CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Novembre 1881.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI

DELLE DUE CLASSI

VOLUME DECIMOSETTIMO

1881-82

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze.

1881

STAMPERIA REALE
della Ditta G. B. Paravia e Comp.
di I. Vigliardi.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

dagli Accademici Segretari delle due Classi

VOL. XVII, DISP. 1ª (*Novembre-Dicembre* 1881)

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza del 13 Novembre 1881.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. P. RICHELMY
VICE-PRESIDENTE

Il Socio Cav. Prof. Giuseppe Bruno comunica alla Classe la seguente sua Nota

SULLE CONICHE

CHE PASSANO PER TRE PUNTI DATI E TOCCANO DUE RETTE DATE.

1. Si sa che di coniche passanti per tre punti dati A, B, C e tangenti due rette date s, t ve ne hanno quattro: ed è nota una costruzione elegante, colla quale si determinano i punti di loro contatto colle rette s, t, e si riduce perciò il problema di tracciare una qualunque di esse al problema di segnare una conica, che passi per cinque punti dati.

Io mi propongo di esporre un'altra costruzione delle coniche, di cui si tratta, dalla quale risultano alcune proposizioni relative alle coniche stesse, e particolarmente le seguenti:

1° Le quattro coniche, che passano per tre punti dati A, B, C, e toccano due rette date s, t, sono tali che la congiungente il punto differente da A, B, C, che è comune a due qualunque di esse, col punto pur differente da A, B, C, che è comune alle altre due, passa per il punto I d'intersezione delle rette s, t.

2° Le stesse quattro coniche sono tali che la congiungente il punto d'intersezione delle due tangenti diverse da s e da t, che sono comuni a due qualunque di esse coniche, col punto d'intersezione delle due tangenti pure diverse da s e da t, che sono comuni alle altre due di quelle coniche, passa per uno dei tre punti dati A, B, C.

2. A tal fine premetto che il quadrangolo dei quattro punti comuni a due coniche qualunque ed il quadrilatero delle quattro tangenti comuni alle stesse coniche hanno un medesimo triangolo diagonale (1): e che è pur vera la proposizione inversa, che, cioè, se un quadrangolo ed un quadrilatero hanno lo stesso triangolo diagonale, esistono due coniche, le quali sono, ad un tempo, circoscritte al quadrangolo ed iscritte nel quadrilatero, e queste sono le due coniche, che passano pei quattro vertici del quadrangolo e toccano un lato del quadrilatero, o toccano i quattro lati del quadrilatero e passano per uno dei vertici del quadrangolo.

Segue da ciò che, se noi costrurremo un quadrangolo A B C D (ved. figura annessa) del quale i punti dati A, B, C sieno tre vertici, ed un quadrilatero $stuv$, di cui le due rette date s, t sieno due lati, i quali abbiano lo stesso triangolo diagonale, due delle coniche passanti pei punti A, B, C e tangenti le rette s, t passeranno anche pel punto D e toccheranno anche le rette u, v: epperò noi sapremo costrurre queste due coniche, considerandole come le due, che passano pei punti A, B, C, D e toccano la retta s, oppure come le due, che toccano le rette s, t, u, v e passano pel punto A.

Ora i vertici del triangolo PQR diagonale del quadrangolo ABCD giacciono uno su ciascuno dei tre lati cogniti AB, CA, BC di esso quadrangolo: sia P il vertice di detto triangolo, che è posto sopra AB, e gli altri due vertici Q ed R del medesimo sieno situati rispettivamente sopra CA e sopra BC.

Similmente, i lati del triangolo diagonale di un quadrilatero contengono ciascuno una coppia di vertici opposti di esso quadrilatero: e poichè il quadrilatero $stuv$, che vogliamo costrurre, ha anch'esso per suo triangolo diagonale il triangolo PQR, un lato, che supporremo sia PQ, di questo passerà pel vertice noto del detto quadrilatero, che è posto nell'intersezione I dei due lati dati s e t di questo quadrilatero.

---

(1) Poncelet, *Traité des propriétés des figures*. Paris, 1865, tome premier, pag. 186-87.

Le coppie di rette IA, ID; IB, IC; IP, IQ condotte da I alle coppie di vertici opposti del quadrilatero formato dalle rette AC, CD, DB, BA sono coniugate in involuzione fra loro. E siccome IP coincide con IQ, come si è detto, la retta IQP è un raggio doppio di questa involuzione: l'altro raggio doppio dell'involuzione stessa è manifestamente IR, poichè IR è armonica coniugata di IQP rispetto ad IB ed IC.

Nel quadrilatero poi *stuv* l'angolo formato in I dai suoi lati *s* e *t* è diviso armonicamente dal lato IQP del suo triangolo diagonale, che passa per I, e dalla retta che congiunge I col vertice R di detto triangolo; cioè le rette *s* e *t* formano una coppia di raggi coniugati dell'involuzione suddetta. E siccome questa coppia di raggi *s*, *t* è data, e sono pure dati i due raggi coniugati IB, IC, saranno determinati e si potranno costrurre i raggi doppi IQP, IR di quell'involuzione, ed il raggio ID di essa che è coniugato del raggio dato IA.

I vertici del triangolo PQR saranno dunque conosciuti, perchè P e Q sono le intersezioni di uno, IQP, dei raggi doppi trovati colle rette AB, CA rispettivamente, ed R è l'intersezione dell'altro raggio doppio dell'involuzione colla retta BC. E finalmente sarà pure conosciuto il punto D intersezione del raggio ID poc' anzi determinato con una qualunque delle rette AR, BQ, CP.

Osservando in fine che due vertici opposti di un quadrilatero dividono armonicamente il lato del triangolo diagonale del quadrilatero, su cui sono situati, si avrà che il punto L armonico coniugato di I rispetto ai punti P e Q è l'intersezione dei due lati non dati *u* e *v* del quadrilatero *stuv*: e questi lati perciò saranno le congiungenti il punto L ai punti, in cui la retta RQ, oppure la RP, è tagliata dalle rette *s* e *t*.

3. Nella costruzione, che abbiamo ora fatto per determinare i punti D e L, dopo aver trovato i raggi doppi ed il raggio coniugato di IA nell'involuzione individuata dalle coppie *s*, *t*; IB, IC di elementi coniugati, si è detto che il lato PQ del triangolo PQR è disposto sopra uno dei raggi doppi ora accennati. Ma, due essendo questi raggi doppi, se la costruzione, che si è fatta nel num. prec., assumendo che i vertici P, Q del triangolo PQR cadano sopra uno dei detti raggi doppi, venga ripetuta colla variante, per la quale due vertici del triangolo diagonale debbano trovarsi sull'altro raggio doppio, questi due vertici saranno le intersezioni P' e Q' di IR con AB e CA rispettivamente, ed il terzo vertice R′ di quel triangolo sarà il punto, in cui la retta BC è secata dalla IQP.

Allora il quarto vertice D′ del quadrangolo a costruirsi sarà la intersezione di ID con una qualunque delle rette AR′, BQ′, CP′, ed i lati u' e v' del quadrilatero differenti da s e da t saranno la congiungente il punto comune a t e P′R′ coll'intersezione di s con Q′R′, e la congiungente il punto di concorso di s con P′R′ a quello di concorso di t con Q′R′. Questi lati poi u' e v' si tagliano nel punto L′ della retta P′Q′, che è armonico conjugato di I rispetto ai punti P′ e Q′.

Frattanto giova notare che la congiungente i vertici non dati D e D′ dei due quadrangoli ABCD, ABCD′ passa pel punto I intersezione delle rette s e t: e che inoltre, a motivo che le divisioni PQIL, P′Q′IL′ sono proiettive, perchè entrambe sono armoniche, ed hanno una coppia di loro elementi corrispondenti sovrapposti in I, la congiungente i punti L, L′, che sono i vertici opposti ad I nei quadrilateri $stuv$, $stu'v'$, passa per l'intersezione delle rette PP′, QQ′, la quale è uno, A, dei tre punti dati A, B, C.

4. Oltre i due quadrangoli ABCD, ABCD′, ne esistono altri quattro, ciascuno dei quali ha, come gli ora detti, i punti A, B, C per tre suoi vertici, ed il triangolo diagonale comune con un quadrilatero, due lati del quale giacciono sulle rette s e t. In verità, se invece del fascio in involuzione, di centro I, che si è considerato nei due numeri precedenti, si fosse impiegato l'uno o l'altro dei due fasci in involuzione, che hanno ancora, tutti due, I per loro centro e le rette s e t per una coppia di loro elementi coniugati, ma dei quali una seconda coppia di raggi coniugati è il sistema delle due rette IA, IB, o quello delle due rette IC, IA, ciascheduno di questi due fasci, con costruzioni e ragionamenti in tutto analoghi ai sovraesposti, avrebbe condotto a trovare un'altra coppia di quadrangoli ABCE, ABCE′, od ABCF, ABCF′, e corrispondentemente un'altra coppia di quadrilateri $stwx$, $stw'x'$ od $styz$, $sty'z'$ soddisfacenti alle condizioni imposte.

La congiungente i vertici E ed E′, od F e F′ dei due quadrangoli di ciascuna delle dette coppie passa quindi pel punto I, e similmente la congiungente i punti wx, $w'x'$ passa pel punto dato C, e la congiungente i punti yz, $y'z'$ passa pel punto dato B.

5. I ragionamenti istituiti provano che, in generale, vi hanno sei, e non più di sei, quadrangoli, che abbiano per tre loro vertici i punti dati A, B, C e lo stesso triangolo diagonale che un quadrilatero, di cui due lati sono disposti secondo le rette date s e t: e provano inoltre che od i detti sei quadrangoli sono tutti reali, oppure sono reali due soli di essi ed immaginari gli altri quattro, per la ragione che, nel fascio di centro I, i raggi s e t o non sono separati dagli elementi di alcuna delle tre coppie di rette IA, IB; IC, IA; IB, IC, oppure sono separati dagli elementi di due di esse coppie, e non separati dagli elementi della terza rimanente.

Poichè, come si è detto nel 1° alinea del n° **2**, ognuno dei quadrangoli suaccennati determina due coniche passanti pei punti A, B, C e tangenti alle rette s, t, parrebbe che, sei essendo, in generale, quei quadrangoli, dodici fossero le coniche soddisfacenti alle condizioni volute. Ma è facile il dimostrare che di tali coniche, distinte fra loro, ve ne hanno solo quattro. Ed infatti, quattro coniche distinte, le quali abbiano tre punti e due tangenti comuni, danno origine, colle loro intersezioni due a due, a sei quadrangoli distinti, che hanno comuni tre loro vertici, e di ciascuno dei quali il triangolo diagonale è lo stesso che quello di un quadrilatero avente per due suoi lati le due tangenti comuni alle quattro coniche: e di tali quadrangoli fu dimostrato testè che non ve ne sono più di sei.

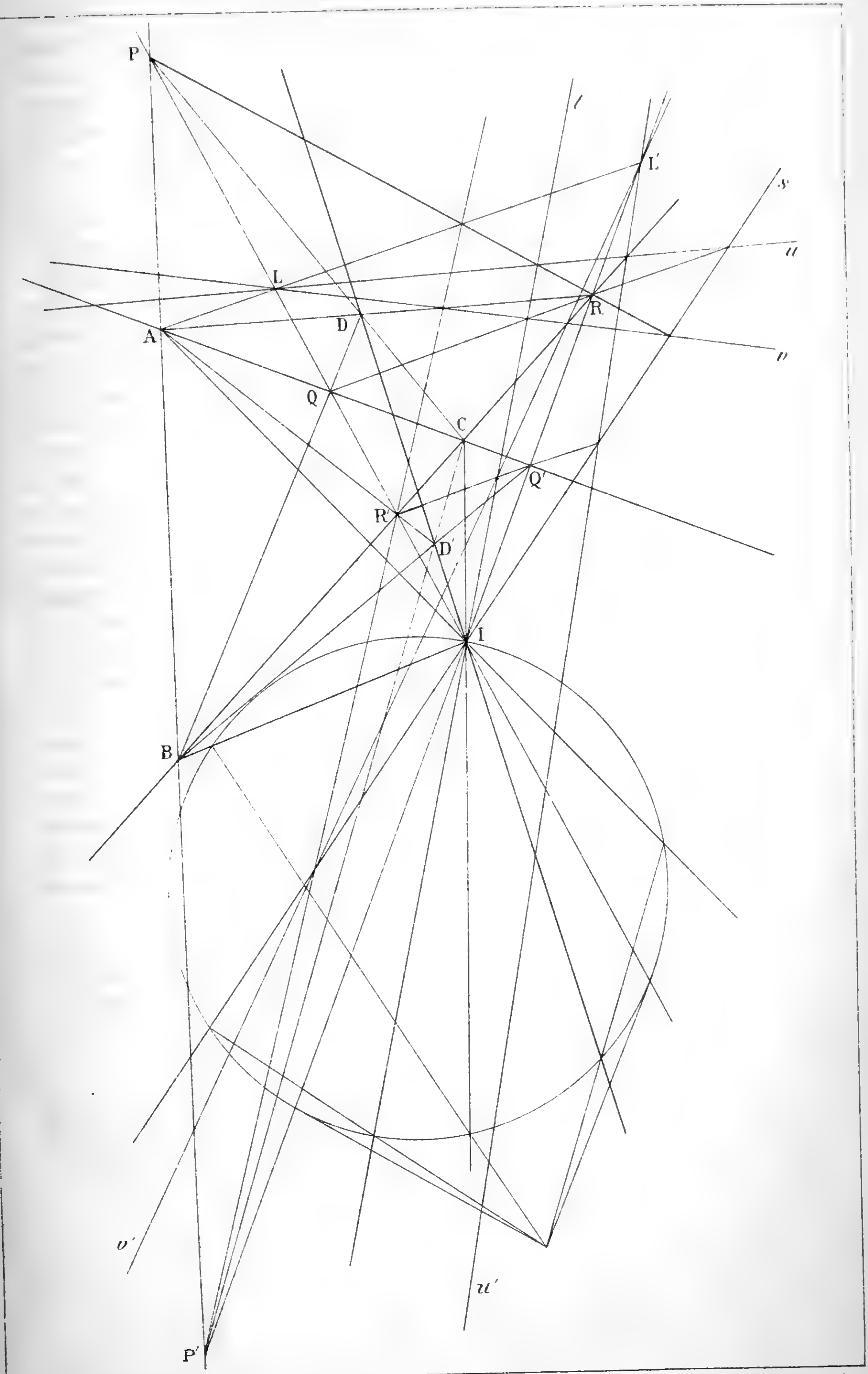
Perciò, per costrurre le quattro coniche, che passano per A, B, C e toccano le rette s e t, basta ricorrere ad uno solo dei tre fasci in involuzione di centro I, dei quali si è parlato, a quello, *p. es.*, che determina i quadrangoli ABCD, ABCD', poichè le quattro coniche reali od immaginarie, generalmente distinte fra loro, che toccano la retta s, e passano pei quattro vertici dell'uno, o dell'altro di quei quadrangoli, sono quelle sole, che risolvono il problema.

Tuttavia, se si impiega ancora un secondo dei fasci in involuzione suaccennati, quello, *p. es.*, che determina i quadrangoli ABCE, ABCE' ed i corrispondenti quadrilateri $stwx$, $stw'x'$, si avranno, per ognuna delle quattro coniche a descriversi, cinque punti e sei tangenti: cioè le quattro coniche domandate saranno rispettivamente circoscritte ai pentagoni ABCDE, ABCDE', ABCD'E, ABCD'E' ed iscritte nelle figure di sei lati $stuvwx$, $stuvw'x'$, $stu'v'wx$, $stu'v'w'x'$. Servendosi anche del terzo dei suddetti fasci in involuzione, determinando cioè ancora i quadrangoli ABCF, ABCF' ed i corrispondenti quadrilateri $styz$, $sty'z'$, si avrà per ognuna delle quattro coniche un sesto punto F od F' ed un'altra coppia y, z od y', z' di tangenti. E precisamente, quando si convenga che i punti D, E, F sieno tali, che le rette A D, B E, C F dividano rispettivamente i segmenti B C, C A, A B, ciascuno in due segmenti sottrattivi, il punto F e le due tangenti y e z apparterranno alle coniche circoscritte ai pentagoni A B C D E, A B C D' E', ed il punto F' colle tangenti y' e z' apparterranno alle coniche circoscritte ai pentagoni A B C D' E, A B C D E'.

Da quanto fu esposto si ricava inoltre che le quattro coniche, di cui si tratta, sono tutte reali quando ciascuno dei tre fasci in involuzione più volte nominati ha i suoi raggi doppi reali. Se questa circostanza non arriva, uno (uno solo) di essi fasci avrà ancora reali i suoi raggi doppi, esisteranno ancora, come fu già avvertito, due quadrangoli, che hanno ciascuno tre suoi vertici in A, B e C ed il triangolo diagonale comune con un quadrilatero formato sulle rette s e t come due suoi lati, ma non vi sarà alcuna conica reale, che soddisfi alle condizioni imposte.

6. Quando un punto dato è un fuoco comune a più coniche, questo si può riguardare come il punto di concorso di due loro tangenti date comuni: epperò il metodo esposto precedentemente serve alla costruzione delle coniche, che hanno il punto dato I per un loro fuoco e passano pei tre punti dati A, B, C. Queste coniche sono quattro, sempre reali: e se sia D il punto differente da A, B, C, che è comune a due qualunque di esse, e D' il punto pur differente da A, B, C, che è comune alle altre due, la congiungente i punti D e D' passa pel fuoco comune I delle quattro coniche. Le stesse coniche, considerate due a due, hanno comuni, oltre le tangenti immaginarie condotte pel loro fuoco I, due tangenti, esse pure immaginarie, ma concorrenti in un punto reale: se dicasi L questo punto di concorso relativo a due qualunque delle quattro coniche ed L' il punto analogo relativo alle altre due, la congiungente L con L' passa per uno dei tre punti dati A, B, C.

7. È poi manifesto che le proposizioni dimostrate e le costruzioni eseguite hanno le loro correlative riflettenti le coniche, che passano per due punti dati e toccano tre rette date.



Torino Lit. Salussolia

Il Socio Cav. Prof. Giuseppe Bruno comunica ancora alla Classe un'altra sua Nota

SUI

QUADRILATERI SGHEMBI

CIRCOSCRITTI AD UNA QUADRICA.

1. L'illustre Poncelet, nel suo trattato sulle proprietà proiettive delle figure, enuncia la seguente proposizione, che pare egli attribuisca a Brianchon (1): *I punti di contatto di una quadrica coi quattro lati di un quadrilatero sghembo qualunque ad essa circoscritto giacciono in uno stesso piano.*

Questa proposizione non è pienamente esatta: essa, infatti, significherebbe che il quarto lato di uno qualunque dei quadrilateri sghembi circoscritti ad una quadrica, tre lati del quale

(1) Riferirò il testo preciso di Poncelet: *Traité des propriétés projectives des figures*, deuxième édition. Paris, 1865, tome premier, pag. 78.

« ......, si tous les points de contact, moins un, des côtés d'un polygone gauche quelconque, circonscrit à une surface du second ordre, étaient situés dans un même plan, le dernier s'y trouverait nécessairement aussi, pourvu toutefois que la disposition des points soit telle, qu'il y en ait un nombre pair ou impair sur le prolongement des côtés, suivant que le polygone est lui-même d'un ordre pair ou impair. Cette circonstance ayant lieu, en particulier, pour le cas d'un quadrilatère circonscrit à une surface de second ordre, il en résulte ce corollaire déjà connu (*):

» *Dans tout quadrilatère gauche circonscrit à une surface du second ordre, les quatre points de contact sont dans un même plan* ».

All'asterisco (*) corrisponde una nota a piè di pagina dicente:
Mémoire sur les lignes du second ordre, par C.-J. Brianchon, p. 14, note.

tocchino questa superficie in tre punti dati, deve toccare la superficie stessa in un punto della conica, secondo cui essa è tagliata dal piano passante pei tre punti dati. Ora io mi propongo di far vedere che, detti A, A', A'' tre punti dati qualunque di una quadrica data S, perchè sieno possibili quadrilateri sghembi circoscritti a questa quadrica aventi tre lati, che la tocchino rispettivamente nei punti A, A', A'' suaccennati, non è necessario che il punto di contatto di S col quarto loro lato sia sulla conica ε intersezione di S col piano $A\,A'\,A''$, ma che il medesimo può anche essere un punto arbitrario di una qualunque di tre altre coniche φ, φ', φ'', sempre reali, generalmente distinte fra di loro, sezioni di S con tre piani, dei quali do la determinazione.

2. Per due, A' ed A'', dei tre punti dati (fig 1[a]), e nei piani α' ed α'' tangenti ad S in questi punti, sieno condotte due rette arbitrarie a' ed a''. I quadrilateri circoscritti ad S, che hanno le rette a' ed a'' per due loro lati opposti, hanno, per altri due lati, due delle posizioni di una retta, la quale si muova in modo di incontrare sempre le rette a' ed a'' e di essere sempre tangente alla quadrica S.

Sia b una delle posizioni della retta mobile: sieno H', H'' i punti in cui essa taglia rispettivamente le rette a' ed a'', e B il suo punto di contatto con S. Dicasi K' il punto, in cui a' è tagliata dal piano α'', e G'' il punto d'intersezione di a'' col piano α'.

Consideriamo la quadrica rigata Σ luogo delle rette, che congiungono gli elementi corrispondenti delle due punteggiate omografiche poste l'una sulla retta a' l'altra sulla a'', nelle quali ai punti H', K', A' della prima corrispondono rispettivamente i punti H'', A'', G'' della seconda.

Le due generatrici rettilinee di Σ, che passano per A', sono a' ed $A'G''$ che giacciono nel piano α': similmente le due generatrici di Σ, che si tagliano in A'', sono a'' ed $A''K'$ poste nel piano α''. La quadrica Σ è dunque bitangente ad S, epperciò l'intersezione di S con Σ è il sistema di due coniche, i cui piani passano per la retta $A'A''$: e queste coniche si confondono in una sola perchè, se esse fossero distinte, qualunque generatrice rettilinea di Σ, che non passi per A' o per A'', dovrebbe tagliarle in due punti differenti fra loro, ossia dovrebbe tagliare S in due punti distinti. Ora fra le generatrici di Σ che non passano nè per A', nè per A'' vi ha la retta b, la quale, per ipotesi, è tangente ad S in B: la quadrica rigata Σ è dunque circoscritta ad S secondo la conica sezione di S col piano A'A"B. Ossia, movendosi la b in modo continuo, ed in guisa che in ogni sua posizione sempre si appoggi sulle rette a' ed a'' e sempre tocchi la quadrica S, il luogo dei punti di contatto di questa superficie colla retta mobile è la conica suddetta intersezione di S col piano A'A"B.

3. Dal punto H' di a', oltre la b, si può condurre un'altra retta, la quale incontri la a'' e tocchi S, poichè da H' si possono condurre due tangenti alla conica sezione di S col piano H'a''. Sia c questa seconda retta, e C il suo punto di contatto con S: il ragionamento fatto nel numero precedente dimostrerà che se la retta c, restando sempre tangente ad S ed appoggiandosi sempre alle due rette a' ed a'', si muoverà con moto continuo, genererà una quadrica rigata Θ circoscritta ad S secondo una conica, il cui piano è A'A"C.

È poi manifesto che, oltre le generatrici rettilinee delle quadriche Σ e Θ, che sono di sistema contrario alle loro generatrici comuni a' ed a'', non vi hanno altre rette, che soddisfino alle condizioni di secare le a' ed a'' e di essere tangenti ad S. E che, quindi, se un quadrilatero circoscritto ad S ha per due suoi lati opposti le rette a', a'', i punti di contatto degli altri suoi due lati colla quadrica apparterranno all'una od all'altra delle coniche sezioni di S coi piani A'A"B, A'A"C: e che viceversa, se si scelgano due punti arbitrari M ed N tutti e due sopra una stessa, oppure l'uno sull'una l'altro sull'altra delle due coniche suddette, è sempre possibile un quadrilatero di cui a' ed a'' sieno due lati opposti, ed i cui altri due lati tocchino S, l'uno in M, l'altro in N.

4. I piani A'A"B, A'A"C sono, in generale, distinti fra di loro, perchè essi sono armonici coniugati rispetto ai piani A"a', A'a''. Per dimostrarlo consideriamo il fascio dei quattro piani ora nominati: la sua sezione col piano H'a'' è il fascio di raggi A"B, A"C, A"H' ed a''. Ora nella conica, secondo cui il piano H'a'' taglia la quadrica S, conica che è toccata in A" dalla retta a'', il punto H' è il punto di concorso delle tangenti in B ed in C: epperciò il detto fascio di raggi è armonico.

Ne segue che, quando i punti M ed N, di cui si è parlato nel numero precedente, appartengono l'uno al piano A'A"B, l'altro al piano A'A"C, i punti di contatto dei quattro lati del quadrilatero circoscritto ad S, che è determinato dai detti punti M, N e dalle rette a' ed a'', non giacciono in uno stesso piano (1).

5. Esaminiamo alcune circostanze particolari, che possono arrivare nel caso, in cui la quadrica S sia rigata.

1° Se una, a', delle due rette date a', a'' sia una generatrice rettilinea di S, il punto H' appartiene alla sezione fatta in S dal piano $H'a''$ ed i due punti B e C si confondono fra loro e col punto H': i piani A'A''B ed A'A''C si riducono perciò tutti due al piano $A''a'$, e quindi i punti, che abbiamo chiamato M ed N, sono posti, o sopra a', o sulla generatrice rettilinea di S, che passa per A'' ed è di sistema contrario ad a'.

2° Quando a' ed a'' sono generatrici rettilinee di S appartenenti allo stesso sistema, i punti M ed N sono pienamente indeterminati sulla S, poichè due generatrici rettilinee arbitrarie di questa superficie, le quali sieno di sistema contrario a quello delle a' ed a'', formano con queste due rette ultime nominate un quadrilatero circoscritto alla quadrica.

3° Le rette a', a'' sieno comunque condotte per i punti A' ed A'' nei piani, che toccano S nei punti ora detti, ma questi punti A' ed A'' sieno posti su d'una stessa generatrice rettilinea g della quadrica. I piani A'A''B, A'A''C passano per g, e secano S tutti due secondo questa generatrice g, ed inoltre ciascuno di essi secondo un'altra generatrice h o k di sistema diverso da quello della g. I punti in cui h e k incontrano la g sono armonici coniugati rispetto ad A' ed A'': ed i punti M, N

---

(1) Se i punti M ed N giacciono in uno stesso dei due piani A'A''B, A'A''C, il punto di contatto colla quadrica è posto per ciascuno dei quattro lati del quadrilatero, o per due di essi lati, o per nessuno di essi, sul prolungamento del segmento compreso fra i vertici, che stanno sul lato considerato: se invece i punti M ed N sono collocati l'uno nell'uno, l'altro nell'altro dei piani A'A''B, A'A''C, i lati del quadrilatero, che toccano la quadrica in un punto del loro prolungamento, sono sempre tre, oppure uno solo.

A convincersene basta proiettare il quadrilatero, parallelamente alla congiungente i punti A', A'', sopra un piano qualunque.

L'errore in cui è caduto il Poncelet nel dedurre la proposizione, che io mi proposi di correggere, proviene dall'avere egli creduto (vedi nota alla pag. 9) che in nessun quadrilatero circoscritto ad una quadrica vi potesse essere un numero impari di lati, che toccassero la superficie in un punto del loro prolungamento.

possono allora essere presi arbitrariamente o tutti due sopra una medesima, oppure uno sull'una l'altro sull'altra di due qualunque delle tre rette g, h e k.

Noteremo ancora che, qualunque sia la quadrica S, se le rette a' ed a'' sono poste in uno stesso piano, un quadrilatero circoscritto ad S, del quale a' ed a'' sono due lati opposti, giace tutto nel piano di queste rette, epperciò questo piano conterrà necessariamente i punti M, N di contatto fra S e gli altri due lati del quadrilatero.

6. Passiamo ora alla ricerca dei quadrilateri circoscritti ad una quadrica qualunque S, tre lati di ciascuno dei quali debbano toccare la S rispettivamente nei tre punti dati A, A', A'' di essa quadrica, ed alla determinazione del luogo dei punti A_1 di contatto fra S ed il quarto lato di quei quadrilateri.

Per A, nel piano α tangente in A ad S (fig. 2ª), sia condotta una retta arbitraria a: sieno a', a'' le congiungenti i punti A' ed A'' rispettivamente coi punti, in cui a seca i piani α' ed α'' tangenti ad S in A' ed A''.

Supponiamo che a sia un primo lato del quadrilatero a costrursi, e che si voglia che i lati di questo quadrilatero, che toccano S in A' ed A'', sieno opposti fra di loro. Questi due lati cadranno allora sulle rette a' ed a'', ed il quarto lato dovrà toccare S in un punto dell'una o dell'altra delle coniche sezioni fatte in S con due piani passanti per la retta A'A'' ed armonici coniugati rispetto ai due piani, che si secano secondo questa retta A'A'' e passano l'uno per a' l'altro per a''. Uno di questi piani deve passare per A, ed è perciò pienamente determinato; l'altro quindi sarà esso pure determinato e passerà pel punto E polo del piano AA'A'' rispetto ad S.

Se adunque si dicano ε e φ le coniche sezioni di S coi piani AA'A'' ed EA'A'', prendendo un punto arbitrario A_1 sopra una qualunque delle dette due coniche, si potrà costrurre un quadrilatero, di cui un lato cada sulla retta a, i due lati contigui ad a tocchino S nei punti A' ed A'', ed il quarto lato sia tangente alla quadrica in A_1.

7. Data la quadrica S, ed i suoi tre punti A, A', A'', le coniche ε e φ sono pienamente determinate: queste coniche cioè non dipendono dalla direzione della retta a condotta nel piano α pel punto A. Vi ha dunque una infinità di quadrilateri circoscritti alla quadrica S, di ciascuno dei quali due lati opposti toccano la detta quadrica nei punti dati A' ed A'', un terzo lato la tocca nel punto pure dato A, ed il quarto in un punto arbitrariamente scelto sopra una qualunque delle coniche ε e φ.

8. I quadrilateri determinati come or ora abbiamo detto non sono i soli, che risolvano la questione, che ci siamo proposto sul principio del n° 6, nè il sistema delle coniche ε e φ forma intero il luogo dei punti A_1, perchè nella ricerca delle soluzioni, che abbiamo trovato del problema, supponemmo sempre che due determinati, A' ed A'', dei tre punti dati dovessero essere punti di contatto di S con due lati *opposti* del quadrilatero.

Ora manifestamente esistono, e si trovano con ragionamenti identici ai sovra esposti, altri quadrilateri circoscritti ad S, di cui due lati opposti a'' ed a oppure a ed a' toccano S nei punti dati A'' ed A, oppure A ed A', ed un terzo lato tocca la quadrica nel punto pure dato A' od A''. Il punto di contatto di S col quarto lato del quadrilatero, tanto nell'uno quanto nell'altro caso, potrà essere un punto qualunque della conica ε; oppure, quando A'' ed A sono punti di contatto di S con due lati opposti del quadrilatero, il punto A_1 potrà prendersi arbitrariamente sulla conica φ' sezione di S col piano $EA''A$; e similmente, se due lati opposti del quadrilatero sono tangenti ad S in A ed A' il punto A_1 potrà essere un punto qualunque della conica φ'' sezione fatta in S dal piano EAA'.

Diremo dunque che dati tre punti qualunque A, A', A'' sopra una quadrica conosciuta S, e determinato il polo E del piano $AA'A''$ rispetto ad S, qualunque quadrilatero circoscritto alla quadrica data, tre lati del quale tocchino essa quadrica nei punti dati A, A' ed A'', ha il suo quarto lato tangente ad S in un punto, che appartiene ad una delle quattro coniche ε, φ, φ', φ'', secondo le quali la S è tagliata dai piani $AA'A''$, $EA'A''$, $EA''A$, EAA'.

E viceversa, che, se sopra una qualunque delle quattro coniche ε, φ, φ', φ'' sopra definite si prenda un punto arbitrario A_1, è possibile un'infinità di quadrilateri aventi ciascuno i suoi quattro lati tangenti ad S rispettivamente nei punti A, A', A'', A_1.

9. Riguardo a quest'ultima proposizione vi ha però una differenza, che merita di essere notata, dal caso in cui il punto A_1 è preso sulla conica ε, al caso in cui esso punto A_1 è scelto sopra una delle altre tre coniche φ, φ', φ''.

Quando A_1 appartiene alla conica ε, uno qualunque dei tre punti dati A, A', A'' può essere punto di contatto di S col lato del quadrilatero opposto a quello che è tangente ad S in A_1: quando invece A_1 è situato sopra φ, o φ' o φ'', il lato del quadrilatero, che tocca S in A_1, è opposto a quello, che è tangente alla quadrica rispettivamente in A, od A', od A''.

10. Le soluzioni esposte del problema sono sempre possibili, perchè esistono sempre le coniche ε, φ, φ', φ''. Queste coniche sono situate in piani generalmente distinti fra loro, epperciò esse, considerate per coppie, non hanno, in generale, più di due punti comuni. La ε seca le φ, φ' e φ'' rispettivamente nelle coppie di punti A', A''; A'', A; A, A'. Le rette EA, EA', EA'' poi essendo tangenti comuni alle coppie di coniche φ', φ''; φ'', φ; φ, φ' rispettivamente nei punti A, A', A'', i due punti comuni a due qualunque delle tre coniche φ, φ' e φ'' si confondono in un solo, che è uno dei punti dati A, A', A''.

Vi hanno tuttavia casi speciali in cui le coniche ε, φ, φ', φ'' sono indeterminate, o non distinte fra loro. Enumereremo questi casi ed accenneremo sommariamente, per ciascuno di essi, a che cosa si riduca il luogo dei punti A_1:

1° Se due dei tre punti dati coincidono fra loro, cioè se due lati dati del quadrilatero da costrursi debbono toccare la quadrica in un medesimo punto, il quadrilatero sarà possibile, qualunque punto di S si prende per punto di contatto fra S ed il quarto lato del quadrilatero.

2° Nel caso in cui S è rigata sghemba ed i punti A, A', A'' appartengano ad una stessa generatrice rettilinea g della S, il quadrilatero avrà tre, od almeno due, suoi lati disposti sulla g, ed il quarto lato del medesimo sarà, generalmente, su d'una retta qualunque purchè tangente ad S in un punto di g: questa retta potendo essere una generatrice qualunque di S di sistema contrario a quello, cui appartiene la g, il punto A_1 potrà essere un punto qualunque di S.

3° Quando, S essendo rigata sghemba, il piano dei tre punti dati è tangente alla quadrica in uno A di questi punti, ed, in conseguenza, gli altri due punti dati A' ed A'' sono posti l'uno sull'una l'altro sull'altra delle generatrici rettilinee g ed h della superficie, che passano per A, il punto A_1 è un punto arbitrario di g o di h.

4° Se il piano dei tre punti dati è tangente alla quadrica in un punto differente da ciascuno di essi. due di questi *p. es.* A' ed A'' sono posti su d'una medesima generatrice rettilinea g di S ed il punto A_1 sarà un punto qualunque delle seguenti tre generatrici rettilinee della quadrica: la generatrice g, la generatrice h, di sistema contrario a quello di g, che passa per A, e la generatrice pure di sistema opposto a quello, di cui fa parte la g, e secante questa g nel punto armonico coniugato del punto hg rispetto ai punti A' ed A''.

5° Nel caso in cui S sia un cono, il punto A_1 può essere preso arbitrariamente sulla quadrica, ossia, qualunque sieno quattro punti A, A', A'', A_1 di un cono di secondo ordine, esiste sempre un quadrilatero avente i suoi quattro lati tangenti in essi punti alla superficie. Se infatti, si immaginano i piani tangenti in quei punti alla quadrica, ed i fasci di raggi giacenti nei detti piani, aventi i centri nei punti dati, e tali che il primo di essi sia prospettivo al secondo, il secondo al terzo ed il terzo al quarto, il primo e l'ultimo di questi fasci sono tagliati dalla retta intersezione dei loro piani secondo due punteggiate omografiche fra di loro, un punto unito delle quali è il vertice del cono. Queste punteggiate hanno dunque ancora un altro punto unito reale, che determina un quadrilatero soddisfacente alle condizioni volute.

Manifestamente la proposizione è pur vera nel caso in cui la quadrica S è cilindrica.

11. Sia M un punto arbitrario della conica φ. Poichè i quattro punti A, A', A'', ed M non sono in uno stesso piano, ed esiste un quadrilatero, i cui lati toccano S nei detti punti, i piani AMA', AMA'' sono (n° 6) reciproci fra di loro rispetto ad S. Da ciò risulta che il cono di second'ordine, che ha il vertice in A e per direttrice la φ, è il luogo delle intersezioni delle coppie di piani reciproci rispetto ad S, i due elementi di ciascuna delle quali passino l'uno per la retta AA', l'altro per la retta AA''. Medesimamente le coniche φ' e φ'' sono le intersezioni di S coi due coni generati ciascuno da due coppie di fasci omografici di piani aventi per assi le rette $A'A''$, $A'A$ pel primo di essi coni, $A''A$, $A''A'$ pel secondo, in ciascuna delle quali coppie di fasci ogni elemento dell'un fascio sia reciproco, rispetto ad S, dell'elemento corrispondente dell'altro.

Se dunque P sia un punto reale comune ai tre coni ora nominati, i piani $PA'A''$, $PA''A$, PAA' sono due a due reciproci fra loro rispetto ad S, ossia questi piani sono tre facce di un tetraedro coniugato della quadrica: e, detti I, I$'$, I$''$ i secondi punti, nei quali S è incontrata rispettivamente dagli spigoli PA, PA$'$, PA$''$ di quel tetraedro, i piani IA$'$A$''$, I$'$A$''$A, I$''$AA$'$ passano pel polo E del piano AA$'$A$''$ rispetto ad S, cioè sono i piani delle coniche φ, φ', φ''.

Viceversa quando si conosca un tetraedro coniugato di S, tre spigoli del quale concorrenti in uno stesso vertice P passino rispettivamente pei punti dati A, A$'$, A$''$ della quadrica, ritenuta la definizione poc'anzi data dei punti I, I$'$, I$''$, i piani IA$'$A$''$, I$'$A$''$A, I$''$AA$'$ sono quelli delle coniche φ, φ', φ''.

12. Cerchiamo se esistano, quanti siano, ed in qual modo si determinino punti come il P ora accennato, tali cioè che, da uno qualunque P di essi tirando le rette (fig. 3ª) PA, PA$'$, PA$''$ ai tre punti dati della quadrica S, e su queste rette segnando rispettivamente i punti Q, Q$'$, Q$''$ reciproci di P rispetto ad S, il tetraedro PQQ$'$Q$''$ sia coniugato della medesima S.

Continuiamo a dire α, α', α'' i piani tangenti ad S nei punti A, A$'$, A$''$, e sieno h, h', h'' le intersezioni delle coppie di piani α', α''; α'', α; α, α'. Le rette h, h', h'', che hanno comune il punto E polo del piano AA$'$A$''$ rispetto ad S, passano rispettivamente pei punti Q, Q$'$, Q$''$; i piani hA, h'A$'$, h''A$''$ contengono, il primo di essi la retta AP, il secondo la retta A$'$P, il terzo la retta A$''$P, ed, in conseguenza, questi tre piani passano tutti per la retta PE, la quale è dunque nota, e noi chiameremo p.

I punti come P, dovendo trovarsi su questa retta p e sul cono, che ha il punto A per vertice e la conica φ per direttrice, non saranno più di due: non esistono dunque più di due tetraedri coniugati di una quadrica S, aventi tre loro spigoli concorrenti in uno stesso vertice, i quali passino per tre punti dati sulla quadrica.

I due punti P, comuni al detto cono Aφ ed alla retta p, sono le intersezioni di p colle generatrici di quel cono, che giacciono nel piano hA, ossia colle congiungenti il punto A ai punti, in cui S è tagliato dalla retta k intersezione del piano della conica φ col piano hA: epperciò i due punti P saranno reali od immaginari, secondo che la retta k seca, o non seca, la conica δ intersezione della quadrica S col piano hA.

Dicasi O il punto in cui il piano hA taglia la retta A$'$A$''$: la retta k sarà la congiungente i punti E ed O. E siccome la retta h è polare reciproca rispetto ad S della retta A$'$A$''$, il punto O è il polo della stessa retta h rispetto alla conica δ: ossia le due rette h e k concorrenti in E sono due rette reciproche rispetto a questa conica δ. Ora le tangenti condotte da E alla δ sono reali, perchè una di esse è la retta EA; quindi delle due rette h e k una seca δ in due punti reali, l'altra in due punti immaginari.

Condizione dunque necessaria e sufficiente perchè sieno reali i due punti P, ossia perchè esistano i due tetraedri coniugati della S, dei quali parliamo, è che la retta h (intersezione di due piani tangenti alla quadrica) non sechi la S, ossia che questa quadrica non sia rigata.

13. È però sempre da ritenere che, anche nel caso in cui non esistano tetraedri coniugati di S, di cui tre spigoli non posti in una stessa faccia passino pei punti dati A, A', A'', ossia che, anche quando S è una quadrica rigata, sempre esistono le coniche ε, φ, φ', φ'', epperciò sempre si possono costrurre quadrilateri, in numero infinito, circoscritti ad S, ciascuno dei quali abbia tre suoi lati, che tocchino questa quadrica nei punti dati A, A', A'' della medesima.

Fig. 1

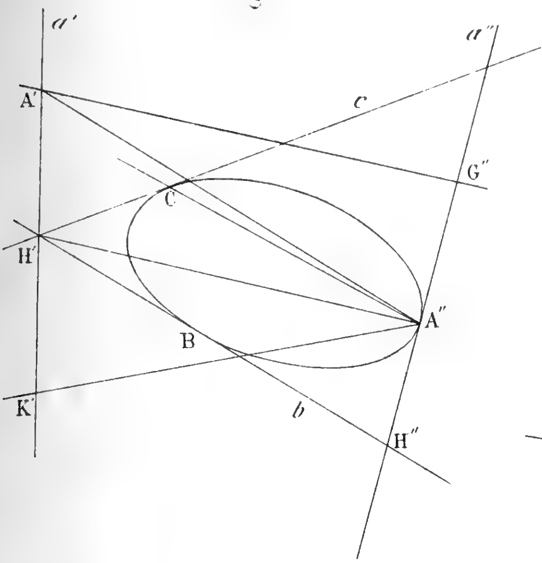


Fig. 2

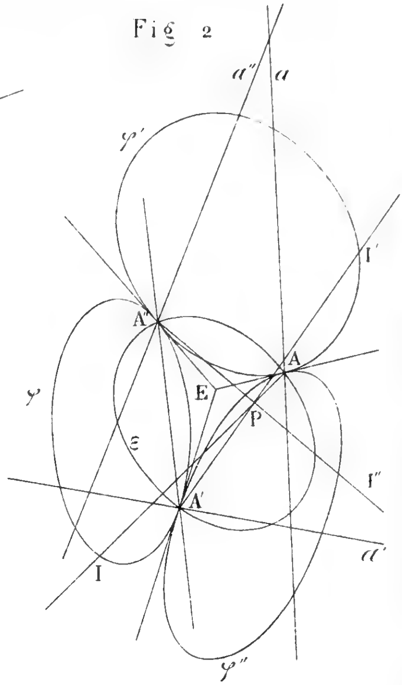
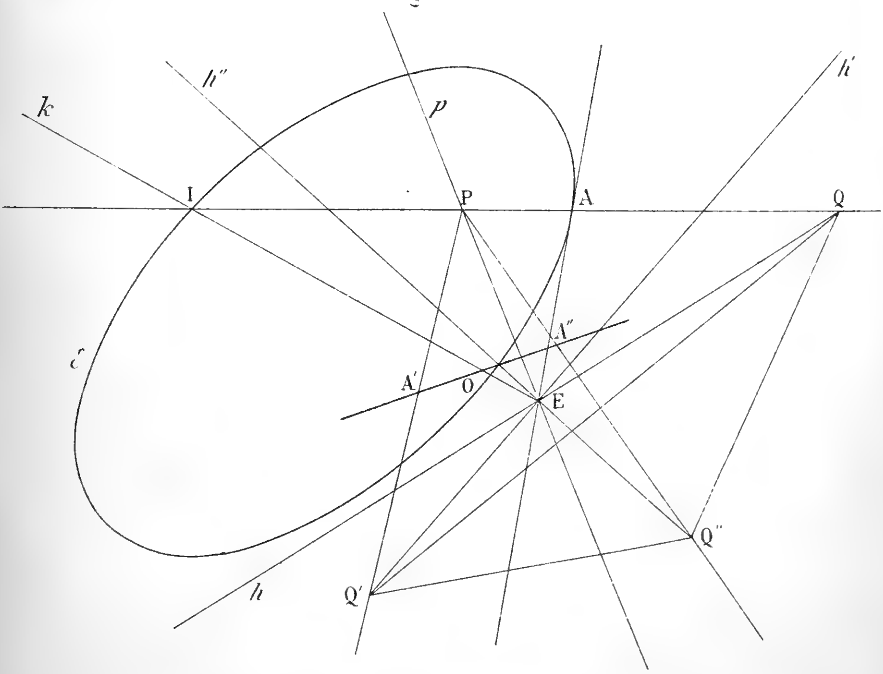


Fig. 3



Torino Lit. Salussolia

Il Socio Cav. Prof. Giulio Bizzozero presenta e legge, a nome dell'Autore sig. Massimiliano Peschel, oculista in Torino, la seguente

SERIE DI ESPERIENZE

SULLA

PERCEZIONE DEI COLORI

DOPO L'ABBAGLIAMENTO DELLA RETINA.

In un lavoro anteriore (1) l'autore esaminò la rigenerazione della percezione della luce e dei colori dopo l'abbagliamento della retina per mezzo di luce bianca o colorata. Là i risultati erano ottenuti senza riguardare la durata obbiettiva dei processi. Ne segue ora l'idea di occuparsi anche di quest'ultima, non che di osservare il decorso dell'abbagliamento. Le esperienze modificate in questo modo dànno inoltre risultati molto più completi scoprendo nuove relazioni e conclusioni.

Le ricerche attuali, fatte 1880 nel laboratorio dell' egregio signor Professore Mosso, furono intraprese su vasta scala ed ebbero lo scopo di indagare le intiere curve continue dell'abbagliamento e della rigenerazione susseguente della retina per tutti i colori spettrali. Ma non si riconobbe che una parte relativamente piccola del problema come eseguibile colle intensità luminose a disposizione. Il metodo delle esperienze fu il seguente. Per l'abbagliamento della retina serviva uno spettroscopio, pel quale una chiara fiamma di gaz porgeva i suoi componenti colorati. Dallo spettro vennero tagliati quadrati di 3° d'apertura e questi dei colori seguenti: il rosso della linea del litio (r), il giallo del sodio (g), il verde

(1) *Ricerche sperimentali sull'adattamento della retina per colori*. Giornale della R. Acc. di Med. di Torino, 1880.

dell'ultima linea del bario (*vr*), il turchino dello stronzio (*bl*). Il violetto fu troppo debole per servire nelle esperienze attuali. L'intensità luminosa proveniente dalla larga fessura del tubo collimatore veniva significata di IV e si facevano le esperienze con questa e coll'intensità I, ottenuta per mezzo d'un vetro affumicato interposto. Ora la macchia gialla veniva abbagliata fissando continuamente il centro del suddetto quadrato colorato. La durata di questa fissazione era di 80 secondi. Un pendolo determinava nella stanza i secondi con colpi sensibili. Questo era il più alto grado d'abbagliamento praticatosi nelle esperienze. Venivano anche esaminati gradi inferiori, per esempio dopo 10, 20, 50 secondi, per istabilire le curve intiere dell'abbassamento della sensibilità retinica. Ma essendo l'intensità luminosa della fiamma di gaz troppo debole non si potevano ottenere risultati di esattezza sufficiente, e le intensità maggiori della luce abbagliante recano all'organo visivo troppo pericolo in queste serie sperimentali che domandano dei mesi di lavoro. Perciò si rinunciò all'esame delle *curve* d'abbagliamento e non si esaminò la sensibilità della retina che in quel sol momento, cioè dopo 80 secondi d'abbagliamento.

Un secondo apparecchio spettrale, grosso, a tre prismi, forniva con una fiamma di gaz la luce reagente, cioè i medesimi colori suddetti ed inoltre il violetto della linea del potassio (*v*). Per oggetto di fissazione serviva un piccolo cerchio di circa 2° d'apertura, il quale separava la parte relativa dello spettro. L'intensità di questa luce reagente veniva graduata in tutti i modi richiesti per due Nicol, di cui l'uno, oculare, girava con una scala esatta. Come posizione di partenza di questi Nicol fu scelta quella dell'oscurità assoluta del piccolo campo visivo, cioè l'incrociamento sotto 90°. Questo venne stabilito per maggiore esattezza sempre colla linea del sodio siccome luce più intensa. Per evitare degli sbagli per parte della scala, che sono tanto più sensibili quanto più piccole ne sono le escursioni, si lavorava con gradi per quanto possibile alti, il che si otteneva per l'indebolimento dei colori più intensi dello spettro: rosso, giallo, verde, bleu, frapponendo vetri affumicati (per ciascun colore naturalmente sempre il medesimo nelle singole esperienze).

Per il colore reagente non si scelse l'apertura e la forma della luce abbagliante, ma la forma circolare più piccola, chè nel primo caso, per causa delle immagini accidentali, il momento d'una sensazione obbiettiva appena incipiente non si può fissare con egual sicurezza, invece il piccolo cerchio si distingue netto nell'immagine accidentale quadrata.

Lo sguardo dunque dopo aver fissato durante 80 secondi nella stanza tutto oscura il quadrato del primo apparecchio spettrale, veniva subito diretto sul cerchiolino reagente nel secondo apparecchio e si esaminava l'intensità di quest'ultimo richiesta per cagionare una minima sensazione. Di regola serviva la produzione di un'impressione luminosa in genere, non d'una specifica sensazione di colore. Il determinare quest'ultima spetterebbe ad un'ulteriore serie d'esperienze adatta anch'essa a scoprire qualche nuovo fatto sulla percezione dei colori.

Il passaggio di fissazione da un apparecchio all'altro e la necessaria durata d'osservazione nell'ultimo recano una perdita di 3 secondi all'incirca. A tutto rigore dunque i valori numerici ottenuti non indicano il grado di sensibilità della retina nell'ultimo momento d'abbagliamento, ma quello dopo una rigenerazione della retina già indotta di tre secondi di durata. Questi 3 primi secondi sono di grand'importanza rigenerandovisi il più rapidamente la sensibilità della retina.

Si tentò anche di determinare questa quantitativamente per tutta la durata di rigenerazione col medesimo metodo per tutti i colori, ma queste relative curve non si poterono costrurre coll' esattezza necessaria, essendo l' intensità della luce abbagliante troppo debole.

Nell'esecuzione delle ricerche ciascuna delle 2 fiamme di gaz si manteneva sempre in eguale intensità luminosa. Oltre ciò si badava esattamente a tenere l'occhio osservatore (e l'autore scelse il suo destro) prima d'ogni esperienza al meno per 5 minuti all'oscuro, e dopo impressioni luminose più forti anche di più, così che la precisione dei risultati non veniva scemata per una sensibile influenza d'impressioni antecedenti.

Segue adesso la tabella dei valori stabiliti per la sensibilità cromatica della retina dopo l'abbagliamento cromatico di 80 secondi di durata. La tabella paragona, secondo quanto abbiam detto, l'effetto dell'abbagliamento per l'intensità I e IV. I limiti assoluti di sensazione per la luce reagente sono indicati nella terza colonna in gradi di posizione dei Nicol e ne sono calcolate le intensità luminose corrispondenti nella prossima colonna.

Colore d'abbagliamento	Colore reagente	Limite assoluto del colore reagente — Posizione dei 2 Nicol nell'abbagliamento d'intensità I	IV	Intensità luminosa nell'abbagliamento d'intensità I	IV	Proporzione dei due limiti 1 :
R	*r*	74°	68°	0,0760	0,1404	1,85
	g	73°	68°	0,0855	0,1404	1,64
	vr	82°	80°	0,0194	0,0302	1,56
	bl	65°	58°	0,1786	0,2808	1,57
	v	54°	39°	0,3455	0,6039	1,75
G	*r*	70°	62°	0,1170	0,2204	1,88
	g	66°	54°	0,1654	0,3455	2,09
	vr	81°	78°	0,0245	0,0432	1,76
	bl	62°	53 ½°	0,2204	0,3538	1,61
	v	51°	30°	0,3961	0,7499	1,89
Vr	*r*	76°	74°	0,0585	0,0760	1,30
	g	74°	71°	0,0760	0,1060	1,39
	vr	83°	81 ½°	0,0149	0,0218	1,46
	bl	66°	61°	0,1654	0,2351	1,42
	v	58°	51°	0,2808	0,3961	1,41
Bl	*r*	79°	78°	0,0364	0,0432	1,19
	g	78°	77 ½°	0,0432	0,0468	1,08
	vr	83 ½°	83°	0,0128	0,0149	1,16
	bl	68°	65°	0,1404	0,1786	1,27
	v	64°	61°	0,1921	0,2351	1,22

Nell'ultima colonna si scorge per tutti i colori un risultato conforme, cioè che l'influenza d'abbagliamento non dipende soltanto dall'intensità luminosa, ma eziandio dalla qualità specifica del colore. Specialmente si scopre una legge costante di quest'influenza della qualità cromatica , presentandosi i colori spettrali schierati in un cerchio che ritorna in se stesso, essendovisi opposti diametralmente i colori complementari. L'influenza specifica sull'abbagliamento è più pronunciata per il colore abbagliante medesimo, minore per i colori spettrali vicini, minima per il colore complementare - risultato che così generale, cioè senza definizioni numeriche più minute e senza determinazione di curve intiere di sensibilità, si può adattare tanto alla teorica di Helmholtz quanto a quella di Hering sulla percezione dei colori.

Le cifre dell'ultima colonna dimostrano inoltre che la differenza nell'intensità assoluta dei diversi colori spettrali del gaz abbagliante riserba pressochè tuttavia la sua influenza prevalente, la quale supera quella specifica minore proveniente dalla diversità di colore. Soltanto alcuni numeri dell'abbagliamento rosso prevalgono o raggiungono alcuni dell'abbagliamento giallo.

Non si può tacere che la determinazione dei limiti di sensazione è molto difficile, perchè il giudizio subbiettivo, norma degli sperimenti, è instabile entro certi tratti. Ma nelle singole osservazioni fa d'uopo d'un'esattezza tanto più perfetta quando i risultati indicano la *proporzione* di due cifre sperimentali, aumentandosi così uno sbaglio d'osservazione. Perciò le ricerche non furono soltanto moltiplicate ma si adoperò anche un secondo metodo modificato di esame. Nel secondo apparecchio spettrale a prismi e tubi assai spaziosi furono impiegati, invece di uno, due Nicol obbiettivi, perpendicolare l'uno all'altro. Così furono creati due piccoli cerchi colorati reagenti di 2° d'apertura coll'intensità luminosa da regolarsi a piacimento. All'inferiore di questi 2 cerchi, del resto separati per un intervallo oscuro di circa 4°, si dava ogni volta quell'intensità luminosa, che rappresentava il limite di irritazione pel centro della retina. Il cerchio superiore serviva per esaminare la sensibilità della retina dopo l'abbagliamento di 80 secondi. La disposizione delle ricerche in questo caso era la seguente. L'occhio fissava un punto posto di tal grado al di sotto del quadrato abbagliante, che nella fissazione susseguente del centro fra i due cerchi del secondo apparecchio spettrale il superiore colpiva esattamente il sito abbagliato della retina. Così si usava il cerchio inferiore per paragone, perchè, ben adattata l'intensità del cerchio superiore, i due cerchi dovevano produrre nel momento della fissazione la medesima impressione, cioè quella della minima sensazione luminosa appena percettibile. In questa seconda serie non si esaminò, come si scorge, appunto la fossa centrale, ma proprio due campi della macchia gialla periferici di 3 gradi. I risultati furono del tutto conformi a quelli del primo metodo e servirono di controllo.

Dell'ultima disposizione degli apparecchi inoltre si facea uso per stabilire un'altra serie d'osservazioni. All'inferiore cerchio del secondo apparecchio spettrale si può anche fornire delle intensità poco a poco maggiori e quindi esaminare l'intensità da darsi al cerchio superiore affinchè tutti e due, dopo l'abbagliamento dell'occhio nel primo apparecchio, appariscano subbiettivamente di egual chiarezza. In questa maniera si vede, se una parte abbagliata della retina possegga, crescendo le intensità assolute di luce, la medesima sensibilità per differenze d'intensità come una parte non abbagliata e quali diversità vi siano per le varie qualità di colori. Ma per indagare questi rapporti abbisognano abbagliamenti tanto frequenti da portar pericolo all'occhio osservatore e si rinunziò, dopo alcune esperienze, all'ulteriore esame di questo problema.

Sono da aggiungersi alcune parole sulla rigenerazione della sensibilità retinica dopo eseguito l'abbagliamento. Benchè non si lavorasse colle intensità sufficienti e non si facesse serie d'esperienze bastevoli per istabilire il modo di rigenerazione per tutti i colori, pure si trovò con certezza che la durata totale di rigenerazione riesce la medesima per tutti i colori reagenti. Quando dunque sussiste ancora per un colore una diminuzione percettibile di sensibilità nella parte abbagliata, la medesima esiste pure per tutti gli altri colori, e quanto più alti sono i gradi di diminuzione, tanto più grandi le differenze specifiche per le singole qualità di colore. Le curve rigenerative adunque, che potrebbero stabilirsi da un occhio perseverante, cesseranno per tutti i colori nel medesimo momento determinabile dopo finito l'abbagliamento.

Del resto, nella funzione della retina non esiste dappertutto la distinzione rigorosa fra abbagliamento e rigenerazione. Per le esperienze si può pure adottare nel modo suddetto quella divisione, ma in realtà è fuor di dubbio, che già durante l'abbagliamento il processo rigenerativo si opera nella retina, e perciò le curve di abbagliamento, riferite al tempo, sono nei loro distretti posteriori più piane delle curve rigenerative, in cui si manifesta un decorso rapido senza reazione d'un elemento antagonistico. Con altre parole, le curve d'abbagliamento considerate in riguardo al tempo sono più lunghe delle corrispettive curve di rigenerazione. Ma questo non si riferisce che all'indagine della rigenerazione per mezzo dell'esame della sensibilità retinica. Non si esclude dunque la possibilità che durino nella retina per più tempo i processi rigenerativi, ma si afferma solamente che la sensibilità per impressioni obbiettive va ristabilita perfettamente in tempo più breve di quello in cui è stata abbassata, e che la medesima, aspettando, non cresce più in modo sensibile e notevole per le nostre esperienze. Al contrario, qualche volta persistono nella retina eziandio, dopo un corto abbagliamento, i processi rigenerativi lungo tempo, il che si scorge nelle immagini accidentali. Quella minore durata di rigenerazione vale del resto soltanto per le intensità deboli delle suddette ricerche, mentre che nel corto abbagliamento per alte intensità, per esempio, per la luce solare, ha luogo certo la ragione inversa. Anche su quest'argomento le ricerche fatte nel modo sopraindicato potrebbero fornire nuovi risultati, ma per le cause già più volte menzionate si ommisero. Questo ci addita le differenze anche nei risultati della nostra tabella nell'uso di diverse intensità luminose per l'abbagliamento. È fuor di dubbio che, facendosi le medesime esperienze colla luce solare come intensità IV, non abbisogneranno soltanto maggiori intensità reagenti, ma che si presenteranno eziandio modificazioni nelle reciproche proporzioni dei singoli colori, sebbene vengano egualmente approvate le leggi suddette. Da questo risulta anche, che le 4 grandi parti della nostra tabella, cioè i risultati per i 4 colori abbaglianti, non sono direttamente paragonabili fra di loro, lavorandosi bensì in ogni colore coll'intensità I e IV, ma essendo l'intensità di partenza I differente per ogni colore.

Il Socio GENOCCHI, a nome del Prof. Matteo FIORINI, presenta come omaggio un' opera dello stesso intitolata *Le proiezioni delle carte geografiche* con atlante, e riferisce le seguenti parole della lettera del FIORINI : « Spero che l'Accademia l'accoglierà benignamente e ciò tanto più in quanto che l' omaggio che le ne faccio è motivato specialmente dal desiderio di essere ricordato da persone a cui mi legano sentimenti di devozione e amicizia ».

Il medesimo Socio GENOCCHI presenta anche, per incarico del Principe B. BONCOMPAGNI, un opuscolo intitolato *Testamento inedito di Nicolò Tartaglia*, e nota essere dimostrato in questo opuscolo: 1° che Nicolò Tartaglia morì nella notte del 13 dicembre 1557, e non già nel 1559, come asserirono il LIBRI, lo HANKEL ed altri ; 2° che il suo vero cognome era Fontana.

Il Socio Cav. Prof. Giulio BIZZOZERO presenta un libro del VOIT colle seguenti parole :

Il Prof. C. VOIT dell'Università di Monaco mi dà l'onorevole incarico di presentare all' Accademia la sua opera : *Physiologie des allgemeines Stoffwechsels und der Ernährung* (Fisiologia del ricambio chimico generale e della nutrizione) (1). L'Autore, già chiaro per lodatissimi lavori sull' argomento, ha riunito in questo libro e collegati scientificamente fra loro i fatti e le dottrine riferentisi alla nutrizione dell' organismo, e giacenti finora disperse nei periodici e nelle memorie speciali. A questo modo, oltre al presentarci in un assieme armonico i progressi fatti dalla scienza negli ultimi decenni, egli, dimostrando le parti che più hanno bisogno di studio, ed i metodi con cui s' è proceduto finora, indica, si può dire, la via che si dovrà percorrere per l'avvenire.

(1) C. VON VOIT, *Fisiologia del ricambio generale e della nutrizione.* Leipzig, Vogel, 1881.

Il Socio Salvadori presenta una sua Memoria intitolata *Monografia del gen.* **Casuarius**, Briss., nella quale egli ammette 10 specie, di cui tre sono state scoperte dal viaggiatore italiano Beccari. La Memoria è accompagnata da due tavole colorite, e verrà pubblicata nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Prof. G. Basso presenta e legge una sua Memoria che ha per titolo: *Studi sulla riflessione cristallina*. In questo lavoro l'Autore espone e svolge un suo procedimento analitico, mercè cui si può determinare l'intensità e lo stato di polarizzazione della luce riflessa alla superficie di corpi birefrangenti. Anche questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Adunanza del 27 Novembre 1881.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Prof. Andrea NACCARI presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Dott. G. GUGLIELMO, la seguente Nota

SULLA EVAPORAZIONE DELL'ACQUA E SULL'ASSORBIMENTO DEL VAPORE ACQUEO PER EFFETTO DELLE SOLUZIONI SALINE.

Già fino dal 1828 Graham (1) aveva osservato che ponendo in un vaso chiuso due recipienti contenenti rispettivamente dell'acqua ed una soluzione salina, questa assorbe del vapor d'acqua e con tanta maggiore rapidità quanto più alta è la sua temperatura d'ebollizione, ossia quanto minore è la tensione del suo vapore a 100°. Congetturò quindi, che l'assorbimento del vapor d'acqua in una soluzione salina debbasi al fatto che la tensione del vapore della soluzione è minore di quella del vapor d'acqua diffuso nell'ambiente.

Le tensioni del vapor d'acqua di molte soluzioni saline essendo oggi note mercè le esperienze del Wüllner (2), il Prof. Naccari m'incaricò nella scorsa estate di eseguire alcune esperienze per indagare le leggi di quel fenomeno, cercando in particolare quale influenza avesse sulla quantità d'acqua assorbita la tensione del vapor d'acqua della soluzione salina.

(1) GRAHAM, *Edinb. Journ. of Science*, XVI, 1828, p. 326.

(2) WÜLLNER, *Versuche über die Spannkr. der Wasserdampfes aus wässerigen Salzlösungen.* Pogg. Ann., t. 103, p. 529; t. 110, p. 564.

Lo Stefan (1) studiò teoricamente la evaporazione considerandola come un fenomeno di diffusione del vapore nell'aria, ed eseguì anche alcune esperienze per verificare le leggi trovate col calcolo. La difficoltà delle esperienze sulla evaporazione sta nel semplificare il fenomeno ed eliminare o attenuare le cause di errore. Le esperienze che più innanzi descriverò, fondate su principio affatto diverso da quello seguito dallo Stefan, potranno almeno in parte valere alla verificazione delle leggi medesime. Delle cause d'errore che possono togliere precisione alle esperienze, le variazioni dello stato igrometrico e della pressione atmosferica non hanno nelle mie influenza sensibile, bensì ne hanno invece le variazioni di temperatura alle quali è molto difficile sottrarsi.

Nelle prime esperienze seguii specialmente le disposizioni usate dal Graham ponendo sotto delle campane di vetro larghi vasi con acqua e vasetti con soluzioni saline di varia natura, avendo cura che le dimensioni dei vasi d'acqua come quelle dei vasetti fossero uguali. Perchè la temperatura fosse dappertutto la stessa, le campane furono poste in uno spazio riparato da correnti d'aria e da radiazioni termiche. In qualche caso, sopprimendo il vaso largo pieno d'acqua, feci che le campane, le quali allora erano semplicemente dei bicchieri capovolti, si immergessero con gli orli in un bacino d'acqua.

