(Suite)

Etude expérimentale sur les propriétés attribuées à la tuberculine de M. Koch, faite au laboratoire de médecine expérimentale et comparée de la Faculté de Médecine, par M. le professeur ARLOING, M. le Dr RODET, agrégé, et M. le Dr COURMONT, agrégé, avec 4 planches en couleurs. *(Fasc. 11)* . . . . **10** fr.

Histologie comparée des Ebénacées dans ses rapports avec la Morphologie et l'histoire généalogique de ces plantes, par Paul PARMENTIER, professeur de l'Université, avec 4 planches hors texte. *(Fasc. 12)* . . . . **4** fr.

Recherches sur la production et la localisation du Tanin chez les fruits comestibles fournis par la famille des Pomacées, par Mlle A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, 2 planches hors texte. *(Fasc. 13)* . . . . **3** fr.

Etude sur le Bilharzia hæmatobia et la Bilharziose, par M. LORTET, doyen de la Faculté de médecine, et M. VIALLETON, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, 8 planches hors texte et 8 figures dans le texte. *(Fasc. 16)* . . . . **10** fr.

Monographie de la Faune lacustre de l'Eocène moyen, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparat. de géologie à l'Université de Lyon, avec 3 fig. et 3 pl. hors texte. (I, *Fasc. 1er*) . **5** fr.

Etudes sur le Polymorphisme des Champignons, influence du milieu, par Jean BEAUVERIE, docteur ès sciences, prépar. de botan. Faculté des Sciences de Lyon, avec 75 gr. dans le texte. (I, *Fasc. 3*). **7** fr. **50**

L'Homme quaternaire dans le Bassin du Rhône, *Etude géologique et anthropologique*, par Ernest CHANTRE, docteur ès sciences, sous-directeur du Muséum, avec 74 figures dans le texte (I, *Fasc. 4*) . . . . **6** fr.

La Botanique à Lyon avant la Révolution et l'histoire du Jardin botanique municipal de cette ville, par M GÉRARD, professeur à la Faculté des Sciences, avec 9 fig. dans le texte et 1 pl. hors texte. *(Fasc. 23)* . . . . **3** fr. **50**

Physiologie comparée de la Marmotte, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur à la Faculté des Sciences. avec 119 figures et 125 planches hors texte, *(Fasc. 25)*. . . . . **15** fr.

Etudes sur les terrains tertiaires du Dauphiné, de la Savoie, et de la Suisse occidentale, par H. DOUXAMI, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Lyon, avec 6 planches hors texte et 31 figures. *(Fasc. 27)* . . . . **6** fr.

Recherches physiologiques sur l'appareil respiratoire des oiseaux, par J.-M. SOUM, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Bordeaux, avec 40 figures dans le texte. *(Fasc. 28)* . . . . . . **3** fr. **50**

Résultats scientifiques de la campagne du « Caudan » dans le golfe de Gascogne (août-septembre 1895), par R. KŒHLER, professeur de zoologie à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 26)*.

Fascicule I. 1 vol. in-8° avec 6 pl. . . . . **6** fr.

Fascicule II. 1 vol. in-8° avec 11 pl. . . . fr.

Fascicule III. 1 vol. in-8° avec 21 pl. . . . . fr.

Anatomie pathologique du système lymphatique dans la sphère des néoplasmes malins, par le Dr C. REGAUD, chef des travaux, et le Dr F. ARLOING, préparateur d'anatomie générale et d'histologie à la Faculté de médecine (Mémoire couronné par l'Académie de médecine), avec 4 pl. hors texte. *(Fasc. 33)* . . . . fr.

Recherches stratigraphiques et paléontologiques dans le Bas-Languedoc, par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparateur de géologie à la Faculté, avec 40 figures dans le texte et 9 planches hors texte. *(Fasc. 34)*. . . . . . . fr.

Étude du champ électrique de l'atmosphère, par Georges LE CADET, docteur ès sciences, assistant à l'Observatoire de Lyon, 3 fig. et 10 pl. dans le texte. *(Fasc. 35)* . . . . fr.

Les formes épitoques et l'Évolution des Cirratuliens, par Maurice CAULLERY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, et Félix MESNIL, chef de Laboratoire à l'Institut Pasteur, 6 pl. hors texte. *(Fasc. 39)*. . . . . **7** fr. **50**

Etude géologique et paléontologique du Carbonifère inférieur du Mâconnais, par A. VAFFIER, docteur en médecine et docteur ès sciences, avec 11 figures et 12 planches hors texte. (I, *Fasc. 7*). . **8** fr.

Contributions à l'Embryologie des Nématodes, par A. CONTE, docteur ès sciences, prépar. de Zoologie à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 8*). **5** fr.

Contributions à l'étude des larves et des métamorphoses des diptères, par C. VANEY, docteur ès sciences, agrégé des sciences naturelles, chef des travaux de Zoologie à l'Université de Lyon (I, *Fasc. 9*) . . . . **6** fr.

Contribution à l'étude de la classe des Nymphéinées, par J.-B.-J. CHIFFLOT, docteur ès sciences naturelles, licencié ès sciences physiques, chef des Travaux de Botanique à la Faculté des sciences, sous-directeur du Jardin botanique de la Ville, avec 214 figures intercalées dans le texte (I, *Fasc. 10*) . . . . **7** fr. **50**

Monographie géologique et paléontologique des Corbières orientales, par Louis DONCIEUX, docteur ès sciences, Collaborateur auxiliaire au service de la carte géologique de France, avec 69 figures dans le texte, 7 planches hors texte et une carte géologique. (I, *Fasc. 11*) . . . . . **8** fr.

Contribution à l'étude des composés diazoamidés, par Louis MEUNIER, docteur ès sciences, chef des travaux de chimie à la Faculté des sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 13*) . . . **5** fr.

Etude stratigraphique et paléontologique sur la Zone à Lioceras concavum du Mont d'Or lyonnais, par Attale RICHE, docteur ès sciences, chargé d'un cours complémentaire de Géologie à la Faculté des sciences de l'Université de Lyon, avec 7 figures dans le texte et 11 planches hors texte (I, *Fasc. 14*) . . . . **7** fr. **50**

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine*. — Fascicule 15.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS
SUR
LES GROUPES D'ORDRE FINI
ET
LES GROUPES FINIS CONTINUS

PAR

RAYMOND LE VAVASSEUR
Maitre de conférences de mathématiques à la Faculté des sciences
de l'Université de Lyon.

LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1904

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

EN VENTE

A LYON
Alexandre REY, Imprimeur-Éditeur
4, RUE GENTIL

A PARIS
Chez les Libraires spéciaux
SUIVANTS

Librairie Arthur ROUSSEAU, 14, rue Soufflot.

Histoire de la Compensation en droit Romain, par C. APPLETON, professeur à la Faculté de droit. *(Fasc. 21)* . . . . 7 fr. 50

Caractères généraux de la loi de 1884 sur les Syndicats professionnels; justification de cette loi; réformes possibles. Etude de législation industrielle, par R. GONNARD, docteur en droit, licencié ès lettres, secrétaire à la Société d'Economie Politique, avec une Préface de M. P. PIC, professeur à la Faculté de Droit. *(Fasc. 36)* . . . 3 fr.

La Représentation des Intérêts dans les Corps élus, par Charles FRANÇOIS, docteur en droit. (II, *Fasc. 2*). . . . . 8 fr.

Mélanges Ch. Appleton : *Etudes d'histoire du droit,* dédiées à M. Ch. APPLETON, professeur à la Faculté de Droit de Lyon, à l'occasion de son XXV anniversaire de professorat. (II, *Fasc. 13*). 5 fr.

Librairie Félix ALCAN, 108, boulevard Saint-Germain.

Lettres intimes de J.-M. Alberoni adressées au comte I. Rocca, ministre des finances du duc de Parme, et publiées d'après le manuscrit du collège de S. Lazaro Alberoni, par Emile BOURGEOIS, maître de conférences à l'Ecole Normale, avec un portrait et deux fac-similés. *(Fasc. 8)* . 10 fr.

Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine, par Arthur HANNEQUIN, profes. à la Faculté des Lettres *(Fasc. 14)* 7 fr. 50

Saint Ambroise et la morale chrétienne au IVe siècle, par Raymond THAMIN, ancien maître de conférences à la Faculté des Lettres de Lyon, professeur au Lycée Condorcet. *(Fasc 15)*. 7 fr. 50

La République des Provinces-Unies, la France et les Pays-Bas espagnols de 1630 à 1650, par A. WADDINGTON, professeur à la Faculté des Lettres.
Tome I (1630-42). 1 vol. *(Fasc. 18)* . . 6 fr.
Tome II (1642-50) avec deux portraits et une carte 1 vol. *(Fasc. 31)* . . . . 6 fr.

Le Vivarais. Essai de Géographie régionale, par Louis BOURDIN, licencié ès sciences, diplômé d'études supérieures d'Histoire et de Géographie, avec 20 gravures et 2 graphiques dans le texte *(Fasc. 37)* . . . . 6 fr.

Librairie Alphonse PICARD et Fils, 82, rue Bonaparte.

La doctrine de Malherbe d'après son commentaire sur Desportes, par Ferdinand BRUNOT, maître de conférences à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris, avec 5 pl. hors texte. *(Fasc. 1er)*. 10 fr.

Le Fondateur de Lyon, Histoire de L. Munatius Plancus, par M. JULLIEN, professeur à la Faculté des Lettres, avec une planche hors texte. *(Fasc. 9)* . . . . 5 fr.

La Jeunesse de William Wordsworth (1770-1798). **Etude sur le « Prélude »,** par Emile LEGOUIS, prof. à la Faculté des Lettres. *(Fasc. 22)* 7 fr. 50

La Question des Dix Villes impériales d'Alsace, depuis la paix de Westphalie jusqu'aux arrêts de « Réunions » du Conseil souverain de Brisach (1648-1680), par Georges BARDOT, docteur ès lettres, professeur au Lycée et chargé de conférences à l'Université de Grenoble. (II, *Fasc. 1er*). 7 fr. 50

EZÉCHIEL SPANHEIM. — **Relation de la Cour de France en 1690,** *nouvelle édition,* établie sur les manuscrits originaux de Berlin, accompagnée d'un commentaire critique, de fac-similés, et suivie de la *Relation de la Cour d'Angleterre en 1704,* par le même auteur, publié avec un index analytique par Emile BOURGEOIS, maître de conférences à l'Ecole Normale supérieure, professeur à l'Ecole libre des sciences politiques. (II, *Fasc. 5*) 10 fr.

Histoire de l'Enseignement secondaire dans le Rhône de 1789 à 1900, par CHABOT, professeur de science de l'éducation à l'Université de Lyon, et S. CHARLÉTY, maître de Conférences à la Faculté des Lettr. de l'Université de Lyon. (II, *Fasc.*) 6 fr.

Bibliographie critique de l'Histoire de Lyon depuis les origines jusqu'à 1789, par Sébastien CHARLÉTY, professeur adjoint à la Faculté des lettres de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 9*) . . . fr. 50

Bibliographie critique de l'histoire de Lyon depuis 1789 jusqu'à nos jours, par Sébastien CHARLÉTY, professeur adjoint à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 11*) . fr. 50

La mention en chiffres romains qui précède le numéro du fascicule indique, pour les ouvrages parus dans la Nouvelle Série, qu'ils appartiennent soit au groupe *Sciences-Médecine* (I), soit au groupe *Droit-Lettres* (II).

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR

LES GROUPES D'ORDRE FINI

ET

LES GROUPES FINIS CONTINUS

Lyon. — A. REY, Imprimeur de l'Université, 4, rue Gentil. — 36530.

Exemplaire N° 323

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine*. — Fascicule 15.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR

LES GROUPES D'ORDRE FINI

ET

LES GROUPES FINIS CONTINUS

PAR

RAYMOND LE VAVASSEUR
Maitre de conférences de mathématiques à la Faculté des sciences
de l'Université de Lyon.

LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1904

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR LES GROUPES D'ORDRE FINI

ET

LES GROUPES FINIS CONTINUS.

J'ai réuni dans ce travail des résultats non encore publiés de mes recherches sur les groupes d'ordre fini. Ce Mémoire est divisé en six Parties.

Dans la première Partie, j'expose un mode de formation d'une table de multiplication pour un groupe régulier quelconque. Je définis des nombres dont la loi de multiplication correspond au même groupe régulier et j'ébauche les premières propositions de la théorie de tels nombres, théorie qui revient à celle de certaines transformations linéaires spéciales.

Dans la deuxième Partie, je montre comment d'un groupe d'ordre fini on peut déduire des groupes finis continus, soit en considérant le groupe lui-même, soit en envisageant le groupe de ses isomorphismes.

J'ai donné de nombreux exemples en vérifiant chaque fois que les équations obtenues définissent bien un groupe, et en me servant en particulier, pour les obtenir, des groupes d'isomorphismes des groupes d'ordre p^4 (p étant un nombre premier plus grand que 3).

La troisième Partie a trait aux groupes d'ordre 32.

Leur énumération est chose faite; aussi je me suis contenté de donner, en ne considérant que les plus intéressants de ces groupes, quelques-unes de leurs propriétés : nombre d'opérations d'ordre donné, groupe des isomorphismes cogrédients, faisceaux, substitutions génératrices du groupe régulier correspondant.

La quatrième Partie donne les propriétés de quelques groupes d'ordre 2^n. La méthode que j'ai utilisée pour énumérer les groupes d'ordre 2^5 s'applique à l'énumération des groupes d'ordre 2^n, et permet de la pousser aussi loin que l'on veut.

Je publie quelques-uns des résultats que j'ai ainsi obtenus.

Dans la cinquième Partie, il s'agit des groupes d'ordre p^5 ($p > 3$) (p est un nombre premier). Considérant l'énumération comme faite, je me suis occupé surtout d'indiquer brièvement les congruences dont la discussion conduit, non seulement à trouver les groupes d'ordre p^5, mais, avec quelques légères modifications, à obtenir tous leurs isomorphismes. A chaque système de congruences ainsi donné correspond un ou plusieurs groupes dont on ne saura déterminer les isomorphismes. On pourrait en déduire, comme je l'ai montré dans la deuxième Partie, toute une série de groupes finis continus.

La sixième Partie est consacrée aux groupes d'ordre 3^5, et rédigée dans le même ordre d'idées.

J'avertis le lecteur qu'il est possible qu'un même groupe se présente, plusieurs fois, avec des équations de définition différentes. Je me suis efforcé d'éviter ces répétitions. Mais je ne suis pas certain d'y être complètement parvenu.

Je prends la liberté de rappeler que, dans sa séance du 3 août 1896, l'Académie des Sciences a accepté sous le n° 5287 un pli cacheté où j'avais consigné les résultats que j'avais obtenus pour l'énumération des groupes d'ordre p^5. Je me proposais de revoir tous mes calculs avant de les publier lorsque l'apparition du Mémoire de M. Bagnera m'en a détourné.

CHAPITRE PREMIER.

TABLE DE MULTIPLICATION.

1. J'imagine un tableau carré contenant n lignes et n colonnes, numérotées $1, 2, \ldots, n$, de sorte que chaque case est déterminée par deux nombres, α et β, α étant le rang de la ligne et β celui de la colonne auxquelles la case appartient.

Choisissons n cases du tableau en nous assujettissant simplement à prendre une case et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Supposons que la case de $i^{\text{ième}}$ ligne soit dans la colonne α_i; nous avons ainsi déterminé une substitution

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Réciproquement : à toute substitution telle que s on peut faire correspondre sans ambiguïté un système de n cases du tableau tel qu'il y ait une case et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Pour abréger le langage, nous appellerons *file de cases,* ou simplement *file,* un système de n cases tel qu'il y ait une case et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

La file dont les cases sont toutes sur la diagonale principale du tableau (celle qui descend de la gauche vers la droite) correspond à la substitution identique.

2. Deux cases a et b, rangées dans l'ordre a, b, sont dites *consécutives* si la colonne où se trouve la case a, et la ligne où se trouve la case b se croisent sur la diagonale principale.

On voit immédiatement que la recherche des cases consécutives d'une file revient à la recherche des cycles de la substitution qui correspond à la file.

3. Soient s et t deux files représentant deux substitutions S et T. La file st qui correspond à la substitution ST s'obtient comme il suit : soient a, b deux cases consécutives prises dans l'ordre a, b, a faisant partie de la file s, b faisant partie de la file t : la case qui est dans la même ligne que a, et dans la même colonne que b, fait partie de la file st.

4. Soit G un groupe d'ordre n, dont les opérations sont $a_1 = 1$, a_2, ..., a_n. Formons un tableau carré de n lignes de n colonnes.

Écrivons dans chaque case du tableau une opération de G d'après la loi suivante : l'opération a_{ij} écrite dans la ligne de rang i et dans la colonne de rang j satisfera à l'égalité

$$a_i a_{ij} = a_j.$$

La table ainsi obtenue s'appellera *table de multiplication* de G.

On a

$$a_i a_k = a_{\varphi_k(i)}.$$

Laissons fixe l'indice k, et faisons $i = 1, 2, \ldots, n$, on aura

$$a_k = a_{1, \varphi_k(1)} = a_{2, \varphi_k(2)} = \ldots = a_{n, \varphi_k(n)}.$$

A chaque opération de G on fait ainsi correspondre une substitution. On sait que ces substitutions forment un groupe dont l'ordre égale le degré, groupe simplement isomorphe à G [1].

5. Définitions des nombres A.

---

[1] Burnside, *Theory of groups of finite order*, n° 20, p. 22.

Je considère les opérations $a_1, \ldots, a_m$ du groupe G d'ordre m, comme des *signes*.

Soit α un *nombre*. Pour l'affecter du signe a_p, j'écrirai soit αa_p soit $a_p \alpha$ indifféremment.

J'appelle nombre A tout nombre de la forme

$$A = a_1 \alpha_1 + \ldots + a_m \alpha_m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont dits les termes de A.

Exemple. — Soient a et b deux *signes* tels qu'on ait

$$a^3 = b^2 = 1, \qquad ab = ba^2.$$

$A = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta b + \varepsilon ab + \zeta a^2 b = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta)$ sera un nombre A correspondant au groupe symétrique de trois lettres.

6. *Égalité.* — Deux nombres A,

$$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \qquad B = (\beta_1, \ldots, \beta_m),$$

sont dits *égaux* et l'on écrit $A = B$ si l'on a :

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \beta_m.$$

Le nombre $(0, \ldots, 0)$ s'écrira simplement 0.

7. $A + B$ sera par définition $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_m + \beta_m)$.

8. Soit à multiplier $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ par $B = (\beta_m, \ldots, \beta_m)$.

Par définition, *en tenant compte de l'ordre dans lequel on écrit les facteurs,*

$$AB = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \alpha_p \beta_q a_p a_q,$$

$a_p a_q$ sera égal à l'un des signes $a_{p,q}$ de la suite $a_1, \ldots, a_m$; on aura

$$AB = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m), \qquad \text{avec} \qquad \gamma_p = \alpha_{p_1}\beta_{q_1} + \ldots + \alpha_{p_m}\beta_{q_m}$$

où

$$p_1, \ \ldots, \ p_m \qquad \text{et} \qquad q_1, \ \ldots, \ q_m$$

représentent des permutations des nombres 1, 2, ..., m.

On aura aussi :

$$\gamma_1 = \alpha_{h_{11}}\beta_1 + \ldots + \alpha_{h_{1m}}\beta_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_m = \alpha_{h_{m1}}\beta_1 + \ldots + \alpha_{h_{mm}}\beta_m,$$

$h_{11}, \ldots, h_{1m}; \ldots; h_{m1}, \ldots, h_{mm}$; et aussi $h_{11}, \ldots, h_{m1}; \ldots; h_{1m}, \ldots, h_{mm}$ sont des permutations des nombres 1, ..., m.

On en déduit l'égalité :

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_m = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)(\beta_1 + \ldots + \beta_m).$$

En général AB et BA seront des nombres A différents.

Exemple :

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta b + \varepsilon ab + \zeta a^2 b \\ A' &= \alpha' + \beta' a + \gamma' a^2 + \delta' b + \varepsilon' ab + \zeta' a^2 b \end{aligned} \qquad (a^3 = b^2 = 1, \ ab = ba^2)$$

Alors

$$AA' = \alpha'' + \beta'' a + \gamma'' a^2 + \delta'' b + \varepsilon'' ab + \zeta'' a^2 b$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' + \beta\gamma' + \gamma\beta' + \delta\delta' + \varepsilon\varepsilon' + \zeta\zeta', \\ \beta'' &= \alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\gamma' + \delta\zeta' + \varepsilon\delta' + \zeta\varepsilon', \\ \gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\beta' + \gamma\alpha' + \delta\varepsilon' + \varepsilon\zeta' + \zeta\delta', \\ \delta'' &= \alpha\delta' + \beta\zeta' + \gamma\varepsilon' + \delta\alpha' + \varepsilon\beta' + \zeta\gamma', \\ \varepsilon'' &= \alpha\varepsilon' + \beta\delta' + \gamma\zeta' + \delta\gamma' + \varepsilon\alpha' + \zeta\beta', \\ \zeta'' &= \alpha\zeta' + \beta\varepsilon' + \gamma\delta' + \delta\beta' + \varepsilon\gamma' + \zeta\alpha'. \end{aligned}$$

Ici, outre l'égalité

$$\begin{aligned} &(\alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \delta'' + \varepsilon'' + \zeta'') \\ &\quad = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \zeta + \varepsilon)(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \zeta' + \varepsilon'), \end{aligned}$$

on a :

$$(\alpha''+\beta''+\gamma''-\delta''-\varepsilon''-\zeta'')$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma-\delta-\zeta-\varepsilon)(\alpha'+\beta'+\gamma'-\delta'-\zeta'-\varepsilon').$$

9. Le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_{h_{11}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{h_{m1}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} \end{vmatrix}$ s'appellera la n de $A=(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

On le désignera par $n(A)$. La condition pour que de l'égalité $AA'=AA''$ on puisse conclure $A'=A''$ est que la n de A soit différente de O.

Si la n de A était nulle, on pourrait trouver un nombre A autre que o, soit A', tel que AA' fût nul.

Si, au contraire, on n'envisage que des nombres A dont la n n'est pas nulle, un produit de deux nombres A ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

Le déterminant $n(A)$ a été obtenu en multipliant A *à droite* par A'. En multipliant A *à gauche* par A', le déterminant correspondant obtenu, formé des éléments de A, s'appellera la n' de A et sera désigné par $n'(A)$. Ce que nous avons dit pour la n de A peut se répéter pour la n' de A.

Ainsi, lorsque $A=\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta b+\varepsilon ab+\zeta a^2 b$,

$$n(A)=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \beta & \alpha & \gamma & \varepsilon & \zeta & \delta \\ \gamma & \beta & \alpha & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \alpha & \gamma & \beta \\ \varepsilon & \zeta & \delta & \beta & \alpha & \gamma \\ \zeta & \delta & \varepsilon & \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad n'(A)=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \beta & \alpha & \gamma & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \beta & \alpha & \varepsilon & \zeta & \delta \\ \delta & \zeta & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\ \varepsilon & \delta & \zeta & \gamma & \alpha & \beta \\ \zeta & \varepsilon & \delta & \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

10. L'ensemble des nombres A forme un *corps*.

Les nombres $a_1, \dots, a_m$ forment une base de ce corps.

Soit $A=\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_m a_m$.

On a

$$Aa_1=\alpha_{h_{11}}a_1+\dots+\alpha_{h_{1m}}a_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Aa_m=\alpha_{h_{m1}}a_1+\dots+\alpha_{h_{mm}}a_m.$$

Donc l'équation

$$n_s(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \alpha_{h_{11}} - s & \alpha_{h_{12}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \alpha_{h_{21}} & \alpha_{h_{22}} - s & \dots & \alpha_{h_{2m}} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \alpha_{h_{m1}} & \alpha_{h_{m2}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} - s \end{vmatrix} = 0$$

sera vérifiée par le nombre A, $\mathrm{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Le produit des racines de l'équation $n_s(\mathrm{A}) = 0$ est $\pm n(\mathrm{A})$.

A vérifie aussi identiquement l'équation $n'_s(\mathrm{A}) = 0$.

Reprenons le déterminant

$$n(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \alpha_{h_{11}} & \alpha_{h_{12}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \alpha_{h_{21}} & \alpha_{h_{22}} & \dots & \alpha_{h_{2m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{h_{m1}} & \alpha_{h_{m2}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments de la première colonne par a_1, ceux de la deuxième par a_2, ..., ceux de la $m^{\text{ième}}$ colonne par a_m; ajoutons les $(m-1)$ dernières colonnes à la première.

Comme $a_1 = 1$, on a

$$n(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{A}a_1 & \alpha_{h_{12}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \mathrm{A}a_2 & \alpha_{h_{22}} & \dots & \alpha_{h_{2m}} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}a_m & \alpha_{h_{m2}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$n(\mathrm{A}) = \mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}.$$

$\overline{\mathrm{A}}$ est un nombre A dont les termes sont des fonctions *entières* et homogènes des termes de A.

Par exemple, si les termes de A sont des nombres *entiers*, les termes de $\overline{\mathrm{A}}$, comme le nombre $n(\mathrm{A})$, sont des nombres entiers.

On aura de même

$$n'(A) = \underline{A}.A,$$

avec les mêmes remarques sur les termes de $\underline{A}$.

11. Soit $X = BY$. On a, en posant $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, $B = (\beta_1, \ldots \beta_m)$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{h_{11}} y_1 + \ldots + \beta_{h_{1m}} y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \beta_{h_{1m}} y_1 + \ldots + \beta_{h_{mm}} y_m. \end{aligned}$$

Le déterminant de cette transformation linéaire est $n(B)$.

12. Soit

$$F = AX, \qquad A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \qquad F = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m),$$

$F = AX$ définit une transformation linéaire dont le déterminant est $n(A)$. Mais on a

$$F = AX, \qquad X = BY, \qquad \text{donc} \qquad F = ABY.$$

Le déterminant de cette dernière fonction linéaire est $n(AB)$ et l'on a, comme on sait,

$$n(AB) = n(A)\, n(B)$$

[d'après la théorie des transformations linéaires].

De même

$$n'(AB) = n'(A)\, n'(B)$$

13. Si l'on écrit $n(A)$, et que, à la place de $\alpha_{h_{11}}, \alpha_{h_{21}}, \ldots, \alpha_{h_{m1}}$, on mette $a_1, \ldots, a_m$ ou, d'une façon générale, a_1 à la place de tous les éléments du déterminant $n(A)$ égaux à $\alpha_{h_{11}}, \ldots, a_m$ à la place de tous les éléments égaux à $\alpha_{h_{m1}}$, on a la Table de multiplication du groupe.

Ainsi

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & b & ab & a^2b \\ a & 1 & a^2 & ab & a^2b & b \\ a^2 & a & 1 & a^2b & b & ab \\ b & ab & a^2b & 1 & a^2 & a \\ ab & a^2b & b & a & 1 & a^2 \\ a^2b & b & ab & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

est la Table de multiplication du groupe G_6^1,

$$a^3 = b^2 = 1, \qquad ab = ba^2,$$

CHAPITRE II.

14. Supposons que le groupe G soit *engendré* par les opérations $a_1, \ldots, a_n$, de telle sorte qu'on ait toutes les opérations du groupe en prenant l'expression

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}, \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqq \alpha_1 \leqq m_1 - 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq \alpha_n \leqq m_n - 1.$$

On aura

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n} . a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} = a_1^{\varphi_1(x, \alpha)} \ldots a_n^{\varphi_n(x, \alpha)}$$

et la transformation

$$x'_i \equiv \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad (\operatorname{mod} m_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

correspondra à l'opération $a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$ de telle sorte que le groupe des transformations $x'_i \equiv \varphi_i(x, \alpha) \ (\operatorname{mod} m_i)$ et le groupe des opérations donné seront simplement isomorphes.

Or j'ai constaté que les équations $x'_i = \varphi_i(x, a) \, (i = 1, \ldots, n)$, où je considère les α comme des paramètres, sont les équations de définition d'un groupe fini continu. J'ai trouvé également des groupes finis continus en usant du même procédé à l'égard du groupe des isomorphismes du groupe G.

Pour s'expliquer comment on obtient des groupes continus, on peut observer que les équations de définition du groupe G, qui sert de point de départ, peuvent se séparer en deux catégories, dont la première sera

$$a_1^{m_1} = 1, \qquad \ldots, \qquad a_n^{m_n} = 1.$$

la deuxième catégorie comprenant toutes les autres équations de définition.

Or les congruences que l'on obtient s'établissent par des calculs qui n'utilisent que les équations de la deuxième catégorie. Ces congruences ont lieu respectivement suivant les modules $m_1, \ldots, m_n$, et leurs coefficients sont également pris chacun suivant l'un de ces modules.

Donnons à $m_1, \ldots, m_n$ divers systèmes de valeurs, sans changer les équations de définition de la deuxième catégorie. La forme du système de congruences obtenues ne changera pas. Seuls les modules changeront. Dès lors ceci explique que, en considérant les coefficients comme des paramètres quelconques et les congruences comme des équations, on ait défini un groupe fini continu.

Je vais donner maintenant quelques exemples.

