

22 DEC. 1903

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE

I. *Sciences, Médecine.* — Fascicule 12.

SUR LA DÉCOMPOSITION
D'UNE
SUBSTITUTION LINÉAIRE,
RÉELLE ET ORTHOGONALE,
EN
UN PRODUIT D'INVERSIONS,

PAR

LÉON AUTONNE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Maître de conférences de mathématiques à l'Université de Lyon.



LYON

A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1903

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

— Première Série : 40 fascicules. —

EN VENTE

A LYON

Alexandre REY, Imprimeur-Éditeur
4, RUE GENTIL

A PARIS

Chez les Libraires spéciaux
SUIVANTS

Librairie Arthur ROUSSEAU, 14, rue Soufflot.

Histoire de la Compensation en droit Romain, par C. APPLETON, professeur à la Faculté de droit. (*Fasc. 21*) . . . 7 fr. 50
Caractères généraux de la loi de 1884 sur les Syndicats professionnels; justification de cette loi; réformes possibles. Etude de

législation industrielle, par R. GONNARD, docteur en droit, licencié ès lettres, secrétaire à la Société d'Économie Politique, avec une Préface de M. P. PIC, professeur à la Faculté de Droit. (*Fasc. 36*) . . . 3 fr.

Librairie Félix ALCAN, 108, boulevard Saint-Germain.

Lettres intimes de J.-M. Alberoni adressées au comte I. Rocca, ministre des finances du duc de Parme, et publiées d'après le manuscrit du collège de S. Lazaro Alberoni, par Emile BOURGEOIS, maître de conférences à l'École Normale, avec un portrait et deux fac-simile. (*Fasc. 8*) . . . 10 fr.
Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine, par Arthur HANNEQUIN, professeur à la Faculté des Lettres (*Fasc. 14*) 7 fr. 50
Saint Ambroise et la morale chrétienne au 1^{er} siècle, par Raymond THAMIN, ancien maître de conférences à la Faculté des

Lettres de Lyon, professeur au lycée Condorcet. (*Fasc. 15*) 7 fr. 50
La République des Provinces-Unies, la France et les Pays-Bas espagnols de 1630 à 1650, par A. WADDINGTON, professeur à la Faculté des Lettres.
Tome I (1630-42). 1 vol. (*Fasc. 18*). 6 fr.
Tome II (1642-50) avec deux portraits et une carte. 1 vol. (*Fasc. 31*) 6 fr.
Le Vivarais. Essai de Géographie régionale, par Louis BOURDIN, licencié ès lettres, diplômé d'Études supérieures d'Histoire et de Géographie, avec 20 gravures et 2 graphiques dans le texte (*Fasc. 37*) 6 fr.

Librairie Alphonse PICARD et Fils, 82, rue Bonaparte.

La doctrine de Malherbe d'après son commentaire sur Desportes, par Ferdinand BRUNOT, maître de conférences à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris, avec 5 pl. hors texte. (*Fasc. 1er*). 10 fr.
Le Fondateur de Lyon, Histoire de L. Munatius Plancus, par M. JULLIEN, professeur

à la Faculté des Lettres, avec une planche hors texte. (*Fasc. 9*) 5 fr.
La Jeunesse de William Wordsworth (1770-1798). Étude sur le « Prélude », par Emile LEGOUIS, professeur à la Faculté des Lettres. (*Fasc. 22*). 7 fr. 50

Librairie Ernest LEROUX, 28, rue Bonaparte.

Phonétique historique et comparée du sanscrit et du zend, par P. REGNAUD, prof. à la Faculté des Lettres. (*Fasc. 19*) 5 fr.
L'évolution d'un Mythe. Açvins et Dioscures, par Charles RENEL, maître de conférences à la Faculté des Lettres de Besançon. (*Fasc. 24*) 6 fr.
Études védiques et post-védiques, par Paul REGNAUD, professeur de sanscrit et de

grammaire comparée à l'Université de Lyon. (*Fasc. 38*). 7 fr. 50
Bhāratīya-Nāṭya-Śāstram, Traité de Bharata sur le théâtre, texte sanscrit, avec les variantes tirées de quatre manuscrits, une table analytique et des notes par Joanny GROSSET, ancien boursier d'études près la Faculté des Lettres. (*Fasc. 40*). . . 15 fr.

Librairie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, par Léon AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, chargé de cours à la Faculté des Sciences. (*Fasc. 6*) 9 fr.
Recherches sur l'équation personnelle dans les observations astronomiques de passages, par F. GONNESSIAT, aide-Astro-

nome à l'Observatoire, chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences. (*Fasc. 7*). 5 fr.
Recherches sur quelques dérivés surchlorés du phénol et du benzène, par Etienne BARRAL, professeur agrégé à la Faculté de médecine (*Fasc. 17*) 5 fr.

SUR LA DÉCOMPOSITION
D'UNE
SUBSTITUTION LINÉAIRE,
RÉELLE ET ORTHOGONALE,
EN
UN PRODUIT D'INVERSIONS.

5898.

Lyon. — Imp. A. REY, Imprimeur de l'Université, 4, rue Gentil. — 33185

EXEMPLAIRE N° 382

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE

I. *Sciences, Médecine.* — Fascicule 12.

SUR LA DÉCOMPOSITION
D'UNE
SUBSTITUTION LINÉAIRE,
RÉELLE ET ORTHOGONALE,
EN
UN PRODUIT D'INVERSIONS,

PAR

LÉON AUTONNE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Maître de conférences de mathématiques à l'Université de Lyon.



LYON

A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

Rue Gentil, 4

PARIS

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins

1903

SUR LA DÉCOMPOSITION
D'UNE
SUBSTITUTION LINÉAIRE,
RÉELLE ET ORTHOGONALE,
EN
UN PRODUIT D'INVERSIONS.

INTRODUCTION.

Considérons une *substitution*, ou opération quelconque, S , effectuée sur certaines quantités. Pour l'étude approfondie de S , ou de groupes des S , il sera, en général, très utile de savoir décomposer S en un produit d'opérations *élémentaires* s , de *même nature* que S , mais *aussi simples que possible*.

Par exemple, si S est une substitution littérale, c'est-à-dire une permutation entre des lettres, les substitutions élémentaires (*voir le Traité classique de M. Jordan*) sont les *cycles*, ou, plus simplement encore, les transpositions de deux lettres.

C'est une pareille décomposition que je me propose de faire sur la substitution S , linéaire, réelle et orthogonale, n -aire, c'est-à-dire effectuée sur n variables homogènes et réelles.

Je n'ai pu hésiter sur le choix des opérations élémentaires; ce seront des inversions, c'est-à-dire des transformations par rayons vecteurs réciproques généralisées. En effet, S est isogonale, c'est-à-dire conserve les angles. Or (d'après Liouville et MM. Darboux, Poincaré, Goursat, etc.) toute transformation isogonale d'un espace quelconque est un produit d'inversions.

Le présent Mémoire contient la solution effective et complète du problème suivant :

Décomposer, en un produit d'inversions, la substitution S , linéaire n -aire, réelle et orthogonale.

La question est traitée comme se rattachant à la théorie des *formes bilinéaires*; on fait usage tant du calcul symbolique que des principes de Weierstrass (*Elementartheiler, etc.*), fondamentaux dans la matière. Je m'inspire, bien entendu aussi, tant des travaux de mes devanciers (lesquels sont, dans ce domaine et outre Weierstrass, encore Kronecker ainsi que MM. Darboux et Goursat) que de mes propres publications antérieures. On trouvera ci-dessous la liste bibliographique à consulter.

Pour abrégier le langage et les raisonnements, il a paru commode d'introduire aussi une certaine terminologie géométrique, où figurent surtout des sphères.

Les n variables réelles x_i , $\{i = 1, 2, \dots, n\}$, liées par la relation $\Sigma x^2 = 1$, sont les *coordonnées* d'une sphère *réelle* x dans un espace à $n - 2$ dimensions. L'invariant simultané, vis-à-vis de toute substitution S , Σxy de deux sphères x et y est le cosinus de l'angle des deux sphères. Le *polysphère* \mathfrak{A} des p sphères a_j , $\{j = 1, 2, \dots, p\}$, est le système de ces p sphères, *rangées dans l'ordre naturel et croissant des indices j* . Le polysphère devient un *polyrectangle* si les sphères sont orthogonales deux à deux. Un *réseau* de *rang* q est le lieu des ∞^{q-1} sphères, dont les coordonnées sont liées par $n - q$ relations distinctes, linéaires et homogènes, à coefficients constants et réels. Un polysphère \mathfrak{A} , d'ordre p , a le *rang* q , si q est le

rang minimum des réseaux contenant les p sphères de \mathfrak{A} , $q \leq p$.

Je fais d'abord une étude détaillée des polysphères, des polyrectangles et des réseaux.

Ensuite on introduit l'*inversion*. C'est, par définition, une substitution S dont le déterminant est -1 et l'équation caractéristique admet la racine simple -1 et la racine

$$(n - 1)\text{-uple } 1.$$

A chaque inversion A se rattache une *sphère invertante* a . A et a se définissent mutuellement sans ambiguïté.

Soient \mathfrak{A} un polysphère, a_j ses p sphères, A_j les p inversions, dont les a_j sont les sphères invertantes. Si une substitution S est le produit

$$S = A_1 A_2 \dots A_j \dots A_p,$$

on dit que le polysphère \mathfrak{A} *fournit* S .

Dès lors, on se trouve en présence de deux problèmes, inverses l'un de l'autre, et qui sont successivement traités.

PROBLÈME I. — \mathfrak{A} est donné, construire S .

PROBLÈME II. — S est donnée, construire \mathfrak{A} .

Pour le problème I, j'établis une formule générale, par laquelle S est calculable séance tenante, d'une façon unique et sans ambiguïté.

Dans le problème II, les choses se passent moins simplement. La solution n'est plus unique et bien déterminée. En effet, sans changer la substitution S , fournie par un polysphère \mathfrak{A} , on peut ajouter à \mathfrak{A} les diverses sphères d'un polysphère quelconque \mathfrak{E} , *fermé*, c'est-à-dire fournissant la substitution unité.

Je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polysphère soit fermé. Notamment l'ordre p doit être pair.

Une fois tous les polysphères fermés obtenus, le problème II se ramène à trouver *un seul* des polysphères fournissant S .

D'ailleurs, sans restreindre la généralité ni sortir du réel, on peut toujours faire en sorte que l'ordre n de S soit pair, $n = 2m$

et que l'équation caractéristique soit, $\{\mu = 1, 2, \dots, m\}$,

$$\prod_{\mu} (\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta_{\mu} + 1) = 0$$

sans racines ± 1 . Alors un polysphère \mathfrak{A} fournissant S est le suivant : il y a $n = 2m$ sphères réparties en m couples Γ_{μ} . Chaque sphère de Γ_{μ} est orthogonale à chacune des $2(m-1)$ sphères des autres couples. Les deux sphères de Γ_{μ} font ensemble l'angle θ_{μ} .

Une pareille décomposition est dite *normale*. Le rang du polysphère \mathfrak{A} est précisément l'ordre $n = 2m$ de la substitution S .

Du reste, dans toute la théorie, le *rang* du polysphère \mathfrak{A} et le *réseau* sur lequel \mathfrak{A} est situé jouent un grand rôle.

Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus* (18 mai 1903).



PRÉLIMINAIRES ET GÉNÉRALITÉS.

BIBLIOGRAPHIE.

I. WEIERSTRASS. — *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1868, p. 310).

II. KRONECKER. — *Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen* (même Recueil, 1874, p. 397).

III. FROBENIUS. — *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 1).

IV. FROBENIUS. — *Ueber das Pfaffsche Problem* (même Recueil, t. LXXXII, p. 230).

V. DARBOUX. — *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. VII, 1878; notamment p. 138 à 144, sur les coordonnées pentasphériques).

VI. DARBOUX. — *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (t. I, Chap. VI, p. 213 à 219 et 226 à 230).

VII. GOURSAT. — *Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. VI, 1889).

VIII. AUTONNE. — *Sur l'Hermitien* (*Rendiconti du Circolo Matematico de Palermo*, 1902).

IX. AUTONNE. — *Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1902).

X. AUTONNE. — *Sur l'Hypohermitien* (même Recueil, 1903).

MI. AUTONNE. — *Sur la canonisation des formes bilinéaires* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1903) (1).

Avant de passer à l'analyse qui constitue le corps du Mémoire, je me propose, dans ce préambule, de faire trois choses.

Expliquer en détail et une fois pour toutes les définitions et notations, auxquelles je me conformerai rigoureusement dans la suite.

Rappeler brièvement les résultats déjà connus sur lesquels je m'appuierai, résultats développés dans les Ouvrages énumérés à la Bibliographie.

Résumer d'avance, Chapitre par Chapitre, les questions successivement traitées. Ce sera, si l'on veut, une Table des matières méthodique et raisonnée.

1° Considérons le *Tableau* constitué par np lettres

$$a_{ji} \quad [j = 1, 2, \dots, p; \quad i = 1, 2, \dots, n]$$

disposées sur p lignes et n colonnes

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & \dots & \dots & a_{pn} \end{array} \right\| = [a_{ji}].$$

Supposons que, parmi les déterminants fournis par les éléments du Tableau A , tous ceux à $(q + 1)^2$ éléments sont nuls, un au moins des déterminants à q^2 éléments étant $\neq 0$. On dira que l'entier q est le *rang* du Tableau (PASCAL, *Determinanten*, p. 192). Le rang ne peut évidemment dépasser le plus petit des entiers p et n .

2° On aura quelquefois à décomposer un Tableau A en

(1) On renverra à cette liste par l'indication du chiffre romain, qui marque chaque Ouvrage.

Tableaux partiels formés en prenant seulement certaines lignes et certaines colonnes. On emploiera alors les notations, comme celle ci-dessous, qui se comprend de suite.

\mathfrak{A}	\mathfrak{A}'	\mathfrak{A}''	p_1
\mathfrak{B}	\mathfrak{B}'	\mathfrak{B}''	p'_1
...
...

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n'_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n''_1}$

$$n = n_1 + n'_1 + n''_1 + \dots,$$

$$p = p_1 + p'_1 + \dots,$$

où \mathfrak{A} est un Tableau à p_1 lignes et n_1 colonnes, où \mathfrak{B}'' est un Tableau à p'_1 lignes et n''_1 colonnes, etc.

3° Si A désigne un Tableau à p lignes et n colonnes, je désignerai souvent par la notation

$$[A]_{ji}$$

l'élément qui occupe l'intersection de la $j^{\text{ième}}$ ligne avec la $i^{\text{ième}}$ colonne. Par conséquent (1°),

$$[A]_{ji} = a_{ji}.$$

4° On réservera le nom de *matrice* aux Tableaux carrés, où $p = n$. Une pareille matrice A sera n -aire (primaire, binaire, ternaire, quaternaire, quinaire, etc.) et aura l'ordre n . Le déterminant de la matrice A , à n^2 éléments, s'écrira $|A|$.

Outre les notations déjà données pour les Tableaux on écrira

souvent aussi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{pour une matrice.}$$

Une matrice, où tous les éléments situés sur la diagonale principale sont égaux à l'unité, tandis que tous les autres éléments sont nuls, se nommera la *matrice-unité* et s'écrira E , *quel que soit l'ordre*. S'il y a, dans une même formule et *de façon qu'une ambiguïté soit à craindre*, plusieurs matrices-unité, on mettra l'ordre en indice : E_n, E_n, \dots

Il est évident que tout Tableau peut être envisagé comme une matrice où plusieurs lignes, ou plusieurs colonnes, ne contiennent que des zéros.

5° La matrice $A = [a_{jk}] \{j, k = 1, 2, \dots, n\}$ fournit immédiatement la *forme bilinéaire n-aire*

$$A(x, y) = A(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \sum_{jk} a_{jk} y_j x_k.$$

On notera que c'est à la série de variables (il y a deux séries, les x et les y) écrite la *seconde* dans $A(x, y)$ que correspond le *premier* indice du coefficient a_{jk} .

6° La matrice A fournit aussi la *substitution linéaire n-aire* (ou collinéation, si $|A| \neq 0$)

$$A = \left| x_j \quad \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_j} \right| = \left| x_j \quad \sum_k a_{jk} x_k \right|.$$

On posera souvent

$$\sum_k a_{jk} x_k = A[x_j],$$

ce qui permet d'écrire, pour la substitution,

$$A = [x_j \quad A[x_j]].$$

ou, plus simplement encore et d'une façon symbolique,

$$A = [x \quad A[x]].$$

Pareillement $S = [s_{jk}]$ étant une matrice n -aire, l'égalité symbolique

$$S[x] = z$$

équivalent au système des n relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k s_{jk} x_k = z_j \\ j, k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}.$$

7° Habituellement aucune ambiguïté n'étant à craindre entre trois objets essentiellement différents, je désignerai par la même lettre, A par exemple, soit une matrice, soit la forme bilinéaire, soit la substitution que A fournit.

8° Si $A = [a_{ji}]$, $\{j = 1, \dots, p; i = 1, 2, \dots, n\}$, est un Tableau à p lignes et n colonnes, le tableau $A' = [a_{ij}]$ à n lignes et à p colonnes se nommera le Tableau *transposé* de A .

9° Soient $A = [a_{ji}]$ et $B = [b_{ji}]$ deux Tableaux à p lignes et n colonnes; l'égalité $A = B$ est l'équivalente aux np égalités

$$a_{ji} = b_{ji}.$$

10° Soient K une quantité imaginaire et \bar{K} la conjuguée; si l'on a un Tableau $A = [a_{ji}]$, j'écrirai

$$\bar{A} = [\bar{a}_{ji}].$$

11° Si A est une matrice, la relation

$$A' = A \text{ exprime que } A \text{ est } \textit{symétrique};$$

$$A' = -A \text{ exprime que } A \text{ est } \textit{alternée};$$

$$\bar{A} = A \text{ exprime que } A \text{ est } \textit{réelle}.$$

La condition de réalité vaut aussi pour un Tableau.

12° Prenons deux matrices n -aires, $\{j, k, l = 1, 2, \dots, n\}$,

$$A = [a_{jk}], \quad B = [b_{jk}];$$

la matrice n -aire

$$C = [c_{jk}], \quad c_{jk} = \sum_l a_{jl} b_{lk},$$

sera, *par définition*, le produit AB des deux matrices, dans l'ordre indiqué des facteurs. On écrira aussi

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie de suite que

$$(AB)' = B' A', \quad \overline{(AB)} = \overline{A} \overline{B}.$$

13° Les deux *formes bilinéaires* $A(x, y)$, $B(x, y)$ ont pour *produit* la forme bilinéaire

$$\sum_l \frac{\partial A(x, y)}{\partial x_l} \frac{\partial B(x, y)}{\partial y_l} = \sum_{j,l} a_{jl} y_j b_{lk} x_k = \sum_{ik} y_j x_k \sum_l a_{jl} b_{lk} = C(x, y).$$

Les règles de la multiplication symbolique sont les mêmes pour les matrices et pour les formes bilinéaires.

14° Les deux *substitutions* A et B ont pour *produit*, au sens de M. Jordan, la substitution obtenue en effectuant, sur les x , *d'abord* la substitution A , *puis* la substitution B . Par l'effet de A , x_j devient

$$A[x_j] = \sum_l a_{jl} x_l;$$

par l'effet de B , $A[x_j]$ devient

$$\sum_l a_{jl} B[x_l] = \sum_l a_{jl} \sum_k b_{lk} x_k = \sum_k x_k \sum_l a_{jl} b_{lk} = C[x_j] = AB[x_j].$$

La conclusion est la même qu'au 13°.

Donc les formules du calcul symbolique fondées sur la multiplication symbolique sont susceptibles d'une triple interprétation, en matrices, en formes bilinéaires, en substitutions linéaires.

Il sera en général indifférent de prendre une certaine des trois interprétations et inutile de la spécifier. D'habitude, dans les démonstrations et raisonnements, le langage sera *en matrices*.

15° Il est inutile de donner des règles pour la multiplication des tableaux puisque tout tableau est une matrice dans laquelle certaines lignes ou certaines colonnes ne contiennent que des zéros.

Si A et B sont deux matrices avec $|A| \neq 0$, l'égalité $BA = 0$ entraîne $B = 0$.

A restant une matrice n -aire avec $|A| \neq 0$, supposons que B est un tableau à p lignes et n colonnes. Le produit $C = BA$ sera un tableau à p lignes et n colonnes

$$C = [c_{jk}], \quad c_{jk} = \sum_l b_{jl} a_{lk}$$

$j = 1, 2, \dots, p; \quad l, k = 1, 2, \dots, n.$

L'égalité $C = 0$ ou les np égalités

$$c_{jk} = \sum_l b_{jl} a_{lk} = 0$$

donnent aussi $b_{jl} = 0$ ou $B = 0$. En effet, pour j donné, les n lettres b_{jl} sont liées par n relations linéaires et homogènes, *distinctes*, puisque $|A| \neq 0$, etc.

16° Une matrice n -aire A sera dite

$$\begin{array}{ll} \textit{unitaire} & \text{si} \quad A\bar{A}' = E, \\ \textit{orthogonale} & \text{si} \quad AA' = E. \end{array}$$

On vérifiera de suite que, parmi les trois propriétés réalité,

orthogonalité, unitarité, que possède éventuellement une matrice, deux quelconques entraînent la troisième.

17° Passons maintenant à l'importante notion de l'*équivalence* entre deux matrices n -aires A et B .

A et B seront *équivalentes* par définition s'il existe deux autres matrices n -aires L et M , avec $|L|$ et $|M| \neq 0$, telles que

$$B = MAL.$$

Si $M = L^{-1}$, A et B sont *semblables*.

Si $M = L'$, A et B sont *congruentes*.

Vis-à-vis de la similitude, la multiplication est une opération invariante, car

$$(L^{-1}A_1L)(L^{-1}A_2L) = L^{-1}A_1A_2L.$$

Vis-à-vis de la congruence, ce qui est invariant c'est la relation entre une matrice A et sa transposée A' . En effet

$$(L'AL)' = L'A'L.$$

Dans le cas particulier où L est orthogonale, $L' = L^{-1}$, il y aura à la fois congruence et similitude.

Si l'on transforme par l'orthogonale L un groupe de matrices, dans le groupe transformé subsisteront les relations nées de la transposition.

18° Le problème de l'équivalence a complètement été résolu par Weierstrass (I). Je me bornerai à résumer l'exposé de Frobenius (III) dans la mesure utile à mon objet.

Weierstrass introduit les *faisceaux* de matrices

$$\rho A + B \quad \text{et} \quad \rho C + D$$

où ρ est un paramètre variable. Deux pareils faisceaux sont *équivalents* par définition, s'il existe deux matrices L et M , avec $|L| \neq 0$ et $|M| \neq 0$, telles que

$$C = MAL, \quad D = MBL.$$

et, par suite, pour toute valeur de ρ ,

$$\rho C + D = M(\rho A + B)L.$$

19° Prenons le déterminant $\Delta_0 = |\rho A + B|$, polynôme de degré n en ρ . Les $k^{\text{ièmes}}$ mineurs de Δ_0 sont des polynômes de degré $n - k$; soit Δ_k leur plus grand commun diviseur. Prenons une racine m -uple r de l'équation $\Delta_0 = 0$; supposons que r soit racine α_k -uple dans l'équation $\Delta_k = 0$, avec $\alpha_0 = m$, tandis que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{q'-1}$ sont positifs et $\alpha_{q'} = 0$.

$q = n - q'$ sera le rang (1°) du déterminant

$$|rA + B|.$$

Les α_k forment une suite *décroissante*

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_k > \dots > \alpha_{q'-1} > 0,$$

tandis que les entiers *non négatifs* $\delta_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k - 1$ forment une suite *non croissante*

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_k \geq \dots \geq \delta_{q'}.$$

De plus

$$\sum_{k=1}^{k=q'} \delta_k = \sum_k (\alpha_{k-1} - \alpha_k - 1) = \alpha_0 - q'$$

ou

$$(0) \quad m - q' = \sum_k \delta_k.$$

Weierstrass dit que les expressions

$$(\rho - r)^{\alpha_{k-1} - \alpha_k}$$

sont les *Elementartheiler* afférents à la racine r . Je traduirai *Elementartheiler* par *successif* (sous entendant : *facteur* ou *diviseur*). Je nommerai les différences $\alpha_{k-1} - \alpha_k$ *exposants successifs*. Je dirai que les successifs $(\rho - r)^{\alpha_{k-1} - \alpha_k}$ font connaître la *structure* du faisceau $\rho A + B$.

20° L'admirable théorème de Weierstrass (1) peut alors se formuler ainsi :

L'identité de structure pour deux faisceaux est la condition nécessaire et suffisante de leur équivalence.

Il suffira donc de s'assurer que les successifs sont les mêmes de part et d'autre.

Si l'on sait reconnaître l'équivalence des faisceaux, on saura évidemment reconnaître (18°) l'équivalence des matrices isolées.

21° Le faisceau $\rho E - A$ est le *faisceau caractéristique* de la matrice A . La *structure* d'une matrice A sera, par définition, la structure du faisceau caractéristique.

La condition nécessaire et suffisante de similitude entre deux matrices A et B est l'équivalence des faisceaux caractéristiques. En effet la relation

$$\rho E - B = M(\rho E - A)L$$

donne

$$E = ML \quad \text{d'où} \quad M = L^{-1}, \quad \dots$$

Done, *l'identité de structure entre deux matrices est la condition nécessaire et suffisante de leur similitude.*

22° Une matrice est *canonique* si elle a tous ses éléments nuls, excepté ceux de la diagonale principale. Si une matrice A est semblable à une canonique A_0 , A est *canonisable*. Alors $A = L^{-1}A_0L$ et la matrice L est une *canonisante* de A .

J'ai construit (2) (XI) toutes les matrices canonisables.

Pour que A soit canonisable, il faut et il suffit que les exposants successifs (19°) soient tous égaux à l'unité ou que *les successifs soient simples*, c'est-à-dire tous les δ_k (19°) nuls.

(1) L'énoncé du théorème est un peu plus compliqué quand $|\rho A + B| \equiv 0$; mais ce cas ne se présentera jamais dans mes recherches.

(2) D'après Weierstrass.

Comme tous les δ_k sont positifs ou nuls par définition, on a, en vertu de la formule (o) du 19^o, la proposition suivante :

Pour la canonisabilité d'une matrice Λ , il faut et il suffit que le degré m de multiplicité d'une racine r dans l'équation caractéristique

$$\Delta_0(\rho) = |\rho E - \Lambda| = 0$$

soit égal à l'excès q' de l'ordre n sur le rang q du déterminant

$$|\rho E - \Lambda|, \quad \text{c'est-à-dire} \quad m = q' = n - q.$$

Notamment, sont canonisables (XI) :

Toutes les substitutions d'ordre fini ;

Toutes les unitaires ;

Toutes les orthogonales.

