant elles font beaucoup plus meurtrières ailleurs. En prenant le nombre moyen entre les trois années, qui dans nos tables précédent l'établiffement de l'Inoculation en Ruffie, la petite Vérole naturelle a alors enlevé annuellement à St. Petersbourg 157 enfans; d'ou il s'enfuit, que ce fléau univerfel de la population, qui en d'autres païs répand de temps en temps par des épidémies cruelles la terreur & la défolation dans les familles & qui en géné-

général & à l'ordinaire emporte un quatorzième de tous les hommes qui naiſſent, n'a levé à St. Petersbourg que le tribut d'un trente-unième ſur toutes les naiſſances. On ne connoît pas avec préciſion, faute de tables plus étendues, quelle eſt la force de la petite Vérole naturelle en d'autres contrées de la Ruſſie; on ne ſcait que généralement, qu'elle fait dans quelques unes des ravages bien plus conſidérables. Mais grande ou petite, la malignité locale de cette maladie généralement ſi cruelle eſt ſusceptible d'etre réduite à un degré incomparablement moindre par une méthode aiſée, avouée par la raiſon, conſtatée par l'expérience & miſe à l'abri de toute objection ſoit phyſique, ſoit morale. L'année 1768 fut en Ruſſie l'époque heureuſe & à jamais mémorable, où pour établir & accréditer dans ſes Etats la pratique de l'Inoculation, notre très gracieuſe SOUVERAINE, veillant avec un ſoin maternel au ſalut public, commença par en donner l'exemple le plus encourageant ſur Sa perſonne auguſte & ſur celle de Son Fils l'Héritier de Sa Couronne; tout de ſuite après Sa *Majeſté* fonda des maiſons publiques d'Inoculation à St. Petersbourg, à Moscou, & dans l'interieur de la Sibérie. En prenant le nombre moyen entre les années qui dans nos tables ſuivent l'établiſſement de l'Inoculation en Ruſſie, la petite Verole naturelle a alors enlevé annuellement à St. Petersbourg 151 enfans; ce nombre etant comparé avec le nombre moyen des naiſſances de ces mêmes années, il en reſulte, que la petite Vérole naturelle n'a alors enlevé qu'un trente-cinquieme de toutes les naisſances, au lieu du trente-unième qu'elle en emportoit avant.

avant. (*) J'en tire la concluſion qu'il s'en faut de beaucoup que l'Inoculation, quoiqu'il ſemble qu'elle ait produit quelque changement dans la mortalité cauſée par la petite Vérole, ſoit en vogue à St. Pétersbourg autant qu'elle pourroit l'être ſuivant les intentions bienfaiſantes de *Sa Majeſté*, & qu'elle dévroit l'être par ſon importance pour l'humanité & les progrès de la Population. Dans l'intervalle de temps que les tables embraſſent, la petite Vérole naturelle a emporté à St. Pétersbourg 2829 enfans. Sept fois ce nombre, ou 19800 a donc été au moins le nombre des malades de la petite Vérole à St. Pétersbourg dans ce même intervalle de temps. Il n'en ſeroit peutêtre pas mort 60, à raiſon de trois par mille, s'ils avoient été inoculés. La pratique de l'Inoculation auroit donc ſauvé la vie dans cet intervalle de temps à 2769 citoyens dans la ſeule ville de St. Pétersbourg; & à combien ce gain national ne monteroit-il pas, ſi nous étendions ce calcul à toute la Ruſſie? En finiſſant ces courtes réflexions ſur les maladies des enfans à St. Pétersbourg, j'aurois bien déſiré d'être à même de conſulter ſur cet important objet les tables de mortalité des maiſons des Enfans trouvés, établies à St. Pétersbourg & à Moscou; je ſuis perſuadé qu'elles fourniroient des conſéquences qui mériteroient toute attention à plus d'un égard.

3.)

(*) Les liſtes des morts de la petite Vérole naturelle ont diminué d'un cinquième en Angleterre, dès que la pratique de l'Inoculation y eſt devenue plus commune.

3.) En prenant le nombre moyen, il y a annuellement à St. Pétersbourg 52 perſonnes qui périſſent par des accidens quelsqu'ils ſoient. Dans l'intervalle de temps compris dans nos tables, les accidens ont coûté la vie à 875 perſonnes, 630 hommes & 245 femmes. Il feroit à déſirer qu'à la place du tître général de *malheurs* les tables les ſpécifiaſſent en quelque façon; un pareil détail mettroit le Gouvernement ſur la voie de prendre des meſures pour prévenir les plus ordinaires; c'eſt ainſi que les nombres des noyés indiqueroient les villes riveraines, qui ont plus beſoin des établiſſemens publics, où l'on rappelle ces malheureux à la vie par les moyens dont on connoît aujourd'hui le ſuccès par quantité d'expériences. Le nombre des enfans étouffés dans le ſommeil par les meres ou les nourrices, eſt heureuſement très-petit à St. Pétersbourg: il n'y en a eu que 16 dans toute la période de nos tables. En eſt-il de même dans les autres villes de la Ruſſie? L'auroit on crû, ſi les tables de la Suede n'en euſſent trahi le ſecret, que plus de 700 enfans y périſſent annuellement de cette pitoyable manière?

4.) Le nombre moyen annuel des corps trouvés morts à St. Pétersbourg eſt de 117 perſonnes, 97 hommes & 20 femmes. Dans l'intervalle de temps que contiennent nos tables, on en a trouvé 1856. Ce nombre moyen, qui en l'année 1777 s'eſt accrû du double par quelque cauſe préjudiciable, eſt un objet digne de l'attention de la Police.

5.) Les

5.) Les exposés des maladies des prisonniers, qui leur ont été mortelles, ne laisseroient non plus de donner lieu à des réflexions intéressantes pour l'humanité. L'ordre Impérial en fait une expresse mention.

6.) La révolution périodique de la mortalité, rélativement aux saisons & aux mois de l'année, est visible dans la XIIieme table. Les mois d'Octobre & de Novembre sont ceux, où il meurt le moins de monde à St. Pétersbourg; dès la fin du dernier la mortalité augmente; & sans se rallentir que très-peu pendant le mois de Février, elle s'accroît jusqu'au mois de Mai, dans lequel il meurt le plus d'hommes; passé ce mois-là elle va en diminuant jusque vers la fin de Novembre. Ces périodes de mortalité tiennent sans doute en partie à l'époque de l'arrivée des gens de la campagne dans la capitale & à celle de leur retour chez eux; mais elles tiennent encore bien plus aux époques des saisons locales & des changemens de temps, dont les vicissitudes sont, comme l'a dit Bacon, la cause principale de la déstruction des êtres vivans. Si, sans entreprendre de faire ici une balance météorologique de la salubrité des saisons locales à St. Pétersbourg, nous nous en tenons simplement aux saisons astronomiques: le résultat est, que de 1000 morts à St. Pétersbourg, il y en a eu

294 au Printemps
264 en Été
212 en Automne
230 en Hiver

& que conſéquemment il meurt moins de monde pendant l'hiver, que pendant l'été. On obſerve le contraire dans les païs plus méridionaux; & même parmi les habitans étrangers de St. Pétersbourg, il meurt moins de monde pendant l'été que pendant l'hiver; ſi toutefois il eſt permis d'en juger d'après les tables d'une ſeule année.

VIII. Meſure des progrès de la population à St. Pétersbourg.

La meſure la plus préciſe de la promptitude avec laquelle s'accroît une population quelconque, par des progrès naturels & ſpontanés, qui ſans aucun ſecours des Colonies réſultent de l'état intérieur du peuple même, c'eſt la durée du temps qu'il faut, pour que cette population ſoit doublée ou accrue dans quelque rapport donné. Pour faire le calcul de ce temps, il faudroit qu'on connût non ſeulement la population actuelle, mais auſſi les meſures de ſa mortalité & de ſa fécondité générales. Mais s'il ne s'agit que de comparer les progrès de la population en de courtes periodes conſécutives; on peut ſuppoſer avec bien de la préciſion, que la viteſſe des progrès de la population eſt en raiſon de l'excès des nombres annuels des naiſſances ſur ceux des morts. Pour faire, conformement à ces principes, le paralléle de la viteſſe des progrès de la population à St. Pétersbourg dans les trois périodes conſécutives établies cy deſſus, on n'a qu'à jetter un coup d'oeil ſur la table ſuivante.

Période

Période.	Nombre moyen annuel des naiſſances	des morts	Excès du nombre des nés ſur celui des morts.
de 1764 — 1770	5122	4677	445
de 1771 — 1775	5115	4921	194
de 1776 — 1780	5638	4311	1327.

Cette table nous apprend que la viteſſe des progrès de la population, qui a eu lieu dans la période de 1764 jusqu'à 1770, & qui s'étoit ralentie très-ſenſiblement dans la ſeconde période de 1771 jusqu'à 1775, a pris de grands & de rapides accroiſſemens dans la derniere période de 1776 jusqu'à 1780; enſorte que, quoique la population elle-même ne ſe ſoit probablement augmentée que d'un dixième, cependant la *vigueur* de la population, c'eſt-à-dire, ſa *tendance à s'accroître* eſt dans la dernière période plus de trois fois plus grande que dans la premiere, & même presque ſept fois auſſi grande que dans la ſeconde période. C'eſt ainſi que de bonnes tables de fécondité & de mortalité, ſurtout étendues à des Provinces entières, préſentent l'expreſſion arithmétique la plus claire de l'influence des évenemens, ſoit naturels, ſoit politiques, ſur le bonheur des peuples, & qu'elles expoſent aux yeux des Souverains une eſpèce de Thermomètre politique, qui leur apprend le degré & les altérations du bien-être de leurs peuples, même des plus éloignés, ainſi que leurs néceſſités publiques, & qui conſéquemment leur indique les voies les plus ſûres pour repandre le bonheur ſur une multitude de citoyens. Il y a cependant ici une réflexion à faire, que la perſuaſion de ſon importance ne me permet point de diſſimuler; c'eſt que, ſi l'utilité de pareilles tables eſt grande pour l'État, quand elles ſont marquées au coin de la vérité, le dommage qui peut en réſulter, n'eſt pas moindre, lorsqu'elles s'en écartent, ſoit par un motif de l'illuſion qu'on voudroit faire au Souverain, ſoit par la négligence de ceux qui les compoſent.

Tel eſt le raccourci des rémarques que les tables de fécondité & de mortalité de la ville de St. Pétersbourg pour la période de 17 ans, m'ont fournies, & qui m'ont parues être du reſſort de ce mémoire. Le but principal, que je me ſuis propoſé en rédigeant dans un ſeul tableau toute cette collection nombreuſe, c'étoit de faire une esquiſſe de l'utilité, qu'on pourroit tirer d'établiſſemens formels de pareilles tables étendues avec préciſion à des Gouvernemens entiers de la Ruſſie; (*) la nouvelle conſtitution des Gouvernemens de cet Empire, & la fondation d'un grand nombre de nouvelles villes ſous le regne glorieux de notre TRES-AUGUSTE SOUVERAINE en offrent l'époque la plus favorable, & les nouveaux réglemens & ordonnances, que la Ruſſie réçoit des mains maternelles de ſa grande Législatrice, en ont amené l'occaſion la plus avantageuſe.

OECO-

(*) Voyés le traité von der Unſchädlichkeit der Pocken in Rußland und von Rußlands Bevölkerung überhaupt, publié à Goettingue l'an 1768. En compoſant mon memoire j'ai fait un frequent uſage de ce traité plein des vues les plus intereſſantes, qui a le celebre Mr. *Schloezzer* pour auteur. J'en donnerai le précis dans un ſeconde memoire ſur ce même objet.

OECONOMIE ET HISTOIRE NATURELLE

Extrait des Lettres de M. *Habliz'l* Correspondant de l'Académie.

1. Sur la culture des prairies en Boucharie: datée d'Astrachan le 19 Juin 1781.

M. *Hablitz'l* marque à M. l'Académicien *Pallas*, qu'il a appris par un Ruſſe qui longtemps a été eſclave en Boucharie, que les paturages artificiels de ce païs, dont la plante a été indiquée par des voyageurs ſous le nom de *Beddé*, n'eſt autre choſe que la Luzerne (Medicago ſativa) qui croit ſur les landes au nord de la mer caſpienne. Elle eſt bien auſſi ſpontanée en Boucharie, mais pour en avoir une proviſion ſuffiſante, & pour ſubvenir au defaut des prairies naturelles, on la ſéme en aſſés grande quantité pour pouvoir, conjointement avec de la paille de quelques éſpeces de Sorgho (Holcus varius, Sorghum, ſacharatus) en nourrir le bétail & ſurtout les chevaux pendant tout l'hyver. On ne choiſit pas le terrein pour la culture de cette plante, mais on eſt obligé de ſubvenir à ces prairies factices par un arroſement artificiel.

La

La femaille fe fait en printemps; après que le terrein arrofé a été labouré & herfé, on y répand les graines fans les couvrir de terre. On fauche la premiere année une feule fois, la feconde deux fois; mais par la fuite on peut faire jusqu'à 5 ou 6 récoltes dans une faifon. Après chaque récolte on donne un arrofement, & la prairie refte en bon état pendant 25 à 30 années, fans aucune autre amélioration ni culture que d'y répandre de deux en deux années un peu de fumier fec, qu'on couvre d'une légère couche de fable. L'herbe fe donne pendant l'été toute fraiche au bétail; on en feche une provifion pour l'hyver, & on la méle par ménage avec la paille de ris, de froment & du forgho. Lorsqu'on fait enfin labourer ces prairies pour leur donner un nouvelle culture, les racines de la Luzerne font encore une fort bonne nourriture pour les bêtes à cornes. Cette culture de la Luzerne feroit encore très-utile pour les landes des provinces méridionales de l'Empire de la Ruffie, parcequ'elle réuffit même fur des terreins foumâtres & fabloneux, pourvû que l'herbe y trouve de l'humidité.

Les voyageurs parlent encore d'une autre plante à pâturage que les Bouchares appellens *Touchàn*. Ce n'eft que l'éfpece d'Abfinthe décrite dans l'ouvrage botanique du célébre *Jacquin* fous le nom d'Artemifia auftriaca. Mais cette plante n'a pas befoin d'être cultivée: elle vient & profpère fans art fur les terreins les plus arides, & fert de nourriture aux brebis, furtout pendant l'hyver, puisqu'elle continue de végéter fous la neige.

2.) Ob-

2.) Obſervations d'hiſtoire naturelle faites ſur les côtes de la mèr Caſpienne: communiquées d'Aſtrabat en Perſe le 7 Juillet 1782.

Sa Majeſté l'Impératrice ayant fait équiper une petite escadre ſur la mer caſpienne pour chercher des établiſſemens plus avantageux & moins malſains pour le commerce de Ruſſie, M. *Hablitz'l* fut nommé en 1781 Secrétaire de cette Escadre, dont le commandement étoit confié à M. le Comte *Voynovich*, Dalmatien, Capitaine de haut bord & Chevalier de l'ordre militaire de St. George. C'eſt cette expédition qui fournit à notre Correspondant l'occaſion de faire des obſervations intéreſſantes ſur la côte de la Perſe, & ſurtout à Aſtrabat, où l'escadre avoit hyverné, & dont il communique à M. *Pallas* les ſuivantes.

Parmis les bêtes domeſtiques du Maſanderan, les vaches & les brebis ſont les plus remarquables; on y trouve une belle race de bêtes à corne, dont le dos s'élève au defaut du col en boſſe ou pluſtôt en crête d'un pied & même d'un pied & demi de haut. Cette boſſe eſt garnie de longs poils mols & hériſſés, qui continuent le long du col en maniere de crinicre. Ce ſont les taureaux ſurtout qui ſe diſtinguent par la hauteur de cette boſſe: les vaches ne l'ont que très-petite, & ſouvent à peine ſenſible. Au reſte cette race ne ſe diſtingue de la race ordinaire du bétail, que par une encolure plus forte & plus racourcie, le train plus bas, une taille médiocre & une touffe des poils crépus ſur le front. On trouve ces beſtiaux dans tout le Maſanderan & aux environs d'Aſtrabat, mais ils ne ſe ſont pas encore répandus dans le

 Ghilan.

Ghilan. Les Perſans ignorent d'où ils leur ſont venus: mais en Boucharie & à Khiva, où on les élève auſſi, on les connoit ſous le nom de vâches arabes. Les taureaux de leur race s'accouplent volontiers avec les vaches ordinaires, & le produit devient ſemblable au mâle. Dans le diſtrict de Talichan, qui borde ſur le Ghilan, on en trouve auſſi à double boſſe, & la race y eſt très abondante. On dit que la ſeconde boſſe de cette variété s'élève ſur la partie poſterieure du dos vers la croupe.

(*) On a tranſporté par ordre de S. A. Msgr. le Prince *Potempkin* pluſieurs beſtiaux de cette race à St. Pétersbourg: & il ſemble qu'ils proſpèrent très bien dans le Parc de Sarskoe-Selo.

Les brebis ſe trouvent à Aſtrabat de trois races. La premiere eſt la race calmoucque, qui a une groſſe maſſe de graiſſe ſur la croupe au lieu de queue. La ſeconde qui eſt la plus commune dans toutes les provinces ſeptentrionales de la Perſe, reſſemble à la premiere & ne ſe diſtingue que par la petiteſſe de la maſſe de graiſſe & par une petite apendice ou queue attachée à cette maſſe. On la trouve auſſi dans le Caucaſe, d'où les Tſcherkiſſes en envoyent par troupeaux au marché d'Aſtrachan. La troiſieme race enfin eſt celle de Boucharie, qui a une queue applatie, presque triangulaire, à peu près comme la chèvre, & dont la laine eſt crepue & touffue comme celle de la tête d'un nègre.

Les bufles ſont ſi communs dans le Maſanderan, que les troupeaux errent partout ſur les marais & les bords

bords des anſes de la mer. Comme ils ſont naturellement feroces & qu'ils vivent en pleine liberté, le Capitaine Woodrooſe cité par Hanway, a pu fort bien prendre ces troupeaux pour des bufles ſauvages.

On n'a pas de chameaux dans le Maſanderan: peut-être parceque le buis leur eſt nuiſible, ou parcequ'il faut des landes arides & ſalées pour faire proſperer ces bêtes.

En voguant ſur la mer Caſpienne, M. *Hablitz'l* remarqua au mois de May, qu'un cable retiré de la mer pendant l'obſcurité de la nuit étoit parſemé d'étincelles brillantes. En recherchant la cauſe de ce phénomène, il trouvoit qu'il étoit l'effet d'un grand nombre de fauſſes chevrettes (Cancer Pulex Lin.) qui ſe trouvoient attachés à la vaſe & aux pacquets de petites moules, que le cable avoit enlévé du fond, & dont le contenu avoit été mangé par ces chevrettes, & remplacé par celles qui ſe trouvoient chargées d'oeufs. D'ailleurs on n'obſerve pas ordinairement dans la mer Caſpienne cette lueur phoſphorique, ſi commune dans l'Atlantique & dans l'Océan des Indes.

Au reſte M. *Hablitz'l* a obſervé que les couſins auſſi communs que les lampyrides aux environs de la baye d'Aſtrabad, y paroiſſent tous luiſans la nuit, en automne auſſi bien qu'au commencement de l'été: obſervation qui n'a pas encore été rapportée par aucun voyageur de l'Aſie méridionale.

ASTRONOMIE

Obſervations de la Comète de 1781

faites par M. M. l'Abbé *Chrétien Mayer* & ſon Aſſocié *Charles Koenig*, à l'Obſervatoire Electoral de Manheim avec un quart-de-cercle mobile de Siſſon, d'un pied & demi de rayon. Extraites d'une lettre datée de Mannheim le 6. Mars 1782.

Cette comète fut apperçue pour la premiere fois par M. *Koenig*, à qui elle parut le 8 Novembre après 7 heures du ſoir, à la vüe ſimple comme une étoile de la 4^eme^ grandeur, mais d'une lumiere plus foible. Après y avoir dirigé une bonne lunette achromatique, elle ſe préſenta ſans queue, entourée d'une atmoſphère blanchâtre & nébuleuſe: le noyau également foible de lumiere étoit rougeâtre: ſon diamètre fut eſtimé de 15 à 20 ſecondes. Sa ſituation étoit vers 9 heures de la même ſoirée telle qu'elle fit une ligne droite avec les étoiles γ de la petite & ζ de la grande Ourſe. M. *Mayer* ſe ſervit pour l'obſerver de la même methode qu'il avoit employée en 1769 à St. Pétersbourg, lorſqu'il y obſervoit la comète apparue peu de temps après le paſſage de la planète Venus par devant le diſque du Soleil. Comme il falloit employer la lumiere d'une bougie pour éclairer les fils de la lunette, la la difficulté de ſaiſir les momens des contacts, augmentoit de jour en jour, ſurtout après le 10 Novembre. Cependant en faiſant un choix de ſes obſervations & en n'en ſoumettant aux calculs que celles qui lui parurent les plus certaines, M. *Mayer* obtint les déterminations ſuivantes, qu'il communiqua à l'Académie.

Année 1781.

Novembre.	Temps vrai de l'obſervation.	Aſcenſion droite.	Déclinaiſon boréale.	Latitude.	Longitude vraie.
le 6	18h. 4'. 54"	par inter	polation -	- - - - -	283°. 8'. 4"
7.	18. 4. 54	par inter	polation -	- - - - -	288. 43. 14
8.	9. 29. 27	257°. 53'. 18"	73°. 42'. 52"	81°. 45'. 15"	294. 13. 14
8.	18 4. 54	262. 24. 21	70. 49. 14	84. 53. 50	299. 12. 14
9.	15. 31. 34	274. 2. 37	64 17 35	87. 12. 10	308. 48. 43
9.	18. 4. 54	par inter	polation -	- - - - -	309. 41. 14
10.	18. 4. 54	par inter	polation -	- - - - -	315. 6. 24
13.	7. 58. 22	par inter	polation -	- - - - -	308. 27. 29
13.	8. 48. 23	293. 43. 37	39. 47. 58	60. 8. 32	308. 23. 9
14.	7. 58. 22	295. 30. 51	34. 43. 24	54. 52. 33	307. 58. 33
19.	7. 9. 54	299. 25. 25	19. 43. 0	39. 29. 51	306. 49. 15
19.	7. 58 22	par inter	polation -	- - - - -	306. 50. 48
24.	7. 0, 44	300. 40. 38	11. 39. 14	31. 22. 59	305. 49. 30
Octob le 26.	11 0. 0	132. 0. 0	33. 30. 0	49. 10. 51	121. 23. 39

Cette derniere obſervation du 26 Octobre avoit été faite à Berlin par M. *Bode* & enſuite calculée par M. *Mayer*.

Il paroit par l'interpolation du 19 Novembre, qu'il doit s'être gliſſée une faute conſidérable dans l'obſervation faite le même jour à $7^h. 9'. 54''$. M. *Mayer* s'eſt ſervi dans ſes interpolations des mêmes formules que M. *Euler* avoit employees dans ſes Recherches & Calculs ſur la vraie orbite de la Comète de 1769. pag. 6.

On voit auſſi par ces obſervations que le temps du périgée de cette comète n'a pas du être fort éloigné du 8 Novembre.

M. *Mayer* remarque enfin que le lieu de la Comète au 9 Novembre a été détermine par ſon paſſage au méridien, comparé à celui de l'étoile γ de la petite ourſe: qu'ayant obſervé

le paſſage de l'étoile γ le 9 Nov. à $12^h. 19'. 8''$.
celui de la comète - - - 15. 14. 10. t. v.

la différence des aſcenſions droites a été de $2^h. 55'. 2''$ en temps ou bien de $43°. 45'. 30''$ en parties de cercle.

Or l'aſcenſion droite de l'étoile γ corrigée par l'aberration & la nutation, étant trouvée de $230°. 17'. 7''$, celle de la comète a du ètre de $274°. 2'. 37''$; comme elle l'a été marquée dans la table: en obſervant que le plan du quart-de-cercle par lequel ces paſſages au méridien ont été marqués, diffère de $17'. 24''$ de temps du vrai plan du méridien vers l'Eſt.

Obſer-

Obſervations de la nouvelle Planète

découverte & vue pour la premiere fois par M. *Herschel* à Bath le 13 Mars 1781.

Communiquées par M. l'Abbé *Mayer* & extraites de ſa lettre datée de Manheim le 6 Mars.

Noms des obſervateurs.	1781.	Jour.	temps vrai.	Aſcenſ. droite.	Declin. boréale.
Maskélyne	Mars	17.	9^h.	$33°.59'.44''$	$23°.33'.8''$
	Avril	1.	$9.54'$.	34. 21. 9	23. 54. 1
	——	18.	7. 43.	84. 56. 50	23. 35. 3
	Mai	28.	9. 5.	37. 5. 42	23. 37. 38
Darquier	Juillet	20.		90. 30. 41	23. 40. 43
	——	21.		90. 34. 23	23. 40. 50
	——	24.		90. 44. 53	23. 40. 52
	——	27.		90. 55. 12	23. 40. 52
	——	28.		90. 58. 32	23. 40. 33
	——	29.		91. 1. 50	23. 40. 16
	——	30.	$15^h.18'$.	91. 5. 10	23. 40. 7
Mayer	Novembr.	4.	$12. 28. 41''$	92. 49. 19	23. 41. 31
	Décembre	21.	12. 1. 12	90. 58. 2	23. 43. 33
	——	23.	11. 51. 57	90. 52. 17	23. 43. 38
	1782.				
	Février	1.	8. 54. 7	89. 14. 9	23. 43. 44

Les temps marqués du 4 Nov. du 21, 23 Déc. & du 1 Février ſont les momens mêmes de la culmination de la planète, obſervée au quart-de-cercle mural avec une excellente pendule d'Arnold: d'où l'on déduit les longitudes & latitudes géocentriques ſuivantes:

Année

	Long. Géoc.	Latit. boréale.
Année 1781. Nov. le 4 à $12^h.28'.41''$	$92^\circ.35'.\ 4''$	$0^\circ.14'.48''$
—— Dec. le 21 à 12. 1. 12	90. 53. 8	0. 15. 30
—— — le 23 à 11. 51. 57	90. 47. 52	0. 15. 34
Année 1782. Févr. le 1 à 8. 54. 7	89. 18. 2	0. 15. 38

De là M. *Mayer* conclud

Temps vrai de l'oppofition vraie de la planète avec le Soleil le 21 Décembre à $18^h.37'.38\frac{1}{2}''$.

Longitude vraie de la planète au moment de fon oppofition $90^\circ.52'.24''$ ou $3^s.0^d.52'.24''$; fa latitude $0^\circ.15'.6''$ boréale.

Cette longitude au moment de l'oppofition étant égale à la longitude héliocentrique de la planète pour le même temps, en fuppofant la diftance moyenne de la planète au foleil = 18,928, M. *Mayer* a calculé fa longitude héliocentrique auffi pour le 17 Mars, 30 Juillet, 4 Novembre, 21 & 23 Décembre, comme il fuit

		Longitude héliocent.
Année 1781.	Mars le 17 à 9^h. - -	$87^\circ.30'.35''$
——	Juillet le 30 à 15. 18'. -	89. 8. 28
——	Nov. le 4 à 15. 28. 40''	90. 17. 4
——	Déc. le 21 à 18. 37. 38½	90. 52. 24
——	—— le 23 à 11. 51. 57.	91. 25. 1.

D'où il détermine

Le mouvement horaire vrai de la planète dans fon orbite autour du Soleil - - - $1''$, 82027.

Son mouvement diurne - - - - - 43, 6864.

Son mouvement annuel - - 4^d, $25'$, 56, 5068.

M.

M. *Mayer* communique enſuite les obſervations ſuivantes faites à Bude en Hongrie par l'Aſtronome royal *François Weiſs*, qu'il aſſure être très bien d'accord avec celles qu'il a faites aux mêmes jours.

	Aſcenſ. droite.	Déclin. boréale.
A. 1782. Janv. le 6 à $10^h.48'.16''$	$90°.14'.0'',7$	$23°.43'.0'',2$
12 à 10. 25. 15	89. 58. 14, 6	23. 43. 7, 2
20 à 9. 45. 28	89. 39. 16, 5	23. 43. 4, 5
24 à 9. 28. 0	89. 30. 24.	23. 43. 1, 7

Au reſte il conclud de toutes ces obſervations, que le mouvement de la planète a été direct depuis le 13 Mars 1781 jusqu'au 10 Octobre de la même année, qu'il eſt devenu enſuite retrograde jusqu'au 21 Février 1782, au quel jour la planète a recommencé à ſe mouvoir de l'oueſt à l'eſt ſuivant l'ordre des ſignes, après avoir été ſtationnaire pendant quelque temps.

Enfin M. *Mayer* ayant comparé le moment du paſſage de la planète par le méridien avec celui de l'étoile Propus, ou H des Gémaux, il a trouvé que celui-ci précédoit celui-là

le 1. Février	de $6'$. $3''$ de temps	
le 12. Février	de 5. 1.	
le 21. Février	de 3. 59.	
le 27. Février	de 4. 0.	
& le 2. Mars.	de 4. 2	

d'où il conclud, que l'élongation de la planète de cette étoile H des Gémaux a été la plus petite, le 21 Février.

MÉTÉOROLOGIE.
Hyver de 1781 à 1782.
ſuivant le nouveau Stile.

1.

La premiere neige tomba le 22 Octobre & la derniere le 7 Mai: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 197 jours.

2.

Il gela pour la premiere fois le 21 Octobre au ſoir. Thermomètre de Délisle 153, Baromètre 27. 43. vent de l'Eſt, ciel demi-couvert. Il gela pour la derniere fois le 9 Mai au matin; Thermomètre 152. Baromètre 28. 20, vent de l'Oueſt, ciel ſerein; l'intervalle entre cette derniere gelée & la premiere étant de 200 jours.

3.

La Néva fut priſe pendant 131 jours, depuis le 8 Décembre, où elle ſe couvrit des glaces du Ladoga par un froid de 165 degrés, jusqu'au 18 Avril qu'elle débacla par une temperature de 154 degrés. Les glaçons du lac de Ladoga parurent le 26 Avril, & la riviere en charia jusqu'au 9 Mai.

4.

4.

Le plus grand froid fut obſervé le 16 Février matin: le Thermomètre de Délisle marquant 206 degrés. Baromètre 28. 55, temps calme & ciel ſerein; puis brouillard & petit vent du Nord. Le moindre froid obſervé depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai, c'eſt-à-dire, pendant l'intervalle entre la premiere & la derniere gelée, fut de 135 degrés le 2 & le 3 Avril à 2 h. après midi: le Baromètre montant de 28. 13 jusqu'à 28. 20, ciel demi-couvert, petit vent du SE. La différence entre ces deux froids extrèmes eſt de 71 degrés de Délisle.

5.

Le froid moyen de la nuit, ou vers le matin, a été trouvé

depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin	$158^{d.}$, 8
depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai	162, 4
depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai	163, 6

Le froid moyen des après-midis

depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin	$151^{d.}$, 2
depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai	154, 9
depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai	157, 3

6.

Le froid de la nuit depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai, a été obſervé

6 jours au-de-là de $200^{d.}$ le 31 Déc. 5 & 6 Janv. 13, 15 & 16 Février

 8 jours

8 jours entre 190 & 200, le 17. 21. 30 Déc. & le 11. 12. 14. 17. 20 Février.

10 jours entre 180 & 190, le 18. 20. 29 Déc. le 1. 4 Janv. le 7. 8. 19. 22 Février & le 16 Mars: ensuite.

24 jours entre 170 & 180, en Décembre, Janvier, Février & Mars (*)

47 jours entre 160 & 170, en Décembre — Avril

73 jours entre 150 & 160, en Octobre — Mai &

32 jours entre 140 & 150, en Octobr. Nov. Janv. Mars, Avril & Mai (**).

De sorte qu'il a gelé pendant 168 jours dans cet intervalle d'hyver du 21 Octobre au 9 Mai, ou de 200 jours.

7.

Le froid de l'après-midi a été dans ce même intervalle de 200 jours d'hyver

8 jours moindre que 140, le 3. 9 Nov. le 31 Mars & le 2 — 5 Avril.

86 jours entre 150 & 140 en Octobre — Mai (***)

42 jours

(*) Le 16. 22 — 24. 28 Déc. le 7. 19 Janv. le 2. 3. 5. 6. 9. 21. 23 Févr. & le 9. 10. 12. 13. 15 17 — 20. 27 Mars.

(**) Le 23. 27. 28. 31 Oct. le 1 — 9 11. 13. 14. 17 — 19. 30 Nov. le 10 Janv. le 2. 3 Mars, le 1 — 4. 12 — 15 Avril & le 6 Mai.

(***) Le 21 — 24. 26 — 31 Octobre, le 1. 2. 4 — 8. 10 — 14. 16 — 30 Nov. le 1. 25 Déc. le 10 13. 21. 22. 26. 27. 30 Janv. le 24 — 27 Févr. le 1 — 7. 29. 30 Mars, le 1. 6 — 22. 24. 26 Avril, & le 1 — 8 Mai.

42 jours entre 160 & 150, en Octobre — Avril.
43 jours entre 170 & 160, en Décembre — Mars.
9 jours entre 180 & 170. le 16. 18. 20. 28. 29. 30 Déc. le 4 Janv. & le 7. 8 Févr.
8 jours entre 190 & 180, le 17. 21. Déc. le 6 Janv. & le 11 — 14. 19 Février; enfin
4 jours entre 200 & 190, le 31 Déc. le 5 Janv. & le 15. 16 Février.

d'où l'on voit que cet hyver a été un des plus rigoureux.

8.

L'État du Baromètre depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai, ce qui fait un intervalle de 181 jours.

La plus grande hauteur 28. 83 le 21 Décembre à 9 h. avant midi. Thermomètre $189^{d.}$ temps calme, brouillard; puis ciel ferein.

La plus petite hauteur 27. 04, le 3 Janvier à 8 h. du foir. Thermomètre $160^{d.}$ vent du Sud, ciel couvert & beaucoup de pluïe.

La variation totale	1. 79
Le Milieu - - -	27. 935.
La hauteur moyenne	28. 02.

Pendant cet intervalle de 181 jours, la hauteur du Baromètre a été, 116 jours au deffus de $27\frac{9}{10}$, $96\frac{1}{2}$ jours au deffus de 28, & 74 jours au deffus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9.

Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de 6 mois, ou 181 jours, d'hyver ont soufflé

6 jours du *Nord*, le 16. 23. 27 Déc. le 1 Janv. & le 18. 23 Avril

5 jours du NE, le 4 Janv. le 13. 14 Mars, & le 28. 29 Avril

6 jours de *l'Est*, le 3. 30 Déc. le 21. 24. 25 Mars, & le 27 Avril

4 jours du SE, le 16. 19 Nov. le 28 Déc. le 22 Mars

11 jours du *Sud*, le 13 Nov. le 5 Déc. le 3. 20. 21. 22. 23 Jan. le 25 Févr. & le 6. 29. 30 Mars.

3 jours du SOu, le 12 Janv. & le 4. 7 Mars.

8 jours de *l'Ouest*, le 11. 12. 20 Nov. le 11. 19. 22 Déc. le 7 Jan. & le 1 Mars.

2 jours du NOu. le 10 Nov. & le 18 Déc.

En tout 45 jours de vent fort.

10.

Les vents très-forts ont regné

1 jour du *Nord*, le 11 Janvier.

1 jour de *l'Est*, le 11 Mars.

1 jour du SE, le 2 Janvier.

3 jours du *Sud*, le 14 Nov. le 25 Déc. & le 10 Janv.

1 jour du SOu., le 8 Janvier &

1 jour du NOu., le 25 Janvier

En tout 8 jours de vent très-fort.

11.

II.

La table fuivante marque les autres variations de l'Atmofphère, pendant les fix mois d'hyver.

Atmofphère.	Nov.	Déc.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril	Somme.
Ciel entierement ferein	1	3	4	9	9	15	41 jours
Ciel entierement couvert	19	12	19	9	13	4	71 —
Brouillards - - - -	9	7	3	9	5	2	35 —
Pluie médiocre - - -	18	—	3	2	1	7	31 } 32 j.
Pluie copieufe - - -	1	—	—	—	—	—	1 }
Neige médiocre - - -	11	14	11	9	9	4	58 } 68 j.
Neige copieufe - - -	2	2	3	1	1	1	10 }
Grèle - - - - - -	1	1	—	—	—	—	2 —
Aurores boréales - -	1	3	1	2	4	2	13 —
Hauteur de l'eau de pluie & de neige fondue.	1, 90	1, 12	0, 66	0, 46	0, 36	1, 24	5, 74

C'eft-à-dire, la hauteur de l'eau de pluie & de neige fondue a été trouvé pendant ces fix mois, de $5\frac{74}{100}$ pouces de Paris.

PRO-

PROGRAMME
pour l'Année MDCCLXXXIV
Publié le 7 Mars 1782.

Traduit du latin.

L'Académie avoit proposé pour le sujet du Prix de l'année 1781, la question suivante.

Indiquer des raisons certaines, s'il en existe, au moyen desquelles on puisse démontrer l'uniformité du mouvement diurne de la terre, & si ce mouvement n'est point uniforme, mais qu'il éprouve en effet quelque changement, soit par la résistance de l'Éther, soit par une autre cause quelconque qui agisse sur la terre; Assigner quels sont les Phénomènes qui produisent ce changement dans le mouvement diurne de la terre? Quels sont les moyens de rectifier la mesure du temps, par rapport à cette inégalité du mouvement diurne de la terre, afin d'avoir un point juste de comparaison entre la mésure du temps des siecles passés, & celle des siecles moins reculés?

L'Académie n'ayant point tenu de séance publique l'année 1781, elle a arrêté de ne prononcer sur les mémoires

moires qui lui ont été adreſſés à ce ſujet, qu'à la fin de 1783, & de proroger jusqu'au 1 Juillet de la même année l'admiſſion des mémoires qui pourront concourir.

L'Académie propoſe pour ſujet du Prix de l'année 1784 la nouvelle queſtion ſuivante:

La nutrition qui donne un nouvel accroiſſement à chacune des parties du corps animal, ou qui leur rend les forces qu'elles ont perdues par l'exercice; les phénomènes effectués par la garance, lorsque la rougeur dont ſe couvrent les os ſe répand en proportion égale dans toute la ſubſtance oſſeuſe, & ſe communique même aux plus petites parties qui la compoſent; enſuite la nutrition des différentes parties qui n'ont point de vaiſſeaux, telles que l'épiderme, les ongles, les poils & la corne; l'accroiſſement enfin de l'embryon qui, pendant un temps déterminé, n'a ni vaiſſeaux, ni coeur, ni ſang, & bientôt après renferme un coeur immobile; démontrent aſſés clairement, que dans les adultes le mouvement du coeur, conduit d'abord les ſucs nourriciers par le moyen des vaiſſeaux, & que ces ſucs ſe répandent enſuite d'eux mêmes, par une force particuliere indépendante du mouvement du coeur, jusqu'aux parties extrèmes, où les vaiſſeaux ne parviennent pas.

Dans les plantes qui ne font que végéter, qui cependant, comme les corps des animaux, pompent des ſucs, prennent de la nourriture, de l'accroiſſement & ſe rénouvellent continuellement, tant qu'elles ont de la vie; il n'y a aucune force que l'on puiſſe comparer au mouvement du coeur. Dans ces plantes donc la circulation des humeurs, ſoit qu'elle ſe faſſe par le moyen des vaiſſeaux, ſoit qu'elle ſe diſtribue par la ſubſtance des parties qui n'ont point de vaiſſeaux, n'eſt due qu'à cette force ſeule dont nous venons de parler. On demande donc:

Quelle eſt la nature de cette force? Eſt-elle la même que la force attractive commune à tous les corps; ou, comme il y a tout lieu de le croire, eſt-ce une force propre à la ſubſtance végétale & animale? Si cette derniere opinion eſt vraie, on demande quels ſont ſes principaux effets, quelles propriétés la diſtinguent de la force attractive commune à tous les corps, & dénotent ſa nature particulière?

Les mémoires doivent être envoyés avant le 1 Juillet 1784, à l'Adreſſe du Secrétaire.

L'Académie rappelle enfin qu'elle a propoſé pour l'année 1783 les Problèmes ſuivans:

I. Expoſer la Théorie des machines que la force du feu, ou des vapeurs de l'eau font mouvoir.

II. Expliquer quel eſt le caractère des ſons que produiſent des tubes cylindriques d'un diamètre égal, qui étant conſtruits à l'un des bouts comme les flûtes à bec, ſont percés dans leur longueur d'ouvertures circulaires: qu'elle eſt la variété des ces ſons par rapport à la qualité grâve & aigue, ſelon la différente poſition & grandeur de ce trou latéral?

Chacun de ces prix eſt de cent Ducats d'Hollande, qui ſeront adjugés aux ſavants qui auront préſentés les meilleurs mémoires.

CHAN-

CHANGÉMENS
arrivés dans l'Académie pendant le premier ſemeſtre de 1782.

M. *Daniel Bernoulli*, le plus ancien & l'un des plus célébres membres de l'Académie, mourut à Bâle le 17 de Mars, dans la 83ᵉ année de ſon âge. Il étoit encore du temps de la fondation de l'Académie, & il avoit aſſiſté à ſon inauguration. Quoiqu'il n'aie démeuré que peu d'années à St. Pétersbourg, & qu'il ſe ſoit rétiré enſuite dans ſa patrie, il n'a ceſſé d'entretenir avec l'Académie une correſpondance intéreſſante & d'enrichir de temps en temps les Commentaires académiques de ſes profondes & importantes recherches. Auſſi avoit-il conſervé jusqu'à ſa fin une penſion académique.

L'Académie reçut:

1. Au nombre de ſes Correſpondans regnicoles

M. *Benoît François Hermann*, Profeſſeur en Technologie & membre de la Société patriotique Impériale & Royale de Vienne. La réception ſe fit le 24 Janvier ſur la propoſition du Directeur; & le nouveau correſpondant partit quelque temps après pour le Gouvernement de Permie, où il a été employé à établir une fabrique d'acier.

2. Au nombre des Aſſociés externes:

M l'Abbé Don *Ferdinand Galiani*, Conſeiller au Conſeil ſouverain de Commerce de S. M. le Roi des deux Siciles.

Cette aggrégation eut lieu dans une Aſſemblée extraordinaire du 23 Mars, ſur une lettre du Directeur, qui portoit; que c'étoit par l'ordre de *Sa Majeſté Impériale* qu'il en faiſoit la propoſition à l'Académie.

Le haut & dirigeant Sénat notifia à l'Académie, par une Oucaſe datée du 25 Janvier; qu'il a plû à *Sa Majeſté l'Impératrice*, de gratifier M. l'Académicien *Pierre Simon Pallas*, du rang & du titre de Conſeiller de Collèges, & de lui accorder ſur le thréſor du Cabinet une augmentation conſidérable des ſes appointemens, avec ordre de reſter, comme ci-dévant, attaché à l'Académie.

S. E. Mr. le Procureur-Général Prince *de Väſemski* fit notifier à l'Académie dans ſa ſéance du 20 de Mai, que *Sa Majeſté l'Impératrice* a ordonné d'avancer M. *Nicolas Ozeretskovsky*, Docteur en Médecine & Adjoint en Hiſtoire naturelle, au grade d'Académicien ordinaire, qu'Elle lui accorde les appointemens attachés à cette charge dans l'état académique, & qu'Elle lui permet d'accompagner

quel-

quelques jeunes Cavaliers dans un voyage, qu'ils vont faire en diverſes provinces de la Ruſſie.

M. l'Académicien *Lexell*, de retour de ſon voyage littéraire par la France, l'Angleterre, l'Allemagne & la Suéde, réprit poſſeſſion du Cabinet de l'Obſervatoire académique, où il avoit obſervé avant ſon départ. L'Académie lui fit remettre pour cet effet les inſtrumens aſtronomiques dont il a beſoin.

OUVRAGES

imprimés & manuſcrits, curioſités & productions d'Hiſtoire naturelle, préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le premier ſemeſtre de l'année 1782.

Le Vendredi 7 Janvier. M. l'Adjoint *Ozeretskovsky* a préſenté un manuſcrit ruſſe Историческїе Начатки о двинскомъ народѣ и. п. contenant une Hiſtoire des anciens habitans d'Archangel, que l'Auteur M. *Kreſtinin*, citoyen d'Archangel, offre à l'Académie pour être publiée ſous ſon approbation. M. le Conſeiller de Cour *Lepéchin* ayant été chargé de l'examen de cet ouvrage, a rapporté dans une des ſéances ſuivantes, que cette hiſtoire eſt fort intéreſſante & qu'elle ne manquera pas d'être bien reçue du Public. L'Académie lui a, ſur ce témoignage, accordé ſon approbation, & le manuſcrit a été imprimé.

Le 10 Janvier. Le Secrétaire a remis de la part de M. *Jährig*, habitant auprès du lac Gouſinoi avec quelques prêtres mongaux, l'abrégé de traduction d'un ouvrage

vrage mongal intitulé *Manib-Gambo* & imprimé à Pé-king: ainsi qu'un pacquet contenant diverses productions curieuses de ces contrées.

—— M. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de M. *Hablitzl'*, datée du Golfe d'Astrabat le 1. Novembre, qui communique des détails intéressans d'un voyage qu'il a fait le long des côtes de la mer Caspienne. Voyez ci-dessus.

Le 14 Janvier. L'Académie a reçu de S. E. Mr. le Major-Général & Chevalier de *Klitschka*, Gouverneur à Irkoutzk, une Corne & un pied de Rhinoceros très bien conservés & trouvés dans son Gouvernement.

—— Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur

Benedict Franz Hermann's Professors der Technologie und Mitglieds der K. K. patriotischen Societät in Wien: Reisen durch Oesterreich, Steyermark u. s. w. im Jahr 1780 in Briefen.

un volume in 8. dédié à l'Académie Impériale des Sciences, qui a reçu l'Auteur au nombre des ses Correspondans.

Le 24 Janvier: M. l'Adjoint *Fuss* a présenté de la part de M. *Lhuilier*, Citoien de Genève employé à Varsovie, un mémoire manuscrit sur les Pyramides isopérimètres, qui a remporté l'approbation de l'Académie.

Le 14 Février. Le Secrétaire a remis un écrit intitulé: *Introductio in disquisitionem de Ponto Euxino & de Graecorum ad oras illius maris coloniis*, présenté & sou-

ſoumis à l'approbation de l'Académie, par M. *Hackmann*, Conrecteur du Gymnaſe Académique, demandant d'être reçu Adjoint de l'Académie. Mrs. les commiſſaires chargés de l'examen de cet écrit en ont fait un rapport favorable, & la reception a eu lieu dans le cours du ſemeſtre ſuivant.

Le 18 Février. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Böckmann*, Conſeiller de Cour & Profeſſeur en Mathématiques à Carlsruh, diverſes brochures, qui avoient déja été annoncées à l'Académie le 3 Décembre de l'année dernière, ſavoir:

Carlsruher meteorologiſche Ephemeriden vom Jahr 1779 im Auszuge, herausgegeben von *H. R. Böckmann.*

Wünſche und Ausſichten zur Erweiterung und Vervollkommung der Witterungs-Lehre.

Einladung zur Theilnehmung an den auf höchſten Befehl öffentlich anzuſtellenden Verſuchen und Erklärungen über die geſammte Naturlehre.

Erklärung und Bitte an die Freunde und Beförderer des Baadiſchen Inſtituts der Meteorologie in Abſicht der Gegenſtände und der Art ihrer Beobachtung.

—— il a lu deux lettres de M. *Jährig*, qui envoie diverſes déſcriptions & anecdotes hiſtoriques des peuples mongaux, avec quelques echantillons de minéraux trouvés dans le Thibet.

Le

Le 25 Février. Le Secrétaire a ouvert un pacquet addreſſé à l'Académie, qui contenoit:

Ephemerides aſtronomicae ad Meridianum Mediolanenſem ſupputatae ab Angelo de Ceſaris pro Anno 1782.

Les mêmes Ephémérides pour l'année 1783.

Le 28 Février. M. *Euler* le pere a communiqué pour être lu à la ſéance une feuille imprimée contenant les Statuts de l'Académie des Sciences & Arts nouvellement établie à Boſton en Amérique:

An Act to incorporate and eſtabliſh a Society for the Cultivation and Promotion of Arts and Sciences.

Le 4 Mars. M. l'Adjoint *Fuſs* a remis deux mémoires de Mathématiques:

Sur un Problème de Géométrie reſolu par l'Analyſe de Diophante.

Recherche d'une formule générale qui exprime toutes les différences de tous les ordres de x^n.

que M. *Wildbrecht*, élève de l'Académie lui a donnés pour être préſentés à l'Académie, afin de lui prouver l'emploi qu'il fait de ſon temps.

—— Le même a communiqué une lettre concernant la grande table des diviſeurs de tous les nombres au deſſous de cinq millions, que M. *Hindenburg* à Leipzig a calculée.

Le 11 Mars. Le Secrétaire a diſtribué le Proſpectus de Souſcription pour les éphémérides météorologiques que la Société électorale de Mannheim ſe propoſe de publier.

—— Il a lu une lettre circulaire que M. l'Abbé *Hemmer*, Secrétaire perpétuel de la ſusdite Société lui a adreſſée ſur ce ſujet, lequel lui annonce encore l'envoi d'une ſeconde caiſſe d'inſtrumens météorologiques pour l'Académie.

Le 8 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Abbé *Mayer*, de Mannheim, qui envoie.

Obſervationes noui Planetae primum 1781 die 13 Martii in vrbe Paſh a Dno. *Herschell* detecti.

Obſervationes cometae anno 1781 menſe Novembri in ſpecula Electorali Mannheimenſi a *Chriſtiano Mayer* obſeruati.

—— —— une lettre de M. *Jean Bernoulli* Aſtronome royal de Berlin, qui notifie la mort de ſon Oncle *Daniel Bernoulli*, le plus ancien & l'un des plus célèbres membres de cette Académie: voyez ci-deſſus,

Le 11 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Jährig* du lac Gouſinoi, qui envoie le commencement d'une traduction de l'Ouvrage Mongal contenant l'eloge de la terre ſainte Ottaï en Chine.

Le 18 Avril. M. le Conſeiller de Cour *Lepéchin* & le Secrétaire ont communiqué des lettres de M. le Prof.

Prof. *Spielmann* à Strasbourg, qui annonce ſa *Pharmacopoea generalis*, & une nouvelle édition de ſes *Inſtitutiones chemicae*: il envoia auſſi

Ordonnance du Roi portant Réglement général concernant les hôpitaux militaires du 2 Mai 1781.

Le 22 Avril. Le Secrétaire a lu diverſes lettres de M. le Translateur *Jäbrig* datées du lac Gouſinoi, qui envoie encore pluſieurs matériaux pour l'hiſtoire des nations mongales, dont M. le Conſeiller de Collèges *Pallas* eſt chargé.

Le 6 Mai. M. l'Adjoint *Fuſs* a remis:

Proſpectus du Gloſſaire allemand par M. *Scherz*, que M. le Prof. *Oberlin* à Strasbourg fait imprimer.

Notice préliminaire du Cabinet de minéraux de feu M. le Conſeiller de mines *Delius* à Vienne.

Aufrichtige Entdeckung der beträchtlichen Vortheile, ſo durch Gebrauch des Eyerſchalen-Weis zu erhalten ſind.

Le 23 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. *de la Lande* de Paris, qui mande diverſes nouvelles littéraires & qui communique ſes dernieres obſervations de la nouvelle Planète.

Le 30 Mai. Le Secrétaire a remis de la part de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, le X. Volume des ſes

Nouveaux Mémoires: Année MDCCLXXIX, avec l'hiſtoire pour la même année. Berlin 1782.

Le 6. Juin. M. le Conſeiller de Collèges *Pallas* a préſenté de la part de l'Auteur.

Nicolai Joſephi Jacquin Miſcellanea auſtriaca ad Botanicam, Chemiam et Hiſtoriam naturalem ſpectantia Vol. II.

Le 10 Juin. M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. *de Magellan* de Londres, qui roule ſur un nouveau pyromètre que M. *Wedgewood* a inventé, & qui doit marquer avec beaucoup de juſteſſe les dégrés des plus fortes chaleurs.

Le 13 Juin. M. le Conſeiller de Collèges *Pallas* a lu une lettre fort détaillée de M. *Patrin*, Correſpondant de l'Académie à Barnaoul, qui communique diverſes obſervations botaniques, annonce un herbier qui jusqu'a préſent n'eſt pas encore parvenu à l'Académie, & qui fait un recit très-intéreſſant des excurſions qu'il a faites pendant les dernieres années.

Le 20 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à l'Académie par un nommé *J. U. Pauli* à Hambourg, qui envoie un imprimé intitulé

Ueber die Einrichtung eines ruſſiſch hanſeatiſchen Waaren Lombards und einer ſolchen Banc.

Il n'y a pas du ſens commun ni dans la lettre ni dans l'imprimé, qui en conſéquence a été mis à rebut.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE SYMPTOMATIBVS QVATVOR PVNCTORVM, IN EODEM PLANO SITORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Si quatuor puncta A, B, C, D in eodem plano fuerint sita, eorumque bina lineis rectis inter se iungantur, quarum numerus erit sex, inter has sex rectas semper eiusmodi relatio subsistit, vt ex datis quinque earum, sexta sponte determinetur. Sex autem istae lineae rectae erunt A B, A C, A D, B C, B D, C D, inter quas iuuabit obseruasse, binas dari quasi sibi oppositas, quae nullo communi termino contineantur, et tria dari huiusmodi binarum rectarum paria: Rectae enim A B opponitur recta C D; rectae Tab. I. Fig. 1.

vero A C opponitur recta B D, et rectae B C opponitur A D. Deinde vero inter has sex rectas dantur quatuor terniones eiusmodi trium rectarum, quae triangulum includunt, qui sunt 1°. A B, B C, A C; 2°. A B, A D, B D; 3°. A C, A D, C D; 4°. B C, B D, C D; vbi notandum, in quolibet ternione binas rectas oppositas excludi.

§. 2. Circa tales sex rectas, quibus quatuor puncta in eodem plano sita inter se iunguntur, plures occurrere solent quaestiones; vbi, ex datis quinque, sexta requiri solet. Veluti in quadrilatero ex datis quatuor lateribus cum altera diagonali quaeritur altera diagonalis; vel si, dato triangulo quocunque A B C, in eius plano vbi-
Tab. I. Fig. 2. cunque accipiatur punctum D et ad id ex tribus angulis A, B, C ducantur tres rectae A D, B D, C D, quaeri solet relatio, quae inter has tres rectas subsistit, vnde ex datis earum duabus tertia definiri queat. Huiusmodi quaestiones a Geometris quidem plures sunt pertractatae, verum earum Solutiones plerumque ingentem propositionum geometricarum farraginem requirunt; quin etiam plures nouas rectas in figura duci oportet, ex quibus certae relationes cum reliquis colligi queant, vnde tandem solutio desiderata obtineri possit. Hic igitur in gratiam Geometrarum non parum ostendisse iuuabit, quomodo ope duorum tantum Lemmatum omnes huiusmodi quaestiones pertractare et ad solutionem perducere liceat, ita vt nullis aliis rectis in subsidium vocandis sit opus. Lemmatum quidem horum alterum est notissimum, alterum vero facili demonstratione confirmari potest.

Lem-

Lemma 1.

§. 3. Ex tribus lateribus cuiusque trianguli ABC, quilibet angulus A ita determinatur, vt fit

$$\text{cof. } A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}.$$

Lemma 2.

§. 4. Si tres anguli A, B, C ita fuerint comparati, vt eorum vnus A aequetur vel fummae vel differentiae duorum reliquorum et horum angulorum cofinus defignentur litteris α, β, γ, tum femper erit

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

Demonftratio.

Si enim fuerit $A = B \pm C$, tum ex notis Trigonometriae principiis erit

$$\text{cof. } A = \text{cof. } B. \text{cof. } C \mp \text{fin. } B. \text{fin. } C,$$

vnde fit

$$\text{cof. } A - \text{cof. } B. \text{cof. } C = \mp \text{fin. } B. \text{fin. } C,$$

hoc eft $\alpha - \beta\gamma = \mp \text{fin. } B \text{ fin. } C$. Hinc fumtis vtrinque quadratis erit

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = \text{fin. } B^2 \text{ fin. } C^2,$$

et quia $\text{fin. } B^2 = 1 - \beta\beta$ et $\text{fin. } C^2 = 1 - \gamma\gamma$, erit facta multiplicatione

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = 1 - \beta\beta - \gamma\gamma + \beta\beta\gamma\gamma$$

ficque termini $\beta\beta\gamma\gamma$ vtrinque fe mutuo tollunt, vnde manifeftum eft fore

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma \text{ q. e. d.}$$

Corollarium 1.

§. 5. Haec relatio etiam locum habet, si summa trium angulorum $A + B + C$ aequetur quatuor rectis, seu $360°$; nam cum sit $360° - A = B + C$, anguli $360° - A$ cosinus aeque est $= \alpha$ atque ipsius anguli A.

Corollarium 2.

§. 6. At si summa trium angulorum $A + B + C$ aequetur tantum duobus rectis, seu $180°$, ita vt iam sit $180° - A = B + C$, quoniam anguli $180° - A$ cosinus non amplius est α, sed $-\alpha$, aequatio relationem inter cosinus exprimens erit $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 - 2\alpha\beta\gamma$.

Scholion.

§. 7. His igitur duobus Lemmatibus praemissis ostendam, quomodo eorum ope omnes huiusmodi quaestiones, in quibus quatuor occurrunt puncta in eodem plano sita, facile per calculum resolui queant.

Problema 1.

§. 8. *Si, proposito triangulo quocunque ABC, in*
Tab. I. Fig. 2. *eodem plano siue intra siue extra triangulum accipiatur punctum quodcunque D, atque ad id ex angulis ducantur rectae AD, BD, CD, inuenire relationem, quae inter has ternas rectas et latera trianguli subsistet.*

Solutio.

Vocentur trianguli latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, tum vero rectae ad punctum D ductae $AD = p$,

BD =

$BD = q$ et $CD = r$, ita vt desideretur aequatio relationem inter has sex lineas a, b, c et p, q, r exprimens. Iam hic considerentur anguli ADB, ADC, BDC, quorum summa est 360°, vnde si dicatur

$$\cos ADB = \gamma,\ \cos ADC = \beta \text{ et } \cos BDC = \alpha,$$

erit vtique per §. 5.

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

At vero per Lemma primum erit

$$\cos ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD.BD}, \text{ siue } \gamma = \frac{pp+qq-cc}{2pq},$$

eodemque modo

$$\cos ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD.CD}, \text{ siue } \beta = \frac{pp+rr-bb}{2pr},$$

ac denique

$$\cos BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD.CD}, \text{ siue } \alpha = \frac{qq+rr-aa}{2qr}.$$

Ponamus nunc breuitatis gratia

$$qq+rr-aa = A;\ pp+rr-bb = B \text{ et } pp+qq-cc = C,$$

vt fiat

$$\alpha = \frac{A}{2qr};\ \beta = \frac{B}{2pr};\ \gamma = \frac{C}{2pq};$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma$$

induet hanc formam:

$$\frac{AA}{4qqrr} + \frac{BB}{4pprr} + \frac{CC}{4ppqq} = 1 + \frac{ABC}{4ppqqrr},$$

quae in $4ppqqrr$ ducta dat:

$$AApp + BBqq + CCrr = 4ppqqrr + ABC.$$

Iam in hac aequatione loco litterarum A, B, C, valores assumtos ita substituamus, vt formulas $pp+qq$, $pp+rr$, $qq+rr$ iunctas seruemus, ac reperietur sequens aequatio:

pp

$$\left.\begin{aligned}&pp(qq+rr)^2-2aapp(qq+rr)+a^4pp\\&+qq(pp+rr)^2-2bbqq(pp+rr)+b^4qq\\&+rr(pp+qq)^2-2ccrr(pp+qq)+c^4rr\end{aligned}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&(qq+rr)(pp+rr)(pp+qq)+4ppqqrr\\&\quad-aa(pp+qq)(pp+rr)-bb(pp+qq)(qq+rr)\\&\quad-cc(pp+rr)(qq+rr)\\&\quad+aabb(pp+qq)+aacc(pp+rr)+bbcc(qq+rr)\\&\quad-aabbcc.\end{aligned}\right.$$

Consideremus nunc primo vtrinque ea tantum membra, quae solas litteras p, q, r, continent; ac in parte sinistra bina priora membra huius generis, scilicet

$$pp(qq+rr)^2+qq(pp+rr)^2$$

euoluta, praebent

$$\left.\begin{aligned}&ppq^4+ppr^4+2ppqqrr\\&+qqp^4+qqr^4+2ppqqrr\end{aligned}\right.=(pp+qq)(ppqq+r^4)+4ppqqrr$$

cui si tertium membrum

$$rr(pp+qq)^2=(pp+qq)(pprr+qqrr)$$

addatur, obtinebitur

$$(pp+qq)(ppqq+pprr+qqrr+r^4)+4ppqqrr=$$
$$(pp+qq)(pp+rr)(qq+rr)+4ppqqrr,$$

vnde patet partes, quae vtrinque solas litteras p, q, r inuoluunt, se mutuo destruere. Hanc ob rem reliqua membra ad partem sinistram translata producent sequentem aequationem:

$$0=\left\{\begin{aligned}&+aa(pp+qq)(pp+rr)+bb(pp+qq)(qq+rr)+cc(pp+rr)(qq+rr)\\&-2aapp(qq+rr)-2bbqq(pp+rr)-2ccrr(pp+qq)\\&-aabb(pp+qq)\quad-aacc(pp+rr)\quad-bbcc(qq+rr)\\&+a^4pp+b^4qq+c^4rr+aabbcc\end{aligned}\right.$$

Singulis igitur his terminis in ordinem redactis orietur sequens aequatio:

aapp

$$\left.\begin{array}{l} aapp(aa+pp-bb-cc-qq-rr) \\ +bbqq(bb+qq-aa-cc-pp-rr) \\ +ccrr(cc+rr-aa-bb-pp-qq) \end{array}\begin{array}{l} +aaqqrr \\ +bbpprr \\ +ccppqq \\ +aabbcc \end{array}\right\} = 0.$$

Haec igitur eſt aequatio quaeſita, relationem inter ſex quantitates a, b, c et p, q, r exprimens.

Corollarium 1.

§. 19. Transferamus terminos negativos ad alteram partem, et noſtra aequatio ita ſuccincte exhiberi poterit:

$$\left.\begin{array}{l} aapp(aa+pp) \\ +bbqq(bb+qq) \\ +ccrr(cc+rr) \end{array}\begin{array}{l} +aaqqrr \\ +bbpprr \\ +ccppqq \\ +aabbcc \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} aapp(bb+cc+qq+rr) \\ +bbqq(aa+cc+pp+rr) \\ +ccrr(aa+bb+pp+qq) \end{array}\right.$$

Corollarium 2.

§. 10. Super hac aequatione ſequentia ſunt animadvertenda. 1°. Omnium ſex linearum in aequatione hac tantum quadrata occurrunt, ſicque ea manebit eadem, etiamſi quaepiam harum linearum fiant negatiuae. 2°. Inter has ſex lineas a, b, c & p, q, r, binae ſibi oppoſitae ſunt, quae nullum habent terminum communem: primo a cum p; ſecundo b cum q et tertio c cum r, quae tria paria in primo ordine occurrunt, ita vt vnumquodque productum ex huiusmodi binis quadratis in ſummam eorundem ſit ductum. 3°. In parte autem dextra eadem occurrunt producta $aapp$, $bbqq$, $ccrr$, ita vt vnumquodque per ſummam reliquorum quadratorum ſit multiplicatum. 4°. Tandem, ordo poſterior ad ſiniſtram partem quatuor conſtat membris, quorum ſingula eiusmodi

 tres

tres lineas continent quae triangulum conſtituunt, quemadmodum ſcilicet a, q, r triangulum B C D includunt, lineae vero b, p, r triangulum A C D, lineae c, p, q triangulum A B D, et a, b, c triangulum A B C; ſicque ratio, qua iſta aequatio componitur, luculenter perſpicitur.

Corollarium 3.

Tab. I. Fig. 3. §. 11. Praeterea vero ſingularum harum litterarum poteſtates quartae in aequatione occurrunt; vnde intelligitur, ſi earum quinque fuerint datae, ſextam ex iis duplici modo determinari poſſe, id quod cum rei natura egregie conuenit. Si enim praeter tria latera a, b, c dentur binae rectae p et q, ex figura euidens eſt, easdem ita ad alteram partem diſpoſitas eſſe poſſe, vt ſit A $d = p$ et B $d = q$, vnde ſexta r poterit eſſe vel C D vel C d.

Corollarium 4.

§. 12. Quod ſi autem ſumamus quinque rectas a, b, c et p, q eſſe datas, videamus quomodo ex iis ſexta r determinetur; quem in finem aequatio quarti gradus ita diſponatur:

$$ccr^4 = \begin{cases} + rr((aa-bb)(pp-qq) + cc(aa+bb+pp+qq-c^4) \\ -(aapp-bbqq)(aa-bb+pp-qq) - cc(aa-qq)(bb-pp), \end{cases}$$

cuius autem vlterior euolutio in nimis taedioſas ambages praecipitaret.

Problema

Tab. I. Fig. 1. §. 13. *Datis in quadrilatero* A B C D *quatuor lateribus* A B = a, B C = b, C D = c, D A = d, *cum altera diagonali* A C = f, *inuenire alteram diagonalem* B D = x.

Solu-

Solutio.

Aequatio in praecedente Problemate inuenta nos facile ad ſolutionem huius manuducet, ſi modo perpendamus, inter ſex lineas a, b, c, d, f et x, quae hic occurrunt, dari tria binarum oppoſitarum paria, quae ſunt 1°. a et c 2°. b et d ac 3°. f et x. Deinde vero dantur quatuor terniones, quibus triangula includuntur, qui ſunt 1°. a, b, f pro triangulo A B C; 2°. a, d, x pro triangulo A B D; 3°. b, c, x pro triangulo B C D; 4°. denique c, d, f pro triangulo A C D. Quibus obſeruatis aequatio ſolutionem continens ſequenti modo erit comparata, ſi modo quae in Corollario 2^do^. ſunt praeſcripta, rite obſeruentur

$$\left.\begin{array}{l} +aacc\,(aa+cc) \\ +bbdd\,(bb+dd) \\ +ffxx\,(ff+xx) \end{array}\begin{array}{l} +aabbff \\ +aaddxx \\ +bbccxx \\ +ccddff \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +aacc\,(bb+dd+ff+xx) \\ +bbdd\,(aa+cc+ff+xx) \\ +ffxx\,(aa+bb+cc+dd) \end{array}\right.$$

cuius reſolutio dabit binos valores ipſius x.

Corollarium 1.

§. 14. Ad hoc illuſtrandum ſumamus eſſe $aa = 1$, $bb = 2$, $cc = 3$, $dd = 4$, $ff = 5$, et ex his valoribus colligitur iſta aequatio: $5x^4 = 26xx - 25$, ideoque

$$xx = \frac{13 \pm \sqrt{44}}{5}.$$

Hinc ergo in fractionibus decimalibus erit, vel

$$xx = 3{,}92665\text{, vel } xx = 1{,}27335\text{,}$$

extracta igitur radice quadrata erit vel $x = 1{,}981$ vel $x = 1{,}128$.

Corollarium 2.

§. 15. Cum hic de quadrilateris agatur, quoniam duae species principales tractari solent, quarum altera continet parallelogramma, in quibus latera opposita sunt aequalia $c = a$ et $d = b$, altera vero quadrilatera circulo inscripta, in quibus semper est $ac + bd = fx$, has duas species in sequentibus exemplis euoluamus.

Exemplum 1.

§. 16. Sint quadrilateri bina latera opposita inter se aequalia, scilicet $AB = CD$ et $BC = AD$, siue $c = a$ et $b = d$, quibus positis aequatio nostra hanc induet formam:

$$\left.\begin{array}{r} 2a^6 + 2b^6 + ffxx(ff + xx) + 2aabbff \\ + 2aabbxx \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^4(2bb + ff + xx) \\ b^4(2aa + ff + xx) \\ ffxx(2aa + bb), \end{array}\right.$$

quae, secundum dimensionem litterarum f et x disposita, ita adornetur:

$$\left.\begin{array}{l} f^4xx - 2ffxx(aa + bb) - ff(aa - bb)^2 - xx(aa - bb)^2 \\ + ffx^4 \qquad + 2(aa - bb)^2(aa + bb) \end{array}\right\} = 0$$

quae diuisorem habere deprehenditur

$$ff + xx - 2(aa + bb),$$

vnde nascitur quotus $ffxx - (aa - bb)^2$, sicque hinc nascitur duplex solutio: prior scilicet

$$ff + xx = 2aa + 2bb,$$

quae continet proprietatem notissimam omnium parallelogrammorum, qua summa quadratorum diagonalium aequatur

tur ſummae quadratorum laterum. Praeterea vero alia Solutio locum habere poteſt, qua ſit $fx = aa - bb$, in parallelogramma neutiquam competens; refertur haec proprietas ad eam trapeziorum ſpeciem A C B D, in qua altera bina latera A C et B D ſunt inter ſe parallela, altera vero B C et A D inter ſe aequalia: in hac enim figura vtique erit Tab. I. Fig. 4.

$$AC.BD = AB^2 - BC^2,$$

ſiue cum in hac figura latera A B et C D manifeſto ſint aequalia, erit

$$AB.CD = AC.BD + BC.AD,$$

quae proprietas declarat hanc figuram circulo eſſe inſcriptibilem, in qua cum iam rectae A B et C D ſint diagonales, per Theorema Ptolemaicum erit vtique

$$AB.CD = AC.BD + BC.AD.$$

Exemplum 2.

§. 17. Sumamus nunc quadrilaterum A B C D, cum ſuis diagonalibus A C et B D, ita eſſe comparatum vt ſit $fx = ac + bd$, ſiue Fig. 1.

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD.$$

Nunc in noſtra aequatione generali loco $ffxx$ ſcribamus $(ac + bd)^2$, ac membra ſecundum ff et xx diſponamus, vnde depromamus primo ea, quae continent formulam $ff + xx$, deinde ea, quae continent ſeorſim ff et xx, denique vero ea quae neque f continent neque x, quo obſeruato noſtra aequatio ad ſequentem formam redigetur:

$$\left.\begin{array}{l}(ff+xx)((ac+bd)^2-aacc-bbdd)+ff(aabb+ccdd)+xx(aadd+bbcc)\\ +aacc(aa+cc-bb-dd)-(ac+bd)^2(aa+bb+cc+dd)\\ +bbdd(bb+dd-aa-cc)\end{array}\right\}=0$$

quare cum huius aequationis primum membrum contrahatur in

$$2abcd\,(ff+xx),$$

tota aequatio sequentem accipiet formam:

$$\begin{array}{r}ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2bd(ac+bd)(aa+cc)\\ -2ac(ac+bd)(bb+dd)\end{array}=0,$$

cuius postremum membrum in suos factores resolutum producet:

$$ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)=0,$$

in qua aequatione si loco $ac+bd$ iterum scribatur fx, prodibit

$$ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2fx(ab+cd)(ad+bc)=0,$$

quae forma manifesto est quadratum; vnde sequitur fore

$$f(ab+cd)-x(ad+bc)=0,$$

quae aequatio ergo praeter assumtam $fx=ac+bd$ etiam exprimit insignem proprietatem quadrilaterorum circulo inscriptorum.

Corollarium.

§. 18. Pro omnibus igitur quadrilateris circulo inscriptis non solum valet proprietas notissima $fx=ac+bd$, sed etiam haec altera $\frac{f}{x}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, quibus duabus aequationibus demum natura horum quadrilaterorum exhauritur. Hinc autem si prior per posteriorem vel multiplicetur vel diuidatur, ambae diagonales seorsim determinabuntur sequentibus formulis:

$$ff=\frac{(ac+bd)(ad+bd)}{ab+ca} \text{ et } xx=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Scho-

Scholion.

§. 19. Hae autem duae formulae immediate ex ea horum quadrilaterorum proprietate, qua bini anguli oppositi duobus rectis aquantur, facillime deriuantur. Cum enim summa cosinuum duorum angulorum, quorum aggregatum duobus rectis aequatur, semper sit nihilo aequalis, erit tam cos. $BAD + \cos. BCD = 0$, quam

$$\cos. ABC + \cos. CDA = 0;$$

vnde, si ex triangulis hi cosinus per Lemma primum definiantur, hae duae orientur aequationes:

$$\text{I. } \frac{aa + dd - xx}{2ad} + \frac{bb + cc - xx}{2bc} = 0.$$

$$\text{II. } \frac{aa + bb - ff}{2ab} + \frac{cc + dd - ff}{2cd} = 0,$$

ex quarum illa determinabitur xx, ex hac vero ff, sequenti modo:

$$xx = \frac{aabc + bcdd + abbd + accd}{bc + ad} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \text{ et}$$

$$ff = \frac{aacd + bbcd + abcc + abdd}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Circa haec quadrilatera adiungamus sequentem quaestionem Diophanteam.

Quaestio.

§. 20. *Inuenire quadrilaterum circulo inscriptum, cuius tam latera quam ambae diagonales numeris rationalibus exprimantur.*

Solutio.

Positis vt supra quatuor lateribus $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$ et diagonalibus $AC = f$ et $BD = x$, ne-

necesse est vt hae duae formulae:

$$ff = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \text{ et } xx = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

reddantur quadrata, quarum productum cum iam sit quadratum, tantum opus est vt alterutra efficiat quadratum. Fiat igitur $\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} = \square$, quod euenit si fuerit

$$(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc) = \square,$$

id quod duplici modo commode fieri poterit.

I°. Enim statuatur

$$(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc) = (ac+bd)^2 zz,$$

eritque facta euolutione

$$aabd+abbc+acdd+bccd = (ac+bd)^2 zz,$$

cui conditioni si fuerit satisfactum, fiet

$$f\frac{(ac+bd)z}{ab+cd} \text{ et } x = \frac{(ac+bd)z}{ad+bc}.$$

Hic autem statim sumatur $z = d$, vt fiat

$$aabd+abbc+bccd = bd^3, \text{ siue}$$

$$aad+abc+ccd = d^2,$$

vnde colligitur $b = \frac{d^2 - d(aa+cc)}{ac}$, sicque tria latera a, c, d pro subitu assumi possunt, quandoquidem ex iis quartum latus b, tum vero ambae diagonales f et x, rationaliter definientur, cum sit

$$f = \frac{d(ac+bd)}{ab+cd} \text{ et } x = \frac{d(ac+bd)}{ad+bc}.$$

II°. Deinde vero euoluatur productum illud ex tribus factoribus constans, quod quadratum reddi oporteet et quod ita se habebit:

a^3

$$\left.\begin{array}{l} a^3 bcd + aa(bbcc + ccdd + bbdd) \\ abcd(bb + cc + dd) + bbccdd \end{array}\right\} = \Box.$$

Ad hanc formam tractabiliorem reddendam faciamus breuitatis gratia

$bcd = p$,

$bb + cc + dd = q$ et

$bbcc + ccdd + bbdd = r$,

vt haec aequatio resoluenda habeatur:

$$a^3 p + aar + apq + pp = \Box;$$

cuius radix quadrata statuatur $= \frac{1}{2} aq + p$, cuius quadratum cum sit $\frac{1}{4} aaqq + apq + pp$, hoc inde subtractum relinquet hanc aequationem:

$$a^3 p + aar = \tfrac{1}{4} aaqq,$$

vnde colligitur $a = \frac{qq - 4r}{4p}$: Est vero

$$qq - 4r = b^4 + c^4 + d^4 - 2bbcc - 2bbdd - 2ccdd,$$

siue

$$qq - 4r = (cc + dd - bb)^2 - 4ccdd,$$

quae expressio resoluitur in hos factores:

$$(cc + dd + 2cd - bb) \text{ et } (cc + dd - 2cd - bb),$$

quorum quia vterque est iterum differentia duorum quadratorum, omnino habebimus quatuor factores simplices istos:

$$(c + d + b)(c + d - b)(c - d + b)(c - d - b);$$

sicque nacti sumus sequentem solutionem:

$$a = \frac{(c + d + b)(c + d - b)(c - d + b)(c - d - b)}{4bcd}.$$

 Hoc

Hoc autem valore inuento radix quadrata noſtri producti ex tribus factoribus conſtantis erit

$$\tfrac{1}{2} a q + p = \frac{q^3 - 4 q r + 8 p p}{8 p}.$$

Praeſtat autem ex valore inuento ipſius a ipſas ternas formulas $a c + b d$, $a b + c d$, et $a d + b c$ computare, quibus inuentis erit

$$f = \sqrt{\frac{(a c + b d)(a d + b c)}{a b + c d}} \text{ et } x = \sqrt{\frac{(a c + b d)(a b + c d)}{a d + b c}},$$

quandoquidem hinc radices extrahere licebit.

METHODVS FACILIS OMNIA SYMPTOMATA LINEARVM CVRVARVM NON IN EODEM PLANO SITARVM INVESTIGANDI.

Dissertatio prior.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Symptomata linearum curuarum, quae non totae in eodem plano iacent, et a Geometris lineae duplicis curuaturae vocari solent, iam pridem quidem definita reperiuntur: verum analysis, qua ea sunt inuestigata, figuris tantopere perplexis innituntur, vt non solum summam attentionem, sed etiam maximam circumspectionem requirant, ne repraesentatio quantitatum differentialium, atque adeo differentialium secundi gradus, imaginationem confun-

 dat,

dat et in errores ſeducat. Quamobrem ſaepe et multum mecum cogitaui, annon eadem ſymptomata methodo faciliori ex primis elementis deriuari queant, ita vt non opus ſit figuras tantopere complicatas et propemodum inextricabiles conſiderare. His omnibus difficultatibus probe perpenſis tandem perſpexi, totum negotium ſatis commode ad Trigonometriam ſphaericam reuocari atque adeo multo plenius tractari poſſe, quam quidem methodo vulgari fieri licet.

§. 2. Ante autem indolem harum linearum curuarum, in genere ſaltem, more ſolito conſiderari conueniet, quam totam quaeſtionem ad doctrinam ſphaericam transferre queamus. Conſtitutis igitur pro lubitu ternis axibus inter ſe normalibus O A, O B, O C, in puncto fixo
Tab. I. Fig. 5. O concurrentibus, ſit Z punctum quodcunque talis curvae, cuius ſitus determinetur per ternas coordinatas

$$OX = x,\ XY = y,\ YZ = z,$$

axibus illis parallelas, inter quas duabus aequationibus opus erit ad indolem curuae propoſitae exprimendam, quoniam pro quauis abſciſſa $OX = x$, vtraque reliquarum y et z aſſignari debet, vt punctum Z determinatum locum obtineat. Omnes autem quaeſtiones, quae circa tales curuas proponi poſſunt, in genere huc redeunt, vt primo pro quovis puncto Z poſitio tangentis reſpectu ternorum axium definiatur. Deinde vero etiam bina curuae elementa contigua conſiderari debent, quae, quatenus non in directum iacent, certum planum determinabunt, cuius poſitionem reſpectu axium, vel reſpectu ternorum planorum A O B, B O C et C O A inueſtigari oportet. Denique etiam neceſſe

cesse est, vt radius curuaturae pro talibus binis elementis exploretur, eiusque non solum quantitas, sed etiam positio respectu ternorum axium assignetur. Euidens autem est, has posteriores determinationes differentialia secundi gradus inuoluere, quorum repraesentatio in figura taediosam attentionem postulare solet.

§. 3. Ante omnia autem conueniet calculum ita exsequi, vt nulli ternorum axium prae reliquis vlla praerogatiua tribuatur, atque omnia pari modo ad vnumquemque referri queant. Hunc in finem ipsum arcum curuae, quem vocemus $= s$, tanquam praecipuam variabilem in calculum introducamus, ad eamque omnes reliquas variabiles reuocemus; ita vt omnes tanquam functiones ipsius s spectari queant. Hunc in finem statuamus statim ab initio $dx = p\,ds$, $dy = q\,ds$ et $dz = r\,ds$, vnde cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, erit $pp + qq + rr = 1$, ideoque differentiando $p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0$. Tum vero nihil impedit, quo minus elementum ds pro constante accipiamus, quandoquidem aequaliter ad singulos axes refertur, vnde nanciscemur differentialia secundi gradus $ddx = dp\,ds$; $ddy = dq\,ds$ et $ddz = dr\,ds$, sicque hoc modo differentialia secunda penitus euitabimus.

§. 4. Consideremus nunc seorsim elementum curvae $Zz = ds$, quod quomodo ad ternos nostros axes se habeat videamus. Hunc in finem ex puncto Z ducamus rectas Zp, Zq et Zr, axibus parallelas, et ipsum elementum Zz erit diagonalis parallelepipedi a ternis lateribus Tab. I. Fig. 6.

 Zp

$$Zp = dx = pds, \quad Zq = dy = qds \text{ et } Zr = dz = rds,$$

formati; vnde patet ipſum elementum Zz ad directionem Zp ita inclinari, vt anguli zZp coſinus ſit $= p$, anguli vero zZq coſinus $= q$ et anguli zZr coſinus $= r$, vnde etiam horum angulorum ſinus definire licebit, ita vt hinc nacturi ſimus

$$\text{coſ.}\, zZp = p; \quad \text{ſin.}\, zZp = \sqrt{(1 - pp)} = \sqrt{(qq + rr)};$$
$$\text{coſ.}\, zZq = q; \quad \text{ſin.}\, zZq = \sqrt{(1 - qq)} = \sqrt{(pp + rr)};$$
$$\text{coſ.}\, zZr = r; \quad \text{ſin.}\, zZr = \sqrt{(1 - rr)} = \sqrt{(pp + qq)}.$$

Hae ergo formulae ſimul monſtrabunt poſitionem tangentis curuae in Z reſpectu ternorum axium. Scilicet iſta tangens in puncto Z inclinabitur ad axem O A angulo cuius coſ. $= p$ et ſin. $= \sqrt{(qq + rr)}$; ad axem O B angulo cuius coſinus $= q$ et ſinus $= \sqrt{(pp + rr)}$; ad axem O C angulo cuius coſinus $= r$ et ſinus $= \sqrt{(pp + qq)}$. Sicque iam primo requiſito circa poſitionem tangentium curuae reſpectu axium principalium ſatisfecimus, neque adhuc opus fuerat ad doctrinam ſphaericam confugere.

Tab. I. Fig. 7. §. 5. Concipiatur nunc ſphaera circa punctum Z deſcripta, quod quidem in figura non apparet, ad cuius ſuperficiem ducti intelligantur terni radii axibus principalibus O A, O B, O C paralleli, qui ſuperficiem ſecent in punctis a, b, c. Hoc modo, ductis circulis maximis ab, ac, bc oritur triangulum ſphaericum abc, cuius ſingula latera erunt quadrantes et anguli a, b, c recti. Tum vero ex centro Z ſecundum tangentem noſtrae curuae

uae in puncto Z educatur radius Zz in superficie designans punctum z, vnde si ad angulos ducantur arcus za, zb, zc, ii metientur inclinationem tangentis Zz, ad ternos axes Za, Zb, Zc, ideoque erit

$$\cos. az = p;\ \sin. az = \sqrt{(1-pp)} = \sqrt{(qq+rr)};$$
$$\cos. bz = q;\ \sin. bz = \sqrt{(1-qq)} = \sqrt{(pp+rr)} \text{ et}$$
$$\cos. cz = r;\ \sin. cz = \sqrt{(1-rr)} = \sqrt{(pp+qq)}.$$

Praeterea vero si arcus az, bz, cz concipiantur producti vsque ad latera opposita, singuli erunt quadrantes, vnde patet, tangentem Zz ad planum aZb siue ad planum AOB (*Fig.* 5.) inclinari sub angulo cuius sinus $= r$; ad planum autem BOC sub angulo cuius sinus $= p$, et ad planum AOC sub angulo cuius sinus $= q$. Hic quidem radium sphaerae tanquam vnitate expressum spectamus, quod tamen non impedit, quo minus deinceps radius ipsi elemento curuae $Zz = ds$ aequalis statuatur.

§. 6. Hoc modo totum nostrum triangulum sphaericum abc diuidetur in tria triangula sphaerica abz, acz et bcz, in quibus dantur terna latera, vnde ex triangulo baz colligetur

$$\cos. baz = \frac{\cos. bz + \cos. ab \cos. az}{\sin. ab \sin. az} = \frac{q}{\sqrt{(qq+rr)}}.$$

Simili modo ex triangulo caz erit $\cos. caz = \frac{r}{\sqrt{(qq+rr)}}$. Quia vero angulus bac est rectus, erit

$$\sin. baz = \cos. caz = \frac{r}{\sqrt{qq+rr}},$$

vnde sequitur fore

$$\text{tang. } baz = \frac{r}{q} \text{ hincque tang. } caz = \frac{q}{r}.$$

Eo-

Eodem modo erit

$$\text{tang.}\, a\,b\,z = \frac{r}{p} \quad \text{et} \quad \text{tang.}\, c\,b\,z = \frac{p}{r};$$
$$\text{tang.}\, b\,c\,z = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \text{tang.}\, a\,c\,z = \frac{q}{p}.$$

§. 7. Quod si iam quantitates p, q et r suis differentialibus augeamus, perueniemus ad positionem sequentis tangentis respectu axium fixorum. Hoc igitur facto transferatur in figura punctum z in punctum z', eritque radius $Z\,z'$ positio sequentis elementi curuae, seu potius sequens elementum parallelum erit huic radio $Z\,z'$, et arculus infinite paruus $z\,z'$ dabit inclinationem binorum elementorum curuae contiguorum, vnde statim colligetur radius curuaturae horum elementorum. Si enim radius osculi curuae dicatur $= R$, quoniam hinc inclinatio horum elementorum est $\frac{d\,s}{R}$, erit vtique $\frac{d\,s}{R} = z\,z'$, ideoque $R = \frac{d\,s}{z\,z'}$. Praeterea vero, quia sequens elementum parallelum est radio $z\,z'$, dum radius $Z\,z$ refert prius elementum, ambo haec elementa sita erunt in plano $z\,Z\,z'$, siue particula $z\,z'$ continuata praebebit circulum maximum cum isto plano conuenientem, cuius ergo inclinationem ad terna plana principalia per arcus $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$ determinata assignare licebit.

§. 8. Ad haec expedienda vocemus arcum $a\,z = \alpha$, vt sit $\text{cos}.\,\alpha = p$, eritque arcus $a\,z' = \alpha + d\,\alpha$, et ducto perpendiculo $z\,s$ in arcum $a\,z'$, vt fiat $a\,s = a\,z = \alpha$, erit particula $s\,z' = d\,\alpha$; quia autem α est arcus cuius cosinus $= p$, erit $d\,\alpha = -\frac{d\,p}{\sqrt{(1 - p\,p)}} = -\frac{d\,p}{\sqrt{(q\,q + r\,r)}}$. Simili modo vocemus angulum $b\,a\,z = \omega$, eritque angulus $b\,a\,z' = \omega + d\,\omega$, ideoque angulus elementaris $z\,a\,z' = d\,\omega$; quia vero ω denotat angulum cuius tangens est $\frac{r}{q}$, erit $d\,\omega = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{q\,q + r\,r}$, qui ductus in sinum arcus $a\,z = \sqrt{(q\,q + r\,r)}$, praebebit elemenmentum $zs = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{(qq + rr)}}$. Hoc igitur modo in triangulo characteriſtico ad s rectangulo $z\,s\,z'$, ob cathetos $s\,z$ et $s\,z'$ datos colligetur

$$(z\,z')^2 = \frac{qq\,dr^2 - 2qr\,dq\,dr + rr\,dq^2 + dp^2}{qq + rr}.$$

Quia autem eſt

$$p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0, \text{ erit}$$
$$q\,dq + r\,dr = -p\,dp \text{ ideoque}$$
$$qq\,dq^2 + 2qr\,dq\,dr + rr\,dr^2 = pp\,dp^2,$$

vnde fit

$$2qr\,dq\,dr = pp\,dp^2 - qq\,dq^2 - rr\,dr^2,$$

qui valor ſupra ſubſtitutus dabit

$$(z\,z')^2 = \frac{(qq + rr)\,dr^2 + (qq + rr)\,dq^2 + dp^2\,(1 - pp)}{qq + rr}.$$

Quia igitur eſt $1 - pp = qq + rr$, fiet

$$(z\,z')^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2 \text{ ideoque}$$
$$z\,z' = \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

§. 9. Hoc igitur elemento $z\,z'$ inuento reperitur radius oſculi curuae $R = \frac{ds}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$; quare cum poſuerimus $p = \frac{dx}{ds}$, $q = \frac{dy}{ds}$, $r = \frac{dz}{ds}$, ſumto elemento ds conſtante fiet $dp = \frac{ddx}{ds}$, $dq = \frac{ddy}{ds}$, $dr = \frac{ddz}{ds}$, ſicque habebimus:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}.$$

Verum ſi nullum elementum pro conſtante habeatur, vt fiat

$$dp = \frac{ddx}{ds} - \frac{dx\,dds}{ds^2},$$
$$dq = \frac{ddy}{ds} - \frac{dy\,dds}{ds^2},$$
$$dr = \frac{ddz}{ds} - \frac{dz\,dds}{ds^2},$$

 erit

erit

$$dp^2 + dq^2 + dr^2 = \frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}{ds^2}$$
$$- \frac{2dds\,(dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz)}{ds^3} + \frac{dds^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ds^4},$$

vbi ob $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et

$$dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz = ds\,dds,$$

haec formula tranſibit in hanc:

$$\frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}{ds^2},$$

atque hinc expreſſio generalis, nullo elemento pro conſtante aſſumto, pro radio oſculi erit

$$R = \frac{ds^2}{\surd(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2)},$$

quae formula per Analyſin communem demum poſt calculos maxime perplexos eſt eruta.

§. 10. Quo nunc etiam poſitionem plani, in quo bina curuae elementa proxima ſunt ſita, inueſtigemus: in triangulo characteriſtico $z\,z'\,s$ quaeratur angulus $z\,z'\,s$, atque ex omnibus eius lateribus cognitis concludimus ſequentes formulas:

$$\text{ſin. } z\,z'\,s = \frac{q\,dr - r\,dq}{\surd(qq + rr)(dp^2 + dq^2 + dr^2)} \text{ et}$$
$$\text{coſ. } z\,z'\,s = \frac{-dp}{\surd(qq + rr)(dp^2 + dq^2 + dr^2)}, \text{ hincque}$$
$$\text{tang. } z\,z'\,s = \frac{r\,dq - q\,dr}{dp},$$

atque hae eaedem formulae valebunt pro angulo quem particula $z\,z'$ retrocontinuata cum arcu $a\,z$ conſtituet, quandoquidem z et z' infinite parum diſcrepant.

Tab I. Fig. 8. §. 11. Producatur nunc vtcunque elementum $z\,z'$ inuentum, donec latera noſtri trianguli abc ſecet in punctis

ctis q, r et p, et modo vidimus, si angulum $a\,z\,r$ vocemus $= \Phi$, fore

$$\sin.\,\Phi = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd(q\,q + r\,r)(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)};$$
$$\cos.\,\Phi = \frac{-\,d\,p}{\surd(q\,q + r\,r)(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)} \text{ et}$$
$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{r\,d\,q - q\,d\,r}{d\,p},$$

atque hinc definiri oportet primo ipsa puncta p, q, r, vbi iste arcus terna latera nostri trianguli secat, deinde etiam angulos, quos ille in his punctis cum lateribus constituit. Quo hoc facilius expediri possit, ex puncto a in arcum $q\,r\,p$ ducamus arcum $a\,m$, qui productus lateri $b\,c$ occurrat in n, et in triangulo rectangulo $a\,z\,m$ cum latere $a\,z$ datur angulus $a\,z\,m$, vnde inuenitur

$$\sin.\,a\,m = \sin.\,a\,z\,\sin.\,a\,z\,m = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)} \text{ et}$$
$$\text{tang.}\,z\,m = \text{tang.}\,a\,z\,\cos.\,a\,z\,m = \frac{d\,p}{p\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

denique erit

$$\text{tang.}\,z\,a\,m = \frac{1}{\cos.\,a\,z\,\text{tang.}\,a\,z\,m} = \frac{d\,p}{p(q\,d\,r - r\,d\,q)}.$$

Supra autem vidimus esse tang. $z\,a\,b = \frac{r}{q}$, vnde fit tangens summae horum angulorum, seu

$$\text{tang.}\;b\,a\,m = \frac{p\,r(q\,d\,r - r\,d\,q) + q\,d\,p}{p\,q(q\,d\,r - r\,d\,q) - r\,d\,p},$$

cuius numerator ob $r\,d\,r = -\,p\,d\,p - q\,d\,q$, reducitur ad hanc formam: $(q\,q + r\,r)(q\,d\,p - p\,d\,q)$, denominator vero ad hanc $(q\,q + r\,r)\,p\,d\,r - r\,d\,p)$, vnde fit

$$\text{tang.}\,b\,a\,m = \frac{q\,d\,p - p\,d\,q}{p\,d\,r - r\,d\,p},$$

et quia angulus $b\,a\,c$ est rectus, erit

$$\text{tang.}\,m\,a\,c = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{q\,d\,p - p\,d\,q}.$$

§. 12. Quia nunc arcus $a\,n$ eſt quadrans circuli et arcui $b\,c$ normaliter inſiſtit, erit

$$\text{coſ.}\ m\,n = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

vnde quia ambo arcus $m\,p$ et $n\,p$ eidem arcui $m\,n$ normaliter inſiſtunt, ambo erunt quadrantes et arcus $m\,n$ erit menſura anguli $m\,p\,n$, ſicque erit

$$\text{coſ.}\ m\,p\,n = \text{coſ.}\ q\,p\,c = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

atque ſub hoc angulo planum quaeſitum inclinatur ad planum $b\,c$, ſiue in quinta figura ad planum B O C. At vero arcus $a\,m$ metietur angulum, ſub quo iſtud planum ad axem O A inclinatur, cuius ergo ſinus erit

$$\text{ſin.}\ a\,m = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}.$$

§. 13. Inuento autem angulo $z\,p\,b$, quo planum quaeſitum ad planum $b\,c$ inclinatur, per analogiam concludemus angulos, ſub quibus ad reliqua bina latera inclinatur, ſcilicet coſinus inclinationis ad planum $b\,c$, hoc eſt ad planum C A, erit

$$= \frac{r\,d\,p - p\,d\,r}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

et coſinus inclinationis ad planum A B

$$= \frac{p\,d\,q - q\,d\,p}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}.$$

At analogiam ſequentes, quia prima formula erat coſ. $c\,p\,z$ ſecundum ordinem litterarum a, b, c et p, q, r progrediendo, quoniam in poſtremis formulis dubium eſſe poteſt, an pertineant ad angulos $a\,q\,z$ et $a\,r\,z$, an potius ad angulos $p\,q\,z$ et $b\,r\,z$, ambiguitas tolletur hoc modo

$$\text{coſ.}\ c\,p\,z = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}:$$

coſ.

$$\text{cos}.\ aqz = \frac{rdp - pdr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

$$\text{cos}.\ brz = \frac{pdq - qdp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

Interim tamen analogiae confidere non possumus, quia punctum p extra nostrum triangulum cadit, vnde inuestigationem sequenti modo instituamus.