Feci così varie esperienze con soluzioni di diversa concentrazione di sal comune, di solfato di sodio, di cloruro di calcio, di acido solforico, di glicerina, di gomma arabica. I risultati ottenuti in tal modo, sebbene manifestassero all' ingrosso l'influenza della tensione del vapor d'acqua delle soluzioni saline, non dimostravano però fra le quantità d'acqua assorbite alcuna relazione semplice, per effetto d'una causa d'errore proveniente da ciò, che il vapore deponendosi sulla superficie della soluzione salina vi forma uno strato superiore, più diluito di quello inferiore, ove la soluzione si mantiene quasi inalterata. Ne segue che la quantità d'acqua assorbita è in proporzione tanto minore quanto maggiore è questa quantità presa assolutamente e quanto più lenta è la diffusione del sale nello strato superiore. In certi liquidi abbastanza viscosi, come p. es. le soluzioni concentrate di acido

---

(1) Stefan, *Versuche über die Verdampfung. Sitzb. der Akad. der Wissensch.*, t. LXVIII, Wien, 1873.

solforico, di glicerina, lo strato superiore più leggero si poteva facilmente distinguere.

Benchè questa causa d'errore mi abbia impedito di trarre dalle prime esperienze delle misure precise, non credo inutile di descriverne alcune e riferirne i risultati.

Sotto una stessa campana, avente superiormente un foro chiuso da un disco di vetro spalmato con grasso, disposi tre vasetti, l'uno con acqua, il secondo con una soluzione di sal comune, il terzo con una soluzione di gomma arabica. Mediante un filo ad uncino, si poteva pel foro della campana prendere ciascun vasetto (che perciò aveva una specie di staffa di fil di rame) e pesarlo senza toglierlo dalla campana. Dopo 24 ore e $^1/_2$ l'acqua aveva perso 13 cgr., l'acqua gommata pure 13 cgr., mentre l'acqua salata aveva acquistato 17 cgr.; dopo altre 44 ore l'acqua aveva perduto altri 20 cgr., l'acqua gommata 14, l'acqua salata aveva acquistato 31 cgr.; dopo altre 48 ore l'acqua aveva perduto altri 21 cgr., l'acqua gommata 17 cgr., l'acqua salata aveva acquistato 33 cgr.; ecc. Nel primo caso andarono sulle pareti 9 cgr., nel secondo 3 cgr., nel terzo 5 cgr. L'influenza della gomma arabica nel ritardare l'evaporazione risultò manifesta; sarebbe interessante vedere se essa produce una proporzionale diminuzione nella tensione oppure se agisce solo diminuendo la superficie libera dell'acqua; non eseguii peranco le necessarie esperienze.

Posi sotto una campana due vasetti contenenti rispettivamente del petrolio e dell'acqua, e dopo 29 giorni il petrolio e l'acqua avevano perduto all'incirca lo stesso peso (25 cgr. e 26 cgr. rispettivamente), ma non vedevasi traccia d'acqua sul petrolio, nè di petrolio sull'acqua, mentre se ne scorgeva sulle pareti della campana: l'acqua aveva acquistato un forte odore di petrolio, ma la sua densità non era sensibilmente cambiata. Pare che la poca affinità del petrolio per l'acqua, come impedisce il loro mescolarsi, impedisca anche al vapor d'acqua di deporsi sul petrolio, o almeno di fermarvisi, e a quello del petrolio di deporsi sull'acqua; entrambi invece si depongono sulle pareti.

Collocai di poi sotto una campana un vasetto pieno d'acqua ed uno con acqua salata coperta da uno strato d'olio dell'altezza di circa 1,5 mm.; dopo 29 giorni l'acqua aveva perduto 1,00 gr. di peso, la soluzione aveva acquistato 0,34 gr.; dopo altri 25 giorni l'acqua aveva perduto 0,95 gr., la soluzione aveva acquistato 0,25 gr., dimostrando così che il vapor d'acqua, benchè non si deponga sull' olio, o almeno non vi si fermi, può però attraversarlo. Le pareti erano state unte con grasso per evitare che presso la parete l'olio presentasse qualche soluzione di continuità attraverso la quale realmente si effettuasse l'assorbimento del vapor acqueo. Su tal proposito inoltre era già noto che l'acqua coperta da uno strato di olio evapora attraverso di esso e Vogel e Reischauer (1) esponendo all'aria libera una soluzione di indaco ridotta, o una soluzione di ossido ferroso coperte da uno strato d'olio, dimostrarono che anche l'ossigeno dell'atmosfera può attraversare lo strato d'olio ed andare così ad ossidare la soluzione sottostante.

Finalmente, in un gran vaso di vetro turato con un disco di vetro e con grasso, posi due bicchieri contenenti l' uno alcool assoluto, l'altro acqua distillata, sospesi a due tappi che chiudevano due fori del disco. Di tanto in tanto sollevando i due tappi pesavo i due bicchieri senza toglierli dal recipiente; ad intervalli più lunghi (da 4 ad 8 giorni) togliendo con una pipetta porzione dei due liquidi, ne determinavo la densità, e calcolavo la proporzione di alcool ed acqua e quindi le quantità di alcool e di acqua entrate ed uscite in ciascun bicchiere.

Queste quantità non seguivano una legge semplice, forse a causa dello strato di alcool che si depone sull'acqua ed ha una concentrazione varia a seconda dell'intervallo fra due pesate, delle scosse ricevute, delle variazioni di temperatura e per un' altra causa d' errore di cui in appresso. Apparve però evidente che, come era da aspettarsi, l'alcool perde per evaporazione assai più che non guadagni per l'assorbimento dell'acqua e il fatto inverso apparve per l'acqua. Il Graham che fece un'esperienza analoga osservò che di questi due liquidi mescibili, il più fisso, l'acqua, aveva assorbito parte del più volatile. Nella citata memoria egli dice che sarebbe importante sapere se anche l'alcool assorbe il vapor d'acqua, ed aggiunge esser egli propenso a credere che ciò non avvenga. Questa opinione era fondata sul fatto da lui osservato che un cristallo di solfato di soda non presenta efflorescenza in uno spazio chiuso in cui si ponga dell'alcool. Non ho ripetuto

(1) Vogel u. Reischauer, *Ueber die Durchdringung einer Oelschicht durch atm. Sauerstoff. Buchner*, *N. Rep. der Pharm.* VIII, 137.

questa esperienza e non so se tale risultato provenga forse per non essere l'alcool usato da Graham affatto privo d'acqua, ciò che allora forse era difficile ottenere, però dalle descritte esperienze appare evidentemente che, in conformità anche alle leggi della diffusione ed all'affinità dell'alcool per l'acqua, il vapore acqueo giunge fino all'alcool e vi è assorbito.

Devo inoltre notare che trovandosi per caso nell'interno del recipiente alcune goccie di mastice, queste assorbirono una quantità non piccola di alcool, ammollendosi ed apparendo circondate da un po' di liquido trasparente di colore un po' gialliccio, che probabilmente era una soluzione alcoolica di alcune parti del mastice.

Dopo qualche tempo ripresi le esperienze sull' evaporazione dell' acqua ed invaporazione delle soluzioni saline (come viene chiamato questo fenomeno dal Graham con molta giustezza), cercando di annullare sensibilmente l'anzidetta causa d'errore. Aumentai perciò la superficie libera della soluzione salina rispetto a quella dell'acqua, in modo che la quantità d'acqua deposta su una certa superficie sia così piccola che, tenuto anche conto del sale che vi giunge per diffusione, essa non alteri la concentrazione della soluzione.

Disposi a tal uopo la soluzione salina in un bicchiere, nel centro del cui fondo stava fermato con ceralacca un tubo corto e un po' largo, che serviva di sostegno ad un altro tubo chiuso in fondo, contenente l'acqua distillata. Per mezzo d'un cilindro di lamina di zinco portante secondo il prolungamento d'una generatrice una scala divisa in millimetri, misuravo la distanza del vertice del menisco, formato dall'acqua, dall'orlo del tubo, e siccome questo, benchè spianato, non sempre era esattamente normale all'asse del tubo, facevo un'altra lettura dopo fatto girare il tubo rispetto alla scala di 180°, e prendevo la media delle due letture: talvolta feci anche due altre letture secondo un diametro perpendicolare al primo ed ottenni sempre sensibilmente la stessa media. I tubetti erano stati tagliati da uno stesso tubo abbastanza regolare e ne era stata determinata la sezione pesandoli pieni d'acqua o mercurio fino a due altezze diverse, ossia presso l' orlo ed all' altezza più spesso usata nelle esperienze. Essendo stati usati in ogni esperienza dei tubetti formati con porzioni adiacenti di tubo, le correzioni per la sezione riuscirono in generale trascurabili.

Chiuso accuratamente il bicchiere con un disco di vetro e con grasso, veniva posto in un largo vaso avente uno strato di circa quattro o cinque centimetri d'acqua, insieme con altri bicchieri simili in cui variava o la natura della soluzione o le dimensioni del tubo, ecc.

Allo scopo di diminuire la durata delle esperienze, il peso dei tubetti in principio ed in fine d'una esperienza, veniva determinato con una buona bilancia fino al decimo di milligramma. Tuttavia nonostante le cure prese nel misurare le dimensioni dei tubetti e dei bicchieri, nella preparazione delle soluzioni, ecc. non riuscii ad ottenere nei risultati una grandissima precisione.

Disposti vari bicchieri prossimamente uguali, con la stessa soluzione e con eguali tubetti pieni d'acqua fino alla stessa distanza dall'orlo, non solo le quantità d'acqua evaporate nei vari tubetti non furono uguali, ma continuando l'esperienza senza mutar nulla, ossia riportando dopo ogni pesata il tubetto nel proprio bicchiere e turando accuratamente, le quantità d'acqua evaporate in questo secondo periodo di tempo o nei successivi non furono rigorosamente proporzionali a quelle evaporate nel primo o in un altro periodo. Facendo le medie di varie esperienze successive le differenze salirono fino ad $^1/_{50}$ del valore medio: in una sola esperienza le differenze furono anche maggiori.

Usando bicchieri con pareti interne pulite o spalmate con grasso mi persuasi che esse non esercitano sul fenomeno influenza sensibile.

Fra le cause d'errore si può notare le variazioni della freccia e dell'orlo non sempre regolare del menisco concavo formato dall'acqua, sebbene i tubetti fossero stati accuratamente lavati con potassa, con acqua e poi con alcoole. Feci anche delle esperienze con tubi di maggior diametro, ma senza grande vantaggio.

È inoltre da notare che le differenze di tensione che producono il fenomeno, sono in generale di pochi millimetri di mercurio, e che anche nelle esperienze del Wüllner, nonostante le cure con cui esse furono eseguite, le differenze fra i valori osservati della diminuzione della tensione del vapore per effetto del sale sciolto nell'acqua e quelli che si dedurrebbero dalla legge di proporzionalità fra queste diminuzioni e la quantità del sale disciolto non sono piccolissime. Ora, tenendo conto della durata delle esperienze, si riconosce essere difficile che per variazioni o di pressione o di temperatura, o per altre cause, i vari bicchieri si mantengano assolutamente nelle stesse condizioni.

Lo Stefan (1) partendo dall'equazione generale del moto d'un elemento d'uno dei gaz:

$$\rho_1 \xi_1\, dx\, dy\, dz = \rho_1 X_1\, dx\, dy\, dz - \frac{dp_1}{dx}\, dx\, dy\, dz - W_1 ,$$

e dalle analoghe spettanti agli altri due assi, e al secondo gaz, dove ρ_1 è la densità del primo gaz, ξ_1 la forza acceleratrice che lo sollecita, p_1 la sua pressione e W_1 la resistenza che subisce nel suo moto da parte del secondo gaz (equazioni che si semplificano supponendo che come nel caso nostro la diffusione avvenga lungo un cilindro parallelo ad uno degli assi, che sia nulla l'accelerazione del primo gaz e la velocità del secondo, e nulla la forza esterna) e supponendo la resistenza W_1 uguale al prodotto della velocità del primo gaz rispetto al secondo per la densità di questo, giunge con facilità alla seguente espressione del volume del gaz o vapore, preso a $0°$ e 760^{mm}, che attraversa nell'unità di tempo una sezione normale (2)

$$v_1 = \frac{ks}{h} \log \frac{p - p'}{p - p''} \qquad \ldots\ldots (A).$$

In questa relazione h è la distanza di due sezioni normali, in cui le tensioni del primo gaz sono p' e p'', p la pressione totale dei due gaz, s la sezione, e k un coefficiente costante per ogni coppia di gaz che è dato da:

$$k = \frac{p_0 T}{d_1 d_2 T_0 \sigma \sqrt{\dfrac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}} .$$

Qui p_0 è la pressione normale di 760^{mm}, T la temperatura assoluta, d_1, d_2 le densità a $0°$ e 760^{mm} dei due gaz, T_0 la

---

(1) STEFAN, *Ueber das Gleichgew. und die Beweg. insb. die Diffusion von Gasgemengen.* Wien. Ber. der k. Akad. der Wissensch. 1871.

(2) STEFAN, *Versuche über die Verdampfung.* Wien. Ber. der k. Akad. der Wissensch. 1873.

temperatura assoluta dello zero, σ l'area di un cerchio avente per raggio la semisomma dei diametri delle molecole dei due gaz, c_1 e c_2 le velocità guadagnate dalle molecole di un gaz, perdute da quelle dell'altro negli urti, e m_1 m_2 le masse delle molecole di essi gaz. Si noti che conviene ammettere, perchè la formula sia conforme alle esperienze di Loschmidt e d'altri, che sia $\sqrt{c_1 c_2}$ indipendente dalla temperatura e dalla velocità dei due gaz, ed inoltre $\sigma\sqrt{c_1 c_2}$ per differenti coppie di gaz varii poco.

Nel nostro caso p' e p'' sono le tensioni del vapore della soluzione salina e dell'acqua distillata, p la pressione atmosferica.

Noto inoltre, che siccome è

$$\log\left[(p-p'):(p-p'')\right]=\log(p-p''+p''-p')-\log(p-p'')$$

ed è $p''-p'$ piccolo rispetto a $p-p''$ che in queste esperienze è sensibilmente costante, si può sostituire al logaritmo contenuto nella (A) la quantità $\alpha(p''-p')$ dove α è un fattore costante. Quindi la quantità d'acqua evaporata risulta proporzionale direttamente alla differenza delle tensioni spettanti all'acqua ed alla soluzione salina, alla temperatura assoluta, alla sezione del tratto d'aria interposto, ed inversamente alla lunghezza di questo.

Veniamo ora alla descrizione delle esperienze.

I. *Influenza della distanza del livello dell'acqua dall'orlo dei tubi.* — Quattro tubetti del diametro interno di circa $10^{mm},6$ ($0,87\,cm^2$ di sezione) ed alti 57^{mm} vennero posti in 4 bicchieri di 65^{mm} di diametro interno ed 82 di altezza, contenenti tutti una stessa soluzione di sal comune di cui non fu determinata la concentrazione. La distanza del livello dell'acqua dall'orlo del tubo era di 35^{mm}, 25^{mm}, $17,5^{mm}$ e 15^{mm} rispettivamente; la distanza dell'orlo dei tubetti dalla soluzione salina di 54^{mm} che equivalgono a $1,5^{mm}$ del tubetto, ammettendo nel fare questa correzione che la resistenza opposta da un tratto d'aria alla diffusione sia inversamente proporzionale alla sezione e direttamente alla lunghezza, come viene dimostrato in questa e nella seguente esperienza. Però, siccome il vapore deve attraversare, oltrechè l'aria che sta nell' interno del tubo ed intorno ad esso, un tratto di quella che sta sopra la bocca del tubo, potremo prendere un valore un po' superiore, p. es. 2^{mm}, con che l'errore sarà certamente abbastanza piccolo. - La temperatura media fu di circa 15°.

La seguente tabella contiene nelle colonne v le quantità d'acqua evaporata dai tubetti; nelle colonne p, i prodotti di queste quantità per le distanze del livello dell'acqua dall'orlo dei tubi, distanze che furono corrette nel modo sopra indicato. Poichè questi prodotti sono prossimamente uguali in ogni linea orizzontale, si può ammettere che la quantità d'acqua evaporata è proporzionale inversamente alla lunghezza, ridotta a sezione uniforme, del tratto d'aria interposto fra la soluzione salina e l'acqua, il che è conforme alla relazione (A) data dalla teoria.

DURATA	v_1	p_1	v_2	p_2	v_3	p_3	v_4	p_4
Ore 24	11,8	435	15,7	422	22,8	444	25,6	434
» 22 e $^1/_2$	10,8	398	14,8	398	20,6	401	23,8	404
» 25 e $^1/_4$	11,2	413	14,8	398	20,6	401	23,6	400

II. *Influenza della sezione del tubo ed insieme della distanza del livello dell'acqua dall'orlo.* — Tre tubi di 2,01 cm², 1,51 cm² e 0,90 di sezione, rispettivamente, furono posti i due primi in due bicchieri di 10,4 cm. di diametro e 15 di altezza, il terzo in uno di 65^{mm} di diametro e 82 di altezza, contenenti tutti una stessa soluzione concentrata di sal comune. La distanza dell'orlo del tubo dal livello dell' acqua distillata fu nel primo tubo di 49^{mm},1 prima dell'esperienza, di 49,5 dopo la seconda pesata di 49,8^{mm} dopo la terza; nel secondo tubo essa fu di 37,7^{mm}, 38,1, e 38,8^{mm}; nel terzo di 26,0^{mm}, 26,3 e 26,7^{mm}. La distanza della soluzione salina era di 7 cm., 6 cm. e 5 cm. equivalente a 2,2^{mm}, 1,6 ed 1,9^{mm} dei tubi rispettivi, tenuto conto approssimativamente come nell' esperienza precedente del tratto d' aria al di sopra del tubo. La temperatura media fu di 15°. La seguente tabella contiene nelle colonne v le quantità d'acqua evaporata, nelle colonne p il prodotto di queste quantità pel quoziente della distanza dall'orlo per la sezione dell' acqua nel tubo. Anche qui questi prodotti essendo in ciascuna linea orizzontale prossimamente uguali, è dimostrato che la quantità d'acqua evaporata è proporzionale alla sezione del tratto d'aria interposto e inversamente proporzionale alla sua lunghezza, il che pure è conforme alla relazione (A).

DURATA	v_1	p_1	v_2	p_2	v_3	p_3
Ore 43 e $^1/_2$	34,2	839	32,8	823,5	28,6	830
» 70	52,2	1290	51,4	1310	42,5	1250

III. *Influenza della tensione del vapore della soluzione salina.* — Le esperienze furono eseguite con soluzioni diversamente concentrate di sal comune e d'acido solforico. Il sale era di quello che trovasi in commercio in pacchi col nome di raffinato; esso dava una soluzione punto limpida, e perciò esso fu disciolto e la soluzione filtrata ed evaporata fino a completa siccità. L'acido solforico era di quello comune: diluito dava un precipitato di solfato di piombo; la sua densità a 15° era 1.840, per cui ritenni che contenesse il 3 $^0/_0$ di acqua e di ciò tenni calcolo nel preparare le soluzioni.

a) Due bicchieri da coppie Bunsen, di 15 cm. di altezza e 10,4 di diametro, contenevano sul fondo una soluzione di 84 di sale in 300 di acqua: entro di essi stavano due tubi d'assaggio a piede A, il più possibilmente uguali, con l'acqua distillata, il cui livello distava di 25^{mm} dall'orlo del tubo. Questa distanza veniva misurata con una lastrina di vetro spianato su cui era fissata normalmente una punta d'ago lunga 25^{mm} che sfiorava appena la superficie dell'acqua quando la lastrina era posata sull'orlo del tubo. Altri due bicchieri B, in tutto simili ai precedenti, contenevano una soluzione di 42 di sale per 300 d'acqua. La temperatura media fu di circa 20°. La seguente tabella contiene nella prima linea la durata dell'esperienza, nella seconda le variazioni di peso dei due tubi A, nella terza quelle dei due tubi B, nella quarta la differenza fra le variazioni dei tubi B e le metà di quelle dei tubi A, ossia le differenze fra la formula e l'esperienza.

DURATA	Ore 22		Ore 25		Ore 23 e $^1/_2$		Ore 24 e $^1/_2$		Ore 24 e $^1/_2$		Ore 40 e $^1/_2$		Totale	
Variaz. (A)	22,0	22,0	25,2	25,2	23,8	23,4	23,8	23,4	23,5	23,4	39,4	39,8	158,4	156,8
Id. (B)	10,8	11,8	12,6	12,6	10,8	11,6	11,4	12,0	11,4	12,0	19,2	19,4	76,4	79,4
Id. $\frac{1}{2}$(A)-B	0,2	-0,8	0,0	0,0	1,1	0,1	0,5	-0,3	0,5	-0,3	0,5	0,5	2,8	1,0

Queste esperienze, essendo delle prime in ordine di data, furono eseguite per vedere il grado di concordanza delle due esperienze parallele. Da esso risulta dimostrato entro i limiti di approssimazione dell'esperienza, che la quantità di acqua evaporata è, almeno in questo caso, proporzionale alla concentrazione nella soluzione salina, e poichè dalle esperienze citate del Wüllner sappiamo che la differenza di tensione del vapore dell'acqua e della soluzione salina è proporzionale alla concentrazione, ne viene che la quantità d'acqua evaporata è anch'essa proporzionale a questa differenza di tensione, conformemente alla formula di Stefan.

b. Quattro bicchieri del diametro di 65^{mm} e dell' altezza di 82^{mm} contenevano rispettivamente una soluzione di 6, 12, 18 e 24 parti di sal comune per 75 d'acqua. La sezione dei tubetti era di 87 mm^2, la distanza dell'acqua dall' orlo di 25 mm. al principio dell' esperienza; dopo ogni pesata osservai nuovamente tale distanza e tenni calcolo della variazione. La distanza della soluzione salina dall' orlo del tubo era di 54 mm. equivalente a 2 mm. del tubo: la temperatura media di circa 15.

Sostituendo nelle formole di Stefan a v_1 e

$$\log. \left\{ (p-p') : (p-p'') \right\}$$

il peso dell' acqua evaporata q_1 e la differenza di tensione fra l'acqua e la soluzione salina $p''-p'$ che sono loro proporzionali, ho calcolato i numeri che trovansi nella colonna k' e che differiscono dal vero coefficiente di diffusione k per il fattore costante

$$\frac{\log \dfrac{p-p'}{p-p''}}{p''-p'} \, \frac{q_1}{v_1},$$

dove $\dfrac{q_1}{v_1}$ è uguale alla densità del vapore a 0° e 760^{mm}.

Questo coefficiente k' esprime il peso dell' acqua evaporata nel caso che il tratto d' aria fra l' acqua e la soluzione salina abbia 1^{mm} di lunghezza, $1\ mm^2$ di sezione, o la differenza di tensione sia di 1^{mm} di mercurio e la temperatura quella della esperienza.

DURATA	q_1	k_1'	q_2	k_2'	q_3	k_3'	q_4	k_4'
Dopo 24 ore	4,6	0,0648	8,4	0,0591	13,9	0,0648	17,3	0,0605
» altre 42 $^1/_2$ »	7,4	600	15,1	612	23,2	627	31,0	628
» altre 71 $^1/_2$ »	12.4	602	24.4	592	37,8	597	51,4	624

Vedesi che i valori di k' sono prossimamente uguali (sempre nei limiti di approssimazione dell'esperienza), quindi anche in questo caso si verifica la formula di Stefan.

c. Ripetizione dell'esperienza con uguali soluzioni saline e con bicchieri e tubi prossimamente uguali.

DURATA	q_1	k_1'	q_2	k_2'	q_3	k_3'	q_4	k_4'
Dopo 24 ore	4,4	0,0646	8,3	0,0610	12,3	0,0602	16,3	0,0599
» altre 66 »	11,9	614	22,8	588	35,3	608	48,3	623
» altre 70,8 »	12,1	589	24,2	589	35,7	579	50,5	613

Anche in questo caso i valori di k sono prossimamente uguali.

d. Quattro bicchieri da coppie Bunsen di 10^{mm}, 4 di diametro e 15 di altezza contenevano rispettivamente le seguenti soluzioni di acido solforico:

$$SO^4H^2 + 17\,aq\ ;\quad SO^4H^2 + 9\,aq\ ;\quad SO^4H^2 + 5\,aq\ ;\quad SO^4H^2;$$

preparate calcolando i volumi dei componenti da mescolare, e le cui tensioni sono date dalle esperienze di Regnault (1). La distanza dell'orlo del tubo dal livello dell'acqua distillata era di 25^{mm}, quella dalla soluzione acida di 54^{mm} equivalente ad 1^{mm} di tubo. La temperatura media era di $18^0,2$.

DURATA	q_1	k_1'	q_2	k_2'	q_3	k_3'	q_4	k_4'
Dopo 24 ore	17,8	—	34,2	0,0728	60,4	0,0725	98,2	0,0785
» 21, 5 »	13,6	0,0734	29,7	707	53,5	707	—	—
» 8 »	4,7	681	10,4	665	18,8	675	—	—

e. Tre bicchieri di 65^{mm} di diametro e 82 di altezza contengono le soluzioni $SO^4H^2 + 9\,aq$; $SO^4H^2 + 7\,aq$; $SO^4H^2 + 5\,aq$; preparate accuratamente pesando i componenti. La distanza dell'orlo del tubo dal livello dell'acqua era di $25^{mm},0$ $25^{mm},0$ e 24,9 al principio dell'esperienza; di 25,7 25,8 26,4 dopo la seconda pesata e di 26,8 27,2 28,1 dopo la 3^a, quella dalla soluzione salina di 54^{mm} equivalente a 2^{mm} del tubo. La temperatura media era di 15^0.

DURATA	q_1	k_1	q_2	k_2	q_3	k_3
Dopo 40,5 ore	52,1	0,0812	69,7	0,0794	93,2	0,0820
» altre 70,2 »	87,4	814	112,6	773	151,7	825

Anche in queste due esperienze i valori di k sono prossimamente uguali, quindi la proporzionalità della quantità di acqua evaporata colla differenza di tensione del vapore dell'acqua e della soluzione salina, rimane dimostrato per valori abbastanza diversi di questa differenza di tensione.

Si osserverà bensì che il valore del coefficiente di diffusione trovato colle soluzioni di sal comune è abbastanza diverso

(1) REGNAULT, *Études sur l'hygrométrie.* Ann. de ch. et de ph., 3e série t XV, p. 179.

da quello ottenuto con quelle di acido solforico, ma conviene considerare che esso non fu calcolato che per dimostrare la relazione esistente fra le varie quantità d'acqua evaporate e per dare un'idea, sebbene grossolana, della sua grandezza, giacchè non essendo lo scopo del presente lavoro la determinazione di esso, cercai di mantenere i vari tubi in condizioni di temperatura possibilmente uguali nel corso di ciascuna esperienza, ma non mi preoccupai, nè era facile nelle condizioni in cui furono eseguite le mie esperienze, di determinare con esattezza la temperatura. Sarebbe però interessante il fare tale determinazione prendendo tutte le precauzioni necessarie per avere un valore esatto, ed essa sarà probabilmente oggetto di un appendice al presente lavoro.

IV. *Influenza del gaz in cui avviene l'evaporazione. Evaporazione nell'idrogeno.* Colla disposizione usata nelle esperienze descritte non era facile introdurre e mantenere un gaz come lo idrogeno. Perciò introdussi nel bicchiere, di conveniente larghezza, una bottiglia senza fondo che s'immergeva nella soluzione e lasciava tra le sue pareti e quelle del bicchiere un sottile strato cilindrico. Il collo della bottiglia era chiuso da un buon tappo di gomma attraversato da un tubo affilato per cui giungeva il gaz e che penetrava nel tubetto fino a poca distanza dall'acqua, per evitare che a causa della densità maggiore rimanesse sull'acqua, nell'interno del tubo uno strato d'aria. Per evitare poi che il gaz giungendo così sull'acqua le togliesse o cedesse del vapore, l'acqua del gazometro era leggermente salata (tantochè avendo provato a diluirla maggiormente si formò sulle pareti del tubetto a causa della temperatura un po' superiore dell'idrogeno preparato da poco un velo di rugiada), ed inoltre un tubo pieno di cotone tratteneva le particelle d'acqua che per avventura venissero trascinate meccanicamente.

Per evitare che i sussulti prodotti dalle bolle del gaz uscenti dalla campanella facessero andare qualche spruzzo nell'acqua, usai un tubo ad uncino col ramo corto aperto che penetrava entro la bottiglia, rimanendo però la sua estremità sotto il livello della soluzione, mentre il ramo lungo e affilato, e chiuso all'estremità passava fra le pareti della bottiglia e del bicchiere. Facendo giungere il gaz, questo spingeva la soluzione fin sotto l'estremità del ramo corto del tubo ad uncino. Allora rompendo la punta del ramo lungo e regolando la corrente di gaz, si faceva in modo che la soluzione giungesse alla estremità del ramo corto senza mai coprirlo, ciò che lo avrebbe reso inutile. Fatti così passare da due litri a due litri e mezzo di gaz, si serrava con una pinzetta un tubo di congiunzione di gomma che inoltre veniva staccato dal gazometro e chiuso con un tubo pieno. Tutte le congiunzioni erano spalmate di grasso; i bicchieri erano turati da coperchi di cartone per escludere affatto l'alterazione della soluzione.

a. Furono disposti tre bicchieri con una soluzione concentrata di acido solforico; la distanza dell'orlo del tubo dal livello dell'acqua era in uno di 26,1, in un altro di 25,8, nel terzo in cui non si faceva giungere alcun gaz di 7,7 mm. per evitare che l'essere nel vaso dell' idrogeno la quantità d'acqua assorbita maggiore potesse alterare sensibilmente alla superficie la concentrazione della soluzione.

La correzione per la resistenza del gaz al di fuori del tubetto determinata sperimentalmente, come si vedrà in appresso, era di 4^{mm} del tubetto.

In circa 6 ore si evaporarono nel primo tubetto 44,9 mgr. d' acqua, nel secondo 44,3 e nel terzo 31,0 mgr., ossia $44{,}9 . 30{,}1 = 1351{,}49$ mgr. ; $44{,}3 . 29{,}8 = 1320{,}14$ e $31{,}0 . 11{,}7 = 362{,}7$, facendo la riduzione ad una stessa lunghezza di tubo uguale ad 1^{mm}. Si ha così per il rapporto delle quantità d'acqua evaporate nell' idrogeno e nell'aria 3,7 pel primo tubo e 3,64 pel secondo. In questa esperienza non fu segnato esattamente il tempo in cui ebbe principio ciascuna esperienza (ossia quello in cui cessò la corrente di gaz), e perciò la correzione per ridurre allo stesso tempo la quantità d'acqua evaporata fu fatto approssimativamente: però trattandosi di una correzione non credo che il risultato ne sia stato influenzato.

b. L'esperienza fu disposta come la precedente; la soluzione di acido solforico era composta di 150^{cc} di acqua per 25 cc. di acido, la cui densità era 1,840. La distanza dell' orlo del tubetto A dall'acqua era di $6^{mm},6$ (media della distanza in principio ed in fine della esperienza), quella del tubetto B di 35,4, quella del tubetto C di $6^{mm},5$. Il primo rimase nel vaso di assorbimento nell'aria 57', nell' idrogeno 4^{ore} e 45', il secondo 25' nell'aria e 4^{ore} e 50' nell'idrogeno, il terzo 5^{ore} e 4' nell'aria. Le quantità d'aria evaporate ridotte alla stessa durata di 1' ed alla distanza di 1^{mm} fra l'acqua e la soluzione furono di 3,19 mgr., 3,18 e 0,866 ed il rapporto fra la quantità d'acqua evaporata nell' idrogeno e nell'aria risulta = 3,68 e 3,69.

c. L' esperienza fu disposta come le precedenti. Nei bicchieri fu posta un'altra porzione della stessa soluzione; la distanza media dell'acqua dall' orlo fu nel tubo A di $6^{mm},6$ nel tubo B 7,7 mm. e nel tubo C 33,3 mm. La correzione pel resto del gaz al di fuori del tubo fu ritenuto ancora = 4^{mm} di tubo. Il tubo A rimase 14^{ore} e 23' nel bicchiere d'assorbimento pieno di aria; il tubo B 25' nel bicchiere pieno d'aria e 14^{ore} nello stesso pieno d'idrogeno; il tubo C 45' nell'aria e 13^{ore} e 50' nell' idrogeno. La durata del passaggio della corrente di idrogeno in questa esperienza come nelle precedenti fu di circa 15' ed ho supposto che in questo intervallo, giungendo il gaz quasi saturo di vapore, l'evaporazione dell'acqua fosse trascurabile. Per scorgere se la quantità di idrogeno fatto passare era sufficiente per scacciare dal bicchiere tutta l'aria, ho fatto passare prima di interrompere la corrente e chiudere il tubo d' accesso del gaz , pel bicchiere B solo 2 litri di gaz e pel bicchiere C tre litri.

Le quantità d'acqua evaporate ridotte alla durata di 1' ed alla distanza di 1^{mm} di tubo fra l'acqua e la soluzione furono di 7,87 mgr. pel tubo A, 30,7 pel tubo B e 31,15 pel tubo C ed il rapporto fra le quantità d' acqua evaporate nell' idrogeno e nell'aria risulta di 3,53 e 3,58.

La poca differenza fra questi due valori esclude il sospetto che il volume di idrogeno fatto passare fosse insufficiente; però l'essere questi due valori minori degli altri quattro trovati precedentemente, fa sospettare che, o nella preparazione del gaz, o nel tempo che esso rimase nel gazometro, o dall'acqua del tubo, un poco d'aria si sia mescolata coll'idrogeno.

La media dei valori trovati pel suddetto rapporto, escludendo gli ultimi due, è di 3,68. Stefan immergendo nell'etere una campanella piena d' aria o di idrogeno ed osservando il tempo occorrente per lo sviluppo di un ugual numero di bolle (a causa dell' aumento di volume del gaz per l' aggiunta del vapore d'etere) trovò 4 pel suddetto rapporto; ponendo invece il tubo coll'etere entro un altro tubo, in cui passava una corrente di idrogeno, ed osservando l'abbassamento del livello dell'etere, trovò 3,7.

Dalla formula che dà la quantità d'acqua evaporata ammettendo $\sigma \sqrt{c_1 c_2}$ costante, e osservando che nel caso presente varia solamente la natura del gaz in cui avviene l'evaporazione e la diffusione del vapore, e che le masse delle molecole sono proporzionali ai pesi molecolari e quindi alle densità dei gaz, si ha:

$$v_1 = \frac{A}{\sqrt{d_2}},$$

dove A è un coefficiente costante, d_2 la densità del gaz in cui avviene l'evaporazione, e si ha quindi che la quantità d'acqua evaporata è inversamente proporzionale alla radice delle densità; quindi il rapporto fra le quantità evaporate nell'idrogeno e quelle evaporate nell'aria sarà uguale al rapporto inverso delle radici delle densità, che è 3,8. Come vedesi l'accordo colla esperienza è abbastanza soddisfacente.

d. Come si disse, in queste ultime esperienze la distanza dell'acqua dall'orlo del tubo essendo piccola, l'errore dovuto alla resistenza opposta dall'aria esterna al tubo, ed al non essere il livello dell'acqua piano, ha un'influenza notevole, e quindi, non bastando più un calcolo approssimato, credetti opportuno di determinarlo sperimentalmente. Perciò posi tre bicchieri contenenti uguali soluzioni saline, in tre tubetti, in cui variava solo la distanza del livello dell'acqua dall'orlo del tubo, e basandomi sulla proporzionalità inversa già dimostrata delle quantità d'acqua evaporate colla distanza dall'orlo del tubo, calcolai la quantità da aggiungere a tale distanza perchè si verifichi questa relazione. Per effetto del menisco che secondo la distanza dall'orlo varia più o meno, la correzione riuscì variabile con dette distanze e per quelle usate nelle esperienze sull'idrogeno, trovai come media di due esperienze abbastanza concordanti: 4^{mm}.

Evaporazione nell' acido carbonico. Le esperienze sulla evaporazione nell'acido carbonico riescono assai più facili di quelle per l'evaporazione nell'idrogeno. Usai gli stessi bicchieri e bottiglie senza fondo, ma il gaz giungeva semplicemente per mezzo d'un tubo ricurvo che penetrava dentro la bottiglia, colla sua estremità al di sopra del livello della soluzione per evitare la formazione di bolle e di spruzzi, ed usciva a traverso un foro del tappo di gomma che chiudeva il collo. — A causa della sua densità maggiore di quella dell'aria il gaz penetrava anche nel tubetto, e dopo un certo tempo (circa 7′) arrestavo la corrente di gaz e chiudevo il tappo di gomma e il tubo d'accesso. — Per evitare un'evaporazione irregolare durante il passaggio del gaz, questo passava per una bottiglia di lavamento piena d'acqua leggermente acidulata, ove deponeva le impurità ed usciva quasi saturo di vapor d'acqua. Inoltre un tubo di vetro ripieno di cotone arrestava al solito l'acqua trascinata meccanicamente.

e. La soluzione acida era quella stessa usata nelle due ultime esperienze sull'evaporazione nell'idrogeno: solo essendo rimasto in boccia non chiusa, poteva aver assorbito un po' di umidità. La distanza media dell'acqua dall'orlo del tubo A era di $13^{mm},7$; da quello del tubo B di $12^{mm},4$; da quello del tubo C di $12^{mm},4$.

Il tubo A rimase nel vaso d'evaporazione 21^{ore} e 20′ nell'aria, il tubo B 18′ nell'aria e 21^{ore} nel gaz carbonico, il tubo C 15′ nell'aria e 21^{ore} e 5′ nel gaz, e si può ammettere senza notevole errore che tutti tre siano rimasti per 21^{ore} e 20′, il primo nell'aria, gli altri due sempre nell'acido carbonico; del resto sarebbe facile calcolare questo errore.

Le quantità d'acqua evaporate furono nel primo tubo di 58,7 mgr., nel secondo di 36,4, nel terzo di 38,2 ossia riducendo alla distanza di 1^{mm} fra l'acqua e la soluzione: 980,29 mgr., 560,56 e 588,28 rispettivamente. Quindi abbiamo pel rapporto fra le quantità d'acqua evaporate nell'acido carbonico e nell'aria: 0,57 e 0,60 ossia in media 0,585. Invece il rapporto inverso delle radici delle densità dei due gaz sarebbe 0,8, per cui l'accordo non è più molto soddisfacente. Ho ripetuto parecchie volte l'esperienza variando la distanza dell'acqua dall'orlo dei tubetti, lavando il gaz in una soluzione acida, identica a quella dei bicchieri, per evitare il sospetto che il gaz troppo umido cedesse anzichè togliere vapore all'acqua che per caso avesse una temperatura un po' inferiore; però ottenni sempre lo stesso valore medio. Si può notare, che l'essere il valore sperimentale più piccolo del teorico, non si potrebbe attribuire a mescolanze dell' aria col gaz carbonico, perchè ciò avrebbe aumentato il valore sperimentale.

Chiuderò col ringraziare l' egregio Professore A. Naccari che mi agevolò in ogni modo l' esecuzione del presente lavoro.

Dal Laboratorio di Fisica dell'Università di Torino,
27 Novembre 1881.

Il Socio Cav. Prof. E. D'Ovidio presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Dottore Giuseppe Peano, Assistente presso la R. Università di Torino, un lavoro che ha per titolo:

UN TEOREMA

SULLE

FORME MULTIPLE

Dirò *forma multipla* una funzione omogenea rispetto a più serie di variabili in numero qualunque. *Formazione invariantiva* di più forme multiple una funzione F intera, omogenea, dei coefficienti di queste forme, e delle variabili, tale che se si fanno in tutte le variabili sostituzioni lineari indipendenti, ovvero non, fra loro, la funzione analoga alla F, calcolata sulle forme trasformate sia eguale alla trasformata di F moltiplicata per una funzione dei parametri delle sostituzioni. Caso particolare delle forme multiple sono le forme binarie doppie, che, poste eguali a zero, rappresentano corrispondenze fra gli elementi di due forme di prima specie. Finora poco è fatto intorno alle formazioni invariantive sia delle corrispondenze, supposte le variabili assoggettate a sostituzioni indipendenti, che delle forme multiple più generali; anzi fu messa in dubbio l'esistenza, per le corrispondenze, di un sistema finito di formazioni invariantive, in funzione razionale intera delle quali si possa esprimere ogni forma invariantiva (*). Io mi propongo di dimostrare l'esistenza di questo sistema per le forme binarie doppie (corrispondenze), e per alcune altre forme multiple comprese nell'enunciato del seguente

(*) A. Capelli, *Sulla corrispondenza* (2, 2). Giornale di Matematiche, 1879, pag. 70.

TEOREMA:

« Suppongasi esistere nelle forme multiple date

$$f, \quad g, \; \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots (1)$$

una serie di variabili binarie x_1 e x_2 assoggettate a sostituzioni indipendenti da quelle a cui si assoggettano le altre variabili; si ordinino le forme date rispetto alle x:

$$f = f_0 x_1^m + m\, f_1\, x_1^{m-1} f_2 + \ldots\ldots$$

$$g = g_0\, x_1^n + n\, g_1\, x_1^{n-1}\, x_2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dove le

$$f_0, \quad f_1, \; \ldots\ldots \quad g_0, \quad g_1, \; \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots (2)$$

sono forme non contenenti le x, ma che possono contenere le altre variabili. Se le forme (2) ammettono un sistema finito di forme invariantive fondamentali, esiste pure tale sistema per le forme date ».

Dividerò la dimostrazione in tre parti:

a] - Sia F una forma invariantiva del sistema dato (1); la si ordini rispetto alla x, e sia:

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 x_1^p + p\, \mathrm{F}_1 x_1^{p-1} x_2 + \ldots\ldots;$$

le forme F_0, F_1, ... sono formazioni invariantive del sistema (2). Infatti, mantenendo fisse le x, si facciano nelle altre variabili trasformazioni qualunque, e si rappresentino colle stesse lettere accentate le trasformate delle funzioni precedenti; sarà:

$$f' = f_0'\, x_1^m + m f_1'\, x_1^{m-1} x_2 + \ldots\ldots$$

$$g' = g_0'\, x_1^n + n\, g_1'\, x_1^{n-1}\, x_2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{F}' = \mathrm{F}_0' x_1^p + p\, \mathrm{F}_1' x_1^{p-1}\, x_2 + \ldots\ldots;$$

e si calcoli sulle trasformate la forma analoga di F, e sia:

$$F'' = F_0'' x_1^p + p F_1'' x_1^{p-1} x_2 + \ldots\ldots ;$$

essendo F una forma invariantiva, sarà identicamente $F'' = k F'$, dove k è funzione dei parametri delle sostituzioni eseguite, ed eguagliando in questa identità i successivi coefficienti di x_2, si avrà:

$$F_0'' = k F_0' , \qquad F_1'' = k F_1' \ldots\ldots ,$$

il che prova appunto che F_0, F_1, ... sono formazioni invariantive del sistema (2).

Si suppose nell'enunciato del teorema che il sistema (2) ammetta un numero finito di forme fondamentali, e siano esse

$$P_1 , \quad P_2 , \ldots\ldots ; \qquad \ldots\ldots (3)$$

le F_0, F_1, ... sono funzioni razionali intere delle (3), ossia « ogni formazione invariantiva del sistema (1) è funzione razionale intera delle x e di un numero finito di funzioni (3) non contenenti le x ».

b] - Si può trovare un sistema finito di forme invariantive del sistema (1), tale che in funzione razionale intera (lineare) dei coefficienti nelle x di esse si possano esprimere le P. Infatti pongasi $\Delta\omega = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial\omega}{\partial x_2} y_2\right)$, dove ω è una funzione di grado q in x, e le y sono variabili cogredienti colle x; pongasi inoltre $\Delta^2\omega = \Delta(\Delta\omega)$, ecc. Si calcoli la funzione analoga alla P sul seguente sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccc} f , & \Delta f , & \Delta^2 f , & \ldots\ldots & \Delta^m f \\ g , & \Delta g , & \Delta^2 g , & \ldots\ldots & \Delta^n g \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \ldots (2'),$$

si otterrà una forma invariantiva Q, contenente x, y, e le variabili che comparivano in P, e la si potrà ordinare secondo le potenze del determinante (xy) (Clebsch, *Binären Formen*, § 7), e si avrà:

$$Q = \Delta^q \varphi + (xy)\, \Delta^{q-1} \psi + (xy)^2\, \Delta^{q-2} \chi + \ldots ,$$

dove q è il grado a cui Q contiene y, e le φ, ψ, ... forme invariantive contenenti x e non y:

$$\varphi=\varphi_0 x_1^\mu+\mu\varphi_1 x_1^{\mu-1}x_2+\dots;\quad \psi=\psi_0 x_1^\nu+\nu\psi_1 x_1^{\nu-1}x_2+\dots;\ \dots .$$

Pongasi ora nell'eguaglianza precedente

$$x_1=y_2=1\,,\qquad x_2=y=0\,;$$

Q si riduce a P, (xy) ad 1, e le forme polari $\Delta^q\varphi$, $\Delta^{q-1}\psi$, ... ai coefficienti φ_q, ψ_{q-1}, ... delle forme φ, ψ, ... e si à così P espresso linearmente in funzione dei coefficienti delle forme φ, ψ, ...

Siccome per ipotesi le P sono in numero finito, e da ciascheduna di esse si deduce un numero finito di forme invariantive, così il sistema delle forme

$$\varphi\,,\quad \psi\,,\quad \chi\,,\ \dots\dots \qquad\qquad \dots\dots(4)$$

è finito.

c] - Una forma invariantiva F delle forme multiple date è funzione intera delle x_1, x_2 e delle P; e sostituendo alle P le loro funzioni dei coefficienti delle forme (4), F diventa funzione intera delle variabili x, e dei coefficienti nelle x delle forme

$$\varphi\,,\quad \psi\,,\ \dots\dots$$

Dico che, considerate F, φ, ψ, ... come binarie semplici funzioni delle x_1, x_2, incorporando le altre variabili nei coefficienti, la prima è funzione invariantiva delle ultime. Infatti, mantenendo fisse tutte le altre variabili, si faccia nelle x la seguente trasformazione:

$$x_1=y_1X_1+z_1X_2\,,\qquad x_2=y_2X_1+z_2X_2\,,$$

dove X_1, X_2 sono le nuove variabili y_1, y_2, z_1, z_2 i coefficienti della trasformazione di modulo (yz); indicando con un accento la trasformata d'una forma, e posto, per comodità di scrittura: $\varphi=\varphi_x{}^\mu$, $\psi=\psi_x{}^\nu$, ... $F=F_x{}^p$, si avrà:

$$\left.\begin{aligned}\varphi' = \varphi(y_1 X_1 + z_1 X_2,\ y_2 X_1 + z_2 X_2) &= \varphi_y{}^{\mu} X_1{}^{\mu} + \mu\, \varphi_y{}^{\mu-1} \varphi_z X_1{}^{\mu-1} X_2 + \ldots \\ \psi' &= \psi_y{}^{\nu} X_1 + \nu\, \psi_y{}^{\nu-1} \psi_z X_1{}^{\nu-1} X_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F' &= F_y{}^{p} X_1{}^{p} + p\, F_y{}^{p-1} F_z X_1{}^{p-1} X_2 + \ldots\end{aligned}\right\}\ (a).$$

Siano poi φ'', ψ'', ... F'' le forme analoghe a φ, ψ, ... F calcolate sulle forme trasformate: se l'espressione di F in funzione dei coefficienti delle (4) è:

$$F = F_0(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \psi_0, \psi_1, \ldots)\, x_1{}^{p} + p\, F_1(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \psi_0, \psi_1, \ldots)\, x_1{}^{p-1} x_2 + \ldots,$$

si avrà:

$$F'' = F_0(\varphi_0'', \varphi_1'', \ldots, \psi_0'', \psi_1'' \ldots)\, X_1{}^{p} + \ldots \qquad \ldots (b),$$

ma, essendo φ, ψ, ... F forme invariantive, si avrà:

$$\varphi'' = (yz)^{\alpha} \varphi', \quad \psi'' = (yz)^{\beta} \psi', \quad \ldots\ldots \quad F'' = (yz)^{k} F'.$$

Sostituiamo in queste a φ', ψ', ... F' i loro valori (a); in seguito questi valori di F'', φ_0'', φ_1'', ... ψ_0'', ψ_1'' ... nell'espressione (b), ed eguagliamo i coefficienti di $X_1{}^{p}$ in ambo i membri:

$$(yz)^{k} F_y{}^{p}$$

$$= F_0\left[(yz)^{\alpha} \varphi_y{}^{\mu},\ (yz)^{\alpha} \varphi_y{}^{\mu-1} \varphi_z,\ \ldots,\ (yz)^{\beta} \psi_y{}^{\nu},\ (yz)^{\beta} \psi_y{}^{\nu-1} \psi_z, \ldots\right].$$

Si ordini il membro di destra secondo le potenze del determinante (yz) che vi comparisce esplicitamente; i coefficienti saranno funzioni di $\varphi_y{}^{\mu}$, $\varphi_y{}^{\mu-1}\varphi_z$, ... $\psi_y{}^{\nu}$, ... contenenti y e z; si ordinino poi questi coefficienti secondo le potenze del determinante (yz) col metodo già citato del Clebsch; il membro di destra risulterà ordinato secondo le potenze del determinante (yz) ed i coefficienti saranno forme polari di funzioni invariantive delle φ, ψ, ... Ma questa stessa quantità è già sviluppata a sinistra secondo le potenze del determinante (yz), perchè vale $(yz)^{k} F_y{}^{p}$, e non potendosi questo sviluppo fare che in un sol modo (Clebsch, *Binären Formen*, § 7, Teorema 2°), si conchiude che nel membro di destra si devono annullare i coefficienti di tutte le potenze di $(y\,z)$ diverse dalla k^{ma}, e che F_y^p è eguale al coefficiente di $(y\,z)^k$; quindi F è una formazione invariantiva delle forme binarie φ, ψ, ... c. v. d.

Ora le forme binarie φ, ψ, ... in numero finito, ammettono un numero finito di forme invariantive fondamentali (teorema di Gordan), e siano esse

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots (5)$$

in funzione intera delle quali si potrà esprimere F; onde « ogni formazione invariantiva del sistema (1) è funzione intera razionale di un sistema finito di forme invariantive ».

Così dimostrato il teorema, passo ad esaminare i più importanti sistemi di forme multiple contenuti nell'enunciato del medesimo.

Un sistema di forme binarie doppie, o corrispondenze, ammette per forme (2) forme binarie semplici, che soddisfanno alle condizioni del teorema; dunque:

« È finito il sistema di forme invariantive di quante si vogliano forme binarie doppie o corrispondenze ».

Abbiasi un sistema di forme binarie triple; le forme (2) saranno forme binarie doppie, e per ciò che si è or ora dimostrato, esse soddisfanno alle condizioni del teorema; e così continuando si à:

Teorema. — « Ogni sistema di forme binarie multiple contenenti quante si vogliano coppie di variabili indipendenti ammette un numero finito di formazioni invariantive fondamentali ».

Anche alla forma $f = a_x{}^m u_\alpha$ (o ad un sistema di tali forme) dove le x sono variabili binarie e le u ternarie o quaternarie (coordinate di rette nel piano, o di piani nello spazio) è applicabile il teorema. Si osservi che $f = 0$ individua la rappresentazione parametrica dei punti d'una curva razionale d'ordine m piana o sghemba; e le formazioni invariantive di f tutti gli enti geometrici collegati proiettivamente colla curva, o con punti della curva. Ecc., ecc.

La dimostrazione del teorema ci offre anche una regola pel calcolo delle forme invariantive; invero, date le forme (1), se ne calcolino successivamente i sistemi (2), (3), (4) e (5); nel sistema (5) sono tutte comprese le forme fondamentali cercate. Ma non tutte le forme (5) sono fondamentali, ed il numero troppo grande di forme (5) sovrabbondanti fa sì che questo non sia in generale il metodo migliore pel calcolo delle formazioni invariantive.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA presenta alcuni lavori dell'Osservatorio astronomico, di cui è Direttore, colle parole seguenti:

Presento all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, in continuazione delle precedenti, le *Osservazioni meteorologiche ordinarie* del primo trimestre di quest'anno, coi rispettivi riassunti e diagrammi mensili, state redatte dall'Assistente Prof. Angelo CHARRIER.

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Gennaio.

La media delle pressioni barometriche osservate in questo mese è 34,93; inferiore di mm. 4,50 a quella degli ultimi quindici anni.

Le variazioni di questo elemento furono considerevoli. Il seguente quadro ne contiene i massimi ed i minimi:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
2	48,37	5	35,23
7	46,64	13	21,21
17	38,37	19	24,46
21	38,28	23	32,36
24	46,69	30	25,24

Le temperature registrate nel mese danno una media $-0^\circ,8$ inferiore alla media degli ultimi quindici anni $1^\circ,7$ — Gli estremi termometrici furono $+7^\circ,5$ e $-9^\circ,6$, e si ebbero nei giorni 1 e 24. Undici furono i giorni con pioggia o con neve, e l'altezza dell'acqua raccolta nel pluviometro è di mm. 110,83.

Il seguente quadro dà la frequenza dei venti:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
0	4	3	0	1	0	0	0	1	8	23	6	6	2	1	0

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Febbraio.

La pressione barometrica in questo mese ha per media 36,45, inferiore alla media di Febbraio degli ultimi quindici anni di mm. 2,09. — Le oscillazioni della pressione furono poco numerose ma di grande ampiezza.

Il quadro seguente racchiude i valori estremi :

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
3	39,56	6	29,35
7	39,51	11	19,59
23	45,60		

I valori estremi della temperatura si ebbero nei giorni 3 e 9; nel primo il minimo $-3^{\circ},5$, nel secondo il massimo $+11^{\circ},5$. Il valor medio $+3^{\circ},9$ è inferiore di $0^{\circ},4$ al medio dello scorso quindicennio.

Quattro furono i giorni con pioggia; l'altezza dell'acqua caduta è di mm. 9.90.

Il seguente quadro indica pel mese la frequenza dei venti:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
0	1	2	0	0	0	0	1	4	5	24	2	8	0	3	2

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Marzo.

Il valor medio delle pressioni barometriche osservate è 36,64, e supera il valor medio degli ultimi quindici anni di mm. 1,62.

Il quadro seguente contiene i massimi ed i minimi valori osservati nel mese.

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
1	28,01	3	44,44
13	30,18	18	48,02
22	27,18	24	44,36
25	28,44		

La media delle temperature osservate è 9°,2, inferiore di 3°,7 alla media di Marzo degli ultimi quindici anni. — Le temperature estreme sono — 0°, 3 e + 23°, 7; s'ebbe la prima nel giorno 3, la seconda nel giorno 10.

Si ebbe pioggia in otto giorni e si raccolse nel pluviometro mm. 29, 37 d'acqua.

Nel quadro seguente è indicata la frequenza dei venti nelle singole direzioni:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
4	10	17	2	3	3	1	1	2	5	16	4	7	3	2	2

Le *Osservazioni meteorologiche* sopra accennate vedranno la luce nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

DICEMBRE

CLASSE
DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza dell'11 Dicembre 1881.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. PROSPERO RICHELMY
VICE-PRESIDENTE

Il Socio Prof. Andrea NACCARI presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Dott. Stefano PAGLIANI, Professore nel R. Istituto tecnico di Torino, la seguente Nota

SOPRA UNA MODIFICAZIONE
AL METODO CALORIMETRICO DI KOPP
E SUL CALORE SPECIFICO
DI ALCUNI SALI ORGANICI.

Il metodo di Kopp per la determinazione del calore specifico tanto di corpi solidi che liquidi riposa sul principio del metodo delle mescolanze. In esso una sostanza solida viene introdotta in frantumi in un tubetto di vetro insieme ad un liquido di calor specifico noto e si chiude il tubo con un tappo in cui sta infisso un filo di ferro. Il tubetto viene scaldato immergendolo nel mercurio di un vaso che si riscalda per mezzo di un bagno ad olio, riscaldato questo alla sua volta da un bagno di sabbia. Quando la temperatura si è conservata costante per un certo tempo al grado voluto, si porta rapidamente il tubetto in un calorimetro contenente una quantità conveniente di acqua e vi si immerge sempre fino ad una data altezza, che deve essere la stessa in tutte le determinazioni, generalmente fino all'altezza della superficie inferiore del tappo di sughero. Si determina prima di tutto l'equivalente in acqua del tubetto per quella porzione che verrà immersa in tutte le determinazioni. Ciò si ottiene riscaldando il tubetto vuoto sino ad una temperatura T; portandolo poi nel calorimetro, si osserva la temperatura a cui viene scaldata l'acqua e, fatte le debite correzioni, se essa sia t', se sia t la temperatura iniziale di quest' acqua e P il suo peso, l'equivalente del tubetto sarà dato da $a = \frac{P(t'-t)}{T-t'}$.

In ciascuna determinazione per le sostanze solide, si fanno le stesse operazioni. Chiamando p il peso della sostanza, p' il peso del liquido, con cui viene bagnata, ed il suo calore specifico c', il calore specifico da determinarsi sarà dato da

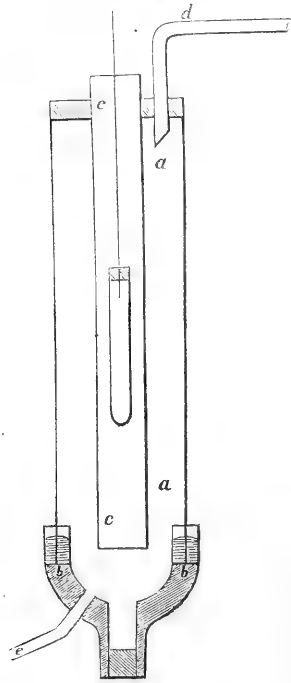
$$c = \frac{P(t'-t) - (a + p'c')(T-t')}{p(T-t')} .$$

Per le sostanze liquide, sia p il peso del liquido dato, sarà

$$c = \frac{P(t'-t) - a(T-t')}{p(T-t')} .$$

Una delle difficoltà principali, che si incontrano nella applicazione del metodo di Kopp consiste nell'ottenere la costanza di temperatura nel bagno a mercurio, difficoltà che fa sì che talora si richieda molto tempo per le determinazioni, specialmente quando si vuol operare a temperature un po' alte.

Fig. 1.



Dovendo fare delle determinazioni di calori specifici di sali organici ho cercato di eliminare questa difficoltà per rendere molto più breve il tempo di ogni determinazione. A tale scopo invece del bagno a mercurio ho applicato il riscaldamento a vapore, pur non aumentando molto le dimensioni dell'apparato, nè diminuendo la semplicità dell'operazione.

L'apparecchio di cui mi servo consiste in un manicotto di vetro a (fig. 1), portato da una ghiera b di ferro, come quella proposta dal Prof. Schiff per l'apparecchio di Hofmann per le densità di vapore. Questo manicotto di vetro, del diametro interno di 4 cm. circa e della lunghezza di circa 15 cm., è chiuso da un tappo di sughero, che porta due fori l'uno grande nel quale passa un tubo di ottone *e* a pareti assai sottili, l'altro in cui entra un tubo di vetro *d* piegato ad angolo retto che conduce il vapore da un matraccio di vetro, a cui sta unito, essendo manicotto e matraccio portati dallo stesso sostegno. Nel tubo di ottone *c*, del diam. int. di 16 mm. circa e lungo 18 cm., chiuso all'estremità inferiore, si introduce il tubetto, che serve per la determinazione ed un termometro. L'estremità superiore, dopo introdotto tubetto e termometro, si chiude con un po' di cotone per impedire le correnti d'aria. Il tubo *e* della ghiera è messo in comunicazione o con un semplice tubo di vetro o con un refrigerante secondo la sostanza che si adopera per produrre i vapori. Questi vapori entrano per il tubo *d* nel manicotto di vetro, circondano il tubo di ottone ed escono per il tubo *e* e vanno così a condensarsi. In breve tempo si può ottenere una temperatura costante nello spazio *c* e facilmente vi si può mantenere a volontà regolando la fiamma e quindi l'afflusso dei vapori. Di più si vede come, variando la natura del liquido generatore dei vapori, si possano far determinazioni a temperature diverse con molta facilità. Si può adoperare, acqua, alcool, etere, benzina, acetone, cloroformio, ecc. Non è poi necessario che i liquidi sieno chimicamente puri, perchè certe impurità non impediscono che lo spazio occupato dai vapori assuma una temperatura sufficientemente costante; e quando anche essa oscilli nell'intervallo di 10 a 15' minuti di 2 a 3 decimi di grado, facendo diverse letture si può prendere una media di esse ed avere così molto approssimativamente la temperatura vera, a cui fu scaldato il corpo. Si sa che solo nel caso di temperature basse, è necessario conoscere con somma esattezza il valore di quella temperatura. Con esperienze apposite ho determinata la differenza fra la temperatura nel tubo di ottone e quella nel tubetto; la trovai circa 0°. 3 e di essa tenni conto nel calcolo. Si vedrà nei dati sperimentali citati più sotto come la temperatura dell'interno del tubo di ottone non è la stessa in tutte le determinazioni anche adoperando lo stesso liquido; essa dipende da circostanze diverse e specialmente dal maggior o minore afflusso di vapori. Il manicotto è difeso da una custodia cilindrica in metallo. Il matraccio è chiuso da un tappo a due fori, nell'uno dei quali passa il tubo che va al manicotto, nell'altro un tubo ad imbuto con robinetto. In tal modo, quando dopo una determinazione una certa quantità di liquido sia distillata, la si può aggiungere senza aprire il matraccio.

Quanto al modo di sostenere il tubetto trovai opportuno di non stringere il filo di ferro fra le branche di una morsa da sostegno, ma di farne passare una estremità in una lamina di sughero e tenervela fissa al di sopra per mezzo di un serrafilo a vite di pressione; in questo modo si possono produrre facilmente dei piccoli innalzamenti e abbassamenti del tubetto, secondo il bisogno. Di più la lamina di sughero è portata da una forchetta orizzontale annessa al sostegno dell'apparecchio riscaldante. Non si ha al momento dell'immersione che da trasportare la detta lamina sopra un'altra forchetta orizzontale messa al di sopra del calorimetro. Così non si devono maneggiare delle morse, cosa che non è sempre molto comoda e spiccia.

Quando si tratta di sostanze liquide che si devono o si ponno chiudere facilmente in tubi saldati alla lampada, questi tubi sono stretti fra le due piccole ganasce di una morsa, di forma tale che chiuse formano quasi un cilindro cavo, e facilmente si possono aprire. Al momento della immersione non si fa che portare la morsa col tubetto al di sopra del calorimetro, far aprire la morsa, e il tubetto cade nel calorimetro, dove l'agitatore lo porta a contatto di tutta la massa liquida. Questa operazione si fa in modo quasi istantaneo.

Il calorimetro è di ottone, piccolo e disposto nel modo solito, difeso convenientemente. I termometri adoperati furono confrontati con un campione, confrontato a sua volta col termometro ad aria. Sull'uno, quello dell'apparecchio riscaldante, si poteva con un cannocchiale apprezzare $^1/_{20}$ di grado; sull'altro, quello del calorimetro, $^1/_{200}$ di grado.

Per fare un' operazione si scalda il liquido nel matraccio, si introduce nel tubo di ottone il tubetto ed il termometro. Dal momento in cui incomincia la distillazione nel refrigerante in 15' a 20' si ottiene temperatura costante nel tubo di ottone. Vi si mantiene per altri 15'. Intanto si è disposta l'acqua ed il termometro nel calorimetro, e si sono fatte le letture per questo, affine di conoscere l'andamento della temperatura in esso, il che è necessario poi per fare le correzioni. Al momento opportuno si fa l'immersione e si continua a leggere ogni mezzo minuto il termometro del calorimetro; quando la temperatura di esso, raggiunto il massimo, comincia a ridiscendere, si continua a leggere ancora per 15' a 20' minuti, di minuto in minuto.

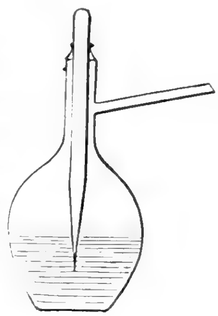
In tal modo si ha tutto il necessario per fare le correzioni. Si vede che in tre quarti d'ora, si può fare un' intera operazione.

Le correzioni si possono fare col metodo di Regnault partendo dal valore immediatamente inferiore al massimo.

Citerò qui alcune determinazioni di calor specifico di sostanze liquide e poi di sostanze solide, e infine quelle dei sali di sodio dei primi cinque acidi della serie dell'acido formico.

Determinazioni di calor specifico di liquidi. — Per fare queste determinazioni ho detto che si poteva introdurre il liquido in tubi da chiudersi poi alla lampada. I liquidi vengono introdotti in questo modo nei tubetti. Si mette il liquido da studiarsi in un recipiente (fig. 2), il cui collo porta un tubo saldato ad angolo un po' ottuso. Si fissa per mezzo di un tubo di gomma in questo collo il tubetto, chiuso da una parte, e con punta affilata ed aperta dall' altra che si immerge nel liquido. Il tubo del collo viene messo in comunicazione per mezzo di altro piccolo recipiente con una pompa aspirante a mano. Disposte le cose in tal modo, si aspira l'aria e si lascia poi entrare il liquido nel tubetto, chiudendo il robinetto della pompa. Quando è quasi pieno, si toglie, e, asciugatane la punta, si chiude con un colpo di fuoco. In tal modo si possono introdurre anche soluzioni saline concentratissime, e che possono poi rimanere allo stato soprasaturo, introducendole calde. Si comprende poi facilmente come si possa determinare il peso del vetro e della soluzione introdotta. Però in questo modo si introducono difficilmente delle soluzioni a titolo fisso, e per ciò doveva per le soluzioni saline preferire il metodo di Pfaundler. Il titolo delle soluzioni si deve determinare aprendo poi i tubetti.

Fig. 2.