23^o Kronecker (II) a démontré que si deux faisceaux

$$\rho A + A' \quad \text{et} \quad \rho B + B'$$

sont équivalents, ils sont aussi *congruents*. Autrement dit, il existe au moins une matrice L , $L \neq 0$, telle que

$$B = L'AL.$$

24^o Passons maintenant au problème du changement de variables dans les matrices ou les formes bilinéaires.

Soient la matrice n - aire

$$P = [p_{jk}] \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

et la forme bilinéaire

$$P(x, y) = \sum_{jk} p_{jk} y_j x_k.$$

Posons avec les notations du 6^o, A et B étant deux matrices où $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$,

$$(1) \quad x = A[\xi], \quad y = B[\tau].$$

Il viendra $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(A[\xi], B[\eta]) \\ &= \sum_{jk\alpha\beta} p_{jk} b_{j\beta} a_{k\alpha} \xi_{\alpha} \eta_{\beta} = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\beta} \xi_{\alpha} \sum_{jk} p_{jk} b_{j\beta} a_{k\alpha}. \end{aligned}$$

Mais, en égard à 12° et 3°,

$$\sum_{jk} b_{j\beta} p_{jk} a_{k\alpha} = [B'PA]_{\beta\alpha}.$$

Donc

$$P(x, y) = B'PA(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta), \quad Q = B'PA.$$

Soient P_1, P_2, \dots diverses matrices; Q_1, Q_2, \dots , ce qu'elles deviennent par le changement de variables (1) ci-dessus.

Si l'on veut que la multiplication (voir aussi 17°) soit un invariant, il faut que

$$(2) \quad \begin{aligned} Q_1 Q_2 &= B'P_1 A B'P_2 A = B'P_1 P_2 A, \\ P_1 A B'P_2 &= P_1 P_2. \end{aligned}$$

La relation (2) est satisfaite si $B' = A^{-1}$, c'est-à-dire si la transformation (1) est *contragrédiente*. Cela est même nécessaire si $|P_1| \neq 0, |P_2| \neq 0$.

Si l'on veut (17°) que le changement de variables n'altère pas les relations nées de la transposition, on doit avoir

$$(3) \quad Q' = (B'PA)' = A'P'B = B'P'A.$$

On satisfera à (3) en faisant $B = A, Q = A'PA$. Alors, la transformation est *cogrédiente*; P et Q sont congruentes.

En particulier, les relations (2) et (3) sont toutes deux satisfaites, si l'on pose dans (1)

$$x = W[\xi], \quad y = W[\eta],$$

W étant une orthogonale, $W' = W^{-1}$.

C'est de ce changement de variables que je me servirai principalement.

25° Soient deux matrices P et $Q = W^{-1}PW = W'PW$ qui ne diffèrent que par un pareil changement de variables.

Je dirai que P et Q ont même *configuration* et ne diffèrent que par l'*orientation*, ou bien encore que P et Q sont *projectives* l'une de l'autre. Je ne considérerai pas P et Q comme essentiellement distinctes, mais comme *identiques à l'orientation près*.

26° Prenons n variables x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), qu'on peut toujours assimiler aux coordonnées d'une certaine figure X dans un certain espace \mathfrak{E} ; autrement dit, la position de X dans \mathfrak{E} est connue dès qu'on possède les n paramètres x_i , et réciproquement.

Supposons les x réels et X réelle *par définition*, en vertu de la réalité des x . Une substitution linéaire n -aire et orthogonale ω , opérée sur les x , équivaut dans \mathfrak{E} à une certaine transformation géométrique \mathfrak{w} .

J'ai démontré que le groupe réel et orthogonal W des n -aires ω est *transitif* (VII, *Sur l'Hermitien*). Autrement dit, les transformations \mathfrak{w} permutent transitivement les X réels de l'espace \mathfrak{E} , *le groupe W des \mathfrak{w} est transitif*.

Soient \mathfrak{X} et \mathfrak{X}' deux figures de \mathfrak{E} constituées chacune par des X en nombre fini ou infini. S'il existe au moins une transformation \mathfrak{w} (ou ω) qui change \mathfrak{X} en \mathfrak{X}' , je dirai, comme au 25°, que :

\mathfrak{X} et \mathfrak{X}' ont même *configuration*, sont *projectives* l'une de l'autre, sont *identiques à l'orientation près*, peuvent être *projectivement amenées* l'une sur l'autre, etc.

27° Soit une matrice n -aire S, dont l'équation caractéristique D

$$\Delta_0(\rho) = \varphi(\rho) = |\rho E - S| = 0$$

possède σ racines distinctes u_s ($s = 1, 2, \dots, \sigma$), avec les degrés m_s de multiplicité

$$\varphi(\rho) = \prod_s (\rho - u_s)^{m_s}; \quad n = \sum_s m_s.$$

Désignons par $\psi(\rho)$ le polynome de degré σ

$$\psi(\rho) = \prod_s (\rho - u_s).$$

Considérons le premier successif (19°)

$$(\rho - u)^{m-\alpha_1} = (\rho - u)^{\alpha_0-\alpha_1},$$

adhérent à une racine m -uple u .

Le plus grand commun diviseur Δ_1 des premiers mineurs sera divisible par $(\rho - u)^{\alpha_1}$ et non par $(\rho - u)^{\alpha_1+1}$; la fraction rationnelle $\frac{\Delta_1}{\Delta_0}$, rendue irréductible, admettra $(\rho - u)^{\alpha_0-\alpha_1}$ au dénominateur. Comme S est orthogonale, les successifs sont simples (22°). Le dénominateur ne contiendra que le diviseur $\rho - u$, afférent dans $\psi(\rho)$ à la racine u .

On voit facilement de là que

$$(\rho E - S)^{-1} = \frac{\Omega_\rho}{\psi(\rho)},$$

où Ω_ρ est une matrice n -aire dont les éléments sont des polynomes de degré $\sigma - 1$ en ρ .

28° Une matrice réelle A de rang q sera (X , *Sur l'hypohermitien*) *hypohermitienne* si

I. $A' = A$ (symétrie);

II. L'expression $X = A(x, \bar{x})$, toujours réelle, ne devient négative pour aucun choix des variables x , imaginaires ou non.

Dans le cas particulier, où le rang q de la matrice n -aire A est précisément $q = n$, $|A| \neq 0$, l'hypohermitienne devient *hermitienne*.

Voici les propriétés d'une hypohermitienne réelle \mathfrak{A} , sur lesquelles je m'appuierai le plus souvent.

Pour qu'une matrice n -aire réelle et symétrique \mathfrak{A} soit hypohermitienne, il faut et il suffit que la forme quadra-

tique $\mathfrak{A}(t, t)$ ne devienne négative pour aucun choix des n variables réelles t .

Toute \mathfrak{A} est canonisable et possède au moins une canonisante réelle et orthogonale. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et non négatives.

Soit une hypohermitienne \mathfrak{A} de rang q et un exposant m entier et positif. Il existe toujours une et une seule hypohermitienne \mathfrak{B} , telle que $\mathfrak{B}^m = \mathfrak{A}$. \mathfrak{B} a aussi le rang q .

On pourra écrire et dire

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathfrak{A}} = \text{racine } m^{\text{ième}} \text{ de } \mathfrak{A}.$$

\mathfrak{A}^m est aussi hypohermitienne.

Toute \mathfrak{A} de rang q peut être engendrée par le procédé

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}',$$

où \mathfrak{Q} est une matrice réelle, aussi de rang q . Pour \mathfrak{A} donnée, \mathfrak{Q} s'obtient par la formule

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{W},$$

\mathfrak{W} = orthogonale réelle arbitraire.

Voici maintenant un rapide aperçu de ce que l'on trouvera successivement dans les deux Parties et les dix Chapitres du Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DES SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES ET DES SPHÈRES.



Dans cette première Partie, j'approfondis les propriétés des substitutions linéaires, réelles et orthogonales, sur lesquelles est fondée la solution du problème.

On fait usage d'une terminologie géométrique, commode pour abréger le langage.

CHAPITRE I.

COORDONNÉS DE LA SPHERE. (1° à 10°)



Généralisant les coordonnées pentasphériques de M. Darboux (V, VI, VII), j'introduis n variables réelles x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), coordonnées d'une *sphère réelle* x . Pour

$$n = 5,$$

x est bien une sphère ordinaire de l'espace à trois dimensions, sphère qui peut être imaginaire, pour des x_i réels, au sens habituel du mot. Au point de vue du groupe \mathfrak{W} (voir 26° ci-dessus) une sphère isolée x n'a pas d'invariant projectif, mais deux sphères x et y ont l'invariant

$$v = \sum_i x_i y_i.$$

Comme on fait toujours

$$1 = \sum x^2 = \sum y^2,$$

le module de v ne dépasse pas 1. Par analogie avec le cas $n = 5$ (sphère ordinaire) on dit que v est le cosinus de l'angle que forment entre elles les deux sphères x et y . Si $v = 0$, les deux sphères sont orthogonales entre elles.

La sphère

$$0 = x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n, \\ x_i = 1$$

se nommera la *sphère coordonnée* Ξ_i . La coordonnée x_i de la sphère courante x est le cosinus de l'angle que fait x avec Ξ_i .

CHAPITRE II.
POLYRECTANGLES
(11° à 17°).



Un *polyrectangle* P_n^m est la figure formée par m sphères orthogonales deux à deux, $m \leq n$. Deux polyrectangles P_n^m et $P_n^{m'}$ sont *résiduels* l'un de l'autre si :

1° $m + m' = n$;

2° Chaque sphère de l'une est orthogonale à chaque sphère de l'autre.

Je démontre l'existence des polyrectangles et j'indique leur construction. Un polyrectangle remarquable du type P_n^m , est \mathfrak{C}_n^m , constitué par les m premières sphères coordonnées; il a pour polyrectangle résiduel $\bar{\mathfrak{C}}_n^{n-m}$, constitué par les $n - m$ dernières sphères coordonnées.

Deux polyrectangles résiduels, à m et à $n - m$ sphères, peuvent toujours être projectivement amenés sur \mathfrak{C}_n^m et $\bar{\mathfrak{C}}_n^{n-m}$ et n'en diffèrent que par l'orientation.

CHAPITRE III.
RESEAUX
ET POLYSPHÈRES
(18° à 27°).

Il y a ∞^{n-1} sphères x , puisque les n paramètres x_i sont liés par $\Sigma x^2 = 1$. Je dirai que le lieu des sphères x est un *réseau* R_n , de rang n . Établissons, entre les x_i , $n - q$ relations linéaires, homogènes, à coefficients réels et constants, *distinctes*, ou bien admettons que les x_i sont proportionnelles à des fonctions linéaires et homogènes de q paramètres réels *distincts*. Il n'y a alors plus que ∞^{q-1} sphères dont le lieu est un réseau R_q de rang q .

p sphères a_j , de coordonnées a_{ji} ,

$$\{j = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, n\},$$

rangées dans l'ordre des indices j croissants, formeront par définition un *polysphère* \mathfrak{A}_p , ou \mathfrak{A} , d'ordre p . Si le Tableau (1° ci-dessus) $[a_{ji}]$ a le rang q , q sera aussi le rang du polysphère.

Le polysphère \mathfrak{A} définit sans ambiguïté :

I. Un réseau R_q , de même rang q , sur lequel sont situées les p sphères de \mathfrak{A} .

II. Un réseau R_{n-q} , *complémentaire* à R_q ,

constitué par les ∞^{n-q-1} sphères orthogonales à toutes les sphères de \mathfrak{A} .

Sur un R_q quelconque on peut toujours placer au moins un polyrectangle à q sphères, lequel pourra être projectivement amené sur celui des q premières sphères coordonnées.

Si l'on pose $\xi_j = \Sigma a_{ji} x_i$, il existera entre les p quantités ξ_j un système \mathfrak{X}_{p-q} de $p - q$ équations distinctes, linéaires, homogènes, à coefficients réels et constants.

CHAPITRE IV.
MATRICES Λ ET V
(28° à 40°).

Reprenons le polysphère \mathfrak{A} d'ordre p et de rang q , $p \geq q$; le Tableau $[a_{ji}]$, complété par $p - q$ dernières colonnes formées de zéros, donne une matrice p -aire A , de rang q .

Nommons $\Lambda = [\lambda_{jk}]$ la matrice p -aire réelle et symétrique, où l'élément $\lambda_{jk} = \lambda_{kj}$ est le cosinus de l'angle formé par les deux sphères a_j et a_k du polysphère \mathfrak{A} .

La matrice Λ a le rang q de \mathfrak{A} . Λ est hypohermitienne (28° ci-dessus) et l'on a

$$\Lambda = \Lambda \Lambda';$$

donc (28°)

$$\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{2}} W,$$

$W =$ orthogonale réelle quelconque; ainsi, connaissant la matrice Λ , on connaît le polysphère \mathfrak{A} , à l'orientation près.

A la matrice Λ (ou Λ_p) se rattache la matrice V (ou V_p)

$$V_p = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda_{12} & 2\lambda_{13} & \dots & \dots & 2\lambda_{1p} \\ 0 & 1 & 2\lambda_{23} & \dots & \dots & 2\lambda_{2p} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

où

$$|V_p| = 1.$$

J'étudie les matrices $V_p, V'_p, V_p^{-1},$

$$T_p = \frac{1}{2}(V_p - V'_p),$$

$$\tilde{c}_p = \frac{1}{2}(V_p^{-1} - V_p'^{-1}),$$

$$M_p = \frac{1}{2}(V_p^{-1} + V_p'^{-1});$$

T_p et \tilde{c}_p sont alternés;

$$\Lambda_p = \frac{1}{2}(V_p + V'_p).$$

J'établis une formule de récurrence entre

$$\varphi_p = -V_p^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_p; \tau_1, \dots, \tau_p)$$

et les φ_p d'indice moindre, où ξ et η sont des variables quelconques dont la signification se précisera au Chapitre VIII.

CHAPITRE V.
MATRICES \mathfrak{Q} ET \mathfrak{P}
(41° à 62°).

La matrice \mathfrak{Q} (ou \mathfrak{Q}_p) est $-V'V^{-1}$; $|\mathfrak{Q}|$ est $(-1)^p$. La structure de \mathfrak{Q} est évidemment celle du faisceau $\varphi V + V'$. Mettons l'hypohermitienne Λ sous forme canonique Λ_0 au moyen de la canonisante réelle et orthogonale D . On aura

$$\Lambda = D\Lambda_0D', \quad D' = D^{-1}.$$

Alors $\mathfrak{Q} = D\mathfrak{Q}_0D'$

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array} \right\} \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta & Q_1 \\ \hline 0 & E \\ \hline \end{array} = \mathfrak{Q}_0,
 \end{array}$$

où Δ est une matrice q -aire, E la matrice $(p - q)$ -aire unité, Q_1 un Tableau à q lignes et $p - q$ colonnes; le Tableau zéro,

à $p - q$ lignes et q colonnes, est constitué par des zéros.

De plus,

$$\Lambda_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

où \mathcal{L} est une hermitienne canonique q -aire, de façon que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \Lambda_0^{\frac{1}{2}}.$$

Alors la matrice p -aire \mathfrak{P} est

$$L^{-1} \mathfrak{Q}_0 L = \mathfrak{P} = \begin{array}{|c|c|} \hline P & Q \\ \hline 0 & E \\ \hline \end{array},$$

où

$$P = \mathcal{L}^{-1} \Delta \mathcal{L}$$

et

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L} & 0 \\ \hline 0 & E \\ \hline \end{array} = L.$$

Supposant (seul cas intéressant pour la suite) la matrice q -aire P orthogonale, j'établis, d'une façon détaillée, toutes les relations qui existent entre la structure de P et celle de \mathfrak{P} , ou du faisceau $\varphi V + V'$. En particulier, pour p pair et $P = E$, la structure de P définit sans ambiguïté celle du faisceau.

CHAPITRE VI.
 SPHÈRES INVARIANTES;
 FAISCEAUX INVARIANTS;
 SEMI-CANONISATION

(63° à 77°).



Prenons une orthogonale n -aire réelle S et son équation caractéristique \mathcal{O}

$$|\rho E - S| = 0.$$

A la racine m -uple unité correspond un réseau R_m , dont S laisse invariante chacune des ∞^{m-1} sphères.

A la racine m -uple -1 correspond un R_m , tel que S change la sphère x du R_m en la sphère $-x$, de coordonnées $-x_i$.

A un couple m -uple de deux racines imaginaires conjuguées, correspond un R_{2m} .

Les ∞^{2m-1} sphères de R_{2m} se répartissent ∞ par ∞ en $\infty^{2(m-1)}$ faisceaux (ou réseaux de rang deux) *invariants*. S permute entre elles les ∞ sphères d'un faisceau invariable. Par chaque sphère de R_{2m} passe un faisceau invariant et un seul.

Les réseaux correspondant aux diverses racines distinctes de \mathcal{O} ont la propriété suivante : chacun est complémentaire (Chapitre III) au réseau formé par la totalité des autres.

Enfin, généralisant une théorie déjà donnée par M. Goursat (VII), pour le domaine quaternaire $n = 4$, j'introduis pour S une *forme semi-canonique* particulièrement simple.

Une forme bilinéaire semi-canonique $s(x, y)$ est une somme de termes des types suivants :

$$x_1 y_1; \quad -x_1 y_1;$$

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2) \cos \theta + (x_2 y_1 - x_1 y_2) \sin \theta.$$

Toute orthogonale réelle S est semi-canonisable; elle possède une forme semi-ca-

nonique s et, au moins, une semi-canonique D , réelle et orthogonale, telle que

$$S = DsD'; \quad D' = D^{-1}.$$

Si l'on pose $n = \lambda + \nu + 2N$,

$$|\rho E - S| = (\rho - 1)^\lambda (\rho + 1)^\nu \sum_k (\rho^2 - 2\rho \cos \theta_k + 1) \\ (k = 1, 2, \dots, n),$$

les arcs θ_k étant distincts ou non, on pourra, à l'orientation près, dire : S s'obtient en effectuant :

La substitution unité sur les λ premières variables ;

La canonique $|t \quad -t|$ sur les ν variables suivantes ;

L'orthogonale binaire de déterminant un

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

sur les deux variables suivantes, etc.

CHAPITRE VII.

INVERSIONS

(78° à 88°).



Dans l'espace habituel à trois dimensions, une inversion est la transformation par rayons vecteurs réciproques. Généralisant, je dirai :

Une inversion A est une orthogonale n -aire, telle que

$$|A| = -1 \quad \text{et} \quad |\rho E - A| = (\rho + 1)(\rho - 1)^{n-1}.$$

Je démontre que

$$A(x, y) = E(x, y) - 2\xi\eta, \quad \xi = \sum_i a_i x_i,$$

$$\eta = \sum_i a_i y_i, \quad 1 = \sum_i a_i^2.$$

Les a_i sont les coordonnées d'une sphère a , qui est la sphère *invertante* afférente à l'inversion A . Il est évident que

$$A' = A = A^{-1}, \quad A^2 = E.$$

Toute orthogonale S est un produit de m inversions; si S est *droite*, $m = \text{pair}$, $|S| = 1$; si S est *gauche*, $|S| = -1$, $m = \text{impair}$.

SECONDE PARTIE.

MULTIPLICATION
DES INVERSIONS
ET PROBLÈME
INVERSE.



Soit un polysphère \mathfrak{A} , des p sphères a_j , qui correspondent aux p inversions A_j , dont elles sont les sphères invertantes ($j = 1, 2, \dots, p$); nommons Π l'orthogonale $A_1 A_2 \dots A_p$.

La seconde Partie contient la solution des deux problèmes suivants, inverses l'un de l'autre.

PROBLÈME I. — *Connaissant \mathfrak{A} , construire Π .*

PROBLÈME II. — *Connaissant Π , construire \mathfrak{A} .*

Le problème I est bien déterminé. Le problème II conduit à une infinité de polysphères \mathfrak{A} différents, dont on donnera la formation générale.

CHAPITRE VIII.

MULTIPLICATION
DES INVERSIONS
(89° à 101°).



La solution du problème I est extrêmement simple, avec les notations des Chapitres IV et V.

D'abord on peut, sans restreindre la généralité et ne négligeant que l'orientation, supposer que Π est une matrice q -aire, q étant le rang du polysphère \mathfrak{A} .

Ensuite Π n'est pas autre chose que la matrice q -aire P construite au Chapitre V.

Comme application, j'ai étudié la *rotation*. C'est une substitution orthogonale n -aire S , droite, $|S| = 1$, telle que $|\rho E - S|$ est divisible par $(\rho - 1)^{n-2}$. S est le produit de deux inversions; S dépend seulement :

Du réseau de rang deux, défini par les deux sphères invertantes;

De l'angle formé par les deux sphères invertantes.

La rotation ne change pas quand on fait voyager les deux sphères sur le réseau sans altérer l'angle.

CHAPITRE IX.
SYNTHÈSE DE L'UNITÉ
(102° à 118°).



Soient pour Π donnée deux polysphères \mathfrak{A} , des α sphères a_1, \dots, a_α , et \mathfrak{B} des β sphères b_1, \dots, b_β , tous deux solutions du problème II. On aura, les A et les B étant des inversions,

$$\Pi = A_1 \dots A_\alpha = B_1 \dots B_\beta,$$

d'où

$$E = B_1 \dots B_\beta A_\alpha \dots A_1.$$

Le polysphère \mathfrak{E} des $\alpha + \beta$ sphères

$$b_1, \dots, b_\beta, \quad a_\alpha, \dots, a_1$$

est, par définition, *fermé*, puisqu'il fournit l'orthogonale unité. α et β sont de même parité et l'ordre d'un polysphère fermé est toujours pair.

Je nomme *synthèse de l'unité* le problème relatif à la construction des polysphères fermés.

Soit \mathfrak{A} un polysphère fermé d'ordre

pair p . Quelles sont pour cela les conditions nécessaires et suffisantes?

La réponse est très simple, si la discussion est un peu minutieuse : il faut et il suffit que les deux matrices alternées

$$\frac{1}{2}(V - V') \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(V^{-1} - V'^{-1})$$

soient inverses l'une de l'autre, la matrice A étant, bien entendu, hypohermitienne.

Je construis effectivement le tétrasphère fermé $p = 4$. Les quatre sphères a_1, a_2, a_3, a_4 sont sur un même réseau binaire R_2 ; l'angle de a_2 avec a_1 est égal à l'angle de a_3 avec a_4 .

CHAPITRE X.
SYNTHÈSE
D'UNE ORTHOGONALE
DONNÉE;
DÉCOMPOSITIONS
NORMALES
(119° et suivants).

Soit \mathfrak{A} une solution du problème II. Toutes les autres solutions s'obtiendront en mettant à la suite des sphères de \mathfrak{A} les sphères d'un polysphère fermé quelconque \mathfrak{C} .

On pourra toujours prendre pour \mathfrak{A} un polysphère où l'ordre p est égal au rang q . On a vu plus haut qu'il est licite de supposer $n = q$. On est ainsi amené aux décompositions normales.

Voici quelle est la question :

Soit S une orthogonale n -aire. On peut toujours, en ne négligeant que l'orientation, admettre que $|E - S| \neq 0$. Alors le problème de la décomposition normale consiste à construire un polysphère \mathfrak{A} , à n sphères et de rang n , fournissant S par le produit des n inversions, lesquelles admettent pour sphères invertantes celles du polysphère.

Je construis un pareil polysphère, que l'on obtient en combinant un polyrectangle avec divers disphères (polysphères d'ordre deux). Les deux sphères de chaque disphère forment entre elles un angle différent de $\frac{\pi}{2}$, mais sont orthogonales à toutes les autres sphères de \mathfrak{A} .

La considération des polysphères fermés \mathfrak{E} fournit toutes les autres décompositions normales.



PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DES SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES ET DES SPHÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

COORDONNÉES DE LA SPHÈRE.

1° Dans un espace à $n - 2$ dimensions prenons des coordonnées

$$X_s, \quad s = 1, 2, \dots, n - 2,$$

que nous assimilerons à des coordonnées rectangulaires. L'équation

$$(1) \quad 0 = \sum_s (X_s - a_s)^2 - R^2 = D + A - R^2 - 2 \sum_s a_s X_s,$$

où

$$D = \sum_s X_s^2 \quad A = \sum_s a_s^2,$$

sera dite représenter une sphère, où R est le rayon et où les a_s sont les coordonnées du centre. En effet, pour $n - 2 = 3$, on a bien une sphère, au sens ordinaire du mot. D'autre part, prenons n quantités réelles x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$, liées par une relation

$$1 = \sum_\alpha x_\alpha^2 = \sum x^2;$$

considérons l'équation, $i = \sqrt{-1}$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2 \sum_s x_s X_s + (D-1)x_{n-1} + (D+1)ix_n \\ = 2 \sum_s x_s X_s + D(x_{n-1} + ix_n) - (x_{n-1} - ix_n). \end{array} \right.$$

On a encore une sphère qu'on identifiera avec la sphère (1). Il viendra

$$(3) \quad \frac{1}{x_{n-1} + ix_n} = \frac{R^2 - A}{x_{n-1} - ix_n} = \frac{-a_s}{x_s}.$$

On tire de là

$$\begin{aligned} -a_s &= \frac{x_s}{x_{n-1} + ix_n}, \\ A &= \frac{1 - x_{n-1}^2 - x_n^2}{(x_{n-1} + ix_n)^2} = (x_{n-1} + ix_n)^{-2} - \frac{x_{n-1} - ix_n}{x_{n-1} + ix_n}, \\ R^2 &= A + \frac{x_{n-1} - ix_n}{x_{n-1} + ix_n} = (x_{n-1} + ix_n)^{-2}. \end{aligned}$$

Extrayons la racine et prenons le signe plus dans les deux nombres :

$$R^{-1} = x_{n-1} + ix_n,$$

Bref on aura le système suivant

$$(4) \quad -x_s = \frac{a_s}{R} \quad \frac{1}{R} = x_{n-1} + ix_n.$$

2° Si la sphère est donnée par son centre et par son rayon, R et a_s sont connues. Le système (4) fournit les x_s . Il viendra ensuite

$$\begin{aligned} x_{n-1}^2 + x_n^2 &= (x_{n-1} + ix_n)(x_{n-1} - ix_n) \\ &= \frac{x_{n-1} - ix_n}{R} = 1 - \sum_s x_s^2 = 1 - \frac{\sum_s a_s^2}{R^2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire les deux équations

$$\begin{aligned}x_{n-1} + ix_n &= R^{-1}, \\x_{n-1} - ix_n &= \frac{R^2 - A}{R},\end{aligned}$$

d'où l'on tirera les deux dernières quantités x , savoir x_{n-1} et x_n , sans ambiguïté.