§. 14. Omni ambiguitati occurremus, si resoluamus triangulum azr, in quo cognita sunt latus az, cum angulis zar et azr, vnde fiet

$$\text{cos}.\ arz = \frac{pqrdr - prrdq + qdp}{qq + rr\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

quae expressio ob $rdr = -pdp - qdq$ transmutatur in hanc:

$$\text{cos}.\ arz = \frac{qdp - pdq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

Praeterea vero etiam hinc cognoscemus

$$\text{tang}.\ ar = \frac{qdr - rdq}{pdr - rdp} \text{ et}$$

$$\text{tang}.\ zr = \frac{r\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{dr}.$$

§. 15. Simili modo resolui poterit triangulum zaq, in quo praeter latus az pariter dantur ambo anguli zaq et azq: reperitur enim

$$\text{cos}.\ aqz = \frac{pdr - rdp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

$$\text{tang}.\ aq = \frac{qdr - rdq}{qdp - pdq} \text{ et}$$

$$\text{tang}.\ qz = \frac{q\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{-dq}.$$

Denique iam vidimus arcum cn esse mensuram anguli cam, et quia arcus cb et np sunt quadrantes, erit arcus $bp = cn$, vnde erit

$$\text{tang}.\ bp = \text{tang}.\ mac = \frac{pdr - rdp}{qdr - rdq},$$

vnde porro fit

$$\text{tang}.\ cp = \frac{rdp - qdr}{pdr - rdp}.$$

§. 16. Quae igitur hactenus inuenimus sequenti modo aspectui exponamus; ac primo quidem pro angulis, quae ex punctis p, q, r formantur, habebimus:

$$\operatorname{cos}. bpz = \operatorname{cos}. cpz = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

$$\operatorname{cos}. cqz = -\operatorname{cos}. aqz = \frac{r\,dp - p\,dr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

$$\operatorname{cos}. arz = -\operatorname{cos}. brz = \frac{q\,dp - p\,dq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

Deinde pro positione ipsorum punctorum p, q, r habebimus:

$$\operatorname{tang}. bp = \frac{p\,dr - r\,dp}{q\,dr - r\,dq}; \quad \operatorname{tang}. cp = \frac{r\,dq - q\,dr}{p\,dr - r\,dp},$$

$$\operatorname{tang}. cq = \frac{q\,dp - p\,dq}{q\,dr - r\,dq}; \quad \operatorname{tang}. aq = \frac{q\,dr - r\,dq}{q\,dp - p\,dq},$$

$$\operatorname{tang}. ar = \frac{q\,dr - r\,dq}{p\,dr - q\,dp}; \quad \operatorname{tang}. br = \frac{p\,dr - r\,dp}{q\,dr - r\,dq}.$$

Euidens autem est, si ducerentur arcus pa, qb et rc, eos fore quadrantes. Denique arcus pz commode reperitur ex triangulo azp, in quo latus ap est quadrans, ac praeterea datur latus az, vna cum angulis azp et zpa, quippe cuius sinus cosinui zpb aequatur, vnde reperitur:

$$\operatorname{tang}. pz = \frac{p\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{dp},$$

iam vero erat

$$\operatorname{tang}. qz = -\frac{q\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{dq},$$

$$\operatorname{tang}. rz = \frac{r\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{dr}.$$

§. 17. Inuentis nunc omnibus, quae ad positionem plani, in quo bina curuae elementa contigua incuruantur, et quod circulo maximo $qzrp$ continetur, spectant, etiam in positionem radii osculi, cuius quantitatem iam invenimus, inquiramus, qui quoniam ad radium Zz est normalis et in ipso plano circuli $qzrp$ situs, eius positio tangenti

genti huius circuli in z erit parallela et, quia ipſi centro ſphaerae Z applicatus eſt cenſendus, ductus concipiatur ex centro Z radius tangenti circuli in z parallelus atque in eius directione ſitus erit radius oculi.

§. 18. Tranſeat igitur iſte radius Sphaerae, tangenti in z parallelus, per punctum R, quod vtique ſitum erit in circulo $p\,r\,q$ continuato, ac manifeſtum eſt arcum $z\,r$ fore quadrantem. Hinc ductus arcus $a\,r$ metietur inclinationem radii oſculi ad axem Za, ſiue ad axem OA, quem arcum ex triangulo $a\,z$ R definire licebit, cum ſit z R $= 90°$ et angulus R $z\,a = 180° - \Phi$, latus autem $a\,z$ detur, vnde colligitur Tab. II. Fig. 1.

$$\text{coſ. } a\,\mathrm{R} = \frac{d\,p}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}},$$

tum vero erit

$$\text{tang. } z\,a\,\mathrm{R} = \frac{r\,d\,q - q\,d\,r}{p\,d\,p}.$$

Hinc auferatur angulus $z\,a\,q$, cuius tang. $= \frac{q}{r}$, ac remanebit tang. $q\,a\,\mathrm{R} = -\frac{d\,q}{d\,r}$, vnde ſi ducatur arcus cR, in triangulo R$\,a\,c$ dantur duo latera $a\,c$ et aR cum angulo intercepto, vnde colligitur

$$\text{coſ. } c\,\mathrm{R} = \text{ſin. } a\,\mathrm{R}\ \text{coſ. } q\,a\,\mathrm{R} = \frac{d\,r}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}}.$$

Eademque modo reperietur

$$\text{coſ. } b\,\mathrm{R} = -\frac{d\,q}{\sqrt{(d\,p^2 + d\,p^2 + d\,r^2)}}.$$

Cognitis autem angulis, ſub quibus radius oſculi ad ternos axes principales OA, OB, OC, inclinatur, eorum complementa ad 90° dabunt eius inclinationes ad plana oppoſita, ſcilicet BOC, AOC, AOB. Sicque poſitio radii oſculi

osculi, cuius quantitas est $= \frac{ds}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$, perfecte determinatur.

§. 19. Hae autem determinationes adhuc faciliores reddi possunt, si, quemadmodum inclinationem circuli qzr ad arcum az dedimus, eiusdem quoque inclinationem ad arcus bz et cz definiamus. Hunc in finem quaeramus angulum azb, et ex triangulo azb, quatenus tria laterae sunt cognita, erit

$$\text{cos.}\, azb = \frac{-pq}{\sqrt{(1-pp)(1-qq)}}.$$

Deinde si fiat in eodem triangulo

$$\text{sin.}\, az : \text{sin.}\, abz = \text{sin.}\, ab : \text{sin.}\, azb,$$

inde colligitur:

$$\text{sin.}\, azb = \frac{r}{\sqrt{(1-pp)(1-pp)}},$$

hincque porro tang. $azb = -\frac{r}{pq}$. Eodem modo erit

$$\text{cos.}\, bzc = \frac{-qr}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}} \text{ et}$$

$$\text{sin.}\, bzc = \frac{p}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}},$$

hincque tang. $bzc = \frac{-p}{qr}$. Ac denique

$$\text{cos.}\, cza = \frac{-pr}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$

$$\text{sin.}\, cza = \frac{q}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$

hincque tang. $cza = \frac{-q}{pr}$.

§. 20. Quoniam igitur supra inuenimus esse

$$\text{cos.}\, azr = \frac{-dp}{\sqrt{(qq+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},$$

$$\text{sin.}\, azr = \frac{qdr - rdq}{\sqrt{(qr+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},$$

$$\text{tang.}\, azr = \frac{rdq - qdr}{dp},$$

subtra-

ſubtrahamus hunc angulum $a z r$ ab angulo $a z b$, ac reperiemus

$$\text{tang. } b z r = \frac{-r\,dp - pqr\,dq + pqq\,dr}{pq\,dp - rr\,dq + qr\,dr} = \frac{r\,dp - p\,dr}{dq}.$$

Eodem modo cum ſit

$$\text{tang. } a z q = \frac{q\,dr - r\,dq}{dp},$$

ſubtrahatur iſte angulus ab angulo $a z c$, cuius tangens eſt $\frac{-q}{pr}$, ac reperietur

$$\text{tang. } c z q = \frac{-q\,dp - pqr\,dr + prr\,dq}{pr\,dp - qq\,dr + qr\,dq} = \frac{q\,dp - p\,dq}{dr}.$$

§. 21. Quoniam igitur omnia determinauimus, quae ad poſitionem tam plani, in quo duo elementa proxima curuae inclinantur, quam radii oſculi ſpectant, atque adeo multo vberius quam per methodum comunem fieri ſolet, coronidis loco ſubiungamus quaedam theoremata ad doctrinam ſphaericam pertinentia, ad quae iſta tractatio perduxit et quae omni attentione digna videntur.

Theorema I.

§. 22. *Propoſito triangulo ſphaerico* a b c, *cuius omnia latera ſunt quadrantes, ſi vel intra id vel extra capiatur punctum quodcunque* z, *ex eoque ad angulos trianguli educantur arcus* z a, z b, z c, *ſemper erit* Tab II. Fig. 2

$$\text{coſ. } z a^2 + \text{coſ. } z b^2 + \text{coſ. } z c^2 = 1.$$

Demonſtratio.

Ex triangulo $a z b$, ſi eius latera vt cognita ſpectentur, reperitur

$$\text{cof. } b\,a\,z = \frac{\text{cof. } b\,z}{\text{fin. } a\,z};$$

eodem modo ex triangulo $a\,z\,c$ erit

$$\text{cof. } c\,a\,z = \frac{\text{cof. } c\,z}{\text{fin. } a\,z},$$

vnde quia angulus $b\,a\,c$ eſt rectus, ſi quadrata addantur prodit

$$\text{cof. } b\,a\,z^2 + \text{cof. } c\,a\,z^2 = 1 = \frac{\text{cof. } b\,z^2 + \text{cof. } c\,z^2}{\text{fin. } a\,z^2},$$

ideoque

$$\text{fin. } a\,z^2 = \text{cof. } b\,z^2 + \text{cof. } c\,z^2 = 1 - \text{cof. } a\,z^2,$$

vnde manifeſto fit

$$\text{cof. } a\,z^2 + \text{cof. } b\,z^2 + \text{cof. } c\,z^2 = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

Theorema II.

Tab. II. Fig. 2. §. 23. *Propoſito triangulo ſphaerico* a b c, *cuius omnia latera ſint quadrantes, ſi intra vel extra id capiatur punctum quodcunque* z, *ex eoque in ſingula latera ducantur arcus perpendiculares* z p, z q, z r, *ſemper erit*

$$\text{fin. } z\,p^2 + \text{fin. } z\,q^2 + \text{fin. } z\,r^2 = 1.$$

Demonſtratio.

Euidens eſt haec perpendicula oriri, ſi praecedentes arcus $a\,z$, $b\,z$, $c\,z$ continuentur, vnde quia arcus $a\,p$, $b\,q$, $c\,r$ ſunt quadrantes erit

$$\text{fin. } z\,p^2 = \text{cof. } z\,a^2,$$

$$\text{fin. } z\,q^2 = \text{cof. } z\,b^2 \text{ et}$$

$$\text{fin. } z\,r^2 = \text{cof. } z\,c^2;$$

quare cum modo inuenerimus

$$\text{cof. } z\,a^2 + \text{cof. } z\,b^2 + \text{cof. } z\,c^2 = 1, \text{ erit vtique}$$

$$\text{fin. } z\,p^2 + \text{fin. } z\,q^2 + \text{fin. } z\,r^2 = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

Theo-

Theorema III.

§. 24. *Proposito triangulo sphaerico* a b c, *cuius omnia latera sint quadrantes, si ducatur circulus maximus quicunque* $\beta\gamma\alpha$, *qui secet latera trianguli, si opus est producta, in punctis* α, β, γ, *is ad haec latera ita inclinabitur, vt sit* Tab. II. Fig. 3.

$$\operatorname{cos.} b\alpha\gamma^2 + \operatorname{cos.} a\beta\gamma^2 + \operatorname{cos.} a\gamma\beta^2 = 1.$$

Demonstratio.

In triangulo $\beta a\gamma$, ad a rectangulo, erit

$$\operatorname{cos.} a\beta\gamma = \operatorname{sin.} a\beta\gamma \operatorname{cos.} a\gamma;$$

similique modo in triangulo $b\alpha\gamma$, ad b rectangulo, erit

$$\operatorname{cos.} b\alpha\gamma = \operatorname{sin.} b\gamma\alpha \operatorname{cos.} b\gamma.$$

Addantur nunc quadrata harum duarum formularum eritque

$$\operatorname{cos.} b\alpha\gamma^2 + \operatorname{cos.} a\beta\gamma^2 = \operatorname{sin.} a\gamma\beta^2 \operatorname{cos.} a\gamma^2 + \operatorname{sin.} b\gamma\alpha^2 \operatorname{cos.} b\gamma^2,$$

et quia

$$b\gamma\alpha = a\gamma\beta \text{ et } \operatorname{cos.} a\gamma^2 + \operatorname{cos.} b\gamma^2 = 1,$$

erit

$$\operatorname{cos.} b\alpha\gamma^2 + \operatorname{cos.} a\beta\gamma^2 = \operatorname{sin.} a\gamma\beta^2 = 1 - \operatorname{cos.} a\gamma\beta^2,$$

vnde sequitur, quod demonstrari debet, fore

$$\operatorname{cos.} b\alpha\gamma^2 + \operatorname{cos.} a\beta\gamma^2 + \operatorname{cos.} a\gamma\beta^2 = 1.$$

Theorema IV.

§. 25. *Proposito triangulo sphaerico* a b c, *cuius singula latera sint quadrantes, si pro lubitu ducatur arcus circuli maximi quicunque* $\alpha\beta\gamma$, *in eumque ex angulis* a b c *ducantur arcus perpendiculares* a p, b q, c r *semper erit*

$$\operatorname{sin.} ap^2 + \operatorname{sin.} bq^2 + \operatorname{sin.} cr^2 = 1.$$

Demon-

Demonstratio.

Ducantur arcus αa, βb et γc, qui erunt quadrantes, quoniam omnes arcus ex a in latus $b\,c$ ducti sunt quadrantes, ac praeterea etiam normaliter insistunt. Hinc quia anguli ad p, q et r sunt etiam recti, erunt quoque arcus αp, βq et γr quadrantes, vnde sequitur fore arcum $a\,p =$ angulo $a\,\alpha\,p$, ideoque

$$\text{sin.}\, a\,p = \text{sin.}\, a\,\alpha\,p = \text{cos.}\, b\,\alpha\,\gamma.$$

Eodem modo erit $b\,q = b\,\beta\,q$, ideoque

$$\text{sin.}\, b\,q = \text{sin.}\, b\,\beta\,q = \text{cos.}\, a\,\beta\,\gamma;$$

denique erit $c\,r = c\,\gamma\,r$ hincque

$$\text{sin.}\, c\,r = \text{sin.}\, c\,\gamma\,r = \text{cos.}\, a\,\gamma\,\beta.$$

Quare cum summa quadratorum horum cosinuum sit $= 1$, erit quoque

$$\text{sin.}\, ap^2 + \text{sin.}\, bq^2 + \text{sin.}\, cr^2 = 1. \text{ Q. E. D.}$$

M E-

METHODVS FACILIS
OMNIA SYMPTOMATA
LINEARVM CVRVARVM
NON IN EODEM PLANO SITARVM
INVESTIGANDI.

Dissertatio altera.

§. 1.

Quod si forte methodus ante tradita et doctrinae sphaericae innixa minus placeat, vtpote ex principiis alienis deducta; aliam hic sum propositurus methodum, ex principio magis directo petitam, qua omnia symptomata linearum curuarum non in eodem plano sitarum etiam multo succinctius et clarius demonstrari possunt quam methodo hactenus vsitata. Hanc autem methodum mihi suppeditauit consideratio illius plani, in quo bina curuae elementa contigua sunt sita, et in quo proinde tam tangens curuae quam eius radius curuaturae existere debent; vnde totam inuestigationem ex consideratione huius plani sum petiturus.

Tab. II. Fig. 4. §. 2. Conſtitutis igitur vt ante ternis axibus principalibus O A, O B, O C, quibus coordinatae, quoduis punctum curuae z determinantes, ſint parallelae, ſcilicet

$$O x = x,\ x y = y,\ y z = z,$$

ſtatim in calculum introducam illud planum, quod per bina curuae elementa contigua determinatur, ſiue in quo curua hoc loco incuruatur. Secet igitur iſtud planum ternos noſtros axes in punctis u, v et w, ac ponamus diſtantias $O u = u$, $O v = v$, $O w = w$, quandoquidem his tribus quantitatibus poſitio plani penitus determinatur. Quatenus igitur curuae punctum z in hoc ipſo plano reperitur, aequatio inter ternas coordinatas x, y, z erit vnius dimenſionis, huius formae, $A x + B y + C z = D$, ad quam penitus determinandam transferamus primo punctum z in ipſum punctum u fietque $x = u$, $y = 0$ et $z = 0$, vnde erit $A u = D$. Simili modo, translato puncto z in ipſum punctum v, fiet $x = 0$, $y = v$, $z = 0$, vnde erit $B v = D$. Denique translato puncto z in ipſum punctum w, erit $z = w$, $x = 0$, $y = 0$, vnde erit $C w = D$. Cum igitur hinc ſit

$$A = \frac{D}{u},\ B = \frac{D}{v},\ C = \frac{D}{w},$$

erit aequatio localis pro plano $u v w$ haec:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

§. 3. Quod ſi nunc vt ante elementum curuae ſtatuatur $= d s$, ac per hoc elementum reliqua ita definiantur, vt ſit

$$d x = p\, d s,\ d y = q\, d s,\ d z = r\, d s,$$

erit vtique $p p + q q + r r = 1$, ac differentiando

$p\, d p$

$$p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0.$$

Transferatur nunc punctum curuae z in proximum, cui respondeant coordinatae $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, quoniam istud punctum proximum denuo in plano $u\,v\,w$ est situm, erit etiam

$$\frac{x + dx}{u} + \frac{y + dy}{v} + \frac{z + dz}{w} = 1,$$

a qua aequatione si prior subtrahatur, habebimus:

$$\frac{dx}{u} + \frac{dy}{v} + \frac{dz}{w} = 0, \text{ ideoque } \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0.$$

Denique quia etiam sequens elementum in idem planum incidere debet, erit etiam denuo differentiando

$$\frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 0.$$

Vlterius vero differentiando progredi non licet, quia sequentia elementa vtique in aliud planum incidere possunt.

§. 4. Consideratio igitur istius plani $u\,v\,w$ cum indole curuae coniuncta nobis suppeditauit has tres aequationes:

$$\text{I. } \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

$$\text{II. } \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0.$$

$$\text{III. } \frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 0.$$

ex quibus aequationibus vicissim ternas quantitates u, v et w per coordinatas curuae earumque differentialia determinare poterimus. Hunc in finem adhibeamus hanc combinationem: II. dr — III. r, quae nobis praebebit

$$\frac{p\,dr - r\,dp}{u} + \frac{q\,dr - r\,dq}{v} = 0, \text{ siue}$$

$$\frac{p\,dr - r\,dp}{u} = \frac{r\,dq - q\,dr}{v},$$

vnde

vnde deducitur haec proportio:

$$\tfrac{1}{u} : \tfrac{1}{v} = (r\,d\,q - q\,d\,r) : (p\,d\,r - r\,d\,p).$$

Statuamus igitur

$$\tfrac{1}{u} = \tfrac{r\,d\,q - q\,d\,r}{t}, \text{ erit } \tfrac{1}{v} = \tfrac{p\,d\,r - r\,d\,p}{t},$$

qui valores in secunda aequatione substituti dant

$$r\,\tfrac{(p\,d\,q - q\,d\,p)}{t} + \tfrac{r}{w} = 0, \text{ vnde colligimus}$$

$$\tfrac{1}{w} = \tfrac{q\,d\,p - p\,d\,q}{t}.$$

§. 5. Ex his autem valoribus pro $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ inuentis, si ii in prima aequatione substituantur, perueniemus ad hanc aequationem:

$$x(r\,d\,q - q\,d\,r) + y(p\,d\,r - r\,d\,p) + z(q\,d\,p - p\,d\,q) = t,$$

quae nobis igitur valorem quantitatis t exhibet, ita vt deinceps hac littera t tanquam cognita vti queamus, vbi quidem necesse erit valores formularum $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ in calculum introducere.

Tab. II. Fig. 5. §. 6. Nunc igitur determinata positione plani $u\,v\,w$ inuestigemus eius inclinationem ad terna nostra plana principalia A O B, B O C, C O A. Ac primo quidem quia illud planum secat planum A O B per lineam $u\,v$, quae est $= \sqrt{(u\,u + v\,v)}$, ex O ducatur in hanc $u\,v$ perpendiculum O r, eritque $u\,r$: O u = Ov : O r, vnde fit O $r = \frac{u\,v}{\sqrt{(u\,u + v\,v)}}$. Iungatur nunc recta $r\,w$, et quia triangulum O $w\,r$ est verticale, recta $w\,r$ quoque normalis erit ad rectam $u\,v$, vnde angulus O $r\,w$ dabit inclinationem plani $u\,v\,w$ ad planum A O B; quare cum angulus w O r sit rectus et O $w = w$, erit hypothenusa

$r\,w$

$$r w = \sqrt{\left(\frac{u u v v + u u w w + v v w w}{u u + v v}\right)},$$

ex qua colligimus

$$\text{cos. } O r w = \frac{O r}{r w} = \frac{u v}{\sqrt{(u u v v + u u w w + v v w w)}}, \text{ siue}$$

$$\text{cos. } O r w = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{w w}{u u} + \frac{w w}{v v}\right)}} = \frac{1}{w \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}.$$

Sicque innotescit inclinatio plani $u v w$ ad planum AOB, quippe cuius cosinus est $\frac{1}{w \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}$. Simili modo per analogiam concluditur inclinatio plani $u v w$ ad planum BOC, cuius cosinus est $\frac{1}{u \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}$; ac denique inclinatio plani $u v w$ ad planum COA, cuius cosinus est $\frac{1}{v \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}$.

§. 7. Cum igitur sit

$$\frac{1}{u} = \frac{r d q - q d r}{t},$$

$$\frac{1}{v} = \frac{p d r - r d p}{t} \text{ et}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{q d p - p d q}{t}, \text{ erit}$$

$$\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w} = \frac{d p^2 (q q + r r) + d q^2 (p p + r r) + d r^2 (p p + q q)}{t t}$$
$$- \frac{2 p q\, d p\, d q - 2 p r\, d p\, d r - 2 q r\, d q\, d r}{t t},$$

quia vero est

$$q q + r r = 1 - p p; \quad p p + r r = 1 - q q \text{ et}$$
$$p p + q q = 1 - r r,$$

 his

his valoribus substitutis formula ista in duas partes distribuetur, alteram positiuam, alteram negatiuam; ac positiua quidem erit $\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{tt}$, termini vero negatiui erunt

$$\frac{-ppdp^2 - qqdq^2 - rrdr^2 - 2pqdpdq - 2prdpdr - 2qrdqdr}{tt},$$

quae forma cum manifesto sit quadratum huius formulae: $\frac{pdp + qdq + rdr}{t}$, ea ob

$$pdp + qdq + rdr = 0,$$

sponte euanescit, ita vt habeamus:

$$\surd\left(\frac{1}{uu} + \frac{1}{vv} + \frac{1}{ww}\right) = \surd\left(\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{t}\right),$$

quamobrem inclinationes supra inuentae ita succincte exprimentur:

$$\text{I. cos. incl. ad planum } AOB = \frac{qdp - pdq}{\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

$$\text{II. cos. incl. ad planum } BOC = \frac{rdq - qdr}{\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

$$\text{III. cos. incl. ad planam } COA = \frac{pdr - rdp}{\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

Sicque iam praecipua symptomata sumus nacti, quae praecedente methodo demum post plures ambages sunt eruta.

§. 8. Quo nunc etiam reliqua symptomata facilius eliciamus, ponamus breuitatis gratia angulum $Ouv = \alpha$ atque habebimus

$$\text{sin. } \alpha = \frac{v}{\surd(uu + vv)}, \text{ cos. } \alpha = \frac{u}{\surd(uu + vv)} \text{ et tang. } \alpha = \frac{v}{u}.$$

Deinde ponatur inclinatio seu angulus $Orw = \theta$, eritque

$$\text{sin. } \theta = \frac{Ow}{rw} = \frac{w\surd(uu + vv)}{\surd(uuvv + uuww + vvww)},$$

$$\text{cos. } \theta = \frac{Or}{rw} = \frac{uv}{\surd(uuvv + uuww + vvww)} \text{ et}$$

$$\text{tang. } \theta = \frac{w\surd(uu + vv)}{uv},$$

vbi

vbi notandum eſt hos valores manere conſtantes, dum a puncto curuae z per duo elementa ſequentia progredimur.

§. 9. His praemiſſis inueſtigemus locum puncti z in ipſo plano $u\,v\,w$, et cum ſit $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$, ex punctis x et y ad rectam $u\,v$ ducamus perpendicula $x\,p$ et $y\,q$, et quoniam $x\,u = u - x$ et angulus $x\,u\,p = \alpha$, erit $x\,p = (u - x)$ ſin. α et $u\,p = (u - x)$ coſ. α. Tum vero ex y in $x\,p$ demiſſo perpendiculo $y\,o$, erit $y\,o = y$ ſin. α et $x\,o = y$ coſ. α. Quare cum ſit $p\,q = y\,o$ et $y\,q = p\,o$, fiet interuallum Tab II Fig. 4.

$$u\,q = (u - x)\text{ coſ. }\alpha + y\text{ ſin. }\alpha \text{ et}$$
$$y\,q = (u - x)\text{ ſin. }\alpha - y\text{ coſ. }\alpha.$$

Nunc igitur quia $y\,z = z$ eſt verticalis, ducta recta $q\,z$ triangulum $y\,z\,q$ non ſolum plano $A\,O\,B$ normaliter inſiſtit, ſed etiam rectae $y\,q$ et $z\,q$ ad rectam $u\,v$ erunt perdiculares, et angulus $y\,q\,z$ ipſi inclinationi θ aequabitur, vnde erit recta

$$q\,z = \frac{(u - x)\text{ ſin. }\alpha - y\text{ coſ. }\alpha}{\text{coſ. }\theta},$$

vel etiam erit

$$q\,z = \frac{y\,z}{\text{ſin. }\theta} = \frac{z}{\text{ſin. }\theta},$$

vnde has duas formulas aequales eſſe neceſſe eſt, ex quo ſequitur fore

$$\frac{z\,\surd(uu\,vv + uu\,ww + vv\,ww)}{w\,\surd(uu + vv)} = \frac{(u-x)\text{ſin.}\alpha - y\text{ coſ.}\alpha)\,\surd(uu\,vv + uu\,ww + vv\,ww)}{u\,v},$$

ſiue

$$\frac{z}{w\,\surd(uu + vv)} = \frac{(u - x)\,v - u\,y}{uv\,\surd(uu + vv)},$$

quae aequatio reducitur ad hanc: $\frac{z}{w} = \frac{(u - x)}{u} - \frac{y}{v}$, quae eſt

 ipſa

ipſa aequatio primo conſtituta, ſcilicet

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

§. 10. Quoniam igitur recta zq in ipſo plano uvw ad rectam uv eſt normalis, in hoc plano pro puncto z ſpectemus rectam uq tanquam abſciſſam et qz tanquam applicatam, et vocemus $uq = X$ et $qz = Y$, quocirca habebimus

$$X = (u - x) \operatorname{coſ.} \alpha + y \operatorname{ſin.} \alpha \text{ et}$$

$$Y = \frac{(u - x) \operatorname{ſin.} \alpha - y \operatorname{coſ.} \alpha}{\operatorname{coſ.} \theta} = \frac{z}{\operatorname{coſ.} \theta}.$$

Quae quo clarius perſpici queant, hoc planum uvw cum puncto z ſeorſim in tabulam coniiciamus.

Tab. II. Fig. 6. §. 11. Nunc igitur differentiando per elementum curuae zz' progrodiamur, atque ob

$$dx = p\,ds, \; dy = q\,ds \text{ et } dz = r\,ds,$$

quoniam quantitates u, v, w, cum angulis α et θ manent conſtantes, erit

$$dX = -p\,ds \operatorname{coſ.} \alpha + q\,ds \operatorname{ſin.} \alpha \text{ et}$$

$$dY = -\frac{p\,ds \operatorname{ſin.} \alpha - q\,ds \operatorname{coſ.} \alpha}{\operatorname{coſ.} \theta} = \frac{r\,ds}{\operatorname{ſin.} \theta},$$

quos duos valores ipſius dY pariter aequales eſſe neceſſe eſt, ideoque erit

$$-\frac{p \operatorname{ſin.} \alpha - q \operatorname{coſ.} \alpha}{\operatorname{coſ.} \theta} = \frac{r}{\operatorname{ſin.} \theta},$$

quae aequatio, ſubſtitutis valoribus, tranſit in hanc:

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0,$$

quae eſt ipſa aequatio ſecunda initio conſtituta. Praeterea, cum poſuerimus elementum curuae $= ds$, quod nunc ex ex coordinatis X et Y fit $ds = \sqrt{(dX^2 + dY^2)}$, necesse est vt euadat $dX^2 + dY^2 = ds^2$. Est vero

$$dX = \frac{ds(qv - pu)}{\sqrt{(uu + vv)}} \text{ et}$$

$$dY = -\frac{ds(pv + qu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv\sqrt{(uu + vv}},$$

vel etiam

$$dY = \frac{r\,ds\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{w(\sqrt{uu + vv})}.$$

Hinc autem erit

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = \frac{uuvv(qqvv - 2pquv + ppuu) + (ppvv + 2pquv) + qquu(qquu + uuww + vvww)}{uuvv(uu + vv)},$$

quae expressio reducitur ad hanc:

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = \frac{pp(uu + ww)}{uu} + \frac{qq(vv + ww)}{vv} + \frac{2pqww}{uv}$$

$$= (pp + qq) + ww\left(\frac{p}{u} + \frac{q}{v}\right)^2.$$

Cum autem sit $\frac{p}{u} + \frac{q}{v} = -\frac{r}{w}$, resultabit haec forma:

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = pp + qq + rr = 1.$$

Sicque patet, reuera esse $dX^2 + dY^2 = ds^2$.

§. 12. Quod si iam statuamus $dY = P\,dX$, notum est radium osculi curuae, quatenus cadet in rectam $zN\Omega$, esse $z\Omega = -\frac{dX(1 + PP)^{\frac{3}{2}}}{dP}$, ita vt Ω sit centrum circuli nostram curuam in z osculantis. Modo autem vidimus reuera fieri $dX\sqrt{(1 + PP)} = ds$, vnde cum sit $dX = \frac{ds(qv - pu)}{\sqrt{uu + vv}}$, erit

$$\sqrt{(1 + PP)} = \frac{ds}{dX} = \frac{\sqrt{(uu + vv)}}{qv - pu}, \text{ siue}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + PP)}} = \frac{qv - pu}{\sqrt{(uu + vv)}},$$

 vnde

vnde differentiando colligimus:

$$-\frac{P\,dP}{(1+PP)^{\frac{3}{2}}}=\frac{v\,dq-u\,dp}{\sqrt{(uu+vv)}},$$

vnde deducitur

$$(1+PP)^{\frac{3}{2}}=\frac{P\,dP\sqrt{(uu+vv)}}{u\,dp-v\,dq},$$

atque hinc expressio pro radio osculi erit

$$z\,\Omega=\frac{P\,dX\sqrt{(uu+vv)}}{v\,dq-u\,dp}=\frac{dY\sqrt{(uu+vv)}}{v\,dq-u\,dp},$$

ac loco dY substituto valore obtinebitur tandem radius osculi

$$z\,\Omega=\frac{ds\,(pv+qu)\sqrt{(uuvv+uuww+vvww)}}{uv\,(u\,dp-v\,dq)}.$$

§. 13. Quo nunc hanc expressionem radii osculi ab elementis u, v et w liberemus, diuidamus numeratorem et denominatorem seorsim per uvw, et obtinebimus numeratorem

$$=ds\,(pv+qu)\sqrt{(\tfrac{1}{uu}+\tfrac{1}{vv}+\tfrac{1}{ww})},$$

denominator vero erit $\frac{u\,dp-v\,dq}{w}$. Supra autem iam ostendimus esse

$$\sqrt{(\tfrac{1}{uu}+\tfrac{1}{vv}+\tfrac{1}{ww})}=\frac{\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)}}{t},$$

vnde fit numerator

$$=ds\,(\tfrac{pv}{t}+\tfrac{qu}{t})\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)}.$$

Cum nunc sit

$$\frac{v}{t}=\frac{1}{-p\,dr-r\,dp}\quad\text{et}\quad\frac{u}{t}=\frac{1}{r\,dq-q\,dr},$$

erit noster numerator

$$ds\left(\frac{p}{p\,dr - r\,dp} + \frac{q}{r\,dq - q\,dr}\right)\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}$$
$$= \frac{r\,ds\,(p\,dq - q\,dp)}{(p\,dr - r\,dp)\,(r\,dq - q\,dr)}\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)};$$

denominator vero, ob

$$\frac{u}{w} = \frac{q\,dp - p\,dq}{r\,dq - q\,dr} \text{ et } \frac{v}{w} = \frac{q\,dp - p\,dq}{p\,dr - r\,dp},$$

induet hanc formam:

$$(q\,dp - p\,dq)\left(\frac{dp}{r\,dq - q\,dr} - \frac{dq}{p\,dr - r\,dp}\right) =$$
$$(q\,dp - p\,dq)\,((p\,dp + q\,dq)\,dr - (dp^2 + dq^2)\,r).$$

Cum autem ſit

$$p\,dp + q\,dq = -r\,dr,$$

erit iſte denominator:

$$-\frac{r\,(q\,dp - p\,dq)\,(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{(r\,dq - q\,dr)\,(p\,dr - r\,dp)}.$$

§. 14. Cum igitur euoluerimus tam numeratorem quam denominatorem, inde colligetur radius oſculi

$$z\,\Omega = \frac{ds}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

qui valor perfecte congruit cum eo qui ſuperiore methodo erat inuentus. Supereſt igitur vt eius quoque poſitionem reſpectu ternorum axium principalium definiamus. Hic autem vidimus eum cadere in normalem $z\,N$ productam, ſiquidem eius expreſſio fuerit poſitiua. Eſt vero ſubnorlis $q\,N = \frac{Y\,dY}{dX} = P\,Y$, atque ſi inſuper ducamus tangentem $z\,T$, erit ſubtangens $q\,T = \frac{Y\,dX}{dY} = \frac{Y}{P}$. At vero poſitionem huius tangentis $z\,T$ in praecedente diſſertatione tam ſimpliciter determinauimus, vt angulorum, ſub quibus ea ad axes principales $O\,A$, $O\,B$ et $O\,C$ inclinatur, coſinus ſint p, q et r.

§. 15.

§. 15. Consideremus primo tangentem zT, pro cuius positione respectu rectae uv habemus tangentem anguli $qTz = \frac{qz}{qT} = P = \frac{dY}{dX}$; tum vero quia elementum curuae est ds, si ponamus breuitatis ergo angulum $qTz = \pi$, erit

$$\sin.\, \tau = \frac{dY}{ds} = -\frac{(pv + qu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv\sqrt{(uu + vv)}} \text{ et}$$

$$\cos.\, \tau = \frac{dX}{ds} = \frac{qv - pu}{\sqrt{(uu + vv)}},$$

vnde fit

$$\text{tang.}\, \tau = -\frac{(pv + qu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv(qv - pu)}.$$

Porro vero erit subtangens $qT = \frac{Y}{\text{tang.}\, \tau}$, est vero

$$Y = \frac{(v(u - x) - yu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv\sqrt{(uu + vv)}},$$

vnde fit subtangens

$$qT = \frac{(v(u - x) - uy)(pu - qv)}{(pv + qu)\sqrt{(uu + vv)}},$$

quae subtracta ab ascissa X relinquet spatium

$$uT = \frac{py + q(u - x)\sqrt{(uu + vv)}}{pv + qu}.$$

Denique fiat $dX : ds = qT$ ad zT, hincque prodibit ipsa

$$\text{tang.}\, zT = -\frac{(v(u - x) - uy)}{pv + qu} = \frac{uy - v(u - x)}{pv + qu}.$$

§. 16. Eodem modo definiamus positionem normalis zN, ac primo quidem erit angulus $qNz = 90° - \tau$; tum vero subnormalis

$$qN = YP = Y\,\text{tang.}\, \tau = \frac{(v(u-x) - uy)(pv + qu)(uuvv + uuww + vvww)}{uuvv(pu - qv)\sqrt{(uu + vv)}},$$

ipsa autem normalis erit

zN

$$zN = \frac{Y}{cof.\,T} = \frac{(v(u-x)-uy)\surd(uuvv+uuww+vvww)}{uv(qv-pu)}.$$

Tandem si subnormalem abscissae X addamus, prodibit interuallum

$$UN = \frac{(u-x)(pvv(uu+ww)+quvww)\surd(uu+vv)}{uuvv(pu-qv)}$$
$$-\frac{y(quu(vv+ww)+puvww)\surd(uu+vv)}{uuvv(pu-qv)}.$$

§. 17. Transferamus nunc iterum hanc figuram in planum inclinatum uvw, et cum sit recta zy ad planum AOB perpendicularis, ducta recta yT erit triangulum zyT ad y rectangulum, vnde anguli yzT cosinus erit $\frac{zy}{zT}$. Hic autem angulus aequalis est illi, sub quo tang. zT ad axem OC inclinatur, quia zy ipsi OC est parallela. Cum igitur sit $zy = z$ et $zT = \frac{uy - v(u-x)}{pv+qu}$, at vero ex prima aequatione: Tab. II. Fig. 7.

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} =, \text{ fiat}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{u-x}{u} - \frac{y}{v} = \frac{v(u-x)-uy}{uv}, \text{ erit}$$
$$zT = \frac{uvz}{w(pv+qu)};$$

tum vero ex secunda aequatione:

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0, \text{ erit}$$
$$\frac{r}{w} = -\frac{(pv+qu)}{uv},$$

quo valore substituto fit $zT = -\frac{z}{r}$, quocirca habebimus cos. $yzT = -r$. Supra autem vidimus cosinum anguli, quo tangens curuae ad axem OC inclinatur, esse $= +r$; verum notandum est ibi tangentem sursum fuisse productam, cum hic deorsum dirigatur, vnde signum cosinus mutatur.

§. 18 Quoniam autem hic tantum de inclinatione agitur, quam tangens curuae tenet respectu trium axium, loco ipsius tangentis z T aliam quamcunque ipsi parallelam substituere licebit, quippe quae ad axes nostros pariter erit inclinata. Hanc ob rem in plano inclinato
Tab. II. Fig. 8. $u\,v\,w$ ex u ducatur recta $u\,t$, tangenti curuae parallela, ita vt sit angulus $v\,u\,t = \tau$. Capiatur autem haec recta $u\,t$, calculi gratia, $= 1$, ita vt, si ex t in $u\,v$ demittatur perpendiculum $t\,d$, sit $u\,d = \text{cos.}\,\tau$ et $t\,d = \text{sin.}\,\tau$. Tum vero in ipso plano A O B ex d ad rectam $u\,v$ ducatur normalis $d\,e$, in eamque ex t demittatur perpendiculum $t\,e$, et quia angulus $t\,d\,e$ est inclinatio plani $u\,v\,w$ ad planum A O B, erit iste angulus $t\,d\,e = \theta$, vnde fit interuallum $d\,e = t\,d\,\text{cos.}\,\theta = \text{sin.}\,\tau\,\text{cos.}\,\theta$ et perpendiculum in normalem $t\,e = \text{sin.}\,\tau\,\text{sin.}\,\theta$; vbi notetur rectam $t\,e$ axi O C esse parallelam. Hinc si ducatur recta $u\,e$ triangulum $t\,e\,u$ ad e erit rectangulum, vnde anguli $u\,t\,e$ cosinus erit

$$\text{cos.}\,u\,t\,e = \frac{t\,e}{u\,t} = \text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,\tau.$$

Supra autem vidimus esse

$$\text{sin.}\,\theta = \frac{w\,\surd(u\,u + v\,v)}{\surd(u\,u\,v\,v + u\,u\,w\,w + v\,v\,w\,w)};$$

tum vero erat

$$\text{sin.}\,\tau = -\frac{(p\,v + q\,u)\,\surd(u\,u\,v\,v + u\,u\,w\,w + v\,v\,w\,w)}{u\,v\,\surd(u\,u + v\,v)},$$

quae expressio ob

$$p\,v + q\,u = -r\,.\,\frac{u\,v}{w},$$

transformatur in hanc:

$$\text{sin.}\,\tau = \frac{r\,\surd(u\,u\,v\,v + u\,u\,w\,w + v\,v\,w\,w)}{w\,\surd(u\,u + v\,v)},$$

vnde fit

sin.

$$\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\tau = r = \text{cof.}\,u\,t\,e,$$

hoc eſt coſinus anguli, ſub quo tangens ſurſum ducta ad axem OC inclinatur $= r$, (Cf. §. 19.); recta autem $u\,e$ ſinum eiusdem anguli exhibebit, ita vt ſit

$$u\,e = \sqrt{(1 - r\,r)} = \sqrt{(p\,p + q\,q)},$$

quae etiam definiri poteſt ex triangulo $e\,d\,u$, in quo eſt

$$u\,d = \text{cof.}\,\tau \text{ et } d\,e = \text{fin.}\,\tau\,\text{cof.}\,\theta,$$

vnde fit

$$u\,e = \sqrt{(1 - \text{fin.}\,\theta^2\,\text{fin.}\,\tau^2)}.$$

Hinc autem deducitur tangens anguli $d\,u\,e$, ſcil.

$$\text{tang.}\,d\,u\,e = \frac{d\,e}{u\,d} = \text{cof.}\,\theta\,\text{tang.}\,\tau,$$

ad quam euoluendam ponamus breuitatis gratia:

$$\sqrt{(u\,u\,v\,v + u\,u\,w\,w + v\,v\,w\,w)} = \Theta, \text{ eritque}$$

$$\text{cof.}\,\theta = \frac{u\,v}{\Theta} \text{ et } \text{tang.}\,\tau = \frac{\Theta\,r}{w\,(q\,v - p\,u)},$$

vnde fit

$$\text{tang.}\,d\,u\,e = \frac{r\,.\,u\,v}{w\,(q\,v - p\,u)}.$$

Quare cum anguli $O\,u\,w$ tangens ſit $\frac{v}{u}$, hinc reperiemus tangentem anguli $O\,u\,e$, ſcil.

$$\text{tang.}\,O\,u\,e = \frac{v\,w\,(q\,v - p\,u) - r\,u\,u\,v}{u\,w\,(q\,v - p\,u) + r\,u\,v\,v},$$

cuius fractionis numerator ob $\frac{p}{u} + \frac{r}{w} = -\frac{q}{v}$, ſiue

$$u\,r + w\,p = -\frac{q\,.\,u\,w}{v},$$

reducitur ad hanc formam: $q\,w\,(u\,u + v\,v)$; denominator vero, ob

$$q\,w + r\,v = -\frac{v\,w\,p}{u},$$

reducitur ad: $-p\,w\,(u\,u + v\,v)$, ex quo colligitur

$$\text{tang.}\,O\,u\,e = -\frac{q}{p}.$$

§. 20. Iam ex e in O u demittatur perpendiculum ef; et cum ſit $ue = \sqrt{(pp + qq)}$, tum vero

$$\text{ſin.}\, euf = \frac{-q}{\sqrt{(pp+qq)}} \text{ et } \text{coſ.}\, euf = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}},$$

hinc erit

$$ef = -q \text{ et } uf = p.$$

Quod ſi nunc ducta concipiatur recta tf, ea erit ad O u normalis, hinque triangulum tfu ad f rectangulum, ex quo obtinebitur coſinus anguli O ut, ſub quo tangens tu ad axem O A inclinatur $= p$, prorſus vt ſupra. Eodem modo ſi ex w ducatur ug parallela et aequalis ipſi ef, erit quoque triangulum tug ad g rectangulum, vnde coſinus anguli tug, ſub quo noſtra tangens ad axem O B inclinatur $= -q$. Sicque has inclinationes, quae ſuperiore methodo ſponte ſe offerebant, hac methodo per plures ambages tandem ſunt erutae.

§. 21. His expeditis videamus etiam quomodo normalis ad curuam z N (fig. 6.) ad ternos axes inclinetur. Hunc in finem concipiatur quoque ex puncto u in plano uvw educta recta normali illi z N parallela, quae itidem vnitati aequalis ſtatuatur: neque vero opus erit peculiarem figuram conſtituere. Nam ſi nunc recta ut pro directione huius normalis accipiatur, omnia manere poſſunt vt ante, ſi modo angulus dut capiatur $= 90° + \tau$. Sicque in praecedentibus formulis tantum opus erit ſcribere coſ. τ loco ſin. τ et ſin. τ loco coſ. τ. Sicque erit

$$td = \text{coſ.}\, \tau \text{ et } ud = -\text{ſin.}\, \tau.$$

Hincque porro erit

$$de = \text{coſ.}\, \tau\, \text{coſ.}\, \theta \text{ et } te = \text{coſ.}\, \tau\, \text{ſin.}\, \theta.$$

At

At vero per reductiones ante adhibitas habebimus

$$\text{ſin.}\ \tau = \frac{\Theta r}{w \surd (u u + v v)} \text{ et } \text{coſ.}\ \tau = \frac{q v - p u}{\surd (u u + v v)},$$

porro

$$\text{ſin.}\ \theta = \frac{w \surd (u u + v v)}{\Theta} \text{ et } \text{coſ.}\ \theta = \frac{u v}{\Theta},$$

quorum valorum ope erit

$$u d = -\frac{\Theta r}{w \surd (u u + v v)},$$

$$d t = \frac{u v}{\Theta},$$

$$d e = \frac{u v (q v - p u)}{\Theta \surd (u u + v v)} \text{ et}$$

$$t e = \frac{w (q v - p u)}{\Theta},$$

hincque

$$\text{tang.}\ d u e = -\frac{u v w (q v - p u)}{\Theta \Theta r} = \frac{d e}{u d} = -\frac{\text{coſ.}\ \theta}{\text{tang.}\ \tau}.$$

§. 22. Nunc autem angulus $u t e$ exprimit inclinationem radii oſculi ad axem O C, cuius ergo coſinus erit $= \frac{w (q v - p u)}{\Theta}$; vbi cum ſit

$$\Theta = \surd (u u v v + u u w w + v v w w), \text{ erit}$$

$$\Theta = u v w \surd \left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right) = \frac{u v w}{t} \surd (d p^2 + d q^2 + d r^2),$$

vnde ille coſinus erit

$$= t \frac{(q v - p u)}{u v \surd (d p^2 + d q^2 + d r^2)}.$$

Diuidatur tam numerator quam denominator per $u v$, et haec expreſſio euadet

$$\text{coſ.}\ u t e = \frac{\left(\frac{q t}{u} - \frac{p t}{v}\right)}{\surd (d p^2 + d q^2 + d r^2)}.$$

§. 23. Supra autem vidimus eſſe

$$\frac{t}{u} = r d q - q d r \text{ et } \frac{t}{v} = p d r - r d p,$$

quibus valoribus introductis numerator noſtrae formulae

 erit

erit dr, vnde manifesto colligitur anguli sub quo radius osculi ad axem O C inclinatur cosinus

$$= \frac{-dr}{\sqrt{(dq^2 + dp^2 + dr^2)}},$$

vbi discrimen signi non est attendendum, propterea quod signum per se mutatur, siue radium osculi sursum vel deorsum tendere accipiamus.

§. 24. Cum igitur sit recta

$$te = -\frac{dr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}};$$

erit recta

$$ue = \frac{\sqrt{(dp^2 + dq^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

at vero tang. $eud = \frac{uvw(qv - pu)}{\Theta\Theta r}$. Ante autem erat

$$\Theta = \frac{uvw}{t}\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)},$$

vnde ista tangens euadet

$$\frac{-(qv - pu)tt}{uvwr(dp^2 + dq^2 + dr^2)} = \frac{-\left(\frac{qt}{u} - \frac{pt}{v}\right)t}{wr(dp^2 + dq^2 + dr^2)},$$

cuius fractionis numerator transformatur in $+tdr$, vnde ista tangens fiet

$$\text{tang. } due = \frac{dr(qdp - pdq)}{r(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

Hunc igitur angulum subtrahamus ab angulo Ouv, cuius tangens est $\frac{v}{u} = \frac{rdq - qdr}{pdr - rdp}$, et factis omnibus reductionibus, quibus hactenus sumus vsi, tandem elicitur

$$\text{tang. } Oue = -\frac{dq}{dp}, \text{ ergo}$$

$$\text{sin.} = Oue\,\frac{-dq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2)}} \text{ et cos. } Oue\,\frac{dp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2)}}.$$

Cum igitur sit

$$ue = \frac{\sqrt{(dp^2 + dq^2)}}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}, \text{ erit}$$

u

$$u f = u e \cos. O u e = \frac{d p}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}}$$ et

$$e f = \frac{-d q}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}}.$$

§. 25. Cum autem ſit $u t = 1$, recta $u f$ exprimit coſinum anguli $f u t$, quem radius oſculi cum axe O A conſtituit, recta vero $f e = u g$ exprimit coſinum anguli $g u t$, quem radius oſculi facit cum axe O B, quocirca habebimus:

$$\text{coſ. incl. rad. oſc. ad axem } O A = \frac{d p}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}},$$

$$\text{coſ. incl. rad. oſc. ad axem } O B = \frac{d q}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}},$$

$$\text{coſ. incl. rad. oſc. ad axem } O C = \frac{d r}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}}.$$

Ceterum iſta methodus ideo notatu maxime digna videtur, quod per reductiones hic expoſitas formulae maxime complexae ad ſimpliciſſimas, quaſi praeter omnem expectationem, reuocantur.

§. 26. Quo omnes iſtae reductiones facilius inſtitui queant, ſequentes proprietates probe notaſſe iuuabit. Cum enim ſit

$$\frac{t}{u} = r d q - q d r;$$

$$\frac{t}{v} = p d r - r d p;$$

$$\frac{t}{w} = q d p - p d q;$$

exiſtente vti aſſumſimus

$$t = x(r d q - q d r) + y(p d r - r d p) + z(q d p - p d q),$$

ita vt t denotet quantitatem differentialem, hinc erit

$$\text{I. } \frac{p t}{v} - \frac{q t}{u} = p(p d r - r d p) - q(r d q - q d r) = d r;$$

II.

$$\text{II. } \frac{qt}{w} - \frac{rt}{v} = q(qdp - pdq) - r(pdr - rdp) = dp;$$

$$\text{III. } \frac{rt}{u} - \frac{pt}{w} = r(rdq - qdr) - p(qdp - pdq) = dq.$$

Deinde vero sequentes formulae etiam commodam reductionem patiuntur.

$$\text{I. } \frac{tdp}{v} - \frac{tdq}{u} = dp(pdr - rdp) - dq(rdq - qdr) \\ = -r(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

$$\text{II. } \frac{tdq}{w} - \frac{tdr}{v} = dq(qdp - pdq) - dr(pdr - rdp) \\ = -p(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

$$\text{III. } \frac{tdr}{u} - \frac{tdp}{w} = dr(rdq - qdr) - dp(qdp - pdq) \\ = -q(dp^2 + dq^2 + dr^2).$$

Praeterea vero hae reductiones notatu dignae sunt:

$$\frac{tt}{uu} + \frac{tt}{vv} = dr^2 + rr(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

$$\frac{tt}{vv} + \frac{tt}{ww} = dp^2 + pp(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

$$\frac{tt}{ww} + \frac{tt}{uu} = dq^2 + qq(dp^2 + dq^2 + dr^2).$$

Tab. II. Fig. 9.

§. 27. Denique quoniam omnes has determinationes perduximus ad parallelepipeda circa axes principales exstructa, cuiusmodi in hac figura exhibetur, vbi, prouti ternis lateribus O P, O Q, O R certi valores tribuuntur, diagonales O Ω positionem rectarum notabilium ad curvam pertinentium repraesentant: quae hactenus hic sunt allata sequentibus parallelepipedis complecti licet. I.) Si parallelepipedi latera statuantur

$$OP = x;\ OQ = y;\ OR = z;$$

diago-

diagonalis, quae erit $\sqrt{(xx+yy+zz)}$, dat positionem rectae ex puncto O ad curuae punctum z ductae. II. Si parallelepipedi latera capiantur

$$OP = p;\ OQ = q;\ OR = r;$$

tum diagonalis $O\Omega$ dabit positionem tangentis curuae in puncto z, siue ista tangens parallela erit diagonali $O\Omega$; ipsa autem haec diagonalis erit

$$\sqrt{(pp+qq+rr)} = 1.$$

III.) Si parallelepipedi latera statuantur:

$$OP = \frac{dp}{ds},\ OQ = \frac{dq}{ds},\ OR = \frac{dr}{ds},$$

tum diagonalis parallelogrammi dabit directionem radii osculi in puncto z, seu ipsi erit parallela: ipsa vero diagonalis erit $\frac{\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)}}{ds}$, ita vt ipse radius osculi sit $\frac{1}{O\Omega}$. IV.) Si latera parallelepipedi statuantur:

$$OP = \frac{rdq-qdr}{ds},\ OQ = \frac{pdr-rdp}{ds},\ OR = \frac{qdp-pdq}{ds};$$

tum diagonalis $O\Omega$ erit normalis in planum in quo bina elementa curuae proxima incuruantur: ipsa autem diagonalis iterum erit $\frac{\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)}}{ds}$. Postremum hoc theorema inde manifesto sequitur, quod normalis ad planum incuruationis perinde inclinatur ad ternos axes, atque ipsum planum inclinatur ad plana principalia opposita.

DE PROPRIETATIBVS CIRCVLORVM IN SVPERFICIE SPHAERICA DESCRIPTORVM.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Qui proprietates triangulorum Sphaericorum attente considerauerit, facile inueniet inter istas analogium quandam intercedere cum affectionibus triangulorum in plano descriptorum. Hoc igitur argumento inductus, inquirere proposui, anne circulis in superficie Sphaerae descriptis proprietatas quaedam competerent, analogae illis quibus circuli in plano descripti gaudent? Istius autem disquisitionis specimen quoddam heic Geometris proponere non dubitaui, quod Problemata ad hoc genus pertinentia in scriptis Geometricis rarius occurrere soleant.

§. 2.

§. 2. Theorema I. *Si in semicirculo* A B D, *polo* C *et intervallo arcu circuli maximi* A C *descripto, ex puncto eius quocunque* B *ducatur arcus circuli maximi ad* A D *normalis* B E, *erit* Tab. III Fig. 1.

$$\text{tang. } BE^2 : 1 = \text{sin. } AC^2 - \text{sin. } EC^2 : \text{cos. } AC^2.$$

Demonstr. Iungatur B C arcu circuli maximi, et quum in triangulo B E C rectangulo sit

$$\text{cos. } BE = \frac{\text{cos. } BC}{\text{cos. } EC}; \text{ fiet}$$
$$\text{sin. } BE^2 = \frac{\text{cos. } EC^2 - \text{cos. } BC^2}{\text{cos. } EC^2},$$

hincque

$$\text{tang. } BE^2 : 1 = \text{cos. } EC^2 - \text{cos. } BC^2 : \text{cos. } BC^2$$
$$= \text{sin. } BC^2 - \text{sin. } EC^2 : \text{cos. } BC^2.$$

Si ponatur radius Sphaerae infinitus, quo casu fiet

$\text{cos. } BC = 1$ $\text{tang. } BE = BE$; $\text{sin. } BC = BC$; $\text{sin. } EC = EC$;

fiet $BE^2 = BC^2 - EC^2$, quae est proprietas palmaria circuli in plano descripti.

§. 3. Theorema II. *Iisdem positis ac in Theoremate praecedenti, si insuper iungantur* A B, B D, *arcubus circulorum maximorum, erit*

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2} AD^2 = \text{sin. } \tfrac{1}{2} AB^2 + \text{sin. } \tfrac{1}{2} BD^2.$$

Demonstr. Ductis ex polo C ad arcus A B, B D, arcubus circulorum maximorum C G et C F normalibus, facile liquet esse

$$AG = \tfrac{1}{2} AB; \; FD = \tfrac{1}{2} BD \text{ et } AC = CD = \tfrac{1}{2} AD.$$

Atqui in triangulis rectangulis A G C, C F D est

$$\text{fin. } A\,G = \text{fin. } A\,C \,.\, \text{fin. } A\,C\,G;$$
$$\text{fin. } D\,F = \text{fin. } A\,C\ \text{fin. } D\,C\,F,$$

proinde

$$\text{fin. } A\,G^2 + \text{fin. } D\,F^2 = \text{fin. } A\,C^2, \text{ ob}$$
$$\text{fin. } A\,C\,G^2 = \text{cof. } D\,C\,F^2.$$

§. 4. Theorema III. *Eadem adhibita constructione est*

$$2 \text{ fin. } \tfrac{1}{2} A\,B \,.\, \text{fin. } \tfrac{1}{2} B\,D = \text{fin. } B\,E \,.\, \text{fin. } A\,C.$$

Demonstr. Nam ob

$$\text{fin. } A\,G = \text{fin. } A\,C \,.\, \text{fin. } A\,C\,G \text{ et}$$
$$\text{fin. } D\,F = \text{fin. } A\,C \,.\, \text{fin. } D\,C\,F, \text{ fit}$$
$$\text{fin. } A\,G \,.\, \text{fin. } A\,C = \text{fin. } A\,C^2 \,.\, \text{fin. } A\,C\,G \,.\, \text{cof. } A\,C\,G;$$

et quum fit

$$2 \text{ fin. } A\,C\,G \,.\, \text{cof. } A\,C\,G = \text{fin. } A\,C\,B, \text{ ob}$$
$$A\,C\,B = 2\,A\,C\,G, \text{ erit}$$
$$2 \text{ fin. } AG \,.\, \text{fin. } AC = \text{fin. } AC^2 \,.\, \text{fin. } A\,C\,B = \text{fin. } AC \,.\, \text{fin. } BE,$$

ex quo liquet propositum.

§. 5. Theorema IV. *Iisdem positis erit*

$$\text{tang. } A\,E \,.\, \text{tang. } A\,C = \text{tang. } A\,B \text{ tang. } \tfrac{1}{2} A\,B$$

Demonstr. $\frac{\text{tang. } A\,G}{\text{tang. } A\,C} = \text{cof. } G\,A\,C$; fimilique ratione

$$\frac{\text{tang. } A\,C}{\text{tang. } A\,B} = \text{cof. } G\,A\,C, \text{ erit ergo}$$
$$\text{tang. } A\,E \,.\, \text{tang. } A\,C = \text{tang. } A\,B \,.\, \text{tang. } A\,G$$
$$= \text{tang. } A\,B \,.\, \text{tang. } \tfrac{1}{2} A\,B.$$

§. 6.

§. 6. Theorema V. *Eadem in vſum vocata conſtructione eſt*

$$\operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} AD = \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2}(AB + BD) \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2}(BD - AB).$$

Demonſtr. Per proprietates triangulorum Sphaericorum habetur:

$$\operatorname{cof.} AB = \operatorname{cof.} AC^2 + \operatorname{fin.} AC^2 \operatorname{cof.} ACB;$$
$$\operatorname{cof.} BD = \operatorname{cof.} AC^2 - \operatorname{fin.} AC^2 \operatorname{cof.} ACB;$$

ideoque

$$\operatorname{cof.} AB + \operatorname{cof.} BD = 2 \operatorname{cof.} AC^2;$$

vnde colligitur

$$\operatorname{cof.} AC^2 = \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2}(BD + AB) \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2}(BD - AB).$$

§. 7. Theorema. VI. *In eadem conſtructione eſt*

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} BE^2 = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} AE . \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} ED.$$

Demonſtr. Nam ob $\operatorname{cof.} BE = \frac{\operatorname{cof.} BC}{\operatorname{cof.} EC}$, fiet

$$\frac{1 - \operatorname{cof.} BE}{1 + \operatorname{cof.} BE} = \frac{\operatorname{cof.} EC - \operatorname{cof.} BC}{\operatorname{cof.} EC + \operatorname{cof.} BC},$$

id eſt ob

$$1 - \operatorname{cof.} BE = 2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} BE^2;$$
$$1 + \operatorname{cof.} BE = 2 \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2} BE^2;$$
$$\operatorname{cof.} EC - \operatorname{cof.} BC = 2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}(EC + BC) \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}(BC - EC);$$
$$\operatorname{cof.} EC + \operatorname{cof.} BC = 2 \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2}(BC + EC) \operatorname{cof.} \tfrac{1}{2}(BC - EC);$$

atque

$$BC + EC = ED;\ BC - EC = AE;$$
$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} BE^2 = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} AE \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} DE.$$

§. 8. Theorema. VII. *Eadem facta conſtructione eſt* $\operatorname{cot.} BAC \operatorname{cot.} BDC = \operatorname{cof.} BC^2$.

Demonstr. In triangulo rectangulo G C A est

$$\cot. BAC . \cot. GCA = \cos. BC$$

et in triangulo C E D,

$$\cot. BDC . \cot. FCD = \cos. BC,$$

ideoque ob

$$\operatorname{tang}. GCA = \cot. FCD \text{ fiet}$$

$$\cot. BAC . \cot. BDC = \cos. BC^2.$$

Hinc per modum Corollarii fluit, si ducatur arcus circuli maximi L D, circulum minorem in D tangens, atque ex illo puncto D bini arcus circulorum maximorum D B, D A, quorum hic per ipsum Polum C transit, tum si iungatur A B arcu circuli maximi, fore

$$\operatorname{tang}. BDL . \cot. BAD = \cos BC^2.$$

Tum vero quoque insignis proprietas angulorum in triangulo A B D hinc deducitur, fiet scilicet

$$\cos. BAC \cos. BDC - \sin. BAC \sin. BDC : \sin. BAC \sin. BDC$$
$$= \cos. BC^2 - 1 : 1 = - \sin. BC^2 : 1,$$

atqui est

$$\cos. ABD = \cos. BAC \cos. BDC - \sin. BAC . \sin. BDC,$$

vnde colligitur

$$\cos. ABD = - \sin. BC^2 . \sin. BAC . \sin. BDC.$$

Tab. III. Fig. 5. §. 9. Theorema. VIII. *Si circulo minori in superficie Sphaerica descripto, inscriptum fuerit triangulum ex arcubus circulorum maximorum* A B, B D, A D *compositum, atque angulus* A C D *ad polum* C *insistat eidem arcui circuli minoris* A D *cui ad peripheriam insistit angulus* ABD, *erit*

erit,

$$\sin \tfrac{1}{2} ACD \cos. BC = \cos. \tfrac{1}{2} AB \cos. \tfrac{1}{2} BD \sin. ABD.$$

Demonstr. Ex polo C ducantur ad A B, B D, arcus circulorum maximorum normales C E, C F, eritque in trangulis rectangulis B C E, B C F, $\sin. BCE = \frac{\sin. BE}{\sin. BC}$;

$$\sin BCF = \frac{\sin. BF}{\sin. BC} \text{ et } \cos. BCE = \cos. BE . \sin. EBC;$$

$$\cos. BCF = \cos. BF . \sin. CBF,$$

inde colligitur

$$\sin. ECF = \sin. BCE . \cos. BCF + \cos. BCE \sin. BCF$$

$$= \frac{\sin. BE . \cos. BF \sin. CBF}{\sin. BC} + \frac{\sin. BF . \cos. BE \sin. CBE}{\sin. BC}.$$

At quum sit

$$\text{tang. } EB = \text{tang. } BC \cos. EBC;$$

$$\text{tang. } BF = \text{tang. } BC \cos. CBF,$$

vnde quoque habetur

$$\frac{\sin. BE}{\sin. BC} = \frac{\cos. EB \cos. EBC}{\cos. BC},$$

$$\frac{\sin. BF}{\sin. BC} = \frac{\cos. BF}{\cos. BC} . \cos. CBF,$$

his valoribus suffectis consequimur

$$\sin. ECF = \frac{\cos. BE \cos. BF}{\cos. BC} (\sin EBC \cos. FBC + \sin. FBC \cos. EBC)$$

$$= \frac{\cos. BE . \cos. BF}{\cos. BC} . \sin. EBF,$$

et quum sit

$$ECF = \tfrac{1}{2} ACB + \tfrac{1}{2} BCD$$

ob angulos A C B, B C D bisectos per arcus E C, F C, fiet quoque ob

$$\tfrac{1}{2} ACD = 180 - \tfrac{1}{2} ACB - \tfrac{1}{2} BCD;$$

$$\sin. ECF = \sin. \tfrac{1}{2} ACD,$$

vnde

vnde liquet propositum. Si igitur arcus AD transeat per ipsum Polum, quo casu $\frac{1}{2}$ A C D = 90°, erit tum

$$\cos. BC = \cos. \tfrac{1}{2} AB \cos. \tfrac{1}{2} BD \sin. ABD.$$

§. 10. Theorema. IX. *Iisdem positis ac in Theoremate praecedenti erit*

$$\cos. \tfrac{1}{2} ACD = \sin. \tfrac{1}{2} AB \sin. \tfrac{1}{2} BD + \cos. \tfrac{1}{2} AB \cos. \tfrac{1}{2} BD \cos. ABD.$$

Demonstr. Ex proprietatibus triangulorum Sphaericorum BCE, BCF habemus

$$\sin. BE = \sin. BC \sin. BCE;$$
$$\sin. BF = \sin. BC \sin. CBF;$$

hincque

$$\sin. BE . \sin. BF = \sin. BC^2 \sin. BCE . \sin. CBF$$
$$= \sin. BCE . \sin. CBF - \cos. BC^2 . \sin. BCE . \sin. CBF.$$

Et quum sit

$$\cos EBC = \cos. EC \sin. BCE = \frac{\cos. BC}{\cos. BE} \sin. BCE,$$

tumque

$$\cos. FBC = \frac{\cos. BC}{\cos. BF} . \sin. BCF,$$

prodit

$$\cos. BC \sin. BCE = \cos. BE \cos. EBC \text{ et}$$
$$\cos. BC \sin. BCF = \cos. BF \cos. FBC,$$

ideoque

$$\cos. BC^2 . \sin. BCE . \sin. BCF = \cos. BE \cos BF \cos. FBC \cos. EBC,$$

vnde colligitur:

$$\sin. BCE . \sin. CBF = \sin. BE \sin. BF + \cos. BE \cos. BF \cos. FBC \cos. EBC.$$

Tum

Tum vero eſt

$$\cos. BCE = \cos. BE \sin. EBC;$$
$$\cos. BCF = \cos. BF \sin. CBF,$$

ergo

$$\cos. ECF = \cos. BCE \cos. BCF - \sin. BCE . \sin. BCF$$
$$= \cos. BE \cos. BF (\sin. EBC \sin. FBC - \cos. EBC \cos. FBC)$$
$$- \sin. BE . \sin. BF,$$

ſiue

$$- \cos. ECF = \sin. BE \sin. BF + \cos. BE \cos. BF \cos. ABD;$$

et quum ſit

$$ECF = 180 - \tfrac{1}{2} ACD,$$

fiet omnino

$$\cos. \tfrac{1}{2} ACD = \cos. BE . \cos. BF + \sin. BE \sin. BF \cos. ABD.$$

§. 11. Theorema X. *Si bini arcus circulorum maximorum* A B, D E, *ſe interſecent in* F, *circulo vero cuidam minori occurrant in* A, B, D, E, *erit*

$$\tan g. \tfrac{1}{2} AF . \tan g. \tfrac{1}{2} BF = \tan g. \tfrac{1}{2} DF . \tan g. \tfrac{1}{2} EF.$$

Demonſtr. Iungatur polus circuli minoris C cum puncto interſectionis F, arcu circuli maximi C F, et ducantur arcus circulorum maximorum C B, C D, eritque in triangulis C G F, C H F rectangulis Tab. III. Fig 3. N. 1 & 2.

$$\cos. FG = \frac{\cos. FC}{\cos. GC}, \quad \cos. FH = \frac{\cos. FC}{\cos. CH}.$$

Simili modo in triangulis C D H, C B G rectangulis eſt

$$\cos. BG = \frac{\cos. BC}{\cos. GC},$$
$$\cos. DH = \frac{\cos. BC}{\cos. CH},$$

 pro-

proinde

$$\frac{\text{cof. } FG}{\text{co. } BG} = \frac{\text{cof. } FC}{\text{cof. } BC};$$

$$\frac{\text{cof. } FH}{\text{cof. } DH} = \frac{\text{cof. } FC}{\text{cof. } BC};$$

tumque

$$\frac{\text{cof. } FG - \text{cof. } BG}{\text{cof. } FG + \text{cof. } BG} = \frac{\text{cof. } FH - \text{cof. } DH}{\text{cof. } FH + \text{cof. } DH},$$

id eſt

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(FG + BG) \text{ tang. } \tfrac{1}{2}(BG - FG) = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(DH + FH) \text{ tang. } \tfrac{1}{2}(DH - FH);$$

ſeu ob

$$\tfrac{1}{2}(FG + BG) = \tfrac{1}{2} AF; \ \tfrac{1}{2}(BG - FG) = \tfrac{1}{2} BF;$$
$$\tfrac{1}{2}(DH + FH) = \tfrac{1}{2} FE; \ \tfrac{1}{2}(DH - FH) = \tfrac{1}{2} DF,$$

fiet

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} AF \,.\, \text{tang. } \tfrac{1}{2} BF = \text{tang. } \tfrac{1}{2} DF \,.\, \text{tang. } \tfrac{1}{2} EF.$$

§. 12. Antequam vlterius procedamus, nonnulla de determinatione angulorum in triangulo Sphaerico ex datis lateribus, vel laterum ex datis angulis, adferre placet, quippe quorum vſum in ſequentibus adhibere neceſſe erit. Si igitur in triangulo Sphaerico A B C ſingula latera, A B, A C, A C per litteras minores c, b, a exprimantur; anguli vero per litteras maiores A, B, C indigitentur, pro determinatione angulorum ex datis lateribus haec habebitur aequatio:

$$\text{cof. } a = \text{cof. } b \text{ cof. } c + \text{ſin. } b \text{ ſin. } c \text{ cof. } A$$

et pro determinatione laterum ex datis angulis iſthaec:

$$\text{cof. } A = \text{ſin. } B \text{ ſin. } C \text{ cof. } a - \text{cof. } B \text{ cof. } C.$$

Ex priori, ſi ſimul addatur et ſubtrahatur ſin. b ſin. c, colligitur

$$\text{cos. } a = \text{cos. } (b-c) - \text{sin. } b \text{ sin. } c\, (1 - \text{cos. } A)$$
$$= \text{cos. } (b-c) - 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} A^2 \text{ sin. } b \text{ sin. } c;$$

vel

$$\text{cos. } a = \text{cos. } (b+c) + \text{sin. } b \text{ sin. } c\, (1 + \text{cos. } A)$$
$$= \text{cos. } (b+c) + 2 \text{ cos. } \tfrac{1}{2} A^2 \text{ sin. } b \text{ sin. } c;$$

Hincque deducitur:

$$2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} A^2 \text{ sin. } b \text{ sin. } c = \text{cos. } (b-c) - \text{cos. } a$$
$$= 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} (a+b-c) \text{ sin. } \tfrac{1}{2} (a-b+c) \text{ et}$$
$$2 \text{ cos. } \tfrac{1}{2} A^2 \text{ sin. } b \text{ sin. } c = \text{cos. } a - \text{cos. } (b+c)$$
$$= 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} (a+b+c) \text{ sin. } \tfrac{1}{2} (b+c-a).$$

Nunc si breuitatis gratia ponamus $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$, hae formulae ita concinnius exprimentur:

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\text{sin. } (s-c) \text{ sin. } (s-b)}{\text{sin. } b \text{ sin. } c};$$
$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\text{sin. } s \text{ sin. } (s-a)}{\text{sin. } b \text{ sin. } c},$$

nec non

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\text{sin. } (s-c) \text{ sin. } (s-b)}{\text{sin. } s \text{ sin. } (s-a)} \text{ et}$$
$$\text{sin. } A^2 = \frac{4 \text{ sin. } s \text{ sin. } (s-a) \text{ sin. } (s-c) \text{ sin. } (s-b)}{\text{sin. } b^2 \text{ sin. } c^2}, \text{ siue}$$
$$\text{sin. } A = \frac{2 \sqrt{(\text{sin. } s \text{ sin. } (s-a) \text{ sin. } (s-c) \text{ sin. } (s-b))}}{\text{sin. } b \text{ sin. } c}.$$

§. 13. Quia nunc simili quoque modo habetur:

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sin. } (s-a) \text{ sin. } (s-c)}{\text{sin. } a \text{ sin. } c}}; \quad \text{cos. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sin. } s \text{ sin. } (s-b)}{\text{sin. } a \text{ sin. } c}};$$
$$\text{sin. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sin. } (s-a) \text{ sin. } (s-b)}{\text{sin. } a \text{ sin. } b}}; \quad \text{cos. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sin. } s \text{ sin. } (s-c)}{\text{sin. } a \text{ sin. } b}};$$

inde colligitur:

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} (A+B) = \text{cos. } \tfrac{1}{2} A \text{ cos. } \tfrac{1}{2} B - \text{sin. } \tfrac{1}{2} A \text{ sin. } \tfrac{1}{2} B$$
$$= \frac{(\text{sin. } s - \text{sin. } (s-c))}{\text{sin. } c} \sqrt{\frac{\text{sin. } (s-b) \text{ sin. } (s-a)}{\text{sin. } a \text{ sin. } b}} \text{ et}$$

 sin.

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B + \cos.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B$$
$$= \frac{(\sin.(s-b)+\sin.(s-a))}{\sin.c}\sqrt{\frac{\sin.s.\sin.(s-c)}{\sin.a\sin.b}},$$

vnde denuo concluditur

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}C - \sin.\tfrac{1}{2}(A+B)\sin.\tfrac{1}{2}C$$
$$= \frac{(\sin.s-\sin.(s-c))}{\sin.a\sin.b\sin.c}\sqrt{(\sin.s.\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c))}$$
$$- \frac{(\sin.(s-b)+\sin.(s-a))}{\sin.a\sin.b\sin.c}\sqrt{(\sin.s\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c))}.$$

Atqui

$$\sin s - \sin.(s-c) = 2\sin.\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}(a+b) \text{ et}$$
$$\sin.(s-b) + \sin.(s-a) = 2\sin.\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}(a-b),$$

quorum differentia erit

$$2\sin.\tfrac{1}{2}c(\cos.\tfrac{1}{2}(a+b) - \cos.\tfrac{1}{2}(a-b))$$
$$= -4\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}b).$$

Hoc igitur valore ſubſtituto erit:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{\sqrt{(\sin.s\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c))}}{2\cos.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}b\cos.\tfrac{1}{2}c}.$$

§. 14. Ex aequatione

$$\cos.A = \sin.B\sin.C\cos.a - \cos.B\cos.C,$$

ſi ſimul addatur et ſubtrahatur ſin. B ſin. C, colligimus

$$\cos.A = \sin.B\sin.C(1+\cos.a) - \cos.(B-C)$$
$$= 2\cos.\tfrac{1}{2}a^2\sin B\sin.C - \cos.(A-C);$$
$$\cos.A = -\sin.B\sin.C(1-\cos.a) - \cos.(B+C)$$
$$= -2\sin.\tfrac{1}{2}a^2\sin.B\sin.C - \cos.(B+C);$$

vnde deducimus:

— ſin.

$$2\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{fin. B fin. C} = \text{cof. A} + \text{cof.}\,(B - C)$$
$$= 2\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}(A + B - C)\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}(A - B + C);$$
$$-\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{fin. B fin. C} = \text{cof. A} + \text{cof.}\,(B + C)$$
$$= 2\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}(A + B + C)\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}(B + C - A);$$

vbi fi breuitatis gratia ftatuatur $\tfrac{1}{2}(A + B + C) = S$, erit

$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{fin. B fin. C} = \text{cof.}\,(S - C)\,\text{cof.}\,(S - B); \text{ et}$$
$$\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{fin. B fin. C} = -\,\text{cof. S}\,.\,\text{cof.}\,(S - A),$$

hincque colligitur

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\text{cof. S cof.}\,(S - A)}{\text{cof.}\,(S - C)\,\text{cof.}\,(S - B)} \text{ et}$$
$$\text{fin}\,a = \frac{\sqrt{-\,\text{cof. S cof.}\,(S - A)\,\text{cof.}\,(S - C)\,\text{cof.}\,(S - B)}}{2\,\text{fin. B fin. C}}.$$

Tum vero quum fimili ratione fit:

$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\text{cof.}\,(S - A)\,\text{cof.}\,(S - C)}{\text{fin. A fin. C}}};\ \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\text{cof. S. cof.}\,(S - B)}{\text{fin. A fin. C}}};$$
$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\text{cof.}\,(S - A)\,\text{cof.}\,(S - B)}{\text{fin. B fin. A}}};\ \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\text{cof. S cof.}\,(S - C)}{\text{fin. B fin. A}}},$$

fiet

$$\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{cof.}\,(S - A) + \text{cof.}\,(S - B)}{\text{fin. C}}\sqrt{-\frac{\text{cof. S cof.}\,(S - C)}{\text{fin. B fin. A}}},$$
$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{(\text{cof.}\,(S - C) + \text{cof. S})}{\text{fin. C}}\sqrt{+\frac{\text{cof.}\,(S - B)\,\text{cof.}\,(S - A)}{\text{fin. A fin. B}}};$$

et denique

$$\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) = (\text{cof.}\,S + \text{cof.}\,(S-C) + \text{cof.}\,(S-A) + \text{cof.}\,(S-B))Q,$$

exiftente

$$Q = \frac{\sqrt{-\,\text{cof. S cof.}\,(S - A)\,\text{cof.}\,(S - B)\,\text{cof.}\,(S - C)}}{\text{fin. A fin. B fin. C}}.$$

Atqui eft

$$\text{cof.}\,S + \text{cof.}\,(S - C) = 2\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}(A + B) \text{ et}$$
$$\text{cof}\,(S - A) + \text{cof.}\,(S - B) = 2\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}(A - B),$$

quorum fumma erit

$$2\left(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ}\tfrac{1}{2}(A-B)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)\right)$$
$$=4\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A.$$

Hoc igitur valore ſubſtituto prodit

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\sqrt{-\text{coſ.}S\,\text{coſ}(S-A)\,\text{coſ.}(S-B)\,\text{coſ.}(S-C)}}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C}.$$

§. 15. Porro heic quoque obſeruari meretur eſſe

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C$$
$$=2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\left(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+b)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-b)\right)\frac{\sqrt{\text{ſin.}s\,\text{ſin.}(s-a)\,\text{ſin.}(s-b)\,\text{ſin.}(s-c)}}{\text{ſin.}a\,\text{ſin.}b\,\text{ſin.}c}$$
$$=\frac{4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b}{\text{ſin.}a\,\text{ſin.}b\,\text{ſin.}c}\sqrt{\text{ſin.}s\,\text{ſin.}(s-a)\,\text{ſin.}(s-b)\,\text{ſin.}(s-c)}$$
$$=\frac{\sqrt{\text{ſin.}s\,\text{ſin.}(s-a)\,\text{ſin}(s-b)\,\text{ſin.}(s-c)}}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c}$$

Tum vero et patet quomodo mutatis mutandis

$$\text{coſ}\tfrac{1}{2}(A-B+C)\ \text{vel}\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

per latera trianguli exprimi queant. Deinde etiam notari conuenit eſſe

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)=2Q\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\left(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-B)-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)\right)$$
$$=4Q\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B,$$

ideoque fiet

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{\sqrt{-\text{coſ.}S\,\text{coſ.}(S-A)\,\text{coſ.}(S-B)\,\text{coſ.}(S-C)}}{2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C};$$

at mutatis mutandis ſimiles formulae pro ſin. $\tfrac{1}{2}(a-b+c)$ vel ſin. $\tfrac{1}{2}(b+c-a)$ adferri poſſunt.

Tab. III. Fig. 2. §. 16. Theorema XI. *Si circulo minori ABD inſcriptum fuerit triangulum ABD ex arcubus circulorum maximo-*

ximorum compositum, et ex puncto B in basin AD ducatur arcus circuli maximi normalis BL, erit

$$\text{sin. } BL = \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2} AB \,.\, \text{sin. } \frac{1}{2} BD}{\text{tang. } BC \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2} AD}.$$

Demonstr. In triangulo rectangulo BAL est

$$\text{sin. } BL = \text{sin. } AB \,.\, \text{sin. } BAL,$$

atque per Theor. VIII. est

$$\text{sin. } BAD = \frac{\text{sin. } BCF \text{ cos. } BC}{\text{cos. } \frac{1}{2} AB \text{ cos. } \frac{1}{2} AD},$$

hincque

$$\text{sin. } BL = \frac{\text{sin. } AB \text{ cos. } BC \,.\, \text{sin. } BCF}{\text{cos. } \frac{1}{2} AB \text{ cos. } \frac{1}{2} AD}$$

$$= \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2} AB \text{ cos. } BC \text{ sin. } BCF}{\text{cos. } \frac{1}{2} AD}.$$

Est vero in triangulo rectangulo BCF,

$$\text{sin. } BCF = \frac{\text{sin. } BF}{\text{sin. } BC} = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} BD}{\text{sin. } BC},$$

vnde colligitur

$$\text{sin. } BL = \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2} AB \text{ sin. } \frac{1}{2} BD}{\text{tang. } BC \,.\, \text{cos. } \frac{1}{2} AD}.$$

§. 17. Theorema. XII. *Iisdem positis, si statuatur* $BD = a$, $AD = b$, $AB = c$ et $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, *erit*

$$\text{sin. } BL = \frac{2 \sqrt{\text{sin. } s \text{ sin. } (s-a) \text{ sin. } (s-b) \text{ sin. } (s-c)}}{\text{sin. } b}.$$

Demonstr. Per ea quae supra §. 12. demonstravimus, constat

constat esse

$$\sin. BAD = \frac{2\sqrt{\sin. s \sin. (s-a) \sin. (s-b) \sin. (s-c)}}{\sin. b \sin. c},$$

ideoque ob

$$\sin. BL = \sin. AB . \sin. BAD = \sin. A \sin. C,$$

fiet omnino

$$\sin. BL = \frac{2\sqrt{\sin. s \sin. (s-a) \sin. (s-b) \sin. (s-c)}}{\sin. b}.$$

§. 18. Theorema II. *Si circulo minori fuerit inscriptum triangulum A B D, erit pro distantia poli C a peripheria circuli istius minoris,*

$$\text{tang. } BC = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} b \sin. \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin. s \sin. (s-a) \sin. (s-b) \sin. (s-c)}}.$$

Demonstr. Nam per Theor. XI. est

$$\text{tang. } BC = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} AB . \sin. \frac{1}{2} BD}{\sin. BL . \cos. \frac{1}{2} BD},$$

suffecto igitur valore ipsius sin. B L, ex Theor. XII. prodit omnino

$$\text{tang. } BC = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} b \sin. \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin. s . \sin. (s-a) \sin. (s-b) \sin. (s-c)}}.$$

§. 19. Theorema. XIV. *Si in triangulo A B D, anguli A, B, D respectiue exprimantur per litteras A, B, C, erit quoque*

$$\text{tang. } BC = - \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} a \text{ tang. } \frac{1}{2} b \text{ tang. } \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} (A + B + C)}.$$

Demonstr. Supra §. 13. demonstrauimus esse

cos.

$$\operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}(B+A+C) = -\frac{\sqrt{\operatorname{sin}.s \operatorname{sin}.(s-a) \operatorname{sin}.(s-b) \operatorname{sin}.(s-c)}}{2 \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}a \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}b \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}c};$$

vnde fiet

$$\sqrt{\operatorname{sin}.s \operatorname{sin}.(s-a) \operatorname{sin}.(s-b) \operatorname{sin}.s-c)}$$
$$= -2 \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}(A+B+C) \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}a \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}b \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}c,$$

quo valore ſuffecto in expreſſione pro tang. BC, Theoremate praecedente inuecta, habebimus:

$$\operatorname{tang}.BC = -\frac{\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}b \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}c}{\operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}(A+B+C)}.$$

§. 20. Theorema. XV. *Iisdem poſitis ſi ſtatuatur* $\tfrac{1}{2}(A+B+C) = S$, *fiet*

$$\operatorname{tang}.BC = \sqrt{\frac{-\operatorname{cos}.S}{\operatorname{cos}.(S-A) \operatorname{cos}.(S-B) \operatorname{cos}.(S-C)}}.$$

Demonſtr. Per ea quae §. 14. demonſtrauimus fit

$$\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}b \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}c = \operatorname{cos}.S \sqrt{\frac{-\operatorname{cos}.S}{\operatorname{cos}.(S-A) \operatorname{cos}.(S-B) \operatorname{cos}.(S-C)}},$$

vnde liquet propoſitum. Caeterum idem quoque hunc in modum demonſtratur. In triangulo rectangulo CBF eſt

$$\operatorname{tang}.BC = \frac{\operatorname{tang}.BF}{\operatorname{cos}.CBF},$$

iam quum ſit

$$CBF = S - A \text{ et } BF = \tfrac{1}{2}a, \text{ fiet}$$

$$\operatorname{tang}.BC = \frac{\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}a}{\operatorname{cos}.(S-A)} = \sqrt{\frac{-\operatorname{cos}.S}{\operatorname{cos}.(S-A) \operatorname{cos}.(S-B) \operatorname{cos}.(S-C)}} \text{ ob}$$

$$\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\operatorname{cos}.S \operatorname{cos}.(S-A)}{\operatorname{cos}.(S-B) \operatorname{cos}.(S-C)}}.$$

Tum vero quum ſit per §. 15.

$$\text{cof.}\,(S-A)=\frac{\sqrt{\text{fin.}\,s\ \text{fin}\,(s-a)\ \text{fin.}\,(s-b)\ \text{fin.}\,(s-c)}}{2\ \text{fin.}\,\frac{1}{2}b\ \text{fin.}\,\frac{1}{2}c\ \text{fin}\,\frac{1}{2}a},\ \text{fiet}$$

$$\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}a}{\text{cof.}\,(S-A)}=\frac{2\ \text{fin.}\,\frac{1}{2}a\ \text{fin.}\,\frac{1}{2}b\ \text{fin.}\,\frac{1}{2}c}{\sqrt{\text{fin.}\,s\ \text{fin.}\,(s-a)\ \text{fin.}\,(s-b)\ \text{fin.}\,(s-c)}},$$

vnde veritas Theorematis XIII. nunc quoque alia ratione redditur manifefta.

§. 21. Quia in triangulo B C F eft

$$\text{cof.}\,BCF=\text{fin.}\,CBF\ \text{cof.}\,BF,\ \text{fiet}$$

$$\text{cof.}\,BCF=\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}BCD=\text{fin.}\,(S-A)\ \text{cof.}\,\tfrac{1}{2}a,$$

vbi quum

$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{cof.}\,(S-B)\ \text{cof.}\,(S-C)}{\text{fin.}\,B\ \text{fin.}\,C}},\ \text{fiet}$$

$$\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}BCD=\text{fin.}\,(S-A)\sqrt{\frac{\text{cof.}\,(S-B)\ \text{cof.}\,(S-C)}{\text{fin.}\,B\ \text{fin.}\,C}}.$$

Tum vero quia $\text{tang.}\,CF=\text{tang.}\,CBF\,.\,\text{fin.}\,BF$, fit

$$\text{tang.}\,CF=\text{tang.}\,(S-A)\ \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}a=\text{tang.}\,(S-A)\sqrt{-\frac{\text{cof.}\,S\ \text{cof.}\,(S-A)}{\text{fin.}\,B\ \text{fin.}\,C}}$$

$$=\text{fin.}\,(S-A)\sqrt{\frac{-\text{cof.}\,S}{\text{fin.}\,B\ \text{fin.}\,C\ \text{cof.}\,(S-A)}}.$$

Quodfi autem formulae quaerantur pro C F vel angulo $\frac{1}{2}$ B C D, in quas folae expreffiones ex lateribus conflatae ingrediuntur, iftae non aeque euadent concinnae, quare illis recenfendis non immoror.

Tab. III. Fig. 5. §. 22. Theorema. XVI. *Si triangulo ABD, ex arcubus circulorum maximorum compofito, infcriptus fuerit circulus minor EGF, eius polo exiftente in C, et qui tangit latera trianguli AB, BD, AD in E, F, G, erit pofitis vt ante, AB, BD, AD refpectiue ipfis c, a, b aequalibus et* $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, *erit inquam*

fin.

$$\text{tang. } EC^2 = \frac{\text{sin.}(s-a)\,\text{sin.}(s-b)\,\text{sin.}(s-c)}{\text{sin.}\,s}.$$

Demonstr. Ductis arcubus circulorum maximorum A C, B C, D C liquet angulos B A D, A B D, B D A per hos arcus bisecari, vnde constat esse $AE = AG$; $BE = BF$; $DG = DF$, quamobrem patet esse

$$AE = \tfrac{1}{2}(AB + BD + AD) - BD = s - a;$$
$$BE = s - b;\ DF = s - c.$$

Iam in triangulo A E C rectangulo est $\text{tang. } ACE = \frac{\text{tang. } AE}{\text{sin. } EC}$, et in triangulo B E C,

$$\text{tang. } BCE = \frac{\text{tang. } BE}{\text{sin. } EC}, \text{ hinc}$$

$$\text{tang. } ACB = \frac{\text{tang. } ACE + \text{tang. } BCE}{1 - \text{tang. } ACE \text{ tang. } BCE}$$

$$= \frac{\text{tang. } AE + \text{tang. } BE}{\text{sin. } EC\left(1 - \frac{\text{tang. } AE\,.\,\text{tang. } BE}{\text{sin. } EC^2}\right)}.$$

At quum sit angulus

$$ACB = BCF + ACG,$$

fiet omnino

$$ACB = 180° - \tfrac{1}{2} FCG = 180° - FCD,$$

vnde

$$\text{tang. } ACB = -\text{tang. } FCD = -\frac{\text{tang. } FD}{\text{sin. } CE},$$

erit ergo haec aequatio:

$$\frac{\text{tang. } AE + \text{tang. } BE}{\text{sin. } CE\left(1 - \frac{\text{tang. } AE \text{ tang. } BE}{\text{sin. } CE^2}\right)} = -\frac{\text{tang. } FD}{\text{sin. } CE},$$

ex qua colligitur

$$\text{tang. } AE + \text{tang. } BE + \text{tang. } FD = \frac{\text{tang. } AE\,.\,\text{tang. } BE \text{ tang. } FD}{\text{sin. } CE^2} \text{ et}$$

$$\frac{\text{tang. } AE + \text{tang. } BE + \text{tang. } FD}{\text{tang. } AE \text{ tang. } BE \text{ tang. } FD} = \frac{+1}{\text{sin. } CE^2},$$

hinc autem deducitur

$$\text{fin. } AE \text{ cof. } BE \text{ cof. } FD + \text{fin. } BE \text{ cof. } AE \text{ cof. } FD$$
$$+ \text{fin. } FD \text{ cof. } AE \text{ cof. } BE - \text{fin. } AE \text{ fin. } BE \text{ fin. } FD$$
$$= \text{cot. } EC^2 \text{ fin. } AE \text{ fin. } BE \text{ fin. } DF, \text{ feu}$$

$$\text{tang. } EC = \frac{\text{fin. } AE \,.\, \text{fin. } BE \,.\, \text{fin. } DF}{\text{fin. } (AE + BE + DF)},$$

id eft fuffectis valoribus fupra inuentis

$$\text{tang. } EC = \sqrt{\frac{\text{fin. } (s-a) \text{ fin. } (s-b) \text{ fin. } (s-c)}{\text{fin. } s}}.$$

Facilius autem idem hunc in modum demonftratur:

$$\text{tang. } EC = \text{tang. } EAC \,.\, \text{fin. } AE = \text{tang. } \tfrac{1}{2} \text{ fin. } (s-a),$$

eft vero per §. 12.

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{fin. } (s-b) \text{ fin. } (s-c)}{\text{fin. } s \text{ fin. } (s-a)}},$$

ex quo omnino colligitur

$$\text{tang. } CE = \sqrt{\frac{\text{fin. } (s-a) \text{ fin. } (s-b) \text{ fin. } (s-c)}{\text{fin. } s}}.$$

§. 23. Theorema XVII. *Iisdem pofitis eft*

$$\text{tang. } EC = \text{tang. } \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } \tfrac{1}{2} B \text{ tang. } \tfrac{1}{2} C \text{ fin. } s.$$

Demonftr. Quia vt fupra demonftrauimus eft

$$\text{tang. } EC = \frac{\text{fin. } AE \,.\, \text{fin. } BE \,.\, \text{fin. } DF}{\text{fin. } (AE + BE + DF)},$$

tum vero fit

$$\text{fin. } AE = \frac{\text{tang. } EC}{\text{tang. } EAD};$$
$$\text{fin. } BE = \frac{\text{tang. } EC}{\text{tang. } EBD};$$
$$\text{fin. } DF = \frac{\text{tang. } EC}{\text{tang. } CDF}; \text{ fiet}$$

$$\text{tang. } EC = \text{tang. } EAD \,.\, \text{tang. } EBD \,.\, \text{tang. } CDF \,.\, \text{fin. } (AE + BE + DF),$$

hoc eft

$$\text{tang. } EC = \text{tang. } \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } \tfrac{1}{2} B \text{ tang. } \tfrac{1}{2} C \text{ fin. } s.$$

§. 24.

§. 24. Theorema XVIII. *Eadem facta constructione est*

$$\text{tang. E C} = \frac{\sqrt{-\text{cos. S cos. (S-A) cos. (S-B) cos. (S-C)}}}{2\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C}}.$$

Demonstr. Quum sit per §. 14

$$\text{sin.}\, s = \frac{\sqrt{-\text{cos. S cos.(S-A) cos.(S-B) cos.(S-C)}}}{2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C}},$$

atque in Theoremate praecedente

$$\text{tang. E C} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C sin.}\, s,$$

fiet omino

$$\text{tang. E C} = \frac{\sqrt{-\text{cos. S cos.(S-A) cos.(S-B) cos.(S-C)}}}{2\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C}}.$$

Idem vero sic quoque facilius demonstratur:

$$\text{tang. E C} = \text{sin. A E tang. E A C} = \text{sin.}\,(s-a)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A},$$

at per §. 13. est

$$\text{sin}\,(s-a) = \frac{\sqrt{-\text{cos. S cos. (S-A) cos. (S-B) cos. (S-C)}}}{2\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}},$$

vnde liquet propositum.

§. 25. Hinc etiam formulae suppetunt pro arcubus A C, B C, D C et angulis A C E, B C E, D C F, scilicet in triangulo E A C est

$$\text{tang. A C} = \frac{\text{tang. A E}}{\text{cos. E A C}} = \frac{\text{tang.}\,(s-a)}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}},$$

at per §. 12. est

$$\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\,s\,\text{sin.}\,(s-a)}{\text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,c}};\ \text{hinc fit}$$

$$\text{tang. A C} = \frac{\sqrt{\text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,c\,\text{sin.}\,(s-a)}}{\text{cos.}\,(s-a)\sqrt{\text{sin.}\,s}}.$$

 Tum

Tum vero quoque habetur:

$$\text{coſ. } ACE = \text{coſ. } AE \text{ ſin. } EAC = \text{coſ.}(s-a) \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} A$$

$$\text{coſ.}(s-a) \sqrt{\frac{\text{ſin.}(s-c) \text{ ſin.}(s-b)}{\text{ſin.} b \text{ ſin.} c}},$$

itidem per §. 12.