Calor specifico del vetro. — Per determinare il calore specifico dei liquidi è necessario conoscere prima il calor specifico del vetro che deve formare i tubetti. Il calore specifico si determina riempiendo un tubetto dello stesso vetro con frantumi di esso e sostenendolo come si è detto per i tubetti dei liquidi. Nella tabella seguente P è il peso dell'acqua del calorimetro più l'equivalente di questo e dell'agitatore e quello della parte immersa del termometro; il primo uguale a 1. 28, il secondo a 0. 44; p è il peso del vetro.

T = temperatura a cui è portato il vetro.

t e t' rispettivamente temperature iniziale e finale nel calorimetro.

θ loro differenza; θ' differenza fra T e t'.

c = calor specifico osservato. Esso è dato da $c = \frac{P\theta}{p\theta'}$.

Vetro — *Vapori d'acqua.*

N°	p	T	P	t	t'	θ	θ'	c
1	2. 550	98°. 0	86. 28	23°. 77	24°. 22	0°. 45	73°. 78	0. 204
2	2. 275	97. 7	61. 07	22. 70	23. 24	0. 54	74. 5	0. 196
3	4. 090	98. 4	61. 64	23. 41	24. 36	0. 95	74. 1	0. 193
							Medio fra 23° e 99°	0. 198

Vapori di acetone.

N°	p	T	P	t	t'	θ	θ'	c
4	5. 145	59. 3	48. 85	19. 00	19. 85	0. 85	39. 4	0. 204
5	5. 120	58. 0	42. 18	17. 75	18. 66	0. 91	39. 4	0. 190
6	4. 780	58. 0	47. 80	17. 74	18. 58	0. 84	39. 4	0. 200
							Medio fra 18° e 59°	0. 198

Regnault aveva ottenuto 0.192. Secondo alcuni il *crown* avrebbe per calore specifico 0.198, il *flint* 0.190. Il valore medio da me ottenuto va perfettamente d'accordo.

Calore specifico dell'acqua — Ho fatto per prova del metodo alcune determinazioni del calore specifico dell'acqua, rinchiudendole in tubetti chiusi alla lampada.

Nella tabella seguente p è il peso dell'acqua nel tubetto, a è l'equivalente in acqua di questo. Le altre lettere hanno lo stesso significato.

c è dato da $c = \frac{P\theta - a\theta'}{p\theta'}$.

Vapori d'acqua.

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
7	1.970	0.428	98°.2	61.83	25°.55	28°.30	2°.75	69°. 9	1.020
8	1.970	0.428	98. 0	61.17	23. 44	26. 30	2. 86	71. 7	1.021
9	3.650	0.592	98. 1	103.27	23. 30	26. 29	2. 99	71. 8	1.015
10	3.390	0.532	98. 7	92.61	23. 54	26. 63	3. 09	72. 1	1.022
						Medio fra 23° e 99°			1.020

Vapori di acetone.

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
11	3.390	0.532	59. 8	94.47	17. 50	19. 19	1. 69	40. 6	1.006
12	3.390	0.532	58. 4	92.59	16. 26	18. 01	1. 75	40. 4	1.018
						Medio fra 18° e 60°			1.012

Calore specifico di soluzioni di solfato di Sodio. — Furono preparate, introdotte e titolate nel modo sopra detto. Cito due determinazioni di una soluzione a 50 $H^2 O$ per far vedere come il risultato concordi con quello ottenuto per altra via.

$$Na^2 SO^4 + 50\ H^2O = 13.63\ \%$$

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
13	3.722	0.498	98°.7	92.23	22°.68	25°.64	2°.96	73°. 0	0.871
14	3.722	0.498	99. 2	97.66	21. 49	24. 33	2. 84	74. 9	0.860
					Medio fra 24° e 99°				0.865

$$Na^2 SO^4 + 29\ H^2 O = 21.38\ \%$$

15	3.642	0.542	99. 0	96.04	20. 23	23. 07	2. 84	75. 9	0.838
16	3.642	0.542	99. 2	93.25	22. 69	25. 51	2. 82	73. 7	0.831
17	3.642	0.542	98°.5	100.45	22. 11	24. 73	2. 62	73. 7	0.831
18	3.642	0.542	99. 2	96.66	21. 66	24. 41	2. 75	74. 8	0.827
					Medio fra 23° e 100°				0.832

$$Na^2 SO^4 + 18\ H^2 O = 30.31\ \%$$

19	5.459	0.599	99. 1	96.29	20. 40	24. 19	3. 79	74°.9	0.783
20	5.459	0.599	98. 8	100.47	21. 85	25. 41	3. 56	73. 3	0 783
21	5.459	0.599	99°.1	100.14	23. 16	26. 66	3. 50	72. 4	0.776
					Medio fra 24° e 100°				0.781

Operando a temperature più basse si possono studiare soluzioni più concentrate; queste determinazioni dimostrano come si possono ottenere risultati concordanti fra loro e con quelli ottenuti con altri metodi.

Determinazioni di calor specifico di corpi solidi. — Queste determinazioni vennero fatte col tubetto chiuso con tappo di sughero, si determinò prima di tutto l'equivalente in acqua della porzione di tubo che si doveva immergere in tutte le operazioni e si trovò $a = 0.548$. Indi si determinò il calor specifico del petrolio, che è il liquido scelto per bagnare il corpo solido.

PETROLIO — *Vapori d'acqua.*

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
22	2.590	0.548	99°.3	92.95	16°.10	17°.71	1°.61	81°. 6	0.498

Pirite cristallizzata $= FeS^2$. In questi valori a è la somma degli equivalenti del tubetto e del petrolio introdottori; p peso della pirite.

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
23	2.880	1.702	99°.4	92.73	17. 30	19. 13	1. 83	80.27	0.1295

Regnault trovò per calore specifico della pirite 0.1301; Naumann 0.1275; Kopp 0.126. Il mio valore va d'accordo con essi.

Calore specifico dei sali di sodio dei primi cinque acidi della serie $C^n H^{2n} O^2$ — I sali adoperati sono gli stessi che hanno servito per lo studio del calore specifico delle loro soluzioni acquose (*Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino,* 1881). Si disseccarono prima in una stufa e, ridotti in polvere, si introdussero con petrolio nel tubetto per la determinazione. Si determinò prima l'equivalente di questo e l'una determinazione diede 0.482, l' altra 0.483. Si fecero collo stesso tubetto delle determinazioni di calore specifico dell'acqua nei vapori di acetone per verificare indirettamente quell' equivalente; così pure del petrolio che doveva poi servire per le determinazioni.

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
24	3.780	0.482	58°.1	102.38	20. 33	21. 85	1. 51	36. 3	1.012
25	3.780	0.482	58. 0	102.26	21. 10	22. 59	1. 49	35. 4	1.008
					Medio fra 21° e 58°				1.010
					Petrolio.				
26	2.748	0.482	57. 6	102.31	20. 30	20. 98	0. 68	36. 6	0.516
27	2.740	0.482	57. 5	101.98	20. 88	21. 54	0. 66	36. 0	0.506
					Medio fra 21° e 58°				0.511

Sali organici di Sodio.

Formiato di Sodio $= CHNaO^2$

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
28	3.940	1.232	57°.2	101.94	21°.09	22°.01	0°. 92	35°. 2	0.313
29	3.940	1.224	57. 4	102.39	20. 88	21. 80	0. 91	35. 6	0.311
30	3.940	1.221	56. 9	102.20	21. 00	21. 84	0. 84	35. 1	0.313
31	3.940	1.241	57. 3	102.07	20. 97	21. 83	0. 86	35. 5	0.314
					Medio fra 21° e 57°				0.312

Acetato di Sodio anidro $= C^2 H^3 Na O^2$

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
32	2.562	1.204	58°.0	102.32	13°.90	14°.79	0°. 89	43. 2	0.353
33	2.562	1.275	57. 1	101.74	14. 69	15. 56	0. 87	41. 5	0.354
34	2.562	1.370	58. 5	101.97	13. 25	14. 22	0. 97	44. 3	0.341
35	2.562	1.387	59. 4	101.92	13. 56	14. 57	1. 01	44. 8	0.354
					Medio fra 14° e 59°				0.350

Propionato di Sodio $= C^3 H^5 Na O^2$

36	2.705	1.273	57. 3	102.25	19. 89	20. 69	0. 80	36. 6	0.360
37	2.705	1.270	57. 4	102.34	20. 20	21. 21	0. 81	36. 4	0.370
38	2.705	1.267	57. 4	102.08	20. 44	21. 25	0. 81	36. 2	0.378
					Medio fra 20° e 57°				0.369

Butirrato di Sodio $= C^4 H^7 Na O^2$

39	2.313	1.341	58. 5	102.45	20. 38	21. 16	0. 78	37. 3	0.346
40	2.313	1.340	57. 8	102.49	21. 00	21. 75	0. 75	36. 0	0.348
41	2.313	1.391	57. 9	102.52	21. 32	22. 10	0. 78	35. 8	0.344
42	2.313	1.382	58. 0	102.51	21. 49	22. 26	0. 77	35. 7	0.354
					Media fra 21° e 58°				0.348

Valerato di Sodio $= C^5 H^9 Na O^2$.

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
43	3.015	1.057	58. 4	102.30	19. 50	20. 61	1. 11	37. 8	0.646
44	3.015	1.071	57. 5	102.02	20. 00	21. 06	1. 06	36. 4	0.628
45	3.015	1.069	58. 1	102.16	20. 51	21. 58	1. 07	36. 5	0.640
						Medio fra 20° e 5 °			0.638

Da questi dati sperimentali noi possiamo calcolare i calori molecolari di questi sali e quindi gli equivalenti in acqua delle loro soluzioni a diversa diluizione, facendo la somma del calore molecolare del sale solido anidro e di quello dell'acqua aggiunta. Si trova che le differenze fra gli equivalenti calcolati e quelli dati dall'esperienza (*Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, 1881, XVI) non sono dello stesso senso per tutti questi sali (1).

Nella tabella seguente C è il calore molecolare del sale solido, C_c e C_t sono gli equivalenti delle soluzioni, calcolati nel modo anzidetto, ed i trovati, D la differenza fra i due equivalenti.

---

(1) Nella pubblicazione della mia seconda nota sopra i calori specifici delle soluzioni è occorsa qualche inesattezza nella penultima tabella. Essa va rettificata come segue:

Valerato di Sodio $C^5 H^9 Na O^2 + n H^2 O.$ $C = 989 + 18 (n - 50)$.

n	c_t	P	C_t	C_n	d	c_e	d
50	0.966	124 + 900	989	989			
100	0.982	124 + 1800	1889	1889	0	0.982	0
200	0.992	124 + 3600	3694	3689	— 5	0. 9 90	— 0.002

Quindi la variazione nel valore dell'equivalente per la differenza di un gruppo CH^2 nelle soluzioni fra il butirrato ed il valerato non è di 8 unità, ma di 14 unità.

	C	$25 H^2O$			$50 H^2O$			$100 H^2O$			$200 H^2O$		
		C_c	C_t	D	C_c	C_t	D	C_c	C_t	D	C_c	C_t	D
$C\ H\ Na\ O^2$	21.2	471	454	+17	921	901	+20	1821	1801	+20			
$C^2 H^3 Na\ O^2$	28.7	479	478	+1	929	925	+4	1829	1822	+7			
$C^3 H^5 Na\ O^2$	35.4	485	504	—19	935	951	—16	1835	1854	—19			
$C^4 H^7 NaO^2$	38.3	488	525	—37	938	970	—32	1838	1879	—41	3638	3688	—50
$C^5 H^9 Na\ O^2$	79.1				979	989	—10	1879	1889	—10	3679	3694	—15

Da questa tabella risulta che mentre per il formiato di sodio lo equivalente in acqua delle soluzioni, dato dall'esperienza, è sempre inferiore alla somma dei calori molecolari del sale anidro e dell'acqua aggiunta, per l'acetato questi due valori coincidono quasi esattamente, per il propionato ed il butirrato il primo è maggiore del secondo, e per il valerato presentano di nuovo soltanto piccole differenze.

Dalla stessa tabella emerge pure che i calori molecolari di questi sali omologhi vanno crescendo col peso molecolare, ma con poca regolarità. Faccio tosto osservare come una tale irregolarità si ritrova nei valori dei calori molecolari degli acidi corrispondenti e dei loro eteri, come lo dimostrano le antiche determinazioni di Regnault, Favre e Silbermann, Kopp e le recenti di von Reis. Però queste ultime tenderebbero a dimostrare che se si prende in considerazione il calore specifico dei composti liquidi, che formano una serie di data funzione chimica, e di costituzione analoga, per due limiti di temperatura qualunque, p. es. fra 20° e 100°, non si hanno differenze regolari nei calori molecolari; se si prende invece per ognun termine il calore specifico per l'intervallo fra una temperatura data, per es. 20°, e quella del suo punto di ebollizione, allora, confrontando fra loro i calori molecolari così ottenuti, si avrebbe regolarità nelle differenze. Forse per i corpi solidi si dovrà anche prendere in considerazione il calore specifico per dati limiti di temperatura, che l'esperienza per ora non ci ha ancor fatto conoscere, ed anche allora si potrà avere regolarità nella variazione dei calori molecolari per date variazioni nella composizione.

Terminerò con un'osservazione relativa ad una nota del signor Ancelin: *Sur le chauffage des wagons, voitures*, ecc. *au moyen de l'acetate de soude cristallisé* (Compt. rend. 1881). In essa l'autore nel calcolare il calore di fusione e in seguito la quantità di calore ceduta da un dato peso di acetato di soda cristallizzato, passando da 80° a 40°, assume per calore specifico di quel sale allo stato liquido il valore 0.75, allo stato solido il valore 0.32. Le mie determinazioni darebbero per lo stato solido un valore assai differente, poichè il calore specifico da me trovato per l'acetato di sodio *anidro* è uguale a 0.350. Quindi per il cristallizzato, esso deve essere superiore. Ho fatto delle determinazioni del calore specifico dell'acetato di sodio cristallizzato; asciugato semplicemente fra carta, ed ho avuto i seguenti risultati:

Acetato di Sodio cristallizzato $= C^2 H^3 Na\, O^2 + 3 H^2 O$

N°	p	a	T	P	t	t'	θ	θ'	c
46	3.085	1.043	57°.6	102.08	20°.93	21°.81	0°.88	35°. 8	0.480
47	3.085	1.037	57. 2	102.01	21. 69	22. 55	0. 86	34. 7	0.483
48	3.085	1.024	57. 6	101.87	20. 73	21. 63	0. 90	36. 0	0.493
49	3.085	1.015	57. 7	101.84	21. 14	22. 02	0. 88	35. 7	0.484
								Medio fra 21° e 57°	0.845

Volendo anche, tenuto conto della difficoltà di disseccare perfettamente l'acetato di sodio cristallizzato e dell'influenza che l'acqua igroscopica ha sul valore del calore specifico, ritenere quel valore come superiore al vero, tuttavia credo che non ne sia molto lontano. Applicando al valore 28.7 del calore molecolare del sale anidro la legge di Person, secondo la quale il calore molecolare di un idrato è assai approssimativamente la somma di quelli del corpo anidro e dell'acqua solida, si otterrebbe per calore molecolare dell'acetato di sodio cristallizzato con 3 molecole d'acqua il valore 55.7, da cui si calcolerebbe il calore specifico riferito all'unità di peso, 0.410. Introducendo questi valori nel calcolo suaccennato il vantaggio del metodo di riscaldamento proposto è ancor sempre molto grande su quello ad acqua, ma riesce alquanto inferiore a quello assegnato da Ancelin. Ritengo quindi opportune nuove determinazioni dirette a stabilire quei dati calorimetrici relativi all'acetato di sodio cristallizzato.

Le esperienze esposte in questa nota vennero eseguite nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino, diretto dal chiar^mo sig. Professore NACCARI.

Torino, Settembre 1881.

Il Socio Prof. Andrea Naccari presenta ancora, e legge, a nome dell'Autore, sig. Dott. D. Mazzotto, Professore nel R. Liceo di Fermo, il seguente studio sperimentale

SULLE CALORIE

DI SCALDAMENTO E DI FUSIONE DELLE LEGHE

FACILMENTE FUSIBILI.

1. *Scelta del Metodo.* — Sulla determinazione delle calorie di fusione dei corpi non sono molti i lavori esperimentali; lasciando a parte il metodo poco esatto usato dal Black, il quale per primo ha richiamato l'attenzione dei fisici su tal soggetto, ci incontriamo nei lavori di Rudberg, Erman, Svanberg e Person (1).

I tre primi usarono metodi poco differenti fra loro; tutti e tre osservavano il tempo che il corpo studiato, contenuto in crogiuolo di cui conoscevano l'equivalente in acqua, metteva a raffreddarsi di 10 gradi entro i quali fosse compreso il punto di solidificazione; Rudberg e Svanberg poi confrontavano questa durata di raffreddamento con quella del mercurio posto nelle identiche condizioni, ed Erman la confrontava invece con quella che si sarebbe avuta dal corpo stesso se in quell'intervallo di temperatura seguisse nel raffreddarsi la stessa legge che seguiva prima e dopo della solidificazione: in tal modo potevano calcolare il calore di fusione.

Il Person invece, nella maggior parte delle sue celebri esperienze, usò il noto metodo del calorimetro, però non potè, per le ragioni che in seguito conosceremo, applicarlo alla determinazione del calore di fusione delle leghe facilmente fusibili, per le quali dovette egli pure ricorrere al metodo del raffreddamento. In tal caso egli osservava il tempo che la lega impiegava a svi-

(1) Rudberg, *Pogg. Ann.*, XIX, 125 (1830).
Erman (jun.), *Pogg. Ann.*, XX, 282 (1830).
Svanberg AF u. LF, *Pogg. Ann.*, XXVI, 280 (1832).
Person, *Ann. de Chimie et Phys.*, (3) XXI, 295 (1847), e XXIV, 129 (1848).

luppare il calore di fusione e la sua temperatura media t durante quel tempo. Col mezzo della formula del raffreddamento di Dulong e Petit, le cui costanti valevoli pel suo apparecchio egli avea precedentemente determinate, calcolava la velocità del raffreddamento alla temperatura t, e quindi il calore ceduto dall'apparecchio durante quel tempo e finalmente il calore di fusione.

Nelle mie determinazioni seguii un metodo che differisce alquanto da quelli testè accennati. Mi parve anzitutto opportuno, seguendo l'esempio di Erman, di confrontare fra loro due serie di esperienze nell'una delle quali il calore ceduto fosse noto, poichè, operando in condizioni identiche nei due casi, molte cause d'errore si sarebbero eliminate; ma, d'altra parte, credetti che si dovesse seguire più da vicino l'andamento del termometro durante la solidificazione, per poter ottenere la temperatura media da esso segnata in qualunque intervallo di tempo, e finalmente ritenni che le velocità di raffreddamento alle varie temperature, meglio che deducendole dalla formula empirica di Dulong e Petit, si sarebbero determinate con esperienze dirette eseguite sullo stesso mio apparecchio.

A tale scopo costruii, prendendo per ascisse i tempi e per ordinate le temperature, le curve di raffreddamento del mercurio e della lega raffreddantisi successivamente in condizioni identiche. Dalle une e dalle altre potei ricavare facilmente, fra gli intervalli di temperatura che desiderava, le durate del raffreddamento e con queste calcolare il calore specifico della lega, per quegli intervalli di temperatura fra i quali la sua curva discendeva regolarmente.

Dalle stesse curve ottenute col mercurio ricavava eziandio le velocità di raffreddamento, in gradi, dell'apparecchio alle varie temperature, e da queste deduceva quelle in calorie, conoscendo l'equivalente in acqua dell'apparecchio ed il peso del mercurio. La curva del raffreddamento della lega, dava d'altra parte le temperature medie che si ebbero entro determinati intervalli di tempo durante la solidificazione, così che potea calcolare le quantità di calore dalla lega cedute in quegli intervalli di tempo, e finalmente dedurne il calore di fusione.

Tale metodo è evidentemente applicabile anche al caso del riscaldamento, e quindi credetti utile di usarlo alla determinazione delle calorie di fusione anche in questo caso, ed ottenere così un utile controllo dei risultati.

2. *Descrizione dell'apparecchio.* — Un tubo verticale di vetro lungo circa 80^{cm} e sostenuto superiormente da un'asta orizzontale, stretta nel suo mezzo da una morsa, sosteneva il crogiuolo, di sottil lamina di ferro a forma di tronco di cono della capacità di 45^{cm^3}, destinato a contener la lega. L'unione fra i due pezzi si effettuava avvitando ad un anello di ferro saldato alla parte inferiore del tubo, un altro anello collegato al crogiuolo col mezzo di due branche verticali su di esso ribattute.

Nel tubo di vetro era fisso col mezzo di anelli di gomma, il termometro (diviso in quinti fra 0^o e 151^o), il cui bulbo giungeva al centro del crogiuolo, ma era protetto dal contatto della lega, da un sottil tubo d'acciaio fisso al coperchio del crogiuolo e contenente una quantità di mercurio (15^{gr}) sufficiente per circondare completamente il bulbo. Crogiuolo e coperchio erano esternamente affumicati.

Gli ambienti pel riscaldamento e raffreddamento erano due vasi identici di latta internamente affumicati (diametro della base 16^{cm}, altezza 14^{cm}), muniti superiormente di un'apertura circolare sormontata da un orlo dell'altezza di 3^{cm} pel quale passava esattamente il crogiuolo.

Quello che serviva al raffreddamento era circondato completamente da ghiaccio e contenuto in recipiente molto più largo. L'altro era sospeso nell'interno di un altro vaso che comunicava coll'esterno solo col mezzo di un tubo che sosteneva un refrigerante a ricaduta; al fondo del vaso inviluppante bolliva uno strato di essenza di trementina i cui copiosi vapori, alla temperatura costante del 159^0 indicata da un termometro in essi immerso, circondavano completamente l'altro vaso.

Questi apparecchi erano portati da due alti treppiedi a maniglie, i quali, appoggiati che fossero su appositi rialzi fissi al suolo, facevano riuscire il crogiuolo al centro dell'ambiente che sostenevano, ed allora, con un grosso turacciolo ben adattato, diviso in due parti e forato al centro per dar accesso al tubo di vetro, si chiudeva la comunicazione fra l'interno dell'ambiente e l'esterno.

3. *Procedimento nelle determinazioni.* — In tutte le determinazioni seguii lo stesso ordine: avvitato il crogiuolo al tubo di sostegno, dopo avervi introdotto il metallo liquido e fatte le pesate, lo raffreddava nell'ambiente pel raffreddamento per poter incominciare le osservazioni dello scaldamento a temperature pros-

sime a 0°, e frattanto attendeva che un termometro posto nel centro del vaso pel riscaldamento, segnasse il consueto *maximum* di temperatura.

Ciò raggiunto, passava rapidamente il crogiuolo dall'uno all'altro vaso, adattava il turacciolo e notava ad intervalli di 15 o 30 secondi le temperature segnate dal termometro fino a che avesse raggiunta la temperatura di 150°.

Da questo punto lasciava proseguire il riscaldamento per un altro quarto d'ora, trascorso il quale, passava rapidamente il crogiuolo nell'ambiente di raffreddamento già pronto a 0°. Giungeva sempre in tempo per incominciare le osservazioni mentre la temperatura era ancora compresa fra 145° e 150° e le continuava di 15 in 15 o di 30 in 30 secondi finchè si fosse abbassata a 5°.

In ambedue i casi però, negli intervalli in cui le variazioni di temperatura seguivano regolarmente, trovavo più comodo osservare le durate di raffreddamento o scaldamento di cinque in cinque gradi.

Per la misura dei tempi usai, non potendo disporre di meglio, un discreto orologio da tasca provveduto del piccolo quadrante dei secondi.

4. ***Determinazioni preliminari.*** Le prime esperienze ebbero per iscopo la determinazione dell'equivalente in acqua del crogiuolo co' suoi accessori. Perciò determinava le durate del riscaldamento e del raffreddamento del crogiuolo ripieno di mercurio e quelle dello stesso crogiuolo riempito solo a $^3/_4$ ed a $^2/_3$, e col mezzo della nota formula $\frac{pc+\mu}{p'c+\mu}=\frac{t}{t'}$ calcolava μ, cioè l'equivalente cercato.

Come media delle determinazioni collo scaldamento ebbi $\mu = 8^{gr},509$ e da quelle col raffreddamento $\mu = 8,262$ e ritenni come valore definitivo la media di questi, cioè $\mu = 8,385$.

In questo valore non è compreso l'equivalente in acqua del mercurio contenuto nel tubetto, poichè, variando esso, benchè di poco, in ogni determinazione, lo calcolava a parte nei singoli casi e lo aggiungeva al valore di μ.

In questa, come in tutte le altre determinazioni, presi per calore specifico medio del mercurio fra 0° e 150° il valore $c = 0,03284$ quale si ricava dalla formula data dal Winkelmann (1).

(1) Winkelmann, *Pogg. Ann.*, CLIX, 158.

Per determinare poscia le velocità del raffreddamento e del riscaldamento dell' apparecchio alle varie temperature, feci con una stessa quantità di mercurio ($430^{gr},17$) sei osservazioni di scaldamento ed altrettante di raffreddamento, e costruii su ampia scala le dodici curve corrispondenti, prendendo per ascisse i tempi e per ordinate le temperature. Da questa ricavai, prima le durate dello scaldamento e del raffreddamento di cinque in cinque gradi, poscia, per ogni grado, le velocità di scaldamento (in gradi per minuto) misurando la variazione che subiva l'ordinata durante il minuto, a metà del quale la curva indicava quel certo grado di temperatura. Colla media dei sei valori di queste velocità pei singoli gradi costruii le due curve dalle quali dedussi due tabelle che davano le velocità di scaldamento e raffreddamento per ogni decimo di grado. Tali velocità in gradi moltiplicate per 23,011, equivalente in acqua del crogiuolo col mercurio, fornivano le velocità in calorie.

Prima di passare allo studio delle leghe, volli vedere qual grado di approssimazione si potea ottenere coll' apparecchio da me usato, nella determinazione dei calori specifici.

Sostituii perciò al mercurio il bismuto ($320^{gr},51$) e dal confronto fra le rispettive durate di scaldamento e raffreddamento ottenni per calore specifico del bismuto i valori:

RISCALDAMENTO		RAFFREDDAMENTO	
Temperature	Calore specifico	Temperature	Calore specifico
fra e		fra e	
10°— 50°	0,02889	145°— 90°	0,03096
50 — 90	0,03016	90 — 50	0,02978
90 — 130	0,03170	50 — 20	0,02899
130 — 150	0,0318	20 — 5	0,02988

Regnault fra 0° e 100° trovò $c = 0,0308$: si vede adunque che l'approssimazione è discreta.

Volli inoltre verificare se le variazioni che subiscono i calori specifici così determinati sono dello stesso ordine, almeno, di quelle che si verificano in causa dell' aumento di temperatura, e non conoscendo tali variazioni pel bismuto ricorsi allo stagno pel quale il Béde diede una formula. Riporto qui appresso i valori del calore specifico dello stagno da me trovati contrapposti a quelli che per gli stessi intervalli di temperature si ricavano dalla formula di Béde:

RAFFREDDAMENTO			RISCALDAMENTO		
Temperature	Béde	Esperienze	Temperature	Béde	Esperienze
145°-100°	0,06078	0,0568	10°- 50°	0,05264	0,0544
100 - 50	0,05660	0,0555	50 - 100	0,0566	0,0545
50 - 30	0,05352	0,0538	100 - 125	0,0599	0,0563
30 - 15	0,05198	0,0529	125 - 150	0,0637	0,0563
15 - 5	0,05088	0,0517	10 - 150	0,05704	0,05577

Anche qui l'approssimazione mi pare sufficiente. Come si vede, e come del resto era da aspettarsi, si ottennero migliori risultati col raffreddamento che col riscaldamento.

Il valore medio dato dal Regnault fra 0° e 100° è 0,0562; quello dato dal Kopp è 0,0548.

5. ***Determinazioni colle leghe.*** Ecco la composizione centesimale delle leghe da me studiate: le formule per le leghe Darcet e Rose sono quelle che furono usate dal Person (Memoria citata) nella preparazione delle stesse leghe, le altre due le ricavai io stesso, procurando di rappresentare colle più semplici formule rapporti ponderali dei componenti che più si avvicinassero a quelli stabiliti dagli scopritori delle leghe stesse e che sono (1):

Lega Lipowitz 15 p B + 4 p Sn + 8 p Pb + 3 p Cd
» Wood 7-8 » » + 2 » » + 4 » » + 1-2. » »

Invero W. Spring (2), in uno suo studio sulle stesse leghe, adottò per esse formule più complesse, ma non disse come le abbia scelte e non trovai perciò ragione per seguirle.

(1) *Fortschritte der Physik,* XVIII, 336; XVI, 346.
(2) W. Spring., *Bullet. de l'Académie Roy. de Belgique* (2), XXXIX, 548 (1875).

Leghe	DARCET	ROSE	LIPOWITZ	WOOD
Formule	$Bi^3 Sn^2 Pb^2$	$Bi^2 Sn^2 Pb$	$Bi^8 Sn^4 Pb^4 Cd^3$	$Bi^4 Sn^2 Pb^2 Cd$
Bismuto . .	49,21	48,66	50,66	52,43
Stagno . . .	18,44	27,34	14,24	14,73
Piombo . .	32,35	24,00	24,97	25,85
Cadmio. . .	—	—	10,13	6,99
	100,00	100,00	100,00	100,00

Preparai le leghe, fondendo e rimestando lungamente i metalli puri in un crogiuolo di terra sotto uno strato di colofonia fusa che ne impedisse l'ossidazione, e rifondendo poi replicatamente la lega formata perchè acquistasse un certo grado di stabilità.

Per ogni lega feci sei determinazioni collo scaldamento ed altrettante col raffreddamento, e, costruite le curve corrispondenti, ne deduceva le durate dello scaldamento e del raffreddamento per intervalli di cinque in cinque gradi, le quali confrontate con quelle corrispondenti del mercurio servivano, o separatamente od opportunamente aggruppate, a calcolare il calore specifico della lega fra determinati intervalli di temperatura.

Negli intervalli di temperatura poi, nei quali la differenza fra le durate corrispondenti del mercurio e della lega era molto grande, ciò era indizio di uno sviluppo od assorbimento di calore per parte della lega, per cambiamento di stato o per altra causa, e per calcolarlo procedeva così:

Divideva la parte della curva che si riferiva a quegli intervalli, e che aveva un andamento irregolare, in un certo numero di tratti che poco differissero dalla linea retta, e facilmente potea ricavare da essi, tanto la temperatura media in quel tratto, quanto la durata di essa. Moltiplicando questa durata per la velocità di scaldamento o raffreddamento corrispondente a quella temperatura media, aveva il calore ceduto od acquistato dal crogiuolo in quel tratto di tempo, e sommando le quantità di calore così determinate per tutti i tratti nei quali si era divisa quella parte di curva, aveva la quantità di calore acquistata o perduta dall'apparecchio nel passaggio dall'una all'altra delle due temperature estreme. Da questa sottraendo quella, facile a calcolarsi, dovute alla semplice variazione di temperatura, e dividendo il resto pel peso della lega, aveva la misura del calore dovuto al solo cambiamento di stato fra quegli intervalli di temperatura.

Ma le grandi variazioni che, come vedremo, subiscono i calori specifici di tutte queste leghe anche a distanze alquanto grandi dal punto di fusione, mi misero in guardia dal ritenere come calore di cambiamento di stato solo quello determinato nel modo anzidetto, ma credetti di dovervi aggiungere anche quello che, fra gli altri intervalli di temperatura, si manifestava come aumento nei calori specifici; per calcolarlo, bastava sottrarre al calore specifico trovato e palesemente troppo grande, il calore specifico vero della lega, ed il prodotto di questa differenza pel numero dei gradi compresi nell'intervallo di temperatura pel quale quel calore specifico era stato determinato, dava senz'altro il numero di calorie da aggiungersi.

In parecchi casi calcolai per uno stesso intervallo queste calorie tanto con quest'ultimo metodo quanto col precedente, fondato sulla conoscenza delle velocità di scaldamento e raffreddamento, ed ebbi sempre risultati molto concordanti.

Il corso delle mie esperienze mi indusse poi ad eseguire sopra ciascuna lega due altre determinazioni che chiamerò per brevità: *Raffreddamento parziale con fusione* e *Raffreddamento parziale senza fusione.*

In ciascuna di queste osservava il raffreddamento della lega dopochè era rimasta per molte ore in un vaso simile a quello che serviva al riscaldamento, ma circondato da acqua che manteneva ad una diecina di gradi al di sotto del punto di fusione della lega; se non che, nella prima di esse la lega era condotta a quella temperatura nel raffreddarsi dopo aver subita la fusione e nell'altra vi era condotta nel riscaldarsi senza subire la fusione.

6.° *Risultati delle determinazioni.* — La Tavola 1ª qui unita, riproduce, in piccola scala per ciascuna lega, una delle curve ottenute col riscaldamento ed una di quelle ottenute col raffreddamento tracciatovi a tratto continuo. Nelle curve del raffreddamento, analoghe a quelle ottenute dallo Spring (Memoria citata), si osserva che la discesa del termometro è anormale in due punti, fra i quali essa procede regolarmente: il superiore corrisponde alla solidificazione; ed il secondo ad una modificazione molecolare che subisce la lega ad una temperatura molto più bassa cioè a circa 46° per le leghe Darcet e Rose ed a 28° per le altre due. Il calore sviluppato in tale modificazione, produce nelle due prime un elevamento di temperatura, e nelle altre un semplice rallentamento nella discesa del termometro, e lo si calcola come il calore di fusione.

Anche le curve del riscaldamento presentano in generale la singolarità dell'arrestarsi o rallentarsi del termometro in due punti distinti, se non che il punto inferiore si trova molto prossimo al punto di fusione, ed è probabilmente dovuto ad una modificazione molecolare inversa a quella che avviene dopo la solidificazione.

Nelle leghe di Rose e Darcet prima della fusione avviene un sensibile abbassamento di temperatura, nelle altre due leghe invece il rallentamento è appena sensibile, però esiste, ed ebbi occasione di osservarlo molto più nettamente in alcune esperienze fatte colla lega Wood, riscaldandola in un ambiente a 100°.

Ad un certo punto delle curve di raffreddamento delle leghe Darcet e Rose si dipartono due altri rami di curva; quello punteggiato si riferisce al raffreddamento parziale senza fusione, e quello tratteggiato al raffreddamento parziale con fusione; si vede come questi tratti di curva differiscano fra loro e da quello corrispondente della curva completa di raffreddamento; il primo procede senza punti singolari, e l'altro presenta anomalie consimili a quelle delle curve del raffreddamento completo, ma avvengono a temperature più basse.

Per le altre due leghe non figura che il ramo del raffreddamento parziale senza fusione, giacchè l'altro si sarebbe quasi confuso con esso.

Seguono ora i quadri dei risultati delle osservazioni e dei calcoli; dirimpetto ai rispettivi intervalli di temperatura sono registrate rispettivamente nelle colonne t e T le durate del raffreddamento e scaldamento in secondi del mercurio e della lega: nelle colonne c i calori specifici dedotti direttamente dalle esperienze, e nelle C il calore dovuto per ogni chilogrammo di lega al cambiamento di stato o di costituzione molecolare. Il valore di t è medio di sei determinazioni; gli altri furono riportati per ogni singola determinazione nell'ordine nel quale furono eseguite.

Quei valori delle colonne C che hanno il corrispondente nella c furono calcolati col mezzo delle differenze fra i calori specifici, gli altri col mezzo delle velocità di scaldamento o raffreddamento.

Lega

Risca

Temperatura		t	T	c	C	T	c	C	T	c	C
10° —	50°	211″	188″	0,0364	—	182″	0,0346	—	184″	0,0355	—
50	70	130	127	0,0427	0,110	127	0,0427	0,130	129	0,0440	0,156
70	80	74	94	0,0640	0,278	94	0,0650	0,288	95	0,0649	0,287
80	85	40	62	0,0840	0,239	166	—	1,125	58	0,0760	0,199
85	90	43	200	—	1,323	79	0,1050	0,344	212	—	1.453
90	95	45	90	0,1170	0,404	89	0,1150	0,394	87	0,1120	0,379
95	105	103	988	—	6,317	945	—	6,027	959	—	6,106
105	110	58	65	0,0515	0,058	77	0,0675	0,138	82	0,0730	0,165
110	115	65	73	0,0535	0,068	70	0,0500	0,050	76	0,0565	0,083
115	125	157	163	0,0466	0,067	168	0,0500	0,101	167	0,0484	0,085
125	140	357	357	0,0435	0,054	342	0,0422	0,035	361	0,0444	0,067
140	150	498	462	0,0384	—	453	0,0386	—	472	0,0398	—
		Totale		$C=$	8,918			8,632			8,980

Raffre

Temperatura		t	T	c	C	T	c	C	T	c	C
145°—	120°	143″	139″	0,0417	—	140″	0,0417	—	137″	0,0417	—
120	110	70	73	0,0475	0,076	69	0,0435	0,036	78	0,0525	0,126
110	100	78	89	0,0549	0,150	99	0,0675	0,276	96	0,0610	0,211
100	90	89	738	—	5,313	738	—	5,321	719	—	5,157
90	85	49	49	0,0450	0,039	43	0,0360	—	50	0,0460	0,044
85	65	244	235	0,0473	0,202	237	0,0420	0,096	236	0,0437	0,130
65	50′	256	248	0,0421	0,073	251	0,0430	0,087	249	0,0425	0,079
50′	50‴	—	615	—	2,093	556	—	1,911	615	—	2,101
50‴	30	550	729	0,0679	0,614	766	0,0726	0,708	710	0,0655	0,566
30	15	857	888	0,0473	0,151	925	0,0500	0,192	899	0,0482	0,165
15	5	1695	1646	0,0424	0,052	1663	0,0430	0,058	1666	0,0433	0,061
		Totale		.... $C=$	8,763			8,685			8,640
				$K=$	3,185			3,052			3,102

Darcet

lamento

T	c	C	T	c	C	T	c	C
180″	0,0340	—	175″	0,0324	—	182″	0,0346	—
128	0,0432	0,140	128	0,0432	0,140	128	0,0432	0,140
92	0,0635	0,273	92	0,0620	0,258	91	0,0620	0,258
168	—	1,138	164	—	1,098	160	—	1,070
78	0,1030	0,334	81	0,1338	0,488	84	0,1130	0,384
90	0,1170	0,404	89	0,1160	0,399	90	0,1178	0,408
923	—	5,821	917	—	5,793	950	—	6,026
91	0,0850	0,225	101	0,0955	0,278	103	0,1009	0,300
75	0,0560	0,080	78	0,0585	0,093	81	0,0625	0,113
170	0,0509	0,110	173	0,0512	0,113	177	0,0540	0,141
344	0,0425	0,039	344	0,0410	0,016	350	0,0438	0,058
414	0,0374	—	456	0,0375	—	445	0,0375	—
		8,564			8,676			8,898

lamento

T	c	C	T	c	C	T	c	C
137″	0,0417	—	138″	0,0417	—	135″	0,0417	—
74	0,0484	0,085	81	0,0555	0,156	81	0,0454	0,055
106	0,0704	0,305	108	0,0720	0,321	110	0,0704	0,305
708	—	5,032	690	—	4,906	687	—	4,890
49	0,0447	0,037	59	0,0590	0,109	50	0,0460	0,044
233	0,0408	0,072	230	0,0405	0,066	229	0,0396	0,048
252	0,0432	0,090	254	0,0438	0,099	248	0,0421	0,073
569	—	1,990	573	—	2,001	563	—	1,887
724	0,0670	0,596	727	0,0677	0,610	718	0,0663	0,582
932	0,0506	0,201	939	0,0516	0,216	930	0,0504	0,198
1710	0,0450	0,078	1716	0,0454	0,082	1690	0,0442	0,070
		8,486			8,566			8,152
		3,080			3,008			2,858

Lega di

Risca

Temperatura	t	T	c	C	T	c	C	T	c	C
10° — 50°	211″	192″	0,0363	—	181″	0,0351	—	186″	0,0363	—
50 70	130	129	0,0431	0,112	131	0,0459	0,168	130	0,0431	0,112
70 80	74	87	0,0563	0,188	90	0,0579	0,204	90	0,0563	0,188
80 85	40	57	0,0721	0,173	144	—	0,884	137	—	0,824
85 90	43	174	—	1,075	72	0,0890	0,257	70	0,0852	0,239
90 95	45	87	0,1087	0,356	83	0,1019	0,322	82	0,1006	0,315
95 105	103	1049	—	6,515	962	—	5,913	942	—	5,763
105 110	58	112	0,1061	0,319	127	0,1240	0,409	147	0,1484	0,531
110 120	138	185	0,0670	0,248	199	0,0741	0,319	199	0,0740	0,318
120 135	296	384	0,0664	0,363	398	0,0680	0,387	400	0,0664	0,363
135 145	341	426	0,0629	0,207	454	0,0631	0,208	439	0,0629	0,207
145 150	302	352	0,0534	0,055	340	0,0525	0,051	352	0,0534	0,055
Totale ..... C =				9,611			9,122			8,915
Raffre										
145°—120°	143″	188″	0,0713	0,727	202″	0,0725	0,757	201″	0,0713	0,727
120 105	108	152	0,0737	0,472	153	0,0737	0,472	157	0,0737	0,472
105 100	40	61	0,0795	0,195	66	0,0894	0,236	70	0,0965	0,221
100 90	89	828	—	5,804	802	—	5,601	785	—	5,472
90 65	293	294	0,0431	0,140	293	0,0427	0,130	294	0,0431	0,140
65 50′	256	273	0,0467	0,138	273	0,0463	0,132	268	0,0467	0,138
50′ 50‴	—	456	—	1,523	483	—	1,624	485	—	1,624
50‴ 45	108	222	0,1161	0,393	208	0,1070	0,347	202	0,1032	0,329
45 25	655	752	0,0415	0,080	749	0,0410	0,070	743	0,0415	0,080
25 10	1206	1206	0,0425	0,075	1209	0,0421	0,069	1193	0,0425	0,075
10 5	1132	1134	0,0419	0,022	1122	0,0410	0,017	1078	0,0419	0,022
Totale .... C =				9,569			9,455			9,300
K =				2,371			2,389			2,408

Rose

lamento

T	c	C	T	c	C	T	c	C
187″	0,0351	—	191″	0,0363	—	189″	0,0351	—
133	0,0459	0,168	128	0,0431	0,112	136	0,0459	0,168
88	0,0579	0,204	87	0,0563	0,188	91	0,0579	0,204
137	—	0,828	137	—	0,819	133	—	0,815
73	0,0915	0,270	74	0,0930	0,277	68	0,0822	0,223
81	0,0988	0.306	82	0,0997	0,311	73	0,0867	0,246
928	—	5,672	946	—	5,741	948	—	5,781
146	0,1474	0,526	150	0,1520	0,549	149	0,1510	0,544
196	0,0724	0,302	205	0,0771	0,348	212	0,0806	0,384
400	0,0680	0,387	406	0,0664	0,363	412	0,0680	0,387
434	0,0631	0,208	452	0,0629	0,207	433	0,0631	0,208
335	0,0525	0,051	359	0,0534	0,055	336	0,0525	0,051
		8,922			8.970			9.011

amento

T	c	C	T	c	C	T	c	C
196″	0,0725	0,757	201″	0,0713	0,727	210″	0,0725	0,757
154	0,0737	0,472	159	0,0737	0,472	160	0,0737	0,472
66	0,0880	0,225	71	0,0972	0,275	68	0,0919	0,257
769	—	5,325	777	—	5,401	778	—	5,409
288	0,0427	0,130	295	0,0431	0,140	297	0,0427	0,130
264	0,0463	0,132	270	0,0467	0,138	269	0,0463	0.132
460	—	1,549	470	—	1,573	448	—	1,496
213	0,1129	0,377	215	0,1114	0,369	231	0,1219	0,422
734	0,0410	0,070	751	0,0415	0,080	747	0,0410	0,070
1172	0,0421	0,069	1201	0,0425	0,075	1197	0,0421	0,069
1097	0,0410	0,017	1140	0,0419	0,022	1087	0,0410	0,017
		9,123			9,272			9,231
		2,344			2,397			2,336

Lega di

Risca

Temperatura		t	T	c	C	T	c	C	T	c	C
10° —	50°	211″	191″	0,0354	—	188″	0,0339	—	187″	0,0354	—
50	70	130	133	0,0444	0,180	129	0,0439	0,170	123	0,0444	0,180
70	80	74	970	—	8,742	941	—	8,467	975	—	8,769
80	85	40	151	0,2472	1,041	123	0,1955	0,782	120	0,1900	0,755
85	90	43	82	0,1105	0,357	75	0,0972	0,291	93	0,1278	0,444
90	105	148	157	0,0504	0,225	159	0,0504	0,225	162	0,0504	0,225
105	125	280	265	0,0402	—	257	0,0396	—	265	0,0402	—
125	140	357	328	0,0380	—	317	0,0367	—	328	0,0380	—
140	150	498	423	0,0338	—	406	0,0322	—	432	0,0338	—
		Totale		*C* =	10,545			9,935			10,373

Raffre

145° —	100°	290″	283″	0,0425	—	284″	0,0428	—	282″	0,0425	—
100	85	138	139	0,0448	0,086	141	0,0457	0,100	144	0,0473	0,125
85	80	53	61	0,0547	0,078	64	0,0596	0,103	62	0,0563	0,086
80	75	59	72	0,0602	0,106	82	0,0731	0,140	85	0,0757	0,184
75	70	62	109	0,0990	0,300	144	0,1395	0,502	112	0,1028	0,319
70	60	144	1712	—	8,134	1618	—	7,793	1662	—	7,827
60	45	289	294	0,0458	0,156	287	0,0442	0,131	295	0,0460	0,159
45	35	268	303	0,0539	0,185	276	0,0467	0,113	303	0,0539	0,185
35	30	173	276	0,0877	0,261	210	0,0602	0,124	266	0,0835	0,240
30	25	213	750	—	1,001	484	—	0,510	744	—	0,992
25	20	274	391	0,0757	0,201	826	—	0,826	396	0,0771	0,208
20	15	370	387	0,0480	0,063	450	0,0604	0,124	377	0,0461	0,053
15	10	563	540	0,0417	0,031	569	0,0455	0,050	515	0,0385	0,015
10	5	1132	1089	0,0419	0,032	1148	0,0458	0,052	1000	0,0361	0,003
		Totale		*C* =	10,634			10,568			10,396
				K =	1,930			1,930			1,855

Lipowitz

lamento

T	c	C	T	c	C	T	c	C
188″	0,0339	—	174″	0,0354	—	166″	0,0339	—
131	0,0439	0,170	133	0,0444	0,180	128	0,0439	0,170
943	—	8,456	926	—	8,321	880	—	7,853
126	0,2001	0,805	122	0,1938	0,774	108	0,1682	0,646
89	0,1215	0,412	89	0,1212	0,411	96	0,1366	0,489
161	0,0504	0,225	161	0,0504	0,225	180	0,0602	0,264
264	0,0396	—	259	0,0402	—	261	0,0396	—
324	0,0367	—	318	0,0380	—	312	0,0367	—
421	0,0322	—	417	0,0338	—	388	0,0322	—
		10,068			9,911			9,422

lamento

T	c	C	T	c	C	T	c	C
282″	0,0428	—	281″	0,0425	—	282	0,0428	—
151	0,0510	0,180	148	0,0494	0,155	154	0,0526	0,204
63	0,0574	0,092	65	0,0604	0,107	79	0,0793	0,201
96	0,0897	0,254	92	0,0844	0,227	85	0,0760	0,185
101	0,0896	0,253	106	0,0948	0,279	98	0,0861	0,235
1655	—	7,816	1649	—	7,819	1648	—	7,746
289	0,0446	0,137	291	0,0450	0,144	299	0,0471	0,175
290	0,0504	0,150	295	0,0517	0,163	304	0,0542	0,188
233	0,0697	0,171	261	0,0813	0,138	275	0,0872	0,259
789	0,2408	1,007	728	—	0,944	750	—	0,999
433	0,0869	0,257	424	0,0845	0,245	373	—	0,181
385	0,0476	0,061	384	0,0474	0,060	371	0,0449	0,047
515	0,0384	0,015	527	0,0400	0,023	525	0,0398	0,022
1019	0,0374	0,010	1060	0,0400	0,023	1083	0,0331	—
		10,403			10,327			10,442
		1,808			1,740			1,871

Lega di

Risca

Temperatura	t	T	c	C	T	c	C	T	c	C
10° — 50°	211″	161″	0,0351	—	186″	0,0351	—	191″	0,0349	—
50 70	130	127	0,0413	0,122	137	0,0485	0,266	122	0,0383	0,062
70 80	74	913	—	7,826	950	—	8,150	971	—	8,305
80 95	128	251	0,1093	1,056	245	0,1058	1,004	248	0,1074	1,027
95 120	300	320	0,0475	0,125	334	0,0508	0,205	337	0,0515	0,222
120 140	441	428	0,0403	—	430	0,0453	—	415	0,0400	—
140 150	498	464	0,0386	—	478	0,0385	—	454	0,0373	—
Totale ..... $C =$				9,129			9,625			9,616

Raffre

Temperatura	t	T	c	C	T	c	C	T	c	C
145°—100°	290″	290″	0,0424	—	288″	0,0424	—	285″	0,0428	—
100 80	192	213	0,0504	0,156	223	0,0540	0,228	222	0,0537	0,222
80 70	122	166	0,0677	0,288	152	0,0603	0,214	154	0,0609	0,220
70 60	144	1708	—	7,787	1661	—	7,533	1643	—	7,542
60 40	413	443	0,0478	0,253	426	0,0466	0,228	423	0,0444	0,184
40 35	145	169	0,0547	0,097	168	0,0537	0,074	159	0,0495	0,071
35 30	173	273	0,0828	0,238	260	0,0775	0,211	217	0,0604	0,126
30 25	213	892	—	1,213	847	—	1,124	778	—	0,960
25 20	274	322	0,0550	0,099	368	0,0668	0,158	516	—	0,355
20 15	370	382	0,0451	0,049	375	0,0437	0,042	410	0,0503	0,075
15 5	1695	1565	0,0378	0,013	1573	0,0378	0,013	1559	0,0372	0,010
Totale ..... $C =$				10,193			9,825			9,765
$K =$				1,962			1,850			1,781

Wood

lamento

T	c	C	T	c	C	T	c	C
189″	0,0351	—	187″	0,0349	—	184″	0,0351	—
133	0,0441	0,178	134	0,0446	0,188	134	0,0445	0,186
943	—	8,145	940	—	8,018	920	—	7,849
244	0,1053	0,996	242	0,1044	0,982	224	0,0945	0,834
342	0,0527	0,253	349	0,0542	0,290	348	0,0540	0,285
422	0,0403	—	419	0,0400	—	439	5,0403	—
451	0,0385	—	453	0,0373	—	469	0,0385	—
		9,572			9,478			9,154

amento

288″	0,0424	—	291″	0,0428	—	297″	0,0424	—
225	0,0546	0,240	235	0,0583	0,314	245	0,0618	0,384
152	0,0599	0,210	184	0,0780	0,391	178	0,0748	0,322
1666	—	7,545	1592	—	7,399	1542	—	6,923
438	0,0469	0,234	391	0,0424	0,143	430	0,0456	0,208
170	0,0549	0,099	159	0,0497	0 073	162	0,0512	0,080
260	0,0775	0,211	189	0,0490	0,069	255	0,0754	0,201
840	—	1,106	416	—	0,373	828	—	1,066
363	0,0654	0,151	960	—	0,965	427	0,0817	0,243
383	0,0451	0,050	509	0,0682	0,165	395	0,0474	0,061
1597	0,0378	0,013	1630	0,0401	0,024	1570	0,0378	0,013
		9,859			9,916			9,501
		1,864			1,812			1,872

Raffreddamenti

DARCET			ROSE		
Intervalli	c	C	Intervalli	c	C
			Senza fusione — La leg		
10 ore a 70°			14 ore a 75°		
65° — 50°	0,0383	—	65° — 40°	0,0374	—
50 — 30	0.0372	—	40 — 20	0,0370	—
30 — 20	0,0368	—	20 — 10	0,0377	—
20 — 15	0,0355	—	10 — 5	0,0379	—
15 — 5	0,0364	—	—	—	—
			Con fusione — La lega		
10 ore a 75°			13 ore a 75°		
70° — 55°	0,0400	0,042	70° — 50°	0,0408	0,066
55 — 40	0,0392	0,030	50 — 35	0,0414	0,058
40 — 30′	0,0437	0,065	35 — 30′	0,0462	0,043
30′ — 30‴	—	1,675	30′ — 30‴	—	1,594
30‴ — 25	0,0716	0,172	30‴ — 25	0,0683	0,154
25 — 20	0,0961	0,294	25 — 20	0,0485	0,055
20 — 15	0,0773	0,200	20 — 10	0,0402	0,027
15 — 10	0,0481	0,054	10 — 5	0,0402	0,013
10 — 5	0,0396	0,012	—	—	—
Totale .	$C = K =$	2,544			2,010

parziali

LIPOWITZ			WOOD		
Intervalli	*c*	*C*	Intervalli	*c*	*C*

fu mantenuta

14 ore a 53°			36 ore a 60°		
50° — 30°	0,0359	—	50° — 35°	0,0345	—
30 — 20	0,0352	—	35 — 20	0,0351	—
20 — 15	0,0357	—	20 — 15	0,0351	—
15 — 10	0,0351	—	15 — 10	0,0359	—
10 — 5	0,0353	—	10 — 5	0,0354	—

fu mantenuta

14 ore a 60°			16 ore a 60°		
55° — 30°	0,0378	—	50° — 35°	0,0348	—
30 — 20	0,0376	—	35 — 20	0,0346	—
20 — 15	0,0448	0,046	20 — 15	0,0397	0,022
15 — 10	0,1076	0,361	15 — 10	0,0482	0,064
10 — 5	0,0954	0,300	10 — 5	0,0555	0,101
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
		0,707			0,187

7.° ***Calori specifici.*** — Chiamo col nome di *calore specifico vero* il calore necessario per riscaldare di un grado l'unità di peso d'una data lega senza alterarne la costituzione molecolare. Vediamo come lo si possa dedurre anzi tutto per la lega Darcet allo stato solido.

In vista delle rapide variazioni che subisce quel calore specifico, i valori meno sospetti di esso sono: quello di 0,0349 che è la media di quelli ottenuti collo scaldamento fra 10° e 50°, e quello di 0,0439 che è la media di quelli ottenuti colle determinazioni di raffreddamento fra 15° e 5°. Questi due valori sono un poco troppo discosti per fidarci a prenderne la media, e del resto, il primo non può essere molto esatto perchè determinato con durate di scaldamento relativamente piccole, e l'altro è ancora più sospetto perchè non si può essere certi che la modificazione molecolare, che ritarda il raffreddamento, sia già compiuta al di sopra dei 15°. Se calcoliamo il calore specifico fra 15° e 10° troviamo 0,0468 e fra 15° e 5° troviamo 0,0428, valori che non servono a rimuovere l'incertezza.

A questo punto ci prestano un valido aiuto i calori specifici determinati col raffreddamento parziale senza fusione; infatti essi non presentano le anomalie degli altri e poco differiscono fra loro. Per ciò possiamo ritenerci autorizzati ad adottare come calore specifico della lega allo stato solido la loro media cioè 0,0372.

Il Person (II^a^ Memoria citata) avea trovato col calorimetro i valori 0,0374 e 0,0377.

Analoghe osservazioni mi indussero a ritenere per calore specifico vero delle altre leghe allo stato solido, la media dei valori ottenuti dalle esperienze di raffreddamento parziale senza fusione.

Per calore specifico della stessa lega Darcet allo stato liquido prendo la media 0,0399 dei due valori meno sospetti e che sono: 0,0382 dedotto collo scaldamento fra 140° e 150°; e 0,0417 dedotto col raffreddamento fra 145° e 120°, media che poco differisce dal valore 0,03895 dato dal Person (Memoria citata).

La lega di Rose presentò allo stato liquido un calore specifico molto grande; è una lega che probabilmente subisce una modificazione anche allo stato liquido, il che sospettò anche il Person (ivi), il quale dichiara che un termometro immerso in detta lega che si raffreddi, presso 110° s'arresta per un istante ed anzi risale un poco. Io non osservai il fenomeno così netto, però dal valore elevato dei calori specifici si vede che una certa modificazione avviene. Dovetti per questa lega prendere per calore specifico allo stato liquido il valore dato dal Person cioè 0,04219.

Le leghe di Lipowitz e Wood si raffreddano molto regolarmente fra 150° e 100°, e quindi ritengo per loro calore specifico allo stato liquido quello determinato in questo intervallo.

8° *Conclusioni.* — I valori totali di C, che figurano nelle su esposte tabelle, comprendono non solo il calore di fusione ma altresì il calore dovuto al mutamento di costituzione posteriore alla solidificazione. Sarebbe desiderabile di poter separare nettamente l'una dall'altra queste due quantità di calore; le esperienze sul raffreddamento offrono il modo di fare questa separazione senza molta incertezza; infatti osservo che, le leghe, poco dopo la solidificazione, presentano un calore specifico che rimane costante per un certo intervallo di temperatura, e che è di poco superiore al calore specifico delle stesse leghe allo stato solido. Si può quindi ritenere che in questo intervallo di temperatura, il calore di fusione si sia completamente svolto, e che di quello dovuto alla modificazione molecolare, non se ne sviluppi che quel poco reso palese dal valore un po' troppo grande del calore specifico *c*. Sommando adunque tutti i valori segnati nelle colonne C, da quel punto in poi si avrà approssimativamente la quantità di calore dovuta alla modificazione molecolare, che indicheremo con K, la quale, sottratta dai valori totali di C, darà per resto le calorie di fusione.

Così ottenni i valori di K registrati in calce alle tabelle del raffreddamento, e le loro medie registrate nel seguente:

Riepilogo.

		Darcet	Rose	Lipowitz	Wood
Peso		31gr.900	330gr.,49	317gr.,34	331gr.,54
Punto di	fusione	99°,2	98°,8	75°,5	75°,5
	solidificazione	95°	95°,5	66°,8	67°,0
Calore specifico allo stato	solido	0,0372	0,0375	0,0354	0,0352
	liquido	0,0399	0,0422	0,0426	0,0426
Valori medii di C risultanti da	scaldamento	8,778	9,092	10,042	9,429
	raffreddamento	8,849	9,350	10,460	9,843
	media generale	8,813	9,222	10,251	9,636
Calorie di	modificazione molecolare	**3,047**	**2,574**	**1,856**	**1,857**
	fusione	**5,766**	**6,848**	**8,595**	**7,779**
Calorie di fusione calcolate		10,585	11,336	11,157	11,068

Le calorie di fusione calcolate si dedussero dalla media dei calori di fusione dei componenti col mezzo della formula:

$$c = \frac{p\,l + p'\,l' + p''\,l'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots},$$

nella quale $p, p' \dots$ sono i pesi di ciascun componente dati dalla composizione percentuale ed $l, l' \dots$ i rispettivi calori di fusione. Si vede che i valori così calcolati non solo sono maggiori di quelli trovati esperimentalmente, ma lo sono anche della somma di questi con quelli dovuti al mutamento di costituzione. Per approfondire lo studio su tale soggetto, e cercare se esiste relazione fra i calori di fusione dei componenti e quello della lega, mi pare saranno opportune altre determinazioni sopra leghe meno complesse, del quale soggetto mi sto occupando.

Noterò come il Person (M. c.), colle esperienze di raffreddamento eseguite col metodo già rammentato, abbia ottenuto: per le calorie di fusione i valori: Lega Darcet 4,496; Lega Rose 4,687;

e per calore di cambiamento di costituzione (ottenuto per sottrazione dal calore totale determinato col calorimetro) i valori: Lega Darcet 3,148, e Lega Rose 2,8.

9° *Osservazioni*. — Confrontando per ciascuna lega la quantità di calore dovuta alla modificazione molecolare quale fu testè indicata, con quella dovuta allo stesso fenomeno e dedotta dalle esperienze di raffreddamento parziale con fusione, si trova in ogni caso questo secondo valore minore del primo. Da ciò possiamo conchiudere che, nello stato speciale in cui la lega si trova fra la temperatura di solidificazione e quella in cui avviene l'ulteriore modificazione molecolare, la sua costituzione non è stabile ma, anche senza raffreddarsi, va a poco a poco trasformandosi per raggiungere la struttura stabile che altrimenti raggiungerebbe sollecitamente a temperatura più bassa. Nella Wood, per esempio, il mutamento di costituzione deve essersi quasi compiuto dopochè la lega rimase 16 ore a 60°, poichè il calore dovuto ad esso si ridusse a circa $^1/_{10}$ del suo valore.

Egli è per questa ragione che, come già osservò il Person (M. c.) non si può determinare il calore di fusione delle dette leghe col metodo del calorimetro, non potendosi esse mantenere per un certo tempo a temperatura costante, poco inferiore alla loro temperatura di solidificazione, senza tema che nel frattempo, modificandosi, sviluppino calore.

Noterò che E. Wiedemann (1) con misure volumetriche, eseguite su leghe simili a quelle da me studiate, durante il loro riscaldamento e raffreddamento, giunse a conclusioni che, paragonate con quelle alle quali io pervenni colle misure termiche, condurrebbero a stabilire, che all'anormale arrestarsi del termometro corrispondono, un' anormale condensazione della lega nel caso del riscaldamento, ed un'anormale dilatazione nel caso del raffreddamento.

Terminerò riferendo un fatto da me osservato.

In alcune esperienze preliminari eseguite sulla lega Wood io avea osservato che, mantenendo il crogiuolo agitato durante il raffreddamento, lo sviluppo di calore dovuto al mutamento di costituzione avveniva ad una temperatura alquanto più bassa di

---

(1) Wied., *Ann.* III, 237 (1878).

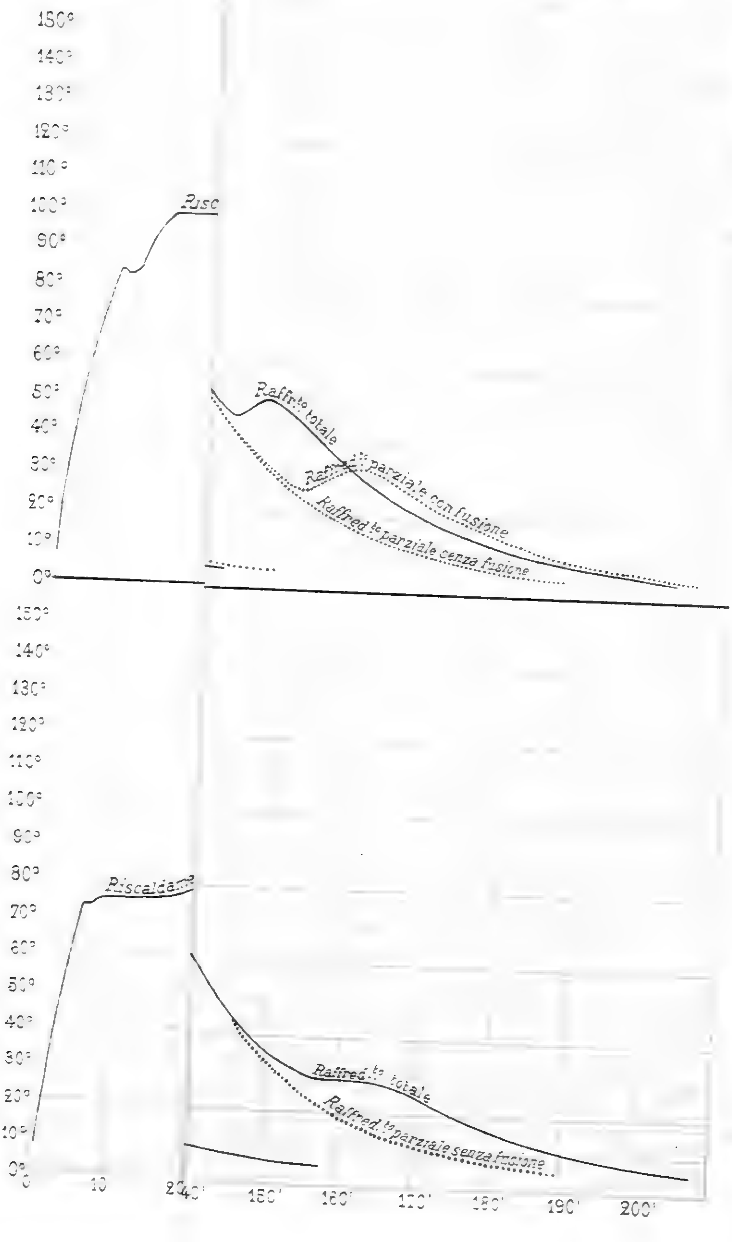
quando il crogiuolo era in riposo. Questa osservazione mi indusse ad osservare se nelle altre leghe si verificasse un fatto simile: l'agitazione del crogiuolo l'otteneva unendo, con una funicella, una delle branche d'un diapason elettro-magnetico all'estremità libera dell'asta di ferro che sosteneva il tubo di vetro portante il crogiuolo. Oscillando il diapason oscillava pure il crogiuolo.

Per le tre prime leghe le determinazioni d'ordine dispari le feci col crogiuolo al riposo, le altre col crogiuolo in vibrazione; ma, nè le curve nè i calcoli, mi indicarono che in queste leghe avvenga un fenomeno simile a quello osservato nella Wood. Per quest'ultima lega invece, il fenomeno si ripetè abbastanza marcato. Su questa lega le determinazioni I, II, IV, e VI le feci col crogiuolo in riposo, le altre col crogiuolo in vibrazione; le curve dedotte dalle prime erano costantemente orizzontali a 28°, mentre quelle dedotte dalle altre lo erano a 25°.

L'agitazione del crogiuolo durante il riscaldamento non mostrò di avere alcuna influenza.