Réciproquement, si les x sont connues, les quantités a_s , coordonnées du centre, et le rayon sont connus; il en est de même pour la sphère.

On peut donc dire que *les n quantités réelles x sont les coordonnées d'une sphère réelle \mathfrak{X} .*

3° Une sphère \mathfrak{X} dite réelle, parce qu'elle a des coordonnées x réelles, peut d'ailleurs n'être pas réelle, au sens ordinaire du mot. Faisons par exemple $n = 5$ et $0 = x_1 = \dots = x_4$, $x_5 = 1$. On aura une sphère ordinaire

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1 = 0,$$

ayant son centre à l'origine des coordonnées, mais un rayon égal à l'imaginaire i .

Dans tout le présent travail je considérerai exclusivement des sphères \mathfrak{X} réelles, c'est-à-dire ayant des coordonnées x réelles.

4° Changeons le signe de tous les x . Pour la sphère \mathfrak{X} les coordonnées du centre ne changent pas, mais le rayon R change de signe. Nous dirons que les deux sphères ayant respectivement pour coordonnées

$$x_z \quad \text{et} \quad -x_z \quad (z = 1, 2, \dots, n),$$

sont *contraires* l'une de l'autre.

5° Dorénavant je parlerai de la sphère \mathfrak{X} , ayant pour coordonnées

A.

données les n quantités

$$x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

lesquelles se réduisent à $n - 1$ distinctes en vertu de $\Sigma x^2 = 1$.

La totalité de ces ∞^{n-1} sphères constituera un *réseau* ou *espace* R_n de *rang* n .

Ces notions recevront plus de développement au Chapitre III.

6° En vertu de la transitivité du groupe réel et orthogonal **W** une sphère unique x ne possède aucun invariant projectif. Les ∞^{n-1} sphères ne diffèrent que par l'orientation.

Deux sphères x et y ont un invariant. C'est l'expression

$$v = \sum_i x_i y_i = \sum x y = \frac{\Sigma (x - y)^2 - \Sigma x^2 - \Sigma y^2}{2},$$

somme algébrique de trois invariants.

Remplaçant au besoin une des sphères x ou y par sa contraire (4°), on peut faire $v > 0$. Comme

$$0 \leq \Sigma (x - y)^2 = \Sigma x^2 + \Sigma y^2 - 2 \Sigma x y = 2(1 - v),$$

$$v \leq 1.$$

On dira que *l'invariant* v est le *cosinus* de l'angle ω des deux sphères x et y .

7° Voici l'origine de cette locution.

Prenons dans l'espace ordinaire et la géométrie ordinaire deux sphères de rayon R et R' . Nommons ω l'angle d'intersection des deux sphères et Δ la distance des centres; Δ^2 sera la somme des carrés des différences coordonnées des centres. On aura la formule

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \omega, \\ \cos \omega &= \frac{R^2 + R'^2 - \Delta^2}{2RR'}. \end{aligned}$$

Avec les notations du 1°, nommons Y_s et b_s , les X_s et a_s affé-

rents à la sphère y ; puis $D' = \sum_s Y_s^2$, $A' = \sum_s b_s^2$. On aura

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{R^2 + R'^2 - \Delta^2}{2RR'} \\ &= \frac{R^2 + R'^2 - \sum_s (b_s - a_s)^2}{2RR'} = \frac{R^2 - A + R'^2 - A' + 2 \sum_s a_s b_s}{2RR'} \end{aligned}$$

et avec nos notations [formule (3)]

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{\frac{x_{n-1} - ix_n}{x_{n-1} + ix_n} + \frac{y_{n-1} - iy_n}{y_{n-1} + iy_n} + \frac{2 \sum_s x_s y_s}{(x_{n-1} + ix_n)(y_{n-1} + iy_n)}}{2} \\ &= \frac{(x_{n-1} - ix_n)(y_{n-1} + iy_n) + (x_{n-1} + ix_n)(y_{n-1} - iy_n) + 2 \sum_s x_s y_s}{2} \\ &= \sum_s x_s y_s + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n = \sum_i x_i y_i = \nu. \quad (\text{C. Q. F. D.}) \end{aligned}$$

8° Si $\nu = 1$, on a

$$\Sigma (x - y)^2 = 0$$

et les deux sphères x et y sont confondues; $\omega = 0$. Si $\nu = -1$, on a

$$0 = \Sigma (x + y)^2, \quad \omega = \pi,$$

les deux sphères sont contraires (4°).

Si $\nu = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, les deux sphères seront orthogonales.

9° Je nommerai *sphère coordonnée* Ξ_i , pour $i = 1, 2, \dots, n$, la sphère où la coordonnée $x_i = 1$, toutes les $n - 1$ autres étant nulles.

x_i est donc le cosinus de l'angle que la sphère courante x fait avec la sphère coordonnée Ξ_i . On peut dire aussi que les n coordonnées x_i sont les *cosinus directeurs* de la sphère x .

10° On reconnaîtra sans peine, dans les considérations du présent Chapitre, une généralisation des théories de M. Darboux sur les coordonnées pentasphériques de l'espace ordinaire. On se reportera aux publications suivantes de M. Darboux :

Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux (*Annales de l'Ecole normale*, 2^e série, T. VII, 1878; consulter notamment p. 138 à 144);

Leçons sur la théorie générale des surfaces, T. I, Chap. VI, p. 138 à 144 et 126 à 230.



CHAPITRE II.

POLYRECTANGLES.

11° Reprenons (5°) le réseau R_n , de rang n , lieu des ∞^{n-1} sphères x ayant les x_i pour coordonnées. Je nomme *polyrectangle* P_n^m la figure formée par m sphères a_j ($j = 1, 2, \dots, m$) de coordonnées a_{ji} , orthogonales deux à deux.

Les mn quantités a_{ji} sont liées par le système

$$\Omega(m, n) \quad \sum_i a_{ji} a_{j'i} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j' \neq j \\ 1 & \text{pour } j' = j \end{cases}.$$

Cherchons à établir l'existence du polyrectangle P_n^m et à le construire.

12° LEMME. — *La construction d'un P_n^m se ramène à celle d'un P_{n-1}^{m-1} .*

Par projectivité, on peut supposer que la $m^{\text{ième}}$ sphère a_m est la sphère coordonnée Ξ_n (9°) de coordonnées

$$x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = 1.$$

Cela revient à faire

$$a_{m1} = \dots = a_{m,n-1} = 0, \quad a_{mn} = 1.$$

Le système $\Omega(m, n)$ fournit immédiatement

$$a_{jn} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, m-1$$

et se réduit aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} a_{k\alpha} a_{k'\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k' \neq k \\ 1 & \text{pour } k' = k \end{cases} \\ \alpha = 1, 2, \dots, n-1; \quad k \text{ et } k' = 1, 2, \dots, m-1 \end{array} \right\},$$

c'est-à-dire à un système $\Omega(m-1, n-1)$. Dans le réseau R_{n-1} , les $m-1$ sphères a_k , de coordonnées $a_{k\alpha}$, forment un polyrectangle P_{n-1}^{m-1} , dont la construction assure celle de P_n^m (c. q. f. d).

13° On passera donc de P_n^m à $P_{n-1}^{m-1}, \dots, P_{n-l}^{m-l}, \dots$

Supposons d'abord $m \leq n$; on arrivera au polyrectangle

$$P_{n-m+1}^1,$$

qui se compose, sur le réseau R_{n-m+1} , d'une sphère unique, laquelle s'obtient sans difficulté et est même indéterminée pour $m < n$. P_n^m est construit.

Si $m > n$, on arrivera au polyrectangle

$$P_1^{m-n+1},$$

ce qui est absurde, car le réseau R_1 ne comporte qu'une seule sphère.

Donc, *il existera des P_n^m pour $m \leq n$, mais non pour $m > n$.*

14° Un polyrectangle P_n^n remarquable est celui de référence \mathfrak{C}_n^n , formé par les n sphères coordonnées.

Je nommerai :

\mathfrak{C}_n^m le polyrectangle des m , $m \leq n$, sphères coordonnées Ξ_1, \dots, Ξ_m ;

\mathfrak{C}_n^{n-m} le polyrectangle des $n-m$ sphères coordonnées restantes Ξ_{m+1}, \dots, Ξ_n .

Disons que deux polyrectangles P_n^m et $P_n^{m'}$ sont *résiduels* l'un de l'autre lorsque :

1° $m + m' = n$;

2° Chaque sphère de l'un est orthogonale à chaque sphère de l'autre.

Les polyrectangles \mathfrak{C}_n^m et \mathfrak{C}_n^{n-m} sont résiduels.

15° THÉORÈME. — *Tout P_n^m peut être amené sur \mathfrak{C}_n^m par une*

substitution linéaire n -aire W_n , réelle et orthogonale, convenablement choisie.

Cette proposition se ramène à celle du 12°.

Le théorème est évident pour le polyrectangle

$$P_{n-m+1}^1,$$

qui se compose d'une sphère unique, laquelle n'a pas d'invariant vis-à-vis du groupe W_{n-m+1} réel et orthogonal.

Je dis que si le théorème est vrai pour P_{n-1}^{m-1} , il est vrai aussi pour P_n^m .

Raisonnons comme au 12°, et par une W_n convenable, que je nommerai ξ_n , amenons la première sphère α_1 de P_n^m sur Ξ_1 . Alors, pour chacune des $m - 1$ sphères restantes, la première coordonnée x_1 est nulle. On a donc le Tableau suivant des $(n - 1)(m - 1)$ coordonnées restantes :

$$(o) \quad \begin{array}{cccc} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,2} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{array}$$

qui définissent un P_{n-1}^{m-1} sur un R_{n-1} . Par hypothèse, une W_{n-1} convenable, que je nommerai ξ_{n-1} , amène ce P_{n-1}^{m-1} sur le polyrectangle \mathfrak{E}_{n-1}^{m-1} du réseau R_{n-1} . Le Tableau (o) devient :

$$(o)' \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0. \end{array}$$

Alors une n -aire réelle et orthogonale φ_n , telle que

$$\varphi_n(x, y) = x_1 y_1 + \xi_{n-1}(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n)$$

amène bien P_n^m sur \mathfrak{E}_n^m (c. q. f. d.).

Il y a un corollaire évident :

Le groupe W_n permute transitivement les polyrectangles P_n^m , $m \leq n$,

16° THÉORÈME. — Deux polyrectangles résiduels (14°) P_n^m

et P_n^{n-m} peuvent toujours être amenés, simultanément, le premier sur \mathfrak{C}_n^m , le second sur \mathfrak{C}_n^{n-m} .

En vertu du théorème précédent on peut supposer déjà, sans restreindre la généralité, que P_n^m coïncide avec \mathfrak{C}_n^m .

Pour toutes les $n - m$ sphères de P_n^{n-m} les m premières coordonnées

$$x_1, \dots, x_m = 0.$$

Cela résulte de la définition donnée (14°) à la résidualité.

Les coordonnées non nulles des $n - m$ sphères de P_n^{n-m} sont données par le Tableau

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} b_{1, m+1}, & \dots, & b_{1, n}, \\ \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, \\ b_{n-m, m+1}, & \dots, & b_{n-m, n}. \end{array}$$

Sur un réseau R_{n-m} , où x_{m+1}, \dots, x_n sont les coordonnées courantes, ce Tableau fournit un P_{n-m}^{n-m} , qu'une W_{n-m} convenable amène (théorème du 15°) sur le polyrectangle de référence, ce dernier étant constitué par les $n - m$ sphères coordonnées Ξ'_k , $k = 1, 2, \dots, n - m$; pour Ξ'_k on a d'ailleurs

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = x_{m+1} = \dots = x_{m+k-1} = x_{m+k+1} = \dots = x_n \\ x_{m+k} = 1 \end{array} \right\}.$$

Alors la n -aire φ_n telle que

$$\varphi_n(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m + W_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n; y_{m+1}, \dots, y_n)$$

amène, dans l'espace R_n , le polyrectangle P_n^{n-m} sur \mathfrak{C}_n^{n-m} , tout en laissant fixe le polyrectangle P_n^m , qui coïncide avec \mathfrak{C}_n^m déjà.

La proposition est donc établie.

17° Dans la présente géométrie des sphères, les polyrectangles jouent le même rôle que les angles droits dans la géométrie plane, que les trièdres trirectangles dans la géométrie de l'espace ordinaire à trois dimensions.

De là le nom de *polyrectangle*.



CHAPITRE III.

RÉSEAUX ET POLYSPHÈRES.

18° Généralisant la définition du 5°, je nommerai *espace* ou *réseau* R_q , $q \leq n$, le lieu d'une sphère mobile x , dont les coordonnées x_i satisfont à l'une ou à l'autre des deux conditions suivantes, lesquelles d'ailleurs sont équivalentes.

Ou bien :

I. x_i est proportionnelle à une fonction linéaire, homogène, à coefficients constants et réels, de q paramètres réels t_r *distincts*, $r = 1, 2, \dots, q$;

Ou bien :

II. Il existe entre les n variables x_i un système Γ_{n-q} de $n - q$ équations *distinctes*, linéaires, homogènes, à coefficients constants et réels.

Si $q = n$, le système Γ_{n-q} disparaît et l'on retombe sur la définition du 5°.

Un R_q contient ∞^{q-1} sphères.

19° Prenons, sur le réseau R_q , la sphère courante x ; on aura

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho x_i = f_i(t) = \sum_r b_{ir} t_r \quad (r = 1, 2, \dots, q) \\ \rho = \text{facteur de proportionnalité} \end{array} \right\}.$$

Les paramètres t_r étant distincts par hypothèse, le Tableau

à n lignes et q colonnes

$$\| \| b_{ir} \| = \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nq} \end{array} \right\|$$

fournira au moins un déterminant à q^2 éléments non nul (autrement dit, q sera aussi le rang du Tableau). Les n expressions f_i ne peuvent s'évanouir, sans que les q paramètres t_r s'évanouissent. La forme quadratique

$$\rho^2 = F(t) = \sum_i f_i^2$$

sera toujours > 0 pour ne s'évanouir qu'avec tous les f_i , c'est-à-dire tous les t_r .

On peut, sans changer R_q , opérer sur les t_r une substitution q -aire T , $|T| \neq 0$, qui transforme $F(t)$ en $\sum_r t_r^2$. T est réelle

(27°, *ci-après*). L'opération T ayant été supposée effectuée, dans le système (o), il viendra

$$\rho^2 = F(t) = \sum_r t_r^2 = \sum_i f_i^2 = \sum_{i\alpha\beta} t_\alpha t_\beta b_{i\alpha} b_{i\beta},$$

$i = 1, 2, \dots, n$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, q$.

Identifiant, on aura

$$(1) \quad \sum_i b_{i\alpha} b_{i\beta} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{pour } \alpha = \beta \end{cases}.$$

Mais $b_{i\alpha}$ c'est ce que devient ρx_i quand tous les t s'évanouissent, sauf $t_\alpha = 1$. Donc $\frac{1}{\rho} b_{i\alpha}$ est la coordonnée $\mathfrak{w}_{\alpha i}$ d'une sphère \mathfrak{w}_α située sur le réseau R_q . Les égalités (1) indiquent que les q sphères \mathfrak{w}_α sont orthogonales deux à deux.

Ainsi, sur tout réseau R_q existe au moins un polyrectangle de q sphères.

20° Une W_n convenable amènera (15°) ce polyrectangle sur

le polyrectangle \mathfrak{C}_n^q des q sphères coordonnées

$$\Xi_r, \quad r = 1, 2, \dots, q.$$

Faisons, ce qui est licite,

$$F(t) = \sum_r t_r^2 = \varrho^2 = 1 \quad \text{et} \quad \varrho = 1.$$

Le système (o) du 19^o devient alors, eu égard à la théorie précédente,

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_r = t_r, \quad \{ r = 1, 2, \dots, q \} \\ x_i = 0, \quad \text{pour} \quad q < i \leq n \end{array} \right\}.$$

Les q variables x_r prennent sur R_q toutes les valeurs possibles; les x_r sont les coordonnées sur R_q de la sphère courante, comme les x_i sont les coordonnées sur R_n .

21^o Prenons maintenant le système Γ_{n-q} du 18^o, savoir

$$\sum_i d_{si} x_i = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n - q; \quad i = 1, \dots, n.$$

Exprimons que les q sphères Ξ_r sont situées sur R_q et que leurs coordonnées satisfont à Γ_{n-q} ; on aura

$$d_{sr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, \dots, q.$$

Il ne figurera dans Γ_{n-q} que les variables x_{q+1}, \dots, x_n , au nombre de $n - q$. Comme les $n - q$ équations de Γ_{n-q} sont distinctes, on aura

$$\left| \begin{array}{ccc} d_{1,q+1} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \\ d_{n-q,q+1} & \dots & d_{n-q,n} \end{array} \right| \neq 0.$$

Γ_{n-q} se réduira à

$$x_{q+1} = \dots = x_n = 0.$$

C'est ce que nous a appris déjà la formule (2) du 20^o.

Ainsi, les ∞^{q-1} sphères de R_q seront définies comme orthogonales aux $n - q$ sphères coordonnées

$$\Xi_{q+1}, \quad \dots, \quad \Xi_n$$

du polyrectangle \mathfrak{C}_n^{n-q} (14°), résiduel au polyrectangle \mathfrak{C}_n^q , situé sur R_q .

Réciproquement : le lieu des $n-q-1$ sphères de R_n orthogonales aux q sphères Ξ_1, \dots, Ξ_q , est un réseau \mathfrak{R}_{n-q} , parfaitement défini et sur lequel est placé le polyrectangle \mathfrak{C}_n^{n-q} .

22° L'analyse précédente se résume en une proposition unique.

THÉORÈME. — A chaque réseau R_q , de rang $q \leq n$, dans un espace R_n , correspond sans ambiguïté, dans le même espace, un réseau complémentaire \mathfrak{R}_{n-q} , de rang $n - q$; et réciproquement. Chaque sphère d'un réseau complémentaire est orthogonale à toutes les sphères de l'autre réseau. Sur chacun des deux réseaux on peut installer un polyrectangle à q et $n - q$ sphères respectivement. Les deux polyrectangles seront résiduels l'un de l'autre.

23° Si l'on a deux réseaux complémentaires R_q et \mathfrak{R}_{n-q} , on pourra toujours, par projectivité et à l'orientation près, supposer que

Sur R_q , les $n - q$ dernières coordonnées x_{q+1}, \dots, x_n sont nulles, tandis que les q premières prennent toutes les valeurs réelles possibles, sous le bénéfice de

$$x_1^2 + \dots + x_q^2 = 1.$$

Sur \mathfrak{R}_{n-q} , les q premières coordonnées x_1, \dots, x_q sont nulles, tandis que les $n - q$ dernières prennent toutes les valeurs réelles possibles, sous le bénéfice de

$$x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

C'est ce que je ferai dorénavant.

24° Nommons *polysphère* \mathfrak{A}_p , ou \mathfrak{A} , la figure formée par les p sphères a_j , $j = 1, 2, \dots, p$, de coordonnées a_j . L'ordre dans lequel sont énumérées les p sphères n'est pas indifférent. On supposera toujours que cet ordre est celui de la suite naturelle $j = 1, 2, 3, \dots, p$ des indices j .

Soit

$$\mathfrak{A} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ji} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{array} \right\| = \| a_{ji} \|$$

le Tableau, à p lignes et n colonnes, des np coordonnées a_{ji} . Appelons q le rang du Tableau \mathfrak{A} .

Il est évident que q ne dépasse pas le plus petit des deux entiers n et p .

25° Proposons-nous le problème que voici :

Quel est le lieu de la sphère y orthogonale aux p sphères du polysphère \mathfrak{A} ?

On aura les p équations

$$Y_j = \sum_i a_{ji} x_i = 0,$$

qui, puisque q est le rang du Tableau \mathfrak{A} , se réduisent à q distinctes.

Le lieu de la sphère y est donc un réseau \mathfrak{R}_{n-q} parfaitement déterminé. Le réseau R_q , complémentaire (22°) à \mathfrak{R}_{n-q} , sera connu et contiendra les p sphères du polysphère.

Disons que q est le *rang* du polysphère; on pourra énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Un polysphère d'ordre p et de rang q définit sans ambiguïté un réseau R_q , de rang q , sur lequel sont situées les p sphères du polysphère.*

Nommons x et y les sphères courantes sur les réseaux R_q et \mathfrak{R}_{n-q} respectivement. La relation $\sum_i x_i y_i = 0$ est une conséquence algébrique des p équations

$$Y_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i x_i y_i = \sum_j t_j Y_j.$$

Identifions de part et d'autre les coefficients de y_i . Les coordonnées courantes x_i sur le réseau R_q sont données par le système

$$\rho x_i = \sum_j t_j a_{ji} \quad (t_j = \text{paramètre réel arbitraire}),$$

où ρ est un facteur de proportionnalité qu'on calculera par la condition

$$\sum_i x_i^2 = 1.$$

R_q est un réseau de rang minimum qui contient toutes les p sphères du polysphère \mathfrak{A} .

26° Eu égard aux explications du 23°, on peut admettre que pour chacune des p sphères a_j de \mathfrak{A} , les $n - q$ dernières coordonnées a_{ji} s'évanouissent,

$$a_{ji} = 0 \quad \text{pour} \quad i > q.$$

Les a_{ji} sont les éléments d'une matrice p -aire Λ , dans laquelle les $p - q$ dernières colonnes sont composées de zéros. Λ aura pour rang le nombre q . Le nombre n ne joue plus aucun rôle.

On posera $\xi_j = \sum_r a_{jr} x_r$, $r = 1, 2, \dots, q$, puisque $a_{ji} = 0$ pour $j > q$.

q étant le rang de la matrice p -aire Λ , l'élimination des x_r entre les p relations

$$\xi_j = \sum_r a_{jr} x_r$$

fournira entre les ξ_j un système \mathfrak{N}_{p-q} de $p - q$ équations distinctes linéaires, homogènes à coefficients réels et constants.

27° Reste à montrer que la substitution T du 19° peut toujours être supposée réelle.

Posons

$$F(t) = \sum_i f_i^2 = \sum_{rs} \tau_{rs} t_r t_s = \tau(t, t),$$

où la matrice réelle $\tau = [\tau_{rs}]$, $r, s = 1, 2, \dots, q$, est symétrique.

Par la loi même de formation, $F(t)$ est positif, pour ne s'évanouir qu'avec tous les t ; $|\tau| \neq 0$. Donc la matrice τ est une *hermitienne réelle* q -aire. En effet reportons-nous au 28° des *Préliminaires et Généralités*. τ est hypohermitienne, avec un déterminant $\neq 0$. τ ne peut être qu'hermitienne.

τ admet au moins une canonisante orthogonale et réelle. τ supposée canonisée, il vient

$$F(t) = \sum_r g_r^2 t_r^2, \quad g_r = \text{réelle.}$$

Effectuons sur les t la canonique réelle, généralement non orthogonale

$$|t_r \quad t_r g_r^{-1}|;$$

$F(t)$ devient bien $\sum_r t_r^2$, comme l'exige le raisonnement du 19°, sans que le calcul ci-dessus ait pu introduire d'imaginaires.

(c. q. f. d.)



CHAPITRE IV.

MATRICES A ET V.

28° Reprenons le polysphère \mathfrak{A} , composé des p sphères a_j , ayant a_{ji} pour coordonnées $\{j = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, n\}$. Nommons q le rang de \mathfrak{A} ; eu égard aux explications des Chapitres précédents, on peut, à l'orientation près et sans restreindre la généralité, admettre que, pour chaque sphère a_j , les $p - q$ dernières coordonnées sont nulles. Cela revient à supposer ceci : le réseau \mathfrak{R}_{n-q} , complémentaire au réseau \mathfrak{R}_q défini par \mathfrak{A} , contient le polyrectangle des $p - q$ dernières sphères coordonnées Ξ_{q+1}, \dots, Ξ_n . On introduira alors la matrice p -aire A , où les q premières colonnes seront constituées par les a_{jr} $\{r = 1, 2, \dots, q\}$, tandis que les $p - q$ dernières sont formées de zéros. Par conséquent, *la matrice p -aire A et le polysphère \mathfrak{A} se définissent mutuellement sans ambiguïté, à l'orientation de \mathfrak{A} près*. A a évidemment le rang q ; un au moins des déterminants à q^2 éléments provenant du Tableau $\|a_{jr}\|$ sera $\neq 0$.

29° Prenons un espace ou réseau S_p , lieu des ∞^{p-1} sphères z , ayant les z_j $\{j = 1, 2, \dots, p\}$ pour coordonnées. Nommons Z_j les p sphères coordonnées de S_p . Considérons le réseau S_q des ∞^{q-1} sphères z orthogonales aux $p - q$ dernières sphères coordonnées Z ; sur S_q les $p - q$ dernières coordonnées d'une sphère sont nulles. On peut dire que *la matrice p -aire A fournit, dans S_p , un polysphère \mathfrak{A} , d'ordre p et de rang q , situé sur S_q* . Soient maintenant, dans S_p , un réseau s_q quelconque et son complémentaire (22°) G_{p-q} . Il y a sur G_{p-q} un

polyrectangle de $p - q$ sphères, que l'intervention d'une orthogonale réelle W p -aire pourra toujours amener sur le polyrectangle des $p - q$ dernières sphères coordonnées Z . Soit donc z une sphère de S_q ; nommons ζ la sphère telle que

$$z = W[\zeta], \quad z_j = \sum_{\alpha} W_{j\alpha} \zeta_{\alpha}, \quad W = [W_{j\alpha}] \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p).$$

La sphère ζ sera sur S_q et $\zeta_{\alpha} = 0$ pour $\alpha > q$.

Soit un polysphère \mathfrak{E} , constitué par les p sphères h_j et fourni par une matrice p -aire $H = [h_{jk}]$, et situé sur S_q . Posons

$$h_j = W[g_j].$$

La sphère g_j sera sur S_q . Nommons G la matrice p -aire

$$G = [g_{j\alpha}].$$

On aura

$$h_{jk} = \sum_{\alpha} W_{k\alpha} g_{j\alpha},$$

c'est-à-dire

$$H = GW' = GW^{-1} \quad \text{et} \quad G = HW.$$

La matrice p -aire HW aura ses $p - q$ dernières colonnes nulles et fournira un polysphère situé sur S_q .