15. Commençons par le groupe G^1_{pq},

$$(a^p = b^q = 1,\ ab = ba^\alpha),$$

p et q sont premiers, p est plus grand que q, α appartient à l'exposant q (mod p).

On a

$$a^x b^y a^\lambda b^\mu = a^{x+\lambda\alpha^{-y}} b^{y+\mu}.$$

D'où il suit qu'à l'opération $a^\lambda b^\mu$ correspond la transformation

$$\begin{aligned} x' &\equiv x + \lambda\alpha^{-y} && (\text{mod}\, p) \\ y' &\equiv y + \mu && (\text{mod}\, q). \end{aligned}$$

Les isomorphismes sont donnés par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a^\lambda & a^\mu b \end{pmatrix} = J_{\lambda\mu}.$$

$J_{\lambda\mu}$ change $a^x b^y$ en

$$a^{\lambda x + \mu\alpha \frac{1-\alpha^{-y}}{\alpha - 1}} b^y.$$

A l'isomorphisme $J_{\lambda\mu}$ correspond la transformation

$$\lambda' \equiv \lambda x + \mu \frac{1 - \alpha^{-y}}{1 - \alpha^{-1}} \qquad (\bmod p)$$
$$y' \equiv y \qquad (\bmod q).$$

Voici maintenant les groupes finis continus correspondants :

α désignant une constante fixe quelconque, λ et μ étant deux paramètres, le premier groupe sera défini par

$$x' = x + \lambda\alpha^y$$
$$y' = y + \mu.$$

En effet, si

$$x'' = x' + \lambda'\alpha^{y'}, \qquad y'' = y' + \mu'$$

on trouve

$$x'' = x + \lambda''\alpha^y, \qquad y'' = y + \mu''$$

avec

$$\lambda'' = \lambda + \lambda'\alpha^{\mu}, \qquad \mu'' = \mu + \mu'.$$

Le deuxième groupe sera défini par

$$x' = \lambda x + \mu \frac{1 - \alpha^y}{1 - \alpha}$$
$$y' = y.$$

Si l'on pose, en effet,

$$x'' = \lambda' x' + \mu' \frac{1 - \alpha^{y'}}{1 - \alpha} = \lambda'' x + \mu'' \frac{1 - \alpha^y}{1 - \alpha}$$
$$y'' = y' = y,$$

on a

$$\lambda'' = \lambda\lambda', \qquad \mu'' = \lambda'\mu + \mu'.$$

16. Soit maintenant le groupe $G^2_{p^3}$ ($a^p = b^p = \mathfrak{z}^p = 1$, $ab = ba\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ désignant une opération conjuguée d'elle-même).

On a

$$a^x b^y \mathfrak{z}^z a^\alpha b^\beta \mathfrak{z}^\gamma = a^{x+\alpha} b^{y+\beta} \mathfrak{z}^{z+\gamma-\alpha y}.$$

Le groupe fini continu correspondant à cette loi de multiplication est défini par les équations

$$\begin{aligned} x' &= x + \alpha \\ y' &= y + \beta \\ z' &= z + \gamma - \alpha y. \end{aligned}$$

Et, si l'on pose

$$x'' = x' + \alpha', \qquad y'' = y' + \beta', \qquad z'' = z' + \gamma' - \alpha' y',$$

puis

$$x'' = x + \alpha'', \qquad y'' = y + \beta'', \qquad z'' = z + \gamma'' - \alpha'' y,$$

il vient

$$\alpha'' = \alpha + \alpha', \qquad \beta'' = \beta + \beta', \qquad \gamma'' = \gamma + \gamma' - \alpha' \beta.$$

Mais cherchons les groupes des isomorphismes de $G^1_{p^3}$ et de $G^2_{p^3}$.

Si l'on part des équations de définition

$$a^p = \mathfrak{Z}^y, \qquad b^p = \mathfrak{Z}^x, \qquad ab = ba\mathfrak{Z}^w, \qquad \mathfrak{Z}^p = 1, \qquad a\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}a, \qquad b\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}b,$$

et l'on pose

$$\begin{aligned} \bar a &= a^\alpha b^\beta \mathfrak{Z}^\gamma \\ \bar b &= a^\delta b^\varepsilon \mathfrak{Z}^\zeta \\ \bar{\mathfrak{Z}} &= \mathfrak{Z}^\eta, \end{aligned}$$

avec

$$\eta(\alpha\varepsilon - \beta\delta) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

en écrivant que l'on a

$$\bar a^p = \bar{\mathfrak{Z}}^{\bar y}, \qquad \bar b^p = \bar{\mathfrak{Z}}^{\bar x}, \qquad \bar a \bar b = \bar b \bar a \bar{\mathfrak{Z}}^{\bar w},$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned} \eta \bar y &\equiv \beta x + \alpha y + \alpha\beta w \frac{p(p+1)}{2} \\ \eta \bar x &\equiv \varepsilon x + \delta y + \varepsilon\delta w \frac{p(p-1)}{2} \\ \eta \bar w &\equiv w(\alpha\varepsilon - \beta\delta). \end{aligned}\right\} \pmod{p}$$

Nous supposerons $p > 2$. Pour $G^1_{p^3}$, faisons

$$y = \bar{y} = 1, \qquad x = \bar{x} = 0, \qquad w = \bar{w} = 1.$$

Il vient

$$\eta = \alpha, \qquad \delta = 0, \qquad \alpha\varepsilon = \eta, \qquad \text{donc} \qquad \varepsilon = 1.$$

Les isomorphismes sont donnés par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b & \mathfrak{I} \\ a^{\alpha} b^{\beta} \mathfrak{I}^{\gamma} & b\,\mathfrak{I}^{\zeta} & \mathfrak{I}^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Un tel isomorphisme change $a^x b^y \mathfrak{I}^z$ en

$$a^{\alpha x}\, b^{\beta x + y}\, \mathfrak{I}^{\gamma x + \zeta y + \alpha z - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}}.$$

Assurons-nous que les équations

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x \\ y' &= \beta x + y \\ z' &= \gamma x + \zeta y + \alpha z - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

définissent bien un groupe fini continu de quatrième espèce.

Pour cela posons

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha' x' = \alpha'' x \\ y'' &= \beta' x' + y' = \beta'' x + y \\ z'' &= \gamma' x' + \zeta' y' + \alpha' z' - \alpha'\beta' \frac{x'(x'-1)}{2} \\ &= \gamma'' x + \zeta'' y + \alpha'' z - \alpha''\beta'' \frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' \\ \beta'' &= \alpha\beta' + \beta \\ \gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\zeta' + \gamma\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'\beta' \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \\ \zeta'' &= \zeta' + \alpha'\zeta. \end{aligned}$$

Pour $G^2_{p^3}$ $(p > 2)$, on a

$$x = \overline{x} = 0, \qquad y = \overline{y} = 0, \qquad w = \overline{w} = 1,$$

donc

$$\eta \equiv \alpha\varepsilon - \beta\delta \pmod{p}.$$

Les isomorphismes sont donnés par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b & \mathfrak{Z} \\ a^\alpha b^\beta \mathfrak{Z}^\gamma & a^\delta b^\varepsilon \mathfrak{Z}^\zeta & \mathfrak{Z}^{\alpha\varepsilon-\beta\delta} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha\varepsilon - \beta\delta \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Un tel isomorphisme change $a^x b^y \mathfrak{Z}^z$ en

$$a^{\alpha x+\delta y}\, b^{\beta x+\varepsilon y}\, \mathfrak{Z}^{\gamma x+\zeta y+(\alpha\varepsilon-\beta\delta)z-\alpha\beta\frac{x(x-1)}{2}-\delta\varepsilon\frac{y(y-1)}{2}-\beta\delta yx}.$$

De là, le groupe fini continu

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha x + \delta y \\
y' &= \beta x + \varepsilon y \\
z' &= \gamma x + \zeta y + (\alpha\varepsilon - \beta\delta)z - \alpha\beta\frac{x(x-1)}{2} - \delta\varepsilon\frac{y(y-1)}{2} - \beta\delta xy
\end{aligned}$$

et le groupe correspondant des paramètres

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \alpha\alpha' + \beta\delta', \\
\beta'' &= \alpha\beta' + \beta\varepsilon', \\
\delta'' &= \delta\alpha' + \varepsilon\delta', \\
\varepsilon'' &= \beta'\delta + \varepsilon\varepsilon', \\
\gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\zeta' + \gamma(\alpha'\varepsilon' - \beta'\delta') - \alpha\beta\,\beta'\delta' - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1)\delta'\varepsilon' \\
\zeta'' &= \delta\gamma' + \varepsilon\zeta' + \zeta(\alpha'\varepsilon' - \beta'\delta') - \delta\varepsilon\,\beta'\delta' - \tfrac{1}{2}\delta(\delta-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)\delta'\varepsilon'
\end{aligned}$$

17. Appliquons encore notre méthode à quelques groupes d'ordre p^4.

Partons des équations

$$b^p = \mathfrak{Z}^u \theta^y, \qquad c^p = \mathfrak{Z}^t \theta^x, \qquad bc = cb\,\theta^w \mathfrak{Z}^s, \qquad \mathfrak{Z}^p = \theta^p = 1,$$
$$w \not\equiv 0.$$

Posons

$$
\begin{aligned}
\bar b &= b^{\alpha} c^{\beta} \mathfrak{S}^{\gamma} \theta^{\delta},\\
\bar c &= b^{\varepsilon} c^{\zeta} \mathfrak{S}^{\eta} \theta^{\iota},\\
\bar{\mathfrak{S}} &= \mathfrak{S}^{\varkappa} \theta^{\lambda},\\
\bar\theta &= \mathfrak{S}^{\mu} \theta^{\nu},
\end{aligned}
$$

avec $(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)(\varkappa\nu - \lambda\mu) \not\equiv 0 \pmod p$.

Écrivons que l'on a

$$\bar b^p = \bar{\mathfrak{S}}^{\bar u} \bar\theta^{\bar y}, \qquad \bar c^p = \bar{\mathfrak{S}}^{\bar t} \bar\theta^{\bar x}, \qquad \bar b \bar c = \bar c \bar b \bar\theta^{\bar w} \bar{\mathfrak{S}}^{\bar s}.$$

Il vient

$$
\left.
\begin{aligned}
\varkappa \bar u + \mu \bar y &\equiv \alpha u + \beta t,\\
\lambda \bar u + \nu \bar y &\equiv \alpha y + \beta x,\\
\varkappa \bar t + \mu \bar x &\equiv \zeta x + \varepsilon y\\
\nu \bar w + \lambda \bar s &\equiv w(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)\\
\mu \bar w + \varkappa \bar s &\equiv s\,(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)
\end{aligned}
\right\} \pmod p.
$$

Pour le groupe $G^1_{p^4}$,

$$b^p = \mathfrak{S}, \qquad c^p = \mathfrak{S}^p = \theta^p = 1, \qquad bc = cb\theta$$

($\mathfrak{S}$ et θ étant des opérations conjuguées d'elles-mêmes), faisons

$$u = \bar u = 1, \qquad y = \bar y = 0, \qquad t = \bar t = 0, \qquad x = \bar x = 0,$$
$$w = \bar w = 1, \qquad s = \bar s = 0.$$

On trouve

$$\varkappa \equiv \alpha, \qquad \lambda \equiv 0, \qquad \varepsilon \equiv 0, \qquad \nu \equiv \alpha\zeta, \qquad \mu \equiv 0,$$

d'où l'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} b & c & \mathfrak{S} & \theta \\ b^{\alpha} c^{\beta} \mathfrak{S}^{\gamma} \theta^{\delta} & c^{\zeta} \mathfrak{S}^{\eta} \theta^{\iota} & \mathfrak{S}^{\alpha} & \theta^{\alpha\zeta} \end{pmatrix}$$

qui remplace

$$b^x c^y \mathfrak{S}^z \theta^t \qquad \text{par} \qquad b^{\alpha x} c^{\beta x + \zeta y} \mathfrak{S}^{\gamma x + \eta y + \alpha z} \theta^{\delta x + \iota y + \alpha\zeta t - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}}.$$

Voici le groupe fini continu correspondant

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha x,\\
y' &= \beta x + \zeta y,\\
z' &= \gamma x + \eta y + \alpha z,\\
t' &= \delta x + \iota y + \alpha\zeta t - \alpha\beta\frac{x(x-1)}{2}
\end{aligned}$$

et le groupe des paramètres

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \alpha\alpha',\\
\beta'' &= \beta'\alpha + \zeta'\beta,\\
\zeta'' &= \zeta\zeta',\\
\gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\eta' + \gamma\alpha',\\
\eta'' &= \eta'\zeta + \alpha'\eta,\\
\delta'' &= \delta'\alpha + \iota'\beta + \delta\alpha'\zeta' - \alpha'\beta'\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1),\\
\iota'' &= \zeta\iota' + \iota\alpha'.
\end{aligned}$$

Maintenant le groupe $G^2_{p^2}$ est défini par les équations

$$b^p = \mathfrak{Z}, \qquad c^p = \theta, \qquad \mathfrak{Z}^p = \theta^p = 1, \qquad bc = cb\theta$$

(les opérations $\mathfrak{Z}$ et θ sont conjuguées d'elles-mêmes).

Faisons, dans les congruences précédentes,

$$u = \overline{u} = 1, \qquad y = \overline{y} = 0, \qquad t = \overline{t} = 0, \qquad x = \overline{x} = 1,$$
$$w = \overline{w} = 1, \qquad s = \overline{s} = 0.$$

Il vient

$$\varkappa \equiv \alpha \equiv 1, \qquad \lambda \equiv \beta, \qquad \mu \equiv 0, \qquad \varepsilon \equiv 0, \qquad \nu \equiv \zeta.$$

De là l'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} b & c & \mathfrak{Z} & \theta \\ bc^{\beta}\mathfrak{Z}^{\gamma}\theta^{\delta} & c^{\zeta}\mathfrak{Z}^{\eta}\theta^{\iota} & \mathfrak{Z}\theta^{\beta} & \theta^{\zeta} \end{pmatrix}$$

qui change

$$b^x c^y \mathfrak{Z}^z \theta^t \qquad \text{en} \qquad b^x c^{\beta x + \zeta y}\mathfrak{Z}^{\gamma x + \eta y + z}\theta^{\delta x + \iota y + \beta z + \zeta t - \beta\frac{x(x-1)}{2}},$$

et le groupe fini continu

$$\begin{aligned}
x' &= x,\\
y' &= \beta x + \zeta y,\\
z' &= \gamma x + \eta y + z,\\
t' &= \delta x + \iota y + \beta z + \zeta t - \beta\frac{x(x-1)}{2},
\end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned}
\beta'' &= \beta' + \beta\zeta',\\
\zeta'' &= \zeta\zeta',\\
\gamma'' &= \gamma' + \beta\eta' + \gamma,\\
\eta'' &= \zeta\eta' + \eta,\\
\delta'' &= \delta' + \beta\iota' + \gamma\beta' + \delta\zeta',\\
\iota'' &= \iota'\zeta + \beta'\eta + \zeta'\iota.
\end{aligned}$$

18. Partons maintenant des équations

$$a^p = \theta^x, \qquad b^p = \theta^y, \qquad \theta^{p^2} = 1, \qquad ab = ba\theta^p.$$

Posons

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= a^\alpha b^\beta \theta^\gamma,\\
\bar{b} &= a^\delta b^\varepsilon \theta^\zeta,\\
\bar{\theta} &= \theta^\eta,
\end{aligned}$$

avec $\eta(\alpha\varepsilon - \beta\delta) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Ici l'on a

$$\eta \equiv \alpha\varepsilon - \beta\delta \pmod{p},$$

$$\left.\begin{aligned}
\eta\bar{x} &\equiv \alpha x + \beta y + \gamma p\\
\eta\bar{y} &\equiv \delta x + \varepsilon y + \zeta p
\end{aligned}\right\} \pmod{p^2}.$$

Pour le groupe $G^3_{p^3}$,

$$(a^p = b^p = \theta^{p^2} = 1,\ ab = ba\theta^p),$$

il faut supposer

$$x = y = \bar{x} = \bar{y} = 0,$$

de sorte que γ et ζ sont nuls $(\bmod\, p)$.

De là les isomorphismes

$$\begin{pmatrix} a & b & \theta \\ a^\alpha b^\beta \theta^{\gamma p}, & a^\delta b^\varepsilon \theta^{\zeta p} & \theta^{\alpha\varepsilon-\beta\delta} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha\varepsilon - \beta\delta \not\equiv 0$;

$$a^x b^y \theta^z$$

devient

$$a^{\alpha x+\delta y} b^{\beta x+\varepsilon y} \theta^{\left(\gamma x+\zeta y-\alpha\beta\frac{x(x-1)}{2}-\delta\varepsilon\frac{y(y-1)}{2}-\beta\delta xy\right)p+(\alpha\varepsilon-\beta\delta)z}.$$

On en déduit la transformation

$$\left.\begin{aligned} x' &\equiv \alpha x + \delta y \\ y' &\equiv \beta x + \varepsilon y \end{aligned}\right\} \pmod p,$$

$$z' \equiv \left(\gamma x + \zeta y - \alpha\beta\frac{x(x-1)}{2} - \delta\varepsilon\frac{y(y-1)}{2} - \beta\delta xy\right)p + (\alpha\varepsilon - \beta\delta)z \pmod{p^2}.$$

Pour le groupe fini continu correspondant, nous prendrons les équations de définition que voici :

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \delta y, \\ y' &= \beta x + \varepsilon y, \\ z' &= \gamma x + \zeta y - \alpha\beta\frac{x(x-1)}{2} - \delta\varepsilon\frac{y(y-1)}{2} - \beta\delta xy + (\alpha\varepsilon - \beta\delta)z, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' + \beta\delta', \\ \beta'' &= \alpha\beta' + \beta\varepsilon', \\ \delta'' &= \delta\alpha' + \varepsilon\delta', \\ \varepsilon'' &= \delta\beta' + \varepsilon\varepsilon', \\ \gamma'' &= \gamma'\alpha + \zeta'\beta - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1)\delta'\varepsilon' + \gamma(\alpha'\varepsilon'-\beta'\delta') - \alpha\beta\beta'\delta', \\ \zeta'' &= \gamma'\delta + \zeta'\varepsilon - \tfrac{1}{2}\delta(\delta-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)\delta'\varepsilon' + \zeta(\alpha'\varepsilon'-\beta'\delta') - \delta\varepsilon\beta'\delta'. \end{aligned}$$

Si, au contraire, on fait dans les congruences précédentes,

$$x = \bar{x} = 1, \qquad y = \bar{y} = 0$$

(Groupe $G_{p^4}^{4}$, $a^p = \theta$, $b^p = \theta^{p^2} = 1$, $ab = ba\theta^p$), on a

$$\alpha \equiv \eta \pmod p, \quad \delta \equiv 0 \pmod p, \quad \varepsilon \equiv 1 \pmod p,$$

d'où, en posant $a^p = \theta$, $\theta^p = \mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}^p = 1$, l'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} a & b & \theta & \mathfrak{I} \\ a^\alpha b^\beta \theta^\gamma \mathfrak{I}^\delta & b\mathfrak{I}^\lambda & \theta^\alpha \mathfrak{I}^\gamma & \mathfrak{I}^\alpha \end{pmatrix}.$$

Il transforme

$$a^x b^y \theta^z \mathfrak{I}^t \qquad \text{en} \qquad a^{\alpha x} b^{y+\beta x} \theta^{\gamma x + \alpha z} \mathfrak{I}^{\delta x + \lambda y + \gamma z + \alpha t - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}}.$$

Le groupe fini continu correspondant est défini par les équations

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x, \\ y' &= y + \beta x, \\ z' &= \gamma x + \alpha z, \\ t' &= \delta x + \lambda y + \gamma z + \alpha t - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha', \\ \beta'' &= \beta + \alpha\beta', \\ \gamma'' &= \alpha\gamma' + \gamma\alpha', \\ \delta'' &= \delta'\alpha + \lambda'\beta + \gamma'\gamma + \alpha'\delta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\alpha'\beta', \\ \lambda'' &= \lambda' + \lambda\alpha'. \end{aligned}$$

19. Soit, maintenant, pour finir,

$$a^p = 1, \quad b^p = \mathfrak{I}^u, \quad c^p = \mathfrak{I}^t, \quad bc = cba, \quad ab = ba\mathfrak{I}^r,$$
$$ac = ca\mathfrak{I}^q, \quad \mathfrak{I}^\alpha = 1.$$

Posons

$$\begin{aligned} \bar a &= a^\alpha \mathfrak{I}^\beta, \\ \bar b &= a^\gamma b^\delta c^\varepsilon \mathfrak{I}^\zeta, \\ \bar c &= a^\eta b^\theta c^\iota \mathfrak{I}^\kappa, \\ \bar{\mathfrak{I}} &= \mathfrak{I}^\lambda \end{aligned}$$

avec $\lambda\alpha(\delta\iota - \varepsilon\theta) \not\equiv 0 \pmod p$.

En exprimant que l'on a

$$\bar{a}^p = 1, \qquad \bar{b}^p = \mathfrak{z}^{\bar{u}}, \qquad \bar{c}^p = \mathfrak{z}^{\bar{t}},$$
$$\bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{b}\bar{a}, \qquad \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}\mathfrak{z}^{\bar{r}}, \qquad \bar{a}\bar{c} = \bar{c}\bar{a}\mathfrak{z}^{\bar{q}},$$

il vient

$$\begin{aligned}
\lambda\bar{u} &\equiv t\varepsilon + u\delta,\\
\lambda\bar{t} &\equiv t\iota + u\theta,\\
\alpha &\equiv \delta\iota - \theta\varepsilon,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta \equiv q\varepsilon\alpha + q\gamma\iota + q\eta\varepsilon + r(\gamma\theta - \delta\eta) - \theta q\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2}\\
- \varepsilon r\frac{\theta(\theta-1)}{2} + \delta q\frac{\iota(\iota-1)}{2} + \iota r\frac{\delta(\delta-1)}{2} + q(\alpha - \delta\iota - \theta\varepsilon),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda\bar{r} &\equiv \alpha(q\varepsilon + r\delta),\\
\lambda\bar{q} &\equiv \alpha(q\iota + r\theta),
\end{aligned}$$

tout cela (mod p).

Pour le groupe $G_{p^4}^5$

$$a^p = b^p = c^p = \mathfrak{z}^p = 1, \qquad bc = cba, \qquad ab = ba\mathfrak{z}, \qquad ac = ca,$$

faisons

$$\bar{u} = u = 0, \qquad \bar{t} = t = 0, \qquad \bar{r} = r = 1, \qquad \bar{q} = q = 0;$$

il vient

$$\theta = 0, \qquad \alpha \equiv \delta\iota, \qquad \beta \equiv \iota\frac{\delta(\delta-1)}{2} - \delta\eta, \qquad \lambda \equiv \delta^2\iota.$$

Les isomorphismes de $G_{p^4}^5$ sont, par suite, donnés par l'expression

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \mathfrak{z} \\ a^{\delta\iota}\mathfrak{z}^{\iota\frac{\delta(\delta-1)}{2} - \delta\eta} & a^\gamma b^\delta c^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta & a^\eta c^\iota \mathfrak{z}^\kappa & \mathfrak{z}^{\delta^2\iota} \end{pmatrix}.$$

Le groupe fini continu correspondant est, en changeant les notations (j'ai mis α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ à la place de $\gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \theta,\ \iota,\ \varkappa$) :

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta\eta x + \alpha y + \varepsilon z - \beta\gamma\frac{y(y-1)}{2},\\
y' &= \beta y,\\
z' &= \gamma y + \eta_1 z,\\
t' &= \eta x\frac{\beta(\beta-1)}{2} - \beta\varepsilon x + \delta y + \theta z + \beta^2\eta t\\
&\quad + \alpha\beta\frac{y(y+1)}{2} + \frac{1}{3}\beta^2\gamma y(y^2-1) - \gamma y\frac{\beta y(\beta y-1)}{2}\\
&\quad + \gamma\frac{y(y+1)}{2}\,\frac{\beta(\beta-1)}{2} - \alpha\beta y^2 - \beta\varepsilon yz + \beta^2\gamma\frac{y^2(y-1)}{2},
\end{aligned}
$$

et il donne

$$
\begin{aligned}
\beta'' &= \beta\beta',\\
\gamma'' &= \beta\gamma' + \gamma\eta_1',\\
\eta_1'' &= \eta_1\eta_1',\\
\alpha'' &= \beta\alpha' + \beta'\eta_1'\alpha + \gamma\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\beta'\gamma'\beta(\beta-1),\\
\varepsilon'' &= \varepsilon'\eta_1 + \varepsilon\beta'\eta_1',\\
\theta'' &= \tfrac{1}{2}\varepsilon\beta'\eta'(\beta'-1) - \beta'\varepsilon\varepsilon' + \theta'\eta + \beta'^2\eta_1'\theta,\\
\delta'' &= \tfrac{1}{2}\alpha\eta'\beta'(\beta'-1) - \tfrac{1}{2}\alpha\eta_1'\beta\beta'^2 - \alpha\beta'\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\alpha'\beta^2\beta' + \tfrac{1}{4}\beta\gamma\eta'\beta'(\beta'-1)\\
&\quad + \tfrac{1}{4}\beta\beta'^2\gamma'\beta(\beta-1) + \tfrac{1}{3}\beta^2\beta'^2(\beta\gamma' + \gamma\eta') - \beta\gamma\beta'\varepsilon' + \gamma\theta'\\
&\quad + \beta'^2\eta_1'\left[\delta + \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{3}\beta^2\gamma - \tfrac{1}{4}\beta\gamma(\beta-1)\right]\\
&\quad + \beta\left[\delta' + \tfrac{1}{2}\alpha'\beta' - \tfrac{1}{3}\beta'^2\gamma' - \tfrac{1}{4}\beta'\gamma'(\beta'-1)\right].
\end{aligned}
$$

Pour le groupe $G^6_{p^4}$

$$a^p = c^p = \mathfrak{z}^p = 1, \qquad b^p = \mathfrak{z}, \qquad bc = cba, \qquad ab = ba\mathfrak{z}, \qquad ac = ca$$

il faut, dans les congruences précédentes, poser

$$u = \bar{u} = 1, \qquad t = \bar{t} = 0, \qquad r = \bar{r} = 1, \qquad q = \bar{q} = 0;$$

il vient

$$\lambda \equiv \delta, \qquad \iota \equiv \frac{1}{\delta}, \qquad \theta \equiv 0, \qquad \alpha \equiv 1, \qquad \beta \equiv -\delta\eta_1 + \frac{1}{2}(\delta - 1).$$

Les isomorphismes sont donnés par l'expression

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \mathfrak{d} \\ a\,\mathfrak{d}^{-\delta\eta+\frac{1}{2}(\delta-1)} & a^{\gamma} b^{\delta} c^{\varepsilon} \mathfrak{d}^{\zeta} & a^{\eta} c^{\frac{1}{\delta}} \mathfrak{d}^{\varkappa} & \mathfrak{d}^{\delta} \end{pmatrix}.$$

Remplaçons γ, δ, ε, ζ, η, $\varkappa$, par α, β, γ, δ, ε, ζ.

On trouve, pour le groupe fini correspondant, les équations de définition que voici :

$$x' = x + \alpha y + \varepsilon z - \beta\gamma \frac{y(y-1)}{2},$$

$$y' = \beta y.$$

$$z' = \gamma y + \frac{z}{\beta},$$

$$t' = -\beta\varepsilon x + \frac{x}{2}(\beta - 1) + \delta y + \zeta z + \beta t$$
$$+ \beta^2\gamma \frac{y(y^2-1)}{3} - \frac{\beta(\beta-1)}{2}\gamma \frac{y(y-1)}{2} - \alpha\beta \frac{y(y-1)}{2},$$

qui donnent

$$\beta'' = \beta\beta',$$

$$\gamma'' = \beta\gamma' + \frac{\gamma}{\beta'},$$

$$\alpha'' = \alpha + \beta\alpha' + \gamma\varepsilon' + \beta'\gamma' \frac{\beta(\beta-1)}{2},$$

$$\varepsilon'' = \varepsilon + \frac{\varepsilon'}{\beta},$$

$$\delta'' = \frac{1}{3}\beta^2\beta'^2\left(\beta\gamma' + \frac{\gamma}{\beta'}\right) - \frac{1}{4}\beta\beta'(\beta\beta' - 1)\left(\beta\gamma' + \frac{\gamma}{\beta'}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\beta\beta'\left[\alpha + \beta\alpha' + \gamma\varepsilon' - \beta'\gamma' \frac{\beta(\beta-1)}{2}\right] - \beta'\varepsilon'\alpha - \frac{1}{2}\beta\beta'\varepsilon'$$
$$+ \frac{1}{2}\alpha(\beta' - 1) + \frac{1}{4}(\beta' - 1)\beta\gamma + \beta\delta' + \gamma\zeta' + \delta\beta' - \frac{1}{3}\beta'\beta^2\gamma$$
$$+ \frac{1}{4}\beta\beta'(\beta - 1) + \frac{1}{2}\alpha\beta\beta' - \frac{1}{3}\beta'^2\gamma'\beta + \frac{1}{4}\beta\beta'\gamma'(\beta' - 1) + \frac{1}{2}\beta\beta'\alpha',$$

$$\zeta'' = -\varepsilon\varepsilon'\beta' + \frac{1}{2}\varepsilon(\beta' - 1) + \frac{\zeta'}{\beta} + \zeta\beta'.$$

Prenons enfin le groupe $G_{p^4}^7$

$$a^p = c^p = \mathfrak{z}^p = 1, \qquad b^p = \mathfrak{z}, \qquad bc = cba, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca\mathfrak{z}.$$

Il faut, dans les congruences précédentes, faire les hypothèses suivantes :

$$u = \bar{u} = 1, \qquad t = \bar{t} = 0, \qquad r = \bar{r} = 0, \qquad q = \bar{q} = 1.$$

On trouve

$$\lambda \equiv \delta, \quad \varkappa \equiv \delta\iota, \quad \theta \equiv 0, \quad \varepsilon \equiv 0, \quad \iota^2 \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma\iota + \frac{\delta}{2}(1 - \iota).$$

Changeons $\gamma, \delta, \zeta, \eta, \iota, \varkappa$ en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$.