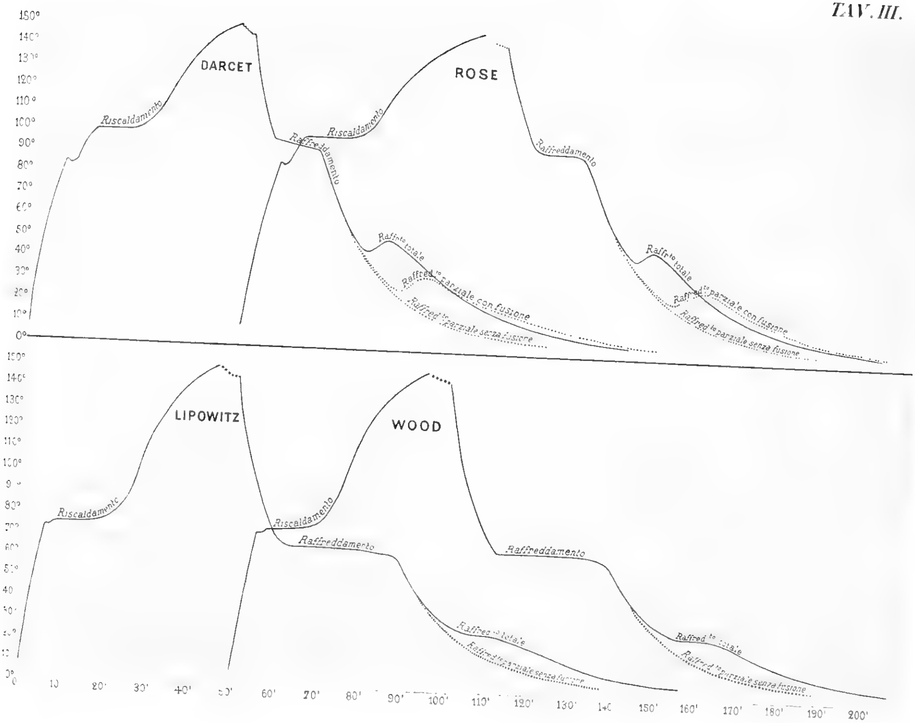
Dal Gabinetto di Fisica del R. Liceo Annibal Caro
in Fermo, 1° Agosto 1881.

TAV. III.



150°
140°
130°
120°
110°
100°
90°
80°
70°
60°
50°
40°
30°
20°
10°
0°
Risc
Raffr.to totale
Raffr.to parziale con fusione
Raffred.to parziale senza fusione
Riscaldam.to
Raffred.to totale
Raffred.to parziale senza fusione
0
10
20
140'
150'
160'
170'
180'
190'
200'

TAV. III.


DARCET
ROSE
LIPOWITZ
WOOD
Riscaldamento
Raffreddamento
Raffr.to totale
Raffred.to parziale con fusione
Raffred.to parziale senza fusione
Raffred.to totale
150°
140°
130°
120°
110°
100°
90°
80°
70°
60°
50°
40°
30°
20°
10°
0°
10
20'
30'
40'
60'
70'
80'
90'
100'
110'
120'
130'
150'
160'
170'
180'
190'
200'

Il Socio Prof. Galileo Ferraris presenta e legge la seguente sua Nota

SOPRA UN METODO

PER

LA MISURA DELL'ACQUA

TRASCINATA MECCANICAMENTE DAL VAPORE.

Nel n° 34 (24 agosto 1881), pag. 334 del giornale *Revue industrielle*, e nel n° 41 (9 ottobre), pag. 473, e tav. 84 degli *Annales industrielles* trovo descritto un apparecchio ideato dal sig. Brocq Ingegnere, e costrutto dai signori Guichard e Comp. di Parigi, avente per oggetto la misura della quantità d'acqua trascinata meccanicamente dal vapore.

Il principio del metodo è il seguente: Se una mescolanza di vapore e d'acqua vien fatta dilatare a temperatura costante, l'acqua in essa contenuta, di mano in mano che il volume va aumentando, passa allo stato di vapore, e la pressione rimane costante. Ma se, seguitando a far crescere il volume, si arriva ad evaporare tutta l'acqua, in modo che il vapore diventi secco, allora un ulteriore aumento di volume produce una corrispondente diminuzione nella pressione. La pressione comincia a diminuire quando l'aumento di volume è uguale al volume del vapore fornito da tutta l'acqua, che prima esisteva, allo stato liquido, nella mescolanza; e quindi l'aumento di volume necessario acciocchè la pressione cominci a diminuire sta al valore finale del volume come il peso dell'acqua, che era mescolata col vapore, sta al peso totale della mescolanza. Per determinare adunque la proporzione dell'acqua trascinata, basta poter misurare il rapporto di due volumi.

L'operazione da farsi è questa: isolare un volume conosciuto di vapore in un recipiente a pareti metalliche, avviluppato da una camicia di vapore che ne mantenga costante la temperatura; poi con un movimento abbastanza lento, perchè il calore somministrato dalla camicia di vapore possa mantenere costante la temperatura del vapore rinchiuso, far aumentare a poco a poco la capacità del recipiente, fino a tanto che un apparecchio manometrico applicato al recipiente medesimo avverta che la pressione del vapore rinchiuso incomincia a diminuire; misurare allora l'aumento di volume del recipiente e calcolare il rapporto tra questo aumento di volume ed il volume finale: questo rapporto è uguale al rapporto del peso d'acqua trascinato meccanicamente dal vapore a quello della mescolanza.

L'apparecchio si compone di una scatola di ferraccio, nella quale il vapore entra per una tubulatura a piattellina ed esce per un'altra tubulatura identica. Dentro a questa scatola, sull'asse della tubulatura d'ingresso, è situato un cilindro di bronzo del diametro interno di 40 millimetri e della lunghezza di 150 millimetri, nel quale entra, attraverso ad un bozzolo a stoppa, uno stantuffo a mazza *plongeur*) del diametro di 25 millimetri e della lunghezza di 145. Questo cilindro è il recipiente a volume variabile, nel quale si deve fare espandere isotermicamente il vapore, e lo spazio, pieno di vapore, che rimane tra il cilindro e la scatola esterna, costituisce la camicia di vapore destinata a mantenere costante la temperatura durante l'esperimento.

Il cilindro interno, o d'esperienza, ha due aperture situate l'una nella base affacciata alla tubulatura della scatola esterna, per cui entra il vapore, e l'altra all'altra estremità, nella parete cilindrica, verso il basso, in vicinanza della tubulatura, per cui il vapore esce dalla scatola esterna. Queste due aperture, identiche, sono rettangolari, coi lati di 40^{mm} e di 12^{mm} e sono munite di registri, o valvole a cassetto, che si possono maneggiare simultaneamente per mezzo di un manubrio esterno. Con questi registri, che si aprono e si chiudono simultaneamente, si può riempire il cilindro di vapore, e poi isolare questo vapore dalla massa inviluppante, senza che nell'atto della chiusura si abbia nel cilindro alcuna compressione od alcuna espansione capace di alterare lo stato del vapore.

Lo stantuffo a mazza, col quale si fa variare la capacità del cilindro d'esperienza, si fa muovere per mezzo di una vite col passo di $2^{mm}, 25$, ben regolare, che si comanda dall'esterno mediante un volantino. L'aumento di volume si deduce dal numero dei giri del volantino.

L'apparecchio manometrico destinato ad avvertire l'istante, in cui la pressione nell'interno del cilindro comincia a diminuire, è costituito da una lastrina sottile, ondulata circolarmente, a contatto della quale, sulla faccia esterna, si porta una punta metallica elettricamente isolata dal rimanente dell'apparecchio. La punta viene messa in comunicazione con uno dei reofori di una pila, di cui l'altro reoforo è in comunicazione colla lastrina, e nel circuito è inserito un campanello elettrico. Stabilito il contatto tra la lastrina e la punta, il campanello entra in azione; ma appena una piccola diminuzione di pressione avviene nell'interno del cilindro, la lastrina, ripiegandosi, e distaccandosi dalla punta, rompe il circuito, ed il campanello si arresta. La lastrina sensibile ha il diametro di 36 millimetri. Un robinetto appropriato serve a mettere la sua faccia esterna in comunicazione coll'interno del cilindro, od a separarlo da questo.

Il processo di un'esperienza, quale è descritto negli articoli citati, è il seguente: Aperte le valvole a cassetto, si fa circolare il vapore nella scatola esterna e nel cilindro interno fino a tanto che l'equilibrio di temperatura sia stabilito. Si chiudono poi le valvole a cassetto, e si isola così un volume conosciuto (125 centimetri cubi) di mescolanza. Allora si gira la chiave di robinetto destinata a separare dalla capacità interna del cilindro la faccia esterna della lastrina manometrica, e si fa avanzare la punta isolata, finchè tocchi leggermente la lastrina, ed il campanello si metta a sonare. Si gira allora il volantino e si estrae così a poco a poco lo stantuffo dal cilindro. Appena il campanello s'arresta, si cessa di girare e si nota il numero dei giri fatti dal volantino.

L'importanza, che la misura dell'acqua trascinata meccanicamente dal vapore avrebbe nella pratica è grandissima, tale che fra i premii annualmente stabiliti dalla Società industriale di Mülhausen ne figura da molti anni uno destinato a quell'inventore che troverà un modo pratico ed esatto per eseguirla. L'importanza che un metodo comodo ed esatto per la misura del titolo del vapore avrebbe nella scienza è anche maggiore, perchè, quando un tale metodo si possedesse, sarebbe possibile uno studio sperimentale di tutta quella parte della termodinamica che tratta dei vapori. Quindi una soluzione del problema ottenuta con un metodo così semplice, e così comodo, quale apparisce, al primo aspetto, quello che ora viene proposto, non può a meno di colpire, e di interessare vivamente quanti si occupano di macchine a vapore o di termodinamica pratica.

Sgraziatamente in ricerche di questa natura passa una grande distanza tra il combinare e proporre un apparecchio ed il fare effettivamente misure. Ed il problema, in sè semplicissimo, nella pratica si complica assai. Il fatto, che il premio della Società di Mülhausen non venne, in tanti anni, conferito, lo prova; ed io che da molto e per molto tempo ebbi ad occuparmi della questione, ed ebbi a lottare colle gravi difficoltà pratiche che essa presenta, sento il dovere di dirne qualche parola. Dopo la pubblicazione dell'apparecchio del Brocq, ed in attesa di quella, che sarebbe assai più importante, di risultati effettivi ottenuti col medesimo, io ho il dovere di far conoscere alcuni dei risultati che ottenni io stesso in una serie di esperienze che mi occuparono per poco meno di un anno, e che feci con un apparecchio fondato sul medesimo principio di quello di cui ho parlato, e ad esso molto somigliante. Pubblicando la descrizione del mio apparecchio ed i risultati delle mie esperienze, che avrei desiderato di non dover far conoscere prima che fossero migliori, io adempio al dovere di far presenti agli studiosi ed ai pratici le difficoltà che probabilmente essi incontreranno se vorranno porre in pratica il metodo di misura che loro viene proposto, e con ciò evitare qualche ricerca inutile, ed accelerare la soluzione effettiva dell'importantissimo problema.

Descrizione dell'apparecchio.

L'apparecchio, che servì alle mie esperienze, ha, come quello di cui ho parlato, lo scopo di isolare in un recipiente di volume conosciuto una porzione del vapore che si vuole esaminare, di farne aumentare il volume a temperatura costante finchè in esso si manifesti una diminuzione di pressione e di misurare l'aumento di volume necessario per ottenere questo effetto. Le figure 1, 2, e 3 lo rappresentano nella disposizione primitiva, colla quale esso venne costrutto sul mio disegno, nell'opifizio meccanico dell'Ing. Enrico a Torino. La figura 1 è una sezione orizzontale passante per l'asse, la fig. 2 è una sezione verticale passante pure per l'asse, e la fig. 3 è una sezione fatta con un piano perpendicolare all'asse. Le tre figure sono nella scala di 1 : 4 : in esse le medesime lettere sono apposte alle medesime parti.

Un cilindro di bronzo A, A, A (fig. 1, 2, 3) del diametro interno di 150 millimetri e della lunghezza, tra i due piani di giunto coi fondi, di 200 millimetri, costituisce l'involucro esterno dell'apparecchio. Due brevi e larghe tubulature *a a*, *a a* a piattellina (fig. 1 e 3) coll'asse perpendicolare a quello del cilindro e diametralmente opposte l'una all'altra, servono all'ingresso ed all'uscita del vapore. Per mezzo di queste due tubulature si può inserire l'apparecchio sulla condotta tra la caldaia e la macchina a vapore, e così si possono eseguire misure durante il lavoro regolare del motore; in questo caso l'involucro A A A costituisce un semplice rigonfiamento della condotta; e le sue dimensioni sono tali da non presentare restringimenti capaci di alterare sensibilmente la condizione del vapore. Quando non si voglia o non si possa inserire l'apparecchio sulla condotta di vapore, lo si può applicare direttamente al duomo della caldaia per mezzo di una delle tubulature, applicando all'altra un tubo di scarico munito di robinetto. In questo caso si può anche chiudere la seconda tubulatura con un disco cieco, e servirsi, per produrre la corrente di vapore necessaria pel riscaldamento dell'apparecchio e per la essiccazione del cilindro d'esperienza, del robinetto di scarico U (fig. 2), di cui diremo appresso.

Le due tubulature *a a*, *aa* hanno il diametro interno di 80 millimetri, e così possono servire anche per macchine di 20 cavalli. Qualora questo diametro fosse eccessivo, esso si ridurrebbe con anelli. I due fondi F, F′ (fig. 1, e 2), alquanto rigonfiati, del cilindro esterno A A A portano i bozzoli a stoppa *f*, *f′*, ed i sostegni *k*, *k′*. Il fondo F′ porta inoltre, all'interno, un'appendice tubulare C, venuta di getto con esso, e terminata da una piattellina. Quest'appendice, che serve a sostenere il cilindro interno d'esperienza, ha quattro grandi aperture circolari *c*, *c*, *c* destinate a lasciare liberamente circolare il vapore. Finalmente il cilindro A A A, è munito nella parte inferiore di un robinetto di scarico U.

Dentro all'involucro A A A, al centro del medesimo, e sul medesimo asse, è collocato un cilindro minore B (fig. 1, 2 e 3) pure di bronzo, del diametro interno di 80 millimetri e della lunghezza, da p in r (fig. 1 e 2), di 65 millimetri. Esso è raccomandato, per mezzo di quattro chiavarde del diametro di 8 millimetri, alla piattellina dell'appendice cilindrica C del coperchio F', di cui si è parlato, e non ha alcun'altra comunicazione metallica coll'esterno. Attraverso ad un bozzolo a stoppa Do (fig. 1 e 2) entra nel cilindro B uno stantuffo a mazza, di bronzo, S, del diametro di 50 millimetri, il gambo G del quale esce fuori del cilindro esterno AAA passando pel bozzolo a stoppa f. All'esterno, in H, il gambo G è filettato, con verme quadro del passo di 2 millimetri; questo verme è tagliato lungo una generatrice, ed un coltello t (fig. 1), fisso sul sostegno k è impegnato nel taglio ed impedisce alla vite di girare. La madrevite è portata da un volantino V, con cui si può far girare, ma non può trasportarsi parallelamente all'asse della vite, perchè è trattenuta da una chiavettina d (fig. 1). Per tal modo, facendo girare il volantino V si può far avanzare o retrocedere lo stantuffo S, e fare con ciò variare la capacità libera interna del cilindro B; le variazioni del volume libero del cilindro B si possono valutare contando il numero dei giri del volantino. Per avere una maggiore approssimazione nella misura delle variazioni di volume, la periferia del volantino V è divisa in 40 parti uguali, e le divisioni vengono a passare davanti ad un indice fisso i.

Il cilindro B, collo stantuffo S, costituisce il recipiente a volume variabile, nel quale si dovrà isolare una porzione del vapore, di cui si vuole determinare il titolo, onde farlo espandere a temperatura costante. La costanza della temperatura, durante l'espansione del vapore rinchiuso, è assicurata dalla camicia formata dal vapore contenuto tra il cilindro d'esperienza B ed il recipiente esterno A. Per aumentare la superficie di trasmissione del calore dal vapore esterno al vapore rinchiuso, si è fatto lo stantuffo a mazza S vuoto, e si sono praticati nella sua base esterna diversi fori s (fig. 1 e 2) per mezzo dei quali il vapore inviluppante può penetrare nell'interno dello stantuffo, ed ivi circolare liberamente. Con questo artifizio si è inoltre evitato il pericolo, che il gambo GH togliendo calore allo stantuffo S ed irradiandolo all'esterno dalla porzione della sua superficie esposta all'aria libera, producesse nell'interno del cilindro B un raffreddamento sensibile, per cui si condensasse una porzione del vapore rinchiuso. Pel medesimo motivo si è cercato, nella disposizione e nell'unione dei diversi pezzi, di ridurre al minimo la comunicazione metallica del cilindro d'esperienza B coll'involucro esterno A, e coll'esterno.

Per far entrare e circolare il vapore nel cilindro d'esperienza e per isolarlo in seguito dal vapore inviluppante servono due robinetti *b*, *b* (fig. 1 e 3) diametralmente opposti e collocati col loro asse sull'asse comune delle due tubulature *a a*, *a a* dell'involucro esterno. Quando l'apparecchio è inserito su di una condotta di vapore, i due robinetti *b*, *b* si trovano così situati sull'asse della vena fluida; se i due robinetti sono aperti, il vapore entra nel cilindro B e ne esce liberamente. I robinetti *b*, *b* si maneggiano dall'esterno per mezzo delle due impugnature W. W. Nel progetto si era pensato ad una disposizione, del resto facile ad immaginarsi, per muovere simultaneamente i due robinetti senza bisogno di adoperare le due mani; prima però di metterla in pratica, avevo desiderato di verificare coll'esperimento la sua importanza.

Per riconoscere il momento in cui la pressione nell'interno del cilindro di esperienza comincia a diminuire, l'apparecchio è munito di una disposizione manometrica ad indicazione elettrica. Un manometro ordinario, a mercurio o metallico, non avrebbe potuto convenire, non solamente per la difficoltà di ottenere una sufficiente sensibilità, ma soprattutto perchè col medesimo si sarebbe stabilita una comunicazione metallica, conduttrice del calore, tra il vapore soggetto all'esperienza e l'ambiente esterno.

La disposizione manometrica adottata è visibile nelle figure 1 e 2. Il fondo *r r* del cilindro d'esperienza è costituito da una lastrina sottile di ferro, nichelata sulle due faccie, e tenuta stretta tutto all'ingiro nella battuta d'unione tra il corpo cilindrico B e la piattellina dell'appendice cilindrica C. Questa piattellina si estende anche all'interno in modo da lasciare libera soltanto una apertura circolare con un diametro un po' minore di quello dello stantuffo S. Per tal modo, se si spinge lo stantuffo S fino al fondo del cilindro B, esso viene arrestato dall'orlo della detta apertura senza che v'abbia pericolo di esercitare sulla lastrina sottile *r r* uno sforzo capace di guastarla. In questa posizione dallo stantuffo, posizione rappresentata in figura, la lastrina sottile *r r* trovasi serrata tra la piattellina anulare C e la base dello stantuffo, ed è da quest'ultima sostenuta contro la pressione esterna. Quando invece lo stantuffo S è in un'altra posizione e non tocca la lastrina *r r*, questa, sottile e flessibile come è, rimane piana soltanto se le pressioni sulle due faccie sono uguali, ma s'incurva verso l'interno del cilindro B, non appena la pressione nell' interno di questo sia minore della pressione esterna. La lastrina manometrica si potrebbe rendere più sensibile facendola ondulata circolarmente, però l'esperienza ha dimostrato che anche con lastrine piane la sensibilità è più che sufficiente; anzi dopo diversi esperimenti fatti con lastrine più sottili e di metalli diversi, si fu condottî ad adottare una lastrina di ferro non sottilissima, di un quarto di millimetro, e resa più rigida dalla nickelatura.

Col centro della faccia esterna della lastrina può portarsi a contatto un dischettino di platino (di 4^{mm} di diametro) saldato all' estremità di un filo di rame elettricamente isolato da tutto il resto dell' apparecchio. L'isolamento ed il movimento di questo filo di rame sono ottenuti nel modo seguente: Il filo di rame, che nelle figure 1 e 2 è rappresentato da una semplice linea nera, è coperto da due semicilindri di ebanite, punteggiati nelle figure. Il lapis così formato è cacciato a forza nella cavità di un tubo di bronzo $e\,e'$ del diametro esterno di 12 millimetri; il filo oltrepassa alquanto le due estremità del tubo; in e esso è protetto lateralmente dall' involucro di ebanite tagliato a punta conica, e si salda col dischetto di platino; in e' esso passa in un anello di ebanite e viene ad unirsi con un morsetto di ottone m. Il tubo di bronzo $e\,e'$ esce fuori del coperchio F' dell'involucro A A A, attraverso al bozzolo a stoppa f'; ed all' esterno è filettato con un passo di vite molto serrato. Una disposizione uguale a quella descritta pel gambo G H dello stantuffo impedisce alla vite forata $e\,e'$ di girare sul suo asse; può invece girare nel suo sostegno k' la madrevite, la quale è portata dal volantino v. Col movimento di questo volantino si può così far avanzare lentamente il tubo $e\,e'$, e con questo il dischetto di platino isolato, fino a portare quest'ultimo a leggero contatto colla lastrina manometrica $r\,r$. Al morsetto m si attacca uno dei reofori di un elemento di pila, di cui l'altro reoforo si stringe in un morsetto n (fig. 2) avvitato sull' orlo del fondo F', epperò in comunicazione metallica con tutta la massa dell' apparecchio, e quindi colla lastrina $r\,r$. Nel circuito della pila si inserisce un campanello elettrico, il quale entrerà in azione tutte le volte che il dischetto di platino toccherà la lastrina $r\,r$, e si arresterà tutte le volte che il contatto tra il dischetto e la lastrina si romperà. Se, distaccato lo stantuffo S dalla lastrina *rr* in modo che questa resti libera, si gira il volantino *v*. e si fa avanzare il tubo *ee'* fino a tanto che il campanello entri in azione; il suono continuerà finchè le pressioni rimarranno invariate, ma si interromperà quando una diminuzione della pressione nel cilindro B farà incurvare la lastrina *rr* distaccandola dal dischetto di platino isolato.

Per lo scarico dell'acqua il cilindro d'esperienza B era munito, nell'apparecchio primitivo rappresentato nelle figure, di un semplice foro conico *x* (fig. 2 e 3) che si chiudeva con un tappo *xu* di bronzo maneggiabile col volantino *u*; la chiusura si rendeva ermetica per mezzo di un cappelletto di piombo applicato alla punta conica del tappo. Questa disposizione era stata prescelta collo scopo di diminuire, per quanto era possibile, le comunicazioni metalliche, conduttrici del calore, tra il cilindro di esperienza B e l'esterno; ma dopo le prime esperienze si riconobbe la necessità di munire il cilindro B di una chiavetta con cui esso si potesse aprire direttamente nell'atmosfera. Per mezzo di tale chiavetta riesce possibile una perfetta essiccazione dell'interno del cilindro B. Basta, per ottenerla, chiudere i robinetti *bb*, aprire il cilindro nell'atmosfera, e far circolare per qualche tempo il vapore all'esterno, tra il cilindro B e l'involucro AAA; l'interno del cilindro B si trova così alla pressione atmosferica, e ad una temperatura superiore a 100°; e tutta l'acqua che vi si può trovare si deve evaporare rapidamente.

Per fare una misura per mezzo dello strumento descritto, si opera così. Si comincia a far avanzare, per mezzo del volantino V, lo stantufo S finchè esso si appoggi colla sua base contro la lastrina manometrica *rr* e possa così sostenerla contro la pressione esterna. Allora si chiudono i robinetti *b*, *b* e si apre il cilindro B nell'atmosfera; poi si apre la presa del vapore. Il vapore, che arriva nell'involucro esterno AAA per una delle tubulature *aa* ed esce per l'altra, circola tutt'attorno al cilindro di esperienza BB e nell'interno dello stantuffo S, che, come si disse, è cavo, ed in breve riscalda l'interno del cilindro B fino alla propria temperatura. L'acqua, che si trova, in questo cilindro, si evapora rapidamente ed esce in gran parte nell'atmosfera; dopo qualche tempo il cilindro è perfettamente secco e non contiene che vapore soprariscaldato ed aria. Allora si chiude il robinetto di scarico, si aprono simultaneamente i due robinetti *b*, *b*; il vapore entra e così nel cilindro B, e scaccia da questo il vapore soprariscaldato e l'aria che vi si trovavano; lasciando che esso circoli dentro al cilindro per qualche minuto, si è sicuri d'aver riempito il cilindro medesimo con vapore identico a quello della condotta. Fatto ciò, si fa dare qualche giro al volantino V, onde distaccare lo stantuffo S dalla lastrina manometrica *r r*, che attualmente è ugualmente premuta sulle due faccie, e renderla libera; poi si chiudono simultaneamente i due robinetti *b b*, e si isola così il vapore contenuto nel cilindro B B. Si fa allora avanzare per mezzo del volantino *v*, il tubo *e e'* finchè il campanello elettrico entri in azione e ci avverta così che il dischetto isolato di platino tocca leggermente la lastrina *r r*. Appena questo succede, si cessa di girare il volantino *v*, si comincia a far girare il volantino V in modo da estrarre lo stantuffo S dal cilindro B, e così si continua finchè il campanello si arresti. Quando il suono si interrompe, si è avvertiti che la pressione del vapore rinchiuso nel cilindro d'esperienza ha cominciato a diminuire, e che quindi questo vapore è diventato secco. Allora si nota il numero dei giri e delle frazioni di giro indicato dall'indice *i*, e con questo numero si calcola il titolo del vapore.

Diciamo v il volume del recipiente B quando lo stantuffo è tutto introdotto e si appoggia sul fondo *r r*, ed u l'aumento di volume corrispondente ad un quarto di giro del volantino V; diciamo poi n_0 il numero di quadranti di cui il volantino V si è girato in principio dell'esperienza prima di chiudere i robinetti *b*, *b*, ed n il numero di quadranti letto al termine dell'esperimento; diciamo finalmente x il titolo del vapore, ossia il peso di vapore contenuto nell'unità di peso di mescolanze di vapore e d'acqua. I volumi del recipiente B in principio dell'esperimento ed al termine di questo sono rispettivamente $v + n_0 u$ e $v + n u$, e quindi si ha

$$x = \frac{v + n_0 u}{v + n u},$$

ossia

$$x = \frac{\frac{v}{u} + n_0}{\frac{v}{u} + n}.$$

Per far uso dell'apparecchio nelle misure basta adunque avere determinato una volta per tutte il valore della costante $\frac{v}{u}$.

Il miglior modo di determinare la costante consiste nel pesare la quantità d'acqua necessaria per riempire il cilindro B quando lo statuffo è appoggiato contro il fondo, e quindi è $n=0$; e poi pesare le quantità d'acqua che bisogna aggiungere quando n prende una serie di valori dati. Una serie di esperienze fatte in questa maniera hanno dato pel mio apparecchio la costante

$$\frac{v}{u}=133{,}5\ .$$

Per l'apparecchio che ha servito alle mie esperienze si ha adunque il titolo x del vapore colla formola

$$x=\frac{133{,}5+n_0}{133{,}5+n}\ . \qquad \ldots\ldots (1)$$

Il peso d'acqua trascinata meccanicamente per ciascuna unità di peso di mescolanza è, per conseguenza:

$$1-x=\frac{n-n_0}{133{,}5+n}\ ; \qquad \ldots\ldots (2)$$

ed il medesimo peso, espresso in centesimi del peso totale è:

$$100\,(1-x)=100\,\frac{n-n_0}{133{,}5+n}\ . \qquad \ldots\ldots (3)$$

Risulta da questa formola, che l'errore nel valore di x, corrispondente ad una divisione del volantino V, ossia ad un decimo di quadrante, è uguale a circa 0,0007; e che quello di 100 $(1-x)$ è circa 0,07, e che quindi lo sbaglio di una od anche di alcune unità nella lettura di n o di n_0 non produce nel risultato errori apprezzabili. Ora alcune esperienze fatte col cilindro B pieno d'aria hanno dimostrato, che in questo caso, anche per grandi valori di n_0, bastava sempre girare di una divisione il volantino per far tacere il campanello. La sensibilità della lastrina manometrica era adunque più che sufficiente.

Esperienze eseguite coll'apparecchio.

Coll'apparecchio che ho descritto feci parecchie esperienze nei mesi di maggio, giugno e luglio ora scorsi, e mi servii a questo uopo della caldaia di una locomobile esistente nella sezione delle macchine del R. Museo industriale italiano.

Siccome in questa macchina non esiste una condotta esterna di vapore dalla caldaia al cilindro, così dovetti accontentarmi di applicare l'apparecchio alla camera di vapore della caldaia, chiudendo una delle tubulature *a a* (fig. 1 e 3) e servendomi, per farvi circolare il vapore nella operazione preliminare del riscaldamento, del robinetto di spurgo U (fig. 2), al quale applicai a quest'uopo un tubo che versasse il vapore fuori del locale. Questa disposizione non sarebbe stata la migliore per fare ricerche sulla caldaia o sulla macchina a vapore, ma poteva bastare al mio scopo, allo scopo cioè di vedere se l'apparecchio da me combinato potesse realmente servire nella pratica, con comodità e con sicurezza, per la misura dell'acqua strascinata. Nel caso poi che l'apparecchio avesse realmente servito, esso, anche installato così, avrebbe potuto indicare le variazioni del titolo del vapore dipendenti dalle variazioni del lavoro della macchina, e quelle che probabilmente avrebbero potuto dipendere dall'operare in vapore stagnante od in vapore effluente. Inoltre le esperienze avrebbero potuto mostrare se, e come il modo di condurre l'operazione influisse sui risultati, e quale fosse il miglior modo di sperimentare.

Una prima serie di esperienze che, più volte interrotta, durò tutto il mese di maggio, non condusse ad alcun risultato numerico di qualche valore, ma servì a suggerire qualche modificazione all'apparecchio e ad indicare qualche cautela necessaria pell'uso del medesimo. Nei primi giorni queste esperienze condussero dopo pochi tentativi ad adottare per la lastrina manometrica il metallo e le dimensioni di cui si è parlato più sopra. Ma superate le prime difficoltà derivanti dalla struttura di questa parte dell'apparecchio, le esperienze posero in evidenza altre difficoltà molto più gravi, di due delle quali debbo fare cenno, perchè sono esse che più di tutte complicano nella pratica il problema.

La prima difficoltà, a cui faccio allusione, si trovò nel rendere sufficientemente ermetica la chiusura tra il cilindro d'esperienza e lo stantuffo. Per comodità di costruzione si era adottato per ottenere questa chiusura, un bozzolo a stoppe ordinarie D (fig. 1 e 2), ed in *o* si era posto la guarnizione di cotone imbevuta di grasso ordinariamente usata sulle macchine a vapore. Ma la chiusura, che a freddo era perfettamente ermetica, diventava imperfettissima non appena il vapore aveva cominciato a scaldare l'apparecchio, ed il grasso liquefatto, colava ad insudiciare il cilindro d'esperienza. Si provò ad adoperare stoppa asciutta, e si riuscì ad ottenere anche con questa una chiusura abbastanza buona, a freddo; ma nel vapore parve che questa non bastasse. In ogni caso poi a me parve che una chiusura a stoppa fosse inammissibile. Infatti la stoppa che è, verso l'esterno, sempre in contatto con vapore saturo ed umido, è continuamente bagnata, e, comunque compressa, può trasmettere per capillarità l'umidità fino nell'interno del cilindro di esperienza, e rendere così illusorii gli esperimenti.

La sola chiusura ammessibile in un apparecchio definitivo, destinato a servire correntemente nella pratica, è, a mio avviso, quella ottenuta con una guarnizione metallica senza grasso od altra materia lubrificante. Siccome però nei miei esperimenti, diretti unicamente a verificare la possibilità di fare misure pratiche servendosi del principio su cui l'apparecchio era costrutto, avrebbe bastato una disposizione provvisoria, così prima di modificare l'apparecchio per applicarvi la guarnizione metallica, provai una guarnizione di caoutchoux vulcanizzato e fortemente serrato. La cosa riuscì meglio di quanto io mi attendeva, e la guarnizione di caoutchoux mi servì abbastanza bene per tutti gli esperimenti.

La seconda difficoltà di cui debbo parlare, è molto più grave, e tale che io non oserei dire se con apparecchi analoghi al mio od a quello del sig. Brocq, senza complicazioni inammessibili nella pratica tecnica, sia possibile superarla. La difficoltà è quella di asciugare completamente l'interno del cilindro d'esperienza prima d'introdurvi il vapore, su cui si vuole sperimentare. Acciocchè dall'esperimento si possa dedurre il peso dell'acqua trascinata dal vapore, sospesa nel vapore, è assolutamente indispensabile che prima dell'esperimento la superficie interna del cilindro d'esperienza e quella dello stantuffo sieno non solo calde alla temperatura del vapore acciocchè non lo condensino, ma anche perfettamente asciutte, acciocchè non si valuti come trascinata dal vapore l'acqua che le bagna.

Nella descrizione dell'esperienza da farsi coll'apparecchio Brocq quale è esposta negli articoli della *Revue industrielle*, e degli *Annales industrielles* sopra citati, si legge: « *Prima del principio di un'esperienza, le valvole essendo aperte, si fa circolare il vapore nella scatola esterna e nel cilindro interno fino a tanto che l'equilibrio di temperatura sia stabilito. Si chiudono allora le valvole e si isola così un certo volume conosciuto di mescolanza, ecc.* ». Evidentemente, una esperienza fatta semplicemente così sarebbe completamente illusoria; è infatti impossibile che in una corrente di vapore saturo l'acqua aderente alle pareti si possa evaporare; ed in alcuni casi quest'acqua aderente alle pareti, evaporandosi quando il vapore rinchiuso, in grazia della espansione, è diventato soprariscaldato, può bastare non solo a falsare il risultato della misura, ma a riempire completamente, da sè, tutto quanto il cilindro. Siccome anch'io mi ero illuso non dando a questa considerazione l'importanza che essa ha, e quindi avevo creduto sufficiente munire il cilindro interno di un foro x chiudibile con un tappo, per lo spurgo, così ebbi modo di provare coll'esperienza tutta la verità delle considerazioni precedenti. E questo fu il principale risultato che ottenni nelle esperienze del mese di maggio.

Edotto da queste feci modificare l'apparecchio togliendo il tappo u, ed applicando al foro x un rubinetto atto a porre, quando è aperto, la capacità interna del cilindro d'esperienza in comunicazione diretta coll'atmosfera. Con l'aiuto di questo robinetto è possibile essiccare prima dell'esperimento il cilindro nel quale si deve isolare il vapore e farlo espandere isotermicamente: basta a quest'uopo aprire quel robinetto, mentre stanno chiusi i robinetti b, b, e far circolare per qualche tempo il vapore esternamente al cilindro: la temperatura all'interno del cilindro viene così elevata al disopra di 100 gradi mentre la pressione rimane uguale a quella dell'atmosfera, e tutta l'acqua che può esistere nel cilindro si deve evaporare. Il vapore soprariscaldato che rimane nel cilindro dopo questa operazione, quando si richiude la comunicazione coll'atmosfera, si può scacciare aprendo i robinetti b, b e lasciando circolare per qualche tempo il vapore nel cilindro.

Coll'apparecchio così modificato e colle cautele che ho indicate eseguii parecchi esperimenti, i risultati dei quali sono raccolti nelle tabelle seguenti.

Esperienze del giorno 14 *Giugno* 1881

N° d'ordine	CONDIZIONI dell'esperimento	PRESSIONE in atmosfere	n_0	n	x	$100\,(1-x)$	Osservazioni
1	Macchina in riposo, nessuna presa di vapore	2,25	0,8	15,5	0,90	10	
2	id.	2	3,2	15,2	0,92	8	
3	id.	1,75	8,0	26,0	0,89	11	
4	id.	1,75	12,0	31,0	0,88	12	
5	id.	1,75	12,0	35,0	0,86	14	Nell'esperienza n° 5 si è lasciato la comunicazione coll'atmosfera aperta per brevissimo tempo.
6	id.	1,75	12,0	23,0	0,93	7	
7	id.	1,75	12,0	19,0	0,95	5	
8	id.	1,75	19,0	28,4	0,94	6	

Esperienze del 17 *Giugno* 1881

N° d'ordine	CONDIZIONI dell'esperimento	PRESSIONE in atmosfere	n_0	n	x	$100\,(1-x)$	Osservazioni
1	Motore fermo	$2\ ^1/_4$	13,0	13,6	0,995	0,5	
2	id.	»	13,6	13,9	0,998	0,2	
3	id.	»	13,9	14,4	0,996	0,4	
4	id.	»	12.0	12,7	0,995	0,5	
5	id.	»	12,7	13,4	0,995	0,5	
6	id.	»	13,4	14,2	0,996	0,4	
7	Motore con la sola trasmissione in moto	2	12,0	15,3	0,984	1,6	Dopo l'esperienza 7ª non fu possibile rimettere la soneria in azione.
8	id.	»	12,0	14,2	0,987	1,3	
9	id.	»	14,2	15,2	0,993	0,7	
10	id.	»	15,2	15,6	0,997	0,3	
11	id.	»	12,0	13,7	0,988	1,2	
12	id.	»	13,7	14,5	0,994	0,6	
13	id.	»	14,5	15,6	0,992	0,8	
14	Motore con tutte le macchine in moto	»	12,0	48,7	0,80	20	Durante le esperienze 12, 15 e 16 la macchina camminava molto celeremente.
15	id.	»	4,0	13,3	0,82	18	
16	id.	»	4,0	13,2	0,82	18	

Esperienze del 4 Luglio 1881.

N° d'ordine	CONDIZIONI dell'esperimento	Pressione in atmosfere	n_0	n	x	$100\,(1-x)$	Osservazioni
1	Motore fermo, scarico chiuso	2	9	16	0,953	4,7	Livello dell'acqua in caldaia a 6 centim. sotto del medio.
2	id.	»	16	25	0,943	5,7	
3	id.	»	25	37	0,930	7,0	
4	id.	»	37	42	0,971	2,9	Lettura incerta.
5	id.	»	5	7,7	0,980	2,0	
6	id.	»	7,7	9,5	0,987	1,3	
7	id.	»	9,5	10,2	0,994	0,6	
8	id.	»	10,2	18,3	0,947	5,3	
9	id	»	18,3	25,2	0,956	4,4	
10	id.	»	25,2	31,7	0,967	3,9	
11	id.	»	31,7	40,3	0,951	4,9	
12	id.	»	40,3	46,9	0,963	3,7	
13	id.	»	46,9	54,7	0,958	4,2	
14	Motore fermo, scarico aperto, cosicchè la misura è fatta nel vapore effluente	$1\,^3/_4$	5	9	0,972	2,8	
15		»	9	12,1	0,979	2,1	
16	id.	»	12,1	18,5	0,958	4,2	
17	id	»	18,5	25,3	0,957	4,3	
18	id.	»	25,3	33,1	0,953	4,7	
19	Motore, trasmissioni e macchina in moto	$2\,^1/_4$	5	9,1	0,971	2,9	
20	id.	»	9,1	11,1	0,986	1,4	
21	id.	»	11,1	11,7	0,996	0,4	

(*Segue la* Tabella della pagina precedente).

N° d'ordine	CONDIZIONI dell'esperimento	PRESSIONE in atmosfere	n_0	n	x	$100\,(1-x)$	Osservazioni
22	Motore, trasmissioni e macchina in moto	$2\,^1/_4$	11,7	13,0	0,991	0,9	
23	id.	»	13	15	0,987	1,3	
24	id.	»	15	16,5	0,990	1,0	
25	id.	»	16,5	17,8	0,991	0,9	
26	id.	»	17,8	20,6	0,982	1,8	
27	id.	»	20,6	23,3	0,983	1,7	
28	id.	»	23,3	26,3	0,981	1,9	
29	id	»	26,3	41,2	0,916	8,4	
30	id.	»	41,2	46,7	0,970	3,0	
31	id.	»	46,7	49,6	0,984	1,6	
32	id.	»	49,6	59,4	0,949	5,1	
33	id.	»	5,0	13,1	0,945	5,5	
34	id.	»	13,1	15,4	0,985	1,5	
35	id.	»	15,4	16,2	0,995	0,5	
36	id.	»	16,2	17,8	0,987	1,3	
37	id.	»	17,8	19,4	0,988	1,2	
38	id.	»	19,4	20,3	0,994	0,6	
39	id.	»	20,3	21,6	0,992	0,8	

Osservazione — Terminate le esperienze qui registrate, si riempì il cilindro di esperienza di vapore come per cominciare un nuovo esperimento. Si portò poi il dischetto di platino in contatto colla lastrina manometrica per mettere in azione il campanello elettrico, ma invece di muovere lo stantuffo per far crescere il volume del vapore rinchiuso, come negli altri esperimenti, si lasciò l'apparecchio a sè. Dopo circa mezzo minuto il campanello si arrestò.

Esperienze del giorno 14 *Luglio* 1881

N° d'ordine	CONDIZIONI dell' esperimento	PRESSIONE in atmosfere	n	n_0	x	$100\,(1-x)$	Osservazioni
1	Motore con le trasmissioni e le macchine in moto.	2	5	7	0,986	1,4	
2	id.	»	7	11	0,972	2,8	
3	id.	»	11	?	?	?	Si estrasse completamente lo stantuffo senza che si manifestasse una diminuzione di pressione.
4	id.	»	5	8,5	0,975	2,5	
5	id.	»	5	38,4	0,806	19,4	In questo esperimento non si aprì, per l'essiccazione, il rubinetto di scarico.
6	id.	»	5	9	0,972	2,8	
7	id.	»	5	7	0,986	1,4	
8	id.	»	5	10	0,965	3,5	

Dalle tabelle qui trascritte, le quali presentano riuniti i risultati genuini delle esperienze, senza esclusione di alcun esperimento e con tutte le annotazioni fatte sul luogo, è possibile ricavare qualche nozione sulla praticità del metodo e sul grado di attendibilità dei risultati che esso può dare.

Se si avesse riguardo unicamente ai risultati numerici, ai valori di x e di $100\,(1-x)$ registrati nelle tabelle, si potrebbe ritenere l'attuabilità del metodo, se non dimostrata, almeno non esclusa. Se infatti si fa astrazione da qualche risultato isolato il cui disaccordo coi vicini potrebbe attribuirsi alle imperfezioni della costruzione dell' apparecchio ed a circostanze accidentali, si vede che i numeri registrati si seguono per gruppi, in ciascuno dei quali le differenze sono assai piccole. Le differenze poi tra i gruppi, le quali sono talora notevoli, si potrebbero facilmente spiegare per mezzo delle variazioni che realmente può aver subito il funzionamento della caldaia nel tempo trascorso tra gli esperimenti di un gruppo e quelli del gruppo successivo. Così per esempio nella tabella del giorno 14 giugno gli esperimenti 1, 2, 3, 4, 5 si accordano assai bene tra loro, e meglio ancora si accordano gli esperimenti 6, 7 ed 8. Così pure nel giorno 17 giugno tutti i 13 primi esperimenti indicano che durante i medesimi la caldaia somministrava vapore quasi perfettamente secco, cosa possibile, poichè, non lavorando la macchina, la produzione di vapore era pochissima. Ed i tre ultimi esperimenti, ossia gli esperimenti n° 14, 15, e 16 dànno, con minime differenze, una proporzione d'acqua trascinata di circa 18 per cento; cosa non inverosimile se si pensa che, come è detto nelle colonne delle osservazioni, durante questi esperimenti la macchina lavorava e camminava molto celeremente. Nel medesimo modo, troviamo nel giorno 4 luglio il gruppo delle esperienze n° 1, 2, 3, quello delle esperienze n° 4, 5, 6, 7, quello delle esperienze n° 8, 9, 10, 11, 12, 13, quello delle esperienze n° 14, 15, quello dei numeri 15, 16 e 17, ecc. i quali gruppi offrono numeri abbastanza concordanti. E finalmente nel giorno 14 luglio si trovarono in sufficiente accordo tutte le esperienze tranne la 5ª per la quale esiste nella colonna delle osservazioni una nota di cui dovrò discorrere più sotto.

Stando ai risultati registrati, l'errore medio di una determinazione del peso $100(1-x)$ di acqua sospesa in 100 unità di peso di mescolanza risulterebbe uguale a circa 2 pel gruppo delle prime 5 esperienze del 14 giugno, a circa 1 pel gruppo delle esperienze 6, 7, 8 del medesimo giorno, a 0,42 pelle 13 prime esperienze del 17 giugno, ed a 0,61 per le esperienze 8, 9, 10, 11, 12, 13 del 4 luglio. E questi numeri si potrebbero ritenere come abbastanza soddisfacenti, avendo riguardo alle inevitabili imperfezioni di un primo modello di apparecchio ed al grado di esattezza che comportano gli altri metodi adoperati, o proposti, per la misura dell'acqua trascinata.

Ma se si ha riguardo alle annotazioni, che accompagnano i risultati delle esperienze, si è condotti a credere che gli errori, di cui si è parlato, non sieno puramente errori accidentali di osservazione, e che non sia facile migliorare l'apparecchio in modo da eliminarli completamente. In primo luogo noi troviamo nella colonna delle osservazioni della tabella pel 14 luglio due note apposte alle esperienze 3 e 5. La prima ci fa vedere che nel momento in cui si è eseguito l'esperimento n° 3 esisteva nel cilindro d'esperienza una grande quantità d'acqua, una quantità sufficiente per produrre un volume di vapore uguale o maggiore del volume del cilindro d' esperienza, e ciò ad onta di tutta la cura adoperata per fare preventivamente l'essiccazione di questo cilindro. La seconda poi dimostra in modo evidente la necessità del robinetto di scarico con cui la cavità del cilindro d' esperienza si può porre in comunicazione diretta coll'atmosfera durante l'operazione dell'essiccazione, bastò infatti l'aver ommesso di aprire questo robinetto, per far sì che la quantità d'acqua indicata dall'apparecchio, la quale nell'esperimento precedente era stata trovata uguale a 2, 5, e nell'esperimento successivo (6°) fu poi trovata uguale a 2, 8, salisse nell'esperimento 5° al valore 19,4. Da questo fatto e dal complesso delle mie osservazioni io mi trovo indotto a credere che un apparecchio come quello del Brocq, il quale sia privo di un mezzo per aprire il cilindro d'esperienza direttamente nell'atmosfera non possa servire a misure di sorta.

In secondo luogo dobbiamo notare l'osservazione che fa seguito al quadro delle esperienze del 4 luglio. Questa dimostra che, indipendentemente dall'aumento di volume ottenuto per mezzo dello stantuffo, la pressione del vapore soggetto alla esperienza andava gradatamente diminuendo. Tale fatto, che si osservò più d'una volta, può essere dovuto in parte alla imperfezione del robinetto di scarico, il quale lasciava forse sfuggire qualche piccola quantità di vapore; ma in parte anche poteva essere dovuto alla condensazione che il vapore rinchiuso subiva pel contatto colle pareti, certamente più fredde, del robinetto. Ora, se questa spiegazione è vera, il fatto in discorso mette in evidenza una difficoltà assai grave. È infatti difficile trovare una disposizione dell'apparecchio, semplice e pratica, la quale ovvii all'inconveniente accennato. E siccome abbiamo dimostrato poc' anzi essere necessario un robinetto di scarico aprentesi all'esterno, così si intravede la difficoltà grandissima di combinare un apparecchio capace di dare indicazioni veramente sicure.

Riassumendo, conchiudo che il descritto metodo di misura, benchè fondato su di un principio semplicissimo, non è finora riuscito, e non sarà forse mai pratico pei seguenti motivi:

1° Per la difficoltà di ottenere chiusure ermetiche;

2° Per la difficoltà di essiccare perfettamente il recipiente a volume variabile, prima dell'esperienza;

3° Per evitare le condensazioni dovute alla trasmissione del calore all'esterno.

Sono queste considerazioni quelle che già da qualche tempo hanno fatto dare alle mie ricerche un altro indirizzo; ed è per queste considerazioni che io credo che l'unico metodo, che oggidì possa dare indicazioni sicure, sia ancora quello calorimetrico di Hirn.

Dal Laboratorio di Fisica tecnica del R° Museo Industriale italiano, il 10 Dicembre 1881.

Nella seduta dell'11 Dicembre 1881 la Classe elesse a Socio nazionale residente il signor Dott. Angelo Mosso, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino. Questa elezione venne approvata con Reale Decreto in data del 25 Dicembre del medesimo anno.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

Fig. 1.

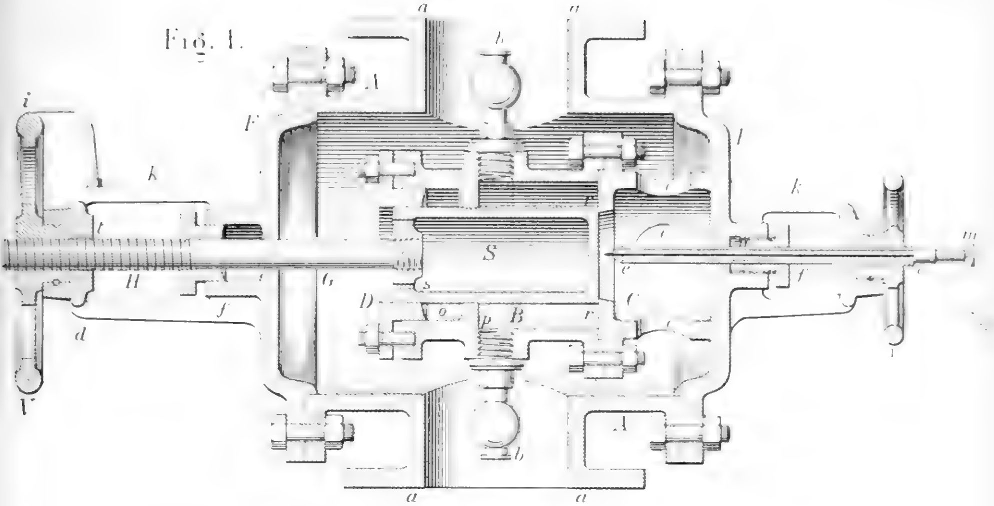


Fig. 2.

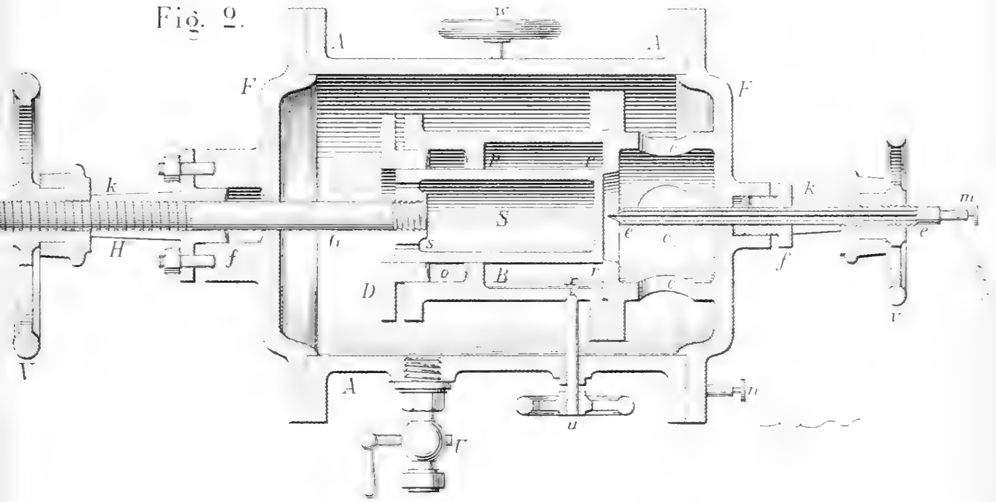
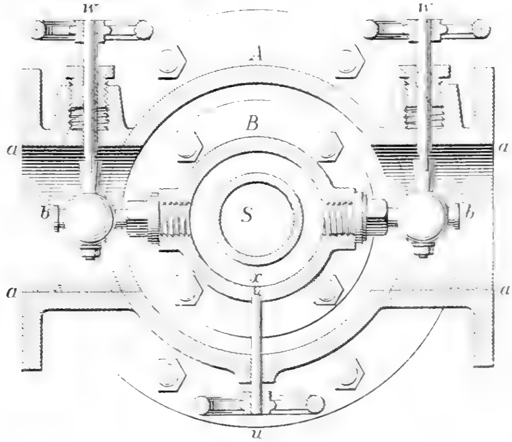


Fig. 3.



CLASSI UNITE

CLASSI UNITE

Adunanza del 28 Dicembre 1881.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

In questa adunanza il Segretario della Giunta Accademica per l'aggiudicazione del **Premio BRESSA** nel quadriennio 1877-80, legge la seguente Relazione:

Egregi Colleghi,

Il secondo premio **Bressa** che in oggi si deve conferire, secondo quanto fu indicato nel programma di concorso del 1° Gennaio 1879 colle parole testuali delle tavole di fondazione **Bressa**, è destinato a quell'Italiano che durante il quadriennio 1877-1880, « a giudizio » dell'Accademia delle Scienze di Torino, avrà fatto la più im- » portante scoperta, o pubblicato l'opera più ragguardevole in » Italia, sulle scienze fisiche e sperimentali, storia naturale, ma- » tematiche pure ed applicate, chimica, fisiologia e patologia, non » escluse la geologia, la storia, la geografia e la statistica ».

La prima Giunta nominata dalle Classi riunite dell'Accademia il 9 Febbraio 1879, e che in conformità del Regolamento speciale pel conferimento dei premii **Bressa**, aveva per incarico di esaminare le domande di concorso al premio, di fare delle proposte di propria iniziativa, e di accogliere senza alcun esame quelle presentate dai Soci nazionali, compì il proprio mandato col presentare alla Seduta generale dell'Accademia del 3 Aprile 1881 la relazione in cui erano indicate le proposte, che a suo avviso e per quello di alcuni Soci dell'Accademia, erano state giudicate meritevoli di essere prese in considerazione per il premio.

In quella stessa Seduta l'Accademia nominò una seconda Giunta composta, oltrechè del Presidente, dei Soci: Genocchi, Lessona, Cossa, Berruti, Basso per la Classe di Scienze fisiche e matematiche; e dei Soci: Gorresio, Fabretti, Peyron, Flechia, Manno, per quella di Scienze morali. In conformità del Regolamento 7 Dicembre 1876, l'incarico affidato a questa Giunta era di esaminare e confrontare le proposte presentate dalla Giunta precedente, di esporvi nella Seduta d'oggi il risultato sommario delle proprie ricerche, presentandovi proposte definitive per l'aggiudicazione del premio, con una relazione da pubblicarsi negli Atti dell'Accademia. Le proposte ammesse dalla prima Giunta furono quattordici e si riferivano alle persone seguenti:

Il Prof. Isaia Graziadio Ascoli, per lo scritto che ha per titolo: *L'invertimento indiano del nesso in cui* h *precede a consonante e i suoi effetti* (Volume 2°, degli *Studi critici* pubblicati nel 1877, pag. 306-81).

Il Prof. Giuseppe de Leva per la *Storia documentata di Carlo V*, di cui il 4° volume fu pubblicato nel corso dell'anno 1880.

Il Prof. Giacomo Sangalli per l'opera che ha per titolo: *La Scienza e la pratica della Anatomia patologica*. Milano, 1877.

Il Prof. Emilio Villari per quattro memorie pubblicate negli anni 1879 e 1880 nei volumi della Reale Accademia di Bologna, *intorno alle leggi termiche e galvanometriche delle scintille elettriche.*

Il Prof. Michele Stefano De Rossi per le sue pubblicazioni *sulla Meteorologia endogena.*

Il Prof. G. V. Ciaccio per l'opera pubblicata a Bologna nel 1877 e che ha per titolo: *Osservazioni intorno al modo come terminano i nervi motori nei muscoli striati delle torpedini e delle raie.*

Il Prof. Edoardo Peroncito pei suoi lavori *sulla tenacità di vita negli elminti*, *sulla epizoozia tifoide nei gallinacei*, e *sulla anchilostomiasi.*

Il Prof. Francesco Selmi per le sue memorie *sulle tomaine e sopra altri argomenti di chimica tossicologica.*

Il Prof. Giambattista Ercolani per l'opera che ha per titolo: *Nuove ricerche sulla placenta nei pesci cartilaginosi e nei mammiferi e delle sue applicazioni alla tassonomia zoologica e alla antropogenía.* Bologna, 1877.

Il Prof. FELICE CASORATI per le tre memorie pubblicate negli anni 1877, 1879 e 1880, e che si riferiscono al *calcolo delle differenze finite ed alla teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebrico-differenziali*.

Il Prof. ULISSE DINI per le due opere seguenti: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, 1878. — *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni d'una variabile reale*, 1880.

Il Prof. FRANCESCO ROSSETTI per le due memorie seguenti: *Indagini sperimentali sulla temperatura del sole*. — *Sul potere assorbente ed emissivo delle fiamme e sulla temperatura dell'arco voltaico*.

Il signor LUIGI MARIA D'ALBERTIS per scoperte geografiche ed etnografiche descritte nella sua pubblicazione che ha per titolo: *Alla Nuova Guinea; ciò che ho veduto e ciò che ho fatto*.

La pubblicazione dei *Diarii di* MARIN SANUTO fatta per cura dei signori BAROZZI NICOLÒ, BERCHET GUGLIELMO, FULIN RINALDO e STEFANI FEDERICO.

Nell'esaminare le quattordici proposte che ho accennato, la Giunta tenne lo stesso procedimento seguito dalla Giunta che ebbe per incarico di formolare le proposte definitive per il primo premio Bressa. — Nella prima sua riunione la Giunta considerando che la stretta interpretazione delle tavole di fondazione del premio Bressa non concederebbe di premiare la pubblicazione dei Diarii di MARIN SANUTO, pur riconoscendone l'altissima importanza storica, deliberò a maggioranza di eliminare questa pubblicazione dal novero delle proposte. Quindi nella stessa Seduta la vostra Giunta divise in due categorie le proposte rimanenti, mettendo nella prima quelle che riteneva a preferenza delle altre meritevoli di premio. In questa prima categoria la Giunta mise le proposte che si riferiscono ai nomi di ASCOLI, CASORATI, D'ALBERTIS, DE LEVA, DINI, ERCOLANI, ROSSETTI. — Rimasero nella seconda categoria le proposte relative ai nomi di CIACCIO, DE ROSSI, PERRONCITO, SANGALLI, SELMI, VILLARI. L'ordine secondo il quale sono disposti i nomi in queste due categorie è l'alfabetico, e non implica pertanto nessuna graduazione di merito.

In un'altra riunione la maggioranza della Giunta, in base alla considerazione che la Glottologia non è tassativamente indicata tra le scienze, che secondo le testuali parole del lascito **Bressa** possono fornire argomento di premio, deliberò di eliminare dalle proposte da presentarsi all'Accademia, per il conferimento del premio, quella che si riferisce al nome del Prof. Ascoli. Pertanto la prima categoria delle proposte riputate meritevoli di premio comprende solamente i nomi di Casorati, D'Albertis, De Leva, Dini, Ercolani, Rossetti.

Il vostro relatore a nome della Giunta è costretto anche questa volta a farvi osservare come sia cosa ardua il confrontare i meriti di proposte che concernono argomenti di scienze affatto disparate, quali sono un lavoro storico, e memorie di analisi matematica. Però ci conforta il fatto che la distribuzione delle varie proposte nelle due categorie venne deliberata alla quasi unanimità, cioè con dieci voti sopra undici votanti. E pertanto possiamo avere qualche affidamento per ritenere che le proposte messe nella prima categoria hanno realmente meriti più rilevanti di quelle collocate dalla Giunta in seconda linea.

Permettetemi ora che io con brevissimi cenni, compendiati sulle relazioni parziali presentate alla Giunta, richiami alla vostra memoria l'importanza dei lavori a cui si riferiscono le sei proposte che la Giunta vi presenta come più delle altre meritevoli di premio.

I lavori matematici del Prof. Felice Casorati che hanno per iscopo principale la teorica della integrazione delle equazioni differenziali, si distinguono eminentemente, giusta l'avviso di un giudice competentissimo quale è il nostro collega Brioschi, per la novità delle ricerche, per la perfezione dei metodi adottati, e per la grande importanza dei risultati ottenuti. I nuovi metodi di ricerca trovati dal Casorati consistono essenzialmente in una nuova interpretazione del calcolo delle differenze finite, per la quale tutte le formole o proposizioni che si andarono finora accumulando in questo calcolo si possono immediatamente tradurre in più maniere in proposizioni relative alla teoria delle funzioni di variabili continue. Specialmente dopo le dispute sorte nel 1870 in seno all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, si era fatta palese la necessità di nuovi studî fondamentali intorno alle soluzioni singolari delle equazioni differenziali. Or bene, anche intorno a questo argomento si è applicato con risultati importantissimi per la scoperta di proprietà affatto nuove l'ingegno del Prof. CASORATI, con una memoria nella quale presenta una teoria completa delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali ordinarie, di primo e di secondo grado rispetto a differenziali, ogni qualvolta esse ammettono primitiva generale algebrica.

I risultati dei viaggi che il D'ALBERTIS ha compito nella Nuova Guinea sobbarcandosi a spese ingenti, lottando contro difficoltà gravissime e parecchie volte affrontando il rischio della vita, sono importantissimi tanto per il rispetto geografico quanto per l'etnografico. La salita dei Monti Arfak non prima tentata da alcun europeo, e la esplorazione del fiume Fly per oltre 400 miglia sono le principali imprese geografiche compiute dal D'ALBERTIS. — Chi confronti la carta della Nuova Guinea pubblicata dal D'ALBERTIS con quelle prime esistenti, vedrà immediatamente come egli abbia saputo trovare la via per giungere nel cuore della grande isola. Là nel centro della Nuova Guinea vide sorgere a notevole distanza verso settentrione una grande catena di montagne, forse continuazione delle Charles Louis, alla quale dette il nome di *Monti Vittorio Emmanuele*. Le sue numerose osservazioni intorno ai costumi delle popolazioni selvaggie, e le ricchissime collezioni etnologiche, rendono testimonianza della importanza dei viaggi del D'ALBERTIS per l'etnologia. Non meno importante per lo stesso rispetto è lo aver messo in sodo l'esistenza di due razze umane distinte nella Nuova Guinea, giacchè egli ha dimostrato che oltre alla razza Papuana già nota e che sola abita la parte occidentale, vive nella parte meridionale-orientale una razza dalla pelle gialla e dai capelli lisci, che secondo il Wallace sarebbe la Polinesiaca; le due razze si sono incontrate lungo il fiume Fly, dando origine ad una razza mista che il D'ALBERTIS crede destinata a supplantare le altre.

È pure da ricordarsi che le collezioni raccolte dal D'ALBERTIS furono occasione ad importantissime ricerche botaniche e zoologiche.

La storia documentata di Carlo V del Professore Giuseppe DE LEVA è un lavoro di lunga lena ed importantissimo per il periodo storico che comprende, giacchè esso involge la riforma, il Concilio di Trento, gli antagonismi d'Austria e Francia e gli ultimi aneliti dell'indipendenza italiana. L'opera storica del DE

Leva ha meriti eminenti per il fine acume critico con cui essa è dettata, valendosi di fonti primitive, alcune delle quali finora erano inesplorate.

Lavori critici fatti recentemente, specialmente in Germania, indussero i matematici a modificare alcuni dei concetti fondamentali dell'analisi. Il Professore Dini nell'opera che ha per titolo: *Teorica delle funzioni di variabili reali*, dopo avere esposto ciò che fu da altri trovato su questo argomento, aggiunse moltissime cose nuove, tra le quali, come ce lo assicura l'incontestata autorità del collega Professore Betti, al quale siamo riconoscentissimi per l'onore fattoci coll'intervenire a questa seduta, sono molto importanti il modo di trattazione della condensazione delle singolarità introdotto da Hankel e ciò che riguarda le derivate, ed il concetto nuovo dei rapporti incrementali, che è fondamentale per la teorica delle funzioni finite e continue che non hanno mai derivate.

Nell'opera che ha per titolo: *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, il Dini ha esposto un suo metodo nuovo e generale di determinare in modo uniforme le serie di funzioni integrali di una equazione differenziale di secondo ordine. L'importanza del metodo del Dini è grandissima per la fisica matematica, dove si fa un grandissimo uso delle rappresentazioni di funzioni per mezzo di serie di funzioni integrali di equazioni differenziali di secondo ordine e non si riusciva a dimostrare la convergenza di queste serie, oppure si otteneva questa dimostrazione con artifizi speciali.

All'autorità del Betti nel far risaltare l'importanza e l'alto valore dei lavori del Dini, si aggiunge pur quella grandissima d'un nostro Socio straniero, l'illustre Professore Hermite, come ne fanno testimonianza le ripetute relazioni favorevolissime, che dei lavori del Professore di Pisa egli fece all'Istituto di Francia.

L'opera del Professore G. B. Ercolani che ha per titolo: *Nuove ricerche sulla placenta nei pesci cartilaginosi e nei mammiferi e della sua applicazione alla tassonomia zoologica ed alla antropogenia*, è molto pregevole ed importantissima così dal punto di vista fisiologico come morfologico. L'egregio Professore di Bologna ha dimostrato che le forme tipiche della placenta nei mammiferi differiscono fondamentalmente per la loro struttura; ha posto fuor di dubbio la natura ghiandolare della placenta, ha formolato una nuova teoria sulla nutrizione della placenta, ed ha dimostrata inammissibile la classificazione dei mammiferi seguita da HUXLEY e da altri zoologi che era basata sulla esistenza o meno della decidua dopo il concepimento e la gravidanza e la sua espulsione all'atto del parto.