Supposons qu'il y ait deux orthogonales réelles p -aires u^{-1} et v^{-1} , telles que les deux matrices p -aires

$$L = Hu^{-1} \quad \text{et} \quad N = Hv^{-1}$$

aient leurs $p - q$ dernières colonnes composées de zéros. On aura

$$H = Lu = Nv, \quad N = Lu v^{-1} = L\omega,$$

$\omega = [\omega_{jk}]$ ($j, k = 1, 2, \dots, p$) étant une orthogonale p -aire réelle. De plus, $L = [l_{jk}]$, $l_{jk} = 0$ pour $k > q$ et, pareillement, $N = [n_{jk}]$, avec $n_{jk} = 0$ pour $k > q$. Alors la relation $N = L\omega$ donne ($r = 1, 2, \dots, q$),

$$n_{jk} = \sum_r l_{jr} \omega_{rk} = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad k > q.$$

Si l'on suppose la matrice L de rang q , un au moins des déter-

minants à q^2 éléments du Tableau $\|l_{jr}\|$ est $\neq 0$. Alors

$$w_{rk} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, q, \quad k = q + 1, \dots, p,$$

c'est-à-dire

$$w = \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^q \quad \overbrace{\quad}^{p-q} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{L} & 0 \\ \hline \mathfrak{N} & \mathfrak{M} \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathcal{L} & 0 \\ \hline \mathfrak{N} & \mathfrak{M} \end{array}} \right\} q \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathcal{L} & 0 \\ \hline \mathfrak{N} & \mathfrak{M} \end{array}} \right\} p-q \end{array} \quad |w| = |\mathcal{L}| |\mathfrak{M}| \neq 0.$$

Mais w est orthogonale; $w' = w^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{L}' & \mathfrak{N}' \\ \hline 0 & \mathfrak{M}' \end{array} \right] = w' = w^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{L}^{-1} & 0 \\ \hline \dots & \dots \end{array} \right].$$

L'identification donne $\mathfrak{N}' = 0$ et $\mathfrak{N} = 0$.

Alors $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^{-1}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^{-1}$. La q -aire réelle \mathcal{L} est orthogonale.

Les considérations du présent numéro nous sont utiles un peu plus loin (30°).

30° Introduisons maintenant la matrice p -aire réelle et symétrique $\Lambda = [\lambda_{jk}]$, où

$$\lambda_{jk} = \lambda_{kj} = \sum_r a_{jr} a_{kr} = \text{cosinus de l'angle}$$

formé par les deux sphères a_j et a_k du polysphère \mathcal{A} (28°): $\lambda_{jj} = 1$.

On reconnaît de suite que $\Lambda = \Lambda A'$, A étant la matrice p -aire du 28°. Donc *la matrice Λ est une hypohérmittienne de rang q .*

La formule générale des matrices p -aires P , telles que

$PP' = A$, est

$$P = A^{\frac{1}{2}}W, \quad W = \text{orthogonale réelle } p\text{-aire.}$$

Donc $A = A^{\frac{1}{2}}W$, W étant convenablement choisie.

Reprenons les définitions et notations du 29°.

La matrice $A^{\frac{1}{2}} = [l_{jk}^0]$ définit un polysphère \mathfrak{A} , d'ordre p et de rang q , situé sur un s_q et constitué par les p sphères l_j^0 de coordonnées $l_{jk}^0 = l_{kj}^0$ ($j, k = 1, 2, \dots, p$). Il existera donc au moins une W , que je nommerai u^{-1} , telle que la matrice p -aire $A = A^{\frac{1}{2}}u^{-1}$ ait ses $p - q$ dernières colonnes formées de zéros. $A = [a_{jk}]$, avec $a_{jk} = 0$ pour $k > q$, fournira un polysphère \mathfrak{A} , tel que celui du 28°, aux p sphères a_j .

Admettons qu'il existe une seconde W , que je nommerai v^{-1} , telle que $A^{\frac{1}{2}}v^{-1} = B = [b_{jk}]$, avec $b_{jk} = 0$ pour $k > q$, soit encore une matrice p -aire, à $p - q$ dernières colonnes composées de zéros. B fournira un second polysphère \mathfrak{B} d'ordre p et de rang q , aux p sphères b_j .

On verra, comme au 29°, que $B = Aw$, w étant la même p -aire qu'au 29°. Alors

$$b_{jk} = \sum_r a_{jr} w_{rk} \quad (r = 1, 2, \dots, q),$$

c'est-à-dire

$$b_j = \mathfrak{L}'[a_j] = \mathfrak{L}^{-1}[a_j],$$

\mathfrak{L} étant la même q -aire qu'au 29°.

Revenons maintenant à notre réseau R_q du 28°.

L'orthogonale réelle q -aire \mathfrak{L} est effectuée dans le réseau R_q .

Les deux polysphères de R_q , savoir :

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A} & \text{correspondant à la matrice } A, \\ \mathfrak{B} & \text{»} & \text{»} & B \end{array}$$

ne diffèrent donc que par l'orientation, puisque \mathfrak{L} les transforme l'un dans l'autre.

Si l'hypohermitienne Λ de rang q est donnée, l'hypohermitienne $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ se calcule sans ambiguïté. On calculera, ce qui est toujours possible eu égard à 29°, une orthogonale réelle p -aire W , telle que $\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{2}}W$ soit une matrice aux $p - q$ dernières colonnes composées de zéros. La matrice Λ donnera un polysphère \mathfrak{A} , d'ordre p et de rang q , tel que les p sphères a_j de \mathfrak{A} forment deux à deux des angles, dont les cosinus sont les coefficients λ_{jk} de Λ . Tout autre polysphère, doué de cette propriété, ne différera de \mathfrak{A} que par l'orientation.

Ainsi : *pour une matrice hypohermitienne p -aire Λ donnée, le polysphère \mathfrak{A} est connu à l'orientation près.*

Autrement dit se trouve résolu le problème suivant de Géométrie :

Construire un polysphère dont on donne l'ordre, le rang et les angles.

Les angles ne peuvent être pris au hasard, car les p^2 cosinus λ_{jk} , $\lambda_{jj} = 1$ doivent être les éléments d'une matrice hypohermitienne du rang donné. Si cette condition est remplie, la configuration du polysphère est unique et bien déterminée, l'orientation restant, comme c'était évident *à priori*, indéterminée.

La matrice Λ joue un grand rôle dans les présentes recherches. On raisonnera souvent sur les Λ et non sur les polysphères.

31° A côté de $\Lambda = \Lambda_p$ se place une autre matrice p -aire $V = V_p$ que voici :

$$V = V_p = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2\lambda_{12} & 2\lambda_{13} & \dots & \dots & \dots & 2\lambda_{1p} \\ 0 & 1 & 2\lambda_{23} & \dots & \dots & \dots & 2\lambda_{2p} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 1 & 2\lambda_{p-1,p} \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 1 \end{array} \right\}, \quad |V| = 1.$$

On a entre V_{p-1} et V_p une formule de récurrence

$$V_p = \begin{pmatrix} & & & & 2\lambda_{1p} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 2\lambda_{p-1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

32° Calculons la matrice p -aire V_p^{-1} , qui existe toujours, puisque $|V_p| = 1$.

On voit de suite que V_p^{-1} est de même nature que V_p . La diagonale principale contient p éléments égaux à l'unité, tous les éléments d'un côté de la diagonale principale étant des zéros.

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2\mu_{12} & \dots & 2\mu_{1p} \\ 0 & 1 & \dots & 2\mu_{2p} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ 0 & \cdot & 1 & 2\mu_{p-1,p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Introduisons le symbole

$$\text{sig. } z \quad \text{ou} \quad \text{signum } z$$

défini par les égalités

$$\text{sig. } z = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

On aura

$$(\text{sig. } z) \times (\text{sig. } z') = \text{sig. } zz'.$$

On pourra écrire ($j, k = 1, 2, \dots, p$):

$$\begin{aligned} [V]_{jk} &= \lambda_{jk} \{1 + \text{sig.}(k-j)\} = v_{jk}; & \lambda_{jk} &= \gamma_{kj}; \\ [V^{-1}]_{jk} &= \mu_{jk} \{1 + \text{sig.}(k-j)\} = w_{jk}; & \mu_{jk} &= \nu_{kj}. \end{aligned}$$

Exprimons que $VV^{-1} = E$; il viendra

$$\sum_{\alpha} v_{j\alpha} w_{\alpha k} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k=j \\ 0 & \text{pour } k \neq j \end{cases}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

De là

$$1 = \sum_{\alpha} v_{j\alpha} w_{\alpha j} = \sum_{\alpha} \lambda_{j\alpha} \mu_{j\alpha} \{1 + \text{sig.}(j-\alpha)\} \{1 + \text{sig.}(j-\alpha)\};$$

si $j \neq \alpha$, le coefficient de $\lambda_{j\alpha} \mu_{j\alpha}$ est nul. Il ne reste ainsi que

$$1 = \sum_{\alpha} v_{j\alpha} w_{\alpha j} = v_{jj} w_{jj},$$

ce qu'on savait.

Prenons maintenant $j \neq k$

$$(1)' \quad 0 = \sum_{\alpha} v_{j\alpha} w_{\alpha k} = \sum_{\alpha} \lambda_{j\alpha} \mu_{\alpha k} \{1 + \text{sig.}(z-j)\} \{1 + \text{sig.}(k-z)\}.$$

Le coefficient de $\lambda_{j\alpha} \mu_{\alpha k}$ dans la somme \sum_{α} est zéro si

$$\alpha - j < 0 \quad \text{ou} \quad k - \alpha < 0.$$

Il n'y a à retenir dans la somme \sum_{α} que les entiers α tels que

$$\alpha - j \geq 0 \quad \text{et} \quad k - \alpha \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$j \leq \alpha \leq k, \quad j < k \quad \text{et} \quad \alpha = j, j+1, \dots, k-1, k.$$

Après départ de 2, (1)' devient

$$(1) \quad 0 = \lambda_{jk} + \mu_{jk} + 2 \sum_{\alpha=j+1}^{\alpha=k-1} \lambda_{j\alpha} \mu_{\alpha k}.$$

33° La formule (1) permet de calculer tous les μ . Disons que $\mu_{j,j+K}$ est de *catégorie* K ; la catégorie sera l'excès, $K = k - j$, du second indice sur le premier. Dans la formule (1) ci-dessus, la somme à $k - j - 1 = K - 1$ termes

$$\sum_{\alpha=j+1}^{\alpha=k-1}$$

ne contient que des μ de catégorie moindre que K . Ainsi : (1) est une formule de récurrence qui permet de calculer tout μ en fonction des μ ayant une catégorie moindre.

Pour $K = 1$, $k = j + 1$,

$$\lambda_{j,j+1} + \mu_{j,j+1} = 0; \quad \mu_{j,j+1} = -\lambda_{j,j+1}.$$

Pour $K = 2$, $k = j + 2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{j,j+2} + \mu_{j,j+2} + 2\lambda_{j,j+1}\mu_{j+1,j+2}; \\ -\mu_{j,j+2} &= \lambda_{j,j+2} - 2\lambda_{j,j+1}\lambda_{j+1,j+2}. \end{aligned}$$

Pour $K = 3$, $k = j + 3$,

$$0 = \lambda_{j,j+3} + \mu_{j,j+3} + 2\lambda_{j,j+1}\mu_{j+1,j+3} + 2\lambda_{j,j+2}\mu_{j+2,j+3}$$

d'où on tirera $\mu_{j,j+3}$, puisque $\mu_{j+1,j+3}$ et $\mu_{j+2,j+3}$ sont connues,

Les μ_{jk} se calculeront ainsi de proche en proche et V^{-1} se trouvera construite.

34° On a évidemment

$${}_2\Lambda = V + V'.$$

Désignons par ${}_2T$ la matrice alternée

$${}_2T = V - V';$$

de là

$$V = \Lambda + T, \quad V' = \Lambda - T.$$

On désignera par ${}_2M$ la matrice symétrique

$${}_2M = V^{-1} + V'^{-1}$$

(construite avec les μ comme Λ l'est avec les λ) et par ${}_2\mathfrak{C}$ la matrice alternée

$${}_2\mathfrak{C} = V^{-1} - V'^{-1}$$

(construite avec les μ comme T l'est avec les λ); on aura encore

$$V^{-1} = M + \mathfrak{C} \quad \text{et} \quad V'^{-1} = M - \mathfrak{C},$$

d'où

$$E = (\Lambda + T)(M + \mathfrak{C}).$$

35° Supposons $|T| = 1$ et calculons T^{-1} .

Posons $T = [t_{jk}]$, $T^{-1} = [\tau_{jk}]$, et (sig. z comme au 32°)

$$t_{jk} = \lambda_{jk} \text{ sig.}(k-j); \quad \tau_{jk} = -\tau_{kj}.$$

Le déterminant gauche $|T|$ ne peut être $\neq 0$ que si p est

pair. Alors $|T|$ est le carré d'un *pfaffien* qu'on désignera, suivant l'usage, par

$$\begin{aligned}\omega &= (1, 2, \dots, p) = t_{12}t_{34} \dots t_{p-1,p} + \dots, \\ |T| &= \omega^2 = 1\end{aligned}$$

(pour toute cette théorie, on consultera par exemple PASCAL, *Déterminanten*, pages 60 à 64). Puisque $|T| = 1$, on a

$$\tau_{kj} = -\tau_{jk} = \frac{\partial |T|}{\partial t_{jk}}, \quad j \neq k.$$

Mais (PASCAL, formule de la page 63)

$$\frac{\partial |T|}{\partial t_{jk}} = (-1)^{j+k-1} \omega \Omega(j, k),$$

$$\Omega(j, k) = (1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, k-1, k+1, \dots, p).$$

Enfin

$$(1) \quad \tau_{jk} = (-1)^{j+k} \omega \Omega(j, k).$$

La formule donnera tous les τ_{jk} où $j < k$; cela suffit puisque T^{-1} est alternée.

On remarquera qu'en supprimant dans le polysphère \mathfrak{A} deux sphères, la $j^{\text{ième}}$ et la $k^{\text{ième}}$, on a une matrice alternée analogue à T , où le pfaffien est précisément $\Omega(j, k)$.

36° Un cas qui aura pour nous (Chapitre IX, 105°) une grande importance est celui où l'on a $\omega = 1$,

$$|T| = 1, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{2}(V^{-1} - V'^{-1}) = T^{-1} \quad (34^{\circ}).$$

\mathfrak{E} est construit avec les μ_{jk} comme T avec les λ_{jk} . Dans la formule (1) du 35°, il faut faire $\tau_{jk} = \mu_{jk}$, $k > j$; alors

$$(2) \quad \begin{cases} \mu_{jk} = (-1)^{j+k} \Omega(j, k), \\ \mu_{j, j+k} = (-1)^k \Omega(j, j+k). \end{cases}$$

Les μ sont (33°) des polynomes connus en λ , et il vient ainsi diverses relations entre les λ_{jk} .

37° Soient ξ_j et η_j ($j = 1, 2, \dots, p$) $2p$ variables quel-

conques qui prendront plus tard (Chapitre VIII, Seconde Partie) une signification plus précise. La lettre V désignant toujours la même matrice que plus haut (31°), je poserai

$$\begin{aligned} - \varphi_p &= V_p^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_p; \tau_{11}, \dots, \tau_{1p}), \\ - \varphi_{p-1} &= V_{p-1}^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}; \tau_{11}, \dots, \tau_{1p-1}), \end{aligned}$$

et je chercherai une formule de récurrence entre φ_p et φ_{p-1} .

φ_p sera un déterminant à $(p+1)^2$ éléments, ainsi formé.

Prenons la matrice p -aire V_p et encadrons-la :

D'une $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne, formée par les p termes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}, \xi_p$;

D'une $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne, formée par les p termes η_1, \dots, η_p .

Enfin dans le déterminant φ_p l'élément de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne et de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne sera zéro.

En un mot, si nous faisons usage de la formule de récurrence pour les V_p , démontrée au 31°, on écrira

$$\begin{vmatrix} & & & & 2\lambda_{1p} & \xi_1 \\ & & & & 2\lambda_{2p} & \xi_2 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 2\lambda_{p-1,p} & \xi_{p-1} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \xi_p \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1p-1} & \tau_{1p} & 0 \end{vmatrix} = \varphi_p.$$

38° Développons le déterminant φ_p par rapport à la $p^{\text{ième}}$ ligne, l'avant-dernière; il n'y a de $\neq 0$, dans cette $p^{\text{ième}}$ ligne, que le $p^{\text{ième}}$ élément, qui est 1, et le $(p+1)^{\text{ième}}$, qui est ξ_p . Il viendra

$$(o) \quad \varphi_p = \Delta - G\xi_p$$

où Δ est le déterminant à p^2 éléments

$$\begin{vmatrix} & & & & \xi_1 \\ & & & & \xi_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & \xi_{p-1} \\ \hline \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1p-1} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi_{p-1},$$

tandis que G est le déterminant à p^2 éléments

$$G = \begin{vmatrix} & & & & 2\lambda_{1p} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 2\lambda_{p-1,p} \\ \dots & & & & \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1p-1} & \tau_{1p} \end{vmatrix}.$$

G n'est pas autre chose que φ_{p-1} , où l'on a remplacé les éléments de la $p^{\text{ième}}$ et dernière colonne par

$$2\lambda_{1p}, \quad 2\lambda_{2p}, \quad \dots, \quad 2\lambda_{p-1,p}, \quad \tau_{1p}.$$

Remarquons que dans G le coefficient de τ_{1p} est $|V_{p-1}| = 1$. Il viendra

$$G = \tau_{1p} + 2 \sum_{l=1}^{l=p-1} \lambda_{pl} \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial \xi_l}.$$

Remplaçons dans la formule (o) ci-dessus, Δ et G par leurs valeurs, nous aurons la formule de récurrence cherchée

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_p = \varphi_{p-1} - \xi_p \tau_{1p} - 2 \xi_p \sum_l \lambda_{pl} \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial \xi_l} \\ l = 1, 2, \dots, p-1 \end{array} \right\}.$$

39° Cette formule permet de calculer les φ_p de proche en proche en partant de

$$\varphi_1 = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 \\ \tau_{11} & 0 \end{vmatrix} = -\xi_1 \tau_{11}.$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 - \xi_2 \tau_{12} + 2 \xi_2 \lambda_{12} \tau_{11} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda_{12} & \xi_1 \\ 0 & 1 & \xi_2 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \end{vmatrix} = -\tau_{12} \xi_2 + 2\lambda_{12} \tau_{11} \xi_2 - \tau_{11} \xi_1, \end{aligned}$$

ce qui est exact.

La formule (1) du 38° est la formule fondamentale de tout le présent Mémoire.

C'est ce que l'on constatera au Chapitre VIII.

40° Nous dirons que p sphères a_j , de coordonnées a_{ji} , ($j = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, n$), sont *linéairement indépendantes*, lorsqu'il n'existe aucun système de relations, au nombre de n ,

$$\sum_j K_j a_{ji} = 0, \quad K_j = \text{const.},$$

où une des p quantités K_j , au moins, est $\neq 0$. Autrement dit (26°) on n'a aucune relation

$$0 = \sum K_j \xi_j.$$

Le système \mathcal{N}_{p-q} du 26° s'évanouit.

Il faut et il suffit pour que les sphères soient linéairement indépendantes que l'ordre p soit égal au rang ou que $|\Lambda| \neq 0$.



CHAPITRE V.

MATRICES \mathfrak{Q} ET \mathfrak{P} .

41° À côté de $\Lambda = \Lambda_p$ et $V = V_p$, se placent deux autres matrices p -aires

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_p \quad \text{et} \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_p,$$

qui jouent aussi un grand rôle dans la suite.

$$\mathfrak{Q} = -V'V^{-1}; \quad |\mathfrak{Q}| = (-1)^p;$$

mais l'introduction de \mathfrak{P} , laquelle est d'ailleurs semblable à \mathfrak{Q} , exige des explications plus compliquées.

42° Reprenons le polysphère \mathfrak{A} du 28°, le tableau $\|a_{jr}\|$ et la matrice p -aire Λ . Envisageons dans un réseau R_q , de rang q , la sphère courante x , ayant pour coordonnées x_r , $r = 1, 2, \dots, q$.

43° Maintenant, dans un S_p , réseau de rang p , prenons une sphère courante Z , de coordonnées Z_j , $j = 1, 2, \dots, p$. Nommons ξ la sphère Z dont les coordonnées Z_j sont proportionnelles aux expressions ξ_j du 26°

$$\xi_j = \sum_r a_{jr} x_r.$$

Les ξ_j sont liées par les $p - q$ relations du système \mathfrak{A}_{p-q} du 26°. Donc, quand la sphère x parcourt R_q , la sphère ξ parcourt un réseau S_q , de rang q , situé dans S_p . Nommons enfin \mathfrak{S}_{p-q} le réseau de S_p , complémentaire à S_q .

La substitution p -aire \mathcal{Q} effectuée sur les Z_j donne une certaine transformation \mathcal{Q} de l'espace S_p , que je me propose d'examiner de plus près. On fera, au préalable, dans S_p un changement de variables de nature à simplifier l'expression de \mathcal{Q} .

44° Soient Λ_0 une forme canonique de l'hypohermitienne Λ et D , $D' = D^{-1}$, la canonisante correspondante, réelle et orthogonale.

On aura

$$\Lambda = D\Lambda_0D', \quad \mathcal{Q} = D\mathcal{Q}_0D', \quad V = DV_0D', \quad V' = DV'_0D', \quad \dots$$

La transformation par D ne modifie pas les formules qui résultent soit de la *multiplication* des matrices, soit de leur *transposition*.

45° Faisons dans S_p le changement de variables $Z = D[\zeta]$. La substitution

$$\mathcal{Q} = |Z \quad \mathcal{Q}[Z]|$$

devient

$$|\zeta \quad D'\mathcal{Q}D[\zeta]| = |\zeta \quad \mathcal{Q}_0[\zeta]| = \mathcal{Q}_0.$$

La relation $\xi = \Lambda[x]$ symbolise les égalités

$$\xi_j = \sum_r a_{jr} x_r.$$

De là successivement

$$\xi = D[z], \quad z = D'[\xi] = D'\Lambda[x] = B[x].$$

La matrice p -aire B , de rang q , a, comme la matrice p -aire Λ , ses $p - q$ dernières colonnes composées de zéros.

46° La relation connue $\Lambda = \Lambda\Lambda'$ donne

$$\Lambda = D\Lambda_0D' = \Lambda\Lambda'; \quad \Lambda_0 = D'\Lambda\Lambda'D = B B'.$$

Par suite, comme au Chapitre précédent,

$$B = \Lambda_0^{\frac{1}{2}} W,$$

W étant une certaine p -aire réelle et orthogonale.

On a

$$W = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{|c|c|} \hline \omega_1 & \omega_2 \\ \hline \omega_3 & \omega_4 \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array} \end{array},$$

$$\Lambda_{\frac{1}{0}} = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L} & O \\ \hline O & O \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array} \end{array},$$

où \mathcal{L} est une q -aire, $\mathcal{L}(u, v) = \sum_r l_r u_r v_r$, $l_r =$ positif; ω_1 est une q -aire, ω_3 est une $(p - q)$ -aire, ω_2 est un Tableau à q lignes et $p - q$ colonnes, etc.

La matrice p -aire B a (45° , *in fine*) ses $p - q$ dernières colonnes composées de zéros et s'écrit

$$B = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathfrak{B} & O \\ \hline \mathfrak{C} & O \\ \hline \end{array} = \Lambda_{\frac{1}{0}} W = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L}\omega_1 & \mathcal{L}\omega_2 \\ \hline O & O \\ \hline \end{array}.$$

L'identification donne

$$\mathfrak{z} = 0, \quad \omega_2 = 0; \quad |W| = |\omega_1| |\omega_4| \neq 0.$$

Alors

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \omega'_1 & \omega'_3 \\ \hline 0 & \omega'_4 \\ \hline \end{array} = W' = W^1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \omega_1^{-1} & 0 \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \end{array}$$

par orthogonalité, d'où

$$\omega_3 = 0.$$

Bref, $\mathfrak{w} = \mathfrak{L} \omega_1$, $\omega_1 =$ orthogonale réelle q -aire.

Dans la relation $B = \Lambda_0^{\frac{1}{2}} W$ effectuons sur les x_r la q -aire ω_1^{-1} . Cela ne change que l'orientation du polysphère \mathfrak{A} . Il est licite finalement de faire

$$B = \Lambda_0^{\frac{1}{2}}, \quad B(u, v) = \sum_r l_r u_r v_r.$$

La relation $z = B[x]$ donne

$$(0) \quad z_r = l_r x_r, \quad z_{q+s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, p - q).$$

Ainsi : avec les variables courantes ζ du 45° , les $p - q$ équations du système \mathfrak{N}_{p-q} du 43° sont

$$\zeta_{q+s} = 0,$$

tandis que la sphère courante ξ du réseau S_q est définie par les q paramètres ζ_r proportionnels à $z_r = l_r x_r$.

47° Effectuons dans le réseau S_p la p -aire

$$\mathfrak{Q}_0 = |\zeta \quad \mathfrak{Q}_0[\zeta]|,$$

laquelle (45°) est la p -aire \mathfrak{Q} , exprimée, non plus en variables Z , mais en variables ζ .

Considérons l'expression, $g_j = \text{const.}$,

$$\omega = \sum_i g_j \zeta_j = \sum g \zeta = \sum \mathfrak{Q}'_0[g] \mathfrak{Q}_0^{-1}[\zeta].$$

A quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent satisfaire les p constantes g_j pour que ω possède, vis-à-vis de \mathfrak{Q}_0 , l'invariance absolue?

$$\mathfrak{Q}_0[\omega] = \Sigma g \mathfrak{Q}_0[\zeta] = \Sigma \zeta \mathfrak{Q}'_0[g] = \omega \quad \text{et} \quad g = \mathfrak{Q}'_0[g].$$

$\mathfrak{Q}'_0 = -V_0'^{-1}V_0$, puisque

$$\mathfrak{Q} = -V'V^{-1}, \quad \mathfrak{Q}' = -V'^{-1}V.$$

Alors

$$g = -V_0'^{-1}V_0[g]; \quad V_0'[g] + V_0[g] = (V_0 + V_0')[g] = 2\Lambda_0[g] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Lambda_0[g] = 0,$$

ou, non symboliquement,

$$l_r^2 g_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, q),$$

puisque

$$\Lambda_0^{\frac{1}{2}}(u, v) = \sum_r l_r u_r v_r.$$

Comme l_r est positif, il vient finalement

$$g_r = 0.$$

Ainsi : $\omega = \Sigma g \zeta$, sans contenir ζ_r , contient les $p - q$ variables ζ_{q+s} d'une façon quelconque.

\mathfrak{Q}_0 admet pour invariant le système \mathfrak{S}_{p-q} , $\varepsilon_{q+s} = 0$, qui définit S_q et la transformation \mathfrak{Q} (ou \mathfrak{Q}_0) du réseau S_p laisse fixe le réseau S_q , dont les ε^{q-1} sphères ξ sont permutées simplement entre elles.

48° Construisons la matrice de la substitution \mathfrak{Q}_0 supposée, ce qui est licite, effectuée sur les ε_j , proportionnelles aux ζ_j .