L'isomorphisme général a pour expression

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \mathfrak{z} \\ a^{\beta\varepsilon}\mathfrak{z}^{\alpha\varepsilon + \frac{\beta}{2}(1-\varepsilon)} & a^{\alpha} b^{\beta}\mathfrak{z}^{\gamma} & a^{\delta} c^{\varepsilon}\mathfrak{z}^{\zeta} & \mathfrak{z}^{\beta} \end{pmatrix}.$$

Il donne le groupe fini continu à 5 paramètres que voici :

$$\begin{aligned}
x' &= \beta\varepsilon x + \alpha y + \delta z, \\
y' &= \beta y, \\
z' &= \varepsilon z, \\
t' &= \left[\alpha\varepsilon + \frac{\beta}{2}(1 - \varepsilon)\right] x + \gamma y + \zeta z + \beta t - \delta\varepsilon \frac{z(z-1)}{2},
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon^2 = 1$, d'où je déduis

$$\begin{aligned}
\beta'' &= \beta\beta, \\
\varepsilon'' &= \varepsilon\varepsilon' \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = \varepsilon''^2 = 1), \\
\alpha'' &= \alpha\beta'\varepsilon' + \beta\alpha', \\
\delta'' &= \delta\beta'\varepsilon' + \varepsilon\delta', \\
\gamma'' &= \alpha\left[\alpha'\varepsilon' + \frac{\beta'}{2}(1 - \varepsilon')\right] + \beta\gamma' + \gamma\beta', \\
\zeta'' &= \delta\left[\alpha'\varepsilon' + \frac{\beta'}{2}(1 - \varepsilon')\right] + \varepsilon\zeta' + \zeta\beta' + \frac{1}{2}\delta'\varepsilon'(\varepsilon - 1).
\end{aligned}$$

CHAPITRE III.

SUR LES GROUPES D'ORDRE 2^5.

20. Plusieurs auteurs (MM. Bagnèra, Miller) se sont occupés de l'énumération des groupes d'ordre p^5. Je la considère comme acquise. Je ferai simplement quelques remarques sur les groupes obtenus.

Prenons d'abord les groupes d'ordre 32 :

a. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^8 = b^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^4,\ a\mathfrak{I} = \mathfrak{I}a,\ b\mathfrak{I} = \mathfrak{I}b),$$

a

16	opérations	d'ordre	16
8	»	»	8
4	»	»	4
3	»	»	2

Le groupe des isomorphismes cogrédients est d'ordre 4. Les isomorphismes qui l'engendrent sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b \\ a^{\lambda+8} b \end{pmatrix}; \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^{2\lambda+1} b^\mu \\ a^{2\lambda+9} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$a = \prod_{h=1}^{2} (x_{h,1}\, x_{h,2}\, \ldots\, x_{h,16}), \qquad b = \prod_{k=1}^{16} (x_{1,k}\, x_{2,9k-8}).$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\}. \qquad F_3 = \{a^2, b\}.$$

Ces 3 faisceaux d'ordre 16 ont en commun le sous-groupe conjugué de lui-même, d'ordre 8,

$$\{\mathfrak{I}\}.$$

21. *b*. Le groupe ($a^2 = \mathfrak{I}$, $b^2 = \theta$, $\mathfrak{I}^4 = \theta^2 = 1$, $ab = ba\theta$) ($\mathfrak{I}$ et θ étant des opérations conjuguées d'elles-mêmes), a

16	opérations	d'ordre	8
12	»	»	4
3	»	»	2

Les isomorphismes cogrédients sont donnés par

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} b^\lambda a^\mu \\ b^{-\lambda} a^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b^\lambda a^\mu \\ b^{\lambda+1-(-1)} a^\mu \end{pmatrix}.$$

Leur groupe est d'ordre 4.

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}\}.$$

Ils ont en commun le sous-groupe conjugué de lui-même d'ordre 8,

$$\{\mathfrak{I}, \theta\}.$$

Les opérations génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{k=1}^{8} (x_{h1} x_{h2} x_{h3} x_{h4}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1,k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2} x_{5,k} x_{6,3k-2} x_{7,k} x_{8,3k-2}).$$

22. *c*. Le groupe ($a^2 = \mathfrak{I}$, $b^2 = \mathfrak{I}^4 = \theta^2 = 1$, $ab = ba\theta$) (¹) a 16 opérations d'ordre 8, 8 d'ordre 4, 7 d'ordre 2.

(¹) Une fois pour toutes, les opérations désignées par les lettres θ, $\mathfrak{I}$, ... sont conjugués d'elles-mêmes.

Le groupe régulier correspondant est engendré par les opérations

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1}\, x_{h2} \ldots x_{h8}), \qquad \theta = \prod_{k=1}^{8} (x_{1k} x_{2k})(x_{3k} x_{4k}),$$

$$\begin{aligned} b = \ & (x_{11} x_{31})(x_{12} x_{42})(x_{13} x_{33})(x_{14} x_{44}) \\ & \times (x_{15} x_{35})(x_{16} x_{46})(x_{17} x_{47})(x_{18} x_{48})(x_{21} x_{41}) \\ & \times (x_{22} x_{32})(x_{23} x_{43})(x_{24} x_{34})(x_{25} x_{45})(x_{26} x_{36})(x_{27} x_{47})(x_{28} x_{38}). \end{aligned}$$

Les isomorphismes cogrédients sont engendrés par

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^{\alpha} b \mathfrak{I}^{\lambda} \theta^{\mu} \\ a^{\alpha} b \mathfrak{I}^{\lambda} \theta^{\mu+1} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a b^{\beta} \mathfrak{I}^{\lambda} \theta^{\mu} \\ a b^{\beta} \mathfrak{I}^{\lambda} \theta^{\mu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Leur groupe est d'ordre 4.

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Ils ont en commun le sous-groupe d'ordre 8 conjugué de lui-même

$$\{\mathfrak{I}, \theta\}.$$

23. *d.* Le groupe ($a^2 = \mathfrak{I}$, $b^2 = \theta$, $\mathfrak{I}^4 = \theta^2 = 1$, $ab = ba\mathfrak{I}^2$) a 16 opérations d'ordre 8, 6 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8}), \qquad b = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k}\, x_{2,5k-4}\, x_{3,k}\, x_{4,5k-4}).$$

Le groupe associé (groupe des isomorphismes cogrédients) est engendré par

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^{\alpha} b \mathfrak{I}^{\lambda} \theta^{\mu} \\ a^{\alpha} b \mathfrak{I}^{\lambda+2} \theta^{\mu} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a b^{\beta} \mathfrak{I}^{\lambda} \theta^{\mu} \\ a b^{\beta} \mathfrak{I}^{\lambda+2} \theta^{\mu} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16

$$F_1 = \{a, \theta\} \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}\}.$$

Ils ont en commun le sous-groupe conjugué de lui-même d'ordre 8,

$$\{\mathfrak{S}, \theta\}.$$

24. *e*. Le groupe $(a^2 = \mathfrak{S},\ b^4 = \mathfrak{S}^2,\ \mathfrak{S}^4 = 1,\ ba = ab^3\mathfrak{S}^2)$ a 24 opérations d'ordre 8, 4 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8})$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1k}\, x_{2,7k-6}\, x_{3,k}\, x_{4,7k-6}\, x_{1,k+4}\, x_{2,7k-2}\, x_{3,k+4}\, x_{4,7k-2}).$$

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\begin{aligned}
\bar{a} = {} & (b, b^3\mathfrak{S}^2)\,(b^3, b\mathfrak{S}^2)\,(ab, ab^3\mathfrak{S}^2)\,(ab^3, ab\mathfrak{S}^2) \\
& \times (b^2, b^2\mathfrak{S}^2)\,(ab^2, ab^2\mathfrak{S}^2)\,(b\mathfrak{S}, b^3\mathfrak{S}^3)\,(b^3\mathfrak{S}, b\mathfrak{S}^3) \\
& \times (ab\mathfrak{S}, ab^3\mathfrak{S}^3)\,(ab^3\mathfrak{S}, ab\mathfrak{S}^3)\,(b^2\mathfrak{S}, b^2\mathfrak{S}^3)\,(ab^2\mathfrak{S}, ab^2\mathfrak{S}^3), \\
\bar{b} = {} & (a, ab^2, a\mathfrak{S}^2, ab^2\mathfrak{S}^2)\,(ab, ab^3, ab\mathfrak{S}^2, ab^3\mathfrak{S}^2) \\
& \times (a\mathfrak{S}, ab^2\mathfrak{S}, a\mathfrak{S}^3, ab^2\mathfrak{S}^3)\,(ab\mathfrak{S}, ab^3\mathfrak{S}, ab\mathfrak{S}^3, ab^3\mathfrak{S}^3).
\end{aligned}$$

Il y a 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\}, \qquad F_3 = \{ab^2\}, \qquad F_4 = \{ab^3\},$$

et un faisceau d'ordre 16

$$F = \{b, \mathfrak{S}\}.$$

25. *f*. Le groupe $(a^2 = \mathfrak{S},\ b^4 = \theta,\ \mathfrak{S}^2 = \theta^2 = 1,\ ba = ab^3\theta)$ a 8 opérations d'ordre 8, 20 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\begin{aligned}
\bar{a} = {} & (b, b^3\theta)\,(b^2, b^2\theta)\,(ab, ab^3\theta)\,(ab^2, ab^2\theta) \\
& \times (ab^3, ab\theta)\,(b^3, b\theta)\,(b\mathfrak{S}, b^3\theta\mathfrak{S})\,(b^2\mathfrak{S}, b^2\mathfrak{S}\theta) \\
& \times (ab\mathfrak{S}, ab^3\mathfrak{S}\theta)\,(ab^2\mathfrak{S}, ab^2\mathfrak{S}\theta)\,(ab^3\mathfrak{S}, ab\mathfrak{S}\theta)\,(b^3\mathfrak{S}, b\mathfrak{S}\theta), \\
\bar{b} = {} & (a, ab^2, a\theta, ab^2\theta)\,(ab, ab^3, ab\theta, ab^3\theta) \\
& \times (a\mathfrak{S}, ab^2\mathfrak{S}, a\mathfrak{S}\theta, ab^2\mathfrak{S}\theta)\,(ab\mathfrak{S}, ab^3\mathfrak{S}, ab\mathfrak{S}\theta, ab^3\mathfrak{S}\theta).
\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe associé sont

$$b = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \dots x_{h8}), \qquad a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k}\, x_{2,7k-6}\, x_{3,k}\, x_{4,7k-6}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{b, \mathfrak{J}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F_3 = \{ab^2, \theta\}, \qquad F_4 = \{ab^3, \theta\}.$$

26. *g.* Le groupe $(a^2 = \mathfrak{J},\ b^4 = \theta,\ \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1,\ ba = ab^3)$ a 8 opérations d'ordre 8, 20 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Son groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{a} = {} & (b, b^3)(b^2, b^2\theta)(ab, ab^3)(ab^2, ab^2\theta) \\ & \times (b\theta, b^3\theta)(ab\theta, ab^3\theta)(b\mathfrak{J}, b^3\mathfrak{J})(b^2\mathfrak{J}, b^2\mathfrak{J}\theta) \\ & \times (ab\mathfrak{J}, ab^3\mathfrak{J})(ab^2\mathfrak{J}, ab^2\mathfrak{J}\theta)(b\mathfrak{J}\theta, b^3\mathfrak{J}\theta)(ab\mathfrak{J}\theta, ab^3\mathfrak{J}\theta), \\ \bar{b} = {} & (a, ab^2\theta, a\theta, ab^2)(ab, ab^3\theta, ab\theta, ab^3) \\ & \times (a\mathfrak{J}, ab^2\theta\mathfrak{J}, a\theta\mathfrak{J}, ab^2\mathfrak{J})(ba\mathfrak{J}, ab^3\theta\mathfrak{J}, ab\theta\mathfrak{J}, ab^3\mathfrak{J}). \end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \dots x_{h8}), \qquad a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k}\, x_{2,3k-2}\, x_{3,k}\, x_{4,3k-2}).$$

On a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{b, \mathfrak{J}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_\alpha = \{ab^\alpha, \theta\} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

27. *h.* Le groupe

$$a^2 = \mathfrak{J}, \qquad b^2 = \mathfrak{J}', \qquad \mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}'^2 = \theta^2 = 1, \qquad ab = ba\theta$$

a 24 opérations d'ordre 4 et 7 d'ordre 2.

On prendra pour les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$a = \prod_{h=1}^{8} (x_{h1} x_{h2} x_{h3} x_{h4}),$$

$$\begin{aligned} b = {} & (x_{11} x_{21} x_{31} x_{41})(x_{12} x_{51} x_{32} x_{61})(x_{22} x_{74} x_{42} x_{84})(x_{52} x_{71} x_{62} x_{81}) \\ & \times (x_{13} x_{23} x_{33} x_{43})(x_{24} x_{53} x_{34} x_{63})(x_{24} x_{72} x_{44} x_{82})(x_{54} x_{73} x_{64} x_{83}). \end{aligned}$$

Le groupe associé est d'ordre 4. Il est engendré par les isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{a} = {} & (b,\ b\theta)(ab,\ ab\theta)(b\mathfrak{J},\ b\mathfrak{J}\theta)(ab\mathfrak{J},\ ab\mathfrak{J}\theta) \\ & \times (b\mathfrak{J}',\ b\theta\mathfrak{J}')(ab\mathfrak{J}',\ ab\mathfrak{J}'\theta)(b\mathfrak{J}\mathfrak{J}',\ b\mathfrak{J}\mathfrak{J}'\theta)(ab\mathfrak{J}\mathfrak{J}',\ ab\mathfrak{J}\mathfrak{J}'\theta), \\ \bar{b} = {} & (a,\ a\theta)(ab,\ ab\theta)(a\mathfrak{J},\ a\mathfrak{J}\theta)(ab\mathfrak{J},\ ab\mathfrak{J}\theta) \\ & \times (a\mathfrak{J}',\ a\mathfrak{J}'\theta)(ab\mathfrak{J}',\ ab\mathfrak{J}'\theta)(a\mathfrak{J}\mathfrak{J}',\ a\mathfrak{J}\mathfrak{J}'\theta)(ab\mathfrak{J}\mathfrak{J}',\ ab\mathfrak{J}\theta\mathfrak{J}'). \end{aligned}$$

Il y a trois faisceaux

$$F_1 = \{a,\ \mathfrak{J}',\ \theta\}, \qquad F_2 = \{b,\ \mathfrak{J},\ \theta\}, \qquad F_3 = \{ab,\ \mathfrak{J},\ \mathfrak{J}'\}.$$

28. *i.* Le groupe

$$a^2 = \mathfrak{J}, \quad b^2 = c^2 = \mathfrak{J}^4 = 1, \quad ac = ca\mathfrak{J}^2, \quad bc = cb\mathfrak{J}^2, \quad ab = bac\mathfrak{J}^3$$

a 8 opérations d'ordre 8, 16 d'ordre 4, 7 d'ordre 2.

Le groupe associé est d'ordre 8. Il est engendré par

$$\begin{aligned} a = {} & (b,\ bc\mathfrak{J})(ab,\ abc\mathfrak{J})(c,\ c\mathfrak{J}^2)(ac,\ ac\mathfrak{J}^2) \\ & \times (b\mathfrak{J}^2,\ bc\mathfrak{J}^3)(ab\mathfrak{J}^2,\ abc\mathfrak{J}^3)(b\mathfrak{J},\ bc\mathfrak{J}^2) \\ & \times (ab\mathfrak{J},\ abc\mathfrak{J}^2)(c\mathfrak{J},\ c\mathfrak{J}^3)(ac\mathfrak{J},\ ac\mathfrak{J}^3)(b\mathfrak{J}^3\, bc)(ab\mathfrak{J}^3,\ abc), \\ \bar{b} = {} & (a,\ ac\mathfrak{J}^3)(a\mathfrak{J},\ ac)(a\mathfrak{J}^2,\ ac\mathfrak{J})(a\mathfrak{J}^3,\ ac\mathfrak{J}^2) \\ & \times (c,\ c\mathfrak{J}^2)(c\mathfrak{J},\ c\mathfrak{J}^3)(ab,\ abc\mathfrak{J})(ab\mathfrak{J},\ abc\mathfrak{J}^2) \\ & \times (ab\mathfrak{J}^2,\ abc\mathfrak{J}^3)(ab\mathfrak{J}^3,\ abc)(bc,\ bc\mathfrak{J}^2)(bc\mathfrak{J},\ bc\mathfrak{J}^3), \\ \bar{c} = {} & (a,\ a\mathfrak{J}^2)(a\mathfrak{J},\ a\mathfrak{J}^3)(b,\ b\mathfrak{J}^2)(b\mathfrak{J},\ b\mathfrak{J}^3) \\ & \times (ac,\ ac\mathfrak{J}^2)(ac\mathfrak{J},\ ac\mathfrak{J}^3)(bc,\ bc\mathfrak{J}^2)(bc\mathfrak{J},\ bc\mathfrak{J}^3). \end{aligned}$$

Les faisceaux sont

$$\{a\}, \quad \{ac\}, \quad \{b,\ \mathfrak{J}\}, \quad \{bc,\ \mathfrak{J}\}, \quad \{ab,\ \mathfrak{J}\}.$$

Voici les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16),$$
$$\times (17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 9)(2, 28)(3, 11)(4, 30)(5, 13)(6, 32)(7, 15)(8, 26)$$
$$\times (10, 24)(12, 18)(14, 20)(16, 22)(17, 25)(19, 27)(21, 29)(23, 31),$$

$$c = (1, 17)(2, 22)(3, 19)(4, 24)(5, 21)(6, 18)(7, 23)(8, 20)$$
$$\times (9, 29)(10, 26)(11, 31)(12, 28)(13, 25)(14, 30)(15, 27)(16, 32).$$

29. *j*. Le groupe

$$a^2 = \mathfrak{J}, \qquad b^4 = \theta, \qquad ba = ab^3\mathfrak{J}, \qquad \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1$$

a 8 opérations d'ordre 8, 20 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, d'ordre 8, est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = (b, b^3\mathfrak{J})(b^2, b^2\theta)(ab, ab^3\mathfrak{J})(ab^2, ab^2\theta)$$
$$\times (b\theta, b^3\mathfrak{J}\theta)(b^2\mathfrak{J}, b^2\mathfrak{J}\theta)(ab\theta, ab^3\mathfrak{J}\theta)(ab^2\mathfrak{J}, ab^2\mathfrak{J}\theta),$$

$$\bar{b} = (a, ab^2\mathfrak{J}\theta, a\theta, ab^2\mathfrak{J})(ab, ab^3\mathfrak{J}\theta, ab\theta, ab^3\mathfrak{J})$$
$$\times (ab^2, a\mathfrak{J}, ab^2\theta, a\mathfrak{J}\theta)(ab^3, ab\mathfrak{J}, ab^3\theta, ab\mathfrak{J}\theta).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{8} (x_{h1} \ldots x_{h8}),$$

$$a = (x_{11}x_{31}x_{21}x_{41})(x_{12}x_{44}x_{22}x_{34})(x_{13}x_{37}x_{23}x_{47})(x_{14}x_{42}x_{24}x_{32})$$
$$\times (x_{15}x_{35}x_{25}x_{45})(x_{16}x_{48}x_{26}x_{38})(x_{17}x_{33}x_{27}x_{43})(x_{18}x_{46}x_{28}x_{36}).$$

Enfin voici les faisceaux :

$$F\{b, \mathfrak{J}\} \qquad \text{(ordre 16)},$$

puis 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \mathfrak{J}\}, \qquad F_3 = \{ab^2, \theta\}, \qquad F_4 = \{ab^3, \mathfrak{J}\}.$$

30. *k*. Le groupe

$$(a^4 = b^2 = \theta,\ c^2 = \theta^2 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = bac)$$

a 16 opérations d'ordre 8, 12 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, qui est d'ordre 16, est engendré par les isomorphismes

$$\begin{aligned}
\bar{a} = {} & (b, bc, b\theta, bc\theta)(c, c\theta)(ab, abc, ab\theta, abc\theta) \\
& \times (ac, ac\theta)(a^2 b, a^2 bc, a^2 b\theta, a^2 bc\theta)(a^2 c, a^2 c\theta) \\
& \times (a^3 b, a^3 bc, a^2 b\theta, a^3 bc\theta)(a^3 c, a^3 c\theta), \\
\bar{b} = {} & (a, ac)(a^2, a^2\theta)(a^3, a^3 c\theta)(ab, abc)(a^2 b, a^2 b\theta) \\
& \times (a^3 b, a^3 bc\theta)(a^2 c, a^2 c\theta)(a^2 bc, a^2 bc\theta)(a\theta, ac\theta)(ab\theta, abc\theta), \\
\bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(ab, ab\theta)(a^3 b, a^3 b\theta) \\
& \times (ac, ac\theta)(a^3 c, a^3 c\theta)(abc, abc\theta)(a^3 bc, a^3 bc\theta).
\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8})$$

et

$$\begin{aligned}
b' = ab = {} & (x_{11} x_{21} x_{31} x_{41} x_{15} x_{25} x_{35} x_{45})(x_{12} x_{48} x_{36} x_{28} x_{16} x_{44} x_{32} x_{24}) \\
& \times (x_{13} x_{27} x_{33} x_{47} x_{17} x_{23} x_{37} x_{43})(x_{14} x_{46} x_{38} x_{26} x_{18} x_{42} x_{34} x_{22}).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{gathered}
ab' = b'^3 a^7, \qquad a^2 b' = b' a^6, \qquad a^3 b' = b'^3 a^5, \\
a^5 b' = b'^3 a^3, \qquad a^6 b' = b' a^2, \qquad a^7 b' = b'^3 a, \\
ab'^2 = b'^2 a^5, \qquad a^3 b'^2 = b'^2 a^7, \qquad a^5 b'^2 = b'^2 a, \qquad a^7 b'^2 = b'^2 a^3, \\
ab'^3 = b' a^7, \qquad a^2 b'^3 = b'^3 a^6, \qquad a^3 b'^3 = b' a^5, \\
a^5 b'^3 = b' a^3, \qquad a^6 b'^3 = b'^3 a^2, \qquad a^7 b'^3 = b' a.
\end{gathered}$$

Il y a six faisceaux :

$$\begin{aligned}
& 1, a, a^2, a^3, \theta, a\theta, a^2\theta, a^3\theta), && F_4 = (1, ab, a^2 c\theta, a^3 bc, \theta, ab\theta, a^2 c, a^3 bc\theta), \\
& 1, b, \theta, b\theta, c, bc, c\theta, bc\theta), && F_5 = (1, a^3 b, a^2 c\theta, abc\theta, \theta, a^3 b\theta, a^2 c, abc), \\
& 1, a^2 b, \theta, a^2 b\theta, c, a^2 bc, c\theta, a^2 bc\theta), && F_6 = (1, ac, a^2\theta, a^3 c\theta, \theta, ac\theta, a^2, a^3 c).
\end{aligned}$$

31. *l*. Le groupe

$$(a^4 = \theta,\ b^2 = c^2 = \theta^2 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = bac)$$

a 16 opérations d'ordre 8, 4 d'ordre 4, 9 d'ordre 2.

Le groupe associé est d'ordre 16, les isomorphismes qui l'engendrent sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, bc, b\theta, bc\theta)(ab, abc, ab\theta, abc\theta)(a^2b, a^2bc, a^2b\theta, a^2bc\theta)\\ & \times(a^3b, a^3bc, a^3b\theta, a^3bc\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^3c, a^3c\theta),\\ \bar{b} = {} & (a, ac)(a^2, a^2\theta)(a^3, a^3c\theta)(ab, abc)(a^2b, a^2b\theta)\\ & \times(a^3b, a^3bc\theta)(a\theta, ac\theta)(a^2c, a^2c\theta)(ab\theta, abc\theta)(a^2bc, a^2bc\theta),\\ \bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(ab, ab\theta)(a^3b, a^3b\theta)\\ & \times(ac, ac\theta)(a^3c, a^3c\theta)(abc, abc\theta)(a^3bc, a^3bc\theta).\end{aligned}$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$a = \prod_{h=1}^{4}(x_{h1}\ldots x_{h8}),$$

$$\begin{aligned}b' = ab = {} & (x_{11}x_{21}x_{31}x_{41}x_{15}x_{25}x_{35}x_{45})(x_{12}x_{44}x_{36}x_{24}x_{16}x_{48}x_{32}x_{28})\\ & \times(x_{13}x_{27}x_{33}x_{47}x_{17}x_{23}x_{37}x_{43})(x_{14}x_{42}x_{38}x_{22}x_{18}x_{46}x_{34}x_{26}).\end{aligned}$$

Les faisceaux sont :

$$F_1 = \{a\},\qquad F_2 = \{b'\} = (1, ab, a^2c, a^3bc\theta, \theta, ab\theta, a^2c\theta, a^3bc),$$
$$F_3 = \{a^3b'\} = (1, a^3b, a^2c, abc, \theta, a^3b\theta, a^2c\theta, abc\theta),$$
$$F_4 = \{ab'^2\},\qquad F'_1 = \{a^2, b'^2\},\qquad F'_2 = \{ab', a^3b'^3, a^4\},$$
$$F'_3 = \{a^3b', ab'^3, a^4\}.$$

32. *m*. Le groupe

$$(a^4 = 1,\ b^2 = \theta,\ c^2 = \theta^2 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = bac)$$

a 20 opérations d'ordre 4, 11 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé, lequel est d'ordre 16, sont :

$$\bar{a} = (b, bc, b\theta, bc\theta)(ab, abc, ab\theta, abc\theta)(a^2b, a^2bc, a^2b\theta, a^2bc\theta) \times (a^3b, a^3bc, a^3b\theta, a^3bc\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^3c, a^3c\theta),$$

$$\bar{b} = (a, ac)(a\theta, ac\theta)(a^2, a^2\theta)(a^3, a^3c\theta)(ab, abc) \times (ab\theta, abc\theta)(a^2b, a^2b\theta)(a^3b, a^3bc\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^2bc, a^2bc\theta).$$

$$\bar{c} = (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(ab, ab\theta)(a^3b, a^3b\theta) \times (ac, ac\theta)(a^3c, a^3c\theta)(abc, abc\theta)(a^3bc, a^3bc\theta).$$

Le groupe régulier est engendré par les substitutions

$$a = (x_{11}x_{31}x_{51}x_{71})(x_{12}x_{42}x_{54}x_{84})(x_{13}x_{33}x_{53}x_{73})(x_{14}x_{44}x_{52}x_{82}) \times (x_{21}x_{43}x_{61}x_{83})(x_{22}x_{34}x_{64}x_{72})(x_{23}x_{41}x_{63}x_{81})(x_{24}x_{32}x_{62}x_{74}),$$

$$b = \prod_{h=1}^{8}(x_{h1}x_{h2}x_{h3}x_{h4}), \qquad c = \prod_{h=1}^{4}\prod_{k=1}^{4}(x_{1+2(h-1),k}\,x_{2h,k}).$$

Voici les faisceaux :

$$\begin{aligned}
F_1 &= (1, a, a^2, a^3, \theta, a\theta, a^2\theta, a^3\theta),\\
F_2 &= (1, a^2, c, a^2c, \theta, a^2\theta, c\theta, a^2c\theta),\\
F_3 &= (1, ab, a^2c\theta, a^3bc, \theta, ab\theta, a^2c, a^3bc\theta),\\
F_4 &= (1, a^2b, c, a^2bc, \theta, a^2b\theta, c\theta, a^2bc\theta),\\
F_5 &= (1, a^3b, a^2c, abc, \theta, a^3b\theta, a^2c\theta, abc\theta),\\
F_6 &= (1, ac, a^2\theta, a^3c\theta, \theta, ac\theta, a^2, a^3c),\\
F_7 &= (1, b, \theta, b\theta, c, bc, c\theta, bc\theta).
\end{aligned}$$

33. *n*. Le groupe

$$(\mathfrak{I}^8 = b^2 = c^2 = 1, \quad bc = cb\mathfrak{I}^4)$$

a

16	opérations	d'ordre	8,
8	»	»	4,
7	»	»	2.