Gli studi dell'ERCOLANI diretti a dare una base più razionale all'ordinamento dei mammiferi furono già favorevolissimamente apprezzati dai più distinti zoologi, e la sua opera, che la Giunta non ha esitato a mettere tra quelle proposte come più meritevoli del premio Bressa, ebbe già l'onore di una ricompensa dall'Istituto di Francia.

Le indagini sperimentali del Professore Francesco ROSSETTI sulla temperatura del sole, sul potere assorbente ed emissivo delle fiamme e sulla temperatura dell'arco voltaico costituiscono senza dubbio il miglior lavoro di fisica sperimentale pubblicati in Italia nell'ultimo quadriennio, così per la novità ed il valore dei metodi di ricerca impiegati, come per l'importanza dei risultati ottenuti. — Il Professore ROSSETTI riuscì a determinare sperimentalmente la legge del raggiamento termico nel caso in cui la temperatura del corpo raggiante essendo elevatissima, le note leggi di NEWTON e di DULONG e PETIT sono assolutamente inammissibili. Tra i risultati ottenuti nelle ricerche del ROSSETTI sono importantissimi quelli che si riferiscono alla temperatura media della superficie del sole, dedotta da un gran numero di misure accuratissime dell'intensità del calor solare ricevuto sulla terra. Metodi analoghi applicati allo studio delle proprietà termiche delle fiamme e dell'arco voltaico condussero il ROSSETTI, tra gli altri risultati, alla determinazione dei rapporti del potere emissivo del nero fumo, delle fiamme luminose, di quella cerulea di un bruciatore di BUNSEN; alla determinazione della temperatura dell'arco voltaico. — Questi lavori del ROSSETTI, riprodotti integralmente dai principali periodici di scienze fisiche, tra i quali citerò il *Philosophical Magazine* e gli *Annales de Chimie et de Physique*, furono altamente lodati da fisici eminenti di varie nazioni e valsero già all'autore un premio dall'Accademia de' Lincei.

Era desiderio di alcuni membri della Giunta di limitare il proprio compito ad indicarvi senza alcuna graduazione le sei proposte, che a suo avviso essa ritenne più delle altre meritevoli di premio, ma prevalse l'opinione che si dovessero, come si fece per il primo premio Bressa, presentare alle vostre deliberazioni delle proposte graduate in ordine di merito. Pertanto la Giunta nell'ultima sua riunione adottò a maggioranza di graduare le sei proposte nell'ordine seguente:

1. Francesco Rossetti,
2. Giuseppe De Leva,
3. Ulisse Dini,
4. Felice Casorati,
5. Luigi Maria D'Albertis,
6. Giambattista Ercolani.

Questa graduazione però non vincola in nessuna maniera le deliberazioni dell'Accademia.

Colle proposte che ho avuto l'onore di presentarvi, la Giunta ha esaurito l'onorevolissimo ma difficile mandato che le avete affidato. Essa si terrà onoratissima se le sue ricerche potranno riuscirvi utili nell'importante votazione a cui siete oggi chiamati.

Professore Alfonso Cossa
Segretario relatore.

Nella stessa seduta in cui fu letta questa Relazione, l'Accademia deliberò, a maggioranza, di assegnare il premio Bressa per il quadriennio 1877-1880 all' illustre viaggiatore italiano **Luigi Maria D'Albertis.**

Gli Accademici Segretari { Ascanio Sobrero
Gaspare Gorresio.

SOMMARIO

Novembre.

Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Dicembre.

CLASSI UNITE.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

dagli Accademici Segretari delle due Classi

VOL. XVII, DISP. 2ª (*Gennaio* 1882)

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Gennaio 1882.

TORINO, STAMPERIA REALE
di G. B. Paravia e C

CLASSE
DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza del 1° Gennaio 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Comm. A. Sobrero, Segretario della Classe, legge la seguente

COMMEMORAZIONE
DEL PROFESSORE
FRANCESCO SELMI
SOCIO CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA.

Nell'adunanza a Classi unite, tenutasi da quest'Accademia il dì 13 Novembre ultimo scorso, io dava comunicazione di una lettera che annunziava la morte del Comm. Francesco Selmi, Professore di chimica farmaceutica nella Università di Bologna, avvenuta il 13 Agosto in Vignola presso Modena. Era il Selmi nel novero dei Corrispondenti della nostra Accademia delle Scienze; perciò, secondando l'invito fattomi dall'onorevole nostro Presidente nella suddetta adunanza, io verrò ora a dirvi, onorevoli Colleghi, alcune parole di lui, non per tesserne una particolareggiata biografia, ma solo a modo di commemorazione, per ricordare i titoli di benemerenza che egli ebbe verso la patria e verso la scienza, titoli che dànno ragione del compianto destatosi per la sua perdita.

Il Selmi, nato nel 1827, in Vignola, paese dell'antico Ducato di Modena e Reggio, allevato ed educato nelle prime discipline sotto i Padri Gesuiti, vissuto fino all'età della gioventù matura nella poco sana atmosfera politica che allora, più che in altri Stati d'Italia, si respirava nel suo paese, provò, e profondamente sentì le aspirazioni generose ad un Governo migliore, e divenne cospiratore, come cospiratori eransi fatti i giovani studiosi, pensanti ed amanti della loro Patria. Nè certamente poca fu l'influenza che su di lui esercitarono i Congressi di scienziati che si tennero per molti anni nelle Città Italiane, riunioni le quali se da una parte conferirono ai progressi delle scienze, dall'altra erano un mezzo escogitato appunto perchè gli Italiani più istrutti, di più potente ingegno, e perciò più influenti e capaci di informare la pubblica opinione, e dirigere il popolo in un movimento politico, si ravvicinassero, si conoscessero, e si comunicassero pensieri, aspirazioni, e divisamenti per un avvenire che da lunga mano si preparava all'Italia. Il SELMI, già conosciuto come distinto cultore della chimica, partecipò a questi convegni di scienza e di politica, ed ai Congressi di Padova e di Milano fu Segretario della sezione di chimica, e lo stesso ufficio gli fu affidato al Congresso di Venezia nel 1847, che chiuse la serie di quei ritrovi, e prenunziò gli avvenimenti politici che in Italia si andarono svolgendo negli anni successivi.

Giova rilevare, che le aspirazioni politiche del SELMI non erano le avventate della Giovine Italia e di Mazzini, le quali furono cagione di tanti parziali, inconsulti ed inutili tentativi, e di catastrofi dolorose. Il suo ideale era l'Italia unita e forte, e come tanti altri ben pensanti e savii, volgeva egli lo sguardo al Piemonte ed al Re Carlo Alberto, colla speranza che da questo estremo d'Italia partirebbero le mosse verso quella meta, che più tardi, dopo ripetuti sforzi e sacrifizi, si potè conseguire. Ed a questo intento non poco si adoperò il SELMI.

Così nel 1848, reggendo il governo del Modenese il Commissario Conte Pietro di Santa Rosa, egli scriveva articoli politici nel giornale di Reggio, ed in essi caldamente propugnava l'annessione dei Ducati al Piemonte sotto lo scettro di Re Carlo Alberto; il perchè egli fu fatto segno di ire ed inimicizie per parte dei demagoghi, come, istauratosi poi il governo Ducale, egli ebbe nemici quanti per questo parteggiavano, onde, condannato nel capo, dovette, per aver salva la vita, esulare in Piemonte.

Fissatosi in Torino, il SELMI, benchè povero di mezzi, rifiutò il sussidio che ad altri emigrati si corrispondeva, ma cercò sostentamento nel lavoro; ed ottenuto il posto di Professore di fisico-chimica nel Collegio Nazionale, visse modestamente col modestissimo stipendio annesso a quell'insegnamento. — Nè allora cessò dall'inseguire lo scopo della redenzione del suo paese; ma vi si adoperò assiduamente quale membro della *Società Nazionale*, d'accordo col Conte Camillo di Cavour, col Castelli e col Lafarina, e con altri strenui propugnatori della redenzione e della unità d'Italia.

Nel 1859 si inaugurava il governo provvisorio nel Ducato di Modena colla dittatura del Farini; allora le sorti del SELMI volsero in meglio, perciocchè ritornato egli in patria vi fu eletto Rettore dell'Università, poi Segretario generale del Ministero della istruzione pubblica. Dopo l'annessione dei Ducati al Piemonte, egli resosi nuovamente in Torino fu sotto il Ministero Mamiani fatto Capo di Divisione del Ministero della istruzione pubblica, quindi Capo del gabinetto del Ministro, ed in questa carica fu mantenuto dal Ministro Matteucci, passando poi a Provveditore degli studi. Ricostituitasi l'Italia, il SELMI lasciò gli impieghi amministrativi e fece ritorno alla carriera dell'insegnante. A lui fu affidata la cattedra di chimica farmaceutica nell'Università di Bologna, ed egli occupò quel seggio per quanto ancora rimase tra i vivi. La politica, l'amore e lo zelo pel bene della patria posero il SELMI in un campo d'azione in cui raccolse amarezze, dolori e stenti, che egli ha virilmente sopportati, onde a lui non puossi negare la lode di operoso e benemerito cittadino.

Come già fu detto, il SELMI era cultore della chimica; negli studi farmaceutici egli avea avuto a maestro il Savani. È a credersi che i suoi progressi nelle chimiche discipline fossero rapidi e segnalati, poichè ancor giovine fu dal governo Ducale chiamato a Professore di chimica nel Liceo di Reggio. E la chimica egli coltivò in Torino nel tempo della sua emigrazione, come insegnante nel Collegio Nazionale, e nell'Istituto privato Rosellini, dove egli aveasi allestito un piccolo laboratorio. Frequentava egli pure il laboratorio della scuola di chimica applicata alle arti nelle Scuole Tecniche allora in fiore nella nostra città, occupandosi nelle ore libere dall'insegnamento di argomenti varii con ricerche sperimentali. Ridotto poi a stabile dimora in Bologna, intraprese studi di tossicologia, dei quali fanno fede le numerose memorie che egli lesse all'Accademia Bolognese di cui era socio. Di questi lavori argomento precipuo fu lo studio di alcuni prodotti della putrefazione dei cadaveri, che egli chiamò *ptomaine*, e che per le loro proprietà, per le loro reazioni, e per l'azione venefica che essi esercitano sugli animali hanno tanta somiglianza con alcuni alcaloidi dei vegetali, che con questi molto facilmente si possono confondere. È evidente l'importanza di queste ricerche, le quali coi loro risultamenti hanno posto in avvertenza i chimici periti, chiamati a pronunciarsi in caso di sospettato veneficio, sulla possibilità che le reazioni ottenute dai procedimenti chimico-legali li inducano a credere a commesso avvelenamento con un alcaloide vegetale, mentre quelle reazioni stesse sono cagionate dalle *ptomaine*, venefiche esse pure, ma naturali prodotti di putrida fermentazione. Ed il Selmi continuando le sue ricerche su questo importante argomento, veniva pure a segnalare la produzione di corpi analoghi alle *ptomaine*, negli umori morbosi che in alcune infermità si sviluppano nel corpo umano vivente. L'importanza di queste ricerche è manifesta: che se nei lavori che il Selmi ha pubblicati su questo tema resta ancora qualche lato debole, specialmente in riguardo a fatti che più chiaramente stabiliscano la composizione e l'individualità delle *ptomaine*, non è men vero che essi lavori apersero una via in cui altri perseverando potrà, con vantaggio reale della scienza, raccogliere nuovi dati sperimentali, e portare così a pieno compimento un ramo di chimica tossicologica di grande momento. — Sebbene sarà difficile che altri abbia il coraggio di camminare sulle orme del Selmi, e porsi di proposito a rimaneggiare materiali corrotti, fetenti, ripugnanti, ed anche possibilmente pericolosi, per discoprire i secreti che vi si nascondono.

Altri argomenti trattò sperimentalmente il Selmi, onde egli in varii tempi scrisse Memorie, delle quali alcune furono accolte nei Volumi della nostra Accademia. Esse riflettono la solubilità del cianuro d'oro nei cianuri alcalini, l'azione del iodio sul bicloruro di mercurio, la pseudo-soluzione dell'azzurro di Berlino, l'azione del latte sui metalli, la cristallizzazione del solfato di soda, i composti di ossigeno, iodio e mercurio - la fermentazione amigdalica - gli effetti dell'arsenico sulla economia animale e sul latte vaccinico, ecc. Ed ancora, poco prima che egli morisse, comunicava all'Accademia di Bologna una sua osservazione sull'albume dell'uovo, in cui egli rilevava la presenza di una materia *diastasica* capace di trasformare l'amido in zucchero.

L'operosità del Selmi è tanto più degna di lode se si consideri quanto la sua vita corresse agitata nelle lotte politiche, e se si tien conto della scarsezza dei mezzi dei quali egli potè valersi nelle ricerche scientifiche, lavorando in laboratorio non suo, od in laboratorio meschinamente dotato, come era, per quanto mi fu riferito, quello della sua scuola di chimica farmaceutica in Bologna, che per soprappiù era angusto, umido, malsano. Quindi quella lotta continua di aspirazioni e di desiderii impotenti, che si rompono contro ostacoli inamovibili, e che rendono maggiore il merito della riuscita, benchè inferiore a quanto si poteva attendere da un cultore di una scienza sperimentale.

Il SELMI pubblicò pure parecchie opere sulla chimica sotto forma di manuali, cioè i *Principii di chimica elementare inorganica ed organica*, in due edizioni distinte. Intraprese in Torino la pubblicazione di un Annuario chimico Italiano colla collaborazione de' suoi amici Parmeggiani e Giorgini, periodico che non ebbe che vita brevissima. Egli poi si pose a capo della compilazione dell'Enciclopedia chimica, che si pubblicò dalla Società editrice in Torino, valendosi del concorso di molti cultori della chimica e delle sue applicazioni; la quale opera già recata a compimento sotto forma di dizionario, si arricchì ancora di molti fascicoli che ne sono il complemento. Nel 1850 egli presentava a questa Accademia un suo manoscritto col quale egli concorreva al premio di L. 2500 stabilito dal Conte Pillet-Will per una *Introduzione allo studio della Chimica*; l'Accademia, pur riconoscendo che il lavoro non era affatto compiuto, considerando tuttavia che quale esso si presentava, era utile al conseguimento dello scopo del concorso, gli aggiudicava il premio; è a dolersi che il SELMI non abbia dato compimento all'opera sua, la quale non fu pubblicata.

Se il SELMI ebbe merito di operoso e sincero amatore della patria, e di solerte cultore delle chimiche discipline, non andò privo del merito di letterato. Egli studiava con amore la nostra lingua, e particolarmente si compiacque nel meditare gli scritti dell'Alighieri. A chi nol conosceva da vicino riuscì strano che nel 1855 si pubblicasse nel periodico *La Rivista contemporanea*, una dissertazione del SELMI, sotto questo titolo: *Il Convito, sua cronologia, disegno ed intendimento, attinenze alle altre opere di Dante.* Con questo suo scritto il SELMI intese di concorrere ad illustrare il 6° centenario della nascita del sommo Poeta che in quell'anno si celebrava; e l'opera sua fu apprezzata dagli studiosi della patria letteratura. Ed ancora egli si adoperò per la pubblicazione di uno scritto diretto allo stesso fine di celebrare Dante, col titolo di: *Chiose anonime alla Divina Commedia.*

A conclusione di questi brevi cenni giova l'aggiungere che se il SELMI nella vita sua travagliata meritò lode di benemerito cittadino e di distinto scienziato, a chi il conobbe dappresso egli apparve ornato d'onestà di carattere, di integrità di costume, modesto e dolce di modi; onde egli fu stimato ed amato dai suoi Colleghi della Università e dell'Accademia di Bologna, che alla sua memoria tributarono sincera e chiara testimonianza di rimpianto per opera del suo amico Prof. Ercolani il 10 Novembre 1881, ai cui sentimenti oggi si unisce dolente questa nostra Accademia.

Il Socio Comm. Giacinto Berruti presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Dott. Giuseppe Piolti, Assistente al Museo mineralogico della R. Università di Torino, un lavoro intitolato:

NUOVE RICERCHE

INTORNO ALLE

PIETRE A SEGNALI (1)

dell'Anfiteatro morenico di RIVOLI (*PIEMONTE*).

« Un fait se produit qui attire l'attention d'un esprit observateur ; un autre fait de même nature apparaît, soit simultanément avec le premier, soit à un intervalle plus ou moins éloigné. D'autres viennent se grouper autour d'eux, et de cet ensemble de lueurs isolées résulte un faisceau de lumière qui frappe enfin tous les yeux ».

Joly, *L'homme avant les métaux*.

Nella mia Memoria sulle *pietre a scodelle* dell'anfiteatro morenico di Rivoli (2), descrivevo tre di tali pietre. Nell'autunno dello scorso anno ne incontrai una quarta, i cui segni presentano qualche analogia con quelli delle due pietre a scodelle di S^t-Aubin (presso il lago di Neuchâtel) e di Biel, descritte dal celebre archeologo svizzero, Dott. Ferdinando Keller (3).

Questa nuova pietra a segnali incontrasi nella regione del Pozzetto, a poco più di due chilometri da Rivoli, alla distanza di trecento o quattrocento metri dalla cascina detta *dei Canonici*, andando verso Ponente: è un masso erratico di diorite, ha una forma assai irregolare e le seguenti dimensioni:

Altezza media	metri	1,90
Lunghezza massima . .	»	5,50
Larghezza media . . .	»	2,20.

(1) Questo nome e quello di *pietre a scodelle* indicano la medesima specie di monumenti preistorici e vengono usati promiscuamente dagli archeologi: corrispondono ai nomi tedeschi di *zeichensteine* e *schalensteine*.

(2) Nota sopra alcune *pietre a scodelle* dell'anfiteatro morenico di Rivoli (Piemonte), per Giuseppe Piolti, *Atti della R. Accademia delle Scienze*, Vol. XVI. Adunanza delli 13 Marzo 1881.

(3) D.^{r} Ferdinand Keller, *Die Zeichen-oder Schalensteine der Schweiz*. Zürich, 1870, pag. 7.

Sulla sua faccia rivolta all'Ovest appaiono cinque scodelle, delle quali la maggiore ha un diametro di m. 0,06, ed una profondità di m. 0,04; le altre hanno tutte un diametro press'a poco eguale al suddetto, ma la loro profondità è minore. Due di esse sono collegate da un canaletto, per modo da rappresentare la proiezione di quello speciale strumento di ginnastica, chiamato *manubrio*.

Ed a questa specie di scodelle riunite appartengono appunto quelle che si trovano scavate sui due blocchi erratici succitati, di S^t-Aubin e di Biel. Importa qui di notare che le scodelle del masso da me trovato sono evidentemente state prodotte da uno strumento sfregante, non a colpi, come le si farebbero con un utensile in ferro: vi si vede la traccia di detto sfregamento, indicante che lo strumento adoperato doveva essere in pietra.

Ciò posto, le *pietre a segnali* non sarebbero finora che quattro nel territorio di Rivoli, in una località cioè dove i massi erratici si contano a centinaia (1), e la scarsezza di quelle parmi sia già

(1) Notisi che non bisogna considerare ogni blocco erratico avente segni alla sua superficie come una pietra a segnali, poichè anche ora nelle nostre Alpi gli abitanti sogliono incidere, sopra una rupe o sopra un masso isolato, una linea, una croce, collo scopo di delimitare l'una dall'altra le varie proprietà. E simili croci si rinvengono eziandio nei dintorni di Rivoli: da questa città andando verso Avigliana, per un'antica strada fra boschi ora non più praticata che dai pedoni, là dove, a detta dei contadini, stava una volta il limite di confine fra il territorio di Rivoli e quello di Rosta, sulla sinistra havvi un masso erratico conosciuto sotto il nome volgare di *pera ciavoira*, che vorrebbe dire *pietra chiuditrice*, pietra che avrebbe separato i due territori. Su essa vedonsi incise due croci, e fra queste sta un λ, che, sempre secondo l'opinione di molti contadini da me interrogati in proposito, rappresenterebbe rozzamente il manico d'una chiave (?). Partendo poi da questo masso, salendo la collina ed andando verso Sud-Est, su parecchi massi erratici, posti press'a poco sul medesimo allineamento, notansi alcune di tali croci, le quali naturalmente avevano, anche in un'epoca non molto da noi lontana, lo scopo di delimitare il territorio di Rivoli da quello di Rosta.

Così pure su una delle cime della collina di Monsagnasco, presso ad un segnale trigonometrico ivi costrutto non è gran tempo, trovasi un masso erratico di diorite, sulla cui faccia superiore vedesi una rozza scultura, che a detta dei contadini rappresenterebbe una mano umana: a poca distanza da questa, sulla medesima pietra, v'è scolpita una croce. Io ebbi occasione di esaminare tale blocco erratico in compagnia del Prof. Giorgio Spezia, ed egli mi fece giustamente notare come visibilmente tanto la croce come la supposta mano fossero state incise con un istrumento in ferro, e come per fare la seconda di tali due sculture, l'artefice si fosse aiutato d'alcune druse preesistenti nella roccia; druse, la cui traccia è ancor oggi riconoscibile. La preistoricità qui c'entra per nulla: la croce probabilmente segnava un confine e chi la scolpì si divertì ad incidere la supposta mano.

Queste notizie dimostrano come si debba andare ben guardinghi prima di proclamare una pietra a scodelle come tale.

un argomento importante contro l'ipotesi che le loro escavazioni siano prodotte dall'azione degli agenti atmosferici.

Oltre a ciò, ammettendo l'ipotesi suddetta, non si capirebbe per es., come di due massi situati a poco più di 100 m. l'uno dall'altro, sul clinale d'una collina, esposti ai medesimi venti, ambidue offrenti all'acqua piovana un esteso campo d'azione (come è il caso del masso della fig. I della Tavola unita alla mia Memoria già citata e d'un altro posto un po' più verso Sud), uno mostri scodelle alla sua superficie e l'altro no.

Ma v'ha di più: queste scodelle sono analoghe ad altre che s'incontrano in molte regioni d'Europa, non solo su massi erratici e su rocce in posto, ma anche su pietre druidiche, presso a *dolmen*, in relazione insomma con veri monumenti megalitici. Vi dovette quindi essere un tempo in cui l'uso di queste scavazioni era generale, era un attributo di molti popoli.

Per cui conviene ammettere col Keller che *il corrispondersi dei segni sui blocchi di pietra presso di noi* (cioè nella Svizzera e quindi in Piemonte, poichè molte pietre a scodelle elvetiche sono analoghe a quelle da me descritte) *e là* (cioè in Inghilterra) *è altamente sorprendente ed è affatto impossibile che ciò sia accidentale* (1).

Anche il fatto di non essersi incontrate pietre a scodelle di calcare (2) ha la sua importanza.

Nell'anfiteatro morenico di Rivoli un tempo non erano rari i massi erratici di calcare: ora scarseggiano e diminuiscono giorno per giorno in causa della distruzione che ne fanno i contadini per servirsene come di materiale da costruzione e più per liberarsi i loro campi da tali incomodi ospiti. Quest'opera vandalica si prosegue con accanimento anche in paesi che si dànno per più colti dell'Italia. Il Dott. Kühne di Stettino, in una sua lettera in data 25 ottobre 1881 mi diceva: « il est bien vraisemblable » qu'il y a encore quantité de pierres analogues (cioè pietre a » scodelle) chez nous (in Pomerania); mais ces blocs erratiques » étant les seules pierres qui se trouvent dans notre pays, les » agriculteurs les détruisent sans pitié ».

Orbene, quei pochi superstiti blocchi erratici di calcare da me esaminati non mostrano alcuna traccia di segnali, perchè

(1) Keller, Op. cit., p. 14.
(2) Id. id. id. 2.

esperimentalmente gli uomini dell'età della pietra, che, secondo l'opinione della maggior parte degli archeologi furono quelli che scolpirono i monumenti di cui discorriamo, avevano riconosciuto essere il calcare una roccia poco dura e quindi incapace a mantenere lungo tempo i segni su essa scolpiti.

Del resto, l'espressione *giuochi di natura*, che alcuni geologi sogliono ancora aver molto, anzi troppo alla mano, e con cui si cerca di spiegare un fenomeno difficile ad interpretarsi, ha fatto il suo tempo e non resiste più allo scalpello morale dell'analisi moderna, che, quando non può rivelare, tace, e rifugge dal foggiare vocaboli i quali cambiano nome ad un fenomeno senza spiegarlo.

Entrando ora nello spinoso campo delle ipotesi fattesi per stabilire l'uso a cui servivano le pietre a segnali, naturalmente io mi debbo limitare alle supposizioni fondate su quanto ho veduto io, cioè sulle pietre a scodelle da me esaminate, poichè in argomenti siffatti non basta il veder disegni, per formarsi concetti giusti; è d'uopo osservare attentamente dal vero.

Ciò posto, nel mio caso m'accosto all'opinione del sig. De Caumont, secondo cui le scodelle sopra un piano orizzontale avrebbero servito a raccogliervi sangue e la pietra su cui quelle si trovano sarebbe stata un vero altare per sacrifizi, tanto più che le ragioni opposte dal Keller (1) contro tale ipotesi non sono valevoli nel caso concreto di cui discorro, cioè della pietra a scodelle di Monsagnasco (vedi mia Memoria già citata, fig. I) e di quella di Reano (id., fig. 2). Vediamo quali siano queste ragioni. Il Keller dice: le pietre a scodelle non hanno potuto servire come altari per sacrifizi,

1°, in causa del mostrarsi spesso le fossette su pareti verticali;

2°, perchè talora i canaletti che trovansi sulle pietre a segnali non vanno a finire in una scavazione;

3°, perchè spesso le scodelle sono scolpite più in alto della statura d'un uomo.

Ora, sulla pietra a segnali di Monsagnasco e su quella di Reano troviamo fossette sopra un piano orizzontale o quasi. Nell'ultima mancano canaletti, nella prima ve n'è uno, ma va a

(1) KELLER, Op. cit., p. 11.

finire nella scavazione maggiore. La pietra a scodelle di Monsagnasco s'eleva dal suolo non più di m. 0,52, e notisi che qui non si può ammettere vi siano state deiezioni attorno al masso, in modo da diminuirne l'altezza per rapporto al terreno, perchè il blocco erratico trovasi sulla sommità d'una collina isolata. La pietra a scodelle di Reano poi è molto più alta d'un uomo, ma vi si accede facilmente, e quindi l'argomento addotto dal Keller, ripeto, sempre relativamente al nostro caso, cade di per sè.

Per le scodelle invece sopra un piano verticale, finchè non si darà una spiegazione migliore, anche riferendoci particolarmente alle tre pietre a segnali dell'anfiteatro morenico di Rivoli che presentano disposte in tal modo le loro scavazioni, sono d'accordo col Keller intorno alla loro interpretazione, cioè che le scodelle hanno *lo scopo di indicare che la pietra su cui quelle sono scolpite è da considerarsi come pietra monumentale* (1). Anzi il masso di Reano, col suo avere ambe le sorta di scodelle, conferma questo carattere di monumentalità. Siccome poi tale masso presenta eziandio enormi cavità profonde da m. 0,25 a m. 0,42, con un diametro massimo esterno di m. 0,33 a m. 0,45, tanto che una testa d'uomo vi cape comodamente, non v'è nulla d'assurdo nel ritenere col sig. De Caumont che simili cavità servissero per deporvi offerte, poichè con ciò il carattere di pietra monumentale non viensi punto a sminuire.

È vero che le escavazioni di cui parla il signor De Caumont *si trovano su pietre megalitiche, innalzate e messe insieme dalla mano dell'uomo, non sui blocchi erratici* (2); ma, ammesso in un'epoca remotissima l'uso di incidere segni su pietre per qualche scopo che noi al giorno d'oggi non possiamo determinare con sicurezza, quelli potevano essere scolpiti tanto su massi erratici *in situ*, quanto su lastre di pietra trasportate per costrurne megaliti.

Un fatto avrebbe accresciuto di molto l'importanza delle pietre a segnali, il trovare cioè nelle loro vicinanze gli strumenti di cui si sarebbe servito l'uomo per lavorare tali pietre. Ora questo fatto finora non s'è avverato, come si può vedere dal seguente passaggio del Keller (3), ch'io traduco testualmente: «. . . . non

(1) Keller, Op. cit., p. 11.
(2) Id. id. id. 10.
(3) Id. id. id. 4.

» mi è noto alcun esempio, che presso o sotto ad una pietra a » scodelle sia stato trovato un oggetto lavorato dalla mano del» l'uomo. Sul fine di Maggio del 1869 avendo luogo scavi e » trasporti di terreno sopra una boscosa elevazione fra il lago di » Greifen e quello di Pfäffik, fu scoperta dal sig. Messikommer » ed ora trasportata nella *Wasserkirche* a Zurigo una pietra a » scodelle e si osservò se per caso esistessero lì presso oggetti » lavorati, ma non vennero trovati nè un istrumento di pietra » o di metallo, nè crani, nè carboni, nè ossa. Come mi assicurarono » i proprietari, si trovò parimente nulla nel togliere la pietra a » scodelle di Wetzwyl od altri consimili monumenti, nè si scorse » traccia di oggetti estranei. Gli scavi posteriori intrapresi dal » defunto signor Notaio Müller di Nidau, collo scopo di arrivare » ad una più sicura conoscenza della pietra a scodelle situata » presso Biel, non diedero egualmente alcun risultato ».

Non contento delle prove contrarie addotte dal Keller, scavai io stesso alla profondità di 40 a 50 centimetri il terreno adiacente alla pietra a scodelle di Monsagnasco, ed anche le mie ricerche riuscirono infruttuose. Rinvenni, è vero, una gran quantità di ciottoli glaciali di quarzo e d'altre roccie, ma nulla che mi abbia potuto dare anche la più lontana idea d'un qualche istrumento atto a lavorare la pietra.

Tuttavia non dispero, proseguendo tali scavi, di riuscire un giorno o l'altro a trovare gli strumenti di scultura: quel giorno la questione delle pietre a scodelle sarà nettamente definita, almeno per quanto riguarda l'epoca a cui appartenne l'uomo che le scolpì.

Il Socio Comm. Alfonso Cossa presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Cav. Ermenegildo Rotondi, Prof. nel R. Museo industriale italiano, un lavoro intitolato:

RICERCHE CHIMICHE

SOPRA

ALCUNI FOSFATI.

Le ricerche eseguite ebbero per iscopo, lo studio della natura dei composti che hanno origine dall'azione dell'acido solforoso sopra i fosfati di calcio, magnesio e bario, e le indagini relative alla possibilità di applicare industrialmente i fosfati di magnesio, per la precipitazione dell'ammoniaca contenuta nelle acque ammoniacali del gaz ed orine fermentate.

I.

Azione dell'acido solforoso sopra il fosfato tricalcico.

In seguito ai studi fatti da Gerland (1) si ritiene, che dalla soluzione di fosfato tricalcico nell'acido solforoso, si possa precipitare, mediante rapido riscaldamento, un composto formato da cristalli esagonali, che essiccati sopra acido solforico corrispondono alla formola:

$$Ca_3 \left\{ \begin{matrix} (PO_4H)_2 \\ SO_3 \end{matrix} \right. + H_2O \qquad \ldots\ldots (\alpha).$$

Se invece di riscaldare rapidamente, si abbandona per qualche tempo a contatto dell'aria la soluzione solforosa, si ottiene, secondo il citato autore, un deposito formato da solfato, solfito e fosfato bicalcico in proporzioni variabili, a seconda delle condizioni nelle quali la precipitazione ha luogo, e resta in soluzione

(1) *Bulletin de la Société chimique* t. XIV p. 37; e *Journ. für prakt. Chem.* t. IV.

del fosfato acido di calcio. Analoghi risultati si ottengono precipitando la soluzione con alcool, o eliminando l'acido solforoso con idrogeno od altro gas inerte.

Nelle ricerche di Gerland, non si accenna alla natura dei composti esistenti nella soluzione solforosa di fosfato tricalcico, ed alle cause per le quali, mediante l'azione del calore, si ottengono prodotti di composizione differente.

Per risolvere una tale questione, incominciai anzitutto ad indagare, se il composto ottenuto da Gerland, si debba ritenere una sostanza di composizione definita, oppure la miscela di diversi sali. Per eseguire un tale studio, si preparò una soluzione solforosa di fosfato tricalcico della densità di 1.175 a 17 centigradi, e divisa in varie porzioni *a*. *b*. *c*. . . . . . . si trattò nei seguenti modi:

Porzione *a*). Diluito il liquido con due volumi di acqua, si lasciò in matraccio aperto per 10 giorni alla temperatura di circa 25 gradi; si ebbero così dei cristalli di solfato di calcio puro.

Porzione *b*). Operando come nel caso precedente, ma con una soluzione diluita con un quarto soltanto del suo volume d'acqua, si ebbero cristalli di solfato di calcio, mescolati a traccie di solfito e fosfato.

Porzione *c*). Abbandonata la soluzione in matraccio aperto alla temperatura di 25 gradi, si raccolsero separatamente i sali che precipitarono dopo 10-20-30 giorni.

Porzione *d*). Si portò rapidamente all'ebullizione, e dopo intervalli diversi si raccolsero i sali precipitati. L'ultimo deposito si separò quando il liquido non dava più precipitato col calore, quantunque contenesse ancora in soluzione del fosfato ed altri sali di calce, che precipitarono coll'aggiunta di idrato di calcio.

Porzione *e*). Si aggiunse al liquido un volume d'acqua eguale al proprio, e si operò come nel caso precedente.

Porzione *f*). Si evaporò completamente a bagno maria.

Porzione *g*). Si separò il precipitato formatosi per l'aggiunta di due volumi di alcool concentrato.

Porzione *h*). Si operò come in *g*, impiegando tre volumi di alcool.

Porzione *l*). Si rese neutra la reazione del liquido mediante aggiunta di ammoniaca; il precipitato ottenuto non conteneva detta base.

Porzione *m*). Si trattò il liquido con una corrente d'aria fino a precipitazione completa dei sali da essa resi insolubili. Le acque madri, che avevano una reazione acidissima, si evaporarono a bagno maria.

I sali di calce preparati coi metodi sopra indicati, ed essiccati sopra acido solforico, diedero all'analisi i seguenti risultati.

CAMPIONE	COMPOSIZIONE per %					*Osservazioni*
	SO_2	SO_3	P_2O_5	CaO	H_2O	
Porz. a con 2 vol. d'acqua	—	46 52	—	32.54	20.94	Solfato di calcio.
b » $^1/_4$ »	0.17	46.39	traccie	32.12	21.32	
c 1° deposito	10.68	0.64	34.75	35.47	18.86	
» 2° »	4.51	0 91	37.77	39.86	16.95	
» 3° »	6.76	0.89	35.86	38.98	17.51	
d 1° »	1.94	0.72	40.12	39.66	17.56	
» 2° »	13.62	1.17	32.74	37.63	14.84	
» 3° »	1.99	0.68	39.05	43.51	14 77	
e con 1 vol. d'acqua, 1° depos.	6.74	traccie	37.76	39.89	15.61	
» » » 2°	12.88	0.79	33.11	36.74	16.48	
» » » 3°	9.17	1.08	34.15	38.87	16.73	
f evaporazione completa	15.36	traccie	34.77	40.85	9 02	Corrisponde alla formola $2HCaPO_4 + CaSO_3 + H_2O$
g con 2 vol. d'alcool	12.04	0.62	31.18	34.93	21.23	
h » 3 »	7.11	0.68	31.17	38.41	22.63	
l con ammoniaca	10.98	0.24	35 98	43.01	9.36	
m con corrente d'aria	0.80	3.31	31.94	41.73	22 22	
n acque madri del precipitato ottenuto in m	—	traccie	36.98	14 62	48.40	Corrisponde alla formola $H_4Ca(PO_4)_2 + 8H_2O$.

Dai risultati sopra esposti si rileva, che i precipitati ottenuti risultano in generale formati da miscele di solfito e fosfati di calcio con traccie di solfato, proveniente dall'ossidazione dell'acido solforoso. Soltanto il precipitato ottenuto nell'esperienza *f*, corrisponde nella composizione centesimale alla formola (α) data da Gerland. Questo fatto, si spiega facilmente pensando, che coll'eliminazione dell'acido solforoso libero della soluzione di fosfato tricalcico, il fosfato acido di calce da esso formato, reagisce sopra il solfito acido, per dar origine a solfito neutro ed a fosfato bicalcico, come appare dalle seguenti relazioni:

$$Ca_3(PO_4)_2 + 4SO_2 + 4H_2O = H_4Ca(PO_4)_2 + 2H_2Ca(SO_3)_2$$

$$H_4Ca(PO_4)_2 + 2H_2Ca(SO_3)_2 = 2HCaPO_4 + CaSO_3 + 3SO_2 + 3H_2O,$$

ne risulta cioè del fosfato bicalcico e del solfito di calce nelle proporzioni indicate dal composto ottenuto nell'esperienza *f*.

Un tale prodotto, contrariamente a quanto ammette Gerland, si deve ritenere formato da una miscela dei due indicati sali, i quali possono trovarsi in un rapporto costante nel solo caso della completa evaporazione della soluzione solforosa. Il fatto poi che l'acqua scioglie a preferenza il solfito di calce, è un altra prova che rende inammissibile la formazione di un sale definito. — I risultati delle esperienze fatte con i fosfati di magnesio e di bario, confermano un tal modo di interpretare il fenomeno.

Le differenze nella composizione dei composti ottenuti nelle citate esperienze, si spiegano facilmente rammentando gli studi di Delattre (1) ed Erlenmeyer (2) dai quali risulta, che il fosfato bicalcico può dare origine sotto l'azione dell'acqua a fosfato acido e tricalcico:

$$4HCaPO_4 = Ca_3(PO_4)_2 + H_4Ca(PO_4)_2$$

e che il fosfato acido, in condizioni speciali, può decomporsi in acido fosforico e fosfato bicalcico:

$$H_4Ca(PO_4)_2 = HCaPO_4 + H_3PO_4 .$$

Il modo quindi, con cui si elimina l'acido solforoso dalla soluzione del fosfato tricalcico, deve influire necessariamente sulla composizione dei prodotti che si ottengono.

È noto, che già da qualche tempo si utilizza l'acido solforoso per l'estrazione della gelatina dalle ossa, e per la prepa-

(1) *Bulletin de la Société chimique*, t. XXXV, p. 358.
(2) Idem, t. XXI, p. 177.

razione del fosfato bicalcico mescolato a solfito per uso dell'agricoltura. Recentemente il signor Alldred (1), basandosi sulla poco solubilità degli ossidi di ferro e silicati nell'acido solforoso, propose il suo impiego per il trattamento sotto pressione ed alla temperatura di 100 gradi, dei fosfati naturali poveri, e non utilizzabili coi processi ordinari, per la fabbricazione dei perfosfati.

II.

Azione dell'acido solforoso sopra il fosfato trimagnesiaco.

Dalle ricerche eseguite da Gerland (2) risulta, che il fosfato trimagnesiaco si scioglie senza decomporsi in una soluzione acquosa di acido solforoso.

Tale asserzione è inesatta, perchè trattando del fosfato trimagnesiaco con acido solforoso, si ottiene del solfito e del fosfato bimagnesiaco, verificandosi reazioni analoghe a quelle esposte per il fosfato tricalcico. Infatti, evaporando completamente a bagno maria, ed in corrente di idrogeno, una soluzione solforosa del detto fosfato, si ottiene un residuo che corrisponde alla formola $2HMgPO_4 + MgSO_3 + 3H_2O$ avendo dato all'analisi i seguenti risultati:

	Trovato	Calcolato
P_2O_5	35. 28 p. %	35. 68 p. %
SO_2	16. 19 »	16. 08 »
MgO	29. 96 »	30. 15 »
H_2O	18. 32 »	18. 09 »
SO_3	0. 47 »	——

Un tale residuo, analogamente a quello che si ottiene col fosfato tricalcico, si deve riguardare come la miscela di due sali e non un composto unico, perchè trattato con acqua abbandona tutto il solfito di magnesia e lascia del $HMgPO_4 + 3H_2O$. Infatti, l'analisi eseguita sopra un tale residuo essiccato a 100 gradi diede i seguenti risultati:

---

(1) *Moniteur scientifique*, série 3, t. X e XI. — *Chemical News*, t. XLII.
(2) *Bull. Soc. chim.*, t. XVI, p. 235.

	Trovato	Calcolato
P_2O_5	40. 17 p. %	40. 81 p. %
MgO	23. 28 »	22. 99 »
H_2O	36. 01 »	36. 20 »
SO_2	traccie	——

Se invece di evaporare completamente un dato volume di soluzione solforosa, si evapora soltanto parzialmente, e si raccolgono ad intervalli diversi i precipitati che si formano, si hanno composti formati da miscele di solfito e fosfati magnesiaci in proporzioni differenti.

Il fosfato bimagnesiaco, di cui vedremo in seguito le possibili applicazioni, si può preparare industrialmente trattando a caldo il fosfato acido con giobertite, oppure per doppia decomposizione fra il solfato di magnesia e la soluzione solforosa di fosfato tricalcico. — Separando colla filtrazione il solfato di calcio che si forma, si ottiene del fosfato bimagnesiaco mescolato a solfati e solfiti, i quali, eliminati a mezzo di ripetute lavature lasciano un residuo che essiccato a 100 gradi corrisponde alla formola $HMgPO_4 + 3H_2O$, avendo fornito all'analisi i seguenti risultati:

P_2O_5	40. 31 p. %
MgO	22. 30 »
H_2O	35. 26 »

Se invece di fosfato trimagnesiaco, si tratta con acido solforoso del fosfato bimagnesiaco, e si evapora completamente una parte della soluzione, si ottiene nuovamente il sale che si disciolse, affatto esente di solfito. — L'opinione quindi di Gerland è solo ammissibile nel caso che l'acido solforoso agisca sopra il fosfato bimagnesiaco.

III.

Azione dell'ammoniaca e sali ammoniacali sopra i fosfati di magnesio.

L'ammoniaca, contenuta nelle acque ammoniacali del gas ed orine fermentate, si utilizza colla distillazione o colla precipitazione sotto forma di fosfato ammonico magnesiaco. Il primo metodo, che è quello generalmente usato, ha l'inconveniente di non potersi economicamente applicare che quando si hanno da lavorare grandi quantità di materia prima, il che è una causa dello spreco della maggior parte delle acque ammoniacali prodotte nei piccoli gasogeni. Il secondo metodo suggerito da Merle, quantunque di facile applicazione, non è in generale impiegato, perchè non permette di utilizzare che la metà circa dell'ammoniaca contenuta nei liquidi assoggettati al trattamento.

Tale inconveniente, si attribuisce ordinariamente alla solubilità del fosfato ammonico magnesiaco nell'acqua. Quando però si riflette, che una parte di detto sale richiede circa 15000 parti d'acqua alla temperatura ordinaria per sciogliersi, riesce difficile l'ammettere per esatta una tale spiegazione. Allo scopo di studiare detta questione, incominciai dal ricercare quale sia il modo di agire dei diversi fosfati di magnesia in preferenza delle soluzioni ammoniacali.

a) « Modo di comportarsi del fosfato trimagnesiaco in » presenza delle soluzioni ammoniacali ».

Se si aggiunge del fosfato trimagnesiaco ad una soluzione ammoniacale, l'ammoniaca si fissa al fosfato, e precipita completamente sotto forma di fosfato ammonico magnesiaco secondo una delle seguenti relazioni:

$$Mg_3(PO_4)_2 + (NH_4)_2SO_4 = 2\,MgNH_4PO_4 + MgSO_4$$
$$Mg_3(PO_4)_2 + 2\,NH_3 + 2\,H_2O = 2\,MgNH_4PO_4 + Mg(OH)_2 .$$

Infatti, da esperienze eseguite aggiungendo del fosfato trimagnesiaco a diverse soluzioni ammoniacali, si ebbero dopo 48 ore i risultati seguenti:

SOLUZIONI IMPIEGATE	Quantità per % di ammoniaca precipitata (1)
Solfato d'ammonio corrispondente a gr. 0,834 di NH_3 p. 100 c. c.	98.97
Solfuro » » » 0,800 » ...	99.43
Carbonato » » » 0,794 » ...	99.38
Acque ammoniacali del gas (2) » 0,807 » ...	99.12
Ammoniaca » 0,814 » ...	95.31

(1) Medie di tre esperienze.

(2) Proveniente dal gazogeno della Società Italiana per il gas luce di Torino.

Impiegando il fosfato trimagnesiaco si può quindi precipitare completamente tutta l'ammoniaca, che sotto forma di sale si trova in un liquido; nel caso però che l'ammoniaca sia allo stato libero, vi è qualche perdita dovuta probabilmente a reazioni secondarie prodotte dall'ossido di magnesio messo in libertà durante la reazione.

Da esperienze fatte, aggiungendo quantità note di fosfato ammonico magnesiaco a dell' acqua (1 grammo di fosfato ammonico magnesiaco e 100 cc. di acqua) contenute in sospensione dell'ossido di magnesio, si trovò, analizzando il liquido dopo due giorni, che esso teneva in soluzione l'11,40 p. $^0/_0$ dell'ammoniaca corrispondente al fosfato impiegato; dopo nove giorni di contatto, la quantità di ammoniaca disciolta fu del 14,61 p. $^0/_0$.

Ripetendo analoghe esperienze con ossido di calcio, si trovò che la quantità di ammoniaca resa solubile fu rispettivamente del 16,15 e del 29,60 p. $^0/_0$.

b) « Modo di comportarsi del fosfato bimagnesiaco in presenza delle soluzioni ammoniacali ».

Se si aggiunge del fosfato bimagnesiaco ad una soluzione acquosa di ammoniaca, questa precipita completamente. Da esperienze fatte con soluzioni di ammoniaca al 0,814 p. $^0/_0$ si trovò, per media di due prove, che il 99,20 p. $^0/_0$ dell'ammoniaca precipitò sotto forma di fosfato ammonico magnesiaco. — Col carbonato d'ammonio e colle acque ammoniacali del gas, si ebbero risultati identici; l'anidride carbonica che in questo caso è messa in libertà, non ha quindi influenza sensibile sulla solubilità del fosfato ammonico magnesiaco. Con tutti gli altri sali ammoniacali la precipitazione non è più completa perchè dell'acido è messo in libertà:

$$2\,HMgPO_4 + (NH_4)_2SO_4 = 2\,MgNH_4PO_4 + H_2SO_4\ ,$$

il quale reagisce in seguito sopra i fosfati e comunica al liquido una reazione acida.

Una tale reazione si può facilmente dimostrare coll'aggiungere un sale ammoniacale a dell'acqua contenente in sospensione del fosfato bimagnesiaco e colorata in bleu da tintura di tornasole; dopo poco tempo la reazione ha luogo, ed il liquido assume la colorazione rossa proveniente da una certa quantità di acido minerale reso libero. Se si satura esattamente l'acidità con un alcali, o con un carbonato alcalino, tutta l'ammoniaca precipita; per media di quattro esperienze, fatte con idrato sodico e solfato d'ammonio si ebbe precipitato, sotto forma di fosfato ammonico magnesiaco, il 99,70 p. $^0/_0$ dell'ammoniaca esistente nella soluzione impiegata.

Gli idrati d'ossido di calcio e di magnesio o i loro carbonati, si possono sostituire agli alcali, ma in questo caso, sia perchè la saturazione si fa assai lentamente, sia per azioni secondarie che possono aver luogo, la precipitazione riesce sempre difficile ed incompleta.

c) « Modo di comportarsi del fosfato acido di magnesio » in presenza delle soluzioni ammoniacali ».

Se si aggiunge del fosfato acido di magnesio ad una soluzione di ammoniaca, questa, anche in presenza di un sale di magnesio, non può precipitare completamente, perchè, almeno la metà resta in soluzione sotto forma di sale, come risulta dalla equazione:

$$H_4 Mg(PO_4)_2 + 4\,NH_3 + Mg\,SO_4 = 2\,NH_4 Mg\,PO_4 + (NH_4)_2 SO_4\ .$$

Da tre esperienze fatte con una soluzione di ammoniaca al 0,814 p. $^0/_0$ aggiunta a del fosfato acido di magnesio, in quantità tale da rendere neutra la soluzione, si ebbero i seguenti risultati:

1ª prova,	precipitò il	54,12	p. $^0/_0$	dell'ammoniaca;
2ª »	»	57,61	»	»
3ª »	»	49,87	»	»

Sostituendo alla soluzione di ammoniaca le acque ammoniacali del gas si ottengono risultati affatto identici. Per media di tre esperienze si ebbe in questo caso precipitato il 49,12 p.$^0/_0$ dell'ammoniaca.

Trattandosi di un liquido che contenga ammoniaca e un sale ammoniacale, è evidente che, operando come superiormente si disse, la porzione di ammoniaca combinata resterà tutta in soluzione.

Per ottenere la precipitazione totale dell'ammoniaca esistente in un liquido, sia libera che combinata, è necessario aggiungervi una quantità sufficiente di fosfato acido di magnesio (la quale ci è fornita dalla equazione (β), unitamente a solfato o cloruro, ed indi saturare l'acidità con una base. La reazione che ha luogo impiegando l'idrato sodico, nell'ipotesi che il liquido contenga tutta l'ammoniaca allo stato di solfato, può essere rappresentata da:

$$\left.\begin{array}{l} H_4Mg(PO_4)_2 + MgSO_4 + (NH_4)_2SO_4 + 4NaHO \\ = 2MgNH_4PO_4 + 2Na_2SO_4 + 4H_2O\ . \end{array}\right\} \ldots (\beta)$$

Esperimentando con una soluzione di solfato d'ammonio contenente il 0,834 p. $^0/_0$ di ammoniaca, si ebbe precipitata il 97,50 p. $^0/_0$ dell'ammoniaca contenuta nella soluzione.

All'idrato di sodio si può sostituire l'ossido di calcio e di magnesio, od i loro carbonati ottenuti per precipitazione, potendo anch'essi saturare a freddo le soluzioni molto diluite di fosfato acido di magnesio. I carbonati naturali non servono egualmente bene, perchè nelle indicate condizioni saturano assai difficilmente l'acidità.

L'impiego dell'ossido di calcio non può però produrre una precipitazione completa. Infatti, impiegato in eccesso, decompone il fosfato ammonico magnesiaco, ed inoltre, anche usato nelle giuste proporzioni, dà sempre luogo a formazione di fosfato bicalcico e tricalcico, ed in conseguenza di ciò, si richiede un consumo di fosfato acido maggiore di quello che è teoricamente necessario per precipitare una data quantità di ammoniaca.

Da esperienze eseguite, saturando parzialmente con calce, in periodi di tempo diversi, delle soluzioni di solfato d'ammonio (al 0,834 p.$^0/_0$ di ammoniaca) aggiunte a del fosfato acido di magnesio, nella giusta quantità richiesta per precipitare tutta l'ammoniaca, qualora potesse verificarsi la equazione:

$$\begin{array}{l} H_4Mg(PO_4)_2 + MgCl_2 + 2NH_3 + Ca(OH)_2 \\ = 2MgNH_4PO_4 + CaCl_2 + 2H_2O\ , \end{array}$$

si ottennero invece precipitate le seguenti quantità di ammoniaca:

1ª	prova,	precipitò il	73,40	p. $^0/_0$	dell'ammoniaca;
2ª	»	»	58,15	»	»
3ª	»	»	64.12	»	»
4ª	»	»	91,64	»	»

Un'altra causa che influisce nella precipitazione dell'ammoniaca, quando si satura il fosfato acido con calce, si ha nell'azione che il fosfato ammonico magnesiaco esercita sul cloruro di calcio, potendo aver luogo formazione di cloruro d'ammonio come risulta dalla:

$$2\,NH_4MgPO_4 + 3\,CaCl_2 = Ca_3(PO_4)_2 + 2\,MgCl_2 + 2\,NH_4Cl.$$

Da esperienze fatte con una soluzione al 10 p. $^0/_0$ di cloruro di calcio, a cui si aggiunsero 10 grammi di fosfato ammonico magnesiaco per ogni 100 cent. cub. di liquido, risultò che il medesimo dopo 48 ore teneva in soluzione il 23,50 p. $^0/_0$ dell'ammoniaca aggiunta.

La precipitazione quindi totale dell'ammoniaca mediante l'uso del fosfato acido di magnesio. e saturazione con idrato di calcio è cosa assai difficile, e le cose dette bastano per spiegare abbastanza bene le cause dei cattivi risultati a cui diede luogo nell'industria il suo impiego.

Nella precipitazione dell'ammoniaca, si può sostituire al fosfato acido di magnesio, il composto che si ottiene trattando con solfato di magnesio la soluzione di fosfato tricalcico nell'acido solforoso, del quale abbiamo precedentemente parlato. Anche in questo caso, la precipitazione dell'ammoniaca sotto forma di fosfato ammonico magnesiaco riesce completa, qualora si osservano le precauzioni indicate per l'impiego del fosfato acido di magnesio.

IV.

Osservazioni relative alla possibilità di applicare i fosfati di magnesio nella precipitazione dell'ammoniaca contenuta nelle acque del gas ed orine fermentate.

I risultati delle ricerche eseguite sul modo di comportarsi delle soluzioni ammoniacali in preferenza dei fosfati di magnesio, spiegano facilmente, che la causa dei cattivi risultati ottenuti nei tentativi fatti per precipitare sotto forma di fosfato ammonico magnesiaco, l'ammoniaca esistente nelle acque del gas o in altri liquidi, dipendono da un'erronea applicazione dei principii scientifici.

Infatti, il metodo suggerito da Merle, che fu quello generalmente tentato, consiste nell'aggiungere ad una soluzione di fosfato acido di magnesio (ottenuta per doppia decomposizione fra il fosfato acido di calcio ed il solfato di magnesio) il liquido ammoniacale fino a reazione leggermente alcalina. Se rammentiamo quanto precedentemente si disse in III, *c.*, è facile il persuaderci, che, anche in presenza di un sale di magnesio, non si può precipitare, nemmeno teoricamente, più della metà dell'ammoniaca che è in soluzione allo stato libero o di carbonato, mentre quella che si trova in combinazione con altri acidi è completamente perduta. Se inoltre si pensa, che il fosfato acido di magnesio, preparato col metodo di Merle, contiene sempre dell'acido cloridrico libero, ne viene la conseguenza, che tutta l'ammoniaca richiesta per la sua saturazione sarà pure completamente perduta sotto forma di cloruro d'ammonio. Migliori risultati pratici non si possono ottenere, aggiungendo al liquido ammoniacale, come alcuni consigliano, del fosfato acido di magnesio fino a rendere leggermente acida la reazione del liquido, e neutralizzando in seguito con calce.

Dalle esperienze fatte in III, *c.*, si rileva però facilmente, che la precipitazione totale dell'ammoniaca esistente in un liquido, sia allo stato libero che di carbonato, è sempre industrialmente possibile mediante l'impiego del fosfato bimagnesiaco idrato, ($HMgPO_4 + 3H_2O$) che si può preparare industrialmente trattando all'ebollizione il fosfato acido di magnesio (ottenuto col metodo di Merle) con giobertite, oppure col metodo dell'acido solforoso precedentemente indicato in II.

Il fosfato ammonico magnesiaco si può impiegare direttamente come concime, oppure per l'estrazione dell'ammoniaca mediante la sua trasformazione in pirofosfato di magnesio.

Se l'ammoniaca si trova in una soluzione sotto forma di solfato o cloruro, il fosfato bimagnesiaco può ancora impiegarsi, per la sua precipitazione, qualora si abbia l'avvertenza di aggiungervi dell'ossido di magnesio (giobertite calcinata) in modo da ottenere la reazione neutra del liquido. — In questi casi però è meglio far uso direttamente del fosfato trimagnesiaco (che industrialmente si prepara con acido fosforico e giobertite calcinata o col metodo di Schloesing (1)), evitandosi con esso la saturazione con una base.

---

(1) *Industrie de la magnésie.* - *Compt. rend.*, t. 93, p. 156-215.

Queste ricerche erano già ultimate, quando ebbi conoscenza del recente lavoro di Schloesing superiormente citato. In esso l'autore suggerisce il fosfato trimagnesiaco, preparato con acido fosforico ed ossido di magnesio estratto dalle acque madri delle saline, per precipitare l'ammoniaca contenuta nelle acque putride ed altri liquidi ammoniacali.

I risultati ottenuti da Schloesing, e quelli che risultano dalle mie esperienze, conducono alla soluzione del medesimo problema. Io sono però d'avviso, che il fosfato bimagnesiaco debba, nella pratica, essere preferito al trimagnesiaco, ogni qualvolta l'ammoniaca da precipitare si trova allo stato libero o di carbonato, perchè con esso le spese di trasporto e di preparazione sono minori, ed inoltre riescono più facili le reazioni che si vogliono ottenere.

V.

Azione dell'acido solforoso sopra il fosfato tribaritico.

Relativamente al modo di agire dell'acido solforoso sul fosfato tribaritico, si conoscono soltanto alcune ricerche eseguite da Gerland (1), il quale asserisce, che esso è decomposto dall'acido solforoso nello stesso modo che dagli acidi cloridrico e solforico, e quindi diversamente dal fosfato tricalcico.

Onde studiare una tale questione, feci agire dell'acido solforoso sopra del fosfato tribaritico messo in sospensione in poca acqua. Si ebbe così formazione di solfito di bario quasi insolubile, e di fosfato acido solubile. — Infatti, colla filtrazione si può separare una parte insolubile formata da solfito di bario, mentre si ha nel filtrato un liquido acidissimo, che parzialmente concentrato in corrente di idrogeno, abbandona tutto l'acido solforoso, e precipita una piccola quantità di solfito e fosfato tribaritico, i quali, dopo separati con una nuova filtrazione, lasciano un liquido, dalla cui evaporazione nel vuoto, in presenza di acido solforico, risulta un composto corrispondente alla formola

$$H_4 Ba(PO_4)_2 + 3H_2O ,$$

(1) *Journ. für prakt. Chem.* t. IV, e *Bull. Soc. Chim.* t. XVI.

avendo fornito all'analisi la seguente composizione:

	Trovato	Calcolato
P_2O_5	37,41	36,88
BaO	39,57	39,74
H_2O	24,02	23,38 .

Risultati affatto identici si ottengono col fosfato di piombo, il cui solfito è pure pochissimo solubile.

Dalle cose dette si può dedurre, che l'azione dell'acido solforoso sul fosfato tribaritico è identica a quella che lo stesso acido esercita sul fosfato tricalcico. — Siccome però il solfito di bario è quasi insolubile nell'acido solforoso, si può avere facilmente colla filtrazione, del solfito neutro e del fosfato acido di bario. mentre che, attesa la grande solubilità del solfito di calcio, questo non si può separare senza eliminare l'eccesso di acido solforoso. In tale operazione, avviene una reazione secondaria, che, come vedemmo, dà origine a una miscela di solfito neutro e fosfato bicalcico. — Il fosfato trimagnesiaco si comporta coll'acido solforoso come il fosfato tricalcico, con esso però, attesa la solubilità del solfito di magnesio nell'acqua, si può separare facilmente del fosfato trimagnesiaco puro.

L'azione quindi dell'acido solforoso sopra i fosfati tribasici (che godono di proprietà analoghe a quelli studiati) si può ritenere identica, sia che essi diano origine a solfiti solubili od insolubili in acido solforoso, ed essa non differisce punto, per quanto riguarda la reazione della formazione dei fosfati acidi, da quella esercitata dagli acidi solforico e cloridrico sopra i fosfati tribasici. Nel caso però dell'acido solforoso, attesa la maggiore o minore facilità colla quale i solfiti si decompongono, avvengono reazioni secondarie, che si ponno raggruppare a quelle che si hanno coi fosfati tricalcico o tribaritico, a seconda che la base del fosfato può dare origine a solfiti solubili od insolubili nella soluzione acquosa di acido solforoso.

Il Socio Cav. F. SIACCI comunica alla Classe un suo lavoro che ha per titolo:

GLI ASSI STATICI

DI UN

SISTEMA DI FORMA INVARIABILE.

Dato un corpo ritenuto da un punto fisso e sollecitato da forze non in equilibrio, e costanti in intensità e direzione, dico *asse statico* una retta, intorno a cui il corpo girando di un certo angolo, trova una posizione di equilibrio. Le posizioni di equilibrio sono in generale quattro, com'è noto, e quattro saranno dunque gli assi statici.

Essi dipendono da un'equazione di quarto grado a radici reali, e tutte le loro proprietà si riassumono nelle due seguenti:

I. Il piano, che passa per due assi qualunque, è perpendicolare al piano, che passa per gli altri due.

II. Se sugli assi si prendono, a partir dall'origine, segmenti proporzionali ai seni delle rotazioni, che conducono all'equilibrio, le estremità di questi segmenti hanno il baricentro nel punto fisso.

Dico *punti statici* queste estremità. Quando l'equazione di quarto grado ammette radici multiple, i punti statici sono infiniti, ma possono sempre aggrupparsi per *quaterne*, di cui ciascuna ha le proprietà, che risultano dalle proposizioni enunciate.

III. Se due radici sono eguali, le quaterne hanno due punti statici comuni, e gli altri due sono i punti diametralmente opposti di una ellisse, che passa pel punto fisso.

IV. Se due radici sono eguali e le altre due eguali, due punti statici di una quaterna qualunque sono i punti diametralmente opposti di un'ellisse, e gli altri due sono i punti diametralmente opposti di una seconda ellisse, che taglia la prima nel punto fisso.

V. Se tre radici sono eguali, le quaterne hanno un punto statico comune, e gli altri tre sono tre punti di un'ellissoide di rivoluzione schiacciato passante pel punto fisso.

VI. Se le quattro radici sono eguali, il sistema è astatico.

Torino, 1° Gennaio 1882.

Adunanza del 15 Gennaio 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Comm. Giovanni CURIONI comunica alla Classe un suo lavoro intitolato:

RISULTATI DI ESPERIENZE

SULLE

RESISTENZE DEI MATERIALI

Nota 2ª

Studi sulla resistenza alla pressione dei mattoni pieni.

1. In quasi tutte le esperienze, che finora si sono instituite per accertare le resistenze alla rottura per pressione dei mattoni, si è operato: o sopra piccoli cubi, aventi per lato la dimensione minima dei mattoni da cui furono estratti: o sopra prismi costituenti una parte di mattone; o tutto al più sopra mattoni intieri, presi ad uno ad uno. Quasi sempre poi si è praticato: o di sottoporre a preventiva levigatura le facce da comprimersi: o di porre i saggi in prova fra due pezzi di lamiera di piombo.

Queste pratiche, ponendo i laterizi che si esperimentano in condizioni ben diverse da quelle in cui finiranno per trovarsi i materiali della stessa provenienza e qualità nella composizione delle masse murali, non possono condurre a buoni risultamenti. Ed è evidente:

che l'estrazione di saggi, di forma cubica e parallelepipeda, da mattoni intieri, rende senza dubbio quelli relativamente meno resistenti di questi; che la levigatura delle facce da comprimersi priva i saggi su cui vien fatta di una scorza la quale, se da una parte è più resistente del materiale che avviluppa, dall'altra dà ai mattoni delle irregolarità talvolta dannose alla loro resistenza; e che l'interposizione di due pezzi di lamiera di piombo, fra i saggi ed i corpi fra i quali questi si devono schiacciare, è insufficiente per ben riempire le irregolarità inevitabili sulle facce dei mattoni, e principalmente di quelli fabbricati a mano, e quindi a ripartire la pressione in modo per quanto si può uniforme.

Per ovviare agli indicati inconvenienti, sono venuto nell'avviso di instituire le esperienze su mattoni intieri e su pilastrini di mattoni, regolarizzando le facce da comprimersi con malta di cemento e sabbia, ed impiegando la stessa malta nei giunti per la composizione dei pilastrini. Ed è così che ho incominciato ad esperimentare su mattoni fabbricati a mano, e su mattoni fabbricati con macchine, aventi il giusto grado di cottura, provenienti dallo stabilimento del signor Ingegnere Chinaglia Giuseppe, impiantato in Borgo Po presso la cinta daziaria della città di Torino. La malta stata impiegata per regolarizzare le facce da comprimersi e per unire i mattoni nella formazione dei pilastrini era formata per parti eguali di cemento di Casale Monferrato e di sabbia fina del fiume Po, ed i diversi saggi sono stati sottoposti ad esperimento dopo un medio intervallo di cinquanta giorni dalla loro preparazione.

Generalmente si è operato su mattoni disposti di piatto, ossia producendo la pressione in senso normale alle loro facce maggiori; ma si è anche fatta qualche esperienza su mattoni disposti di costa, ossia col produrre la pressione in senso normale alle loro facce medie. Non si è creduto conveniente di operare su mattoni disposti di punta, perchè una tale esperienza è affatto destituita di pratica importanza.

Si è operato su saggi dello stesso modello ed in senso normale alle loro facce maggiori pei mattoni fatti a mano, su saggi di due modelli differenti ed in senso pure normale alle loro facce maggiori pei mattoni fabbricati con macchine. E le esperienze su mattoni disposti in costa si sono fatte solamente sopra saggi, di un sol modello, fabbricati con macchine.

I risultati degli instituiti esperimenti ed i corollari, che dai medesimi si deducono, sono riassunti nei quattro numeri che seguono.

2. *Risultati delle esperienze sui mattoni fabbricati a mano.* — Cinque serie di esperienze si sono fatte con questi mattoni, e ciascuna serie si è compiuta con sei prove. I saggi stati impiegati per queste prove avevano mediamente la lunghezza di 230, la larghezza di 110, e la grossezza di 56 millimetri. Per le prime quattro serie di esperienze si impiegarono esclusivamente mattoni intieri; per la quinta serie si fecero entrare, nella composizione dei pilastrini, mattoni intieri e parti di mattoni.