Tab. III. Fig. 4. §. 26. Theorema XIX. *Si triangulo A B C, circulus ſit circumſcriptus et alius ipſi inſcriptus, tumque diſtantia Poli prioris circuli a puncto A indigitetur per r, diſtantia vero Poli poſterioris circuli ab arcu AB per r', erit*

$$\text{tang. } r \,.\, \text{tang. } r' = \frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} a \text{ ſin. } \frac{1}{2} b \text{ ſin. } \frac{1}{2} c}{\text{ſin. } s},$$

deſignatis nimirum lateribus trianguli reſpectiue per a, b, c *et poſito* $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Demonſtr. Per Theor. XIII. eſt

$$\text{tang. } r = \frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} a \text{ ſin. } \frac{1}{2} b \text{ ſin. } \frac{1}{2} c}{\sqrt{\text{ſin. } s \text{ ſin.}(s-a) \text{ ſin.}(s-b) \text{ ſin.}(s-c)}},$$

et per Theorema XVI.

$$\text{tang. } r' = \sqrt{\frac{\text{ſin.}(s-a) \text{ ſin.}(s-b) \text{ ſin.}(s-c)}{\text{ſin. } s}}, \text{ hinc}$$

$$\text{tang. } r \text{ tang. } r' = \frac{2 \text{ ſin. } \frac{1}{2} a \text{ ſin. } \frac{1}{2} b \text{ ſin. } \frac{1}{2} c}{\text{ſin. } s}.$$

§. 27. Theorema XX. *Iisdem poſitis eſt*

$$\text{tang. } r \text{ tang. } r' = \frac{-\text{coſ. } S}{2 \text{ coſ. } \frac{1}{2} A \text{ coſ. } \frac{1}{2} B \text{ coſ. } \frac{1}{2} C},$$

deſignatis nimirum angulis reſpective per A, B, C et poſito

$$S = \tfrac{1}{2}(A + B + C).$$

De-

Demonſtr. Per Theor. XV. eſt

$$\text{tang. } r = \sqrt{\frac{-\text{coſ. } S}{\text{coſ. }(S-A)\text{ coſ. }(S-B)\text{ coſ. }(S-C)}},$$

et per Theor. XVIII.

$$\text{tang } r' = \frac{\sqrt{-\text{coſ. } S\text{ coſ. }(S-A)\text{ coſ. }(S-B)\text{ coſ. }(S-C)}}{3\text{ coſ. }\tfrac{1}{2}A\text{ coſ. }\tfrac{1}{2}B\text{ coſ. }\tfrac{1}{2}C},$$

vnde liquet propoſitum. Simili quoque ratione colligitur eſſe

$$\frac{\text{tang. } r'}{\text{tang. } r} = \frac{\text{ſin. }(s-a)\text{ ſin. }(s-b)\text{ ſin. }(s-c)}{2\text{ ſin. }\tfrac{1}{2}a\text{ ſin. }\tfrac{1}{2}b\text{ ſin. }\tfrac{1}{2}c}, \text{ vel}$$

$$\frac{\text{tang. } r'}{\text{tang. } r} = \frac{\text{coſ. }(S-A)\text{ coſ. }(S-B)\text{ coſ. }(S-C)}{2\text{ coſ. }\tfrac{1}{2}A\text{ coſ. }\tfrac{1}{2}B\text{ coſ. }\tfrac{1}{2}C}.$$

§. 28. Hac occaſione non praeter rem erit vt oſtendamus, quomodo hae proprietates inuentae analogae ſint illis, quae pro triangulis planis locum obtinent. Sic ſi Δ ABD ſupponatur eſſe planum, habebitur loco Theorematis XI, hoc Theorema: $2BL = \frac{AB.BD}{BC}$; loco Theor. XII. vero iſtud: Tab. III. Fig. 2.

$$BL = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b},$$

Theorem. vero XIII. in iſthoc mutatur:

$$BC = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

vbi area trianguli

$$ABD = \tfrac{1}{2}BL.AD = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

vnde

$$4BC.\Delta ABD = abc.$$

Theoremat. XIV et XV. adplicatio ad triangula plana fieri quidem non poteſt, interim tamen obſeruare conuenit, quia

quia aream trianguli Sphaerici per ſummam angulorum in iſto triangulo determinatur, etiam Theor. XIV. analogiam habere cum iſto pro triangulis rectilineis, vbi ſtatuitur

$$4\, BC \triangle ABD = AB \,.\, BD \,.\, AD.$$

Theorema XVI. ad triangula plania traductum dat

$$r' = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

ex Theoremate vero XVII iſtud colligitur

$$r' = s \text{ tang.} \tfrac{1}{2} A \text{ tang.} \tfrac{1}{2} B \text{ tang.} \tfrac{1}{2} C;$$

hincque iſtud Theorema elicitur analogum Theoremati XIX: $r\, r' = \frac{a\, b\, c}{4\, s}$, vel $\frac{r'}{r} = \frac{4\,(s-a)(s-b)(s-c)}{a\, b\, c}$.

Tab. III. Fig 6. §. 29. Theorema. XXI. *Si circulo minori A B C inſcriptum fuerit quadrilaterum A B D C, ex arcubus circulorum maximorum compoſitum, et ducti conpiciantur arcus circuli maximi B C, A D, diagonales huius quadrilateri, erit*

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} AD \text{ ſin} \tfrac{1}{2} BC = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AB \,.\, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} DC + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AC \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} BD.$$

Demonſtr. Sit G polus circuli minoris et ex hoc Polo ducantur arcus circulorum maximorum G A, G B, G D, G C, vt etiam G F, G H normales ad B C, A D et iungatur G E, erit itaque

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} BGD = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} (AGB + AGC + CGD),$$

hinc

$$\begin{aligned} \text{ſin.} \tfrac{1}{2} BGD \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} AGC &= \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AGC \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} (AGB + AGD) \\ &= \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AGC \text{ coſ.} \tfrac{1}{2} AGB \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} AGD \\ &+ \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AGC \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} AGD \text{ coſ.} \tfrac{1}{2} AGB. \end{aligned}$$

Similiter fiet . . . .

ſin.

$$\sin.\tfrac{1}{2}AGB\,\sin.\tfrac{1}{2}DGC = \sin.\tfrac{1}{2}AGB\,\cos.\tfrac{1}{2}AGC\,\sin.\tfrac{1}{2}AGD - \sin.\tfrac{1}{2}AGB\,\cos.\tfrac{1}{2}AGD\,\sin.\tfrac{1}{2}AGC$$

hincque

$$\begin{aligned}&\sin.\tfrac{1}{2}BGD\,\sin.\tfrac{1}{2}AGC + \sin.\tfrac{1}{2}AGB\,\sin.\tfrac{1}{2}DGC\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}AGD\,(\sin.\tfrac{1}{2}AGC\,\cos.\tfrac{1}{2}AGB + \sin.\tfrac{1}{2}AGB\,\cos.\tfrac{1}{2}AGC)\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}AGD\,\sin.\tfrac{1}{2}BGC.\end{aligned}$$

Quum itaque sit

$$\begin{aligned}\sin.\tfrac{1}{2}BD &= \sin.BG\,\sin.\tfrac{1}{2}BGD;\\ \sin.\tfrac{1}{2}AC &= \sin.BG\,\sin.\tfrac{1}{2}AGC;\\ \sin.\tfrac{1}{2}AB &= \sin.BG\,\sin.\tfrac{1}{2}AGB;\\ \sin.\tfrac{1}{2}DC &= \sin.BG\,\sin.\tfrac{1}{2}DGC;\\ \sin.\tfrac{1}{2}AD &= \sin.BG\,\sin.\tfrac{1}{2}AGD;\\ \sin.\tfrac{1}{2}BC &= \sin.BG\,\sin.\tfrac{1}{2}BGC;\end{aligned}$$

fiet omnino

$$\sin.\tfrac{1}{2}AD\,\sin.\tfrac{1}{2}BC = \sin.\tfrac{1}{2}AB\,\sin.\tfrac{1}{2}DC + \sin.\tfrac{1}{2}BD\,\sin.\tfrac{1}{2}AC.$$

§. 30. Theorema. XXII. *Iisdem positis est*

$$\sin.\tfrac{1}{2}AD^2 = \frac{(\sin.\tfrac{1}{2}AB\,\sin.\tfrac{1}{2}AC + \sin.\tfrac{1}{2}BD\,\sin.\tfrac{1}{2}DC)(\mathrm{c.}\tfrac{1}{2}AB\,\mathrm{c.}\tfrac{1}{2}DC + \mathrm{c.}\tfrac{1}{2}AC\,\mathrm{c.}\tfrac{1}{2}BD)}{\sin.\tfrac{1}{2}AB\,\sin.\tfrac{1}{2}BD + \sin.\tfrac{1}{2}AC\,\sin.\tfrac{1}{2}DC}.$$

Demonstr.

$$\sin.BE : \sin.EC = \sin.AB\,\sin.BAD : \sin.AC\,.\,\sin.DAC,$$

atqui per Theor. VIII.

$$\sin.BAD = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}BGD\,\cos.BG}{\cos.\tfrac{1}{2}AB\,\cos.\tfrac{1}{2}AD} = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}BD\,.\,\cot.BG}{\cos.\tfrac{1}{2}AB\,\cos.\tfrac{1}{2}AD},$$

nec non

$$\text{ſin. } D A C = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} D C \text{ . cot. } B G}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A C \text{ coſ. } \frac{1}{2} A D},$$

hinc fit

$$\text{ſin. } B E : \text{ſin. } E C = \frac{\text{ſin. } A B \text{ . ſin. } \frac{1}{2} B D}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A B} : \frac{\text{ſin. } A C \text{ ſin. } \frac{1}{2} D C}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A C}$$

$$= \text{ſin. } \tfrac{1}{2} A B \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} B D \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} A C \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} D C,$$

vnde

$$\text{ſin. } B E + \text{ſin. } E C : \text{ſin. } E C = 2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} B C \text{ coſ. } E F : \text{ſin. } E C$$

$$= \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AB \text{ . ſin.} \tfrac{1}{2} BD + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AC \text{ſin.} \tfrac{1}{2} \text{ſin.} \tfrac{1}{2} DC : \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AC \text{ſin.} \tfrac{1}{2} DC.$$

Simili ratione demonſtratur eſſe

$$2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} A D \text{ coſ. } E H : \text{ſin. } A E = \text{ſin. } \tfrac{1}{2} A B \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} A E$$

$$+ \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} B D \text{ . ſin. } \tfrac{1}{2} D C : \text{ſin. } \tfrac{1}{2} A B \text{ . ſin. } \tfrac{1}{2} A C.$$

Erit igitur:

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} BC : \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AD = \text{ſin.} EC \frac{(\text{ſin.} \frac{1}{2} AB \text{. ſin.} \frac{1}{2} BD + \text{ſin } \frac{1}{2} AC \text{ ſin.} \frac{1}{2} DC)}{\text{coſ. } E F \text{ ſin. } \frac{1}{2} D C}$$

$$: \text{ſin. } A E \frac{(\text{ſin.} \frac{1}{2} A B \text{ ſin.} \frac{1}{2} B C + \text{ſin.} \frac{1}{2} A C \text{ ſin.} \frac{1}{2} B D)}{\text{coſ. } E H \text{ . ſin. } \frac{1}{2} A B}.$$

At in triangulo A E C eſt

$$\text{ſin. } E C : \text{ſin. } A E = \text{ſin. } D A C : \text{ſin. } B C A$$

$$= \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} D C}{\text{coſ. } \frac{1}{2} A D} : \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} A B}{\text{coſ. } \frac{1}{2} B C}$$

per Theor. VIII., hinc fiet

$$\frac{\text{ſin. } E C}{\text{ſin. } \frac{1}{2} C D} : \frac{\text{ſin. } A E}{\text{ſin. } \frac{1}{2} A B} = \text{coſ. } \tfrac{1}{2} B C : \text{coſ. } \tfrac{1}{2} A D.$$

At eſt

$$\text{coſ.} \tfrac{1}{2} B C : \text{coſ.} \tfrac{1}{2} A D = \text{coſ.} G H : \text{coſ.} G F = \text{coſ.} E F : \text{coſ.} E H,$$

pro-

proinde erit

$$\frac{\text{fin. E C}}{\text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{D C cof. E F}} = \frac{\text{fin. A E}}{\text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{A B cof. E H}},$$

ideoque

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{BC} : \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{AD} = \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{AB fin.}\tfrac{1}{2}\text{BD} + \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{AC fin.}\tfrac{1}{2}\text{DC} : \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{AB fin.}\tfrac{1}{2}\text{AC} + \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{BD fin.}\tfrac{1}{2}\text{DC},$$

vnde ob

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{BC} \,.\, \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{AD} = \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{AB fin.}\tfrac{1}{2}\text{DC} + \text{fin.}\tfrac{1}{2}\text{AC fin.}\tfrac{1}{2}\text{BD},$$

per Theorema praecedens, pro fin. $\tfrac{1}{2}$ B C^2 obtinetur valor Theoremate noftro expreffus.

§. 31. Si breuitatis gratia exprimantur arcus AB, BD, DC, AC, AD, BC refpectiue per litteras a, b, c, d, e, f, fiet

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}f^2 = \frac{(\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}c + \text{fin.}\tfrac{1}{2}b\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d)(\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}b + \text{fin.}\tfrac{1}{2}c\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d)}{\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d + \text{fin.}\tfrac{1}{2}b\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}c},$$

$$\begin{aligned}\text{cof.}\tfrac{1}{2}f^2 = 1 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}f^2 = \tfrac{1}{Q}(&\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d + \text{fin.}\tfrac{1}{2}b\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}c - \text{fin.}\tfrac{1}{2}a^2\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}b\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}c \\ &- \text{fin.}\tfrac{1}{2}b^2\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d - \text{fin.}\tfrac{1}{2}c^2\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d - \text{fin.}\tfrac{1}{2}d^2\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}b\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}c) \\ = \tfrac{1}{Q}(&\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d(1 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}c^2) + \text{fin.}\tfrac{1}{2}b\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}c(1 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}a^2 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}d^2),\end{aligned}$$

vbi

$$Q = \text{fin.}\tfrac{1}{2}a\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}d + \text{fin.}\tfrac{1}{2}b\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}c.$$

Atqui eft

$$1 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{2 - 2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}b^2 - 2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}c^2}{2} = \frac{\text{cof.}\,b + \text{cof.}\,c}{2}$$

$$= \text{cof.}\tfrac{1}{2}(b + c)\ \text{cof.}\tfrac{1}{2}(b - c);$$

 fimisimilique ratione fit

$$1 - \sin.\tfrac{1}{2}a^2 - \sin.\tfrac{1}{2}d^2 = \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.\tfrac{1}{2}(a-d),$$

vnde denique colligitur

$$\cos.\tfrac{1}{2}f^2 = \tfrac{1}{Q}(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) + \sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)).$$

§. 32. Theorema XXIII. *Iisdem adhibitis denominationibus si ponatur arcus $BG = R$, erit*

$$\mathrm{tang.}\,R = \tfrac{M}{2N}, \text{ vbi}$$

$$M = \sqrt{(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}b + \sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}d)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}c + \sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}d)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d + \sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)}$$

$$\text{et } N^2 = \left\{\begin{array}{r}\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\\ \sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+c-b-d)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a+d-b-c)\end{array}\right\}.$$

Demonstr. Per Theor. XIII. habetur

$$\mathrm{tang.}R = \frac{2\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d\sin.\tfrac{1}{2}f}{\sqrt{\sin.\tfrac{1}{2}(a+d+f)\sin.\tfrac{1}{2}(a+d-f)\sin.\tfrac{1}{2}(a-d+f)\sin.\tfrac{1}{2}(d+f-a)}},$$

denominator autem huius expressionis ita quoque per quatuor factores exprimi potest:

$$\begin{array}{l}(\sin.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.\tfrac{1}{2}f + \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\sin.\tfrac{1}{2}f)\\ (\sin.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.\tfrac{1}{2}f - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\sin.\tfrac{1}{2}f)\\ (\sin.\tfrac{1}{2}f\cos.\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos.\tfrac{1}{2}f\sin.\tfrac{1}{2}(a-d))\\ (\sin.\tfrac{1}{2}f\cos.\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos.\tfrac{1}{2}f\sin.\tfrac{1}{2}(a-d))\end{array}$$

Binorum factorum priorum in hoc denominatore productum igitur est

$$\sin.\tfrac{1}{2}(a+d)^2\cos.\tfrac{1}{2}f^2 - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2\sin.\tfrac{1}{2}f^2 = \cos.\tfrac{1}{2}f^2 - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2;$$

et binorum factorum posteriorum productum

cos.

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2 \sin.\tfrac{1}{2}f^2 - \sin.\tfrac{1}{2}(a-d)^2 \cos.\tfrac{1}{2}f^2 = \cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos.\tfrac{1}{2}f^2.$$

Substituto autem valore pro $\cos.\frac{1}{2}f^2$ ex §. 31. fit:

$$\begin{aligned}(\cos.\tfrac{1}{2}f^2 - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2)&(\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d + \sin.\tfrac{1}{2}b \sin.\tfrac{1}{2}c)\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d (\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2)\\ &+ \sin.\tfrac{1}{2}b \sin.\tfrac{1}{2}c (\cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2).\end{aligned}$$

Hinc quum sit

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d) = 2\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d, \text{ et}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos.\tfrac{1}{2}(b+c) = 2\sin.\tfrac{1}{2}b \sin.\tfrac{1}{2}c,$$

fiet

$$\begin{aligned}(\cos.\tfrac{1}{2}f^2 - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2)&(\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d + \sin.\tfrac{1}{2}b \sin.\tfrac{1}{2}c)\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d (\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2\\ &+ \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.\tfrac{1}{2}(b+c))\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d \begin{Bmatrix}\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\\ \cos.\tfrac{1}{2}(b+c) + \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\end{Bmatrix}\\ &= 4\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d \begin{Bmatrix}\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a+d-b+c)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+d-b-c)\end{Bmatrix}.\end{aligned}$$

Simili ratione est:

$$\begin{aligned}(\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos.\tfrac{1}{2}f^2)&(\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d + \sin.\tfrac{1}{2}b . \sin.\tfrac{1}{2}c)\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d (\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos.\tfrac{1}{2}(b+c)\cos.\tfrac{1}{2}(b-c))\\ &+ \sin.\tfrac{1}{2}b \sin.\tfrac{1}{2}c (\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos.\tfrac{1}{2}(a+d)\cos.(a-d))\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d (\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos.\tfrac{1}{2}(b+c)\cos.\tfrac{1}{2}(b-c)\\ &+ \cos.\tfrac{1}{2}(a-d)\cos.\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos.\tfrac{1}{2}(a-d)\cos.\tfrac{1}{2}(b+c))\\ &= \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}d \begin{Bmatrix}\cos.\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos.\tfrac{1}{2}(b+c)\\ \cos.\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos.\tfrac{1}{2}(b-c)\end{Bmatrix}\\ &= 4\sin.\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d \begin{Bmatrix}\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\end{Bmatrix}.\end{aligned}$$

Hinc bina haec producta colligendo fiet

$$(\cos.\tfrac{1}{2}f^2-\cos.\tfrac{1}{2}(a+d)^2)(\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2-\cos.\tfrac{1}{2}f^2)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)^2=$$

$$16\sin.\tfrac{1}{2}a^2\sin.\tfrac{1}{2}d^2\begin{pmatrix}\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\end{pmatrix}$$

tum vero quia est

$$\sin.\tfrac{1}{2}f^2=\frac{(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}c+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}d)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}b+\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}d)}{\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c},$$

fiet omnino tang. $R=\frac{M}{2N}$, existente

$$M^2=(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}c+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}d)$$
$$(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}b+\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}d)$$
$$(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)\text{ et}$$

$$N^2=\begin{Bmatrix}\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\end{Bmatrix}.$$

§. 33. Quia in triangulo Sphaerico BAD habetur

$$\sin.\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a-d+f)\sin.\tfrac{1}{2}(f+d-a)}{\sin.a\sin.d}\text{ et}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a+d+f)(\sin.\tfrac{1}{2}(a+d-f)}{\sin.a\sin.d},\text{ erit}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A^2\sin.a\sin.d=\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)^2-\cos.\tfrac{1}{2}f^2=$$

$$4\frac{\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)}{\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c}$$

et $\cos.\tfrac{1}{2}A^2\sin.a\sin.d=$

$$4\frac{\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)}{\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c}.$$

Hinc fiet

$$(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)\cos.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}d\sin.\tfrac{1}{2}A^2$$
$$=\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d);$$

(sin.

$$(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)\cos.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}d\cos.\tfrac{1}{2}A^2$$
$$=\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d),$$

nec non

$$\tan g.\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)}{\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)},$$

ex quibus formulis angulus A per tria quadrilateri latera determinatur. Hic autem consimiles formulae pro reliquis angulis B, D, C tradi possunt. Sic pro angulo D erit

$$(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)\cos.\tfrac{1}{2}b\cos.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}D^2$$
$$=\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(b-c+a-d)\cos.\tfrac{1}{4}(b-c-a+d);$$

$$(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)\cos.\tfrac{1}{2}b\cos.\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}D^2$$
$$=\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d);$$

hinc colligitur:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+D)=\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}D+\cos.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}D$$
$$=\tfrac{\mu}{\nu}(\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a))$$
$$+\tfrac{\mu}{\nu}(\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d))\text{ et}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+D)=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}D-\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}D$$
$$=\tfrac{\mu'}{\nu'}(\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)$$
$$-\tfrac{\mu'}{\nu'}(\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)),$$

existente

$$\mu=\sqrt{\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)};$$

$$\nu=\sqrt{(\cos.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}b\cos.\tfrac{1}{2}c\cos.\tfrac{1}{2}d)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d+\sin\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c)};$$

$$\mu=\sqrt{\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)}$$

$\nu'=\nu$

$y' = v$. Hinc ob

$$2\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)=\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)-\cos.\tfrac{1}{2}(b+c);$$

$$2\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)=\cos.\tfrac{1}{2}(b-c)-\cos.\tfrac{1}{2}(a+d);$$

et

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)-\cos.\tfrac{1}{2}(a+d)=\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d;$$

nec non

$$\cos.\tfrac{1}{2}(b-c)-\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)=\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c,$$

fiet omnino

$$\begin{aligned}&+\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\&+\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\\&=\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d+\sin.\tfrac{1}{2}b\sin.\tfrac{1}{2}c;\end{aligned}$$

ſimilique ratione ob

$$\begin{aligned}&2\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\\&\qquad=\cos.\tfrac{1}{2}(a+d)+\cos.\tfrac{1}{2}(b+c);\\&2\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\\&\qquad=\cos.\tfrac{1}{2}(a-d)+\cos.\tfrac{1}{2}(b-c);\end{aligned}$$

hinc fiet

$$\begin{aligned}&+\cos.\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\\&-\cos.\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos.\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\\&=-\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}d-\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}d;\end{aligned}$$

vnde erit

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+D)$$
$$=\frac{\sqrt{\cos.\frac{1}{4}(a+b+c+d)\cos.\frac{1}{4}(a-b-c+d)\cos.\frac{1}{4}(a-b+c-d)\cos.\frac{1}{4}(a+b-c-d)}}{\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}d},$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+D)$$
$$=-\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{4}(a+b+c-d)\sin.\frac{1}{4}(a+b-c+d)\sin.\frac{1}{4}(a-b+c+d)\sin.\frac{1}{4}(b+c+d-a)}{\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}d}}.$$

Tum

Tum vero facile liquet pro $\sin.\frac{1}{2}(B+C)$ et $\cos.\frac{1}{2}(B+C)$ easdem prodire formulas ac hic pro $\sin.\frac{1}{2}(A+D)$, $\cos.\frac{1}{2}(A+D)$ elicuimus, ex quo redditur manifestum esse $A+D=B+C$, quod etiam alioquin sponte patet. Hincque demum fit

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+B+C+D)=\sin.(A+D)$$

$$=2\sin.\tfrac{1}{2}(A+D)\cos.\tfrac{1}{2}(A+D)=\frac{-2\sqrt{\mu\,\mu'}}{\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}d}.$$

§. 34. Si vsus adhibeatur sequentium formularum:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{4}(a+b+c-d)\,\mathrm{s}.\frac{1}{4}(b+c+d-a)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a+b-c-d)\,\mathrm{cs}\,\frac{1}{4}(a-b+c-d)}{\sin.\frac{1}{4}(a+b-c+d)\,\mathrm{s}.\frac{1}{4}(a-b+c+d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a+b+c+d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a-b-c+d)}},$$

$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{4}(a-b+c+d)\,\mathrm{s}.\frac{1}{4}(b+c+d-a)\cos.\frac{1}{4}(a-b+c-d)\cos.\frac{1}{4}(a-b-c+d)}{\sin.\frac{1}{4}(a+b+c-d)\,\mathrm{s}.\frac{1}{4}(a+b-c+d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a+b+c+d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a+b-c-d)}}$$

$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}D=\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{4}(a-b+c+d)\,\mathrm{si}.\frac{1}{4}(a+b-c+d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(b-c+d-a)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(b-c-d+a)}{\sin.\frac{1}{4}(a+b+c-d)\,\mathrm{si}.\frac{1}{4}(b+c+d-a)\,\mathrm{c}.\frac{1}{4}(a-b+c+d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a-b-c+d)}}$$

$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{4}(a+b+c-d)\,\mathrm{s}.\frac{1}{4}(a+b-c+d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a-b+c-d)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a-b-c+d)}{\sin.\frac{1}{4}(a-b+c+d)\,\mathrm{s}.\frac{1}{4}(b+c+d-a)\,\mathrm{cs}.\frac{1}{4}(a+b+c+d)\,\mathrm{c}.\frac{1}{4}(a+b-c-a)}}$$

sequentes inde eliciuntur relationes:

$$\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}A\;\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}B\;\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}C\;\mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}D=\frac{\cos.\frac{1}{4}(a-b+c-d)^2}{\cos.\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2}.$$

$$\frac{\mathrm{tang}.\frac{1}{2}A\;\mathrm{tang}.\frac{1}{2}B}{\mathrm{tang}.\frac{1}{2}C\;\mathrm{tang}.\frac{1}{2}D}=\frac{\sin.\frac{1}{4}(b+c+d-a)^2}{\sin.\frac{1}{4}(a+b-c+d)^2};$$

$$\frac{\mathrm{tang}.\frac{1}{2}A\;\mathrm{tang}.\frac{1}{2}C}{\mathrm{tang}.\frac{1}{2}B\;\mathrm{tang}.\frac{1}{2}D}=\frac{\sin.\frac{1}{4}(a+b+c-d)^2}{\sin.\frac{1}{4}(a-b+c+d)^2};$$

$$\frac{\mathrm{tang}.\frac{1}{2}A\;\mathrm{tang}.\frac{1}{2}D}{\mathrm{tang}.\frac{1}{2}B\;\mathrm{tang}.\frac{1}{2}C}=\frac{\cos.\frac{1}{4}(a+b-c-d)^2}{\cos.\frac{1}{4}(a-b-c+d)^2}.$$

Hinc

Hinc si breuitatis gratia exprimantur tang. $\frac{1}{2}$ A; tang. $\frac{1}{2}$ B; tang. $\frac{1}{2}$ C; tang. $\frac{1}{2}$ D respectiue per litteras p, q, r, s, fiet,

$$\frac{\operatorname{cos.} \frac{1}{4}(a-b+c-d)}{\operatorname{cos.} \frac{1}{4}(a+b+c+d)} = \sqrt{p\,q\,r\,s}; \quad \frac{\operatorname{cos.} \frac{1}{4}(a+b-c-d)}{\operatorname{cos.} \frac{1}{4}(a-b-c+d)} = \sqrt{\frac{p\,s}{r\,q}};$$

$$\frac{\operatorname{sin.} \frac{1}{4}(b+c+d-a)}{\operatorname{sin.} \frac{1}{4}(a+b-c+d)} = \sqrt{\frac{p\,q}{r\,s}}; \quad \frac{\operatorname{sin.} \frac{1}{4}(a+b+c-d)}{\operatorname{sin.} \frac{1}{4}(a-b+c+d)} = \sqrt{\frac{p\,r}{q\,s}}.$$

Hinc autem colligitur:

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(a+c) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(b+d) = \frac{1-\sqrt{p\,q\,r\,s}}{1+\sqrt{p\,q\,r\,s}};$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(a-c) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(b-d) = \frac{\sqrt{r\,q}-\sqrt{p\,s}}{\sqrt{r\,q}+\sqrt{p\,s}};$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(a-c) \operatorname{cot.} \tfrac{1}{4}(b+d) = \frac{\sqrt{p\,q}-\sqrt{r\,s}}{\sqrt{p\,q}+\sqrt{r\,s}};$$

$$\operatorname{cot.} \tfrac{1}{4}(a+c) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(b-d) = \frac{\sqrt{p\,r}-\sqrt{q\,s}}{\sqrt{p\,r}+\sqrt{q\,s}},$$

indeque

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(a+c) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(a-c) = \frac{1-\sqrt{p\,q\,r\,s}}{1+\sqrt{p\,q\,r\,s}} \cdot \frac{\sqrt{p\,q}-\sqrt{r\,s}}{\sqrt{p\,q}+\sqrt{r\,s}}$$
$$= \frac{(1+r\,s)\sqrt{p\,q}-(1+p\,q)\sqrt{r\,s}}{(1+r\,s)\sqrt{p\,q}+(1+p\,q)\sqrt{r\,s}};$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(b+d) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{4}(b-d) = \frac{1-\sqrt{p\,q\,r\,s}}{1+\sqrt{p\,q\,r\,s}} \cdot \frac{\sqrt{p\,r}-\sqrt{q\,s}}{\sqrt{p\,r}+\sqrt{q\,s}}$$
$$= \frac{(1+q\,s)\sqrt{p\,r}-(1+p\,r)\sqrt{q\,s}}{(1+q\,s)\sqrt{p\,r}+(1+p\,r)\sqrt{q\,s}}.$$

Hinc autem deducitur

$$\operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}c : \operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}a = (1+r\,s)\sqrt{p\,q} : (1+p\,q)\sqrt{r\,s} = \frac{\sqrt{p\,q}}{1+p\,q} : \frac{\sqrt{r\,s}}{1+r\,s} \text{ et}$$

$$\operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}d : \operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}b = (1+q\,s)\sqrt{p\,r} : (1+p\,r)\sqrt{q\,s} = \frac{\sqrt{p\,r}}{1+p\,r} : \frac{\sqrt{q\,s}}{1+q\,s},$$

vnde colligitur

$$\operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}c : \operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}a = \frac{\sqrt{\operatorname{sin.} \frac{1}{2}A \operatorname{sin.} \frac{1}{2}B \operatorname{cos.} \frac{1}{2}A \operatorname{cos.} \frac{1}{2}B}}{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(A-B)} :$$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sin.} \frac{1}{2}C \operatorname{sin.} \frac{1}{2}D \operatorname{cos.} \frac{1}{2}C \operatorname{cos.} \frac{1}{2}D}{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(C-D)}} = \sqrt{\operatorname{sin.} A \operatorname{sin.} B} : \sqrt{\operatorname{sin.} C \operatorname{sin.} D}$$

ob $A-B=C-D$, quae proprietas aliunde quoque demonmonstrari potest. Caeterum quamuis hic quatuor aequationes prodeant pro tangentibus angulorum in quadrilatero, tamen illae non sufficere censendae sunt pro determinandis lateribus a, b, c, d ex datis angulis A, B, D, C, siquidem inter istos angulos ista relatio per se intelligitur supposita, vt sit $A + D = B + C$. Et leui quidem adhibita attentione patet, si anguli quadrilateri supponantur cogniti, inde ipsum quadrilaterum non determinari, id est infinita aderunt quadrilatera, circulis inscriptibilia in quibus iidem insunt anguli.

§. 35. Praeter quadrilatera eius generis ac ABDC, vbi inflexiones angulorum in eundem sensum fiunt, dantur quoque alia eius generis ABCDA, vbi inflexiones angulorum BCD, CDA fiunt in sensum contrarium illi, secundum quem anguli ABC, BAD habentur inflexi. Restat igitur vt nunc quoque examinemus, quomodo ex datis singulis lateribus huiusmodi quadrilateri, circulus derminari queat, cui hoc quadrilaterum inscribi se patitur. Heic autem si arcus AC, BD vt diagonales istius quadrilateri considerentur, erit per Theor. XXI. Tab. III. Fig. 6.

$$\sin.\tfrac{1}{2}b \sin.\tfrac{1}{2}d = \sin.\tfrac{1}{2}e \sin.\tfrac{1}{2}f - \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}c,$$

tum vero sequens quoque habebitur

Theorema XXIV, *quod sit*

$$\sin.\tfrac{1}{2}b^2 = \frac{(\sin.\tfrac{1}{2}e \sin.\tfrac{1}{2}f - \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}c)(\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}f - \sin.\tfrac{1}{2}e \sin.\tfrac{1}{2}c)}{\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}e - \sin.\tfrac{1}{2}c \sin.\tfrac{1}{2}f},$$

cuius demonstratio ita adornatur:

Concipiantur arcus circulorum maximorum AC, BD producti vsque dum sibi inuicem occurrant in K, et ex polo circuli minoris G ducantur in arcus A C, B D arcus circuli maximi normales G M, G L, eritque

$$\text{fin. } KD : \text{fin. } KB = \text{fin. } AD. \text{fin. } DAK : \text{fin. } AB. \text{fin. } BAK, \text{ at}$$

$$\text{fin. } DAK = \frac{\text{fin. } \tfrac{1}{2} DC \text{ cot. } BG}{\text{cof. } \tfrac{1}{2} AD \text{ cof. } \tfrac{1}{2} AC}; \quad \text{fin. } BAK = \frac{\text{fin. } \tfrac{1}{2} BC \text{ cot. } BG}{\text{cof. } \tfrac{1}{2} AB \text{ cof. } \tfrac{1}{2} AC}$$

ideoque

$$\text{fin. } KD : \text{fin. } KB = \text{fin. } \tfrac{1}{2} DC. \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD : \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC \text{ fin. } \tfrac{1}{2} AB;$$

fimilique ratione

$$\text{fin. } KC : \text{fin. } KA = \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC. \text{fin. } \tfrac{1}{2} DC : \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD. \text{fin. } \tfrac{1}{2} AB,$$

ex quo colligitur

$$\text{fin. } BK - \text{fin. } DK : \text{fin. } DK = \text{fin. } \tfrac{1}{2} AB. \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC - \text{fin. } \tfrac{1}{2} DC. \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD : \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD. \text{fin. } \tfrac{1}{2} DC; \text{ fiue}$$

$$2 \text{ cof. } KL. \text{fin. } \tfrac{1}{2} BD : \text{fin. } DK = \text{fin. } \tfrac{1}{2} AB. \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC - \text{fin. } \tfrac{1}{2} DC. \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD : \text{fin } \tfrac{1}{2} AD. \text{fin. } \tfrac{1}{2} DC, \text{ ob}$$

$$\tfrac{1}{2}(BK + DK) = KL, \text{ et } \tfrac{1}{2}(BK - DK) = \tfrac{1}{2} BD.$$

Eadem ratione fit

$$2 \text{ cof. } KM. \text{fin. } \tfrac{1}{2} AC : \text{fin. } CK = \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD. \text{fin. } \tfrac{1}{2} AB - \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC \text{ fin. } \tfrac{1}{2} DC : \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC. \text{fin. } DC$$

et ex his denique fiet

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2} BD : \text{fin. } \tfrac{1}{2} AC = \text{fin. } DK \frac{(\text{fin. } \tfrac{1}{2} AB. \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC - \text{fin. } \tfrac{1}{2} DC. \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD)}{\text{cof. } KL \text{ fin. } \tfrac{1}{2} AD}$$

$$: \text{fin. } CK \frac{(\text{fin. } \tfrac{1}{2} AD \text{ fin. } \tfrac{1}{2} AB - \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC. \text{fin } \tfrac{1}{2} DC)}{\text{cof. } KM \text{ fin. } \tfrac{1}{2} BC}.$$

Atqui eft

$$\text{cof. } KL : \text{cof. } KM = \text{cof. } GM : \text{cof. } GL = \text{cof. } \tfrac{1}{2} BD : \text{cof. } \tfrac{1}{2} AC, \text{ et}$$

fin.

$$\text{fin. } DK : \text{fin. } CK = \text{fin. } ACD : \text{fin. } BDC$$

$$= \frac{\text{fin. } \tfrac{1}{2} AD \text{ cot. } BG}{\text{cof. } \tfrac{1}{2} AC . \text{cof. } \tfrac{1}{2} CD} : \frac{\text{fin. } \tfrac{1}{2} BC . \text{cot. } BG}{\text{cof. } \tfrac{1}{2} BD . \text{cof. } \tfrac{1}{2} CD}$$

$$= \frac{\text{fin. } \tfrac{1}{2} AD}{\text{cof. } \tfrac{1}{2} AC} : \frac{\text{fin. } \tfrac{1}{2} BC}{\text{cof. } \tfrac{1}{2} BD},$$

ex quo omnino concluditur esse

$$\frac{\text{fin. } DK}{\text{cof. } KL . \text{fin. } \tfrac{1}{2} AD} = \frac{\text{fin. } CK}{\text{cof. } KM . \text{fin. } \tfrac{1}{2} BC},$$

hincque fiet interductis denominationibus arcuum,

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2} b : \text{fin. } \tfrac{1}{2} d = \text{fin. } \tfrac{1}{2} a \text{ fin. } \tfrac{1}{2} f - \text{fin. } \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \tfrac{1}{2} e :$$
$$\text{fin. } \tfrac{1}{2} a \text{ fin. } \tfrac{1}{2} e - \text{fin. } \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \tfrac{1}{2} f,$$

vnde liquet id quod in Theoremate est propositum.

§. 36. Si loco denominatoris

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2} a \text{ fin. } \tfrac{1}{2} e - \text{fin. } \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \tfrac{1}{2} f$$

breuitatis gratia scribatur Q, fiet

$$\begin{aligned} Q \text{ cof. } \tfrac{1}{2} b^2 = Q(1 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} b^2) &= \text{fin. } \tfrac{1}{2} a \text{ fin. } \tfrac{1}{2} e - \text{fin. } \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \tfrac{1}{2} f \\ &- \text{fin. } \tfrac{1}{2} f^2 \text{ fin. } \tfrac{1}{2} a \text{ fin. } \tfrac{1}{2} e + \text{fin. } \tfrac{1}{2} a^2 \text{ fin. } \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \tfrac{1}{2} f \\ &+ \text{fin. } \tfrac{1}{2} e^2 \text{ fin. } \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \tfrac{1}{2} f - \text{fin. } \tfrac{1}{2} c^2 \text{ fin. } \tfrac{1}{2} a \text{ fin. } \tfrac{1}{2} e \\ &= \text{fin. } \tfrac{1}{2} a \text{ fin. } \tfrac{1}{2} e (1 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} f^2 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} c^2) \\ &- \text{fin. } \tfrac{1}{2} c \text{ fin. } \tfrac{1}{2} f (1 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} e^2 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} a^2), \end{aligned}$$

vnde ob

$$1 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} f^2 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} c^2 = \text{cof. } \tfrac{1}{2}(f + c) \text{ cof. } \tfrac{1}{2}(f - c); \text{ et}$$
$$1 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} a^2 - \text{fin. } \tfrac{1}{2} e^2 = \text{cof. } \tfrac{1}{2}(a + f) \text{ cof. } \tfrac{1}{2}(f - a),$$

habebitur

$$Q\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}b^2 = \text{fin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{fin}\,\tfrac{1}{2}e\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}(f+c)\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}(f-c)$$
$$-\text{fin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{fin}\,\tfrac{1}{2}f\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}(f+a)\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}(f-a).$$

§. 37. Theorema XXV. *Si ponatur diſtantia* Poli *a peripheria* $BG = R$ *erit nunc tang.* $R = \frac{M}{2N}$, *exiſtente*

$$M^2 = (\text{fin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}f - \text{fin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}c)(\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}f - \text{fin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}c)$$
$$(\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}e - \text{fin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}f),\ \text{et}$$

$$N^2 = \begin{cases}\text{fin.}\tfrac{1}{4}(a+f+c+e)\,\text{fin.}\tfrac{1}{4}(a+f-c-e)\,\text{fin.}\tfrac{1}{4}(a-f-c+e)\,\text{f.}\tfrac{1}{4}(f-c+e-a)\\ \text{cof.}\tfrac{1}{4}(a+f+c-e)\,\text{cf.}\tfrac{1}{4}(a+f-c+e)\,\text{cf.}\tfrac{1}{4}(a-f+c+e)\,\text{cf.}\tfrac{1}{4}(f+c+e-a)\end{cases}$$

Demonſtr. Si conſideretur triangulum A B D, eſt

$$\text{tang.}R = \frac{2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}b}{\sqrt{\text{fin.}\tfrac{1}{2}(a+b+e)\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}(a+b-e)\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}(a-b+e)\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}(b+e-a)}};$$

in denominatore igitur pro cof.$\tfrac{1}{2}b$, fin.$\tfrac{1}{2}b$ eius valores in ſuperioribus allatos introducere conuenit, habebimus igitur denominatorem ita expreſſum:

$$\begin{cases}(\text{fin.}\tfrac{1}{2}(a+e)\text{cof.}\tfrac{1}{2}b+\text{cof.}\tfrac{1}{2}(a+e)\text{f.}\tfrac{1}{2}b)(\text{f.}\tfrac{1}{2}(a+e)\text{cof.}\tfrac{1}{2}b-\text{cof.}\tfrac{1}{2}(a+e)\text{f.}\tfrac{1}{2}b)\\ (\text{fin.}\tfrac{1}{2}(a-e)\text{cof.}\tfrac{1}{2}b+\text{cof.}\tfrac{1}{2}(a-e)\text{f.}\tfrac{1}{2}b)(\text{f.}\tfrac{1}{2}(a-e)\text{cof.}\tfrac{1}{2}b+\text{cof.}\tfrac{1}{2}(a-e)\text{f.}\tfrac{1}{2}b)\end{cases}$$

Priorum binorum factorum productum eſt

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{cof.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}b^2$$
$$= \text{cof.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{cof.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2;$$

et binorum poſteriorum factum

$$-\text{fin.}\tfrac{1}{2}(a-e)^2\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}b^2 + \text{cof.}\tfrac{1}{2}(a-e)^2\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}b^2$$
$$= \text{cof.}\tfrac{1}{2}(a-e)^2 - \text{cof.}\tfrac{1}{2}b^2.$$

Subſtituto nunc pro cof.$\tfrac{1}{2}b^2$ eius valore ex §. antecedenti

$$(\text{cof.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{cof.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2)(\text{fin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}e - \text{fin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}f)$$
$$= \text{fin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}e(\text{cof.}\tfrac{1}{2}(f+c)\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}(f-c) - \text{cof.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2)$$
$$-\text{fin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}f(\text{cof.}\tfrac{1}{2}(e+a)\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}(e-a) - \text{cof.}\tfrac{1}{2}(a+c)^2).$$

Igi-

Igitur cuum sit

$$\cos.\tfrac{1}{2}(e-a)-\cos.\tfrac{1}{2}(e+a)=2\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e \text{ et}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(f-c)-\cos.\tfrac{1}{2}(f+c)=2\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}f,$$

fiet omnino

$$\begin{aligned}&(\cos.\tfrac{1}{2}b^2-\cos.\tfrac{1}{2}(a+e)^2)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e-\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}f)=\\ &\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e(\cos.\tfrac{1}{2}(f+c)\cos.\tfrac{1}{2}(f-c)-\cos.\tfrac{1}{2}(a+e)^2\\ &-\cos.\tfrac{1}{2}(a+e)\cos.\tfrac{1}{2}(f-c)+\cos.\tfrac{1}{2}(a+e)\cos.\tfrac{1}{2}(f+c))\\ &=\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e(\cos.\tfrac{1}{2}(f-c)+\cos.\tfrac{1}{2}(a+e))(\cos.\tfrac{1}{2}(f+c)-\cos.\tfrac{1}{2}(a+e))\\ &=4\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e\sin.\tfrac{1}{4}(a+e+f+c)\sin.\tfrac{1}{4}(a+e-f-c)\\ &\quad\cos.\tfrac{1}{4}(a+e+f-c)\cos.\tfrac{1}{4}(a+e-f+c).\end{aligned}$$

Similique ratione fiet

$$\begin{aligned}&(\cos.\tfrac{1}{2}(a-e)^2-\cos.\tfrac{1}{2}b^2)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e-\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}f)\\ &=4\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e\sin.\tfrac{1}{4}(a-e+f-c)\sin.\tfrac{1}{4}(a-e-f+c)\\ &=\cos.\tfrac{1}{4}(a-e+f+c)\cos.\tfrac{1}{4}(e+f+c-a).\end{aligned}$$

Hinc bina ista producta collectim sumendo fiet

$$(\cos.\tfrac{1}{2}b^2-\cos.\tfrac{1}{2}(a+e)^2)(\cos.\tfrac{1}{2}(a-e)^2-\cos.\tfrac{1}{2}b^2)Q^2=$$
$$16\sin.\tfrac{1}{2}a^2\sin.\tfrac{1}{2}e^2\left\{\begin{array}{l}\sin.\tfrac{1}{4}(a+e+f+c)\sin.\tfrac{1}{4}(a+e-f-c)\\ \sin.\tfrac{1}{4}(a-e+f-c)\sin.\tfrac{1}{4}(a-e-f+c)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a+e+f-c)\cos.\tfrac{1}{4}(a+e-f+c)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(a-e+f+c)\cos.\tfrac{1}{4}(e+f+c-a)\end{array}\right\}$$

vnde si simul pro $\sin.\tfrac{1}{2}b^2$ substituatur eius valor

$$\sin.\tfrac{1}{2}b^2=\frac{(\sin.\tfrac{1}{2}e\sin.\tfrac{1}{2}f-\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}c)(\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}f-\sin.\tfrac{1}{2}e\sin.\tfrac{1}{2}c)}{\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}e-\sin.\tfrac{1}{2}c\sin.\tfrac{1}{2}f},$$

patet expressionem pro tang. R in Theoremate propositam recte sibi constare.

Tab. III. Fig. 7. §. 38. Si quadrilatero A B C D inscriptus fuerit circulus minor L H I K, eius polo in G existente, atque iungantur G A, G B, G C, G D arcubus circulorum maximorum, tumque ducantur arcus circulor. maxim. G H, G I, G K, G L normales ad latera quadrilateri, erunt singuli hi arcus inter se aequales, tumque facile patet angulos L A H, H G L, H B I, H G I, I C K, I G K, L D K, L G K bisecari per arcus G A, G B, G C, G D. Praeterea producantur arcus A D, B C vsque dum inuicem occurrant in E et iungatur E G arcu circuli maximi, vt etiam L I, H K, H L, H I, I K et L K arcubus circulorum maximorum. Per ea igitur quae supra Theoremate XXII demonstrauimus, constat esse:

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}LI^2 = \frac{(\text{fin.}\tfrac{1}{2}HI\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}IK + \text{fin.}\tfrac{1}{2}LK\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}HG)(\text{fin.}\tfrac{1}{2}HI\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}LK + \text{fin.}\tfrac{1}{2}HI\,\text{fi.}IK)}{\text{fin.}\tfrac{1}{2}HL\,.\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}HI + \text{fin.}\tfrac{1}{2}LK\,.\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}IK}.$$

Est vero

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}LI = \text{fin.}LG\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}LGI = \text{fin.}LG\,\text{fin.}LGE,$$

tum vero est

$$\text{fin.}LGE\,\text{cof.}LG = \text{cof.}LEG,$$

ob angulum G L E rectum, ideoque

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}LI = \text{tang.}LG\,.\,\text{cof.}LEG.$$

Simili modo fiet

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}HL = \text{fin}\,LG\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}LGH = \text{tang.}LG\,.\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}HAL;$$
$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}HI = \text{fin.}LG\,.\,\text{fin}\tfrac{1}{2}HGI = \text{tang.}LG\,.\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}HBI;$$
$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}IK = \text{fin.}LG\,.\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}IGK = \text{tang.}LG\,.\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}ICK;$$
$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}LK = \text{fin.}LG\,.\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}LGK = \text{tang.}LG\,.\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}LDK;$$

vnde si breuitatis gratia anguli, H A L, H B I, I C K, L D K, LDK, LEG exprimantur per A, B, C, D, E, fiet

$$\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E^2 = \frac{(\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}A\,.\,\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}D)(\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}D + \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}C)}{\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}C\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}D}.$$

§. 39. Theorema XXVI. *Constructione prioris §. adhibita, si arcus* LG *exprimatur per* R' *erit* $\operatorname{tang.} R' = \frac{2N}{2M}$, *existente*

$$M^2 = (\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}D)(\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}D + \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}C)$$
$$(\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}C\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}D) \text{ et}$$

$$N^2 = -\left\{\begin{array}{r} \operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D) \\ \operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A) \\ \operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D) \\ \operatorname{cos.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D) \end{array}\right\}.$$

Demonstratio. In triangulo ABE fit per Theorema nostrum XVIII.

$$\operatorname{tang.}R' = \frac{\sqrt{-\operatorname{cs.}\tfrac{1}{2}(A+B+E)\operatorname{cs.}\tfrac{1}{2}(A+B-E)\operatorname{cs.}\tfrac{1}{2}(A-B+E)\operatorname{cs.}\tfrac{1}{2}(B+E-A)}}{2\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E}.$$

Euoluatur nunc quadratum numeratoris in hac expressione, quod igitur erit

$$-\left\{\begin{array}{l} (\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E - \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}F) \\ (\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E + \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}E) \\ (\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E - \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}(A-E)\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}E) \\ (\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E + \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}E) \end{array}\right\}$$

$$= -\left\{\begin{array}{l} (\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E^2) - \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}E^2) \\ (\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)^2\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E^2) - \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)^2\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}E^2) \end{array}\right\}$$

Loco primi factoris adhiberi potest,

$$\operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E^2 - \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2 = \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}E^2 - 1 + \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2;$$

 et

et loco posterioris

$$\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}E^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sin.}(A-B)^2 = \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}E^2 - 1 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)^2,$$

hinc igitur si breuitatis gratia loco

$$\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A\;\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\;\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D$$

scribatur Q, fiet

$$\begin{aligned}
Q(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}E^2 - \mathrm{sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2) &= \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A^2\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D \\
&+ \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D^2\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C^2\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B \\
&+ \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B^2\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D - \mathrm{cs.}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{c.}\tfrac{1}{2}B + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{cs.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2 \\
&- \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2 \\
&= \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B\,(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D^2 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C^2 - 1 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B^2)) \\
&+ \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A^2 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B^2 - 1 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2).
\end{aligned}$$

Atqui est

$$\begin{aligned}
\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D^2 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C^2 - 1 &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{cos.}D + \mathrm{cos.}C) \\
&= \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(D+C)\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(D-C);
\end{aligned}$$

similique ratione

$$\begin{aligned}
\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A^2 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B^2 - 1 &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{cos.}A + \mathrm{cos.}B) \\
&= \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B),
\end{aligned}$$

tumque fiet

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A^2 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B^2 - 1 + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2) \\
&\quad= \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B) + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)) \\
&\quad= 2\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B) \\
&\quad= \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}B\left\{\begin{array}{l}\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(C-D) \\ +\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(C+D)\end{array}\right\}\ \text{ob}
\end{aligned}$$

$$2\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}D = \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(C-D) + \mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}(C+D);$$

hinc substitutione facta, fiet

cos.

$$\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}C^2+\cos.\tfrac{1}{2}D^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B^2))$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D\,(\cos.\tfrac{1}{2}A^2+\cos.\tfrac{1}{2}B^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)^2)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)\cos.\tfrac{1}{2}(C-D))$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)^2+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B))$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B))$$
$$=4\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)$$
$$\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)).$$

Tum vero simili ratione ostenditur fore pro posteriori factore

$$Q\,(\cos.\tfrac{1}{2}E^2+\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}D^2+\cos.\tfrac{1}{2}C^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B^2))$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D\,(\cos.\tfrac{1}{2}A^2+\cos.\tfrac{1}{2}B^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(D+C)\cos.\tfrac{1}{2}(D-C)+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\cos.\tfrac{1}{2}(D-C)$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\cos.\tfrac{1}{2}(D+C)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B))$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B))$$
$$=4\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)$$
$$\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D).$$

Hincque collectim sumendo obtinetur:

$$-Q^2(\cos.\tfrac{1}{2}E^2-\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)^2)(\cos.\tfrac{1}{2}E^2-\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)$$
$$=-16\cos.\tfrac{1}{2}A^2\cos.\tfrac{1}{2}B^2\left\{\begin{array}{l}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\end{array}\right\}$$
$$=+16\cos.\tfrac{1}{2}A^2\cos.\tfrac{1}{2}B^2.N^2,$$

 vnde

vnde quum ſit

$$\text{tang.}\, R'^2 = -\frac{(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)^2)(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)^2)}{4\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2}$$

et $\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 = \frac{M}{Q^2}$, fiet omnino

$$\text{tang.}\, R'^2 = -Q^2\frac{(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)^2)(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)^2)}{4\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2\,.\,M}$$

$$= \frac{16\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2\,.\,N^2}{4\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2\,.\,M^2};$$

proinde $\text{tang.}\, R'^2 = \frac{4N^2}{M}$.

§. 40. Vti articulo 34 obſeruauimus ex datis quadrilateri angulis circulum non determinari, qui huic quadrilatero in ſuperficie Sphaerica circumſcribi poteſt, ita viciſſim ex datis lateribus, circulus non determinatur iſti quadrilatero inſcriptus; quippe quum pro quadrilatero $ABCD$ circulo $LHIK$ circumſcripto eſt

$$AD + BC = AB + DC;$$

ita vt datis tribus horum laterum quartum per ſe determinetur; ideoque quum infinita conſtrui poſſint quadrilatera, quae ex iſtis quatuor lateribus componuntur, patet circulum quadrilatero inſcriptum ex meris lateribus non determinari. Caeterum heic quoque obſeruari meretur eſſe angulos ad polum conſtitutos AGB, BGC, CGD, DGA, ita comparatos vt bini oppoſiti AGB, DGC vel AGD, AGC faciant ſummam aequalem duobus rectis, eſt enim $AGB = \tfrac{1}{2}LGI$ et $DGC = \tfrac{1}{2}(360 - LGI)$, ideoque $AGB + DGC = 180°$.

§. 41.

§. 41. Si in triangulo Sphaerico ABE latus AB per a exprimatur, erit ex cognitis proprietatibus triangulor. Sphaericorum:

$$\frac{cof. E + cof. A\ cof. B}{fin. A\ fin. B} = cof.\ a;$$

hincque

$$\frac{cof. E + cof. (A-B)}{fin. A\ fin. B} = 2\ cof. \tfrac{1}{2} a^2 - \frac{cof. E - cof. (A+B)}{fin. A\ fin. B} = 2\ fin. \tfrac{1}{2} a^2;$$

fiue ob $cof. E = 2\ cof. \tfrac{1}{2} E^2 - 1$;

$$cof. (A-B) = 1 - 2\ fin. \tfrac{1}{2} (A-B)^2;$$

$$cof. (A+B) = 2\ cof. \tfrac{1}{2} (A+B)^2 - 1,$$

erit

$$cof. \tfrac{1}{2} a^2 = \frac{cof. \tfrac{1}{2} E^2 - fin. \tfrac{1}{2} (A-B)^2}{fin. A\ fin. B};$$

$$fin. \tfrac{1}{2} a^2 = -\frac{cof. \tfrac{1}{2} E^2 - cof. \tfrac{1}{2} (A+B)^2 + 1}{fin. A\ fin. B}.$$

At fupra artic. 29 demonftrauimus effe

$$Q\,(cof. \tfrac{1}{2} E^2 - fin. \tfrac{1}{2} (A+B)^2)$$
$$= 4\,cof. \tfrac{1}{2} A\ cof. \tfrac{1}{2} B \begin{Bmatrix} cof. \tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\ cof. \tfrac{1}{4}(A+B-C-D) \\ cof. \tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\ cof. \tfrac{1}{4}(A+B-C+D) \end{Bmatrix} \text{et}$$

$$Q\,(cof. \tfrac{1}{2} E^2 - fin. \tfrac{1}{2} (A-B)^2)$$
$$= 4\,cof. \tfrac{1}{2} A\ cof. \tfrac{1}{2} B \begin{Bmatrix} cof. \tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\ cof. \tfrac{1}{4}(B+C+D-A) \\ cof. \tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\ cof. \tfrac{1}{4}(A-B-C+D) \end{Bmatrix}.$$

Hincque patet effe

$$(cof. \tfrac{1}{2} A\ cof. \tfrac{1}{2} B + cof. \tfrac{1}{2} C\ cof. \tfrac{1}{2} D)\ fin. \tfrac{1}{2} A\ fin. \tfrac{1}{2} B\ cof. \tfrac{1}{2} a^2$$
$$= \begin{Bmatrix} cof. \tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\ cof. \tfrac{1}{4}(B+C+D-A) \\ cof. \tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\ cof. \tfrac{1}{4}(A-B-C+D) \end{Bmatrix} \text{et}$$

$$(\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D)\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B\sin.\tfrac{1}{2}a^2$$
$$=-\left\{\begin{matrix}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\end{matrix}\right\}\text{ et}$$
$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}a^2=-\frac{\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\mathrm{cs}.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\,\mathrm{cs}.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\mathrm{cs}.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)}{\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,\mathrm{cs}.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\,\mathrm{cs}.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\,\mathrm{cs}.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)}$$

§. 42. Deinde quum simili ratione posito arcu $DC=c$, demonstretur esse:

$$(\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D)\sin.\tfrac{1}{2}C\sin.\tfrac{1}{2}D\cos.\tfrac{1}{2}c^2$$
$$=\left\{\begin{matrix}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\end{matrix}\right\}$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D)\sin.\tfrac{1}{2}C\sin.\tfrac{1}{2}D\sin.\tfrac{1}{2}c^2$$
$$=-\left\{\begin{matrix}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{matrix}\right\},\text{ fiet}$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(a+c)=\sin.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}c+\cos.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}c=$$
$$\frac{\mu}{\nu}\left\{\begin{matrix}+\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ +\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)+\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{matrix}\right\}\text{ et}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(a+c)=\cos.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}c-\sin.\tfrac{1}{2}a\sin.\tfrac{1}{2}c=$$
$$\frac{\mu'}{\nu'}\left\{\begin{matrix}+\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\\ +\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\end{matrix}\right\};$$

existente

$$\mu=\sqrt{-\left\{\begin{matrix}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\end{matrix}\right\}};$$
$$\mu'=\sqrt{\left\{\begin{matrix}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{matrix}\right\}};$$
$$\nu=\sqrt{\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B\sin.\tfrac{1}{2}C\sin.\tfrac{1}{2}D(\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D)}.$$

Atqui ob

2 cos.

$$2\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)=\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)+\cos.\tfrac{1}{2}(C-D);$$
$$2\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)=\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)+\cos.\tfrac{1}{2}(C+D);$$

tumque

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)=2\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B \text{ et}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)+\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)=\cos.\tfrac{1}{2}C\,.\cos.\tfrac{1}{2}D,$$

fit omnino

$$\left\{\begin{array}{l}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{array}\right\}$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B+\cos.\tfrac{1}{2}C\,c\text{ſ}.\tfrac{1}{2}D.$$

Simili ratione

$$2\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)=\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)+\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)$$
$$2\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)=\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)+\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)$$

vnde haec productorum ſumma denuo

$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D,$$

hinc ergo colligitur:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(a+c)=\sqrt{\frac{-c.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)c.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)c.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)c.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)}{\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B\sin.\tfrac{1}{2}C\sin.\tfrac{1}{2}D}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a+c)=\sqrt{\frac{c\text{ſ}.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)c.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)c.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)c.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B\sin.\tfrac{1}{2}C\sin.\tfrac{1}{2}D}}$$

et denique

$$\sin.(a+c)=\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\frac{2\sqrt{\mu\mu'}}{\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B\sin.\tfrac{1}{2}C\sin.\tfrac{1}{2}D}.$$

Caeterum relationes conſimiles iis, quas artic. 34 recenſuimus hinc quoque deduci poſſent, quibus tamen recenſendis non eſt vt immoremur.

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS ANALYTICI NON PARVM CVRIOSI.

Auctore

NICOLAO FVSS.

§. 1.

Problema, cuius Solutionem hic breuiter exponere animus est, spectat transformationem expressionis cuiusdam irrationalis, ad quam me Quaestio quaedam perduxerat, de qua alia occasione sermonem facere mecum constitui; postulabat ea, vt haec expressio:

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1+4t)}}\left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1}$$

in seriem euolueretur secundum potestates ipsius t procedentem, quod negotium, postquam variis modis frustra tentassem, tandem sequenti modo ex voto successit.

§. 2.

§. 2 Cum ſit

$$s\sqrt{(1+4t)} = \left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1}$$

poſui

$$\left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1} = s\sqrt{(1+4t)} = z,$$

ita vt

$$lz = (n+1)\left(l(1+\sqrt{1+4t}) - l\,2\right),$$

ideoque

$$\frac{dz}{z} = \frac{2(n+1)\,dt}{\sqrt{1+4t}\,(1+\sqrt{1+4t})} = \frac{(n+1)(\sqrt{1+4t}-1)\,dt}{2t\sqrt{(1+4t)}},$$

quam aequationem hoc modo repraeſentaui:

$$\frac{dz}{z} - \frac{(n+1)\,dt}{2t} = -\frac{(n+1)\,dt}{2t\sqrt{(1+4t)}}.$$

Nunc poſui

$$\frac{dz}{z} - \frac{n+1}{2}\,\frac{dt}{t} = \frac{dv}{v},\ \text{ita vt}$$

$$lz - \tfrac{1}{2}(n+1)\,lt = lv,$$

ideoque

$$v = \frac{z}{t^{\frac{1}{2}(n+1)}},\ \text{ſiue}$$

$$z = v\,t^{\frac{1}{2}(n+1)},\ \text{ergo}$$

$$s = \frac{z}{\sqrt{(1+4t)}} = \frac{v\,t^{\frac{1}{2}(n+1)}}{\sqrt{(1+4t)}}.$$

Tum autem habebam $\frac{dv}{v} = -\frac{(n+1)\,dt}{2t\sqrt{(1+4t)}}$, ſiue ſumtis vtrinque quadratis $\frac{dv^2}{vv} = \frac{(n+1)^2\,dt^2}{4tt(1+4t)}$, ita vt nunc tractanda ſit haec aequatio:

$$4tt(1+4t)\,dv^2 = (n+1)^2\,vv\,dt^2.$$

§. 3. Hanc iam aequationem differentialem denuo differentiemus, sumto elemento dt constante, et prodibit sequens aequatio:

$$4tt(1+4t)ddv+(4t+24tt)dtdv=(n+1)^2 v dt^2,$$

quae diuisa per $4v$ abit in hanc:

$$tt(1+4t)\frac{ddv}{v}+(t+6tt)dt.\frac{dv}{v}=\frac{(n+1)^2}{4}dt^2.$$

§. 4. Iam vero est

$$v=\frac{z}{t^{\frac{1}{2}(n+1)}}=\frac{s\sqrt{(1+4t)}}{t^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

ideoque

$$lv=ls+\tfrac{1}{2}l(1+4t)-\tfrac{1}{2}(n+1)lt,$$

consequenter

$$\frac{dv}{v}=\frac{ds}{s}+\frac{2dt}{1+4t}-\tfrac{1}{2}(n+1)\frac{dt}{t},$$

et denuo differentiando

$$\frac{ddv}{v}-\frac{dv^2}{vv}=\frac{dds}{s}-\frac{ds^2}{ss}-\frac{8dt^2}{(1+4t)^2}+\tfrac{1}{2}(n+1)\frac{dt^2}{tt},$$

cui aequationi si addatur haec:

$$\frac{dv^2}{vv}=\frac{ds^2}{ss}+\frac{4dtds}{s(1+4t)}-\frac{(n+1)dtds}{ts}+\frac{4dt^2}{(1+4t)^2}$$
$$-\frac{2(n+1)dt^2}{t(1+4t)}+\tfrac{1}{4}(n+1)^2.\frac{dt^2}{tt},$$

prodibit

$$\frac{ddv}{v}=\frac{dds}{s}+\frac{4dtds}{s(1+4t)}-\frac{(n+1)dtds}{ts}-\frac{4dt^2}{(1+4t)^2}$$
$$+\frac{(n+1)(n+3)dt^2}{4tt}-\frac{2(n+1)dt^2}{t(1+4t)}.$$

Substituantur iam loco $\frac{ddv}{v}$ et $\frac{dv}{v}$ valores modo inuenti in aequatione nostra, fietque si omnia membra rite contrahantur:

$$\left.\begin{matrix} tt(1+4t)\frac{dds}{s} - [(4n-6)tt+nt]\,dt\,.\frac{ds}{s} \\ +[(nn-n)t-\frac{1}{4}(n+1)^2]\,dt^2 \end{matrix}\right\} = \frac{(n+1)^2}{4}\,.\,dt^2$$

quae aequatio ducta in $\frac{s}{t\,dt^2}$ et in ordinem redacta hanc formam induit:

$$t(1+4t)\frac{dds}{dt^2} - [(4n-6)t+n]\frac{ds}{dt} + (nn-n)s = 0,$$

quae iam forma ad transformationem nobis propositam satis est idonea.

§. 5. Iam fingatur pro s haec series:

$$s = 1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.},$$

eritque

$$\frac{ds}{dt} = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 + 4\delta t^3 + \text{etc., et}$$
$$\frac{dds}{dt^2} = 2\beta + 6\gamma t + 12\delta t^2 + 20\varepsilon t^3 + \text{etc.}$$

vnde pro aequatione nostra fiet:

$$\begin{array}{rl}
t\frac{dds}{dt^2} = & 2\beta t + 6\gamma t^2 + 12\delta t^3 + 20\varepsilon t^4 + \text{etc.} \\
4tt\frac{dds}{dt^2} = & + 8\beta t^2 + 24\gamma t^3 + 48\delta t^4 + \text{etc.} \\
-4nt\frac{ds}{dt} = & -4\alpha nt - 8\beta nt^2 - 12\gamma nt^3 - 16\delta nt^4 - \text{etc.} \\
+6t\frac{ds}{dt} = & + 6\alpha t + 12\beta t^2 + 18\gamma t^3 + 24\delta t^4 - \text{etc.} \\
-n\frac{ds}{dt} = & -n\alpha - 2n\beta t - 3n\gamma t^2 - 4n\delta t^3 - 5n\varepsilon t^4 - \text{etc.} \\
+nns = & +nn + \alpha nnt + \beta nnt^2 + \gamma nnt^3 + \delta nnt^4 + \text{etc.} \\
-ns = & -n - \alpha nt - \beta nt^2 - \gamma nt^3 - \delta nt^4 - \text{etc.}
\end{array}$$

§. 6. Cum igitur aequatio nostra nihilo aequetur, necesse est vt summae singulorum membrorum seorsim nihilo aequales efficiantur, vnde deducuntur sequentes determinationes:

$$nn - na - n = 0$$
$$nn\alpha - 5n\alpha - 2n\beta + 6\alpha + 2\beta = 0$$
$$nn\beta - 9n\beta - 3n\gamma + 20\beta + 6\gamma = 0$$
$$nn\gamma - 13n\gamma - 4n\delta + 42\gamma + 12\delta = 0$$
$$nn\delta - 17n\delta - 5n\varepsilon + 72\delta + 20\varepsilon = 0$$
$$nn\varepsilon - 21n\varepsilon - 6n\zeta + 110\varepsilon + 30\zeta = 0$$

etc.

ex quibus aequationibus ſequentes deducuntur valores coefficientium α, β, γ, etc.

$$\alpha = \frac{nn - n}{n}, \quad \text{ſiue } \alpha = \frac{n-1}{1},$$
$$\beta = \frac{(nn - 5n + 6)\alpha}{2(n-1)}, \quad \text{ſiue } \beta = \frac{(n-2)(n-3)}{2(n-1)}\alpha,$$
$$\gamma = \frac{(nn - 9n + 20)\beta}{3(n-2)}, \quad \text{ſiue } \gamma = \frac{(n-4)(n-5)}{3(n-2)}\beta,$$
$$\delta = \frac{(nn - 13n + 42)\gamma}{4(n-3)}, \quad \text{ſiue } \delta = \frac{(n-6)(n-7)}{4(n-3)}\gamma,$$
$$\varepsilon = \frac{(nn - 17n + 72)\delta}{5(n-4)}, \quad \text{ſiue } \varepsilon = \frac{(n-8)(n-9)}{5(n-4)}\delta,$$

etc. etc.

§. 7. Quilibet igitur horum coëfficientium ex antecedente facillime determinatur; vnde ſi ſucceſſiue ſubſtituantur, prodibit

$$\alpha = \frac{n-1}{1}$$
$$\beta = \frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}$$
$$\gamma = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3}$$
$$\delta = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\,2.\,3.\,4}$$
$$\varepsilon = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$

etc.

quos

quos igitur valores, ſi in vſum vocemus modum ſignandi ab Illuſtri quondam *EVLERO* pro vnciis poteſtatum binomii receptum, hoc modo concinne exprimere licet:

$$\alpha = \left[\tfrac{n-1}{1}\right];\ \beta = \left[\tfrac{n-2}{2}\right];\ \gamma = \left[\tfrac{n-3}{3}\right];\ \delta = \left[\tfrac{n-4}{4}\right];\ \text{etc.}$$

quibus inuentis formula noſtra propoſita

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1+4t)}} \left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1}$$

ſequenti modo per ſeriem infinitam exprimetur:

$$s = 1 + \left[\tfrac{n-1}{1}\right] t + \left[\tfrac{n-2}{2}\right] t^2 + \left[\tfrac{n-3}{3}\right] t^3 + \left[\tfrac{n-4}{4}\right] t^4 + \text{etc.}$$

§. 7. Quod ſi igitur propoſita fuerit haec aequatio differentialis ſecundi gradus:

$$t(1+4t)\frac{dds}{dt^2} - [(4n-6)t+n]\frac{ds}{dt} + n(n-1)s = 0,$$

eius integrale duplici modo aſſignari poterit; finite ſcilicet erit

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1+4t)}} \left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1};$$

tum vero per feriem infinitam integrale etiam hoc modo exprimitur:

$$s = 1 + \left[\tfrac{n-1}{1}\right] t + \left[\tfrac{n-2}{2}\right] t^2 + \left[\tfrac{n-3}{3}\right] t^3 + \left[\tfrac{n-4}{4}\right] t^4 + \text{etc.}$$

§. 9. Si ponatur $\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2} = x$, cum hinc fiat $\sqrt{(1+4t)} = 2x-1$, erit $s = \dfrac{x^{n+1}}{2x-1}$; at feries noſtra, ob $t = xx - x$, transformatur in hanc:

$$s = \frac{x^{n+1}}{2x-1} = 1 + [\tfrac{n-1}{1}](xx-x) + [\tfrac{n-2}{2}](xx-x)^2$$
$$+ [\tfrac{n-3}{3}](xx-x)^3 + [\tfrac{n-4}{4}](xx-x)^4 + \text{etc.}$$

Sin autem in aequatione differentio-differentiali ſtatuatur $t = xx - x$, elementum dt non amplius conſtans aſſumere licet. Hac igitur conditione omiſſa loco $\frac{dds}{dt^2}$ ſcribi debet $\frac{1}{dt} \cdot d \cdot \frac{ds}{dt}$. Cum igitur ſit $t = xx - x$, ſumto dx conſtanti erit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{(2x-1)dx}$$
$$d \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dds}{(2x-1)dx} - \frac{2ds}{(2x-1)^2} \text{ et}$$
$$\frac{dds}{dt^2} = \frac{1}{dt} \cdot d \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dds}{(2x-1)^2 dx^2} - \frac{2ds}{(2x-1)^3 dx},$$

quibus ſubſtitutis aequatio illa fit

$$x(x-1)\frac{dds}{dx^2} - \left(\frac{4(n-1)(xx-x)+n}{2x-1}\right)\frac{ds}{dx} + n(n-1)s = 0$$

cui igitur ſatisfacere debet iſte valor: $s = \frac{x^{n+1}}{2x-1}$, quod reuera euenire ita oſtenditur.

§. 10. Cum ſit $s = \frac{x^{n+1}}{2x-1}$, habebimus

$$\frac{ds}{dx} = \frac{(n+1)x^n}{2x-1} - \frac{2x^{n+1}}{(2x-1)^2};$$
$$\frac{dds}{dx^2} = \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2x-1} - \frac{4(n+1)x^n}{(2x-1)^2} + \frac{8x^{n+1}}{(2x-1)^3},$$

quibus in illa aequatione ſubſtitutis prodibit iſta aequalitas:

$+n$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{n(n+1)x^{n+1}}{2x-1}-\frac{4(n+1)x^{n+2}}{(2x-1)^2}+\frac{8x^{n+1}}{(2x-1)^3}-\frac{n(n+1)x^n}{2x-1}\\
+\frac{4(n+1)x^{n+1}}{(2x-1)^2}-\frac{8x^{n+2}}{(2x-1)^3}+\frac{8(n-1)x^{n+3}}{(2x-1)^3}-\frac{n(n+1)x^n}{(2x-1)^2}\\
+\frac{4(nn-1)x^{n+1}}{(2x-1)^2}-\frac{4(nn-1)x^{n+2}}{(2x-1)^2}\\
+\frac{2nx^{n+1}}{(2x-1)^3}-\frac{8(n-1)x^{n+2}}{(2x-1)^3}\\
+\frac{n(n-1)x^{n+1}}{2x-1}
\end{array}\right\}=0.$$

Quod si iam hanc aequationem diuidamus per x^n et multiplicemus per $(2x-1)^3$, terminis secundum potestates ipsius x ordinatis erit

$$\left.\begin{array}{l}
8nx^3-xx\,[4n(n+1)(2x-1)+8n]\\
-x\,[2nn(2x-1)^2+4n(n+1)(2x-1)+2n]\\
-2n(n+1)(2x-1)x
\end{array}\right\}=0,$$

et si omnia euoluantur prodibit:

$$\left.\begin{array}{l}
8nx^3-8nnx^3+4nnxx+4nxx+2nnx-2nx\\
-8nx^3+8nnx^3-8nnxx-8nxx-2nnx+2nx\\
\qquad\qquad+4nnxx+4nnx
\end{array}\right\}=0,$$

quae aequatio cum sit identica, manifesto declarat valorem $s=\frac{x^{n+1}}{2x-1}$ reuera satisfacere aequationi nostrae differentio-differentiali

$$x(x-1)\frac{dds}{dx^2}-\left(\frac{4(n-1)(xx-x)+n}{2x-1}\right)\frac{ds}{dx}+n(n-1)s=0,$$

quemadmodum supra §. 9. inuenimus.

§. 11.

§. 11. Aequationis noſtrae differentio-differentialis membrum ſecundum, quod eſt

$$-\left(\frac{4(n-1)(xx-x)+n}{2x-1}\right)\frac{ds}{dx},$$

diſcerpatur in has partes:

$$-\frac{n}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}-\frac{4n(xx-x)}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}+\frac{4(xx-x)}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}$$

ſiue in iſtas:

$$-\frac{n}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}(1+4xx-4x)+\frac{4(xx-x)}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx},$$

quo facto aequatio in hanc formam mutabitur:

$$\left.\begin{aligned}(xx-x)\,dds-n(2x-1)\,dx\,ds+\frac{4(xx-x)\,dx\,ds}{2x-1}\\+n(n-1)\,s\,dx^2\end{aligned}\right\}=0,$$

cuius integrale particulare vidimus eſſe $s=\frac{x^{n+1}}{2x-1}$, eius vero integrale completum eſt

$$s=\frac{A\,x^{n+1}+B(1-x)^{n+1}}{2x-1},$$

quod ita oſtenditur.

§. 12. Statuatur $s=\frac{y}{2x-1}$, eritque

$ds=\frac{dy}{2x-1}-\frac{2y\,dx}{(2x-1)^2}$ et

$dds=\frac{ddy}{2x-1}-\frac{4dx\,dy}{(2x-1)^2}+\frac{8y\,dx^2}{(2x-1)^3}$,

quibus in aequatione illa ſubſtitutis fiet

$$\left.\begin{aligned}\frac{(xx-x)}{2x-1}ddy-\frac{4(xx-x)}{(2x-1)^2}dx\,dy+\frac{8(xx-x)}{(2x-1)^3}y\,dx^2\\-n\,dx\,dy\qquad+\frac{2ny\,dx^2}{2x-1}\\+\frac{4(xx-x)\,dx\,dy}{(2x-1)^2}-\frac{8(xx-x)}{(2x-1)^2}y\,dx^2\\+\frac{n(n-1)y\,dx^2}{2x-1}\end{aligned}\right\}=0,$$

quae

quae aequatio contrahitur in hanc:

$$\frac{(xx-x)}{2x-1}ddy - ndxdy + \frac{n(n+1)}{2x-1}ydx^2 = 0,$$

siue multiplicando per $2x-1$ erit

$$xxddy - xddy - 2nxdxdy + ndxdy + n(n+1)ydx^2 = 0.$$

§. 13. Quod si iam ista aequatio diuidatur per x^{n+1}, ea sponte fit integrabilis; prodit enim

$$\frac{ddy}{x^{n-1}} - \frac{ddy}{x^n} - \frac{2ndxdy}{x^n} + \frac{ndxdy}{x^{n+1}} + \frac{n(n+1)ydx^2}{x^{n+1}} = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{dy}{x^{n-1}} - \frac{(n+1)ydx}{x^n} - \frac{dy}{x^n} = \alpha, \text{ siue}$$

$$\frac{dy(x-1)}{x^n} - \frac{(n+1)ydx}{x^n} = \alpha,$$

vel etiam

$$dy - \frac{(n+1)ydx}{x-1} = \frac{\alpha x^n dx}{x-1},$$

quae aequatio ducta in $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$ integrabilis redditur. Erit enim

$$y = \alpha(1-x)^{n+1}\int\frac{x^n dx}{(1-x)^{n+2}}.$$

At vero

$$\alpha\int\frac{x^n dx}{(1-x)^{n+2}} = \frac{Ax^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} + B,$$

vnde deducitur

$$y = Ax^{n+1} + B(1-x)^{n+1} = s(2x-1),$$

ergo

$$s = \frac{A x^{n+1} + B (1 - x)^{n+1}}{2x - 1}.$$

Ex hoc integrali completo autem integrale illud particulare elicitur ſumendo $A = 1$ et $B = 0$.

§. 14. Reuertamur ad aequationem infinitam ſupra inuentam pro valore

$$s = \frac{x^{n+1}}{2x-1} = 1 + [\tfrac{n-1}{1}](xx - x) + [\tfrac{n-2}{2}](xx - x)^2$$
$$+ [\tfrac{n-3}{3}](xx - x)^3 + [\tfrac{n-4}{4}](xx - x)^4 + \text{etc.}$$

vbi, ſi ſumatur $x = 0$, ingens ſe manifeſtat Paradoxon, cum hoc caſu fiat $0 = 1$. Quin etiam, ſi x non euaneſcens, ſed tantum infinite paruum ſtatuatur, idem incommodum locum habet, cum fiat $\frac{\omega^{n+1}}{2\omega - 1} = \frac{1}{2}\omega^n = 1$, ita vt poteſtas minimi ω quantitati finitae aequetur, quod certe abſurdum eſt. Hoc autem Paradoxon penitus diluetur, ſi conſideretur eſſe $x = \frac{1 + \sqrt{(1 + 4t)}}{2}$, ideoque nullum dari valorem pro t, qui reddat quantitatem x euaneſcentem: minimus enim valor, qui pro t aſſumi poteſt, eſt $t = -\frac{1}{4}$, quo caſu fit $x = \frac{1}{2}$. Poſito autem $t = -\frac{1}{4}$, ſiue $x = \frac{1}{2}$ et $n = 0$, prodit haec ſummatio:

$$\infty = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{2.3}{1.2} \cdot \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{3.4.5}{1.2.3} \cdot \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{4.5.6.7}{1.2.3.4} \cdot \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Quicquid autem ſit n ſemper erit

$$1 - [\tfrac{n-1}{1}]\tfrac{1}{4} + [\tfrac{n-2}{2}] \cdot \tfrac{1}{4^2} - [\tfrac{n-3}{3}] \cdot \tfrac{1}{4^3} + [\tfrac{n-4}{4}] \cdot \tfrac{1}{4^4} - \text{etc.} = \infty,$$

quod nihil abſurdi in ſe complectitur.

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE DESCENSV BACVLI SVPER HYPOMOCHLIO CYLINDRICO FIXO DELABENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Referat tabula planum verticale, in quo detur circulus CcA, sectionem circuli horizontalis fixi exhibens, super quo baculus $FfGg$ incumbens delabatur, qui elapso tempore t situm teneat in figura repraesentatum, vbi circulum tangat in puncto A, ita vt, ducta per centrum circuli C recta verticali cCP, baculus ab ea declinet angulo $cCA = \Phi$, ac ponatur radius huius circuli seu cylindri $CA = a$. Tum vero reperiatur baculi centrum grauitatis in M, vnde intra baculum secundum longitudinem ducatur recta MB, ita vt interuallum AB referat semicrassitiem baculi, quae vocetur $AB = b$, at breuitatis gratia ponatur distantia $CB = a + b = c$. Praeterea vero vocetur distantia $MB = s$, ex Tab. I. Fig. 10.

 qua

qua intelligitur, quovsque baculus labendo iam peruenerit; quandoquidem manifestum est, si tam angulus $cCA = \Phi$ quam istud interuallum $MB = s$ euanescerent, tum baculum in puncto c cylindro incumbere et in aequilibrio fore constitutum. Quibus positis quaestio huc redit, vt ad datum quoduis tempus t tam angulus Φ quam interuallum s assignari possit.

§. 2. Longitudinem baculi hic non in computum duco, quoniam per se euidens est, cum eius superior terminus F cylindrum fuerit praetergressus, tum motum, cuius inuestigatio hic nobis est proposita, esse cessaturum, et baculum per solam grauitatem deorsum delapsurum. At vero in calculum potissimum ingreditur massa seu pondus totius baculi, quod littera M designetur, quo ergo centrum grauitatis M verticaliter deorsum nitetur. Praeter hanc vero vim baculus quoque sustinet pressionem, qua in puncto A ad cylindrum apprimitur, et qua cylindrus in baculum secundum directionem AB reagit, quae, quia non aliter nisi toto calculo absoluto determinari potest, tantisper littera Π indicetur, ita vt iam baculus a duabus viribus sollicitari sit censendus: altera scilicet, qua centrum grauitatis M deorsum vrgetur, quam posuimus $= M$; altera vero, qua in puncto A secundum directionem AB ad baculum normalem repellitur, quamque posuimus $= \Pi$. Insuper autem, nisi tam cylindrus quam baculus habeat superficiem perfectissime politam in A, vbi baculus super cylindro prorepit, dabitur frictio certae parti pressionis Π aequalis, quae statuatur $= \lambda \Pi$, cuius directio erit recta AF. Denique ad motum gyratorium, quo baculus ciebitur, definiendum, sit eius momenmentum inertiae respectu axis horizontalis per centrum grauitatis M transeuntis $= Mkk$.

§. 3. Quo autem motus, quem istae vires in baculo generabunt, per principia mechanica determinari possit, eum ad binas directiones fixas reuocari oportet; quem in finem ad rectam verticalem cCP ex M normaliter ducatur recta horizontalis MP, ita vt situs puncti M determinetur per has duas coordinatas: $CP = x$ et $PM = y$, quibus scilicet opus est ad motum progressiuum centri grauitatis M inuestigandum. Pro motu autem gyratorio perspicuum est, praesentem baculi inclinationem ad horizontem aequalem esse ipsi angulo $cCA = \Phi$, qui, vti facile intelligitur, a viribus sollicitantibus continuo augetur.

§. 4. Hic autem primo videndum est, quomodo binae coordinatae x et y per binas variabiles stabilitas Φ et s determinentur. Vbi quidem facile patet, fore

$$CP = x = s \sin. \Phi - c \cos. \Phi \text{ et}$$
$$PM = y = s \cos. \Phi + c \sin. \Phi.$$

Deinde autem ad has duas directiones etiam vires sollicitantes reduci conuenit. Ac primo quidem vis grauitatis iam secundum ipsam directionem CP agit: at vis $AB = \Pi$ per resolutionem praebet vim sursum tendentem $\Pi \cos. \Phi$, et vim secundum PM agentem $= \Pi \sin. \Phi$; tertia vero vis frictionis $\lambda \Pi$ etiam vim praebet sursum vrgentem $= \lambda \Pi \sin. \Phi$ et vim horizontalem retro secundum MP agentem $= \lambda \Pi \cos. \Phi$, sicque pro motu progressiuo centri grauitatis determinando secundum directionem verticalem CP habebimus totam vim $= M - \Pi \cos. \Phi - \lambda \Pi \sin. \Phi$ et secundum directionem $PM = \Pi \sin. \Phi - \lambda \Pi \cos. \Phi$. Iam vero

vero ex his viribus deducuntur sequentes binae aequationes differentio-differentiales:

$$\text{I. } \frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} = M - \Pi \operatorname{cos.} \Phi - \lambda \Pi \operatorname{sin.} \Phi;$$

$$\text{II. } \frac{M\,ddy}{2g\,dt^2} = \Pi \operatorname{sin.} \Phi - \lambda \Pi \operatorname{cos.} \Phi;$$

vbi elementum temporis dt sumtum est constans, et litera g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur, siquidem tempora in minutis secundis exprimere velimus.

§. 5. Deinde vero pro motu gyratorio determinando colligi debent momenta virium sollicitantium respectu centri grauitatis M, vbi quidem ex pondere M nullum momentum oritur. Ex pressione autem Π secundum directionem MB agente momentum nascitur $= \Pi\, MB = \Pi s$, quo inclinatio ad horizontem augebitur. Ex frictione vero $\lambda \Pi$ secundum directionem AF vrgente nascetur momentum $\lambda \Pi\, Mm = \lambda \Pi b$, quo adhuc inclinatio augeri est censenda. Atque hinc secundum principia motus, habebitur sequens aequatio differentialis secundi gradus:

$$\text{III. } \frac{Mkk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \Pi s + \lambda \Pi b.$$

§. 6. Ante omnia igitur ex duabus prioribus aequationibus elidi oportet binas coordinatas x et y; quare cum posuerimus

$x = s \operatorname{sin.} \Phi - c \operatorname{cos.} \Phi$, erit

$dx = ds \operatorname{sin.} \Phi + s\,d\Phi \operatorname{cos.} \Phi + c\,d\Phi \operatorname{sin.} \Phi$ et

$$ddx = dds \operatorname{sin.} \Phi + 2\,ds\,d\Phi \operatorname{cos.} \Phi + s\,dd\Phi \operatorname{cos.} \Phi - s\,d\Phi^2 \operatorname{sin.} \Phi + c\,dd\Phi \operatorname{sin.} \Phi + c\,d\Phi^2 \operatorname{cos.} \Phi.$$

Simili

Simili modo cum ſit

$$y = s\,\text{cof.}\,\Phi + c\,\text{fin.}\,\Phi,\ \text{erit}$$

$$dy = ds\,\text{cof.}\,\Phi - s\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + c\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi\ \text{et}$$

$$ddy = dds\,\text{cof.}\,\Phi - 2\,ds\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi - s\,dd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi$$
$$- s\,d\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi + c\,dd\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - c\,d\Phi^2\,\text{fin.}\,\Phi.$$

Quia autem hae formulae nimis ſunt complicatae, quam vt in aequationes noſtras priores eas induci conſultum eſſet, per certas combinationes hinc concinniores formulas deriuemus; ac primo quidem erit

$$ddx\,\text{fin.}\,\Phi + ddy\,\text{cof.}\,\Phi = dds - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi,$$

ſimilique modo altera combinatio dabit

$$ddx\,\text{cof.}\,\Phi - ddy\,\text{fin.}\,\Phi = 2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2.$$

§. 7. Pari vero modo binae aequationes priores inter ſe combinentur, ac prior combinatio dabit

$$\frac{M(ddx\,\text{fin.}\,\Phi + ddy\,\text{cof.}\,\Phi)}{2g\,dt^2} = M\,\text{fin.}\,\Phi - \lambda\,\Pi,$$

altera vero combinatio producet

$$M\,(ddx\,\text{cof.}\,\Phi - ddy\,\text{fin.}\,\Phi) = M\,\text{cof.}\,\Phi - \Pi.$$

Quodſi ergo in his aequationibus valores ante inuentos ſubſtituamus, binae aequationes priores in formas abibunt ſequentes:

$$\text{I.}\quad \frac{M\,dds - M\,s\,d\Phi^2 + M\,c\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = M\,\text{fin.}\,\Phi - \lambda\,\Pi;$$

$$\text{II.}\quad \frac{2M\,ds\,d\Phi + M\,s\,dd\Phi + M\,c\,d\Phi^2}{2g\,dt^2} = M\,\text{cof.}\,\Phi - \Pi;$$

quibus adiungi opportet tertiam iam ante inuentam

$$\text{III.}\quad \frac{Mkk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \Pi\,s + \lambda\,\Pi\,b.$$

§. 8. Tres igitur adepti sumus aequationes, ex quibus etiam tres incognitas, scilicet s, Φ et Π definiri oportet. Ac primo quidem pressio Π commodissime ex tertia aequatione ita determinatur, vt sit $\Pi = \frac{Mkkdd\Phi}{2gdt^2(s+\lambda b)}$, qui valor si in prioribus aequationibus substituatur, per M diuidi poterit et ambae aequationes sequentes induent formas, postquam per $2gdt^2$ multiplicauerimus:

$$\text{I. } dds - sd\Phi^2 + cdd\Phi = 2gdt^2 \sin.\Phi - \frac{\lambda kkdd\Phi}{s+\lambda b};$$

$$\text{II. } 2dsd\Phi + sdd\Phi + cd\Phi^2 = 2gdt^2 \cos.\Phi - \frac{kkdd\Phi}{s+\lambda b};$$

sicque totum negotium huc est reductum, vt ex his duabus aequationibus binae nostrae incognitae s et Φ eliciantur.

§. 9. Hic statim apparet elementum temporis dt commode ex calculo extrudi posse. Prior enim aequatio per $\cos.\Phi$ et posterior per $-\sin.\Phi$ multiplicata iunctim praebent

$$dds\cos.\Phi - sd\Phi^2\cos.\Phi + cdd\Phi\cos.\Phi - 2dsd\Phi\sin.\Phi$$
$$- sdd\Phi\sin.\Phi - cd\Phi^2\sin.\Phi = \frac{kkdd\Phi}{s+\lambda b}(\sin.\Phi - \lambda\cos.\Phi)$$

Verum etiamsi hinc tempus t eliminatum videtur: tamen adhuc eius ratio reuera inest, quia eius elementum dt constans est assumtum; quandoquidem ex hac demum conditione differentialia secunda dds et $dd\Phi$ valores determinatos adipiscuntur; et hanc ob rem haec aequatio nullum nobis vsum praestari prorsus poterit.

§. 10. Cum igitur resolutio binarum aequationum inuentarum sine dubio maxime abstrusa sit censenda, plurimum intererit statum quaestionis ad maiorem simplicitatem reduci. Statuamus ergo ambas constantes b et c nihilo aequales; tum vero etiam a frictione mentem abstraſtrahamus, ita vt ſit $\lambda = o$; atque hoc caſu binae aequationes reſoluendae erunt

I. $dds - sd\Phi^2 = 2gdt^2 \sin.\Phi$;

II. $2dsd\Phi + sdd\Phi = 2gdt^2 \cos.\Phi - \frac{kkdd\Phi}{s}$.

§. 11. Attendenti autem mox patebit, ſi harum aequationum prior per $2ds$, poſterior vero per $2sd\Phi$ multiplicetur, ſummam earum, quae erit

$$2dsdds + 2sdsd\Phi^2 + 2ssd\Phi dd\Phi$$
$$= 4gdt^2(ds\sin.\Phi + sd\Phi\cos.\Phi) - 2kkd\Phi dd\Phi$$

fore integrabilem, quippe integrale erit

$$ds^2 + ssd\Phi^2 = 4gsdt^2 \sin.\Phi - kkd\Phi^2, \text{ ſiue}$$
$$ds^2 + (ss+kk)d\Phi^2 = 4gdt^2(s\sin.\Phi + C)$$

in qua aequatione principium conſeruationis virium viuarum continetur.

§. 12. Huic aequationi addatur prima in s ducta et ſumma erit

$$d.sds + kkd\Phi^2 = 2gdt^2(3s\sin.\Phi + 2C),$$

quae ducatur in $2sds$, vt prodeat haec forma:

$$d.ssds^2 + 2kksdsd\Phi^2 = 2gdt^2(6s\sin.\Phi + 4C)sds.$$

At vero ſecunda aequatio ducta in s praebet

$$d.ssd\Phi + kkdd\Phi = 2gdt^2 s\cos.\Phi,$$

haec porro ducatur in $2ssd\Phi$, vt prodeat

$$d.s^4d\Phi^2 + 2kkssd\Phi dd\Phi = 2gdt^2.2s^3d\Phi\cos.\Phi,$$

quae aequatio ad praecedentem adiecta praebet

Q 2 *d.ss*

$$d. ss\, ds^2 + d. s^4\, d\Phi^2 + kk\, d. ss\, d\Phi^2$$
$$= 2 g\, dt^2 (2 s^3 d\Phi \operatorname{cos.} \Phi + 6 ss\, ds \operatorname{sin.} \Phi + 4 C s\, ds)$$
$$= 2 g\, dt^2 (d. 2 s^3 \operatorname{sin.} \Phi + d. 2 C ss),$$

vnde manifesto deducitur hoc integrale:

$$ss\, ds^2 + s^4\, d\Phi^2 + kk\, ss\, d\Phi^2 = 4 g\, dt^2 (s^3 \operatorname{sin.} \Phi + C ss + D)$$

sicque iam nacti sumus duas aequationes differentiales primi gradus, in quas introductae sunt duae constantes arbitrariae C et D.

§. 13. Quaeramus ex vtraque aequatione inuenta valorem $2 g\, dt^2$, qui erit ex priore

$$4 g\, dt^2 = \frac{ds^2 + (ss + kk)\, d\Phi^2}{s \operatorname{sin.} \Phi + C};$$

ex posteriore vero colligitur

$$4 g\, dt^2 = \frac{ss\, ds^2 + ss(ss + kk)\, d\Phi^2}{s^3 \operatorname{sin.} \Phi + C ss + D},$$

qui valores inter se aequati producent hanc aequationem:

$$ds^2 (s^3 \operatorname{sin.} \Phi + C ss + D) + (ss + kk)\, d\Phi^2 (s^3 \operatorname{sin.} \Phi + C ss + D)$$
$$= ss\, ds^2 (s \operatorname{sin.} \Phi + C) + ss(ss + kk)\, d\Phi^2 (s \operatorname{sin.} \Phi + C).$$

Transferantur nunc termini ita, vt ex altera parte tantum ds, ex altera vero $d\Phi$ tantum reperiantur, eritque

$$D(ss + kk)\, d\Phi^2 = D\, ds^2$$

quae aequatio consistere nequit nisi sit $D = 0$, hocque casu ambae aequationes a se inuicem non discrepant

§. 14. Talis autem aequatio integralis, principio virium viuarum innixa, nequidem generalius, admissa cylindri magnitudine et crassitie baculi erui potest, si scilicet etiam frictionis ratio habeatur. Verum, quamuis etiam alia combinatione integratio succederet: tamen hinc nihil

plane

plane emolumenti redundaret ad problema propositum resoluendum, quandoquidem ad solutionem perfectam ad minimum duplex integratio requireretur. Cum autem talem solutionem hactenus frustra tentassem, mihi quidem nulla alia via superesse videtur ad hunc motum cognoscendum, nisi vt ex ipsis aequationibus differentio-differentialibus solutionem per approximationes elicere conemur.

Determinatio motus quaesiti sine subsidio integrationis.

§. 15. Quoniam hoc Problema duabus aequationibus differentialibus secundi gradus continetur, eae quatuor constantes arbitrarias inuoluunt; vnde intelligimus, ad Problema penitus determinandum quatuor requiri conditiones ab arbitrio nostro pendentes, id quod etiam ipsa quaestionis natura declarat. Cum enim status initialis tanquam cognitus spectari debeat, is vtique quatuor rebus determinari deprehenditur. Primo enim non solum interuallum $BM = s$ datum habuerit valorem necesse est, sed etiam eius motus, quo primum procedere inceperit. Scilicet si motus a quiete inceperit, tum erit $\frac{ds}{dt} = 0$; sin autem baculo initio iam certus motus fuerit impressus, hinc formula $\frac{ds}{dt}$ certum valorem nanciscetur. Deinde in ipso initio non solum angulum $cCA = \Phi$ certum valorem habuisse necesse est, sed etiam, ob motum impressum, celeritas angularis $\frac{d\Phi}{dt}$ datum quendam valorem accipiet: sicque valores initiales harum quatuor quantitatum: 1°.) s, 2°.) $\frac{ds}{dt}$, 3°.) Φ, 4°.) $\frac{d\Phi}{dt}$, determinationem Problematis exhaurient, quibus cognitis totum negotium huc redit, vt ad quoduis tempus sequens valores earundem quatuor quantitatum assignentur.