\mathfrak{Q}_0 multiplie par l'unité chacune des $p - q$ variables z_{q+s} ; donc il vient

$$\mathfrak{Q}_0 = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta & Q_1 \\ \hline \hline O & E \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} q \\ p - q \end{array} \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{array}{cc} q & p - q \end{array}}$

$\Delta =$ matrice q -aire;
 $E =$ matrice $(p - q)$ -aire unité;
 $Q_1 =$ Tableau à q lignes et $p - q$ colonnes.

$$(-1)^p = |\mathfrak{Q}_0| = |\Delta|.$$

49° Dans le réseau S_q , défini par les $p - q$ équations $z_{q+s} = 0$, \mathfrak{Q}_0 se traduit sur les q variables z_r par la substitution q -aire Δ . On a $z_r = l_r x_r$ (46°) ou, symboliquement, $z = \mathfrak{L}[x]$, la q -aire \mathfrak{L} étant telle que (46°)

$$\mathfrak{L}(u, v) = \sum_r l_r x_r u_r.$$

La substitution q -aire

$$|z_r \quad \Delta[z_r]|$$

se traduit sur les x_r par la q -aire

$$P = |x \quad \mathfrak{L}^{-1} \Delta \mathfrak{L}[x]| = |x \quad P[x]|.$$

Nommons L la p -aire, telle que

$$L(u, v) = \mathfrak{L}(u, v) + \sum_{s=1}^{s=p-q} u_{q+s} v_{q+s},$$

$$|L| = |\mathfrak{L}| \neq 0.$$

Posons enfin

$$\mathfrak{P} = L^{-1} \mathfrak{Q}_0 L = L^{-1} D^{-1} \mathfrak{Q} D L = (DL)^{-1} \mathfrak{Q} (DL).$$

Telle est la matrice \mathfrak{P} annoncée au 41°;

$$|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{Q}| = (-1)^p.$$

On remarquera que la matrice L n'est, en général, pas orthogonale.

50° On voit de suite que

$$L = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L} & O \\ \hline O & E \\ \hline \end{array}, \quad L^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{L}^{-1} & O \\ \hline O & E \\ \hline \end{array},$$

$$\mathfrak{P} = \begin{array}{|c|c|} \hline P & \mathcal{L}^{-1}Q_1 \\ \hline O & E \\ \hline \end{array} = L^{-1}\mathfrak{Q}_0L = \begin{array}{|c|c|} \hline P & Q \\ \hline O & E \\ \hline \end{array},$$

puisque

$$\mathfrak{Q}_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta & Q_1 \\ \hline O & E \\ \hline \end{array}$$

51° Cherchons la structure de \mathfrak{P} . Cette structure, puisque \mathfrak{P} est semblable à \mathfrak{Q} , est celle du faisceau

$$\rho E - \mathfrak{Q} = \rho E + V'V^{-1} = (\rho V + V')V^{-1},$$

c'est-à-dire, par équivalence et en vertu du théorème de Weierstrass :

La structure de \mathfrak{P} est celle du faisceau $\varphi V + V'$.

52° Je vais construire les divers successifs de \mathfrak{P} , en supposant (seul cas qui ait de l'intérêt pour nous dans la suite) que la q -aire P , à effectuer sur les x_r , est orthogonale.

On a évidemment

$$|\varphi E - \mathfrak{P}| = \Phi(\varphi) = (\varphi - 1)^{p-q} \varphi(\varphi) = (\varphi - 1)^{p-q} |\varphi E - P|,$$

les polynomes en φ , Φ et φ ayant respectivement les degrés p et q .

53° Soit u une racine de $\varphi(\varphi)$, m -uple et différente de l'unité. Considérons le système symbolique Ω

$$(uE - \mathfrak{P})[z] = 0,$$

Ω comprend d'abord $p - q$ équations $(u - 1)z_{q+s} = 0$ ou $z_{q+s} = 0$, $s = 1, 2, \dots, p - q$, évidemment toutes distinctes.

Ω comprend ensuite les q équations $(uE - P)[z] = 0$. Par hypothèse, P est orthogonale et n'a (22° des Préliminaires) que des successifs simples. Donc, le rang de $|uE - P|$ est $q - m$, excès de l'ordre q de P sur le degré de multiplicité m de la racine u (22° des Préliminaires).

Les q équations $(uE - P)[z] = 0$ se réduisent à $q - m$ distinctes; les p équations de Ω se réduisent à

$$(p - q) + (q - m) = p - m$$

distinctes. Le rang de $|uE - \mathfrak{P}|$ est égal à l'excès de l'ordre p sur le degré de multiplicité m . Donc *la racine u de l'équation caractéristique de \mathfrak{P} , différente de l'unité, ne fournit que des successifs simples.*

54° Passons à la racine unité, que nous supposerons σ -uple

dans l'équation $\varphi(\rho) = 0$, $0 \leq \sigma \leq q$. La racine sera

$$(\sigma + p - q)\text{-uple}$$

pour $\Phi(\rho) = 0$.

Le rang de $|E - \mathfrak{P}|$ sera le même que celui de $|\rho V + V'|$ (51°) pour $\rho = 1$. Mais $|V + V'|$ ou $|\Lambda|$ a le rang q . Dans le déterminant $|E - \mathfrak{P}|$, la racine unité donnera $p - q$ successifs, puisque s'évanouissent les $(p - q - 1)^{\text{ièmes}}$ mineurs, mais non tous les

$$(p - q)^{\text{ièmes}}.$$

55° Les $p - q$ successifs seront

$$(\rho - 1)^{1+\delta_s} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, p - q - 1),$$

les δ_s désignant des entiers non négatifs et dont la suite n'est pas croissante

$$\delta_0 \geq \delta_1 \geq \dots \geq \delta_s \geq \dots \geq \delta_{p-q-1} \geq 0,$$

avec

$$\sum_s (1 + \delta_s) = p - q + \sum_s \delta_s = \sigma + p - q,$$

d'où

$$\sigma = \sum_s \delta_s$$

Je vais chercher la valeur de δ_0 et construire à cet effet $(\rho E - \mathfrak{P})^{-1}$.

56° On a

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$\rho E - P$</td> <td style="padding: 5px;">$- Q$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">O</td> <td style="padding: 5px;">$(\rho - 1)E$</td> </tr> </table>	$\rho E - P$	$- Q$	O	$(\rho - 1)E$	=	$\rho E - \mathfrak{P}$;
$\rho E - P$	$- Q$					
O	$(\rho - 1)E$					

d'où

$$(\rho E - \mathfrak{p})^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline S & \Omega \\ \hline O & \frac{E}{\rho - 1} \\ \hline \end{array},$$

où

S est une matrice q -aire; }
 Ω un tableau à q lignes } à construire.
 et $p - q$ colonnes, }

Un calcul simple donne le produit des deux matrices précédentes, lequel doit être égal à l'unité.

Il vient ainsi

$$E = \begin{array}{|c|c|} \hline E & O \\ \hline O & E \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline q \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline (\rho E - P)S & (\rho E - P)\Omega - (\rho - 1)^{-1}Q \\ \hline \end{array} \right. \\ \hline p - q \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline O & E \\ \hline \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_q \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{p-q}$

L'identification donne :

$$\begin{aligned} E &= (\rho E - P)S, & \text{d'où} & \quad S = (\rho E - P)^{-1}; \\ 0 &= (\rho E - P)\Omega - (\rho - 1)^{-1}Q, & \text{d'où} & \quad \Omega = \frac{(\rho E - P)^{-1}Q}{\rho - 1}. \end{aligned}$$

Nommons :

$\psi(\rho)$, le produit obtenu en multipliant ensemble les diviseurs binomes de $\varphi(\rho) = |\rho E - P|$, chacun avec l'exposant un seulement, γ le degré de $\psi(\rho)$;

$\Psi(\rho)$, le polynome $\Psi(\rho) = (\rho - 1)^\varpi \psi(\rho)$;

G (ou g), une matrice p -aire (ou q -aire) dont les éléments sont des polynomes en ρ , premiers entre eux et de degré inférieur à $\gamma + \varpi$ (ou γ).

On aura (Préliminaires, 27°)

$$(\rho E - P)^{-1} = \frac{g}{\psi(\rho)}; \quad (\rho E - \mathfrak{P})^{-1} = \frac{G}{\Psi(\rho)};$$

reste à calculer l'exposant ϖ .

57° Il vient pour S et Ω du 56°

$$S = \frac{g}{\psi(\rho)}, \quad \Omega = \frac{gQ}{(\rho - 1)\psi(\rho)}.$$

Ψ est évidemment le plus petit commun multiple de

$$\psi(\rho), \quad (\rho - 1)\psi(\rho), \quad \rho - 1.$$

Si (54°) $\sigma = 0$, $\psi(\rho)$ n'est pas divisible par $\rho - 1$.

$$\Psi(\rho) = (\rho - 1)\psi(\rho).$$

L'exposant ϖ du 56° est un. Les successifs sont simples.

58° *Réciproquement*, si les successifs sont tous simples, σ est nul; en effet la racine 1 possède (54°) le degré $p - q + \sigma$ de multiplicité, tandis que le rang du déterminant p -aire $|E - \mathfrak{P}|$, ou $|V - V'|$, ou $|\Lambda|$, est q . On doit donc avoir (22° des Préli-

minaires)

$$q = p - (p - q + \sigma), \quad \text{d'où} \quad \sigma = 0.$$

59° Faisons donc $\sigma > 0$, $\psi(\rho) = (\rho - 1)\chi(\rho)$. Si $Q = 0$, $\Psi(\rho) =$ le p. p. c. m. entre $\rho - 1$ et $\psi(\rho)$. Alors $\Psi(\rho) = \psi(\rho)$. Les successifs sont encore tous simples.

Prenons enfin $\sigma > 0$, $Q \neq 0$, $\Psi(\rho) =$ p. p. c. m. entre $\rho - 1$, $(\rho - 1)\chi(\rho)$ et $(\rho - 1)^2\chi(\rho)$; $\Psi(\rho) = (\rho - 1)^2\chi(\rho)$.

Le premier successif est double. Avec les notations du 55°, on a $\delta_0 = 1$. Comme les δ_s ne forment pas une suite croissante, l'égalité

$$\sigma = \sum_s \delta_s,$$

montre que les σ premiers δ sont égaux à l'unité, les $p - q - \sigma$ suivants étant nuls. Il faut que $\sigma \leq p - q$.

En résumé, pour $\sigma > 0$ et $Q \neq 0$, on a, d'abord

$$\sigma \leq p - q;$$

ensuite les σ premiers successifs sont doubles, tandis que les $p - q - \sigma$ suivants sont simples.

60° Un cas particulier, important pour la suite, est celui où, dans la p -aire \mathfrak{P} , la q -aire P se réduit à l'unité.

Alors, $\sigma = q$. Les successifs ne peuvent être tous simples (58°) et

$$\Psi(\rho) = (\rho - 1)^2.$$

Puis (59°) $q \leq p - q$, $p \leq 2q$. Il y a q successifs doubles et $p - 2q$ simples.

61° Je dis, pour exprimer ce cas $P = E$, que le polysphère A est *fermé*. On trouvera, au Chapitre IX, la théorie détaillée des polysphères fermés. Mais je vais indiquer de suite les propriétés essentielles de semblables polysphères, ainsi que des matrices A et V correspondantes.

On vient de voir que

$$(\rho E - \mathfrak{p})^{-1} = \frac{G}{(\rho - 1)^2},$$

où G est une matrice p -aire dont les p^2 éléments sont du premier degré en ρ .

\mathfrak{p} a la même structure (51°) que le faisceau $\rho V + V'$. Donc

$$(\rho V + V')^{-1} = \frac{\rho B + C}{(\rho - 1)^2},$$

B et C étant des matrices p -aires.

Il vient de là

$$(\rho - 1)^2 E = (\rho V + V')(\rho B + C),$$

c'est-à-dire en identifiant

$$E = VB = V'C = -\frac{1}{2}(VC + V'B),$$

ou bien

$$(o) \quad B = V^{-1}, \quad C = V'^{-1}, \quad {}_2E + VV'^{-1} + V'V^{-1} = o.$$

Introduisons (34° et 36°) les matrices

$${}_2T = V - V', \quad {}_2\mathfrak{C} = V^{-1} - V'^{-1};$$

un calcul simple donne, eu égard à (o),

$$VV'^{-1} + V'V^{-1} = {}_2E - {}_4T\mathfrak{C} = -{}_2E,$$

c'est-à-dire $T\mathfrak{C} = E$, les deux matrices T et \mathfrak{C} sont inverses l'une de l'autre.

De plus, dans la relation

$$|\rho E - \mathfrak{p}| = |\rho V + V'| = (\rho - 1)^p,$$

faisons $\rho = -1$; on a

$$(-1)^p |V - V'| = (-1)^p {}_2^p |T| = (-1)^p {}_2^p;$$

enfin

$$|T| = |\mathfrak{C}| = 1.$$

Comme, d'une façon générale, $|\mathfrak{p}| = (-1)^p = |P|$ (49°, *in fine*) et que $P = E$, il faut que $|P| = 1$ et p est pair.

62° En résumé, pour un polysphère *fermé* d'ordre p et de rang q , on a :

$$p \text{ pair}; \quad p \geq 2q; \quad |T| = 1; \quad T\bar{\mathcal{C}} = E.$$

On verra, au Chapitre IX, que la condition $T\bar{\mathcal{C}} = E$ suffit à rendre fermé le polysphère \mathfrak{A} , la matrice Λ étant, bien entendu, une hypohermitienne d'ordre pair.



CHAPITRE VI.

SPHÈRES INVARIANTES; FAISCEAUX INVARIANTS; SEMICANONISATION.

63° Soit S une orthogonale réelle n -aire. L'équation caractéristique D

$$|\rho E - S| = 0$$

aura N couples de racines imaginaires conjuguées, la racine λ -uple 1 , la racine ν -uple -1 , avec

$$n = 2N + \lambda + \nu.$$

Le produit des n racines est $|S| = (-1)^\nu$.

On distinguera les orthogonales *droites*, où ν est pair et $|S| = 1$ *gauches*, où ν est impair et $|S| = -1$.

64° D'après ce qu'on a vu dans les Préliminaires (22°) :

S est canonisable et a tous ses successifs simples.

Si u est une racine multiple de D , avec le degré m de multiplicité, le rang du déterminant $|uE - S|$ est $n - m$.

65° Je me propose de faire une étude de la façon dont S transforme les ∞^{n-1} sphères de l'espace R_n . On cherchera notamment :

Les sphères *invariantes*, que S transforme en elles-mêmes;

Les réseaux *invariants* $R_{n'}$ ($n' < n$), tels que S permute ensemble les $\infty^{n'-1}$ sphères de $R_{n'}$.

On étudiera surtout les *faisceaux* invariants, c'est-à-dire le cas $n' = 2$.

Prenons d'abord une racine réelle $u = \pm 1$ de D , m -uple.

66° Cherchons une sphère réelle x , telle que

$$S[x] = xu \quad \text{ou} \quad (uE - S)[x] = 0. \quad (U).$$

Les n équations du système U se réduisent à $n - m$ distinctes, d'ailleurs à coefficients réels. Eu égard aux théories du Chapitre III, on voit que *le lieu de la sphère x est un réseau R_m , de rang m .*

Si $u = 1$, S laisse invariante chaque sphère de R_m , au nombre de ∞^{m-1} .

Si $u = -1$, S change chacune des ∞^{m-1} sphères en la sphère contraire (4°).

67° Prenons maintenant deux racines imaginaires conjuguées

$$\rho = e^{i\theta}, \quad \bar{\rho} = e^{-i\theta}.$$

Considérons une solution complexe ξ du système complexe

$$(o) \quad S[\xi_l] = \rho \xi_l \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Comme, vis-à-vis de l'orthogonale S , l'expression $\sum_l \xi_l^2$ est un invariant absolu, on aura

$$\sum_l \xi_l^2 = \sum_l (S[\xi_l])^2 = \rho^2 \sum_l \xi_l^2, \quad (1 - \rho^2) \sum_l \xi_l^2 = 0.$$

Or,

$$1 - \rho^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_l \xi_l^2 = 0.$$

Posons $\xi_l = u_l + iv_l$; $u_l, v_l =$ réelles.

Il viendra

$$0 = \sum_l \xi_l^2 = \sum (u + iv)^2 = \sum u^2 - \sum v^2 + 2i \sum uv,$$

c'est-à-dire

$$K^2 = \sum u^2 = \sum v^2, \quad \sum uv = 0.$$

L'hypothèse $K = 0$ donne $\xi_l = 0$ et est absurde.

Le système (o) ne fournit que les rapports des ξ_l ; on peut diviser ξ_l par K , ce qui revient à faire

$$1 = \sum_l u_l^2 = \sum_l v_l^2, \quad 0 = \sum_l u_l v_l.$$

Me reportant au Chapitre I, je puis parler des *deux sphères réelles et orthogonales* u et v , ayant u_l et v_l pour coordonnées.

68° Eu égard aux théories du Chapitre IV, on s'assure immédiatement que :

La matrice binaire Λ , afférente au disphère u et v est

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\Lambda| = 1 \neq 0.$$

Le disphère définit un réseau (ou *faisceau*) de rang deux, R_2 .

R_2 est connu dès que sont connues les racines complexes $e^{i\theta}$ ou $e^{-i\theta}$, qui donnent le même faisceau R_2 .

69° *Le faisceau R_2 possède vis-à-vis de S la propriété de l'invariance, c'est-à-dire : S remplace toute sphère ω de R_2 par une sphère du même faisceau.*

Soient, en vertu des explications du 25°,

$$\omega_l = \lambda u_l + \mu v_l,$$

les coordonnées de ω . On a, puisqu'il s'agit de sphères,

$$1 = \Sigma \omega^2 = \lambda^2 + \mu^2, \quad \text{car} \quad \Sigma u v = 0;$$

de là :

$$\lambda = \cos \varphi, \quad \mu = \sin \varphi.$$

Mais (67°) on a symboliquement

$$\begin{aligned} S[\xi] &= \rho \xi = (\cos \theta + i \sin \theta) (u + iv) \\ &= u \cos \theta - v \sin \theta + i \{ u \sin \theta + v \cos \theta \} = S[u + iv] = S[u] + iS[v] \end{aligned}$$

et en identifiant

$$\begin{aligned} S[u] &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ S[v] &= u \sin \theta + v \cos \theta. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} S[w] &= S[u \cos \varphi + v \sin \varphi] \\ &= \cos \varphi S[u] + \sin \varphi S[v] = u \cos(\varphi - \theta) + v \sin(\varphi - \theta). \end{aligned}$$

$S[w]$ est sur le faisceau R_2 . C. Q. F. D.

Toutes les ∞ sphères du faisceau sont données par la formule

$$w = u \cos \varphi + v \sin \varphi.$$

La substitution S , effectuée sur les sphères de R_2 revient à ajouter $-\theta$ à l'arc-paramètre φ de chaque sphère.

70° Réciproquement, *tout faisceau invariant peut être obtenu par le procédé ci-dessus, c'est-à-dire se rattache à un couple de racines complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.*

Prenons sur le faisceau, par les procédés du Chapitre II, un directangle formé par deux sphères orthogonales u et v .

En vertu de l'invariance du faisceau, on aura

$$\begin{aligned} S[u_l] &= u_l \cos \alpha + v_l \sin \alpha, \\ S[v_l] &= u_l \cos \beta + v_l \sin \beta. \end{aligned}$$

Les deux sphères transformées sont encore orthogonales, d'où

$$0 = \sum_l (u_l \cos \alpha + v_l \sin \alpha) (u_l \cos \beta + v_l \sin \beta) = \cos(\beta - \alpha); \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Puis

$$\begin{aligned} S[v] &= -u \sin \alpha + v \cos \alpha, \\ S[u + iv] &= e^{-i\alpha}(u + iv). \end{aligned}$$

Posons $u_l + iv_l = \xi_l$; on a

$$S[\xi] = \xi e^{-i\alpha} = \rho \xi,$$

ρ est racine de l'équation caractéristique et l'on retombe sur le système (o) du 67°.

C. Q. F. D.

71° Reprenons une racine réelle $t = \pm 1$. Soit (66°) une sphère invariante x , qui pourra être projectivement amenée sur la sphère coordonnée Ξ_n , ou

$$0 = x_1 = \dots = x_{n-1}, \quad 1 = x_n.$$

Alors, si $S = [s_{jk}]$, ($j, k = 1, 2, \dots, n$),

$$s_{nn} = t; \quad s_{jn} = 0$$

et, par orthogonalité,

$$s_{nj} = 0,$$

puisque $S' = S^{-1}$ doit admettre la même sphère invariante; alors la n -aire S , ou S_n , est telle que

$$S_n(u, v) = S_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}; v_1, \dots, v_{n-1}) + tu_n v_n.$$

Si la $(n-1)$ -aire orthogonale S_{n-1} , admet encore une racine réelle pour son équation caractéristique, on recommencera le calcul et ainsi de suite.

72° Prenons au contraire le couple $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ de racines imaginaires. Sur le faisceau invariant (68° à 70°), correspondant au couple, on peut placer, projectivement, le directangle de référence formé par les deux sphères coordonnées Ξ_{n-1} et Ξ_n .

Le calcul du 67° et le système

$$S[\xi] = \rho \xi, \quad \rho = e^{i\theta}$$

donnent ici

$$\xi_1 = \dots = \xi_{n-2} = 0, \quad \xi_{n-1} = 1, \quad \xi_n = i,$$

(puisque $u = \Xi_{n-1}$, $v = \Xi_n$)

$$\begin{aligned} u_1 = \dots = u_{n-2} = u_n &= 0, & u_{n-1} &= 1 \\ v_1 = \dots = v_{n-2} = v_{n-1} &= 0, & v_n &= i. \end{aligned}$$

Alors, pour

$$S = [s_{jk}], \quad S[\xi_j] = s_{j, n-1} + i s_{jn};$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = s_{j, n-1} + i s_{jn} \quad \text{ou} \quad 0 = s_{j, n-1} = s_{jn} \\ j = 1, 2, \dots, n-2 \end{array} \right\}.$$

$S' = S^{-1}$ possède la même propriété; donc

$$s_{n-1,j} = s_{nj} = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots, n-2.$$

La n -aire S_n est telle que

$$S_n(x, y) = S_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}; y_1, \dots, y_{n-2}) + B(x_{n-1}, x_n; y_{n-1}, y_n),$$

$$B = \begin{pmatrix} s_{n-1,n-1} & s_{n-1,n} \\ s_{n,n-1} & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Comme $\xi_{n-1} = 1, \xi_n = i$, on a

$$\begin{cases} s_{n-1,n-1} + i s_{n-1,n} = e^{i\theta} \\ s_{n,n-1} + i s_{nn} = i e^{i\theta} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On poursuivra la même réduction sur l'orthogonale

$$(n-2)\text{-aire } S_{n-2}, \dots$$

73° L'analyse des 71° et 72° se résume ainsi : *toute forme bilinéaire réelle et orthogonale peut se mettre, projectivement, sous l'expression d'une somme de termes, tels que ceux-ci :*

x_1, y_1 , provenant de la racine 1 de l'équation caractéristique;

$-x_1, y_1$, provenant de la racine -1 ;

$(x_1 y_1 + x_2 y_2) \cos \theta + (y_1 x_2 - y_2 x_1) \sin \theta$, provenant d'un couple de racines imaginaires.

Nous dirons qu'on a *semi-canonisé* la matrice réelle et orthogonale S .

Ainsi *toute matrice S est semi-canonisable et admet au moins une semi-canonisante réelle et orthogonale.*

74° Supposons que la n -aire S_n réelle et orthogonale possède les deux racines complexes

$$\varphi = e^{i\theta}, \quad \bar{\varphi} = e^{-i\theta}$$

avec le degré m de multiplicité. Semi-canonisons S_n et mettons en évidence les termes qui proviennent du couple φ et $\bar{\varphi}$. Il

viendra

$$\Omega = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \theta & O & O & O \\ \hline O & \theta & O & O \\ \hline O & O & \theta & O \\ \hline \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array}}^{2m} \\ \left. \begin{array}{|c|c|} \hline \Omega & O \\ \hline O & S_{n-2m} \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2m \\ n-2m \end{array} \end{array},$$

où

S_{n-2m} = semi-canonique $(n-2m)$ -aire;

Ω = semi-canonique $(2m)$ -aire;

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \quad |\theta| = 1.$$

Cherchons les faisceaux invariants afférents au couple m -uple des deux racines complexes ρ et $\bar{\rho}$.

Considérons à cet effet le système U des n équations

$$S_n[\xi] = \rho \xi, \quad \xi = u + iv.$$

Comme, par hypothèse,

$$|\rho E - S_{n-2m}| \neq 0,$$

il vient déjà $2(n-2m)$ équations distinctes entre les quantités réelles u et v et $n-2m$ équations distinctes entre les quantités complexes ξ . Ces relations sont

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= u_\alpha + iv_\alpha = 0 = u_\alpha = v_\alpha; \\ \alpha &= 2m+1, 2m+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Les deux sphères orthogonales u et v sont sur un réseau R_{2m} de rang $2m$, défini par les $n - 2m$ équations

$$x_{2m+1} = x_{2m+2} = \dots = x_n = 0.$$

Les $2m$ premières équations de U , savoir

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta &= \rho \xi_1 \\ -\xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta &= \rho \xi_2 \\ \xi_3 \cos \theta + \xi_4 \sin \theta &= \rho \xi_3 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \text{(entre quantités complexes } \rho \text{ et } \xi),$$

se réduisent à m distinctes; savoir :

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\sin \theta}{\rho - \cos \theta} = -i; \quad o = \xi_1 + i\xi_2 = (u_1 + iv_1) + i(u_2 + iv_2);$$

$$v_1 = -u_2, \quad v_2 = u_1;$$

$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots$$

Il vient (entre les $4m$ variables réelles $u_1, \dots, u_{2m}; v_1, \dots, v_{2m}$) $2m$ relations

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_1 = -u_2 & v_2 = u_1 \\ v_3 = -u_4 & v_4 = u_3 \\ v_5 = -u_6 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ v_{2m-1} = -u_{2m} & v_{2m} = u_{2m-1} \end{array} \right\}.$$

On peut sur R_{2m} prendre arbitrairement la sphère u ; alors les relations (o) fournissent sans ambiguïté la sphère v et le faisceau invariant sur lequel est situé le directangle (u, v) .