I risultati delle instituite esperienze risultano dalla tavola che segue:

Indicazione dei saggi	Nº d'ordine dei saggi della stessa serie d'esperienze	Superficie resistenti Ω	Carichi di rottura T''	Coefficienti di rottura $R''=T'':\Omega$ per millimetro quadrato	Coefficienti medii di rottura R''_m per millimetro quadrato
		mmq.	cg.	cg.	cg.
Mattoni posti fra due pezzi di lamiera di piombo	1	26000	34900	1, 34	1, 31
	2	26000	33650	1, 29	
	3	25000	33870	1, 35	
	4	25200	33200	1, 32	
	5	25300	31200	1, 23	
	6	25300	33200	1, 31	
Mattoni colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	26100	68090	2, 61	2, 60
	2	26000	68000	2, 63	
	3	24900	65000	2, 61	
	4	25000	63700	2, 55	
	5	25300	65000	2, 57	
	6	25300	66000	2, 61	
Pilastrini fatti con due mattoni sovrapposti colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	25500	42000	1, 65	1, 56
	2	25000	35680	1, 43	
	3	25700	43200	1, 68	
	4	25000	36100	1, 44	
	5	24900	40100	1, 61	
	6	25300	39900	1, 58	
Pilastrini fatti con tre mattoni sovrapposti colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	25000	22800	0, 91	0, 95
	2	25200	23200	0, 92	
	3	25100	25000	1, 00	
	4	25500	25800	1, 01	
	5	26000	25120	0, 97	
	6	25000	23000	0, 92	
Pilastrini con giunti normali alle facce compresse, fatti con tre filari di mattoni e colle facce predette regolarizzate mediante malta	1	33300	29260	0, 88	0, 84
	2	33300	28700	0, 86	
	3	33400	28990	0, 87	
	4	33100	27200	0, 82	
	5	33300	27000	0, 81	
	6	32600	26100	0, 80	

La rottura di soli mattoni, posti fra due pezzi di lamiera di piombo, quasi sempre era preceduta dalla divisione mediante fenditure longitudinali e trasversali, divisione provocata dalle irregolarità dei mattoni stessi. In seguito s' incominciava a notare lo schiacciamento sulle parti più prominenti delle facce compresse: e questo fenomeno andava estendendosi coll'aumentare della forza premente fino ad ottenere la rottura determinata dalla quasi completa disaggregazione della materia componente i saggi.

La rottura di mattoni, colle facce compresse regolarizzate mediante malta, sovente era pure preceduta da qualche fenditura longitudinale o trasversale. Sempre poi si manifestavano scaglie su tutte le facce laterali, e, cessata ogni resistenza nei saggi esperimentati, trovavasi nel loro interno una massa completamente disaggregata e quasi ridotta allo stato polverulento.

La rottura di pilastrini, formati con due e con tre mattoni sovrapposti, sovente era pure annunciata da qualche fenditura longitudinale o trasversale e dall'apparizione di scaglie sulle facce laterali. E, dall'esame dei saggi stati esperimentati, si rilevava che il fenomeno dello schiacciamento era sempre più pronunciato in quei siti delle facce di contatto, nei quali le prominenze delle facce stesse si trovavano opposte.

La rottura di pilastrini, con giunti normali alle facce compresse e fatti con tre filari di mattoni, si manifestava in modo analogo a quello dei pilastrini fatti con mattoni sovrapposti. Però appariva evidente il fatto, che i primi a dar segni di rottura erano i mattoni non intieri presentanti sulle facce laterali le superficie secondo le quali furono tagliati.

La grande differenza, che esiste fra il valore del coefficiente medio di rottura dei mattoni posti fra due pezzi di lamiera di piombo ed il valore dello stesso coefficiente dei medesimi mattoni colle facce compresse, regolarizzate mediante malta, si deve attribuire alle molte irregolarità che sempre si riscontrano sulle facce maggiori dei mattoni fabbricati a mano, ed al fatto che la malta distrugge queste irregolarità assai meglio della lamiera di piombo.

Le differenze, che si notano fra il valore del coefficiente medio di rottura dei mattoni soli colle facce compresse regolarizzate mediante malta, ed i valori degli analoghi coefficienti pei pilastrini fatti con mattoni sovrapposti, sono dovute, in parte alle irregolarità delle facce d'unione dei mattoni nella composizione dei pilastrini, ed in piccola parte al rapporto dell'altezza dei prismi compressi alla dimensione minima delle facce premute.

La differenza, che si osserva fra il valore del coefficiente medio di rottura dei pilastrini di soli mattoni sovrapposti ed il valore dello stesso coefficiente pei pilastrini con giunti normali alle facce compresse e fatti con tre filari di mattoni, si crede attribuibile, per piccola parte ai giunti normali, e per la più gran parte al fatto di non essersi impiegati soltanto mattoni interi nella composizione degli ultimi pilastrini.

3. *Risultati delle esperienze sui mattoni fabbricati con macchine.* — Otto serie di esperienze si sono fatte con questi mattoni, e ciascuna serie si è compiuta con quattro prove. I saggi stati impiegati per queste prove erano di due modelli differenti: quelli di un modello avevano mediamente la lunghezza di 243, la larghezza di 90 e la grossezza di 55 millimetri; quelli dell'altro modello avevano le analoghe dimensioni di 230, di 110 e di 48 millimetri. Le prime cinque serie di esperienze furono fatte con mattoni del primo modello, e le tre successive con mattoni del secondo modello. Si fa poi notare che tutti indistintamente i mattoni stati sottoposti ad esperimento furono fabbricati colla stessa qualità di terra, e che nel comprimere l'impasto nello stampo si produsse un'identica totale pressione sulle loro facce maggiori, e quindi una pressione riferita all'unità di superficie, che pei mattoni del primo modello fu un po' maggiore di quella pei mattoni del secondo modello.

I risultamenti delle fatte esperienze si trovano nella seguente tavola:

Indicazione dei saggi	N.° d'ordine dei saggi della stessa serie di esperienze	Superficie resistenti Ω	Carichi di rottura T''	Coefficienti di rottura $R''=T'':\Omega$ per millimetro quadrato	Coefficienti medii di rottura R''_m per millimetro quadrato
		mmq.	cg.	cg.	cg.
Mattoni del primo modello posti fra due pezzi di lamiera di piombo	1	21510	50000	2, 32	2, 35
	2	21840	51500	2, 36	
	3	21840	52000	2, 38	
	4	21658	50500	2, 33	
Mattoni del primo modello colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	21330	66500	3, 12	3, 09
	2	21600	68700	3, 18	
	3	21510	67000	3, 11	
	4	21420	63000	2, 94	
Pilastrini fatti con due mattoni del primo modello sovrapposti, colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	21420	32900	1, 54	1, 64
	2	21840	35400	1, 62	
	3	21240	34400	1, 62	
	4	21420	37900	1, 77	
Pilastrini fatti con tre mattoni del primo modello sovrapposti, colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	22500	29000	1, 29	1, 39
	2	23000	34000	1, 48	
	3	22410	30000	1, 34	
	4	22410	33000	1, 47	
Pilastrini fatti con quattro mattoni del primo modello sovrapposti, colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	22113	26000	1, 18	1, 25
	2	22500	29600	1, 32	
	3	21870	26500	1, 21	
	4	21690	27900	1, 29	
Mattoni del secondo modello posti fra due pezzi di lamiera di piombo	1	25300	39200	1, 55	1, 56
	2	25100	38500	1, 53	
	3	25000	39100	1, 56	
	4	25400	40300	1, 59	
Mattoni del secondo modello colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	25760	61500	2, 39	2, 31
	2	25080	61000	2, 43	
	3	25300	54700	2, 16	
	4	25300	57250	2, 26	
Pilastrini fatti con due mattoni del secondo modello sovrapposti, colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	25760	42000	1, 63	1, 56
	2	25425	40800	1, 60	
	3	25070	38000	1, 52	
	4	25000	37800	1, 51	

La rottura di un sol mattone quasi sempre era preceduta dal manifestarsi di scaglie su tutte le facce laterali. E l'esame dei saggi esperimentati metteva in evidenza essere avvenuta nel loro interno, o una frattura a piccole scaglie quasi perpendicolari alle facce state compresse, o una divisione nel senso longitudinale determinante quasi tanti cunei opposti, aventi le loro basi sulle facce stesse.

La rottura dei pilastrini formati con due mattoni sovrapposti quasi sempre era annunciata da scaglie sulle facce laterali. E dall'esame dei saggi stati sottoposti ad esperimento si deduceva, che allo sfasciamento laterale molto aveva contribuito la formazione di cunei longitudinali, aventi le loro basi sulle facce premute e gli spigoli opposti alle basi quasi coincidenti cogli assi longitudinali dei saggi stessi.

Nei pilastrini fatti con tre o con quattro mattoni sovrapposti la rottura era generalmente preceduta da fenditure e dall'apparizione di piccole scaglie sulle facce laterali; e quindi quasi istantaneamente avveniva uno sfracellamento per divisione dei saggi compressi in grandi scaglie perpendicolari alle facce premute.

La differenza, non molto grande ma pur sensibile, che esiste fra il valore del coefficiente medio di rottura pei mattoni posti fra due pezzi di lamiera di piombo ed il valore dello stesso coefficiente pei medesimi mattoni colle facce compresse regolarizzate mediante malta, sembra doversi attribuire: a qualche irregolarità che si riscontra anche sulle facce maggiori dei mattoni fabbricati con macchine, irregolarità che quasi sempre questi mattoni contraggono nella cottura; ed al fatto che la malta distrugge queste irregolarità assai meglio delle lamiere di piombo.

Le differenze, che si riscontrano fra il valore del coefficiente medio di rottura dei mattoni soli colle facce compresse regolarizzate mediante malta, ed i valori degli analoghi coefficienti pei pilastrini fatti con mattoni sovrapposti, sembrano dovute all'altezza dei prismi compressi, altezza che pei pilastrini è tale da facilitare la divisione in parti tendenti ad accelerare lo sfasciamento laterale.

I maggiori valori dei coefficienti medî di rottura dei mattoni del primo modello, per rapporto a quelli dei mattoni del secondo modello stati esperimentati in condizioni analoghe, si devono attribuire al fatto della maggior compressione, riferita all'unità di superficie delle facce maggiori, stata prodotta nel comprimere la terra nello stampo all'atto della fabbricazione dei primi mattoni. La diminuzione meno rapida, che ha luogo nei coefficienti medî di rottura dei saggi fatti con mattoni del secondo modello, per rapporto a quelli dei saggi fatti con mattoni del primo modello, nel passare dagli esperimenti su soli mattoni agli esperimenti su pilastrini fatti con due mattoni sovrapposti, sembra trovare spiegazione nella minor grossezza dei mattoni del secondo modello per rapporto alla dimensione analoga dei mattoni del primo modello, per cui, essendo i pilastrini stati provati nella terza serie di esperienze più alti di quelli stati provati nell'ottava, furono in questi meno favorite le divisioni tendenti ad accelerare lo sfasciamento laterale.

4. *Risultati delle esperienze sui mattoni disposti in costa.* — Queste esperienze sono state in numero di quattro e si sono instituite sopra mattoni, fabbricati con macchine, del primo modello, ossia mediamente colla lunghezza di 243, colla larghezza di 90 e colla grossezza di 55 millimetri.

Le esperienze si sono fatte operando la compressione sulle facce medie, e si sono ottenuti i risultati contenuti nella tavola che segue:

Indicazione dei saggi	N.° d'ordine dei saggi	Superficie resistenti Ω	Carichi di rottura T''	Coefficienti di rottura $R''=T'':\Omega$ per millimetro quadrato	Coefficiente medio di rottura R''_m per millim. quadrato
		mmq.	cg.	cg.	cg.
Mattoni colle facce compresse regolarizzate mediante malta	1	13145	19100	1, 45	
	2	13200	21300	1, 61	1, 64
	3	13640	24000	1, 76	
	4	13478	23500	1, 74	

La rottura si è sempre manifestata con fenditure perpendicolari alle facce compresse e quasi parallele alle facce maggiori dei saggi, ed è avvenuta colla divisione di questi ultimi in grandi scaglie.

5. *Conclusioni risultanti dalle riportate esperienze.* — Queste conclusioni sono:

1° Che la pratica, di fare esperienze sulla resistenza alla rottura per pressione dei mattoni col porli fra due pezzi di lamiera di piombo, non sembra tale da poter dare risultamenti accettabili:

2° Che le esperienze sopra saggi di un sol mattone, colle facce compresse regolarizzate mediante malta, dànno risultamenti migliori di quelli che si ottengono sopra pilastrini degli stessi mattoni colle facce compresse regolarizzate nell'identico modo e coll'interposizione della medesima malta fra i giunti;

3° Che, colla stessa qualità di terra, i mattoni fabbricati con macchine sono più resistenti di quelli fabbricati a mano;

4° Che la resistenza alla rottura per pressione dei pilastrini, formati con mattoni sovrapposti della stessa provenienza, va diminuendo col crescere della loro altezza;

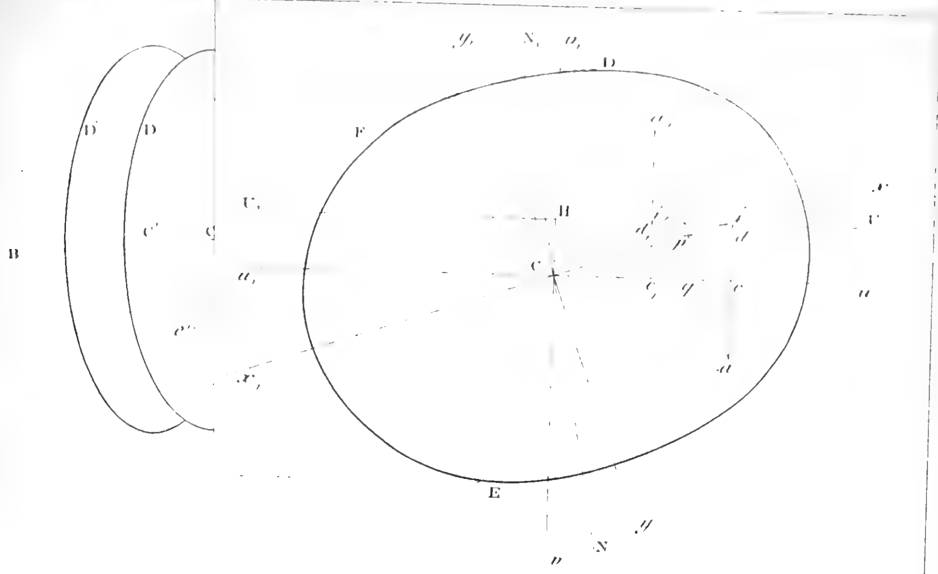
5° Che, a parità di tutte le altre circostanze, la maggior compressione delle terre nello stampo all'atto della fabbricazione dei mattoni ha qualche favorevole influenza sulla loro resistenza alla rottura per pressione;

6° Che i medesimi mattoni compressi di piatto, ossia sulla loro faccia maggiore, presentano una maggior resistenza che non quando sono compressi di costa.

In tutte le esperienze, di cui si sono riportati i risultamenti, i saggi stati posti in prova avevano le loro facce laterali perfettamente libere. Questo fatto non si verifica sempre nella fabbricazione delle masse murali, e quindi sembrano utili esperienze, che mi propongo di fare, sopra mattoni non liberi su una, su due, su tre e su tutte e quattro le loro facce laterali.

Torino, 15 Gennaio 1882.

Tav. V



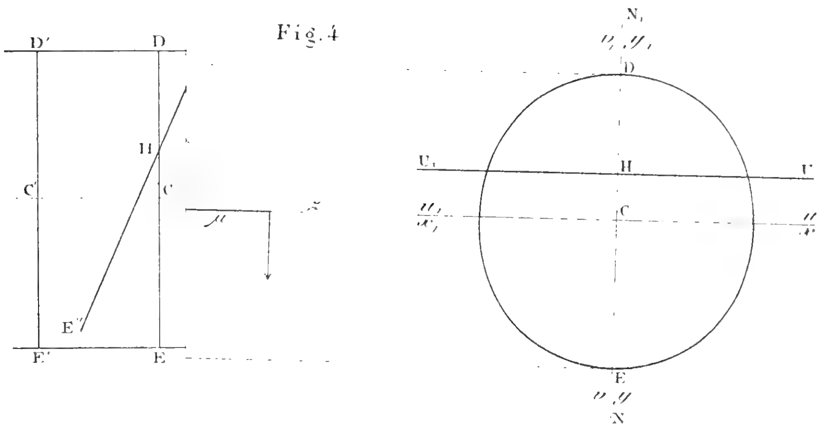


Fig. 4

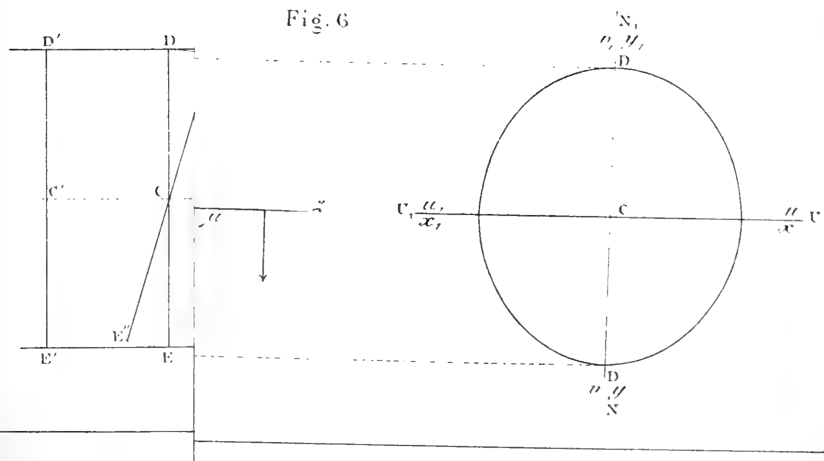
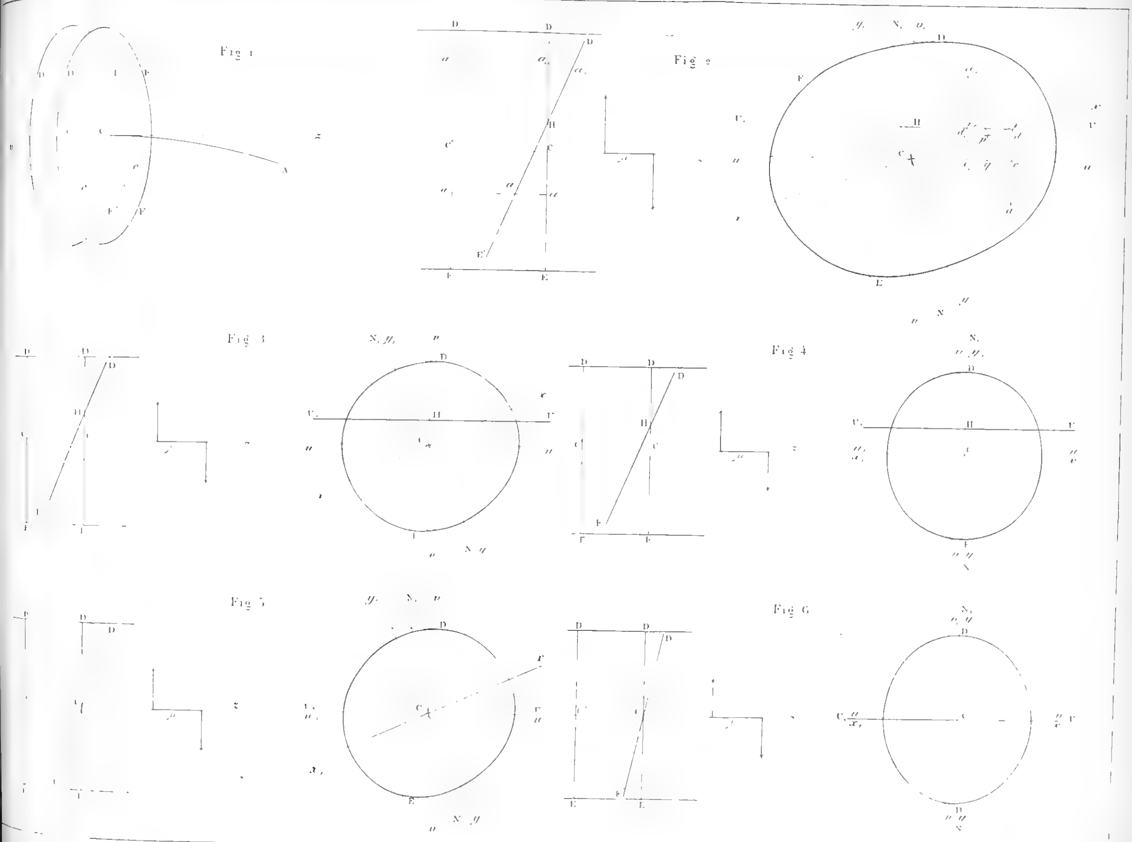


Fig. 6



Torino Lit Salussolia

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA presenta alcuni lavori dell'Osservatorio astronomico, di cui è Direttore, colle parole seguenti:

Presento all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, in continuazione delle precedenti, le *Osservazioni meteorologiche ordinarie* del secondo trimestre 1881, coi rispettivi riassunti e diagrammi mensili, state redatte dall'Assistente Prof. Angelo CHARRIER.

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Aprile.

La media delle pressioni barometriche osservate nel mese è 33,99: inferiore della media di Aprile degli ultimi quindici anni di mm. 0,58.

I massimi e minimi della pressione osservati durante il mese sono registrate nella tabella seguente:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
1	35,22	3	27,21
15	42,09	20	20,37
25	40,61	26	33,17
30	41,49		

La temperatura variò fra $+4^\circ,9$ e $+18^\circ,0$: si osservò la prima nel giorno 25, la seconda nei giorni 9 e 26; il valor medio desunto dalle osservazioni fatte è di $12^\circ,2$, valore inferiore di $0^\circ,4$ al medio dello scorso quindicennio. — Si ebbe pioggia in 17 giorni, e l'acqua caduta raggiunse l'altezza di mm. 119.10.

Il quadro seguente dà la frequenza dei venti nelle singole direzioni:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
2	26	26	5	5	0	1	1	0	5	1	4	6	1	0	3

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Maggio.

La media delle altezze barometriche osservate in questo mese è 37,49, ed è superiore alla media di Maggio degli ultimi quindici anni di mm. 1,83. — Le oscillazioni di questo elemento desunte dalle osservazioni fatte, sono contenute nel seguente quadro:

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
3	33,26	7	47,61
9	32,28	12	38,47
16	32,09	18	39,75
20	36,73	22	41,62
28	31,36	31	41,81

La temperatura media in questo mese è di 17°,0, e supera solo di 0,2 la media delle temperature degli ultimi quindici anni; gli estremi osservati sono 7°,3 e 26°,8, il primo al 13, il secondo al 29. — Dodici furono i giorni con pioggia, e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 148,71.

Il quadro seguente dà il numero delle volte che il vento spirò nelle diverse direzioni:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
6	4	15	10	7	5	4	2	7	6	10	1	2	3	4	5

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Giugno.

La pressione barometrica in questo mese ha per valor medio 36,27, ed è inferiore di mm. 0,68 alla media del mese di Giugno degli ultimi quindici anni. — Il quadro seguente dà i minimi ed i massimi della pressione.

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
7	21,64	11	36,76
11	34,41	17	38,66
19	35,37	24	41,92
27	33,27	30	44,14 .

La temperatura osservata dà per media 20°, 7 superiore di 2° alla media delle temperature di Giugno dello scorso quindicennio. — La temperatura massima 31°, 2 si ebbe il giorno 25, la minima 8, 4 il giorno 9. — Si ebbe pioggia in 7 giorni, e l'acqua raccolta nel pluviometro fu di mm. 37, 33 d'altezza.

La frequenza dei venti è data dal quadro seguente:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
6	17	6	3	1	3	3	2	4	3	2	1	2	1	2	1

Le *Osservazioni meteorologiche* sopra accennate vedranno la luce nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia.

Adunanza del 29 Gennaio 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Comm. Giovanni Curioni comunica alla Classe i seguenti suoi

STUDI

SULLA

RESISTENZA DEI CORPI SOLIDI

ALLA FLESSIONE

EQUAZIONI D'EQUILIBRIO

col tener conto della diversità dei valori dei coefficienti di elasticità relativi alla tensione ed alla pressione.

1. *Osservazione sull'ipotesi dell'eguaglianza dei due coefficienti di elasticità relativi alla tensione ed alla pressione e assunto di questa nota.* — Nella flessione dei corpi solidi elastici si verificano due fenomeni, l'allontanamento di alcune molecole, l'avvicinamento di alcune altre. Ossia, supponendo i corpi costituiti da fibre, alcune di esse si allungano ed altre si accorciano.

Segue da ciò che, nello stabilire le equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le azioni molecolari per una sezione retta qualunque di un solido elastico, bisogna far uso dei due coefficienti di elasticità relativi alla tensione ed alla pressione, coefficienti che per uno stesso corpo non sono generalmente identici; ma che pure, per amore di semplicità, si ritengono tali ottenendo equazioni che sovente non sono l'espressione della realtà dei fatti.

Siccome poi da queste equazioni d'equilibrio emanano tutte le formole relative alla resistenza alla flessione dei solidi elastici, quali sono applicate nei lavori della moderna ingegnerìa, risulta:

essere sovente imperfette le determinazioni a cui tali formole conducono; ed esservi quindi il bisogno di stabilire nuove equazioni d'equilibrio, più generali di quelle finora usate, onde poter dalle medesime passare a formole convenientemente applicabili a tutti i casi pratici.

Assunto della presente nota è la ricerca di queste nuove equazioni d'equilibrio; ricerca che, per giungere a formole di pratica applicazione, sarà fatta coll'ammettere quello che sembra confermato da esperienze instituite nei limiti di sforzi a cui permanentemente si assoggettano i corpi nelle costruzioni, ossia: che, considerando in un solido elastico due sezioni rette vicinissime (fig. 1) DEF e $D'E'F'$, la parte del solido stesso compresa fra tali sezioni si possa immaginare costituita da elementi di fibre, ossia da piccoli prismi aventi i loro assi paralleli alla parte $\overline{CC'}$ dell'asse del solido, che unisce i centri di superficie delle dette vicinissime sezioni, e terminati alle sezioni stesse da facce elementari corrispondenti come e ed e'; che la sezione retta qualsiasi DEF, presa nel solido prima della deformazione, si sposti in modo che i diversi suoi punti si trovino in uno stesso piano; e finalmente che la resistenza longitudinale, provocata nell'elemento superficiale qualunque e, sia proporzionale all'area dello stesso elemento non che allo spostamento longitudinale da esso subito relativamente all'elemento corrispondente e', ed ancora inversamente proporzionale alla distanza $\overline{CC'}$ fra i centri di superficie delle due suddette vicinissime sezioni.

2. *Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le resistenze sviluppate in una sezione retta qualsiasi di un solido omogeneo ed elastico posto sotto l'azione di una coppia producente flessione.* — Considerando le due sezioni rette vicinissime (fig. 2) DE e $D'E'$ di un solido elastico, e supponendo che a dritta della sezione DE le forze esterne che lo sollecitano siansi ridotte a due eguali e contrarie, ma non opposte, e quindi ad una coppia posta in un piano perpendicolare a quello dell'ultima accennata sezione e passante pel centro di superficie C della sezione stessa, si avrà: che sotto l'azione di questa coppia la sezione DE si sarà spostata per rapporto alla sua posizione primitiva passando in $D''E''$; che il piano della sezione spostata taglierà quello della sua posizione primitiva secondo una retta, chiamata *asse neutro*, proiettata nel punto H; e che gli elementi di fibra posti fra le citate sezioni DE e $D'E'$ si saranno allungati od accorciati, secondo che incontravano la sezione DE sopra o sotto l'asse neutro.

Essendo DEF la sezione DE nella vera sua forma ed essendo C il suo centro di superficie, si conducano i tre assi coordinati ortogonali Cx, Cy e Cz, assunti in modo da essere, i due primi nel piano, il terzo per conseguenza normale al piano della sezione stessa; e sia NCN_1 la sua traccia col piano di sollecitazione, ossia col piano contenente la coppia.

Chiamando

μ la coppia producente flessione,

β l'angolo NCy che le traccia dal piano della stessa coppia, con quello della sezione DEF, fa colla parte positiva dell'asse delle y,

e ritenendo come positive le rotazioni da z verso y intorno all'asse xx_1 e da x verso z intorno all'asse yy_1, si ha: che la coppia μ ammette le due componenti

$$\mu \cos\beta \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\mu \operatorname{sen}\beta \qquad \ldots\ldots (2);$$

che la prima di queste componenti rappresenta il suo momento di rotazione intorno all'asse xCx_1; e che la seconda è il momento di rotazione attorno all'asse yCy_1.

Venendo ora a considerare le azioni molecolari o resistenze che dalla coppia già indicata sono messe in giuoco fra le due sezioni DE e $D'E'$, e supponendo che l'asse neutro, proiettato in H, sia rappresentato in UU_1 sulla sezione DEF, s'immaginino tracciati nel piano della sezione stessa i due assi ortogonali uCu_1 e vCv_1, il primo dei quali sia parallelo all'asse neutro predetto, e si dicano:

ω ed ω_1 due elementi superficiali in a ed in a_1, il primo sotto ed il secondo sopra l'asse uCu_1;

x ed y le due coordinate del punto a ed

x_1 ed y_1 le due coordinate del punto a_1, da considerarsi come positive o come negative, secondo che sono dirette secondo Cx e Cy o secondo Cx_1 e Cy_1;

v e v_1 le distanze dei punti a ed a_1 dalla retta uu_1 da ritenersi, la prima come positiva, perchè diretta secondo Cv, e la seconda come negativa, perchè diretta secondo Cv_1;

V la distanza $\overline{CH}$ dell'asse neutro UU_1 dal centro di superficie C della sezione;

l la distanza $\overline{CC'}$ dei centri di superficie delle due sezioni vicinissime DE e $D'E'$:

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente il piccolo angolo $EHE'' = DHD''$, che misura la rotazione della sezione DE nello spostamento preso rispetto alla sua posizione primitiva;

ψ l'angolo uCx dell'asse uCu_1 coll'asse xCx_1;

E ed E_1 due coefficienti di elasticità dipendenti dalla materia costituente il solido in corrispondenza dalla sezione DE, il primo per gli elementi di fibra posti sotto il piano perpendicolare a questa sezione e passante per l'asse neutro UU_1; ed il secondo per gli elementi di fibra posti sopra il piano stesso;

Σ e Σ_1 due somme estese a tutte le superficie elementari ω ed ω_1.

I centri degli elementi superficiali a ed a_1, a motivo della piccola rotazione della sezione DE attorno all'asse neutro proiettato in H, si spostano parallelamente all'asse Cz di piccole quantità, che si possono considerare come archetti circolari aa'' ed a_1a_1'', coi loro raggi rispettivamente uguali ad $\overline{Ha} = \overline{ia}$ ed $\overline{Ha_1} = \overline{i_1a_1}$ ed a cui corrisponde l'arco θ di raggio eguale all'unità; di maniera che, astrazione fatta dal segno, le lunghezze di questi archi sono date da

$$(V + v)\theta$$
$$(V + v_1)\theta .$$

Ora, per le ipotesi state enunciate nel precedente numero sul modo di valutare le resistenze opposte da un elemento superficiale qualunque e pel segno che conviene attribuire a tali forze resistenti, si ha che le resistenze longitudinali elementari, normali al piano della sezione DEF, ossia parallele all'asse delle ordinate z ed opposte dagli elementi di fibra $a'a$ ed $a_1'a_1$, risultano rispettivamente

$$\left.\begin{array}{l} E\,\omega\,\dfrac{(V+v)\,\theta}{l} \\[2ex] E_1\,\omega_1\dfrac{(V+v_1)\,\theta}{l} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (3).$$

Le resistenze longitudinali elementari, i cui valori ammettono le espressioni (3), tendono a produrre delle rotazioni intorno agli assi coordinati $x\,C\,x_1$ ed $y\,C\,y_1$; ed i momenti che loro corrispondono sono rispettivamente: attorno all'asse $x\,C\,x_1$

$$\left.\begin{array}{l} -E\,\omega\,\dfrac{(V+v)\,\theta}{l}\,y \\[2ex] -E_1\,\omega_1\dfrac{(V+v_1)\,\theta}{l}\,y_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (4);$$

attorno all'asse $y\,C\,y_1$

$$\left.\begin{array}{l} E\,\omega\,\dfrac{(V+v)\,\theta}{l}\,x \\[2ex] E_1\,\omega_1\dfrac{(V+v_1)\,\theta}{l}\,x_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (5).$$

Prendendo, per l'intiera parte di sezione posta sotto e per l'intiera parte di sezione posta sopra l'asse neutro $U\,U_1$, le somme delle resistenze elementari date dalle espressioni (3) e le somme dei momenti elementari rappresentati dalle espressioni (4) e (5), ed osservando che i coefficienti E ed E_1 sono costanti per le parti di sezione a cui si vogliono estendere le dette somme, come pure sono costanti le quantità l e θ, si ottengono le espressioni

$$\frac{\theta}{l}\left[E\,\Sigma\,\omega\,(V+v) \;+E_1\,\Sigma_1\,\omega_1\,(V+v_1)\right] \quad \ldots\ldots (6)$$

$$-\frac{\theta}{l}\left[E\,\Sigma\,\omega\,(V+v)\,y+E_1\,\Sigma_1\,\omega_1\,(V+v_1)\,y_1\right] \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\frac{\theta}{l}\left[E\,\Sigma\,\omega\,(V+v)\,x+E_1\,\Sigma_1\,\omega_1\,(V+v_1)\,x_1\right] \quad \ldots\ldots (8),$$

la prima delle quali rappresenta la resistenza sviluppata da tutti gli elementi di fibra compresi fra le sezioni rette $D\,E$ e $D'\,E'$

parallelamente all'asse Cz, e le altre due rispettivamente i momenti di rotazione della stessa resistenza attorno agli assi xCx_1 ed yCy_1.

Ora, per l'equilibrio del sistema costituito dalla coppia applicata al corpo da quella parte della sezione DE verso la quale trovasi l'asse positivo delle ordinate z e dalle resistenze provocate sulla detta sezione, devono essere soddisfatte le tre condizioni d'equilibrio

$$\left.\begin{aligned}\frac{\theta}{l}\Big[E\Sigma\omega(V+v)+E_1\Sigma_1\omega_1(V+v_1)\Big]&=0\\-\frac{\theta}{l}\Big[E\Sigma\omega(V+v)y+E_1\Sigma_1\omega_1(V+v_1)y_1\Big]+\mu\cos\beta&=0\\\frac{\theta}{l}\Big[E\Sigma\omega(V+v)x+E_1\Sigma_1\omega_1(V+v_1)x_1\Big]+\mu\,\mathrm{sen}\,\beta&=0\end{aligned}\right\}\ldots(9).$$

le quali, chiamando K il rapporto di E_1 ad E, ossia ponendo

$$E_1=KE \qquad \ldots\ldots(10),$$

ed osservando che V è una lunghezza costante, la quale passa fuori dei simboli Σ, si riducono a

$$\left.\begin{aligned}V(\Sigma\omega+K\Sigma_1\omega_1)+\Sigma\omega v+K\Sigma_1\omega_1 v_1&=0\\E\frac{\theta}{l}\Big[V(\Sigma\omega y+K\Sigma_1\omega_1 y_1)+\Sigma\omega v y+K\Sigma_1\omega_1 v_1 y_1\Big]&=\mu\cos\beta\\E\frac{\theta}{l}\Big[V(\Sigma\omega x+K\Sigma_1\omega_1 x_1)+\Sigma\omega v x+K\Sigma_1\omega_1 v_1 x_1\Big]&=-\mu\,\mathrm{sen}\,\beta\end{aligned}\right\}(11).$$

Per eliminare da queste equazioni le distanze v e v_1 dall'asse uu_1, le quali non si possono valutare se non dopo la determinazione dell'asse neutro, s'immaginino abbassate dai punti a ed a_1 le due ordinate $\overline{ap}$ e $\overline{a_1p}$, condotte per p le rette pd e pd_1 parallele ed abbassata da p la perpendicolare pq alla uu_1. Osservando che i triangoli adp, a_1d_1p e pqC sono rettangoli in d, in d_1 ed in q, che per questi triangoli gli angoli in a, a_1 e C sono eguali a ψ, che $\overline{Cp}$ è l'ascissa x del punto a e l'ascissa x_1 del punto a_1, che $\overline{ap}$ ed $\overline{a_1p}$ sono rispettivamente le ordinate y ed y_1 e che $\overline{ac}$ ed $\overline{a_1 c_1}$ sono rispettivamente le distanze v e v_1 degli stessi punti della retta $u u_1$, per essere

$$\overline{pq} = x \operatorname{sen}\psi = x_1 \operatorname{sen}\psi \ , \qquad \overline{ad} = y \cos\psi \ , \qquad \overline{a_1 d_1} = y_1 \cos\psi \ ,$$

si ottengono le formole

$$\left.\begin{aligned} v &= y \cos\psi - x \operatorname{sen}\psi \\ v_1 &= y_1 \cos\psi - x_1 \operatorname{sen}\psi \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (12),$$

le quali, dando ad x, x_1, y ed y_1 i segni che loro convengono, conducono ai valori di v e v_1 coi segni positivi o coi segni negativi, secondo che si riferiscono a punti posti sotto o posti sopra $u u_1$.

Ponendo nelle equazioni (11) i valori di v e di v_1 dati dalle formole (12), le tre condizioni d'equilibrio diventano

$$\left.\begin{aligned} &V(\Sigma\omega + K\,\Sigma_1\,\omega_1) + \cos\psi\,(\Sigma\,\omega\,y + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,y_1) \\ &\qquad - \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\,\omega\,x + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,x_1) = 0 \\ &E\frac{\theta}{l}\left[\begin{aligned} &V(\Sigma\omega y + K\Sigma_1\omega_1 y_1) + \cos\psi\,(\Sigma\,\omega\,y^2 + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,y_1^2) \\ &\qquad - \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\omega\,x\,y + K\,\Sigma_1\omega_1 x_1 y_1) \end{aligned}\right] = \mu\cos\beta \\ &E\frac{\theta}{l}\left[\begin{aligned} &V(\Sigma\omega x + K\Sigma_1\omega_1 x_1) + \cos\psi\,(\Sigma\omega x y + K\,\Sigma_1\omega_1 x_1 y_1) \\ &\qquad - \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\,\omega\,x^2 + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,x_1^2) \end{aligned}\right] = -\mu\operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} (13)$$

Queste tre equazioni si prestano alla determinazione del rapporto $\frac{\theta}{l}$, della distanza V e dell'angolo ψ; ma una tale determinazione non è generalmente tanto facile a farsi, giacchè le dette quantità V e ψ sono anche implicitamente contenute nelle due somme Σ e Σ_1. Il rapporto $\frac{\theta}{l}$ immediatamente si può eliminare dividendo la terza delle equazioni (13) per la seconda, e si ottiene la nuova equazione

$$\frac{\begin{aligned} -V(\Sigma\omega x + K\Sigma_1\omega_1 x_1) - \cos\psi\,(\Sigma\,\omega\,x y + K\Sigma_1\omega_1 x_1 y_1) \\ + \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\,\omega\,x^2 + K\Sigma_1\omega_1 x_1^2) \end{aligned}}{\begin{aligned} V(\Sigma\omega y + K\Sigma_1\omega_1 y_1) + \cos\psi\,(\Sigma\omega y^2 + K\Sigma_1\omega_1 y_1^2) \\ - \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\omega x y + K\Sigma_1\omega_1 x_1 y_1) \end{aligned}} = \operatorname{tang}\beta \quad (14),$$

la quale, unitamente alla prima delle equazioni (13), prestasi a determinare la distanza e l'angolo suindicati.

3. *Casi particolari.* — Quando il piano di sollecitazione, ossia il piano che contiene la coppia μ, taglia la sezione retta DE (fig. 3) secondo l'asse $y C y_1$, si ha

$$\beta = 0\ , \qquad \operatorname{sen}\beta = 0\ , \qquad \cos\beta = 1\ ,$$

e le tre equazioni d'equilibrio si riducono a

$$\left.\begin{array}{l}
V(\Sigma\,\omega + K\,\Sigma_1\,\omega_1) + \cos\psi\,(\Sigma\,\omega\,y + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,y_1) \\
\qquad\qquad - \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\,\omega\,x + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,x_1) = 0 \\
E\dfrac{\theta}{l}\left[\begin{array}{l} V(\Sigma\omega y + K\Sigma_1\omega_1 y_1) + \cos\psi\,(\Sigma\,\omega\,y^2 + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,y_1^2) \\ \qquad - \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\,\omega x y + K\Sigma_1\,\omega_1\,x_1 y_1)\end{array}\right] = \mu \\
V(\Sigma\,\omega\,x + K\,\Sigma_1\,\omega_1 x_1) + \cos\psi\,(\Sigma\,\omega\,x\,y + K\,\Sigma_1\,\omega_1 x_1 y_1) \\
\qquad\qquad - \operatorname{sen}\psi\,(\Sigma\,\omega\,x^2 + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,x_1^2) = 0
\end{array}\right\} \quad (15);$$

La prima e la terza di queste equazioni servono a determinare la distanza V e l'angolo ψ, e la terza può servire a trovare il rapporto $\frac{\theta}{l}$.

Quando il piano di sollecitazione taglia la sezione retta DE (fig. 4) secondo l'asse $y C y_1$, se per di più si ha

$$\Sigma\,\omega\,x = 0\ , \quad \Sigma_1\,\omega_1\,x_1 = 0\ , \quad \Sigma\,\omega\,x\,y = 0\ , \quad \Sigma_1\,\omega_1\,x_1 y_1 = 0$$

(ciò che si verifica quando gli assi coordinati $x C x_1$ ed $y C y_1$ sono assi principali centrali d'inerzia della sezione predetta, come quando l'asse $y C y_1$ è una retta di simmetria), la terza delle equazioni (15) è soddisfatta per

$$\psi = 0\ , \qquad \operatorname{sen}\psi = 0\ , \qquad \cos\psi = 1\ ;$$

e le equazioni d'equilibrio si riducono a

$$\left.\begin{array}{l}
V\,(\Sigma\omega + K\,\Sigma_1\ \omega_1) + \Sigma\,\omega\,y + K\Sigma_1\,\omega_1\,y_1 = 0 \\
E\dfrac{\theta}{l}\left[V(\Sigma\,\omega\,y + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,y_1) + \Sigma\,\omega\,y^2 + K\,\Sigma_1\,\omega_1\,y_1^2\right] = \mu
\end{array}\right\} \ldots (16).$$

In questo caso l'asse neutro UU_1 è parallelo all'asse xCx_1, la prima delle equazioni (16) serve a trovare la distanza V e la seconda a determinare il rapporto $\frac{\theta}{l}$.

Se poi si vogliono considerare i casi particolari in cui $E_1 = E$, convien assumere gli assi xCx_1 ed yCy_1 diretti secondo gli assi principali centrali d'inerzia della sezione retta considerata. In questi casi, avendosi $K = 1$ e

$$\begin{aligned} \Sigma\,\omega x + \Sigma_1\,\omega_1 x_1 &= 0 \\ \Sigma\,\omega y + \Sigma_1\,\omega_1 y_1 &= 0 \\ \Sigma\,\omega x y + \Sigma_1\,\omega_1 x_1 y_1 &= 0\ , \end{aligned}$$

e, se chiamasi

Ω la superficie dell'intiera citata sezione retta,

I_x il suo momento d'inerzia intorno all'asse xCx_1,

I_y il suo momento d'inerzia intorno all'asse yCy_1,

risultando

$$\begin{aligned} \Sigma\,\omega + \Sigma_1\,\omega_1 &= \Omega \\ \Sigma\,\omega y^2 + \Sigma_1\,\omega_1 y_1^2 &= I_x \\ \Sigma\,\omega x^2 + \Sigma_1\,\omega_1 x_1^2 &= I_y\ , \end{aligned}$$

le equazioni d'equilibrio acquistano la maggior semplicità possibile e si riducono a quelle finora state usate nelle pratiche applicazioni, che qui si deducono come corollari.

Quando il piano di sollecitazione taglia la sezione retta considerata secondo la retta NCN_1 (fig. 5), la quale fa coll'asse principale centrale d'inerzia l'angolo $NCy = \beta$, le tre equazioni d'equilibrio (13) del numero 2 si riducono a

$$\left.\begin{aligned} &V\Omega = 0 \\ &E\frac{\theta}{l} I_x \cos\psi = \mu \cos\beta \\ &E\frac{\theta}{l} I_y \operatorname{sen}\psi = \mu \operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17).$$

La prima di queste equazioni porta a conchiudere che $V = 0$, ossia che l'asse neutro UU_1 della sezione retta passa pel suo centro di superficie; e le altre due servono alle determinazioni dell'angolo ψ e del rapporto $\frac{\theta}{l}$.

Finalmente, quando il piano di sollecitazione taglia la considerata sezione retta secondo l'asse principale centrale d'inerzia yCy_1, si ha

$$\beta = 0 \,, \qquad \operatorname{sen}\beta = 0 \,, \qquad \cos\beta = 1 \,.$$

La prima delle equazioni (17) non può essere soddisfatta che per $V = 0$; e la terza delle stesse equazioni conduce a $\psi = 0$. Si conchiude quindi che l'asse neutro UU_1, oltre di passare pel centro di superficie C della sezione, si confonde coll'asse xCx_1; e che si ha l'equazione d'equilibrio

$$E\frac{\theta}{l}I_x = \mu \qquad \ldots\ldots (18),$$

la quale può servire alla determinazione del rapporto $\frac{\theta}{l}$.

Se vuolsi tener conto della diversità che per alcuni corpi esiste fra i loro coefficienti di elasticità relativi alla trazione ed alla pressione, sono rari nella pratica e il caso generale a cui convengono le equazioni (13) del numero 2 e il caso particolare a cui corrispondono le equazioni (15) di questo numero, e quasi esclusivamente occorre di dover considerare il caso pel quale si hanno le due equazioni (16). Se invece trattasi di corpi per cui i detti coefficienti di elasticità si possono ritenere come eguali, qualche rara volta s'incontra il caso di dover applicare le equazioni (17), e quasi sempre si tratta del caso meno complesso al quale conviene l'applicazione dell'equazione (18).

4. *Osservazione.* — Nell'applicare le equazioni state stabilite in questa nota, e principalmente le equazioni (13), (14), (15) e (16), si possono avere di mira due scopi: quello di calcolare la distanza V, l'angolo ψ ed il rapporto $\frac{\theta}{l}$ conoscendosi E, E_1, β, μ e tutte le dimensioni della sezione retta considerata; quello di esprimere le stesse quantità V, ψ e $\frac{\theta}{l}$ in funzione di un'incognita, per esempio, di una dimensione della sezione predetta essendo cognito tutto il resto.

Per raggiungere il primo scopo, il problema può essere trattato: o con metodi puramente numerici; oppure, quasi sempre per approssimazione ma con speditezza molto maggiore, con metodi numerici sussidiati da procedimenti di statica grafica. Per raggiungere il secondo scopo, salvo che non si voglia procedere per tentativi e per falsa posizione, è generalmente necessario servirsi di metodi numerici.

Torino, 29 Gennaio 1882.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro Dorna presenta alcuni lavori dell'Osservatorio astronomico, di cui è Direttore, colle parole seguenti:

Ho l'onore di presentare all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, in continuazione delle precedenti, le *Osservazioni meteorologiche ordinarie* del terzo trimestre dell'anno passato, state redatte, coi rispettivi riassunti e diagrammi, dall'Assistente Prof. Angelo Charrier.

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Luglio.

La media delle altezze barometriche osservate in questo mese è 38, 54; essa supera di mm. 1, 74 la media di Luglio degli ultimi quindici anni. — Le variazioni non furono numerose, come dimostra il quadro seguente, che dà i valori estremi osservati:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
4	43,77	9	38,83
15	44,47	17	35,75
19	39,81	22	31,46
24	39,37	26	29,80
29	46,49	31	37,87

La temperatura fu piuttosto elevata; il suo valor medio 26°, 2, supera di 2°, 1 la media delle temperature di Luglio degli ultimi quindici anni. I valori estremi 34°, 5 e 14°, 1 si ebbero nel giorno 20 il primo, nel 29 il secondo.

Non si ebbe pioggia che nei due giorni 24 e 26, nei quali l'altezza totale dell'acqua caduta fu di mm. 10, 1.

Il seguente quadro indica la frequenza dei venti.

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
14	10	19	8	2	0	2	0	3	0	3	1	5	0	0	0

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese d'Agosto.

La media delle pressioni barometriche del mese è 35, 95; essa è assai prossima a quella d'Agosto dello scorso quindicennio, essendone inferiore di soli mm. 0, 83. Le oscillazioni della pressione atmosferica furono poche, non rapide nella prima decade, rapide e di considerevole ampiezza nelle altre, come si può rilevare dal seguente quadro:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
4	44,50	10	31,95
11	35,58	14	25,74
16	35,00	17	27,52
20	39,55	28	28,26
30	42,95		

La temperatura in questo mese continuò ad essere elevata, superando il suo valor medio 23°, 9 di 1°, 3 la media delle temperature d'Agosto degli ultimi quindici anni.

La temperatura massima 32°, 7 si osservò nel giorno 6; la minima 13°, 0 nel giorno 16. — Si ebbe pioggia in soli cinque giorni, e l'acqua caduta raggiunse l'altezza di mm. 50, 65.

La frequenza dei venti nelle singole direzioni è la seguente:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
6	26	35	5	4	5	4	2	5	1	2	2	10	2	4	4

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Settembre.

Le pressioni barometriche osservate in questo mese hanno per media 36, 76. Questa media è inferiore di mm. 1, 42 a quella di Settembre degli ultimi quindici anni scorsi.

I minimi e i massimi barometrici furono i seguenti :

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
1	28,41	8	37,10
9	32,19	13	43,68
16	35,62	18	42,06
22	26,77	26	42,34

Le temperature osservate nel mese dànno per media 17°, 2. inferiore di 2°, 1 alla media delle temperature osservate in Settembre negli ultimi quindici anni. — I valori estremi della temperatura furono 25°, 2 e 11°, 3, il primo si ebbe nel giorno 3, nel 24 il secondo.

Undici furono i giorni piovosi e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 115, 65.

La frequenza dei venti nel mese è data dalla tabella seguente :

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
26	24	3	7	5	5	3	7	10	7	6	3	3	1	4	14

Le *Osservazioni meteorologiche* sopra accennate vedranno la luce nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia.

In questa seduta vien confermato nella carica triennale di Direttore della Classe il Socio Comm. Giovanni Battista DELPONTE.

L'Accademico Segretario

A. SOBRERO.

SOMMARIO

Classe di Scienze fisiche e matematiche.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

dagli Accademici Segretari delle due Classi

VOL. XVII, DISP. 3ª (*Febbraio* 1882)

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Febbraio 1882.

TORINO, STAMPERIA REALE
di G. B. Paravia e C.

CLASSE
DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza del 12 Febbraio 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. P. RICHELMY
VICE-PRESIDENTE

Il Socio Comm. Angelo Genocchi presenta e legge la seguente Memoria del sig. C. Le Paige, Professore di Geometria superiore nella Università di Liegi:

SUR LA

FORME QUADRILINÉAIRE.

Dans un travail précédent (*), nous avons exposé la théorie des formes trilinéaires et nous avons annoncé que nous comptions appliquer les méthodes que nous y avons employées à l'étude d'autres questions.

Nous demanderons à l'Académie la permission de lui présenter, non pas une théorie complète de la forme quadrilinéaire, mais seulement quelques remarques sur ce sujet (**); la Note qu'on va lire ne contient donc que les points essentiels de cette théorie; elle sera, nous l'espérons au moins, complétée dans différentes communications ultérieures.

Nous pensons que cette question n'est pas dépourvue d'intérêt.

En effet, la forme quadrilinéaire égalée à zéro, représente ce que nous avons appelé l'homographie du quatrième ordre et du troisième rang.

De même que les formes trilinéaires conduisent, comme nous l'avons fait voir (***), d'une manière pour ainsi dire immédiate,

(*) *Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique*, 3me série, t. II, p. 40.

(**) Quelques-uns des théorêmes fondamentaux sur lesquels nous nous appuierons ont été signalés dans deux lettres adressées à M. Hermite, lettres que cet illustre Géomètre a eu la bonté de faire insérer aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. XCIV, p. 31 et p. 69.

(***) C. R., t. XCIII, p. 264 et 509.

aux notions fondamentales relatives aux courbes du troisième ordre, les formes quadrilinéaires contiennent, de la même façon, tous les éléments nécessaires pour aborder l'étude des surfaces du quatrième ordre, et cela d'une manière qui présentera la plus grande analogie avec la théorie des cubiques planes.

Cette forme, particularisée, peut aussi définir l'involution du quatrième ordre et du troisième rang, involution qui, ainsi que nous l'avons montré, permet de construire aisément la courbe la plus générale du quatrième ordre, dont on connait quatorze points (*).

En outre, cette étude aura, croyons nous, quelque intérêt au point de vue analytique, tant par les conséquences immédiates qu'on en peut tirer, que par celles que l'on en déduirait par une autre voie. Ces dernières paraissent plus éloignées et, pour cette raison, nous les passerons sous silence dans le mémoire actuel.

L'étude analytique de la forme est, pour ainsi dire, la seule que nous aborderons aujourd'hui: nous nous réservons de l'appliquer, plus tard, à des questions géométriques.

I. Soit

$$f = a_x a_y' a_z'' a_u''' = b_x b_y' b_z'' b_u''' = \dots$$

une forme quadrilinéaire.

Nous pourrons d'abord remarquer les six covariants suivants, quadratiques par rapport à deux séries de variables:

$$\begin{aligned}
p_x^2 q_y'^2 &= (a''b'')(a'''b''')\, a_x b_x a_y' b_y' \;; \\
r_x^2 s_z''^2 &= (a'b')(a'''b''')\, a_x b_x a_z'' b_z'' \;; \\
t_x^2 v_u'''^2 &= (a''b'')(a'b')\, a_x b_x a_u''' b_u''' \;; \\
m_y'^2 n_z''^2 &= (ab)(a'''b''')\, a_y' b_y' a_z'' b_z'' \;; \\
l_y'^2 k_u'''^2 &= (ab)(a''b'')\, a_y' b_y' a_u''' b_u''' \;; \\
g_z''^2 h^{u'''^2} &= (ab)(a'b')\, a_z'' b_z'' a_u''' b_u''' .
\end{aligned}$$

Chacun de ces covariants, pouvant être considéré comme une forme quadratique à une seule série de variables, le discriminant de ces formes nous conduira à des expressions du quatrième degré ne contenant qu'une seule série de variables. Nous allons faire voir, d'abord, que ces fonctions nouvelles se réduisent, en réalité, à quatre.

(*) *Sitz. der könig. böhm. Gesell. der Wiss.*, Prague 1881.

Pour cela, considérons, par exemple, $p_x^2\, q'_y{}^2$ et $r_x^2\, s''_z{}^2$ et formons leurs discriminants en les regardant comme des formes quadratiques en y et z.

La première nous donne

$$4\,L_x^4 = \begin{vmatrix} 2\,(a''b'')(a'''b''')\,a_x b_x a'_1 b'_1 & (a''b'')(a'''b''')\,a_x b_x (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1) \\ (c''d'')(c'''d''')\,c_x d_x (c'_1 d'_2 + c'_2 d'_1) & 2\,(c''d'')(c'''d''')\,c_x d_x c'_2 d'_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2\,(c''d'')(c'''d''')\,c_x d_x c'_1 d'_1 & (c''d'')(c'''d''')\,c_x d_x (c'_1 d'_2 + c'_2 d'_1) \\ (a''b'')(a'''b''')\,a_x b_x (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1) & 2\,(a''b'')(a'''b''')\,a_x b_x a'_2 b'_2 \end{vmatrix}$$

$$= \quad 2\,(a''b'')(a'''b''')(c''d'')(c'''d''')\,\Big|(a'c')(b'd') + (a'd')(b'c')\Big|\,a_x b_x c_x d_x\,.$$

Mais comme nous pouvons intervertir les symboles c et d, nous obtenons finalement

$$L_x^4 = (a''b'')(a'''b''')(c''d'')(c'''d''')(a'c')(b'd')\,a_x b_x c_x d_x\,.$$

De plus, il est facile de voir que l'on peut aussi écrire:

$$2\,L_x^4 = \quad (a''d'')(b''c'')(a'd')(b'c')(a'''b''')(c'''d''')\,a_x b_x c_x d_x$$
$$- (a''c'')(b''d'')(a'd')(b'c')(a'''b''')(c'''d''')\,a_x b_x c_x d_x\,.$$

Or, pour former le discriminant de $r_x^2\, s''_z{}^2$, il suffirait, dans les calculs précédents, de remplacer les signes $(')$ par les signes $('')$ et vice-versa.

Or, on voit que cette modification ne change pas l'expression que nous venons de rencontrer.

On peut encore démontrer ceci en se servant d'un théorême que nous avons fait connaître ailleurs.

Si l'on fait, en quelque sorte, abstraction de u_1, u_2, c'est-à-dire si l'on fait entrer ces paramètres dans les coefficients, on obtient une forme trilinéaire en x, y, z.

Les trois covariants Σ de cette forme sont les covariants

$$t_z^2\, v_u'''^2\,; \qquad l_y'^2\, k_u'''^2\,; \qquad g_z''^2\, h_u'''^2\,.$$

Or, nous avons vu que les discriminants de ces trois formes quadratiques sont égaux (*); par suite les douze covariants quartiques que l'on obtient sont égaux trois à trois.

(*) *Atti dell'Accademia dei Nuovi Lincei,* t. XXXIV.

Nous aurons donc les quatre covariants

$$L_x^4 = (a''b'')(a'''b''')(c''d'')(c'''d''')(a'd')(b'c')\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x \;;$$
$$M_y^4 = (a''b''')(ab)(c''d''')(cd)(d''d'')(b''c'')\, a_y'\, b_y'\, c_y'\, d_y' \;;$$
$$N_z^4 = (ab)(cd)(a'b')(c'd')(a'''d''')(b'''c''')\, a_z''\, b_z''\, c_z''\, d_z'' \;;$$
$$P_u^4 = (a'b')(c'd')(a''b'')(c''d'')(ad)(bc)\, a_u'''b_u'''c_u'''d_u''' \,.$$

Nous appellerons biquadrique une forme quadratique par rapport à deux séries de variables.

Soit

$$f_x^2\varphi_x^2 = x_1^2(a_0 y_1^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2)$$
$$+ 2x_1 x_2 (b_0 y_1^2 + 2b_1 y_1 y_2 + b_2 y_2^2) + 2_2^2(c_0 y_1^2 + 2c_1 y_1 y_2 + c_2 y_2^2)\,,$$

une pareille forme.

Si nous formons les discriminants de cette forme, par rapport à une seule des variables, nous obtenons deux quartiques

$$G_x^4\,,\quad R_y^4\,.$$

Comme on le sait, c'est EULER qui, le premier, a considéré les expressions de ce genre dans l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{Ry^4}} + \frac{dx}{\sqrt{G_x^4}} = 0\,.$$

M. CAYLEY a démontré la propriété importante des deux formes R_y^4, G_x^4, d'avoir les mêmes invariants (*).

Cette propriété peut-être regardée, au surplus, comme la traduction analytique du théorême de M. SALMON sur la constance du rapport anharmonique dans les cubiques.

Cette même forme a été récemment l'objet de quelques travaux remarquables.

L'un est dû à M. A. CAPELLI (**). Ce géomètre a démontré le théorême de M. CAYLEY et en outre a fait voir qu'il est possible d'effectuer des substitutions linéaires sur les variables x et y et de les remplacer par des variables ξ, η, de telle sorte

---

(*) *Quarterly Journal*, t. XI, p. 84.

(**) *Journal de Battaglini*, XVII, p. 69. Nous regrettons de ne connaître cet important travail que par l'analyse succinte qui a paru dans le *Jahrbuch ueber die Fortschritte der Mathematik*.

que la fonction $F_\xi^2 \Phi_\eta^2$ soit symétrique par rapport aux deux séries. Alors les formes G_x^4, R_y^4, deviennent identiques; le théorême de M. CAYLEY est évident, et de plus, comme le fait observer M. HERMITE, cette substitution permet de trouver l'addition des arguments pour la fonction inverse de

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{G_\xi^4}} .$$

M. CAPELLI a d'ailleurs fait une étude complète de la forme considérée où il achève la théorie ébauchée par CLEBSCH (*); nous ne mentionnerons pas les beaux résultats auxquels il est parvenu.

Un autre géomètre distingué, M. ZEUTHEN, a, de son coté, retrouvé le théorême de M. CAYLEY et en a déduit des résultats fort intéressants.

On nous pardonnera cette digression historique en présence de l'importance que parait présenter cette question.

La forme biquadrique peut encore être mise sous la forme simple:

$$x_1^2(a_0 y_1^2 + a_2 y_2^2) + 4 x_1 x_2 b_1 y_1 y_2 + x_2^2(c_0 y_1^2 + c_2 y_2^2) ,$$

qui se prête facilement aux applications.

Mais nous ne nous occuperons pas, pour le moment, de cette question que nous reprendrons peut-être un jour.

Nous nous bornerons à déduire du théorême de M. CAYLEY la propriété suivante que nous démontrerons au surplus directement tantôt.

« *Les quatre covariants* L_x^4, M_y^4, N_z^4, P_u^4, *ont les mêmes invariants* ». Cela résulte immédiatement du théorême de M. CAYLEY et de la remarque faite plus haut que les douze discriminants des six formes biquadriques se réduisent aux quatre quartiques que nous venons d'écrire.

II. Afin d'aborder plus facilement l'étude des covariants qui naissent de la forme quadrilinéaire f, nous allons essayer de lui donner une forme plus simple.

(*) *Vorlesungen ueber Geometrie*, p. 951.

Nous pourrons employer, comme forme canonique de f, la suivante

$$f = a_{1111} x_1 y_1 z_1 u_1 + a_{1122} x_1 y_1 z_2 u_2 + a_{1212} x_1 y_2 z_1 u_2 + a_{1221} x_1 y_2 z_2 u_1 + a_{2112} x_2 y_1 z_1 u_2 + a_{2121} x_2 y_1 z_2 u_1 + a_{2211} x_2 y_2 z_1 u_1 + a_{2222} x_2 y_2 z_2 u_2 .$$

En effet, l'expression la plus générale de f contient seize paramètres; la forme que nous venons d'écrire en contient huit et les variables peuvent être considérées comme contenant huit autres constantes qui nous permettront l'identification de ces deux expressions.

Nous pouvons observer que si l'on calcule, pour cette forme, les covariants quartiques, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
L_x^4 &= 4\, a_{1111} a_{1122} a_{1221} a_{1211} x_1^4 + 4\, a_{2222} a_{2211} a_{2112} a_{2121} x_2^4 + p\, x_1^2 x_2^2 ;\\
M_y^4 &= 4\, a_{1111} a_{1122} a_{2121} a_{2112} y_1^4 + 4\, a_{2222} a_{2211} a_{1212} a_{1221} y_2^4 + p\, y_1^2 y_2^2 ;\\
N_2^4 &= 4\, a_{1111} a_{2211} a_{2112} a_{1212} z_1^4 + 4\, a_{2222} a_{1122} a_{1221} a_{2121} z_2^4 + p\, z_1^2 z_2^2 ;\\
P_u^4 &= 4\, a_{1111} a_{2211} a_{2121} a_{1221} u_1^4 + 4\, a_{2222} a_{1122} a_{1212} a_{2112} u_2^4 + p\, u_1^2 u_2^2 ;
\end{aligned}\right\}(A)$$

$$p = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1 \\ a_{1111} a_{2222} ; & & a_{1122} a_{2211} ; & & & a_{1212} a_{2121} ; & & & a_{1221} a_{2112} & \end{pmatrix}^2 .$$

Par suite la substitution, qui ramène f à sa forme canonique, ramène en même temps à cette forme les covariants quartiques.

Il suffira, pour arriver à la substitution, de transformer chacun des covariants quartiques; pour cela, nous devrons former leurs covariants sextiques : T_x^6, T_y^6, T_z^6, T_u^6.

Le problème de ramener f à son expression canonique ne présentera, par suite, aucune difficulté et nous pourrons, dans tout ce qui suit, supposer que nous ayons effectué cette transformation.

Ce problème, comme on voit, est susceptible de solutions multiples, puisque chaque quartique peut être ramenée, de trois manières, à sa forme canonique.

Les expressions (A) des quatre covariants quartiques conduisent à une démonstration rapide des propriétés que nous avons signalées plus haut.

En effet, formons les invariants i et j de L_x^4, par exemple, on a :

$$i = 2\left[16\, a_{1111}\, a_{2222}\, a_{1122}\, a_{2211}\, a_{1212}\, a_{2121}\, a_{1221}\, a_{2112} + \frac{p^2}{12}\right] \;;$$

$$j = p\left[16\, a_{1111}\, a_{2222}\, a_{1122}\, a_{2211}\, a_{1212}\, a_{2121}\, a_{1221}\, a_{2112} - \frac{p^2}{36}\right] \,.$$

On voit que ces fonctions ne peuvent différer de celles que l'on obtiendrait pour M_y^4, N_z^4, P_u^4.

Posons, pour abréger,

$$a_{1111}\, a_{2222} = t \;, \quad a_{1122}\, a_{2211} = t' \;, \quad a_{1221}\, a_{2112} = t'' \;, \quad a_{1212}\, a_{2121} = t''' ,$$

ces invariants deviennent

$$i = 2\left[16\; tt' t'' t''' + \frac{p^2}{12}\right] \,,$$

$$j = p\left[16\; tt' t'' t''' - \frac{p^2}{36}\right] \;;$$

on trouve ainsi pour le discriminant commun :

$$\Delta = 8\; tt't''t''' \left[64\; tt't''t''' - p^2\right]^2 \,.$$

III. Soient x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; u_1, u_2 les points fondamentaux, en désignant de la sorte les nouvelles origines.