§. 16. Constituto igitur statu initiali continuationem motus successiue per gradus prosequi conueniet, quem in finem tempus in particulas satis exiguas diuisum concipiamus, quarum singulas charactere differentiali dt designare liceat, quas quidem tam paruas accipi oportet, vt variatio motus in singulis producta quasi infinite parua spectari possit. Cum igitur tempus in minutis secundis exprimi sumserimus, elementum dt certam quandam partem exiguam vnius minuti secundi denotet, cuiusmodi pars si vna decima sufficere videatur, perpetuo nobis erit $dt = \frac{1}{10}$; fortassin etiam sufficiet ipsi dt majorem fractionem tribui, nisi solutionem magis exactam desiderauerimus. Quo minus enim a veritate aberrare voluerimus, eo minores fractiones pro dt assumi debebunt. Hoc enim modo, si pro initio cuiusque talis exigui interualli temporis quatuor memoratae quantitates s, $\frac{ds}{dt}$, Φ, $\frac{d\Phi}{dt}$ fuerint cognitae, tum ex ipsis aequationibus differentialibus secundi gradus earundem quantitatum valores pro fine huius tempusculi colligere licebit, quorum ope deinceps sequentia tempuscula simili modo percurri poterunt.

§. 17. Quo autem haec operatio facilius institui liceat, ponamus $\frac{ds}{dt} = p$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \theta$, vt sit $ds = p\,dt$ et $d\Phi = \theta\,dt$; tum vero ad quoduis tempus t hos quatuor valores s, p, Φ, θ tanquam cognitos tractemus, et ad tempus $t + dt$ eos per s', p', Φ' et θ' indicemus, atque ex natura differentialium statim patet fore

$$s' = s + ds = s + p\,dt \text{ et } \Phi' = \Phi + \theta\,dt,$$

qui ergo jam erunt cogniti. At vero simili modo erit

$$p' = p + dp \text{ et } \theta' = \theta + d\theta$$

vbi

vbi haec duo differentialia dp et $d\theta$ ex aequationibus differentio-differentialibus elicere oportebit, ita vt hoc modo nulla plane integratione indigeamus. His autem valoribus inuentis eadem operatio facile pro sequentibus temporis particulis dt expediri poterit.

§. 18. Consideremus igitur nostras binas aequationes differentiales secundi gradus generalissimas, nulla plane adhibita restrictione, quae, posito $ds = p\,dt$, $d\Phi = \theta\,dt$, hincque

$$dds = dp\,dt = (p' - p)\,dt,$$

similique modo

$$dd\Phi = d\theta\,dt = (\theta' - \theta)\,dt,$$

ad sequentes formas redigentur:

$$\text{I. } \frac{(p'-p)}{dt} - s\theta\theta + \frac{c(\theta'-\theta)}{dt} = 2g\,\text{sin.}\,\Phi - \frac{\lambda kk(\theta'-\theta)}{dt(s+\lambda b)},$$

$$\text{II. } 2p\theta + \frac{s(\theta'-\theta)}{dt} + c\theta\theta = 2g\,\text{cos.}\,\Phi - \frac{kk(\theta'-\theta)}{dt(s+\lambda b)},$$

quae reducantur ad has:

$$\text{I. } \frac{p'-p}{dt} + \frac{\theta'-\theta}{dt}\left(c + \frac{\lambda kk}{s+\lambda b}\right) = 2g\,\text{sin.}\,\Phi + s\theta\theta,$$

$$\text{II. } \frac{\theta'-\theta}{dt}\left(s + \frac{kk}{s+\lambda b}\right) = 2g\,\text{cos.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta,$$

ex quarum posteriore statim habetur

$$\frac{\theta'-\theta}{dt} = \frac{2g\,\text{cos.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta}{s + \frac{kk}{s+\lambda b}} = \frac{(2g\,\text{cos.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta)(s+\lambda b)}{s(s+\lambda b) + kk},$$

vnde colligitur valor ipsius θ'. Tum vero si iste valor pro $\frac{\theta'-\theta}{dt}$ in priore aequatione substituatur, etiam quantitas p' per mera elementa cognita cognoscetur, ita vt pro tempusculo sequente habeamus iterum quaternas quantitates s', Φ', p' et θ', quae cum per meros numeros exprimantur, eas iterum simpliciter per litteras s, Φ, p et θ designare

ſignare licebit, ex quibus ſimili modo earum valores pro tempuſculo inſequente, ſiue ad tempus $t + 2dt$ definiri poterunt. Tales igitur operationes haud difficulter eo vsque continuare licebit, donec baculus a cylindro penitus fuerit delapſus.

§. 19. Hic autem duo occurrunt caſus, quibus motus iſte complicatus ceſſabit: alter locum habet ſi interuallum $BM = s$ toti portioni baculi MF euadit aequalis, quod ſi euenerit, baculus cylindrum deſerens motum conceptum libere proſequetur, quatenus ſcilicet a ſola grauitate ſollicitabitur. At vero etiam euenire poteſt, ſi portio baculi MF fuerit longior, vt baculus etiam, antequam punctum F vsque ad A pertingat, cylindrum deſerat, id quod continget, quando preſſio in puncto A, quam poſuimus $= \Pi$, euaneſcet; quare cum inuenerimus

$$\Pi = \frac{M k k d d \Phi}{2 g d t^2 (s + \lambda b)} = \frac{M k k (\theta' - \theta)}{2 g d t (s + \lambda b)},$$

hoc eueniet quando fiet $\theta' - \theta = 0$; motus igitur hoc caſu eo vsque durabit, quoad fiat

$$(2g \operatorname{cof.} \Phi - c\theta\theta - 2p\theta)(s + \lambda b) = 0, \text{ ſiue}$$
$$2g \operatorname{cof.} \Phi - c\theta\theta - 2p\theta = 0, \text{ ſiue}$$
$$2g \operatorname{cof.} \Phi = \theta(c\theta + 2p),$$

quod, cum angulus Φ continuo creſcat, ideoque $\operatorname{cof.} \Phi$ decreſcat, ex altera vero parte tam θ quam p continuo creſcant, mox euenire debebit, niſi forte iam ante terminus F ſupra A fuerit praeterlapſus.

§. 20. Cum hic ſit $p = \frac{ds}{dt}$, littera p denotabit celeritatem progreſſiuam centri grauitatis baculi M, quatenus

ſecun-

ſecundum longitudinem B M promouetur, quam, ob grauitatem, continuo creſcere manifeſtum eſt; tum vero $\frac{dds}{dt^2} = \frac{(p'-p)}{dt}$ exprimet accelerationem huius motus; deinde vero littera $\theta = \frac{d\Phi}{dt}$ exprimit celeritatem angularem, qua baculus circa centrum cylindri C quouis momento gyratur ſiue ſupra horizontem eleuatur; tum vero formula $\frac{\theta'-\theta}{dt}$ accelerationem huius motus gyratorii denotabit. Quando ergo iſta acceleratio ceſſabit, baculus non amplius cylindro incumbet, ſed motu gyratorio iam concepto cylindrum penitus deſeret, totusque baculus a vi grauitatis praecipitabitur, cuius motus determinatio nulla amplius laborat difficultate.

§. 21. Denique etiam circa frictionem quaedam hic ſunt animaduertenda, quoniam frictio eatenus tantum habet locum, quatenus baculus ſuper puncto A prorepit; ſi enim tantum voluendo ſuper cylindro procederet, nullam frictionem pateretur. Quamobrem hic neceſſe eſt in celeritatem inquirere, qua baculus ſuper cylindro prorepit. Ad tempus igitur t tangat baculus cylindrum in A, ſitque $Am = s$; elapſo autem tempore dt fiat contactus in a, exiſtente angulo $ACa = d\Phi$, ſitque $am' = s + ds$, eritque, ob radium cylindri $CA = a$ et arculum $Aa = a\,d\Phi$, diſtantia $Am' = s + ds + a\,d\Phi$, vnde ſi auferatur diſtantia $Am = s = \alpha m'$, remanebit ſpatiolum $a\alpha$, per quod punctum baculi A interea proceſſit; vnde patet, frictionem tum demum ceſſare, quando fuerit $a\,d\Phi + ds = 0$, quod igitur nunquam eueniet, niſi initio baculo motus contrarius fuerit impreſſus. Hoc enim caſu excluſo vtraque celeritas $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ poſitiuum habebit valorem. Tab. I. Fig. 9.

§. 22. Quod ſi iam haec calculi praecepta ad caſus determinatos, quibus ſcilicet omnia elementa ſtatus initialis per numeros abſolutos fuerint data, accommodare velimus, circa quantitates ſingulas, quae hic occurrunt, ratione vnitatum, ad quas referantur, quaedam ſunt monenda. Ac primo quidem menſuram temporis iam ſtabiliuimus, quippe quam in minutis ſecundis exprimi aſſumimus. Deinde vero angulos Φ et θ in partibus radii, qui etiam vnitate deſignari ſolet, exprimi ſumamus, quos ergo, dum eorum ſinus et coſinus accipiuntur, ante ad menſuras ſolitas per gradus et minuta exprimi oportebit. Quantitates tandem longitudinales s et p, pariter ac altitudinem g, in menſuris conſuetis, veluti pedibus, exhibere licebit; vbi quidem, in gratiam calculi, eiusmodi pedes aſſumi conueniet, quorum 16 praebeant altitudinem lapſus g. His igitur praenotatis aliquem caſum ſpecialem per calculum euoluamus, cuius fortaſſe tractatio ſternere viam poterit ad ſolutionem completam noſtri Problematis propoſiti.

Deſcriptio caſus ſpecialis
hac methodo euoluendi.

§. 23. Sit baculus, ſeu potius trabs, parallelepipedum 12 pedes longum, cuius dimidia craſſities ſit ſemipedis (latitudo enim non in computum ingreditur). Centrum grauitatis autem in medium cadat, ita vt eius diſtantia ab vtroque termino ſit 6 pedum, cuius quadrati triens 12 dabit valorem ipſius kk, exiſtente dimidia craſſitie $b = 0,5$ pedis; tum vero ſit etiam diameter cylindri horizontalis, ſuper quo trabs delabitur, vnius pedis, eiusque radius $CA = 0,5$ et interuallum $BC = a + b = c = 1$ ped.

exiſtente

existente altitudine $g = 16$ pedum; tum vero trabs initio cylindro ita horizontaliter in puncto c imponatur, vt eius centrum grauitatis M ad dextram promineat, interuallo $= 0,5$ ped. ex quo situ dimissa, incipiat delabi, ita vt initio ipso fuerit $s = 0,5$; $p = 0$; $\Phi = 0$ et $\theta = 0$. Pro quouis ergo tempore elapso $= t$ habebuntur istae duae aequationes:

$$\text{I. } \frac{\theta' - \theta}{dt} = \frac{(32 \cos. \Phi - \theta\,\theta - 2 p \theta) s}{ss + 12};$$

$$\text{II. } \frac{p' - p}{dt} = 32 \sin. \Phi + s\,\theta\,\theta - \left(\frac{\theta' - \theta}{dt}\right);$$

vbi frictionem calculi commodioris gratia penitus negleximus.

§. 24. Incipiamus igitur ab ipso initio motus, quo sit tempus $t = 0$, et quia hoc momento habetur $s = 0,5$, $p = 0$ $\Phi = 0$ et $\theta = 0$, habebimus $\frac{\theta' - \theta}{dt} = \frac{64}{49} = 1,306$, hincque $\frac{p' - p}{dt} = -1,306$, sicque erit $p' = -1,306 . dt$ et $\theta' = +1,306 . dt$, tum vero erit $s' = 0,5$ et $\Phi' = 0$.

§. 25. Sumamus nunc primum temporis interuallum $dt = \frac{1}{10}$ sec. et quatuor elementa pro tempusculo sequente erunt

$$s = 0,5;\ p = -0,1306,\ \Phi = 0,\ \theta = 0,1306,$$

vnde colligetur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,3601,\ \frac{p' - p}{dt} = -1,2976,$$

hinc igitur fiet

$$s' = s + p\,dt = 0,5 - 0,1306 . dt;$$
$$p' = -0,1306 - 1,2976 . dt;$$
$$\Phi' = 0 + 0,1306 . dt;$$
$$\theta' = 0,1306 + 1,3061 . dt.$$

§. 26. Sumamus denuo $dt = \frac{1}{10}$, atque ad tempus $t = \frac{1}{5}$ sec. elementa nostri calculi erunt

 $s =$

$s = 0,4869$, $p = -0,2603$, $\Phi = 0,0131$, $\theta = 0,2612$, ficque erit $\Phi = 45°$. Calculum igitur vt ante profequendo reperiemus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,2759, \quad \frac{p' - p}{dt} = -0,8235,$$

erit ergo

$$s' = 0,4869 - 0,2603 \cdot dt;$$
$$p' = -0,2603 - 0,8235 \cdot dt;$$
$$\Phi' = 0,0131 + 0,2612 \cdot dt;$$
$$\theta' = 0,2612 + 1,2759 \cdot dt.$$

§. 27. Sumamus nunc denuo $dt = \frac{1}{10}$, et ad tempus $t = \frac{5''}{10}$ elementa calculi erunt

$$s = 0,4609, \quad p = -0,3426, \quad \Phi = 0,0392, \quad \theta = 0,3888,$$

ficque erit $\Phi = 2°.15'$, quia portio $0,026$ refpondet $1°.30'$. Hinc igitur reperietur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,2111, \quad \frac{p' - p}{dt} = 0,1149.$$

Hinc ergo erit

$$s' = 0,4609 - 0,3426 \cdot dt;$$
$$p' = -0,3426 + 0,1149 \cdot dt;$$
$$\Phi' = 2°.15 + 0,3888 \cdot dt;$$
$$\theta' = 0,3888 + 1,2111 \cdot dt.$$

§. 28. Statuamus denuo $dt = \frac{1}{10}$, vt tempus ab initio elapfum fit $\frac{3''}{5}$, et elementa noftra erunt

$$s = 0,4266, \quad p = -0,3311, \quad \Phi = 0,0781, \quad \theta = 0,5099,$$

vnde calculo inftituto reperitur

$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,1199$ et $\frac{p' - p}{dt} = 1,4942$, vnde fit

$s' =$

$$s' = 0,4266 - 0,3311 \,.\, dt;$$
$$p' = -0,3311 + 1,4942 \,.\, dt;$$
$$\Phi' = 4^\circ.\, 29' + 0,5099 \,.\, dt;$$
$$\theta' = 05099 + 1,1199 \,.\, dt.$$

§. 29. Statuatur denuo $dt = \frac{1}{10}$, et elementa pro tempore $t = \frac{5''}{10}$ ita se habebunt:

$$s = 0,3935,\ p = -0,1817,\ \Phi = 7^\circ.\, 25',\ \theta = 0,6219,$$

quibus inuentis calculo consueto instituto fiet

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,0221 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 3,2608,$$

vnde fit

$$s' = 0,3935 - 0,1817 \,.\, dt$$
$$p' = -0,1817 + 3,2608 \,.\, dt,$$
$$\Phi' = 7^\circ.\, 25' + 0,6219 \,.\, dt,$$
$$\theta' = 0,6219 + 1,0221 \,.\, dt.$$

§. 30. Denuo statuatur $dt = \frac{1}{10}$, et pro tempore $= \frac{6''}{10}$ elementa ita erunt comparata:

$$s = 0,3753,\ p = 0,1444,\ \Phi = 10^\circ.\, 59',\ \theta = 0,7241,$$

quibus inuentis calculo pro inuestigandis nouis p' et θ' instituto habemus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9484 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 5,3451,$$

vnde colligitur

$$s' = 0,3753 + 0,1444 \,.\, dt,$$
$$p' = 0,1444 + 5,3451 \,.\, dt,$$
$$\Phi' = 10^\circ.\, 59' + 0,7241 \,.\, dt,$$
$$\theta' = 0,7241 + 0,9484 \,.\, dt.$$

§. 31. Sumatur iterum $dt = \frac{1}{10}$, vt pro temporis momento $\frac{7}{10}''$ elementa fiant

$$s = 0,3897,\ p = 0,6789,\ \Phi = 15^\circ.8' \text{ et } \theta = 0,8189.$$

Calculum ergo vt ante prosequendo elicimus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9334,\ \frac{p' - p}{dt} = 7,6821,$$

vnde orietur

$$s' = 0,3897 + 0,6789 . dt,$$
$$p' = 0,6789 + 7,6821 . dt,$$
$$\Phi' = 15^\circ. 8' + 0,8189 . dt,$$
$$\theta' = 0,8189 + 0,9334 . dt.$$

§. 32. Quoniam motus iam regularior fieri incipit quam initio, nunc interuallum dt augere poterimus: sumamus ergo $dt = \frac{1}{5}''$, atque elapso tempore $\frac{9}{10}''$ erit

$$s = 0,5255,\ p = 2,2153,\ \Phi = 24^\circ.33',\ \theta = 1,0056,$$

vnde fit

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,0141 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 12,8129,$$

quocirca fiet

$$s' = 0,5255 + 2,2153 . dt,$$
$$\Phi' = 24^\circ. 33' + 1,0056 . dt,$$
$$p' = 2,2153 + 12,8129 . dt,$$
$$\theta' = 1,0056 + 1,0141 . dt.$$

§. 33. Sit iterum $dt = \frac{1}{5}''$, ita vt elapso tempore $t = 1\frac{1}{10}$ elementa nostra sint

$$s = 0,9686,\ p = 4,7779,\ \Phi = 36^\circ.9',\ \theta = 1,2084,$$

quibus inuentis porro colligitur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9606 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 19,3306,$$

hinc porro nanciscemur

$s' =$

$$s' = 0,9686 + 4,7779 \cdot dt,$$
$$p' = 4,7779 + 19,3306 \cdot dt,$$
$$\Phi' = 36^\circ.\, 9' + 1,2084 \cdot dt,$$
$$\theta' = 1,2084 + 0,9606 \cdot dt.$$

§. 34. Adhuc ſumatur $dt = \frac{1}{5}'''$, et elapſo tempore $1\frac{3}{10}''$ elementa noſtra erunt

$$s = 1,9242,\ p = 8,6440,\ \Phi = 50^\circ.\, 8',\ \theta = 1,4005,$$

ex quibus, ſi ſecundum praecepta data computemus, formula

$$32 \operatorname{coſ.} \Phi - \theta\,(\theta + 2p)$$

iam fit negatiua; vnde intelligitur, trabem iam ante hoc tempus $1\frac{3}{10}''$ cylindrum penitus deſeruiſſe et nunc motu libero per ſolam grauitatem delabi, pro motu quem centrum grauitatis hoc momento iam concepit; tum vero etiam motum gyratorium, quem hoc momento habuit, perpetuo conſeruabit, cuius celeritas angularis cum ſit

$$\frac{d\Phi}{dt} = \theta = 1,4005,$$

ſingulis minutis ſecundis angulum conficiet hoc numero expreſſum. Quamobrem ſingulis minutis ſecundis motu angulari per angulum $80^\circ.\, 12'$ gyrabitur.

§. 35. Haec quidem determinatio motus non mediocriter a veritate aberrabit, propterea quod temporis interualla nimis magna ſunt aſſumta, quandoquidem circa finem noſtra elementa nimis magnas mutationes ſunt paſſa, quam vt motus vniformis per vnum interuallum pro aequabili haberi poſſet. Interim tamen, neglectis minutiis, hinc ſatis diſtinctam nanciſcimur ideam motus quo noſtra trabs delabetur. Hinc enim diſcimus, ſtatim ab initio trabem tardiſſime ad motum concitari, atque adeo, dum ſuper

per cylindro inclinatur, in contactu A retro repere. Cum enim celeritas prorepens supra inuenta sit

$$\frac{ds}{dt} + \frac{\frac{1}{2}d\Phi}{dt} = p + \tfrac{1}{2}\theta,$$

ab initio per aliquod tempus haec quantitas, seu eius duplum $\theta + 2p$ mansit negatiuum, atque videmus elapso demum dimidio minuto secundo baculum antrorsum repere incipere, a quo tempore satis prompte descendendo prolabitur. Caussa huius phoenomeni in eo est sita: quod centrum grauitatis M circa initium alium motum concipere nequit, nisi verticalem, eumque adeo lentissimum; tum enim demum, quando trabs iam satis notabilem inclinationem est nacta, motum horizontalem recipere potest.

Emendatio Solutionis praecedentis.

§. 36. Quo autem aberratio istius methodi a veritate diminuatur, calculum sequenti modo institui conueniet, vbi quidem eidem exemplo determinato insistemus. Ponamus ad tempus $= t$ ab initio elapsum iam hos valores esse inuentos: $p = e$, $s = f$, $\theta = \varepsilon$ et $\Phi = \zeta$, tum vero elapso insuper tempusculo $= \tau$ haec elementa abire in p', s', θ' et Φ', ad quorum valores inuestigandos statuamus $p' = e + A\tau + B\tau\tau$, vnde cum sit $s' = \int p' d\tau$, fiet

$$s = f + e\tau + \tfrac{1}{2}A\tau\tau + \tfrac{1}{3}B\tau^3.$$

Simili modo sit $\theta' = \varepsilon + \alpha\tau + \beta\tau\tau$, vnde colligitur

$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3,$$

vbi quidem sumamus angulum ζ more solito in gradibus et minutis dari, partes autem adiectas $\varepsilon\tau + \frac{1}{2}\tau\tau + \frac{1}{3}\beta\tau^3$ in partibus radii exprimi, vt hinc fiat

sin.

$$\sin.\Phi' = \sin.\zeta\cos.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3)$$
$$+ \cos.\zeta\sin.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) \text{ et}$$
$$\cos.\Phi' = \cos.\zeta\cos.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3)$$
$$- \sin.\zeta\sin.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3).$$

§. 37. Quia autem in hac euolutione non vltra secundam potestatem ipsius τ ascendere conuenit, erit

$$\cos.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) = 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau \text{ et}$$
$$\sin.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) = \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau,$$

sicque habebimus

$$\sin.\Phi' = (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau)\sin.\zeta + (\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau)\cos.\zeta \text{ et}$$
$$\cos.\Phi' = (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau)\cos.\zeta - (\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau)\sin.\zeta,$$

quibus substitutis in ambabus nostris aequationibus supra exhibitis et ad hunc casum accommodatis:

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \frac{(32\cos.\Phi' - \theta'(\theta' + 2p'))s'}{s's' + 12} \text{ et}$$
$$\frac{p' - p}{\tau} = 32\sin.\Phi' + s'\theta'\theta' - \frac{(\theta' - \theta)}{\tau},$$

habebimus

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \alpha + \beta\tau \text{ et } \frac{p' - p}{\tau} = A + B\tau.$$

§. 38. Incipiamus igitur a formula

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \frac{(32\cos.\Phi' - \theta'(\theta' + 2p'))s'}{s's' + 12},$$

vbi cum ad partem sinistram tempus τ non vltra primam dimensionem assurgat, etiam in dextra parte altiores potestates reiiciamus. Hinc cum sit

$$32\cos.\Phi' = 32\cos.\zeta - 32\varepsilon\tau\sin.\zeta \text{ et}$$
$$\theta' + 2p' = \varepsilon + 2e + (\alpha + 2A)\tau,$$

ducatur poſtrema aequatio in $\theta' = \varepsilon$ prodibitque

$$\theta'(\theta' + 2p') = \varepsilon\varepsilon + 2e\varepsilon + \tau(2\alpha\varepsilon + 2A\varepsilon + 2\alpha e).$$

Quia vero etiam haec euolutio nimis fieret moleſta, etiam primam poteſtatem τ reiiciamus, atque hinc obtinebimus

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \alpha = \frac{(32 \operatorname{cof.} \zeta - \varepsilon(\varepsilon + 2e))f}{ff + 12}.$$

Ex priore vero aequatione eodem modo elicimus

$$p' - p = A = 32 \operatorname{fin.} \zeta + \varepsilon\varepsilon f - \alpha.$$

Inuentis autem his duobus valoribus α et A habebimus pro tempore $t + \tau$ iſta elementa:

$$s' = f + e\tau + \tfrac{1}{2}A\tau\tau;$$
$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau;$$
$$p' = e + A\tau;$$
$$\theta' = \varepsilon + \alpha\tau.$$

§. 39. Hac ergo methodo praecedens ſolutio ita rectificatur, vt cum ſupra tantum ſumſiſſemus $s' = s + p\,dt$, vbi s reſpondet ipſi f et dt ipſi τ, ſiue $s' = f + e\tau$: hic valore accuratiore vtamur, ſcilicet

$$s' = f + e\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau;$$

ſimilique modo cum ante habuiſſemus $\Phi' = \Phi + \theta\,dt$, nunc habemus

$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau,$$

vnde etiam ſine errore interuallo temporis τ fortaſſe maiores valores tribuere licebit, id quod ex quantitate terminorum $\tfrac{1}{2}A\tau\tau$ et $\tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau$ diiudicari poterit, vt ſcilicet altiores poteſtates ſequentes ſine errore negligi queant.

§. 40. Quod ſi ergo hac methodo correcta ipſum praecedentem caſum euoluere velimus et ab ipſo initio inchoemus, vbi erat $f = \tfrac{1}{2}$, $e = 0$, $\zeta = 0$ et $\varepsilon = 0$, ex noſtris

ſtris formulis colligemus $\alpha = 1,3061$ et $A = -1,3061$, ſicque pro tempore τ habebimus:

$$s' = \tfrac{1}{2} - 0,6530 . \tau\tau;\ p' = -1,3061 . \tau,$$
$$\Phi' = 0,6530 . \tau\tau; \quad \theta' = 1,3061 . \tau.$$

§. 41. Hic igitur videtur ſtatim tuto aſſumi poſſe $\tau = \tfrac{1''}{5}$, vnde elementa pro tempore $t = \tfrac{1''}{5}$ erunt

$$f = 0,4739,\ e = -0,2612,\ \zeta = 0,0261 = 1^\circ.30',\ \varepsilon = 0,2612,$$

quibus inuentis colligitur

$$\alpha = 1,2427 \text{ et } A = -0,3728,$$

quocirca fit

$$s' = 0,4739 - 0,2612 . \tau - 0,1864 . \tau\tau;$$
$$p' = -0,2612 - 0,3728 . \tau;$$
$$\Phi' = 1^\circ. 30' + 0,2612 . \tau + 0,6213 . \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,2612 + 1,2427 . \tau.$$

§. 42. Sumamus iterum $\tau = \tfrac{1}{5}$, et pro tempore ab initio elapſo $t = \tfrac{2''}{5}$ elementa noſtra ita ſe habebunt:

$$f = 0,4142,\ e = -0,3357,\ \zeta = 5^\circ.55' \text{ et } \varepsilon = 0,5097,$$

ex quibus erit

$$\alpha = 1,0860 \text{ et } A = 2,3202,$$

vnde fit

$$s' = 0,4142 - 0,3357 . \tau + 1,1601 . \tau\tau;$$
$$p' = -0,3357 + 2,3202 . \tau;$$
$$\Phi' = 5^\circ. 55' + 0,5097 . \tau + 0,5430 . \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,5097 + 1,0860 . \tau.$$

§. 43. Statuatur denuo $\tau = \tfrac{1}{5}$, vnde pro tempore $t = \tfrac{3''}{5}$ ab initio elapſo elementa noſtra erunt

$$f = 0{,}3935,\; e = 0{,}1283,\; \zeta = 13^\circ.\,1',\; \varepsilon = 0{,}7269,$$

quibus inuentis porro colligitur

$$\alpha' = 0{,}9862,\; A = 6{,}4292.$$

Sicque erit

$$s' = 0{,}3935 + 0{,}1283\,.\,\tau + 3{,}2146\,.\,\tau\tau;$$
$$p' = 0{,}1283 + 6{,}4292\,.\,\tau;$$
$$\Phi' = 13^\circ.\,1' + 0{,}7269\,.\,\tau + 0{,}4931\,.\,\tau\tau;$$
$$\theta' = 0{,}7269 + 0{,}9862\,.\,\tau.$$

§. 44. Sit iterum $\tau = \frac{1}{5}$, ita vt elementa noſtra pro tempore $t = \frac{4}{5}$ fiant

$$f = 0{,}5477,\; e = 1{,}4141,\; \zeta = 22^\circ\ 31',\; \varepsilon = 0{,}9241.$$

Calculo igitur vt hactenus inſtituto reperietur

$$\alpha = 1{,}1619,\; A = 11{,}5603,$$

quocirca orietur

$$s' = 0{,}5477 + 1{,}4141\,.\,\tau + 5{,}7801\,.\,\tau\tau^2;$$
$$p' = 1{,}4141 + 11{,}5603\,.\,\tau;$$
$$\Phi' = 22^\circ.\,31' + 0{,}9241\,.\,\tau + 0{,}5809\,.\,\tau\tau;$$
$$\theta' = 0{,}9241 + 1{,}1619\,.\,\tau.$$

§. 45. Sumamus adhuc $\tau = \frac{1}{5}$ et quatuor elementa noſtra ita ſe habebunt pro tempore $t = 1''$:

$$f = 1{,}0617,\; e = 3{,}7262,\; \zeta = 34^\circ.\,31',\; \varepsilon = 1{,}1565,$$

calculo igitur vt ante proſecuto elicitur

$$\alpha = 1{,}3273 \text{ et } A = 18{,}2254,$$

vnde porro fit

$s' =$

$s' = 1,0617 + 3,7262.\tau + 9,1127.\tau\tau;$
$p' = 3,7262 + 18,2254.\tau;$
$\Phi' = 34°.31' + 1,1565.\tau + 0,6636.\tau\tau;$
$\theta' = 1,1565 + 1,3273\,\tau.$

§. 46. Sit iterum $\tau = \frac{1}{5}$ et elapſo ab initio tempore $t = \frac{6''}{5}$, elementa erunt

$$f = 2,1714,\; e = 7,3713,\; \zeta = 49°.28',\; \varepsilon = 1,4219,$$

ex quibus porro colligitur

$$32\,\text{coſ.}\,\zeta - \varepsilon(\varepsilon + 2\,e) = -\,2,1878$$

qui valor cum ſit negatiuus, ſequitur trabem iam cylindrum deſeruiſſe, quare ad momentum inueniendum, quo hoc contigit, ipſi τ valorem aliquanto minorem tribui oportet, quem ex praecedentibus formulis haud difficulter colligere licet. Quaeratur ſcilicet tempus τ, quo fit

$$32\,\text{coſ.}\,\Phi' = \theta'(\theta' + 2\,p),$$

quem ergo calculum expediamus.

§. 47. Cum ſit

$\Phi' = 34°.31' + 1,1565.\tau + 0,6661.\tau\tau,$ erit

$$\text{coſ.}\,\Phi' = \text{coſ.}\,34°.31'(1 - \tfrac{1}{2}(1,1565)^2.\tau\tau)$$
$$-\,\text{ſin.}\,34°.31'(1,1565.\tfrac{1}{2}(1,3273)^2\,\tau\tau$$

qui valor euolutus praebet

$$\text{coſ.}\,\Phi' = 0,82396 - 0,65533.\tau - 0,92795.\tau\tau,$$

ideoque

$$32\,\text{coſ.}\,\Phi' = 26,36672 - 20,97050.\tau - 29,66560.\tau\tau.$$

Pro altera autem parte quia eſt

$\theta' = 1,1565 + 1,3273.\tau$ et

$$\theta' + 2p' = 8,6089 + 37,7781.\tau, \text{ erit}$$

$$\theta'(\theta' + 2p') = 9,9562 + 55,1570.\tau + 50,1429.\tau\tau$$

vnde pro tempore τ definiendo haec habebitur aequatio:

$$16,4105 = 76,1276.\tau + 79,8085.\tau\tau.$$

§. 48. Quia iam nouimus incognitam τ paullo minorem esse quam $\frac{1}{5}$, ponamus

$$\tau = \tfrac{1}{5} - z, \text{ vt fit } \tau\tau = \tfrac{1}{25} - \tfrac{2}{5}z$$

quibus valoribus substitutis fiet

$$16,4105 = 18,4178 - 108,0508.z$$

vnde concluditur

$$z = \tfrac{2}{108} = 0,0185, \text{ ideoque } \tau = 0,1815,$$

ita vt tempus ab initio elapsum sit 1,1815; tum vero erit

$$f = 2,0381,\ e = 7,0341,\ \zeta = 47°.\ 44',\ \varepsilon = 1,3974,$$

et quia hinc per hypothesin fit $\alpha = 0$, fiet $A = 27,6605$.

§. 49. His inuentis praecipua Phaenomena huius motus mirabilis clarius aspectui exponamus; atque vt iisdem elementis vtamur, quibus aequationes differentiales secundi gradus continentur, meminisse oportet, nos hic ad quoduis tempus posuisse $s = f$, deinde $\frac{ds}{dt} = p = e$, tum vero $\frac{dds}{dt^2} = \frac{p' - p}{dt} = A$. Pro angulo autem Φ nobis erat $\Phi = \zeta$, $\frac{d\Phi}{dt} = \theta = \varepsilon$, ac denique $\frac{dd\Phi}{dt^2} = \frac{\theta' - \theta}{dt} = \alpha$, quibus valoribus introductis phaenomena istius motus in sequente tabula sumus complexi.

Repraeſentatio motus, quo trabs §. 23. deſcripta ſuper axe cylindrico delabitur.

Temp. t	s	$\frac{ds}{dt}$	$\frac{dds}{dt^2}$	Φ	$\frac{d\Phi}{dt}$	$\frac{dd\Phi}{dt^2}$
0,000	0,500	0,000	− 1,306	0°. 0′	0,000	1,306
0,200	0,474	− 0,261	− 0,373	1. 30	0,261	1,243
0,400	0,414	− 0,336	+ 2,320	5. 55	0,509	1,086
0,600	0,393	+ 0,128	+ 6,429	13. 1	0,727	0,986
0,800	0,548	+ 1,414	+ 11,560	22. 31	0,924	1,162
1,000	1,062	+ 3,726	+ 1[illegible],225	34. 31	1,156	1,327
1,181	2,038	+ 7,034	+ 27,660	47. 44	1,397	0,000

§. 50. Elapſo igitur tempore $t = 1,181$ trabs a cylindro penitus recedere incipiet et dehinc libere motu acquiſito delabetur; vbi quidem centrum grauitatis motum in parabola proſequetur, dum motus gyratorius, quem iam concepit, manebit vniformis, cuius ſcilicet celeritas angularis erit $= 1,397$, qua ergo ſingulis minutis ſecundis gyrabitur per angulum 80°. 10′. At ſi pro hoc momento locus centri grauitatis M deſideretur, is binis coordinatis iſtis determinatur:

$$x = s \text{ ſin. } \Phi - \text{coſ. } \Phi = 0,836 = CP \text{ et}$$
$$y = s \text{ coſ. } \Phi + \text{ſin. } \Phi = 2,1108 = PM.$$

Tab. I. Fig. 10.

Quin etiam ipſe motus, quem centrum grauitatis M hoc modo acquiſierit, hinc aſſignari poteſt: erit enim celeritas verticalis

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \text{ ſin. } \Phi + \frac{s\,d\Phi}{dt} \text{ coſ. } \Phi + \frac{d\Phi}{dt} \text{ ſin. } \Phi = 8,1550,$$

quae ergo celeritas deinceps vniformiter augebitur et ſingulis minutis ſecundis incrementum accipiet $= 32$ pedum. Celeritas denique horizontalis erit

dy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\mathrm{cos}.\,\Phi - \frac{s\,d\Phi}{dt}\,\mathrm{fin}.\,\Phi + \frac{d\Phi}{dt}\,\mathrm{cos}.\,\Phi = 7,7785$$

quam celeritatem deinceps conſtanter inuariatam ſeruabit.

Conſiderationes ſuper quaeſtione in genere propoſita.

§. 51. Ex exemplo allato, quod euoluimus, ſatis liquet, quo modo alios quoscunque huiusmodi caſus determinatos calculo expediri conueniat, vbi quidem inprimis eſt tenendum, interualla temporis eo minora accipi debere, quo minus a veritate aberrare voluerimus. Tum vero etiam, ſi frictionem negligere voluerimus, aequatio integralis, ex principio virium viuarum fluens, haud leue ſubſidium afferre poterit; quam ob rem iſtam aequationem integralem hic adhuc adiiciamus.

§. 52. Omiſſa autem frictione ambae aequationes differentiales ſecundi gradus, quibus ſolutio problematis continetur, ita erant comparatae:

$$\text{I. } dds - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2\,\mathrm{fin}.\,\Phi,$$

$$\text{II. } 2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2\,\mathrm{cof}.\,\Phi - \frac{kk\,dd\Phi}{s}.$$

Iam ducatur prima in $2\,ds + 2\,c\,d\Phi$, altera vero in $2\,s\,d\Phi$ et in vnam ſummam collectae dabunt

$$2\,ds\,dds + 2\,s\,ds\,d\Phi^2 + 2\,ss\,d\Phi\,dd\Phi + 2(cc+kk)\,d\Phi\,dd\Phi$$
$$+ 2\,c\,ds\,dd\Phi + 2\,c\,d\Phi\,dds$$
$$= 4\,g\,dt^2(ds\,\mathrm{fin}.\,\Phi + c\,d\Phi\,\mathrm{fin}.\,\Phi + s\,d\Phi\,\mathrm{cof}.\,\Phi),$$

cuius integrale ſponte ſe prodit

$$ds^2 + ss\,d\Phi^2 + (cc+kk)\,d\Phi^2 + 2\,c\,d\Phi\,ds$$
$$= 4\,g\,dt^2(s\,\mathrm{fin}.\,\Phi - c\,\mathrm{cof}.\,\Phi + C)$$

vbi conſtantem C ex ſtatu initiali definiri oportet.

§. 53.

§. 53. Aequatio haec integralis concinnius hoc modo repraesentari poterit:

$$(ds+c\,d\Phi)^2+(kk+ss)\,d\Phi^2=4g\,dt^2(s\,\text{sin.}\,\Phi-c\,\text{cos.}\,\Phi+C)$$

quae, si vt supra faciamus $\frac{ds}{dt}=p$ et $\frac{d\Phi}{dt}=\theta$, accipiet hanc formam:

$$(p+c\theta)^2+(kk+ss)\theta\theta=4g(s\,\text{sin.}\,\Phi-c\,\text{cos.}\,\Phi+C)$$

ex qua aequatione pro quouis tempore, si iam innotuerit valor ipsius θ praeter variabiles principales s et Φ, valor litterae p commode assignari poterit, quo pacto calculus supra adhibitus ad maiorem certitudinem euehi poterit.

§. 54. Quod si vero etiam frictionis rationem habere lubuerit, vnice aequationibus differentialibus secundi gradus inhaerere cogimur, quae erant:

$$\text{I. } dds-s\,d\Phi^2+c\,dd\Phi+\frac{\lambda kkdd\Phi}{s+\lambda b}=2g\,dt^2\,\text{sin.}\,\Phi;$$

$$\text{II. } 2\,dsd\Phi+sdd\Phi+c\,d\Phi^2+\frac{kkdd\Phi}{s+\lambda b}=2g\,dt^2\,\text{cos.}\,\Phi;$$

vbi littera λ ex quantitate frictionis definiri oportet, cuius valor vulgo aestimari solet $=\frac{1}{3}$, qui autem, si superficies magis minusue fuerint politae, etiam siue minor siue maior accipi debebit. Hic autem valor tantum locum habet, quando reuera datur attritus. At si minor valor sufficiat ad attritum auertendum, tum etiam ipsi λ minor iste valor tribui debebit, hancque cautelam in singulis temporis interuallis sollicite obseruasse necesse est. Cum igitur sit celeritas attritus $=\frac{ds}{dt}+\frac{ad\Phi}{dt}$, valor huius formulae in tempore expressus nihilo aequetur, indeque eliciatur valor litterae λ, qui si minor prodeat quam $\frac{1}{3}$, is in calculum introducatur, eritque tum $\frac{ds}{dt}=-\frac{ad\Phi}{dt}$; sin autem maior prodierit, tum ſumi oportet $\lambda = \frac{1}{3}$, quo caſu aderit attritus.

Inueſtigatio motus trabis, quamdiu ob frictionem attritus in contactu A auertitur.

§. 55. Si ſtatus initialis trabis ſuper cylindro ita fuerit comparatus, vt in contactu nullus detur attritus; tum vel minima frictio valebit attritum per aliquod tempus impedire, quamdiu ſcilicet ad hoc praeſtandum minor valor litterae λ ſufficit quam $\frac{1}{3}$, ſiquidem hanc fractionem $\frac{1}{3}$ pro maxima vi, quam frictio exerere valet, aſſumamus. Quamdiu autem nullus ad fuerit attritus, ſingulari prorſus commodo vſu venit, vt motus trabis, qui ſine frictione foret inperſcrutabilis, expediri poſſit, id quod vtique operae pretium erit luculentius oſtendiſſe.

§. 56. Cum celeritas attritus in contactu A ſit $= \frac{ds}{dt} + \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ponamus eam initio motus fuiſſe nullam, et videamus, per quantum temporis ſpatium ea euaneſcens ſit manſura. Hunc in finem in noſtris aequationibus ſtatim ponamus $ds = -a\,d\Phi$, hincque $dds = -a\,dd\Phi$ et $s = f - a\Phi$. His autem valoribus ſubſtitutis binae noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$\text{I. } -a\,dd\Phi - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi - 2g\,dt^2 \,\text{ſin.}\, \Phi = -\frac{\lambda kk\,dd\Phi}{s+\lambda b};$$

$$\text{II. } -2a\,d\Phi^2 + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2 - 2g\,dt^2 \,\text{coſ.}\, \Phi = -\frac{kk\,dd\Phi}{s+\lambda b};$$

quarum prior per poſteriorem diuiſa ſtatim dat

$$\lambda = \frac{(c-a)\,dd\Phi - s\,d\Phi^2 - 2g\,dt^2 \,\text{ſin.}\, \Phi}{(c-2a)\,d\Phi^2 + s\,dd\Phi - 2g\,dt^2 \,\text{coſ.}\, \Phi},$$

qui valor quamdiu minor fuerit quam $\frac{1}{3}$, motus quem inueſtigamus reuera locum habebit; ſimulac vero maiorem obti-

obtinebit valorem, tum eius loco fractio $\frac{1}{3}$ scribi debebit, et resolutio aequationum prorsus alio modo erit instituenda; quandoquidem tum trabs super cylindro prorepere incipiet.

§. 57. Cum posuerimus $c = a + b$, valor ipsius λ hoc modo concinnius exprimetur:

$$\lambda = \frac{-b\,dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 2g\,dt^2 \sin.\Phi}{(a-b)\,d\Phi^2 - s\,dd\Phi + 2g\,dt^2 \cos.\Phi},$$

vbi litteram s loco $f - a\Phi$ breuitatis gratia relinquimus. Hinc igitur colligimus

$$s + \lambda b = -\frac{(bb+ss)\,dd\Phi + as\,d\Phi^2 + 2bg\,dt^2 \sin.\Phi + 2gs\,dt^2 \cos.\Phi}{(a-b)\,d\Phi^2 - s\,dd\Phi + 2g\,dt^2 \cos.\Phi}.$$

§. 58. Hoc valore pro $s + \lambda b$ inuento, eum in posteriore aequatione substituamus, quae cum hanc induat formam:

$$kk\,dd\Phi = (s + \lambda b)\,[(a-b)\,d\Phi^2 - s\,dd\Phi + 2g\,dt^2 \cos.\Phi]$$

facta substitutione obtinebimus

$$kk\,dd\Phi = -(bb+ss)\,dd\Phi + as\,d\Phi^2$$
$$+ 2bg\,dt^2 \sin.\Phi + 2sg\,dt^2 \cos.\Phi,$$

quae est aequatio duas tantum continens variabiles Φ et t, in qua elementum dt constans est assumtum.

§. 59. Quoniam hic ipsa quantitas t non inest, hanc aequationem commode ad differentialem primi gradus reducere licebit. Ponatur enim $dt = p\,d\Phi$, et quia $ddt = 0$, erit $p\,dd\Phi + dp\,d\Phi = 0$, hincque $dd\Phi = -\frac{dp\,d\Phi}{p}$; quo valore substituto adipiscemur sequentem aequationem:

$$0 = \frac{kk\,dp}{p} + \frac{(bb+ss)\,dp}{p} + as\,d\Phi$$
$$+ 2bg\,pp\,d\Phi \sin.\Phi + 2gs\,pp\,d\Phi \cos.\Phi,$$

 quae

quae reducatur ad hanc formam:

$$-(bb+kk+ss)\frac{dp}{p}=d\Phi(as+2bgpp\,\text{fin.}\Phi+2gspp\,\text{cof.}\Phi).$$

Ponamus insuper $p=\frac{1}{q}$, vt fiat $\frac{dp}{p}=-\frac{dq}{q}$, et nostra aequatio erit:

$$(bb+kk+ss)qdq=d\Phi(asqq+2bg\,\text{fin.}\Phi+2gs\,\text{cof.}\Phi).$$

§. 60. Transferamus nunc terminum $asqqd\Phi$ in alteram partem, et quia $ad\Phi=-ds$, habebimus hanc aequationem sponte integrabilem:

$$(bb+kk+ss)qdq+sqqdds=2gd\Phi(b\,\text{fin.}\Phi+s\,\text{cof.}\Phi),$$

quippe cuius integrale est:

$$(bb+kk+ss)\,qq=4g\int(bd\Phi\,\text{fin.}\Phi+sd\Phi\,\text{cof.}\Phi)$$
$$=-4gb\,\text{cof.}\Phi+4g\int sd\Phi\,\text{cof.}\Phi,$$

quare cum fit $s=f-a\Phi$, postremum membrum dabit

$$4gf\,\text{fin.}\Phi-4ga\int\Phi d\Phi\,\text{cof.}\Phi.$$

Est vero

$$\int\Phi d\Phi\,\text{cof.}\Phi=\Phi\,\text{fin.}\Phi+\text{cof.}\Phi,$$

ita vt iam nostra aequatio integrata fit

$$(bb+kk+ss)qq=4g(f\,\text{fin.}\Phi-a\Phi\,\text{fin.}\Phi-(a+b)\,\text{cof.}\Phi+C),$$

fiue

$$(bb+kk+ss)qq=4g(s\,\text{fin.}\Phi-(a+b)\,\text{cof.}\Phi+C),$$

quam constantem C ex statu initiali definiri oportet.

§. 61. Quoniam igitur posuimus

$$dt=pd\Phi=\frac{d\Phi}{q}\text{ erit }q=\frac{d\Phi}{dt},$$

quo valore substituto impetrabimus sequentem determinationationem:

$$(bb+kk+ss)\frac{d\Phi^2}{dt^2} = 4g\,(s\,\text{fin.}\,\Phi - (a+b)\,\text{cof.}\,\Phi + C),$$

vnde porro deducimus

$$dt = \frac{d\Phi\,\sqrt{(bb+kk+ss)}}{2\sqrt{g\,(s\,\text{fin.}\,\Phi - (a+b)\,\text{cof.}\,\Phi + C)}},$$

cuius quidem formulae integratio haud patet, fed facile per quadraturas conftruitur, et inde plurimum praeftitiffe vtique videmur, quod faltem partem iftius quaeftionis abftrufiffimae tam optato fucceffu perficere contigerit.

§. 62. Cum autem ifte motus non diutius durare fit cenfendus, quam donec valor litterae λ vsque ad limitem conftitutum $\frac{1}{3}$ affurgat, per valores integrales modo inuentos etiam valorem litterae λ definiri oportet. Quoniam igitur inuenimus:

$$\lambda = \frac{-b\,dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 2g\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi}{(a-b)\,dd\Phi^2 - s\,dd\Phi + 2g\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi},$$

hinc primo differentialia fecundi gradus excludamus ope aequationis inuentae:

$$dd\Phi = \frac{as\,d\Phi^2 + 2bg\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi + 2gs\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi}{bb+kk+ss},$$

ac reperiemus

$$\lambda = \frac{-abs\,d\Phi^2 + (bb+kk+ss)\,s\,d\Phi^2 - (2bgs\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi + 2g\,(kk+ss)\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi}{(a-b)\,(bb+kk)\,d\Phi^2 - 2bgs\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi + 2g\,(bb+kk)\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi},$$

quae formula per pofitionem $d\Phi = q\,dt$ vlterius reducitur ad hanc:

$$\lambda = \frac{(bb+kk+ss)\,sqq - absqq - 2bgs\,\text{cof.}\,\Phi + 2g\,(kk+ss)\,\text{fin.}\,\Phi}{(a-b)\,(bb+kk)\,qq - 2bgs\,\text{fin.}\,\Phi + 2g\,(bb+kk)\,\text{cof.}\,\Phi},$$

vbi cum inuenerimus

$$qq = \frac{4g\,(s\,\text{fin.}\,\Phi - (a+b)\,\text{cof.}\,\Phi + C)}{bb+kk+ss},$$

hoc valore fubftituto concluditur tandem

$$\lambda = \frac{2s\,(bb+kk+ss-ab)\,(s\,\text{fin.}\,\Phi - (a+b)\,\text{cof.}\,\Phi + C) - (bb+kk+ss)\,(bs\,\text{cof.}\,\Phi - (kk+ss)\,\text{fin.}\,\Phi)}{2\,(a-b)\,(bb+kk)\,(s\,\text{fin.}\,\Phi - (a+b)\,\text{cof.}\,\Phi + C) - (bb+kk+ss)\,(bs\,\text{fin.}\,\Phi - (bb+kk)\,\text{cof.}\,\Phi)}.$$

§. 63. Hoc igitur modo valor ipſius λ per ſolum angulum Φ exprimitur. In huius autem fractionis tam numeratore quam denominatore triplicis generis membra occurrunt, quorum primum continet ſin. Φ, ſecundum coſ. Φ et tertium conſtantem C. Sic in numeratore membrum primi generis dat

$$(3bbss + 4kkss + 3s^4 - 2abss + bbkk + k^4)\,\text{ſin.}\Phi,$$

membrum ſecundi generis:

$$-s\,\text{coſ.}\Phi(2ass + 3bss + 3bkk + 3b^3 + 2akk + 2aab),$$

et membrum tertii generis:

$$2s(bb + kk + ss - ab)\,C.$$

Simili modo pro denominatore erit membrum primi generis:

$$s\,\text{ſin.}\Phi.(2abb + 2akk - 3b^3 - 3bkk - bss),$$

ſecundi generis:

$$(3b^4 + 4bbkk + bbss - 2aabb - 2aakk + kkss + k^4)\,\text{coſ.}\Phi,$$

tertii generis:

$$(2abb + 2akk - 2b^3 - 2bkk)\,C.$$

§. 84. Totum negotium hic eo redit, vt quouis caſu oblato diſpiciatur, quousque angulum Φ augere liceat, ante quam valor iſte pro λ inuentus limitem $\frac{1}{3}$ ſuperare incipiat, hoc enim vbi contigerit, motus, quem hic definimus, natura ſubito mutatur et trabs ſuper axe prorepere incipiet, quem motum aliter niſi per ipſas aequationes differentiales ſecundi gradus definire non licebit.

Appli-

Applicatio huius inueſtigationis ad caſum ſpecialem ſupra deſcriptum.

§. 65. Hic igitur iterum in motum eiusdem trabis inquiremus, quam ſupra iam ſumus contemplati; verum hoc diſcrimine, vt hic etiam frictionis rationem ſimus habituri; ipſum autem motum vlterius hac methodo proſequi non licebit, quam donec trabs ſuper cylindro prorepere incipiat. Habebimus igitur pro iſto caſu ſequentes valores:

$$a = \tfrac{1}{2},\ b = \tfrac{1}{2},\ c = 1,\ \text{et}\ kk = 12,$$

ſumamusque vt ante $2g = 32$, tum vero pro motus initio ſit

$$s = \tfrac{1}{2},\ \Phi = 0,\ \frac{ds}{dt} = 0,\ \text{et}\ \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

vnde cum hic ſumſerimus $s = f - a\Phi$, erit $f = \frac{1}{2}$, et quia erat $d\Phi = q\,dt$, ipſo initio etiam erit $q = 0$.

§. 66. His igitur valoribus admiſſis erit

$$ds = -\tfrac{1}{2}d\Phi;\ dds = -\tfrac{1}{2}dd\Phi\ \text{et}\ s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}d\Phi,$$

vnde aequationes pro motu fient

$$\text{I.}\ -\tfrac{1}{2}dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 32\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{12\lambda\,dd\Phi}{s + \frac{1}{2}\lambda}.$$

$$\text{II.}\ -s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{12\,dd\Phi}{s + \frac{1}{2}\lambda},$$

quarum illa per hanc diuiſa praebet

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2}dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 32\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{-s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

vnde fit

$$s + \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{-ss\,dd\Phi - \frac{1}{4}dd\Phi + \frac{1}{2}s\,d\Phi^2 + 32s\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi + 16\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{-s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 67.

§. 67. Cum igitur ex aequatione secunda sit

$$12\, d\, d\,\Phi = (s + \tfrac{1}{2}\lambda)(32\, d\, t^2 \operatorname{cof.}\Phi - s\, d\, d\,\Phi),$$

si valorem modo inuentum substituamus, habebimus

$$12\, d\, d\,\Phi = - s\, s\, d\, d\,\Phi - \tfrac{1}{4}\, d\, d\,\Phi + \tfrac{1}{2}\, s\, d\,\Phi^2$$
$$+ 32\, s\, d\, t^2 \operatorname{cof.}\Phi + 16\, d\, t^2 \operatorname{fin.}\Phi \text{ siue}$$
$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\, d\,\Phi = \tfrac{1}{2}\, s\, d\,\Phi^2 + 32\, s\, d\, t^2 \operatorname{cof.}\Phi + 16\, d\, t^2 \operatorname{fin.}\Phi),$$

quae aequatio, vti ex praecedentibus colligere licet, integrabilis reddetur si per $2\, d\,\Phi$ multiplicetur; prodibit enim

$$2(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\,\Phi\, d\, d\,\Phi - s\, d\,\Phi^3$$
$$= 32\, d\, t^2 (2\, s\, d\,\Phi \operatorname{cof.}\Phi + d\,\Phi \operatorname{fin.}\Phi),$$

vbi in secundo membro loco $d\,\Phi$ scribatur $-2\, d\, s$, vt habeatur

$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, 2\, d\,\Phi\, d\, d\,\Phi + 2\, s\, d\, s\, d\,\Phi^2$$
$$= 32\, d\, t^2 (2\, s\, d\,\Phi \operatorname{cof.}\Phi + d\,\Phi \operatorname{fin.}\Phi),$$

cuius integrale manifesto est

$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\,\Phi^2 = 32\, d\, t^2 (-\operatorname{cof.}\Phi + 2\int s\, d\,\Phi \operatorname{cof.}\Phi).$$

Est vero

$$\int s\, d\,\Phi \operatorname{cof.}\Phi = s \operatorname{fin.}\Phi - \int d\, s \operatorname{fin.}\Phi$$
$$= s \operatorname{fin.}\Phi + \tfrac{1}{2}\int d\,\Phi \operatorname{fin.}\Phi = s \operatorname{fin.}\Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{cof.}\Phi,$$

consequenter aequatio nostra integralis erit

$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\,\Phi^2 = 64\, d\, t^2 (s \operatorname{fin.}\Phi - \operatorname{cof.}\Phi + C).$$

§. 68. Quoniam igitur haec aequatio differentialis est primi gradus et duas tantum variabiles t et Φ complectitur, propter $s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\Phi$, hinc solutio per quadraturas absolui poterit: erit enim

$$64\, d\, t^2 = \frac{(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\,\Phi^2}{s \operatorname{fin.}\Phi - \operatorname{cof.}\Phi + C}.$$

Hic

Hic autem ex cognito initio motus conſtans C determinari debet. Cum enim initio fuerit $\Phi = 0$, $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ et $s = \frac{c}{a}$, conſtans iſta ita definietur vt ſit $C = 1$, ita vt habeamus hanc aequationem:

$$64\, dt^2 = \frac{(\frac{49}{4} + ss)\, d\Phi^2}{s \sin.\Phi - \cos.\Phi + 1},$$

ſiue ſi vt ante ponamus $\frac{d\Phi}{dt} = q$, erit

$$(\tfrac{49}{4} + ss)\, qq = 64\,(s \sin.\Phi - \cos.\Phi + 1).$$

§. 69. Reſumamus nunc valorem pro λ primo inuentum, qui erat

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2} dd\Phi + s\, d\Phi^2 + 32\, dt^2 \sin.\Phi}{-s\, dd\Phi + 32\, dt^2 \cos.\Phi},$$

modo autem inuenimus

$$dd\Phi = \frac{\frac{1}{2} s\, d\Phi^2 + 32\, s\, dt^2 \cos.\Phi + 16\, dt^2 \sin.\Phi}{\frac{49}{4} + ss},$$

vbi ſi loco $d\Phi$ ſcribamus $q\,dt$ erit

$$dd\Phi = \frac{dt^2 (\frac{1}{2} s qq + 32\, s \cos.\Phi + 16 \sin.\Phi)}{\frac{49}{4} + ss}.$$

Ac ſi pariter in valore λ loco $d\Phi$ ſcribamus $q\,dt$, habebimus

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2} dd\Phi + s qq\, dt^2 + 32\, dt^2 \sin.\Phi}{-s\, dd\varphi + 32\, dt^2 \cos.\varphi},$$

vbi ſi loco $\frac{dd\Phi}{dt^2}$ valorem modo inuentum ſubſtituamus, reperiemus

$$\lambda = \frac{48 sqq - 64 s \cos.\varphi + 1536 \sin.\varphi + 4 s^3 qq + 128\, ss \sin.\varphi}{-2 ssqq - 64\, s \sin.\varphi + 1568 \cos.\varphi},$$

vbi iam pro lubitu loco $q\,q$ ſcribi poterit valor inuentus

$$q\,q = \frac{64\,(s\,\text{ſin.}\,\varphi - \text{coſ.}\,\varphi + 1)}{\frac{49}{4} + s\,s}.$$

§. 70. Quo autem calculum ſequentem pro maximo angulo φ inueniendo, cui conueniat $\lambda = \frac{1}{3}$, faciliorem reddamus, ponamus praeter $\frac{d\Phi}{dt} = q$ etiam $\frac{dd\Phi}{dt^2} = r$, ita vt ſit

$$\left(\tfrac{49}{4} + s\,s\right) r = \tfrac{1}{2}\,s\,q\,q + 32\,s\,\text{coſ.}\,\varphi + 16\,\text{ſin.}\,\varphi,$$

ideoque

$$r = \frac{s\,q\,q + 64\,s\,\text{coſ.}\,\varphi + 32\,\text{ſin.}\,\varphi}{\frac{49}{2} + 2\,s\,s},$$

exiſtente

$$q\,q = \frac{64\,(s\,\text{ſin.}\,\varphi - \text{coſ.}\,\varphi + 1)}{\frac{49}{4} + s\,s}.$$

Computatis autem pro quouis angulo φ valoribus $q\,q$ et r erit

$$\lambda = \frac{-r + 2\,s\,q\,q + 64\,\text{ſin.}\,\Phi}{-2\,r\,s + 64\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

vnde, ſi pro lubitu aliquot valores angulo φ tribuantur, inde haud difficulter is angulus φ concluditur, cui reſpondeat $\lambda = \frac{1}{3}$.

§. 71. Faciamus periculum, ponendo $\varphi = 18°$, ſiue ſit in partibus radii $\varphi = 0{,}31416$, hincque erit $s = 0{,}34292$, vnde colligimus $q\,q = 0{,}80163$, hincque $r = 1{,}25474$, vnde conficitur $\lambda = 0{,}31783$, ideoque tantillo minus quam $\frac{1}{3}$, quamobrem ſi tota vis frictionis fuerit $= 0{,}3178\,\Pi$, denotante Π preſſionem, motus trabis per angulum $\varphi = 18°$

ſine

ſine attritu fieri poterit. Sin autem velimus vt prodeat $\lambda = \frac{1}{3}$, angulum φ aliquantillum vltra 18° augeri oportebit.

§ 72. Quoniam angulus φ non adeo magnus prodiit, vt eius ſinus notabiliter ab ipſo arcu diſcrepet, ita vt ſine ſenſibili errore ſumi poſſit $\sin.\varphi = \varphi$ et $\cos.\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi\varphi$, ob ss prae $\frac{49}{4}$ valde exiguum ſatis exacte erit $qq = \frac{128}{49}\varphi$; quare cum $qq = \frac{d\Phi^2}{dt^2}$, erit $dt^2 = \frac{49\, d\Phi^2}{128\, \Phi}$ ideoque $dt = \frac{7\, d\Phi}{8\sqrt{2\Phi}}$, vnde integrando elicitur $t = \frac{7}{8}\sqrt{2\varphi}$. Hinc ſi, vti aſſumſimus ſit $\varphi = 0,31316$ et $2\varphi = 0,62832$, ſequitur fore $t = 0,69359$, id quod egregie conuenit cum motu huius trabis ſupra definito; vnde patet, elapſo tempore $= \frac{7''}{10}$ fore angulum φ propemodum 18°, neque enim frictio in tempore ſenſibilem producit mutationem.

§. 73. Quin etiam in genere pro quouis angulo φ, per quem trabs ſine attritu procedet, tempus ſatis exacte aſſignari poterit, quandoquidem iſte arcus φ tam eſt paruus, vt eius poteſtates ſuperiores negligi queant. Cum enim in genere inuenerimus

$$qq = \frac{4g(s\sin.\Phi - (a+b)\cos.\Phi + C)}{bb + kk + ss},$$

ſi conſtantem C ita definiamus, vt initio, vbi fuerit $\varphi = 0$, etiam $q = \frac{d\Phi}{dt}$ euaneſcat, tum ob $s = f - a\varphi$; $\sin.\Phi = \Phi$ et $\cos.\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$ erit

$$qq = \frac{4g(f\Phi - \frac{1}{2}(a-b)\Phi\Phi)}{bb + kk + ss}.$$

Quare ſi in numeratore $\frac{1}{2}(a-b)\Phi\Phi$, in denominatore autem ss negligamus, fiet

$$qq = \frac{4fg\Phi}{bb+kk} = \frac{d\Phi^2}{dt^2},$$

hincque deducitur:

$$dt = \frac{d\Phi . \sqrt{(bb+kk)}}{2\sqrt{fg\Phi}},$$

cuius integrale eſt

$$t = \frac{\sqrt{fg\Phi}\sqrt{(bb+kk)}}{fg} = \sqrt{\frac{\Phi(bb+kk)}{fg}},$$

hocque tempus iam in minutis ſecundis erit expreſſum.

DE

DE MOTV CORPORIS AD DVO CENTRA VIRIVM FIXA ATTRACTI.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Inter Problemata Mechanica, quorum solutiones Geometris exacte perficere licuit, insigni sane loco habendum est illud, quo quaeritur de motu corporis ad bina centra virium fixa attracti, et cuius solutionem Illustris *Eulerus* tradidit primum quidem pro illo casu speciali, quo motus corporis in eodem plano peragitur, tum vero generatim pro motu quocunque corporis. (Vide Nou. Comment. Acad. Petrop. Tom. X et XI.) Quamuis autem Illustris *Eulerus* completam adeo solutionem huius Problematis tradiderit, vt in ea nihil desideretur; tamen Illuſtris Geometra de la Grange dignitate argumenti allectus, in iſto Problemate ſoluendo induſtriam quoque ſuam exercere voluit, quod eleganti analyſi Tom V. Miſcellaneor. Taurinenſium inſerta, perfecit. Quum igitur mihi quoque ante complures annos de hoc Problemate meditanti, haud prorſus inelegantes ſolutiones ſe obtulerint, non dubito quin Geometris gratum fuerit, ſi iſtarum brevem heic adumbrationem expoſuerim.

Tab. III Fig. 8. §. 2. Sint duo centra virium fixa A, B, quae iungantur linea recta A B, locus corporis C ad haec duo centra attracti ſit C, ideoque ductis rectis A C, B C, liquet vires quibus corpus C ad iſta puncta fixa A, B, attrahitur, per $\frac{A}{AC^2}$; $\frac{B}{BC^2}$ exprimi poſſe. Concipiamus nunc per A B ductum eſſe planum fixum A V B, in quod ex C demittatur normalis C V, tum vero ex V in rectam A B ducatur perpendicularis V U et iungatur C U. Hac igitur adhibita conſtructione ſequentibus vtamur denominationibus:

$$AB = a;\ AU = x;\ BU = AB - AU = t = a - x;$$
$$VU = y;\ CV = z;\ CU = w;\ AC = v;\ BC = u;$$
$$\text{ang.}\, CUV = \phi;\ \text{ang.}\, CAB = \eta;\ \text{ang.}\, CBA = \theta;$$

vbi quidem obſeruare licet ob C V normalem ad planum A V B et V U perpendicularem ad A B ceu interſectionem planorum A V B; A C B, eſſe C U quoque perpendicularem ad A B.

§. 3. Quia igitur vis qua C ad punctum fixum A attrahitur exprimatur per $\frac{A}{v^2}$; ſi iſta vis ſecundum tres directio-

directiones coordinatarum AB, VU, CV resoluatur, consequemur has tres vires: $\frac{Ax}{v^3}$; $\frac{Ay}{v^3}$; $\frac{Az}{v^3}$; similique modo vis qua corpus C ad B attrahitur $\frac{B}{u^2}$ in istas tres vires resoluetur: $\frac{Bt}{u^3}$; $\frac{By}{u^3}$; $\frac{Bz}{u^3}$. Per principia igitur Mechanica, si elementum $d\tau$ elemento temporis statuatur proportionale, has obtinebimus aequationes differentiales:

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Ax}{v^3} + \frac{Bt}{u^3};$$
$$\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3};$$
$$\frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Az}{v^3} - \frac{Bz}{u^3}.$$

Quum vero sit:

$$x = v \operatorname{cos.} \eta;$$
$$t = u \operatorname{cos.} \theta;$$
$$y = w \operatorname{cos.} \Phi = v \operatorname{sin.} \eta \operatorname{cos.} \Phi;$$
$$z = w \operatorname{sin.} \Phi = v \operatorname{sin.} \eta \operatorname{cos.} \Phi;$$

ex quo colligitur:

$$ddx = ddv \operatorname{cos.}\eta - 2d\eta dv \operatorname{sin.}\eta - v dd\eta \operatorname{sin.}\eta - v d\eta^2 \operatorname{cos.}\eta;$$
$$ddy = ddw \operatorname{cos.}\Phi - 2dwd\Phi \operatorname{sin.}\Phi - wdd\Phi \operatorname{sin.}\Phi - wd\Phi^2 \operatorname{cos.}\Phi;$$
$$ddz = ddw \operatorname{sin.}\Phi + 2dwd\Phi \operatorname{cos.}\Phi + wdd\Phi \operatorname{cos.}\Phi - wd\Phi^2 \operatorname{sin} \Phi;$$

si sequens fiat combinatio:

$$ddx \operatorname{cos.}\eta + ddy \operatorname{sin.}\eta \operatorname{cos.}\Phi + ddz \operatorname{sin.}\eta \operatorname{sin.}\Phi;$$

primum quidem habebimus:

$$ddy \operatorname{sin.}\eta \operatorname{cos.}\Phi + ddz \operatorname{sin.}\eta \operatorname{sin.}\Phi = ddw \operatorname{sin.}\eta - wd\Phi^2 \operatorname{sin.}\eta;$$

tumque ob

$$ddw = ddv \operatorname{sin.}\eta + 2dvd\eta \operatorname{cos.}\eta + vdd\eta \operatorname{cos.}\eta - vd\eta^2 \operatorname{sin.}\eta;$$

$$\frac{ddx\,\text{cos.}\,\eta + ddy\,\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\Phi + ddz\,\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\Phi}{d\,\tau^2} - \frac{ddv - v(d\,\eta^2 + d\,\Phi^2\,\text{sin.}\,\eta^2)}{d\,\tau^2}$$
$$= -\frac{A(v\,\text{cos.}\,\eta^2 + v\,\text{sin.}\,\eta^2\,\text{cos.}\,\Phi^2 + v^2\,\text{sin.}\,\eta^2\,\text{sin.}\,\Phi^2)}{v^3} + \frac{B\,u\,\text{cos.}\,\theta\,\text{cos.}\,\eta}{u^3}$$
$$- \frac{B(v\,\text{sin.}\,\eta^2\,\text{cos.}\,\Phi^2 + v\,\text{sin.}\,\eta^2\,\text{sin.}\,\Phi^2)}{u^3}$$
$$= -\frac{A}{v^2} + \frac{B\,u\,\text{cos.}\,\theta\,\text{cos.}\,\eta}{u^3} - \frac{B\,v\,\text{sin.}\,\eta^2}{u^3}.$$

Quum igitur ſit

$$CA : CB = \text{ſin.}\,CBA : \text{ſin.}\,CAB;$$

id eſt $v\,\text{ſin.}\,\eta = u\,\text{ſin.}\,\theta$; et

$$\text{coſ.}(\eta + \theta) = \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ}\,\theta - \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta,$$

inde colligitur:

$$\frac{ddv - v(d\,\eta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B}{u^2}(\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\eta - \text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta)$$
$$= -\frac{A}{v^2} + \frac{B\,\text{coſ.}(\eta + \theta)}{u^2}.$$

Similique modo obtinebimus:

$$\frac{ddu - u(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{B}{u^2} + \frac{A\,\text{coſ.}(\eta + \theta)}{v^2}.$$

§. 4. Quum ſit

$v^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $u^2 = t^2 + y^2 + z^2$, hinc

$v\,d\,v = x\,d\,x + y\,d\,y + z\,d\,z$ et

$u\,d\,u = t\,d\,t + y\,d\,y + z\,d\,z$;

ſi aequationes differentiales §. 3. allatae reſpectiue multiplicentur per $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$ et earum ſumma capiatur, conſequemur:

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{d\,\tau^2} = -\frac{A(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{u^3} - \frac{B(t\,dt + y\,dy + z\,dz)}{u^3}$$
$$= -\frac{A\,dv}{v^3} - \frac{B\,du}{u^3};$$

hincque integrando:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\,\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

ideo-

ideoque ob

$$d y = d w \cos. \Phi - w\, d \Phi \sin. \Phi \text{ et}$$
$$d z = d w \sin. \Phi + w\, d \Phi \cos. \Phi;$$
$$d y^2 + d z^2 = d w^2 + w^2 d \Phi^2;$$

tumque ob

$$d x^2 = d v^2 \cos. \eta^2 - 2 v\, d \eta\, d v \sin. \eta \cos. \eta + v^2 d \eta^2 \sin. \eta^2 \text{ et}$$
$$d w^2 = d v^2 \sin. \eta^2 + 2 v\, d \eta\, d v \sin. \eta \cos. \eta + v^2 d \eta^2 \cos. \eta^2;$$

fiet

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d \tau^2} = \frac{d v^2 + v^2 d \eta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

similique modo:

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d \tau^2} = \frac{d u^2 + u^2 d \theta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Quum igitur supra inuenerimus:

$$\frac{d d v - v(d y^2 + d \Phi^2 \sin. \eta^2)}{d \tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B \cos. (\theta + \eta)}{u^2};$$
$$\frac{d d u - u(d \theta^2 + d \Phi^2 \sin. \theta^2)}{d \tau^2} = -\frac{B}{u^2} + \frac{A \cos. (\theta + \eta)}{v^2};$$

multiplicata priori harum aequationum per v, posteriori per u, et addita ad priorem $\frac{d v^2 + v^2 d y^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2}$, ad posteriorem $\frac{d u^2 + u^2 d \theta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2}$; consequemur has aequationes differentiales:

$$\frac{v\, d d v + d v^2}{d \tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B(2 u + v \cos. (\eta + \theta))}{u^2} + \frac{2 C}{a};$$
$$\frac{u\, d d u + d u^2}{d \tau^2} = \frac{B}{u} + \frac{A(2 v + u \cos. (\eta + \theta))}{v^2} + \frac{2 C}{a}.$$

Quum vero in triangulo A C B, sit

$$A B^2 = A C^2 + B C^2 - 2\, A C . B C . \cos. A C B,$$

introductis expressionibus Analyticis erit:

$$a^2 = v^2 + u^2 + 2 u v \cos. (\eta + \theta), \text{ hinc}$$
$$\cos. (\eta + \theta) = \frac{a^2 - v^2 - u^2}{2 u v},$$

 ideo-

ideoque introducto hoc valore pro $\cos.(\eta + \theta)$, tandem ad has perueniemus aequationes differentiales:

$$(\mathrm{I.})\quad \frac{v\,ddv + dv^2}{d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B(3u^2 - v^2 + a^2)}{2u^3} + \frac{2C}{a};$$

$$(\mathrm{II.})\quad \frac{u\,ddu + du^2}{d\tau^2} = \frac{B}{u} + \frac{A(3v^2 - u^2 + a^2)}{2v^3} + \frac{2C}{a}.$$

§. 5. Quum sit

$$v\,d\,d\,v + d\,v^2 = d.\,v\,d\,v \text{ et}$$

$$u\,d\,d\,u + d\,u^2 = d.\,u\,d\,u;$$

multiplicetur aequatio (I.) per $u\,d\,u$ et aequatio (II.) per $v\,d\,v$, et productorum capiatur summa, quo facto prodibit:

$$\frac{u\,du.\,d.(v\,dv) + v\,dv.\,d.(u\,du)}{d\tau^2} = \frac{A\,u\,du}{v} + \frac{B\,du}{2u^2}(3u^2 - v^2 + u^2) + \frac{2C}{u}(u\,du + v\,dv)$$
$$+ \frac{B\,v\,dv}{u} + \frac{A\,dv}{2v^2}(3v^2 - u^2 + a^2).$$

Heic autem commodum accidit, vt ista aequatio sit integrabilis, existente nimirum integrali:

$$(\mathrm{III.})\quad \frac{v\,u\,dv\,du}{d\tau^2} = \tfrac{3}{2}(A\,v + B\,u) + A\frac{(u^2 - a^2)}{2v} + B\frac{(v^2 - a^2)}{2u}$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2 + u^2) + D\,a, \text{ siue}$$
$$\frac{v\,u\,dv\,du}{d\tau^2} = (A\,v + B\,u) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u}\right)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2 + u^2) + D\,a.$$

§. 6. Per aequationes primitiuas §. 3. allatas liquet esse:

$$y\,d\,d\,z - z\,d\,d\,y = 0; \text{ hincque } y\,dz - z\,dy = \alpha\,d\tau;$$

existente α quantitate constante; at vero

$$y\,dz - z\,dy = w^2\,d\Phi; \text{ hinc ponamus } w^2\,d\Phi = m\,a^2\,d\tau.$$

Quum igitur supra inuenerimus:

$$\frac{dv^2 + v^2\,d\eta^2 + w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

mul-

multiplicata hac aequatione per w^2 et loco $w^4\, d\,\Phi^2$ substituto $m^2\, a^4\, d\,\tau^2$, consequemur:

$$w^2 \left(\frac{d v^2 + v^2 d \eta^2}{d \tau^2}\right) = 2\, w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2\, a^4.$$

Nunc itaque in id intenti erimus vt quantitates w^2; $d v^2 + v^2\, d\,\eta^2$; per v et u, eorumque differentialia exprimamus; quum itaque sit: $u^2 = v^2 - 2\, a\, v \cos. \eta + a^2$; differentiando erit:

$$u\, d u = v\, d v - a\, d v \cos. \eta + a\, v\, d \eta \sin. \eta ;$$

ex quo fit

$$d u = d v \left(\frac{v - a \cos. \eta}{u}\right) + \frac{a v}{u}\, d \eta \sin. \eta ;$$

Atqui in triangulo A C B, est B C : A B = sin. A : sin. A C B, hinc si angulus A C B exprimatur per ψ, consequemur: $u : a = \sin. \eta : \sin. \psi$, quare loco termini $\frac{a v}{u}\, d \eta \sin. \eta$, adhiberi potest $v\, d \eta \sin. \psi$. Tum vero quia vti ex Geometricis constat est

$$A C = A B \cos. A + B C \cos. A C B, \text{ siue}$$

$$v = a \cos. \eta + w \cos. \psi; \text{ fiet}$$

$$v - a \cos. \eta = u \cos. \psi \text{ et } \frac{v - a \cos. \eta}{u} = \cos. \psi;$$

hincque colligitur:

$$d u = d v \cos. \psi + v\, d \eta \sin. \psi;$$

nec non

$$d u - d v \cos. \psi = v\, d \eta \sin. \psi;$$

sumtis igitur quadratis

$$v^2\, d \eta^2 \sin. \psi^2 = d u^2 - 2\, d u\, d v \cos. \psi + d v^2 \cos. \psi^2;$$

hincque

$$\sin. \psi^2 (d v^2 + v^2\, d \eta^2) = d u^2 - 2\, d u\, d v \cos. \psi + d v^2.$$

Vlterius quia eſt

$$2\,\triangle\,ACB = CU.\,AB = AC.\,BC.\,\text{ſin.}\,ACB,$$

habebimus: $a\,w = v\,u\,\text{ſin.}\,\psi$; ideoque erit:

$$w^2(dv^2 + v^2 d\eta^2) = \frac{v^2 u^2\,\text{ſin.}\,\psi^2}{a^2}(dv^2 + v^2 d\eta^2),$$

hac igitur expreſſione introducta nunc iſtam conſequemur aequationem:

$$\frac{v^2 u^2}{a^2}\left(\frac{du^2 - 2\,du\,dv\,\text{coſ.}\,\psi + dv^2}{d\tau^2}\right) = 2\,w^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^4;$$

ſiue ob $\text{coſ.}\,\psi = \frac{v^2 + u^2 - a^2}{2\,v\,u}$,

$$\text{(IV.)}\quad \frac{vu(vu(dv^2 + du^2) - du\,dv(v^2 + u^2 - a^2))}{d\tau^2}$$
$$= 2\,a^2 w^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^6.$$

§. 7. Quod ſi nunc ex aequatione §. 5. allata, valor ipſius $v\,u\,dv\,du$ determinetur, et in $v^2 + u^2 - a^2$, ducatur, hoc valore ſubſtituto haec prodibit aequatio:

$$v^2 u^2\left(\frac{dv^2 + du^2}{d\tau^2}\right) = 2\,a^2 w^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right)$$
$$- m^2 a^6 + (A\,v + B\,u)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \frac{A}{2\,v}(v^2 + u^2 - a^2)^2 + \frac{B}{2\,u}(v^2 + u^2 - a^2)^2$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2 + u^2)(v^2 + u^2 - a^2) + D\,a(v^2 + u^2 - a^2).$$

Quum igitur triangulum ABC praebeat:

$$4\,a^2 w^2 = 2\,a^2 v^2 + 2\,a^2 u^2 + 2\,v^2 u^2 - a^4 - u^4 - v^4;$$
$$4\,a^2 w^2 + (v^2 + u^2 - a^2)^2 = 4\,v^2 u^2;$$

nec non

$$4\,a^2 w^2 + 2\,(v^2 + u^2)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$= u^4 + 6\,u^2 v^2 + v^4 - a^4;$$

hisce valoribus introductis iſta prodibit aequatio:

$v^2 u^2$

$$v^2 u^2 \left(\frac{dv^2 + du^2}{a\,T^2}\right) = (Av + Bu)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ 2vu(Au + Bv) + \frac{C}{2a}(u^4 + 6v^2u^2$$
$$+ v^4 - a^4) + Da(v^2 + u^2 - a^2) - m^3 a^6;$$

Cum hac igitur aequatione ſi combinetur illa §. 5. inuenta per $2vu$ multiplicata:

$$2\frac{v^2 u^2\, dv\, du}{d\,T^2} = 2vu(Av + Bu) + (Au + Bv)$$
$$(v^2 + u^2 - a^2) + \frac{2C}{a}(u^2 + v^2)vu + 2Davu,$$

ita vt poſterior ad priorem primum addatur, tum ab illa ſubtrahatur, hae prodibunt aequationes:

$$1^a.)\; v^2 u^2 \left(\frac{dv + du}{d\,T^2}\right)^2 = (A + B)((v+u)^3 - a^2(v+u))$$
$$+ \frac{C}{2a}((v+u)^4 - a^4) + Da((v+u)^2 - a^2) - m^3 a^6;$$
$$2^a.)\; v^2 u^2 \left(\frac{dv - du}{d\,T^2}\right)^2 = (A - B)((v-u)^3 - a^2(v-u))$$
$$+ \frac{C}{2a}((v-u)^4 - a^4) + Da((v-u)^2 - a^2) - m^3 a^6;$$

Diuiſa priori harum aequationum per poſteriorem, ſi ſtatuatur

$$v + u = ar,\; v - u = as;$$

prodibit

$$\frac{dr^2}{ds^2} = \frac{(A+B)(r^3 - r) + \frac{C}{2}(r^4 - 1) + D(r^2 - 1) - m^3 a^3}{(A-B)(s^3 - s) + \frac{C}{2}(s^4 - 1) + D(s^2 - 1) - m^3 a^3};$$

in qua aequatione quum variabiles ſeparatae ſint, ipſum Problema pro reſoluto haberi debet.

§. 8. Caeterum ad aequationes ultimo loco allatas ſequenti quoque modo pertingere licet. Aequationum (I.) et (II.) cum aequatione (III.) iſta fiat combinatio:

$$2vu^2.(\mathrm{I.}) + 2u^2v.(\mathrm{II.}) + 2(v+u).(\mathrm{III.}),$$

eritque hinc:

$$\frac{2vu^2(vddv+dv^2)}{d\tau^2}+2uv^2\frac{(uddu+du^2)}{d\tau^2}+2(v+u)\frac{vudud v}{d\tau^2}=$$
$$+2Au^2+\frac{Bv}{u}(3u^2-v^2+a^2)+\frac{4Cvu^2}{a}$$
$$+3(v+u)(Av+Bu)$$
$$+2Bv^2+\frac{Au}{v}(3v^2-u^2+a^2)+\frac{4Cuv^2}{a}$$
$$+\frac{A(v+u)(u^2-a^2)}{v}+\frac{B(v+u)(v^2-a^2)}{u}$$
$$+\frac{2C}{a}(v+u)(v^2+u^2)+2Da(v+u).$$

Quae aequatio ad hanc formam concinnam reducitur:

$$2v^2u^2\frac{(ddv+ddu)}{d\tau^2}+2vu\frac{(vdu+udv)(dv+du)}{d\tau^2}$$
$$=(A+B)(3(v+u)^2-a^2)+\frac{2C}{a}(v+u)^3+2Da(v+u).$$

Ideoque multiplicata aequatione vtrinque per $dv+du$ fiet integrabilis, integrali nimirum inde prodevnte

$$v^2u^2\frac{(dv+du)^2}{d\tau^2}=(A+B)((v+u)^3-a^2(v+u))$$
$$+\frac{C}{2a}(v+u)^4+Da(v+u)^2+Ea^3,$$

atque hoc integrale cum isto supra inuento prorsus consentit, posito $E=-\frac{1}{2}C^2-D-m^2a^3$. Tum vero ista combinatio:

$$2vu^2.(\mathrm{I.})-2uv^2.(\mathrm{II.})+2(v-u).(\mathrm{III.})$$

ad hanc perducit aequationem:

$$2v^2u^2\frac{(ddv-ddu)}{d\tau^2}+2vu\frac{(vdu+udv)(dv-du)}{d\tau^2}$$
$$=(A-B)(3(v-u)^2-a^2)+\frac{2C}{a}(v-u)^3+2Da(v-u).$$

Atque haec aequatio per $dv-du$ multiplicata iterum fiet integrabilis, existente integrali:

$$v^2u^2\frac{(dv-du)^2}{d\tau^2}=(A-B)((v-u)^3-a^2(v-u))$$
$$+\frac{C}{2a}(v-u)^4+Da(v-u)^2+Ea^3,$$

et

et heic quidem quantitas conſtans adiicienda prorſus congruere debet, cum illa pro ſuperiori aequatione. Vtcunque autem egregium hoc ſit artificium Analyticum, quo ad aequationes has differentiales perducimur, et cuius vſum adhibuit Illuſtris *de la Grange* in ſua ſolutione; tamen ſuperfluum haberi poſſet ad iſtas integrationes recurrere, ſiquidem aequatio integralis (III.) §. 5., cum iſta

$$w^2\left(\frac{dv^2+v^2d\eta^2}{d\tau^2}\right)=2\,w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2a^4,$$

combinata totum negotium abſoluit. Nam ſi binis integrationibus Problematis ſolutio perfici queat, minus conueniens iudicari poſſet, ſi ad nouam integrationem recurrere quis vellet.

§. 9. Quum ſit:

$$4\,a^2w^2=-\left((v+u)^2-a^2\right)\left((v-u)^2-a^2\right);\text{ fiet}$$

$$2\,a^2w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)$$

$$\left(a^2(v+u)^2+a^2(v-u)^2-a^4-(v-u)^2(v+u)^2\right).$$

Hinc quum ex aequatione (IV.) §. 6., ſit

$$\frac{v^2u^2(dv+du)^2}{d\tau^2}=\frac{vudvdu}{d\tau^2}\left((v+u)^2-a^2\right)$$

$$+\,2\,a^2w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2u^6;$$

tum vero ea aequatione (III.) §. 5.

$$\frac{vudvdu}{d\tau^2}=(A+B)(v+u)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}\right)\left((v-u)^2-a^2\right)$$

$$+\frac{C}{2a}\left((v+u)^2+(v-u)^2\right)+Da;$$

ducta hac aequatione in $(v+u)^2-a^2$, conſequemur:

$$\frac{v^2u^2(dv+du)^2}{d\tau^2}=(A+B)\left((v+u)^3-a^2(v+u)\right)$$

$$+\frac{C}{2a}\left((v+u)^4-a^4\right)+Da\left((v+u)^2-a^2\right)-m^2a^6,$$

pror-

prorſus vti §. 7. vel quia eſt:

$$\frac{v^2 u^2 (dv - du)^2}{d\tau^2} = \frac{v u d v d u}{d\tau^2}\left((v-u)^2 - a^2\right)$$
$$+ 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^6;$$

nec non

$$\frac{v u d v d u}{d\tau^2} = (A - B)(v - u) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u}\right)\left((v+u)^2 - a^2\right)$$
$$+ \frac{C}{2a}\left((v+u)^2 + (v-u)^2\right) + D a;$$

multiplicata hac aequatione per $(v-u)^2 - a^2$, prodibit:

$$\frac{v^2 u^2 (dv - du)^2}{d\tau^2} = (A - B)\left((v-u)^3 - a^2 (v-u)\right)$$
$$+ \frac{C}{2A}\left((v-u)^4 - a^4\right) + D a \left((v-u)^2 - a^2\right) - m^2 a^6.$$

§. 10. Si loco combinationis

$$d\,d\,x \operatorname{cof.} \eta + d\,d\,y \operatorname{fin.} \eta \operatorname{cof.} \Phi + d\,d\,z \operatorname{fin.} \eta \operatorname{fin.} \Phi,$$

in vſum vocetur iſthaec:

$$d\,d\,x \operatorname{fin.} \eta - d\,d\,y \operatorname{cof.} \eta \operatorname{cof.} \Phi - d\,d\,z \operatorname{cof.} \eta \operatorname{fin.} \Phi;$$

ad hanc perueniemus aequationem:

$$\frac{-v\,d\,d\eta - 2\,d v\,d\eta + v\,d\Phi^2 \operatorname{fin.}\eta \operatorname{cof.}\eta}{d\tau^2} = \frac{B(\operatorname{fin.}\eta \operatorname{cof.}\theta + \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}\eta)}{u^2} = \frac{B \operatorname{fin.}\psi}{u^2};$$

quae etiam ſic exprimi poteſt:

$$\frac{v^2\,d\,d\eta + 2 v\,d v\,d\eta}{d\tau^2} = -\frac{B v \operatorname{fin.}\psi}{u^2} + \frac{w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} \operatorname{cot.} \eta;$$

ſimilique modo obtinebimus:

$$\frac{u^2\,d\,d\theta + 2 u\,d u\,d\theta}{d\tau^2} = -\frac{A u \operatorname{fin.}\psi}{v^2} + \frac{w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} . \operatorname{cot.} \theta.$$

Nunc priori harum aequationum per $u^2\,d\theta$, poſteriori per $v^2\,d\eta$ multiplicata, conſequemur hanc aequationem integrabilem:

$$\frac{u^2 d\theta . d.(v^2 d\eta) + v^2 d\eta . d.(u^2 d\theta)}{d\tau^2} = -B v\,d\theta \operatorname{fin.}\psi + \frac{w^2 u^2 d\Phi^2 d\theta . \operatorname{cot.}\eta}{d\tau^2}$$
$$- A u\,d\eta \operatorname{fin.}\psi + \frac{w^2 v^2 d\Phi^2 d\eta \operatorname{cot.}\theta}{d\tau^2};$$

quae

quae ob

$$v \sin. \psi = a \sin. \theta; \; u \sin. \psi = a \sin. \eta;$$

$$\frac{u^2}{w^2} = \frac{1}{\sin. \theta^2}; \; \frac{v^2}{w^2} = \frac{1}{\sin. \eta^2} \text{ et } w^4 d\Phi^2 = m^2 a^4 d\tau^2;$$

ita exprimetur:

$$\frac{u^2 d\theta . d(v^2 d\eta) + v^2 d\eta . d(u^2 d\theta)}{d\tau^2} = -a A d\eta \sin. \eta - a B d\theta \sin. \theta$$
$$+ m^2 a^4 \left(\frac{d\theta \cot. \eta}{\sin. \theta^2} + \frac{d\eta \cot. \theta}{\sin. \eta^2}\right);$$

et ob

$$\frac{d\theta}{\sin. \theta^2} = -d. \cot. \theta; \; \frac{d\eta}{\sin. \eta^2} = -d. \cot. \eta;$$

integrando erit:

$$\text{(V.)} \; \frac{v^2 u^2 d\eta d\theta}{d\tau^2} = a A \cos. \eta + a B \cos. \theta - m^2 a^4 \cot. \theta \cot. \eta + F.$$

§. 11. Quia est vti §. 6. demonstrauimus:

$$v\, d\eta = -dv \cot. \psi + \frac{du}{\sin. \psi}; \text{ et}$$

$$u\, d\theta = -du \cot. \psi + \frac{dv}{\sin. \psi}; \text{ erit}$$

$$v u\, d\eta\, d\theta = dv\, du \frac{(1 + \cos. \psi^2)}{\sin. \psi^2} - (du^2 + dv^2) \frac{\cos. \psi}{\sin. \psi^2}$$
$$= dv\, du - \cos. \psi \frac{(du^2 - 2 du\, dv \cos. \psi + dv^2)}{\sin. \psi^2},$$

hincque

$$\frac{v^2 u^2 d\eta d\theta}{d\tau^2} = \frac{vu\, dv\, du}{d\tau^2} - \frac{vu \cos. \psi (du^2 - 2 du\, dv \cos. \psi + dv^2)}{d\tau^2 . \sin. \psi^2};$$

Per eundem autem §. 6. colligitur:

$$\frac{(du^2 - 2 du\, dv \cos. \psi + dv^2)}{d\tau^2 \sin. \psi^2} = \frac{2 a^2 w^2}{v^2 u^2 \sin. \psi^2}\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - \frac{m^2 a^6}{v^2 u^2 \sin. \psi^2}$$
$$= 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - \frac{w^2 d\Phi^2}{d\tau^2};$$

ob $a^2 w^2 = v^2 u^2 \sin. \psi^2$ et $m^2 a^4 = \frac{w^4 d\Phi^2}{d\tau^2}$. Hinc itaque fiet:

$$\frac{vu\, dv\, du}{d\tau^2} = v u \cos. \psi \frac{(dv^2 - 2 dv\, du \cos. \psi + du^2)}{d\tau^2 \sin. \psi^2}$$
$$+ a A \cos. \eta + a B \cos. \theta - m^2 a^4 \cos. \theta \cos. \eta + F;$$
$$= \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right)(v^2 + u^2 - a^2) - \frac{v u w^2 d\Phi^2 \cos. \psi}{d\tau^2}$$
$$+ a A \cos. \eta + a B \cos. \theta - m^2 a^4 \cos. \theta \cos. \eta + F;$$

 ob

ob $2vu\cos.\psi = v^2 + u^2 - a^2$. Tum vero quia est:

$$a\cos.\eta = \frac{v^2 + a^2 - u^2}{2v} = v - \frac{(v^2 + u - a^2)}{2v};$$

$$a\cos.\theta = \frac{u^2 + a^2 - v^2}{2u} = u - \frac{(v^2 + u^2 - a^2)}{2u};\ m^2a^4 = \frac{w^4 d\Phi^2}{d\tau^2};$$

prodibit:

$$\frac{vudvdu}{d\tau^2} = Av + Bu + \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u}\right)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2+u^2-a^2) - \frac{w^2 d\Phi^2}{d\tau^2}(vu\cos.\psi + w^2\cot.\theta\cot.\eta) + F.$$

Quum nunc sit

$$vu\cos.\psi = -w^2(\cot.\theta . \cot.\eta - 1); \text{ ob}$$
$$v = \frac{w}{\sin.\eta};\ u = \frac{w}{\sin.\theta};$$
$$\cos.\psi = -\cos.\eta\cos.\theta + \sin.\eta\sin.\theta, \text{ erit}$$
$$-\frac{w^2 d\Phi^2}{d\tau^2}(vu\cos.\psi + w^2\cot.\theta\cot.\eta) = -\frac{w^4 d\Phi^2}{d\tau^2} = -m^2a^4.$$

Hinc prodibit:

$$\frac{vudvdu}{d\tau^2} = Av + Bu + \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u}\right)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2 + u^2 - a^2) - m^2a^4 + F;$$

atque haec aequatio cum illa §. 5. inuenta perfecte consentit; modo statuatur.

$$Da = -Ca - m^2a^4 + F.$$

§. 12. Caeterum ad aequationes differentiales, quae differentialia secundi ordinis angulorum η et θ inuoluunt, sic quoque pertingere licet: Quia est

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = ddv\cos.\eta - 2d\eta dv\sin.\eta - vdd\eta\sin.\eta - vd\eta^2\cos.\eta$$

fiet

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = \frac{1}{d\tau^2}(ddv\cos.\eta - 2d\eta dv\sin.\eta - vdd\eta\sin\eta - vd\eta^2\cos.\eta)$$
$$= -\frac{A\cos.\eta}{v^2} + \frac{B\cos.\theta}{u^2};$$

Mul-

Multiplicetur nunc aequatio:

$$\frac{d\,d\,v - v\,(d\,\eta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B\,\text{coſ.}\,(\eta + \theta)}{u^2},$$

per coſ. η et ſumta differentia conſequemur:

$$-\frac{v\,d\,d\,\eta\,\text{ſin.}\,\eta - 2\,d\,v\,d\,\eta\,\text{ſin.}\,\eta + v\,d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{coſ.}\,\eta}{d\,\tau^2} = \frac{B\,(\text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,(\theta + \eta)\,\text{coſ.}\,\eta)}{u^2},$$

hinc quum ſit

$$\text{ſin.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\eta = \text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,(\theta + \eta)\,\text{coſ.}\,\eta;\ \text{ob}\ \text{ſin.}\,\psi = \text{ſin.}\,(\eta + \theta);$$

diuiſa aequatione per coſ. η, fit

$$\frac{v\,d\,d\,\eta + 2\,d\,v\,d\,\eta}{d\,\tau^2} = -\frac{B\,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} + \frac{v\,d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta}{d\,\tau^2}.$$

Praeterea heic quoque obſeruaſſe iuuat, quod ſi aequatio differentialis:

$$\frac{v\,d\,d\,v + d\,v^2}{d\,\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B\,(2\,u - v\,\text{coſ.}\,\psi)}{u^2} + \frac{2\,C}{a};$$

multiplicetur per $v\,d\,v$ et aequatio differentialis:

$$\frac{v^2\,d\,d\,\eta + 2\,v\,d\,v\,d\,\eta}{d\,\tau^2} = -\frac{B\,v\,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} + \frac{w^2\,d\,\Phi^2\,\text{cot.}\,\eta}{d\,\tau^2};$$

multiplicetur per $v^2\,d\,\eta$; tumque earum capiatur ſumma

$$v\,d\,v\,\frac{(v\,d\,d\,v + d\,v^2)}{d\,\tau^2} + v^2\,d\,\eta\,\frac{(v^2\,d\,d\,\eta + 2\,v\,d\,v\,d\,\eta)}{d\,\tau^2}$$
$$= A\,d\,v + B\,v\,d\,v\,\frac{(2\,u - v\,\text{coſ.}\,\psi)}{u^2} + \frac{2\,C\,v\,d\,v}{a}$$
$$- \frac{B\,v^3\,d\,\eta\,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} + \frac{v^2\,w^2\,d\,\Phi^2\,d\,\eta\,\text{cot.}\,\eta}{d\,\tau^2},$$

erit haec aequatio integrabilis, ipſumque integrale inuenietur:

$$v^2\,\frac{(d\,v^2 + v^2\,d\,\eta^2)}{d\,\tau^2} = 2\,v^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - \frac{v^2\,w^2\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2};\ \text{ob}$$
$$v^3\,d\,\eta\,\text{ſin.}\,\psi = v^2\,d\,u - v^2\,d\,v\,\text{coſ.}\,\psi,$$

hincque

$$-\frac{B\,v^2\,d\,v\,\text{coſ.}\,\psi}{u^2} - \frac{B\,v^3\,d\,\eta\,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} = -\frac{B\,v^2\,d\,u}{u^2},$$

vnde ſequitur

$$B v\, d v \frac{(2u - v \cos.\psi)}{u^2} - \frac{B v^3\, d\eta \sin.\psi}{u^2} = B v \frac{(2u\, dv - v^2\, du)}{u^2},$$

cuius integrale est $\frac{Bv^2}{u}$. Denique ob $v^2 = \frac{w^2}{\sin.\eta^2}$; fiet

$$\frac{v^2 w^2\, d\Phi^2\, d\eta \cot.\eta}{d\tau^2} = \frac{w^4\, d\Phi^2 \,.\, d\eta \cos.\eta}{d\tau^2 \,.\, \sin.\eta^3},$$

cuius integrale est $-\frac{w^4\, d\Phi^2}{2 d\tau^2 \sin.\eta^2}$, ob factorem $-\frac{w^4\, d\Phi^2}{d\tau^2}$ constantem, hinc vero iterum colligitur

$$-\frac{w^4\, d\Phi^2}{2 d\tau^2 \sin.\eta^2} = -\frac{v^2 w^2\, d\Phi^2}{a\tau^2}.$$

Sicque tandem emerget haec aequatio:

$$\frac{dv^2 + v^2\, d\eta^2 + w^2\, d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right),$$

prorsus vti supra §. 4. inuenimus. Verum quum haec aequatio ipsam determinationem ingrediatur aequationis differentialis

$$\frac{v\, ddv + dv^2}{d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B\,(2u + v \cos.(\eta + \theta))}{u^2} + \frac{2C}{a};$$

ipsa haec integratio ab aequatione ista redditur dependens.