Posons

$$\mathfrak{I}^4 = \theta.$$

Le groupe associé est d'ordre 4 ; il est engendré par les

2 isomorphismes

$$\bar{b} = (c, c\theta)(bc, bc\theta)(c\mathfrak{J}, c\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta)$$
$$\times (c\mathfrak{J}^2, c\mathfrak{J}^2\theta)(bc\mathfrak{J}^2, bc\mathfrak{J}^2\theta)(c\mathfrak{J}^3, c\mathfrak{J}^3\theta)(bc\mathfrak{J}^3, bc\mathfrak{J}^3\theta) \quad (\theta = \mathfrak{J}^4),$$

$$\bar{c} = (b, b\theta)(bc, bc\theta)(b\mathfrak{J}, b\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta)$$
$$\times (b\mathfrak{J}^2, b\mathfrak{J}^2\theta)(bc\mathfrak{J}^2, bc\mathfrak{J}^2\theta)(b\mathfrak{J}^3, b\mathfrak{J}^3\theta)(bc\mathfrak{J}^2, bc\mathfrak{J}^3\theta).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = b\mathfrak{J} = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8}),$$

$$b' = \mathfrak{J} = (x_{11}x_{21}x_{13}x_{23}x_{15}x_{25}x_{17}x_{27})(x_{12}x_{22}x_{14}x_{24}x_{16}x_{26}x_{18}x_{28})$$
$$\times (x_{13}x_{41}x_{33}x_{43}x_{35}x_{45}x_{37}x_{47})(x_{32}x_{42}x_{34}x_{44}x_{36}x_{46}x_{38}x_{48}),$$

$$c = (x_{11}x_{31})(x_{12}x_{36})(x_{13}x_{33})(x_{14}x_{38})$$
$$\times (x_{15}x_{35})(x_{16}x_{32})(x_{17}x_{37})(x_{18}x_{34})(x_{21}x_{41})$$
$$\times (x_{22}x_{46})(x_{23}x_{43})(x_{24}x_{48})(x_{25}x_{45})(x_{26}x_{42})(x_{27}x_{47})(x_{18}x_{44}).$$

Les faisceaux sont :

$$F_1 = \{b, \mathfrak{J}\}, \qquad F_2 = \{c, \mathfrak{J}\}, \qquad F_3 = \{bc, \mathfrak{J}\}.$$

34. *o*. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{J},\ b^2 = \theta,\ c^2 = \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba,\ ac = ca\theta,\ bc = cb)$$

a 24 opérations d'ordre 4 et 7 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (c, c\theta)(ac, ac\theta)(bc, bc\theta)(abc, abc\theta)$$
$$\times (c\mathfrak{J}, c\mathfrak{J}\theta)(ac\mathfrak{J}, ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J}, abc\mathfrak{J}\theta),$$

$$\bar{c} = (a, a\theta)(ab, ab\theta)(ac, ac\theta)(abc, abc\theta)$$
$$\times (a\mathfrak{J}, a\mathfrak{J}\theta)(ab\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}\theta)(ac\mathfrak{J}, ac\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J}, abc\mathfrak{J}\theta).$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les opérations

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1,k}x_{2,3k-2}x_{3,k}x_{4,3k-2})(x_{5,k}x_{6,3k-2}x_{7k}x_{8,3k-2}),$$

$$\begin{aligned} b = {} & (x_{11}x_{52}x_{13}x_{54})(x_{12}x_{53}x_{14}x_{51})(x_{21}x_{64}x_{23}x_{62})(x_{22}x_{61}x_{24}x_{63}) \\ & \times (x_{31}x_{72}x_{33}x_{74})(x_{32}x_{73}x_{34}x_{71})(x_{41}x_{84}x_{43}x_{82})(x_{42}x_{81}x_{44}x_{83}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & (x_{11}x_{51})(x_{12}x_{52})(x_{13}x_{53})(x_{14}x_{54}) \\ & \times (x_{21}x_{63})(x_{22}x_{64})(x_{23}x_{61})(x_{24}x_{62})(x_{31}x_{71})(x_{32}x_{72}) \\ & \times (x_{33}x_{73})(x_{34}x_{74})(x_{41}x_{83})(x_{42}x_{84})(x_{43}x_{81})(x_{44}x_{82}). \end{aligned}$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16 :

$$\begin{aligned} F_1 &= (1, b, \theta, b\theta, c, bc, c\theta, bc\theta, \mathfrak{I}, b\mathfrak{I}, \mathfrak{I}\theta, b\mathfrak{I}\theta, c\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}\theta, bc\mathfrak{I}\theta), \\ F_2 &= (1, a, \mathfrak{I}, a\mathfrak{I}, b, ab, b\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}, \theta, a\theta, \mathfrak{I}\theta, a\mathfrak{I}\theta, b\theta, ab\theta, b\mathfrak{I}\theta, ab\mathfrak{I}\theta), \\ F_3 &= (1, ac, \mathfrak{I}\theta, ac\mathfrak{I}\theta, b, abc, b\mathfrak{I}\theta, abc\mathfrak{I}\theta, \theta, ac\theta, \mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}, b\theta, abc\theta, b\mathfrak{I}). \end{aligned}$$

35. *p.* Le groupe

$$\begin{pmatrix} a^2 = \mathfrak{I}, \quad b^2 = \theta, \quad c^2 = \mathfrak{I}\theta, \quad \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1, \\ ab = ba\theta, \quad ac = ca\mathfrak{I}\theta, \quad bc = cb\mathfrak{I}\theta \end{pmatrix}$$

a 28 opérations d'ordre 4 et 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, qui est d'ordre 8, est engendré par les 3 isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{a} = {} & (b, b\theta)(ab, ab\theta)(c, c\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (ac, ac\mathfrak{I}\theta)(bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I})(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(c\mathfrak{I}, c\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\theta)(bc\theta, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b} = {} & (a, a\theta)(ab, ab\theta)(c, c\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (ac, ac\mathfrak{I})(bc, bc\mathfrak{I}\theta)(abc, abc\mathfrak{I})(a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(c\mathfrak{I}, c\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c} = {} & (a, a\mathfrak{I}\theta)(b, b\mathfrak{I}\theta)(ac, ac\mathfrak{I}\theta)(bc, bc\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (a\mathfrak{I}, a\theta)(b\mathfrak{I}, b\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\theta). \end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier corres-

pondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8)$$
$$\times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$

$$c = (1, 17, 11, 27)(2, 28, 12, 18)(3, 19, 9, 25)(4, 26, 10, 20)$$
$$\times (5, 31, 15, 21)(6, 24, 16, 30)(7, 29, 13, 23)(8, 22, 14, 32).$$

Voici les faisceaux

$$F_1 = [1, a, \mathfrak{J}, a\mathfrak{J}, \theta, a\theta, \mathfrak{J}\theta, a\mathfrak{J}\theta],$$
$$E_2 = [1, b, \theta, b\theta, \mathfrak{J}, b\mathfrak{J}, \theta\mathfrak{J}, b\theta\mathfrak{J}],$$
$$F_3 = \left[\begin{array}{c} 1, c, \mathfrak{J}\theta, c\mathfrak{J}\theta, \mathfrak{J}, c\mathfrak{J}, \theta, c\theta, ab, abc, ab\mathfrak{J}\theta, abc\mathfrak{J}\theta, \\ ab\mathfrak{J}, abc\mathfrak{J}, ab\theta, abc\theta \end{array}\right],$$
$$F_4 = [1, ac, \mathfrak{J}, ac\mathfrak{J}, \theta, ac\theta, \mathfrak{J}\theta, ac\mathfrak{J}\theta],$$
$$F_5 = [1, bc, \theta, bc\theta, \mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}, \mathfrak{J}\theta, bc\mathfrak{J}\theta].$$

36. *q*. Le groupe

$$(a^2 = c^2 = \mathfrak{J},\ b^2 = \theta,\ \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca\mathfrak{J},\ bc = cb)$$

a

28 opérations d'ordre 4,
3 » » 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (b, b\theta)(ab, ab\theta)(c, c\mathfrak{J})$$
$$\times (bc, bc\mathfrak{J}\theta)(abc, abc\mathfrak{J}\theta)(ac, ac\mathfrak{J})(b\mathfrak{J}, b\mathfrak{J}\theta)$$
$$\times (ab\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}\theta)(c\theta, c\mathfrak{J}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\theta)(abc\mathfrak{J}, abc\theta),$$

$$\bar{b} = (a, a\theta)(ab, ab\theta)(ac, ac\theta)(abc, abc\theta)$$
$$\times (a\mathfrak{J}, a\mathfrak{J}\theta)(ab\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}\theta)(ac\mathfrak{J}, ac\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J}, abc\mathfrak{J}\theta),$$

$$\bar{c} = (a, a\mathfrak{J})(ab, ab\mathfrak{J})(ac, ac\mathfrak{J})(abc, abc\mathfrak{J})$$
$$\times (a\theta, a\mathfrak{J}\theta)(ab\theta, ab\mathfrak{J}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J}, abc\mathfrak{J}\theta).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier corres-

pondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16) \times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8) \times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$

$$c = (1, 17, 3, 19)(2, 20, 4, 18)(5, 21, 7, 23)(6, 24, 8, 22) \times (9, 25, 11, 27)(10, 28, 12, 26)(13, 29, 15, 31)(14, 32, 16, 30).$$

Voici les faisceaux

$$F_1 = \{a, \mathfrak{I}, \theta\}, \quad F_2 = \{b, \theta, c, \mathfrak{I}\}, \quad F_3 = \{ab, \mathfrak{I}, \theta\},$$
$$F_4 = \{ac, \mathfrak{I}, \theta\}, \quad F_5 = \{abc, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

37. *r*. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ c^2 = \mathfrak{I}\theta,\ \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\ bc = cb)$$

a 28 opérations d'ordre 4 et 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, d'ordre 4, est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = (b, b\theta)(ab, ab\theta)(bc, bc\theta)(abc, abc\theta) \times (b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}\theta),$$

$$\bar{b} = (a, a\theta)(ab, ab\theta)(ac, ac\theta)(abc, abc\theta) \times (a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}\theta).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16) \times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8) \times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$

$$c = (1, 17, 11, 27)(2, 18, 12, 28)(3, 19, 9, 25)(4, 20, 10, 26) \times (5, 21, 15, 31)(6, 22, 16, 32)(7, 23, 13, 29)(8, 24, 14, 30).$$

Voici les faisceaux

$$F_1 = \{a, \mathfrak{I}, c, \theta\}, \quad F_2 = \{b, c\}, \quad F_3 = \{ab, c\}.$$

38. *s*. Le groupe

$$(a^2=\mathfrak{J},\ b^2=\theta,\ c^2=\mathfrak{J}^2=\theta^2=1,\ ab=ba\theta,\ ac=ca\mathfrak{J}\theta,\ bc=cb\mathfrak{J}\theta)$$

a 24 opérations d'ordre 4, et 7 opérations d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a}= {} & (b,\ b\theta)(ab,\ ab\theta)(c,\ c\mathfrak{J}\theta)\\ & \times(ac,\ ac\mathfrak{J}\theta)(bc,\ bc\mathfrak{J})(abc,\ abc\mathfrak{J})(b\mathfrak{J},\ b\mathfrak{J}\theta)\\ & \times(ab\mathfrak{J},\ ab\mathfrak{J}\theta)(c\mathfrak{J},\ c\theta)(ac\mathfrak{J},\ ac\theta)(bc\theta,\ bc\mathfrak{J}\theta)(abc\theta,\ abc\theta\mathfrak{J}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b}= {} & (a,\ a\theta)(ab,\ ab\theta)(c,\ c\mathfrak{J}\theta)\\ & \times(ac,\ ac\mathfrak{J})(bc,\ bc\mathfrak{J}\theta)(abc,\ abc\mathfrak{J})(a\mathfrak{J},\ a\mathfrak{J}\theta)\\ & \times(ab\mathfrak{J},\ ab\mathfrak{J}\theta)(c\mathfrak{J},\ c\theta)(ac\theta,\ ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J},\ bc\theta)(abc\theta,\ abc\mathfrak{J}\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}= {} & (a,\ a\mathfrak{J}\theta)(b,\ b\mathfrak{J}\theta)(ac,\ ac\mathfrak{J}\theta)\\ & \times(bc,\ bc\mathfrak{J}\theta)(a\mathfrak{J},\ a\theta)(b\mathfrak{J},\ b\theta)(ac\mathfrak{J},\ ac\theta)(bc\mathfrak{J},\ bc\theta).\end{aligned}$$

Voici les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$\begin{aligned}a= {} & (1,2,3,4)(5,6,7,8)\\ & \times(9,10,11,12)(13,14,15,16)(17,18,19,20)\\ & \times(21,22,23,24)(25,26,27,28)(29,30,31,32),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b= {} & (1,5,9,13)(2,14,10,6)\\ & \times(3,7,11,15)(4,16,12,8)(17,21,25,29)\\ & \times(18,30,26,22)(19,23,27,31)(20,32,28,24),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c= {} & (1,17)(2,28)(3,19)(4,26)\\ & \times(5,31)(6,22)(7,29)(8,24)(9,25)\\ & \times(10,20)(11,27)(12,18)(13,23)(14,30)(15,21)(16,32).\end{aligned}$$

Les faisceaux sont

$$F_1=\{a,\ \theta\},\qquad F_2=\{b,\ \mathfrak{J}\},\qquad F_3=\{ac,\ \mathfrak{J}\},$$
$$F_4=\{bc,\ \theta\},\qquad F_5=\{c,\ ab,\ \theta\}.$$

39. *t*. Le groupe $(a^4=\mathfrak{J},\ b^2=\mathfrak{J}^2=\theta^2=1,\ ab=ba^3\theta)$ a 8 opérations d'ordre 8, 12 d'ordre 4, 11 d'ordre 2.

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b,\ a^2 b\theta,\ b\mathfrak{J},\ a^2 b\mathfrak{J}\theta)\,(ab,\ a^3 b\theta,\ ab\mathfrak{J},\ a^3 b\mathfrak{J}\theta)\\ & \times (b\theta,\ a^2 b,\ b\mathfrak{J}\theta,\ a^2 b\mathfrak{J})\,(ab\theta,\ a^3 b,\ ab\mathfrak{J}\theta,\ a^3 b\mathfrak{J}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a,\ a^3\theta)\,(a^2,\ a^2\mathfrak{J})\,(ab,\ a^3 b\theta)\,(a^2 b,\ a^2 b\mathfrak{J})\\ & \times (a\mathfrak{J},\ a^3\mathfrak{J}\theta)\,(a^2\theta,\ a^2\mathfrak{J}\theta)\,(ab\mathfrak{J},\ a^3 b\mathfrak{J}\theta)\,(a^2 b\theta,\ a^2 b\mathfrak{J}\theta).\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe associé sont

$$\begin{aligned}a = {} & (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)\,(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)\\ & \times (17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)\,(25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32),\\ b = {} & (1, 9, 17, 25)\,(2, 28, 18, 12)\,(3, 15, 19, 31)\,(4, 26, 20, 10)\\ & \times (5, 13, 21, 29)\,(6, 32, 22, 16)\,(7, 11, 23, 27)\,(8, 30, 24, 14).\end{aligned}$$

Voici les faisceaux

$$F = \{a, \theta\}, \qquad F_1 = \{ab, \mathfrak{J}, \theta\},$$
$$F_2 = \{b, \mathfrak{J}, \theta\}, \qquad F_3 = \{a^2 b, \mathfrak{J}, \theta\}.$$

40. *u*. Le groupe $(a^8 = b^2 = \theta,\ \theta^2 = 1,\ ab = ba^7\theta)$ a 8 opérations d'ordre 16, 4 d'ordre 8, 18 d'ordre 4, 1 opération d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{\lambda + (-1)^\mu - 1} b^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{-\lambda} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Voici les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$\begin{aligned}a = {} & (1, 2, \ldots, 16)\,(17, 18, \ldots, 32),\\ b = {} & (1, 17, 9, 25)\,(2, 32, 10, 24)\,(3, 31, 11, 23)\,(4, 30, 12, 22)\\ & \times (5, 29, 13, 21)\,(6, 28, 14, 20)\,(7, 27, 15, 19)\,(8, 26, 16, 18).\end{aligned}$$

Les faisceaux sont

$$F = \{a\} \qquad (\text{ordre } 16)$$

et 8 faisceaux d'ordre 4,

$$F_\lambda = \{a^\lambda b\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 7).$$

41. v. Le groupe ($a^8 = \theta$, $b^2 = \theta^2 = 1$, $ab = ba^7$) a 8 opérations d'ordre 16, 4 d'ordre 8, 10 d'ordre 4, 9 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{\lambda+7^2-\mu-1} b^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{7\lambda} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$\begin{aligned} a &= (1, 2, 3, \ldots, 16)(17, 18, \ldots, 32), \\ b &= (1,17)(2,24)(3,31)(4,22) \\ &\quad \times (5,29)(6,20)(7,27)(8,18)(9,25)(10,32) \\ &\quad \times (11,23)(12,30)(13,21)(14,28)(15,19)(16,26). \end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{a\}$$

et 8 faisceaux d'ordre 4,

$$F_{2\lambda+1} = \{a^{2\lambda+1} b\}, \qquad F_{2\lambda} = \{a^{2\lambda} b, \theta\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3).$$

42. w. Le groupe ($a^8 = \theta$, $b^2 = \theta^2 = 1$, $ab = ba^7\theta$) a 8 opérations d'ordre 16, 4 d'ordre 8, 2 d'ordre 4, 17 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b \\ a^{\lambda+2} b \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{-\lambda} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Le groupe régulier correspondant a pour substitutions génératrices

$$a = \prod_{h=1}^{2} (x_{h1}\, x_{h2} \ldots x_{h,16}), \qquad b = \prod_{k=1}^{16} (x_{1,k}\, x_{2,-k}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{a\}$$

et 8 d'ordre 4,

$$F_\lambda = \{a^\lambda b, \theta\} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, 7).$$

43. x. Le groupe

$$(a^4 = \theta,\ b^2 = c^2 = 1,\ ab = ba^3,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\theta,\ \theta^2 = 1)$$

a 8 opérations d'ordre 8, 16 d'ordre 4, 7 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}
\bar{a} = {} & (b, a^2 b, b\theta, a^2 b\theta) \\
& \times (ab, a^3 b, ab\theta, a^3 b\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta) \\
& \times (a^3 c, a^3 c\theta)(bc, a^2 bc\theta, bc\theta, a^2 bc)(abc, a^3 bc\theta, abc\theta, a^3 bc),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b} = {} & (a, a^3)(a^2, a^2\theta)(ab, a^3 b)(a^2 b, a^2 b\theta)(c, c\theta) \\
& \times (ac, a^3 c\theta)(bc, bc\theta)(abc, a^3 bc\theta)(a\theta, a^3\theta)(ab\theta, a^3 b\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(b, b\theta)(a^2 b, a^2 b\theta) \\
& \times (ac, ac\theta)(a^3 c, a^3 c\theta)(bc, bc\theta)(a^2 bc, a^2 bc\theta).
\end{aligned}$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions que voici

$$a = (1, 2, \ldots, 8)(9, 10, \ldots, 16)(17, 18, \ldots, 24)(25, 26, \ldots, 32),$$

$$\begin{aligned}
b = {} & (1, 9)(2, 12)(3, 15)(4, 10)(5, 13)(6, 16)(7, 11)(8, 14)(17, 25) \\
& \times (18, 28)(19, 31)(20, 26)(21, 29)(22, 32)(23, 27)(24, 30),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c = {} & (1, 7)(2, 22)(3, 19)(4, 24)(5, 21)(6, 18)(7, 23)(8, 20)(9, 29) \\
& \times (10, 26)(11, 31)(12, 28)(13, 25)(14, 30)(15, 27)(16, 32).
\end{aligned}$$

Il y a 6 faisceaux d'ordre 8

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ac\}, \qquad F'_1 = \{ab, c\},$$
$$F'_2 = \{a^3 b, c\}, \qquad F'_3 = \{a^2 c, b\}, \qquad F'_4 = \{bc, a^2 b\}.$$

44. y. Le groupe

$$(a^4 = \theta,\ b^2 = c^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba^3\theta,\ ac = ca,\ bc = cb\theta)$$

a 8 opérations d'ordre 8, 12 d'ordre 4, 11 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (b,\ a^2b\theta,\ b\theta,\ a^2b)(ab,\ a^3b\theta,\ ab\theta,\ a^3b)$$
$$\times(bc,\ a^2bc\theta,\ bc\theta,\ a^2bc)(abc,\ a^3bc\theta,\ abc\theta,\ a^3bc),$$

$$\bar{b} = (a,\ a^3\theta)(a^2,\ a^2\theta)(a\theta,\ a^3)(ab,\ a^3b\theta)(a^2b,\ a^2b\theta)(a^3b,\ ab\theta)$$
$$\times(c,\ c\theta)(ac,\ a^3c)(bc,\ bc\theta)(abc,\ a^3bc)(ac\theta,\ a^3c\theta)(abc\theta,\ a^3bc\theta)$$

$$\bar{c} = (b,\ b\theta)(ab,\ ab\theta)(a^2b,\ a^2b\theta)(a^3b,\ a^3b\theta)$$
$$\times(bc,\ bc\theta)(abc,\ abc\theta)(a^2bc,\ a^2bc\theta)(a^3bc,\ a^3bc\theta).$$

Le groupe régulier correspondant a pour opérations génératrices

$$a = (1,\ 2,\ \ldots,\ 8)(9,\ 10,\ \ldots,\ 17)(17,\ 18,\ \ldots,\ 24)(25,\ 26,\ \ldots,\ 32)$$

$$b = (1,\ 9)(2,\ 16)(3,\ 15)(4,\ 14)(5,\ 13)(6,\ 12)(7,\ 11)(8,\ 10)(17,\ 25)$$
$$\times(18,\ 32)(19,\ 31)(20,\ 30)(21,\ 29)(22,\ 28)(23,\ 27)(24,\ 26),$$

$$c = (1,\ 17)(2,\ 18)(3,\ 19)(4,\ 20)(5,\ 21)(6,\ 22)(7,\ 23)(8,\ 24)(9,\ 29)$$
$$\times(10,\ 30)(11,\ 31)(12,\ 32)(13,\ 25)(14,\ 26)(15,\ 27)(16,\ 28).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16

$$F = \{a,\ c\}$$

et 4 d'ordre 8

$$F_\lambda = \{a^2c,\ a^\lambda b\} \qquad (\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

45. σ. Le groupe

$$(a^4 = \theta,\ b^2 = c^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba^3,\ ac = ca\theta,\ bc = cb)$$

a 8 opérations d'ordre 8, 8 d'ordre 4, 15 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (b,\ a^2b,\ b\theta,\ a^2b\theta)(ab,\ a^3b,\ ab\theta,\ a^3b\theta)$$
$$\times(c,\ c\theta)(ac,\ ac\theta)(a^2c,\ a^2c\theta)(a^3c,\ a^3c\theta)$$
$$\times(bc,\ a^2bc\theta,\ bc\theta,\ a^2bc)(abc,\ a^3bc\theta,\ abc\theta,\ a^3bc),$$

$$\bar{b} = (a,\ a^3)(a^2,\ a^2\theta)(ab,\ a^3b)$$
$$\times(a^2b,\ a^2b\theta)(ac,\ a^3c)(a^2c,\ a^2c\theta)(abc,\ a^3bc)$$
$$\times(a^2bc,\ a^2bc\theta)(a\theta,\ a^3\theta)(ab\theta,\ a^3b\theta)(ac\theta,\ a^3c\theta)(abc\theta,\ a^3bc\theta)$$

$$\bar{c} = (a,\ a\theta)(a^3,\ a^3\theta)(ab,\ ab\theta)(a^3b,\ a^3b\theta)$$
$$\times(ac,\ ac\theta)(a^3c,\ a^3c\theta)(abc,\ abc\theta)(a^3bc,\ a^3bc\theta).$$

Le groupe régulier correspondant a pour substitutions génératrices

$$a = (1, 2, \ldots, 8)(9, 10, \ldots, 16)(17, 18, \ldots, 24)(25, 26, \ldots, 32),$$

$$\begin{aligned} b = {} & (1, 9)(2, 12)(3, 15)(4, 10)(5, 13)(6, 16)(7, 11)(8, 14)(17, 25) \\ & \times (18, 28)(19, 31)(20, 26)(21, 29)(22, 32)(23, 27)(24, 30), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & (9, 25)(1, 17)(2, 22)(3, 19)(4, 24)(5, 21)(6, 18)(7, 23)(8, 20) \\ & \times (10, 30)(11, 27)(12, 32)(13, 29)(14, 26)(15, 31)(16, 28). \end{aligned}$$

Il y a 4 faisceaux d'ordre 8 et 4 d'ordre 4

$$F_1 = \{a\}, \quad F_2 = \{ac\}, \quad F'_1 = \{b, c, \theta\}, \quad F'_2 = \{a^2 b, c, \theta\},$$
$$F''_1 = \{ab, \theta\}, \quad F''_2 = \{a^3 b, \theta\}, \quad F'''_1 = \{abc, \theta\}, \quad F'''_2 = \{a^3 bc, \theta\}.$$

46. α. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{Z},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{Z}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{Z}\theta,\ ac = ca\mathfrak{Z},\ bc = cb\mathfrak{Z})$$

a 16 opérations d'ordre 4 et 16 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned} \bar{a} = {} & (b, b\mathfrak{Z}\theta)(ab, ab\mathfrak{Z}\theta)(c, c\mathfrak{Z})(ac, ac\mathfrak{Z}) \\ & \times (bc, bc\theta)(abc, abc\theta)(b\theta, b\mathfrak{Z})(ab\theta, ab\mathfrak{Z}) \\ & \times (c\theta, c\mathfrak{Z}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{Z}\theta)(bc\mathfrak{Z}, bc\mathfrak{Z}\theta)(abc\mathfrak{Z}, abc\mathfrak{Z}\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b} = {} & (a, a\mathfrak{Z}\theta)(ab, ab\mathfrak{Z}\theta)(c, c\mathfrak{Z})(ac, ac\theta) \\ & \times (bc, bc\mathfrak{Z})(abc, abc\theta)(a\theta, a\mathfrak{Z})(ab\theta, ab\mathfrak{Z}) \\ & \times (c\theta, c\mathfrak{Z}\theta)(ac\mathfrak{Z}, ac\mathfrak{Z}\theta)(bc\theta, bc\mathfrak{Z}\theta)(abc\mathfrak{Z}, abc\mathfrak{Z}\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c} = {} & (a, a\mathfrak{Z})(b, b\mathfrak{Z})(ac, ac\mathfrak{Z})(bc, bc\mathfrak{Z}) \\ & \times (a\theta, a\mathfrak{Z}\theta)(b\theta, b\mathfrak{Z}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{Z}\theta)(bc\theta, bc\mathfrak{Z}\theta). \end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16

$$F = \{ab, c, \mathfrak{Z}\}$$

et 4 faisceaux d'ordre 8

$$F_1 = \{a, \theta\}, \quad F_2 = \{bc, \theta\}, \quad F'_1 = \{b, \mathfrak{Z}, \theta\}, \quad F'_2 = \{ac, \mathfrak{Z}, \theta\}.$$

Les isomorphismes qui engendrent le groupe régulier correspondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5)(2, 24)(3, 7)(4, 22)(6, 20)(8, 18)(9, 13)(10, 32)(11, 15)$$
$$\times (12, 30)(14, 28)(16, 26)(17, 21)(19, 23)(25, 29)(27, 31),$$
$$c = (1, 9)(2, 12)(3, 11)(4, 10)(5, 15)(6, 14)(7, 13)(8, 16)(17, 25)$$
$$\times (18, 28)(19, 27)(20, 26)(21, 31)(22, 30)(23, 29)(24, 32).$$

47. β. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{J},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{J}\theta,\ ac = ca\mathfrak{J}\theta,\ bc = cb\theta)$$

a 20 opérations d'ordre 4 et 11 d'ordre 2.