Nous pouvons observer que ces points constituent huit groupes de l'homographie définie par l'équation

$$f = 0 \,.$$

En effet, si nous faisons $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, il en résulte nécessairement $u_2 = 0$. On aurait de même la combinaison correspondante

$$x_2 = 0 \,,\; y_2 = 0 \,,\; z_2 = 0 \,,\; u_2 = 0 \,,$$

et trois autres couples analogues.

A un point χ_1, χ_2, correspond, dans l'homographie H_3^4 que nous venons de définir, une homographie H_2^3, dont les éléments neutres sont donnés par les équations

$$p_x^2\, q'^2_y = 0 \,,$$

$$r_x^2\, s''^2_z = 0 \,,$$

$$t_x^2\, v'''^2_u = 0 \,.$$

Pour la forme canonique, ces expressions deviennent

$$x_1^2[a_{1111}a_{1122}y_1^2 - a_{1212}a_{1221}y_2^2]$$
$$+ x_1x_2[a_{1111}a_{2222} + a_{1122}a_{2211} - a_{1221}a_{2112} - a_{1212}a_{2121}]y_1y_2$$
$$+ x_2^2[-a_{2121}a_{2112}y_1^2 + a_{2222}a_{2211}y_2^2] = 0\ ,$$

$$x_1^2[a_{1111}a_{1212}z_1^2 - a_{1122}a_{1221}z_2^2]$$
$$+ x_1x_2[a_{1111}a_{2222} + a_{1212}a_{2121} - a_{1221}a_{2112} - a_{1122}a_{2211}]z_1z_2$$
$$+ x_2^2[-a_{2211}a_{2112}z_1^2 + a_{2222}a_{2121}z_2^2] = 0\ ,$$

$$x_1^2[a_{1111}a_{1221}u_1^2 - a_{1122}a_{1212}u_2^2]$$
$$+ x_1x_2[a_{1111}a_{2222} + a_{1221}a_{2112} - a_{1122}a_{2211} - a_{1212}a_{2121}]u_1u_2$$
$$+ x_2^2[-a_{2211}a_{2121}u_1^2 + a_{2222}a_{2112}u_2^2] = 0\ .$$

Si nous faisons $x_1 = 0$, nous aurons :

$$a_{2121}a_{2112}y_1^2 - a_{2222}a_{2211}y_2^2 = 0\ ,$$
$$a_{2211}a_{2112}z_1^2 - a_{2222}a_{2121}z_2^2 = 0\ ,$$
$$a_{2211}a_{2121}u_1^2 - a_{2222}a_{2112}u_2^2 = 0\ ,$$

et des équations analogues en faisant $x_2 = 0$.

Donc :

Les eléments neutres de l'homographie H_2^3 *qui correspond à un des points fondamentaux, sont conjugués harmoniques des points fondamentaux de la série correspondante.*

Avant de continuer la recherche des covariants de f, examinons encore à quelles conditions cette expression peut prendre la forme simple

$$f = a_{1111}x_1y_1z_1u_1 + a_{2222}x_2y_2z_2u_2\ .$$

Pour arriver à ces conditions, nous pouvons observer que, dans le cas actuel, la relation

$$f = 0\ ,$$

définit une H_3^4 particulière.

En effet, si nous fesons $x_1 = 0$, $y_2 = 0$, par exemple, les z et les u sont complètement indéterminés.

Il faudra, par suite, qu'il existe des couples

$$xy\ .\ xz\ ,\ xu\ .$$

tels que les couples

$$zu\ ,\ yu\ ,\ yz\ ,$$

puissent être complètement indéterminés.

Il est visible que ces conditions, nécessaires comme on la voit, sont aussi suffisantes, car, dès qu'elles seront remplies, il existera des groupes zu, zx, zy, tels que xy, yu, xu, soient complètement indéterminés et ainsi de suite.

Soit donc

$$\begin{aligned} f = x_1 y_1 (& a_{1111} z_1 u_1 + a_{1112} z_1 u_2 + a_{1121} z_2 u_1 + a_{1122} z_2 u_2) \\ &+ x_1 y_2 (a_{1211} z_1 u_1 + a_{1212} z_1 u_2 + a_{1221} z_2 u_1 + a_{1222} z_2 u_2) \\ &+ x_2 y_1 (a_{2111} z_1 u_1 + a_{2112} z_1 u_2 + a_{2121} z_2 u_1 + a_{2122} z_2 u_2) \\ &+ x_2 y_2 (a_{2211} z_1 u_1 + a_{2212} z_1 u_2 + a_{2221} z_2 u_1 + a_{2222} z_2 u_2). \end{aligned}$$

Pour que x, y puisse être indéterminé, il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$\left.\begin{aligned} a_{1111} z_1 u_1 + a_{1122} z_1 u_2 + a_{1121} z_2 u_1 + a_{1122} z_2 u_2 = 0 \ , \\ a_{1211} z_1 u_1 + a_{1212} z_1 u_2 + a_{1221} z_2 u_1 + a_{1222} z_2 u_2 = 0 \ , \\ a_{2111} z_1 u_1 + a_{2112} z_1 u_2 + a_{2121} z_2 u_1 + a_{2122} z_2 u_2 = 0 \ , \\ a_{2211} z_1 u_1 + a_{2212} z_1 u_2 + a_{2221} z_2 u_1 + a_{2222} z_2 u_2 = 0 \ . \end{aligned}\right\} \quad \ldots (\mathrm{B})$$

Ceci entraîne d'abord la condition

$$\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1121} & a_{1122} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{1221} & a_{1222} \\ a_{2111} & a_{2112} & a_{2121} & a_{2122} \\ a_{2211} & a_{2212} & a_{2221} & a_{2222} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Mais il faut, de plus, que les trois premières homographies (B) aient un couple commun.

Éliminons u_1, u_2 entre les équations (B) prises deux à deux, nous aurons :

$$\begin{aligned} (a_{1111} a_{1212} - a_{1112} a_{1211}) z_1^2 + (a_{1111} a_{1222} - a_{1211} a_{1122} + a_{1121} a_{1212} - a_{1112} a_{1221}) z_1 z_2 \\ + (a_{1121} a_{1222} - a_{1122} a_{1221}) z_2^2 = 0 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{1211} a_{2112} - a_{1212} a_{2111}) z_1^2 + (a_{1211} a_{2112} - a_{1212} a_{2121} + a_{1211} a_{2122} - a_{1222} a_{2111}) z_1 z_2 \\ + (a_{1221} a_{2122} - a_{1222} a_{2121}) z_2^2 = 0 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{2111} a_{1112} - a_{2112} a_{1111}) z_1^2 + (a_{2111} a_{1122} - a_{2122} a_{1111} + a_{2121} a_{1112} - a_{2112} a_{1121}) z_1 z_2 \\ + (a_{2121} a_{1122} - a_{2122} a_{1121}) z_2^2 = 0 \ . \end{aligned}$$

Il faudra que le déterminant de ces trois équations, regardées comme linéaires à l'égard de z_1^2, $z_1 z_2$, z_2^2, soit nul.

D'après un théorème que nous avons démontré ailleurs (*), cette condition peut encore s'écrire autrement.

Représentons par A_{ikem} le mineur de a_{ikem} dans le déterminant précedent.

On doit avoir

$$A_{2211} A_{2222} - A_{2212} A_{2221} = 0 .$$

Nous aurons de même :

$$\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{1211} & a_{1212} \\ a_{1121} & a_{1122} & a_{1221} & a_{1222} \\ a_{2111} & a_{2112} & a_{2211} & a_{2212} \\ a_{2121} & a_{2122} & a_{2221} & a_{2212} \end{vmatrix} = 0 , \qquad A_{2121} A_{2222} - A_{2122} A_{2221} = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1121} & a_{1211} & a_{1221} \\ a_{1112} & a_{1122} & a_{1212} & a_{1222} \\ a_{2111} & a_{2121} & a_{2211} & a_{2221} \\ a_{2112} & a_{2122} & a_{2212} & a_{2222} \end{vmatrix} = 0 , \qquad A_{2222} A_{2112} - A_{2122} A_{2212} = 0 .$$

Pour que cette forme réduite soit possible, il faudra satisfaire à six conditions.

Les covariants L_x^4, M_y^4, N_z^4, P_u^4 deviennent des carrés dont les facteurs linéaires donnent la substitution à employer.

Puisque l'expression précédente est comprise comme cas particulier dans la forme canonique, nous pouvons vérifier tout ceci à l'aide de cette forme.

Les conditions que nous venons d'établir sont alors

$$(t - t') = 0 , \ (t'' - t''') = 0 , \ (t - t'') = 0 , \ (t' - t''') = 0 ,$$
$$(t - t''') = 0 , \ (t' - t'') = 0 ;$$

elles seront remplies pour

$$t = t' = t'' = t''' .$$

(*) *Nouv. Corr. math.*, t. VI, p 490.

Soit, par exemple,

$$f \equiv x_1 y_1 z_1 u_1 + 2\,x_1 y_1 z_2 u_2 + 12\,x_2 y_2 z_1 u_1 + 3\,x_1 y_2 z_1 u_2 + 8\,x_2 y_1 z_2 u_1$$
$$+\ 4\,x_1 y_2 z_2 u_1 + 6\,x_2 y_1 z_1 u_2 + 24\,x_2 y_2 z_1 u_2\,.$$

Nous aurons

$$L_x^4 = \left[(x_1 - 2\sqrt{6}\,x_2)(x_1 + 2\sqrt{6}\,x_2)\right]^2 ;$$
$$M_y^4 = \left[(y_1 - \sqrt{6}\,y_2)(y_1 + \sqrt{6}\,y_2)\right]^2 ;$$
$$N_z^4 = \left[(z_1 - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,z_2)(z_1 + 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,z_2)\right]^2 ;$$
$$P_u^4 = \left[(u_1 - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,u_2)(u_1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,u_2)\right]^2 .$$

On vérifie sans peine que l'on a

$$f \equiv \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (x_1 - 2\sqrt{6}\,x_2)(y_1 - \sqrt{6}\,y_2)(z_1 - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,z_2)(u_1 - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,u_2) \\ + (x_1 + 2\sqrt{6}\,x_2)(y_1 + \sqrt{6}\,y_2)(z_1 + 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,z_2)(u_1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,u_2) \end{array}\right].$$

Dans la théorie des quartiques, aux quatre covariants L_x^4, M_y^4, N_z^4, P_u^4, il correspond le covariant unique

$$3\,i\mathrm{H} - 2\,j\,f\,.$$

L'équation

$$3\,i\mathrm{H} - 2\,j\,f = 0$$

représente les quatre points de ramification de l'involution caractérisée par

$$a_x\,a_y\,a_z\,a_u = 0\ .$$

Nous pouvons faire remarquer qu'il suffit que ce covariant soit un carré pour que $j = 0$, c'est-à-dire pour que la forme a_x^4, puisse se ramener à

$$\alpha\,\xi^4 + \beta\,\eta^4\ ,$$

et que l'involution ait un couple d'éléments doublement neutres. La propriété analogue n'a pas lieu pour les formes quadrilinéaires.

Dans le beau travail que nous avons eu déjà l'occasion de citer M. Capelli a fait voir que la forme biquadrique se décompose en deux facteurs bilinéaires lorsque les covariants quartiques que nous avons désignés tantôt par G_x^4, R_y^4 sont des carrés parfaits.

Nous allons démontrer cette proposition ce qui nous fournira l'occasion d'employer la forme canonique que nous proposions de la fonction biquadrique.

Soit

$$(x_1^2 y^2) = x^2(A y^2 - B) + 2x \,.\, C y + (-D y^2 + \varepsilon\ ;$$

Les covariants quartiques seront

$$(C^2 - AE - BD)\, y^2 + AD\, y^4 + BE\ ;$$
$$(C^2 - AE - BD)\, x^2 + AB\, x^4 + DE\ .$$

Ces covariants sont des carrés, si l'on a

$$(C^2 - AE - BD)^2 - 4ABDE = 0\,.$$

Or, il est facile de voir que cette condition est vérifiée, la forme biquadrique est égale à l'un des quatre produits suivants:

$$(\sqrt{A}\,xy + \sqrt{B}\,x + \sqrt{D}\,y + \sqrt{E})\ (\sqrt{A}\,xy - \sqrt{B}\,x - \sqrt{D}\,y + \sqrt{E})\ ;$$
$$(\sqrt{A}\,yy + \sqrt{B}\,x - \sqrt{D}\,y + \sqrt{E})\ (\sqrt{A}\,xy - \sqrt{B}\,x + \sqrt{D}\,y + \sqrt{E})\ ;$$
$$(\sqrt{A}\,xy + \sqrt{B}\,x + \sqrt{D}\,y - \sqrt{E})\ (\sqrt{A}\,xy - \sqrt{B}\,x - \sqrt{D}\,y - \sqrt{E})\ ;$$
$$(\sqrt{A}\,xy + \sqrt{B}\,x - \sqrt{D}\,y - \sqrt{E})\ (\sqrt{A}\,xy - \sqrt{B}\,x + \sqrt{D}\,y - \sqrt{E})\,.$$

Par suite, dans le cas actuel, si les covariants L_x^4; M_y^4, N_z^4, P_u^4 sont des carrés les covariants $(x^2,\ y^2)$; $(x^2,\ z^2)$ etc. sont décomposables en facteurs bilinéaires. Or, il est aisé de voir que si f peut être ramenée à la forme

$$a x_1 y_1 z_1 u_1 + b x_2 y_2 z_2 u_2\ ,$$

chacun de ces covariants est décomposable en facteurs linéaires.

Comme exemple de la représentation d'une forme quadrilinéaire à covariants quartiques carrés, nous prendrons la figure fondamentale du troisième rang (*Grundgebilde dritter Stufe*), formée par tous les plans de l'espace.

Soient quatre droites X, Y, Z, U, non situées deux à deux dans le même plan. Les plans de l'espace marqueront sur ces quatre droites des groupes de points ξ, η, ζ, υ, déterminés par trois d'entre eux.

Sur X, prenons un point ξ_1; tous les plans passant par ξ_1, marquent sur Y, Z, U, une homographie H_2^3.

Prenons un point ξ_2; nous aurons de même une H'^3_2.

Ces deux homographies ont des groupes communs qui appartiennent à un H_1^3.

Nous pouvons observer que ces groupes représentent les covariants (z^2, y^2); (y^2, u^2); (u^2, z^2).

Au point η_1, par exemple, correspond le couple marqué par le plan ξ_1, ξ_2. η_1.

Mais nous pouvons aussi mener par η_1 une droite unique, s'appuyant sur Z et U. Soit δ cette droite, il est visible que l'on peut mener les plans (ξ_1, δ) (ξ_2, δ).

On a donc les deux déterminations obtenues en menant un plan par ξ_1 ξ_2 η_1 et le couple marqué par δ.

Pour que ces deux déterminations coïncident, il faut, évidemment que δ s'appuie sur les quatre droites X, Y, Z, U.

Ces droites sont au nombre de deux. Désignons-les par Δ_1, Δ_2.

Elles marquent, comme on le voit, sur les quatre supports, les points de ramification, et ici, les covariants L_x^4, M_y^4, N_z^4, P_u^4, sont des carrés.

Or il est visible, actuellement, que les covariants biquadriques sont décomposables en facteurs bilinéaires.

D'un côté, nous avons en l'ensemble des droites qui s'appuient sur Y, Z, U. Ce sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. Elles marquent sur deux directrices quelconques, Y et Z, par exemple, deux séries homographiques.

D'un autre côté, nous aurons les groupes marqués par les plans passant par X.

Ces groupes détermineront des séries de droites, génératrices d'un second hyperboloïde et, par suite, donneront deux nouvelles séries homographiques.

Nous présenterons plus loin d'autres remarques sur ce sujet. Supposons au contraire que les quatre droites X, Y, Z, U, forment un quadrilatère gauche dont nous désignerons les sommets par α, β, γ, δ.

Les deux droites qui s'appuient à la fois sur X, Y, Z, U, sont ici $\alpha\beta$; $\gamma\delta$.

L'hyperboloïde ayant pour directrices Y, Z, U se décompose ici dans les deux plans YZ, ZU.

L'homographie marquée sur Y, Z par les génératrices de cet hyperboloïde est évidemment décomposable.

Il en est de même de l'homographie marquée par les plans passant par X.

La forme quadrilinéaire peut se mettre sous la forme

$$a x_1 y_1 z_1 u_1 - b x_2 y_2 z_2 u_2 .$$

Ceci correspond d'ailleurs, comme on le voit, au théorème connu relatif aux segments marqués par un plan quelconque sur les côtés d'un quadrilatère gauche.

IV. Occupons-nous maintenant des cas où la forme quadrilinéaire donnée se décompose en facteurs plus simples, puisque, dans ces différents cas, la théorie sera terminée, étant ramenée à celles de formes étudiées déjà.

Dans cette étude, le principal rôle est joué par les covariants biquadriques.

Supposons, par exemple, que la forme f ait un facteur linéaire $\alpha x_1 + \beta x_2$.

Il est clair, alors, qu'à un point y_1, y_2, correspond une homographie H_2^3 décomposable.

Rappelons-nous ici ce que nous avons démontré pour la forme trilinéaire

$$f = a_x a'_y a''_z .$$

Si cette forme a un facteur linéaire $\alpha x_1 + \beta x_2$, le discriminant Δ est nul.

De plus

$$\sigma_x^{\ 2} = (a'b')(a''b'')\, a_x\, b_x = m\, (\alpha x_1 + \beta x_2)^2 \ ;$$

$$\sigma_y^{\ 2} = (a''b'')\,(ab)\, a_y'\, b_y' \equiv 0 \ ;$$

$$\sigma_z^{\ 2} = (ab)\,(a'b')\, a_z''\, b_z'' \equiv 0 \ .$$

En outre, comme nous l'avons fait voir, ces conditions, qui sont nécessaires, sont aussi suffisantes (*).

Il en resultera, actuellement, que les covariants

$$(y^2,\ z^2) \equiv 0 \ , \ (y^2,\ u^2) \equiv 0 \ , \ (y^2,\ x^2) = \text{carré}.$$

D'ailleurs nous avons aussi démontré, pour les formes trilinéaires, que l'évanouissement d'un des covariants σ entraîne nécessairement celui d'un des deux autres.

Il en résulte que parmi les covariants biquadriques, il y en aura nécessairement deux qui s'annulleront à la fois.

Nous allons montrer que ces conditions sont suffisantes.

(*) *Mémoires de l'Acad. Roy. de Belg.*, t. XLII.

Soit

$$
\begin{aligned}
(z_1^2 u^2) = \; & z_1^2 \; [a_{1111}\, a_{2211}\, u_1^2 - a_{1212}\, a_{2112}\, u_2^2] \\
& + z_1^2 z_2 [t + t' - t'' - t'''] \, u_1 u_2 \\
& + z_2^2 \; [- a_{2121}\, a_{1221}\, u_1^2 + a_{2222}\, a_{1122}\, u_2^2] = 0 \, .
\end{aligned}
$$

Il s'annulle pour

$$a_{2211} = 0 \,, \quad a_{1122} = 0 \,, \quad a_{2112} = 0 \,, \quad a_{1221} = 0 \,, \quad t = t' \,.$$

On vérifie bien aisément que

$$(z^2, \; y^2) = 0 \,,$$

et que

$$
\begin{aligned}
(z_1^2 x^2) & \equiv \left(\sqrt{a_{1111}\, a_{1212}}\, z_1 x_1 + \sqrt{a_{2222}\, a_{2121}}\, z_2 x_2\right)^2 \\
& = m \,(a_{1212}\, x_1 z_1 + a_{2222}\, x_2 z_2)^2 \,.
\end{aligned}
$$

Or, en introduisant ces hypothèses dans f, on trouve

$$f = \frac{1}{a_{2222}} (a_{1212}\, x_1 z_1 + a_{2222}\, x_2 z_2)\,(a_{2121}\, y_1 u_1 + a_{2222}\, y_2 u_2) \,.$$

Considérons encore, pour ne laisser aucun doute à cet égard, le covariant $(x^2, \; y^2)$ sous sa forme déduite de l'expression générale de f.

On a

$$
\begin{aligned}
(x_1^2 y^2) = x_1^2 & \left[\begin{aligned}
& (a_{1111}\, a_{1122} - a_{1121}\, a_{1112})\, y_1^2 \\
& + (a_{1111}\, a_{1222} - a_{1121}\, a_{1212} + a_{1211}\, a_{1122} - a_{1221}\, a_{1112})\, y_1 y_2 \\
& + (a_{1211}\, a_{1222} - a_{1212}\, a_{1221})\, y_2^2
\end{aligned} \right] \\
+ x_1 x_2 & \left[\begin{aligned}
& (a_{1111}\, a_{2122} - a_{1121}\, a_{2112} + a_{2111}\, a_{1122} - a_{1112}\, a_{2121})\, y_1^2 \\
& + (a_{1111}\, a_{2222} - a_{2212}\, a_{1121} + a_{1211}\, a_{2122} - a_{2112}\, a_{1221} \\
& + (a_{2111}\, a_{1222} - a_{1212}\, a_{2121} + a_{2211}\, a_{1122} - a_{1112}\, a_{2221})\, y_1 y_2 \\
& + (a_{1211}\, a_{2222} - a_{2212}\, a_{1221} + a_{1222}\, a_{2211} - a_{2221}\, a_{1212})\, y_2^2
\end{aligned} \right] \\
= x_2^2 & \left[\begin{aligned}
& (a_{2111}\, a_{2122} - a_{2112}\, a_{2121})\, y_1^2 \\
& + (a_{2222}\, a_{2111} - a_{2212}\, a_{2121} + a_{2122}\, a_{2211} - a_{2112}\, a_{2221})\, y_1 y_2 \\
& + (a_{2222}\, a_{2211} - a_{2212}\, a_{2221})\, y_2^2
\end{aligned} \right] .
\end{aligned}
$$

Or, de légers calculs montrent que si ce covariant est identiquement nul, on a, par exemple, les relations suivantes:

$$\frac{a_{1111}}{a_{1121}}=\frac{a_{1112}}{a_{1122}}=\frac{a_{1211}}{a_{1221}}=\frac{a_{1212}}{a_{1222}}=\frac{a_{2111}}{a_{2121}}=\frac{a_{2112}}{a_{2122}}=\frac{a_{2211}}{a_{2221}}=\frac{a_{2212}}{a_{2222}}=\lambda\,.$$

Dans ces cas, f est évidemment divisible par

$$\lambda z_1 + z_2\,.$$

Cette discussion, sur la forme générale, n'est pas superflue, car nous pouvons observer que si la forme quadrilinéaire a un facteur linéaire, son expression canonique n'est plus possible. D'ailleurs cette forme n'aurait plus aucune utilité.

Lorsque f est décomposable en deux facteurs bilinéaires, la forme canonique est toujours possible, et cela d'une infinité de manières.

Ceci n'infirme en rien les résultats que nous avons donnés ni la généralité de la méthode suivie, puisque les covariants sextiques employés deviennent identiquement nuls et que la solution est alors illusoire comme cela devait être.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cette étude puisque nôtre intention n'est pas d'épuiser la théorie des formes quadrilinéaires, mais plutôt de faire connaître, dans ses points essentiels, la méthode que nous avons suivie; le développement de toutes ces questions excéderait les limites d'une simple note et exigerait plus de temps que nous n'en avons actuellement. Peut-être essaierons-nous quelque jour de traiter ce point d'une manière plus complète.

Il nous suffit d'avoir fait voir que les théories relatives à la décomposition des formes quadrilinéaires en facteurs contenant moins de quatre séries de variables reposeront, en dernière analyse, sur la considération des covariants biquadriques.

V. Reprenons encore ces covariants.

Soient, par exemple,

$$\begin{aligned}(x_1^2 y^2) = {} & x_1^2\left[a_{1111}a_{1122}y_1^2 - a_{1212}a_{1221}y_2^2\right]\\ & + x_1x_2\left[t+t'-t''-t'''\right]y_1y_2\\ & + x_2^2\left[-a_{2121}a_{2112}y_1^2 + a_{2222}a_{2211}y_2^2\right],\end{aligned}$$

et

$$(x_1^2 z^2) = x_1^2[a_{1111} a_{1212} z_1^2 - a_{1122} a_{1221} z_2^2] + x_1 x_2 [t + t''' - t' - t''] z_1 z_2$$
$$+ x_2^2 [- a_{2211} a_{2112} z_1^2 + a_{2222} a_{2121} z_2^2].$$

Si nous regardons ces deux covariants comme quadratiques par rapport à x, leur invariant commun est:

$$y_1^2[- 2 a_{1111} a_{2112} (t' + t''') z_1^2 + 2 a_{1122} a_{2121} (t + t'') z_2^2]$$
$$- y_1 y_2 [(t - t'')^2 - (t' - t''')^2] z_1 z_2$$
$$+ y_2^2 [2 a_{2211} a_{1212} (t + t'') z_1^2 - 2 a_{2222} a_{1221} (t' - t''') z_2^2].$$

Nous obtiendrons, de cette façon, six nouveaux covariants biquadriques, car en éliminant x entre $(x^2,\ y^2)$ et $(x^2,\ z^2)$, par la méthode que nous venons de suivre, on arrive à la même forme qu'en éliminant u entre $(u^2,\ y^2)$, $(u^2,\ z^2)$.

Ces covariants peuvent au reste s'obtenir d'une autre manière. Considérons le covariant $m_y'^2 n_z''^2$ et soit $M_y^2 N_z^2$ celui que nous venons d'obtenir.

Soit $$m_y'^2 n_z''^2 = \mu_y'^2 \nu_z''^2 = \ldots$$

on peut former le nouveau covariant

$$(m'\mu')(n''\nu'')\, m_y' \mu_y' n_z'' \nu_z''.$$

on peut facilement vérifier que

$$(ab)(a'b')(a''b'')(a'''b''')\, m'^2_y n''^2_z - (m'\mu')(n''\nu'')\, m_y' \mu_y' n_z'' \nu_z'' = M_y^2 N_z^2.$$

Les six covariants, que nous venons de former, se ramènent, par suite, aux six suivants:

$$(p\varpi)(q'\chi')\, p_x \varpi_x q_y' \chi_y'\,; \qquad (r\rho)(s''\sigma'')\, r_x \rho_x s_z'' \sigma_z''\,;$$
$$(t\tau)(v'''\nu''')\, t_x \tau_x \nu_u''' v_u'''\,; \qquad (m'\mu')(n''\nu'')\, m_y' \mu_y' n_z'' \nu_z''\,;$$
$$(l'\lambda')(k'''\varkappa''')\, l_y' \lambda_y' k_u''' \varkappa_u'''\,; \qquad (g''\gamma'')(h'''\eta''')\, g_z'' \gamma_z'' h_u''' \eta_u'''.$$

Ces six covariants donnent, comme ceux que nous avions rencontrées à l'origine, naissance à douze covariants quartiques L'^4_x, M'^4_y, N'^4_z, P'^4_u, etc. (*).

(*) Nous n'écrivons qu'une seule des trois séries de ces covariants. D'après les relations données, p. 316-317, ces covariants diffèrent par le terme qui contient l'invariant U.

Ces covariants sont assez importants au point de vue géométrique.

Nous avons vu plus haut que dans chaque série, il existe, en général, quatre points de ramification.

A ces points correspondent des points doubles qui sont représentés par les équations

$$L'^4_x = 0\,,\quad M'^4_y = 0\,,\quad N'^4_z = 0\,,\quad P'^4_u = 0\,,\ \text{etc.}$$

Pour le faire voir, il suffira de démontrer le théorême analogue pour la forme biquadrique.

Supposons encore que cette dernière ait été mise sous la forme réduite

$$a_x^2 a_y'^2 = x_1^2(A y_1^2 - B y_2^2) + 2 x_1 x_2 C y_1 y_2 + x_2^2(-D y_1^2 + E y_2^2)\ .$$

Son covariant quartique par rapport aux x devient:

$$A B x_1^4 + (C^2 - A E - B D) x_1^2 x_2^2 + D E x_2^4 \qquad \ldots (1).$$

En éliminant x_1, x_2 entre ces deux formes, on trouve, comme expression du résultant:

$$\left[\begin{array}{l} A C^2 D y_1^4 + B C^2 \Sigma y_2^4 \\ + (A E C^2 + B D C^2 - A^2 E^2 - B^2 D^2 + 2 A B D E) y_1^2 y_2^2 \end{array}\right]^2 \ldots (2).$$

Or

$$\begin{aligned}(a\alpha)(a'\alpha') a_x \alpha_x a_y' \alpha_y' &= x_1^2 [A C y_1^2 + B C y_2^2] \\ &+ 2 x_1 x_2 [A E - B D] y_1 y^2 + x_2^2 [D C y_1^2 + E C y_2^2]\ .\end{aligned}$$

Le covariant quartique de cette forme, par rapport aux y, est bien l'expression que nous venons de rencontrer.

Nous aurons aussi le covariant

$$A D y_1^4 + (C^2 - A E - B D) y_1^2 y_2^2 + B E y_2^4 \qquad \ldots (3).$$

Formons son hessien:

$$\left.\begin{array}{l} H_x^4 = 2 A D (C^2 - A E - B D) y_1^4 \\ + \left| 12 ABDE - (C^2 - AE - BD)^2 \right| y_1^2 y_2^2 + 2 BE (C^2 - AE - BD y_2^4) \end{array}\right\} (4).$$

La forme $a_x^2 a_y'^2$ possède, comme Clebsch l'a fait voir, un invariant $(a\alpha)^2 (a'\alpha')^2$.

Soit U cet invariant.

Pour la forme réduite, on a :

$$U = 2C^2 + AE + BD .$$

Des expressions précédentes on déduira, en désignant par ψ la racine carrée de l'expression [2] et par φ l'expression [3],

$$3\psi - U\varphi = \frac{1}{2}H^4_y .$$

Le covariant φ est un carré lorsque

$$(C^2 - AE - BD)^2 - 4ABDE = 0 .$$

ou

$$C^4 + A^2E^2 + B^2D^2 - 2C^2(AE + BD) - 2ABDE = 0 .$$

En tenant compte de cette relation, le covariant ψ devient

$$C^2\left(AD\,y_1^4 + (C^2 - AE - BD)\,y_1^2 y_2^2 + BE\,y_2^4\right) .$$

Par suite lorsque le covariant φ est un carré, il devient identique, à un facteur près, au covariant ψ.

Cela pouvait d'ailleurs se déduire de la relation

$$3\psi - U\varphi = \frac{1}{2}H^4_y .$$

En effet, si φ est le carré d'une expression quadratique, φ ne peut différer de son hessien que par un facteur, et il en sera de même de ψ.

Appliquons les différents résultats que nous venons d'obtenir à la forme quadrilinéaire.

Les douze covariants quartiques

$$L'^4_x,\ M'^4_y,\ N'^4_z,\ P'^4_u,\ \text{etc.}$$

ont les mêmes invariants, quatre à quatre.

Ils sont réductibles à des fonctions linéaires de

$$L_x^4,\ M_y^4,\ N_z^4,\ P_u^4$$

et de leurs hessiens respectifs.

Lorsque ces covariants L_x^4, M_y^4, etc. sont des carrés, ils sont identiques, à un facteur près, aux covariants

$$L_x^4,\ M_y^4,\ N_z^4,\ P_u^4.$$

Cette dernière conséquence était, en quelque sorte, vérifiée déjà dans l'exemple que nous avons choisi comme représentation d'une forme quadrilinéaire à covariants quartiques carrés.

En effet, il était évident que les deux droites qui s'appuient à la fois sur les quatre supports X, Y, Z, U marquaient, en même temps, sur ces droites, les points de ramification et les points doubles.

VI. Avant d'aller plus loin, occupons-nous des invariants.

Nous avons remarqué déjà que les quatre covariants L_x^4, M_y^4, N_z^4, P_u^4 ont deux invariants communs i et j.

Les covariants L'^4_x, M'^4_y, N'^4_z, P'^4_u n'amèneront aucun invariant nouveau.

Ainsi que l'a fait observer CLEBSCH, et après lui M. CAPELLI, chaque forme biquadrique a trois invariants.

Nous pouvons vérifier aisément que les deux covariants (x^2, y^2); (u^2, z^2) ont les mêmes invariants.

Désignons par

$$U_1,\ V_1,\ W_1;\ U_2,\ V_2,\ W_2;\ U_3,\ V_3,\ W_3,$$

les neuf covariants que donnent, par suite, les douze covariants biquadriques que nous avons eu à considérer jusqu'ici.

Pour la forme canonique, nous aurons

$$U_1 = p + 12\,(tt' + t''t''')\ ; \qquad V_1 = (t + t' - t'' - t''')\,(tt' - t''t''')\ ;$$
$$W_1 = p^2 - 48\,(tt' + t''t''')^2 - 8p\,(tt' + t''t''')\ ;$$
$$U_2 = p + 12\,(tt'' + t't''')\ ; \qquad V_2 = (t + t'' - t' - t''')\,(tt'' - t't''')\ ;$$
$$W_2 = p^2 - 48\,(tt'' + t't''')^2 - 8p\,(tt'' + t't''')\ ;$$
$$U_3 = p + 12\,(tt''' + t't'')\ ; \qquad V_3 = (t + t''' - t' - t'')\,(tt''' - t't'')\ ;$$
$$W_3 = p^2 - 48\,(tt''' + t't'')^2 - 8p\,(tt''' + t't'')\ .$$

Il est facile de voir que

$$U_1 + U_2 + U_3 = 3\,(t + t' + t'' + t''')^2$$
$$= \tfrac{3}{4}\left|\,(ab)\,(a'b')\,(a''b'')\,(a'''b''')\,\right|^2 = \tfrac{3}{4}\,S^2\ .$$

De plus

$$3\,W_1 + U_1^2 = 3\,W_2 + U_2^2 = 3\,W_3 + U_3^2 = 4\,i\ .$$

j s'exprime d'ailleurs, au moyen des invariants précédents.

Les relations précédentes réduisent, on le voit, les douze invariants que nous venons de signaler aux invariants

$$V_1,\ V_2,\ V_3;\ U_1,\ U_2,\ i,\ S.$$

Nous reprendrons prochainement cette théorie au point où nous la laissons actuellement et nous nous occuperons spécialement, dans une seconde note, des covariants quadrilinéaires de la forme.

Liége le 3 Février 1882.

Il Socio Comm. Angelo Genocchi presenta ancora e legge, a nome dell'Autore, sig. Ingegnere Ottavio Zanotti-Bianco, le seguenti

NOTE BIOGRAFICHE

INTORNO

A

GIOVAN FRANCESCO PEVERONE

MATEMATICO CUNEESE (1).

Scarse ed incerte notizie si hanno, come già scriveva nel 1873 Domenico Promis, intorno a quel dotto gentiluomo e matematico Cuneese, che fu Giovan Francesco Peverone. Avendone potuto avere alcune ignorate dagli scrittori (2) che finora ebbero a parlarne, ho creduto non inutil cosa il raccogliere in questa nota quanto si conosce della vita di esso.

---

(1) Debbo qui avvertire, che tutte le notizie finora inedite, intorno al Peverone, io le debbo alla squisita cortesia del Cav. Lorenzo Bertano segretario Comunale della Città di Cuneo, che istituì per me negli archivii di quella città intelligenti e fruttuose indagini, delle quali sento grato obbligo di esternargli qui le più vive grazie.

(2) Della Chiesa Francesco Agostino — *Catalogo di tutti li scrittori Piemontesi.* — Torino 1614, pag. 38.

Della Chiesa — *Corona reale di Savoia.* — Torino 1777, edizione esattamente ristampata secondo quella degli anni 1655 e 1657, pag. 187, 190.

Rossotti — *Syllabus Scriptorum Pedemontii.* — Mondovì, 1667, pag. 216.

Partenio (Padre Giuseppe Mariani) — *Secoli della Città di Cuneo.* — Mondovì 1750, pag. 180.

Tiraboschi — *Storia della letteratura Italiana*, tomo VII, parte II. — Milano 1824, pag. 773.

Casalis — *Dizionario geografico storico statistico* ecc. — Torino 1839, vol. V, pag. 746 e 790.

Libri — *Histoire des mathématiques en Italie*, tomo III, pag. 159; tomo IV, pag. 99.

Giovanni Battista Peverone nacque in Cuneo nel 1509 da Gaspare Peverone, non si conosce il nome della madre, non essendosi potuto ritrovare l'atto di nascita di esso. La data della nascita del Peverone viene qui data per la prima volta, ed è desunta da un codice conservato nella biblioteca civica di Cuneo, dal quale qui trascriviamo il passo, che al Peverone si riferisce. Questo codice è intitolato « *Miscellanea storica* » ms. di Gio. Francesco Corvo, « fu consultato in principio dello scorso secolo dal Partenio e fu rinvenuto sul banco di un tabaccaio dove stava per essere fatto a brandelli. A pag. 293 di esso leggesi quanto segue:

« Morte del Sig. Gio. Francesco Peverone dell'anno 1559 7 Agosto.

« Con grandissimo duolo delli cittadini di Cunio massime di poveri è passato da questa presente vita la fu felice memoria del Signor Gio. Francesco Peverone cittadino di Cunio qual era d'età d'anni 50, huomo veramente devoto caritatevole pietoso verso de tutti li poveri virtuoso et haveva li sette arti liberali, non gl'entrava in Cunio persona virtuosa che non la volesse raccogliere in casa sua per dimostrargli che ancora lui era virtuoso, ha fatto un libro d'Abbacho, il qual si contiene le misure de vini, grani, frui, terre et altre cose simili. Il qual libro è assai manifesto da tutti, et per esser huomo di grandi facoltadi l'animo suo fu di andarsene ad habitar nella città di Milano per

---

Promis (Domenico) — *Monete e medaglie Italiane* - Miscellanea di Storia Italiana vol. XIII, ed in fascicolo separato. — Torino 1873.

Riccardi — *Biblioteca Matematica Italiana.* — Modena 1873-76, parte prima, vol. II, pag. 265-66.

Riccardi Pietro — *Cenni sulla Storia della Geodesia in Italia.* Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, tomo X. — Bologna 1879, pag. 479, 51 della ristampa separata.

Gouraud — *Histoire du Calcul des probabilités.* — Parigi 1848, pag. 3.

Todhunter — *History of the mathem. theory of the Probability.* Cambridge 1865, pag. 1.

Boncompagni — *Dissertazione intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel* 1478. Atti dell'Accademia dei Nuovi Lincei, anno XVI, pag. 391.

Zanotti Bianco — *Sopra due passi della storia della teoria matematica delle probabilità del signor Todhunter.* — Giornale di Matematiche del Prof. Battaglini. Vol. XVI. Napoli 1878.

Anonimo — In un opuscolo intitolato *De situ, origine, incrementi, ac statu Cuneensis urbis totiusque circumiecti agri frequentia ubertateque compendiaria ad trutinam historicam enarratio.* Cunej, CIↃ . IↃↃ. LXI, pag. 9.

starvi con piacer, et come quello che cercava di habitar dove sono gli uomini virtuosi, il qual finì suva vita et fu sepolto con grandissimi honori et essequie in Millano nella cappella di Sancto Victore appresso porta Vercellina, et finalmente era gentilluomo et possedeva molti beni nella città di Cunio et finagio. Nel qual suo ultimo testamento fatto l'anno 1557 alli tre di magio si ricordò delli poveri quali gli lasciò scutti mille, per dar agiuto di far un monte di pietà come se puoi fatto et pagato per suoi eredi universali ».

Dal citato testamento che fu redatto in Cuneo alli tre maggio del 1557, cioè durante il famoso assedio sostenuto dalla città di Cuneo contro i Francesi e che si conserva nell'Archivio dell'Ospedale di Cuneo, risulta che, contrariamente a quanto affermava il Promis, che non conosceva questo documento, il Peverone prese moglie, e questa fu una certa Anna, di cui non vien dato il cognome. Dal testamento non appare che Peverone lasciasse figli maschi, vi sono nominate tre figlie.

L'Anna Peverona, il cui nome leggesi sul rovescio della medaglia, appartenente alla collezione di S. M. il Re ed illustrata da Domenico Promis, e che è incisa sul frontispizio dei due trattati del nostro matematico, è veramente sorella ed erede universale di questo, fu moglie di Sebastiano Corvo padre dell'autore del manoscritto della Biblioteca di Cuneo.

Il Peverone occupò nella sua città nativa cariche amministrative, importanti. Appare infatti dagli atti municipali di Cuneo (14 Luglio 1543), che egli fu consigliere Comunale, eletto poi il 7 Settembre 1549 il primo dei due sindaci. Il 13 Dicembre dello stesso anno egli fa parte di una commissione incaricata di riferire sopra la domanda dei fratelli Papale di derivare una bealera di 22 piedi dalla Stura. — Un atto del 6 Gennaio 1550 ce lo mostra non più sindaco, ma eletto *de Consilio Sapientum*, che corrisponde all'attuale Giunta. Negli anni 1551-52-53, gli atti municipali ce lo fanno credere assente da Cuneo. Il 30 Marzo 1554 Peverone è fra gli eletti *ad causas belli* e gli viene assegnato l'incarico di eseguire riparazioni e fortificazioni. Questi varii incarichi, oltre che alla fiducia da' suoi concittadini accordata al Peverone, ci additano la voce che egli doveva avere di dotto e perito ingegnere civile e militare. Nel 1557, anno del suo testamento, noi vediamo Peverone prender parte nella difesa di Cuneo, in quel memorando assedio, nel quale i Cuneesi condotti dal

Conte Carlo di Lucerna, già riputato professore di Leggi nell'Università di Padova, fecero, ad esempio della moglie stessa del loro capo, prodigi di valore, costringendo il Maresciallo di Brissac, duce dei Francesi, a levare verso la fine di Giugno l'assedio.

Il riportato brano del manoscritto Corvo ci apprende che il Peverone si recò ad abitar Milano, non ci dice in quale anno: dal manoscritto apprendiamo invece che morì in quella città addì 7 Agosto 1559, e che vi fu sepolto nella chiesa di San Vittore presso porta Vercellina. Quella chiesa, ora demolita, apparteneva ai frati Cappuccini. Le ricerche da me istituite a Milano per rintracciare qualche notizia della morte o della sepoltura di Peverone riuscirono completamente infruttuose.

Peverone morendo lasciò, a tenore del suo testamento, « *tutti li soi disegni et pitture che si trovaranno in casa* a Giovanni Aloysio Corvo priore di S. Ambrogio; i suoi libri latini ad Onorato Lascaro della Briga; a Gio. Antonio Codacio, « *tutti i libri volgari, medaglie et istrumenti matematici et arme* »; a Bartolomeo Pasquale, nominato anche nel trattato di Geometria « *tutti li soi instrumenti musicali di fiàto et corda* ».

Della sua non comune dottrina matematica ci lasciò Peverone testimonii due trattati l'uno di Aritmetica e l'altro di Geometria, che vanno sempre legati assieme. Di essi si hanno due edizioni fatte in Lione da Giovanni di Tornes negli anni 1558 (il Promis scrive erroneamente 1548) e 1581. Di quest'ultima edizione ne posseggono un esemplare la Biblioteca Nazionale di Torino, e la Biblioteca Civica di Cuneo, la quale, al pari della Biblioteca Estense, e del chiarissimo Professore Pietro Riccardi, possiede anche l'edizione del 1558. L'esemplare posseduto dalla biblioteca Estense fu illustrato dal Principe Buoncompagni nella sua dissertazione citata in nota.

Per quanto di notevole si contiene in questi due trattati matematici del Peverone, amo riferirmi a quanto ne dissero il Riccardi, il Libri, il Todhunter, il Gourand ed il Buoncompagni, e l'autore stesso di questa nota ai luoghi citati. Questi due trattati furono al certo composti prima del 1556, giacchè la prefazione di entrambi è datata: Cuneo 1556.

Monsignor Agostino Della Chiesa, al luogo citato del suo *Catalogo di tutti li scrittori* ecc., scrive:

« Francesco Peverone di Cunio, filosofo, il quale dotò il Monte di Pietà di detto luogo, scrisse in lingua volgare due

Trattati, l'uno di Geometria, diviso in quattro libri. L'altro d'Aritmetica diviso in tre, li quali si stamparono in Lione nel 1558. Scrisse anche un libro de i pesi et misure qual sopraggiunto dalla morte non potè pubblicare ». Accanto a questo paragrafo nel detto catalogo, ordinato alfabeticamente secondo i nomi di battesimo delle persone di cui tratta, sta nella colonna intitolata « *Fiori nelli anni del Signore* » il numero 1550.

Nel luogo citato poi della *Corona Reale* il Della Chiesa scrive « Francesco Peverone gran filosofo, il quale oltre alli trattati di Geometria, d'Aritmetica, e di pesi e misure, compose anche un libro di cognizione astrologica per via di numeri, nel quale v'inserisce diversi avvertimenti di disciplina militare ». Appare da questi due passi che il Della Chiesa discendente per via femminile (dalla sorella Anna) del Peverone, potè vedere i manoscritti dei trattati dei pesi e misure e di cognizione astrologica dei quali parla; ma nessun indizio ci è lasciato del luogo ove egli li vide, per cui il ritrovarli, se pure ancora esistono, non sarà al certo agevol cosa.

Il Socio Prof. Alfonso Cossa presenta alla Classe la *Hieratite* (fluosilicato potassico), nuovo minerale da lui scoperto nei prodotti delle emanazioni dei fumaioli del gran cratere dell'Isola Vulcano. Presenta pure del Tallio metallico da lui separato con metodo elettrolitico dai prodotti succennati, e mostra saggi di allume cesico puro estratto dai prodotti della stessa località, nei quali egli ha pure rinvenuto composti solubili di zinco, di stagno e di bismuto, finora non riscontrati nelle produzioni vulcaniche.

Il Socio Cav. Giulio Bizzozero presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Livio Vincenzi, Studente in Medicina, il seguente lavoro

SULLA STRUTTURA E SUI LINFATICI

DELLA VAGINALE.

La vaginale è una delle sierose meno studiata dal lato istologico. Gli anatomici, parlando di essa, dicono che la sua struttura è identica a quella del peritoneo, e non ne dànno alcuna descrizione. Ora le ricerche fatte in questi ultimi anni dai Professori Bizzozero e Salvioli sulle sierose umane, hanno rivelato delle differenze cospicue fra le varie parti del peritoneo; perciò il dire che la struttura della vaginale è simile a quella della sierosa peritoneale, non dà alcuna nozione su di essa, non sapendo se partecipi della costituzione, ad esempio, del peritoneo che ricopre il centro tendineo del diaframma, o di altre parti, oppure se ne comprenda le diverse modificazioni.

Riguardo poi alla distribuzione linfatica nella vaginale, mentre da una parte troviamo degli anatomici, dei quali è capo il Sappey, che negano addirittura vasi linfatici alle sierose, dall'altra abbiamo il Kölliker, che attribuisce ad essa una ricca rete linfatica, però senza descriverne punto la distribuzione, e tirando questa asserzione come una conseguenza logica del fatto che il testicolo è ricchissimo di questi vasi.

Frey, Toldt e Krause spendono poche parole a proposito della struttura della vaginale; nè, per quanto io mi sappia, esistono lavori speciali sull'istologia di codesta sierosa.

Era dunque utile l'estendere le ricerche microscopiche anche alla vaginale. Io, dietro consiglio del Prof. Bizzozero, mi occupai di questo studio, ed ora ne espongo qui concisamente i risultati.

Quando si cerca di separare i diversi involucri del testicolo, e di scoprire la vaginale, si prova difficoltà nell'allontanare la tonaca eritroidea e la membrana fibrosa comune dalla sierosa. In alcuni punti riesce affatto artificiale la separazione e si può dire che la vaginale fa corpo coi tessuti circostanti. Sono lasse le aderenze in tutta la parte che corrisponde alla porzione superiore del testicolo e testa dell'epididimo: nel rimanente è unita alle tonache esterne.

Scoperta la vaginale, noi osserviamo come essa non presenti dappertutto un eguale spessore. È sottilissima in corrispondenza del cul di sacco esterno: è assai grossa nella porzione parietale interna.

Coll' esame ad occhio nudo vediamo numerosi fasci connettivi, che, decorrendo in varie direzioni e intrecciandosi, dànno alla sierosa un aspetto reticolato.

Sottoponendo all'esame microscopico prima dei lembi, poi delle sezioni verticali, possiamo distinguere i diversi strati già descritti nelle altre sierose. Partendo dalla parte superficiale troviamo:

L'endotelio - la membrana limitante - lo strato di sostegno - il corpo della sierosa e il connettivo sottosieroso.

Passiamo ora allo studio microscopico delle diverse parti:

L'endotelio risulta formato da cellule che constano di una lamina anista, su cui sta applicato il nucleo attorniato da protoplasma. Nelle cellule si osservano costantemente delle goccie di aspetto brillante e di color giallastro. Queste goccie non scompaiono nè con l'alcool assoluto, nè col cloroformio: si colorano in bruno trattate con una soluzione di acido osmico (0,50 p. $^{0}/_{0}$), (fig. 1^{a}), e prendono una tinta color mogano quando si sottoponga l'endotelio all'azione della tintura di iodio e acido solforico. — Le cellule endoteliche si mostrano variamente configurate e di diversa grandezza. Alcune hanno forma poligonale, altre fusiforme o romboidale. Alcune hanno la grandezza di 10-15 μ, mentre altre raggiungono 30-35 μ. Queste ultime presentansi come larghe piastre, e di figura assai irregolare. Anche in questo endotelio potei osservare delle cellule che mandano dei prolungamenti fra le piastrine endoteliche vicine, e talora si insinuano al disotto di esse, come quelle che da Bizzozero e Salvioli vennero descritte nelle altre sierose.

Applicato alla piastrina sta il nucleo di forma ovalare, contenente diversi nucleoli. Spesso accade di vedere il nucleo a forma di rene, o di cifra otto, o a semiluna, come appunto ha descritto il Kölliker, ma queste figure dipendono da alterazioni cadaveriche. Talora troviamo che in una medesima cellula sono contenuti due nuclei, senza che nelle cellule vicine si abbiano fasi di proliferazione, e quindi presuppongano un'infiammazione produttiva.

Le piastrine endoteliche si giustapongono in maniera da non lasciare in nessun punto alcuna apertura. Osservando dei larghi lembi d'endotelio, si scorgono qua e là delle figure ovalari o rotonde che risaltano sulle forme poligonali delle cellule circostanti. Queste figure, che potrebbero prendersi a tutta prima come lacune, e che assomigliano agli stomi descritti da Recklinghausen nel peritoneo, sono date da cellule o che mancano del nucleo, o che lo hanno trasparentissimo. Colorando l'endotelio con la tintura di jodio possiamo assicurarci che in quei punti esiste la piastrina endoteliale, e che quindi non vi è alcuna interruzione nella continuità.

Esaminando l'endotelio a piccolo ingrandimento vediamo come in alcuni punti le cellule formano un mosaico assai regolare, in altri si dispongono a giri concentrici, ed in altri formano delle papille, che si mostrano, guardate di fronte, come ammassi cellulari di forma rotonda. Come già osservarono Bizzozero e Salvioli nella pleura, ho potuto anche nell'endotelio della vaginale vedere delle strisce ondulose, ramificate, che spiccano sul resto per la loro trasparenza (fig. 2ª). Queste strisce risultano formate da cellule, che hanno il nucleo periferico ed in opposta direzione, e lasciano le linee d'adesione delle piastrine con scarso protoplasma.

L'endotelio poggia sulla *limitante* (Bizzozero) membrana anista, ora finamente granulare, ora fibrillare. Questa membranella è strettamente unita allo strato di sostegno, e riesce difficile isolarla senza che le restino aderenti o fibre elastiche o elementi connettivi. Per colorirla mi servii dell' imbibizione coll'eosina, e talora della tintura di jodio: osservai sempre che in qualunque punto della sierosa la prendessi ad esaminare, si mostrava *continua*. Dunque essa divide gli strati sottoposti, e, come vedremo, la rete linfatica dal cavo della sierosa.

Aderente alla limitante sta lo strato di sostegno, il quale risulta di fasci connettivi, di fibre muscolari liscie, di fibre elastiche e cellule connettive.

I fasci connettivi hanno decorso rettilineo, e si intrecciano formando delle lacune romboidali. Le fibre elastiche trovansi alla parte più superficiale dello strato di sostegno, e formano delle vere reti elastiche, specialmente nei punti ove la sierosa è assai sottile. In mezzo ad esse, e proprio subito al disotto della limitante, troviamo numerosi elementi connettivi, di figure assai diverse. Alcune hanno un corpo cellulare fusato, dalle cui estremità partono dei prolungamenti, che hanno un decorso tortuoso; altre si possono assomigliare ad un Y (ipsilon) di cui le branche terminali si prolungano decorrendo a zig zag e ramificandosi (fig. 3ª).

Nello strato di sostegno troviamo poi delle fibrocellule muscolari. Questi elementi sono in continuazione con fasci di fibre muscolari liscie, che decorrono nel corpo della sierosa. Essi sono relativamente piccoli ed hanno forma fusata. Alcune volte osserviamo che si biforcano e ciò avviene là dove un fascio di fibrocellule si dirama in fasci secondarii.

Questi elementi mancano affatto nella porzione viscerale.

I fasci connettivi dello strato di sostegno trovansi in diretta continuazione col corpo della sierosa. Questo è diversamente costituito a seconda del punto ove l'esaminiamo. Nella pagina viscerale risulta di fasci connettivi, con decorso longitudinale, quasi rettilineo, e da fibre elastiche: nella parietale invece abbiamo numerose fibrocellule muscolari, e maggior ricchezza di connettivo.

Le fibrocellule sono assai copiose specialmente nella porzione parietale esterna, ove si radunano in fasci abbastanza cospicui. Questi elementi non hanno nulla a che fare con le fibre muscolari liscie descritte dal Kölliker e dal Beraud, le quali non appartengono alla vaginale, ma alle tonache circostanti.

I fasci connettivi (pagina parietale) hanno decorso ondulato, irregolare; in alcuni punti però osserviamo che decorrono parallelamente fra loro e si anastomizzano mediante piccole fibrille trasversali. In questo modo rimangono limitati degli spazi, che ricordano molto quelli, che trovansi nel corpo della sierosa nel peritoneo diaframmatico: ma mentre là trovansi in rapporto con fori della limitante, e con una disposizione particolare dello strato di sostegno, qui la limitante è continua e lo strato di sostegno ha l'istessa disposizione come negli altri punti della sierosa.

In mezzo ai fasci connettivi e muscolari trovansi inoltre cellule connettive, e fibre elastiche.

Al di sotto di questo strato trovasi del connettivo, che segna il limite esterno della sierosa. Esso manca affatto dove la vaginale contrae aderenze con le tonache esterne; nel resto è formato da connettivo lasso, e cellule connettive appiattite.

Veniamo ora alla distribuzione sanguigna, linfatica e nervosa.

Per istudiare i vasi sanguigni mi servii in alcuni casi delle iniezioni col bleu di Prussia, in generale però li esaminai direttamente approfittando dell'iniezione naturale che vi esiste. — Le arterie sono assai poco numerose e decorrono nel corpo della sierosa. Le vene, in maggior quantità, presentano un decorso assai tortuoso; e trovansi anche nello strato di sostegno (fig. 7ª). I capillari sono poco numerosi e trovansi specialmente dove si hanno cellule adipose. Talora osserviamo che le arterie terminano in un vaso che si ripiega su se stesso più volte, e che ridotto a capillare imbocca dopo breve tratto nella vena.

I vasi sono più numerosi nella pagina viscerale.

Per lo studio dei linfatici, usai delle iniezioni per puntura di bleu di Prussia. Infiggendo la cannula della siringa del Pravaz assai superficialmente sotto l'albuginea, oppure sotto la membrana che ricopre l'epididimo, riescii a fare delle iniezioni su tratti abbastanza estesi. Risultò che nella vaginale trovasi una ricca distribuzione linfatica (fig. 4ª e 5ª), e che i vasi si dispongono, come nelle altre sierose, su due strati, uno superficiale, ed uno profondo. Nel superficiale i vasi sono più numerosi, più piccoli, e con le loro frequenti anastomosi formano una rete assai fitta: nel profondo sono ampii, gozzuti e provvisti di irregolari strozzamenti.

Queste due reti sono in comunicazione fra di loro, e la rete profonda continuasi coi linfatici dell'albuginea e perciò indirettamente con quelli del testicolo. Altra comunicazione esiste pure coi numerosi linfatici dell'epididimo.

Il decorso di questi vasi varia a seconda che li esaminiamo nella pagina parietale o viscerale; in quella essi si presentano quasi rettilinei, in questa assai tortuosi e con maggiori anastomosi. Riguardo alla loro grandezza, mentre alcuni sono poco più ampi dei capillari, altri sorpassano di molto i diametri delle arterie. Osserverò per ultimo che in alcuni punti i linfatici si anastomizzano in maniera da limitare degli spazi rotondi assai regolari, simili ad alveoli (fig. 6ª).

Nelle sezioni verticali della sierosa trovai che la rete linfatica superficiale decorre in gran parte nello strato di sostegno, e che la profonda trovasi nel corpo della sierosa.

Da quanto dissi, a proposito della limitante, risulta adunque che *non* esiste comunicazione dei linfatici col cavo vaginale, e che quindi questi trovansi in condizione relativamente sfavorevole per riassorbire essudati, che in casi patologici possano raccogliervisi.

Studiai poi la distribuzione nervosa, mediante l'impregnazione di lembi di sierosa con acido osmico (0,50 p. $^0/_0$). In questo modo potei osservare che la vaginale possiede scarse fibre nervose, isolate, tortuose e che in generale seguono il decorso delle arterie. Non potei accertare nulla riguardo alla loro terminazione.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

FIGURA **1**ª Endotelio — (Ocul. 3 Obiettivo 8 Hartnack).

» **2**ª Strisce chiare che osservansi talora nell'endotelio. Preparato colorito con acido osmico (Ocul. 3 Obiet. 8 Hartnack).

» **3**ª Elementi connettivi situati sotto la limitante (Ocul. 3 Obiet. 8 Hartnack).

» **4**ª Linfatici della porzione viscerale. Vedesi un linfatico che si dirama in una rete assai fitta (Ocul. 3 Obiettivo 1).

» **5**ª Linfatici disposti su diversi strati, in corrispondenza del mesoteste (Ocul. 3 Obiettivo 4).

» **6**ª Linfatici che si anastomizzano in maniera da limitare degli alveoli (Ocul. 3 Obiettivo 4).

» **7**ª Vasi venosi (Ocul. 3 Obiettivo 4).

Fig 1

Fig 2

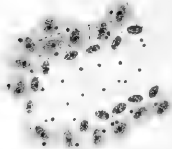


Fig 5

Fig 3

Fig 4

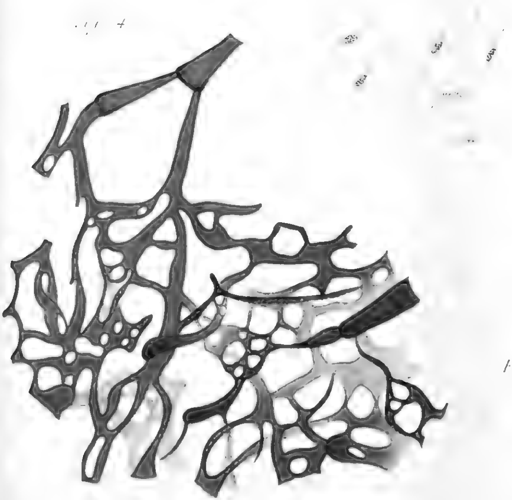
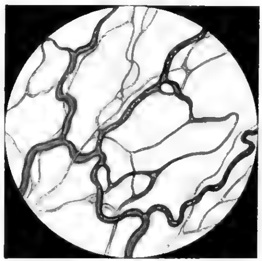


Fig 6

Fig 7



Il Socio Cav. Giulio Bizzozero presenta ancora e legge, a nome dell'Autore, sig. Dott. Daniele Rosa, Assistente al Museo Zoologico della R. Università di Torino, la seguente

NOTA

INTORNO AL

GORDIUS VILLOTI n. sp.

ED AL

G. TOLOSANUS Duj.

Il tipo dei vermi fu studiato fra noi con qualche cura solo nei gruppi che più attiravano l'attenzione sia per la loro bellezza, come è il caso per gli anellidi marini, sia pei danni che arrecano come parassiti dell'uomo o degli animali domestici. Gli altri gruppi hanno raramente formato l'oggetto di uno studio un po' completo. Ho quindi creduto utile di radunare i materiali per lo studio di queste forme, pubblicando man mano in una serie di note i risultati che sarei venuto ottenendo.

Fra le forme meno ben conosciute sono certamente da porsi i Gordii; non è che manchino affatto lavori sopra dei Gordii italiani, ma essi sono tutti piuttosto antichi e tali da non lasciar riconoscere con qualche sicurezza di quali specie trattino. Nella scorsa primavera (1881) la mia attenzione essendo stata attirata su questi vermi dall'esame che mi era occorso di fare di un *Gordius* che il Dott. G. M. Fiori aveva trovato parassita dell'uomo (1), proseguii il loro studio e venni ai risultati che qui saranno esposti.

(1) Fiori e Rosa. Un caso di parassitismo di *Gordius* adulto nell'uomo. Comunicazione alla R. Accad. di Medicina, 1881.

Le specie da me riconosciute sono due: una pare comune nei dintorni di Torino, è il *G. tolosanus* Dujardin, della quale ho esemplari provenienti da Lanzo, Moncalieri, dalla Stura, ecc.; la seconda pare essere una specie alpina; gli esemplari che sono a mia disposizione provengono tutti da regioni poste presso o sopra ai 1000^m, dal lago del Cenisio, da Formazza, e da Rivasco (Ossola). Questa seconda specie, che io ho chiamato *G. Villoti*, è qui stabilita per la prima volta poichè il Villot, che aveva già descritto una forma che io ritengo identica a questa, l'aveva riferita al *G. aquaticus* Duj. (1).

Gordius Villoti n. sp.

Syn. *G. aquaticus*, Duj. in Villot,

Monographie des Dragonneaux, p. 49.

a. Un ind. ♂ ad. dal Lago del Cenisio (Dottor Fedele Bruno).
b. ♀ ad. da Rivasco in Val Formazza (Dottor L. Camerano).
c. ♀ juv. da Formazza nell'Ossola (Dr. Camerano).

L'individuo maschio *a* raggiunge la lunghezza di 58^{cm} con una larghezza massima quasi costante di 1^{mm} attenuandosi ai capi.

La colorazione generale è giallo-castagno e diventa più scura dallo avanti all'indietro; l'estremità anteriore termina con una calotta bianchiccia traslucida a margini ben limitati, segue un collare castagno scuro a margini posteriori indecisi, la cui tinta scura si prosegue in due striscie che orlano lateralmente il corpo in tutta la sua lunghezza, rimanendo però poco visibili posteriormente per la tinta scura che ivi è generale; inoltre tutto il corpo, dietro al collare, è cosparso di macchie tondeggianti giallognole ben visibili soprattutto sulle parti scure.

La cute è tutta zigrinata da areole proeminenti la cui proiezione è irregolarmente poligonale; la loro grandezza è di circa $^1/_6$ di millim.; una delle macchiette tondeggianti sopra menzionate ne coprirebbe 3 o 4; in media la loro larghezza è maggiore nel senso trasversale.

(1) Villot, *Monographie des Dragonneaux*, in *Archives de Zool. expérimentale,* tome III, p. 49.

Il capo ha forma arrotondata non rigonfia e non presenta più traccie di un' apertura boccale.

L'estremità posteriore è (come sempre nei maschi) biforcata; la lunghezza dei rami della biforcatura è uguale circa ad un diametro del corpo, la loro estremità è arrotondata come lo è pure l'angolo rientrante che formano i due rami fra loro. L'apertura sessuale è collocata ad una distanza dal punto di divisione uguale circa ad un semidiametro dei rami alla loro origine. Questa apertura non è circondata da speciali formazioni cuticolari; tra essa e la biforcazione sta una lamina cornea arcata le cui estremità arrivano al livello della biforcazione del tronco. Dal lato ventrale della estremità posteriore molte areole sono allungate a papille che però sono piccolissime e semplici, ed occupano specialmente l'estremità e la metà interna delle braccia estendendosi sino al di là della apertura sessuale senza però avere una disposizione regolare qualunque. La figura 4 della tavola annessa a questa nota rappresenta questa estremità posteriore: è da notare che l'animale presentava alcune grinze accidentali che io ho dovuto riprodurre per non modificare il disegno in modo forse non conforme al vero; tali pieghe son segnate nella figura colla lettera *p*.

Ind. *b*.

Passiamo ora all'esame della femmina adulta.

Le sue dimensioni sono anche maggiori di quelle del maschio, poichè la lunghezza non è minore di 60^{cm}, la larghezza restando uguale. La sua colorazione è più chiara e sensibilmente uguale dappertutto, la calotta cefalica è minore, il collare bruno è poco distinto, e mancano le fascie brune laterali. Esistono anche qui le macchie chiare tondeggianti che cospargono la superficie del corpo.

Le areole sono per la massima parte simili a quelle del maschio, tuttavia alla estremità anteriore hanno forma romboide, allungata trasversalmente, essendo allora limitate non più da linee irregolari ma da linee rette intersecantisi obliquamente.

L'estremità anteriore è più affilata; la posteriore è arrotondata e leggermente rigonfia: essa presenta un leggero solco antero-posteriore nel quale è aperto l'orifizio sessuale in posizione quasi terminale benchè leggermente più vicina alla faccia ventrale. Non ho visto alla estremità posteriore nè lamina cornea, nè papille.

L'insieme dell'aspetto è tale che non lascia un istante dubitare della identità specifica dei due individui *a* e *b*.