§. 13. Caeterum sequenti quoque ratione istam aequationem:

$$\frac{dv^2 + v^2\, d\eta^2 + w^2\, d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

elicere licet; ob

$$\frac{ddv - v\,(d\eta^2 + d\Phi^2 \sin.\eta^2)}{d\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B \cos.(\theta + \eta)}{u^2};$$

$$\frac{v\, dd\eta + 2 dv\, d\eta}{d\tau^2} = -\frac{B \sin.\psi}{u^2} + \frac{v\, d\Phi^2 \sin.\eta \cos.\eta}{d\tau^2};$$

multiplicata priori aequatione per $2dv$ et posteriori per $2v\,d\eta$ et capta productorum summa habebimus:

$$\frac{2dv\, ddv + 2v^2 d\eta\, dd\eta + 2v\, dv\, d\eta^2}{d\tau^2} - \frac{2v\, dv\, d\Phi^2 \sin.\eta^2}{d\tau^2} - \frac{2v^2 d\Phi^2 d\eta \sin.\eta \cos.\eta}{d\tau^2}$$
$$= -\frac{2A\, dv}{v^2} + \frac{2B\, dv \cos.(\theta + \eta)}{u^2} - \frac{2B\, v\, d\eta \sin.\psi}{u^2},$$

vbi

vbi ob

$$v\,d\eta\,\text{sin.}\,\psi + d\,v\,\text{cos.}\,\psi = d\,u;\ \text{fiet}$$

$$-\frac{2\,B\,d\,v\,\text{cos.}\,\psi}{u^2} - \frac{2\,B\,v\,d\,\eta\,\text{sin.}\,\psi}{u^2} = -\frac{2\,B\,d\,u}{u^2};$$

hincque

$$\frac{2dvddv + 2v^2d\eta\,dd\eta + 2vdvd\eta^2}{d\,\tau^2} - \frac{2vdvd\Phi^2.\,\text{sin.}\,\eta^2}{d\,\tau^2} - \frac{2u^2d\Phi^2d\eta\,\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\eta}{d\,\tau^2}$$
$$= -\frac{2\,A\,d\,v}{v^2} - \frac{2\,B\,d\,u}{u^2}.$$

Tum vero ob

$$2\,v\,\text{sin.}\,\eta^2 = \frac{2\,w^4}{v^3\,\text{sin.}\,\eta^2};\ \text{et}$$

$$2\,v^2\,\text{sin.}\,\eta = \frac{2\,w^4}{v^2\,\text{sin.}\,\eta^3};\ \text{erit}$$

$$-\frac{d\Phi^2}{d\,\tau^2}(2\,v\,d\,\eta\,\text{sin.}\,\eta^2 + 2\,v^2\,d\,\eta\,\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\eta)$$
$$= -\frac{w^4\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2}\left(\frac{2\,d\,v}{v^3\,\text{sin.}\,\eta^2} + \frac{2\,d\,\eta\,\text{cos.}\,\eta}{v^2\,\text{sin.}\,\eta^3}\right);$$

cuius integrale ob $\frac{w^4\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2}$ constans, erit

$$\frac{w^4\,d\,\Phi^2}{v^2\,d\,\tau^2\,\text{sin.}\,\eta^2} = \frac{w^2\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2};$$

sicque fiet:

$$\frac{d\,v^2 + v^2\,d\,\eta^2 + w^2\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

§. 14. De aequatione (V.) §. 10. inuenta obseruare iuuat, eam alia quoque ratione ex aequationibus primitiuis §. 3. allatis deduci posse. Nimirum prouti ab Illustr. *Eulero* demonstratum est, Nou. Com. Tom. XI. erit:

$$\frac{(xdy - ydx)(tdy - ydt) + (xdz - zdx)(tdz - zdt)}{d\,\tau^2} = a\left(\frac{A\,x}{v} + \frac{B\,t}{u} + D\right).$$

Et quum sit $y = w\,\text{cos.}\,\Phi$; $z = w\,\text{sin.}\,\Phi$; fiet

$$d\,y = d\,w\,\text{cos.}\,\Phi - w\,d\,\Phi\,\text{sin.}\,\Phi;$$
$$d\,z = d\,w\,\text{sin.}\,\Phi + w\,d\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi;$$

hinc

$$(x\,dy - y\,dx)(t\,dy - y\,dt) + (x\,dz - z\,dx)(t\,dz - z\,dt)$$
$$= xt(dy^2+dz^2)-(xdt+tdx)(ydy+zdz)+(y^2+z^2)dxdt$$
$$= x\,t\,(dw^2+w^2d\Phi^2) - wdw\,(xdt+tdx) + w^2dx\,dt\,,$$

quae etiam hac forma repraesentari potest:

$$(x\,dw - w\,dx)(t\,dw - w\,dt) + t\,x\,w^2\,d\Phi^2.$$

Nunc quum sit:

$$d\,w = d\,v\,\text{sin.}\,\eta + v\,d\,\eta\,\text{cos.}\,\eta;$$

$d\,x = d\,v\,\text{cos.}\,\eta - v\,d\,\eta\,\text{sin.}\,\eta$; erit

$x\,d\,w - w\,d\,x = v^2\,d\,\eta$; similemque ob rationem:

$t\,d\,w - w\,d\,t = u^2\,d\,\theta$; hinc

$$(x\,d\,w - w\,d\,x)(t\,d\,w - w\,d\,t) = v^2\,u^2\,d\,\eta\,d\,\theta.$$

Vlterius est

$$m^2\,a^4\,\text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\eta = \frac{w^4\,d\,\Phi^2\,\text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\eta}{d\,\tau^2} = \frac{t\,x\,w^2\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2};$$

ob $\text{cot.}\eta = \frac{x}{w}$; $\text{cot.}\theta = \frac{t}{w}$. Denique $\text{cos.}\eta = \frac{x}{v}$; $\text{cos.}\,\theta = \frac{t}{u}$, quamobrem patet istam aequationem:

$$\frac{(x\,d\,w - w\,d\,x)(t\,d\,w - w\,d\,t) + t\,x\,w^2\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2} = a\left(\frac{A\,x}{v} + \frac{B\,t}{u} + D\right),$$

perfecte coincidere cum illa:

$$\frac{v^2\,u^2\,d\,\eta\,d\,\theta + w^4\,d\,\Phi^2\,\text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\eta}{d\,\tau^2} = a\,(A\,\text{cos.}\,\eta + B\,\text{cos.}\,\theta) + F;$$

posito nimirum $F = a\,D$. Ideoque hinc concluditur quomodo in subsidium vocata hac aequatione (V.) si illa combinetur cum aequatione (IV.) modo in §. 11 explicato, ad aequationem (III.) peruenire licet, quae iterum cum aequatione (IV.) combinata Problematis solutionem exhibet.

§. 15. Caeterum directe quidem per combinationem aequationum (IV.) et (V.) negotium sequenti ratione perficitur. Ob $\text{cos.}\,\psi = \frac{v^2 + u^2 - a^2}{2\,u\,v}$ fiet

$$(v + u)^2 - a^2 = 2\,u\,v\,(1 + \text{cos.}\,\psi);$$
$$(v - u)^2 - a^2 = -\,2\,v\,u\,(1 - \text{cos.}\,\psi);$$

hinc

hinc aequatio (IV.) sic exprimetur:

$$\frac{v^2 u^2 (d v + d u)^2}{d \tau^2} - \frac{2 v^2 u^2 d v d u}{d \tau^2} (1 + \text{cos.} \psi)$$
$$= 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^6;$$

et aequatio (V.) sequenti ratione:

$$v u d v d u \frac{(1 + \text{cos.} \psi)}{1 - \text{cos.} \psi} - v u (d v + d u)^2 \frac{\text{cos.} \psi}{\text{sin.} \psi^2}$$
$$= A a \,\text{cos.}\, \eta + B a \,\text{cos.}\, \theta - m^2 a^4 \,\text{cot.}\, \theta \,\text{cot}\, \eta + F;$$

hinc ducta hac aequatione in $2 v u (1 - \text{cos.} \psi)$ et addito producto ad aequationem (IV.) ob

$$\text{sin.} \psi^2 = (1 + \text{cos.} \psi)(1 - \text{cos.} \psi) \text{ fiet}$$
$$\frac{v^2 u^2 (d v + d u)^2}{d \tau^2} \cdot \frac{1 - \text{cos.} \psi}{1 + \text{cos.} \psi} = 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) m^2 a^6$$
$$+ 2 v u (1 - \text{cos.} \psi)(A a \,\text{cos.}\, \eta + B a \,\text{cos.}\, \theta - m^2 a^4 \,\text{cot.}\, \theta \,\text{cot.}\, \eta + F);$$

hincque:

$$\frac{v^2 u^2 (d v + d u)^2}{d \tau^2} = 2 a^2 w^2 \frac{(1 + \text{cos.} \psi)}{1 - \text{cos.} \psi} \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^6 \frac{(1 + \text{cos.} \psi)}{1 - \text{cos.} \psi}$$
$$+ 2 v u (1 + \text{cos.} \psi)(A a \,\text{cos.}\, \eta + B a \,\text{cos.}\, \theta - m^2 a^4 \,\text{cot.}\, \theta \,\text{cot.}\, \eta + F).$$

Pro reductione autem terminorum a dextra parte aequationis notemus esse

$$a^2 w^2 \frac{(1 + \text{cos.} \psi)}{1 - \text{cos.} \psi} = v^2 u^2 (1 + \text{cos.} \psi)^2, \text{ ob}$$
$$\text{sin.} \psi^2 = (1 + \text{cos.} \psi)(1 - \text{cos.} \psi);$$

hinc

$$2 a^2 w^2 \frac{(1 + \text{cos.} \psi)}{1 - \text{cos.} \psi} \cdot \frac{A}{v} + 2 v u (1 + \text{cos.} \psi) . A a \,\text{cos.}\, \eta$$
$$= 2 v u (1 + \text{cos.} \psi)(A u (1 + \text{cos.} \psi) + A a \,\text{cos.}\, \eta),$$

et quum sit $v = u \,\text{cos.}\, \psi \, a \,\text{cos.}\, \eta$; fiet coefficiens termini A qui est

$$\frac{2 a^2 w^2}{v} \frac{(1 + \text{cos.} \psi)}{1 - \text{cos.} \psi} + 2 v u (1 + \text{cos.} \psi) a \,\text{cos.}\, \eta$$
$$= 2 v u (1 + \text{cos.} \psi)(v + u) = (v + u)((v + u)^2 - a^2).$$

Simili

Simili modo erit coefficiens pro B

$$2vu(1+\text{cos.}\psi)(v(1+\text{cos.}\psi)+a\,\text{cos.}\theta)$$
$$=2vu(1+\text{cos.}\psi)(v+u) \text{ ob}$$
$$v\,\text{cos.}\psi+a\,\text{cos.}\theta=u.$$

Coefficiens ipsius $\frac{C}{2a}$ est

$$4v^2u^2(1+\text{cos.}\psi)^2=((v+u)^2-a^2)^2.$$

Denique pro terminis per m^2 multiplicatis, notemus esse

$$-m^2a^6\frac{(1+\text{cos.}\psi)}{1-\text{cos.}\psi}-2vu(1+\text{cos.}\psi)m^2a^4\,\text{cot.}\theta\,\text{cot.}\eta$$
$$=-m^2a^6-m^2a^4\left(\frac{2a^2\,\text{cos.}\psi}{1-\text{cos.}\psi}+2vu(1+\text{cos.}\psi)\text{cot.}\eta\,\text{cot.}\eta)\right)$$
$$=-m^2a^6-2m^2a^4vu(1+\text{cos.}\theta\,\text{cos.}\psi);$$

ob $a^2=\frac{vu\,\text{sin.}\psi^2}{\text{sin.}\theta\,\text{sin.}\eta}$, hinc

$$\frac{a^2\,\text{cos.}\psi}{1-\text{cos.}\psi}=\frac{vu(1+\text{cos.}\psi)\,\text{cos.}\psi}{\text{sin.}\theta\,\text{sin.}\eta} \text{ et}$$
$$\text{cos.}\psi=-\text{cos.}\eta\,\text{cos.}\theta+\text{sin.}\eta\,\text{sin.}\theta, \text{ vnde}$$
$$\frac{\text{cos.}\psi}{\text{sin.}\theta\,\text{sin.}\eta}+\text{cot.}\eta\,\text{cot.}\theta=1.$$

Termini igitur hinc resultantes erunt

$$-m^2a^6-m^2a^4((v+u)^2-a^2).$$

Ideoque collectis omnibus terminis haec prodibit aequatio:

$$v^2u^2\frac{(dv+du)^2}{dT^2}=(A+B)((v+u)^3-a^2(v+u))+\frac{C}{2a}((v+u)^2-a^2)^2$$
$$+F((v+u)^2-a^2)-m^2a^4((v+u)^2-a^2)-m^2a^6$$
$$=(A+B)((v+u)^3-a^2(v+u))+\frac{C}{2a}((v+u)^4-a^4)$$
$$+(F-m^2a^4-Ca)((v+u)^2-a^3)-m^2a^6.$$

Quae forma cum illa §. 9. inuenta prorsus consentit, posito $F-m^2a^4-Ca=Da$. Deinde quia aequatio (IV.) sic exprimi potest:

$$v^2u^2\frac{(dv-du)^2}{dT^2}+\frac{2v^2u^2dvdu(1-\text{cos.}\psi)}{dT^2}=2a^2w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2a^6;$$

et

et aequatio (V) isthac ratione:

$$v\,u\,d\,v\,d\,u\,\frac{(1-\cos.\psi)}{1+\cos.\psi} - v\,u\,\frac{(d\,v-d\,u)^2\cos.\psi}{\sin.\psi^2}$$
$$= A\,a\cos.\eta + B\,a\cos.\theta - m^2 a^4 \cot.\theta\cot.\eta + F;$$

multiplicata posteriori aequatione per $2\,v\,u\,(1+\cos.\psi)$ et subtracto producto ab aequatione (IV) habebimus:

$$v^2 u^2 \frac{(d\,v-d\,u)^2}{d\,\tau^2}\left(\frac{1+\cos.\psi}{1-\cos.\psi}\right) = 2\,a^2 w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right) - m^2 a^6$$
$$-2vu(1+\cos.\psi)(A a\cos.\eta + B a\cos.\theta - m^2 a^4\cot\theta\cot.\eta + F);$$

hincque

$$v^2 u^3\left(\frac{dv-du)^2}{d\tau^2}\right) = 2\,u^2 w^2\frac{(1-\cos.\psi)}{1+\cos.\psi}\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right) - m^2 a^6\frac{(1-\cos.\psi)}{1+\cos.\psi}$$
$$-2vu(1-\cos.\psi)(A a\cos.\eta + B a\cos.\theta - m^2 a^4\cot.\eta\cot.\theta + F).$$

Vnde per similes reductiones ac supra adhibuimus haec elicietur aequatio:

$$v^2 u^2\frac{(dv-du)^2}{d\,\tau^2} = (A-B)\left((v-u)^3 - a^2(v-u)\right) + \frac{C}{2a}\left((v-u)^4 - a^4\right)$$
$$+ D\,a\left((v-u)^2 - a^2\right) - m^2 a^6;$$

posito $D\,a = F\,m^2 a^4 - C\,a$.

§. 16. De ratione inueniendi aequationem nostram (IV.) etiam id notasse conuenit, quod ex aequationibus §. 5. allatis

$$\frac{d\,d\,v - v\,(d\,\eta^2 + d\,\Phi^2\sin.\eta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B\cos.(\theta+\eta)}{u^2};$$
$$\frac{d\,d\,u - u\,(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2\sin.\theta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{B}{u^2} + \frac{A\cos.(\theta+\eta)}{v^2};$$

per integrationem sequentem in modum eliciantur. Multiplicetur prior harum aequationum per $\frac{dv - du\cos.\psi}{\sin.\psi^2}$, et posterior per $\frac{du - dv\cos.\psi}{\sin.\psi^2}$, et productorum summa addatur, quo pacto orietur:

$$\frac{ddv(dv - du\cos.\psi) + ddu(du - dv\cos.\psi)}{d\tau^2 . \sin.\psi^2} - \frac{(vdv - vdu\cos.\psi)(d\eta^2 + d\Phi^2 \sin.\eta^2)}{d\tau^2 . \sin.\psi^2}$$

$$- \frac{(udu - udv\cos.\psi)(d\theta^2 + d\Phi^2 \sin.\theta^2)}{d\tau^2 . \sin.\psi^2} = - \frac{A(dv - du\cos.\psi)}{v^2 . \sin.\psi^2}$$

$$- \frac{A\cos.\psi(du - dv\cos.\psi)}{v^2 . \sin.\psi^2} - \frac{B(du - dv\cos.\psi)}{u^2 . \sin.\psi^2}$$

$$- \frac{B\cos.\psi(dv - du\cos.\psi)}{u\sin.\psi^2} = - \frac{Adv}{v^2} - \frac{Bdu}{u^2}.$$

Atqui eſt $v\,d\eta = \frac{du - dv\cos.\psi}{\sin.\psi}$ (§. 6.) et $u\,d\theta = \frac{dv - du\cos.\psi}{\sin.\psi}$; hinc bina iſta membra

$$\frac{v(dv - du\cos.\psi)d\eta^2 - u(du - dv\cos.\psi)d\theta^2}{d\tau^2 . \sin.\psi^2} = - \frac{(dv - du\cos.\psi)(du - dv\cos.\psi)(d\eta + d\theta)}{d\tau^2 . \sin.\psi^3}$$

$$= + \frac{d\psi(dv - du\cos.\psi)(du - dv\cos.\psi)}{d\tau^2 . \sin.\psi^3}.$$

Tum vero termini per $d\Phi^2$ affecti ita redigentur:

$$- v(dv - du\cos.\psi)\frac{\sin.\eta^2}{\sin.\psi^2} - u(du - dv\cos.\psi)\frac{\sin.\theta^2}{\sin.\psi^2}$$

$$= - w(dv - du\cos.\psi)\frac{\sin.\eta}{\sin.\psi^2} - w(du - dv\cos.\psi)\frac{\sin.\theta}{\sin.\psi^2}$$

$$= - w\,dv\frac{(\sin.\eta - \sin.\theta\cos.\psi)}{\sin.\psi^2} - w\,du\frac{(\sin.\theta - \sin.\eta\cos.\psi)}{\sin.\psi^2}$$

$$= - w\,dv\frac{\cos.\theta}{\sin.\psi} - \frac{w\,dv\cos.\eta}{\sin.\psi};$$

atque ob

$dw = dv\sin.\eta + v\,d\eta\cos.\eta$; et

$v\,d\eta = \frac{du - dv\cos.\psi}{\sin.\psi}$ fiet

$dw = dv\sin.\eta + \frac{\cos.\eta(du - dv\cos.\psi)}{\sin.\psi} = \frac{dv\cos.\theta + du\cos.\eta}{\sin.\psi}$;

hincque bina membra per $d\Phi^2$ affecta ita exprimentur:

$$- v(dv - du\cos.\psi)\frac{\sin.\Phi^2 . \sin.\eta^2}{d\tau^2 . \sin.\psi^2} - u(du - dv\cos.\psi)\frac{d\Phi^2\sin.\theta^2}{d\tau^2\sin.\psi^2}$$

$$= - w\,dw\frac{d\Phi^2}{d\tau^2} = - \frac{w^4\,d\Phi^2\,dw}{w^3\,d\tau^2}.$$

Sicque omnibus terminis collectis habebimus:

$$\frac{ddv(dv - du\cos.\psi) + ddu(dv - du\cos.\psi)}{d\tau^2 . \sin.\psi^2} + \frac{d\psi(dv - du\cos.\psi)(du - dv\cos.\psi)}{d\tau^2 . \sin.\psi^2}$$

$$- \frac{w^4\,d\Phi^2\,dw}{w^3 . d\tau^2} = - \frac{A\,dv}{v^2} - \frac{B\,du}{u^2},$$

cuius

cuius integrale erit

$$\frac{dv^2 - 2\,dv\,du\,\text{cof.}\,\psi + du^2}{d\tau^2\,.\,\text{fin.}\,\psi^2} + \frac{w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right),$$

et multiplicando per $w^2 = \frac{v^2\,u^2\,\text{fin.}\,\psi^2}{a^2}$, confequemur vti §. 6.

$$\frac{v^2\,u^2}{a^2}\,.\,\frac{(dv^2 - 2\,dv\,du\,\text{cof.}\,\psi - du^2)}{d\tau^2\,.\,\text{fin.}\,\psi^2} - m^2 a^4 = 2\,w^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Praeterea quum fit

$$du = v\,d\eta\ \text{fin.}\ \psi + dv\ \text{cof.}\ \psi;$$

$$dv = u\,d\theta\ \text{fin.}\ \psi + du\ \text{cof.}\ \psi;$$

hinc colligitur

$$dv = \frac{u\,d\theta + v\,d\eta\ \text{cof.}\,\psi}{\text{fin.}\,\psi};$$

$$du = \frac{v\,d\eta + u\,d\theta\ \text{cof.}\,\psi}{\text{fin.}\,\psi};$$

et quum fit,

$$dw = dv\ \text{fin.}\ \eta + v\,d\eta\ \text{cof.}\ \eta;$$

fubftituto pro dv fin. η eius valore fiet

$$dw = \frac{u\,d\theta\ \text{fin.}\,\eta + v\,d\eta\ \text{fin.}\,\eta\ \text{cof.}\,\psi + v\,d\eta\ \text{cof.}\,\eta\ \text{fin.}\,\psi}{\text{fin.}\,\psi} = \frac{u\,d\theta\ \text{fin.}\,\eta + v\,d\eta\ \text{fin.}\,\theta}{\text{fin.}\,\psi}$$

$$= \frac{u^2\,d\theta + v^2\,d\eta}{a},\ \text{fiue}$$

$$a\,dw = u^2\,d\theta + v^2\,d\eta;$$

quae eft proprietas elegans, quae omnino commemorari meretur.

§. 17. Ex iftis quae nunc docuimus oppido liquet infignem varietatem folutionum adornari poffe, prouti fcilicet aequationum integralium fupra inuentarum aliae atque aliae inter fe combinentur. Sic fi ratio habeatur aequationum differentialium (III.), (IV.), (V.), tres fpecies folutionum oriuntur, prouti binae quaeuis harum aequationum inter fe combinentur, vbi quidem combinatio aequationum

(IV.) et (V.), quoad fundamentum, conuenit cum solutione ab Illustr. *Eulero* data, combinatio vero aequationum (III.) et (IV.) nostram illam solutionem sistit, quam supra §§. 7. 9 exposuimus. Deinde si aequatio (V.) ratione §. 8. exposita denuo combinetur cum aequationibus differentialibus secundi gradus (I.), (II.), inde perueniemus ad aequationes differentiales iterum integrabiles, et quorum integralia ipsas conclusiones finales Problematis sistunt. Vtcunque autem egregium sit hoc artificium Analyticum ab Illustr. *de la Grange* propositum, tamen, vti supra monui, superfluum iudicare posset ad nouas has integrationes recurrere, siquidem combinatio aequationum (III.), (IV.) vel (IV.), (V.) ad easdem aequationes finales, absque vlla noua integratione, perducit, nisi quod vsus adhibeatur aequationis $\frac{w^4\, d\,\Phi^2}{d\,\tau^2} = m^2\, a^4$, cuius inuentio prorsus est obuia. Praeterea quum sit

$$v = \frac{a\,\sin.\,\theta}{\sin.\,\psi};$$
$$u = \frac{a\,\sin.\,\eta}{\sin.\,\psi};$$
$$v + u = a\,\frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,(\theta - \eta)}{\cos.\,\frac{1}{2}\,(\theta + \eta)};$$
$$v - u = a\,\frac{\sin.\,\frac{1}{2}\,(\theta - \eta)}{\sin.\,\frac{1}{2}\,(\theta + \eta)};$$

patet omnino quomodo non solum aequationes (III.), (IV.), (V.) per solos angulos η, θ exprimantur, sed etiam ipsae aequationes vltimae per hos angulos exponi queant; cui tamen rei vlterius explicandae non est vt immoremur.

§. 18. Praeter solutiones iam commemoratas, nouae cuiusdam mentionem inieciffe haud pigebit, qua locus

cus puncti C refertur ad punctum E in recta A B ab A et B aequidistans. Ducatur nimirum recta C E, eaque per p indigitata, dicatur $EU = q$, angulusque $CEU = \zeta$, erit $AU = x = b + q$; $BU = t = b - q$; posito $2b = a$. Hinc fiet $ddx = ddq$, et aequationes differentiales nunc erunt:

$$\frac{ddq}{d\tau^2} = -\frac{A(b+q)}{v^3} + \frac{B(b-q)}{u^3};$$
$$\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3};$$
$$\frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Az}{v^3} - \frac{Bz}{u^3}.$$

Tum vero ob

$$MC = ME \sin. MEU;$$
$$w = p \sin.\zeta;$$
$$y = w \cos.\Phi = q \sin.\zeta \cos.\Phi;$$
$$z = w \sin.\Phi = p \sin.\zeta \sin.\Phi;$$
$$q = p \cos.\zeta; \text{ erit:}$$
$$dq = dp \cos.\zeta - p\,d\zeta \sin.\zeta;$$
$$ddq = ddp \cos.\zeta - 2dp\,d\zeta \sin.\zeta - p\,dd\zeta \sin.\zeta - p\,d\zeta^2 \cos.\zeta;$$
$$ddy = ddw \cos.\Phi - 2dw\,d\Phi \sin.\Phi - w\,dd\Phi \sin.\Phi - w\,d\Phi^2 \cos.\Phi;$$
$$ddz = ddw \sin.\Phi + 2dw\,d\Phi \cos.\Phi + w\,dd\Phi \cos.\Phi - w\,d\Phi^2 \sin.\Phi.$$

Hinc consequemur:

$$ddy \cos.\Phi + ddz \sin.\Phi = ddw - w\,d\Phi^2; \text{ et ob}$$
$$ddw = ddp \sin\zeta + 2dp\,d\zeta \cos.\zeta + p\,dd\zeta \cos.\zeta - p\,d\zeta^2 \sin.\zeta;$$

fiet

$$\begin{aligned} ddq \cos.\zeta + ddy \sin.\zeta \cos.\Phi + ddz \sin.\zeta \sin.\Phi \\ = ddp \cos.\zeta^2 - 2dp\,d\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta + p\,dd\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta \\ - p\,d\zeta^2 \cos.\zeta^2 + ddp \sin.\zeta^2 + 2\,dp\,d\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta \\ + p\,dd\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta - p\,d\zeta^2 \sin.\zeta^2 - p\,d\Phi^2 \sin.\zeta^2; \end{aligned}$$

 hinc

hincque obtinebimus istam aequationem differentio-differentialem:

$$\frac{ddp - p(d\zeta^2 + d\Phi^2 \sin.\zeta^2)}{d\tau^2} = -\frac{A(b\cos.\zeta + p)}{v^3} + \frac{B(b\cos.\zeta - p)}{u^3}.$$

§. 19. Nunc si denuo haec fiat combinatio:

$$ddq \sin.\zeta - ddy \cos.\zeta \cos.\Phi - ddz \cos.\zeta \sin.\Phi;$$

consequemur pro ista expressione:

$$\begin{aligned} &ddp \sin.\zeta \cos.\zeta - 2dp\,d\zeta \sin.\zeta^2 - p\,dd\zeta \sin.\zeta^2 - p\,d\zeta^2 \sin.\zeta \cos.\zeta \\ &- ddp \sin.\zeta \cos.\zeta - 2dp\,d\zeta \cos.\zeta^2 - p\,dd\zeta^2 \cos.\zeta^2 \\ &+ p\,d\zeta^2 \sin.\zeta \cos.\zeta + p\,d\Phi^2 \sin.\zeta \cos.\zeta \\ &= -2dp\,d\zeta - p\,dd\zeta + p\,d\Phi^2 \sin.\zeta \cos.\zeta; \end{aligned}$$

vnde hanc obtinemus aequationem differentio-differentialem:

$$\frac{p\,dd\zeta + 2dp\,d\zeta - p\,d\Phi^2 \sin.\zeta \cos.\zeta}{d\tau^2} = b \sin.\zeta\left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right).$$

Tum vero quia est

$$dy^2 + dz^2 = dw^2 + w^2 d\Phi^2; \text{ erit}$$

$$\begin{aligned} dq^2 + dy^2 + dz^2 &= dq^2 + dw^2 + w^2 d\Phi^2 \\ &= dp^2 + p^2 d\zeta^2 + w^2 d\Phi^2, \end{aligned}$$

ideoque ob

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = \frac{dq^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right); \text{ fiet}$$

$$\frac{dp^2 + p^2 d\zeta^2 + w^2 d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Hinc si aequatio differentio-differentialis §. superiori inventa per p multiplicetur et ad productum aequatio vltimo loco inuenta addatur, ista prodibit aequatio:

$$\begin{aligned} \frac{p\,ddp + dp^2}{d\tau^2} = &- Ap\frac{(b\cos.\zeta + p)}{v^3} + Bp\frac{(b\cos.\zeta - p)}{u^3} \\ &+ 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right). \end{aligned}$$

Cae-

Caeterum quum sit

$$d v = \frac{d p \,(p + b \cos. \zeta)}{v} - \frac{b\, p\, d \zeta \sin. \zeta}{v} \text{ et}$$

$$d u = \frac{d p \,(p - b \cos. \zeta)}{2 u} + \frac{b\, p\, d \zeta \sin. \zeta}{u};$$

si aequatio differentialis:

$$\frac{d d p - p(d \zeta^2 + d \Phi^2 \sin. \zeta^2)}{d \tau^2} = - \frac{A(p + b \cos. \zeta)}{v^3} - \frac{B(p - b \cos. \zeta)}{u^3};$$

multiplicetur per $2 d p$, habebimus sequentem aequationem:

$$\frac{2 d p\, d d p - 2 p\, d p\,(d \zeta^2 + d \Phi^2 \sin. \zeta^2)}{d \tau^2} = - \frac{2 A\, d p\,(p + b \cos. \zeta)}{v^3} - \frac{2 B\, d p\,(p - b \cos. \zeta)}{u^3}.$$

Tumque si aequatio differentialis:

$$\frac{p\, d d \zeta + 2 d p\, d \zeta - p\, d \Phi^2 \sin. \zeta \cos. \zeta}{d \tau^2} = b \sin. \zeta \left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right);$$

multiplicetur per $2 p\, d \zeta$, consequemur:

$$+ \frac{2 p^2 d \zeta\, d d \zeta + 4 p\, d p\, d \zeta^2 - 2 p^2 d \Phi^2 d \zeta \sin. \zeta \cos. \zeta}{d \tau^2} = 2 b p\, d \zeta \sin. \zeta \left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right),$$

et his aequationibus inuicem additis prodibit:

$$\frac{2 d p\, d d p + 2 p^2 d \zeta\, d d \zeta + 2 p\, d p\, d \zeta^2 - 2 p\, d p\, d \Phi^2 \sin. \zeta^2 - 2 p^2 d \Phi^2 d \zeta \sin. \zeta \cos. \zeta}{d \tau^2}$$

$$= - \frac{2 A\, d p}{v^3}(p + b \cos. \zeta) + \frac{2 A b p\, d \zeta \sin. \zeta}{v^3} - \frac{2 B\, d p}{u^3}(p - b \cos. \zeta)$$

$$- \frac{2 B b p\, d \zeta \sin. \zeta}{u^3} = - \frac{2 A\, d v}{v^2} - \frac{2 B\, d u}{u^2};$$

ideoque huius aequationis integrale habebitur:

$$(\text{M}) \quad \frac{d p^2 + p^2 d \zeta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = 2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Nam ob

$$- \frac{2 p\, d p\, d \Phi^2 \sin \zeta^2 - 2 p^2 d \Phi^2 d \zeta \sin. \zeta \cos \zeta}{d \tau^2} = - \frac{w^4 d \Phi^2}{d \tau^2} \left(\frac{d p}{p^3 \sin. \zeta^2} + \frac{d \zeta \cos. \zeta}{p^2 \sin. \zeta^3}\right)$$

ob $\frac{w^4 d \Phi^2}{d \tau^2}$ constans, integrale horum terminorum erit

$$\frac{w^4\, d \Phi^2}{p^2\, d \tau^2 \,.\, \sin. \zeta^2} = \frac{w^2\, d \Phi^2}{d \tau^2}.$$

§. 20.

§. 20. Quemadmodum per datam rectam E C et angulum C E U determinatur recta E U, ita quoque vicissim ex datis E C et E U determinatur angulus C E U, vnde pro nostro instituto etiam vsum facere licebit harum aequationum differentialium:

$$\frac{p\,ddp + dp^2}{d\tau^2} = -\frac{Ap(p^2+bq)}{v^3} - \frac{B(p^2-bq)}{u^3} + 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

$$\frac{ddq}{d\tau^2} = -\frac{A(b+q)}{v^3} + \frac{B(b-q)}{u^3};$$

multiplicata priorum harum aequationum per $2\,p\,d\,p$; posteriori per $2\,b^2\,d\,q$, et substractis posteriori producto a priori consequemur:

$$\frac{2p^2dp\,ddp + 2p\,dp^3 - 2b^2dq\,ddq}{d\tau^2} = -\frac{2Ap\,dp(p^2+bq)}{v^3} - \frac{2Bp\,dp(p^2-bq)}{u^3}$$
$$+\frac{2Ab^2dq(b+q)}{v^3} - \frac{2Bb^2dq(b-q)}{u^3} + 4p\,dp\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

cuius integrale est:

$$(\mathrm{N})\ \frac{p^2dp^2 - b^2dq^2}{d\tau^2} = \frac{2A}{v}(p^2+bq) + \frac{2B}{u}(p^2-bq)$$
$$+\frac{2C}{a}(p^2+b^2) + 2b\mathrm{D}, \text{ ob}$$
$$dv = \frac{p\,dp + b\,dq}{v} \text{ et } du = \frac{p\,dp - b\,dq}{u}.$$

Sicque iam binas nacti sumus aequationes differentiales primi gradus (M), (N) per differentialia dp, dq vel $d\zeta$ expressas, ex quibus Problematis solutio nunc adornari poterit.

§. 21. Quia est cos. $\zeta = \frac{q}{p}$; fiet

$$d\zeta.\,\text{fin.}\,\zeta = \frac{p\,dq - q\,dp}{p^2} \text{ et}$$

$$p^2\,d\zeta^2 = \frac{p^2dq^2 - 2pq\,dp\,dq + q^2dp^2}{p^2\,\text{fin.}\,\zeta^2} = \frac{p^2dq^2 - 2pq\,dp\,dq + q^2dp^2}{w^2}$$

ob $w^2 = p^2\,\text{fin.}\,\zeta^2 = p^2 - q^2$. Nunc multiplicetur aequatio (M) per $p^2 - q^2$, et prodibit

$(p^2-$

$$\frac{(p^2-q^2)dp^2+p^2dq^2-2pqdpdq+q^2dp^2+w^4d\Phi^2}{dt^2}$$
$$=2(p^2-q^2)\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right);$$

quae ad hanc formam reducitur:

$$\frac{p^2dp^2+p^2dq^2-2pqdpdq}{d\tau^2}=2(p^2-q^2)\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2u^4.\ (\mathrm{M});$$

ab hac aequatione ſubtrahatur aequatio (N) eritque:

$$\frac{(p^2+b^2)dq^2-2pqdpdq}{d\tau^2}=-\frac{2A}{v}(bq+q^2)$$
$$-\frac{2B}{u}(q^2-bq)-\frac{2C}{a}(b^2+q^2)-2b\mathrm{D}-m^2a^4\ (\mathrm{O}).$$

Iam quia eſt

$$v^2=p^2+2bq+b^2;\ u^2=p^2-2bq+b^2;$$

conſequimur

$$v^2+u^2=2(p^2+b^2);\ v^2-u^2=4bq;$$

tumque ob

$$v\,dv=p\,dp+b\,dq;\ u\,du=p\,dp-b\,dq \text{ erit}$$
$$v\,u\,dv\,du=p^2dp^2-b^2dq^2, \text{ et}$$
$$v^2u^2dv\,du=vu(p^2dp^2-b^2dq^2);$$
$$v^2u^2(dv^2+du^2)=(v^2+u^2)(p^2dp^2+b^2dq^2)-2(v^2-u^2)bpdpdq$$
$$=2(p^2+b^2)(p^2dp^2+b^2dq^2)+8b^2pqdpdq$$
$$=2(p^2+b^2)(p^2dp^2-b^2dq^2)+4(p^2+b^2)b^2dq^2$$
$$-8b^2pqdpdq.$$

Hinc igitur elicitur:

$$\frac{v^2u^2dvdu}{d\tau^2}=\frac{vu(p^2dp^2-b^2dq^2)}{d\tau^2}=2\mathrm{A}u(p^2+bq)+2\mathrm{B}v(p^2-bq)$$
$$+\frac{2Cvu}{a}(p^2+b^2)+2b\mathrm{D}vu;$$
$$\frac{v^2u^2(dv^2+du^2)}{d\tau^2}=\frac{2(p^2+b^2)(p^2dp^2-b^2dq^2)}{d\tau^2}+\frac{4(p^2+b^2)b^2dq^2-8b^2pqdpdq}{d\tau^2}$$
$$=\frac{4A}{v}(p^2+bq)(p^2+b^2)+\frac{4B}{u}(p^2-bq)(p^2+b^2)$$

$$+\frac{4C}{a}(p^2+b^2)^2+4bD(p^2+b^2)$$
$$-\frac{8Ab^2}{v}(bq+q^2)-\frac{8Bb^2}{u}(q^2-bq)$$
$$-\frac{8Cb^2}{a}(b^2+q^2)-8b^3D-4m^2a^4b^2,$$

per aequationes (N), (O), multiplicando priorem per (p^2+b^2), posteriorem per $4b^2$. Hinc ob

$$p^2+bq=v^2-b^2-bq=\frac{3v^2-4b^2+u^2}{4}=\frac{v^2+u^2-a^2}{4}+\frac{v^2}{2};$$

similique modo

$$p^2-bq=\frac{v^2+u^2-a^2}{4}+\frac{u^2}{2},$$

obtinebimus:

$$\frac{2v^2u^2dvdu}{d\tau^2}=2vu(Av+Bu)+(Au+Bv)(v^2+u^2-a^2)$$
$$+\frac{2Cvu}{a}(v^2+u^2)+2Davu.$$

Tum ob

$$\frac{4}{v}(p^2+bq)(p^2+b^2)=\frac{(v^2+u^2)}{2v}(v^2+u^2-a^2+2v^2);\ \text{et}$$
$$-\frac{8b^2}{v}(bq+q^2)=-\frac{2b^2}{v}(v^2-u^2)-\frac{(v^2-u^2)^4}{2v}$$
$$=+\frac{(v^2-u^2)}{2v}(v^2+u^2-a^2-2v^2);$$

hincque sumtis his terminis collectim, prodibit iste

$$Av(v^2+u^2-a^2)+2Avu^2;$$

similique modo termini pro B erunt

$$Bu(v^2+u^2-a^2)+2Buv^2;$$

termini autem pro C erunt

$$\frac{C}{2a}(2(v^2+u^2)^2-(v^2-u^2)^2-a^4)=\frac{C}{2a}(v^4+6v^2u^2+u^4-a^4);$$

pro D habebimus $aD(v^2+u^2-a^2)$ et denique $4m^2a^4b^2 = m^2a^6$; ideoque erit prorsus vt supra §. 7:

$$\frac{v^2u^2(dv+du)^2}{d\tau^2}=(Av+Bu)(v^2+u^2-a^2)+2vu(Au+Bv)$$
$$+\frac{C}{2a}(v^4+u^4+6v^2u^2-a^4)+Da(v^2+u^2-a^2)-m^2a^6.$$

Ideo-

Ideoque ratione ibi expoſita tandem elicientur aequationes vltimae, quae rationem differentialium $d r^2$, $d s^2$ exhibent.

§. 22. Quum ſit

$$\frac{d d y \operatorname{cof.} \Phi + d d z \operatorname{fin.} \Phi}{d \tau^2} = \frac{d d w - w d \Phi^2}{d \tau^2}$$

hinc obtinebimus:

$$\frac{d d w - w d \Phi^2}{d \tau^2} = - \frac{A w}{v^3} - \frac{B w}{u^3} = - \frac{A p \operatorname{fin.} \zeta}{v^3} - \frac{B p \operatorname{fin.} \zeta}{u^3};$$

Iam ſi haec aequatio multiplicetur per

$$2 b^2 d w = 2 b^2 (d p \operatorname{fin.} \zeta + p d \zeta \operatorname{cof.} \zeta),$$

tumque aequatio differentialis:

$$\frac{p d d \zeta + 2 d p d \zeta - p d \Phi^2 \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \zeta}{d \tau^2} = b \operatorname{fin.} \zeta \left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right);$$

multiplicetur per $2 p^3 d \zeta$, et poſterius productum a priori ſubtrahatur, conſequemur hanc aequationem differentio-differentialem:

$$\frac{2 b^2 d w d d w - 2 b^2 w d w d \Phi^2}{d \tau^2} - \frac{2 p^2 d \zeta (p^3 d d \zeta + 2 p d p d \zeta) + 2 p^4 d \Phi^2 d \zeta \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \zeta}{d \tau^2}$$
$$= - 2 b^2 p \operatorname{fin.} \zeta \left(\frac{A}{v^3} + \frac{B}{u^3}\right)(d p \operatorname{fin.} \zeta + p d \zeta \operatorname{cof.} \zeta)$$
$$- 2 b p^3 d \zeta \operatorname{fin.} \zeta \left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right);$$

cuius integrale erit:

$$\frac{b^2 d w^2 - p^4 d \zeta^2 + (b^2 - p^2) w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = a \left(\frac{A (b + p \operatorname{cof.} \zeta)}{v} + \frac{B (b - p \operatorname{cof.} \zeta)}{u} + D\right).$$

Quae aequatio integralis etiam ex iſta:

$$\frac{(x d w - w d x)(t d w - w d t) + t x w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = a \left(\frac{A x}{v} + \frac{B t}{u} + D\right)$$

facile deriuari poteſt, modo nimirum loco termini

$$(b^2 - p^2) \frac{w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} \text{ adhibeatur } (b^2 - p^2 \operatorname{cof.} \zeta^2) \frac{w^2 d \Phi^2}{d \tau^2},$$

quippe quum

$$\frac{p^2 w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = \frac{w^4 d \Phi^2}{d \tau^2} + p^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 . \frac{w^2 d \Phi^2}{d \tau^2},$$

vbi prior terminus conſtans eſt, ideoque in conſtanti a D iam comprehendi intelligitur. Tum quoque per combinationem aequationum (M), (N) haec aequatio integralis facile elicitur, nec heic vlterius explicare neceſſum eſt.

§. 23. Si ſimplicitatis cauſſa ſtatuatur:

$$\sqrt{((A+B)(r^3-r)+\tfrac{1}{2}C(r^4-1)+D(r^2-1)-m^2a^3)}=R; \text{ et}$$

$$\sqrt{((A-B)(s^3-s)+\tfrac{1}{2}C(s^4-1)+D(s^2-1)-m^2a^3)}=S;$$

obtinemus

$$d\tau=\frac{vu}{\sqrt a}\cdot\frac{dr}{R}=\frac{vu}{\sqrt a}\cdot\frac{ds}{S},$$

vnde quum ſit $vu=\frac{1}{4}a^2(r^2-s^2)$, fiet

$$d\tau=\tfrac{1}{4}a\sqrt a.\frac{dr(r^2-s^2)}{R}=\tfrac{1}{4}a\sqrt a\left(\frac{r^2dr}{R}-\frac{s^2ds}{S}\right).$$

Tum vero quia eſt:

$$4a^2w^2=(v+u+a)(v+u-a)(v-u+a)(u-v+a),$$

fiet

$$4w^2=a^2(r+1)(r-1)(1+s)(1-s)=(r^2-1)(1-s^2),$$

et quum ſit $d\Phi=\frac{ma^2d\tau}{w^2}$, obtinebimus

$$d\Phi=\frac{4md\tau}{(r^2-1)(s^2-1)}=ma\sqrt a\frac{dr(r^2-s^2)}{(r^2-1)(1-s^2)R}$$

$$=ma\sqrt a\left(\frac{dr}{(r^2-1)R}-\frac{ds}{(s^2-1)S}\right).$$

Sicque his formulis adhibitis omnia quae ad Problematis ſolutionem deſiderantur perfecta ſunt abſoluta.

§. 24. Si fuerit angulus $\Phi=0$, id eſt ſi motus corporis conſtanter fiat in eodem plano per centra virium A, B transeunte, erit $m=0$, ideoque aequatio finalis huiusmodi obtinebit formam:

$$\frac{dr^2(s^2-1)}{ds^2(r^2-1)}=\frac{(A+B)r+\frac{1}{2}C(r^2+1)+D}{(A-B)s+\frac{1}{2}C(s^2+1)+D};$$

quae

quae si loco r substituatur $\frac{1+p}{1-p}$, loco s vero $\frac{1-q}{1+q}$, in hanc transformabitur:

$$-\frac{q\,dp^2}{p\,dq^2} = \frac{(A+B)(1-p^2)+C(1+p^2)+D(1-p)^2}{(A-B)(1-q^2)+C(1+q^2)+D(1+q)^2},$$

Tum vero posito $p = x^2$; $q = y^2$; (vbi probe obseruandum haec x, y, p, q, non cum illis esse confundenda quae supra adhibuimus) sequens emerget aequatio:

$$-\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{(A+B)(1-x^4)+C(1+x^4)+D(1-x^2)^2}{(A-B)(1-y^4)+C(1+y^4)+D(1+y^2)^2},$$

vnde si statuatur $C + D = F$, fiet

$$-\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{A+B+F-2Dx^2-(A+B-F)x^4}{A-B+F+2Dy^2-(A-B-F)y^4};$$ vnde

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+B+F-2Dx^2-(A+B-F)x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(-A+B-F-2Dy^2+(A-B-F)y^4}}.$$

Quum vero heic supposuerimus $p = x^2$; $q = y^2$; qua suppositione vti non licet nisi p, q omni casu valores consequantur positiuos, igitur perpendendum est esse: $p = \frac{r-1}{r+1} = \frac{v+u-a}{v+u+a}$, vbi ob fractionis tam numeratorem quam denominatorem positiuum (siquidem in triangulo bina latera tertio maiora) sequitur esse p positiuum. Deinde quum $q = \frac{1-s}{1+s} = \frac{a+u-v}{a+v-u}$, patet quoque esse q positiuum.

§. 25. Pro casu quo curua a corpore descripta in eodem plano per bina centra virium transeunte iacet, elegans satis inuenitur formula pro radio curuaturae huius lineae. Nam si elementum curuae designetur per ds, et natura curvae supponatur expressa per relationem inter differentialia dv, $d\eta$, nec non functiones lineae v et anguli η, pro radio curuaturae huiusmodi prodibit formula:

$$R = \frac{ds^3}{d\eta(ds^2+dv^2)+v(dv\,dd\eta-d\eta\,ddv)}$$

Quodsi nunc in subsidium vocentur aequationes differentio-differentiales §. §. 4. et 10. allatae, praetermissis terminis quae $d\Phi$ inuoluunt, erit

$$\frac{vdvdd\eta + 2dv^2 d\eta}{d\tau^2} = -\frac{Bdv\,\text{sin.}\,\psi}{u^2}$$

$$\frac{vd\eta ddv - v^2 d\eta^3}{d\tau^2} = -\frac{Ad\eta}{v} - \frac{Bvd\eta\,\text{Cos}\,\psi}{u^2};$$ hincque

$$\frac{v(dvdd\eta - d\eta ddv) + d\eta(dv^2 + ds^2)}{d\tau^2} = +\frac{Ad\eta}{v}$$
$$-\frac{Bdv\Phi\,\text{sin.}\,\psi}{u^2} + \frac{Bvd\eta\,\text{cos.}\,\psi}{u^2}$$

et quum inuenerimus: $u\,d\theta = dv.\,\text{sin.}\,\psi - v\,d\eta\,\text{cos.}\,\psi$, §. 16. consequimur:

$$\frac{v(dvdd\eta - d\eta ddv) + d\eta(dv^2 + ds^2)}{d\tau^2} = \frac{Ad\eta}{v} - \frac{Bd\theta}{u}.$$

Tum vero erit:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{dv^2 + v^2 d\eta^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

vnde haec prodibit aequatio:

$$R\left(\frac{Ad\eta}{v} - \frac{Bd\theta}{u}\right) = 2\,ds\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

§. 26. De formula differentiali:

$$\frac{dr}{\sqrt{((A+B)(r^3 - r) + \tfrac{1}{2}C(r^4 - 1) + D(r^2 - 1) - m^2 a^3}}$$

ab Illustr. *Eulero* iam dudum demonstratum est, eiusdem integrationem ad rectificationem sectionum conicarum reduci; verum hinc quidem parum subsidii adfertur pro inuestiganda aequatione inter r et s, tumque praesertim ineptum foret ad hanc rectificationem recurrere, quando inter r et s aequatio algebraica locum habet, cuiusmodi casus statim obuius est ille, quo alterutrum ipsorum A, B euanescit; quippe quum constet curuam hoc casu descriptam esse sectionem Conicam vel per sectiones Conicas construi posse. Verum quae vlterius de determinatione Problematis ex formulis istis differentialibus §. 7. allatis, monenda sunt, alia occasione vlterius exponere constitui.

PHY-

PHYSICA.

DE TRACTATIONE METALLORVM CVM SVLPHVRE.

Auctore

N. SOCOLOFF.

I.

Metalla vario a variis Authoribus cum Sulphure tractata fuerunt modo. Alii pro Caemento metallorum, alii pro menſtruo eorum adhibuerunt ſulphur. Pauci ſunt, qui vires ſulphuris in metalla fuſa examinarunt. Neminem autem noui, qui inſignium mutationum, quae inde accidunt metallis, atque ſingularium Phaenomenorum tum apparentium rite determinarit rationes, et quamnam vtilitatem phyſicam inde liceat expectare, demonſtrarit. Rem igitur a paucis tentatam his pagellis exponendam curabo, ſperans, officium me aliquod phyſicis eo praeſtare poſſe.

II. Ac primo quidem de ferro agam. Obſeruatum eſt, ferrum limatum cum puluere ſulphuris et pauca aqua in paſtam efformatum, repoſitum ſub terra paucis poſt diebus calorem intrinſecum concipere, atque flammam et maximam fluidi cuiusdam elaftici haud coercibilis quantitatem generare, quod expandens fe magnum in volumen, fuperiacentem terram vel disiicit quaqua verfum, vel fi concreti firmitas pondusque terrae vi eius refiftere valent, eleuare faltem eam nititur in collem, vsque dum impetum fuum deponat. Singulare hoc phoenomenon cernentes eruditi, montium ortus, fiue eleuationem terrae a centro ad periphaeriam hac ex caufa explicare ceperunt. Recentioris aeui Phyfici, poft detectam Aëris fixi Theoriam, non vim tantum huius fluidi extenfiuam, fed naturam quoque eius examinantes, id Aëri Communi globum noftrum terraqueum circumambienti quodammodo fimilem repererunt, atque pro diftinctione Aërem fixum appellarunt, qualis plurimis quoque aliis in corporibus naturalibus detegitur, quum eorum mixtio aliquo modo perturbatur.

Ferrum et Sulphur magnam inter fe habent affinitatem. Quum vnita in Exiguis moleculis, vt eo fcilicet maiori fefe fuperficie tangant, atque aqua infuper conglutinata in quietem reponuntur, mox mutuo in fefe agere atque reagere incipiunt, motum inde fermentatorium et calorem concipiunt, atque vera tandem vtriusque corporis refolutio fit. Oritur hic ignis a phlogifto fulphuris liberato per terram ferri a craffiori fuo acido. Ex Ferro eodem momento prodit memoratum fluidum elafticum, feparatum a Bafi metallica per acidum fulphuris. Ex acido hoc et terra ferri fit Vitriolum; fluidum vero vnitum phlogifto fulphureo format illam flammam elafticam. Provenire hoc fluidum ex ferro dubium non eft. Quia fulphur nihil Elaftici in fe continet, fed econtra alia corpora ra et aërem liberum priuare hac proprietate compertum eſt, indeque vapores eius omni generi Animalium fiunt lethales. Vtrum vero flamma illa vehat adhuc ſecum aliquid de tenuiori acido, hic decidere non poſſum. Pergo nunc ad propria mea experimenta.

Experimentum 1.

III. Limaturam ferri recentem detinui in crucibulo inter prunas locato, vsque dum canduit; adieci tunc puluerifati ſulphuris tertiam fere partem, et mox ſpathula cuprea bene permiſcui cum metallo. Accenſum Sulphur lenta primum conſumebatur flamma, ſuffocantem de ſe ſpargens odorem, dein hic ibi Scintillae igneae apparuere in maſſa, atque breuiſſimo momento poſt eas, erupit flamma albida ſumme elaſtica, ſpeciem quaſi detonationis mentiens, eodemque inſtanti tota diſſipata eſt in aëra. Ferrum tunc totum candens et igne plenum conſpiciebatur, ſed breui poſt eius diſſipationem in puluerem terreum atrum eſt conuerſum, qui ſpirabat diu odorem ſulphureum tenuem penetrantiſſimum.

Experimentum 2.

Hunc puluerem ferri nouo candenti inieci crucibulo, et iterum cum ſulphure methodo dicta tractaui, ſimile expectans phaenomenon; ſed ne minimum detonationis apparuit ſignum. Sulphur non ſecus, ac prunis iniectum tranquille deflagrauit ſuper eum.

Experimentum 3.

Recepi Ochram ferri rubram venalem, et candefactam in Crucibulo examinaui cum ſulphure ſimili modo.

 Deto-

Detonatio secuta est; sed longe debilior, quam cum vero Ferro.

Singulare hoc detonationis Phaenomenon ab aucta per ferrum Phlogisti in Sulphure quantitate, deducere minime conuenit; quia nec cum prunis ardentibus, nec cum oleis, nec cum alcali phlogisticato id facit sulphur, et experimentum 2^{um} opinioni huic demonstrat contrarium. Decomponi hac methodo Sulphur per Ferrum verosimile est; verum si ferrum non constaret, quam solo Phlogisto et terra peculiari sibi propria, quemadmodum olim ita de omnibus metallis ante Beccherum creditum fuit, et nunc adhuc assumitur a nonnullis, decompositum ex Sulphure Acidum, cum phlogisto eius simile priori deberet formare sulphur. Erumpens illa lucida flamma reuera sulphurea est, nam, quum deflagrat, Sulphureo Aëra inficit faetore. Ergo ex acido sulphuris et ferro vnitis oritur quidem sulphur, sed diuersum a priori, elasticum, detonans. Patet hinc, in Ferro praeter phlogiston et terram dari adhuc fluidum tenue, mediae quasi naturae inter Corpora solida et fluida elastica, quod Aërem fixum vocant, quodque praecipua detonationis ferri cum Sulphure causa est.

Docemur porro his experimentis, non ferro modo, sed ochrae quoque eius aërem hunc fixum inesse, eumque semel per sulphur expulsum, simpliciter igne Carbonum restitui non posse. Ferrum amisso suo aëre fixo, colore, nitore atque ductilitate priuatur, et in scoriosam calcem fatiscit; vnde coniicere licet, has qualitates ab aëris fixi virtute quodammodo dependere.

Rema-

Remanens post detonationem (ab Exp. I.) Calx ferri cum acido vitriolico tentata, soluitur cum odore sulphureo, et laeues excolores dat Crystallos Vitrioli, remanente multa terra inerti, insolubili, quam a scoriis sulphuris prouenire credibile est.

Nota. Loco Sulphuris communis adhibiti flores sulphuris, similes effectus non producunt, quia Laeves sunt, et facile igne consumuntur, antequam metallo bene permisceri possunt.

IV. Rasurae Cupri candenti admixtum sulphur consumitur, antequam recte penetrare queat metallum. In olla figulina tecta si hoc connubium lento igne peragitur, facile tum bina coniunguntur corpora, intumescit massa, dissipatoque per ignem sulphure, Cuprum in griseo-fuscum cinerem calcinatum reperitur. Acris scilicet flamma Sulphuris igne dilatatos permeans poros metalli, corrodit illud, et in calcem fuscam puluerulentam mutat; ipsum vero vix vllam patitur ab eo alterationem, nisi quod paulisper in deflagrando accelerari videatur; vnde concludendum esse puto, paucissimum aut vix vllum aërem fixum contineri in Cupro.

V. Stannum Illustris *Cramerus* tradit *a*), si cum sulphuris aequali aut dupla quantitate stratificetur, ad ignem deflagrare, ac si nitrum ei foret additum, relinquereque massam, quae, dum adhuc ab igne rubescit, iam solide consistit. De Plumbo *b*), sic se exprimit: Plumbum cum sulphure fusum ad strepentem deflagrationem concitatur, in massam coit magno igne ad tenuem fusio-

a) Elementa art. docimast part. I. pag. 102. edit. Lugd. Batav. 1744.
b) Lib. et part. cit. p. 103.

nem vix deducendam. Clarissimus *Gellert* c), de vtroque metallo aequaliter affirmat, ea cum sulphure detonare, fieri inde fragilia, refractaria semi-metalloque similia; de stanno praeterea notat, fusum illud cum sulphure pro parte verti in scoriam, et si repetitis vicibus haec fusio instituatur, totum denique in eam mutari posse. Ego, quae propria de his didici experientia, enarrabo.

Experimentum 1.

VI. Libram circiter dimidiam plumbi puri fudi in catino argillaceo, qui latum et aequalem fundum habebat, vt scilicet diffusum late in eo metallum maiorem praebeat superficiem; fluenti tenui fluxu metallo inieci cochlear in puluerem contusi sulphuris, idque fusum statim cum metallo spathula bene permiscendum curaui, quamuis faetidos acresque vapores vix pulmo ferre poterat; post paucam deflagrationem, breui sulphur aggressum est penetrauitque metallum; subito tunc magno cum sibilo quodam lucidissima flamma erupit, qua dissipata totum metallum igne plenum, quasi ferrum ignitum conspiciebatur, et mutatum est in massam ponderosam, friabilem, non amplius igne fusilem, zinco sterili quodammodo similem, quae desuper pulchre fusco-violaceo colore tincta fuit, intus vero ex nitidis exiguis granulis metallicis tota composita esse videbatur.

Experimentum 2.

Residuam hanc post detonationem massam, puluerisatam in mortario, diuidi in quatuor portiones aequales, quarum

c) Chimie metallurgique traduite de l'allemand a Paris 1785. Tom. I. §. 266.

quarum vnam cum calce viua in aëre extincta mixtam retortae vitreae indidi, atque oleo oliuarum superfusam destillationi subieci: stillauit primum phlegma; id secutum est oleum philosophorum dictum, sub finem ascedit terra pinguis Lactei coloris, quae oleo alliaceum affricauit odorem. Terra plumbi cum calce in fundo retortae remanens omni forma limum induratum referebat.

Experimentum 3.

Secundam portionem oleo vitroli examinaui, quo instillato mox violaceus ille atque nitidus metallicus colores disparuere, et faetidissimus putridus quasi, sulphureo mixtus inde odor surrexit. Feruor exiguus fuit et breui cessauit motus. Terra perfecte solui non potuit, sed spoliata coloribus infundo Vrinalis mansit simillima Limo livido-nigricantis coloris.

Experimentum 4.

Acidum salis communis, quod ad soluendam tertiam portionem adhibui, longe potentius agit in hanc massam. Excitat in ea singularem motum circulatorium, sub quo pars vna terrae colore albo fundum vasis petit; altera flauicans sulphurea quasi sursum ascendit, et decidens postea secundum stratum format. Postquam terra acido bene saturata est, et omnis motus cessauit, destillationem ex Retorta propter abstrahendum spiritum institui. Ignem per gradus ad sublimatorium vsque auxi, at paucissimum tantum spiritum obtinui. Bulliendo diu totum fere acidum fixatum est in terra metallica. Sub finem operationis ad Collum Retortae sublimata est pauca quaedam terra, flauo rubroque colore varia, Cinnabarim sublimatam

per-

perfecte referens, quae prunis iniecta sulphureos spirat vapores. Finito opere in fundo reperi massam nigram, ponderosam, solidam, fragilem, quae in aëre libero leni igne funditur in vitrum castanei coloris, et dat flores albos instar antimonii crudi; a salibus acidis non mutatur, ab alcalinis in fusione figitur; solutioni ferri in acido salis admixta, motum quasi fermentatorium concipit, et in terram albam bezoardicam vertitur.

Experimentum 5.

Spiritus Nitri fumans modice aqua dilutus, quartae portioni infusus, motum et calorem insignem producit, atque fumos rubros causticos copiosissimos eructat, quibus omnibus cessantibus terra ad fundum vasis colore albo praecipitatur, liquor limpidus euadit, qui in destillatione fundit spiritum acidum. Terra ab igne in lapideam induratur consistentiam.

Similia phoenomena, qualia obseruauimus in ferro, sistit plumbum cum sulphure tractatum, argumento claro, illud non modo simili eodemque cum ferro gaudere aëre fixo, sed longe maiorem quoque eius continere quantitatem, per quam lux flammae viuidior hic redditur. Strepitus, qui sub eruptione flammae obseruatur, videtur indicare, arctius eum quam ferro, basi huius metalli vnitum, meliusque a natura esse subactum, inde forte maior plumbo mollities atque fusibilitas est. Priuatum per Sulphur aëre fixo, amittit simul has qualitates, et in terream apyram mutatur substantiam, quae solam specificam eius retinet grauitatem, essentialem nempe metallicum characteracterem. Color metallicus, qui granulatim in residua hac post detonationem terra apparet, particulis plumbi per sulphur non alterati est tribuendus, nam iterum leui opera per solam Petrolei accensi flammam in pristinum reducuntur metalium. Color fusco violaceus reliquam tegens terram ab adhaerentibus ei Scoriis Sulphuris prouenire videtur. Acidum Vitrioli Soluit has Scorias, et producit cum iis foetidum spiritum sulphureum; Terra tunc sub genuino suo liuido colore comparet, Limi formam habens. Olea vnguinosa, acuata praeprimis et attenuata per causticum calcis viuae, resoluunt quoque et separant has scorias a terra, tenue earum sulphur, causam nempe coloris, blando suo extrahunt pingui, atque in destillatione secum eas eleuant sub forma terrae albae; qua ex miscela oritur odor Alliaceus.

Acidum salis per coctionem perfecte metallicam terram soluit, et communicat ei salinas suas qualitates, vnde exsurgit corpus inter Salia et Metalla neutrum, semi-metallo simillimum, quod leni igne funditur in vitrum fuscum, et sublimatur in flores. Aqua vero est indissolubile, insipidum, inodorum, diuersum igitur a Saturno cornuo, et proxime ad antimonium accedere videtur. A salibus alcalinis et per Ferrum pro parte decomponitur, vnde terra iterum fixior euadit.

Acidum Nitri vix directe in terram Plumbi agere, sed solummodo phlogiston eius extrahere videtur; Copiosissimis enim et densissimis fumis fere totum in aëra dissipatur, et terram non solutam relinquit, quae phlogisto priuata album induit colorem.

Experimentum 1.

VII. Accedo nunc ordine ad ſtannum examinandum. Metallum hoc purum, pro quali Malaccenſe, Anglicanum et Saxonicum in Commercio ſolet aeſtimari, adeo rarum eſt, vt nullo pretio obtinere potuerim. Coactus igitur fui, experimenta mea inſtituere cum ſtanno vulgo venali, quod ordinario quartam fere partem plumbi admixtam ſibi habet. Sumſi talis Stanni Libram; fudi illud in Catino lato; adieci duo cochlearia pulueriſati Sulphuris; fuſum hoc bene permiſcui cum metallo; poſt aliquot momenta detonatio facta eſt ſimilis illi, qualem in plumbo obſeruauimus; ſub finem flammae elaſticae ex terra candente fumus quidam albus fuit eleuatus, et breui denſatus in puluerem iterum delapſus eſt ſuper eam. Refrigerata reſidua terra partim violacei, partim nigri Coloris, et in lamellas quaſi diſpoſita fuit, duras et fragiles, amiſſo ſplendore metallico; infra quas aliae tenues, multo fragiliores, coloris fere margaritarum reperiebantur Lamellae metallicae, quae ſeparatae a rudiori terra et in Crucibulo fuſae confluxerunt in priſtinum metallum, verum admodum ſtridens, minus compactum, laeuius, et guſtu quodammodo auſterum.

Experimentum 2.

Recepi hoc ſtannum ex lamellis mox memoratis obtentum; deduxi illud in catino, vt prius, ad fluxum perfectum; fluenti inieci ſufficientem ſulphuris quantitatem, detonatio iterum ſecuta eſt; verum longe minor, et flamma longe debilior minorique cum impetu erupit, nec colore adeo viuida, vt prius; remanſit metallum totum

in

in lamellas exiguas, fragiles, rigidas, colore tamen pallido matallico adhus gaudentes mutatum, ac omnibus veri metalli qualitatibus, excepto pondere, orbatum, atque vix aut ne vix quidem in pristinum reducibile statum.

Ex his duobus experimentis concludendum esse puto, stannum longe firmius retinere suum aërem fixum, maiorique a natura praeditum esse eius quantitate, quam plumbum, atque inde haud adeo facile destrui a sulphure; verum, si repetitis vicibus eius accensio instituatur, revera totum denique in scorias lamellosas non amplius igne simplici fusiles verti posse. Discimus hinc iterum, sub detonatione hac metallorum sulphur, quod ad experimenta adhibitum fuit, non omne cum flamma elastica in auras dissipari; sed grossiorem eius partem cum terra metallica remanere atque hanc coloribus tingere. Salinum principium essentialiter Basi imperfectorum metallorum inhaerens, euolui per detonationem illorum cum sulphure, colligimus ex constanti figura lamellata residuae terrae, quae ad tesseras Cristalli Vitrioli quodammodo accedere videtur, atque magis ex sapore subaustero stanni semel cum sulphure detonati. Nam hunc saporem non ab acido sulphuris adhaerente prouenire, vel ex eo clarum est, quod lamellae illae stanneae austerae a sulphure plane immaculatae, et colore splendoreque puro metallico praeditae fuerunt. Fumus albus, qui sub finem flammae elasticae ex stanno erumpebat, fuit plane inodorus, et puluis eius insipidus; ergo non prouenit ab arsenico, quod naturaliter inhaerere stanno, post experimenta Illustr. *Margrafii* ab omnibus fere creditur; sed potius, vt per experimenta mihi constitit, et ex figura lamellosa terrae concludere licet, a parte florum Zinci fuit formatus. Nec mirum eſt. Fuerunt enim Authores magni nominis *d*), qui iam pridem asſeruerunt et demonſtrarunt ſimilitudinem inter Stannum et Zincum.

Reſiduae poſt detonationem Stanni Maſſae ſuperinfuſum acidum vitrioli vix vllam produxit mutationem, ſed digeſtione mucilaginoſam quamdam extraxit ſubſtantiam, quae mora temporis in Capillares Cryſtallos prismaticas concreuit. Signum praeſentiae terrae Zeoliticae. Acidum ſalis lamellarum ſtannearum (exp. I.) in momento deſtruit colorem, et mutat eas in terram albam. Acidum Nitri ab iis concentratiſſimum et fumans redditur.

VIII. Argentum fuſum ab adiecto ſulphure plumbeo tingitur colore, et acritate vaporum eius corroditur in griſeo fuſcum puluerem, facile tamen iterum in priſtinum reducibilem metallum. Flammae elaſticae nulla hic ſigna, aut ſimilia vt in Cupro animaduertuntur phoenomena.

IX. Mercurius facile in ſuam aggregationem recipit ſulphur, et ſi in vaſibus clauſis per ſublimationem cum eo vnitur, conſtituit cinnabarim. Si ſuper leui Calore trituratione bina haec corpora coniunguntur, oritur inde ſic dictus aethiops mineralis. Si mea methodo, calefacto, quantum ferre poteſt, Mercurio adiicitur Sulphur, pro parte calcinatur ab eo, et mixtum cum reſiduis Scoriis Sulphuris format maſſam Nigram. Tenuior tamen et magna

---

d) In actis academ. Regiae Scient. Pariſienſis.

magna pars mercurii intacta relinquitur, quin fluidior et purior reddi videtur.

X. De Wismutho tandem addemus non nulla. Metallum hoc fusum et cum sulphure mixtum, Scintillas primo igneas, et mox flammam edit lucidam, sed breui cessantem. Vertitur postea in terram fuscam, intus granulis metallicis pallido-albidis constantem.

Experimentum 1.

Cum acido vitrioli probata haec terra, incalescit leuiter, et in faetidum illud vertit Spiritum Sulphureum; ipsa vero ab eo non soluta manet, et, quod mirum est, pristinum tunc metalli recuperat sibi colorem.

Experimentum 2.

Acidum Salis communis absque vllo fere cum ea coit motu, mora tamen et coctione certam eius soluit portionem, eamque in destillatione secum per collum Retortae ducit; fit inde liquor satis limpidus, qui Ferro aut Zinco, aut Stanno instillatus dimittit in instanti aterrimam ex se terram, quae siccata et in igne examinata sulphurea esse deprehenditur. Si vero idem liquor aqua fontana diluitur, secedit inde terra candidissima.

Nota. Acidi Salis requiritur fere quintuplum ad vnam terrae partem soluendam. Aqua fortis cum aliquot Acidi Vitriolici guttis mixta longe facilius eam soluit, et solutio eadem fere producit phoenomena.

Experimento primo probatur, acidum Vitrioli non agere directe in calces metallicas per Sulphur productas, ſed ſolas Sulphuris Scorias iis adhaerentes ſoluere. Praeterea inde patet, colorem genuinum Wismuthi per Sulphur non deſtrui, ſed ſolum obfuſcari.

Acidum Salis quemadmodum cum Wismutho ipſo, quum nempe admixto ei mercurio ſublimato fit deſtillatio docente Illuſtri *Pott* e), ita cum Calce quoque eius facit ſpeciem ſic dicti *Butiri*, quod per ferrum, Zincum et Stannum decomponitur; Terra Wismuthi, quum haec metalla per acidum ſalis ſoluuntur, attrahit ſibi ex iis exhalantem phlogiſticam materiam, et atrum inde aſſumit colorem. Mirum eſt hoc, quod verum tunc ſulphur conſtituat; vnde concludo, Acidum vitriolicum, eſſentialiter ei ineſſe. Si Sulphur hoc igne comburitur, remanet terra rubra, iners, non amplius metallica. En veram Wismuthi Analyſim, ex qua clare natura huius ſemimetalli perſpicitur.

XI. Nunc diiudicanda iam nobis venit ipſa illa flamma elaſtica, quae ex metallis producitur per Sulphur. Eam ſulphuream eſſe dixi, ſed aëre fixo metallorum impraegnatam, quod vt probem, ſequens inſtitui experimentum: Recepi Stanni vulgaris Libram ſemis, fuſo adieci Sulphur, et miſcendo ea Spathula aenea detinui in igne, vsque dum e maſſa Scintillae igneae hic ibi prodire caeperunt; effudi tunc eam ſuper Laminam Cupream frigidam, ſuperiectisque variis Linteamentis extinxi ſulphur et ſuppreſſi ita detonationem; dein comminutam in Mortario, Retortae indidi

e) In diſſert. ſua de Wismutho.

didi vitreae, et adaptato vaſto Recipiente deſtillationem igne mediocri inſtitui. Fuſa maſſa copioſiſſimos edidit fumos albos, qui adinſtar Riui ruebant in vas Excipiens, et breui totum repleruut. Cauens porro Rupturam vaſorum, ſuſtuli de igne Retortam, antequam operatio finita fuit. Quum Retorta in aëre refrigerabatur, fumi ex Recipiente omnes in eam redierunt, et fixati ſunt ſuper terram ſuam. Fracta demum Retorta reperi pulcherrimas Cryſtallos ſubprismaticas, ſubdiaphanas, partim luteas, partim rubicundas, quae omni in examine verum et puriſſimum, quale vix vnquam produxit Natura, Sulphur ſiſtunt. Parietibus bulbi adhaeſit terra quaedam fulua, ſuperficie polita nitida, quam a Scoriis Sulphuris volatiliſatis provenire credo.

Experimentum hoc quamuis non finitum, meis tamen votis perfecte ſatisfecit. Loco flammae in vaſibus clauſis vapores elaſtici prodierunt. Ex his ortum eſt Sulphur cryſtallinum; ergo verum eſt, quod dixi.

XII. Denique reſtaret mihi adhuc explorare naturam et qualitates Aëris illius fixi in Metallis contenti; ſed deſtitutus vlteriori in hoc experientia, nihil certi de eo pronunciare poſſum. Coronidis vero loco corollaria non nulla ex ſupradictis deducta hic ſubiungam.

I. Metalla imperfecta priuata Aëre fixo in ſcorioſas mutantur calces, eo vero reddito priſtinum recuperant ſplendorem, vt id Mercurii praecipitati rubri per Aërem fixum ferri reuiuificatione probari poteſt.

II. Met-

II. Mettalla non phlogifto, quod vnum idemque in omnibus eft, fed Bafi fua differunt metallica.

III. Semi-metallis et metallis imperfectis aliquid falini ineft.

VI. Grauitas fpecifica metallorum in Bafi eorum eft pofita.

V. Criftallifatio Sulphuris prouenit ab introductione ei Aëris fixi.

DE NATVRA ARSENICI.

Auctore
NICAETA SOCOLOFF.

Arsenicum propterea, quod animalibus exitiosum per se venenum sit, a physicis negligi non debet; verum ob vim ac efficatiam, qua pollet, corpora metallica et omne fere genus terrarum alterandi ac immutandi, maiori prae caeteris admiratione et attentione dignum esse videtur.

Inter eruditos a longo tempore de Natura Arsenici fuit disputatum; hucusque tamen nondum rite definitum et per experimenta probe demonstratum est, quibusnam proprie ex partibus illud esset constitutum, et ad quam mineralium classem aptius referendum. Clarissimus *Junkerus* in conspectu chemiae ad finem Tomi secundi, in appendice definitionum, Arsenicum definit per corpus ex substantia metallica per vapores sulphureo - salinos subtiliter corrosa constans, et alibi, Tabula XLVII., de Bituminibus ait; ſi Bituminis ardor, ſale communi auctus, certas metallorum mineras corripiat, varia cramata volatilia Arſenicalia et ipſum fortaſſe Cobaltum Alicubi generari poſſe. Ex quibus patet, non vnicum ſulphur, nec ſolum acidum ſalis, ſed vtrumque ſimul ab authore ſtatui in Arſenico; quod in quantum ſit verum, infra videbimus. Pariter Dn. *Lemery* in ſua chemia pag. 439, Arſenicum ex ſulphure et ſale quodam cauſtico conſtare affirmat. Celeberrimus *Pott*, vir in practica chemia experientiſſimus, in diſſertatione ſua de Auripigmento, contra opinionem *Junkeri*, exiſtentiam ſulphuris in Arſenico ſolidis refutat Argumentis. Nam purum, inquit, et album arſenicum nunquam flammam inſtar ſulphuris concipit (quod *Stahlii* quoque per experimenta confirmatur), nec cum nitro in crucibulum candens iniectum, aperta flamma deflagrat, ſed cum ebullitione quadam fluxionem ſubit; nec denique cum mercurio ſublimato deſtillationi ſubiectum dat cinnabarim, prout alia corpora ſulphurea ſolent. De ſalis praeſentia in Arſenico paulo aliter vir illuſtris arbitratur, et dubitare magis, quam eam perfecte negare videtur; verum poſtea aliorum experimentis et rationibus conuictus, lubenter, dari ſalem, conceſſit. Nam reuera Arſenicum in XV. partibus aquae feruidae eſt ſolubile, et Linguam, ſi eo tangatur, quamuis non ſtatim, vt ſalia pura ſolent, acriter tamen et fortiter vrit et mordet, vti clariſſimus *Ludouici* id primus in egregia diſſertatione de hoc corpore habita probauit; et nobiliſſimus *Lehmannus* in Cadmiologia atque aliis ſuis ſcriptis chemicis, vberrimis ac ſolidiſſimis naturam Arſenici Salinam confirmauit argumentis, quae omnia hic adducere nimis foret longum.

Claris-

Clarissimus *Vogelius* in sistemate mineralogico novo, Arsenicum sub nomine salis ammoniacalis metallici descripsit, et salinam eius naturam post *Lehmannum*, multis annisus est probare argumentis. Opinio haec communiter nunc ab omnibus fere recentioribus chemicis atque mineralogis est recepta; tamen, si recte perpendimus et probe ponderamus documenta, quae ad defensionem eius a fautoribus proponuntur, fateri cogimur, nondum ex iis recte inferri et concludi posse, Arsenicum non sulphuream aut semi-metallicam, sed veram et perfectam in se esse salinam substantiam. Solui per coctionem in quindecupla aquae quantitate et Linguae acrem imprimere saporem, demonstrat quidem, aliquid salini subesse; verum simul hic notandum, id proprium esse soli cristallinae et puluereo-calciformi speciei Arsenici, arte magis, quam natura in hanc formam redactae, vbi scilicet semper de iis corporibus, cum quibus tractatur arsenicum, aliquid solet adhaerere, vel potius, vbi Arsenicum cum terreo-salinis magis, quam metallicis commixtum est substantiis: de aliis Arsenici speciebus formam natiuam et texturam coloremque metallicum seruantibus neutiquam id dici potest. Certe Arsenicum pro variis circumstantiis varii generis assumit formas, et hinc maxime ambiguum videtur esse genus inter salia, sulphura et semi-metalla; nouimus tamen et satis perspectum habemus, ex natura sua nulli corpori magis esse affine et facilius auidiusque vniri, quam genuinae suae, in qua nascitur, terrae metallicae, quae magnetis instar ad se illud trahens, ex omnibus mixtionibus siue combinationibus praecipitare ac decomponere valet, vti id exemplo Salis neutri arsenicalis ab illustri *Macquero* primum detecti, optime probatur; quippe quod neque ab acidis mineralibus, neque ab vlla alia Materia, praeterquam terra metallica decomponi poteſt; vnde recte concludi poſſe puto, non Salinocriſtallinam, ſed metallicam potius formam, arſenico eſſe propriam et naturalem. Hinc puritas quoque minerarum arſenicalium non a criſtallina figura iuxta recentiores, ſed a regulina potius Forma eſt iudicanda, quemadmodum Clariſſimus quoque *Monnet* in diſſertatione ſua de Arſenico *), quae praemium ab Academia regia Scientiarum Berolinenſi pro anno 1773 reportauit, putat, qui purum et virgineum Arſenicum natiuum deſcribit per ſubſtantiam ponderoſam, duram, fractura granuloſa nitida, politura inſtar chalybis ſplendida, quae tamen a contactu aëris immutatur et abſcuratur. Nam in ſtatu regulino Arſenicum magis fit volatile, quam in Criſtallino, fumum dat longe denſiorem et odorem penetrantiorem, in textura ſua redditur compactius, ſolidius et ponderoſius; ergo omnes eius qualitates eſſentiales magis depurantur et exaltantur.

Veteres Mineralogi, vt Clariſſimus *Bromel*, *Voltersdorf*, *Vallerius*, *Cartheuſerus*, *Iuſti* et alii, propter rationes, quod arſenicum pondere gaudeat metallico, et quod cum naturaliter in ſuis mineris, tum artificaliter chemicis encheireſibus facile ſuſcipiat ex calce formam regulinam, et in hoc ſplendido ſuo ſtatu cum omnibus metallis, excepto Wiſmutho, in fluxu amicabiliter coeat, ad ordinem ſemi-metallorum illud retulerunt. Nemo ſane negare poteſt, arſenicum metallicae eſſe proſapiae, atque binis illis qualitatibus, nempe quod pondere gaudet metallico et ex calce in regulinam reducitur formam, ac denique quod ſub malleo non eſt extenſile,

*) A Berlin. chez Chretien Frederic Voſs. 1774.

tenſile, igne autem fit volatile, perfecte cum notis characteriſticis ſemi-metallorum conuenire; ſi autem, ſeueriori examine inſtituto, vlterius illud cum his conferre ac comparare velimus, videbimus non minus ab his, imo plus, quam a ſalibus diſtare. Nam omnes calces vt metallorum, ita ſemi-metallorum quoque, poſtquam ſuo phlogiſto, quod dat ipſis ſplendorem metallicum, perfectae ſunt orbatae, in igne reſtant fixiſſimae; econtra vero Arſenici calx, quam Arſenicum album ſolent vocare, ſemper et conſtanter, imo ante fuſionem eſt volatilis. Porro calces metallicae aut plane non, aut difficulter ſoluuntur in acidis; arſenicalis vero non in acidis tantum, ſed oleis quoque, imo aqua bulliente, ſi requiſita horum menſtruorum quantitas adhibeatur, eſt ſolubilis, atque ex aquea illa ſolutione, poſt euaporationem debitam et refrigerationem praecipitatur Cryſtallis luteis, transparentibus irregularis plerumque figurae. Prae caeteris autem notabilis eſt ea Arſenici a reliquis ſemi-metallis diuerſitas, quod Calx eius ſublimata ab igne, det fumum odore alliaceo, et quod tentata guſtu, acerrimum Linguae imprimat ſaporem. Nam omnium metallorum et ſemi-metallorum Calces, ſi rite paratae fuerint, perfecte inodorae ſunt et inſipidae, excepto forte ſolo Antimonio. Addi denique hic illud meretur, quod non ſolum Arſenicum in ſtatu regulino, ſed Calx etiam eius, excepto Wismutho, omnibus metallis et ſemi-metallis per fuſionem facile vniatur et adeo firmiter adhaereat, vt vix ab iis tandem ſeparari queat; id quod nulli alii, neque terreae neque metallicae calci proprium eſt. Singulare pariter illud phoenomenon eſt, quod Arſenicum cum Nitro tractatum producit. Si ſcilicet cum aequali portione Nitri fuſioni ſiue deſtillatio-

 ni

ni subiiciatur, non detonat cum hoc sale in modum aliorum metallorum, sed instar acidi vitriolici perfecte decomponit Nitrum, et expulso acido nitroso, quod inde faetidum ac penetrantissimum prodit, et condensatum in recipiente per aquam, caerulescente quodam colore leuitur tinctum apparet, cum Basi sua constituit salem quemdam medium, qui in aqua solutus post euaporationem dat cristallos prismaticas vtrinque pyramidatas, quadrangulares; quem primus Celeberrimus *Macquer* *) sub nomine Salis neutri arsenicalis descripsit. Haec ex natura Arsenici deducta argumenta satis, credo, demonstrant, minime id in genere conuenire cum semi-metallis. Neque igitur sal, neque semi-metallum est, sed mediae cuiusdam naturae inter salia et semi-mettalla.

Illustrissimus *Linnaeus* post *Beccherum* primus Arsenicum in sua Mineralogia pro Sulphure metallico declarauit, fumo albo, in quem a calore ignis resolui solet, et odore fumi phosphorico-alliaceo a reliquis distinguendum. Arsenicum, inquit, cum aqua Soluatur, salibus, cum det regulum, metallis a quibusdam adnumeratur; ego, quod ardeat, fumet, odorem spargat, metalla mineraliset, et quod pyritae sit oppositum, sulphuribus inserui. Ingenue Celeberrimus author simul quaerit, vtrum regulus Arsenici genuimus sit, vel spurius?

Sulphurum metallicorum primam notionem Dn. *Beccherus* nobis formauit, verum adeo obscuram et imperfectam,

---

*) Voyez le Recueil des memoires de l'academie des sciences pour les années 1746 & 1748. à Paris.

fectam, vt quibus haec proprietatibus cum ſulphuribus communibus naturaliter in genere conueniant, vix dicere poſſumus. Praecipue quod ad genus *Beccheri* aureum attinet, ex idea, quam de ſulphure vulgari habemus, incredibile certe videtur eſſe, vt in fixiſſimo et maxime impermutabili igne corpore (auro) ſimile quid ſalinae aut inflammabili ſubſtantiae reperiatur. Illuſtris *Linnaeus* *) ſulphura metallica a reliquis diſtinguit eo, quod ſalino ſcateant metallico; vtrum vero proprio ſenſu pro ſulphuribus haberi mereantur, non disquirit. De Arſenico ſane dubitare non poſſumus, quin hoc verum ſit. Nam quamvis album purum Arſenicum prunae iniectum, nullam dat in modum ſulphureorum corporum flammam; vbi tamen cum phlogiſto abundantibus corporibus, exempli gratia, ferro in fluxu certo modo miſcetur, vt ſaturetur ignea materia **), tunc veram ac euidentem, exiguam licet, edere ſolet flammam, id quod pariter in mineris eius naturalibus, metallica forma gaudentibus obſeruatur, et clariſſimus ſupra citatus *Monnet* ***) idem de naturali et puro Regulo arſenicali, qualis olim 1755 et 1760 annis ex metallifodinis Ste. *Marie* aux Mines magna quantitate fuit erutus, affirmat. Fumus albus denſus, odore alliaceo inſtar phoſphori faetens, qui eſt ſemper proprius et genuinus arſenico, quum igne reſoluitur in vapores, demonſtrat Materiam ſiue terram phlogiſticam eſſentialiter magua

---

*) Syſtematis Naturae Tom. III. claſſ. II. minerarum.

**) Vid. Joh Gotſchalk Vallerii *phyſiſcher Chemie zweiter Theil, dritte und vierte Abhandlung*, cap. 15. §. 23. No. 6.

***) Diſſ. rtation ſur l'arſenic, qui a remporté le prix etc. à Be lin 1774.

gna ei copia inesse, verum simul ita suppressam, obuolutam et salino principio esse subactam, vt in flammam erumpere et qualitates substantiae igneae communes monstrare nequeat, sed quasi calcinata aut in terreo-calcaream substantiam conuersa appareat *). Hoc phlogiston in Arsenico contentum in causa est, quod illud non in regulina tantum forma, sed in specie calcis quoque facile cum omnibus vniatur metallis. Deinde dari in Arsenico principium salinum, et mixtionem eius essentialiter acidum quoddam, tanquam principium constitutiuum secundum, ingredi, clarum ac euidens vel inde fieri potest, quod maxima et omnibus animalibus lethali gaudeat acrimonia, et quod facile cristallino-salinam suscipiat figuram; denique quod Nitrum decomponat, et acidum nitrosum, ex sua Basi expellat, atque cum ea medium constituat Salem. Haec porro Arsenici cum Nitro tractatio, per faetorem acidi nitrosi indicat, oriri hic ex combinatione arsenici cum Basi Nitri, speciem aliquam hepatis sulphuris, cuius odore et phlogisto metallico infectum acidum nitrosum, faetidum et penetrans atque colore caerulescens redditur. De hoc Arsenico fixato per Nitrum, illustris *Pott* in dissertatione de sulphuribus metallorum **) prodit, quod omnia fere metalla, si cum eo caementententur, soluere valeat, quod hepati sulphuris communis quoque proprium est.

His

*) Phlogiston metallicum non est pura et elementaris materia ignea, sed potius est vera, vt recte Beccherus appellat, terra phlogisto abundans, qualis in scoriis sulphuris et oleis expressis cernitur.

**) Vid. dissertations Chymiques de Mr. Pott, traduites de l'allemand par M. Demaschy à Paris 1769. Tom. I. pag. 107.

His positis facile nunc reliquae proprietates Arsenici explicari possunt. Volatilitas omnibus sulphuribus propria est; Arsenici vero ante fusionem in specie fumi albi sublimatio demonstrat, illud insigni copia phlogisticae terrae, atque tenuiori, quam quod aliis speciebus sulphureis inest, principio salino esse praeditum. Solui in certa aquae quantitate, et ex hac solutione cristallina praecipitari figura, improprium equidem est sulphuribus; tamen inde recte concludere non possumus, arsenicum ad classem sulphurum haud naturaliter referri. Nam, quatenus est corpus sale acido et phlogisto constans, essentialiter non potest non congener esse sulphuribus; verum duo illa principia eius constitutiua in Mixtione sua, singulari et diuerso plane a reliquis disposita sunt modo, ita vt non phlogistica terra, quemadmodum aliis in corporibus sulphureis, sed salinum principium magis euolutum ac extrapositum sit, in modum fere Vitrioli; vnde magis quoque solubile Aqua euadit. Peculiari praeterea et longe a reliquis diuerso Arsenicum gaudet sale acido, quod differentiae illius praecipua causa est.

Ab Acidis mineralibus solui Arsenicum, minime mirum est. Nam habemus exempla in Wismutho, Marcasita et pyritae variis speciebus, quae licet sulphure omnino faetae sunt, actioni tamen Acidorum mineralium, praecipue postquam leuiter calcinatae sunt, resistere non possunt. Caeterum communiter hic notandum est, sulphura metallica longe maiorem cum acidis habere affinitatem, quam reliqua Bitumina siue sulphur Vulgare. Acidum Nitri facillime omnium aggreditur Arsenicum et fumans ac penetrantiſſimum ab eo redditur. Solutio Arſenici in Acido ſalis Butirum arſenicale apud chemicos dici ſolet, quod paratur vel per ſe, ſi ſcilicet acidum illud aliquoties ab Arſenico per deſtillationem abſtrahatur, vel, quod facilius eſt, ſi Arſenicum ſulphuri communi vnitum, vt in Riſigallo vel Realgare eſt, cum Mercurio ſublimato corroſiuo aequali portione mixtum deſtillationi ſubiiciatur; vbi vera fit vtriusque corporis decompoſitio, et noua combinatio. Acidum rapit ſecum Arſenicum, et cum eo in forma Liquoris acerrimi deſtillat; Mercurius vero Sulphuri iungitur, et ſublimatum cinnabarinum cum eo format. Acidum Vitriolicum proprie non ſoluit ſed figit Arſenicum, ita vt coctum cum eo, poſt abſtractum acidum, ignem fuſionis ſuſtineat, et inſtar vitri fluat, quod Aëri expoſitum ſponte in deliquium abit. Celeberrimus *Macquer* (*c*) obſeruat, Oleum Vitriolicum per abſtractionem a ſufficiente Arſenici quantitate, imbui ſingulari odore ſimillimo illi, qualem ſpiritus ſalis communis de ſe fundere ſolet.

Paradoxum in ſupra dictis videbitur forte nonnullis, ſupponere me, materiam phlogiſticam ita ſupprimi, obuolui ac ſubigi poſſe a principio ſalino, vt in flammam erumpere, atque communes materiae igneae qualitates monſtrare nequeat; verum, qui in practica chemica paulo magis verſati ſunt, id minime iis mirum videri poteſt. Nam ſimile et maxime analogum huic habemus exemplum in Sul-

(*c*) Dictionaire de Chymie. Tom. I. Sous l'Article d'Arſenic.

Sulphure communi, cum ſale Ammoniaco tractato (*d*). Si ſcilicet Sulphuris communis et ſalis ammoniaci aequales miſcentur partes, et leui digeſtione intimius coniunguntur, denique vero igni exponuntur aperto, non accenditur, vt ſolet ex ſua natura, Sulphur, ſed totum abque vllo indicio flammae, cum floribus ſalis ammoniaci ſublimatur in ſpecie fumi. Multo minus inflammatio locum habet, ſi duae ſulphuris partes cum tribus partibus ſalis ammoniaci mixtae igni exponuntur, ſed vtriusque corporis flores inſtar fumi absque vlla accenſione eleuantur in altum, remanente infra exigua terra quadam fuliginoſa griſeo-nigri coloris. Si eleuati ſulphureo-ammoniacales flores (quum ſcilicet experimentum inſtituitur per deſtillationem vel ſublimationem) vlterius igne tentantur, vel ardenti Candelae exponuntur; eodem ſe gerunt modo, vt prius, et ne minimum quidem flammae ſulphureae praebent inditium. Si autem in pollinem pulueriſati aqua eluuntur; ſoluto Sale ammoniacali praecipitari ad fundum ſolet puluis luteus, qui igne examinatus, verum ſe eſſe Sulphur, monſtrat per flammam ſulphuream. In hoc experimento igitur, reuera phlogiſtica materia in ſulphure contenta ſupprimitur per ſalem ammoniacum.

Adhibui porro ſuperius ſingularem nec omnibus forte acceptam expreſſionem, terram nempe phlogiſticam per ſalinum principium in calciformem mutari poſſe ſubſtantiam, perinde ſcilicet eſt, ac ſi dicerem, Arſenicum

 eſſe

(*d*) Vid. Diſſertation Chymique de M. Pott. Sur le ſel ammoniacal ſecret Sect. IV. Libr. citato.

esse sulphur metallicum formam calcis metallicae habens. Suppositam veritatem vt probem exemplis, primo mihi memorandum est sulphur Antimonii auratum, siue sic dictum puluerem Carthusianorum, qui sub specie calcis rubrae conspicitur, et nec colore nec fluxilitate cum sulphure conuenit communi; tamen, si cum Mercurio praecipitato rubro mixtus, et exigua quantitate aquae incorporatus, leui subiicitur digestioni, verum se esse sulphur, probat adore sulphurei spiritus. Exemplum pariter clarum habemus in vitriolo vulgari viridi, in quo terra phlogistica, quae coloris eius causa est, Basi metallicae adhaerens, simul cum hac, imo acido vitriolico praesente, calcinationem perfert. Clarissimus supra non semel citatus *Monnet e*), in egregia sua de Arsenico dissertatione, propria affirmat experientia, multis se vicibus et diuersa proportione intime coniunxisse sulphur commune cum pura ferri calce, et vera calce plumbi; atque vlterius vitri antimonii exemplo calcinationem sulphurum demonstrat, quod tale esse dicit, quatenus portionem sulphuris in se continet. Hac ex ratione clarissimus Author diuidens mineras Arsenici naturales 1.) in mineralisatas Sulphure 2.) mineralisatas aliis corporibus metallicis, 3.) calciformes, 4.) talem quoque admitti posse putat diuisionem minerarum metallicarum, in quibus Sulphura metallica in speciem terrae aut calcis sunt versa. Peut-etre, dit il, trouverons nous, lorsque la mineralogie sera plus avancée, qu'il en existe en-

(*e*) Vid. Dissertation sur l'Arsenic, qui a remportè le prix de l'Academie royale de sciences & belles Lettres. A Berlin 1774. vid. notam *c*).

encore une quatrieme ſorte, celle dans les quelles les metaux, reduits auſſi a l'état de terre, ſeroient neanmoins combinés avec le ſoufre; car il eſt ſur, que le ſoufre ſe combine avec certaines chaux Metalliques.