Voici les isomorphismes qui engendrent ici le groupe associé

$$\bar{a} = (b, b\mathfrak{J}\theta)(ab, ab\mathfrak{J}\theta)(c, c\mathfrak{J}\theta)$$
$$\times (ac, ac\mathfrak{J}\theta)(b\theta, b\mathfrak{J})(ab\theta, ab\mathfrak{J})(c\theta, c\mathfrak{J})(ac\theta, ac\mathfrak{J}),$$
$$\bar{b} = (a, a\mathfrak{J}\theta)(ab, ab\mathfrak{J}\theta)(c, c\theta)(ac, ac\mathfrak{J})$$
$$\times (bc, bc\theta)(abc, abc\mathfrak{J})(a\theta, a\mathfrak{J})(ab\mathfrak{J}, ab\theta)$$
$$\times (c\mathfrak{J}, c\mathfrak{J}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{J}\theta),$$
$$\bar{c} = (a, a\mathfrak{J}\theta)(b, b\theta)(ab, ab\mathfrak{J})(ac, ac\mathfrak{J}\theta)$$
$$\times (bc, bc\theta)(abc, abc\mathfrak{J})(a\theta, a\mathfrak{J})(b\mathfrak{J}, b\mathfrak{J}\theta)$$
$$\times (ab\theta, ab\mathfrak{J}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{J})(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{J}\theta).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8

$$F = \{a, bc\},\qquad F_1 = \{ab, \mathfrak{J}\},\qquad F_2 = \{ac, \mathfrak{J}\},$$
$$F'_1 = \{b, \mathfrak{J}, \theta\},\qquad F'_2 = \{c, \mathfrak{J}, \theta\}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32)$$
$$b = (1, 5)(2, 24)(3, 7)(4, 22)(6, 20)(8, 18)(9, 13)(10, 32)(11, 15)$$
$$\times (12, 30)(14, 28)(16, 26)(17, 21)(19, 23)(25, 29)(27, 31),$$
$$c = (1, 9)(2, 28)(3, 11)(4, 26)(5, 29)(6, 16)(7, 31)(8, 14)(10, 20)$$
$$\times (12, 18)(13, 21)(15, 23)(17, 25)(19, 27)(22, 32)(24, 30).$$

48. γ. Le groupe

$$(a^2=\mathfrak{I},\ b^2=c^2=\mathfrak{I}^2=\theta^2=1,\ ab=ba\mathfrak{I},\ ac=ca\theta,\ bc=cb\theta)$$

a

12 opérations d'ordre 4,
19 » » 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a}= &\ (b,\ b\mathfrak{I})(ab,\ ab\mathfrak{I})(c,\ c\theta)(ac,\ ac\theta)\\ &\times(bc,\ bc\mathfrak{I}\theta)(abc,\ abc\mathfrak{I}\theta)(b\theta,\ b\mathfrak{I}\theta)(ab\theta,\ ab\mathfrak{I}\theta)\\ &\times(c\mathfrak{I},\ c\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I},\ ac\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I},\ bc\theta)(abc\mathfrak{I},\ abc\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b}= &\ (a,\ a\mathfrak{I})(ab,\ ab\mathfrak{I})(c,\ c\theta)(ac,\ ac\mathfrak{I}\theta)\\ &\times(bc,\ bc\theta)(abc,\ abc\mathfrak{I}\theta)(a\theta,\ a\mathfrak{I}\theta)(ab\theta,\ ab\mathfrak{I}\theta)\\ &\times(c\mathfrak{I},\ c\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I},\ ac\theta)(bc\mathfrak{I},\ bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta,\ abc\mathfrak{I}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}= &\ (a,\ a\theta)(b,\ b\theta)(ac,\ ac\theta)(bc,\ bc\theta)\\ &\times(a\mathfrak{I},\ a\mathfrak{I}\theta)(b\mathfrak{I},\ b\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I},\ ac\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I},\ bc\mathfrak{I}\theta).\end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8

$$F=\{ab,\ c,\ \mathfrak{I},\ \theta\},\qquad F_1=\{a,\ \theta\},\qquad F_2=\{ac,\ \theta\},$$
$$F_3=\{bc,\ \mathfrak{I}\},\qquad F'=\{b,\ \mathfrak{I},\ \theta\}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$\begin{aligned}a= &\ (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,10,11,12)(13,14,15,16)\\ &\times(17,18,19,20)(21,22,23,24)(25,26,27,28)(29,30,31,32),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b= &\ (1,5)(2,8)(3,7)(4,6)(9,13)(10,16)(11,15)(12,14)(17,21)\\ &\times(18,24)(19,23)(20,22)(25,29)(26,32)(27,31)(28,30),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c= &\ (1,9)(2,26)(3,11)(4,28)(5,29)(6,14)(7,31)(8,16)(10,18)\\ &\times(12,20)(13,21)(15,23)(17,25)(19,27)(22,30)(24,32).\end{aligned}$$

49. δ. Le groupe

$$(a^2=\mathfrak{I},\ b^2=c^2=\mathfrak{I}^2=\theta^2=1,\ ab=ba\mathfrak{I}\theta,\ ac=ca\theta,\ bc=cb\theta)$$

a 20 opérations d'ordre 4 et 11 d'ordre 2.

Voici les isomorphismes qui engendrent le groupe associé

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b,\ b\mathfrak{J}\theta)(ab,\ ab\mathfrak{J}\theta)(c,\ c\theta)(ac,\ ac\theta)(bc,\ bc\mathfrak{J})(abc,\ abc\mathfrak{J})\\ & \times(b\mathfrak{J},\ b\theta)(ab\theta,\ ab\mathfrak{J})(c\mathfrak{J},\ c\mathfrak{J}\theta)(ac\mathfrak{J},\ ac\mathfrak{J}\theta)(bc\theta,\ bc\mathfrak{J}\theta)(abc\theta,\ abc\mathfrak{J}\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a,\ a\mathfrak{J}\theta)(ab,\ ab\mathfrak{J}\theta)(c,\ c\theta)(ac,\ ac\mathfrak{J})(bc,\ bc\theta)(abc,\ abc\mathfrak{J})\\ & \times(a\theta,\ a\mathfrak{J})(ab\theta,\ ab\mathfrak{J})(c\mathfrak{J},\ c\mathfrak{J}\theta)(ac\theta,\ ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J},\ bc\mathfrak{J}\theta)(abc\theta,\ abc\mathfrak{J}\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a,\ a\theta)(b,\ b\theta)(ac,\ ac\theta)(bc,\ bc\theta)\\ & \times(a\mathfrak{J},\ a\mathfrak{J}\theta)(b\mathfrak{J},\ b\mathfrak{J}\theta)(ac\mathfrak{J},\ ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J},\ bc\mathfrak{J}\theta).\end{aligned}$$

Il y a 1 faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8

$$\begin{aligned}&F = \{a,\ b,\ c,\ \mathfrak{J}\}, && F_1 = \{a,\ \theta\}, && F_2 = \{ac,\ \mathfrak{J}\},\\ &F_3 = \{bc,\ \mathfrak{J}\}, && F' = \{b,\ \mathfrak{J},\ \theta\}.\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$\begin{aligned}a = {} & (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)\\ & \times(17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b = {} & (1, 5)(2, 24)(3, 7)(4, 22)(6, 20)(8, 18)(9, 13)(10, 32)(11, 15)\\ & \times(12, 30)(14, 28)(16, 26)(17, 21)(19, 23)(25, 29)(27, 31),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c = {} & (1, 9)(2, 26)(3, 11)(4, 28)(5, 29)(6, 14)(7, 31)(8, 16)(10, 18)\\ & \times(12, 20)(13, 21)(15, 23)(17, 25)(19, 27)(22, 30)(24, 32).\end{aligned}$$

50. ε. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{J},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{J},\ ac = ca\mathfrak{J},\ bc = cb\theta)$$

a 12 opérations d'ordre 4 et 19 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b,\ b\mathfrak{J})(ab,\ ab\mathfrak{J})(c,\ c\mathfrak{J})(ac,\ ac\mathfrak{J})\\ & \times(b\theta,\ b\mathfrak{J}\theta)(ab\theta,\ ab\mathfrak{J}\theta)(c\theta,\ c\mathfrak{J}\theta)(ac\theta,\ ac\mathfrak{J}\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a,\ a\mathfrak{J})(ab,\ ab\mathfrak{J})(c,\ c\theta)(ac,\ ac\mathfrak{J}\theta)(bc,\ bc\theta)(abc,\ abc\mathfrak{J}\theta)\\ & \times(a\theta,\ a\mathfrak{J}\theta)(ab\theta,\ ab\mathfrak{J}\theta)(c\mathfrak{J},\ c\mathfrak{J}\theta)(ac\theta,\ ac\mathfrak{J})(bc\mathfrak{J},\ bc\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J},\ abc\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a,\ a\mathfrak{J})(b,\ b\theta)(ab,\ ab\mathfrak{J}\theta)(ac,\ ac\mathfrak{J})(bc,\ bc\theta)(abc,\ abc\mathfrak{J}\theta)\\ & \times(a\theta,\ a\mathfrak{J}\theta)(b\mathfrak{J},\ b\mathfrak{J}\theta)(ab\theta,\ ab\mathfrak{J})(ac\theta,\ ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J},\ bc\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J},\ abc\theta).\end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8

$$F = \{a, bc\},\quad F_1 = \{b, \mathfrak{I}, \theta\},\quad F_2 = \{ab, \mathfrak{I}, \theta\},$$
$$F_3 = \{c, \mathfrak{I}, \theta\},\quad F_4 = \{ac, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Le groupe régulier correspondant a pour substitutions génératrices

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5)(2, 8)(3, 7)(4, 6)(9, 13)(10, 16)(11, 15)(12, 14)(17, 21)$$
$$\times (18, 24)(19, 23)(20, 22)(25, 29)(26, 32)(27, 31)(28, 30),$$
$$c = (1, 9)(2, 12)(3, 11)(4, 10)(5, 29)(6, 32)(7, 31)(8, 30)(13, 21)$$
$$\times (14, 24)(15, 23)(16, 22)(17, 25)(18, 28)(19, 27)(20, 26).$$

51. ζ. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ c^2 = \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\mathfrak{I})$$

a 24 opérations d'ordre 4 et 7 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (b, b\theta)(ab, ab\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta)$$
$$\times (b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta),$$
$$\bar{b} = (a, a\theta)(ab, ab\theta)(c, c\mathfrak{I})(ac, ac\mathfrak{I}\theta)$$
$$\times (bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I}\theta)(a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)$$
$$\times (c\theta, c\mathfrak{I}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{I})(bc\theta, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}),$$
$$\bar{c} = (a, a\theta)(b, b\mathfrak{I})(ab, ab\mathfrak{I}\theta)(ac, ac\theta)$$
$$\times (bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I}\theta)(a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)$$
$$\times (ab\theta, ab\mathfrak{I})(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta)(bc\theta, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8 :

$$F = \{a, bc\},\quad F_1 = \{b, \mathfrak{I}\},\quad F_2 = \{ab, \theta\},$$
$$F_3 = \{ac, \theta\},\quad F' = \{c, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Le groupe régulier correspondant admet pour substitutions génératrices :

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16) \times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8) \times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$

$$c = (1, 17)(2, 26)(3, 19)(4, 28)(5, 23)(6, 32)(7, 21)(8, 30)(9, 25) \times (10, 18)(11, 27)(12, 20)(13, 31)(14, 24)(15, 29)(16, 22).$$

52. η. Le groupe

$$\left(\begin{array}{c} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = \theta,\ \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca\theta \\ ad = da\theta,\ bc = cb\theta,\ bd = db\theta,\ cd = dc\theta \end{array}\right)$$

a

20 opérations d'ordre 4,
11 » » 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (b, b\theta)(ab, ab\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta) \times (d, d\theta)(ad, ad\theta)(bcd, bcd\theta)(abcd, abcd\theta),$$

$$\bar{b} = (c, c\theta)(bc, bc\theta)(d, d\theta)(bd, bd\theta) \times (a, a\theta)(ab, ab\theta)(acd, acd\theta)(abcd, abcd\theta),$$

$$\bar{c} = (d, d\theta)(cd, cd\theta)(a, a\theta)(ac, ac\theta) \times (b, b\theta)(bc, bc\theta)(abd, abd\theta)(abcd, abcd\theta),$$

$$\bar{d} = (a, a\theta)(ad, ad\theta)(b, b\theta)(bd, bd\theta) \times (c, c\theta)(cd, cd\theta)(abc, abc\theta)(abcd, abcd\theta).$$

Il y a 15 faisceaux d'ordre 8

$F_1 = \{a, bc\}$, $F_2 = \{a, bd\}$, $F_3 = \{a, cd\}$, $F_4 = \{b, ac\}$
$F_5 = \{b, ad\}$, $F_6 = \{b, cd\}$, $F_7 = \{c, ab\}$, $F_8 = \{c, ad\}$
$F_9 = \{c, bd\}$, $F_{10} = \{d, ab\}$, $F_{11} = \{d, ac\}$, $F_{12} = \{d, bc\}$
$F'_1 = \{ab, cd\}$, $F'_2 = \{ac, bd\}$, $F'_3 = \{ad, bc\}$.

Les substitutions génératrices du groupe régulier corres

pondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5, 3, 7)(2, 8, 4, 6)(9, 13, 11, 15)(10, 16, 12, 14)$$
$$\times (17, 21, 19, 23)(18, 24, 20, 22)(25, 29, 27, 31)(26, 32, 28, 30),$$
$$c = (1, 9, 3, 11)(2, 12, 4, 10)(5, 15, 7, 13)(6, 14, 8, 16)$$
$$\times (17, 25, 19, 27)(18, 28, 20, 26)(21, 31, 23, 29)(22, 30, 24, 32),$$
$$d = (1, 17, 3, 19)(2, 20, 4, 18)(5, 23, 7, 21)(6, 22, 8, 24)$$
$$\times (9, 27, 11, 25)(10, 26, 12, 28)(13, 29, 15, 31)(14, 32, 16, 30).$$

CHAPITRE IV.

SUR QUELQUES GROUPES D'ORDRE 2^n.

53. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{2^{n-2}} = b^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^{2^{n-3}}\ (n > 3)]$$

a $2^{n-\alpha}$ opérations d'ordre $2^{n-\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-2$) et 3 opérations d'ordre 2.

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$a = \prod_{h=1}^{2} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h,2^{n-1}}),$$

$$b = \prod_{k=1}^{2^{n-1}} (x_{1,k}\, x_{2,(2^{n-2}+1)k-2^{n-2}}).$$

Le groupe associé (d'ordre 4) est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b \\ a^{\lambda+2^{n-2}} b \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^{2\lambda+1} b^\mu \\ a^{2\lambda+1+2^{n-2}} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Il y a 3 faisceaux

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}\},$$

ayant en commun le sous-groupe conjugué de lui-même

$$\{\mathfrak{I}\}.$$

54. Soit le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ \mathfrak{I}^{2^{n-3}} = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ n > 3).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-2}} (x_{h1} x_{h2} x_{h3} x_{h4}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1,k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2} \dots x_{2^{n-2}-1,k} x_{2^{n-2},3k-2}).$$

Le groupe contient

$2^{n-\alpha}$	opérations	d'ordre	$2^{n-\alpha-1}$	$(\alpha = 1, 2, \dots, n-3)$,
4	»	»	4,	
3	»	»	2.	

Il y a 3 faisceaux d'ordre 2^{n-1}

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F_3 = \{b, \mathfrak{I}\}.$$

55. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \mathfrak{I}^{2^{n-3}} = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ (n > 3)]$$

a

2^{n-1}	opérations	d'ordre	2^{n-2},	
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-3}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-5)$,
7	»	»	2.	

Le groupe régulier est engendré par les substitutions

$$= \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} x_{h2} \dots x_{h,2^{n-2}}),$$

$$= \prod_{k=1}^{2^{n-2}} (x_{1,k} x_{2,k})(x_{3,k} x_{4,k}),$$

$$\begin{aligned} = & (x_{11} x_{31})(x_{12} x_{42})(x_{13} x_{33})(x_{14} x_{44}) \dots (x_{1,2^{n-2}-1} x_{3,2^{n-2}-1})(x_{1,2^{n-2}} x_{4,2^{n-2}}) \\ \times & (x_{21} x_{41})(x_{22} x_{32})(x_{23} x_{43})(x_{24} x_{34}) \dots (x_{2,2^{n-2}-1} x_{4,2^{n-2}-1})(x_{2,2^{n-2}} x_{3,2^{n-2}}). \end{aligned}$$

Les isomorphismes générateurs du groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{I}^\lambda \theta^{\mu+1} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a b^\beta \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu \\ a b^\beta \mathfrak{I}^\lambda \theta^{\mu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 2^{n-1}

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

56. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ \mathfrak{I}^{2^{n-3}} = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^{2^{n-4}}\ (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations	d'ordre	2^{n-2}	$(a\mathfrak{I}^\lambda\theta^\mu,\ ab\mathfrak{I}^\lambda\theta^\mu)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-3}$	$[\alpha = 0, 1, 2, \ldots, (n-5)]$,
4	»	»	4	$(b,\ b\theta,\ b\mathfrak{I}^{n-4},\ b\theta\mathfrak{I}^{n-4})$,
3	»	»	2	$(\theta,\ \theta\mathfrak{I}^{n-4},\ \mathfrak{I}^{n-4})$.

Les substitutions du groupe régulier correspondant sont

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h,2^{n-2}}),$$

$$b = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} (x_{1,k}\, x_{2,(1+2^{n-3})k-2^{n-3}}\, x_{3,k}\, x_{4,(1+2^{n-3})k-2^{n-3}}).$$

Le groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{I}^{\lambda+2^{n-4}} \theta^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a b^\beta \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu \\ a b^\beta \mathfrak{I}^{\lambda+2^{n-4}} \theta^\mu \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

On a 3 faisceaux d'ordre 2^{n-1}

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F_3 = \{b, \mathfrak{I}\}.$$

57. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ b^4 = \mathfrak{I}^{2^{n-4}} = \theta,\ \theta^2 = 1,\ ba = ab^3\theta\ (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations d'ordre		2^{n-2}	$(a\mathfrak{J}^\lambda, ab\mathfrak{J}^\lambda, ab^2\mathfrak{J}^\lambda, ab^3\mathfrak{J}^\lambda)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-3}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-7)$,
24	»	»	8,	
4	»	»	4,	
3	»	»	2.	

Les opérations génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-3}} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h8}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1,k} x_{2,7k-6} x_{3,k} x_{4,7k-6} \ldots x_{2^{n-3}-1,k} x_{2^{n-3},7k-6}$$
$$\times x_{1,k+4} x_{2,7k-2} x_{3,k+4} x_{4,7k-2} \ldots x_{2^{n-3}-1,k+4} x_{2^{n-3},7k-2}).$$

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu, & a^\alpha b^2\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu, & a^\alpha b^3\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu \\ a^\alpha b^3\mathfrak{J}^\lambda\theta^{\mu+1}, & a^\alpha b^2\mathfrak{J}^\lambda\theta^{\mu+1}, & a^\alpha b\mathfrak{J}^\lambda\theta^{\mu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1),$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu \\ ab^{\beta+2}\mathfrak{J}^\lambda\theta^\lambda \end{pmatrix} \qquad (\beta = 0, 1, 2, 3).$$

Il y a 4 faisceaux d'ordre 2^{n-2}

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\},$$
$$F_3 = \{ab^2\}, \qquad F_4 = \{ab^3\},$$

et un faisceau d'ordre 2^{n-1}.

$$F = \{b, \mathfrak{J}\}.$$

58. Le groupe

$$|a^2 = \mathfrak{J},\ b^4 = \theta,\ \mathfrak{J}^{2^{n-4}} = \theta^2 = 1,\ ba = ab^3\theta,\ (n > 4)|$$

a

2^{n-1}	opérations	d'ordre	2^{n-3}	$(ab^{\beta}\mathfrak{S}^{\lambda}\theta^{\mu},\ \beta=0,1,2,3)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-4}$	$(\alpha=0,1,2,\ldots,n-8)$,
48	»	»	8,	
12	»	»	4,	
3	»	»	2.	

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a}=\begin{pmatrix} a^{\alpha}b\theta^{\lambda}\mathfrak{S}^{\mu}, & a^{\alpha}b^{2}\theta^{\lambda}\mathfrak{S}^{\mu}, & a^{\alpha}b^{3}\theta^{\lambda}\mathfrak{S}^{\mu} \\ a^{\alpha}b^{3}\theta^{\lambda+1}\mathfrak{S}^{\mu}, & a^{\alpha}b^{2}\theta^{\lambda+1}\mathfrak{S}^{\mu}, & a^{\alpha}b\theta^{\lambda+1}\mathfrak{S}^{\mu} \end{pmatrix},$$

$$\bar{b}=\begin{pmatrix} ab^{\beta}\theta^{\lambda}\mathfrak{S}^{\mu} \\ ab^{\beta+2}\theta^{\lambda}\mathfrak{S}^{\mu} \end{pmatrix} \qquad (\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b=\prod_{h=1}^{2^{n-3}}(x_{h1}x_{h2}\ \ldots\ x_{h8}),$$

$$a=\prod_{k=1}^{8}(x_{1k}x_{2,7k-6}x_{3k}x_{4,7k-6}\ \ldots\ x_{2^{n-3}-1,k}x_{2^{n-3},7k-6}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 2^{n-1},

$$F=\{b,\ \mathfrak{S}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 2^{n-2},

$$F_{\lambda}=\{ab^{\lambda},\ \theta\} \qquad (\lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

59. Le groupe

$$(a^{2}=\mathfrak{S},\ b^{4}=\theta,\ \mathfrak{S}^{2^{n-4}}=\theta^{2}=1,\ ba=ab^{3})$$

a le même nombre d'opérations d'ordre donné que le groupe précédent.

Le groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^2 \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^3 \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \\ a^\alpha b^3 \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^2 \theta^{\lambda+1} \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \\ ab^{\beta+2} \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \end{pmatrix}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-3}} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h8}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2} \ldots x_{2^{n-3}-1,k} x_{2^{n-3},3k-2}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 2^{n-1},

$$F = \{b, \mathfrak{I}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 2^{n-2},

$$F_\lambda = \{ab^\lambda, \theta\}.$$

60. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \mathfrak{I}',\ \mathfrak{I}^{2^{n-4}} = \mathfrak{I}'^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta \qquad (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations d'ordre		2^{n-3}	$(a\mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu,\ ab\mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-4}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-7)$,
24	»	»	4,	
7	»	»	2.	

Le groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu \\ a^\alpha b \mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^{\nu+1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ab^\beta \mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu \\ ab^\beta \mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^{\nu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1);$$

il y a 3 faisceaux

$$F_1 = \{a, \mathfrak{I}', \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \mathfrak{I}', \theta\}, \qquad F_3 = \{b, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$\begin{aligned} a = \; & (1, 2, 3, \ldots, 2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-3}+1, 2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n-2}) \\ & \times (2^{n-2}+1, 2^{n-2}+2, \ldots, 2^{n-2}+2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-2}+2^{n-3}+1, 2^{n-2}+2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n-1}) \\ & \times (2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-1}+2^{n-3}+1, 2^{n-1}+2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}) \\ & \times (2^{n-1}+2^{n-2}+1, 2^{n-1}+2^{n-2}+2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+1, 2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n}). \end{aligned}$$

Ensuite, à l'opération $a^\alpha b^\beta \mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu$ je fais correspondre le nombre

$$1 + \alpha + 2\lambda + \beta 2^{n-3} + \mu 2^{n-2} + \nu 2^{n-1},$$

alors

$$b = \begin{bmatrix} 1+\alpha+2\lambda+\beta 2^{n-3}+\mu 2^{n-2}+\nu 2^{n-1}, \\ 1+\alpha+2\lambda+(\beta+1)2^{n-3}+\mu 2^{n-2}+(\nu+\alpha)2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

61. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ \mathfrak{I}^{2^{n-4}} = \theta^4 = 1,\ ba = ab\theta^2 \qquad (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations d'ordre		2^{n-3}	$(a\mathfrak{I}^\lambda\theta^\mu,\ ab\mathfrak{I}^\lambda\theta^\mu)$
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-4}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-8)$
48	»	»	8	
12	»	»	4	
3	»	»	2	

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-3}} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h8}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k} x_{2,5k-4} x_{3,k} x_{4,5k-4} \ldots x_{2^{n-3}-1,k} x_{2^{n-3},5k-4}).$$

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{I}^\lambda \theta^{\mu+2} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu \\ ab^\beta \mathfrak{I}^\lambda \theta^{\mu+2} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Les faisceaux sont

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}\}.$$

CHAPITRE V.

SUR LES GROUPES D'ORDRE p^5
(p PREMIER, PLUS GRAND QUE 3).

62. Dans ce qui va suivre, les lettres θ, ϑ, ϑ', θ', ... désigneront des opérations conjuguées d'elles-mêmes.

G_{p^5} ($\theta^{p^5} = 1$), a

$$p^\alpha(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^{\alpha+1} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4).$$

63. $G_{p^4}G_p$ a

$p^\alpha(p-1)$	opérations	d'ordre	p^α	$(\alpha = 2, 3, 4)$.
p^2-1	»	»	p	

64. $G_{p^3}(G_p)^2$ a

$p^4(p-1)$	opérations	d'ordre	p^3,
$p^3(p-1)$	»	»	p^2,
p^3-1	»	»	p.

65. $G_{p^3}G_{p^2}$ a

$p^4(p-1)$	opérations	d'ordre	p^3,
$p^2(p^2-1)$	»	»	p^2,
p^2-1	»	»	p.

66. Le groupe ($a^p = \vartheta$, $\vartheta^{p^3} = b^p = 1$, $ab = ba\vartheta^{p^2}$) est d type (3) (1, 1).

Il a

$$\begin{array}{llll} p^\alpha(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^\alpha & (\alpha=2,3,4), \\ p^2-1 & \quad » & \quad » \quad p. & \end{array}$$

67. Le groupe $(a^p=\vartheta,\ b^p=\theta,\ \vartheta^{p^2}=\theta^p=1,\ ab=ba\theta)$, de type $(2, 1)(1, 1)$, a

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^3, \\ p^2(p^2-1) & \quad » \qquad » & p^2, \\ p^2-1 & \quad » \qquad » & p. \end{array}$$

68. Le groupe $(a^p=\vartheta,\ \vartheta^{p^2}=b^p=\theta^p=1,\ ab=ba\theta)$ [type $(2, 1)(1, 1)$] a

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^3, \\ p^3(p-1) & \quad » \qquad » & p^2, \\ p^3-1 & \quad » \qquad » & p. \end{array}$$

69. Le groupe $(a^p=\vartheta,\ b^p=\theta,\ \vartheta^{p^2}=\theta^p=1,\ ab=ba\vartheta^p)$ [type $(2, 1)(1, 1)$] a

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^3, \\ p^2(p^2-1) & \quad » \qquad » & p^2, \\ p^2-1 & \quad » \qquad » & p. \end{array}$$

70. Le groupe *décomposable*

$(a^p=\vartheta,\ \vartheta^{p^2}=b^p=\theta^p=1,\ ab=ba\vartheta^p)$ [type $(2, 1)(1, 1)$]

a

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^3, \\ p^3(p-1) & \quad » \qquad » & p^2, \\ p^3-1 & \quad » \qquad » & p. \end{array}$$

71. Pour *les groupes*

$[a^{p^2}=\theta,\ b^{p^2}=\theta^p=1,\ ab=ba^{1+p}\theta^\alpha\ (\alpha=0, 1, 2, \ldots, p-1)]$

de type (1) (1, 1) (1, 1), on a la formule

$$(a^\lambda b^\mu)^\rho = b^{\mu\rho} a^{\lambda\left[\rho + \frac{\rho(\rho+1)}{2}\mu(p+\alpha p^2) + \mu\frac{\rho(\rho+1)}{12}\{\mu(2\rho+1)-3\}p^2\right]}.$$

On en déduit que ces groupes ont

$$\begin{array}{lccl} p^4(p-1) & \text{opérations} & \text{d'ordre} & p^3, \\ p^2(p^2-1) & » & » & p^2, \\ p^2-1 & » & » & p, \end{array}$$

lorsque l'on suppose $p > 3$.

72. Le groupe

$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \mathfrak{I}',\ \mathfrak{I}^p = \mathfrak{I}'^p = \theta^p = 1,\ ab = ba\theta)$ [type (1, 1, 1) (1, 1)]

a

$$\begin{array}{lccl} p^3(p^2-1) & \text{opérations} & \text{d'ordre} & p^2, \\ p^3-1 & » & » & p. \end{array}$$

73. Le groupe décomposable

$$(a^{p^2} = b^{p^2} = \theta^p = 1,\ ab = ba^{1+p})$$

a le même nombre d'opérations d'ordre donné que les précédents.

74. Le groupe $(G_{p^2})^2 G_p$ a aussi le même nombre d'opérations d'ordre donné que les précédents.

75. Partons des équations de définition

$a^p = \mathfrak{I},\quad \mathfrak{I}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\quad ac = ca\mathfrak{I}^{\delta p},\quad bc = cb\mathfrak{I}^{\varepsilon p},\quad ab = bac$

On a

$$ab^\mu = b^\mu a c^\mu \mathfrak{I}^{-\varepsilon p\frac{\mu(\mu-1)}{2}},$$

puis

$$a^\lambda b^\mu = b^\mu a^\lambda c^{\lambda\mu} \mathfrak{I}^{-\delta p\mu\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon p\lambda\frac{\mu(\mu-1)}{2}}$$

et

$$\ldots a^{\lambda} b^{\mu})^{\rho} = b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} c^{\lambda\mu\frac{\rho(\rho+1)}{2}} \mathfrak{I}^{-\delta\mu p \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\frac{\rho(\rho+1)}{2} - \varepsilon p \lambda\mu \frac{\rho(\rho+1)}{12}[(2\rho+1)\mu-3] - \lambda^2\mu\delta p \frac{\rho(\rho^2-1)}{3}}.$$

Je pose

$$\begin{aligned} a' &= a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} \\ b' &= b^{\sigma} c^{\rho} \mathfrak{I}^{\varphi p} \\ c' &= b^{\tau} c^{\upsilon} \mathfrak{I}^{\psi p} \\ \mathfrak{I}'^{p} &= \mathfrak{I}^{\lambda p} \end{aligned} \qquad \lambda(\sigma\upsilon - \tau\rho) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\mathfrak{I}'^{\delta' p}, \qquad b'c' = c'b'\mathfrak{I}'^{\varepsilon' p}, \qquad a'b' = b'a'c';$$

il vient

$$\tau \equiv 0, \qquad \lambda\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon, \qquad \lambda\varepsilon' \equiv \varepsilon\upsilon\sigma, \qquad \upsilon \equiv \lambda\sigma,$$

puis

$$\psi \equiv \delta\lambda\rho - \varepsilon\nu\sigma - \delta\sigma\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon\lambda\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \varepsilon\rho\mu - \varepsilon\mu\upsilon.$$

Le groupe (pour $p > 3$) a

$$\begin{array}{llll} p^4(p-1) & \text{opérations} & \text{d'ordre} & p^2, \\ p^3(p-1) & \text{»} & \text{»} & p^2, \\ p^3 - 1 & \text{»} & \text{»} & p. \end{array}$$

Des congruences précédentes on conclut $\varepsilon' \equiv \sigma^2 \varepsilon$, ce qui montre que $[\varepsilon, p]$ est un invariant. De plus ε et ε' sont, en même temps, résidus ou non résidus quadratiques (mod p).