75° On obtient ainsi une proposition qui résout le problème relatif à la construction des faisceaux invariants :

THÉORÈME. — *A un couple m -uple de deux racines imaginaires conjuguées, dans l'équation caractéristique, correspond sans ambiguïté un réseau R_{2m} de rang $2m$. Les ∞^{2m-1} sphères de R_{2m} se répartissent ∞ par ∞ en ∞^{2m-2} faisceaux invariants. Par chaque sphère de R_{2m} passe un faisceau invariant et un seul, lequel se trouve par là construit.*

Le résultat est à rapprocher de ceux du 66°, relatifs aux racines réelles ± 1 .

Ainsi :

A chaque racine réelle, ou à chaque couple de racines complexes, correspond un réseau dont le rang égale soit le degré de multiplicité pour la racine réelle, soit le double de ce degré pour le couple.

Les réseaux sont, chacun, complémentaires (22°) au réseau constitué par la totalité des autres.

Ce dernier point est évident, car le réseau afférent, par exemple, au couple m -uple ρ et $\bar{\rho}$ du 74°, est défini par les $n - 2m$ équations

$$x_{2m+1} = \dots = x_n = 0.$$

76° Sur une semi-canonique réelle S_n on reconnaît immédiatement que S_n est un produit de semi-canoniques *échangeables* s_{n_1} , s_{n_2} , ..., n_1 -aire, n_2 -aire, ... respectivement, effectuée chacune sur un système de n_1 , n_2 , ... variables convenablement choisies.

On dira que les s sont les *composantes* de S_n , ou que S_n se *décompose* en les s .

Si on fait, comme au 63°,

$$n = \lambda + \nu + 2N;$$

$$|\rho E - S_n| = (\rho - 1)^\lambda (\rho + 1)^\nu \prod_{k=1}^{k=N} (\rho^2 - 2\rho \cos \theta_k + 1),$$

les N arcs θ_k étant différents ou non, mais non égaux à un multiple de π , alors, on pourra prendre, comme composantes de S_n :

- I. La substitution unité effectuée sur λ variables;
- II. La canonique réelle

$$|t - t|$$

effectuée sur ν variables;

III. Les N binaires

$$\theta_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, -N).$$

77° Cette remarque si simple entraînera de nombreuses conséquences aux Chapitres suivants.

Le mot *semi-canonisation* est de mon invention, mais la chose a déjà été indiquée, dans le domaine quaternaire, $n = 4$, par M. Goursat, à la page 36 de son Mémoire *Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. VI, 1889).



CHAPITRE VII.

INVERSIONS.

78° L'opération bien connue, en Géométrie ordinaire, sous le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques* ou *inversion*, est la suivante :



On a un point fixe O *centre d'inversion*. Prenons un point m de l'espace et, sur la droite Om , un second point m' tel que

$$Om \times Om' = \pm K^2 \quad (K = \text{longueur donnée}).$$

Si l'on prend le signe $+$, m et m' sont du même côté par rapport à O . Pour le signe $-$, O est entre m et m' .

On dit alors que m' est le transformé de m et réciproquement.

Prenons $+$ et, du point O comme centre, décrivons une sphère avec le rayon K . Soit k le point où Om perce la sphère. La longueur Ok est moyenne proportionnelle entre Om et Om' .

La connaissance de cette *sphère invertante*, en position et en rayon, assure la connaissance de l'inversion.

Si l'on prend le signe $-$, on peut encore introduire une sphère invertante, qui aura un rayon iK . Elle sera imaginaire, dans le concept habituel, mais pourra être réelle au point de vue du Chapitre I (3°), c'est-à-dire avoir ses cinq coordonnées x réelles.

79° Prenons par exemple pour sphère invertante la sphère dont l'équation en coordonnées rectangulaires X, Y et Z est

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0, \quad \text{ou} \quad D - R^2 = 0.$$

Alors [1° et 2°; formules (3) et (4), . . .]

$$\begin{aligned} A = a_1 = a_2 = a_3 = 0 = x_1 = x_2 = x_3, \\ R^{-1} = x_4 + ix_5; \quad x_4 - ix_5 = R. \end{aligned}$$

Faisons $R = -i$, $R^{-1} = i$; alors

$$\left. \begin{aligned} x_4 = \frac{R^{-1} + R}{2} = 0 \\ x_5 = \frac{R^{-1} - R}{2i} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ et la sphère invertante est } \textit{réelle}; \text{ c'est la sphère } \\ \text{coordonnée } \Xi_5.$$

80° La sphère invertante étant Ξ_5 ou

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = D + 1 = 0,$$

l'inversion est exprimée par les formules

$$(o) \quad X' = -XD^{-1}, \quad Y' = -YD^{-1}, \quad Z' = -ZD^{-1}, \quad D' = D^{-1},$$

où X', \dots, D' sont les coordonnées d'un point et le carré de sa distance à l'origine, centre d'inversion.

Prenons maintenant la sphère quelconque x (*voir* 1°)

$$0 = 2x_1X + 2x_2Y + 2x_3Z + (D-1)x_4 + (D+1)ix_5.$$

Après inversion et départ du facteur D^{-1} la sphère devient, eu égard aux formules (o),

$$0 = 2x_1X + 2x_2Y + 2x_3Z + (D-1)x_4 - (D+1)ix_5.$$

Sur les cinq variables x_1, \dots, x_5 l'inversion se traduit par la quinaire canonique réelle

$$\mathfrak{C}_5 = \begin{vmatrix} x_x & \tau x_x \\ x_5 & -\tau x_5 \end{vmatrix} \quad (x=1, 2, 3, 4).$$

Par orthogonalité, $\tau^2 = 1$. On prendra

$$\begin{aligned} |\mathfrak{C}_5| = -\tau^5 = -1, \quad \text{d'où } \tau = 1; \\ |\rho E - \mathfrak{C}_5| = (\rho - 1)^4 (\rho + 1). \end{aligned}$$

81° Généralisant la notion d'inversion introduite dans le présent Chapitre, je nommerai inversion toute substitution

n -aire S , orthogonale et réelle, telle que

$$|S| = -1, \quad |\rho E - S| = (\rho - 1)^{n-1} (\rho + 1).$$

En effet, comme S n'a, pour son équation caractéristique, que des racines réelles, S est canonisable sans sortir du réel. Elle peut être mise sous la forme

$$\tilde{\varepsilon}_n = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_n & -x_n \end{vmatrix} \quad (x = 1, 2, \dots, n-1),$$

et pour $n = 5$, se confond avec $\tilde{\varepsilon}_5(80^\circ)$, c'est-à-dire avec l'inversion ordinaire.

La sphère coordonnée Ξ_n sera, pour $\tilde{\varepsilon}_n$, la sphère invariante.

82° Construisons l'inversion générale S , que nous pouvons écrire

$$S = E - 2C, \quad C = [c_{ij}]; \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Comme l'équation caractéristique admet 1 pour racine $(n-1)$ -uple, le déterminant

$$|E - S| \quad \text{ou} \quad |C|$$

a (64°) pour rang l'unité; $c_{ij} = K a_i b_j$, avec

$$1 = \sum_i a_i^2 = \sum_i b_i^2,$$

de façon à introduire les deux sphères a et b .

Alors la forme bilinéaire $S(x, y)$ devient

$$S(x, y) = E(x, y) - 2C(x, y) = E(x, y) - 2K a(y) b(x);$$

$$a(y) = \sum_i a_i y_i, \quad b(x) = \sum_i b_i x_i;$$

$$S'(x, y) = E(x, y) - 2K a(x) b(y).$$

Exprimons l'orthogonalité, $E = SS'$. On a

$$E(x, y) = E(x, y) - 2K \{ a(y) b(x) + a(x) b(y) \} \\ + 4K^2 (a(y) b(x)) (a(x) b(y)),$$

où les grandes parenthèses expriment la multiplication symbolique des formes bilinéaires. Par suite

$$\begin{aligned} (a(y) b(x)) (a(x) b(y)) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [a(y) b(x)] \frac{\partial}{\partial y_i} [a(x) b(y)] \\ &= a(y) a(x) \sum_i \frac{\partial b(x)}{\partial x_i} \frac{\partial b(y)}{\partial y_i} = a(y) a(x), \end{aligned}$$

car

$$\Sigma b^2 = 1.$$

La condition d'orthogonalité devient simplement

$$(o) \quad 2K a(y) a(x) = a(y) b(x) + a(x) b(y).$$

Dans l'identité (o), $a(y)$ doit diviser $b(y)$. On posera $b_i = K' a_i$; (o) donne immédiatement $K' = K$. Or $1 = \Sigma a^2 = \Sigma b^2$ et $K^2 = 1$.

Alors

$$K a(y) b(x) = K K' a(y) a(x) = a(y) a(x),$$

puisque

$$K K' = K^2 = 1.$$

83° La matrice d'une inversion S sera donc telle que

$$S(x, y) = E(x, y) - 2a(x) a(y),$$

$$E(x, y) = \sum_i x_i y_i; \quad a(x) = \sum_i a_i x_i, \quad \dots;$$

les a_i sont les coordonnées d'une sphère a réelle.

Amenons projectivement la sphère a sur la sphère coordonnée Ξ_n .

$a(x)$ et $a(y)$ sont les cosinus de l'angle que la sphère a fait avec les sphères x ou y (6° et 7°). Une fois a venue sur Ξ_n , $a(x)$ et $a(y)$ deviennent x_n et y_n . S devient

$$E(x, y) - 2x_n y_n,$$

c'est-à-dire \mathfrak{E}_n (81). \mathfrak{E}_n admet Ξ_n pour sphère invertante; par conséquent :

L'inversion S admet a pour sphère invertante.

Du reste S admet aussi pour sphère invertante la sphère $-a$, contraire (4°) de la sphère a .

Dorénavant je nommerai A l'inversion

$$A(x, y) = E(x, y) - 2a(x)a(y)$$

dont la sphère a (ou $-a$) est l'invertante. Pour A connue, a est connue et réciproquement.

84° On voit de suite qu'une inversion A

$$A = |x_i \quad x_i - 2a_i a(x)|$$

laisse invariante toute sphère x , telle que $a(x) = 0$, et change la sphère a en la sphère contraire.

Ainsi l'inversion A : 1° change l'une dans l'autre les deux sphères invertantes et contraires; 2° laisse invariante chaque sphère du réseau R_{n-1} , formé par les ∞^{n-2} sphères orthogonales aux sphères invertantes.

D'ailleurs l'inversion A est symétrique : $A' = A$. Enfin $A^2 = E$. S est gauche (63°).

85° Revenons aux composantes (76°) d'une n -aire orthogonale réelle et semi-canonique.

La primaire ($n = 1$)

$$|t \quad -t|$$

est une inversion; la primaire unité est le produit de deux inversions. La binaire telle que

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

est le produit des deux inversions binaires A_1 et A_2 où les invertantes sont

$$\text{Pour } a_1 : \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0; \quad a_1 \text{ est } \Xi_1.$$

$$\text{Pour } a_2 : \quad a_{21} = \cos \theta, \quad a_{22} = \sin \theta;$$

de façon que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

et

$$A_1 A_2 = \theta.$$

D'où un important résultat.

THÉORÈME. — *Toute matrice réelle et orthogonale est un produit d'inversions.*

La construction, pour une matrice réelle et orthogonale donnée, des *inversions composantes* est le problème capital de la seconde Partie et de tout le présent travail.

86° Prenons un polysphère \mathfrak{A} (25°) d'ordre p et de rang q , $q \leq n$, constitué par les p sphères a_j ($j = 1, 2, \dots, p$). Introduisons les p inversions A_j dont les a_j sont les sphères invertantes, ainsi que l'orthogonale n -aire, réelle et orthogonale Π_p , produit des p inversions,

$$\Pi_p = A_1 A_2 \dots A_{p-1} A_p.$$

Π_p admet pour invariante toute sphère orthogonale à la fois aux p invertantes (84°), c'est-à-dire toute sphère du réseau \mathfrak{R}_{n-q} complémentaire (25°) au réseau \mathfrak{R}_q défini par le polysphère \mathfrak{A} .

Plaçons, eu égard aux théories du Chapitre II :

Sur \mathfrak{R}_q , le polyrectangle des q sphères coordonnées Ξ_r , $r = 1, 2, \dots, q$;

Sur \mathfrak{R}_{n-q} , le polyrectangle des $n - q$ sphères coordonnées restantes

$$\Xi_{q+1}, \dots, \Xi_n.$$

Alors $a_{ji} = 0$ pour $i > q$ et, comme il est facile de voir, Π_p :
 1° se traduira sur les $n - q$ variables x_{q+1}, \dots, x_n par la substitution $(n - q)$ -aire unité; 2° sur les q variables x_1, \dots, x_q par une certaine orthogonale q -aire P_p .

L'expression $|\varphi E - \Pi_p|$ est divisible par $(\varphi - 1)^{n-q}$ au moins.

On voit que le nombre n ne joue pas grand rôle.

87° Reportons-nous au 63°. Le déterminant d'une inversion

est -1 . Donc *les orthogonales droites (ou gauches) sont le produit d'un nombre pair (ou impair) de composantes ou facteurs-inversions.*

On verra plus loin que, pour une même orthogonale, le nombre des inversions-facteurs n'est pas fixe, mais *la parité de ce nombre est fixe.*

88° On sait depuis longtemps déjà, par les recherches de Liouville et de MM. Darboux et Goursat, dans les Mémoires précités de ces deux géomètres, que toute substitution orthogonale (et plus généralement toute transformation isogonale, ou conservant les angles) est décomposable, et d'une infinité de façons en un produit d'inversions, la parité du nombre des inversions-facteurs étant un invariant.

Je m'attacherai à établir la solution complète et effective de ce problème de la décomposition, que je sais d'avance être soluble, soit grâce aux travaux de Liouville, de MM. Darboux et Goursat, soit grâce à la démonstration directe qui figure au présent Chapitre (85°).



SECONDE PARTIE.

MULTIPLICATION DES INVERSIONS ET PROBLÈME INVERSE.

CHAPITRE VIII.

MULTIPLICATION DES INVERSIONS.

89° Prenons (86°) un polysphère \mathfrak{A} d'ordre p et de rang q , $q \leq p$, constitué par p sphères a_j ($j = 1, 2, \dots, p$), lesquelles fournissent, comme sphères invertantes, les p inversions Λ_j . Je me propose d'étudier l'orthogonale réelle

$$\Pi_p = \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_p.$$

Eu égard aux explications du 86° on peut toujours, sans restreindre la généralité, supposer que Π_p est une q -aire, opérée sur les q variables

$$x_r \quad (r = 1, 2, \dots, q).$$

De même les p sphères a_j seront sur le réseau R_q , défini par le polysphère \mathfrak{A} , réseau sur lequel sera placé le polyrectangle des p sphères coordonnées Ξ_r . La sphère a_j aura ses q premières coordonnées

$$a_{jr} \quad (r = 1, 2, \dots, q),$$

seules différentes de zéro, les suivantes $a_{j,q+1}, \dots$ étant toutes nulles.

On posera enfin

$$\xi_j = \sum_r a_{jr} x_r, \quad \eta_j = \sum_r a_{jr} y_r.$$

90° Revenons maintenant aux formations $\Lambda = \Lambda_p$

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \dots & \dots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & 1 & \dots & \dots & \lambda_{2p} \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{p1} & \cdot & \dots & \lambda_{p, p-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = V_p = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda_{12} & \dots & \dots & 2\lambda_{1p} \\ 0 & 1 & 2\lambda_{23} & \dots & 2\lambda_{2p} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

étudiées au Chapitre IV. On reprendra de même, ξ et η ayant la signification qui vient d'être dite, la formation

$$\vartheta_p = -V_p^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_p; \tau_1, \dots, \tau_p)$$

construite au Chapitre IV (37° à 39°).

91° THÉORÈME. — *La matrice q -aire Π_p est telle que la forme bilinéaire*

$$\Pi_p(x, y) = E(x, y) + 2\vartheta_p,$$

$$E(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_q y_q.$$

Cette proposition résout donc complètement le problème relatif à la *composition* ou à la *multiplication des inversions*.

Passons à la démonstration: Si $p = 1$,

$$\Pi_p = A_1,$$

Or (83°)

$$A_1(x, y) = E(x, y) - 2a_1(x)a_1(y),$$

$$a_1(x) = \sum_r a_{1r}x_r = \xi_1; \quad a_1(y) = \sum_r a_{1r}y_r = \tau_1,$$

$$-a_1(x)a_1(y) = -\xi_1\tau_1 = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 \\ \tau_1 & 0 \end{vmatrix} = \vartheta_1$$

$$A_1 = E + 2\vartheta_1.$$

Je dis que, si le théorème est vrai pour $p - 1$, il est vrai aussi pour p .

Soit donc, par hypothèse,

$$\Pi_{p-1} = A_1 \dots A_{p-1} = E + 2\psi_{p-1};$$

multiplions symboliquement par

$$A_p = E - 2\xi_p \tau_{ip}.$$

Il viendra

$$\begin{aligned} \Pi_p = A_1 \dots A_p &= E + 2\mathbf{w} = \left(E + 2\psi_{p-1} \right) \left(E - 2\xi_p \tau_{ip} \right) \\ &= E - 2\xi_p \tau_{ip} + 2\psi_{p-1} - 4 \left(\psi_{p-1} \right) \left(\xi_p \tau_{ip} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{w} = \psi_{p-1} - \xi_p \tau_{ip} - 2 \left(\psi_{p-1} \right) \left(\xi_p \tau_{ip} \right),$$

les grandes parenthèses indiquant la multiplication symbolique :

$$\begin{aligned} \left(\psi_{p-1} \right) \left(\xi_p \tau_{ip} \right) &= \sum_r \frac{\partial \psi_{p-1}}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial y_r} (\xi_p \tau_{ip}) \\ &= \xi_p \sum_{rj} \frac{\partial \psi_{p-1}}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial y_r} = \xi_p \sum_{rj} a_{jr} a_{pr} \frac{\partial \psi_{p-1}}{\partial \xi_j}, \end{aligned}$$

où $j = 1, 2, \dots, p - 1$, puisque

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_r} = a_{jr}, \quad \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_r} = a_{jr}.$$

Tout calcul fait,

$$\mathbf{w} = \psi_{p-1} - \xi_p \tau_{ip} - 2\xi_p \sum_{j=1}^{i=p-1} \lambda_{pj} \frac{\partial \psi_{p-1}}{\partial \xi_j};$$

car

$$\sum_r a_{jr} a_{pr} = \lambda_{pj} \quad (30^0).$$

Nous retombons précisément sur la formule de récurrence (1)

du 38°, laquelle donne φ_p . Donc

$$\mathfrak{w} = \varphi_h$$

C. Q. F. D.

92° Soit donc la substitution réelle et orthogonale q -aire Π_p , opérée sur les x_r , $r = 1, 2, \dots, q$,

$$\Pi_p = |x_r \quad x'_r| = |x_r \quad \Pi_p[x_r]| = \left| x_r \quad \frac{\partial \Pi_p(x, y)}{\partial y_r} \right|.$$

Comment se traduit-elle sur les p expressions

$$\xi_j = \sum_r a_{jr} x_r, \quad j = 1, 2, \dots, p?$$

On a [$j, k, l = 1, 2, 3, \dots, p$]

$$x'_r = \frac{\partial \Pi_p(x, y)}{\partial y_r} = x_r + 2 \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_r} = x_r + 2 \sum_k \frac{\partial \varphi_p}{\partial \eta_k} a_{kr}.$$

Effectuons l'opération $\sum_r a_{jr}$; on aura

$$\begin{aligned} \sum_r a_{jr} x'_r &= \xi'_j = \xi_j + 2 \sum_{kr} a_{jr} a_{kr} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \eta_k} \\ &= \xi_j + 2 \sum_k \lambda_{jk} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \eta_k} \\ &= \xi_j + 2 \sum_l \xi_l \sum_k \lambda_{jk} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \eta_k \partial \xi_l}. \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \eta_k \partial \xi_l} = -[V_p^{-1}]_{kl} \quad (\text{Préliminaires, 3°}),$$

puisque

$$\varphi_p = -V_p^{-1}(\xi, \eta).$$

$$\sum_k \lambda_{jk} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \eta_k \partial \xi_l} = - \sum_k \lambda_{jk} [V_p^{-1}]_{kl} = -[\Lambda_p V_p^{-1}]_{jl}.$$

Enfin

$$\xi'_j = \xi_j - 2 \sum_l \xi_l [\Lambda_p V_p^{-1}]_{jl}.$$

c'est-à-dire

$$\xi'_j = (E - 2\Lambda_p V_p^{-1}) [\xi_j].$$

Sur les p variables ξ_j , la substitution Π_p se traduit par la p -aire

$$E - 2\Lambda_p V_p^{-1},$$

c'est-à-dire (34°) par la p -aire

$$(V_p - 2\Lambda_p) V_p^{-1} = (V_p - V_p - V'_p) V_p^{-1} = -V'_p V_p^{-1} = \mathfrak{Q}_p \quad (41^\circ),$$

ou simplement \mathfrak{Q} .

93° Introduisons (Chap. V) la formation \mathfrak{Q}_0 , matrice transformée de la matrice \mathfrak{Q} par une canonisante D de la matrice hypohermitienne Λ . On a (48°)

$$\mathfrak{Q}_0 = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & \mathfrak{Q} \\ \hline 0 & E \end{array} \right],$$

Enfin on aura la matrice p -aire du 50°

$$\mathfrak{P} = L^{-1} \mathfrak{Q}_0 L = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & E \end{array} \right].$$

La substitution Π_p effectuée sur les x_r se traduit sur les ξ_j par la substitution \mathfrak{Q} . A son tour, \mathfrak{Q} , effectuée sur les ξ_j , se traduit sur les x_r par la q -aire P ou P_p , sans ambiguïté et à l'orientation près. Cela résulte du 49°. Donc P_p n'est pas distincte de Π_p et n'en diffère que par l'orientation.

94° En résumé, nous avons construit la substitution réelle et orthogonale Π_p , ou P_p , produit des p inversions Λ_j .

Les théories du Chapitre V nous renseignent alors d'une

façon complète sur les successifs et la structure de P_p , laquelle ne dépend que de celle du faisceau de matrices p -aires

$$\rho V + V' \quad \text{ou} \quad \rho V_p + V'_p.$$

95° Comme application facile, je construirai une *rotation*, c'est-à-dire le produit de *deux* inversions.

On a, pour $p = 2$,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= A_1 A_2 = E + 2\psi_2; \\ V_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad V_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \psi_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda_{12} & \xi_1 \\ 0 & 1 & \xi_2 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \end{vmatrix} = -\xi_1 \tau_{11} - \xi_2 \tau_{12} + 2\lambda_{12} \xi_2 \tau_{11}; \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad |\Lambda| = 1 - \lambda_{12}^2 \end{aligned}$$

λ_{12} est le cosinus de l'angle ω des deux sphères invertantes.

Il y aura toujours au moins un réseau R_2 de rang deux sur lequel seront les deux sphères invertantes, de coordonnées

$$a_{jr} \quad (j, r = 1, 2).$$

On placera sur ce R_2 le birectangle des deux sphères coordonnées Ξ_1 et Ξ_2 . Cela permettra de faire

$$a_{11} = \cos \varphi_1, \quad a_{12} = \sin \varphi_1,$$

$$a_{21} = \cos \varphi_2, \quad a_{22} = \sin \varphi_2,$$

$$\lambda_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \omega.$$

$$V_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{Q}_2 = -V_2' V_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2\lambda_{12} \\ -2\lambda_{12} & 4\lambda_{12}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathcal{Q}_2| = (-1)^2 = 1.$$

Développons maintenant l'expression

$$\Pi_2 = P_2 = E + 2\psi_2,$$

$$\psi_2 = 2\lambda_{12} \xi_2 \tau_{11} - \xi_1 \tau_{11} - \xi_2 \tau_{12}.$$

On aura successivement, par un calcul élémentaire,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &\quad + 4\lambda_{12}(x_1 \cos \varphi_2 + x_2 \sin \varphi_2)(y_1 \cos \varphi_1 + y_2 \sin \varphi_1) \\ &\quad - 2(x_1 \cos \varphi_1 + x_2 \sin \varphi_1)(y_1 \cos \varphi_1 + y_2 \sin \varphi_1) \\ &\quad - 2(x_1 \cos \varphi_2 + x_2 \sin \varphi_2)(y_1 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2) \\ &= (B_{11}x_1 + B_{12}x_2)y_1 + (B_{21}x_1 + B_{22}x_2)y_2. \end{aligned}$$

$$B_{11} = 1 + 4\lambda_{12} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2 \cos^2 \varphi_1 - 2 \cos^2 \varphi_2,$$

$$B_{12} = 2 \left\{ 2\lambda_{12} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \right\},$$

$$B_{21} = 2 \left\{ 2\lambda_{12} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \right\},$$

$$B_{22} = 1 + 4\lambda_{12} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2 \sin^2 \varphi_1 - 2 \sin^2 \varphi_2,$$

avec $\lambda_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. De là :

$$B_{11} + B_{22} = 2(2\lambda_{12}^2 - 1),$$

$$B_{11} - B_{22} = 2[2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2] = 0,$$

$$B_{11} = B_{22} = 2\lambda_{12}^2 - 1 = \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Puis

$$\frac{B_{12} - B_{21}}{2} = 2\lambda_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\frac{B_{12} + B_{21}}{2} = 2\lambda_{12} \sin(\varphi_2 + \varphi_1) - \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 = 0;$$

c'est-à-dire

$$B_{12} = 2\lambda_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$B_{21} = -\sin 2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Enfin

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) & -\sin 2(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \sin 2(\varphi_1 - \varphi_2) & \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\omega & -\sin 2\omega \\ \sin 2\omega & \cos 2\omega \end{pmatrix}.$$

96° On a bien

$$\rho V + V' = \begin{pmatrix} \rho + 1 & 2\rho\lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \rho + 1 \end{pmatrix}$$

$$|\rho V + V'| = (\rho + 1)^2 - 4\rho\lambda_{12}^2$$

$$= |\rho E - \Pi_2| = (\rho - \cos 2\omega)^2 + \sin^2 2\omega = \rho^2 - 2\rho \cos 2\omega + 1$$

$$= (\rho + 1)^2 - 2\rho(1 + \cos 2\omega),$$

ce qui devrait être (94°).

A.

97° La rotation Π_2 ne dépend que de l'angle ω des deux sphères et nullement des deux arcs φ_1 et φ_2 . Cette rotation ne change pas quand on remplace les deux sphères invertantes a_1 et a_2 par deux sphères quelconques du réseau R_2 , pourvu que les deux nouvelles sphères invertantes fassent toujours ensemble le même angle ω .

La remarque sera utile plus loin (103°).

98° On a vu (96°) que $|\Lambda| = 1 - \lambda_{12}^2 = \sin^2 \omega$.

Si les deux sphères invertantes sont confondues, $\omega = 0$, ou contraires, $\omega = \pi$, on a $|\Lambda| = 0$ et le rang q du disphère $a_1 a_2$ s'abaisse de 2 à 1.