Vt vero denique ſupra allegatis meis ad demonſtrationem ſulphureae Arſenici naturae argumentis, maius addam pondus atque valorem, propria non nulla ad confirmandam rei veritatem adducere lubet Experimenta.

Analiſis chemica Arſenici a plurimis Authoribus, plurimisque modis fuit tentata, verum exiguo admodum cum ſucceſſu, et Arſenicum in omnibus experimentis ſemper ſe idem eſſe manifeſtauit. Adeo certe ſimplex videtur eſſe corpus, vt vix vllum fere reperiri poteſt medium, quo in mixtione ſua turbari ac decomponi queat. Ego poſt inania plurimorum Authorum hunc in finem inſtituta tentamina, arſenicum cum diuerſiſſimis tractaui ſubſtantiis; fateri tamen debeo, vix quidquam ſolidi ac certi ex analiticis meis experimentis dedicisse. Singulare ſane illud eſt, quod, ſi duae partes Arſenici cum tribus partibus Aluminis crudi mixtae, deſtillationi ſubiiciantur, prodit primo phlegma ſiue Liquor fortiſſimo odore Sulphurei ſpiritus gaudens; ſublimatur dein Arſenicum partim criſtallina, partim calciformi ſpecie, et in fundo retortae remanet terra aluminaris ſicca, inſtar pumicis poroſa, colore griſeo. Phlogiſticam materiam Arſenici experimentum hoc clare demonſtrat; tamen poſtea ſublimatum Arſenicum remanet in ſua natura minime mutatum. Vitriolum viride ſimili modo cum arſenico tractatum eundem producit effectum, excepto, quod paulo fixius Arſenicum ab eo reddi videtur. Cum Bituminibus variis, adiuncta argilla ſimul, deſtillatum arſenicum, ſublimari ſolet figura criſtallina, colore inſtar diamantis fere ludens. Cum Lapide cauſtico mixtum facile ſoluitur Arſenicum, et ſi ſolutio illa aqua diluatur, per moram aliquam temporis, in grumos cogi, et praecipitari ad fundum vaſis obſeruatur; odorem autem ſolutio nullum fere praebet.

Synthetica itaque denique methodo naturam Arſenici imitari conatus ſum. Poſt plurima incaſſum tentata, ſumſi deinde Mercurium ſublimatum corroſiuum, atque tres eius partes cum quinque partibus lapidis cauſtici praecipitaui ſicco modo; infudi deinde aliquot gattas olei Vitrioli, quod efferueſcentiam produxit, et excitauit vaporem aliquem album, qui tamen mox iterum denſabatur, et deſcendebat ad terram; denique ad ſaturationem vsque inſtillato acido vitriolico, factus eſt ſuper terram liquor Mercurialis, qui, ſi frigori exponitur, in tenues capillares priſmaticas concreſcit criſtallos; ſi vero ferro vel potius chalibi polito inſtillatur, agit in modum Acidorum, rodit metallum, et odorem tenuem, penetrantem alliaceum ſpargit, atque metallo maculam ſingularem albam imprimit, quod infallibile ſignum eſt producti Arſenici. Fit itaque hoc experimento ſpecies Arſenici Liquidi artificialis, quod omnibus naturalis Arſenici gaudet qualitatibus, excepta ſola conſiſtentia. Per actionem Acidi Vitriolici in terram lapidis cauſtici, Mercurius praecipitatus cum Acido ſalino e Baſi ſua terrea expellitur et reſuſcitatur, atque in forma Vaporis albi humidi eleuatur, ſponte per ſe denſabilis in Liquorem aqueum. Spiritum Acidi Vitriolici, vel, vt rectius

rectius dicam, aërem fixum vitriolicum admixtum esse huic albo fumo, demonstrat aquea eius humiditas. Quum igitur Liquor ille ferro instillatus, agit in metallum, acidum Vitrioli in eo contentum, sulphureum primo producit spiritum, qui deinde subactus Sale medio Acidi salis Communis cum Mercurio, in verum Arsenicalem liquorem mutatur.

Sumsi iterum Limaturam Martis recentem, atque hanc, prius igne candefactam detonaui per Sulphur (*f*), residuae calci ferreae odorem penetrantissimum Sulphureum spiranti instillaui Acidum vitriolicum per guttas, et simul aliquid Acidi Salis addidi. Ortus subito est odor summe faetidus, alliaceo similis, penetrantissimus et maxime volatilis, qui vasto recipiente exceptus, latera eius splendido sulphure, colorem metallicum, aut potius pyritoso-metallicum habente incrustauit. Productum experimenti huius simile est priori; nempe spiritus sulphureus ex terra phlogistica ferri atque acido vitriolico productus, subactus denique acido salis, mutatur in pyritosum sulphul metallicum.

Ex his duobus igitur experimentis recte concludi posse spero, Arsenicum reuera esse sulphur acidi salis cum terra phlogistica metallica mixti, vel, vt clarius loquar, Arsenicum esse Spiritum Sulphuris Communis, vel per Acidum Salis Communis solum, vti est in pyritis, vel per Sa-

(*f*) Vid. Supra Dissertationem meam de tractatione metallorum cum sulphure.

Salem eius medium metallicum subactum, digestum et in metallicum transmutatum splendidum statum.

Ex his nunc Corollarii loco deduco,

I. Non solidum tantum, sed liquidum quoque dari posse arsenicum in natura.

II. Omnibus in pyritis metallicis speciem Arsenici reuera reperiri.

III. Propriam ac genuinam Arsenico formam esse metallico-sulphuream.

SCRV-

SCRVTAMEN CHEMICVM CALCVLI ACIPENSERIS HVSONIS SEV BELVGAE.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. 1.

Quum ante aliquod tempus Calculum Acipenſeris Huſonis, qui Ruſſis *Bielugae* nomine venit, a Cel. Collega noſtro D. *Pallas* dono accepiſſem, vt in naturam huius calculi chemice inquirerem, lubens arripui hanc occaſionem conferendi aliquid ad penitiorem cognitionem chemicam corporum ex animali regno deſumtorum et ea inſtitui experimenta, quae nunc Academiae communicare animus eſt. Nihil autem de ſitu calculi in corpore piſcis, ſub vertebrarum ſpina in ipſo, vt videtur, renis parenchymate latentis, nihil de figura incerta ſatis, de conſtructione lamelloſa et ſimul radiantibus quaſi fibris cryſtalliſata praefabor, vtpote quae in *Itinerario Cel. Pallas*

(Vol. I. p. 436. Vol. II. p. 342.) iam expoſita, et propediem ab eodem fuſius cum iconibus calculorum adiectis, expectanda ſunt.

§. 2. Calculus, quem pro experimentis habui, pondus fere ſesquiunciale aequauit. Forma irregulariter ouato-depreſſus, externa facie velut oſſeus, fractura vero verſus centrum Zeolithis inſtar radiatus, colore ex flaueſcenti albo fuit; odore et guſtu omnino caret. Pondus ſpecificum eiusdem, a Cel. Collega noſtro *D. Krafft* exploratum, ad aquam fuit 46. 21 vel 219. 100.

Experimentum 1.

§. 3. Scrupulus pulueriſati calculi per digeſtionem in alcohole vini pondere non imminutus fuit.

Experimentum 2.

§. 4. Semuncia eiusdem pulueris cum aqua deſtillata digeſta aliquoties et extracta, amiſit grana LXXII.

Experimentum 3.

Reſiduum ſiccatum (drachm. ji. gr. XLViij.) cum acidis mineralibus parum efferueſcebat atque facile acido nitri ſoluebatur, nullo relicto reſiduo. Liquori inſtillata ſolutio ſalis tartari, deiecit materiam flaueſcentem, quaſi mucoſam, cuius ſiccatae inueni drachmas duas cum granis quadraginta, quaeque cum acidis feruebat.

Expe-

Experimentum 4.

Prima infusio aquosa experimenti secundi acidum saporem et indolem quoque acidam per reagentia prodidit.

Ex retorta lente destillando phlegma purum transiit; remanentia vero vnius vnciae flauescenti-turbida fuit, attamen in filtro nihil quod libellam moueret, relinquebat.

Gustum afficiebat hoc residuum sapore salino, et chartam caeruleam intense rubro tingebat colore.

Spiritu salis armoniaci cum sale tartari parato nubecula excitabatur, absque efferuescentia.

Solutio salis tartari, post efferuescentiam leuem, album deiecit sedimentum.

Solutio sachari saturni pariter album puluerem copiose praecipitauit.

Nihil autem in pelluciditate mutauit solutio argenti in acido nitri.

Cum oleo vitrioli aliquantum selenitis nascebatur.

Sub euaporatione liquoris ad siccitatem vsque, vapores chartas coloratas suspensas omnino non mutarunt; superfuit sal siccum pondere septuaginta quinque granorum, quod aqua destillata denuo solutum non potuit in chrystallos redigi.

Sub tubulo ferruminatorio flammae expositum hocce sal, dimidium ponderis amisit, tumque fusione per se in formam coactum est globulosam, turbidum et humiditate aëris haud mutandum.

Experimentum 5.

§. 5. Calculi Husonis pulverati granis decem affudi acidi vitrioli (ex p. 1. ol. vitriol. et p. 3. aqua destill.) drachmas tres, quod effervescentiam vix conspicuam excitavit. Per noctem sic relicta materia calculi tota spiculis Salinis quasi consita apparuit, quae segregari haud potuerunt. Tunc digesta vsque ad ebullitionem mixtura et refrigerata, denuo acidum calculo superfusum tenuioris instar gelatinae apparuit.

Solutio per filtrum traiecta ab addita solutione salis tartari non turbata fuit; post plures demum horas aliquantum selenitis subsedit.

Residuum a solutione tredecim granorum gypseae indolis erat, et coctione in aqua vndecim grana soluta amisit.

Experimentum 6.

§. 6. Decem grana calculi in drachma acidi nitrosi anatica quantitate aquae diluta penitus, at sine conspicua effervescentia, nullo adhibito calore soluebantur. Saturata dein haec solutio per solutionem Salis Tartari deiecit sedimentum album, cuius edulcorati grana decem inueni, quodque cum acidis acriter feruescebat.

Ex-

Experimentum 7.

Decem grana calculi cum acido ſalis diluto eadem ratione tractata, effectum ſimilimum prodiderunt.

§. 7. Quoad ſiccam tractationem Calculi *Huſonis* ſequentia experimenta inſtituta ſunt:

Experimentum 8.

Quinque grana eiusdem, directae per tubulum ferruminatorium *Bornianum* *) flammae lampadis in cochleari ferreo oppoſita, amiſſis duobus granis, in puluerem cinereum, magneti nulla particula adhaereſcentem, et in acido nitri cum efferueſcentia facile ſolubilem tranſierunt.

Experimentum 9.

Calculi eiusdem crudi grana duo cum aequali quantitate boracis non in ſcoriam igne lampadis verſa ſunt, ſed borax ſolus granulis calculi circumfuſus eſt; duplum boracis, poſt intenſum ignis gradum, cum materia calculi tandem fluxit et in vitrum turbido album, porcellanae imperfectae ſimile tranſiit.

Experimentum 10.

§. 8. Puluerati Calculi drachmas duas in retorta vitrea tanto ignis gradu torſi, vt retorta emollita formam mutaret. Senſim additus calor primum *phlegmatis* inſipidi aliquantulum expellere viſus eſt. Auctiore gradu tranſierunt *vapores aciduli*, qui iſto phlegmati aciditatem concilia-

*) Crell *neueſte Entdeckungen in der Chemie* Vol. III. p. 311.

ciliarunt. In collo retortae ſimul apparuit *Olei empyreumatici* veſtigium aduſtum, quod granum vnum vel alterum aequare videbatur. In extremo tandem collo *puluisculus* adhaeſerat albidus, ſapidus, ſed quantitate nimis exigua, quam vt colligi potuerit. Reſiduum pulüerem referebat leuem album, minime cauſticum et qui nullum ſcorificationis indicium prodebat, pondere ſesquidrachmae exactae.

Experimentum 11.

Reſiduum illud ipſum cum acidis parum efferueſcebat. Granum vnum a ſalis acido facile ſolutum vidi. Reliquum coctione in aqua ſalinitatis indicia dedit, vnde denuo maiore quantitate aquae extraxi; quo grana duodecim ſoluta ſunt.

Experimentum 12.

Aqua ſolutione imbuta leni euaporatione magis magisque acida euaſit; oleum vitrioli aliquantulum ſelenitis inde praecipitauit. Ad ſiccitatem coactum ſedimentum grana duodecim pondere aequauit et ſimillimum fuit illi, quod Experimento decimo e cruda Calculi materia obtinui.

Experimentum 13.

Suſpicione acidi phoſphorei in ſalino principio Experimentorum decimi et duodecimi latentis excitatus, omnem collectam quantitatem, quae grana octuaginta quinque aequauit, immiſcui duobus drachmis pulueris carbonnm, idque in retorta vitrea, crucibulo arena repleto impoſita

posita et excipulo vncias duas aquae destillatae continente munita, trihorio, per gradus aucto igne vsque adeo candefeci, vt vitrum retortae emollitum subsideret. Vidi sub initium destillationis aliquod guttas limpidas exstillantes; secuti dein vapores, qui auctiore calore in retortae quidem cavo nebulae phosphoreae instar apparuerunt; at in collo retortae haud inconspicuo lumine lucebant. Aqua excipuli flauescenti-turbida facta, saporem et odorem acidi sulphuris volatilis prodebat, reagentibus idem annuentibus. Itaque calor, quo vitrum retortae mollitum est, expellendo phosphoro non suffecerat.

Experimentum 14.

§. 19. Residuum a coctione Experimenti vndecimi, cuius pondus drachmam et quindecim grana aequabat, nullas particulas ferreas edidit, cum acidis vero lente et diu feruescebat. Indolem terrae exploraturus omne illud residuum in spiritus salis semuncia, triplo aquae destillatae diluto, solui, quod etiam sine calore optime successit. Inde per solutionem salis tartari praecipitata terra sordide alba, quasi lutulenta, post edulcorationem septuaginta granorum pondus aequauit et cum acidis tunc pigre efferbuit. Nulla igitur terra silicea adfuit; sed ne argillacea, si adforet, lateret.

Experimentum 15.

Quod reliquum erat, methodo *Bergmanniana* candefeci, vt argillacea pars durescens minus redderetur solubilis. Postea affudi aceti destillati tres vncias et digessi leniter, solutionem vero filtro traiectam adfusa solutione salis

ſalis tartari turbaui, vnde praecipitatum mere calcareum, ſexdecim omnino granorum pondere prodiit. Attamen reliqua terra cum acidis mineralibus adhuc efferbuit, multaque aceto addito omnis ſoluta eſt. Aliis quoque periculis mihi quidem terrarum primigeniarum analyſis hac methodo non ſucceſſit.

Experimentum 16.

Terram in Experim. XV. aceto non ſolutam denuo acido ſalis diluto ſoluebam, cui ſolutioni tamdiu caute et lente inſtillaui oleum vitrioli, donec ſeleniticam omnem materiam praecipitem egiſſem, cuius ablutae pondus fuit drachmae et quadraginta quinque granorum. Liquor reliquus ſimul cum aqua abluendo ſeleuitoſo ſedimento adhibita, pauco addito ſale tartari ſaturatus et euaporatione deſiccatus, magma ſalinum viginti duo granorum ſuppeditauit.

Hoc denique magma, aqua reſolutum, tredecim grana reliqua fecit, ſedimenti flaueſcentis, quod partim tartaro vitriolato conſtabat; alumen vero in ſolutione exiguis cryſtallis concreuit.

Experimentum 17.

§. 10. Superfuere a recitatis experimentis tres adhuc drachmae calculi *Hu'onis*, quas ſecundum formulam *Gahnii* *) tractaui, vt phoſphorum extorquerem. Solui primum materiam calculi in vncia acidi nitroſi, tribus aquae

*) Crell *Chem. Iournal, I. p.* 24.

aquae destillatae vnciis diluta; dejeci terram calcaream omnem, instillata sensim semuncia olei vitrioli. Liquor reliquus ad siccitatem reductus, durante euaporatione floccorum forma adhuc selenitis reliquias dimisit. Residuum fuit magma nigricans, multo acido vitriolico graue; calore auctiore ad siccitatem perductum, fumos vitriolicos spissos efflauit, tumque in scoriam fluxit, cuius quadraginta grana corradi poterant, decem vero in crucibulo remansisse videbantur.

Scoriam hinc enatam cum sesquidrachma pulueris carbonum, in crucibulo tecto prius igniti, remixtam et addita aqua in pastam redactam, in globulos efformaui, atque hos in retortam vitream immissos, vt experimento decimo narratum est, supposito crucibulo arena pleno et addito excipulo cum aqua, vsque ad subsidentiam vitri retortae candefeci, perque quadrihorium summo, quem vitra ferunt, calore torrui. Nubeculae lucidae iterum apparuerunt; sed ne tum quidem phosphori quidquam transiit. Aqua excipuli flauescebat et odorem induerat sulphureum acutum, non ingratum, explicite acida.

§. 11. Experimentis recensitis colligitur Calculum acipenserinum esse substantiam naturae ossium analogae et quasi neutrosalinam, cuius duas tertias fere partes constituit terra ossium seu calx animalis, reliquum acidum est phosphoreum (Exp. III. IV. XI. XIV.). Si accuratiorem elementorum exposionem vellis, erunt in vncia vna calculi:

 1. Terrae

1. Terrae calcareae purae drachmae duo gr. xxiv. per Exp. II. X. XVI.

2. Terrae argillaceae grana vij. ad x. per Exper. XVI.

3. Acidi phoſphorei drachmae ijß. ad iij, per Exp. III. IV. XIII. XVII.

4. Phlegmatis aquoſi circiter drachma, Exper. X.

5. Empyreumatis a glutinoſa materia calculi, circiter grana vj. vel viij. per Exper. X.

Praetereaque aër, quem calculi et ſubſtantiae animalium omnes continent fixum, inſtitutis experimentis noſtris non ad ſcrutinam reuocatum.

DE CALCVLO EX ACIPENSERE STVRIONE EXEMTO.

Auctore

N. OSERETSKOVSKY.

Anno 1783 hyemanti mihi in vrbe Aſtrachan non paucos videre contigit calculos, qui diuerſis temporibus ex diuerſis Acipenſerum ſpeciebus a piſcatoribus fuere exemti et in vrbem allati, ibique apud opulentos mercatores et apud praefectos vrbis inter raritates conſeruantur. Omnes illi calculi, quotquot vidi, variabant inter ſe forma, colore, magnitudine et pondere. Omnium, quos vidi, maximus, ex Huſone exciſus, erat vnciarum circiter octo, colore fuſcus, ſcabriuſculus atque adeo compreſſus, vt inde euaſerit latiſſimus. Hunc a poſſeſſore, qui calculos ſuos non inferiores eſſe putabat lapidibus bezoardicis, obtinere non potui; obtinui autem alium, priore multo minorem, quem nunc deſcribere decreui, et qui in Acipenſere Sturione inuentus fuisse dicebatur; id quod vnicum fere collectoribus calculorum et notum est. Ignorare enim sese fatentur, in quo viscere apud Acipenseres talia concreta reperiantur, reddunt que rationem, quod ipsi piscatores pro domicilio calculorum nunc haec nunc alia assignent loca, et rarissime in eo inter se conueniant. Sic anno 1769 relatum fuit Celeb. *Pallas* ad mare Caspium, quod calculi Husonum constanter occurrerent in sinubus aperturae ani adiacentibus, qui ab intestini recti parietibus efformantur. Ast anno 1770 D. *Sokolow*, huius Academiae Adiunctus, ibidem a piscatoribus accepit, quod calculi illi deprehenderentur semper in corporibus Husonum iuxta spinam dorsi, in carne glandulosa, renes horum piscium constituente, intra peculiarem cuticulam, quae glandulosam illam carnem inuestit. (*)

Ex ista relationum diuersitate de loco natali calculorum hucusque nihil certi statui potest; attamen concludere licet, quod illi non constanter in vno eodemque inueniantur viscere, sed quod piscatores in variis eos reperiant partibus, et idcirco hac in re sibi inuicem contradicant. Vnde itaque fuerit depromtus meus calculus, decidere non possum; nec audeo asseuerare, eum ad genitalia sturionis (maris) repertum fuisse, vti pristino eius possessori a piscatoribus fuit traditum. Accedo igitur ad ipsum calculi examen, quod a descriptione habitus externi sum inchoaturus.

Pon-

(*) Cel. Pallas in suo itinere per Russiam parte I. p. 436. parte II. p. 342.

Pondus calculi drachmarum ſex cum duobus ſcrupulis; color albus cum admixta leuiſſima flauedine, quae disparet ſtatim ac calculus cultello leniter deraditur; ſuperficies glabra, inaequalis; figura oblonga, ad conoideam quodammodo accedens, altero apice tenuiore, altero latiore, diuiſo in duas protuberantias, inter quas hiat rima ſatis profunda, a qua calculus verſus apicem tenuiorem in gibbum quaſi erigitur, et conuexitatem efficit, quae in medio calculi, ſi nimirum is ab apice bipartito ſpectetur, paulisper depreſſa apparet; aſt eo craſſiores atque altiores inde euadunt calculi apices, quorum tenuior ad latus ſiniſtrum, in ſupradicto calculi ſitu, ſulco lato atque profundo in longum eſt exaratus; inde dextrum huius apicis latus ſupra ſiniſtrum notabiliter eminet. Inferior calculi ſuperficies eſt plana, ad vtrumque apicem depreſſa, in medio gibboſa. Margo lateris ſiniſtri, quando calculus inuerſus iterum ab apice eius bifido inſpicitur, paulisper eſt intropreſſus; hinc latitudo calculi eo in loco fit minor; maxima autem eius latitudo eſt prope apicem bipartitum, vbi fere ad integrum pollicem illa extenditur. Longitudo calculi ſesquipollicem excedit.

Fig. I. ſuperficiem calculi conuexam ſiue ſuperiorem naturali magnitudine repreſentat. Tab. IV.

Fig. II. ſiſtit ſuperficiem eius planam ſeu inferiorem.

Artificioſa calculi figura vtrum proueniat a fortuita materiae depoſitione et concretione, an debeatur loco, in quo calculus continebatur, et cui creſcendo adaptari poterat

rat, altioris indaginis res eſt, quae tamen dilucidari aliquomodo poſſet, ſi mihi locus calculi natalis fuiſſet cognitus; deſtitutus autem hacce notitia abſtineo me ab omnibus coniecturis atque ſpeculationibus, quibus disquiſitio illius quaeſtionis anſam praebere poſſet. Tranſeo itaque ad examinandam calculi ſtructuram internam, quae vt pateret, ſerrula eum transuerſe diſſecui, et ſub hoc opere ſatis virium adhibere debui, valde enim durus erat calculus; aſt quum ſerrula plus quam ad mediam eius profunditatem peruenit, remoui hoc inſtrumentum, et cuneo in fiſſuram ſerrula factam immiſſo, facili negotio in duas partes illum diffregi. Apparuerunt tum bini ſuperficiales orbiculi ſeu circelli, corticem quaſi calculi conſtituentes, qui in ſuperficie eius conuexa, verſus apicem in duo tubera diuiſum, interiacente lineola euidentiſſime a ſe inuicem erant diſtincti, et exterior circellus interiorem craſſitie aliquantum ſuperabat; aſt circelli hi verſus latera calculi ſenſim decreſcebant, et tandem in ſuperficie eius complanata in vnum confluxerunt. Interior calculi ſubſtantia, ſub memoratis mox inuolucris, etiam circulatim erat diſpoſita; ſed circuli interni lineolis non ita conſpicuis inter ſe erant ſeparati; attamen non ſolum armato, verum etiam nudo oculo lineolae illae conſpici poterant. In centro horum circulorum, multo propiore ad ſuperficiem calculi complanatam quam conuexam, in conſpectum prodiere, in fruſto calculi tuberoſo, ſtigmata duo rotunda, parum inter ſe remota, ſibi inuicem oppoſita et, prae reliqua calculi ſubſtantia, albidiore atque teneriore materie repleta; in fruſto autem calculi tenuiore ſimilia duo ſtigmata, in eodem tractu iacentia, prioribus correſpondebant, et in illaeſo calculo fuere illis contigua atque continua. Interiori horum ſtigmati ad-

adiacebat foueola, repleta ſimili materie, cuius aliqua pars, ſub actione ſerrae, foras excidit, foueolam que illam aliquatenus vacuam reliquit. Ima pars calculi, vbi ſerra ſubſtitit, et quae cuneo erat disrupta, pulcherrimum viſui obtulit ſpectaculum; apparuit enim ſubſtantia calculi compoſita ex tenuiſſimis ſpiculis ſeu radiis, qui non modo erant albiſſimi, ſed etiam inſtar cryſtallorum ſalis ſplendeſcebant, talis que eorum fuit diſpoſitio, vt ab omni peripheriae puncto, in decurſu ſuo, ad centrum calculi coniunctiſſime dirigerentur.

Fruſtum calculi tenuius, in quo apparuit ſupradicta foueola, ſerrula per mediam longitudinem inciſum, et poſtea cuneo diffractum, patefecit nucleum in centro contentum, qui magnitudine ſua ſemen hordei aliquantum ſuperabat, et obductus erat flauicante pellicula, quae materie alba et quodammodo grumoſa fuit infarcta. Nucleus iſte non vbique erat rectus, ſed apex eius interior, qui ſerrula auulſus memoratam reliquit foueolam, ad latus calculi fuit incuruatus. Ad hunc nucleum, tanquam ad ſuum centrum, omnia calculi ſpicula vndiquaque collineabant, atque ſic clare oſtendebant, quod exiguum hocce primordium, centro calculi incluſum, in corpore Acipenſeris prius fuerit formatum, vel eo foris delatum, quam omnis reliqua calculi ſubſtantia, quae nucleum illum omnino pro ſuo habuit fundamento, ei que iam formato pedetentim accreuit, ſimili certe ratione, ac contingit in corpore humano, vbi minutiuscula ſolidorum corporum fragmenta, idoneo loco depoſita, generationi ſtupendae magnitudinis calculorum occaſionem creberrime ſubminiſtrant, et moleſtiſſimis naturae humanae concrementis pro matrice inſeruiunt.

Cal-

Calculorum, qui in corporibus Acipenſerum reperiuntur, habitum externum maximopere variare, iam antea dixi; pro diuerſa autem figura externa internam quoque eorum fabricam aliter atque aliter fore comparatam, nullum eſt dubium. Itaque deſcriptio haec nulli calculo, praeter praeſentem, exacte conueniet; ſed quot occurrent calculorum ſpecimina, tot etiam deſcriptiones confici poterunt. Vt autem innoteſcant proprietates, omnibus eiusmodi concrementis communes, non vnus vel alter, ſed plures tales calculi chemice ſunt examinandi; ſola enim criteria chemica relationes eorum ad menſtrua et horum ad illos oſtendere, atque ſic intimam calculorum conuenientiam ſeu diſcrepantiam reddere valent certam atque perſpectam. Hunc in finem cum deſcripto nunc calculo aliqua feci pericula, quae, vt comparari poſſint cum aliorum experimentis, fideliter hic enarrabo.

Experimentum 1.

Albiſſimo pulueri, quem ſerrando meum calculum obtinui, affudi acidum vitrioli; nulla ſub hac commixtione orta eſt efferueſcentia, et puluis breui mora ad fundum vitri ſubſedit, manſitque albiſſimus. Lenis calor huic miſcelae applicatus ſtatum eius neutiquam mutauit; additio aquae pro diluendo acido vitriolico, forſan nimis forti, vt putabam, nullum produxit effectum, nulliſque adminiculis acidum hoc ſuſcitari potuit, vt in puluerem ageret; id quod iteratis tentaminibus probe cognoui.

Experimentum 2.

Acidum nitri eidem pulueri affuſum illico eum in grumulos coëgit, cum que nimis forte videretur, additis ali-

aliquot aquae guttis illud diluendum curaui; quo facto statim grumuli illi disparere coeperunt, et placide menstruum hoc subiere, absque vt vlla efferuescentia sub hac solutione fuerit exorta. Addidi eidem ipsi acido nouam pulueris portionem, quam momento etiam absorbuit, oculisque subripuit. Perrexi admiscere puluerem, quousque ab acido recipiebatur; obseruaui tandem nubeculam in liquore suspensam, quae menstrui vires iam eludebat; ast ab affuso nouo acido nitri mox disparuit. Lenis calor actionem menstrui in calculosam hancce materiem valide accelerabat.

Experimentum 3.

Animaduersa acidi nitri in puluerem calculi actione tentaui idem experimentum cum integro eius frustulo, cui acidum nitri superfudi; et cum nullam mutationem calculus experiretur, addidi portiunculam aquae pro diluendo acido, quod nimis forte esse priori experimento cognoueram; sed ne hoc quidem adminiculum vires menstrui in soluendum actiuas reddere potuit; subsidio autem fuit furni calor, qui desideratum produxit effectum; statim enim ac calefactum erat menstruum, exiguae bullae ex calculo in superficiem liquoris prorumpere coeperunt, eoque magis augebantur, quo plus incaluerat menstruum. Hinc volumen calculi euidentissime imminuebatur, et breui temporis spatio totum disparuit frustulum. Sub hac solutione in superficie liquoris albida colligebatur spuma, in quam resoluebantur bullulae ex calculo erumpentes, et quae peracta operatione penitus disparuit, relictis tantummodo quibusdam flocculis liquori innatantibus, quos denuo applicatus calor menstruum perfecte subire coegit.

Experimentum 4.

Aliud calculi frustulum immersi in acidum salis communis, cum quo vitrum apertum prunis admoui; a calefacto acido compositio calculi illico caepit penetrari, ita vt hoc acidum validius quam acidum nitri calculum aggredi videretur. Ast peracta solutione, quae iisdem plane phoenomenis ac in priori experimento comitabatur, refrigeratus liquor dimisit ex se partem solutae substantiae, quae in nubeculas collecta et per omnem liquorem dispersa turbidum reddidit menstruum, atque in illo per aliquod tempus suspensa tenebatur; mora autem ad fundum vitri delapsa est.

Experimentum 5.

Vt viderem, num idem acidum salis, quod portionem solutae calculosae substantiae sponte de se dimisit, aliud calculi frustulum dissoluere posset, repetii experimentum iniecto solutioni illi nouo frustulo, quod, sub iisdem conditionibus, perfecte fuit solutum. Refrigerata autem solutio, nychtemeri spatio, insignem copiam substantiae albae, puluerulentae ad fundum vitri deposuit, et ipsa albidum nacta est colorem, quem diuturno etiam quiete nequaquam amisit. Color iste manifesto fuit indicio, in omni liquore simillem contineri materiem, qualis ad fundum vitri sponte secessit. Pro praecipitando igitur soluto ex soluente instillaui huic solutioni oleum tartari per deliquium; insignis orta est efferuescentia, quae magnam copiam viscidae spumae in superficiem liquoris eiecit, et multos floccos instar niuis ad fundum vitri praecipitauit. Saturatum tandem acidum leniter decantaui a praecipitata sub-

ſubſtantia, cui aquam ſuperfudi, vt abluerentur particulae ſalinae, quas guſtus in ea deprehenderat. Ablutam diligenter leni calore exſiccandam curaui, vt aptam redderem ad tentamina cum ea inſtituenda.

Experimentum 6.

Oleum tartari per deliquium, inſtillatum ſolutioni calculi, in acido nitri factae, inſignem produxit efferueſcentiam, ſed nihil exinde praecipitauit.

Experimentum 7.

Poſtquam praecipitata ex acido ſalis communis calculoſa materies fuit exſiccata, cum omnibus ſupradictis acidis eodem plane modo ſe geſſit ac memoratus iam calculi puluis; in acido vitrioli non ſoluebatur; in acidis vero nitri et ſalis licet ſolutio locum habuerit, absque vlla tamen efferuerſcentia; in oleo tartari per deliquium nec ſolutionis nec etiam efferueſcentiae vlla edidit ſigna; prunis inſperſa ſtatim albidum ſuum colorem in fuſcum permutauit, et leuem foetidum dimiſit odorem, quo expulſo denuo facta eſt albicans. Talem ſe etiam exhibuit ad ignem abraſus a calculo, cum acidis non tractato, pulviſculus, ea tantummodo cum differentia, quod prae illa materie, ex acido ſalis praecipitata, aliquanto foetidiorem de ſe ſparſerat odorem. Fruſta calculi prunis impoſita, dum nigreſcebant, adhuc validius ſimili odore nares feriebant, ita vt totum conclaue graui piſcino foetore inde fuerit infectum. Foetor autem iſte tamdiu prodibat, quamdiu fruſta illa ſuper prunis nigro gaudebant colore, quo exuſto odor etiam ille exhalare ceſſauit, et continuata vstione portiones calculi ex duris, quales ante calcinationem fuerunt, factae sunt valde fragiles, atque sub comminutione ingentem dederunt pulueris copiam, quantam in minutis frustulis nequaquam adesse crederes.

Experimentum 8.

Puluerem combusti calculi commiscui primo cum acido vitrioli; nullam prodixit efferuescentiam, nullum que alienum colorem acido conciliauit; ipse autem ex griseo factus est albidus, et ad fundum vitri subsedit; dum vero spatula lignea permiscebatur cum menstruo, et quamdiu in eo suspensus tenebatur, semper lacteo illud tinxit colore; praeterea nullam neque acido induxit nec ipse passus est mutationem.

Secundo idem puluis cum acidis nitri et salis seorsim sumtis commixtus ne minimum quidem excitauit motum, nec totus in illis est dissolutus; sed dimidia circiter eius pars, nigrum colorem nacta, ad fundum vitri est delapsa; altera autem pars menstrua subiuit, ea que fusco abscurauit colore.

Haec sunt experimenta, quae cum calculo meo repetitis vicibus feci, atque ita cognoui, in quibus menstruis quibus que cum phoenomenis calculus solueretur; hoc autem voto potitus tentaui eundem explorare ad nudum ignem, qui praesentiam foetidi olei in calculo aperte manifestauit, ipsam que naturam substantiae seu terrae calculum constituentis adeo immutauit, vt in ipsis illis menstruis, quae crudum calculum perfecte dissoluebant, exusta eiusdem substantia non nisi parce admodum solueretur.

retur. Hinc patet, in recenti seu crudo calculo adfuisse aliquem proxenetam, cuius interuentu integra eius frusta in acidis nitri et salis penitus dissoluebantur; quo vero per ignem ablato calculosa materies pristina sua menstrua subire renuebat. Ex foetido autem odore, qui de calculo emanabat, dum iste comburebatur, pronum est colligere, quod animales quoque humores ad formandum calculum suam contulerint symbolam.

Ast licet pars aliqua humorum animalium compositiorem calculi ingrediatur, exinde tamen induci non potest, genesin calculorum in corporibus acipenserum morbosae alicui fluidorum corporis crasi deberi; quippe quae nullis obseruationibus hucusque est demonstrata, et piscatores non nisi eos acipenseres reperiunt macilentos ac languidos, qui a calculo iam formato et nobile atque angustum viscus occupante incommoda patiuntur. Ratio igitur originis calculorum non in constitutione humorum corporis piscini, sed potius in ipso elemento, quod animalia haec inhabitant, est quaerenda; id que eam praecipue ob caussam, quod non in solo genere acipenserum concrementa ista occurrant, sed obnoxii illis sint etiam Carpiones, qui in mari Caspio et maximi et copiosissimi sunt; imo laborant calculis ipsi Apri, qui in densis atque vdis arundinetis ad mare illud habitant. Turbida nempe et limosa aqua, in arundinetis stagnans, quam bibunt Apri, iam continet in se terrestrem materiem, generandis calculis aptam, quae ad vesicam delata vrinariam, vbi calculi aprini semper solent nidulari, facile potest in durum concrescere corpus. Eodem modo generari possunt calculi in Acipenseribus atque Carpionibus, qui omni anno per aliquot menſes et praeſertim hybernos neque in mari natant, neque in fluuios aſcendunt, ſed infinito numero in profundo maris congregantur, et turmatim in vno eodem que loco per longum temporis ſpatium immobiles quaſi quieſcunt; id quod piſcatoribus eſt notiſſimum. Sub diuturna iſta quiete naſcuntur omnino eorum calculi ex tenaci limo, quem continuo hi piſces cum aqua deglutiunt. Aqua enim maris Caſpii notabiliter eſt turbida; turbidior certe quam in mari Baltico, Albo, Glaciali et aliis, quae videre mihi contigit. Haec chemice examinata oſtenderet forte contenta, ſubſtantiae calculorum analoga. Denique cum ipſi illi piſces, ac praeſertim Carpiones, in aliis aquis immunes uiuant ab eiusmodi concrementis; euidens eſt, aquam maris Caſpii foetam eſſe materie, quae incolas eius calculis reddit obnoxios.

OPTI-

OPTIMA METHODVS PARANDI AMALGAMA CVPRI.

Auctore
NICAETA SOCOLOFF.

Cuprum omnium metallorum, post regulum antimonii atque ferrum, difficillime soluitur in mercurio, et nec nisi protracta coctione ac sedula trituratione in amalgama conuerti potest; verum idem metallum, solutum in acidis quibusdam mineralibus, postquam ex iis per intermedium certorum metallorum, nempe ferri, vel zinci aut stanni fuerit praecipitatum, multo maiorem acquirit cum mercurio affinitatem, et facile ab eo penetratur. Singularis huius mutationis praecipua causa videtur esse attenuatio atque phlogistica materia, ex solutionibus dictorum metallorum per acida, sub specie fluidi elastici copiose exhalans, quae in praecipitata illa Cupri Calce sese figit, soluit eius mixtionem, et transformat denique eam in metallico-regulinam substantiam. Hinc fit, quod sub praecipitatione cupri, tam ferri

quam

quam Zinci ſolutiones abſque notabili fere peraguntur effervefcentia, quae alias ab acido vitrioli cum ferro, et acido ſalis cum Zinco maxima fieri ſolet.

Multi Chemicorum, ob dictam praecipitati per metalla cupri affinitatem cum mercurio, in praeparatione amalgamatis huius metalli, pro facilitanda procul dubio operatione, ſubſtituendum illud ſuadent cupro vulgari. Si autem rem ipſam experiri velimus, multa pariter hic obſtacula atque incommoda reperiemus, quae ſucceſſum operationis vel retardant atque impediunt, vel penitus impoſſibilem reddunt Nam praecipitatum illud metallis ſuis praecipitantibus firmiter plerumque adhaeret, a quibus pure ſeparari vix poteſt; additus autem mercurius cum praecipitato, tum praecipitanti metallo aequaliter vnitur, et ita vtrumque magis confundit; obrutum praeterea a ſalibus metallicis, mora temporis, ſi paulo diutius in iis relinquatur, fit aeruginoſum et ad amalgamationem ineptum; denique a vaporibus ſulphureis acribus, quibus eſt expoſitum, impurum redditur.

His itaque incommodis ſubuenire cupiens, non inutile fore puto, ſi certam deſcribam hic methodum, qua praecipitati cupri amalgama facile et magna ſatis quantitate parari poteſt.

Authores vbi de praecipitato loquuntur cupro, plerumque ſolutionem eius in acido vitriolico ſiue vitriolum caeruleum, per ferrum ſimpliciter decompoſitum intelligunt. Nam per reliqua metalla ex hoc acido non tam bene et perfecte ſuccedit praecipitatio. Certum autem eſt, ex mixtione acidi vitriolici cum ferro ſulphureos acerrimos oriri vapo-

vapores, qui vt omnibus aliis metallis, ita cupro quoque maxime ſunt noxii; idcirco praecipitatum illud pro puro et ſincero metallo minime reputari debet.

Solutionem Cupri in acido ſalis, quae variis cum metallis pariter dat metallicum praecipitatum, cuius ſolus Illuſtr. *Vallerius* *) breuem ſemel fecit mentionem, nemo videtur rite examinaſſe, quia hoc menſtruum immediate per ſe exiguam in id habet actionem. Verum me haec ipſa ratio docuit, ſi parua acido huic eſt affinitas cum Cupro, eo meliorem eorum ſeparationem faciliorемque fieri praecipitationem, et purius ſinceriusque obtineri debere praecipitatum.

Experimentum 1.

Accepi itaque Vitrioli Cupri venalis certam quantitatem, ſolui illud in ſufficienti copia aquae feruidae, ſoluto aequale fere adieci pondus florum ſalis ammoniaci, ac pro ratione, qua hoc ammoniacum ſoluebatur, caeruleus vitrioli color in viridem mutabatur, ac denique tota ſolutio pulchre praſei coloris eſt facta, perfecteque limpida manſit. Poſtquam dimidiam circiter horam ſtetit in quiete, immerſi ei fruſtum puri ſtanni, quod eodem fere momento ſenſibiliter nigreſcere caepit, et per quadrantem horae tenerrima, vix laeuiſſime inter ſe cohaerente cruſta ſpongioſa obſcure fului coloris totum fuit obductum. Exempto eo caute ex liquore, ab exigua concuſſione, cruſta illa praecipitati cupri ſponte fere tota ab illo ſeparata fuit, quam ſpathula, inſtar pulticulae, cum mercurio miſcendo, in purum et perfectum facil-

*) *phyſiſcher Chemie zweiter Theil, dritte und vierte Abhandlung*, cap. 22. §. 6.

facillime ſubegi amalgama, mollitie aureo ſimillimum. Continuata immerſione puri ſtanni perfecte totum dicto modo ex ſolutione ammoniacali praecipitatum eſt cuprum.

Experimentum 2.

Similibus cum ſale ammoniaco factis ſolutionibus Cupri iniectum politum ferrum, atque fuſum Zincum, colore quidem multo rubicundiora, reliquis autem notis perfecte eadem producunt praecipitata, quae ſimile quidem priori dant amalgama, ſed cum mercurio paulo citius coire videntur.

Experimentum 3.

Vitriolo cupri caeruleo ſufficienter aqua diluto, vt prius, loco ſalis ammoniaci, adieci aequale pondus ſalis culinaris, atque ſpathula lignea agitaui, vsque dum ſal totum fuit ſolutum. Breuiſſimo poſt iniectionem ſalis tempore, omnis liquor laete viridem aſſumſit colorem, laeui ſuperficiei ſupernatante ſpuma. Repoſitus aliquamdiu in quietem ad fundum vitri depoſuit aliquot longas craſſasque criſtallos ſalis mirabilis Glauberi. Hunc deinde liquorem diuidi in tres partes aequales, quarum vni ferrum, alteri Zincum, tertiae ſtannum inieci. Zincum euidenter maiore reliquis cum efferueſcentia ſoluebatur, atque interea ſenſim ſeſe praecipitans cuprum ſuperficiem eius cingebat cruſta tumida, ſpongioſa, ſuperiori ſimilis, ſed tenacior et maiorem conſiſtentiam habens, coloris ferruginei. Haec demum ad certam aucta molem, ſponte in liquore ab eo ſecedit, intus concaua, figuram ſemi-metalli perfecte impreſſam habens, atque rupta denique diuerſis flocculis nunc ad ſuperficiem liquoris aſcendit, nunc iterum ad fundum delabitur. Extracta

cta ex liquore et mercurio oblata, omnium auidiſſime ab eo recipitur, atque omnibus notis perfectum optimumque cum eo format amalgama. Liquor ſalinus poſt totalem cupri praecipitationem remanet limpidus, quem additus mercurii ſublimati corroſiui puluis in lacteum mutat, et praecipitat copioſam albam calcem, cui ſimul aliquid ſemper nigri pulveris, a remanente ſine dubio cupri portione, eſt intermixtum.

Per Ferrum ex ſupra dicta ſalino-acida ſolutione cupri, praecipitatio aeque fere bene ſuccedit, ac per Zincum. Efferueſcentia autem hic nulla, ſed odor quidam faetidus, ſingularis exhalare obſeruatur. Praecipitatum cupreum colore dilute rubro gaudet, inſtar fere haematitidis cultro raſi; a metallo praecipitante facile ſeparatur, et in mercurio ſatis bene ſoluitur; ſed multo ad tactum durius atque rigidius eſt priori.

A ſtanno denique praecipitatum cupri fit praecedentibus paulo deterius, quod ei tenacius aliis adhaeret, colore primo rubrum, deinde brunneum fit, et cum mercurio pro parte tantum amalgamatur, liquor eius a praecipitatione reſiduus cum mercurio corroſiuo lacteſcit, vt de liquore Zinci eſt dictum.

Haec experimenta luculenter demonſtrant, praecipitatum cupri ab acido ſalis cum metallis, multo purius, ſubtilius et ad amalgamationem huius metalli parandam omnibus aliis aptius reddi.

De proprietatibus amalgamatis cupri hoc modo parati, ſequentia notari merentur.

A Frigore, vt omnia alia amalgamata, indurescit, pressione vero et trituratione incalescit et molle tactu euadit.

In igne decrepitat, et destillationi subiectum explosionem vasorum causare potest.

Ab acido vitriolico et acido salis non soluitur, sed indurescit. Acidum autem Nitri summa cum efferuescentia illud aggreditur, et dum peragitur solutio, fumos densissimos, igneos ac suffocantes emittit; solutio haec adeo perfecta est, vt maxima aquae diluta quantitate, quin alcalinis quoque mediocri manu adiectis, vel nullum plane, vel per exiguum det praecipitatum.

Vtrum nostrum amalgama, aeque ac amalgama argenti, aliquod specifici ponderis acquirat augmentum, nondum determinare pro certo possum.

Expresso per alutam omni superfluo mercurio, si hoc amalgama Nitro in crucibulo fluenti iniicitur, nullam omnino producit detonationem, sed cum strepitu ad fundum Nitri delabitur; immediate in crucibulo igni fusorio expositum non funditur, sed instar carbonis, expulso mercurio, atrum euadit, caeterum immutatum fere manet. Hoc modo exustum cum acido vitrioli fortiter efferuescit, caeruleum dat liquori colorem, penitus autem in eo non soluitur.

MARMORVM QVORVNDAM *IMPERII ROSSICI* ANALYSIS CHEMICA.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. 1.

Inter mineralia corpora per orbem terrarum late dilperla, non vltimum lane locum laxa calcarea occupant, vtpote quae vbiuis fere occurrunt, ob omnibus facile dignoscuntur et in varios vlus trahuntur. Varietas durior, multicolor, polituram admittens, quae nomine *Marmoris* venit, lippis et tonsoribus nota, ab omnibus fere peregrinatoribus ſedulo inquiritur et notatur, nec eos quidem fugit, qui nulla reliquum ſcientiae naturalis cognitione gaudent: *Quoto enim loco non ſuum marmor inuenit?* Plinius inquit. Chemicorum vero induſtriam baſis calcarea corporum vel terra primitiua huius generis et calx viua magis, quam lapidis calcarei crudi examen excercuit; quo partes peregrinae immixtat eruuntur. Pauci ſaltem de eo ſolliciti fuerunt vt particulari tractatu mixtionis differentias exponerent; alia quamuis occasione paneis verbis rei mentionem iniecerint.

§. 2. Notum est, varios naturae scrutatores, tam antiquiores, quam recentiores transmutationem quandam corporum, metallorum et terrarum primitiuarum asserere, et transitum sic dictum vnius terrae in alteram, argillae inprimis et calcis in siliceam, et vice versa, contendere, Marmora, quae chalybe percussa scintillant, ad eorum mentem in ipso opere transmutionis deprehensa et in biuio inter calcem et silicem constituta sunt. Huius indolis varia marmora imperii rossici sunt, quorum ideo accuratius examen vt instituerem nuper desiderauit celeberr. Academicus D. *Ferber*, cum sua de transmutationibus corporum mineralium, cogitata cum academia imper. Scientiarum communicaret. (Act. Acad. Petrop. Tom. V. vol. 1.) Si nimirum transitus quidam terrae calcareae in siliceam re ipsa locum habet, necesse est, vt marmora hanc mutationem subeuntia vel ad dimidium passa, ob mediam quasi naturam peculiaribus proprietatibus gaudeant, quae nec calcareo puro, nec silici competunt; necesse est vt inter se discrepent hac proprietates pro gradu diuerso transmutationis plus minus perfectat, si vero ambae hac terrae in statu puro et immutato ex illis marmoribus elici et separari possunt, inter se tantum commixtae fuerunt et omnis transmutationis idea fictitia et erronea iure habetur.

Quod lapides calcaeci et marmora variarum regionum et montium experientia teste, aëris iniuriis magis, minusue resistunt, id a diuersitate mixtionis et intimiore vel laxiore partium cohaerentia et compage facile deriuari potest. Cum iam aedificia magnatum Petroburgi sepius, quam alibi

alibi forſan e marmore conſtruantur, et non obſtante climate, tam frigore quam atmoſphaere humiditate ſatis rudi ac rigido, per integrum decennium et vltra, nullam marmoris aëri expoſiti corroſionem aut tabem monſtrent, hoc quoque reſpectu marmora illa attentione digna ſunt.

§. 3. Marmora a me examinata, quae Petroburgi communiter in vſum vocantur, partim *ſibirica*, partim *fennonica* ſunt. Illa e iugo Catharinenburgi Vralenſi deſumuntur, in itinerariis academicorum quorundam deſcripta; haec autem e Finlandia aduehuntur, vbi promontoria calcarea plagam ſeptentrionalem lacuum Onegae et Ladogae ambiunt et in inſulis nonnullis horum lacuum in conſpectum veniunt, multisque lapicidinis excauantur. Indoles huius marmoris calcareo rupeſtri ſimilis eſt, qualem montes ſecundarii vetuſtiores, qui venas metallicas interdum fouent, continere ſolent. Petrefactis caret et ſtratis amplis, nec fiſſilibus componitur, quare fragmenta ſaxoſa maioris molis pro lubitu ibi effodi poſſunt et re ipſa effodiuntur. Eſt praeterea marmoris, vel lapidis potius calcarei durioris, genus, in colle ſtratoſo ad *Putilouam*, circa Naſiam et Ladogam reperiundum, quod propter viciniam loci, diuturniorem petrae reſiſtentiam vel durationem et facilem excauationem, Petroburgum magna copia adfertur et in vſum trahitur. Hanc ob cauſam et vt comparari melius queant marmora Roſſiae indigena inter ſe inuicem, huius quoque examen inſtitui.

Analyſis omnium ac ſingulorum eodem fere modo peracta eſt, quare vnum idemque experimentum ſemel deſcripſiſſe ſufficiat, breuiter in ſequentibus indicando, vbi repetitum fuerit. Me autem omni, qua par eſt ſolertia et accuracuratione haec pericula instituisse, praecipitata probe edulcorasse et quae sunt reliqua, ne dubitent lectores, quaeso. Pondus a me adhibitam centenarius est, centum libras continens. Hunc vero vnciae dimidiae, libram igitur duo cum $\frac{1}{4}$ fere granis aequalem feci, vt id quod sub ipsa operatione necessario perderetur, nullius momenti esset.

A. Marmor Sibiricum coloris albi.

§. 4. Reperitur ad *Stannovoi* prope Catharinaeburgum, niuei est coloris, texturae spataceae, cum acidis mineralibus fortiter efferuescit et propter duritiem insignem polituram assumit, nec tamen chalybe scintillat.

Experimentum 1.

§. 5. Centenarius marmoris Stannouiensis puluerisati cum aquae destillatae vnciis quatuor in cuburcita vitrea fortiter coquebatur, lixiuium filtrando separabatur, residuum noua aqua affusa bis iterum coctione vrgebatur. Evaporatione instituta haec lixiuia ne miculam selenitis praecipitarunt; illa autem ad siccitatem continuata terrae albae calcareae, parietibus vitri adhaerentis, nulla aciditatis vestigia monstrantis, libras circiter duas obtinui.

Experimentum 2.

§. 6. Frustulum marmoris, ponderis centenarii, igne aperto calcinatum libras viginti perdidit, per decem horas vero aëri expositum, libras quinque rursus ponderis augmentum inde resorpsit. Aquae frigidae vnciis duabus vel centenariis quatuor immissum, haec sensibilem calorem non assumsit, cremore calcis autem inducbatur, et marmor

in

in pulverem granoſum ſatiſcebat. Pars fruſtuli tubo ferruminatorio calcinati, calcem bonae frugis haud produxit; igne diutius protracto aliud fruſtulum in ſuperficie molleſcebat, nec tamen fundebatur.

Experimentum 3.

§. 7. Centenarius pulueris marmoris cum acidi ſalis vncia (anatica parte aquae deſtillatae vt in caeteris quoque experimentis, hoc acido inſtitutis, diluta) digerebatur, liquor decantabatur, et reſiduum tres vnciae eiusmodi acidi iterum ſuperfundebatur, efferueſcentia noua oriente. His digeſtis pars marmoris, acido ſalis amplius inſolubilis manſit, quae probe edulcorata et ſiccata libras ſex pendebat.

Experimentum 4.

§. 8. Solutio flaueſcens, filtrata, adfuſo lixiuio alcali phlogiſticati (e part. 4. caerulei Berolin. et p. 1. alcali aërati, cum aqua deſtillata coctis et acido aceti praecipitatis) nullam coloris caerulei depoſitionem monſtrauit. Alcali aërato ſaturata, praecipitatum mucoſum, coloris albeſcentis ſpurci reliquit, quod aqua deſtillata edulcorabatur.

Experimentum 5.

§. 9. Vt terras forſan heterogeneas, terrae calcareae immixtas in apricum ponerem, praecipitatum hoc acido vitrioli aqua deſtillata diluto, ſaturabam; acidi portionem ſuperfluam addens, vt gypſo praecipitato reliquae terrae ſolutae manerent. Liquor filtro ſeparatus et aqua, ad edulcorandum gypſum adhibita, euaporando ſalem flocculentum capillarem leuiſſimi ponderis, coloris argentei, vel floribus boracis ſimilis, dedit, qui aqua ſe ablui ſineret et libris quatuor cum dimidia aequiualeret. Liquor ſuperſtes cryſtallos nullas, ſed magma deliqueſcens dedit. Hoc aqua deſtillata ſolutum et alcali Tartari probe ſaturatum, terram depoſuit, praeuia edulcoratione ponderis librae Reſiduum liquoris non niſi alcali vitriolatum; terra autem acido vitrioli ſoluta alumen praebuit.

Experimentum 6.

§. 10. *Salem flocculentum argentei coloris* (Exp. 5.) ex omnibus marmoribus examinatis, elicui, quare e variis his lapidibus collectum vno ictu tentamini expoſui:

a. ſapor eius cretaceus erat,

b. ad ſolutionem completam et ſaturatam viginti quinque partes aquae requirebantur.

c. ſolutio euaporata chryſtallos ſquamoſas et granoſas dedit,

d. loco calido non fatiſcebat,

e. nec alcoholi vini ſuperfuſo et accenſo flammam alius coloris, quam quae huic competit, tribuit.

f. flammae tubo ferruminatorio condenſatae expoſitus pulverem album largiebatur et carboni ignito impoſitus odorem ſulphureum ſpargebat,

g. ſolutio acidis haud turbata fuit,

h. ſolutione alcali tartari lactescebat et ſub quiete veram terram calcaream praecipitabat. Ergo *Selenites* erat.

Expe-

Experimentum 7.

§. 11. Residuum indissolubile experimenti tertii, quod ponderis librarum sex erat, arenae subtilis albae faciem prae se gerebat. Alcali tartari libris quindecim fusum vitrum deliquescens, ideoque liquorem silicum et terram siliceam praebuit.

B. Marmor albo et columbino colore variegatum.

§. 12. In Iugo Catharinoburgo-Vraliensi ad *Gornoitschit* excauatur, prope cacumen iugi istius. Ex hoc marmore columnae Sarskoë-Seloënses exstructae sunt.

Fractura spatacea est, particulis maioribus micantibus, cum acidis mineralibus fortiter efferuescit; polituram egregiam et constantem assumit, chalybe autem non scintillat. Aqua feruente parum terrae calcareae soluitur. Calcinatione centenarius libras viginti duo perdit. Calx extincta texturae granosae, coloris gryseo albescentis est.

§. 13. E centenario acidum salis libras quatuor arenae albescentis non solutas reliquit, quae alcali aërato fusae liquorem silicum et ille terram siliceam puram praebuit. Solutio acido salis facta lixiuio alcali phlogisticati admixto, praecipitatum caeruleum deposuit, post edulcorationem vix librae pondus exhibens. Residuum liquoris, alcali aërato saturatum, praecipitatum coloris spurci albentis dedit. Hoc acido vitrioli vltra saturationem combinatum, gypsum albescens, quasi talcoso-vnguinosum produxit et aqua acidula superstes libras sex $\frac{1}{4}$ selenitis flocculenti dedit. Quod mansit

ſit liquoris, alcali tartari imperfecte ſaturatum, terram argilloſam luteſcentem et alcali vitriolato addito, magneſiam vitriolatam dedit, quae quantum fieri potuit, probe ſeparata ponderis librar. viginti quinque erat. Ad finem portio terrae obtinebatur argillaceae indolis, quae cum ſupranominata, luteſcentis coloris, pondus librarum trium cum dimidia efficiebat.

§. 14. Marmor igitur palumbinum Gornoiſtſchitenſe in centenario terrae ſiliceae libras quatuor; magneſiae, proportioni a celeberrimis *Bergmann* et *Weigleb* erutae conuenienter, vix libras quinque; terrae aluminis libras tres cum dimidia; croci ſeu terrae martis libram vnam; terrae calcareae libras octuaginta ſex continet. In marmore autem mixto aëris fixi et aquae viginti duo centeſimarum partium pondus aequaui.

C. Marmor colore bruneo-rufo et albo.

§. 15. Inter locum *Liſchma* et *Sondala* in Fennonia effoditur et pulchritudinis ac duritiei cauſa ad aedificia aëri expoſita frequenter adhibetur.

Cultro raſum non olet. Puluis raſurae magneti non obedit. Textura minute micacea et dura admodum eſt, vt chalybe percuſſum ſcintillas edat. Cum acidis mineralibus lente effervueſcit. Aqua coctione parum calcis extrahit. Fruſtulum ponderis centenarii, in quo anaticae circiter partes marmoris albi et ruteſcentis adunatae erant, ſub ignitione libras viginti in auras emiſit. Pars ruſeſcens brunei coloris erat. Extinctione totum fruſtulum calcem graniformem porri-

porrigebat, nec vlteriore calcinatione in puluerem ſubtiliorem reduci potuit. Idem marmor ſubtiliſſime puluerifatum lauando, ſeparatio nulla materiarum heterogenearum effici potuit. Portio groſſior ſuperſtes mechanicae diuiſionis patiens erat, lauando iterum puluerem homogeneum ſiſtens.

§. 16. Acidi ſalis librae ſexdecim vltra centenarium non ſoluebant. Lixiuium alcali phlogiſticati praecipitati caerulei libram vnam cum $\frac{1}{4}$ deiecit. Solutioni ſuperſtiti alcali Tartari additum, praecipitatum mucoſo-albeſcens porrexit; huic acidum vitrioli copioſius adfuſum gypſum ſubtile album eripiebat. Aqua acidula manens libras tres ſelenitis flocculenti, dein libras quatuordecim cum dimidia magneſiae vitriolatae dedit, quae libras tres magneſiae purae circiter continebat. Liquor ſpiſſus denuo remanens poſt quatuordecim dierum ſpatium et quietem, libras ſex criſtallorum aluminis dedit, in quibus libra vna cum $\frac{1}{4}$ terrae argillaceae pondus erat. Quod manſit liquoris acidi alcali Tartari ſaturabatur et ita terrae argillaceae libras quatuor, dein alcali vitriolati quidpiam dedit.

§. 17. Reſiduum indiſſolubile (§. 16.) arenae quartſoſae rufae haud abſimile erat. Magneti non obediebat. Librae octo eiusdem cum boracis libris decem fundebantur et vitrum flaueſcens porrigebant. Reliquae librae octo alcali tartari libris ſexdecimfuſae, vitrum eiusdem indolis dederunt, quod ad contactum aëris deliqueſcebat, et aqua penitus ſoluebatur. Acido vitrioli ſolutio non praecipitabatur, eo autem copioſius adfuſo et dein alcali aërato praeter modum ſaturato, gelatina hyalina acquirebatur, quae aqua di-

 luta,

luta, et acido vitriolico ad punctum saturationis adfuso, terrae siliceae purae libras sex praebuit.

D. Marmor coloris palumbini, albo nebuloso.

§. 18. Locus natalis *Pereguba* audit, ad lacum Onegam situs. Marmori Gornoischitensi (§. 12.) facie externa congruit, maculis autem flauis notatur, quae serpentino lapidi similes sunt, sed acidis, vt reliquum marmor, fortiter efferuescunt. Vix eadem duritie, qua marmor sibiricum gaudet; polituram tamen assumit et aëre non labefactatur. Igne aperto candens centenarius, libras triginta sex perdit. Calx inde proueniens grysei coloris, extinctione puluerem album subtilem porrigit.

§. 19. Acidum salis hoc marmor totum quantum fere soluit, miculis nonnullis tantum relictis, pondere vix libram aequantibus. Alcali phlogisticatum libram vnam cum dimidia croci martis e solutione praecipitauit. Reliquum terrae, coloris albi immundi, alcali aërato dejiciebatur. Praecipitatum, acido vitrioli vltra satietatem superfuso, libras decem selenitis flocculenti; alcali aërato dein addito libram vnam cum dimidia terrae argillaceae, coloris lutescentis, dedit. Terra calcarea igitur cum aëre fixo et parua portione aquae in hoc marmore contentis, pondus librarum nonaginta septem cum $\frac{3}{8}$ efficit.

E. Marmor coloris gryseo-caerulescentis (Perlgrau).

§. 20. Prope *Peregubam* circa lacum Onega inuenitur, colore saturatiore aut dilutiore nebulosum est, textura minute squamosa, fractura cuspidato-fibroso (splitterig). Acidis

cidis lente efferuefcit et tam durum eft, vt chalybe percuffum hinc inde fcintillet. Calcinatione centenarius libras triginta perdit, calcem albam, fed granofam, nec puluerulentam relinquens.

§. 21. Acidum falis e centenario huius marmoris libras octodecim infolubiles relinquit, quae indolis quartfofae erant, quoniam alcali tartari portione dupla fundebantur, vitrum deliquefcens et terram filiceam porrigentes. Solutio marmoris lixiuio alcalino phlogifticato adfufo praecipitatum caeruleum ponderis librae dimidiae et dein alcali aërato addito praecipitatum album dedit. Hoc vltimum, acido vitrioli vltra fatietatem imbutum, et dein alcali tartari rurfus praecipitatum, libras duo cum dimidia terrae argillaceae in apricum pofuit.

F. Marmor coloris carnei.

§. 22. Ad *Tiwdi* in Finlandia effoditur, vnicolor eft, quaquauerfum finditur dum malleo contunditur, et fractura quartfum arenaceum vel granofum refert. Debilem admodum cum acidis efferuefcentiam praebet, chalybe autem percuffum facile et multum fcintillat. Calcinando centenarius libras triginta quinque perdit.

§. 23. Digeftione, cum noua femper portione acidi falis, quater inftituta, fingula vice efferuefcebat, tandem ita foluebatur, vt libra cum dimidia terrae filiceae e centenario remanerent. Solutio, methodo antecedente tractata, libram vnam cum $\frac{5}{8}$ praecipitati caerulei, libras tres felenitis et libram cum dimidia terrae argillaceae virefcentis dedit. Pondus

dus igitur terrae calcareae nonaginta ſex cum $\frac{3}{4}$ aequat, acido aëreo et phlegmate deductis.

G. Marmor coloris nigro-gryſei.

§. 24. Ad *Serdopol* ſupra lacum Onega inuenitur; nigreſcens eſt, plurimis autem punctis albis conſperſum, gryſeum redditur. Cultro raſum non olet; efferueſcentia cum acidis fortis eſt. Fractura minute micacea, et re ipſa ſquamulas micae albeſcentis hinc inde continet. Polituram lubens adſumit, chalybe autem percuſſum non ſcintillat. Centenarius calcinando libras viginti duo perdit. Calx extincta texturae arenaceae eſt et particulas micaceas iam clare monſtrat.

§. 25. Acidum ſalis e centenario non vltra libras ſeptuaginta vna cum $\frac{3}{4}$ ſoluebat. Alcali phlogiſticatum dein praecipitatum album dejiciebat, quod magna copia acidi vitrioli ſolutum gypſum, et liquor acidus ſuperſtes libras tres cum dimidia ſelenitis flocculenti porrigebat. Liquor acidus alcali tartari ſaturatus, libras quatuor terrae argillaceae praebuit, quae calcinando ruſeſcebat, partim quoque magneti obediebat. E libris viginti octo $\frac{1}{4}$, reſidui inſolubilis, micae librae nouem lauando ſeparabantur et quod manſit, ope alcali fuſum, terram ſiliceam dedit.

Experimentum 8.

§. 26. Centenarii tres marmoris pulueriſati in retorta vitrea, cui cucurbita luto adiungebatur, igni tam forti per quatuor horas exponebatur, vt retorta emolliretur. Guttulae decem phlegmatis inſipidi mere aquoſi in cucurbita colli-

colligebantur, quae nescio an non parietibus vitri antea adhaererent. Marmor vstum colore candidione erat, iam adhuc acidis efferuescebat et soluebatur, nondum igitur omne acidum aëreum inhaerens amiserat. Aquae frigidae sensibilem calorem non tribuit; magna autem portione coctam aquam calcis dedit, quae euaporata, ope solutionis alcali tartari instillatae praecipitatum album, et solutione argenti in acido nitri, praecipitatum eiusdem coloris praebuit. Vltimum praecipitatum nigrescebat; luna cornea tamen non aderat. Residuum euaporationis ad siccitatem perductae, coloris flauescentis, pondus librae sex cum dimidia habuit, aqua rursus solui non potuit, facile autem acidis sub efferuescentia. Vera igitur terra calcarea erat.

§. 27, Ex dictis patet, centenarium marmoris huius grysei: terrae siliceae partes nouendecim cum $\frac{1}{4}$, argillaceae partes quatuor, micae partes nouem, croci martis partem vnam cum $\frac{1}{8}$, phlegmatis aquosi partes quinque circiter; acidi aërei partes sexdecim vel septendecim continere. Reliquum igitur terra calcarea pura erat, cuius pondus partium quadraginta quinque, vel portione acidi aërei et phlegmatis addita, par hinc sexaginta sex cum $\frac{5}{8}$ aequat.

H. Marmor gryseum, venis albis.

§. 28. Ad plagam septentrionalem lacus *Ladogae* effoditur. Venae et maculae albae partem circiter tertiam massae totius efficiunt. Fractura micat, polituram egregie adsumit, chalybe non scintillat. Acidis mineralibus fortiter efferuescit. Cultro rasum non olet.

§. 29. Centenarius libras triginta quatuor amisit. Calx fusco albescens granulosa erat. Acidum salis dilutum e centenario libras nouendecim cum dimidia soluit. Residuum insolubile libras quinque micae, lauando separandae, et libras tres cum dimidia terrae siliceae dedit. Lixiuio alcalino phlogisticato addito praecipitati caerulei vel terrae martialis sesquilibra, et dein, alcali aërato addito, praecipitatum griseo albescens e solutione obtinui. Vltimum praecipitatum acidi vitrioli magna copia solutum, libras quinque selenitis flocculenti et praeterea portionem gypsi quasi mucosi dedit. Quod mansit liquoris, alcali aërato saturatum, libras duo cum $\frac{3}{4}$ terrae argillaceae praebuit.

I. Marmor gryseo et rubro nebulosum.

§. 30. Ad *Peregubam* Onegae effoditur. Fractura iaspidi haud absimile est. Dum contunditur vndiquaque finditur. Rasum non olet. Acidis frustula integra iniecta parum; puluerisata autem valde efferuescunt. Centenarius calcinatione perdit libras viginti et vnam. Calx extincta satis alba, granosa, nec puluerulenta. Calx cruda puluerisata coctione aquosa libram vnam cum dimidia e centenario perdit.

§. 31. Centenarius marmoris crudi puluerisati, acido salis diluto, remanente libra vna terrae siliceae, soluebatur. Solutio flauescens, alcali phlogisticato praecipitata, terram martialem caeruleam, ponderis librae vnius cum tribus quartis — deposuit. Residuum, solutione alcali aërati praecipitatum, magisterium album terriforme dedit, quod acido vitrioli vltra modum satiatum gypsum et libras duo cum dimidia selenitis flocculenti, tandemque addito alcali

alcali aërato libras quatuor cum dimidia terrae argillaceae dedit. Liquorem superstitem chrystallisando, magnesiae vitriolatae libras quinque et alcali vitriolati portiunculam obtinui. Magnesiae albae pondus in libris quinque magnesiae vitriolatae secundum experimenta Celeberr. *Bergmann* quintam circiter partem vel libram efficit.

K. Marmor carnei coloris, albo variegatum.

§. 32. Ad *Onegam* reperitur. Textura est subtiliter micacea, fractum vndiquaque fissile. Cum acidis lente efferuescit. Chalybe percussum scintillat. Aqua e marmore puluerisato salini nihil coctione extrahit. Calcinando centenarius libras septendecim amittit. Calx viua admodum alba et granosa erat.

§. 33. Acido salis diluto e centenario librae octoginta et vna soluebantur. Alcali phlogisticato libram cum $\frac{1}{4}$ caerulei martialis et dein ope alcali tartari praecipitatum albidum e solutione deiiciebatur. Hoc, acido Vitrioli vltra modum satiatum, gypsum, et euaporatione liquoris residui selenitis flocculenti libras tres cum $\frac{1}{4}$, addito tandem alcali tartari libras quatuor cum $\frac{3}{4}$ terrae argillaceae dedit. E residuo insolubili librae duo cum dimidia micae lauando separabantur. Quod denuo remanebat igni exponebatur ad candescentiam vsque, quo facto ferri libra semis et vltra magnete extrahi potuit; vltimum residuum tripla portione alcali aërati fusum vitrum deliquescens vel liquorem silicum dedit.

L. Marmor acerosum Linnaei.

§. 34. Ad *Onegam* reperitur; colore albo sed impuro. Textura aequalis est, particulis minimis. Basis marmorea, fasciculos radiatos coloris citrini hinc inde continet, centesimam circiter partem massae totius efficientes, quo fit, vt marmor hoc marmori aceroso *Linnaei* prorsus congruat, vel vnum idemque sit. Pars proprie calcarea chalybe percussa non scintillat, polituram egregiam assumit et cum marmore Stannowoensi (A. §. 4.) quoad mixtionem conuenit, excepto inquinamento martiali vberiore. Centenarius nimirum libram semis caerulei martialis vel berolinensis, libras octo terrae siliceae, libras duo terrae argillaceae largitur et libras viginti sub calcinatione perdit. Fasciculi radiati in Marmore obuii molliores quidem fabricae sunt, polituram tamen non recusant. Facie externa spato striato calcareo vel gypsoso, Zeolitho, Scherlo vel Asbesto plus minus congruunt. Radii pollicis longitudinem saepe aequant, interdum concentrici, interdum paraleli sunt; iam filamentorum instar, iam depressi vel latiores apparent, quod frequentius obtinet. Secundum longitudinem diuiduntur, sectione transuersali autem textura fibrosa difficulter patet. Horum iam analysin tradam.

§. 35. Cum acidis mineralibus, imprimis puluerisati, bene efferuescunt. Aqua parum terrae calcareae sub coctione extrahere valet. Centenarius igne aperto calcinatus libras quindecim perdit, acido salis diluto digestae libras quadraginta solubiles amittunt. Solutio lixiuio alcali phlogisticati parum caerulescit, nec praecipitatur; alcali aërato autem, praecipitatum album obtinui, quod cum acido vitriolico strenue efferuescebat et eo vltra modum saturatum selenitem flocculentum et gypsum dedit. Liquor superstes alcali aërato saturatus, terrae argillaceae libram cum $\frac{1}{4}$ praecipitauit.

§. 36.

§. 36. Residuum insolubile digestionis cum acido salis (§. 35.) praeuia edulcuratione libras sexaginta pendebat et colore albo erat. Librae duo tubo ferruminatorio expositae, colorem non mutabant, nec odorem sulphureum spargebant, sed tempore decem minutorum, vt vocant, praeterlapso, scorias quasi spumescentes ponderis librae vnius cum dimida dederunt, quae cum acidis non effer-uescebant. Residui huius libra cum libris duabus alcali tartari fusa vitrum praebuit, quod contusum, aqua coctum, dimidium ponderis amisit. Solutio haec aquosa terram siliceam praecipitauit. Residui supra nominati libra vna, borace fusa, vitrum coloris albi, sed spurci dedit. Acidum nitri huic residui nihil, oleum vitrioli decem libris dimidiam, et aqua regis decem libris libram vnam eripiebat, coctione instituta.

§. 37. Ex iam dictis concludere licet: basin terream fasciculorum radiatorum in hoc marmore reperiundorum, *asbestinae* indolis esse, vel potius cum *Schörlo asbestiformi* conuenire, quem Celeb. *Bergmann* in *Dissertatione de Terra Asbestina* §. §. 13. 14. examinauit, et non nisi maiore copia terrae siliceae differre.

M. Marmor obscure gryseum et album, Schoerlo mixtum.

§. 38. Cum antecedente ad *Onegam* vno eodemque loco reperitur, eiusque sola varietas est. Radios plurimos eiusdem indolis continet, quales in marmore antecedente (L. §. 34.) inueniuntur, hic autem magis dispersi vel solitarii aut saltem paraleli sunt. Sed praeter illos, paruas chrystallos Schoerli nigri magna copia continet.

Difficile admodum est, schoerlum et radios asbestiformes e marmore probe separare. Frusta aciculis vel columnis eiusmodi vberrime mixta, polituram egregie assumunt, chalybe percussa non scintillant, cum acidis vero strenue effervescunt.

§. 39. Marmor chrystallis schoerlaceis plane destitutum textura spatacea est, ad chalybem non scintillans. Centenarius calcinando libras viginti octo perdit et libras quatuor terrae siliceae, quatuor cum dimidia terrae argillaceae et sesquilibram ferri continent; ideoque quantitas terrae calcareae purae in hoc marmore libras sexaginta duo, vel acido aëreo saturata libras nonaginta, aequat.

§. 40. Centenarius materiae chrystallinae vel radiatae, quantum fieri potuit probe separatae, sub calcinatione igne aperto, libras octodecim amisit, colore erat albo spurco, texturam radiatam tamen retinebat. Aqua sub extinctione parum cremoris produxit. Calx granulosa erat. E centenario acidum salis libras sexaginta septem soluebat. Solutio lixiuio alcali phlogisticati praecipitata, libram vnam et $\frac{5}{8}$ caerulei martis, et dein alcali aërato addito terram spurce albescentem praebuit. Haec cum acido vitrioli effervescens gypsum dedit. Liquor superstes, acido vitriolato vltra modum saturatus, euaporando libras sex cum tribus quartis selenitis flocculenti, et dein adiecto alcali tartari ad satietatem vsque, libras octo terrae lutescentis largiebatur, quae tota quanta fere acido vitriolico soluebatur et chrystallisando magnesiam vitriolatam et argillam vitriolatam praebuit. Illius quantitas libras nouendecim circiter efficiebat, in quibus secundum experimenta Celeber. *Bergmann*

mann librae quinque circiter magnesiae continentur; ideoque terrae argillaceae pondus circiter trium librarum tribuendum erit.

§. 41. Residuum in acido salis haud solubile (§. anteced.) libras triginta octo pendebat et albi coloris erat. Tubo ferruminatorio expositum album colorem non mutabat et leuiter tantum conglomerabatur. Parte anatica boracis fusum, vitrum opacum dedit. Librae decem eiusdem residui libris quadraginta alcali tartari fusae vitrum deliquescens porrigebant, relicta portione terrea non deliquescente. E liquore librae duo separabantur. Acidum nitri e decem libris, tres libras soluebat. Aliis decem aqua regis libras duo cum dimidia eripiebat. Compositio igitur huius Schoerli et materiae radiatae ab illa parum differebat, quam in marmore L. §. 34. obseruaui; maiore tantum terrae siliceae ingredientis copia se distinguebat.

Schoerli librae quinque, quousque fieri potuit accurate separati, libris sex boracis fusae, vitrum hyalinum viride; librae quinque radiorum asbestiformium contra, libris sex boracis fusae vitrum opacum nigrescens dederunt.

N. Marmor flauum ex Italia.

§. 42. Vt marmora Rossiae indigena cum exteris compararem, supra nominatum, Petroburgi frequenter vsurpatum examinaui. Textura fere compacta vel impalpabili, iaspidis instar, gaudet, politurae admodum capax est, chalybe percussum non scintillat, cum acidis strenue efferuescit.

§. 43.

§. 43. Centenarius aqua coctus terrae calcareae sesquilibram; igne aperto autem calcinatus pondus librarum viginti amisit. Acidum salis e centenario libras nonaginta septem soluit. Solutio, addito lixiuio alcali phlogisticati, colore viridi aquae marinae (meergrün) imbuebatur et librae quartam partem caerulei martialis deiiciebat. Praecipitatum alcali tartari ope deiectum, luteo-album erat. Acido vitrioli diluto saturatum, gypsum albissimum; liquor vero euaporatus libras octo cum dimidia selenitis flocculenti, tandemque alcali tartari saturatus, libras duo terrae aluminaris dedit. Liquor denique etiam nunc superstes alcali vitriolatum, nec non magnesiae vitriolatae libras sex praebuit, in quibus libra vna cum $\frac{1}{4}$ magnesiae continetur.

§. 44. Residuum indissolubile ponderis librarum trium, puluerem lutescentem referebat, ignitione albescentem. Tripla portione alcali aërati fusum, vitrum deliquescens et hoc terram siliceam dedit.

O. Marmor rude, rubro, flauo et viridi variegatum.

§. 45. Ad *Ladogam*, loco Werstas viginti *Schlusselburgo* distante, circa *Putilowam*, in strato secundario (Flötz) inuenitur. Colore fusco rubro, liuido-flauo et viridi variegatum est. Textura terrea gaudet; corporibus petrefactis, at minus perfectis, vel obsoletis scatet. Polituram quidem adsumit, sed ob exiguam lapidis duritiem, minus conspicuam. Petroburgi tamen frequenter in vsum vocatur; quia aëri resistit, haud difficulter effoditur et advehiuehitur, ſcalis, fundamentis ac ornamentis palatiorum idoneum.

§. 46. Cum acidis lente efferueſcit. Aqua deſtillata ſub coctione libras duo cum tribus quartis e centeriano ſoluit. Solutio euaporata acidi ſalis praeſentiam prodit et calcem ſalitam porrigit. Centenarios tres marmoris pulueriſati deſtillationi exponens (vid. retro Marmor G.) phlegma albi coloris, empyreuma olens obtinui, acidi ſalis praeſentiam clarius monſtrans, quam quae extractione aquoſa ſe prodidit. Deſtillatione pars quarta ponderis marmoris crudi perdebatur. Libae ſex vel octo phlegmatis vaſis deſtillatoriis facile adhaerebant. Marmor vſtum coloris albo griſei erat, cum acidis, etiamnum efferueſcebat; aqua extinctum, absque calore, calcem albidiorem et ſubtiliorem et aquam calcis dedit. Calcinatione igne aperto inſtituta, e centenario non vltra libras viginti tres perdebantur. Calx luteſcens, aqua extincta rudis et impuri coloris reddebatur. Aquam calcis admodum debilem dedit.

§. 47. Acidum ſalis e centenario libras octoginta tres ſoluit. Solutio flaueſcens, alcali phlogiſticato addito, colore cyani imbuebatur et libras fere duas praecipitati caerulei dedit. Reliqua ſolutio, alcali Tartari addito, praecipitatum album impuri coloris praebuit, quod cum acido vitriolico ſttrenue efferueſcebat et in gypſum caeruleſcens mutabatur. Liquor ſuperſtes acido abundans euaporando primum libras ſex ſelenitis flocculenti, dein alcali aërato ſaturatus libras duodecim terrae argillaceae dedit, et chryſtalliſando, praeter alcali vitriolatum, vltra libras ſeptendecim magnesiae vitriolatae deposuit. Magnesiae purae pondus in his libris septendecim, libras tres cum dimidia circiter aequat.

§. 48. Residuum non solubile, ponderis librarum septendecim, coloris spadicei, calcinando rufescebat, magneti hinc inde obediebat; et igne expositum libras duo cum dimidia amittebat. Cum acido vitrioli dum digerebatur, librae quinque soluebantur, quae addito alcali tartari ad satietatem vsque, praecipitabantur et argillaceae indolis erant, coloris albi. Residuum solutionis in acido vitrioli, cum tripla portione alcali tartari fusum, vitrum siliceum deliquescens dedit. In centenario igitur marmoris crudi pondus terrae calcareae acido aëreo et phlegmate onustae libras sexaginta quinque cum dimidia, purae autem libras quadraginta tres efficit.

§. 49. Vt eo melius ante oculos ponantur et inter se comparentur partes constitutiuae et durities diuersa marmorum examinatorum, tabulam exhibeo sequentem, quae producta singulorum indicat. Ponderis decrementum, sub calcinatione aequali, igne aperto, obseruatum cui integra frustula marmorum exponebantur, quoad maximam partem aëri fixo euaporanti tribuendum est. Quod autem partes quoque aquosae marmoribus hisce insunt, destillatione marmoris G. §. 26. O. §. 46. euictum est. Fieri tamen potest, vt nonnullae etiam partes fixae igne ereptae fuerint; proprio enim apparatu copiam aëris fixi et aquae his marmoribus inhaerentis accurate examinare, meum propositum hac vice non erat, in id potius intentus,

tus,

tus, vt transmutationem terrarum primitiuarum a nonnullis affirmatam et gradus eiusdem, si darentur, obseruarem, quorum tamen vestigia nulla prorsus inueni. Caeterum quantitatem aëris fixi et aquae, terris et lapidibus calcareis inhaerentem, alii auctores iam satis dudum explorarunt. Optandum est, vt de reliquis corporibus mineralibus aeque constaret. Vix errabimus, si decrementum ponderis marmorum igne aperto calcinatorum, quod viginti duo vel tres partes centesimas efficit, ita diuidimus, vt partes quinque vel sex phlegmati aquoso, partes septendecim vel octodecim aëri fixo tribuantur et dein partes terreae subtractione proportionali facta, in statu puro vel ab omni acido aëreo liberae determinentur. Terrae calcareae purae pondus, quia basis marmorum propria est, ita notaui, vt illud sequenti tabulae insererem, quod deducto pondere reliquarum omnium partium constitutiuarum, analysi separatarum mansit.

§. 50. Sequitur schema, quo partes constitutiuae marmorum quorundam Rossiae indigenorum proponuntur:

Centenarius continen:	Terrae calcareae aëratae	Terrae ſiliceae	Terrae argillaceae.	Magneſiae	Terrae martialis	Micae.	Terrae asbeſt.	Decrement. calcination.	Durities.
A. Marmor. alb. ſibir.	93	6	1	—	—	—	—	20	—
B. M. caeruleo alb.	$86\frac{1}{2}$	4	$3\frac{1}{2}$	5	1	—	—	22	—
C. M. bruneo alb. fenn.	$74\frac{1}{2}$	16	$5\frac{1}{4}$	3	$1\frac{1}{4}$	—	—	20	ſcintillat.
D. M. caerul. alb. fenn.	$97\frac{3}{8}$	—	$1\frac{1}{2}$	—	$1\frac{1}{8}$	—	—	36	—
E. M. albo caerul. fenn.	79	18	$2\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	—	—	30	—
F. M. rubrum fenn.	$96\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	—	$1\frac{5}{8}$	—	—	35	—
G. M. obſcur. griſ. fenn.	$66\frac{5}{8}$	$19\frac{1}{4}$	4	—	$1\frac{1}{8}$	9	—	22	ſcint.
H. M. griſeo-alb. fenn.	87	$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	—	$1\frac{1}{2}$	5	—	34	—
I. M. griſeo-rub. fenn	$91\frac{3}{4}$	1	$4\frac{1}{2}$	1	$1\frac{3}{4}$	—	—	21	—
K. M. alborubeſ. finn.	75	16	$4\frac{3}{4}$	—	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	—	17	—
L. M. aceroſum L.-fenn.	$89\frac{1}{2}$	8	2	—	$\frac{1}{2}$	—	—	20	—
Subſtant. radiata.	$38\frac{3}{4}$	20	$1\frac{1}{4}$	—	indic	—	40	23	—
M. M. albo-griſ.acer.fen.	90	4	$4\frac{1}{2}$	—	$1\frac{1}{2}$	—	—	28	—
Subſt. ſchorl.	$51\frac{3}{4}$	$6\frac{1}{4}$	3	5	$1\frac{5}{8}$	—	$26\frac{3}{4}$	18	—
N.M.flau.ital.	$93\frac{1}{2}$	3	2	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	—	—	20	—
O. M. varregat.ingerman.	$65\frac{1}{2}$	12	17	$3\frac{1}{2}$	2	—	—	25	—

(cum indciio acidi ſalis).

§. 51.

§. 51. Marmora omnia in antecedentibus examinata, quae chalybe per cussa scintillant, terram siliceam continent; haec vero non semper causa huius phoenomeni est, vbi parca nimis copia mixtionem ingreditur. In marmoribus C, E et K. sexdecim ad octodecim partes centesimae terrae siliceae inueniuntur; marmor F. autem non vltra sesquipartem et I. vnicam partem in centenario continet. In his igitur binis vberiori copiae ferri ingredientis potius, quam terrae siliceae, durities, scintillis prouocandis necessaria, adscribi debet. Marmor sub litera G. descriptum, terra silicea quidem abundat; mica autem immixta impedit, vt chalybe percussum scintillet.

§. 52. E nullo marmorum genere, quotquot examinaui, principia elici potuerunt, quae mediae quasi naturae inter terram calcaream et siliceam gauderent, vel in transgressu et transmutatione vnius in alteram constituta essent. Omnia ac singula potius perfecte separari potuerunt. Terrae non solubilis marmorum L et N, proprietatibus nonnullis communibus quidem gaudent; asbesteae autem indolis sunt, id est terra deriuatiua, simplicioribus composita, prout analysi omnibus numeris absoluta clare monstrauit Celeberr. *Bergmann* in dissert. de Terra Asbestina.

§. 53. Corollarii loco notamus, marmora in antecedentibus examinata in centenario continere:

Terrae calcareae purae, acido aëreo tantum vnitae libras vel partes triginta octo vsque ad nonaginta septem vel octo.

Terrae ſiliceae libram vel partem vnam ad nouendecim; ſolo marmori D. defuit.

Terrae argillaceae partem vnam ad ſeptendecim.

Magneſiae albae partem vel libram vnam ad quinque. Haec tamen quinque ſolum varietatibus ineſt; in reliquis omnibus abeſt,

Micae libras duo cum dimidia, ad nouem; ſed tribus tantum varietatibus ineſt.

Asbeſti ſchoerlacei, in marmore L. et M. libras ſexaginta ſex cum $\frac{3}{4}$ ad quadraginta.

Ferri portio, excepto marmore A, omnia ac ſingula inquinat, a praeſentiae veſtigio vsque ad libras duos.

Acidi aërei quantitas, vt §. 49. attuli, libras ſeptendecim ad octodecim efficit.

Aquae ſ. phlegmatis aquoſi libras quinque ad ſex.

Acidi ſalis veſtigium in calcareo ſtratoſo O. tantum inveni.

Caeterum marmora haec omnibus heterogeneis, alcali volatilis, acidi vitriolici vel gypſi, materiae inflammabilis, ſulphuris, petrolei, metalli (ſolo ferro excepto) et reliquorum corporum mineralis proſapiae, quae in aliis calcareis et marmoribus interdum occurrunt, prorſus carent. Ideo forſan aëris iniuriis fortius reſiſtunt.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE-

DETERMINATIO ERRORVM, QVI IN LONGITVDINES ET LATITVDINES ALICVIVS COMETAE GEOCENTRICAS INDVCVNTVR, EX COMMISSIS ERRORIBVS IN ELEMENTIS ORBITAE.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Disquisitio de erroribus, qui in Longitudines vel Latitudines alicuius Cometae Geocentricas deriuantur, ex commissis erroribus in determinatione Elementorum istius Cometae, eam praecipue habet vtilitatem, vt inde diiudicari queat, quales praecipue obseruationes eligi debeant, ex quibus summa cum exactitudine, horum Elementorum valores erui queant. Nam si compertum fuerit errorem in Longitudine Nodi commissum in Longitudine Cometae Geocentrica insignem mutationem producere; vicissim quoque concludi potest errorem obseruatae Longitudinis Geocentricae exiguam mutationem in Longitudine Nodi pro-

ducere

ducere, quamobrem eiusmodi obſeruatio pro determinanda Longitudine Nodi adprime erit conueniens; ſimilisque ratio eſt cum reliquis Cometae cuiuspiam Elementis. Immo hinc facile patet, ſi hac disquiſitione id praeſtitum fuerit, vt nonnulla horum Elementorum quaſi independenter a reliquis determinari potuerint, tum disquiſitionem de reliquis eo euadere faciliorem et per pauciores obſeruationes exſequi poſſe; ſic ſi poſitio plani in quo Cometa mouetur, independenter a reliquis Cometae Elementis determinari potuerit, tum binae obſeruationes circa hunc Cometam inſtitutae ſufficerent ad reliqua Cometae elementa determinanda.

Tab. V Fig. 1. §. 2. Sit N S T planum Eclipticae in quod ex loco Cometae C demittatur normalis C c, exiſtente loco ſolis in S et telluris in T, tumque iungantur S C, S c, T C, T c, S T lineis rectis, ſitque recta N S L linea nodorum, in qua planum orbitae huius Cometae ſecat Eclipticam. Deinde in plano orbitae N S C ducatur linea S M, quae poſitionem perihelii indicet, iamque ex cognitis Elementis orbitae dabitur primum angulus N S M quem per Π indigitabimus, deinde quoniam tempus quo Cometa obſeruatus ſit in C cognitum habeatur, ex cognito quoque tempore Perihelii quo Cometa in M verſatus ſit, dabitur anomalia Cometae vera ſeu angulus M S C, quem per Φ indicabimus, vnde erit ang. N S C $= \Pi + \Phi$. Vlterius ſi Longitudo Nodi Cometae indicetur per N, Longitudo terrae e Sole viſae per l, et inclinatio orbitae Cometae per i, conſequemur angulum N S T $=$ N $- l$, pro angulis autem N S c, C S c, quibus Longitudo et Latitudo Cometae Geocentrica determinatur, nec non Linea

S c

Sc quae diſtantiam curtatam exprimit, ſequentes habentur aequationes:

$$\text{tang. } NSc = \text{tang. } (\Phi + \Pi) \text{ coſ. } i;$$
$$\text{ſin. } CSc = \text{ſin. } (\Phi + \Pi) \text{ ſin. } i; \text{ et}$$
$$Sc = SC \text{ coſ. } CSc.$$

§. 3. Iam vero pro determinando loco Cometae Geocentrico, qui per angulos STc, CTc determinatur, ſequentes aequationes praeprimis vſui Aſtronomico accommodatae videntur:

$$\text{tang. } STc = \frac{Sc \text{ ſin. } TSc}{ST - Sc \text{ coſ. } TSc} = \frac{SC \text{ coſ. } CSc \text{ ſin. } TSc}{ST - SC \text{ coſ. } CSc \text{ coſ. } TSc} \text{ et}$$
$$\text{ſin. } CTc = \text{ſin. } CSc \cdot \frac{SC}{TC}, \text{ vbi}$$
$$TC = \sqrt{(SC^2 + ST^2 - 2 SC.ST \text{ coſ. } CST)}.$$

Supponamus iam facilitatis gratia, angulos NSc, cST, CSc, STc, CTc reſpectiue per litteras η, θ, λ, θ', λ' indigitari, diſtantias autem SC, Sc, TC, Tc, ST per v, v', u, u', c indicari, eritque his litteris ſubſtitutis

$$\text{tang. } \theta' = \frac{v. \text{ coſ. } \lambda \text{ ſin. } \theta}{c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta} \text{ et ſin. } \lambda' = \frac{v}{u} \text{ ſin. } \lambda$$

exiſtente

$$u^2 = v^2 + c^2 - cv \text{ coſ. } \theta \text{ coſ. } \lambda.$$

§. 4. Iam ſi aequatio tang. $\theta' = \frac{v \text{ coſ. } \lambda \text{ ſin. } \theta}{c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta}$, differentietur, conſideratis ſeparatim v, λ, θ pro variabilibus, ſequentes prodibunt aequationes. Primum ex variabilitate ipſius θ;

$$\frac{d\theta'}{\text{coſ. } \theta'^2} = \frac{v\, d\theta \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta}{c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta} - \frac{v^2\, d\theta \text{ coſ. } \lambda^2 \text{ ſin. } \theta^2}{(c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta)^2} = \frac{v\, d\theta \text{ coſ. } \lambda (c \text{ coſ. } \theta - v \text{ coſ. } \lambda)}{(c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta)^2},$$

 vnde

vnde quum fit

$$\frac{1}{\text{cof.}\,\theta'^2} = 1 + \text{tang.}\,\theta'^2 = \frac{c^2 - 2c\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta + v^2\,\text{cof.}\,\lambda^2}{(c - v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta)^2},$$

fiet

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,\theta\,\text{cof.}\,\lambda\,(c\,\text{cof.}\,\theta - v\,\text{cof.}\,\lambda)}{c^2 - 2\,c\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta + v^2\,\text{cof.}\,\lambda^2}.$$

Deinde ex variabilitate ipfius v, confequemur:

$$\frac{d\,\theta'}{\text{cof.}\,\theta'^2} = \frac{d\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta}{c - v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta} + \frac{v\,d\,v\,\text{cof.}\,\lambda^2\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta}{(c - v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta)^2} = \frac{c\,d\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta}{(c - v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta)^2} \text{ et}$$

$$d\,\theta' = \frac{c\,d\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta}{c^2 - 2\,c\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta + v^2\,\text{cof.}\,\lambda^2}.$$

Denique ex variabilitate ipfius λ obtinebimus:

$$\frac{d\,\theta'}{\text{cof.}\,\theta'^2} = -\frac{v\,d\,\lambda\,\text{fin.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta}{c - v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta} - \frac{v^2\,d\,\lambda\,\text{fin.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta}{(c - v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta)^2} \quad \text{fiue}$$

$$\frac{d\,\theta'}{\text{cof.}\,\theta'^2} = \frac{-\,v\,d\,\lambda\,\text{fin.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta}{(c - v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta)^2} \text{ et}$$

$$d\,\theta' = -\frac{c\,v\,d\,\lambda\,\text{fin.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta}{c^2 - 2\,c\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta + v^2\,\text{cof.}\,\lambda^2}.$$

Hinc coniunctim fumtis his differentialibus fiet:

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,\theta\,\text{cof.}\,\lambda}{u'^2}(c\,\text{cof.}\,\theta - v\,\text{cof.}\,\lambda) + \frac{c\,d\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta}{u'^2}$$
$$- \frac{c\,v\,d\,\lambda}{u'^2}.\,\text{fin.}\,\lambda\,\text{fin.}\,\theta.$$

§. 5. Nunc pro determinando differentiali ipfius λ', differentietur aequatio $\text{fin.}\,\lambda' = \frac{v}{u}\,\text{fin.}\,\lambda$, ex quo fiet:

$$d\,\lambda'.\,\text{cof.}\,\lambda' = \frac{u\,d\,v - v\,d\,u}{u^2}\,\text{fin.}\,\lambda + \frac{v\,d\,\lambda}{u}\,\text{cof.}\,\lambda,$$

tumque ob $u\,\text{cof.}\,\lambda' = u'$ erit

$$d\,\lambda' = \frac{u\,d\,v - v\,d\,u}{u\,u'}\,\text{fin.}\,\lambda + \frac{v\,d\,\lambda}{u'}\,\text{cof.}\,\lambda;$$

hinc quum fit

$$u^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,\text{cof.}\,\lambda\,\text{cof.}\,\theta;$$

pro-

prodibit:

$$u\,d\,u = v\,d\,v - c\,d\,v \text{ cos. }\lambda \text{ cos. }\theta + c\,v\,d\lambda \text{ sin. }\lambda \text{ cos. }\theta$$
$$+ c\,v\,d\,\theta \text{ cos. }\lambda \text{ sin. }\theta,$$

ideoque

$$d\lambda' = \frac{v\,d\lambda \text{ cos. }\lambda}{u'} + \frac{d\,v \,.\, \text{sin. }\lambda}{u'} - u\,d\,u \,.\, \frac{v \text{ sin. }\lambda}{u^2\,u'} = \frac{v\,d\lambda \text{ cos. }\lambda}{u'} + \frac{d\,v \,.\, \text{sin. }\lambda}{u'}$$
$$- \frac{v \text{ sin. }\lambda}{u^2\,u'}(v\,d\,v - c\,d\,v \text{ cos. }\lambda \text{ cos. }\theta + c\,v\,d\lambda \text{ sin. }\lambda \text{ cos. }\theta$$
$$+ c\,v\,d\,\theta \text{ cos. }\lambda \text{ sin. }\theta)$$
$$= \frac{v\,d\lambda}{u^2\,u'}(u^2 \text{ cos. }\lambda - c\,v \text{ sin. }\lambda^2 \text{ cos. }\theta)$$
$$+ \frac{c\,d\,v \text{ sin. }\lambda}{u^2\,u'}(c - v \text{ cos. }\lambda \text{ cos. }\theta) - \frac{c\,v^2\,d\,\theta}{u^2\,u'} \,.\, \text{sin. }\lambda \text{ cos. }\lambda \text{ sin. }\theta.$$

Caeterum quia eſt tang. $\lambda' =$ tang. $\lambda \frac{\text{sin. }\theta'}{\text{sin. }\theta}$, per differentiationem huius aequationis quoque differentiale ipſius λ', per differentialia ipſorum θ, v et λ dabitur, quod tamen minus commode fieri videtur, quam iſta ratione, quam modo adhibuimus.