Nous avons ici 3 groupes :

$$a^p = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\ ac = ca, \quad bc = cb\mathfrak{I}^p,\ \ ab = bac),$$

$$a^p = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\ ac = ca, \quad bc = cb\mathfrak{I}^{up},\ ab = bac,\ \left(\frac{u}{p}\right) = -1\Big],$$

$$a^p = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}^p,\ bc = cb, \quad ab = bac),$$

dont les congruences qui précèdent permettraient de trouver les isomorphismes.

76. Si nous partons des équations

$$a^p = \mathfrak{I}, \qquad b^p = \theta, \qquad \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,$$
$$ac = ca\theta^\delta, \qquad bc = cb\theta^\varepsilon, \qquad ab = bac,$$

on a

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^p = \mathfrak{I}^\lambda \theta^{\mu - \varepsilon\lambda\mu \frac{p(p+1)}{12}[(2p+1)\mu - 3] - \delta\lambda^2\mu \frac{p(p^2-1)}{3}}.$$

Posons (en supposant $p > 3$)

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu,$$
$$b' = a^\rho b^\sigma c^\varphi, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^\rho \theta^\sigma,$$
$$c' = c^\upsilon \mathfrak{I}^\psi \lambda^\tau$$

et exprimons que

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'c';$$

il vient

$$\rho\delta' \equiv 0, \qquad \sigma s\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon \qquad (\text{mod } p),$$
$$\rho\varepsilon' \equiv 0, \qquad \sigma s\varepsilon' \equiv \delta\sigma\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon \qquad (\text{mod } p),$$
$$\upsilon \equiv \lambda\sigma - \rho\mu, \qquad \psi \equiv 0,$$
$$\tau \equiv \delta(\lambda\varphi - \nu\rho) + \varepsilon(\mu\varphi - \nu\sigma)$$
$$- \delta\sigma\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon\lambda\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \delta\mu\frac{\rho(\rho-1)}{2} + \varepsilon\rho\frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

Les groupes correspondants ont

$p^3(p^2-1)$ opérations d'ordre p^2,
$p^3 - 1$ » » p.

La discussion des congruences précédentes donne les groupes

$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca,\quad bc = cb\theta,\ ab = bac)$,
$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb;\ ab = bac)$,
$\Big[a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta^u,\ bc = cb,\ ab = bac,\ \left(\frac{u}{p}\right) = -1,$

dont on peut, en même temps, déterminer les groupes d'isomorphismes.

77. Partons des équations de définition

$$a^p = \mathfrak{I}, \quad b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \quad ac = ca\theta^\delta, \quad bc = cb\theta^\varepsilon, \quad ab = bac.$$

Alors

$$(a^\lambda b^\mu)^\rho = b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} c^{\lambda\mu\frac{\rho(\rho+1)}{2}} \theta^{-\delta\mu\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\frac{\rho(\rho+1)}{2} - \delta\lambda^2\mu\frac{\rho(\rho^2-1)}{3} - \varepsilon\lambda\mu\frac{\rho(\rho+1)}{12}[\mu(2\rho+1)-3]}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^\lambda b^\mu c^\nu \theta^\alpha, & \theta' &= \theta^\zeta \mathfrak{I}^\eta, \\ b' &= b^\rho c^\sigma \theta^\beta \mathfrak{I}^\gamma, & \mathfrak{I}' &= \mathfrak{I}^\lambda, \\ c' &= b^\tau c^\upsilon \theta^\varphi \mathfrak{I}^\psi, \end{aligned}$$

et exprimons que l'on a

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'c',$$

il vient

$$\tau \equiv 0, \qquad \eta\delta' \equiv 0, \qquad \zeta\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$
$$\eta\varepsilon' \equiv 0, \qquad \zeta\varepsilon' \equiv \varepsilon\rho\upsilon, \qquad \psi \equiv 0, \qquad \upsilon \equiv \lambda\rho,$$
$$\varphi = \delta\lambda\sigma - \varepsilon\nu\rho - \delta\rho\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon\lambda\frac{\rho(\rho-1)}{2} + \varepsilon\mu\sigma - \varepsilon\mu\upsilon.$$

On a alors

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^2, \\ p^4 - 1 & \quad \text{»} \qquad \text{»} & p. \end{array}$$

La discussion des congruences donne 2 groupes du type $(1, 1)(1)(1, 1)$

$$(a^p = \mathfrak{I}, \ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \ ac = ca, \quad bc = cb\theta, \ ab = bac),$$
$$(a^p = \mathfrak{I}, \ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \ ac = ca\theta, \ bc = cb, \quad ab = bac),$$

plus un groupe décomposable du type $(1, 1, 1)(1, 1)$.

Les mêmes congruences serviront à trouver les isomorphismes.

78. Soit, maintenant,

$$a^p = \mathfrak{J}, \qquad \mathfrak{J}^{p^2} = b^p = c^p = 1, \qquad ab = ba\mathfrak{J}^{\delta p},$$
$$ac = ca\mathfrak{J}^{\varepsilon p}, \qquad bc = cb\mathfrak{J}^{\zeta p},$$

d'où

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \mathfrak{J}^{(\delta\lambda\mu + \varepsilon\nu\lambda + \zeta\mu\nu)p\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^\lambda b^\mu c^\nu \\ b' &= b^\rho c^\sigma \mathfrak{J}^{\varphi p} \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^\lambda. \\ c' &= b^\tau c^\upsilon \mathfrak{J}^{\psi p} \end{aligned}$$

Écrivons que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{J}'^{\delta' p}, \qquad a'c' = c'a'\mathfrak{J}'^{\varepsilon' p}, \qquad b'c' = c'b'\mathfrak{J}'^{\zeta' p}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \lambda\delta' &\equiv \delta\lambda\rho + \varepsilon\lambda\sigma + \zeta(\mu\sigma - \nu\rho) \qquad (\text{mod } p), \\ \lambda\varepsilon' &\equiv \delta\lambda\tau + \varepsilon\lambda\upsilon + \zeta(\mu\upsilon - \nu\tau) \end{aligned}$$

et

$$\lambda\zeta' \equiv \zeta(\rho\upsilon - \sigma\tau) \qquad (\text{mod } p).$$

La discussion des congruences donne le groupe

$$(\mathfrak{J}^{p^3} = b^p = c^p = 1, \ bc = cb\mathfrak{J}^{p^2}), \qquad \text{type } (3)(1,1),$$

qui a

$$\begin{array}{llll} p^4(p-1) & \text{opérations} & \text{d'ordre} & p^3, \\ p^3(p-1) & \text{»} & \text{»} & p^2, \\ p^3 - 1 & \text{»} & \text{»} & p. \end{array}$$

79. Soit

$$a^p = \mathfrak{J}, \qquad b^p = \theta, \qquad \mathfrak{J}^p = \theta^p, \qquad \mathfrak{J}^p = \theta^p = c^p = 1,$$
$$ab = ba\theta^\delta, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon, \qquad bc = cb\theta^\zeta,$$

d'où

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \theta^{(\delta\lambda\mu + \varepsilon\lambda\nu + \zeta\mu\nu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \Im' = \Im^\lambda \theta^\mu,$$
$$b' = b^\sigma c^\tau \Im^\alpha, \qquad \theta' = \theta^\sigma, \qquad \lambda\sigma\upsilon \not\equiv 0 \pmod p,$$
$$c' = c^\upsilon \Im^\varphi \theta^\psi.$$

Exprimons que

$$a' b' = b' a' \theta'^{\delta'}, \qquad a' c' = c' a' \theta'^{\varepsilon'}, \qquad b' c' = c' b' \theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\sigma\delta' \equiv \varepsilon\lambda\tau + \delta\lambda\sigma + \zeta(\mu\tau - \nu\sigma) \pmod p,$$
$$\sigma\varepsilon' \equiv \varepsilon\lambda\upsilon + \zeta\mu\upsilon, \qquad \zeta' \equiv \zeta\upsilon \pmod p.$$

On aura

$p^3(p^2 - 1)$ opérations d'ordre p^2,
$p^3 - 1$ » » p.

On trouve le groupe

$$(a^p = \Im,\ \theta^{p^2} = \Im^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta^p), \qquad \text{type } (2, 1)(1, 1),$$

puis des groupes décomposables.

80. Soit

$$a^p = \Im,\ b^p = c^p = \Im^p = \theta^p = 1,$$
$$ab = ba\theta^\delta, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon, \qquad bc = cb\theta^\zeta,$$

d'où

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \theta^{(\delta\lambda\mu + \varepsilon\lambda\nu + \zeta\mu\nu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu \theta^\alpha, \qquad \theta' = \theta^\omega,$$
$$b' = b^\rho c^\sigma \theta^\beta \Im^\varphi, \qquad \Im' = \Im^\lambda,$$
$$c' = b^\tau c^\upsilon \theta^\gamma \Im^\psi,$$

et exprimons que

$$a' b' = b' a' \theta'^{\delta'}, \qquad a' c' = c' a' \theta'^{\varepsilon'}, \qquad b' c' = c' b' \theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\omega\delta' \equiv \delta\lambda\rho + \varepsilon\lambda\sigma + \zeta(\sigma\mu - \nu\rho) \qquad (\text{mod } p),$$
$$\omega\varepsilon' \equiv \delta\lambda\tau + \varepsilon\lambda\upsilon + \zeta(\mu\upsilon - \nu\tau),$$
$$\omega\zeta' \equiv \zeta(\rho\upsilon - \tau\sigma).$$

La discussion de ces congruences ne donne que des groupes décomposables.

81. Partons des équations de définition

$$a^p = \mathfrak{I}, \qquad b^p = \theta, \qquad c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,$$
$$ac = ca\mathfrak{I}^\gamma\theta^\delta, \qquad bc = cb\theta^\varepsilon, \qquad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\zeta.$$

Alors

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \mathfrak{I}^{(\lambda\mu+\gamma\lambda\nu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}} \theta^{(\delta\lambda\nu+\varepsilon\mu\nu+\zeta\lambda\mu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^\lambda\theta^\mu$$
$$b' = a^\rho b^\sigma c^\tau, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^\rho\theta^\sigma \qquad \upsilon(\lambda\sigma - \mu\rho) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$
$$c' = c^\upsilon \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\mathfrak{I}'^{\gamma'}\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\lambda\gamma' + \rho\delta' \equiv \gamma\lambda\upsilon, \qquad \mu\gamma' + \sigma\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon,$$
$$\rho\varepsilon' \equiv \gamma\rho\upsilon, \qquad \sigma\varepsilon' \equiv \delta\rho\upsilon + \varepsilon\sigma\upsilon,$$
$$\rho\zeta' + \lambda \equiv \gamma(\lambda\tau - \rho\nu) + \lambda\sigma - \mu\rho,$$
$$\sigma\zeta' + \mu \equiv \delta(\lambda\tau - \rho\nu) + \varepsilon(\tau\mu - \nu\sigma) + \zeta(\lambda\sigma - \mu\rho).$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left\{\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}\theta,\ bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{I} \\ a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}^\gamma,\ bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{I} \\ \text{[2 valeurs de } \gamma \text{ associées, telles que leur produit soit congru} \\ \text{à 1 (mod } p\text{), donnent le même groupe]} \end{array}\right\},$$

$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I},\ bc = cb,\ ab = ba\mathfrak{I}\theta),$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = ba\mathfrak{I}).$$

82. Soit

$$a^p = \mathfrak{I},\qquad c^p = \theta,\qquad b^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,$$
$$ac = ca\theta^\delta,\qquad bc = cb\theta^\varepsilon,\qquad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\zeta,$$

de sorte que

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^p = \mathfrak{I}^\lambda \theta^\nu \qquad (p > 3).$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu,\qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^\lambda \theta^\nu,$$
$$b' = b^\rho \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi,\qquad \theta' = \mathfrak{I}^\sigma \theta^\upsilon,$$
$$c' = a^\sigma b^\tau c^\upsilon.$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'},\qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'},\qquad a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\sigma\delta' \equiv \lambda\tau - \mu\sigma,\qquad \upsilon\delta' \equiv \delta(\lambda\upsilon - \sigma\nu) + \varepsilon(\mu\upsilon - \nu\tau) + \zeta(\lambda\tau - \mu\sigma),$$
$$\sigma\varepsilon' \equiv -\sigma\rho,\qquad \upsilon\varepsilon' \equiv \varepsilon\upsilon\sigma - \zeta\rho\sigma,$$
$$\sigma\zeta' \equiv \lambda\rho - \lambda,\qquad \upsilon\zeta' \equiv \zeta\lambda\rho - \varepsilon\nu\rho - \nu.$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$a^p = \mathfrak{I}$, $b^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1$, $c^p = \theta$, $ac = ca$, $bc = cb\theta^\varepsilon$, $ab = ba\mathfrak{I}$; deux valeurs de ε, associées, donnent le même groupe [type (1, 1) (1, 1, 1)].

83. Soit

$$a^p = \mathfrak{I},\qquad b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\qquad ac = ca\theta^\delta,$$
$$bc = cb\theta^\varepsilon,\qquad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\zeta.$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu \theta^\alpha,\qquad \theta' = \mathfrak{I}^\omega \theta^\eta,$$
$$b' = b^\rho c^\sigma \mathfrak{I}^\varphi \theta^\beta,\qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^\lambda,$$
$$c' = b^\tau c^\upsilon \mathfrak{I}^\psi \theta^\gamma.$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'},\qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'},\qquad a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\omega\delta' &\equiv \lambda\tau, & \eta\delta' &\equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon(\mu\upsilon - \nu\sigma) + \zeta\lambda\tau, \\
\omega\varepsilon' &\equiv 0, & \eta\varepsilon' &\equiv \varepsilon(\upsilon\rho - \sigma\tau), \\
\omega\zeta' + \lambda &\equiv \lambda\rho, & \eta\zeta' &\equiv \delta\lambda\sigma + \varepsilon(\mu\sigma - \nu\rho) + \zeta\lambda\rho,
\end{aligned}$$

qui donnent les groupes

$$(a^p = \mathfrak{S},\ b^p = c^p = \mathfrak{S}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca,\quad bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{S}),$$
$$(a^p = \mathfrak{S},\ b^p = c^p = \mathfrak{S}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\quad ab = ba\mathfrak{S}),$$

plus un groupe décomposable.

84. Soit maintenant

$$a^p = \theta,\quad b^p = c^p = d^p = 1,\quad ab = bac,\quad ac = ca\theta^\zeta,\quad ad = da\theta^\eta,$$
$$bc = cb\theta^\lambda,\quad cd = dc\theta^\nu,\quad bd = dbc^\delta\theta^\mu,\quad (\nu = \delta\zeta),\quad (p > 3).$$

Alors on a

$$(a^l b^n d^m)^\rho = \quad d^{m\rho}(a^l b^n)^\rho c^{mn\delta\frac{\rho(\rho+1)}{2}}$$
$$\times\, \theta^{m\frac{\rho(\rho+1)}{2}\left(n\mu+\eta l-\lambda\delta\frac{n(n-1)}{2}\right)+\nu\delta nm\frac{\rho(\rho+1)}{12}[m(2\rho+1)-3]}\,\theta^{-mn\delta(\zeta l+\lambda n)\frac{\rho(\rho^2-1)}{3}}.$$

Donc

$$(a^l b^n d^m c^p)^p = \theta^l.$$

Soit

$$\begin{aligned}
a' &= a^l b^m d^n c^p, \\
b' &= b^r d^s c^t \theta^\alpha, \\
c' &= b^\rho d^\sigma c^\upsilon \theta^\beta, \qquad \theta' = \theta^l, \\
d' &= b^\tau d^\varphi c^\psi \theta^\gamma,
\end{aligned}$$

et exprimons que $a'b' = b'a'c'$, $a'c' = c'a'\theta'^{\zeta'}$, $a'd' = d'a'\theta'^{\eta'}$, …, on a

$$\upsilon \equiv lr + \delta(ms - nr)$$

puis une congruence qui donne β, et que je n'écris point; puis

$$\begin{aligned}
l\zeta' &\equiv \zeta l\upsilon + \lambda m\upsilon - \nu n\upsilon, \\
l\tau &\equiv \delta(n\tau - m\varphi),
\end{aligned}$$

puis une congruence qui donne η' et que je n'écris point;

puis

$$l\lambda' \equiv \lambda r \upsilon - \nu s \upsilon,$$

$$l\nu' \equiv - \lambda \tau \upsilon + \nu \varphi \upsilon,$$

$$\upsilon \delta' \equiv \delta(r\varphi - s\tau),$$

$$\begin{aligned}\beta\delta' + l\mu' \equiv{}& \lambda(r\psi - t\tau) + \mu(r\varphi - s\tau) + \nu(t\varphi - s\psi)\\ &+ \nu\delta\left(r\frac{\varphi(\varphi-1)}{2} - \tau\frac{s(s-1)}{2}\right)\\ &+ \lambda\delta\left(s\frac{\tau(\tau-1)}{2} - \varphi\frac{r(r-1)}{2}\right) + \nu\delta\varphi s(r - \varpi).\end{aligned}$$

Voici les groupes correspondants

$$\begin{pmatrix} a^p = \theta, & b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, & ab = bac, & ac = ca\theta \\ & ad = da, \quad bc = cb\theta, & cd = dc\theta, & bd = dbc \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^p = \theta, & b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, & ab = bac, & ac = ca \\ & ad = da\theta, \quad bc = cb\theta, & cd = dc, & bd = dbc \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^p = \theta, & b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, & ab = bac, & ac = ca \\ & ad = da, \quad bc = cb\theta, & cd = dc, & bd = dbc \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^p = \theta, & b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, & ab = bac, & ac = ca\theta \\ & ad = da, \quad bc = cb\theta, & cd = dc, & bd = db\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a^p = \theta, & b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, & ab = bac, & ac = ca\theta \\ ad = da, & bc = cb\theta^u, \quad cd = dc, & bd = db\theta, & \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a^p = \theta, & b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, & ab = bac, & ac = ca \\ & ad = da\theta, \quad bc = cb\theta, & cd = dc, & bd = db \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a^p = \theta, & b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, & ab = bac, & ac = ca \\ ad = da\theta, & bc = cb\theta^u, \quad cd = dc, & bd = db, & \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{bmatrix},$$

$$(a^p = \mathfrak{I}, \ \mathfrak{I}^p = \theta^p = b^p = c^p = 1, \ ac = ca, \ bc = cb\mathfrak{I}, \ ab = ba\theta),$$

plus des groupes décomposables.

85. Soit

$$a^p = \theta, \qquad b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad ab = ba\theta^\alpha, \qquad ac = ca,$$
$$ad = da\theta^\beta, \qquad bc = cb\theta^\gamma, \qquad bd = dbc, \qquad cd = dc\theta^\delta.$$

Alors

$$(b^{\mu} d^{\sigma})^{p} = \theta^{\delta\mu\sigma\frac{p(p+1)}{12}[\sigma(2p+1)-3]-\gamma\sigma\mu^2\frac{p(p^2-1)}{3}}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} d^{\rho}, \\ b' &= b^{\sigma} c^{\tau} d^{\upsilon} \theta^{m}, \\ c' &= b^{\xi} c^{\zeta} d^{\eta} \theta^{n}, \qquad \theta' = \theta^{\lambda} \quad (p > 3), \\ d' &= b^{\iota} c^{\varphi} d^{\psi} \theta^{q}. \end{aligned}$$

Exprimons que $a'b' = b'a'\theta'^{\alpha'}$, ...

Il vient

$$\zeta \equiv \sigma\psi - \iota\upsilon, \qquad \lambda\gamma' \equiv \gamma\sigma\zeta - \delta\upsilon\zeta, \qquad \lambda\delta' \equiv \delta\psi\zeta - \gamma\iota\zeta,$$

$$n \equiv \delta\left(\zeta\upsilon - \iota\frac{\upsilon(\upsilon-1)}{2} + \sigma\frac{\psi(\psi-1)}{2} - \upsilon(\varphi - \iota\upsilon)\right.$$
$$\left. + \psi(\tau + \zeta - \sigma\psi)\right) + \gamma\left(\upsilon\frac{\iota(\iota-1)}{2} - \psi\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} - \iota\tau + \sigma\varphi\right),$$

$$\rho\sigma \equiv \mu\upsilon, \qquad \delta\rho \equiv \gamma\mu, \qquad \rho^2 \equiv \mu\psi,$$

$$\lambda\alpha' \equiv \alpha\lambda\sigma + \beta\lambda\upsilon + \gamma\left(\rho\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} - \upsilon\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu\tau - \nu\sigma\right)$$
$$+ \delta\left(\mu\frac{\upsilon(\upsilon-1)}{2} - \sigma\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \rho(\tau - \rho\sigma) + \upsilon(\nu - \mu\upsilon)\right),$$

$$\lambda\beta' \equiv \alpha\lambda\iota + \beta\lambda\psi + \gamma\left(\rho\frac{\iota(\iota-1)}{2} - \psi\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu\varphi - \nu\iota\right)$$
$$+ \delta\left(\mu\frac{\psi(\psi-1)}{2} - \iota\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \varphi(\varphi - \rho\iota) + \psi(\nu - \mu\psi)\right).$$

Voici les groupes que donne la discussion de ces congruences

$$\left(\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = ba\theta\ \ ac = ca \\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = dbc,\ cd = dc\theta \end{matrix}\right)$$

$$(\Im^{p^2} = b^p = c^p = d^p = 1,\ bc = cb\Im^p,\ bd = dbc,\ cd = dc).$$

86. Soit

$$a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad ab = bac, \qquad ac = ca\theta^{\zeta},$$
$$ad = da\theta^{\eta}, \qquad bc = cb\theta^{\lambda}, \qquad bd = db\theta^{\mu}, \qquad cd = dc.$$

Alors

$$(a^l b^m c^n d^q)^{\rho} = (c^n d^q)^{\rho} (a^l b^m)^{\rho} \theta^{(\lambda mn + \mu mq + \zeta ln + \eta lq)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$\begin{aligned}
a' &= a^l b^m c^n d^\pi \theta^\alpha,\\
b' &= a^q b^r c^s d^t \theta^\beta,\\
c' &= c^u \theta^\gamma,\\
d' &= a^\rho b^\sigma c^\tau d^\varepsilon \theta^\delta,\\
\theta' &= \theta^\omega.
\end{aligned}$$

Exprimons que

$$a'b' = b'a'c', \qquad a'c' = c'a'\theta'^{\zeta'}, \quad \ldots.$$

Il vient

$$u \equiv bc - mq \qquad\qquad (\bmod p),$$

$$\begin{aligned}
\gamma \equiv{} & \eta(lt - \pi q) + \zeta(ls - qn)\\
& + \mu(mt - \pi r) + \lambda\left(q\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{r(r-1)}{2}\right)\\
& + \zeta\left(m\frac{q(q-1)}{2} - r\frac{l(l-1)}{2}\right) + \lambda(ms - nr) + \lambda mr(q - l),
\end{aligned}$$

$$\omega\zeta' \equiv \zeta lu + \lambda mu, \qquad m\rho \equiv \sigma l,$$

$$\begin{aligned}
\omega\eta' \equiv{} & \eta(l\varepsilon - \pi\rho) + \zeta(l\tau - \rho n)\\
& + \mu(m\varepsilon - \pi\sigma) + \lambda\left(\rho\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\right)\\
& + \zeta\left(m\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \sigma\frac{l(l-1)}{2}\right) + \lambda(m\tau - \sigma n) + \lambda m\sigma(\rho - l),
\end{aligned}$$

$$\omega\lambda' \equiv \xi qu + \lambda ru, \qquad r\rho \equiv q\sigma, \qquad \lambda\sigma + \zeta\rho \equiv 0,$$

$$\begin{aligned}
\omega\mu' \equiv{} & \eta(q\varepsilon - t\rho) + \zeta(q\tau - s\rho)\\
& + \mu(r\varepsilon - t\sigma) + \lambda\left(\rho\frac{r(r-1)}{2} - q\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\right)\\
& + \zeta\left(r\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \sigma\frac{q(q-1)}{2}\right) + \lambda(r\tau - s\sigma) + \lambda r\sigma(\rho - q).
\end{aligned}$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left(\begin{array}{c} a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\\ ac = ca\theta,\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = db\theta,\ cd = dc \end{array}\right),$$

$$(a^p = b^p = c^p = \theta^p = \mathfrak{I}^p = 1,\ ab = ba\mathfrak{I},\ ac = ca\theta,\ bc = cb),$$

plus des groupes décomposables.

87. Si l'on part des équations de définition

$$a^p = \theta, \quad c^p = \mathfrak{I}, \quad b^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \quad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta,$$
$$ac = ca\theta^\varepsilon, \quad bc = cb\theta^\zeta,$$

que l'on pose

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \quad \theta' = \theta^\lambda \mathfrak{I}^\nu,$$
$$c' = a^\rho b^\sigma c^\tau, \quad \mathfrak{I}' = \theta^\rho \mathfrak{I}^\tau,$$
$$b' = b^\upsilon \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi,$$

et que l'on exprime que

$$a' b' = b' a' \mathfrak{I}' \theta'^{\delta'}, \ldots$$

il vient

$$\tau + \nu\delta' \equiv \lambda\upsilon, \quad \rho + \lambda\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon - \zeta\nu\upsilon,$$
$$\nu\varepsilon' \equiv \lambda\sigma - \rho\mu, \quad \nu\zeta' + \rho\upsilon \equiv 0, \quad \lambda\zeta' \equiv \zeta\tau\upsilon - \delta\rho\upsilon,$$
$$\lambda\varepsilon' \equiv \varepsilon(\lambda\tau - \nu\rho) + \zeta(\mu\tau - \nu\sigma) + \delta(\lambda\sigma - \rho\mu).$$

On en conclut, par exemple,

$$(\zeta' - \zeta\upsilon^2)^2 \equiv \upsilon(\delta' - \delta\upsilon)(\delta\zeta' - \zeta\delta'\upsilon).$$

Les groupes correspondants auront

$$p^3(p^2 - 1) \text{ opérations d'ordre } p^2,$$
$$p^3 - 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad p.$$

Voici ces groupes

$$\left[\begin{matrix} a^p = \mathfrak{I},\ c^p = \theta,\ b^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1 \\ ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I}^\alpha,\ ab = ba\mathfrak{I}\theta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p-1) \end{matrix}\right],$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}\theta,\ ab = ba\mathfrak{I},\ bc = cb)$$
$$(a^p = \theta,\ b^p = \theta^p = \mathfrak{I}^{p^2} = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^p\theta)$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1.\ ac = ca\theta,\ ab = ba,\ cb = bc\mathfrak{I})$$
$$\left[\begin{matrix} a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1 \\ ac = ca\theta,\ ab = ba,\ cb = bc\mathfrak{I}^u, \qquad \left(\dfrac{u}{p}\right) = -1 \end{matrix}\right].$$

88. Soit

$$c^p = \mathfrak{I}, \quad a^p = b^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \quad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta, \quad ac = ca\theta^\varepsilon,$$
$$bc = cb\theta^\zeta.$$

Posons

$$a' = a^{\lambda} b^{\mu} \mathfrak{I}^{\varphi}, \qquad \theta' = \theta^{\omega} \mathfrak{I}^{\tau},$$
$$b' = a^{\rho} b^{\sigma} \mathfrak{I}^{\psi}, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^{n},$$
$$c' = a^{l} b^{m} c^{n},$$

et exprimons que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\delta'}, \qquad a'c' = c'a'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\zeta'}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
n + \tau\delta' &\equiv \lambda\sigma - \rho\mu,\\
\omega\delta' &\equiv \delta(\lambda\sigma - \rho\mu),\\
\tau\varepsilon' &\equiv \lambda m - \mu l,\\
\omega\varepsilon' &\equiv \varepsilon\lambda n + \delta(\lambda m - \mu l) + \zeta\mu n,\\
\tau\zeta' &\equiv \rho m - \sigma l,\\
\omega\zeta' &\equiv \varepsilon\rho n + \delta(\rho m - \sigma l) + \zeta\sigma n.
\end{aligned}$$

Le groupe contient

$p^4(p-1)$ opérations d'ordre p^2,
$p^4 - 1$ » » p.