L'angle de rotation 2ω devient multiple de 2π et la rotation devient l'orthogonale binaire unité.

99° Si les deux sphères invertantes sont orthogonales, $\lambda_{12} = 0$. Le rang $q = 2$; l'angle de rotation devient π . Je dis que *les deux inversions A_1 et A_2 deviennent échangeables*.

En effet, si $\lambda_{12} = 0$, φ_2 devient symétrique (95°) en ξ et η et Π_2 devient symétrique en x et y . Alors

$$\Pi'_2 = (A_1 A_2)' = A_2 A_1 = \Pi_2 = A_1 A_2,$$

puisque toute inversion est une matrice symétrique.

100° Au 95° on a défini la rotation comme le produit de deux inversions. Cette définition doit être remplacée par une autre, car, comme on le verra ci-dessous, une rotation peut être décomposée aussi en un produit de plus de deux inversions.

On appellera rotation toute matrice S_n , n-aire, réelle, orthogonale, droite, telle que $|\rho E - S_n|$ est divisible par $(\rho - 1)^{n-2}$.

En effet, semi-canonisons S_n . Il viendra, si les deux dernières

racines de l'équation caractéristique sont

$$e^{i\theta} \quad \text{et} \quad e^{-i\theta},$$

$$S_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_2 & x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ x_3 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & x_n \end{pmatrix}.$$

Or, la binaire

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est, comme il vient d'être dit, le produit des deux inversions dont les sphères invertantes ont pour coordonnées

$$a_{11} = \cos \varphi_1, \quad a_{12} = \sin \varphi_1,$$

$$a_{21} = \cos \varphi_2, \quad a_{22} = \sin \varphi_2,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega = \frac{1}{2} \theta.$$

La nouvelle définition de la rotation n'infirme pas la première définition.

101° Je n'insiste pas sur la théorie géométrique des rotations. Pour plus de détails, et dans l'espace ordinaire, on pourra se reporter au Mémoire de M. Goursat.



CHAPITRE IX.

SYNTHÈSE DE L'UNITÉ.

102° Au Chapitre VIII on vient de résoudre le problème que voici :

Étant donné le polysphère \mathfrak{A} , des p sphères invertantes a_j , construire l'orthogonale

$$\Pi = A_1 A_2 \dots A_p,$$

produit des p inversions A .

On dira que le polysphère \mathfrak{A} fournit Π .

Nous abordons maintenant le problème inverse :

Étant donnée une orthogonale réelle Π , construire un polysphère \mathfrak{A} , qui fournisse Π .

103° On aperçoit de suite que \mathfrak{A} n'est pas unique. Par exemple, dans le cas le plus simple, celui d'une rotation, on peut prendre, pour \mathfrak{A} , un disphère quelconque, pourvu que \mathfrak{A} soit sur un R_2 donné et que les deux sphères de \mathfrak{A} fassent ensemble un angle donné (97°).

104° Soient donc deux décompositions différentes de Π en un produit d'inversions

$$\Pi = A_1 A_2 \dots A_\alpha = B_1 \dots B_\beta.$$

On aura, puisque $\Pi^{-1} = B_\beta B_{\beta-1} \dots B_2 B_1$,

$$E = A_1 \dots A_\alpha B_\beta \dots B_1.$$

Le polysphère ε , d'ordre $\alpha + \beta$, constitué par les $\alpha + \beta$ sphères,

$$a_1, \dots, a_\alpha, b_\beta, \dots, b_1$$

fournit l'orthogonale unité.

J'appelle *fermé* un pareil polysphère ε , par analogie avec les contours polygonaux fermés, de la Géométrie ordinaire, qui fournissent une résultante nulle.

Je vais construire les polysphères fermés. Ce problème se nommera *synthèse de l'unité*; il est l'objet du présent Chapitre IX.

105° A la fin du Chapitre V (62°) on a vu que, pour tout polysphère fermé \mathfrak{A} , l'ordre p est toujours pair et que $T\bar{\varepsilon} = E$.

Je vais montrer que ces conditions sont *suffisantes* pour rendre \mathfrak{A} fermé, de façon qu'elles sont *nécessaires et suffisantes*.

Je conserve toujours les notations et définitions des Chapitres IV et V. La présente discussion continue simplement l'analyse de ces Chapitres.

106° Pour que \mathfrak{A} soit fermé il faut et il suffit évidemment que la matrice q -aire

$$\left. \begin{array}{l} \Delta, \text{ qui figure dans } \mathfrak{Q}_0, \\ \text{ou bien} \\ P, \text{ qui figure dans } \mathfrak{P}, \end{array} \right\} \text{ se réduise à la } q\text{-aire unité;}$$

$$P = E \quad \text{ou} \quad \Delta = E.$$

Ces deux q -aires se réduisent d'ailleurs simultanément à l'unité, puisqu'elles sont semblables.

107° Prenons un polysphère \mathfrak{A} , de rang q et d'ordre pair p . Supposons que $T\bar{\varepsilon} = E$, où, comme toujours,

$$T = \frac{1}{2}(V - V'), \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(V^{-1} - V'^{-1}).$$

On aura, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} & (\rho V + V')(\rho V^{-1} + V'^{-1}) - (\rho - 1)^2 E \\ & = \rho \{ V V'^{-1} + V' V^{-1} + 2 E \} = 4\rho \{ E - T\bar{c} \} = 0. \end{aligned}$$

Donc la condition $T\bar{c} = E$ assure l'identité (Ω)

$$(\rho V + V')^{-1} = \frac{\rho V^{-1} + V'^{-1}}{(\rho - 1)^2};$$

ou bien

$$(\rho - 1)^2 E = (\rho V + V')(\rho V^{-1} + V'^{-1}).$$

Comme le dénominateur de $(\rho V + V')^{-1}$ est le carré de $\rho - 1$, on a $|\rho V + V'|$ proportionnel à $(\rho - 1)^p$. Comme, de plus, $|V| = 1$, il vient $|\rho V + V'| = (\rho - 1)^p$; faisant $\rho = -1$, on a

$$|-V + V'| = (-2)^p |T| = (-2)^p; \quad |T| = |\bar{c}| = 1.$$

108° Dans l'identité Ω faisons successivement :

$$\rho = -1,$$

on retombe sur $T\bar{c} = E$;

$$\rho = 1,$$

on a,

$$0 = (V + V')(V^{-1} + V'^{-1}) = \Lambda M,$$

car (34°)

$$\Lambda = \Lambda' = \frac{1}{2}(V + V'); \quad M = M' = \frac{1}{2}(V^{-1} + V'^{-1}).$$

On tire de là

$$V = \Lambda + T, \quad V^{-1} = M + \bar{c},$$

$$V' = \Lambda - T, \quad V'^{-1} = M - \bar{c},$$

$$E = (\Lambda + T)(M + \bar{c}) = \Lambda M + T\bar{c} + \Lambda\bar{c} + TM.$$

c'est-à-dire

$$\Lambda\bar{c} + TM = 0$$

ou

$$(1) \quad \Lambda = T' M T$$

puisque T et \bar{c} sont alternées et $\bar{c} = T^{-1}$.

On retiendra la relation (1) ainsi que

$$(2) \quad \Lambda M = M \Lambda = 0.$$

109° La relation (1) montre que les deux matrices p -aires Λ et M ne diffèrent que par le changement de variables (Préliminaires, 24°);

$$\Lambda(u, v) = M(T[u], T[v]).$$

Λ est une hypohermitienne de rang q , donc M est une hypohermitienne de rang q .

Canonisons Λ (44°) de façon que $\Lambda = D\Lambda_0 D'$ où,

$$\Lambda_0 = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \cdot \\ \mathcal{L}^2 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} q \\ p - q \end{array} \end{array} ;$$

q
 $p - q$

$$\mathcal{L}(u, v) = \sum_r l_r u_r v_r,$$

$l_r = \text{positif.}$

On a, en toute hypothèse et eu égard à la symétrie de M et de $M_0 = D'MD$,

$$M_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline m_1 & m_2 \\ \hline m'_2 & m_3 \\ \hline \end{array} ,$$

d'où

$$0 = \Lambda_0 M_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline \zeta^2 m_1 & \zeta^2 m_2 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array};$$

par conséquent

$$m_1 = m_2 = m'_2 = 0;$$

M_0 se réduit à une matrice $(p - q)$ -aire m_3 ; donc le rang q de M_0 ne dépasse pas $p - q$ et

$$q \leq p - q \quad \text{ou} \quad q \leq \frac{1}{2}p \quad \text{et} \quad p - 2q \geq 0;$$

le rang d'un polysphère fermé ne peut dépasser la moitié de l'ordre, laquelle moitié est un entier d'ailleurs.

110° La $(p - q)$ -aire m_3 est une hypohermitienne de rang q et admet une canonisante \mathfrak{D} , $(p - q)$ -aire réelle et orthogonale.

Transformons les diverses matrices p -aires, par la p -aire réelle et orthogonale

$$S = \begin{array}{|c|c|} \hline E & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{D} \\ \hline \end{array}.$$

Λ_0 ne change pas, tandis que M_0 est canonisée et s'écrit doré

avant

$$M_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \circ & \circ & \circ \\ \hline \circ & \mathfrak{N}^2 & \circ \\ \hline \circ & \circ & \circ \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} q \\ \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} q \\ \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} p - 2q \end{array} \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_q \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_q \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{p - 2q}$$

andis que l'on écrira

$$\Lambda_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathfrak{L}^2 & \circ & \circ \\ \hline \circ & \circ & \circ \\ \hline \circ & \circ & \circ \\ \hline \end{array}$$

De plus

$$\mathfrak{N}(u, v) = \sum_r m_r u_r v_r \quad (m_r = \text{positif});$$

ailleurs (109°)

$$p - 2q \geq 0.$$

111° Nommons T_0 ce que devient la p -aire alternée T d'abord par la transformation D (109°) puis par la transformation s

(110°). On aura (108°)

$$\Lambda_0 = T_0' M_0 T_0;$$

ou bien, $\{j, k, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p\}$,

$$(1) \quad [\Lambda_0]_{jk} = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha j} [M_0]_{\alpha\beta} t_{\beta k},$$

si

$$T_0 = [t_{jk}], \quad t_{jk} + t_{kj} = 0.$$

Eu égard à la nature de M_0 on ne doit retenir dans la formule (1), que les $[M_0]_{\alpha\beta}$ où $\alpha = \beta = q + r$, $\{r = 1, 2, \dots, q\}$; de plus (110°)

$$[M_0]_{q+r, q+r} = m_r^2 \neq 0.$$

Alors (1) donne

$$(2) \quad [\Lambda_0]_{jk} = \sum_r m_r^2 t_{j, q+r} t_{k, q+r}.$$

Notamment

$$[\Lambda_0]_{jj} = \sum_r m_r^2 t_{j, q+r}^2 = 0, \quad \text{pour } j > q.$$

Comme on est dans le réel,

$$t_{j, q+r} = 0 \quad \text{pour } j > q \quad 0 \leq r \leq q.$$

Cela permet d'écrire, eu égard à ce que T_0 est alternée,

$$T_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & a & \dots \\ \hline -a' & 0 & 0 \\ \hline \dots & 0 & \dots \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} q \\ \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} q \\ \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|}} \right\} p - 2q \end{array} \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{array}{ccc} q & q & p - 2q \end{array}}$

(où a est une matrice q -aire, avec $|a| \neq 0$, car $|a|$ est un facteur de $|T_0|$).

De là, par un calcul facile,

$$T_0^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline o & -a'^{-1} & o \\ \hline a^{-1} & \dots & \dots \\ \hline o & \dots & \dots \\ \hline \end{array} .$$

Conservons, enfin, le nom de \mathcal{Q}_0 à ce que devient la p -aire \mathcal{Q}_0 du 44° par la transformation s (110°); on a encore, par un calcul facile,

$$\mathcal{Q}_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \Delta & u & v \\ \hline o & E & o \\ \hline o & o & E \\ \hline \end{array} . \quad (\Delta \text{ conservant son ancienne signification}).$$

112° Formons

$$E - \mathcal{Q}_0 = E + V_0' V_0^{-1} = (V_0 + V_0') V_0^{-1} \\ = 2\Lambda_0 V_0^{-1} = 2\Lambda_0 (M_0 + T_0^{-1}) = 2\Lambda_0 T_0^{-1},$$

puisque :

$$V_0^{-1} = M_0 + \tilde{e}_0 \quad (108^\circ); \quad \tilde{e}_0 = T_0^{-1}; \quad \Lambda_0 M_0 = o \quad (108^\circ).$$

On a donc

$$E - \Phi_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline E - \Delta & -u & -v \\ \hline o & o & o \\ \hline o & o & o \\ \hline \end{array}$$

$$= {}_2\Lambda_0 T_0^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline o & -\xi^2 a'^{-1} & o \\ \hline o & o & o \\ \hline o & o & o \\ \hline \end{array},$$

eu égard à la nature de T_0^{-1} et Λ_0 .

L'identification donne notamment

$$E - \Delta = o, \quad \Delta = E,$$

ce qui assure (106°) la fermeture du polysphère. c. q. f. d.

113° La synthèse de l'unité se résume donc dans la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour qu'un polysphère Λ soit fermé, les*

conditions que voici sont nécessaires et suffisantes : les deux matrices T et ε sont inverses l'une de l'autre.

L'entier p est forcément pair. Sinon, la matrice p -aire alternée T donnerait $|T| = 0$.

Ajoutons (109°) que, dans un polysphère fermé, le rang ne peut dépasser la moitié de l'ordre.

En effet, $p - 2q \geq 0$.

La fonction $|\rho V + V'|$ est $(\rho - 1)^p$; il y a q successifs doubles (58°) et $p - 2q$ successifs simples. La connaissance de l'ordre p et du rang q donne sans ambiguïté la structure du faisceau $\rho V + V'$.

114° La condition $\varepsilon = T^{-1}$ s'exprimera par la méthode du 36°. On calculera les $\mu_{j,j+k}$ comme aux 36° et 33°; on formera tous les pfaffiens, tels que $\Omega(j, j+k)$ (35°), en fonction des λ_{jk} . Alors, les conditions (2) du 36°

$$\mu_{j,j+k} = (-1)^k \Omega(j, j+k)$$

exprimeront que $\varepsilon = T^{-1}$.

115° Comme application facile, calculons le tétrasphère fermé \mathfrak{A} , $p = 4$.

Avec la notation sig. ε du 32°, il vient

$$T = [t_{jk}], \quad t_{jk} = \lambda_{jk} \text{sig}(k-j),$$

$$\lambda_{jk} = \lambda_{kj}, \quad |T| = \omega^2,$$

$$\begin{aligned} \omega &= (1234) = t_{12} t_{34} + t_{23} t_{14} + t_{31} t_{24} \\ &= \lambda_{12} \lambda_{34} + \lambda_{23} \lambda_{14} - \lambda_{31} \lambda_{24}. \end{aligned}$$

$$(0) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_{12} &= -\lambda_{12} = -\Omega(1, 2) = -\lambda_{34} = -(34), \\ \mu_{23} &= -\lambda_{23} = -\Omega(2, 3) = -\lambda_{14} = -(14), \\ \mu_{34} &= -\lambda_{34} = -\Omega(3, 4) = -\lambda_{12} = -(12), \\ \mu_{13} &= -\lambda_{13} + 2\lambda_{12}\lambda_{23} = \Omega(1, 3) = (24) = \lambda_{24}, \\ \mu_{24} &= -\lambda_{24} + 2\lambda_{34}\lambda_{23} = \Omega(2, 4) = (13) = \lambda_{13}, \\ \mu_{14} &= -\Omega(1, 4) = -(23) = -\lambda_{23} \\ &= -\lambda_{14} + 2\lambda_{12}\lambda_{24} + 2\lambda_{13}\lambda_{34} - 4\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}. \end{aligned} \right.$$

La première et la troisième équations du système (o) donnent $\lambda_{12} = \lambda_{34} = \cos \varphi$, φ étant l'angle des deux premières sphères invertantes.

La seconde donne $\lambda_{23} = \lambda_{14} = \cos \psi$, ψ étant l'angle de la seconde et de la troisième sphère invertante.

La quatrième et la cinquième de (o) donnent

$$\lambda_{13} + \lambda_{24} = 2 \cos \varphi \cos \psi,$$

et la sixième devient

$$\cos \varphi [\lambda_{13} + \lambda_{24} - 2 \cos \varphi \cos \psi] = 0.$$

Que $\cos \varphi$ soit ou non zéro, il restera simplement

$$\lambda_{13} + \lambda_{24} = 2 \cos \varphi \cos \psi.$$

Alors

$$\omega = \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - \lambda_{13} \lambda_{24}, \quad \omega^2 = 1, \quad \omega = \pm 1.$$

λ_{13} et λ_{24} sont les deux racines de l'équation quadratique

$$X^2 - 2X \cos \varphi \cos \psi + \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - \omega;$$

$$\begin{aligned} X &= \cos \varphi \cos \psi \pm \sqrt{\omega + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi} \\ &= \cos \varphi \cos \psi \pm \sqrt{\omega - 1 + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}. \end{aligned}$$

Pour la réalité

$$\omega \geq 1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \quad \text{et} \quad \omega = 1.$$

Par conséquent

$$\lambda_{13} \quad \text{et} \quad \lambda_{24} = \cos(\varphi \mp \psi).$$

En résumé

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \cos \varphi & \cos(\varphi - \psi) & \cos \psi \\ \cos \varphi & 1 & \cos \psi & \cos(\varphi + \psi) \\ \cos(\varphi - \psi) & \cos \psi & 1 & \cos \varphi \\ \cos \psi & \cos(\varphi + \psi) & \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}$$

116° Construisons les quatre sphères invertantes, a_j , de coordonnées a_{jr} .

Supposons d'abord $q = 2$. Alors, les quatre sphères sont sur

en R_2 , sur lequel on peut toujours poser le birectangle des deux sphères coordonnées Ξ_1 et Ξ_2 .

Alors

$$\begin{aligned} a_{j_1} &= \cos \omega_j, & a_{j_2} &= \sin \omega_j, \\ \lambda_{jk} &= \cos(\omega_j - \omega_k). \end{aligned}$$

On peut évidemment, sans restreindre la généralité, faire

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \varphi, \quad \omega_4 = -\psi.$$

Les six conditions (1) donnent :

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \cos \varphi = \cos(\omega_1 - \omega_2) = \cos \varphi, \\ \lambda_{34} &= \cos \varphi = \cos(\omega_3 - \omega_4) = \cos(\omega_3 + \psi), \\ \lambda_{23} &= \cos \psi = \cos(\omega_2 - \omega_3) = \cos(\varphi - \omega_3), \\ \lambda_{14} &= \cos \psi = \cos(\omega_1 - \omega_4) = \cos \psi, \\ \lambda_{13} &= \cos(\varphi - \psi) = \cos(\omega_1 - \omega_3) = \cos \omega_3, \\ \lambda_{24} &= \cos(\varphi + \psi) = \cos(\omega_2 - \omega_4) = \cos(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Les première, quatrième et sixième sont des identités ; les trois autres donnent

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 + \psi &= (-1)^\alpha \varphi \\ \varphi - \omega_3 &= (-1)^\beta \psi \\ \varphi - \psi &= (-1)^\gamma \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (\alpha, \beta, \gamma = \text{entiers}).$$

Additionnant les deux premières, il vient

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= (-1)^\alpha \varphi + (-1)^\beta \psi, \\ (-1)^\alpha &= (-1)^\beta = 1, \quad \omega_3 = \varphi - \psi \quad \text{et} \quad (-1)^\gamma = 1. \end{aligned}$$

Enfin

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 0 & \omega_2 &= \varphi \\ \omega_3 &= \varphi - \psi & \omega_4 &= -\psi \end{aligned} \right\}$$

La rotation $A_1 A_2$ a pour angle (Chap. VIII) 2φ ; la rotation $A_3 A_4$ a pour angle $2[-\psi - (\varphi - \psi)] = -2\varphi$. Les deux rotations se détruisent mutuellement.

Si $q = 1$, les quatre sphères invariantes sont confondues ou contraires. Les deux rotations $A_1 A_2$ et $A_3 A_4$ se réduisent chacune à l'unité.

117° En résumé, pour que les quatre inversions A_1, \dots, A_4 fournissent une résultante unité, il faut et il suffit que les quatre sphères invertantes soient sur un réseau de rang non supérieur à 2, et que l'angle de la seconde avec la première soit égal à l'angle de la troisième avec la quatrième.

Cela était évident, car $A_1 A_2 A_3 A_4 = E$ entraîne

$$A_1 A_2 = A_4 A_3.$$

118° La construction effective des polysphères fermés doit ainsi être considérée comme un problème complètement résolu.



CHAPITRE X.

SYNTHÈSE D'UNE ORTHOGONALE DONNÉE; DÉCOMPOSITIONS NORMALES.

119° Après avoir résolu le problème relatif à la synthèse de l'unité, nous sommes à même d'effectuer la synthèse d'une orthogonale réelle quelconque.

Si une orthogonale réelle S se décompose de deux façons différentes en produit d'inversions (102°)

$$S = A_1 A_2 \dots A_\alpha = B_1 B_2 \dots B_\beta,$$

elle est fournie à la fois :

Par le polysphère \mathfrak{A} des α sphères invertantes a_1, \dots, a_α ;

Par le polysphère \mathfrak{B} des β sphères invertantes b_1, \dots, b_β .

Alors on pourra écrire

$$S = B_1 \dots B_\beta = A_1 \dots A_\alpha A_\alpha \dots A_1 B_1 \dots B_\beta.$$

La décomposition en inversions B s'obtient en adjoignant au polysphère \mathfrak{A} le polysphère *fermé* constitué par les $\alpha + \beta$ sphères invertantes

$$a_\alpha, a_{\alpha-1}, \dots, a_1, b_1, \dots, b_\beta.$$

$\alpha + \beta$ est toujours un nombre pair, puisque α et β sont toujours de même parité, car

$$|S| = (-1)^\alpha = (-1)^\beta.$$

On peut ainsi énoncer une proposition importante :

THÉORÈME. — Soit \mathfrak{A} un polysphère fournissant l'orthogonale S ; pour obtenir tout autre polysphère fournissant S ,

il suffira d'adjoindre à \mathcal{A} un polysphère fermé, d'ailleurs arbitraire.

Dorénavant, je me préoccuperai donc de construire, d'une façon quelconque, *un* polysphère \mathcal{A} fournissant l'orthogonale S .

120° Semi-canonisons l'orthogonale réelle n -aire S . Supposons que l'on ait

$$|\varrho E - S| = (\varrho - 1)^\lambda (\varrho + 1)^\nu \prod_{k=1}^{k=N} (\varrho^2 - 2\varrho \cos 2\theta_k + 1)^{m_k},$$

$$n = \lambda + \nu + 2 \sum_k m_k;$$

L'équation caractéristique \mathcal{Q} aura

1 pour racine	λ -uple;
- 1 pour racine	ν -uple;
$e^{2i\theta_k}$ et $e^{-2i\theta_k}$ pour racine	m_k -uple;

les N arcs θ_k étant tous distincts, entre 0 et 2π , avec $2\theta_k \neq 0$ ou π .

On pourra écrire après semi-canonisation (*voir* Chap. VI)

$$S(x, y) = \sum_{\lambda'} x_{\lambda'} y_{\lambda'} - \sum_{\nu'} x_{\nu'} y_{\nu'}$$

$$+ \sum_k \cos 2\theta_k \sum_{m'_k} (x_{m'_k} y_{m'_k} + x_{m'_k+1} y_{m'_k+1})$$

$$- \sum_k \sin 2\theta_k \sum_{m'_k} \begin{vmatrix} y_{m'_k} & y_{m'_k+1} \\ x_{m'_k} & x_{m'_k+1} \end{vmatrix}$$

où

$$\lambda' = 1, 2, \dots, \lambda; \quad \nu' = \lambda + 1, \dots, \lambda + \nu; \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$m'_k = \lambda + \nu + 2(m_1 + \dots + m_{k-1}) + 2,$$

$$\lambda + \nu + 2(m_1 + \dots + m_{k-1}) + 4,$$

$$\dots,$$

$$\lambda + \nu + 2(m_1 + \dots + m_{k-1}) + 2(m_k - 1),$$

$$\lambda + \nu + 2(m_1 + \dots + m_k).$$

Ainsi pour avoir l'orthogonale n -aire S , il suffit :

- I. D'opérer sur les λ premières variables, la λ -aire unité;
- II. D'opérer sur les ν variables suivantes, la ν -aire canonique

$$|t - t|, \quad (\text{type } \vartheta);$$

- III. D'opérer sur les $2m_1$ variables suivantes la $(2m_1)$ -aire

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & a_1 \cos 2\theta_1 - c_1 \sin 2\theta_1 \\ c_1 & a_1 \sin 2\theta_1 + c_1 \cos 2\theta_1 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m_1} & a_{m_1} \cos 2\theta_1 - c_{m_1} \sin 2\theta_1 \\ c_{m_1} & a_{m_1} \sin 2\theta_1 + c_{m_1} \cos 2\theta_1 \\ \dots & \dots \dots \dots \end{array} \right| \quad (\text{type } \Theta),$$

L'orthogonale unité est fournie par un polysphère fermé.

Il reste donc à construire :

Un polysphère fournissant une orthogonale du type ϑ ;

Un polysphère fournissant une orthogonale du type Θ .

121^o THEOREME. — *Le type ϑ est fourni par un polyrectangle.*

Soit, en effet, la n -aire U du type ϑ ; prenons $\lambda_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, c'est-à-dire prenons toutes les n sphères invariantes orthogonales deux à deux.

Il viendra

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} = V = V',$$

$$|\rho V + V'| = (\rho + 1)^n.$$

On peut, à l'orientation près, admettre que le polyrectangle est celui de référence. La $i^{\text{ème}}$ sphère invariante sera la sphère coordonnée $\Xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$, laquelle (Clap. VII) donne

l'inversion

$$A_i = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{i-1} & x_{i-1} \\ x_i & -x_i \\ x_{i+1} & x_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ x_n & x_n \end{vmatrix}.$$

Le produit $A_1 \dots A_n$ est bien une n -aire du type \mathcal{U} .

C. Q. F. D.

122° Soit maintenant une $(2m)$ -aire S du type Θ , telle que

$$|\rho E - S| = (\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1)^m.$$

Prenons un polysphère \mathcal{A} d'ordre $2m$ et répartissons les $2m$ sphères invertantes en m couples C_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$). Rendons les deux sphères d'un couple C_μ orthogonales à toutes les autres $2m - 2$ sphères. Enfin, supposons que l'angle des deux sphères d'un couple est θ .