§. 6. Vlterius ſequitur vt disquiramus de valoribus differentialium $d\,\theta$, $d\,\lambda$, $d\,v$, per variationes in Elementis orbitae determinandis. Primum igitur quia eſt $\theta = \text{N} - l - \eta$, erit $d\,\theta = d\,\text{N} - d\,\eta$, ideoque ex variabilitate in Longitudine Nodi conſequimur $d\,\theta = d\,\text{N}$. Porro quia eſt

$$\text{tang. }\eta = \text{tang. }(\Phi + \Pi) \text{ cos. } i, \text{ erit}$$
$$\frac{d\,\eta}{\text{cos. }\eta^2} = - d\,i \,.\, \text{sin. } i \text{ tang. }(\Phi + \Pi);$$

hincque

$$d\,\theta = - d\,\eta = d\,i \text{ sin. } i \text{ tang. }(\Phi + \Pi) \text{ cos. }\eta^2$$
$$= d\,i \,.\, \text{tang. }\lambda \text{ cos. }\eta, \text{ ob}$$
$$\text{sin. } i \text{ sin. }(\Phi + \Pi) = \text{sin. }\lambda \text{ et cos. }(\Phi + \Pi) = \text{cos. }\lambda \text{ cos. }\eta,$$

 hinc

hinc differentiale ipsius $d\,\theta$ per variationem inclinationis orbitae determinatur, eritque $d\,\theta = d\,i.\ \text{tang.}\ \lambda\ \text{cos.}\ \eta$. Deinde fiet

$$\frac{d\,\eta}{\text{cos.}\ \eta^2} = \frac{d\,\Pi.\ \text{cos}\ i}{\text{cos.}\ (\Phi + \Pi)^2} \quad \text{et} \quad d\,\eta = \frac{d\,\Pi\ \text{cos.}\ i.\ \text{cos.}\ \eta^2}{\text{cos.}\ (\Phi + \Pi)^2} = \frac{d\,\Pi\ \text{cos.}\ i}{\text{cos.}\ \lambda^2},$$

hincque

$$d\,\theta = -\frac{d\,\Pi\ \text{cos.}\ i}{\text{cos.}\ \lambda^2}, \text{ similique ratione } d\,\theta = -\frac{d\,\Phi\ \text{cos.}\ i}{\text{cos.}\ \lambda^2},$$

vnde ratio qua $d\,\theta$ per differentialia $d\,\Pi$, $d\,\Phi$ determinatur est manifesta. Denique quum sit $\text{sin.}\ \lambda = \text{sin.}\ (\Phi + \Pi)\ \text{sin.}\ i$; fiet ex variabilitate ipsius i,

$$d\,\lambda = \frac{d\,i.\ \text{cos.}\ i\ \text{sin.}\ (\Phi + \Pi)}{\text{cos.}\ \lambda} = d\,i.\ \text{cot.}\ i\ \text{tang.}\ \lambda = d\,i\ \text{sin.}\ \eta,$$

ex variabilitate ipsius Π,

$$d\,\lambda = \frac{d\,\Pi\ \text{cos.}\ (\Phi + \Pi)\ \text{sin.}\ i}{\text{cos.}\ \lambda} = d\,\Pi.\ \text{sin.}\ i\ \text{cos.}\ \eta;$$

similique ratione ex variabilitate ipsius Φ,

$$d\,\lambda = d\,\Phi.\ \frac{\text{cos.}\ (\Phi + \Pi)\ \text{sin.}\ i}{\text{cos.}\ \lambda} = d\,\Phi.\ \text{sin.}\ i\ \text{cos}\ \eta.$$

§. 7. Iam vero adhuc restat, vt ostendamus quomodo differentialia anguli Φ et distantiae v per variationes in Elementis orbitae, vtpote Tempore Perihelii, semiparametro orbitae et excentricitate eiusdem, determinentur. Constat igitur quod si semiparameter orbitae per b, excentricitas autem per e indicetur, esse debeat $v = \frac{b}{1 + e\ \text{cos.}\ \Phi}$, computatis nimirum angulis anomaliae a Perihelio. Tum vero si T designet tempus praeterlapsum a tempore Perihelii vsque ad id momentum, quo Cometa obseruatus fuerit in C; μ autem exprimat numerum, quo motus medius Solis ad tempus reducitur, ex proprietatibus orbitarum Cometarum et Planetarum notum est, esse

T =

$$T = \mu b \sqrt{b} \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2}.$$

Hinc itaque per variationem in tempore Perihelii fiet

$$dT = \frac{\mu b \sqrt{b}.\, d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} \text{ hincque}$$

$$d\Phi = \frac{dT (1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2}{\mu b \sqrt{b}} = \frac{dT.\, \sqrt{b}}{\mu v^2}.$$

Tum ex variabilitate femiparametri orbitae confequimur:

$$-\frac{3 T db}{2 \mu b^{5:2}} = \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} = \frac{v^2 d\Phi}{b^2}, \text{ hincque } d\Phi = -\frac{3 T db}{2 \mu v^2 \sqrt{b}}.$$

Denique ex variabilitate excentricitatis e, haec prodibit aequatio:

$$\frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} - 2\, de \int \frac{d\Phi \operatorname{cof.} \Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^3} = 0,$$

cuius aequationis loco etiam haec adhiberi poteft:

$$\frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} = -\frac{2 de}{e} \left(\int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^3} - \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} \right).$$

§. 8. Quum nunc fit:

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^3} = \frac{1}{2(1 - e^2)} \left(\frac{-e \operatorname{fin.} \Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} + 3 \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} - \int \frac{d\Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} \right)$$

et

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} = \frac{1}{1 - e^2} \left(\frac{-e \operatorname{fin.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} + \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)} \right), \text{ fiet}$$

$$\int \frac{d\Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} = (1 - e^2) \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} + \frac{e \operatorname{fin.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi},$$

quamobrem hoc valore fubftituto prodibit:

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^3} = \frac{1}{2(1 - e)} \left(\frac{-e \operatorname{fin.} \Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} + 3 \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} - (1 - e^2) \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} \right.$$
$$\left. - \frac{e \operatorname{fin.} \Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)} \right) = \frac{1}{2(1 - e^2)} \left(-2 \operatorname{fin.} \Phi \frac{(2 + e \operatorname{cof.} \Phi)}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} + (2 + e^2) \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} \right),$$

hincque demum:

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^3} - \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} = \frac{1}{2(1 - e^2)} \left(-e \operatorname{fin.} \Phi \frac{(2 + e \operatorname{cof.} \Phi)}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} + 3 e^2 \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} \right),$$

adeoque

$$\frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} = + \frac{de}{2(1 - e^2)} \left(\frac{\operatorname{fin.} \Phi (2 + e \operatorname{cof.} \Phi)}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} - 3 e \int \frac{d\Phi}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2} \right)$$
$$= \frac{de}{(1 - e^2)} \left(\frac{v^2 \operatorname{fin.} \Phi}{b^2} (2 + e \operatorname{cof.} \Phi) - \frac{3 e T}{\mu b \sqrt{b}} \right), \text{ fiue}$$

$d\Phi$

$$d\Phi = \frac{de}{(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi) - \frac{3eT(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{\mu b \sqrt{b}}\right)$$
$$= \frac{de}{(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi) - \frac{3eT\sqrt{b}}{\mu v^2}\right)$$
$$= \frac{de}{(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi\left(1+\frac{b}{v}\right) - \frac{3Te\sqrt{b}}{\mu v^2}\right).$$

§. 9. Iam propter $v = \frac{b}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}$, pro differentiali ipſius v, ex variabilitate ipſorum b, e et Φ, ſequentes habentur determinationes. 1°. ex variabilitate ipſius b:

$$dv = \frac{db}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{v\,db}{b};$$

2°. ex variabilitate ipſius e,

$$dv = -\frac{b\,de\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = -\frac{v^2\,de\,\text{coſ.}\,\Phi}{b},$$

et demum ex variabilitate ipſius Φ:

$$dv = +\frac{b\,e\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{v^2\,e\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{b}.$$

Vnde ſi valores ipſius $d\Phi$ per dT, db et de in §§. praecedentibus expreſſi ſubſtituantur, conſequemur:

1°. $dv = \frac{v\,db}{b} - \frac{3eT\,db\,\text{ſin.}\,\Phi}{2\mu b\sqrt{b}}$;

2°. $dv = \frac{e\,dT\,\text{ſin.}\,\Phi}{\mu\sqrt{b}}$ et

3°. $dv = -\frac{v^2\,de\,\text{coſ.}\,\Phi}{b} + \frac{v^2\,e\,de\,\text{ſin.}\,\Phi}{b(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi) - \frac{3eT\sqrt{b}}{\mu v^2}\right)$
$$= \frac{v^2\,de}{b}\left(-\text{coſ.}\,\Phi + \frac{e\,\text{ſin.}\,\Phi^2(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(1-e^2)}\right) - \frac{3Te^2\,de\,\text{ſin.}\,\Phi}{\mu(1-e^2)\sqrt{b}}.$$

§. 10. Quum igitur ſupra §. §. 4. 5. differentialia ipſorum θ' et λ', per differentialia ipſorum θ, λ et v inuenerimus expreſſa, nuncque §. §. 6. 8. et 9. oſtenderimus, qua ratione iſta differentialia $d\theta$, $d\lambda$, dv ex variabilitate Elementorum Cometae, N, i, Π, T, b, e deriuentur, facile patet quomodo ſubſtitutione facta, variationes ipſorum θ' et λ', ex variationibus elementorum orbitae deriuare liceat. Verum facile patet, ſi ſingulorum horum differentiatialium respectum simul habere voluerimus, tum formulas nimis prodituras fore complicatas, quare vt eo dilucidius iudicium formari queat, quanta variatio in loco Cometae Geocentrico producatur ex variatione vniuscuiusque Elementi. singula haec Elementa seorsim contemplab mur. Initio igitur facto a Longitudine Nodi, constat angulum λ et distantiam v per eius immutationem nihil affici, pro θ autem habebimus $d\,\theta = d\,N$, vnde per §. §. 4. et 5. consequemur:

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,N\,cos.\,\lambda}{u'^2}\,(c\,\text{cos.}\,\theta - v\,\text{cos.}\,\lambda) \text{ et}$$
$$d\,\lambda' = -\frac{c\,v^2\,d\,N}{u'^2}\,\text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\lambda.$$

§. 11. Hinc igitur concludimus errorem in Longitudine Geocentrica, ex variatione in loco Nodi, esse in composita ratione directa, quantitatum, v, cos. λ, c cos. $\theta - v$ cos. λ et inuersa ipsius u'^2, ex quo colligitur hunc errorem eo maiorem esse quo distantia u Cometae a tellure fuerit minor, id quod generatim valet de singulis erroribus, siue Longitudinis seu Latitudinis Geocentricae ex quocunque capite oriantur. Porro hic error eo maior erit, quo longius Cometa a Sole fuerit remotus, et vicissim quo propius Cometa ad Solem versetur, eo minor hic euadet error. Deinde $d\,\theta$ eo euadet maior, quo minor fuerit Latitudo Heliocentrica, quia cos. λ eo maiorem consequitur valorem, quo angulus λ est minor. Denique differentiale $d\,\theta$ increscit cum coefficiente c cos. $\theta - v$ cos. λ, contra autem decrescit, hoc coefficiente minuto; immo vbi c cos $\theta = v$ cos. λ, differentiale $d\,\theta$ plane euanescit, quare si distantia curtata S c fuerit minor distantia Solis a Terra, angulus autem θ ita constituatur, vt ducta a T ad S c perpendiculari, illa praecise in punctum c incidat, maxima variatio in Longitudine Nodi, vix quidpiam in loco Cometae Geocentrico immutabit. Hinc itaque concludimus pro determinanda Longitudine Nodi illas obseruationes praecipue esse adhibendas, in quibus Cometa telluri quam maxime fuerit propinquus, inprimis si pro eodem tempore a Sole longius distet, tumque is situs maxime erit favorabilis, vbi Cometa cum Sole fuerit in oppositione, siquidem tunc c cos. $\theta - v$ cos. λ valorem consequetur maximum, posito quod v cos. $\lambda > c$.

§. 12. Variatio Latitudinis Geocentricae erit in ratione composita directa quantitatum c, v^2, sin. θ, sin. 2λ, et inuersa ipsorum u^2, u'. Hinc igitur colligitur hanc variationem augeri prout distantia tam telluris, quam Cometae a Sole augetur; deinde haec variatio augetur cum angulis θ et 2λ increscentibus, maximumque adipiscetur valorem vbi $\theta = 90°$ et $\lambda = 45°$. Vicissim autem variatio in Longitudine Nodi ex errore in loco Geocentrico eo euadet minor, quo minus fuerit productum $u^2 u'$, et quo maius $c v^2$ sin. θ sin. 2λ, seu quo longius Cometa a Sole fuerit remotus, tumque propius anguli θ et 2λ ad $90°$ accedunt. Respectu igitur errorum in Latitudine Geocentrica casus fauorabiles pro Longitudine Nodi non prorsus coincidunt, cum illis, qui errores supponunt in Longitudine Geocentrica commissos. Vtrobique quidem requiritur, vt distantia v quam fieri possit sit maxima, verum in priori desideratur vt anguli θ et λ, quam minimi sint, cum contra in posteriori postuletur, vt anguli θ et 2λ quam proxime ad $90°$ accedant.

§. 13.

§. 13. Pro variatione anguli θ' ex errore in aestimando valore anguli i commisso, duplex habetur expressio tam ex differentiali $d\theta$, quam $d\lambda$ resultans, per priorem fit:

$$d\theta' = \frac{v\,d\,i\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\eta}{u'^2}\,(c\,\text{cos.}\,\theta - v\,\text{cos.}\,\lambda);$$

posterior vero praebet

$$d\theta' = -\frac{c\,v\,d\,i}{u'^2}\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{tang.}\,\lambda\,\text{sin.}\,\theta\,\text{cot.}\,i$$

$$= -\frac{c\,v\,d\,i}{u'^2}\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,q,$$

ob tang. λ cot. i = sin. q, hinc coniunctim fiet:

$$d\theta' = \frac{c\,v\,d\,i}{u'^2}\,\text{sin.}\,\lambda(\text{cos.}\,\theta\,\text{cos.}\,\eta - \text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,\eta) - \frac{v^2\,d\,i}{u'^2}\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\eta$$

$$= \frac{v\,d\,i}{u'^2}\,\text{sin.}\,\lambda\,(c\,\text{cos.}\,(\theta + \eta) - v\,\text{cos.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\eta)$$

$$= \frac{v\,d\,i}{u'^2}\,\text{sin.}\,\lambda\,(c\,\text{cos.}\,(N - l) + v\,\text{cos.}\,(\Phi + \Pi)).$$

Error igitur in angulo θ' erit in ratione composita directa quantitatum v, sin. λ et c cos. $(N - l) - v$ cos. $(\Phi + \Pi)$, inuersa autem ipsius u'^2; hincque colligitur hunc errorem increscere pro aucta distantia Cometae a Sole, imminuta vero eius distantia a terra, tumque eundem augeri pro aucta Latitudine Heliocentrica. Patet quoqne simul hunc errorem plane euanescere vbi fuerit

$$c\,\text{cos.}\,(N - l) = v\,\text{cos.}\,(\Phi + \Pi),$$

quod eueniet, vbi lineae perpendiculares ex punctis T et C in lineam nodorum N S demissae in idem incidant punctum, constituentque tunc hae lineae perpendiculares inter se angulum aequalem inclinationi orbitae. Hinc concluditur casus maxime fauorabiles pro determinanda inclinatione orbitae, illos esse, vbi Cometa telluri quam proximus sit, a Sole autem longius remotus, Latitudinem Heliocentricam habeat insignem, et coefficiens c cos. $(N - l) - v$ cos. $(\Phi + \Pi)$ satis magno adficiatur valore.

§. 14. Pro errore in angulo λ' ex variata inclinatione orbitae consequimur per §§. 5, 6:

$$d\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u\,u'} \text{ sin. } \eta\,(u^2 \text{ cos. } \lambda - c\,v \text{ sin. } \lambda^2 \text{ cos. } \theta)$$
$$- \frac{c\,v^2\,d\,i}{u^2\,u'} \text{ sin. } \lambda^2 \text{ sin. } \theta \text{ cos. } \eta,$$

substitutis scilicet pro $d\theta$ et $d\lambda$ eorum valoribus $d\,i$ tang. λ cos. η et $d\,i$ sin. η, hincque fiet:

$$d\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u'} \text{ sin. } \eta \text{ cos. } \lambda - \frac{c\,v^2\,d\,i\,.\,\text{sin.}\,\lambda^2}{u^2\,u'}\,.\,\text{ sin. } (\eta + \theta)$$
$$= \frac{v\,d\,i}{u'} \text{ sin. } \eta \text{ cos. } \lambda - \frac{c\,d\,i}{u'} \text{ sin. } \lambda'^2 \text{ sin. } (\eta + \theta).$$

Praeterea quum sit

$$\text{sin. } \eta \text{ cos. } \lambda = \text{tang. } \eta \text{ cos. } \lambda \text{ cos. } \eta = \text{sin. } (\Phi + \Pi) \text{ cos. } i, \text{ ob}$$
$$\text{tang. } \eta = \text{tang. } (\Phi + \Pi) \text{ cos. } i \text{ et}$$
$$\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \eta = \text{cos. } (\Phi + \Pi);$$

tumque

$$\text{sin. } \lambda^2 = \text{sin. } (\Phi + \Pi)^2 \text{ sin. } i^2,$$

fiet:

$$d\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u'} \text{ sin.} (\Phi + \Pi) (\text{cos.} i - \frac{c\,v}{u^2} \text{sin.} (\Phi + \Pi) \text{ sin. } i^2 \text{ sin.} (\eta + \theta)).$$

Hincque iterum concluditur obseruationes pro determinanda inclinatione orbitae optimas esse, vbi $\Phi + \Pi = 90°$, seu latitudo Heliocentrica ipsi inclinationi orbitae aequatur.

§. 15. Procedamus nunc ad errores angulorum θ', λ', ex variatione in angulo Π, seu elongatione Perihelii a Nodo, deriuandos. Substituto igitur §. 4, loco $d\theta$,

—

$-\frac{d\Pi \cos. i}{\cos. \lambda^2}$ et innicem ipsius $d\lambda$, $d\Pi \sin. i \cos. \eta$, habebimus:

$$d\theta' = -\frac{v\,d\Pi \cos. i}{u'^2 \cos. \lambda}(c \cos. \theta - v \cos. \lambda)$$
$$-\frac{c\,v\,d\Pi}{u'^2} \sin. i \cos. \eta \sin. \lambda \sin. \theta$$
$$= \frac{v\,d\Pi}{u'^2}\left(v \cos. i - \frac{c}{\sin. (\Phi+\Pi)}(\sin. \eta \cos. \theta + \sin. \lambda^2 \cos. \eta \sin. \theta)\right),$$

ob $\cos. i \frac{\tang. \eta}{\tang. (\Phi+\Pi)}$ et $\cos. \eta \cos. \lambda = \cos. (\Phi+\Pi)$, nec non $\sin. i \frac{\sin. \lambda}{\sin. (\Phi+\Pi)}$. In §. 5. autem suffectis pro $d\theta$ et $d\lambda$ eorum valoribus, fiet:

$$d\lambda' = \frac{v\,d\Pi \sin. i \cos. \eta}{u^2 u'}(u^2 \cos. \lambda - c\,v \sin. \lambda^2 \cos. \theta)$$
$$+\frac{c\,v^2\,d\Pi}{u^2\,u'}. \cos. i \tang. \lambda \sin. \theta = \frac{v\,d\Pi}{u'} \sin. i \cos. (\Phi+\Pi)$$
$$+\frac{c\,v^2\,d\Pi}{u^2\,u'} \sin. i\,(\sin. \eta \sin. \theta - \sin. \lambda^2 \cos. \eta \cos. \theta);$$

ob $\tang. i = \frac{\tang. \lambda}{\sin. \eta}$.

§. 16. Quia est $d\theta = -\frac{d\Phi \cos. i}{\cos. \lambda^2}$ et $d\Phi = \frac{dT. \sqrt{b}}{\mu\,v^2}$ §. 7, fiet $d\theta = -\frac{dT \sqrt{b}. \cos. i}{\mu\,v^2 \cos. \lambda^2}$, similiterque

$$d\lambda = d\Phi \frac{\cos. (\Phi+\Pi) \sin. i}{\cos. \lambda} = dT \frac{\sqrt{b} \cos. (\Phi+\Pi) \sin. i}{\mu\,v^2 \cos. \lambda}$$
$$= \frac{dT \sqrt{b} \sin. i \cos. \eta}{\mu\,v^2}.$$

Hinc obtinebimus:

$$d\theta' = -\frac{v\,dT \sqrt{b}. \cos. i}{\mu\,v\,u'^2 \cos. \lambda}(c \cos \theta - v \cos. \lambda) + \frac{c\,e\,dT \sin. \Phi}{\mu \sqrt{b}\,u'^2}. \cos. \lambda \sin. \theta$$
$$-\frac{c\,dT\sqrt{b}}{\mu\,v\,u'^2} \sin. i \cos. \eta \sin. \lambda \sin. \theta.$$

Vlterius fiat:

$$d\lambda' = \frac{dT \sqrt{b} \sin. i \cos. \eta}{\mu\,v\,u^2\,u'}(u^2 \cos. \lambda - c\,v \sin \lambda^2 \cos. \theta)$$
$$+\frac{c\,e\,dT \sin. \lambda \sin. \Phi}{\mu \sqrt{b}\,u^2\,u'}(c - v \cos. \lambda \cos. \theta)$$
$$+\frac{c\,dT\sqrt{b} \cos. i}{\mu\,u^2\,u' \cos. \lambda} \sin. \lambda \sin. \theta.$$

 Vix

Vix autem vllus ſuppetit modus, quo hae formulae ad concinniorem redigi poſſent formam.

§. 17. Nunc quum per §§. 7 et 9. ſit

$$d\Phi = -\frac{3 T\, d b}{2 \mu v^2 \sqrt{b}} \text{ et } d v = \frac{v\, d b}{b} - \frac{3 e T\, d b \,\text{ſin.}\, \Phi}{2 \mu b \sqrt{b}},$$

obtinebimus pro $d\theta'$ hunc valorem:

$$d\theta' = \frac{3 T\, d b \,\text{coſ.}\, i\,(c \,\text{coſ.}\, \theta - v \,\text{coſ.}\, \lambda)}{2 \mu v u'^2 \sqrt{b} \,.\, \text{coſ.}\, \lambda} + \frac{c\, d b \,\text{coſ.}\, \lambda \,\text{ſin.}\, \theta}{b u'^2}\left(v - \frac{3 e T \,\text{ſin.}\, \Phi}{2 \mu \sqrt{b}}\right)$$
$$+ \frac{3 T c\, d b \,\text{ſin.}\, \lambda}{2 \mu v u'^2 \sqrt{b}} \,.\, \text{ſin.}\, \theta \,\text{ſin.}\, i \,\text{coſ.}\, \eta,$$

et pro $d\lambda'$ iſtum:

$$d\lambda' = -\frac{3 T\, d b \,\text{ſin.}\, i \,\text{coſ.}\, \eta}{2 \mu v u^2 u' \sqrt{b}}\,(u^2 \,\text{coſ.}\, \lambda - c v \,\text{ſin.}\, \lambda^2 \,\text{coſ.}\, \theta)$$
$$+ \frac{c\, d b \,\text{ſin.}\, \lambda}{b u^2 u'}\,(c - v \,\text{coſ.}\, \lambda \,\text{coſ.}\, \theta)\left(v - \frac{3 c T \,\text{ſin.}\, \Phi}{2 \mu \sqrt{b}}\right)$$
$$- \frac{3 T c\, d b \,\text{tang.}\, \lambda \,\text{ſin.}\, \theta \,\text{coſ.}\, i}{2 \mu u^2 u' \sqrt{b}}.$$

Denique pro variationibus angulorum θ' et λ', ex variatione in excentricitate orbitae oriundis, hae habentur formulae:

$$d\theta' = -\frac{v\, d e \,\text{coſ.}\, i}{(1 - e^2) u'^2 \,\text{coſ.}\, \lambda}\,(c \,\text{coſ.}\, \theta - v \,\text{coſ.}\, \lambda)\left(\text{ſin.}\, \Phi\,(2 + e \,\text{coſ.}\, \Phi) - \frac{3 e T \sqrt{b}}{\mu v^2}\right)$$
$$+ \frac{c\, d e \,\text{coſ.}\, \lambda \,\text{ſin.}\, \theta}{u'^2}\left(\frac{v^2}{b}\left(-\text{coſ.}\, \Phi + \frac{e \,\text{ſin.}\, \Phi^2 (2 + e \,\text{coſ.}\, \Phi)}{(1 - e^2)}\right) - \frac{3 T e^2 \,\text{ſin.}\, \Phi}{\mu (1 - e^2) \sqrt{b}}\right)$$
$$- \frac{c v\, d e}{u'^2 (1 - e^2)} \,\text{ſin.}\, \lambda \,\text{ſin.}\, \theta \,\text{ſin.}\, i \,\text{coſ.}\, \eta\,\left(\text{ſin.}\, \Phi\,(2 + e \,\text{coſ.}\, \Phi) - \frac{3 e T \sqrt{b}}{\mu v^2}\right).$$

$$d\lambda' = \frac{v\, d e \,\text{ſin.}\, i \,\text{coſ.}\, \eta}{(1 - e^2) u^2 u'}\,(u^2 \,\text{coſ.}\, \lambda - c v \,\text{ſin.}\, \lambda^2 \,.\, \text{coſ.}\, \theta)\left(\text{ſin.}\, \Phi\,(2 + e \,\text{coſ.}\, \Phi) - \frac{3 e T \sqrt{b}}{\mu v^2}\right)$$
$$+ \frac{c\, d e \,\text{ſin.}\, \lambda}{u^2 u'}\,(c - v \,\text{coſ.}\, \lambda \,\text{coſ.}\, \theta)\left(\frac{v^2}{b}\left(-\text{coſ.}\, \Phi + \frac{e \,\text{ſin.}\, \Phi^2 (2 + e \,\text{coſ.}\, \Phi)}{(1 - e^2)}\right) - \frac{3 T e^2 \,\text{ſin.}\, \Phi}{\mu (1 - e^2) \sqrt{b}}\right)$$
$$+ \frac{c v^2\, d e \,\text{tang.}\, \lambda}{(1 - e^2) u^2 u'} \,\text{ſin.}\, \theta \,\text{coſ.}\, i\,\left(\text{ſin.}\, \Phi\,(2 + e \,\text{coſ.}\, \Phi) - \frac{3 e T \sqrt{b}}{\mu v^2}\right).$$

§. 18. Quo adplicatio formularum noſtrarum eo euidentior euadat, eam vno vel altero Exemplo illuſtrare placet. Supponamus igitur quaeſtionem eſſe de Longitudine

dine Geocentrica Cometae Anno 1773 obſeruati, pro die 14 Aprilis 1774, $9^h. 35'. 25''$ Temp. medio Pariſino, tum vero ſi ſequentia huius cometae Elementa in vſum vocentur:

Longitudo Nodi $= N = 4^s. 1^\circ. 8'. 20''$,
Inclinatio orbitae $= i = 61. 15. 11.$
Elongat. Perih. Nodo $= \Pi = 45. 51. 20$,

Log. Semipar. $=$ Log. $b = 0, 3539907$,
Log. Excentric. $=$ Log. $e = 0, 0010801$,
Temp. Perihel. 1773. Sept. 5, 5911,

quia pro hoc tempore eſt $l = 6^s. 24^\circ. 57'. 16''$, fiet $l - N = 83^\circ. 48'. 56''$. Praeterea ex dato tempore Perihelii et momento obſeruationis colligitur angulus $\Phi = 107.53.47$, hinc ob $\Pi = 45^\circ. 51'. 20''$, fiet $\Phi - \Pi = 62. 2. 27$, tumque erit $v = 3, 2655200$. Vlterius habebitur $\eta = 42^\circ. 10'. 42''$, per formulam Tang. $(\Phi - \Pi)$ coſ. i et $\lambda = 50^\circ. 45'. 9''$, per formulam ſin. $\lambda =$ ſin $(\Phi - \Pi)$ ſin. i, tumque v coſ. $\lambda = 2, 0660019$. Ex his autem concludetur $\theta = l - N - \eta = 41^\circ. 38' 14''$, vnde ob $c = 1, 0043982$, demum obtinebimus $\theta' = 68^\circ. 32'. 13''$, hincque Longitudo Cometae Geocentrica $4^s. 16^\circ. 25'. 3''$.

§. 19. Si iam Longitudinem Nodi $5'$ augeamus, caeterumque calculum modo indicato repetamus, inueniemus pro angulo θ', $68^\circ. 26'. 2''$, ita vt Longitudo Cometae hinc oriatur $4^s. 16^\circ. 31, 18''$. Nunc igitur diſpiciamus an idem ex noſtra formula

$$d\theta' = \frac{v\, d\, N \operatorname{coſ}.\lambda}{u'^2} (c \operatorname{coſ}.\theta - v \operatorname{coſ}.\lambda)$$

ſequatur: Habetur autem per formulum $u' = \frac{v \operatorname{coſ}.\lambda \operatorname{ſin}.\theta}{\operatorname{ſin}.\theta'}$, ob

Log.

$$\begin{aligned}
\text{Log.}\, v\, \text{cos}.\, \lambda &= 0,3151307\\
\text{Log. sin.}\, \theta &= \underline{9,8224874}\\
&\ 0,1375681\\
\text{Log. sin.}\, \theta' &= \underline{9,9687880}\\
\text{Log}\ u' &= 0,1687801\\
2\ \text{Log.}\, u' &= 0,3375602
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v\, \text{cos}.\, \lambda &= 2,0660019\\
c\, \text{cos}.\, \theta &= \underline{0,7516237}\\
v\, \text{cos}.\, \lambda - c\, \text{cos}.\, \theta &= 1,3143782\\
\text{L.}\,(v\, \text{cos}.\, \lambda - c\, \text{cos}.\, \theta) &= 0,1187205\\
\text{Log.}\, v\, \text{cos}.\, \lambda &= \underline{0,3151307}\\
\text{Log. Num.} &= 0,4338512\\
\text{Log. Denom.} &= \underline{0,3375602}\\
&\ 0,0962910
\end{aligned}$$

Ideoque numerus per quem mnltiplicari debet variatio in Longitudine Nodi, vt prodeat variatio in angulo θ', erit 1,2482, hincque prodibit pro variatione anguli $374''$, vno tantum scrupulo secundo diuersa ab illa, quam calculo inuenimus. Caeterum hac occasione obseruare conuenit, ad calculum facilitandum praestare, si loco formulae,

$$d\,\theta' = \frac{v\, \text{cos}.\, \lambda\, dN (c\, \text{cos}.\, \theta - v\, \text{cos}.\, \lambda)}{u'^2},$$

ista adhibeatur:

$$d\,\theta' = \frac{dN.\, \text{sin}.\, \theta'^2 (c\, \text{cos}.\, \theta - v\, \text{cos}.\, \lambda)}{v\, \text{sin}.\, \theta^2.\, \text{cos}.\, \lambda}.$$

§. 20. Vlterius pro variatione in Latitudine Geocentrica, loco formulae supra allatae

$$d\,\lambda' = -\frac{c v^2 dN}{u^2 u'}\ \text{sin}.\, \theta\ \text{sin}.\, \lambda\ \text{cos}.\, \lambda,$$

vsum faciamus huius

$$d\,\lambda' = -\frac{c\, dN\, \text{sin}.\, \theta'\, \text{sin}.\, \lambda'^2}{v\, \text{sin}.\, \lambda},\ \text{ob}$$

$$u^2 : v^2 = \text{sin}.\, \lambda^2 : \text{sin}.\, \lambda'^2\ \ \text{et}\ \ u' : v\, \text{cos}.\, \lambda = \text{sin}.\, \theta : \text{sin}.\, \theta'.$$

Hinc pro casu praesenti, vbi $\lambda' = 59^\circ.\, 44'.\, 50''$, calculus erit:

Log.

$$\text{Log.}\,v = 0,5139524 \qquad \text{Log.}\,c = 0,0019060$$
$$\text{L. sin.}\,\lambda = 9,8889763 \qquad \text{L. sin.}\,\theta' = 9,9687880$$
$$0,4029287 \qquad 2\,\text{L. sin.}\,\lambda' = 9,8728376$$
$$\text{L. Num.} = 9,8435316$$
$$\text{L. Denom.} = 0,4029287$$
$$0,4406029$$
$$\text{L.}\,d\text{N} = 2,4771213$$
$$\text{L.}\,d\lambda' = 1,9177242$$

Ex quo colligitur $d\lambda' = +83''$, quia pro noſtro caſu eſt $\theta = l - \text{N} - \eta$ ideoque $d\theta = -d\text{N}$, computo autem reapſe inſtituto, inuenitur $\lambda' = 59^\circ.\, 46'.\, 14''$, $84''$ a priori valore diuerſus.

§. 21. Supponamus nunc inclinationem orbitae quinque Minutis primis augeri, ita vt eſſe debeat $61^\circ.\, 20'.\, 11''$, atque ſecundum formulam §. 13. expoſitam habebimus:

$$\text{L.}\,v = 0,5139524 \qquad \text{L.}\,c = 0,0019060$$
$$\text{L. cof.}(\varphi - \Pi) = 9,6710267 \qquad \text{L. cof.}(l - \text{N}) = 9,0323344$$
$$0,1849791 \qquad 9,0342404$$

$$\text{hinc}\ v\,\text{cof.}\,(\Phi - \Pi) = 1,5310139$$
$$c\,\text{cof.}\,(l - \text{N}) = 0,1082033$$

$$v\,\text{cof.}(\Phi - \Pi) - c\,\text{cof.}(l - \text{N}) = 1,4228106,$$

iam ſi ponatur $v\,\text{cof.}\,(\Phi - \Pi) - c\,\text{cof.}\,(l - \text{N}) = \text{M}$, habebimus:

$$\text{L.}\,v = 0,5139524 \qquad 0,5560758$$
$$\text{L. ſin.}\,\lambda = 9,8889763 \qquad 2\,\text{L.}\,u' = 0,3375602$$
$$\text{L. M} = 0,1531471 \qquad 0,2185156$$
$$0,5560758 \qquad \text{L.}\,d\,i = 2,4771213$$
$$\text{L.}\,d\,\theta' = 2,6956369$$

 fiet-

fietque igitur $d\theta' = 8'. 16''$, computo autem reapſe inſtituto pro hac hypotheſi habetur $\theta' = 68°. 40'. 30''$, qui a valore primitiuo $8'. 17''$ differt, vnde exactitudo formulae noſtrae ſatis fit manifeſta. Pro variatione autem anguli λ' ex $d\,i$ oriunda, loco formulae ſupra allatae, haec adhibeatur:

$$d\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u'}(\text{ſin.}(\Phi - \Pi)\text{coſ.}\,i - \frac{c}{v}\,\text{ſin.}\,\lambda'^2\,\text{ſin.}(\eta + \theta)),$$

quae a priori deriuatur, ob

$$u^2 = \frac{v^2\,\text{ſin.}\,\lambda^2}{\text{ſin.}\,\lambda'^2}, \text{ et ſin.}\,\lambda = \text{ſin.}(\Phi - \Pi)\,\text{ſin.}\,i,$$

hinc autem calculus erit:

$$\begin{array}{rl}
\text{L.}\,c = & 0,0019060 \\
\text{L. ſin.}(\eta + \theta) = & 9,9974652 \\
2\,\text{L. ſin.}\,\lambda' = & 9,8728376 \\ \hline
& 9,8722088 \\
\text{L.}\,v = & 0,5139524 \\ \hline
& 9,3582564 \\
\text{L.}\,v = & 0,51395 \\
\text{L. P} = & 9,29367 \\ \hline
& 0,80762 \\
\text{L.}\,u' = & 0,16878 \\ \hline
& 9,63884
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{L. ſin.}(\Phi - \Pi) = & 9,9460993 \\
\text{L. coſ.}\,i = & 9,6820928 \\ \hline
& 9,6281921 \\
\text{ſin.}(\Phi - \Pi)\,\text{coſ.}\,i = & 0,42481 \\
\frac{c}{v}\,\text{ſin.}(\eta + \theta)\,\text{ſin.}\,\lambda'^2 = & 0,22817 \\ \hline
\text{P} = & 0,19664 \\
& 9,63884 \\
\text{L.}\,d\,i = & 2,97712 \\ \hline
\text{L.}\,d\lambda' = & 2,11596
\end{array}$$

ideoque $d\lambda' = 131'' = 2'. 11''$. Reapſe autem fit pro hac hypotheſi $\lambda' = 59°. 47'. 2''$, ideoque valore primitiuo $2'. 12''$ maior.

§. 22. Vlterius procedendo si statuamus in Elongatione Perihelii a Nodo errorem quinque minutorum primor. esse commissum, correctio pro angulis θ' et λ', ita quidem commodissime inuestigari posse videtur, vt primum quaesitis pro §. 4. valoribus coefficientium $-\frac{c\,v}{u'^2}$ sin. λ sin. θ et $\frac{v\,cos.\,\lambda}{u'^2}(c\,cos.\,\theta - v\,cos.\,\lambda)$ multiplicetur prior per $-\frac{cos.\,i}{cos.\,\lambda^2}$ et posterior per sin. i cos. η. Valorem igitur coefficientis $\frac{v\,cos.\,\lambda}{u'^2}(c\,cos.\,\theta - v\,cos.\,\lambda)$ cum supra §. 19. exquisiuimus, nunc restat vt de valore ipsius $\frac{c\,v}{u'^2}$ sin. λ sin. θ dispiciamus, est autem:

$$\begin{aligned} L.\, v &= 0,5739524 \\ L.\, c &= 0,0019060 \\ L.\, sin.\, \lambda &= 9,8889763 \\ L.\, sin.\, \theta &= \underline{9,8224374} \\ & \ 0,2271721 \\ L.\, u'^2 &= \underline{0,3375602} \\ L.\, B &= 9,8896119 \end{aligned}$$

ideoque

$$\frac{v\,c\,sin.\,\lambda\,sin.\,\theta}{u'^2} = 0,77557.$$

Si iam coefficiens $\frac{v\,cos.\,\lambda}{u'^2}(c\,cos.\,\theta - v\,cos.\,\lambda)$ indicetur per A et $\frac{c\,v}{u'^2}$ sin. λ sin. θ per B, fiet per §§. 4. 6:

$$d\,\theta' = \frac{A\,d\,\Pi\,cos.\,i}{cos.\,\lambda^2} - B\,d\,\Pi.\,sin.\,i\,cos.\,\eta,$$

vnde calculus erit:

$$\begin{array}{rl} \text{L. A} = & 0,09629 \;(\S.\ 19.) \\ \text{L. cof. } i = & \underline{9,68209} \\ & 9,77838 \\ \text{L. cof. } \lambda^2 = & \underline{9,60236} \\ & 0,17604 \\ \text{L. } d\,\Pi = & \underline{2,47712} \\ \text{L. Part. I.} = & 2,65316 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{L. B} = & 9,88961 \\ \text{L. fin. } i = & 9,94288 \\ \text{L. cof. } \eta = & \underline{9,86985} \\ & 9,70234 \\ \text{L. } d\,\Pi = & \underline{2,47712} \\ \text{L. Part. II.} = & 2,17946 \end{array}$$

Hincque fit $d\,\theta' = 450'' - 151'' = 299''$. quod prorfus congruit cum calculo pro hac fuppofitione inftituto, quippe qui praebet $\theta' = 68°.\ 37'.\ 11''$, diffenfu a valore primitiuo exiftente $4'.\ 58''$.

§. 23. Etiamfi complicatior fit calculus correctionis $d\,\theta'$ per formulam §. 15. traditam, tamen eum nihilo minus proponemus, partim vt veritas iftius formulae hoc fpecimine comprobetur, partim vt hoc exemplo declaretur, ad calculum adbreuiandum nihil quidem iuuare, vt formulae Analyticae penitus euoluantur, fed potius praeftare, vt computatis primum coefficientibus ipforum $d\,\theta$, $d\,\lambda$, $d\,v$ pro §§. 4, 5; tum denuo valores q horum differentialium per variationes Elementorum orbitae fecundum §§. 6, 7, 9 exprimentur. Formula autem §. 15. nunc ita vtemur expreffa:

$$d\,\theta' = \frac{v^2\,d\,\Pi\,cof.\,i}{u\cdot c}\left(1 - \frac{c\,(fin.\,\eta\,cof.\,\theta + fin.\,\lambda^2\,cof.\,\eta\,fin.\,\theta)}{v\,cof.\,i\,fin.\,(\Phi + \Pi)}\right)$$

pro qua calculus erit:

$$\begin{array}{rl} \text{L. fin. } \eta = & 9,8270074 \\ \text{L. cof. } \theta = & \underline{9,8735338} \\ & 9,7005412 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{L. fin. } \lambda^2 = & 9,7779526 \\ \text{L. cof. } \eta = & 9,8698525 \\ \text{L. fin. } \theta = & \underline{9,8224374} \\ & 9,4702425 \end{array}$$

fin. η

$$\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\theta = 0,50181$$
$$\text{sin.}\,\lambda^2\,\text{cos.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta = \underline{0,29529}$$
$$0,79710.$$

Iam si breuitatis gratia $\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\theta + \text{sin.}\,\lambda^2\,\text{cos.}\,\eta\,\text{sin.}\,\theta$ indicetur per α, sequens calculus erit:

$$\begin{array}{rl} \text{L.}\,c = & 0,00190 \\ \text{L.}\,\alpha = & \underline{9,90151} \\ & 9,90341 \\ & \underline{0,14214} \\ \text{L.}\,\beta = & 9,76127 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{L.}\,v = & 0,51395 \\ \text{L. cos.}\,i = & 9,68209 \\ \text{L. sin.}\,(\Phi + \Pi) = & \underline{9,94610} \\ & 0,14214 \end{array}$$

hinc $\beta = 0,57713$ et $1 - \beta = 0,42287$. Denique

$$\begin{array}{rl} \text{L.}\,v^2 = & 1,02790 \\ \text{L. cos.}\,i = & 9,68209 \\ \text{L.}\,\beta = & \underline{9,62620} \\ & \underline{0,33619} \\ 2\,\text{L.}\,u' = & \underline{0,33756} \\ & 9,99863 \\ \text{L.}\,d\Pi = & \underline{2,47712} \\ \text{L.}\,d\theta' = & 2,47575 \end{array}$$ hincque $d\theta' = 299''$.

§. 24. Correctionis pro Latitudine Geocentrica computus facillime instituetur, si primum exquirantur valores coefficientium, quibus $d\theta$, $d\lambda$ in §. 5. sunt affecti, nimirum

$$-\tfrac{cv^2}{u^2u'}\,\text{sin.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\lambda\,\text{sin.}\,\theta = -\tfrac{c\,\text{sin.}\,\theta'}{v\,\text{sin.}\,\lambda}\,\text{sin.}\,\lambda'^2,$$

 cuius

cuius valor §. 20. iam habetur expositus, tumque

$$\frac{v}{u'} \text{cos.}\, \lambda - \frac{c v^2}{u^2 u'} \text{sin.}\, \lambda^2 \text{cos.}\, \theta = \frac{\text{sin.}\, \theta'}{\text{sin.}\, \theta} - \frac{c}{u'} \text{sin.}\, \lambda'^2 \text{cos.}\, \theta,$$

ob v cos. $\lambda : u' =$ sin. θ' : sin. θ. Deinde pro $d\lambda$, $d\theta$ eorum valores per $d\,\Pi$ expressi ex §. 6. substituantur. Pro formula autem $\frac{v}{u'}$ cos. $\lambda - \frac{c}{u'}$ sin. λ'^2 cos. θ, iam calculus erit:

L. v cos. λ =	0, 3151307	L. c =	0, 0019060
L. u' =	0, 1687801	L. cos. θ =	9, 8735338
	0, 1463506	2. L. sin. λ' =	9, 8728376
$\frac{v}{u'}$ cos. λ =	1, 400718		9, 7482774
$\frac{c}{u'}$ sin. λ'^2 cos. θ =	0, 379750	L. u' =	0, 1687801
	1, 020968		9, 5794973

istius numeri quem per B' exprimemus Logarithmus erit Log. B' = 0, 0090109. Vlterius pro correctione $d\lambda'$ iam habebimus:

L. A' =	9, 44060 (§. 20.)	L. B' =	0, 00901
L. cos. i =	9, 68209	L. sin. i =	9, 94288
	0, 12269	L. cos. η =	9, 86985
L. cos. λ^2 =	9, 60236		9, 82174
	9, 52033	L. $d\,\Pi$ =	2, 47712
L. $d\,\Pi$ =	2, 47712	L. Part. II. =	2, 29886
L. Part. I. =	1, 99745		

Hinc fit $d\lambda' = 99'' + 199'' = 298''$, eritque eius valor negatiuus ob Π pro casu praesenti negatiuum, quem in formulis nostris positiuum assumsimus, computo autem reapse instituto fit $\lambda' = 59°. 39'. 53''$, ideoque a valore primitiuo

59°.

59°. 44′. 50″, 4′ 57″ diuersus, quo ipso exactitudo nostrae formulae satis comprobatur.

§. 25. Quum variationes, quae ipsam Cometae orbitam spectant, Tempus nimirum Perihelii, semiparametrum orbitae et excentricitatem eiusdem, pro distantia Cometae a Sole v, mutationes quasdam producere valeant; nunc sequitur vt dispiciamus quomodo differentiale $d\,v$ inseruiat ad determinanda $d\,\theta'$ et $d\,\lambda'$ Est vero per §. 4, $d\,\theta' = \frac{c\,d\,v\,\text{cos}.\lambda\,\text{sin}.\theta}{u'^2}$. Quare computetur primum coefficiens $\frac{c\,\text{cos}.\lambda\,\text{sin}.\theta}{u'^2}$:

$$\begin{array}{rl} \text{L.}\,c = & 0,0019060 \\ \text{L. cos}.\,\lambda = & 9,8011783 \\ \text{L. sin}\;\theta = & 9,8224374 \\ \hline & 9,6255217 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} & 9,6255217 \\ 2\,\text{L.}\,u' = & 0,3375602 \\ \hline \text{L.}\,\frac{c\,\text{cos}.\lambda\,\text{sin}.\theta}{u'^2} = & 9,2879615 \end{array}$$

Iam autem vt differentiale ipsius v, quod in lineis exprimitur ad mensuram angulorum reducatur, a Logarithmo fractionis modo propositae subtrahatur 4,6855749, eritque L. C = 4,6023866. Quum igitur pro casu praesenti, sit $v = 3,26552$, si supponamus $d\,v = 0,0100$, cuius L. = 8,000, fiet L $d\,\theta' = 2,6023$, hincque $d\,\theta' = 400''$. Computo autem reapse subducto habetur $\theta' = 68°.\ 25'.\ 38''$, qui a primitiuo valore 6′. 35″ differt. Formula igitur differentialis hic perfectam exactitudinem non suppeditat et maiores quidem adhuc aberrationes metuendae essent, si correctio ipsius v adhuc maior fuerit. Deinde pro coefficiente C′, quo $d\,v$ adficitur §. 5, computetur haec formula:

$$\frac{c^2\,\text{sin}.\lambda'^2}{v^2\,u'\,\text{sin}.\lambda}\left(1 - \frac{v}{c}\,\text{cos}.\lambda\,\text{cos}.\theta\right)\text{ ob } u^2 = \frac{v^2\,\text{sin}.\lambda^2}{\text{sin}.\lambda'^2}.$$

L. v =

$$
\begin{array}{rl}
\text{L.}\,v = & 0,5139524 \\
\text{L.}\,c = & 0,0019060 \\
\hline
\text{L.}\,\frac{v}{c} = & 0,5120464 \\
\text{L.}\,\text{cos}.\,\lambda = & 9.8011783 \\
\text{L.}\,\text{cos}.\,\theta = & 9,8735338 \\
\hline
 & 0,1867585
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{hinc } -\frac{v}{c}\,\text{cos}.\,\lambda\,\text{cos}.\,\theta = & -1,537300 \\
+1 = & 1, \\
\hline
P = -\frac{v}{c}\,\text{cos}.\,\lambda\,\text{cos}.\,\theta + 1 = & -0,637300
\end{array}
$$

Porro erit

$$
\begin{array}{rl}
\text{L.}\,\frac{c}{v} = & 9,4879536 \\
2\,\text{L.}\,\frac{c}{v} = & 8,9759072 \\
\text{L. sin.}\,\lambda'^2 = & 9,8728376 \\
\text{L. P} = & 9,7302168 \\
\hline
 & 8,5789616 \\
 & 0,0577564 \\
\hline
 & 8,5212052
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{L.}\,u' = & 0,1687801 \\
\text{L. sin.}\,\lambda = & 9,8889763 \\
\hline
 & 0,0577564 \\
 & 8,5212052 \\
 & 4,6855749 \\
\hline
\text{L. C}' = & 3,8356303
\end{array}
$$

a Logarithmo autem modo inuento si subtrahatur 4,6855749, prodit Log. C', hinc si pro casu praesenti supponatur $d\,v = 0,01$, fiet L. $d\,\lambda' = 1,835$, ideoque $d\,\lambda' = 68''$, reapse autem est $\lambda' = 59°.\,43'.\,43''$, eius differentia a valore primitiuo existente $67''$.

§. 26. Hinc si pro correctione $d\,\theta'$, coefficientes ipsorum $d\,\theta$, $d\,\lambda$, $d\,v$ exprimantur per A, B, C et pro correctione $d\,\lambda'$ per A', B', C', habebimus hoc valores:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Log. A} = 0,09629; & \text{Log, A}' = 9,44060 \\
\text{Log. B} = 9,88961; & \text{Log. B}' = 0,00901 \\
\text{Log. C} = 4,60238; & \text{Log. C}' = 3,83563
\end{array}
$$

quibus

quibus inuentis per §§. 7 et 9 dispiciendum est, quantum $d\theta$, $d\lambda$, dv per dT, db et de immutentur. Primum igitur per §. 7. quum sit $d\Phi = \frac{dT\sqrt{b}}{\mu v^2}$, pro calculo huius formulae notandum est esse L. $\mu = 1,7644012$, cui insuper addi debet Logarithmus 4,6855749, vnde obtinebimus:

$$\begin{array}{rl} 2\,\text{L.}\, v = & 1,0279048 \\ \text{L.}\, \mu = & 1,7644012 \\ & 4,6855749 \\ \hline & 7,4778809 \\ \tfrac{1}{2}\,\text{L.}\, b = & 0,1769954 \\ \hline \text{L.}\, \frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = & 2,6991145 \end{array}$$

ideoque fit $\frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = 501$, vnde si supponatur in tempore Perihelii $\frac{1}{10}$ parte diei esse aberratum, erit correctio anguli $\Phi = 50''$. Deinde pro correctione dv per formulam $dv = \frac{e\,dT\,\text{sin.}\,\Phi}{\mu\sqrt{b}}$, calculus erit:

$$\begin{array}{rl} \text{L.}\, e = & 0,0010801 \\ \text{L. sin.}\, \varphi = & 9,9784607 \\ \hline & 9,9795408 \\ & 1,9413966 \\ \hline & 8,0381442 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{L.}\, \mu = & 1,7644012 \\ \text{L.}\, \sqrt{b} = & 0,1769954 \\ \hline & 1,9413966 \end{array}$$

hinc $\frac{e\,\text{sin.}\,\Phi}{\mu\sqrt{b}} = 0,0109180$, ideoque posito $dT = \frac{1}{10}$, fiet $dv = 0,0010918$, cuius conclusionis veritas computo reapse instituto confirmari potest. Iam pro correctione $d\theta'$ ex dT deriuanda, sequens fiat calculus:

$$\begin{array}{rl} \text{L. cof. } i & = 9{,}68209 \\ 2\,\text{L. cof. } \lambda & = 9\;60236 \\ \hline & \,0{,}07973 \\ \text{L. A} & = 0{,}09629 \\ \text{L. } \frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} & = 1{,}69911 \\ \hline \text{L. Part. I.} & = 1{,}87513 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} \text{L. fin. } i & = 9{,}94288 \\ \text{L. cof. } \eta & = 9{,}86985 \\ \text{L. B} & = 9{,}88961 \\ \text{L. } \frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} & = 1{,}69911 \\ \hline \text{L. P. II.} & = 1{,}40145 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} \text{L. C} & = 4{,}60238 \\ \text{L. } \frac{e \sin. \Phi}{\mu \sqrt{b}} & = 7\;03814 \\ \hline \text{L. P. III.} & = 1{,}64052 \end{array}$$

Hinc fiet

$$d\theta' = -75'',0 + 25'',2 - 43'',7 = -93'',5.$$

Tum vero pro correctione $d\lambda'$ fequens habetur calculus:

$$\begin{array}{rl} \text{L. } \frac{\text{cof. } i}{\text{co. } \lambda^2} & = 0{,}07973 \\ \text{L. A}' & = 9{,}44060 \\ \text{L. } \frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} & = 1{,}69911 \\ \hline \text{L. Part. I.} & = 1{,}21944 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} \text{L. fin. } i & = 9{,}94288 \\ \text{L. cof. } \eta & = 9{,}86985 \\ \hline & \,9{,}81273 \\ \text{L. B}' & = 0{,}00901 \\ \text{L. } \frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} & = 1{,}69911 \\ \hline \text{L. Part. II.} & = 1{,}52085 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} \text{L. C}' & = 3{,}83563 \\ \text{L. } \frac{e \sin. \Phi}{\mu \sqrt{b}} & = 7{,}03814 \\ \hline \text{L. P. III.} & = 0{,}87377 \end{array}$$

ideoque erit

$$d\lambda' = +16'',6 + 33'',2 - 7'',5 = +42'',3.$$

§. 27. Vlterius fi procedamus ad valores ipforum $d\theta'$, $d\lambda'$ ex db et de deriuandos, praeftabit vt primum haec differentialia $d\theta'$, $d\lambda'$ generatim ad $d\Phi$, dv reducamus, quod fiet multiplicando A, A' per $-\frac{\text{cof. } i}{\text{cof. } \lambda^2}$, et B, B' per fin. i cof. η, tumque ponendo

$$\frac{\text{A cof. } i}{\text{cof. } \lambda^2} - \text{B fin. } i \text{ cof. } \eta = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\text{B}' \text{cof. } i}{\text{cof. } \lambda^2} + \text{B}' \text{ fin. } i \text{ cof. } \eta.$$

Erit

Erit vero ob:

$$\begin{array}{lll} \text{Log. } A = 0,09629 & & \text{L. } B = 9,88961 \\ \text{Log. } A' = 9,44060 & & \text{L. } B' = 0,00901 \\ \hline \text{L. } \frac{cos.\,i}{cos.\,\lambda^2} = 0,07973 & & \text{L. fin. } i \text{ cof. } \eta = 9,81273 \\ \hline \quad 0,17602 & & \quad 9,70234 \\ \quad 9,52033 & & \quad 9,82174 \end{array}$$

$\frac{A\, cof.\, i}{cof.\, \lambda^2} - B$ fin. i cof. $\eta = \alpha = 0,99586$, et

$\frac{A'\, cof.\, i}{cof.\, \lambda^2} + B'$ fin. i cof. $\eta = \beta = 0,99474$, vnde

Log. $\alpha = 9,99819$ et Log. $\beta = 9,99771$.

Iam quia eft $b = 2,2593774$, fupponamus in hoc valore, quantitate 0,005 effe aberratum, effeque debere $b = 2,2643774$. Tum pro correctione $d\,\Phi$ fequens habetur calculus, ob T = 220,8085 dies:

$$\begin{array}{lll} \text{L. } T = 2,3440157 & & \text{L } \mu\, v^2 = 7,4778809 \text{ §. 26.} \\ \text{L. } 3 = 0,4771213 & & \text{L. } \sqrt{b} = 0,1769954 \\ \hline \quad 2,8211370 & & \text{L. } 2 = 0,3010300 \\ \quad 7,9559063 & & \hline \\ \hline \quad 4,8652307 & & \quad 7,9553063 \\ \text{L. } d\,b = 7,69897 & & \\ \hline \text{L. } d\,\varphi = 2,56420, & & \end{array}$$

vnde $d\,\varphi = -367'' = -6'.\,7''$. Pro variatione ipfius $d\,v$ computetur formula:

$$d\,v = \frac{v\,d\,b}{b} - \frac{3\,e\,T\,d\,b\,fin.\,\Phi}{2\,\mu\,b\sqrt{b}};$$

$$
\begin{array}{r}
L.v = 0,5139235 \\
L.b = 0,3539907 \\
\hline
0,1599328 \\
L.db = 7,69897 \\
\hline
L.P.I. = 9,85890
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
L.3 = 0,4771213 \\
L.e = 0,0010811 \\
L.T = 2,3440157 \\
L.\sin.\Phi = 9,9784607 \\
\hline
2,8006788 \\
2,5964172 \\
\hline
0,2042616 \\
L.db = 7,69897 \\
\hline
L.Part.II. = 7,90323
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
L.2 = 0,3010300 \\
L.\mu = 1,7644012 \\
L.b\sqrt{b} = 0,5309860 \\
\hline
2,5964172
\end{array}
$$

hincque colligitur

$$dv = -0,0080026 + 0,0072261 = -0,0007765.$$

Iamque denuo pro correctionibus $d\,\theta'$, $d\,\lambda'$:

$$
\begin{array}{r}
L.\alpha = 9,99819 \\
L.\alpha' = 9,99771 \\
\hline
L.d\varphi = 2,56420 \\
\hline
2,56239 \\
2,56239
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
L.C = 4,60238 \\
L.C' = 3,83563 \\
\hline
L.dv = 6,89014 \\
\hline
1,89252 \\
0,72577
\end{array}
$$

$$d\,\theta' = -365'' - 31'' = -6'.\,36'', \text{ et}$$
$$d\,\lambda' = -365'' + 5'' = -6'.$$

§. 28. Denique quum sit $e = 1,0024901$, si ibi statuatur correctionem $0,001$ esse admittendam, correctio anguli Φ sequenti ratione computabitur:

$L.b = 0,3539907$
$L.v = 0,5139235$
$L.\frac{b}{v} = 9,8400672$
$1 + \frac{b}{v} = 1,6919380$
$L.(1+\frac{b}{v}) = 0,2283845$
$L.\,\text{sin}.\,\Phi = 9,9784607$
$0,2068452$

$L.3T = 2,8211371$
$L.e = 0,0010801$
$L.\sqrt{b} = 0,1769954$
$2,9992126$
$L.\mu v^2 = 2,7923060$
$0,2069066$
hinc $\frac{3eT\sqrt{b}}{\mu v^2} = 1,6102992$
$(1+\frac{b}{v})\,\text{sin}.\Phi = 1,6100715$
$M = 0,0002277$

$2L.v = 1,0279048$
$L.\mu = 1,7644012$
$2,7923060$

Porro est $e^2 - 1 = 0,0049865$, hinc

$L.(e^2 - 1) = 7,6977958$
$4,6855749$
$2,3833707$

$L.M = 6,35736$
$2,38337$
$3,97399$
$L.de = 7,00000$
$L.d\Phi = 0,97399$

hincque $d\varphi = -9'', 4$. Tum vero pro correctione dv adhibeatur formula

$$dv = -\frac{v^2\,de\,\text{cos}.\Phi}{b} + \frac{v^2 e\,d\Phi\,\text{sin}.\,\Phi}{b},$$

cuius sequenti ratione instituitur computus:

$L.v^2 = 1,02790$
$L.e = 0,00108$
$L.\,\text{sin}.\,\varphi = 9,97846$
$L.d\varphi = 0,97399$
$1,98143$
$L.b = 0,35399$
$1,62744$
$4,68557$
$6,31301$

$L.v^2 = 1,02790$
$L.\,\text{cos}.\,\varphi = 9,48755$
$0,51545$
$L.b = 0,35399$
$0,16146$
$L.e\ 7,00000$
$7,16146$

 hinc-

hincque

$$d v = -\frac{v^2 d e \cos.\Phi}{b} + \frac{v^2 e d \Phi \sin.\Phi}{b} = 0,0014503 + 0,0002056$$

et $d v = + 0,0016559$. Nuncque demum pro $d\theta'$, $d\lambda'$

$L.\,\alpha = 9,99819$	$L.\,C = 4,60238$
$L.\,\alpha' = 9,99771$	$L.\,C' = 3,83563$
$L.\,d\Phi = 0,97399$	$7,21903$
$0,97218$	$1,82141$
$0,95170$	$1,05466$

$$d\theta' = 9'',4 + 66'',3 = 75'',7 \text{ et}$$
$$d\lambda' = -9'',4 + 11'',3 = 1'',9.$$

§. 29. Ex formulis pro $d\theta'$, $d\lambda'$ ex $d e$ deriuandis, vix quidquam in genere ſtatui poteſt, de obſeruationibus quae praeprimis ad excentricitatem determinandam conducunt, ſeu pro quibus correctio excentricitatis maximam habet vim ad locum Cometae Geocentricum immutandum. Si ad formulas pro $d\varphi$ et $d v$ per $d e$ determinandas confugere velimus, conſtat quidem pro caſu Perihelii et Aphelii eſſe, in Perihelio

$$d\varphi = -\frac{3 T e d e \sqrt{b}}{\mu v^2 (1-e^2)} = -\frac{3 T e d e}{\mu b \sqrt{b}} \cdot \frac{1+e}{1-e},$$

ob $v^2 = \frac{b^2}{(1+e)^2}$, in Aphelio autem

$$d\varphi = -\frac{3 T e d e \sqrt{b}}{\mu v^2 (1-e^2)} = -\frac{3 T e d e}{\mu b \sqrt{b}} \cdot \frac{1-e}{1+e},$$

vbi manifeſtum priorem correctionem multo eſſe maiorem poſteriori, idque eo magis, quo propius e accedit ad vnitatem. Pro v autem correctio $d v$ eſt in Perihelio $= -\frac{b d e}{(1+e)^2}$, et in Aphelio $d v = + \frac{b d e}{(1-e)^2}$, vbi poſterior correctio priori eſt multo maior et contrariae inſuper deno-

denominationis. Hocque iterum indicio conſtat generatim nihil ſtatui poſſe, de obſeruationibus, quae potiſſimum ab excentricitate immutari poſſunt. Interim tamen pro orbitis Planetarum, exiſtente valore ipſius e valde paruo, fiet $d\varphi$ maximum vbi ſin. $\varphi = 90$, quia in expreſſione

$$d\varphi = \frac{de}{1-e^2}\left(\text{ſin.}\,\varphi\,(2+e\,\text{coſ.}\,\varphi) - \frac{3Te\sqrt{b}}{\mu v^2}\right)$$

termini e coſ. φ ſin. $\varphi - \frac{3Te\sqrt{b}}{\mu v^2}$ reſpectu ipſius 2 ſin. φ valde parui haberi poſſunt. Tum quoque pro iſto caſu fiet $dv = 2ede\,\frac{v^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{b(1-e^2)}$, ob coſ. $\varphi = 0$ et terminis quantitate e^2 affectis plane omiſſis. Contra vero in apſidibus, exiſtente ſin. $\varphi = 0$, fiet

$$d\varphi = -\frac{de}{(1-e^2)}\cdot\frac{Te\sqrt{b}}{\mu v^2} \text{ et } dv = \frac{v^2de}{b} = \mp\frac{bde}{(1\pm e^2)}.$$

BRE.

BREVIS EXPOSITIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM IN VRBE TANBOW INSTITVTARVM.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Obſeruationes has pro determinanda poſitione vrbis Tanbow traditurus, primum referam de ſtatu quadrantis mei, in quem ſedulo inquiſiui per altitudines ſtellarum fixarum ad Auſtrum et Boream captas; atque reperi:

			Errorem	et Latitud.
die $\frac{13}{24}$ Dec. 1783.	Ex γ Cephei et η Pegaſi	–	3′. 0″	52°. 43′. 58″
	Ex eadem et α Androm.		3. 4	54
	Ex γ vrſ. maior. et	η Pegaſi	2. 53$\frac{1}{2}$	51$\frac{1}{2}$
		α Andr.	2. 57$\frac{1}{2}$	47$\frac{1}{2}$
		α Andr.	3. 3$\frac{1}{2}$	52$\frac{1}{2}$
die $\frac{16}{27}$ Dec.	Ex γ Cephei. et	δ –	3. 9	47
		β –	3. 5	51
		α	2. 57$\frac{1}{2}$	46
	Ex γ vrſ. maior. et	δ Andr.	3. 3	41
		β	2. 59	45
		α	3. 0	49
	Ex Polari et	δ Andr.	3. 5$\frac{1}{2}$	43$\frac{1}{2}$
		β	3. 1$\frac{1}{2}$	47$\frac{1}{2}$
		Med. -	3. 1;	52. 43′. 48

Simli

Simili modo comparaui alias fixas ad Boream et Auſtrum obſeruatas, quas ſingulas exponere longum et ſuperfluum foret; atque ex 60 combinationibus inueni errorem medium — 3′. 3″, quo altitudines fixarum et ſolis hic recenſendas iam mulctatas ſiſto. Videamus nunc ipſas obſeruationes:

Altitudines ſtellarum fixarum meridianae ad auſtrum.

Dies obſ. St. Nou.	Nomina fixarum.	Alt. ab error. repurgat.	Refr.	Declin. appar.	Latitudo.
24 Dec.	η Pegaſi	66°.22′.32″	0′. 29″	29°. 6′. 4″	52°.44′. 1″
1783.	α Androm.	65 10 45	0 31	27 54 7	43 53
27 Dec.	α Androm.	65 10 46	- -	- - -	43 52
	δ - -	66 57 37	0 28	29 40 50	43 41
	β - -	71 45 1	0 22	34 28 28	43 49
6 Febr.	α Ceti	40 31 30	1 17	3 13 57	43 44
1784.	Alcyone	60 42 28	0 37	23 25 37	43 46
	ζ Perſei	68 30 47	0 26	31 13 54	43 33
1 Mart.	γ Orion.	43 25 37	1 10	6 8 22	43 55
	ζ - -	35 13 37	1 34	2 4 12	43 45
	η Caſtor.	59 50 22	0 38	22 33 16	43 32
3 Mart	β Eridan.	31 55 9	1 46	5 22 44	43 53
	β Orion.	28 50 11	2 0	8 27 53	43 54
	β Taur.	65 41 21	0 30	28 24 40	43 49
	δ Orion.	36 49 17	1 29	0 28 25	43 47
	ε - -	35 56 23	1 31	1 21 17	43 51
	α - -	44 38 27	1 7	7 21 6	43 46
	μ Caſtor.	59 53 35	0 38	22 36 38	43 41
17 Mart	γ Polluc.	53 51 27	0 48	16 34 5½	43 26½
	ε Caſtor.	62 36 45	0 34	25 19 48	43 37
	ζ Gemin.	58 9 35	0 42	20 52 20	43 27

Dies obs. St. Nou.	Nomina fixarum	Alt. ab error. repurgatae	Refr.	Declin. appar.	Latitudo.
17 Mai	η Virg.	37°.49'.28''	1'.26''	0°.31'.52''	52°.43'.50''
	β Corui	15 7 30	3 47	22 12 18	43 59
	γ Virgin.	37 1 47	1 28	0 15 57	43 44
		Fixae	ad	Boream.	
24 Dec.	γ Cephei	66 18 35	0 30	76 25 49,5	43 54½
	γ vrs. maio	17 40 25	3 15	54 53 28	43 42
27	γ Cephei	66 18 34	0 30	76 25 49	43 53
	γ vrs. maio	17 40 24	3 15	54 53 28	43 41
	Polaris	54 35 3	0 47	88 9 30	43 46
6 Febr.	γ vrs. min.	35 21 0	1 33	72 35 44	43 43
3 Mart	δ Dracon.	30 2 12	1 54	67 16 33½	43 44½
17	— — —	30 2 15		67 16 32	43 49
19 Apr.	α Cephei	24 26 7	2 23	61 40 9,5	43 34½
	β Cephei	32 22 6	1 43	69 36 36,5	43 46½
17 Mai	Polar.	50 54 2	0 54	88 9 4	44 4
22	α Cassiop.	18 7 50	3 10	55 21 2	43 38
	ε Cassiop.	25 21 30	2 17	62 35 52	43 23
				Medium	52 43 45

Altitudines Solis meridianae.

E magno numero harum obseruationum exhibeo eas tantum, quas mensibus Maio et Iunio cepi; in computu declinationis solis assumsi differentiam meridianorum inter Parisios et Tanbow 2^h, 6.

Dies

Dies obs. St. nov.		Altitudo limb. Boreal	Refr. – par.	½ Diam. ⊙	Declinat. ⊙	Eleuatio Poli.
1	Maii	52°. 52'. 9"	0'. 45"	15'. 54"	15°. 21'. 1"	52°. 43'. 31"
4		53 44 17	43	53	16 11 53	43 42
6		54 18 40	– –	–	16 45 32	43 28
14		56 22 6	39	51	18 49 13,5	43 37½
17		57 3 21	38,5	50,5	19 30 31	43 39
19		57 29 25	38	50	19 56 24	43 27
21		57 53 55	– –	–	20 20 55	43 28
22		58 5 29	37,5	49,5	20 32 40	43 38
24		58 28 19	36,5	–	20 55 8	43 25
26		58 49 4	36	49	21 16 7	43 28
27		58 58 46	– –	–	21 26 5	43 44
1	Iun.	59 43 0	34	48	22 10 14	43 36
3		59 57 51	– –	–	22 25 14	43 45
5		60 10 57	– –	–	22 38 39	44 0
6		60 17 34	– –	47,5	22 44 46,5	43 34
7		60 22 44	– –	–	22 50 30	44 7
8		60 28 31	35,5	–	22 55 49	43 39
11		60 41 57	33	47	23 9 26	43 49
12		60 45 21	– –	–	23 13 3	44 2
13		60 49 3	– –	–	23 16 21	43 38
15		60 53 55	– –	–	23 21 42	44 7
17		60 56 8	– –	–	23 25 24,5	43 56½
18		60 59 8	– –	–	23 26 39	44 1
20		61 0 10	– –	–	23 27 53	44 3
21		61 0 15	0. 33	15. 47	23 27 52	43 55

Med. 52. 43. 44.

Latitudo igitur vrbis Tanbow tuto ſtatui poteſt 52°. 43¾'.

Obſer-

Obſeruationes pro longitudine eiusdem vrbis.

		Temp. ver. h. ′ ″
$\frac{18}{29}$ Ianuar. 1784.	Occultatio ε ♈ ad limbum Lunae obſcurum - -	9. 34. 8
	obſeruatio inſtituta coelo vaporoſo, attamen bona videbatur; ſed circa determinationem temporis veri adeſt aliqua incertitudo, quia in motum penduli exacte inquirere ob dies nubilos non licuit.	
$\frac{10}{21}$ Apr.	Celeno occultari videbatur ad limbum Lunae obſcurum - - - -	8. 42. 52
	Electra - - - -	8. 52. 44
	obſeruationes hae factae prope horizontem, et ob nubem aliquantum dubiae, praeſertim poſterior.	
$\frac{1}{12}$ Maii	Occultationem Iouis nubes obſeruare impedierunt; emerſionem vero bene obſeruaui ſequentem in modum:	
	primum Iouis indicium ex parte limbi obſcuri Lunae - - - -	16. 12. 17½
	planeta totus emerſus - - -	16. 13. 42½
	Figura Iouis cernebatur elliptica, diameter ad ſenſum horizontalis maior erat verticali; ſatellites ob diluculum iam intenſum videre non potui.	

$\frac{12}{23}$ Maii

		Temp. ver. h.	'	''
$\frac{12}{23}$ Maii	Occultatio fixae in constellatione Cancri μ praecedentis ad limbum Lunae obscurum - - -	11.	19.	12
	obseruatio peracta prope horizontem, et ob nubeculam tenuem subdubia.			
$\frac{3}{14}$ Iunii	Immersio 3ii satellitis Iouis			
	Satelles vix videtur - - - -	13.	0.	41
	Immersio certa - - - - -	13.	1.	9
	coelo sereno, Ioue bene terminato, fasciis mediocriter conspicuis.			
$\frac{8}{19}$ Iun.	Immersio 1^{mi} satellitis			
	Lumen satellitis valde imminutum -	12.	46.	55
	Immersio certa - - - -	12.	47.	10
	Coelo admodum fauente fasciae satis bene discernebantur; obseruatio bona.			

Ex hac vltima obseruatione, collata cum momento ephemeridum, prodit differentia meridianorum inter Parisios et Tanbow $2^h. 37'. 41''$,

adeoque praeuia Longitudo a meridiano primo statui interim potest. $59°. 25'$.

Declinationem acus ex repetitis obseruationibus inueni $5\frac{3}{4}$ gr. ad occasum.

DE SITV GEOGRAPHICO VRBIS KALVGAE, DEDVCTO EX OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS ANNO 1784 FACTIS.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Verificatione quadrantis bis instituta per altitudines stellarum fixarum ad Boream et Austrum captas, inveni errorem subtractiuum 3'. 6'', qui cum bene congruat cum errore in vrbe Tanbow reperto; hinc retinui pristinum errorem, quo altitudines fixarum et Solis iam mulctatas sisto: in computu declinationis solis soppono differentiam meridianorum inter Parisios et Kalugam 2¼ horarum. En ipsas obseruationes et calculos:

Dies

Altitudines fixarum meridianae.

Dies obs. St. nou.	Nomina fixarum.	Altitudines Fixarum.	refract.	Declinatio apparens.	Latitudo.
12 Iul.	α Lyrae	74°. 5'.56"	0'. 19"	38°.35'.45"	54°.30'. 8"
	β - -	68 38 26	25½	33 7 49	29 48½
	δ - -	72 9 0	22	36 38 27	29 49
	γ - -	67 54 56	27	32 24 40	30 11
13 Iul.	α Lyrae	74 5 58	0 19	38 35 45½	30 6½
	β - -	68 38 28	25½	33 7 49½	29 47
	δ - -	72 8 59	22	36 38 27	29 50
	γ - -	67 54 56	27	32 24 40½	30 11½
14 Iul.	α Ophiuch.	48 14 56	0 59½	12 14 17	30 20½
	β - -	40 11 37	1 18	4 40 43	30 24
	γ - -	38 19 42	1 24	2 48 35	30 17
	θ Hercul.	72 48 14	0 20½	37 17 41½	29 48
	α Lyrae	74 6 10	0 19	38 35 46	29 55
	β - -	68 38 28	0 25½	33 7 50	29 47½
	δ - -	72 9 2	0 22	36 38 27½	29 47½
	γ - -	67 54 56	0 27	32 24 40½	30 11½
22 Iul.	α Lyrae	74 6 9	0 19	38 35 48	29 58
	β - -	68 38 26	25½	33 7 51	29 50½
	δ - -	72 9 0	22	36 38 29½	29 51½
	γ - -	67 54 53	27	32 24 42½	30 16½
23 Iulii	α Lyrae	74 6 6	19	38 35 48	30 1
	β - -	68 38 25	25½	33 7 51	29 51½
	δ - -	72 9 4	22	36 38 29½	29 47½
	γ - -	67 55 0	27	32 24 42½	30 9½
			Medium - -		54. 30. 0

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſ. St. noui	altit. limb. ſuperioris.	refr. – par.	½ Diam. ☉lis	declinatio ☉lis.	Eleuatio poli.
13 Iulii	57°.31'. 3''	0'.38''	15'.47''	21°.44'.54''	50°.30'.16''
14	57 22 12	—	- -	21 35 44	29 57
15	57 12 36	—	- -	21 26 11	30 0
18	56 42 9	0 39	- -	20 55 25	29 42
19	56 31 9	—	- -	20 44 26	29 43
23	55 43 49	40	15 47½	19 57 3½	29 42
29	54 22 47	42½	48	18 36 6½	29 50
30	54 8 16	43	48½	18 21 31	29 46½
31	53 53 11	—	- -	18 6 37	29 57½
1 Aug.	53 38 11	43½	49	17 51 26½	29 48
2	53 22 32	44	- -	17 35 57	29 58
3	53 6 51	45	- -	17 20 11	29 54
4	52 50 37	—	- -	17 4 7	30 4
5	52 34 24	46	- -	16 47 49	30 0
6	52 18 0	—	49½	16 31 13	29 48½
7	52 1 11	47	50	16 14 21	29 47
8	51 43 55	47½	- -	15 57 13½	29 56
9	51 26 11	48	- -	15 39 51	30 18
10	51 8 49	49	- -	15 22 13	30 3
13	50 14 26	50½	50½	14 27 51½	30 7
16	49 18 0	51½	51	13 31 25	30 7½
19	48 19 42	54	52	12 33 2	30 6
22	47 19 38	56	52½	11 32 52	30 2½
23	46 59 17	0. 56½	15 52½	11 12 26	29 58

medium ex 24 obſeru. 54 29 57

Ex his abunde patet latitudinem vrbis Kalugae tuto ſtatui poſſe 54°. 30'. Ob-

Obſeruationes pro Longitudine eiusdem vrbis.

	Temp. verum.
$\frac{1}{12}$ Iul. Immerſio 1^{mi} ſatellitis Iouis -	$12^h. 28'. 37^s.$ (*)
Obſeruatio haec ob nubeculas tenues in regione Iouis vagantes aliquantum dubia.	
$\frac{3}{14}$ Iul. Immerſio 2^{di} ſatellitis.	
Lumen ſatellitis valde imminutum -	12. 34, 54.
Immerſio certa - - - - -	12. 35. 24.
Coelo fauente, 3. faſciae ſatis diſcernebantur, figura Iouis bene terminata; altitudo planetae poſt obſeruationem erat 19°. 7'.	
$\frac{6}{17}$ Iul. Immerſio 4^{ti} ſatellitis - -	12. 23. 0.
Coelo aliquantum vaporoſo faſciae non diſtincte apparebant.	
$\frac{16}{27}$ Iul. Immerſio 3^{ii} ſatellitis.	
Satelles vix perceptibilis - - -	12. 36. 10.
Immerſio certa - - - - - -	12. 36. 20.
Coelo ſereno et pacato faſciae ſatis viſibiles, obſeruatio bona: altitudo planetae erat 23°.	
$\frac{17}{28}$ Iul. Immerſio 1^{mi} ſatellitis.	
Satelles immergi videbatur - -	10. 44. 20.
Immerſio totalis - - -	10. 44. 35.
Aëre non nihil vaporoſo faſciae mediocriter apparebant; altitudo Iouis erat 14°.	

14 Iul.
4 Aug.

		Temp. verum.
24 Iul. / 4 Aug.	Immerſio 1^{mi} ſatellitis videbatur -	12. 39. 40.
	Obſeruatio haec ob nubeculas per totum coelum diſperſas ſubdubia.	
27 Iul. / 7 Aug.	Occultatio ε Arietis ad limbum Lunae lucidum. - - - - -	12. 34. 14.
	Emerſio eiusdem ad limbum obſcurum.	13. 21. 4.
	Coelo fauente, obſeruatio bona.	
28 Iul. / 8 Aug.	Immerſio 2^{di} ſatellitis - -	9. 43. 50. (*)
	Coelo vaporoſo faſciae dubie videbantur.	
31 Iul. / 11 Aug.	Immerſio 1^{mi} ſatellitis.	
	Lumen ſatellitis valde imminuitur -	14. 34. 0.
	occultari videbatur - - -	14. 34. 40.
	Immerſio totalis - - - -	14. 35. 3.
	Coelo ſereno, altitudo planetae 21°. 5'.	
4/15 Aug.	Immerſio 2^{di} ſatellitis	
	Satelles vix perceptibilis - -	12. 21. 34.
	Immerſio totalis - - - -	12. 22. 31.
	Satelles lumine valde imminutus prope diſcum Iouis occultabatur, coelo quidem ſereno ſed vaporoſo, faſciae minus diſtincte repreſentabantur; altitudo planetae, 10 minutis elapſis, erat 24°. 15$\frac{1}{2}$'.	

Facta comparatione obſeruationum primi et ſecundi ſatellitum cum momentis ephemeridum, (exceptis duabus aſteriſco notatis), prodit differentia meridianorum inter Pariſios et Kalugam 2^h. 14'. 34''.

Declinationem acus magneticae ex repetitis obſeruationibus inueni 7$\frac{3}{4}$° occidentem verſus.

Ani-

Animaduersio in Longitudinem Kalugae.

Die $\frac{15}{27}$ Iulii Imm. III. Sat.	12^h.	$12'$.	$53''$.	Petrop.
	12.	36.	20.	Kalugae.
Differ. merid.	0.	23.	27.	
Longit. Petr. a Parisiis	1.	51.	58.	
Longitudo Kalugae	2.	15.	25.	

Die $\frac{31\ \text{Iulii}}{11\ \text{Aug.}}$ Imm. I. Sat.	14.	12.	2.	Petrop.
	14.	35.	3.	Kalug.
Diff. merid.	0.	23.	1.	
	1.	51.	58.	
Longit. Kalugae	2.	14.	59.	

Cum determinatio posterior praeferenda sit priori, Longitudo Kalugae a Meridiano Parisino computata statui poterit rotunde 2^h. $15'$. $0''$: donec aliae obseruationes cum correspondentibus collatae diuersum quid suadere videantur.

Rumovsky.

Comparatio quarundam obseruationum circa Immersiones I. Satellitis Iouis, Petropoli et Kalugae factarum pro determinanda Longitudine huius vrbis.

Die 12 Iulii St. Nov. Kalugae obseruata est Immersio I.

	12^h.	$28'$.	$37''$	Temp. ver.
eadem Petropoli obseruata	11.	6.	56	
Differentia meridianorum		21.	41.	

Quum

Quum obſeruatio Kalugae facta dubia ſit, igitur huic concluſioni non magnopere fides adhiberi poteſt.

Die 28. Iulii Immerſio I. Kalugae	10^h.	$44'$.	$35''$	Temp. vero
Petropoli	10.	21.	47,	
Differentia meridianorum		22.	48.	
Die 11. Aug, Immerſio I. Kalugae	14.	35.	3.	
Petropoli	14.	11.	56.	
Differentia meridianorum		23.	7.	

Hinc medio capto inter binas vltimas concluſiones, fit differentia Meridianorum $22'$. $58''$; ſuppoſita igitur Longitudine Petropolis a Lutetiis Pariſiorum 1^h. $51'$. $58''$, erit Longitudo Kalugae 2^h. $14'$. $56''$ in tempore, ſeu ſi placet numero rotundo 2^h. $15'$. $0''$. Vnde Longitudinem vrbis Kalugae a meridiano primo ſine ſenſibili errore ſtatuere licebit 53°. $45'$.

Lexell.

SVP-

SVPPLEMENTVM IN DISSERTATIONEM DE MOTV COMETARVM EX TRIBVS OBSERVATIONIBVS DETERMINANDO.

Auctore
NICOLAO FVSS.

§. 1.

In Dissertatione *De motu cometarum ex tribus obseruationibus determinando*, quam anno proxime praeterlapso conuentui academico praelegi, quaeque Actorum Tomo IV. Parti 2ae. inserta fuit, quaedam manca, nec satis concinne alia quaedam exposita mihi hoc argumentum denuo perpendenti visa sunt.

Primo enim determinatio areae a cometa descriptae ex duabus cometae a Sole distantiis et angulo percurso petita, etiam omnibus calculi compendiis artificiisque adhibitis, valde operosa euaserat. Tum vero temporis determinatio, ex valore areae descriptae petita, relationi innitebatur in Theoria quidem motus planetarum satis notae, cuius autem demonstratio succincta ibi merito desiderari potest. Denique quo argumenti suscepti tractatio magis completa fieret, etiam

 consi-

considerari debuisset motus cometae, cuius orbita parabolica in ipsum planum eclipticae incidit. Huic triplici defecto sequentibus problematibus heic occurrere mecum constitui.

Problema I.

Tab. V. Fig. 2. §, 2. *Datis duabus cometae a sole distantiis* $FS = f$ *et* $GS = g$, *vna cum angulo intercepto* $FSG = \theta$, *inuenire aream sectoris parabolici* $FSG = \Delta$.

Solutio.

Sit Π vertex parabolae, siue perihelium cometae, positaque eius distantia a Sole $\Pi S = p$, erit parameter huius parabolae $= 4p$; vnde si ex puncto F ad axem ΠB demittatur perpendiculum FP, posita abscissa $\Pi P = x$ et applicata $PF = y$ erit ex natura parabolae $yy = 4px$ et $y = PF = 2\sqrt{px}$. Hinc autem fiet area

$$\Pi PF = \int y\,dx = 2\sqrt{p}\int dx\sqrt{x} = \tfrac{4}{3}x\sqrt{px}.$$

Cum autem sit

$$FS = \sqrt{(PS^2 + PF^2)} = \sqrt{((x-p)^2 + 4px)},$$

erit $FS = f = x + p$, ideoque $x = f - p$, vnde fit area

$$\Pi PF = \tfrac{4}{3}(f-p)\sqrt{(fp - pp)}.$$

Hinc subtrahi debet area trianguli $SPF = \tfrac{1}{2}PF.PS$, quae est

$$SPF = (x-p)\sqrt{px} = (x-p)\sqrt{(pf - pp)},$$

qua sublata remanebit area ΠSF, scilicet

$$\Pi SF = \tfrac{1}{3}(f + 2p)\sqrt{(pf - pp)}.$$

Quodsi iam punctum alterum G simili modo tractetur, demissa applicata GQ et factis reliquis operationibus

vt

vt supra, inuenitur area

$$\Pi S G = \tfrac{1}{3}(g + 2p)\sqrt{(pg - pp)},$$

a qua si subtrahatur

$$\Pi S F = \tfrac{1}{3}(f + 2p)\sqrt{(pf - pp)},$$

habebitur area sectoris parabolici quaesita

$$F S G = \Delta = \tfrac{1}{3}(g + 2p)\sqrt{(pg - pp)} - \tfrac{1}{3}(f + 2p)\sqrt{(pf - pp)}.$$

Cum autem distantia perihelii $\Pi S = p$ non detur, necesse est vt eius loco angulus cognitus $F S G = \theta$ introducatur, quod sequenti modo commodissime praestabitur. Ponatur angulus $F S B = \Phi$, ita vt $G S B = \Phi - \theta$, eritque

$$\text{fin. } \Phi = \frac{PF}{SF} = \frac{2\sqrt{(pf - pp)}}{f},$$

$$\text{cof. } \Phi = \frac{f - 2p}{f}$$

$$\text{fin. } (\Phi - \theta) = \frac{QG}{SG} = \frac{2\sqrt{(pg - pp)}}{g},$$

$$\text{cof. } (\Phi - \theta) = \frac{g - 2p}{g},$$

vnde ob

$$\text{fin. } \Phi \text{ cof. } (\Phi - \theta) - \text{cof. } \Phi \text{ fin. } (\Phi - \theta) = \text{fin. } \theta \text{ erit}$$

$$\text{fin. } \theta = \frac{2(g - 2p)\sqrt{(pf - pp)}}{fg} - \frac{2(f - 2p)\sqrt{(pg - pp)}}{fg}.$$

Tum vero etiam nosse iuuabit fin. $\tfrac{1}{2}\theta$, qui ob

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{1 - \text{cof. } \Phi}{2}},$$

consequenter:

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{p}{f}}, \qquad \text{fin. } \tfrac{1}{2}(\Phi - \theta) = \sqrt{\frac{p}{g}}$$

$$\text{cof. } \tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{f - p}{f}}, \quad \text{cof. } \tfrac{1}{2}(\Phi - \theta) = \sqrt{\frac{g - p}{g}}$$

hoc modo exprimitur:

$$\text{fin. } \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{(pg - pp)} - \sqrt{(pf - pp)}}{\sqrt{fg}}.$$

Quod

Quodsi nunc a triplo areae F S G, quod est

$$3\Delta = (g+2p)\sqrt{(pg-pp)} - (f+2p)\sqrt{(pf-pp)},$$

auferatur

$$\tfrac{1}{2}fg\,\text{sin.}\,\theta = (g-2p)\sqrt{(pf-pp)} - (f-2p)\sqrt{(pg-pp)},$$

remanebit

$$3\Delta - \tfrac{1}{2}fg\,\text{sin.}\,\theta = (f+g)(\sqrt{pg-pp} - \sqrt{pf-pp}).$$

Est vero

$$\sqrt{(pg-pp)} - \sqrt{(pf-pp)} = \sqrt{fg}\,.\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\theta,$$

ideoque

$$3\Delta - \tfrac{1}{2}fg\,\text{sin.}\,\theta = \sqrt{fg}\,.\,(f+g)\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\theta,$$

consequenter area

$$FSG = \Delta = \tfrac{1}{3}(f+g)\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{fg} + \tfrac{1}{6}fg\,\text{sin.}\,\theta.$$

quae expressio cum illa in dissertatione memorata per multas ambages inuenta prorsus congruit.

Corollarium 1.

§. 3. Si fuerit $g = 2f$ et angulus $\theta = 90°$, hic casus est quo punctum F reperitur in ipso perihelio, seu vertice parabolae Π, recta autem SG est applicata in foco parabolae. Hoc igitur casu erit area $\Delta = \tfrac{4}{3}ff$, vti requiritur.

Corollarium 2.

Tab. V. Fig. 3. §. 4 Casus etiam memoratu dignus prodit, quando angulus $FSG = \theta$ statuitur duobus rectis aequalis. Hoc enim casu ambo radii vectores SG et SF in directum iacebunt et Δ denotabit aream segmenti parabolici FΠGS recta per focum S ducta abscissi; ista autem area erit

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(f+g)\sqrt{fg}.$$

§. 5.

Corollarium 3.

§. 5. Quodsi ex datis nostris elementis f, g et θ insuper quaeratur semiparameter parabolae, ad quam sector propositus F S G pertineat, id commode praestabi tur hoc modo. Ex valoribus supra pro sinubus et cosinubus angulorum $\frac{1}{2}\Phi$ et $\frac{1}{2}(\Phi-\theta)$ inuentis quaeratur

$$\cos.\tfrac{1}{2}\theta = \cos.\tfrac{1}{2}\Phi \cos.\tfrac{1}{2}(\Phi-\theta) + \sin.\tfrac{1}{2}\Phi \sin.\tfrac{1}{2}(\Phi-\theta),$$

erit

$$\cos.\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{((f-p)(g-p))}+p}{\sqrt{fg}},$$

vnde deducitur

$$\sqrt{fg}\,.\cos.\tfrac{1}{2}\theta - p = \sqrt{(f-p)(g-p)},$$

quae aequatio dat quartam partem parametri, siue distantiam perihelii

$$p = \frac{fg \sin.\tfrac{1}{2}\theta^2}{f+g-2\sqrt{fg}\,.\cos.\tfrac{1}{2}\theta}.$$

Corollarium 4.

§. 6. Inuento hoc valore etiam ipsa positio axis parabolae ΠB respectu sectoris dati F S G immediate ex cognitis f, g, θ definiri poterit. Erit enim $\sin.\frac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{p}{f}}$, ideoque

$$\sin.\tfrac{1}{2}\Phi = \sin.\tfrac{1}{2}\theta \sqrt{\frac{g}{f+g-2\cos.\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{fg}}}.$$

Problema II.

§. 7. *Definire veram relationem inter aream cuiusque orbitae a planeta siue a cometa circa solem descriptae et ipsum tempus quo haec area describitur.*

Solutio.

Primo constitui debet certa mensura, qua tempora metiri voluerimus. Vtamur igitur hunc in finem motu medio solis et mensuremus tempus quodcunque per angulum, quo sol motu medio interea fuerit promotus. Hunc autem angulum non per gradus et minuta, sed in partibus radii exprimamus, ita vt totum tempus periodicum solis, seu spatium interuallo anni percursum exprimatur per 2π.

Denotet porro c distantiam mediam solis a terra, ita vt area totius circuli a sole descripti sit $= \pi c c$. Assumimus enim hic terram circa solem circulum describi, cuius radius $= c$, quandoquidem in temporibus dimetiendis motum tanquam medium spectamus.

Tab. V Fig. 4. Consideremus iam orbitam planetae cuiusque primarii ellipticam A D F G B, cuius semiaxis transuersus seu maior $CA = CB = a$ et excentricitas $= \varepsilon$, ita vt sit distantia solis a centro ellipsis $CS = \varepsilon a$, eritque semiaxis conjugatus $CD = a\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon)}$ et semiparameter, quem vocemus $= b = 2p = a(1 - \varepsilon\varepsilon)$.

Consideremus porro in hac orbita elliptica sectorem quemcunque F S G, cuius area $= \Delta$, sitque tempus, quo iste sector a planeta conficitur, modo supra indicato exprimendum $= \Theta$. Iam quia nouimus tempora areis esse proportionalia, erit $\Theta = m\Delta$, existente m quantitate certa constante, et nunc res eo redit, vt haec quantitas m pro ratione mensurae temporum rite assignetur.

Iam

Iam conſtat quadrata temporum periodicorum circa ſolem abſolutorum tenere inter ſe rationem triplicatam axium tranſuerſorum ſiue diſtantiarum mediarum a ſole; vnde tempus periodicum noſtri planetae ſe habebit ad tempus periodicum terrae, quod vidimus eſſe 2π, vt $a\sqrt{a}$ ad $c\sqrt{c}$, ita vt hoc tempus periodicum ſit $\frac{2\pi a\sqrt{a}}{c\sqrt{c}}$.

Extendatur nunc ſector F S G per totam ellipſin, eritque

$$\Delta = \pi . CA . CD = \pi a a \sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)},$$

et ob $\Theta = \frac{2\pi . a\sqrt{a}}{c\sqrt{c}}$ erit quantitas illa

$$m = \frac{\Theta}{\Delta} = \frac{2}{c\sqrt{a}\, c\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}},$$

ſiue $m = \frac{2}{c\sqrt{bc}}$, ob $b = a(1-\varepsilon\varepsilon)$. Relatio ergo inter aream quamcunque Δ et tempus illi reſpondens Θ ita definitur, vt ſit $\Theta = \frac{2\Delta}{c\sqrt{bc}}$.

Corollarium 1.