Il est défini par les équations

$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\mathfrak{I}\theta,\ ab = ba).$$

89. Soit

$$a^p = \theta, \qquad b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad ab = ba\theta^{\alpha}, \qquad ac = ca\theta^{\beta},$$
$$ad = da\theta^{\gamma}, \qquad cd = dc\theta^{\lambda}, \qquad db = bd\theta^{\mu}, \qquad bc = cb\theta^{\nu}.$$

Posons

$$\begin{aligned}
a' &= a^{\pi} b^{m} c^{n} d^{l},\\
b' &= b^{x} c^{y} d^{z} \theta^{\sigma},\\
c' &= b^{x'} c^{y'} d^{z'} \theta^{\tau}, \qquad \theta' = \theta^{\pi},\\
d' &= b^{x''} c^{y''} d^{z''} \theta^{\upsilon}
\end{aligned}$$

et exprimons que

$$a'b' = b'a'\theta'^{\alpha'}, \qquad a'c' = c'a'\theta'^{\beta'}, \qquad \ldots.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\pi\alpha' &= \pi(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \lambda(mz - ny) + \mu(nx - lz) + \nu(ly - mx),\\
\pi\beta' &= \pi(\alpha x' + \beta y' + \gamma z') + \lambda(mz' - ny') + \mu(nx' - lz') + \nu(ly' - mx'),\\
\pi\gamma' &= \pi(\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'') + \lambda(mz'' - ny'') + \mu(nx'' - lz'') + \nu(ly'' - mx''),\\
\pi\lambda' &= \lambda(y'z'' - z'y'') + \mu(z'x'' - x'z'') + \nu(x'y'' - y'x''),\\
\pi\mu' &= \lambda(y''z - z''y) + \mu(z''x - x''z) + \nu(x''y - y''x),\\
\pi\nu' &= \lambda(yz' - zy') + \mu(zx' - xz') + \nu(xy' - yx').
\end{aligned}$$

Le groupe correspondant

$$\begin{pmatrix} a^p = \theta, \;\; b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \;\; ab = ba\theta, \;\; ac = ca, \\ ad = da, \;\; cd = dc\theta, \;\; bd = db, \;\; bc = cb \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^2, \\ p^4 - 1 & \quad\text{»} \qquad\qquad \text{»} & p. \end{array}$$

90. Soit

$$a_i^p = \theta^p = 1, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \qquad a_i a_j = a_j a_i \theta^{\alpha_{ij}} \qquad (\alpha_{ij} = -\alpha_{ij}).$$

Posons

$$a'_i = a_1^{x_{i1}} a_2^{x_{i2}} a_3^{x_{i3}} a_4^{x_{i4}} \theta^{y_i}, \qquad \theta' = \theta^\omega;$$

alors

$$a'_i a'_j = a'_j a'_i \theta'^{\alpha'_{ij}}$$

donne

$$\omega \alpha'_{ij} = \sum_{k,l} \alpha_{kl} x_{ik} x_{jl}.$$

On déduit de là

$$\omega^2(\alpha'_{23}\alpha'_{14} + \alpha'_{31}\alpha'_{24} + \alpha'_{12}\alpha'_{34}) = (x_{11}x_{22}x_{33}x_{44}) \times (\alpha_{23}\alpha_{14} + \alpha_{31}\alpha_{24} + \alpha_{12}\alpha_{34}).$$

Le groupe contiendra $p^5 - 1$ opérations d'ordre p. On a ainsi

$$\begin{pmatrix} a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \;\; ab = ba\theta, \;\; ac = ca, \\ ad = da, \;\; cd = dc\theta, \;\; db = bd, \;\; bc = cb \end{pmatrix} \qquad [\text{type } (1)(1,1,1,1)].$$

91. Prenons comme point de départ les équations suivantes :

$$a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad c^p = \theta, \qquad ab = ba, \qquad ac = cab,$$
$$dc = cad, \qquad ad = dab^\delta \theta^\varepsilon, \qquad bd = db\theta^{\nu\delta}, \qquad bc = cb\theta^\nu.$$

Posons

$$\begin{aligned} c' &= d^n c^\pi a^l b^m, \\ a' &= d^r a^s b^t \theta^\varphi, \qquad \theta' = \theta^\pi, \\ b' &= d^\rho a^\sigma b^\tau \theta^\psi, \\ d' &= d^\lambda a^\mu b^\upsilon \theta^\omega \end{aligned}$$

et exprimons que l'on a

$$a' b' = b' a', \qquad a' c' = c' a' b', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$\rho = \sigma = r = 0.$$

d'où

$$\lambda\sigma\tau\pi \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

$$s \equiv \lambda\pi, \qquad \tau \equiv s(\delta n + \pi),$$

$$\psi \equiv (\delta n + \pi)\nu t + \left(\varepsilon n + \nu\delta^2 \frac{n(n-1)}{2} + \nu\delta n\pi + \nu\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right)s,$$

$$t \equiv \lambda\frac{\pi(\pi-1)}{2} + \delta\pi\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \delta\lambda l + \mu\pi + \delta\mu n,$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv{} & \nu\delta(n\upsilon - \lambda m) + \varepsilon(\mu n - \lambda l) \\ & + \nu\delta^2\left(\mu\frac{n(n-1)}{2} - l\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\right) + \nu\pi\upsilon + \varepsilon\pi\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \\ & + \nu\delta^2\pi\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6} + \nu\delta\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\frac{\pi(\pi-1)}{2} \\ & + \nu\lambda\frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{6} + \nu\delta\mu n\pi + \mu\nu\frac{\pi(\pi-1)}{2}, \end{aligned}$$

$$\tau\delta' \equiv \delta s\lambda, \qquad \psi\delta' + \pi\varepsilon' \equiv \nu\delta\lambda t + \varepsilon s\lambda + \nu\delta^2 s\frac{\lambda(\lambda-1)}{2},$$

$$\pi\nu'\delta' \equiv \lambda\tau\nu\delta, \qquad \pi\nu' \equiv \nu\tau(\delta n + \pi).$$

La discussion de ces congruences conduit aux groupes suivants :

$$\left(\begin{array}{c} a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1, \quad c^p = \theta, \quad ab = ba, \quad ac = cab, \\ dc = cda, \quad ad = dab, \quad bd = db\theta, \quad bc = cb\theta \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1, \quad c^p = \theta, \quad ab = ba, \quad ac = cab, \quad dc = cda, \\ ad = dab\theta, \quad bd = db\theta^u, \quad bc = cb\theta^u, \quad u = 1, 2, \ldots, p-1 \end{array}\right).$$

Ces groupes sont du type (1)(1)(1)(1, 1).

$$(a^p = \mathfrak{I}, \ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \ ac = ca\theta, \ ab = bac, \ bc = cb\mathfrak{I}\theta) \qquad [\text{type } (1, 1)(1)(1)];$$

$$(a^p = \mathfrak{I}, \ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \ ac = ca\theta, \ ab = bac, \ bc = cb\mathfrak{I}) \qquad [\text{type } (1, 1)(1)(1)]$$

$$\begin{array}{l} a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1, \\ ab = ba, \quad c^p = \theta, \\ ac = cab, \quad dc = cad, \\ bd = db, \\ [\text{type } (1)(1)(1)(1, 1)], \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} \text{avec} & ad = da\theta, & bc = cb\theta, \\ \text{ou avec} & ad = da\theta^u, & bc = cb\theta, \quad \left(\dfrac{u}{p}\right) = -1; \\ \text{ou avec} & ad = da\theta, & bc = cb\theta^v, \quad \left(\dfrac{v}{p}\right) = -1; \\ \text{ou avec} & ad = da\theta^u, & bc = cb\theta^v, \quad \left(\dfrac{u}{p}\right) = -1, \quad \left(\dfrac{v}{p}\right) = -1 \\ \text{ou avec} & ad = da, & bc = cb\theta; \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I}, \quad b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \quad ac = ca\theta, \\ ab = bac, \quad bc = cb\mathfrak{I}^u, \quad \left(\dfrac{u}{p}\right) = -1 \end{array}\right) \qquad [\text{type } (1, 1)(1)(1, 1)].$$

92. Soit

$$a^p = b^p = c^p = \theta^p = 1, \qquad d^p = \theta, \qquad ab = ba, \qquad ac = cab,$$
$$dc = cda, \qquad ad = da\theta^\varepsilon, \qquad bd = db, \qquad bc = cb\theta^\nu.$$

Le groupe contient

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^2, \\ p^4 - 1 & \quad \text{»} \qquad\quad \text{»} & p. \end{array}$$

Posons

$$\begin{array}{ll} a' = a^l b^m c^n \theta^\alpha, & \\ b' = a^\rho b^\sigma c^\tau \theta^\beta, & \theta' = d'^\pi = \theta^\upsilon, \\ c' = a^\pi b^q c^r \theta^\gamma, & \\ d' = a^\xi b^\eta c^\zeta d^\upsilon. & \end{array}$$

Écrivons que l'on a

$$a'b' = b'a', \qquad a'c' = c'a'b', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$\tau = n = \rho = \zeta = 0,$$

$$\sigma \equiv lr, \qquad \beta \equiv \nu\left(mr + l\frac{r(r-1)}{2}\right),$$

$$l \equiv r\upsilon, \qquad m \equiv r\xi + \upsilon\frac{r(r-1)}{2},$$

$$\begin{aligned}\alpha \equiv \varepsilon\upsilon(l-\pi) + \nu\xi\frac{r(r-1)}{2} + \nu r(\eta - r\xi)\\ + \nu l\frac{r(r-1)}{2} + \nu\upsilon\frac{r(r-1)(r-2)}{6} + \varepsilon r\frac{\upsilon(\upsilon-1)}{2}\\ - \varepsilon r\upsilon^2 + \nu r(m - lr) - \nu r\upsilon\frac{r(r-1)}{2} - \nu r\left(\upsilon\frac{r(r-1)}{2} - r^2\upsilon\right),\end{aligned}$$

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon l, \qquad \upsilon\nu' \equiv \sigma r\nu, \qquad \upsilon r l\sigma \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

On trouve les groupes

$$\left(\begin{array}{l}a^p = b^p = c^p = \theta^p = 1,\ d^p = \theta,\ ab = ba,\\ ac = cab,\ dc = cda,\ ad = da\theta,\ bd = db\end{array}\right),$$

puis

$$bc = cb\theta$$

ou

$$bc = cb\theta^u,$$

u étant tel que la congruence $\nu r^3 \equiv u$ (mod p) admet des solutions, alors que la congruence $\nu r^3 \equiv 1$ (mod p) n'en admet point;

$$\left(\begin{array}{l}a^p = b^p = c^p = \theta^p = 1,\ d^p = \theta,\ ab = ba,\\ ac = cab,\ dc = cda,\ ad = da,\ bd = db\end{array}\right),$$

puis

$$bc = cb\theta$$

ou

$$bc = cb\theta^u,$$

u étant un nombre tel que la congruence $\nu r^3 \equiv u$ admet des solutions, alors que la congruence $\nu r^3 \equiv 1$ (mod p) n'en admet pas.

Enfin

$$(a^p = c^p = \theta^p = \Im^p = 1,\ d^p = \theta,\ ac = ca\Im,\ dc = cda,\ ad = da\theta).$$

93. Soit

$$a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = cab,$$
$$dc = cda, \qquad ad = da\theta^\varepsilon, \qquad bd = db, \qquad bc = cb\theta^\nu.$$

Ici, toutes les opérations sont d'ordre p.

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m c^n d^\pi \theta^\alpha, \\ b' &= a^q b^r c^s d^t \theta^\beta, \\ c' &= a^\xi b^\eta c^\zeta d^\upsilon \theta^\gamma, \qquad \theta' = \theta^\omega, \\ d' &= a^\rho b^\sigma c^\tau d^\iota \theta^\delta \end{aligned}$$

et écrivons que l'on a

$$a'b' = b'a', \qquad a'c' = c'a'b', \qquad d'c' = c'd'a', \qquad \dots.$$

On trouve

$$n = \pi = q = s = t = \tau = 0, \qquad \text{d'où} \qquad lr\zeta\iota\omega \not\equiv 0 \pmod p,$$

$$r \equiv \zeta l, \qquad \beta \equiv \varepsilon\upsilon l + \nu l \frac{\zeta(\zeta-1)}{2} + \nu\zeta m,$$

$$l \equiv \iota\zeta, \qquad m \equiv \rho\zeta + \iota\frac{\zeta(\zeta-1)}{2},$$

$$\begin{aligned} \alpha \equiv{} & \varepsilon\iota(l-\xi) + \varepsilon\upsilon(l+\rho) \\ & + \nu(\rho+l)\frac{\zeta(\zeta-1)}{2} + \nu\zeta[m+\sigma-(l+\rho)\zeta] \\ & + \nu\iota\frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)}{6} + \varepsilon\zeta\frac{\iota(\iota-1)}{2} - \nu\iota\zeta\frac{\zeta(\zeta-1)}{2} + \nu\iota\zeta\frac{\zeta(\zeta+1)}{2}, \end{aligned}$$

$$\omega\varepsilon' \equiv \varepsilon\iota^2\zeta, \qquad \omega\nu' \equiv \nu\iota\zeta^3.$$

Voici les groupes que donne la discussion de ces congruences :

$$\left(\begin{matrix} a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \ ab = ba, \\ ac = cab, \ dc = cda, \ bd = db, \ bc = cb\theta \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{avec} & ad = da\theta, \\ \text{puis avec} & ad = da \end{matrix}\right.\right),$$

$$(a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \ bc = cb\mathfrak{I}, \ ab = bac, \ ac = ca\theta).$$

94. Soit

$$a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \qquad b^p = \mathfrak{I}, \qquad c^p = \theta, \qquad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta,$$
$$cb = bca, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon.$$

Il y aura

$$p^3(p^2-1) \text{ opérations d'ordre } p^2,$$
$$p^3-1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad p.$$

Posons

$$a' = a^l \mathfrak{S}^\varphi \theta^\psi, \qquad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}^m \theta^n,$$
$$b' = b^m c^n a^\lambda, \qquad \theta' = \mathfrak{S}^\pi \theta^q,$$
$$c' = b^\pi c^q a^\mu.$$

Écrivons que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{S}'\theta'^{\delta'}, \qquad c'b' = b'c'a', \qquad \dots.$$

On trouve

$$\pi\delta' \equiv m(l-1), \qquad q\delta' \equiv \delta lm + n(\varepsilon l - 1),$$
$$l \equiv mq - n\pi, \qquad q\varepsilon' \equiv l(\varepsilon q + \delta\pi), \qquad \pi(\varepsilon' - l) \equiv 0,$$
$$\varphi \equiv m\mu - \pi\lambda + q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2},$$
$$\psi \equiv \delta(m\mu - \pi\lambda) + \varepsilon(n\mu - \lambda q) + \varepsilon\left(m\frac{q(q-1)}{2} - \pi\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right) + \varepsilon nq(m-\pi).$$

Les groupes que donne la discussion de ces congruences sont définis par les équations

$$a^p = \mathfrak{S}, \qquad b^p = \theta, \qquad c^p = \mathfrak{S}^p = \theta^p = 1, \qquad ab = bac,$$

avec

$$ca = ac\mathfrak{S} \left\{ \begin{array}{ll} & cb = bc\theta, \\ \text{ou} & cb = bc\mathfrak{S}\theta, \\ \text{ou} & cb = bc\mathfrak{S}^u\theta, \qquad \left(\dfrac{u}{p}\right) = -1, \end{array} \right.$$

ou avec

$$ca = ac\mathfrak{S}^\varepsilon, \qquad \varepsilon \not\equiv 0, \qquad \varepsilon \not\equiv 1, \qquad cb = bc\theta$$

[deux valeurs de ε, associées (mod p), donnant le même groupe].

95. Soit

$$a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \qquad c^p = \mathfrak{I}, \qquad b^p = \theta, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon,$$
$$ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta, \qquad cb = bca.$$

On a alors

$p^3(p^2-1)$ opérations d'ordre p^2,
$p^3 - 1$ » » p.

Posons

$$a' = a^l \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi,$$
$$b' = b^m c^n a^\lambda, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^q \theta^\pi,$$
$$c' = b^\pi c^q a^\mu, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^n \theta^m.$$

Écrivons que

$$a' b' = b' a' \mathfrak{I}' \theta'^{\delta'}, \qquad c' b' = b' c' a', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$n\delta' \equiv lm - q, \qquad m\delta' \equiv \delta lm + \varepsilon ln - \pi,$$

$$\varphi \equiv m\mu - \pi\lambda + q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2},$$

$$\psi \equiv \delta(m\mu - \pi\lambda) + \varepsilon(n\mu - \lambda q) + \varepsilon\left(m\frac{q(q-1)}{2} - \pi\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right) + \varepsilon nq(m-\pi),$$

$$n\varepsilon' \equiv l\pi, \qquad m\varepsilon' \equiv \delta l\pi + \varepsilon lq.$$

On a ainsi les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \;\; c^p = \mathfrak{I}, \;\; b^p = \theta, \;\; ac = ca\theta^\varepsilon, \\ ab = ba\mathfrak{I}\theta, \;\; cb = bca \;\; (\varepsilon = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \end{matrix}\right),$$

puis les 3 groupes suivants :

$$\left[\begin{matrix} a^p = \mathfrak{I}, \;\; b^p = \theta, \\ c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \\ ab = bac, \;\; cb = bc\mathfrak{I} \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ca = ac\theta, \\ \text{ou avec} & ca = ac\theta^u, \\ \text{ou avec} & ca = ac, \end{matrix}\right. \qquad \left(\frac{u}{p}\right) = -1\right].$$

96. Soit $a^p = b^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1$, $c^p = \mathfrak{I}$, $ac = ca\theta^\varepsilon$, $ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta$, $cb = bca$.

Posons

$$a' = a^l b^m \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi,$$
$$b' = a^s b^t \mathfrak{I}^\sigma \theta^\tau, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^r,$$
$$c' = a^\pi b^q c^r \theta^\alpha, \qquad \theta' = \theta^\omega.$$

Exprimons que $a'c' = c'a'\theta'^{\varepsilon'}$, $a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\delta'}$, $c'b' = b'c'a'$.

Il vient

$$m \equiv 0, \qquad q \equiv 0, \qquad \omega\varepsilon' \equiv \varepsilon l r, \qquad r \equiv lt, \qquad \omega\delta' \equiv \delta l t \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$
$$l \equiv rt, \qquad \varphi \equiv t(l+\pi) - r\frac{t(t+1)}{2},$$
$$\psi = \varepsilon r(l-s) + \delta t(l+\pi) - \delta r\frac{t(t+1)}{2} - \varepsilon t\frac{r(r+1)}{2}.$$

D'où l'on conclut les groupes

$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ca = ac,\ cb = bc\mathfrak{I}\theta,\ ab = bac),$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ca = ac\theta,\ cb = bc\mathfrak{I},\ ab = bac).$$

97. Soit $a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1$, $c^p = \mathfrak{I}$, $b^p = \theta$, $ac = ca\theta^\varepsilon$, $ab = ba\mathfrak{I}^u\theta^\delta$, $cb = cba$, $\left(\frac{u}{p}\right) = -1$.

Posons

$$a' = a^l \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi,$$
$$b' = b^m c^n a^\lambda, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^q \theta^\pi,$$
$$c' = b^\pi c^q a^\mu, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^n \theta^m.$$

Écrivons que $a'b' = b'a'\mathfrak{I}'^u\theta'^{\delta'}$, $c'b' = b'c'a'$, ...

On trouve

$$n\delta' \equiv u(lm - q), \qquad m\delta' + u\pi \equiv l(\varepsilon n + \delta m),$$
$$l \equiv mq - n\pi, \qquad \varphi \equiv u(m\mu - \pi l) + u\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right),$$
$$\psi \equiv \delta(m\mu - \pi\lambda) + \varepsilon(n\mu - q\lambda) + \varepsilon\left(m\frac{q(q-1)}{2} - \pi\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right) + \varepsilon nq(m-\pi),$$
$$n\varepsilon' \equiv ul\pi, \qquad m\varepsilon' \equiv \delta l\pi + \varepsilon lq \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Si $\delta l - \delta' \not\equiv 0$, $n \not\equiv 0$, les congruences sont incompatibles.

Si $n \equiv 0$, $\pi \equiv 0$, on a les groupes

$$\left[\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ca = ac\theta^\varepsilon,\ ab = bac,\ cb = bc\mathfrak{I}^u\theta \\ \varepsilon = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{array}\right],$$

puis

$$\left[\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta, \\ c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1 \\ ab = bac,\ cb = bc\mathfrak{I}^u, \\ \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{avec} & ca = ac\theta \\ \text{ou avec} & ca = ac\theta^v, \\ \text{ou avec} & ca = ac \end{array} \right. \quad \left(\frac{v}{p}\right) = -1 \right].$$

98. Enfin, si $a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1$, $c^p = \mathfrak{I}$, $b^p = 1$, $ac = ca\theta^\varepsilon$, $ab = ba\mathfrak{I}^u\theta^\delta$, $cb = bca$, en posant

$$\begin{array}{lll} a' = a^l b^m \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi, & & \\ b' = a^s b^t \mathfrak{I}^\sigma \theta^\tau, & \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^r & (\textit{voyez } \text{n}^\text{o}\ 96). \\ c' = a^\pi b^q c^r \theta^\alpha, & \theta' = \theta^\omega, & \end{array}$$

on trouve les groupes

$$\left[\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I}, \\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \\ ca = ac\theta,\ ab = bac \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} \text{avec} & cb = bc\mathfrak{I}^u\theta, & \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \\ \text{ou avec} & cb = bc\mathfrak{I}^u, & \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{array} \right. \right].$$

CHAPITRE VI.

SUR LES GROUPES D'ORDRE $3^5 = 243$.

99. L'énumération des groupes d'ordre p^5 exige que les cas $p = 2$, $p = 3$ soient examinés à part. Nous avons déjà parlé des groupes d'ordre 32.

Je vais dire quelques mots des groupes d'ordre $3^5 = 243$, en m'arrêtant de préférence, en général, aux groupes particuliers au nombre 3.

Citons cependant, en ne donnant que leurs équations de définition, les groupes suivants (je laisse de côté les groupes décomposables) :

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{27} = b^3 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^9),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ \mathfrak{I}^9 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^9 = b^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ \mathfrak{I}^9 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^3),$$

$$(a^9 = \theta,\ b^9 = \theta^3 = 1,\ ab = ba^4\theta^\alpha,\ \alpha = 0, 1, 2),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \mathfrak{I}',\ \mathfrak{I}^3 = \mathfrak{I}'^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I}, \\ \mathfrak{I}^9 = b^3 = c^3 = 1 \end{matrix}\ \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I}^3,\ ab = bac \\ \text{ou avec} & ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I}^6,\ ab = bac \\ \text{ou avec} & ac = ca\mathfrak{I}^3,\ bc = cb,\ ab = bac \end{matrix}\right.\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta, \\ \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = c^3 = 1,\ ab = bac \end{matrix}\ \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ac = ca,\ bc = cb\theta \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta,\ bc = cb \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta^2,\ bc = cb \end{matrix}\right.\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \\ ab = bac \end{matrix}\ \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ac = ca,\ bc = cb\theta \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta,\ bc = cb \end{matrix}\right.\right),$$

$$(\mathfrak{I}^{27} = b^3 = c^3 = 1,\ bc = cb\mathfrak{I}^9),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^9 = 1,\ ac = ca\theta^3),$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}^\alpha \\ bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{I}\ (\alpha = 0, 1, 2) \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta, \\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{avec} & ac = ca\mathfrak{I}, & bc = cb, & ab = ba\mathfrak{I}\theta \\ \text{ou avec} & ac = ca\mathfrak{I}\theta, & bc = cb\theta, & ab = ba\mathfrak{I} \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta, & bc = cb, & ab = ba\mathfrak{I} \end{matrix} \right. \right),$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ c^3 = \theta,\ ac = ca \\ bc = cb\theta^\alpha,\ ab = ba\mathfrak{I}\ (\alpha = 0, 1, 2) \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I} \\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{avec} & ac = ca, & bc = cb\theta, & ab = ba\mathfrak{I} \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta, & bc = cb, & ab = ba\mathfrak{I} \end{matrix} \right. \right),$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{I},\ c^3 = \theta,\ b^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^3 = 1,\ ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I}^\alpha \\ ab = ba\mathfrak{I}\theta,\ \alpha = 1, 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}\theta \\ bc = cb,\ ab = ba\mathfrak{I} \end{pmatrix},$$

$$(a^3 = \theta,\ b^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^9 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^3\theta),$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta \\ ab = ba,\ cb = bc\mathfrak{I}^\alpha,\ \alpha = 1, 2 \end{pmatrix},$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\mathfrak{I}\theta,\ ab = ba),$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\ ad = da \\ cd = dc\theta,\ bd = db,\ bc = cb \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\ ad = da \\ cd = dc\theta,\ bd = db,\ bc = cb \end{pmatrix}.$$

100. Partons maintenant des équations de définition :

$$a^3 = \theta, \quad b^3 = \theta^\beta, \quad c^3 = d^3 = \theta^3 = 1, \quad ab = bac, \quad ac = ca\theta^\zeta,$$
$$ad = da\theta^\eta, \quad bc = cb\theta^\lambda, \quad bd = dbc^\delta\theta^\mu, \quad cd = dc\theta^{\delta\zeta}.$$

Alors

$$(a^l b^m c^n d^p \theta^q)^3 = \theta^{l+\beta m+\lambda\delta p m^2+\zeta m l^2+\delta\zeta l m p+\delta^2\zeta m p^2+2\lambda l m^2}.$$

Posons

$$a' = a^l b^m c^n d^p \theta^q, \qquad d' = a^{r'} b^{s'} c^{t'} d^{u'} \theta^{v'},$$
$$b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} d^{p'} \theta^{q'}, \qquad \theta' = \theta^{l+\beta m+\lambda\delta p m^2+\zeta m l^2+\delta\zeta l m p+\delta^2\zeta m p^2+2\lambda l m^2} = \theta^\Delta.$$
$$c' = a^r b^s c^t d^u \theta^v,$$

Et écrivons que $a'b' = b'a'c'$, $a'c' = c'a'\theta'^\zeta$, ...