La matrice $(2m)$ -aire Λ sera

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\theta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cos\theta & 1 & \dots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 1 & \cos\theta \\ 0 & \cdot & \dots & 0 & \cos\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

De là

$$\begin{aligned} |\rho V + V| &= \begin{vmatrix} \rho + 1 & 2\rho \cos\theta \\ 2\rho \cos\theta & \rho + 1 \end{vmatrix}^m = [(\rho + 1)^2 - 4\rho \cos^2\theta]^m \\ &= [\rho^2 - 2\rho(2\cos^2\theta - 1) + 1]^m = (\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1)^m, \end{aligned}$$

ce qui devait être.

Reprenons les m couples C_μ [$\mu = 1, 2, \dots, m$] de sphères invertantes. Le couple C_μ définit un réseau $R_2^{(\mu)}$ de rang deux, sur lequel, à l'orientation près, on peut toujours supposer placées les deux sphères coordonnées

$$\Xi_{2\mu-1} \quad \text{et} \quad \Xi_{2\mu}.$$

Les deux sphères invertantes $a_{2\mu-1}$ et $a_{2\mu}$ du couple C_μ donnent les deux inversions $A_{2\mu-1}$ et $A_{2\mu}$ et une rotation $R_\mu = A_{2\mu-1} A_{2\mu}$. Si nous construisons R_μ par les procédés du Chapitre VIII (95° à 100°), on trouve

$$R_\mu = \begin{vmatrix} x_1 & & & x_1 \\ x_2 & & & x_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{2\mu-3} & & & x_{2\mu-3} \\ x_{2\mu-2} & & & x_{2\mu-2} \\ x_{2\mu-1} & x_{2\mu-1} \cos 2\theta - x_{2\mu} \sin 2\theta & & \\ x_{2\mu} & x_{2\mu-1} \sin 2\theta + x_{2\mu} \cos 2\theta & & \\ x_{2\mu+1} & & & x_{2\mu+1} \\ x_{2\mu+2} & & & x_{2\mu+2} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{2m} & & & x_{2m} \end{vmatrix}.$$

Le produit

$$R_1 R_2 \dots R_m$$

est bien l'orthogonale $(2m)$ -aire cherchée du type Θ .

123° L'analyse précédente se résume ainsi :

THÉORÈME. — Une orthogonale $(2m)$ -aire du type Θ est fournie par un polysphère Λ , d'ordre $2m$, ainsi constitué. Les $2m$ sphères invertantes se répartissent deux à deux en m couples C_μ [$\mu = 1, 2, \dots, m$], C_μ comprenant les deux sphères $a_{2\mu-1}$ et $a_{2\mu}$; les deux sphères d'un couple forment ensemble l'angle θ , tout en étant orthogonales à toutes les $2m - 2$ autres sphères invertantes.

On remarquera que, dans la matrice Λ , le rang q est égal à

l'ordre $2m$ puisque $|\Lambda| = \sin^{2m} \theta \neq 0$. C'est ce qui se présentait déjà (121°) pour le type ψ .

Par conséquent : *une orthogonale des types ψ ou Θ , ν -aire ou $(2m)$ -aire, sera un produit de ν ou de $2m$ inversions, à sphères invertantes linéairement indépendantes (40°).*

124° Reprenons l'orthogonale générale n -aire S du 120°. Elle comporte une ν -aire du type ψ et N orthogonales $(2m_1)$ -aire, . . . , $(2m_N)$ -aire du type Θ . Le polysphère obtenu en combinant les ν sphères du polyrectangle, qui fournit le type ψ , avec les $2m_1, 2m_2, \dots, 2m_N$ sphères du polysphère qui fournit les matrices du type Θ , ce polysphère, dis-je, comprendra

$$\nu + 2m_1 + \dots + 2m_N = n - \lambda$$

sphères et aura, comme on s'en assure aisément, son $|\Lambda| \neq 0$. Donc : *toute orthogonale n -aire, dont l'équation caractéristique admet l'unité pour racine λ -uple, est fournie par un polysphère à $n - \lambda$ sphères, toutes linéairement indépendantes.*

On a le rang q du polysphère égal à $n - \lambda$.

125° Disons que plusieurs inversions sont *linéairement indépendantes* lorsque leurs sphères invertantes le sont.

Disons aussi que la décomposition d'une orthogonale en un produit d'inversions est *normale* lorsque les inversions-facteurs sont linéairement indépendantes.

126° L'orthogonale S du 124° peut-elle être fournie par un polysphère \mathfrak{A} de rang $q < n - \lambda$?

Il faut répondre par la négative. Considérons en effet le réseau R_{n-q} des ∞^{n-q-1} sphères orthogonales à toutes les sphères de \mathfrak{A} .

L'orthogonale S laissera fixe chacune des sphères de R_{n-q}

(86°). Plaçons sur R_{n-q} le polyrectangle des $n - q$ premières sphères coordonnées. Il viendra

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-q} & x_{n-q} \\ x_{n-q+1} & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix};$$

$|\varphi E - S|$ est divisible par $(\varphi - 1)^{n-q}$. Mais, par hypothèse, $|\varphi E - S|$ est divisible par $(\varphi - 1)^\lambda$, sans l'être par $(\varphi - 1)^{\lambda+1}$.

Donc

$$n - q \leq \lambda, \quad q \geq n - \lambda \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi, les décompositions normales correspondent aux polysphères de rang minimum.

Ce rang minimum est le nombre des racines de l'équation caractéristique qui ne sont pas égales à l'unité.

On peut classer les orthogonales suivant ce rang minimum Q .

Le cas

$Q = 1$ donne l'inversion (81°),

$Q = 2$ donne la rotation (100°).

127° Je terminerai le présent Chapitre en reliant la décomposition normale au procédé de Frobenius (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV, p. 50, V) pour la génération des orthogonales.

Soit S une n -aire orthogonale. On peut, sans restreindre la généralité, supposer $|E - S| \neq 0$. Si, en effet, $|\varphi E - S|$ est divisible par $(\varphi - 1)^\lambda$, on écrira (126°)

$$S(x_1 y) = x_1 y_1 + \dots + x_\lambda y_\lambda + S^{(1)}(x_{\lambda+1}, \dots, x_n; y_{\lambda+1}, \dots, y_n)$$

et l'on sera ramené à construire la $(n - \lambda)$ -aire $S^{(1)}$, où

$$|E - S^{(1)}| \neq 0.$$

Sous le bénéfice de $|E - S| \neq 0$, considérons avec Frobenius l'expression

$$F = \frac{E + S}{E - S} = (E + S)(E - S)^{-1} = (E - S)^{-1}(E + S);$$

de là, puisque $SS' = E$,

$$F' = \frac{E+S^{-1}}{E-S^{-1}} = -\frac{E+S}{E-S} = -F;$$

F est une matrice alternée.

Réciproquement, de

$$F = (E+S)(E-S)^{-1}$$

on tire, puisque $|E+F| \neq 0$, successivement

$$\begin{aligned} F - FS &= E + S, & -(E - F) &= (E + F)S, \\ S &= -\frac{E - F}{E + F}. \end{aligned}$$

Il suffit de se donner la matrice alternée F pour avoir l'orthogonale S .

128° Revenons maintenant à une décomposition normale de la n -aire S .

Avec nos notations habituelles, on aura

$$q = p = n, \quad |A| \neq 0.$$

L'hypohermitienne A devient hermitienne. On a, comme au Chapitre IV,

$$\xi = A[x], \quad |A| \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$\xi_j = \sum_i a_{ji} x_i \quad [i, j = 1, 2, \dots, n],$$

les a_{ji} étant les coordonnées des n sphères invertantes linéairement indépendantes.

On a

$$AA' = A = \varrho^2, \quad \varrho = A^{\frac{1}{2}}.$$

De là

$$\begin{aligned} E &= \varrho^{-1}AA'\varrho^{-1} = (\varrho^{-1}A)(\varrho^{-1}A)', \\ \varrho^{-1}A &= U = \text{orthogonale arbitraire;} \end{aligned}$$

$$A = \varrho U,$$

$$\xi = \varrho U[x].$$

simplement, à l'orientation près,

$$\xi = \mathcal{L}[x], \quad A = \mathcal{L}.$$

mais

$$x' = S[x] \quad \text{et} \quad \xi' = \mathcal{Q}[\xi],$$

où

$$S = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{Q} \mathcal{L}.$$

$$E + S = E + \mathcal{L}^{-1} \mathcal{Q} \mathcal{L} = \mathcal{L}^{-1} (E + \mathcal{Q}) \mathcal{L},$$

$$E - S = \mathcal{L}^{-1} (E - \mathcal{Q}) \mathcal{L},$$

$$F = \frac{E + S}{E - S} = \mathcal{L}^{-1} \frac{E + \mathcal{Q}}{E - \mathcal{Q}} \mathcal{L} = \mathcal{L}^{-1} \frac{TV^{-1}}{\Lambda V^{-1}} \mathcal{L},$$

puisque $\mathcal{Q} = -V'V^{-1}$, $2\Lambda = V + V'$, $2T = V - V'$ (Chap. IV).

Finalement, puisque $\Lambda = \mathcal{L}^2$,

$$F = \mathcal{L}^{-1} (TV^{-1}V\Lambda^{-1}) \mathcal{L} = \mathcal{L}^{-1} T \mathcal{L}^{-1}.$$

129° Cette formule

$$F = \mathcal{L}^{-1} T \mathcal{L}^{-1}$$

résout le problème, en établissant une solution simple entre les deux matrices alternées n -aires F et T .

Si T est connue, les λ_{ji} , cosinus des angles que font entre les les sphères invariantes, sont connus. Il en est de même pour l'hermitienne Λ et pour l'hermitienne $A = \mathcal{L} = \Lambda^{\frac{1}{2}} = [a_{ji}]$; ses coordonnées des sphères invariantes sont connues à l'orientation près. La formule (1) donne F et la formule

$$S = - \frac{E - F}{E + F}$$

donne S .

Si c'est S qui est connue, la formule

$$F = \frac{E + S}{E - S}$$

donne la matrice alternée F . Prenons alors une hermitienne arbitraire

$$\mathcal{L} = [a_{ji}],$$

symétrique, c'est-à-dire réelle. Dans l'hermitienne

$$\Lambda = [\lambda_{ji}] = \mathcal{L}^2,$$

on a

$$\lambda_{ii} = 1,$$

donc il faudra faire

$$1 = \sum_i a_{ji}^2.$$

Les a_{ji} étant ainsi définies, on construira les λ_{ji} et la matrice T . On cherchera enfin à déterminer les a_{ji} de façon à identifier la matrice alternée

$$\mathcal{L}^{-1} T \mathcal{L}^{-1}$$

avec la matrice alternée F .

D'après les considérations du présent Chapitre, il y aura au moins une matrice réelle \mathcal{L} répondant à la question. Il y aura en général plusieurs matrices \mathcal{L} répondant à la question. Elles s'obtiendront, en partant de la première, par la considération des polysphères fermés.

130° En vertu de la formule

$$F = \mathcal{L}^{-1} T \mathcal{L}^{-1},$$

les deux matrices alternées F et T sont équivalentes et ne diffèrent que par le choix des variables. Pour préciser, posons

$$\xi = \mathcal{L}[x], \quad \tau = \mathcal{L}[y],$$

on aura

$$F(\xi, \tau) = F(\mathcal{L}[x], \mathcal{L}[y]) = \mathcal{L} F \mathcal{L}(x, y)$$

et

$$F(\xi, \tau) = T(x, y).$$

131° Les relations mutuelles qui existent entre les diverses décompositions normales afférentes à une même orthogonale S , avec $|E - S| \neq 0$, sont intéressantes et j'y reviendrai peut-être dans un autre travail.

Ces relations sont toutes contenues en germe dans les théories du Chapitre IX (synthèse de l'unité).

Je me bornerai ici à en relater les fondamentales.

132° Considérons deux décompositions normales

$$S = A_1 \dots A_n = B_1 \dots B_n,$$

où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont les sphères invertantes.

Le polysphère P d'ordre $2n$

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$$

est fermé. Soit q le rang de P; nommons \mathfrak{A} la matrice A correspondant au polysphère \mathfrak{a} des n sphères a ; réservons le nom de A à la même matrice provenant du polysphère P.

Dans le déterminant $(2n)$ -aire $|A|$, $|\mathfrak{A}|$ est un des $n^{\text{ièmes}}$ mineurs et $|\mathfrak{A}| \neq 0$. Donc $q \geq n$. D'autre part, dans un polysphère fermé, le rang q ne peut dépasser la moitié de l'ordre $2n$ (113°) et $q \leq n$. Ainsi $q = n$.

Donc les $2n$ sphères de P sont situées sur un même réseau de rang n , R_n . Ce réseau est défini déjà par les n sphères de \mathfrak{a} .

Si les sphères a_j et b_j ont a_{ji} et b_{ji} pour coordonnées, on posera

$$\xi_j = \sum_i a_{ji} x_i, \quad \zeta_j = \sum_i b_{ji} x_i.$$

Le système \mathfrak{X}_{p-q} (26°) afférent au polysphère P sera, en vertu de ce qui vient d'être dit, le système des n relations

$$\xi_j = \sum_k c_{jk} \zeta_k \quad [i, j, k = 1, 2, \dots, n]$$

ou

$$\xi = C[\zeta], \quad |C| \neq 0,$$

où C est une matrice n -aire.

Nommons \mathfrak{b} le polysphère des b_j et \mathfrak{B} la matrice n -aire A correspondante. On aura

$$\begin{aligned} \xi &= A[x], & \zeta &= B[x] = CA[x], \\ \mathfrak{b} &= BB' = CAA'C' = C\mathfrak{A}C'. \end{aligned}$$

Introduisons les expressions $\mathfrak{Q}_a, \mathfrak{Q}_b, V_a, V_b, \dots$ dont le sens

est clair. On aura

$$\begin{aligned} S &= A^{-1} \mathcal{Q}_a A = B^{-1} \mathcal{Q}_b B, \\ \mathcal{Q}_b &= BA^{-1} \mathcal{Q}_a AB^{-1} = C \mathcal{Q}_a C^{-1}, \\ \rho E - \mathcal{Q}_b &= C(\rho E - \mathcal{Q}_a)C^{-1} \\ &= C(\rho V_a + V'_a) V_a^{-1} C^{-1} = (\rho V_b + V'_b) V_b^{-1}, \\ \rho V_b + V'_b &= C(\rho V_a + V'_a) V_a^{-1} C^{-1} V_b. \end{aligned}$$

En résumé : *on passe du polysphère \mathcal{A} au polysphère \mathcal{B} par une collinéation C , laquelle n'étant pas, en général, orthogonale, change à la fois l'orientation et la configuration.*



TABLE DES MATIÈRES.

Chapitres.	Pages.	N ^{os} .
INTRODUCTION	1	
PRÉLIMINAIRES ET GÉNÉRALITÉS	5	

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DES SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES ET DES SPHÈRES.

	Coordonnées de la sphère	31	1
I.	Polyrectangles	37	11
II.	Réseaux et polysphères	41	18
V.	Matrices A et V	48	28
7.	Matrices \mathcal{Q} et \mathcal{P}	60	41
71.	Sphères invariantes; faisceaux invariants; semi-canonisation	74	63
711.	Inversions	84	78

SECONDE PARTIE.

MULTIPLICATION DES INVERSIONS ET PROBLÈME INVERSE.

7111.	Multiplication des inversions	91	89
X.	Synthèse de l'unité	100	102
7.	Synthèse d'une orthogonale donnée; décompositions normales	113	119
	TABLE DES MATIÈRES	125	

22 DEC. 1903

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
33675 Quai des Grands-Augustins, 55.

(Suite.)

Sur la représentation des courbes gauches algébriques, par L. AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences à la Faculté des Sciences (*Fasc. 20*) 3 fr.
 Sur le résidu électrique des condensateurs, par L. HOULLEVIGUE, maître de confér. à la Faculté des Sciences. (*Fasc. 32*). 3 fr.
 Synthèse d'aldéhydes et d'acétones dans la série du naphthalène au moyen du chlorure

d'aluminium, par L. ROUSSET, docteur en sciences, chef des trav. de chimie génér. à la Faculté des Sciences (*Fasc. 30*) 3 fr.
 Recherches expérimentales sur quelques actinomètres électro-chimiques, par H. RIGOLLOT, docteur en sciences, chef des travaux de physique à la Faculté des Sciences (*Fasc. 29*). 5 fr.

Librairie J.-B. BAILLIÈRE et Fils, 19, rue Hautefeuille.

Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibiens anoures, par E. BATAILLON, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon. avec 6 pl. hors texte (*Fasc. 2*) 4 fr.
 Anatomie et Physiologie comparées de la Pholade dactyle. Structure, locomotion, tact, olfaction, gustation, action dermatoptique, photogénie, avec une théorie générale des sensations, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur à la Faculté des Sciences, 68 fig. dans le texte et 15 pl. hors texte (*Fasc. 3*) 18 fr.
 Sur le pneumogastrique des oiseaux, par E. COUVREUR, docteur en sciences, chef des travaux de physiologie à la Faculté des Sciences, avec 3 planches hors texte et 40 figur. dans le texte (*Fasc. 4*) 4 fr.
 Recherches sur la valeur morphologique des appendices superstaminaux de la fleur des Aristoloches, par M^{lle} A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, avec 3 planches hors texte (*Fasc. 5*). 4 fr.
 Etude stratigraphique sur le Jurassique inférieur du Jura méridional, par Attale RICHE, docteur en sciences, chef des travaux de géologie, 2 pl. hors texte (*Fasc. 10*) 12 fr.
 Etude expérimentale sur les propriétés attribuées à la tuberculine de M. Koch, faite au laboratoire de médecine expérimentale et comparée de la Faculté de Médecine, par M. le professeur ARLOING, M. le Dr RODET, agrégé, et M. le Dr COURMONT, agrégé, avec 4 planches, en couleurs (*Fasc. 11*) 10 fr.
 Histologie comparée des Ebénacées dans ses rapports avec la Morphologie et l'histoire généalogique de ces plantes, par Paul PARMENTIER, professeur de l'Université, avec 4 planch. hors texte (*Fasc. 12*) 4 fr.
 Recherches sur la production et la localisation du Tanin chez les fruits comestibles fournis par la famille des Pomacées, par M^{lle} A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, 2 pl. hors texte (*Fasc. 13*) 3 fr.
 Etude sur le Bilharzia hæmatobia et la Bilharziose, par M. LORTET, doyen de la Faculté de médecine, et M. VIALLETON, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, 8 pl. hors texte et 8 figures dans le texte. (*Fasc. 16*). 10 fr.

La Botanique à Lyon avant la Révolution et l'histoire du Jardin botanique municipal de cette ville, par M. GÉRARD, professeur à la Faculté des Sciences, avec 9 fig. dans le texte et 1 pl. hors texte (*Fasc. 23*) 3 fr. 50
 Physiologie comparée de la Marmotte, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur à la Faculté des Sciences, avec 119 fig. et 125 planches hors texte (*Fasc. 25*) . 15 fr.
 Etudes sur les terrains tertiaires du Dauphiné, de la Savoie, et de la Suisse occidentale, par H. DOUXAMI, docteur en sciences, professeur au Lycée de Lyon. 1 vol. in-8° avec 6 planches hors texte et 31 figures (*Fasc. 27*) 6 fr.
 Recherches physiologiques sur l'appareil respiratoire des oiseaux, par J.-M. SOUM, docteur en sciences, professeur au Lycée de Bordeaux. 1 vol. in-8° avec 40 figures dans le texte (*Fasc. 28*) 3 fr. 50
 Résultats scientifiques de la campagne du « Caudan » dans le golfe de Gascogne (août-septembre 1895), par R. KÖHLER, professeur de zoologie à la Faculté des Sciences (*Fasc. 26*)
 Fascicule I. 1 vol. in-8° avec 6 pl. . 6 fr.
 Fascicule II. 1 vol. in-8° avec 11 pl. 6 fr.
 Fascicule III. 1 vol. in-8° avec 21 pl. 20 fr.
 Anatomie pathologique du système lymphatique dans la sphère des néoplasmes malins, par le Dr C. REGAUD, chef des travaux, et le Dr F. BARJON, préparateur d'anatomie générale et d'histologie à la Faculté de médecine (Mémoire couronné par l'Académie de médecine), avec 4 pl. hors texte (*Fasc. 34*) 5 fr.
 Recherches stratigraphiques et paléontologiques dans le Bas-Languedoc, par Frédéric ROMAN, docteur en sciences, préparateur de géologie à la Faculté, avec 40 figures dans le texte et 9 planches hors texte (*Fasc. 34*) 8 fr.
 Etude du champ électrique de l'Atmosphère, par Georges LE CADET, docteur en sciences, assistant à l'Observatoire de Lyon, 3 fig. et 10 pl. dans le texte (*Fasc. 35*) 6 fr.
 Les formes Epitokes et l'Évolution des Cirratuliers, par Maurice CAULIERY, maître de confér. à la Faculté des Sciences et Félix MESNIL, chef de Labor. à l'Institut Pasteur, 6 pl. hors texte (*Fasc. 39*) 7 fr. 50

NOUVELLE SÉRIE

I. — SCIENCES, MÉDECINE

- Monographie de la Faune lacustre de l'Eocène moyen, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparateur de géologie à l'Université de Lyon, avec 3 figures et 3 planches hors texte (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fascicule Premier*). 5 fr.
- De la constitution des alcaloïdes végétaux, par X. CAUSSE, docteur ès sciences, chef des Travaux de Chimie organique à la Faculté de Médecine de l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Gauthier-Villars, (*Fasc. 2*) 3 fr.
- Etudes sur le Polymorphisme des Champignons, influence du milieu, par Jean BEAUVÉRIE, docteur ès sciences, préparateur de botanique à la Faculté des Sciences de Lyon, avec 75 gravures dans le texte (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fasc. 3*). 7 fr. 50.
- PALÉONTOLOGIE HUMAINE. — L'Homme quaternaire dans le Bassin du Rhône. — *Etude géologique et anthropologique*, par Ernest CHANTRE, docteur ès sciences, sous-directeur du Muséum, avec 74 figures dans le texte (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fasc. 4*) 6 fr.
- Etude sur les occultations d'amas d'étoiles par la lune, avec un catalogue normal des pléiades, par Joanny LAGRULA, docteur ès sciences, préparateur d'astronomie à la Faculté des Sciences de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Gauthier-Villars) (*Fasc. 5*). 5 fr.
- Sur les combinaisons organomagnésiennes mixtes et leur application à des synthèses d'acides, d'alcools et d'hydrocarbures, par Victor GRIGNARD, docteur ès sciences (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Gauthier-Villars) (*Fasc. 6*) 3 fr. 50.
- Etude géologique et paléontologique du Carbonifère inférieur du Mâconnais, par A. VAFFIER, docteur en médecine et docteur ès sciences, avec 11 figures et 12 planches hors texte (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fasc. 7*) 8 fr.
- Contributions à l'Embryologie des Nématodes, par A. CONTE, docteur ès sciences, préparateur de Zoologie à l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fasc. 8*) 5 fr.
- Contributions à l'étude des larves et des métamorphoses des diptères, par C. VANEY, docteur ès sciences, agrégé des sciences naturelles, chef des travaux de Zoologie à l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fasc. 9*) 6 fr.
- Contribution à l'étude de la classe des Nymphéïnes, par J.-B.-J. CHIFFLOT, docteur ès sciences naturelles, licencié ès sciences physiques, chef des Travaux de Botanique à la Faculté des sciences, sous-directeur du Jardin botanique de la Ville, avec 214 figures intercalées dans le texte (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fasc. 10*) 7 fr. 50
- Monographie géologique et paléontologique des Corbières orientales, par Louis DONCIEUX, docteur ès sciences, Collaborateur auxiliaire au service de la carte géologique de France, avec 69 figures dans le texte, 7 planches hors texte et une carte géologique (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, J.-B. Baillièrre et fils) (*Fasc. 11*) 8 fr.
- Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale en un produit d'inversion, par Léon AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences de mathématiques à l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Gauthier-Villars) (*Fasc. 12*) 6 fr.

II. — DROIT, LETTRES

- La Question des Dix Villes impériales d'Alsace, depuis la paix de Westphalie jusqu'aux arrêts de « Rémions » du Conseil souverain de Brisach (1648-1680), par Georges BARBOT, docteur ès lettres, professeur au Lycée et chargé de conférences à l'Université de Grenoble (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Alphonse Picard et fils). (*Fascicule Premier*) 7 fr. 50
- La Représentation des Intérêts dans les Corps élus, par Charles FRANÇOIS, docteur en droit (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Arthur Rousseau). (*Fasc. 2*) 8 fr.
- Recherches sur l'Origine de l'Idée de Dieu, d'après le Rig-Véda, par A. GUÉRINOT, docteur ès lettres (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Ernest Leroux). (*Fasc. 3*) 7 fr. 50
- Onomasticon Taciteum, par Pli. FABIA, professeur de Philologie classique à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, A. Fontemoing.) (*Fasc. 4*) 15 fr.
- EZÉCHIEL SPANHEIM. — Relation de la Cour de France en 1690, nouvelle édition, établie sur les manuscrits originaux de Berlin, accompagnée d'un commentaire critique, de fac-similés, et suivie de la Relation de la Cour d'Angleterre en 1704, par le même auteur, publié avec un index analytique par Emile BOURGEOIS, maître de conférences à l'École Normale supérieure, professeur à l'École libre des sciences politiques (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, A. Picard et fils) (*Fasc. 5*) 10 fr.
- L'« Agamemnon » d'Eschyle, texte, traduction et commentaires, par Paul REGNAUD, professeur à l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, A. Fontemoing). (*Fasc. 6*) 6 fr.
- Histoire de l'Enseignement secondaire dans le Rhône de 1789 à 1900, par CHABOT, professeur de science de l'éducation à l'Université de Lyon, et S. CHARLÉTY, maître de Conférences à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, A. Picard et fils) (*Fasc. 7*). 6 fr.
- Notes critiques sur quelques Traductions allemandes de poèmes français au moyen âge, par J. FIRMERY, professeur de Littérature étrangère à l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, A. Fontemoing). (*Fasc. 8*). 5 fr.
- Bibliographie critique de l'Histoire de Lyon, depuis les origines jusqu'à 1789, par Sébastien CHARLÉTY, professeur-adjoint à la Faculté des lettres de l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, Alphonse Picard et fils) (*Fasc. 9*) 7 fr. 50
- Au musée de l'Acropole d'Athènes. — *Études sur la sculpture en Attique avant la ruine de l'Acropole lors de l'invasion de Xerxès*, par Henri LÉCHAT, ancien Membre de l'École d'Athènes, chargé de cours à l'Université de Lyon (Lyon, A. Rey, éditeur. — Paris, A. Fontemoing) (*Fasc. 10*) 8 fr.