§. 8. Pro Cometa igitur noſtro in orbita parabolica, cuius ſemiparameter

$$2p = \frac{2fg\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta^2}{f+g-2\sqrt{fg}\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta},$$

delato, tempus quo aream ſectoris F S G percurrit erit

$$\Theta = \frac{\Delta\sqrt{2}}{c\sqrt{cp}} = \frac{\Delta\sqrt{2}}{c\sqrt{c}} . \frac{\sqrt{(f+g-2\sqrt{fg}.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta)}}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{fg}},$$

hoc eſt

$$\Theta = \frac{\sqrt{2}}{3c\sqrt{c}}(f+g+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{fg})\sqrt{(f+g-2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{fg})}.$$

Corollarium 2.

§. 9. Ponatur hic iterum angulus $FSG = \theta = 180^\circ$, eritque $\Theta = \frac{\sqrt{2}}{3c\sqrt{c}}(f+g)^{\frac{3}{2}}$, quae expreſſio ideo potiſſimum notatu digna eſt, quod ex ea diſtantia nodorum F G tam ſimpliciter per ſolum tempus, quo cometa ex F in G peruenerit, exprimatur. Eſt enim

$$FG = (f+g) = c\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta},$$

ita vt eius ratio ad diſtantiam mediam terrae a ſole detur.

Problema III.

Tab V. Fig. 5.

§. 10. *Cognita tam poſitione axis orbitae* ΠV, *quam diſtantia perihelii a Sole* ΠS, *ex qualibet cometae obſeruatione eius locum in ſua orbita determinare.*

Solutio.

Sit pro tempore obſeruationis terra in T et cometa in Z, et quia cometa obſeruatur in directione T Z, dabitur diſtantia Terrae a ſole $ST = a$; diſtantia perihelii $\Pi S = p$, angulus $\Pi ST = \alpha$ et angulus $STZ = \zeta$. Ex natura autem parabolae, poſito eius ſemiparametro $2 . \Pi S = 2p = b$ et anomalia ſiue angulo $\Pi SZ = \Phi$, erit diſtantia cometae a Sole $SZ = \frac{b}{1 + cof. \Phi}$.

Nunc ex triangulo S T Z habebimus:

$ST : fin. SZT = SZ : fin. STZ.$

Cum igitur ſit $\Pi ST = \alpha$ et $\Pi SZ = \Phi$, erit $ZST = \alpha - \Phi$ ideoque

SZT

$$SZT = 180° - ZST - ZTS = 180° + \Phi - \alpha - \zeta.$$

vnde si ponatur $\alpha + \zeta = \beta$, ita vt angulus externus $TZY = \beta - \Phi$, nostra analogia erit

$$a : \sin. (\beta - \Phi) = \frac{b}{1 + \cos. \Phi} : \sin. \zeta,$$

quae praebet

$$a \sin. \zeta = \frac{b \sin. (\beta - \Phi)}{1 + \cos. \Phi},$$

ex qua aequatione angulum Φ definiri oportet.

Hunc in finem repraesentetur aequatio modo inventa sub hac forma, euoluendo $\sin. (\beta - \Phi)$:

$$a \sin. \zeta = \cos. \Phi (b \sin. \beta - a \sin. \zeta) - \sin. \Phi . b \cos. \beta;$$

et nunc quaeratur angulus θ, ita comparatus vt sit

$$\text{tang.}\ \theta = \frac{b \cos. \beta}{b \sin. \beta - a \sin. \zeta},$$

quo inuento habebitur

$$b \sin. \beta - a \sin. \zeta = \frac{b \cos. \beta}{\text{tang.}\ \theta}.$$

Quodsi iam hic valor in nostra aequatione substituatur, ea hanc induet formam:

$$a \sin. \zeta = \frac{b \cos. \beta \cos. \Phi}{\text{tang.}\ \theta} - b \cos. \beta \sin. \Phi,$$

siue erit

$$a \sin. \zeta = \frac{b \cos. \beta \cos. (\theta + \Phi)}{\sin. \theta}.$$

Cum autem ex assumto valore

$$\text{tang.}\ \theta = \frac{b \cos. \beta}{b \sin. \beta - a \sin. \zeta}$$

habeamus:

$$a \sin. \zeta = \frac{b \sin. \beta\ \text{tang.}\ \theta - b \cos. \beta}{\text{tang.}\ \theta} = - \frac{b \cos. (\beta + \theta)}{\sin. \theta},$$

his valoribus inter se comparatis nanciscimur hanc aequalitatem:

$$\cos.\,\beta \cos.\,(\theta + \Phi) = - \cos.\,(\beta + \theta),$$

ex qua anomaliam quaesitam Φ facillime ex solis angulis β et θ datis determinatur, cum sit

$$\cos.\,(\theta + \Phi) = - \frac{\cos.\,(\beta + \theta)}{\cos.\,\beta}.$$

Scholion 1.

§. 11. Inuento hoc angulo Φ statim habebitur distantia cometae a Sole $SZ = \frac{b}{1 + \cos.\,\Phi}$, quae si breuitatis gratia dicatur $SZ = f$, erit secundum solutionem primi problematis area sectoris

$$\Pi SZ = \tfrac{1}{3}(f + b)\sqrt{(\tfrac{1}{2}fb - \tfrac{1}{4}bb)}.$$

Quod si iam statuamus tempus, quo cometa a perihelio Π vsque in punctum Z peruenit, quodque per motum medium Solis experimendum est, $= \Theta$, habebitur haec aequatio:

$$\tfrac{1}{4}(f + b)\sqrt{(\tfrac{1}{2}fb - \tfrac{1}{4}bb)} = \tfrac{1}{2}\Theta c \sqrt{bc},$$

vbi c denotat distantiam mediam terrae a sole, hinc per $\sqrt{b}$ diuidendo erit

$$\tfrac{1}{3}(f + b)\sqrt{(\tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{4}b)} = \tfrac{1}{2}\Theta c \sqrt{c},$$

vnde fit tempus

$$\Theta = \frac{(f + b)\sqrt{(2f - b)}}{3c\sqrt{c}}.$$

Scholion 2.

§. 12. Quodsi hoc modo tres obseruationes fuerint computatae, quibus cometa fuerit in punctis F, G, H, ex areis ΠSF, ΠSG, ΠSH reperientur tempora Θ, Θ', Θ'', quibus cometa ex perihelio Π peruenerit in F, G, H. Et quia interualla temporum inter obseruationes dantur,

dantur, ſcilicet tempus quo interuallum F G abſoluitur $= t$ et tempus ab F ad H $= t'$, habebuntur iſtae binae aequationes:

$$\Theta' - \Theta = t; \ \Theta'' - \Theta = t',$$

quae ſi cum veritate conueniant, id indicio erit tam poſitionem axis orbitae quam diſtantiam perihelii rite eſſe aſſignatam. Sin autem hae determinationes cum veritate non conueniant, inſuper binae hypotheſes fingantur neceſſe eſt, quarum altera axis poſitio, altera vero diſtantia perihelii a ſole parumper immutatur. Tum enim, ſi pro tribus hypotheſibus errores in temporibus reperti probe perpendantur, facile definietur quantum tam poſitio axis quam perihelii diſtantia immutari debeant, vt cum veritate penitus conueniant. Tota igitur inueſtigatio eo reducitur, vt ex aliquibus obſeruationibus ſaltem vero proxime tam poſitio axis quam diſtantia perihelii cognoſcantur.

OB-

OBSERVATIONS ASTRONOMIQVES FAITES PRÈS DE GENEVE

par

J. A. MALLET.

Membre de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Les obſervations aſtronomiques que j'ai l'honneur de préſenter ici à l'Académie, ont été faites à Avully, près de Genève, maiſon de campagne où j'ai établi depuis peu mon obſervatoire. La ſituation de ce lieu que nous avons déterminée Mr. *Marc Pictet* & moi par des obſervations trigonométriques, eſt de 1720 Toiſes de France plus méridionale & 5970 Toiſes plus occidentale que l'obſervatoire de Genève. En ſuppoſant la Longitude de celui-cy de 15′ : 0″ de temps à l'orient de Paris, comme je l'avois déduite cy-devant d'un aſſez grand nombre d'éclipſes de ſatellites de Jupiter comparées avec les correſpondantes obſervées à Paris par Mr. *Meſſier*, & ſa Latitude de 46°. 12′. 00″: je trouve la Longitude de l'obſervatoire d'Avully de 14′ : 24″ de tems à l'orient de Paris, & la hauteur du Pole de 46°. 10′. 10″; cette Hauteur du Pôle ainſi déduite de la diſtance de Genève s'accorde parfaitement avec celle que j'ai trouvée immédiatement par des obſervations Aſtronomiques.

1°. Oc-

1°. Occultations d'étoiles par la Lune.

Le 10 Juillet 1783. J'obſervai l'Immerſion de l'étoile π du ſcorpion, ſous le disque obſcur de la Lune
à - - - - - - $8^h.\ 36'.\ 58'',4$
& l'Emerſion de deſſous la partie éclairée à - $9.\ 19.\ 4,2$ } Temps vrai

Je crois ces deux obſervations très-bonnes.

Le 9 Septembre 1783. Pendant que la Lune étoit totalement éclipſée, j'obſervai l'occultation d'une petite étoile du verſeau à - - $12^h.\ 9'.\ 37'',7$ T. vrai

Le 16 Novembre 1784. Ayant dirigé ma lunette ſur la Lune, je vis une petite étoile qui étoit dans le cas d'être éclipſée, & en effet j'obſervai enſuite ſon Immerſion ſous la partie obſcure à - $5^h.\ 53'.\ 18'',3$ T. vrai

Cette obſervation eſt excellente, parceque la partie éclairée étant peu conſidérable, je pouvois faire enſorte qu'elle ne fût point du tout dans le champ de la lunette. Je n'ai pas trouvé cette étoile dans les Catalogues, elle doit être peu éloignée de ψ du Sagittaire.

Ces trois obſervations ont été faites avec une lunette achromatique à triple objectif de $3\frac{1}{2}$ pieds, & un oculaire qui la fait groſſir 70 fois.

2°. Eclipſes des ſatellites de Jupiter.

Année	Mois & Jours	Tems vrai à Avully.	Les obſervations ſuivantes ont été faites avec la même lunette de $3\frac{1}{2}$ pieds; l'oculaire N°. 1 la fait groſſir environ 125 fois, & le N°. 2,70 fois.
1783	Juillet 8	12°.38'.45".	Immerſ. du 1r. ſat. (ocul. N°. 1). très-bonne obſervation.
	Aouſt. 9	11 19 58	Emerſ. du 1r. (ocul. N°. 1.). très-bonne, temps ſerein.
	Septbre 9	8 12 25	Emerſ. du 2d. (ocul. N°. 1). aſſez bonne, malgré le temps vaporeux & le clair de la lune.
	16	10 50 56	Emerſ. du 2d. (N°. 1). obſervation médiocre, le diſque mal terminé, vapeurs.
	17	10 15 46	Emerſ. du 1r. (N°. 1). aſſez bonne, quoiqu'il y eût des vapeurs, & le diſque mal terminé.
	Octobre 3	8 41 15	Emerſ du 1r N°.1) bonne obſerv., on voyoit bien les bandes.
1784.	Juillet. 14	10 34 53	Immerſ. du 2d. (N°. 2) par Mr. Marc Pictet, aſſez bonne, quoique Jupiter ſoit bas.
	17	10 23 57	Emerſ. du 4e. (N°. 2) bonne obſ., quoique Jupiter ſoit peu élevé.
	Aouſt. 11	12 34 40	Immerſ du 1r. (N°.2) très-bonne, on voyoit diſtinctement trois bandes.
	15	10 22 43	Immerſ. du 2d. (N°. 2) temps très-ſerein, obſerv. aſſez bonne, quoique le ſatell. ſoit très près de Jupiter.
	Septbre 9	10 24 8	Emerſ. du 2d. (N°. 2) le ſatell. très près de Jupiter, l'obſervation eſt aſſez bonne.
	12	11 34 34	Emerſ. du 1r. (N°. 2) très-bonne.
	22	6 55 48	Immerſ. du 4e. (N°. 2) c'eſt l'heure où j'ai ceſſé de le voir, car il entre ſi lentement dans l'ombre que l'inſtant de la diſparition eſt douteux.
	—	11 23 20	Emerſ. du 4e. douteuſe, à cauſe du brouillard, J'ai revu le ſatellite au moment marqué dans un éclairci, ſa lumière étoit aſſez foible pour que je croye que la véritable Emerſion a eu lieu bien peu de temps avant mon obſervation.
	Octobre 5	11 57 4	Emerſ. du 1r. (N°. 2) très-bonne obſervation.
	Novem. 12	10 1 58	Emerſ. du 2d. (N°. 2) paſſable, le diſque étoit un peu tremblant, il faiſoit un vent violent.
	22	6 59 59	Emerſ. du 1r. (N°. 2) très-bonne, temps très-ſérein.
	Decem. 15	6 33 31	Emerſ. du 4e. (N°. 2 obſervation un peu douteuſe, à cauſe du brouillard qui ne me permettoit de voir les bandes que de temps en temps.

3°. E-

3°. Eclipse de lune le 9 Septembre 1783.

J'ai fait cette obſervation avec la même lunette & l'oculaire N°. 2. Le ciel étoit aſſez nuageux, c'eſt pourquoi je n'ai pû obſerver la ſortie que d'un petit nombre de taches.

Tems vrai à Avully.	
10^h. 5'. 53''	Je crois que la pénombre a déja commencé.
— 13 53	Grimaldi eſt tout entré, douteuſe.
— 17 7	Ariſtarque entre dans l'ombre.
— 22 23	Mare humorum commence à entrer à peu près.
— 26 53	Copernic entre, & Mare humorum eſt toute dedans.
— 30 18	Bullialdus touche l'ombre.
— 33 53	Platon commence à entrer.
— 36 8	Pitatus entre.
— 36 53	Pitatus eſt tout dedans.
— 39 53	Mare ſerenitatis commence.
— 40 23	Manilius entre.
— 40 38	Tycho entre.
— 41 33	Manilius tout dedans.
— 41 53	Tycho tout dedans.
— 42 38	Eudoxe & Ariſtote ſont dedans.
— 47 54	Plinius touche l'ombre
— 49 9	Mare ſerenitatis toute dedans.
— 53 4	Promontor. acutum entre.
— 57 24	Proclus touche l'ombre.
— 58 54	Mare criſium entre.
11^h. 3. 54	Mare criſium toute dedans.

Les nuages m'ont empéché d'obſerver l'Immerſion totale avec exactitude, je crois qu'elle a eu lieu très-près de 11^h. 8. 54.

Tems vrai	
	La Lune éclipſée paroiſſoit à l'oeil un peu rougeatre, ce qu'on ne voyoit pas ſi bien avec la lunette: On a toujours pû voir ſon diſque & même ſes taches pendant l'obſcurité.
12^h.48'. 7''	Il ſemble que l'Emerſion commence, mais les nuages & vapeurs rendent cela douteux.
13 11 25	Tycho & Plato commencent à ſortir de l'ombre.
— 11 55	Plato eſt tout ſorti.
— 25 11	Menelaus ſort.
— 29 11	Plinius, un peu douteux.
— 30 26	Mare ſerenitatis à-peu-près toute dehors.
— 37 56	Mare criſium commence à ſortir.
— 43 56	Mare criſium toute dehors
13 48 —	a-peu-près la fin de l'éclipſe, très-douteuſe.

4°. Oppoſition de Saturne en 1784.

J'ai comparé cette Planète le 14, 15 & 16 Juillet à cinq étoiles ſituées près de ſon parallèle, ſavoir à δ du ſcorpion, à 2 ξ, o, π du ſagittaire, & à une autre petite étoile ſans nom du ſagittaire; les paſſages au méridien ont été obſervés aux trois fils d'une lunette méridienne achromatique de 4 pieds, & les hauteurs à un quart-de-cercle anglois de $2\frac{1}{2}$ pieds; Mr. *Pictet* prenoit les hauteurs tandis que j'obſervois les paſſages.

En déduiſant la déclinaiſon de Saturne par une moyenne entre les réſultats des différentes étoiles; j'ai vu que la petite étoile ſans nom, donnoit chaque jour une déclinaiſon d'environ 12 ſecondes plus petite que les autres, c'eſt pourquoi j'ai rejetté l'obſervation de cette étoile dont je préſume que la déclinaiſon tirée du catalogue de *Mayer* eſt de quelques ſecondes trop petite.

La marche de la Pendule déduite des paſſages des étoiles & du Soleil à la lunette méridienne pendant les trois jours, eſt qu'elle accélère ſur le Temps moyen de $11''$, 6 en 24 heures, & le 15 le midi vrai a été obſervé à $0^h. 8'. 33''$. de la Pendule.

5°. Oppoſition de Jupiter en 1784.

Nous obſervames cette Planète, Mr. *Pictet* & moi, le 26, 27, 28 & 30 Aouſt pour la comparer à λ du Capricorne, à ε, ν, σ & 3. ψ du verſeau; les réſultats m'ont fait voir que l'aſcenſion droite de ν du verſeau que j'ai tirée du Catalogue de *Bradley*, eſt d'environ 26 ſecondes

condes trop petite, j'en ai réjetté le réſultat en prenant la moyenne.

Le midi vrai déterminé le 28 par des Hauteurs correſpondantes du Soleil étoit à $0^h. 3'. 37'',9$ de la Pendule dont la marche étoit de retarder ſur le Temps moyen de $2'', 8$ en 24 heures.

L'étoile σ du verſeau ſe trouvant aſſez proche de Jupiter pour pouvoir employer un micromètre filaire adapté à la lunette achromatique de $3\frac{1}{2}$ pieds, nous fimes le 28 & le 30 quelques comparaiſons de la Planète à l'étoile avec cet inſtrument, j'ai réduit ces obſervations à une même époque, ſavoir à l'heure du paſſage de la Planète au méridien; le réſultat eſt ſi approchant de celui qui eſt déduit des obſervations au méridien, que j'ai cru devoir le joindre ici, comme un témoignage de leur exactitude.

Le 28 par 9 obſervations au micrométre	Aſcenſ. droite de ♃	334°. 55'. 31''
	Déclinaiſon -	11. 52. 25
Le 30 par 4 obſervations	Aſcenſ. droite -	334. 40. 36
	Déclinaiſon - -	11. 58. 2

6°. Oppoſition de la Planète d'Herſchel en 1785.

J'ai obſervé cette oppoſition avec les mêmes inſtrumens que les précédentes, mais comme j'etois ſeul, je n'obſervois les paſſages qu'au 1^r. & au 3^e fil de la lunette meridienne, & dans l'intervalle je prenois la hauteur au quart-de-cercle, la proximité de mes deux inſtrumens rendoit cela facile. Quoique je n'aye laiſſé échaper aucune nuit favorable depuis le 15 Décembre au 15 Janvier ſuivant par le froid le plus rigoureux, je n'ai pu cependant obſerver que trois fois pendant cet intervalle la Planète au méridien, le 25 & 29 Décembre, & le 5 Janvier, à cauſe du temps nébuleux très-ordinaire dans cette ſaiſon, & c'eſt à ce temps déſavorable que j'attribue les différences qui ſe trouvent entre les différens réſultats d'une même nuit, ſur-tout pour la déclinaiſon. La lumière de la Planète étoit extrèmement affoiblie, & diſparoiſſoit pour peu qu'on éclairat trop les fils de la lunette.

Le midi fut obſervé le 14 Dec^{bre} à 11^h.50$'$.57$''$,2 }
& le 21 - - à 11. 53. 56,8 } ce qui donne 4$''$

pour le retard de la Pendule ſur le Temps moyen en 24 heures; les paſſages d'étoiles donnent le même réſultat.

Le 2 Janvier la Pendule fut arrêtée par un accident & le midi vrai fut obſervé le 5 Janvier à 11^h.50$'$.40$''$,2, cet arrêt a un peu changé la marche de la Pendule; du 4 au 5 & du 5 au 8, elle a retardé de 5$''$,3 ſur le Temps moyen en 24^h.

Voyez à la fin une addition à cette obſervation.

Le détail des obſervations de ces trois oppoſitions, & leurs réſultats ſe trouvent dans les tableaux ſuivans qui ſont diſpoſés de manière à n'avoir beſoin d'aucune explication ultérieure.

et 1784 à Avully.

	Différences des hauteurs méridiennes observées.	Différences corrigées des effets de la réfract. & de la parallaxe.	Déclinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de la Caille.	Déclin. appar. de Saturne déduites des observat.	Obliquité de l'écl. employée dans le Calcul. 23°.27′58,7″
- -	0°. 0′. 0″	0°. 0′. 0″	Auſtrales.	Auſtrales.	
trale	0. 8.22	0. 8.23,9	21°.59′.45″,8	21°.51′.22″	
reale	0. 6. 4	0. 6. 3,8	21. 45. 8,6	21. 51.13	
r.	0. 28.52	0. 28.54,5	21. 22. 28,1	21. 51.23	
ıſtr.	0. 10.59	0. 11. 1,2	22. 2.29,3	21. 51.28	
reale	0. 30.20	0. 30.22,6	21. 21. 1,7	21. 51.24	
- -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
ıſtr.	0. 7.33	0. 7.34,9	- - - -	22. 52.11	
pr. -	0. 6.54	0. 6.53,9	- - - -	21. 52. 3	
pr. -	0. 29.38	0. 29.40,6	- - - -	21. 52. 9	
ıſtr.	0. 10.12	0. 10.14,1	- - - -	21. 52.15	
pr. -	0. 31. 8	0. 31.10,7	- - - -	21. 52.12	
- -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
uſtr.	0. 6.48	0. 6.49,8	- - - -	21. 52.56	
pr. -	0. 7.39	0. 7.39,0	- - - -	21. 52.48	
pr. -	0. 30.28	0. 30.30,7	- - - -	21. 52.59	
uſtr.	0. 9.26	0. 9.28,1	- - - -	21. 53. 1	
pr. -	0. 31.58	0. 32. 0,8	- - - -	21. 53. 2	

géoc. calc. ...s Tab. Halley.	Erreur des Tabl. de H. en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tabl. de Mayer.	Erreur en longit. helioc. des Tables au moment de l'oppoſition.	
′. 55″	−0′.24″	IIIˢ. 22°.59′.14″	de Halley -	−10′.36″
. 50	−0.19	III. 23. 56. 21	de Caſſini -	+ 9. 4
. 45	−0.15	III. 24. 53. 28	de d. l. Lande	+ 8.56

de Halley augmentées de l'errʳ. { 11′.48″ en long. géoc. / 10. 36 en long. hélioc.

- - - augmentées de l'errʳ. 0, 19 en latit. géoc.

Obſervations de Saturne près de ſon oppoſition-faites le 14, 15 & 16 Juillet 1784 à Avully.

1784.	Noms des étoiles.	Paſſages au mérid. en temps de la Pendule.	Différences des paſſages en Temps de la P.	Différences en Temps moyen.	Différences d'aſcenſ. droite.	Aſcenſ. droites app. des étoiles tirées de Bradley & de la Caille.	Aſcenſ. droites app. de Saturne déduites des obſervat.
Juillet	Saturne - -	11h.57′.28″,4	0h. 0′. 0″				
	δ du Scorpion	précédoit	3. 40. 8,6	3h.40′. 6″,8	55°.10′.44″,3	236°.54′.43″,6	292°. 5′.28″
14	Étoile du Sagitt.	précédoit	1. 26. 46,9	1. 26. 46,2	21. 45. 6,8	270. 20. 22,5	292. 5. 27
	2. ξ. du Sagitt.	précédoit	0. 43. 20,5	0. 43. 20,2	10. 51. 49,8	281. 13. 32,4	292. 5. 22
	ο. du Sagitt.	précéd.	0. 36. 28,2	0. 36. 27,9	9. 8. 28,3	282. 57. 1,8	292. 5. 30
	π. du Sagitt. -	précéd.	0. 31. 18,3	0. 31. 18,1	7. 50. 48,6	284. 14. 43,6	292. 5. 32
	Saturne - -	11h.53′.25″,7	0. 0. 0			comme cy-deſſus	
	δ. du Scorp. -	précédoit	3. 39. 49,9	3. 39. 48,1	55. 6. 3,5	- - - -	292. 0. 47
15	étoile du Sag.	précéd.	1. 26. 28,2	1. 26. 27,5	21. 40. 25,4	- - - -	292. 0. 48
	2. ξ. du Sagitt.	précéd.	0. 43. 2,0	0. 43. 1,7	10. 47. 11,4	- - - -	292. 0. 44
	ο. du Sagitt. -	préc.	0. 36. 9,4	0. 36. 9,1	9. 3. 45,6	- - - -	292. 0. 47
	π. du Sagitt. -	préc.	0. 30. 59,7	0. 30. 59,5	7. 46. 8,8	- - - -	292. 0. 52
	Saturne - -	11h.49′.23″,6	0. 0. 0			comme cy-deſſus	
	δ. du Scorp.	précédoit	3. 39. 31,4	3. 39. 29,6	55. 1. 24,8	- - - -	291. 56. 8
16	étoile du Sag.	précéd.	1. 26. 9,4	1. 26. 8,7	21. 35. 42,7	- - - -	291. 56. 5
	2. ξ. du Sagitt.	préc.	0. 42. 43,4	0. 42. 43,1	10. 42. 31,8	- - - -	291. 56. 4
	ο du Sagitt. -	préc.	0. 35. 51,2	0. 35. 50,9	8. 59. 11,8	- - - -	291. 56. 13
	π. du Sagitt. -	précédoit	0. 30. 41,1	0. 30. 40,9	7. 41. 29,0	- - - -	291. 56. 12

1784.	Noms de étoiles.		Différences des hauteurs méridiennes obſervées.	Différences corrigées des effets de la réfract. & de la parallaxe.	Déclinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de la Caille.	Déclin. appar. de Saturne déduites des obſervat.	Obliquité de l'éci. employée dans le Calcul. 23°.27′ 58,7″
Juillet	Saturne - -	- - - -	0°. 0′. 0″	0°. 0′. 0″	Auſtrales.	Auſtrales.	
	δ. du Scorpion	plus Auſtrale	0. 8. 22	0. 8. 23,9	21°.59′.45″,8	21°.51′.22″	
	ét. du Sagitt.	plus Boreale	0. 6. 4	0. 6. 3,8	21. 45. 8,6	21. 51. 13	
14	2. ξ. du Sagitt.	plus Bor.	0. 28. 52	0. 28. 54,5	21. 22. 28,1	21. 51. 23	
	ο. du Sagitt. -	plus Auſtr.	0. 10. 59	0. 11. 1,2	22. 2. 29,3	21. 51. 28	
	π. du Sagitt. -	plus Boreale	0. 30. 20	0. 30. 22,6	21. 21. 1,7	21. 51. 24	
	Saturne - -	- - - -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
	δ. du Scorpion	plus Auſtr.	0. 7. 33	0. 7. 34,9	- - - -	22. 52. 11	
15	étoile du Sag.	plus Bor. -	0. 6. 54	0. 6. 53,9	- - - -	21. 52. 3	
	2. ξ. du Sagitt.	plus Bor. -	0. 29. 38	0. 29. 40,6	- - - -	21. 52. 9	
	ο. du Sagitt. -	plus Auſtr.	0. 10. 12	0. 10. 14,1	- - - -	21. 52. 15	
	π. du Sagitt. -	plus Bor. -	0. 31. 8	0. 31. 10,7	- - - -	21. 52. 12	
	Saturne - -	- - - -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
	δ. du Scorp. -	plus Auſtr.	0. 6. 48	0. 6. 49,8	- - - -	21. 52. 56	
16	étoile du Sag.	plus Bor. -	0. 7. 39	0. 7. 39,0	- - - -	21. 52. 48	
	2. ξ. du Sagitt.	plus Bor. -	0. 30. 28	0. 30. 30,7	- - - -	21. 52. 59	
	ο. du Sagitt. -	plus Auſtr.	0. 9. 26	0. 9. 28,1	- - - -	21. 53. 1	
	π. du Sagitt. -	plus Bor. -	0. 31. 58	0. 32. 0,8	- - - -	21. 53. 2	

Réſultat.

Juillet	Temps vrai à Avully.	Temps vrai à Paris.	Temps moyen à Paris.	Aſcenſ. droites appar. de ♄ obſervées.	Déclin. appar. de ♄ obſervées Auſtrales.	Longitudes géoc. appar. de ♄ déduites des obſerv.	Longitudes géoc. appar. de ♄ calculées par les Tabl. de Halley.	Erreur des Tab. de H. en longit. géoc.	Latit. géoc. de ♄ obſervées.	Latit. géoc. de ♄ calc. par les Tab. de Halley.	Erreur des Tabl. de H. en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tabl. de Mayer.	Erreur en longit. helioc. des Tables au moment de l'oppoſition.
14	11h.49′. 4″	11h.34′.40″	11h.40′. 8″	292°. 5′.28″	21°.51′.24″	IXs. 20°.25′.45″	IXs. 20°.13′.58″	− 11′.47″	0°. 3′. 19″ Bor.	0°. 2′. 55″	− 0′.24″	IIIs. 22°.59′.14″	de Halley - − 10′.36″
15	11. 44. 44	11. 30. 20	11. 35′. 54	292. 0. 48	21. 52. 12	IX. 20. 21. 21	IX. 20. 5. 33	− 11. 48	0. 3 9	0. 2. 50	− 0. 19	III. 23. 56. 21	de Caſſini - + 9. 4
16	11. 40. 25	11. 26. 1	11. 31. 40	291. 56. 9	21. 53. 0	IX. 20. 16. 57	IX. 20. 5. 9	− 11. 48	0. 3 0	0. 2. 45	− 0. 15	III. 24. 53. 28	de d. l. Lande + 8. 56
Le 11 Juillet	23. 58. 28	23. 44. 4	23. 49. 15										

Longitude vraye ſur l'éclipt. de ♄ en oppoſition - - IXs. 20°.36′.26″, calculée ſur les Tab. de Halley augmentées de l'err. { 11′.48″ en long. géoc. / 10. 36 en long. hélioc.

Latitude Boreale géocentrique - - - - - - - - 0. 3. 27 - - - - - - - - - - augmentées de l'err. 0. 19 en latit. géoc.

Aouſt 1784.

	Differences des hauts. mérid. obſervées.	Differences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Déclins. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Déclin. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique. 23°.27'.58"
- -	0°. 0'. 0"		Boreales.	Boreales.	
uſtrale	0. 34. 38	0°.34'. 41",7	12°.20'.57",5	11°.46'.16"	
or. -	0. 59. 16	0. 59. 18,6	10. 46. 56.5	11. 46. 15	
- -	0. 0. 0				
or. -	1. 33. 3	1. 33. 7,8	10. 16. 17,7	11. 49. 25	
uſtr. -	0. 24. 25	0. 24. 38,1	12. 13. 57,6	11. 49. 20	
uſtr. -	0. 31. 33	0. 31. 36,5	comme cy-deſſus	11. 49. 21	
or. -	1. 2. 22	1. 2. 24,7	- - - -	11. 49. 21	
- -	0. 0. 0				
or. -	1. 35. 58	1. 36. 2,9	comme cy-deſſus	11. 52. 21	
uſt. -	0. 21. 33	0. 21. 35,9	- - - -	11. 52. 22	
uſt. -	0. 28. 34	0. 28. 37,4	- - - -	11. 52. 20	
or. -	1. 5. 14	1. 5. 16,9	- - - -	11. 52. 13	
- -	0. 0. 0				
or. -	1. 41. 45	1. 41. 50,4	comme cy-deſſus	11. 58. 8	
uſt. -	0. 15. 51	0. 15. 53,4	- - - -	11. 58. 4	
uſt. -	0. 22. 50	0. 22. 52,9	- - - -	11. 58. 5	
or. -	1. 10. 58	1. 11. 1,3	- - - -	11. 57. 58	

oc. ♃ abl y.	Erreur geoc. des Tables de Halley en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tables de Meyer.	Erreur des Tables en longit. helioc. au moment de l'oppoſition.	
2"	− 0'. 4"	Vs. 4°.14'.41",3	de Halley	+ 0'.43"
37	− 0. 17	V. 5. 12. 31,5	de Caſſini	− 4. 24
1	− 0. 22	V. 6. 10. 22,9	de De la Lande	+ 4. 53
48	− 0. 21	V. 8. 6. 11,9		

Tab. de Halley diminuées de l'erreur { 54" en long. géoc. / 43 en long. hélioc.

\- - - - - augmentées de l'errr. 20 en latit. géoc.

Obſervations de Jupiter près de ſon oppoſition faites à Avully le 26, 27, 28 & 30 Aouſt 1784.

1784.	Noms de étoiles.	Paſſages de Jupiter au méridien en Temps de la Pendule.	Différences des paſſages en Temps de la Pendule.	Différences en Temps moyen.	Différences d'aſcenſ. droite.	Aſcenſ. droites appar. des étoiles tirées de Bradley.	Aſcenſ. droites appar. de Jupiter déduites des obſervations.
Aouſt.	Jupiter - -	12^h. 0'.18'',1	0^h. 0'. 0''				
	λ. du Capricor.	précédoit -	0. 45.36,1	0°.45'.36'',2	11°.25'.55''.4	323°.44'.28'',5	335°.10'.24''
26	σ. du verſeau	préc. - -	0. 1.24,9	0. 1.24,9	0. 21.17,0	334. 49. 6,2	335. 10. 23
	3.ψ.du verſeau	ſuivoit - -	0. 46.57,6	0. 46. 57,7	11. 46. 21,2	346. 56.46,1	335. 10. 25
	Jupiter - -	11^h.55'.49'',1	0. 0. 0				
	ε du verſeau -	précéd. -	1. 43. 52,3	1. 43. 52,5	26. 2.23,4	309. 0. 36,0	335. 2. 59
27	ν du verſeau -	préc. - -	1. 22. 5,4	1. 22. 5,6	20. 34. 46,2	314. 27. 47,9	335. 2. 34
	λ. du Capric. -	préc. - -	0. 45. 6,7	0. 45. 6,8	11. 18. 33,1	comme cy-deſſus	335. 3. 2
	3.ψ.du verſeau	ſuivoit - -	0. 47. 27,2	0. 47. 27,3	11. 53. 46,4	- - - -	335. 3. 0
	Jupiter - -	11^h.51'.20'',9	0. 0. 0				
	ε. du verſeau -	précéd. -	1. 43. 22,7	1. 43. 22,9	25. 54. 58,2	comme cy-deſſus	334. 55. 34
28	ν. du verſeau -	préc. - -	1. 21. 35,7	1. 21. 35,9	20. 27. 19,4	- - - -	334. 55. 7
	λ. du Capric. -	préc. - -	0. 44. 37,3	0. 44. 37,4	11. 11. 10,9	- - - -	334. 55. 39
	3.ψ.du verſeau	ſuivoit. -	0. 47. 57,0	0. 47. 57,1	12. 1. 14,6	- - - -	334. 55. 32
	Jupiter - -	11^h.42'.25'',2	0. 0. 0			comme cy-deſſus	
	ε. du verſeau -	précéd. -	1. 42. 23,0	1. 42. 23,2	25. 40. 0,2	- - - -	334. 40. 36
30	ν. du verſeau -	préc. - -	1. 20. 36,2	1. 20. 36,3	20. 12. 23,1	- - - -	334. 40. 11
	λ. du Capric. -	préc. - -	0. 43. 37,6	0. 43. 37,7	10. 56. 13,0	- - - -	334. 40. 41
	σ. du verſeau	ſuivoit - -	0. 0. 33,7	0. 0. 33,7	0. 8. 26,8	- - - -	334. 40. 39
	3.ψ.du verſeau	ſuiv. - -	0. 48. 56,3	0. 48. 56,4	12. 16. 6,6	- - - -	334. 40. 39

1784.	Noms de étoiles		Differences des hauts. mérid. obſervées.	Differences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Déclins. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Déclin. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique. 23°.27'.58''
Aouſt.							
	Jupiter - -	- - - -	0°. 0'. 0''		Boreales.	Boreales.	
26	λ. du Capric.	plus Auſtrale	0. 34. 38	0°.34'. 41'',7	12°.20'.57'',5	11°.46'.16''	
	3.ψ.du verſeau	plus Bor. -	0. 59. 16	0. 59. 18,6	10. 46. 56,5	11. 46. 15	
	Jupiter - -	- - - -	0. 0. 0				
	ε. du verſeau -	plus Bor. -	1. 33. 3	1. 33. 7,8	10. 16. 17,7	11. 49. 25	
27	ν. du verſeau -	plus Auſtr. -	0. 24. 25	0. 24. 38,1	12. 13. 57,6	11. 49. 20	
	λ. du Capric.	plus Auſtr. -	0. 31. 33	0. 31. 36,5	comme cy-deſſus	11. 49. 21	
	3.ψ.du verſeau	plus Bor. -	1. 2. 22	1. 2. 24,7	- - - -	11. 49. 21	
	Jupiter - -	- - - -	0. 0. 0				
	ε. du verſeau -	plus Bor. -	1. 35. 58	1. 36. 2,9	comme cy-deſſus	11. 52. 21	
28	ν. du verſeau -	plus Auſt. -	0. 21. 33	0. 21. 35,9	- - - -	11. 52. 22	
	λ. du Capric.	plus Auſt. -	0. 28. 34	0. 28. 37,4	- - - -	11. 52. 20	
	3.ψ.du verſeau	plus Bor. -	1. 5. 14	1. 5. 16,9	- - - -	11. 52. 13	
	Jupiter - -	- - - -	0. 0. 0				
30	ε du verſeau -	plus Bor. -	1. 41. 45	1. 41. 50,4	comme cy-deſſus	11. 58. 8	
	ν. du verſeau -	plus Auſt. -	0. 15. 51	0. 15. 53,4	- - - -	11. 58. 4	
	λ. du Capric. -	plus Auſt. -	0. 22. 50	0. 22. 52,9	- - - -	11. 58. 5	
	3 ψ.du verſeau	plus Bor. -	1. 10. 58	1. 11. 1,3	- - - -	11. 57. 58	

Réſultat.

1784. Aouſt.	Temps vrai à Avully.	Temps vrai à Paris.	Temps moyen à Paris.	Aſcenſ. droites appar. de ♃ obſervées.	Déclin. appar. de ♃ obſervées Boreales.	Longitud. géoc. appar. de ♃ obſervées.	Longit. géoc. appar. de ♃ tirées des Tables de Halley.	Erreur des Tabl. de Halley en long. géoc.	Latitud. géoc. appar. de ♃ obſervées.	Latit. géoc. appar. de ♃ tirée des Tabl de Halley.	Erreur geoc. des Tables de Halley en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tables de Meyer.	Erreur des Tables en longit. helioc. au moment de l'oppoſition.	
26	11^h.56'. 9''	11^h.41'.45''	11^h.42'.57''	335°.10'.24	11°.46'.15''	XI^s.2°.42'.56''	XI^s.2°.43'.49''	+ 0'.53''	1°.20'.36'' Aouſt.	1°. 20'. 32''	− 0'. 4''	V^s. 4°.14'.41'',3	de Halley	+ 0'.43''
27	11. 52. 1	11. 37. 37	11. 38. 31	335. 3. 0	11. 49. 22	XI. 2. 35. 3	XI. 2. 35. 58	+ 0. 55	1. 20. 54	1. 20. 37	− 0. 17	V. 5. 12. 31,5	de Caſſini	− 4. 24
28	11. 47. 53	11. 33. 39	11. 34. 5	334. 55. 35	11. 52. 20	XI. 2. 27. 12	XI. 2. 28. 5	+ 0. 53	1. 21. 3	1. 20. 41	− 0. 22	V. 6. 10. 22,9	de De la Lande	+ 4. 53
30	11. 39. 18	11. 24. 54	11. 25. 13	334. 40. 39	11. 58. 5	XI. 2. 11. 29	XI. 2. 12. 26	+ 0. 57	1. 21. 9	1. 20. 48	− 0. 21	V. 8. 6. 11,9		
Le 25 Aouſt.	2. 23. 21	2. 8. 57	2. 10. 34											

Longitude vraie ſur l'Ecliptique de Jupiter en oppoſition XI^s. 2°. 53'. 40'', calculée par les Tab. de Halley diminuées de l'erreur 54'' en long. géoc. / 43 en long. helioc.

Latitude géocentrique Auſtrale - - - - - - - - - 1. 20. 46 - - - - - - - - - - - augmentées de l'err^r. 20 en latit. géoc.

Décembre 1784 & 5 Janvier 1785.

	Différences des hauteurs méridiennes obſervées.	Différences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Declinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de Mayer.	Declin. app de la Planète déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique 23°. 27'.58"
- - -	0°. 0'. 0"		Boreales.	Boreales.	
lus Auſtrale	0. 31. 48	0°.31'.48",6	22°.32'.36",4	23°.4'.25"	
lus Auſt.	0. 37. 59	0. 37. 59,7	22. 26. 33,6	23. 4. 33	
lus Bor.	0. 21. 13	0. 21. 13,4	23. 25. 49,4	23. 4. 36	
lus Auſt.	0. 45. 55	0. 45. 55,9	22. 18. 53,0	23. 4. 49	
lus Auſt.	0. 32 34	0. 32. 34,7	22. 31. 54,8	23. 4. 29	
us Bor.	0. 31. 24	0. 31. 24,6	23. 35. 58,8	23. 4. 34	
us Bor.	0. 11. 4	0. 11. 4,2	23. 15. 38,4	23. 4. 34	
us Auſt.	0. 31. 11	0. 31. 11,6	22. 33. 14,5	23. 4. 26	
us Auſt.	0. 27. 41	0. 27. 41,6	22. 36. 34,7	23. 4. 16	
us Auſt.	1. 4. 38	1. 4. 39,3	21. 59. 58,8	23. 4. 38	
us Auſt.	0. 7. 45	0. 7. 45,2	22. 56. 41,6	23. 4. 27	
- - -	0. 0. 0				
us Auſt.	0. 33. 0	0. 33 0,6	comme cy deſſus.	23. 5. 3[illegible]	

Obſervations de la Planète d'Herſchel près de ſon Oppoſition, faites à Avully le 25 & 29 Décembre 1784 & 5 Janvier 1785.

1784.	Noms des étoiles.	Paſſages de la Planète au méridien en Temps de la Pendule.	Différences des paſſages en Temps de la Pendule.	Retard de la Pendule ſur le T. moyen pend. l'interv.	Différences d'aſcenſ. droite.	Aſcenſ. apparente des étoiles tirées de Bradley & de Mayer.	Aſcenſ. apparentes de la Planete déduites des obſervations.
Dec.	Planète - - -	$12^{h}.38'.36'',0$	$0^{h}.\ 0'.\ 0''$,	- - -	- - - -	- - - -	- - - -
	λ. du belier -	précedoit -	5. 17. 30, 6	- - 0'', 8	79°.35'.52'',9	26°.30'.12'',7	106°. 6'. 6''
	α. du belier -	précedoit -	5. 8. 25, 5	- - 0. 8	77. 19. 14, 5	28. 46. 32, 0	106. 5.47
	η. des Pleyades	précédoit -	3. 29. 3, 0	- - 0. 6	52. 24. 29, 1	53. 41. 28, 5	106. 5.58
	ν. préc. du taureau	précédoit -	2. 50. 25, 5	- - 0. 5	42. 43. 30, 0	63. 22. 22, 9	106. 5.53
	τ. du taureau -	précédoit -	2. 34. 34, 3	- - 0. 4	38. 45. 1, 4	67. 20. 57. 0	106. 5.58
25.	étoile d'orion -	précédoit -	2. 19. 11, 6	- - 0. 4	34. 53. 43, 0	71. 12. 18, 3	106. 6. 1
	H. des gemeaux	précédoit -	1. 13. 6. 1	- - 0. 2	18. 19 34, 7	87. 46. 23, 3	106. 5.58
	η. des gemeaux	précédoit -	1. 2. 17, 3	- - 0. 2	15. 36. 55, 9	90. 29. 6, 3	106. 6. 2
	μ. des gemeaux	précédoit -	0. 54. 15, 8	- - 0. 2	13. 36. 13, 7	92. 29. 46, 4	106. 6. 0
	d. des gemeaux	précédoit -	0. 25. 38, 3	- - 0. 1	6. 25. 39, 2	99. 40. 23, 3	106. 6. 2
	ω. ſuiv. des gem.	précédoit -	0. 11. 58. 5	- - 0. 0	3. 0. 7, 0	103. 5. 51, 0	106. 5.58
	Planète - -	$12^{h}.21'.51'',5$	0. 0. 0,	- -	- - - -	- - - -	- - - -
	λ. du belier -	précédoit -	5 16 45, 8	- - 0. 8	79. 24. 39, 1	26. 30. 11, 8	105. 54 51
	α. du belier -	précédoit -	5. 7. 41, 0	- - 0. 8	77. 8. 5, 1	28 46. 31, 1	105. 54 36
	η. des Pleyades	précédoit -	3. 28 18. 5	- - 0. 6	52. 13. 19, 8	53. 41. 27, 9	105 54.48
	ν. préc. du taureau	précédoit -	2. 49 40, 8	- - 0. 5	42. 32. 17, 6	63. 22. 22, 6	105. 54.40
29.	τ. du taureau -	précédoit -	2. 33. 49, 9	- - 0. 4	38. 33. 53, 5	67. 20. 56, 7	105. 54.50
	α. d'Orion -	précédoit -	2. 18. 27, 0	- - 0. 4	34 42. 32, 7	71. 12. 18, 2	105. 54. 51
	H. des gemeaux	précédoit -	1. 12 22. 0	- - 0. 2	18. 8. 31, 3	87. 46. 23, 8	105. 54.55
	η. des gemeaux	précédoit -	1. 1. 32, 8	- - 0. 2	15. 25. 46, 6	90. 29. 6, 8	105. 54.53
	μ. des gemeaux	précédoit -	0. 53. 30, 8	- - 0. 2	12. 24. 56, 9	92. 29. 46, 9	105. 54.44
	d. des gemeaux	précédoit -	0. 24. 53, 9	- - 0. 1	6. 14. 31, 3	99. 40. 24, 1	105. 54.55
	ω. 2. des gem.	précédoit -	0. 11. 14, 1	- - 0. 0	2. 48. 59, 2	103. 5. 51, 9	105. 54. 51
1785.	Planète - - -	$11^{h}.43'.\ 5'',2$	0. 0. 0,	- - -	- - - -	- - - -	- - - -
Janvier.	α. du belier -	précédoit -	5. 6. 23, 2	- - 1 1	76. 48. 39, 5	28. 46. 29, 7	105. 35. 9
	H. des gemeaux	précédoit -	1. 11. 3, 0	- - 0. 2	17. 48. 43, 0	87. 46. 24, 1	105. 35. 7
	η. des gemeaux	précédoit -	1. 0. 14, 6	- - 0. 2	15. 6. 10, 4	90. 29. 7. 2	105. 35. 18
5.	μ. des gemeaux	précédoit -	0. 52. 13, 0	- - 0. 2	13. 5. 26, 6	92. 29. 47, 4	105. 35.14
	d. des gemeaux	précédoit -	0. 23. 35, 7	- - 0. 1	5. 54. 55, 1	99. 40. 25, 0	105. 35.20
	δ. des gemeaux.	ſuivoit -	0. 4. 56, 3	- - 0. 0	1. 14. 16, 7	106. 49. 40, 4	105. 35.24

1784.	Noms des étoiles		Différences des hauteurs méridiennes obſervées.	Différences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Declinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de Mayer.	Declin. app de la Planète déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique 23°. 27'.58''
Déc.	Planète - - -	- - -	0°. 0'. 0''		Boreales.	Boreales.	
	λ. du belier -	plus Auſtrale	0. 31. 48	0°.31'.48'',6	22°.32'.36'',4	23°.4'.25''	
	α du belier -	plus Auſt.	0. 37. 59	0. 37. 59, 7	22. 26. 33, 6	23. 4. 33	
	η. des Pleyades	plus Bor.	0. 21. 13	0. 21. 13, 4	23. 25. 49, 4	23. 4. 36	
	ν. préc. du taureau	plus Auſt.	0. 45. 55	0. 45. 55, 9	22. 18. 53, 0	23. 4. 49	
	τ. du taureau -	plus Auſt.	0. 32 34	0. 32. 34, 7	22. 31. 54, 8	23. 4. 29	
25.	étoile d'orion	plus Bor.	0. 31. 24	0. 31. 24, 6	23. 35. 58, 8	23. 4. 34	
	H. des gemeaux	plus Bor.	0. 11. 4	0. 11. 4, 2	23. 15. 38, 4	23. 4. 34	
	η. des gem.	plus Auſt.	0. 31. 11	0. 31. 11, 6	22. 33 14, 5	23. 4. 26	
	μ. des gem.	plus Auſt.	0. 27. 41	0. 27. 41, 6	22. 36. 34, 7	23. 4. 16	
	d. des gem.	plus Auſt.	1. 4. 38	1. 4. 39, 3	21. 59. 58, 8	23. 4. 38	
	ω. ſuiv. des gem.	plus Auſt.	0. 7. 45	0. 7. 45, 2	22. 56. 41, 6	23. 4. 27	
	Planète - - -	- - -	0. 0. 0				
	λ. du belier -	plus Auſt.	0. 33. 0	0. 33. 0, 6	comme cy deſſus.	23. 5. 37	
	α. du belier -	plus Auſt.	0. 39. 11	0. 39. 11, 7	- - - -	23. 5. 45	
	η. des Pleyades	plus Bor.	0. 20. 12	0. 20. 12, 4	- - - -	23. 5. 37	
	ν. du taureau -	plus Auſt.	0. 46. 56	0. 46 56, 9	- - - -	23. 5. 50	
	τ. du taureau -	plus Auſt.	0. 33. 47	0 33. 47, 7	- - - -	23. 5. 42	
29.	étoile d'orion -	plus Bor.	0. 30. 16	0. 30. 16, 6	- - - -	23. 5. 42	
	H. des gemeaux	plus Bor.	0. 9. 56	0. 9. 56, 2	- - - -	23. 5. 42	
	η. des gem.	plus Auſt.	0. 32. 18	0. 32. 18, 6	- - - -	23. 5. 33	
	μ. des gem.	plus Auſt.	0. 28. 58	0. 28. 58, 6	- - - -	23. 5. 33	
	d. des gem.	plus Auſt.	1. 5. 31	1. 5. 32, 3	- - - -	23. 5. 31	
1785.	Planète - - -	- - -	0. 0. 0				
Janvier.	α. du belier -	plus Auſt.	0. 40. 59	0. 40. 59, 7	comme cy deſſus	23. 7. 33	
	H. des gemeaux	plus Bor.	0. 8. 16	0. 8. 16, 2	- - - -	23. 7. 22	
	η. des gem.	plus Auſt.	0. 34. 10	0. 34. 10, 7	- - - -	23. 7. 25	
5.	μ. des gem.	plus Auſt.	0. 30. 43	0. 30. 43, 6	- - - -	23. 7. 18	
	d. des gem.	plus Auſt.	1. 7. 18	1. 7. 19, 2	- - - -	23. 7. 18	
	δ. des gem.	plus Auſt.	0. 45. 38	0. 45. 38, 9	22. 21. 46, 9	23. 7. 26	

Réſultat.

	Temps vrai à Avully.	Temps vrai à Paris.	Temps moyen à Paris.	Accenſions droites appar. de la Planète obſervées.	Déclin. appar. de la Plan obſervées.	Longit. géocent. appar. de la Planète obſervées.	Latitud. géocent. appar. de la Plan. obſervées.	Longit. géoc. appar. de la Plan. par les Tables Conn. d. T. 1787.	Latit. géoc. de la Plan. Tables id.	Erreur des Tables en long. géoc.	Erreur des Tables en latit. géoc.
Dec. 25	$12^{h}.42'.42''$	$12^{h}.28'.18''$	$12^{h}.29'.31''$	106°. 6'. 0''	23°.4'.31'' Bor.	III^{s}. 14°.46'.54''	0°.25'.57'' Bor.	III^{s}. 14°. 47'. 9''	0°.25'.25''	+ 15''	− 32''
29	12 24. 17	12. 9. 53	12. 13. 3	105. 54. 50	23. 5. 34	III. 14. 36. 34	0. 25. 51	III. 14. 36. 52	0. 25. 28	+ 18	− 23
Janv. 5	15. 52. 15	11. 37. 51	11. 44. 15	105. 35. 17	23. 7. 22	III. 14. 18. 35	0. 25. 43	III. 14. 18. 41	0. 25. 32	+ 6	− 11

Addition à l'obſervation de l'oppoſition de la Planète d'Herſchel.

Après avoir achevé & mis au net mes calculs des obſervations de la Planète *d'Herſchel* j'ai reçu la connoiſſance des Temps pour l'année 1787, dans laquelle on trouve des Tables des mouvemens de cette Planète; j'ai calculé auſſi-tot la longitude & latitude géocentrique de la Planète pour les trois jours où je l'avois obſervée, j'ai mis à la ſuite du réſultat des obſervations, leur différence d'avec le calcul des tables. Ces différences devroient étre les mêmes pour les trois jours, on verra que le réſultat du 5 Janvier diffère un peu des deux autres, c'eſt pourquoi en prenant une moyenne entre ceux du 25 et 29 Décembre, & laiſſant de coté celui du 5 Janvier, je trouve que les Tables donnent une longitude géocentrique de 16″ trop grande, & une latitude géocentrique de 27″ trop petite.

D'après cela il ſuit que l'oppoſition a eu lieu le 3 Janvier 1785 à $17^h : 46'\frac{1}{2}$ Temps moyen à Paris.

La longitude vraye de la Planète ſur l'écliptique étoit alors de $3^s. 14°. 22'. 32''$

& ſa latitude géocentrique Boreale de - - $0°. 25'. 57''$.

COM-

COMMENTATIO
DE
ECLIPSI SOLIS
Anno 1779 die $\frac{1}{14}$ Iunii Obſeruata.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKI.

§. 1.

In parte I. Actorum Academiae Scientiarum ad annum 1779 edita de Eclipſi hac diſſerens deficientibus tunc temporis obſeruationibus, coactus fui ex comparatione binarum tantum Petropolitane ſc. et Göttingenſis in errorem Tabularum Lunarium inquirere; id circo correctiones ibi erutae merito dubiae videri poterant. Poſtquam vero ad manus peruenere obſeruationes eiusdem Eclipſeos in aliis locis peractae, reuocaui eas ad calculum, et cum ad easdem propemodum deductus ſim concluſiones, conſtitui calculos meos in confirmationem antecedentium determinationum breuiter coram Academia exponere.

§. 2. Initium faciam a relatione ipſarum obſeruationum:

Petropoli	Initium.	$22^h. 0'. 25''$. t. v.	Latitudo	$59°. 56'. 23''$
	Finis	23. 22. 21.		
Göttingae	Initium	20. 9. 55.		51. 31. 54
	Finis	21. 23. 22.		

War-

Warſowiae	Initium	$21.^b 14'. 33''.$ t. v.	Lutitudo	$52°. 14'. 0''$
	Finis	22. 10. 42		
Cremiſani	Initum	20. 37. 15	- - -	48. 3. 36
	Finis	21. 23. 26		
Vltraiecti	Initium	19. 43. 52	- - -	52. 5. 0
	Finis	21. 4. 40		
Dresdae	Initium	20. 31. 21	- - -	51. 2. 54
	Finis	21. 26. 27		
Miſniae	Initium	20. 29. 45	- - -	51. 9. 0
	Finis	21. 35. 58		
Maſſiliae	Finis	20. 31. 26	- - -	43. 17. 45

Aſſumtis elementis Tabularibus iisdem, qualia in diſſertatione memorata exhibita ſunt, vbi in Longitudine Lunae momento 20^b reſpondente loco $33'$ legendum eſt $23'$. computo inſtituto obtinui.

Loca		Long. ☽ vera.	Latit. ☽ vera	Parall. Long. ☽	Parall. Latit. ☽	½ Diam. ☽ appar.
Petrop.	pro initio	$82°. 23'. 13''$	$1°. 0' 46,''9$	$+12'. 53'',7$	$-38'. 53'',7$	$1012,''2$
	pro fine	83 14 8,2	1 5 23,5	3 18,9	36 0,3	1013,4
Götting.	pro initio	82 4 54,2	59 7,2	29 54,1	36 51,7	1010,0
	pro fine	82 50 51,6	1 3 17,1	22 28,3	32 41,3	1012,6
Warſov.	pro initio	82 16 46,5	1 0 12,7	22 43,2	33 45,4	1012,1
	pro fine	82 52 42	1 3 27,1	15 38,5	31 12,0	1013,8
Cremiſ.	pro initio	82 11 25,5	59 42,6	29 42,0	32 23,3	1011,3
	pro fine	82 40 18,8	1 0 19,8	24 17,1	29 41,5	1013,2
Vltrajećt.	pro initio	82 0 29	58 43,2	31 39,5	38 53,8	1009,0
	pro fine	82 51 1	1 3 18	24 25,3	34 6,0	1011,9
Dreſd.	pro initio	82 12 11,3	59 46,8	28 15,6	35 10,4	1010,8
	pro fine	82 49 35,5	1 3 10,1	21 0	31 38,2	1012,9
Miſniae	pro initio	82 8 22	59 26,1	28 26,4	35 28,4	1010,7
	pro fine	82 49 48,2	1 3 11,3	21 1,4	31 44,5	1012,8
Maſſil.	pro fine	82 29 42	1 1 22,1	33 39,5	28 43,7	1011,3

§. 3. Si nunc correctio summae Semidiametrorum Solis et Lunae dicatur δ, Latitudinis Lunae y et Parallaxis Lunae π, posita $\frac{1}{2}$ Diametro Solis $15'.47'',5 = 947'',5$, pro tempore coniunctionis obtinebuntur sequentes expressiones:

Petropoli ex initio	$23^h.$	$3'.$	$3''$	$+\ 2{,}37\delta$	$-\ 1{,}64y$	$+\ 1{,}39\pi$
ex fine	23	7	37	$-\ 3{,}89\delta$	$+\ 3{,}50y$	$-\ 2{,}16\pi$
Hinc I.			34	$-\ 6{,}26\delta$	$+\ 5{,}14y$	$-\ 3{,}57\pi = 0.$
Göttingae ex initio	21	41	43	$+\ 2{,}33\delta$	$-\ 1{,}59y$	$+\ 1{,}79\pi$
ex fine	21	42	10	$-\ 4{,}87\delta$	$+\ 4{,}56y$	$-\ 3{,}06\pi$
Hinc II.			27	$-\ 7{,}20\delta$	$+\ 6{,}15y$	$-\ 4{,}85\pi = 0.$
Warsoviae ex initio	22	25	53	$+\ 2{,}92\delta$	$-\ 2{,}37y$	$+\ 1{,}94\pi$
ex fine	22	28	29	$-10{,}68\delta$	$+10{,}54y$	$-\ 5{,}82\pi$
Hinc III.		156		$-13{,}60\delta$	$+12{,}91y$	$-\ 7{,}76\pi = 0.$
Cremifani ex initio	21	58	27	$+\ 3{,}12\delta$	$-\ 2{,}61y$	$+\ 2{,}21\pi$
ex fine	22	2	5	$-33{,}89\delta$	$+33{,}77y$	$-15{,}77\pi$
Hinc IV.			218	$-37{,}01\delta$	$+36{,}38y$	$-17{,}98\pi$
Vltraiecti ex initio	21	21	52	$+\ 2{,}15\delta$	$-\ 1{,}30y$	$+\ 1{,}71\pi$
ex fine	21	21	7	$-\ 3{,}76\delta$	$+\ 3{,}36y$	$-\ 1{,}20\pi$
Hinc V.		—	45	$-\ 5{,}91\delta$	$+\ 4{,}66y$	$-\ 1{,}88\pi$
Dresdae ex initio	21	56	48	$+\ 2{,}55\delta$	$-\ 1{,}90y$	$+\ 1{,}88\pi$
ex fine	21	57	37	$-\ 6{,}51\delta$	$+\ 6{,}28y$	$-\ 3{,}84\pi$
Hinc VI.			49	$-\ 9{,}06\delta$	$+\ 8{,}18y$	$-\ 5{,}72\pi = 0.$
Misniae ex initio	21	56	9	$+\ 2{,}51\delta$	$-\ 1{,}84y$	$+\ 1{,}86\pi$
ex fine	21	56	44	$-\ 6{,}29\delta$	$+\ 6{,}05y$	$-\ 3{,}69\pi$
Hinc VII.			35	$-\ 8{,}80\delta$	$+\ 7{,}89y$	$-\ 5{,}55\pi = 0.$

Pro Maſſilia non comparet hic momentum coniunctionis, quia Latitudo Lunae apparens praeciſe aequalis reperiatur ſummae Semidiametrorum Solis et Lunae.

§. 4. Obſeruationes, ex quibus aequationes iſtae deductae ſunt, non omnes pari gaudent exactitudine: de certitudine initii aeque ac finis Petropoli obſeruati intime conuictus ſum, id circo obſeruationem Petropolitanam fundamenti loco ſubſternere non dubito. Cremiſani verum initium Eclipſeos obſeruare non licuit, et in computo pro initio eiusmodi momentum adhibitum eſt, quo obſervatori contactus limborum Solis et Lunae ſenſibilis iam apparuerit: par ratio eſt cum initio Dresdae obſeruato. Quam obrem Cremiſani ac Dresdae momenta initii iure aliquot ſecundis minuere licebit, ſi aequationes inuentae id ſuadere videantur.

§. 5. Quoniam in aequationibus, quas praebent obſeruationes Warſouienſis et Cremiſanenſis coefficientes ipſorum δ, y et π ſunt admodum magni, eae tuto ad eruendas correctiones in vſum vocari nequeunt, et leui adhibita attentione patet aequationem V minime cum reliquis conſiſtere poſſe. Sepoſitis igitur aequationibus pro Warſouia, Cremiſano et Vtraiecto videndum eſt, quinam proxime valores pro δ, y et π ſubſtituendi ſatisfaciant reliquis aequationibus: nempe

$$\text{I. } 34 - 6,26\,\delta + 5,14\,y - 3,57\,\pi = 0.$$
$$\text{II. } 27 - 7,20\,\delta + 6,15\,y - 4,85\,\pi = 0.$$
$$\text{VI. } 49 - 9,06\,\delta + 8,18\,y - 5,72\,\pi = 0.$$
$$\text{VII. } 35 - 8,80\,\delta + 7,89\,y - 5,55\,\pi = 0.$$

Numeri harum aequationum abſoluti, ob incertitudinem quae ipſis obſeruationibus praeſertim initio ineſſe poteſt, prorſus exacti eſſe nequeunt, id circo plenarius earum conſenſus minime eſt expectandus. In definiendis itaque correctionibus ita erit procedendum, vt faciendo non nullas hypotheſes pro valore ipſius π videamus, quinam proxime pro δ et y valores ſint ſubſtituendi, vt ſatisfactum ſit allatis aequationibus. Ex multifariis Beati *Lexell* disquiſitionibus conſtat valorem ipſius π, ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus ille ſit, nusquam 3 ſcrupula ſecunda excedere, et menſura Diametri Solaris Cremiſani capta monſtrat Tabulas praebere Diametrum Solis 5″ iuſto maiorem; fingendo igitur pro π et δ varias hypotheſis, modo limites ipſius π inter -1 et -3, et ipſius δ inter -2 et -5 conſiſtant, minimus valor ipſius y, qui aequationibus noſtris proxime ſatisfacit, reperitur $y = -7$, et maximus $y = -14,7$ et vt plurimum recurrunt $y = -12$ et $y = -13$. Tutiſſime igitur acturum me exiſtimo, ſi ſtatuam $\pi = -1$, $\delta = -4$, et $y = -13$; quo poſito ſequentia momenta reſultabunt:

Petropoli	ex initio	23^h.	$3'$.	$13''$
	ex fine	23.	3.	9
Göttingae	ex initio	21.	41.	52
	ex fine	21.	41.	34

Dres-

Dresdae	ex initio	$21^h.$	$57'.$	$1''$
	ex fine	21.	56.	46
Misnia	ex initio	21.	56.	21
	ex fine	21.	55.	54.

§. 5. Vt iudicium ferri queat de exactitudine correctionum supra allatarum, quaeri conueniet ex momentis coniunctionum ex initio ac fine deductarum eiusmodi momenta, quae vel prorsus non, aut vix pendeant a correctionibus δ, y et π. Resumtis igitur expressionibus supra relatis habebitur eiusmodi tempus coniunctionis:

Petropoli	$23^h.$	$3'.$	$13''$	$+0,28\,\delta+0,07\,y+0,21\,\pi.$
Göttingae	21.	41.	52	$-0,07\,\delta+0,46\,y+0,18\,\pi.$
Dresdae	21.	57.	0	$+0,04\,\delta+0,56\,y+0,45\,\pi.$
Misniae	21.	56.	18	$+0,31\,\delta+0,13\,y+0,47\,\pi.$

Momenta coniunctionum pro Petropoli et Misnia hoc modo elicta tribuendo ipsi y valorem -13 nullam subibunt mutationem, pro Göttinga vero et Dresda resultabunt momenta paucis secundis diuersa ab iis, quae supra reperta sunt; id circo valores pro δ, y et π supra allatos si non pro veris, ast saltem vero proximis iure assumi posse existimo.

§. 7. Mulctata iam Latitudine Lunae $12''$ ad calculum denuo reuocaui obseruationes Warsouiensem, Cremifanensem et Massiliensem, et computo peracto reperi momentum coniunctionis:

Warſouiae ex initio $22^h.26'.21''+ 2,88\delta - 2,32\gamma + 1,91\pi$

ex fine $22.26.20 - 8.80\delta + 8,63\gamma - 5,82\pi$

Hinc III. $- 1 - 11,68\delta + 10,95\gamma - 7,73\pi = 0.$

Cremifani ex initio $21.58.58 + 3,07\delta - 2,56\gamma + 2,19\pi$

ex fine $21.57.52 - 14,21\delta + 14,12\gamma - 8,00\pi$

Hinc IV. $- 66 - 17,28\delta + 16,68\gamma - 10,19\pi = 0.$

Maſſiliae ex fine $21.22.33 - 14,97\delta + 14,86\gamma - 7,94\pi.$

Hic primum obſeruo differentiam Meridianorum Cremifanum et Maſſiliam inter independentem a correctionibus ſequi $35'.\ 19''$, et poſito $\pi = -1$, $\delta = -4$ et $\gamma = -1$, ſatisfieri aequationi pro Cremifano, vt tota correctio Latitudinis ſit $-13''$, momenta vero coniunctionum et Longitudines locorum a Meridiano Petropolitano computatae prodibunt, vt ſequitur:

		Tempus coniunct.	Longitudo a Petropoli.
Petropoli	ex initio	$23^h.\ 3'.\ 13''$	
	ex fine	23. 3. 9	
Göttingae	ex initio	21. 41. 52	$1^h.\ 21'.\ 21''$
	ex fine	21. 41. 34	1. 21. 35
Warſouiae	ex initio	22. 26. 11	37. 2
	ex fine	22. 26. 54	36. 15
Cremifani	ex initio	21. 58. 46	1. 4. 27
	ex fine	21. 58. 42	1. 4. 27
Dresdae	ex initio	21. 57. 1	1. 6. 12
	ex fine	21. 56. 46	1. 6. 23
Misniae	ex initio	21. 56. 21	1. 6. 52
	ex fine	21. 55. 54	1. 7. 15
Maſſiliae	ex fine	21. 23. 25	1. 39. 44

§. 8.

§. 8. Discrimen, quod hic occurrit inter Longitudines non nullorum locorum a Longitudinibus eorundem per alias obseruationes stabilitis, non tantum est, vt illud incertitudini ipsarum obseruationum tribui nequeat, excepta Longitudine Warsouiae ex fine deducta, quae non aliter ad consensum cum cognita reducitur, nisi in fine Warsouiae obseruato loco $10'$ legantur $9'$. Cum itaque tempus coniunctionis Petropoli sit $23^h. 3'. 12''$, et Longitudo eiusdem a Grenouico maior $2^h. 1'. 20''$ vix statui queat, habebitur tempus coniunctionis ad Meridianum Grenouicensem $21^h. 1'. 52''$, pro quo Longitudo Solis reperitur $83°. 2'. 22'',4$, et cum Tabulae *Maieri* pro eodem temporis momento dent Longitudinem Lunae $83°. 2'. 8'',1$ et Latitudinem $1°. 4'. 19'',3$ prodibit correctio earum in Longitudinem $+ 14'',3$ existente Latitudine Lunae $1°. 4'. 6'',3$.

§. 9. Circa eandem Eclipsim Dresdae et Cremisani obseruatae sunt distantiae cornuum, quas licet ad tempora coniunctionum eruenda iuxta methodum Beati *Lexell* non satis aptas reperio, attamen ad calculum illas reuocare et computum Academiae exponere ideo duxi, quod in Calendario Berolinensi ad annum 1785 exstet computus Cremisanensium a Patre *Fixlmillnero* institutus, ex quo tempus coniunctionis ad Meridianum Cremisanensem concluditur $21^h. 58'. 15''$, correctio in Longitudinem $+ 23$ et Latitudinem $- 21''$. Initium facturus a Dresda calculum Parallaxium pro sequentibus primum momentis institui:

Temp.

Temp. ver. Dresdenſe.	Latit. ☽ vera.	Parall. Long. ☽	Parall. Latit.	Latit. ☽ appar.	½Diam. ☽ appar.
$20^h.31'.21''$	$59'.28',7$	$1695'',3$	$2110'',4$	$1458'',3$	1010,8
20. 40. 0	59. 58,3	1645,1	2080,6	1517,7	1011,1
20. 50. 0	1. 0. 32,4	1582,7	2044,9	1587,5	1011,2
21. 0. 0	1. 1. 6,5	1519,2	1979,6	1654,9	1011,8
21. 10. 0	1. 1. 40,6	1453,7	1011,6	1721,0	1012,1
21. 20. 0	1. 2. 14,7	1381,7	1947,3	1787,4	1012,4
21. 30. 0	1. 2. 48,8	1308,4	1917,1	1851,7	1012,7
21. 36. 27	1. 3. 10,1	1260,0	1898,1	1891,8	1012,9

§. 10. Hinc pro momentis obſeruationum per interpolationem elementa calculi ſequentem in modum determinabuntur.

	Temp. vero Dresd.	Diſtantia Corn.	½Diam. ☽ appar.	Diſtant. Centr.	Parall. Long. ☽	Parall. Lat. ☽
	$20^h.31'.21''$	0	$1010'',9$	$1958'',4$	1695,6	2110,4
a	20. 38. 7,5	$10'.\ 0'',5$	1010,9	1863,9	1655,9	2083,6
b	20. 39. 35	10. 46	1011,0	1848,7	1645,8	1081,6
c	20. 47. 8	13. 51	1011,3	1773,5	1598,6	2055,2
d	52. 14	14. 52	1011,5	1751,9	1568,4	2037,4
e	57. 5	15. 15	1011,7	1782,1	1537,8	2021,1
f	59. 50	15. 40,8	1011,8	1718,3	1520,2	2011,8
g	21 4. 52	15. 38	1011,9	1719,8	1487,3	1996,1
h	11. 35	15. 8,7	1012,1	1735,8	1443,3	1974,6
i	14. 41	14. 46,7	1012,2	1753,6	1420,0	1964,5
k	18. 36	14. 0 8	1012,3	1769,9	1391,8	1951,9
l	25. 19	11. 46,7	1012,6	1828,1	1342,8	1931,3
m	28. 19	10. 23,3	1012,7	1858,4	1320,7	1922,2
n	30. 58	9. 13	1012,7	1880,4	1301,3	1914,2
	21. 36. 27	0	1012,8	1960,3	1260	1898,2

Cal-

Calculo vlterius producto pro tempore coniunctionis obtinebuntur ſequentes expreſſiones:

Initium	$21^h. 56'. 48''$	$+ 2,55\,\delta$	$- 1,90\,y$	$+ 1,88\,\pi$
a	21. 56. 32	$+ 2,89\,\delta$	$- 2,33\,y$	$+ 2,10\,\pi$
b	21. 56. 48	$+ 2,98\,\delta$	$- 2,45\,y$	$+ 2,15\,\pi$
c	21. 56. 19	$+ 3,64\,\delta$	$- 3,21\,y$	$+ 2,55\,\pi$
d	21. 56. 35	$+ 4,23\,\delta$	$- 3,87\,y$	$+ 2,88\,\pi$
e	21. 56. 45	$+ 5,28\,\delta$	$- 4,99\,y$	$+ 3,47\,\pi$
f	21. 56. 23	$+ 6,31\,\delta$	$- 6,08\,y$	$+ 4,05\,\pi$
g	11. 56. 42	$+ 8,79\,\delta$	$- 8,63\,y$	$+ 5,40\,\pi$
h	21. 56. 8	$+ 24,27\,\delta$	$- 24,20\,y$	$+ 13,74\,\pi$
i	21. 57. 9	$+ 41,34\,\delta$	$- 41,24\,y$	$+ 22,82\,\pi$
k	Latit. ☽ apparens ſuperat diſtantiam Centror. $8''$.			
l	21. 58. 55	$- 19,27\,\delta$	$+ 19,18\,y$	$- 9,50\,\pi$
m	21. 58. 39	$- 12,47\,\delta$	$+ 12,34\,y$	$- 7,10\,\pi$
n	21. 59. 41	$- 11,07\,\delta$	$+ 10,86\,y$	$- 6,44\,\pi$
Finis	21. 57. 37	$- 6,51\,\delta$	$+ 6,28\,y$	$- 3,86\,\pi$

§. 11. Expreſſiones *h*, *i* et *l* ob enormem magnitudinem coefficientium correctionibus praefixorum, atque *n* procul dubio ob errorem in ipſa obſeruatione commisſum ad momentum coniunctionis eliciendum tuto adhiberi nequeunt, ſumto vero ex concluſionibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et *g* medio et combinando illud cum expreſſione *m* prodit aequatio:

$$124 - 17,35\,\delta + 16,85\,\eta - 10,43\,\pi = 0.$$

Cui ſatisfaciunt quam proxime

$$\delta = -4,\ \gamma = -1\ 2''\tfrac{1}{2}\ \text{et}\ \pi = -1.$$

Expreſſio vero f collata cum fine dabit tempus coniunctionis a correctionibus fere liberum

$$21^h.\ 57'.\ 0'' - 0{,}10\,\delta + 0{,}10\,\gamma + 0{,}09\,\pi.$$

Quanquam hic δ denotet correctionem non ſummae Semidiametrorum, ſed cuiusuis diſtantiae centrorum Solis et Lunae, attamen concluſiones iſtae ſupra allatas egregie confirmate videntur.

§. 12. Obſeruationes Cremiſani circa diſtantias cornuum inſtitutae in Calendario Aſtronomico Berolinenſi ſequentem in modum referuntur:

	Temp. ver. Cremiſ.	Diſtant. Corn.	
Initium	20. 37. 15	0	contactus iam ſenſibilis
A	20. 41. 25½	7. 52,5	
B	20. 47. 8½	9. 48,2	
C	20. 55. 18½	11. 30,6	
D	21. 3. 34½	11. 6,2	dubia
E	21. 10. 44½	10. 6,0	
F	21. 17. 24,3	8. 0,2	
G	21. 19. 16,3	7. 7,0	
Finis	21. 23. 26,3		obſeruatio bona.

Pro qualibet harum phaſium ſeparatim inueſtigando Parallaxes in Longitudinem et Latitudinem Lunae reperi

Pro

	½ Diam. appar.	Distant. Centr.	Parall. Long ☽	Parall. Lat. ☽	Lattit. appar.
Pro initio	1011,3	1958,8	1782,0	1943″,0	1639,6
pro phasi A	1011,3	1900,8	1755,7	1928,8	1668,2
B	1011,5	1868,2	1718,1	1907,0	1709,4
C	1011,8	1832,5	1663,0	1877,8	1766,3
D	1013,1	1842,7	1605,0	1848,4	1823,8
E	1012,7	1863,9	1553,0	1823,6	1873,9
F	1013,0	1900,6	1503,5	1801,5	1927,7
G	1013,2	1913,5	1489,2	1794,6	1930,9
pro fine	1013,2	1960,7	1457,1	1781,5	1958,3

Vnde pro tempore coniunctionis obseruationes phasium dabunt sequentes expressiones:

Initium $21^h. 58'. 54'' + 3{,}12\,\delta - 2{,}61\,y + 2{,}21\,\pi$

A $21.\ 57.\ 19 + 3{,}56\,\delta - 3{,}12\,y + 2{,}46\,\pi$

B $21.\ 57.\ 30 + 4{,}34\,\delta - 3{,}87\,y + 2{,}81\,\pi$

C $21.\ 56.\ 31 + 6{,}39\,\delta - 6{,}16\,y + 3{,}94\,\pi$

$\left.\begin{array}{l}E\\F\\G\end{array}\right\}$ Lat. ☽ apparens superat distant. centrorum $\left\{\begin{array}{l}10''\\17{,}1\\17{,}4\end{array}\right.$

Finis $21.\ 2.\ 5 + 33{,}89\,\delta + 33{,}77\,y - 15{,}77\,\pi.$

Cum itaque Pater *Filxmillner* correctionem Longitudinis et Latitudinis Lunae inuestigauerit combinando phasin A cum fine, dein cum phasibus G et F, non mirum est, quod ad diuersas a meis peruenerit conclusiones. Vt enim obseruationes F et G locum habere queant, Latitudo

tudo Lunae plus quam 18 ſcrupulis ſecundis foret minuenda, finis autem Eclipſeos bene obſeruatus, pro quo ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae Latitudinem Lunae apparentem $2''\frac{1}{2}$ adhuc ſuperare reperitur, arguit in obſervationibus E, F et G leuem aliquem errorem eſſe commiſſum. Idem ipſum phaſes B et C confirmare videntur: combinando etenim phaſin B cum fine, manentibus elementis ſupra adhibitis, correctionem Latitudinis reperio $-11'',3$, et phaſin C cum fine correctionem reperio $-13'',5$.

Non obſtante igitur determinatione Patris *Fixlmillner* in ea ſum ſententia, vt ſtatuam correctionem Longitudinis eſſe quam proxime $+14'',3$ et Latitudinis -13 ſcrupulorum ſecundorum.

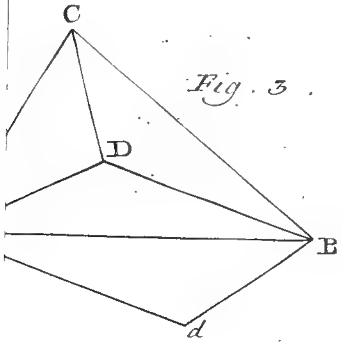


Fig. 3.

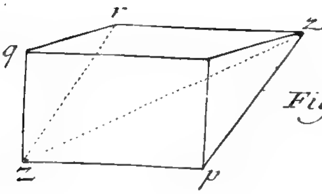


Fig. 6.

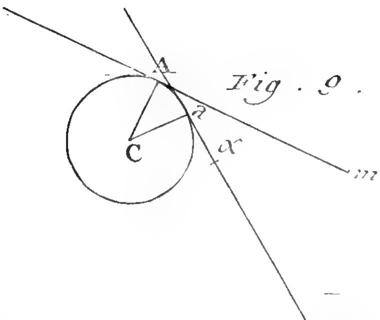


Fig. 9.

Fig. 1.

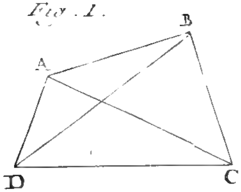


Fig. 2.

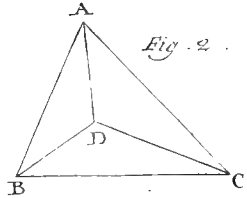


Fig. 3.

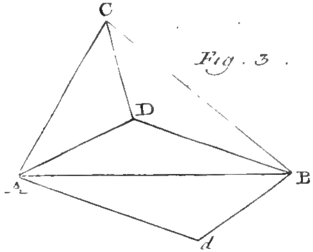


Fig. 4.

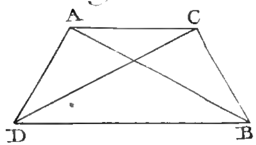


Fig. 5.

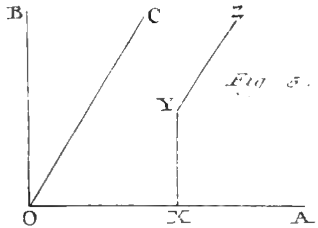


Fig. 6.

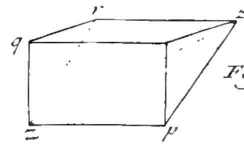


Fig. 7.

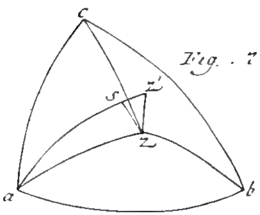


Fig. 8.

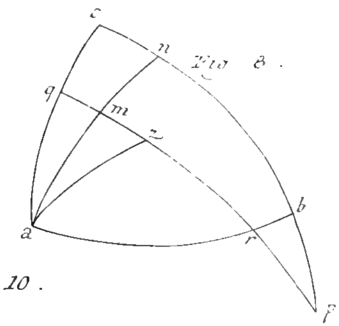


Fig. 9.

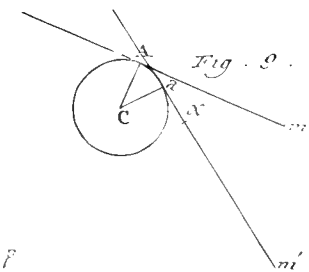


Fig. 10.

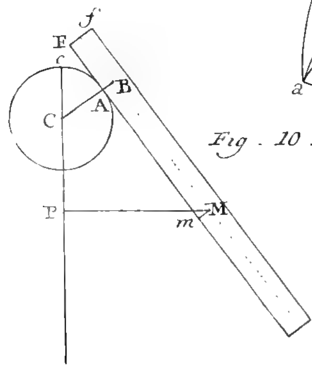
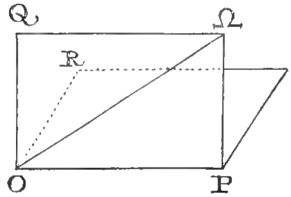


Fig . 9 .



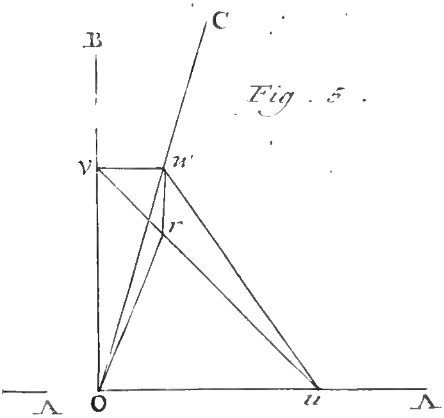


Fig . 5 .

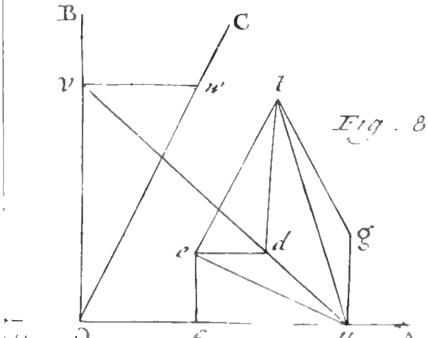


Fig . 8 .

Fig. 1.

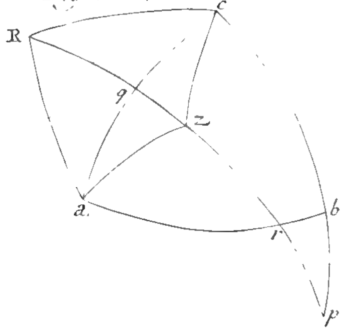


Fig. 2.

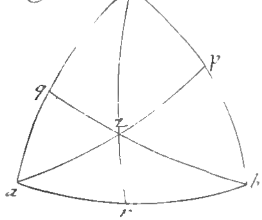


Fig. 9.

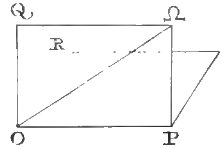


Fig 3

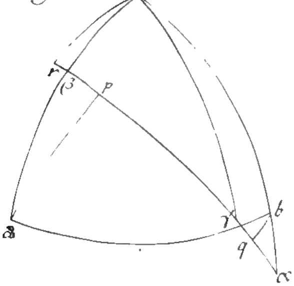


Fig 4

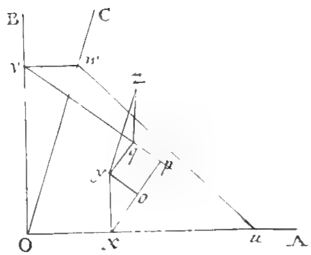


Fig. 5.

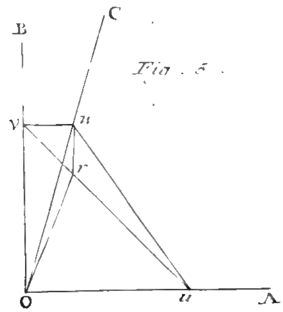


Fig 6

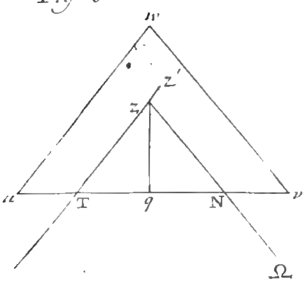


Fig 7.

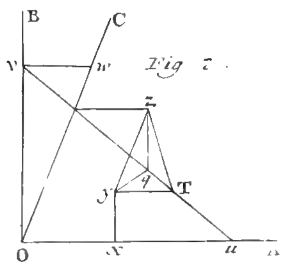


Fig 8.

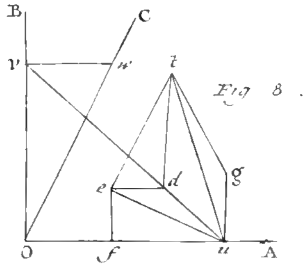


Fig. 2.

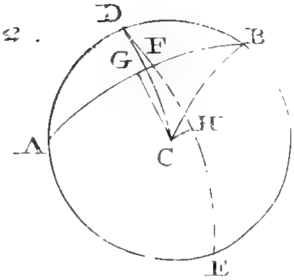
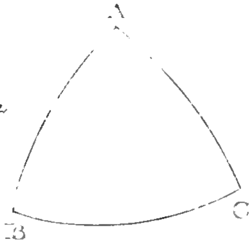


Fig. 3. No. 1.

Fig. 4.



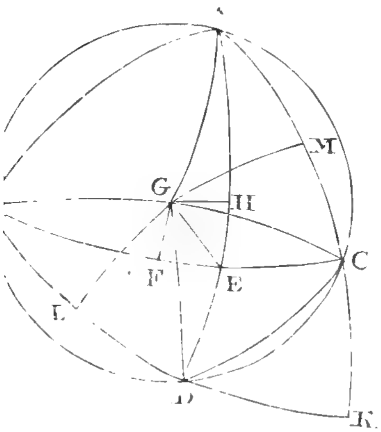


Fig. 8.

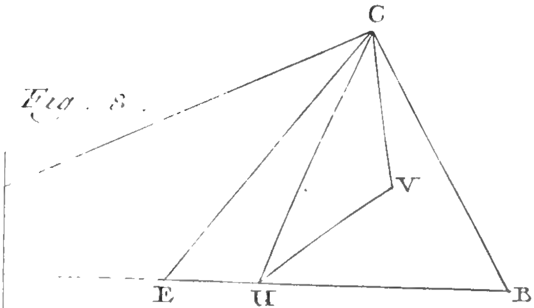


Fig. 1

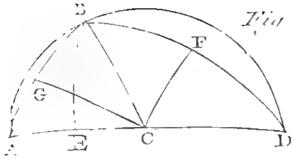


Fig. 2

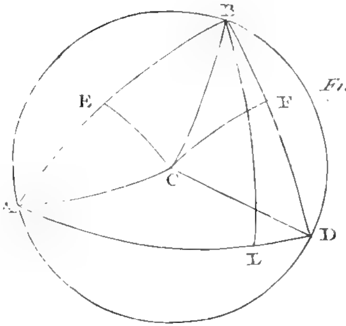


Fig. 3 No 1

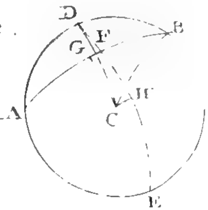


Fig. 3 No. 2

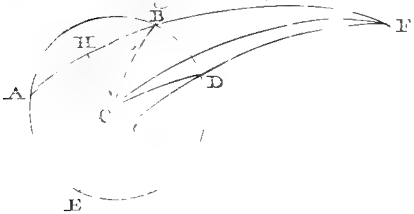


Fig. 4

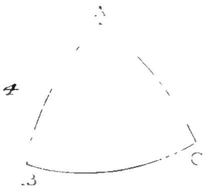


Fig. 5

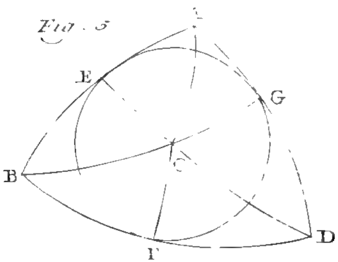


Fig. 6

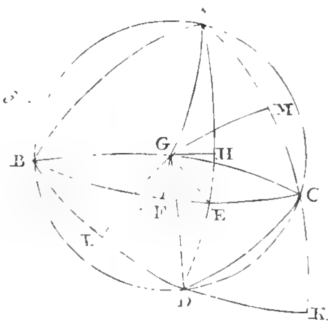


Fig. 7

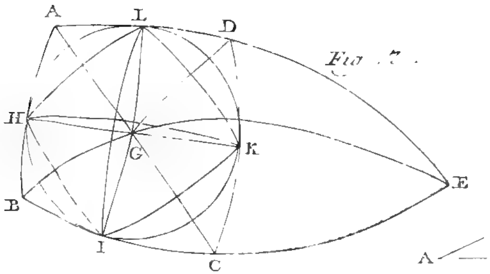
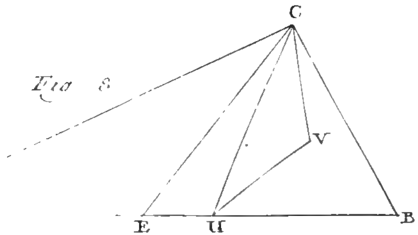


Fig. 8



Imp. Sc. Petropol. Tom. VI. P. I. Tab. IV.

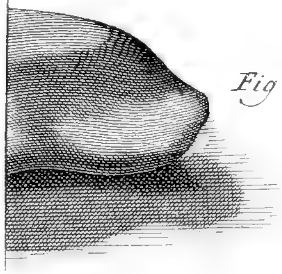


Fig. 1.

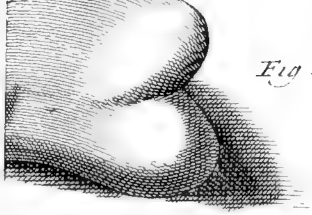


Fig. II

Fig. I.

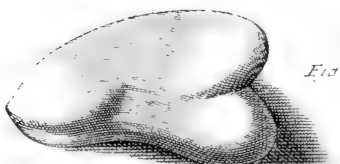
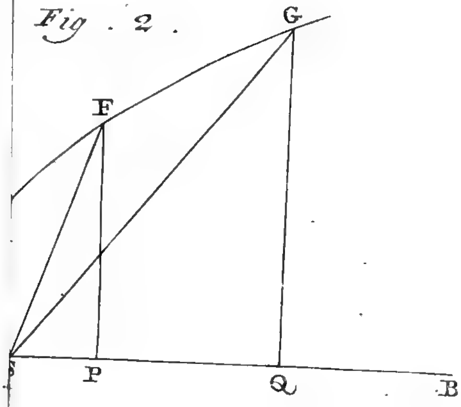
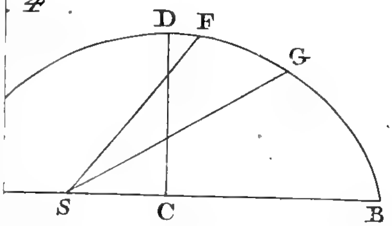


Fig. II.

Fig. 2.



4.



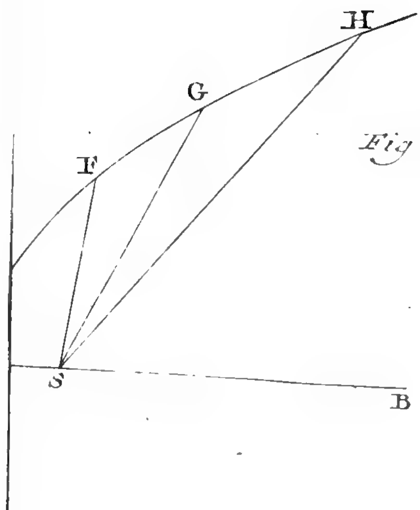


Fig. 6.

Fig. 1.

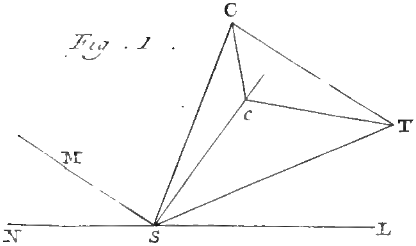


Fig. 2.

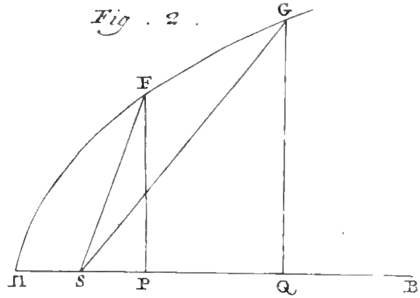


Fig. 3.

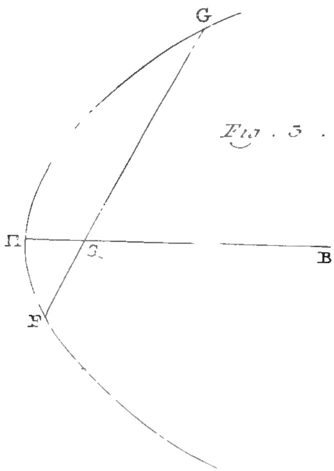


Fig. 4.

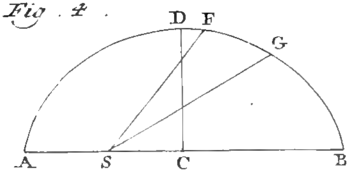


Fig. 5.

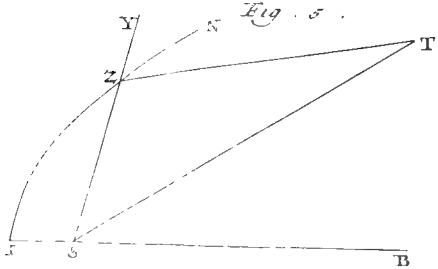
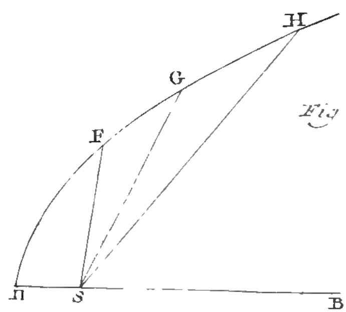


Fig. 6.



Act. ac. sc. Petrop. 1782 I

~~Es~~Essai sur les tables des mariages, des naissances et des morts de la ville de St. Petersbourg dans la Periode de 17 ans depuis 1764 jusqu'a 1780; precedé d'une exposition generale de l'utilité, qu'auraient des pareilles Tables, si elles s'etendoient sur des Gouvernements entiers de la Russie par Krafft. p. 3.

Extrait des Lettres de Hablizl.

1.) sur la culture des prairies en Boucharie. p. 62.

2.) Observations d'histoire naturelle faites sur les cotes de la mer Caspienne, communiquée d'Astrabat en Perse le 7 Juill. 1782. f.

~~bit~~ Kindvieh zu Astrabat p. 69

Dreierlei Racen vom Schaafe. p. 70

Büffel. p. 70.

Cancer pulex. p. 71.

Lampyriden. p. 71

De tractatione metallorum cum sulphure auct. Socoloff p. 193.

Idem de natura arsenici. p. 209.

Scrutamen chemicum calculi Accipenseris Husonis s. Belugae. auct. Georgi p. 225

De Calculo ex Accipensere Sturione exemto auct. Oseretskovsky. p. 234. t. IV. f. 1. 2.

Optima methodus parandi Amalgama cupri auct. Socoloff. p. 237.

Marmorum quorundam imperii Rossici Analysis chemica auct. Georgi p. 253.