On trouve

$$t \equiv lm' - l'm + \delta(mp' - pm') \pmod 3,$$

$$\begin{aligned}
v \equiv\ & \delta\zeta t(p+p') + \eta(lp' - pl') + \zeta(ln' - nl') + \mu(mp' - p'm) \\
& + \delta^2\zeta\left(m\frac{p'(p'-1)}{2} - m'\frac{p(p-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\delta\left(p\frac{m'(m'-1)}{2} - p'\frac{m(m-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\left(l'\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\
& + \zeta\left(m\frac{l'(l'-1)}{2} - m'\frac{l(l-1)}{2}\right) + \lambda(mn' - nm') \\
& + \delta\zeta(np' - n'p) + \delta^2\zeta(m'p^2 - mp'^2) + \lambda mm'(l' - l),
\end{aligned}$$

$$\Delta\zeta' \equiv \zeta lt + \lambda mt - \delta\zeta pt,$$

$$ls' - r'm \equiv \delta(ps' - mu'),$$

$$\begin{aligned}
\Delta\eta' \equiv\ & \eta(lu' - r'p) + \zeta(lt' - r'n) + \mu(mu' - s'p) \\
& + \delta^2\zeta\left(m\frac{u'(u'-1)}{2} - s'\frac{p(p-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\delta\left(p\frac{s'(s'-1)}{2} - u'\frac{m(m-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\left(r'\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{s'(s'-1)}{2}\right) \\
& + \zeta\left(m\frac{r'(r'-1)}{2} - s'\frac{l(l-1)}{2}\right) \\
& + \lambda(mt' - ns') + \delta\zeta(nu' - t'p) + \delta^2\zeta(p^2s' - u'^2m) + \lambda ms'(r' - l),
\end{aligned}$$

$$\Delta\lambda' \equiv \zeta l't + \lambda m't - \delta\zeta p't, \qquad \Delta\delta'\zeta' \equiv \delta\zeta tu' - \zeta tr' - \lambda ts',$$

$$\delta't \equiv l's' - r'm' + \delta(u'm' - p's'),$$

$$\begin{aligned}
\Delta\mu' + \delta'v \equiv\ & \delta\delta'\zeta t(u' + p') + \eta(l'u' - r'p') + \zeta(l't' - r'n') \\
& + \mu(m'u' - s'p') + \delta^2\zeta\left(m'\frac{u'(u'-1)}{2} - s'\frac{p'(p'-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\delta\left(p'\frac{s'(s'-1)}{2} - u'\frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\left(r'\frac{m'(m'-1)}{2} - l'\frac{s'(s'-1)}{2}\right) \\
& + \zeta\left(m'\frac{r'(r'-1)}{2} - s'\frac{l'(l'-1)}{2}\right) + \lambda(m't' - n's') \\
& + \delta\zeta(n'u' - t'p') + \delta^2\zeta(p'^2s' - u'^2m') + \lambda m's'(r' - l') \\
& \pmod 3.
\end{aligned}$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac.\ ac=ca\theta^\zeta,\ ad=da \\ bc=cb\theta,\ bd=dbc,\ cd=dc\theta^\zeta, \qquad \zeta=1,2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=\theta,\ b^3=c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca\theta \\ ad=da,\ bc=cb\theta,\ bd=dbc,\ cd=dc\theta \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca^\zeta,\ ad=da \\ bc=cb,\ bd=dbc,\ cd=dc\theta^\zeta, \qquad \zeta=1,2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca \\ ad=da\theta,\ bc=cb\theta,\ bd=dbc,\ cd=dc \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca \\ ad=da,\ bc=cb\theta,\ bd=dbc,\ cd=dc \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca\theta \\ bc=cb,\ ad=da,\ bd=db\theta,\ cd=dc \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=\theta,\ b^3=c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca\theta \\ ad=da,\ bc=cb,\ bd=dbc,\ cd=dc\theta \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=\theta,\ b^3=c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca \\ ad=da\theta,\ bc=cb\theta,\ bd=dbc,\ cd=dc \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=\theta,\ b^3=c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca \\ ad=da,\ bc=cb\theta,\ bd=dbc,\ cd=dc \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=\theta,\ b^3=c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca\theta \\ ad=da,\ bc=cb,\ bd=db\theta,\ cd=dc \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|ll} a^3=b^3=\theta, & \text{avec} & ad=da\theta,\ bd=db\mathfrak{I}\theta \\ d^3=\theta^3=\mathfrak{I}^3=1, & \text{ou avec} & ad=da\theta,\ bd=db\mathfrak{I} \\ ab=ba\mathfrak{I} & \text{ou avec} & ad=da,\ bd=db\mathfrak{I}\theta \\ & \text{ou avec} & ad=da,\ bd=db\mathfrak{I} \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca \\ bc=cb\theta,\ bd=db,\ cd=dc,\ ad=db\theta \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ d^3=\theta^3=\mathfrak{I}^3=1,\ ab=ba\mathfrak{I} \\ bd=db,\ ad=da\theta \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=b^3=\theta,\ d^3=\theta^3=\mathfrak{I}^3=1,\ ab=ba\mathfrak{I} \\ bd=db\theta,\ ad=da \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=\theta,\ b^3=c^3=d^3=\theta^3=1,\ ab=bac,\ ac=ca \\ bc=cb\theta,\ bd=db,\ cd=dc,\ ad=da\theta \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3=\theta,\ b^3=c^3=\theta^3=\mathfrak{I}^3=1,\ ab=ba\mathfrak{I} \\ ac=ca,\ bc=cb\theta \end{array}\right).$$

101. Partons des équations de définition suivantes

$$a^3 = 0,\qquad b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\qquad ab = ba\theta^\alpha,\qquad ac = ca,$$
$$ad = da\theta^\beta,\qquad bc = cb\theta^\gamma,\qquad bd = dbc,\qquad cd = dc\theta^\delta.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m c^n d^p \theta^q,\\ b' &= a^{l'} b^{m'} c^{n'} d^{p'} \theta^{q'},\\ c' &= a^r b^s c^t d^u \theta^v,\\ d' &= a^{r'} b^{s'} c^{t'} d^{u'} \theta^{v'}. \end{aligned}$$

Alors

$$(a^l b^m c^n d^p \theta^q)^3 = \theta^{l+\gamma p m^2 + \delta m p^2};$$

on posera

$$\theta' = \theta^{l+\gamma p m^2 + \delta m p^2}.$$

En exprimant que $b'd' = d'b'c'$, ..., il vient

$$\begin{aligned}
&l' + \gamma p' m'^2 + \delta m' p'^2 \equiv 0 \pmod 3,\\
&r' + \gamma u' s'^2 + \delta s' u'^2 \equiv 0,\\
&mp' - pm' \equiv 0,\\
&(l + \gamma p m^2 + \delta m p^2)\alpha' \equiv \beta(lp' - pl') + \gamma\left(p\frac{m'(m'-1)}{2} - p'\frac{m(m-1)}{2}\right)\\
&\qquad + \delta\left(m\frac{p'(p'-1)}{2} - m'\frac{p(p-1)}{2}\right) + \alpha(lm' - ml')\\
&\qquad + \gamma(mn' - nm') + \delta[p'(n - mp') - p(n' - m'p)],\\
&t(\delta p - \gamma m) \equiv 0,\qquad \delta p - \gamma m \equiv 0,\qquad s'p - mu' \equiv 0,\\
&(l + \gamma p m^2 + \delta m p^2)\beta' \equiv \beta(lu' - pr') + \gamma\left(p\frac{s'(s'-1)}{2} - u'\frac{m(m-1)}{2}\right)\\
&\qquad + \delta\left(m\frac{u'(u'-1)}{2} - s'\frac{p(p-1)}{2}\right) + \alpha(ls' - r'm)\\
&\qquad + \gamma(mt' - s'n) + \delta[u'(n - mu') - p(t' - s'p)],\\
&(l + \gamma p m^2 + \delta m p^2)\gamma' \equiv \gamma m' t - \delta p' t,\qquad t \equiv m'u' - s'p',\\
&-v + \delta t(u' + p') \equiv \beta(r'p' - l'u') + \gamma\left(u'\frac{m'(m'-1)}{2} - p'\frac{s'(s'-1)}{2}\right)\\
&\qquad + \delta\left(s'\frac{p'(p'-1)}{2} - m'\frac{u'(u'-1)}{2}\right) + \alpha(r'm' - l's')\\
&\qquad + \gamma(s'n' - m't') + \delta[p'(t' - s'p') - u'(n' - m'u')],\\
&(l + \gamma p m^2 + \delta m p^2)\delta' \equiv \delta u' t - \gamma s' t.
\end{aligned}$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\begin{pmatrix} a^3 = \theta, \ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1, \ ab = ba\theta, \ ac = ca \\ ad = da, \ bc = cb, \ bd = dbc, \ cd = dc\theta \end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{I}^9 = b^3 = c^3 = d^3 = 1, \ bc = cb, \ bd = dbc, \ cd = dc\mathfrak{I}^3).$$

102. Soit

$$a^3 = b^3 = c^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^3 = 1, \qquad ab = ba\mathfrak{I}, \qquad ac = ca\theta^{\eta},$$
$$bc = cb\theta^{\mu}.$$

Faisons le changement d'opérations génératrices que voici

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m c^n \theta^{\alpha} \mathfrak{I}^{\beta}, \\ b' &= a^{l'} b^{m'} c^{n'} \theta^{\alpha'} \mathfrak{I}^{\beta'}, \qquad & \theta' &= \theta^{\gamma} \mathfrak{I}^{\delta}, \\ c' &= a^{l''} b^{m''} c^{n''} \theta^{\alpha''} \mathfrak{I}^{\beta''}, \qquad & \mathfrak{I}' &= \theta^{\gamma'} \mathfrak{I}^{\delta'}. \end{aligned}$$

Écrivons que $a'b' = b'a'\mathfrak{I}'$, ...; il vient

$$\begin{aligned} \delta' &\equiv lm' - ml', & \gamma' &\equiv \eta(ln' - nl') + \mu(mn' - nm'), \\ \delta\eta' &\equiv lm'' - ml'', & \gamma\eta' &\equiv \eta(ln'' - nl'') + (mn'' - nm''), \\ \delta\mu' &\equiv l'm'' - l''m', & \gamma\mu' &\equiv \eta(l'n'' - l''n') + \mu(m'n'' - m''n'). \end{aligned}$$

Leur discussion donne le groupe

$$(a^3 = b^3 = c^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^3 = 1, \ ab = ba\mathfrak{I}, \ ac = ca\theta, \ bc = cb),$$

plus un groupe décomposable.

103. Partons des équations de définition que voici

$$a^3 = \theta, \qquad b^3 = \theta^{\beta}, \qquad c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \qquad bc = cb\mathfrak{I},$$
$$ab = bac, \qquad ac = ca\theta^{\varepsilon}.$$

Alors

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{I}^p \theta^q)^3 = \theta^{l + \beta m + \varepsilon m l^2} \mathfrak{I}^{2lm^2}.$$

Faisons le changement d'opérations génératrices suivant

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m c^n \mathfrak{I}^p \theta^q, \\ b' &= a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{I}^{p'} \theta^{q'}, \qquad & \mathfrak{I}' &= \theta^{\varphi} \mathfrak{I}^{\psi}, \\ c' &= a^{l''} b^{m'''} c^{n''} \mathfrak{I}^{p''} \theta^{q''}. \end{aligned}$$

On en déduit les congruences

$$\beta'(l+\beta m+\varepsilon m l^2) \equiv l'+\beta m'+\varepsilon m' l'^2 \pmod 3,$$

$$l m^2 \beta' \equiv l' m'^2, \qquad l''+\beta m''+\varepsilon m'' l''^2 \equiv 0, \qquad l'' m''^2 \equiv 0,$$

$$l' m'' - m' l'' \equiv 0,$$

$$\varphi+\varepsilon\left(m'' \frac{l'(l'-1)}{2} - l' n''\right) \equiv \varepsilon\left(m' \frac{l''(l''-1)}{2} - l'' n'\right),$$

$$\psi + l' \frac{m''(m''-1)}{2} - n'' m' + l' m' m''$$

$$\equiv l'' \frac{m'(m'-1)}{2} - n' m'' + l'' m' m'',$$

$$n'' \equiv l m' - m l',$$

$$p'' \equiv m m'(l'-l) + m n' - n m' + l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2},$$

$$q'' \equiv \varepsilon(l n' - n l') + \varepsilon\left(m \frac{l'(l'-1)}{2} - m' \frac{l(l-1)}{2}\right),$$

$$l m^2 \varepsilon' \equiv m n'',$$

$$\varepsilon'(l+\beta m+\varepsilon m l^2) \equiv -\varepsilon l n''.$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\begin{pmatrix} a^3 = b^3 = \theta, \ c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1, \ bc = cb\mathfrak{S}, \ ab = bac \\ ac = ca\theta^{\alpha} \qquad (\alpha = 0, 1, 2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{S}, \ b^3 = c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1, \ bc = cb\theta \\ ab = bac, \ ac = ca\mathfrak{S} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{S}, \ b^3 = c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1, \ ac = ca\theta, \ ab = bac, \ bc = cb\mathfrak{S}^{\alpha} \\ \alpha = 1, 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^3 = b^3 = c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1, \ bc = cb\mathfrak{S} \\ ab = bac, \ ac = ca\theta \end{pmatrix}.$$

104. Soit

$$a^3 = \mathfrak{S}, \qquad b^3 = \theta^{\beta}, \qquad c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1, \qquad ab = bac,$$
$$ac = ca\theta^{\varepsilon}, \qquad cb = bc\mathfrak{S}\theta^{\delta},$$

d'où

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{S}^p \theta^q)^3 = \mathfrak{S}^{l(1+m^2)} \theta^{\beta m + \varepsilon m l^2 + \delta l m^2}.$$

Posons

$$
\begin{aligned}
&a' = a^l b^m c^n \mathfrak{S}^p \theta^q, \\
&b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{S}^{p'} \theta^{q'}, \qquad && \theta' = \theta^\varphi \mathfrak{S}^\psi, \\
&c' = c'' \mathfrak{S}^{p''} \theta^{q''}, && \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}^{l(1+m^2)} \theta^{\beta m + \varepsilon m l^2 + \delta l m^2},
\end{aligned}
$$

on a les congruences (mod 3)

$$n'' \equiv lm' - ml', \qquad \psi\beta' \equiv l'(1+m'^2),$$

$$p'' \equiv nm' - mn' + l\frac{m'(m'-1)}{2} - l'\frac{m(m-1)}{2} + mm'(l'-l),$$

$$\varphi\beta' \equiv \beta m' + \varepsilon m' l'^2 + \delta l' m'^2,$$

$$
\begin{aligned}
q'' \equiv\ & \delta\left(l\frac{m'(m'-1)}{2} - l'\frac{m(m-1)}{2}\right) \\
&+ \varepsilon\left(m\frac{l'(l'-1)}{2} - m'\frac{l(l-1)}{2}\right) \\
&+ \varepsilon(ln' - nl') + \delta(nm' - mn') + \delta mm'(l - l'),
\end{aligned}
$$

$$\psi\varepsilon' + mn'' \equiv 0, \qquad \varphi\varepsilon' \equiv \varepsilon l n'' - \delta m n'',$$

$$\delta'\psi + l(1+m^2) \equiv m' n'',$$

$$\delta'\varphi + \beta m + \varepsilon m l^2 + \delta l m^2 \equiv \delta m' m'' - \varepsilon l' n'' \qquad (\mathrm{mod}\, 3),$$

on obtient ainsi les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{S},\ b^3 = \theta,\ c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^\alpha,\ cb = bc\mathfrak{S}\theta^\beta \\ ab = bac \qquad (\alpha = 0, 1, 2;\ \beta = 0, 1) \end{matrix}\right),$$

puis

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{S},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^\alpha,\ cb = be\mathfrak{S}\theta^\beta,\ ab = bac \\ \text{(le cas } \alpha = \beta = 0 \text{ donne un groupe décomposable)} \end{matrix}\right).$$

105. Notons encore les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{S},\ b^3 = \theta,\ c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^\alpha,\ cb = bc\mathfrak{S}^2\theta^\beta \\ ab = bac \qquad (\alpha = 0, 1, 2;\ \beta = 0, 1) \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{S},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{S}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^\alpha,\ cb = bc\mathfrak{S}^2\theta^\beta,\ ab = bac \\ (\alpha = \beta = 1) \qquad (\alpha = 0,\ \beta = 1) \end{matrix}\right).$$

106. Partons enfin des équations de définition

$$a^3 = \mathfrak{J}, \qquad b^3 = \mathfrak{J}^2 \theta^\beta, \qquad c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1, \qquad bc = cb\mathfrak{J}\theta^\gamma,$$
$$ab = bac, \qquad ac = ca\,\theta^\varepsilon,$$

d'où

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q)^3 = \mathfrak{J}^{l+2m+2lm^2} \theta^{\beta m + \varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2}.$$

1° Si $\beta = 1$, posons alors

$$a' = a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q,$$
$$b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{J}^{p'} \theta^{q'},$$
$$c' = c^{n''} \mathfrak{J}^{p''} \theta^{q''}.$$

On trouve

$$n'' \equiv lm' - l'm,$$

$$p'' \equiv mn' - m'n + \left(l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2}\right) + (l'-l)mm',$$

$$\begin{aligned} q'' \equiv\ & \gamma\left(l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\ & + \varepsilon\left(m \frac{l'(l'-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\ & + \gamma(mn' - nm') + \gamma mm'(l'-l) + \varepsilon(ln' - nl'), \end{aligned}$$

$$l + 2m + 2lm^2 + \gamma'[l + l' + 2(m + m') + 2(lm^2 + l'm'^2)] \equiv m'n'',$$

$$\begin{aligned} & m + \varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2 \\ & \quad + \gamma'[m + m' + \varepsilon(ml^2 + m'l'^2) + 2\gamma(lm^2 + l'm'^2)] \equiv \gamma m'n'' + \varepsilon l'n'', \end{aligned}$$

$$\varepsilon'[m + m' + \varepsilon(ml^2 + m'l'^2) + 2\gamma'(lm^2 + l'm'^2)] \equiv \gamma mn'' + \varepsilon ln''.$$

2° Si l'on part des équations de définition

$$a^3 = b^3 = \theta, \qquad c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1, \qquad bc = cb\mathfrak{J}^\gamma \theta,$$
$$ab = bac, \qquad ac = ca\mathfrak{J}^\varepsilon,$$

il vient

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q)^3 = \theta^{l+m+2lm^2} \mathfrak{J}^{\varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2}.$$

Posons

$$a' = a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q, \qquad \theta' = \mathfrak{J}^{\varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2} \theta^{l+m+2lm^2},$$
$$b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{J}^{p'} \theta^{q'}, \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^\varphi \theta^\psi.$$
$$c' = c^{n''} \mathfrak{J}^{p''} \theta^{q''},$$

on a

$$\varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2 \equiv \varepsilon m' l'^2 + 2\gamma l' m'^2,$$

$$l + m + 2 l m^2 \equiv l' + m' + 2 l' m'^2,$$

$$n'' \equiv l m' - m l',$$

$$q'' \equiv m n' - n m' + l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2} + (l' - l) m m',$$

$$\begin{aligned} p'' \equiv \gamma & \left(l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2} \right) \\ & + \varepsilon \left(m \frac{l'(l'-1)}{2} - m' \frac{l(l-1)}{2} \right) \\ & + \gamma (m n' - n m') + \gamma m m' (l' - l) + \varepsilon (l n' - n l'), \end{aligned}$$

$$\psi \gamma' + l + m + 2 l m^2 \equiv m' n'',$$

$$\varphi \gamma' + \varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2 \equiv \gamma m' n'' + \varepsilon l' n'',$$

$$\psi \varepsilon' \equiv m n'',$$

$$\varphi \varepsilon' \equiv \gamma m n'' + \varepsilon l n''.$$

1° Si $\beta = 1$ on obtient les groupes

$$\begin{pmatrix} a^3 = \mathfrak{I}, \ b^3 = \mathfrak{I}^2 \theta, \ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \ bc = cb\mathfrak{I} \\ ab = bac, \ ac = ca\theta^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2) \end{pmatrix},$$

2° Si $\beta = 0$ on obtient un groupe décomposable.

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
35498 Quai des Grands-Augustins, 55.

Librairie A. FONTEMOING, 4, rue Le Goff.

Onomasticon Taciteum, par Ph. Fabia, professeur de Philologie classique à la Faculté des Lettres de l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 4)* . **15** fr.

L'« Agamemnon » d'Eschyle, texte, traduction et commentaires, par Paul Regnaud, professeur à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 6)* . . . **6** fr.

Notes critiques sur quelques Traductions allemandes de poèmes français au moyen âge, par J. Firmery, professeur de Littérature étrangère à l'Université de Lyon. (II, *Fasc. 8)* . . . . **5** fr.

Au musée de l'Acropole d'Athènes. — *Études sur la sculpture en Attique avant la ruine de l'Acropole lors de l'invasion de Xerxès*, par Henri Lechat, ancien Membre de l'Ecole d'Athènes, chargé de cours à l'Université de Lyon, avec 47 figures dans le texte et 3 planches hors texte (II, *Fasc. 10)* . . . . **8** fr.

Cultes militaires de Rome. Les Enseignes, par Ch. Renel, professeur adjoint à la Faculté des Lettres de Lyon, avec 61 gravures dans le texte. (II, *Fasc. 12)* . . . . **7** fr. **50**

Librairie Ernest LEROUX, 28, rue Bonaparte.

Phonétique historique et comparée du sanscrit et du zend, par P. Regnaud, professeur à la Faculté des Lettres. *(Fasc. 19)* . . . . **5** fr.

L'évolution d'un Mythe. Açvins et Dioscures, par Charles Renel, maître de conférences à la Faculté des Lettres de Besançon. *(Fasc. 24)* . . **6** fr.

Études védiques et post védiques, par Paul Regnaud, professeur de sanscrit et de grammaire comparée à l'Université de Lyon. *(Fasc. 38)*. . **7** fr. **50**

Bhāratīya-Nātya-Çāstram, Traité de Bharata sur le théâtre, texte sanscrit, avec les variantes tirées de quatre manuscrits, une table analytique et des notes par Joanny Grosset, ancien boursier d'études près la Faculté des Lettres. *(Fasc. 40)*. **15** fr.

Recherches sur l'Origine de l'Idée de Dieu, d'après le Rig-Véda, par A. Guérinot, docteur ès lettres. (II, *Fasc. 3)* . . . . **7** fr. **50**

Librairie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, par Léon Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, chargé de cours à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 6)* **9** fr.

Recherches sur l'équation personnelle dans les observations astronomiques de passages, par F. Gonnessiat, aide-Astronome à l'Observatoire, chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 7)* . . . . **5** fr.

Recherches sur quelques dérivés surchlorés du phénol et du benzène, par Etienne Barral, prof. agrégé à la Faculté de médecine. *(Fasc. 17)* **5** fr.

Sur la représentation des courbes gauches algébriques, par L. Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 20)* . . . . . . **3** fr.

Sur le résidu électrique des condensateurs, par L. Houllevigue, maître de confér. à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 32)*. . . . . . . **3** fr.

Synthèse d'aldéhydes et d'acétones dans la série du naphtalène au moyen du chlorure d'aluminium, par L. Rousset, docteur ès sciences, chef des trav. de chimie génér. à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 30)* . . . . **3** fr.

Recherches expérimentales sur quelques actinomètres électro-chimiques, par H. Rigollot, docteur ès sciences, chef des travaux de physique à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 29)*. . . **5** fr

De la constitution des alcaloïdes végétaux, par X. Causse, docteur ès sciences, chef des Travaux de Chimie organique à la Faculté de Médecine de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 2)* . . **3** fr.

Etude sur les occultations d'amas d'étoiles par la lune, avec un catalogue normal des pléiades, par Joanny Lagrula, docteur ès sciences, préparateur d'astronomie à la Faculté des Sciences de Lyon. (I, *Fasc. 5)* . . . . **5** fr.

Sur les combinaisons organomagnésiennes mixtes et leur application à des synthèses d'acides, d'alcools et d'hydrocarbures, par Victor Grignard, docteur ès sciences. (I, *Fasc. 6)* . . **3** fr. **50**

Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale en un produit d'inversions, par Léon Autonne, ingénieur des Ponts et Chaussées, maître de conférences de mathématiques à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 12)* . . . . **6** fr.

Quelques considérations sur les groupes d'ordre fini et les groupes finis continus, par Le Vavasseur, maître de conférences de mathématiques à la Faculté des sciences de l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 15)*. . . . . **5** fr.

Librairie J.-B. BAILLIÈRE et Fils, 19, rue Hautefeuille.

Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibiens anoures, par E. Bataillon, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon, avec 6 pl. hors texte. *(Fasc. 2)* . . . . **4** fr.

Anatomie et Physiologie comparées de la Pholade dactyle. Structure, locomotion, tact, olfaction, gustation, action dermatoptique, photogénie, avec une théorie générale des sensations, par le Dr Raphaël Dubois, professeur à la Faculté des Sciences, 68 fig. dans le texte et 15 pl. hors texte. *(Fasc. 3)* . . . . **18** fr.

Sur le pneumogastrique des oiseaux, par E. Couvreur, docteur ès sciences, chef des travaux de physiologie à la Faculté des Sciences, avec 3 pl. hors texte et 40 fig. dans le texte *(Fasc. 4)*. **4** fr.

Recherches sur la valeur morphologique des appendices superstaminaux de la fleur des Aristoloches, par Mlle A. Mayoux, élève de la Faculté des Sciences, avec 3 pl. hors texte. *(Fasc. 5)*. **4** fr.

Etude stratigraphique sur le Jurassique inférieur du Jura méridional, par Attale Riche, docteur ès sciences, chef des travaux de géologie, 2 pl. hors texte *(Fasc. 10)*. . . . . **12** fr

Etude expérimentale sur les propriétés attribuées à la tuberculine de M. Koch, faite au laboratoire de médecine expérimentale et comparée de la Faculté de Médecine, par M. le professeur ARLOING, M. le Dr RODET, agrégé, et M. le Dr COURMONT, agrégé, avec 4 planches en couleurs. *(Fasc. 11)* . . . . **10** fr.

Histologie comparée des Ebénacées dans ses rapports avec la Morphologie et l'histoire généalogique de ces plantes, par Paul PARMENTIER, professeur de l'Université, avec 4 planches hors texte. *(Fasc. 12)* . . . . **4** fr.

Recherches sur la production et la localisation du Tanin chez les fruits comestibles fournis par la famille des Pomacées, par Mlle A. MAYOUX, élève de la Faculté des Sciences, 2 planches hors texte. *(Fasc. 13)* . . . . **3** fr.

Etude sur le Bilharzia hæmatobia et la Bilharziose, par M. LORTET, doyen de la Faculté de médecine, et M. VIALLETON, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, 8 planches hors texte et 8 figures dans le texte. *(Fasc. 16)* . . . . **10** fr.

Monographie de la Faune lacustre de l'Eocène moyen. par Frédéric ROMAN, docteur ès sciences, préparat. de géologie à l'Université de Lyon, avec 3 fig. et 3 pl. hors texte. (I, *Fasc. 1er)* . **5** fr.

Etudes sur le Polymorphisme des Champignons, influence du milieu, par Jean BEAUVERIE, docteur ès sciences, prépar. de botan. Faculté des Sciences de Lyon, avec 75 gr. dans le texte. (I, *Fasc. 3)*. **7** fr.**50**

L'Homme quaternaire dans le Bassin du Rhône, *Etude géologique et anthropologique*, par Ernest CHANTRE, docteur ès sciences, sous-directeur du Muséum, avec 74 figures dans le texte (I, *Fasc. 4)* . . . . **6** fr.

La Botanique à Lyon avant la Révolution et l'histoire du Jardin botanique municipal de cette ville, par M. GÉRARD, professeur à la Faculté des Sciences, avec 9 fig. dans le texte et 1 pl. hors texte. *(Fasc. 23)* . . . . **3** fr. **50**

Physiologie comparée de la Marmotte, par le Dr Raphaël DUBOIS, professeur à la Faculté des Sciences. avec 119 figures et 125 planches hors texte, *(Fasc. 25)*. . . . . **15** fr.

Etudes sur les terrains tertiaires du Dauphiné, de la Savoie, et de la Suisse occidentale, par H. DOUXAMI, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Lyon, avec 6 planches hors texte et 31 figures. *(Fasc. 27)* . . . . **6** fr.

Recherches physiologiques sur l'appareil respiratoire des oiseaux, par J.-M. SOUM, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Bordeaux, avec 40 figures dans le texte. *(Fasc. 28)* . . . . . **3** fr. **50**

Résultats scientifiques de la campagne du « Caudan » dans le golfe de Gascogne (août-septembre 1895), par R. KŒHLER, professeur de zoologie à la Faculté des Sciences. *(Fasc. 26)*.

Fascicule I. 1 vol. in-8° avec 6 pl. . . . . **6** fr.

Fascicule II. 1 vol. in-8° avec 11 pl. . . [illegible] fr.

Fascicule III. 1 vol. in-8° avec 21 pl. . . . **2**[illegible] fr.

Anatomie pathologique du système lympha[illegible]**e dans la sphère des néoplasmes malins,** pa[illegible] Dr C. REGAUD, chef des travaux, et le Dr F. [illegible]JON, préparateur d'anatomie générale et d'h[illegible]logie à la Faculté de médecine (Mémoire cour[illegible] par l'Académie de médecine), avec 4 pl. [illegible] texte. *(Fasc. 33)* . . . . [illegible] fr.

Recherches stratigraphiques et paléontologi[illegible]**es dans le Bas-Languedoc,** par Frédéric Ro[illegible], docteur ès sciences, préparateur de géologie [illegible] Faculté, avec 40 figures dans le texte et 9 [illegible]ches hors texte. *(Fasc. 34)*. . . . . . [illegible] fr.

Étude du champ électrique de l'atmosphère, [illegible] Georges LE CADET, docteur ès sciences, assi[illegible] à l'Observatoire de Lyon, 3 fig. et 10 pl. da[illegible] texte. *(Fasc. 35)* . . . . [illegible] fr.

Les formes épitoques et l'Évolution des Cirratu[illegible], par Maurice CAULLERY, maître de confér. [illegible] Faculté des Sciences, et Félix MESNIL, ch[illegible] Laboratoire à l'Institut Pasteur, 6 pl. hors [illegible]. *(Fasc. 39)*. . . . . **7** f[illegible]**50**

Etude géologique et paléontologique du Carbo[illegible] **inférieur du Mâconnais,** par A. VAFFIER, d[illegible] en médecine et docteur ès sciences, avec 11 fi[illegible] et 12 planches hors texte. (I, *Fasc. 7)*. . [illegible] fr.

Contributions à l'Embryologie des Nématodes[illegible] A. CONTE, docteur ès sciences, prépar. de[illegible]logie à l'Université de Lyon. (I, *Fasc. 8)*. [illegible] fr.

Contributions à l'étude des larves et des mét[illegible]**phoses des diptères,** par C. VANEY, docte[illegible] sciences, agrégé des sciences naturelles, ch[illegible] travaux de Zoologie à l'Université de [illegible]. (I, *Fasc. 9)* . . . . [illegible] fr.

Contribution à l'étude de la classe des Nymphé[illegible], par J.-B.-J. CHIFFLOT, docteur ès sciences [illegible]relles, licencié ès sciences physiques, ch[illegible] Travaux de Botanique à la Faculté des sci[illegible], sous-directeur du Jardin botanique de la [illegible], avec 214 figures intercalées dans le [illegible]. (I, *Fasc. 10)* . . . . **7** [illegible]**50**

Monographie géologique et paléontologique de[illegible] **bières orientales,** par Louis DONCIEUX, d[illegible] ès sciences, Collaborateur auxiliaire au servi[illegible] de la carte géologique de France, avec 69 f[illegible] dans le texte, 7 planches hors texte et une [illegible] géologique. (I, *Fasc. 11)* . . . . . . [illegible] fr.

Contribution à l'étude des composés diazoamid[illegible] Louis MEUNIER, docteur ès sciences, chef d[illegible] vaux de chimie à la Faculté des sciences de[illegible] versité de Lyon. (I, *Fasc. 13)* . . . . [illegible] fr.

Etude stratigraphique et paléontologique [illegible] **Zone à Lioceras concavum du Mont d'Or ly**[illegible], par Attale RICHE, docteur ès sciences, [illegible] d'un cours complémentaire de Géologie à [illegible] culté des sciences de l'Université de Lyon [illegible] 7 figures dans le texte et 11 planches hor[illegible] (I, *Fasc. 14)* . . . . **7** [illegible]**50**

Lyon. — Imprimerie A. REY, 4, rue Gentil. — 36530

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine.* — **Fascicule 16.**

SUR
LES FORMES MIXTES

PAR

Léon AUTONNE
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences
de l'Université de Lyon.

LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1905