Ind. *c*. ♀ giovane.

La lunghezza di questo individuo non è che di 9^{cm} e la larghezza di $^1/_2$ millimetro.

La colorazione generale è giallo-chiara, la calotta diafana ed il collare bruno sono ben distinti, mancano però le fascie laterali e le macchiette chiare.

Si vedono ancora traccie evidenti di anellatura: gli anelli sono di diversa grandezza, ma la loro lunghezza media si può calcolare ad $^1/_3$ del diametro del corpo. Tutta la superficie del corpo è striata da linee rette, obliquamente incrociantesi in modo da delimitare dei romboedri come nella parte anteriore della femmina adulta.

L'estremità posteriore ha la precisa forma dell'esemplare precedente.

Descritti così gli individui, passiamo alla loro determinazione specifica.

Fra tutte le descrizioni che abbiamo di Gordii, una sola, a mia conoscenza, concorda cogli esemplari sopradescritti ed è quella che il VILLOT dà di quello che egli chiama *G. aquaticus* DUJ. nella sopracitata *Monographie des Dragonneaux*. La descrizione del VILLOT è abbastanza completa ed in essa pochi sono i caratteri che non posso riscontrare nei miei esemplari e sono: la testa leggermente rigonfia, i lobi caudali del maschio leggermente insenati internamente, un cerchio bruno intorno all'apertura sessuale, caratteri tutti di poca importanza. La superficie del corpo è descritta da lui come coperta di linee rette, obliquamente intersecantisi come nel nostro es. giovane e nella parte anteriore della femmina adulta; solamente egli descrive quelle linee come rilevate, il che riposa forse su un errore di osservazione.

Il VILLOT dà a questo *Gordius* il nome di *G. aquaticus*: ora ciò non sta assolutamente. Non si tratta di sapere se esso sia il *G. aquaticus* di LINNEO, poichè la caratteristica primitiva si adatta a moltissime specie, si tratta bensì di decidere se i suoi caratteri coincidano quelli del *Gordius* cui gli autori riservano generalmente il nome di *G. aquaticus*. Lasciamo dunque le antiche caratteristiche, sempre troppo vaghe quando si tratta di organismi inferiori, ed arrestiamoci a quella del DUJARDIN alla quale si è riferito pure il VILLOT (1). Riassumendo la descrizione del DUJ. noi otteniamo il seguente complesso di caratteri: Lunghezza 17^{cm}, diametro 0,8^{mm}; estremità anteriore terminante in una calotta diafana imperforata; coda bifida; superficie coperta di losanghe nascenti dalla presenza di striscie scure nello stato fibroso della cute; presenza di pori larghi 0,006; colore generale bruno con due striscie più scure laterali; secondo l'autore mancherebbe l'epidermide, ma questo non può evidentemente essere ammesso.

Ora, concesso anche che la spiegazione data dal DUJ. delle linee incrociantisi riposi sopra un errore di osservazione, resta sempre che la presenza di esse e quella di due fascie brune laterali sono i soli caratteri che convengono al *Gordius* descritto da VILLOT ed al nostro, poichè la calotta diafana si ritrova in quasi tutte le specie; è chiaro che essi non bastano per autorizzarci ad identificare le forme in questione. Notiamo ancora che il DUJ. non parla nè del collare bruno, nè delle macchie giallognole, nè delle papille caudali, nè della lamina arcata presso all'apertura sessuale. Quest'ultima soprattutto non poteva sfuggirgli massime poichè egli conosceva il *G. tolosanus* che manca appunto di questa lamina, e paragonava fra loro le due specie. D'altra parte egli parla di pori che i nostri individui non presentano punto.

Conchiudo che l'identità specifica del nostro *Gordius* col *G. aquaticus* di DUJ. è altamente improbabile.

Dopo il DUJ. un *Gordius aquaticus* fu descritto e disegnato da MEISSNER e SIEBOLD (2). Per esso il dubbio non può sussistere pure un istante, qui si può affermare con tutta certezza che si tratta di una specie ben diversa da quella del VILLOT ed affine al *G. tolosanus*. Basta citare l'assenza della lamina cornea arcata, la struttura dell'epidermide simile a quella del *tolosanus*, la disposizione delle papille alla estremità posteriore e soprattutto la forma troncata della estremità caudale della

(1) DUJARDIN. *Mémoire sur la structure anatomique des Gordius etc.*, in *Annales des Sciences naturelles;* 2ème série, t. XVIII.

(2) MEISSNER, *Beiträge zur anatomie und Physiologie der Gordiaceen* in *Zeitsch. zur Wiss. Zool.*, Vol. 7, p. 1, tab. 3-4.
Zusatz von Pr. von SIEBOLD, ibidem, p. 141.

femmina. Questa descrizione è pure quella adottata dal DIESING (1) come caratteristica del *G. aquaticus* che egli chiama però *Gordius seta* adottando, non so con quanta convenienza, un'antica denominazione di MÜLLER.

È dunque evidente, che il nome di *Gordius aquaticus* essendo stato adottato generalmente dagli autori per indicare una forma diversa da quella descritta ultimamente sotto questo nome dal VILLOT, questa non può conservare quel nome e deve formare una nuova specie che io ho chiamata *G. Villoti;* a questa specie appartengono i 3 esemplari piemontesi sopra descritti.

Essa può ricevere la caratteristica seguente che io fondo unicamente sugli individui che ho sott'occhio.

Larghezza sino a 60^{cm}, estremità anteriore arrotondata, estremità posteriore del ♂ divisa in due lobi arrotondati lunghi circa come 1 diam. del corpo e coperti massime dalla parte interna di papille estendentisi irregolarmente oltre all'apertura genitale; una lamina arcata dietro all'apertura sessuale. Estr. post. della ♀ arrotondata con apertura genitale subterminale in un lieve solco antero-posteriore. Cute zigrinata da areole rilevate prodotte da solcature rette ed obliquamente intersecantesi nei giovani ed in parte nelle femmine, irregolari invece negli adulti. Colorazione gialla nei giov., castagna negli adulti. Una calotta cornea, un collare scuro ed innumerevoli macchie tondeggianti chiare; di più (nel maschio almeno) due fascie scure longitudinali laterali.

Hab. regioni alpine.

Gordius tolosanus DUJ.

1842. *Gordius tolosanus,* DUJ., *Annales des Sciences naturelles*, 2e série, Vol. XVIII, p. 146. DIESING, *Systema helmintum*, Vol. II, p. 106. VILLOT, *Arch. de Zool. expérim.*, Vol. III, p. 55.

1848. *Gordius subbifurcus*, SIEBOLD, Stettin. Entomol. Zeitung. Jahrgang IX, p. 296. DIESING, Syst. helm., Vol. II,

(1) DIESING, *Revision der Nematoden* in *Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wissenschaften*, Wien, 42e vol., p. 600.

p. 90. MEISSNER, Zeitschr. für Wissensch. Zool. Vol. VII, p. 59. SIEBOLD, ibidem, p. 143. DIESING, Sitzungsb. der Kais. Akad. in Wien, Vol. 42°, pag. 602. SCHNEIDER, *Monogr. der Nematoden*, p. 180.

a. Un ind. ♂ dall'intestino umano, Torino (Dr. G. M. FIORI).
b. 1 ♂ Lanzo (Dr. L. CAMERANO).
c. 1 ♂ Moncalieri (Dr. L. CAMERANO).
d. *e*. *f*. *g*. 4 ♀ Contorni di Torino presso la Stura (Dr. L. CAMERANO).

Descr. dei maschi.

Lunghezza 14-18^{cm}, larghezza poco meno di 1^{mm}.

L'estremità anteriore è notevolmente attenuata e subtroncata; essa presenta in posizione terminale un lievissimo rialzo in cui si apre la bocca che persiste ancora in tutti i tre individui, sebbene dopo la cavità imbutiforme che la segue nulla più si veda del canale digerente.

L'estremità posteriore è forcuta dividendosi in due rami a punta ottusa lunghi circa un diametro del corpo; l'insenatura fra di essi forma un angolo non arrotondato; l'apertura sessuale si trova ventralmente a breve distanza dalla biforcatura.

La colorazione generale è bruna, talora molto scura, generalmente la parte posteriore è più scura della anteriore. Però già al microscopio semplice la superficie del corpo mostrasi coperta di macchie ovali più scure del fondo che corrispondono ad altrettanti rilievi della cute. Un ingrandimento maggiore (oculare 3, obbiettivo 9, imm. Hartnak) mostra la superficie del corpo coperta da una rete i cui fili sarebbero fatti di più serie di papille che hanno l'aspetto di globuli rifrangenti; questo aspetto è soprattutto bellissimo nell'ind. *a*; negli altri le areole son meno ben delimitate. Queste serie di globuli delimitano delle areole poligonali, tendenti alla forma esagonale, la cui superficie appare minutamente punteggiata.

Fra queste areole se ne trovano delle maggiori che paiono risultare dalla fusione di 2 o 3 di esse; la loro superficie è più granulosa ed hanno al centro un punto chiaro simile ad un poro. Queste areole maggiori corrispondono alle macchie brune già visibili colla lente. Non esistono produzioni cuticolari speciali che alla estremità posteriore del corpo dove sono abbondanti e svariate. L'apertura sessuale è circondata da una folta guarnitura di peli in 2 o 3 serie. Vi son poi due folte e larghe fascie di peli più lunghi e talora biforcati che incominciano sui lobi caudali alla altezza del punto di biforcazione e si dirigono verso la parte anteriore del tronco inclinandosi in modo da incontrarsi a breve distanza davanti all' apertura sessuale. La parte ventrale del corpo posteriormente alla apertura sessuale si mostra inoltre armata di aculei più forti e brevi, essi sono disposti in modo da coprire la parte terminale del tronco e la parte interna dei suoi due lobi.

Per l' estremità cefalica i disegni del MEISSNER concordano bene coll' aspetto presentato dai miei individui. La figura dello SCHNEIDER della estremità posteriore concorda pure coi miei esemplari, notando però che egli non ha disegnato l'orlo di peli che circonda l' orifizio sessuale. Questi si vedono invece nella figura del MEISSNER, che è del resto simile all'altra, salvochè vi si vede disegnata un' apertura anale che nè io nè altri vide mai. Quanto al mio disegno della cuticola esso differisce molto da quello del VILLOT. Esso concorda però colle descrizioni di DUJARDIN, di MEISSNER e di SIEBOLD. Del resto il MEISSNER ha notato che tale carattere è un po' variabile coll' età.

Descrizione delle femmine:

Larghezza media 13^{cm}.

Esse si distinguono subito dai maschi per la colorazione gialla, e le forme più arrotondate anche dopo un lungo soggiorno nell'alcool, il che proviene dalle uova che riempiono il corpo.

L' estremità anteriore è più affilata, ma pure tronca e presentante ancora la bocca. Vi si nota una breve calotta cornea diafana seguita da un collare bruno poco distinto.

L' estremità posteriore è arrotondata con un solco anteroposteriore in cui si apre l' orifizio sessuale in posizione non terminale ma ventrale e fra due eminenze che son però molto meno notevoli di quelle disegnate dal MEISSNER. Quest' apertura è circondata da una macchia bruna che si prosegue in una linea dorsale ed una ventrale.

La superficie del corpo è areolata come nei maschi, ma meno nettamente, e mancano affatto le areole maggiori che abbiamo descritte in questi. All' estremità posteriore le areole si allungano in minutissime spine.

Tutti i Gordii fin qui descritti sono stati presi mentre facevano vita libera (1). Ho inoltre sotto gli occhi due altri Gordii che non mi è dato determinare. L'uno è stato estratto dal corpo di una cavalletta, l'altro da quello di un *Carabus leucophtalmus*. Essi sono ancora molto giovani.

(1) Salvo l'individuo del Dott. FIORI, il cui parassitismo era però affatto accidentale.

Spiegazione delle figure.

1. Estremità anteriore di *Gordius tolosanus* ♂, DUJ.
2. Estremità anteriore di *G. Villoti* ♂, n. sp.
3. Cuticola del *G. tolosanus* ♂, notevolmente ingrandita.
4. Estremità posteriore del *G. Villoti* ♂, p. pieghe prodotte da raggrinzamento.
5. Estremità posteriore del *G. tolosanus* ♀, dal lato ventrale.
6. Estremità posteriore del *G. Villoti* ♀, vista lateralmente in una sezione longitudinale che passa pel solco antero-posteriore *a*.

1

2

3

4

5

6

D. Rosa dis. dal vero

Torino, Lit. Salussolia

Adunanza del 26 Febbraio 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Cav. Andrea Naccari presenta il seguente suo lavoro

SUI

FENOMENI TERMICI

PRODOTTI DALLA SCINTILLA D'INDUZIONE

Ho già esaminato precedentemente il riscaldamento di due elettrodi, fra i quali la scintilla del rocchetto d'induzione scocchi attraversando uno strato d'aria che sia soggetta alla pressione atmosferica (1). In questa Nota, descrivo le esperienze che ho eseguito allo stesso scopo, facendo attraversare alla scintilla uno strato d'aria rarefatta, oppure facendo sì che la elettricità fornita dal rocchetto, prima di scaricarsi fra gli elettrodi, si accumulasse sulle faccie opposte di un condensatore. A queste aggiungo alcune esperienze sul calore totale prodotto dalla scintilla.

1. *Scintille nell'aria rarefatta.* — Al foro centrale d'una bottiglia di Woulf ho adattato un cilindro d'ottone chiuso al di sotto che scendeva entro la bottiglia, sicchè il fondo restava a 5 cm. di distanza da quello della bottiglia. L'estremità inferiore del cilindro avea forma di mezza sfera. Il diametro interno del cilindro era di 12 mm. Un filo di rame, saldato all'orlo superiore del cilindro stesso, serviva a porlo in comunicazione con

(1) *Atti del R. Istituto Veneto* (5) *VII*, 1363 (1881).

uno dei poli del rocchetto. Il cilindro faceva nelle esperienze l'ufficio di elettrodo e di calorimetro: conteneva 8 gr. d'acqua, e un termometro diviso in quinti di grado vi si immergeva. Un piccolo agitatore metallico con manico isolante serviva a mantenere uniforme la temperatura.

Attraverso uno dei fori laterali della bottiglia di Woulf ho fatto passare un conduttore di ottone che alla sua estremità inferiore, opportunamente incurvata, portava una palla pure d'ottone di mm. 10,1 di diametro. L'ho fermato con un tappo a quel foro, a tale altezza che la pallina venisse a trovarsi proprio al di sotto della estremità inferiore del cilindro di ottone e alla distanza di 3,5 mm. Ho otturato diligentemente ogni interstizio con mastice.

Al terzo foro della bottiglia ho applicato un tubo d'ottone, il quale era destinato a stabilire la comunicazione fra lo spazio interno della bottiglia e la macchina pneumatica. Un manometro applicato al tubo di comunicazione serviva a dare in ogni caso la pressione dell'aria interna. Le comunicazioni elettriche erano disposte così. Da uno dei poli del rocchetto, un filo andava al cilindro d'ottone che faceva l'ufficio di calorimetro e di elettrodo. Dall'altro polo un filo andava ad un reometro con fili rivestiti di gutta perca, di cui già mi servii nelle precedenti esperienze. Dal reometro un filo andava al conduttore massiccio d'ottone, introdotto nella bottiglia di Woulf, cioè all'altro elettrodo. Le cose erano disposte in modo che si potesse cangiare con facilità la direzione della corrente fra i due elettrodi senza mutare il senso della polarità del rocchetto, nè quello in cui la elettricità attraversava il reometro.

Alcune prime esperienze di saggio avendomi dato dei risultati molto irregolari, impedii il passaggio della corrente indotta inversa, stabilendo nel circuito indotto un intervallo di 2 mm. fra due palle isolate di rame di 5 cm. di diametro.

In queste esperienze ho notato un fatto che non ho veduto segnalato da altri, cioè che quando la forza elettromotrice della corrente induttrice ha raggiunto un certo limite sufficientemente elevato, e la rarefazione del gas, in cui scocca la scintilla, è spinta abbastanza innanzi, prevale in modo stabile la corrente inversa.

Ecco le medie deviazioni osservate con una pressione di 80 mm., usando successivamente per la corrente induttrice un numero crescente di coppie Bunsen. È presa per positiva la deviazione che sarebbe prodotta dalla indotta diretta:

1 coppia	. . . .	$i =$	58
2 coppie	. . . .		171
3 »	. . . .		27
4 »	. . . .		— 47 .

Ecco un'altra serie fatta con una pressione di 40 mm.:

1 coppia	. . . .	$i = +$	45
2 coppie	. . . .		148
3 »	. . . .		0
4 »	. . . .		— 73 .

Questo fatto non può attribuirsi alla forma degli elettrodi e ad un effetto di valvola elettrica, perchè lo verificai anche con due elettrodi formati da due palline eguali di ottone.

Ho registrato nella seguente tabella i risultati delle esperienze fatte con l'apparecchio sopra indicato e con un intervallo esterno di due mm.: p è la pressione espressa in mm. di mercurio; n_1 e p_1 esprimono i rapporti fra gli aumenti di temperatura prodotti rispettivamente in un minuto sull'elettrodo positivo e sul negativo e le corrispondenti deviazioni del reometro, espresse col numero delle parti della scala debitamente corrette. La sola corrente diretta attraversava il circuito in tutte queste esperienze:

Tabella I.

p	i	$10^4 . n_1$	$10^4 . p_1$	$n_1 : p_1$
762	29, 5	331		3, 1
»	45, 2		106	
»	42, 9	331		3, 6
»	42, 3		92	
760	34, 6	338		3, 0
»	34, 6		113	
756	27, 3	356		3, 0
»	28, 1		120	

Segue TABELLA I.

p	i	$10^4 . n_1$	$10^4 . p_1$	$n_1 : p_1$
756	26, 8	324		2, 9
»	26, 7		113	
442	41, 2	246		2, 7
438	40, 0		92	
456	45, 7	275		3, 3
453	46, 9		84	
448	50, 6	246		2, 9
450	49, 1		84	
203	39, 2	207		3, 7
198	38, 3		56	
196	35, 5	180		3, 2
201	38, 4		56	
50, 4	40, 6	162		3, 8
47, 1	38, 9		42	
46, 5	39, 5	165		4, 5
50, 4	39, 5		37	
45, 8	32, 6	151		3, 9
49, 0	36, 9		39	
12, 6	38, 0	155		3, 4
12, 6	37, 2		46	
9, 2	34, 4	151		4, 3
10, 3	34, 1		35	
9, 4	34, 9	144		3, 7
9, 9	35, 3		39	

Queste esperienze mostrano che le quantità n_1 e p_1 vanno sempre diminuendo finchè p diminuisce passando da 760 mm. a 9 mm. Il rapporto $n_1 : p_1$ va invece crescendo. Ambedue questi cangiamenti non sono molto rapidi. Ciò risulta più chiaro dai seguenti numeri medii dedotti dalla tabella precedente:

TABELLA II.

p	$10^4 . n_1$	$10^4 . p_1$	$n_1 : p_1$
759	336	111	3, 0
448	262	87	3, 0
199	193	56	3, 4
48	159	49	4, 1
11	150	40	3, 8

2. *Influenza d'un condensatore.* — Nelle seguenti esperienze la elettricità, prima di scaricarsi fra gli elettrodi, si accumulava sulle opposte faccie d'un condensatore. Trattò di questo argomento il POGGENDORFF (1), ma per il modo da lui adottato nello sperimentare i valori numerici degli effetti osservati non potevano avere nemmeno quel grado di precisione, invero non mai molto grande, che si può raggiungere in esperienze di questa fatta.

La disposizione, che ho sempre seguito in tutte le esperienze sopra questo argomento, è la seguente: Un filo partiva da uno dei poli del rocchetto e precisamente da quello donde usciva la corrente diretta e metteva ad una palla metallica isolata. A 10 mm. di distanza da questa, stava un'altra palla metallica isolata congiunta con un filo ad una delle armature d'un condensatore. La stessa armatura era congiunta con uno degli elettrodi, di cui io studiava il riscaldamento. L'altra armatura era congiunta col secondo elettrodo attraverso il solito reometro, e mediante un altro filo, col polo negativo del rocchetto. L'intervallo (a) fra i due

(1) POGGENDORFF, *Monatsber. der k. preuss. Ak. der Wissens. zu* Berlin, 1861, 349.

elettrodi era sempre molto minore dell'altro (a') esistente fra le due palle isolate, e ciò perchè senza questa precauzione la elettricità dopo essersi accumulata sulle armature, anzichè scaricarsi fra gli elettrodi, sarebbe tornata o tutta o in gran parte indietro, ricomponendosi attraverso il filo indotto. Adoperai come elettrodi due sfere cave di rame del diametro di 5 cm., eguali a quelle che usai nell'esperienza che ho descritto nella nota sopra citata. Ciascuna sfera conteneva 50 cm^3. di petrolio, e v'era immerso un termometro e un piccolo agitatore. Usai come condensatori delle bottiglie di Leida. Ne determinai la capacità relativa prendendo per unità quella d'una bottiglia grande spettante alla macchina di Holtz. La superficie armata di questa bottiglia era presso a poco 550 cm^2., il vetro aveva la grossezza di cm. 0,2.

Volli anzi tutto esaminare se un condensatore, come fu già notato dal POGGENDORFF, alteri il rapporto $n_1 : p_1$ e lo riduca all'unità. Le tabelle seguenti contengono i risultati delle esperienze. Nella prima stanno i valori ottenuti senza condensatore. Del resto, le condizioni del circuito sono sempre le stesse. L'intervallo a fu sempre di 2 mm.; l'intervallo a' di 10. Con la lettera C ho indicato la capacità del condensatore adoperato nei singoli casi:

TABELLA III.

$C = 0.$

	$n_1 . 10^4$	$p_1 . 10^4$	$n_1 : p_1$
	97	21	4, 6
	95	32	3, 0
	102	31	4, 4
	95	32	3, 0
	104	25	4, 1
	103	27	3, 8
	105	24	4, 4
Medio . .	100	26	3, 8

$$n_1 + p_1 = 0{,}0126 .$$

TABELLA IV.

$C = 0{,}15$.

	$n_1 . 10^4$	$p_1 . 10^4$	$n_1 : p_1$
	87	36	2, 4
	79	33	2, 4
	86	37	2, 3
	88	48	1, 8
	81	36	2, 3
	89	39	2, 3
	87	33	2, 9
Medio	85	37	2, 3

$n_1 + p_1 = 0{,}0122$.

TABELLA V.

$C = 1$.

	$n_1 . 10^4$	$p_1 . 10^4$	$n_1 : p_1$
	57	57	1, 0
	70	61	1. 14
	68	67	1, 01
	72	74	0, 98
	65	61	1, 06
Medio	67	60	1, 05

$n_1 + p_1 = 0{,}0127$.

Queste esperienze mostrano che al crescere della capacità C il rapporto $n_1 : p_1$ diminuisce e s'accosta all'unità, come appare da questi numeri medi :

$C = 0$	. . . . .	$n_1 : p_1 = 3{,}8$
0,15	. . . .	2,3
1	. . . .	1,05 .

Le stesse esperienze mostrano inoltre che il valore della somma $n_1 + p_1$ è pressochè lo stesso in tutti e tre i casi. Almeno fino ad un certo limite della capacità il condensatore non produce dunque altro effetto, che quello di ripartire diversamente il calore che va impiegato a riscaldare gli elettrodi.

Importava conoscere se il rapporto $n_1 : p_1$ continuasse a diminuire anche oltre l'unità, quando crescesse ancor più la capacità del condensatore, e se la costanza della somma $n_1 + p_1$ si mantenesse anche per maggiori capacità. Perciò eseguii le esperienze, i cui risultati sono contenuti nella seguente tabella, usando un condensatore di capacità C = 2 :

TABELLA VI.

$C = 2.$

	$n_1 . 10^4$	$p_1 . 10^4$	$n_1 : p_1$
	88	82	1, 07
	73	74	0, 98
	80	81	0, 99
	82	73	1, 13
	74	64	1, 14
	99	75	1, 32
Medio . .	82	75	1, 09

$$n_1 + p_1 = 0{,}0157 .$$

Queste esperienze mostrano un notevole aumento della quantità $n_1 + p_1$. Quanto al rapporto $n_1 : p_1$, benchè i singoli valori sieno assai discordanti, si può ammettere che l'aumento di C non ne abbia cangiato il valore.

Aggiungo un'altra serie di esperienze, alcune delle quali son fatte in condizioni eguali alle precedenti, altre con capacità maggiori :

TABELLA VII.

C	$n_1.10^4$	$p_1.10^4$	$(n_1+p_1)10^4$	$n_1:p_1$	C	$n_1.10^4$	$p_1.10^4$	$(n_1+p_1)10^4$	$n_1:p_1$
0	100	29	129	3, 4	2,9	69	69	138	1, 0
0	100	26	126	3, 9	2,9	68	64	132	1, 05
0	98	26	124	3, 8	4,2	69	59	128	1, 2
0	102	24	126	4, 3	5,4	61	60	121	1, 1
2	82	72	154	1, 1	12,9	52	50	102	1, 05
2	71	70	141	1, 0	15,1	46	40	86	1, 1
2	72	72	144	1, 0	15,1	42	38	80	1, 1
2	80	68	148	1, 2	16,8	32	32	64	1, 1

Da queste esperienze si può conchiudere che in generale, quando un condensatore è inserito entro il circuito nel modo indicato, al crescere della capacità, il rapporto $n_1:p_1$ va avvicinandosi all'unità e la raggiunge, quando la capacità ha raggiunto un certo limite, e vi si mantiene se la capacità cresce ancora. In quel periodo in cui la capacità va da 0 passando al limite accennato, la scarica pare che avvenga in parte nel modo che avveniva senza condensatore, in parte sotto l'influenza di questo, e non pare che perciò muti il riscaldamento totale n_1+p_1 dei due elettrodi. Oltrepassato quel limite della capacità, il rapporto $n_1:p_1$ resta eguale all'unità, ma la quantità n_1+p_1 va crescendo fino ad un massimo, dopo di che diminuisce.

3. *Calore totale prodotto dalla scintilla d'induzione.* — Ho esaminato come variasse l'effetto termico prodotto dalla scintilla al variare della quantità di elettricità, mantenute costanti le altre condizioni, e come influisse un condensatore, inserito nel circuito indotto, sull'effetto termico stesso.

In un globo di vetro con pareti sottili e con due tubetti situati ai due capi d'un diametro vennero introdotti per quei tubetti due fili di rame del diametro di 3 mm. Le loro estremità rese ben piane e regolari si trovavano alla distanza di 7,8 mm.

Ogni comunicazione fra lo spazio interno e l'esterno era stata accuratamente tolta chiudendo con mastice gl'interstizi fra il vetro e i fili. Il globo di vetro, preparato così, venne introdotto in un calorimetro, il cui fondo era forato nel centro. Al foro era applicato un breve cilindretto d'ottone, che sporgeva al di sotto. Attraverso questo passava uno dei tubetti del globo, e l'intervallo era occupato da un tappo forato di sovero e da mastice.

Nel calorimetro si versavano 75 cm^3. di acqua, e la si manteneva in moto con un agitatore, provveduto di manico isolante.

Ho esaminato anzi tutto qual relazione vi fosse fra la deviazione del reometro e l'effetto termico. Nella tabella seguente i esprime la deviazione in parti della scala, fatte le debite correzioni; q_1 esprime il riscaldamento osservato in un minuto, diviso per il numero i; s'intende già che nel misurare e calcolare q_1 si seguirono le solite avvertenze dei metodi calorimetrici. La disposizione del circuito era simile a quella descritta nel § 1, e l'intervallo ivi indicato con a' era eguale a un millimetro:

Tabella VIII.

i	$q_1 . 10^5$	i	$q_1 . 10^5$
4, 4	954	43, 7	708
4, 6	957	46, 0	672
15, 2	785	46, 9	693
15, 5	803	49, 4	648

Al crescere di i il rapporto q_1 va decrescendo. Se dunque le deviazioni sono proporzionali alle quantità di elettricità che attraversano il circuito, la quantità di calore sviluppata dall'unità di elettricità nell'attraversare l'intervallo d'aria non è indipendente dalla quantità di elettricità che si scarica in un minuto.

La scarica elettrica è un fenomeno complesso che risulta da più scintille succedentisi rapidamente con differenze di potenziale non tutte eguali. Una scintilla, per il riscaldamento che produce e per le ignote alterazioni che fa avvenire nell'aria, probabilmente diminuisce per la scarica immediatamente successiva ciò che, seguendo le idee del Maxwell, si direbbe quasi *resistenza alla rottura* dell'aria interposta. Ne viene, che quando le scariche si fanno più copiose o più frequenti, la media differenza di potenziale si abbassi e ne consegua una diminuzione della quantità di calore prodotta dall'unità di elettricità nel suo passaggio.

Ecco alcune altre esperienze, che però vanno prese a parte, e non possono confrontarsi con le precedenti, perchè fatte in condizioni diverse e con altri elettrodi:

Tabella IX.

i	$10^5 . q_1$	i	$10^5 . q_1$
9, 7	1299	21, 4	1102
9, 8	1330	35, 8	947
9, 9	1270	36, 1	943
20, 7	1042	37, 5	964
20, 9	1035	38, 1	954

Queste esperienze confermano la conclusione tratta dalle precedenti. Ho esaminato di poi l'effetto d'un condensatore introdotto nel circuito come fu indicato nel § 1, cioè in modo che la elettricità prima si raccogliesse sulle armature, poi si scaricasse nell'intervallo che ho designato con a. Ho voluto determinare la quantità q_1, inserendo successivamente nel circuito condensatori di diversa capacità. Alcune esperienze fatte dapprincipio con $a' = 1$ mm. con la giara di capacità 10,9 e con $i = 14$ circa, diedero $q_1 = 0,0051$, mentre nelle stesse condizioni e senza giara risultava $q_1 = 0,0079$. L'effetto del condensatore appariva dunque esser quello di diminuire la media differenza di potenziale della scarica.

Ecco i risultati di alcune esperienze fatte con diversi condensatori nelle condizioni stesse, ma con $d' = 14$:

Tabella X.

i	C	$10^5 . q_1$	i	C	$10^5 . q_1$
12, 8	0	1010	7, 7	2	806
13, 0	0	1010	7, 9	2	838
12, 5	0	1063	10, 7	10, 9	454
6, 1	0	1098	10, 6	10, 9	493
7, 6	1	799	8, 6	24, 8	444
7, 4	1	859	8, 0	28, 0	415
8, 7	2	873			

Che il condensatore diminuisca l'effetto termico che a parità di corrente induttrice si produce dal rocchetto nell'unità di tempo, si poteva prevedere perchè una parte dell'energia deve andare impiegata a polarizzare alternamente nell'uno e nell'altro senso il condensatore. La diminuzione di q_1 indica che diminuisce anche la media differenza di potenziale della scarica. Ciò si spiega, considerando che la presenza del condensatore deve rendere più copiose le scariche; per un effetto simile a quello notato di sopra, deve diminuire la media differenza di potenziale.

Se invece di condurre le opposte elettricità fornite dal rocchetto alle armature d'un condensatore, si conducano alle armature esterne di due condensatori, le quali sieno anche congiunte rispettivamente ai due elettrodi, nel cui intervallo a possa scoccar la scintilla, e alle armature interne sieno applicati due reofori che mettano ad altri due elettrodi, fra questi pure, quando le distanze sieno ben regolate, scoccherà una scintilla e si avranno fenomeni termici notevoli. Ho verificato ciò con varie esperienze. In una, ad esempio, l'intervallo a era mm. 4,2 fra due palle di 5 cm. di diametro, l'intervallo a' era 14 mm. fra due palle eguali a quelle, e l'intervallo entro il globo, nel tratto che congiungeva le due armature interne, era mm. 7,8 fra fili di 3 mm. di diametro ridotti piani ai due capi. Il riscaldamento fu tale che, dividendo l'aumento di temperatura osservato nel calorimetro in un minuto per la corrente osservata nel reometro, ottenni

$$q_1 = 0{,}0061.$$

Notisi che il calorimetro conteneva la solita quantità d'acqua, e che non potendo misurare la corrente che attraversava il globo di vetro, perchè in quel tratto erano alternate le correnti, misurai invece la quantità di elettricità che si scaricava in un minuto attraverso l'intervallo a.

Nell'eseguire queste esperienze, io non ho avuto l'intenzione di determinare il valore assoluto del calore sviluppato, pure lo si può valutare nei vari casi con discreta approssimazione. Se da esso si deduce la media differenza di potenziale che doveva esistere fra i due elettrodi, si trovano dei valori molto piccoli rispetto a quelli dati da W. THOMSON (*Phil. Trans. f.* 1860) e da WARREN DE LA RUE e H. MILLER (*Phil. Trans. for* 1878 *a.* 1880). Prendo ad esempio la prima esperienza della tabella VIII. Il riscaldamento prodotto da una corrente che dava una deviazione eguale a una particella della scala, cioè dalla corrente che sarebbe generata da una Daniell in un circuito di 37040 Siem., fu $0^\circ,00954$, e poichè la massa riscaldata equivaleva presso a poco a 78 gr. d'acqua, il calore sviluppato fu di $0{,}00954 \times 78 = 0{,}744$ piccole calorie. Ammesso che una Daniell sia $1,116 \,.\, 10^8$ unità assolute elettromagnetiche (C. G. S.) e la Siemens $0,95 \,.\, 10^9$ unità dello stesso sistema, il calore sviluppato da una Daniell nell'intero circuito e in un minuto, se la resistenza del circuito è una Siemens, è dato da

$$\frac{(1,116 \,.\, 10^8)^2\, 60}{0{,}95 \,.\, 10^{mq} \,.\, 4{,}2 \,.\, 10^7} = \frac{(1,116^2) \,.\, 60}{0,95 \,.\, 4,2} = 18,73 \quad \ldots (1).$$

Nel caso dell'esperienza sopra indicata, la quantità di elettricità è $\frac{1}{37040}$ di quello che sarebbe in questo caso: la dif-

(1) Ammettendo che il calore reso disponibile dal consumo di gr. 32, 6 di *Zn* nella coppia *Dan.* sia 23900 si trova 17,08: se invece di 23900 si prende il numero dato dal THOMSON (*Wied. Ann. XI*, pag. 246) cioè 25145, si trova 18,03.

ferenza di potenziale fra gli elettrodi, paragonata a quella d'una coppia Daniell, sia $V_1 - V_2$: dovrà essere

$$\frac{(V_1 - V_2)\,\frac{1}{37040}}{1 \times 1} = \frac{0,744}{18,73}.$$

Quindi $$V_1 - V_2 = 1471,3 .$$

Ora, questo valore si allontana assai dai valori dati dagli sperimentatori sopra citati, secondo i quali, essendo la distanza fra gli elettrodi di mm. 7, 8, dovrebbe la differenza di potenziale essere circa 7000 Volt per due elettrodi conformati a punta, e da 20 a 30000 Volt fra due superficie piane. Il caso delle mie esperienze sta fra questi due, in quanto alle condizioni della scarica. Ho fatto delle esperienze di riscontro usando petrolio invece d' acqua come sostanza calorimetrica, ma sono ricaduto negli stessi valori. Io credo pertanto che la spiegazione di questa grande divergenza si debba cercare principalmente nel fatto che nel caso delle mie esperienze vien misurata la media differenza di potenziale d' un gran numero di scariche successive, mentre nel caso delle esperienze che davano valori molto più alti, veniva misurata la differenza di potenziale necessaria a produrre la prima scintilla. È noto in fatti che quando la scarica sia cominciata, si può notevolmente aumentare la distanza degli elettrodi senza che per ciò la scarica venga interrotta.

Riassunto. — Sperimentando successivamente con aria sempre più rarefatta, dalla pressione atmosferica fino a 9 mm. circa, si trova:

1° Che i riscaldamenti prodotti nell'uno e nell'altro elettrodo da una data corrente, vanno continuamente diminuendo;

2° Che il rapporto fra il riscaldamento dell'elettrodo negativo e quello dell'elettrodo positivo va successivamente aumentando, sicchè dal valore 3, che aveva nelle mie esperienze alla pressione ordinaria, giunse fino a 4 per 11 mm. di pressione;

3° Che quando vi sia nel circuito un solo intervallo occupato da aria assai rarefatta e sia abbastanza grande la forza elettromotrice della corrente induttrice, prevale stabilmente la corrente indotta inversa a paragone della diretta.

Sperimentando nell'aria, sotto la pressione atmosferica, con elettrodi di forma diversa e dopo aver introdotto nel circuito un condensatore, in modo che l'elettricità s'accumulasse sulle sue armature prima di scaricarsi fra gli elettrodi, ho trovato:

1° Che il rapporto fra il riscaldamento dell'elettrodo negativo e quello dell'elettrodo positivo va continuamente diminuendo al crescere della capacità del condensatore, sicchè per un certo valore della capacità riducesi eguale ad uno;

2° Che d'allora in poi un aumento ulteriore della capacità non altera più quel rapporto;

3° Che fino ad un certo valore della capacità del condensatore l'effetto di questo consiste solamente in una diversa ripartizione nel calore impiegato a riscaldare gli elettrodi;

4° Che oltrepassato quel limite, questo calore va crescendo, raggiunge un massimo e poi diminuisce.

Quanto al calore totale prodotto dalla scintilla d'induzione, le esperienze indicano:

1° Che la media differenza di potenziale fra gli elettrodi va decrescendo al crescere della quantità di elettricità che si scarica in un minuto;

2° Che un condensatore inserito nel circuito riduce tanto minore la media differenza di potenziale fra gli elettrodi quanto è maggiore la sua capacità;

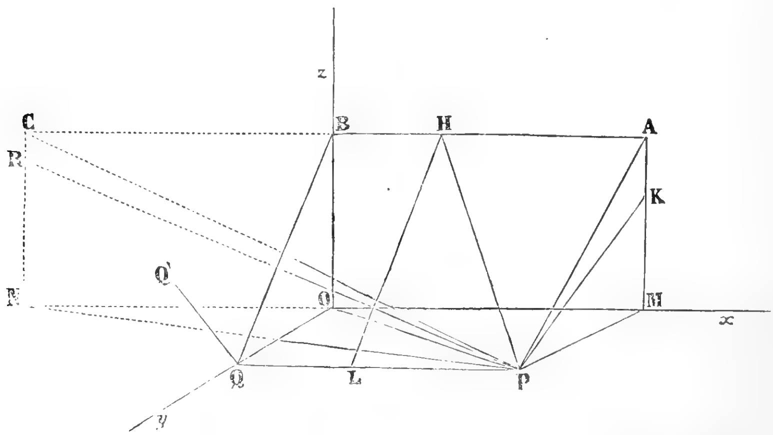
3° Che la media differenza di potenziale, dedotta dal riscaldamento osservato in queste esperienze, è di gran lunga minore di quella trovata dal Thomson e da W. de la Rue e H. Miller nel caso in cui si osserva la differenza di potenziale al momento iniziale della scarica.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino, 25 Febbraio 1882.

Il Socio Cav. Giuseppe Basso presenta la seguente sua Memoria

SOPRA
UN
CASO PARTICOLARE D'EQUILIBRIO
PER UN SOLENOIDE
SOGGETTO ALL' AZIONE MAGNETICA TERRESTRE ED A QUELLA D'UNA CORRENTE ELETTRICA.

Si consideri un solenoide elementare a direttrice rettilinea, orizzontale e girevole liberamente intorno ad un asse verticale passante pel punto medio della sua lunghezza. Conducansi per questo punto O (vedi la figura) tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz, tali che il piano xz coincida col meridiano magnetico e la Oz sia l'asse di rotazione del solenoide. Fino a che su quest' ultimo si esercita la sola azione magnetica terrestre, la sua posizione di equilibrio coincide colla Ox.



Sia ora collocato nel piano xz un conduttore filiforme MACN, costituito da tre porzioni rettilinee, due delle quali, AM e CN abbiano una loro estremità sulla Ox, siano di egual lunghezza, verticali ed equidistanti da Oz; la terza porzione, AC, compresa fra di esse, sia orizzontale. Chiamisi $2a$ la lunghezza di quest'ultima e sia z la sua distanza dal piano orizzontale xy; sarà pure z la lunghezza comune alle due porzioni verticali.

Se una corrente elettrica, d'intensità costante i, attraversa il conduttore MACN, il solenoide che ne subisce l'azione acquista, fuori del meridiano magnetico, una nuova posizione OP di equilibrio stabile, la quale si può agevolmente determinare per mezzo della teoria elettrodinamica. Si osservi prima di tutto che i due poli del solenoide si trovano in analoghe condizioni per ciò che riguarda l'azione magnetica terrestre e quella esercitata su di essi dalla corrente. Perciò basterà esaminare le forze applicate in un suo polo P, trovare per ciascuna di esse la componente orizzontale e normale alla direzione OP ed avvertire che, per l'equilibrio del solenoide, è necessario e sufficiente che la somma algebrica di queste componenti sia nulla.

Designamo con l la semilunghezza OP del solenoide e con α l'angolo $\mathrm{PO}x$ che la sua direzione fa col meridiano magnetico quando esso è in equilibrio sotto la duplice azione del magnetismo terrestre e della corrente.

Esaminiamo dapprima l'azione esercitata su P dalla porzione orizzontale AC di corrente. Un elemento di lunghezza ds, a cui appartenga il punto qualunque H, agisce sul solenoide in modo che il polo P diventa punto d'applicazione d'una forza normale al piano APH che contiene il polo stesso e l'elemento. Dalla teoria elettrodinamica si sa che l'intensità df_1 di questa forza elementare si esprime colla relazione:

$$df_1 = \frac{m\,i\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\rho^2}\,ds\ ;$$

essendo m costante per un dato solenoide, ρ la distanza PH del polo dall'elemento agente e φ l'angolo PHA che la congiungente PH fa colla direzione dell'elemento. Quando si passi da un elemento ad un altro, delle tre variabili s, ρ e φ una sola è indipendente; esistono perciò fra di esse due relazioni distinte che si possono facilmente trovare. A quest'uopo, si parta dal punto B, situato sull'asse Oz per contare le s, cosicchè sia $\mathrm{BH} = s$. Conducasi la PQ parallela alla corrente AC; essa sarà la traccia, sul piano xy, del piano AHP. Conducansi ancora la BQ e la HL a questa parallela. Osservando che le lunghezze BQ e HL sono eguali, si ottiene subito:

$$\rho \operatorname{sen} \varphi = \sqrt{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \ ;$$

ed essendo BH eguale alla differenza fra PQ e PL, si ha:

$$s = l \cos \alpha - \rho \cos \varphi \ .$$

Eliminando la ρ fra queste due relazioni e differenziando l'espressione di s rispetto a φ, se ne ricava:

$$d s = \sqrt{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \frac{d \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \ .$$

Sostituendo nell'espressione generale di df_1, questa diventa:

$$d f_1 = \frac{m i}{\sqrt{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} \operatorname{sen} \varphi \, d \varphi \ .$$

Tutte le forze df_1 esercitate su P dai singoli elementi della corrente AC sono normali al piano PAC ed hanno la stessa direzione; sarà dunque applicata in P un' azione f_1 avente pure questa direzione e l'intensità f_1 sarà espressa così:

$$f_1 = \frac{m i}{\sqrt{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \operatorname{sen} \varphi \, d \varphi \ ,$$

essendo φ_2 l'angolo ACP e φ_1 l'angolo supplementare di CAP. Ponendo: $\mathrm{PM} = u_1$, $\mathrm{PN} = u_2$, risultano dalla ispezione della figura le relazioni seguenti:

$$u_1 = \sqrt{a^2 + l^2 - 2 a l \cos \alpha} \ ,$$

$$u_2 = \sqrt{a^2 + l^2 + 2 a l \cos \alpha} \ ,$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{l \cos \alpha - a}{\sqrt{z^2 + u_1^2}} \ ,$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{l \cos \alpha + a}{\sqrt{z^2 + u_2^2}} \ .$$

Perciò la forza f_1 sarà in valore assoluto:

$$f_1 = \frac{m\,i}{\sqrt{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} \left(\frac{a - l\cos\alpha}{\sqrt{z^2 + u_1^2}} + \frac{a + l\cos\alpha}{\sqrt{z^2 + u_2^2}} \right) .$$

Se si conduce nel piano yz la QQ' perpendicolare alla BQ, essa rappresenta appunto la direzione della forza f_1; perciò la componente di questa diretta nel piano xy sarà $f_1 \cos \overline{Q'Qy}$, la cui proiezione normale alla direzione OP del solenoide vale $f_1 . \cos\overline{Q'Qy} . \cos\alpha$. Ma si ha:

$$\cos\overline{Q'Qy} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} :$$

quindi la componente F_1 della forza f_1 tendente a far muovere il solenoide nel piano xy è in valore assoluto:

$$F_1 = m\,i \frac{z\cos\alpha}{z^2 + l^2\cos^2\alpha} \left(\frac{a - l\cos\alpha}{\sqrt{z^2 + u_1^2}} + \frac{a + l\cos\alpha}{\sqrt{z^2 + u_2^2}} \right) \ldots (1).$$

Si passi ora all'azione esercitata dalla porzione AM verticale di corrente. Un suo elemento K qualunque, di lunghezza ds, esercita in P una forza df_2 diretta normalmente al piano PAM; la sua intensità è:

$$d f_2 = \frac{m\,i \operatorname{sen}\theta}{\rho^2} d s \ .$$

indicando qui con ρ la distanza PK e con θ l'angolo PKM. Se la variabile s si conta lungo la MA a partire dal punto M, l'esame della figura ci dà immediatamente:

$$s = \rho \cos\theta \ .$$

$$s \operatorname{tang}\theta = u_1 \ ,$$

in virtù delle quali relazioni, l'espressione della df_2, si può scrivere:

$$d f_2 = -\frac{m\,i}{u_1} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \ .$$

Le azioni elementari df_2 avendo tutte la stessa direzione, la loro risultante f_2 sarà:

$$f_2 = -\frac{m\,i}{u_1}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \;,$$

ed infine, se si osserva che si ha: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ pel punto M, e $\cos\theta_2 = \frac{z}{\sqrt{z^2+u_1^2}}$ pel punto A, sarà ancora:

$$f_2 = \frac{m\,i}{u_1}\frac{z}{\sqrt{z^2+u_1^2}} \;.$$

La componente F_2, orizzontale e normale al solenoide, della f_2 vale $f_2 \cos \overline{\mathrm{OPM}}$ e si ha:

$$\cos \overline{\mathrm{OPM}} = \frac{a\cos\alpha - l}{u_1} \;.$$

Perciò sarà:

$$F_2 = \frac{m\,i}{u_1^2}\frac{z(a\cos\alpha - l)}{\sqrt{z^2+u_1^2}} \qquad \ldots\ldots (2).$$

Infine si esamini la seconda porzione CN di corrente verticale. Per un suo elemento qualunque R di lunghezza ds, chiamisi ancora ρ la distanza RP dal polo P e sia ω l'angolo NRP. La sua azione df_3 su P si può scrivere:

$$df_3 = \frac{m\,i\operatorname{sen}\omega}{\rho^2}\,ds \;.$$

Ponendo: $\mathrm{NR} = s$, si scorge facilmente che fra le s, ρ, ω esistono le due relazioni:

$$s = \rho\cos\omega \;, \qquad u_2 = s\operatorname{tang}\omega \;,$$

le quali ci permettono di scrivere:

$$df_3 = -\frac{m\,i}{u_2}\operatorname{sen}\omega\, d\omega \;.$$

Le azioni esercitate dai singoli elementi della corrente CN essendo tutte normali al piano CPN, la loro risultante f_3 applicata in P avrà pure questa direzione e sarà:

$$f_3 = -\frac{m\,i}{u_2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \operatorname{sen}\omega\, d\omega \ .$$

essendo per il punto N

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \ ;$$

e per il punto C

$$\cos\omega_2 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + u_2^2}} \ .$$

Si avrà dunque

$$f_3 = \frac{m\,i}{u_2}\,\frac{z}{\sqrt{z^2 + u_2^2}} \ .$$

La componente F_3 di questa, atta ad imprimere movimento al solenoide, vale $f_3 \cos\overline{\mathrm{NPO}}$ e risulta dallo esame della figura che si ha:

$$\cos\overline{\mathrm{NPO}} = \frac{a\cos\alpha + l}{u_2} \ .$$

Per conseguenza si può scrivere:

$$F_3 = \frac{m\,i}{u_2^2}\,\frac{z\,(a\cos\alpha + l)}{\sqrt{z^2 + u_2^2}} \qquad \ldots\ldots (3).$$

Le forze F_1, F_2, F_3 sono sempre cospiranti e, come si sa, dirette verso la destra ovvero verso la sinistra della corrente, secondo che il polo P, a cui sono applicate, tende a star rivolto verso Sud ovvero verso Nord. Però questo polo P è pure punto d'applicazione dell'azione esercitata dal magnetismo terrestre. La componente orizzontale di quest'azione può essere rappresentata da $\frac{M}{l}$, essendo M il momento magnetico del solenoide e la proiezione di questa componente sulla normale ad OP nel piano xy è $\frac{M}{l}\operatorname{sen}\alpha$, essendo quest'ultima diretta oppostamente alle forze F_1, F_2, F_3.

Infine, la condizione d'equilibrio del solenoide è rappresentata dalla equazione:

$$F_1 + F_2 + F_3 = \frac{M}{l} \operatorname{sen} \alpha \qquad \ldots\ldots (4),$$

nella quale si possono sostituire le espressioni fornite dalle (1), (2), (3).

In un precedente lavoro (*) ebbi già occasione di studiare l'equilibrio di un solenoide sottoposto all'azione magnetica terrestre ed a quella d'una corrente elettrica. Allora però io considerava semplicemente il caso in cui agisce una corrente rettilinea ed indefinita, disposta orizzontalmente nel piano che passa per l'asse di rotazione del solenoide ed è parallelo al meridiano magnetico.

Giova qui ricordare che, in tali condizioni, l'equilibrio del solenoide presenta le tre particolarità seguenti:

1° *Esiste una certa distanza fra la corrente ed il solenoide, alla quale corrisponde una deviazione* MASSIMA *di quest' ultimo dal meridiano magnetico;*

2° *Quando la deviazione è massima, il suo seno è uguale al rapporto della distanza fra corrente e solenoide alla semilunghezza del solenoide stesso;*

3° *Quando la deviazione è massima, l'intensità della corrente è proporzionale al prodotto del seno per la tangente di tale deviazione.*

Or bene, nel caso che presentemente si considera, la corrente che agisce sul solenoide essendo costituita dalle tre porzioni MA, AC, CN, le leggi ora ricordate non sono certamente applicabili con esattezza. Tuttavia, quando la lunghezza $2a$ della porzione orizzontale fosse molto grande rispetto alla lunghezza $2l$ del solenoide, la corrente AC produrrebbe su quest'ultimo un'azione poco differente da quella che eserciterebbe se fosse indefinita, e pochissima sarebbe l'influenza dovuta alle porzioni MA e CN a cagione della lontananza loro dallo stesso solenoide. Per conse-

---

(*) *Sulla deviazione massima dell'ago calamitato sotto l'azione della corrente elettrica;* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tom. XXVI guenza, ogni qualvolta si renda abbastanza piccolo il rapporto $\frac{l}{a}$, esiste, anche nel caso che ora si studia, un valor massimo per la deviazione del solenoide, e la distanza z, che gli corrisponde, differisce assai poco dalla quantità $l \operatorname{sen} \alpha$ a cui sarebbe rigorosamente eguale, quando agisse una sola corrente orizzontale indefinita.

Perciò si potrà svolgere ciascuna delle espressioni (1), (2) e (3) in forma di serie ordinata secondo le potenze ascendenti di $\frac{l}{a}$ e di $\frac{z}{a}$: questi due rapporti essendo assai piccoli, si potranno, senza grave errore, trascurare in ogni serie i termini che ne contengono le potenze superiori alla seconda. Si ottengono a questo modo le seguenti espressioni approssimate:

$$F_1 = \frac{2\,m\,i\,z \cos\alpha}{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}\left(1 - \frac{z^2 + l^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,a^2}\right) ;$$

$$F_2 = \frac{m\,i\,z\,(a\cos\alpha - l)}{a^3} ;$$

$$F_3 = \frac{m\,i\,z\,(a\cos\alpha + l)}{a^3} .$$

L'equazione (4) esprimente la condizione d'equilibrio del solenoide ora diventa:

$$\frac{2\,m\,i\,z\cos\alpha}{z^2 + l^2\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{m\,i\,z\cos\alpha}{a^2} - \frac{M}{l}\operatorname{sen}\alpha = 0 ;$$

ovvero, ponendo per brevità: $\frac{2\,m\,i}{M} = q$;

$$q\,l\,z\left(\frac{1}{z^2 + l^2\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{1}{2\,a^2}\right) = \operatorname{tang}\alpha \qquad \ldots\ldots (5).$$

Quando la deviazione è massima, la derivata dell'angolo α rispetto alla distanza z è nulla; differenziando adunque la (5) e tenendo conto di questa condizione, si ottiene:

$$\frac{l^2\operatorname{sen}^2\alpha - z^2}{(l^2\operatorname{sen}^2\alpha + z^2)^2} + \frac{1}{2\,a^2} = 0 .$$

Questa equazione si può pur mettere sotto la forma:

$$\frac{z^4}{a^4}-\frac{2z^2}{a^2}\left(1-\frac{l^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a^2}\right)+\frac{2\,l^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a^2}+\frac{l^4\,\mathrm{sen}^4\,\alpha}{a^4}=0 \qquad \ldots(6).$$

Risolvendo quest'equazione rispetto a $\frac{z^2}{a^2}$, si scorge subito che il massimo della deviazione corrisponde a quella delle due radici, per cui si assume il radicale come negativo e si ottiene: $z=l\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Allo stesso risultato si giunge immediatamente trascurando nella equazione (6), in virtù delle considerazioni fatte dianzi, i termini

$$\frac{z^4}{a^4}, \qquad \frac{z^2\,l^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a^4} \qquad \text{e} \qquad \frac{l^4\,\mathrm{sen}^4\,\alpha}{a^4}.$$

Si sostituisca nella (5) a z il valore $l\,\mathrm{sen}\,\alpha$ ora trovato; si ha:

$$q\left(1+\frac{l^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a^2}\right)=2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha\,;$$

donde, per approssimazione:

$$q=2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha\left(1-\frac{l^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a^2}\right).$$

E ricordando che q vale $\frac{2mi}{M}$, si ha ancora:

$$i=\frac{M}{m}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha\left(1-\frac{l^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a^2}\right) \qquad \ldots(7).$$

Dal semplice studio ora eseguito scaturisce un' applicazione che può essere di qualche importanza. Sul fenomeno della deviazione massima che sono atte ad imprimere ad un solenoide (o ad un ago calamitato) le correnti elettriche, si può fondare un procedimento per la misura delle intensità di queste correnti. Il conduttore filiforme precedentemente studiato, formato delle tre parti rettilinee MA, AC, AN giacenti nel meridiano magnetico, s'immagini costituito in maniera che la porzione AC compresa fra le altre due si possa far muovere parallelamente a se stessa nel suo piano verticale, variando così la sua distanza z dal solenoide od ago, la quale è pure lunghezza comune alle due porzioni verticali MA e CN. Quando questo conduttore venga attraversato da una corrente elettrica e perciò rimova l'ago dal meridiano magnetico, si potrà innalzare od abbassare la porzione AC di conduttore, fino a che veggasi raggiunta la massima deviazione α. Allora l'intensità i della corrente impiegata si calcolerà ricorrendo alla formola (7), nella quale le quantità $\frac{M}{m}$ e $\frac{l^2}{a^2}$ sono sensibilmente costanti, se si adopera sempre lo stesso ago e la stessa lunghezza $2a$ del conduttore mobile.

Spero di potere, in una prossima comunicazione, sviluppare più ampiamente il concetto ora appena adombrato, e fors'anche presentare costruito un apparato reometrico, mercè cui la misura delle correnti elettriche di notevole intensità si possa ottenere con operazioni molto semplici e spedite.

Il Socio Cav. Prof. Alessandro DORNA presenta alcuni lavori dell'Osservatorio astronomico, di cui è Direttore, colle parole seguenti:

Presento all'Accademia, per l'annessione agli *Atti*, in continuazione delle precedenti, le *Osservazioni meteorologiche ordinarie* dell'ultimo trimestre dell'anno passato, coi rispettivi riassunti e diagrammi mensili, state redatte dall'Assistente Prof. Angelo CHARRIER.

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI
fatte nel mese di Ottobre.

La media delle altezze barometriche osservate nel mese è 34,89; media inferiore a quella di Ottobre degli ultimi quindici anni di mm. 2,65.

Il seguente quadro contiene i valori minimi e massimi dell'altezza barometrica.

Giorni del mese.	Minimi.	Giorni del mese.	Massimi.
4	31,28	7	44,22
15	32,07	17	42,60
21	27,25	22	33,96
25	25,02	27	36,59
31	28,80		

La media delle temperature è di 10°,7, inferiore di 2°,3 alla media di Ottobre degli ultimi quindici anni. — I valori estremi sono 2°,1 e 17°,5, che si ebbero nei giorni 18, il primo; 12, il secondo.

Quattordici furono i giorni con pioggia, e l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 32,10.

Il seguente quadro dà la frequenza dei venti:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
8	26	16	7	4	0	0	2	15	7	15	1	5	0	3	6

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Novembre.

La pressione barometrica in questo mese ha per media 43", 59, valore che supera di mm. 7, 28 la media di Novembre degli ultimi quindici anni.

Le oscillazioni della pressione barometrica non furono numerose, ma quasi tutte di ampiezza ragguardevole. Il quadro seguente racchiude i valori estremi:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
5	50,94	8	35,61
9	46,02	18	38,24
19	50,19	23	45,43
24	49,58	28	36,09

La temperatura variò fra + 15°, 0 (massima del giorno 8) e — 0°, 2 (minima del giorno 22); il suo valor medio + 6°, 8 supera di 0°, 6 il valor medio di Novembre degli ultimi quindici anni.

Si ebbero sette giorni con pioggia, e l'acqua raccolta raggiunse l'altezza di mm. 66,35.

La frequenza dei venti è data dal seguente quadro:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
3	12	7	0	2	0	2	0	11	26	28	2	6	0	1	4

Anno XVI **1881**

RIASSUNTO DELLE OSSERVAZIONI

fatte nel mese di Dicembre.

La media delle pressioni barometriche registrate in questo mese 40, 80 supera di mm. 3, 86 la media di Dicembre degli ultimi quindici anni.

Il quadro seguente contiene i massimi ed i minimi della pressione:

Giorni del mese.	Massimi.	Giorni del mese.	Minimi.
6	48,00	11	29,69
14	44,38	20	28,45.
27	54,34		

La temperatura in questo mese ha per valor medio 2°, 6, superiore di 0°, 6 al valor medio di Dicembre degli ultimi quindici anni.

I valori estremi sono + 11°, 0 e — 3°, 0; si ebbe il primo nel giorno 21, il secondo nei giorni 26 e 27.

Si ebbe pioggia in sette giorni e neve in uno solo; l'altezza dell'acqua caduta fu di mm. 36, 85.

La seguente tabella dà la frequenza dei venti:

N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
4	8	5	2	3	0	0	3	6	15	27	8	4	0	2	2

Le *Osservazioni meteorologiche* sopra accennate vedranno la luce nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia.

L'Accademico Segretario
A. SOBRERO.

STATUTO

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

UMBERTO I

PER GRAZIA DI DIO E PER VOLONTÀ DELLA NAZIONE

RE D'ITALIA

Vedute le Regie Patenti del 25 luglio 1783, colle quali fu approvato lo Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino;

Viste le aggiunte e le modificazioni apportate al detto Statuto col R. Biglietto del 12 marzo 1816 e col Decreto Reale del 6 febbraio 1879;

Viste le deliberazioni prese da quella R. Accademia nelle tornate del 13 e del 20 novembre 1881;

Sulla proposta del Nostro Ministro Segretario di Stato per la Pubblica Istruzione.

Abbiamo decretato e decretiamo:

È approvato lo Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino, annesso al presente Decreto e firmato d'ordine Nostro dal suddetto Ministro.

Ordiniamo che il presente Decreto, munito del sigillo dello Stato, sia inserto nella Raccolta ufficiale delle Leggi e dei Decreti del Regno d'Italia, mandando a chiunque spetti di osservarlo e di farlo osservare.

Dato a Roma, addì 2 febbraio 1882.

UMBERTO.

BACCELLI.

Visto, *il Guardasigilli:* G. ZANARDELLI.

STATUTO

Costituzione dell'Accademia.

Art. 1.

La Reale Accademia delle Scienze di Torino è divisa in due Classi: l'una di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali; l'altra di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Art. 2.

Ciascuna Classe si compone di 20 Soci nazionali residenti, 10 Soci nazionali non residenti, 10 Soci stranieri. Vi sono inoltre Soci corrispondenti nazionali e stranieri, di cui 100 per la Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, e 60 per quella delle Scienze Morali, Storiche e Filologiche. La ripartizione di essi, quanto a materie e nazionalità, è lasciata a ciascuna Classe.

Cariche accademiche.

Art. 3.

L'Accademia ha un Presidente e un Vice-Presidente, i quali non possono appartenere alla stessa Classe. Essi sono eletti dall'Accademia a Classi unite; durano in carica un triennio, e possono essere rieletti per un altro triennio. Posteriormente non possono essere più eletti, prima che sia trascorso un intervallo di tempo uguale a quello per cui tennero la carica.

Art. 4.

L'Accademia ha inoltre un Tesoriere, eletto pure a Classi unite.

Anch'egli dura in ufficio per tre anni, e può essere rieletto secondo le norme dell'articolo precedente.

Art. 5.

Ciascuna Classe si elegge un Direttore e un Segretario.

La durata in carica e la rielezione di essi sono soggette alle norme prescritte dall'art. 3° per il Presidente ed il Vice-Presidente.

Art. 6.

Il Presidente rappresenta l'Accademia ne' suoi rapporti col Governo, cogli altri Corpi scientifici e coi privati, e ne dirige l'Amministrazione.

Egli convoca e presiede le adunanze dell'Accademia e quelle del Consiglio d'Amministrazione.

È supplito, occorrendo, dal Vice-Presidente.

Art. 7.

Il Tesoriere ha il carico del patrimonio mobile e immobile dell'Accademia, e lo amministra giusta le deliberazioni del Consiglio d'Amministrazione: cura le entrate e le spese e ne tiene la contabilità; controfirma i mandati di pagamento.

Art. 8.

I Direttori di Classe, nell'assenza del Presidente e del Vice-Presidente, dirigono rispettivamente i lavori della Classe a cui appartengono.

Art. 9.

Ciascun Segretario redige i verbali delle adunanze della sua Classe, ne cura le pubblicazioni, ne tiene la corrispondenza, ne custodisce le carte ed i manoscritti, e controfirma le nomine della Classe.

Nelle adunanze a Classi unite fa da Segretario il più giovane dei due Segretari di Classe.

Elezioni.

Art. 10.

Vacando in una Classe un posto di Socio residente, il Presidente ne avverte la Classe, la quale fissa le sedute per l'elezione.

Nella prima seduta ciascun Socio residente trasmette al Segretario la sua proposta firmata, che non potrà contenere più di tre nomi; e il Segretario, data lettura delle proposte e delle firme, comunica la lista di quei nomi che siano stati proposti da non meno di tre Soci. Nella seduta successiva ha luogo la votazione a schede segrete sui nomi di detta lista, ed è eletto chi ottiene i quattro quinti dei voti.

Non riuscendo alcuno eletto, si ripete la votazione per ischede.

Non riuscendo neanche questa, si passa allo squittinio sui tre nomi che ottennero più voti. A parità di voti sarà posto a squittinio quello che ottenne più voti nelle votazioni precedenti, ed in caso di uguaglianza costante di voti, prevarrà l'età.

Se anche nello squittinio niuno ottiene i quattro quinti dei voti, l'elezione è rimandata a non meno di tre mesi. Le stesse norme valgono per la elezione de' Soci non residenti, stranieri e corrispondenti. Ma per l'elezione dei Corrispondenti bastano i due terzi dei voti.

Art. 11.

L'elezione del Presidente e del Vice-Presidente ha luogo nell'adunanza generale a ciò destinata.

Essa si compie mediante votazione a schede segrete, e richiede la maggioranza dei due terzi dei voti.

Non riuscendo alcuno, si ripete la votazione; e se anche in questa niuno ottiene i due terzi dei voti, la votazione per ischede si rinnova dopo un mese. Che se anche allora niuno ottiene i due terzi dei voti, si procede allo squittinio sui due nomi che ottennero più voti; ed è eletto colui che riporta il maggior numero di voti, e a parità il più anziano di nomina.

Giusta le stesse norme si compie la elezione alle altre cariche: quella del Tesoriere dalle Classi unite, quella dei Direttori e dei Segretari da ciascuna Classe.

Art. 12.

La elezione a Socio residente, non residente e straniero, non che quelle alle cariche accademiche, sono sottoposte all'approvazione Sovrana.

Art. 13.

Rimanendo vacante una carica accademica prima del termine stabilito, il successore dura in carica soltanto sino al compimento del detto termine.

Art. 14.

Niuna elezione è valida, se non sia prenunziata dall'ordine del giorno e se non intervenga la metà più uno di coloro che hanno diritto di votare.

Adunanze.

Art. 15.

Vi sono adunanze di ciascuna Classe, ed adunanze generali, ossia a Classi unite.

Esse sono pubbliche, salvo si tratti di persone, o di affari interni amministrativi.

Art. 16.

I Soci residenti hanno obbligo d'intervenire e diritto di votare nelle adunanze cui sono invitati.

I Soci non residenti e i Soci stranieri possono prender parte alle adunanze ed anche alle votazioni della Classe cui appartengono. salvo si tratti di nomine o di amministrazione.

I Soci corrispondenti possono prender parte alle adunanze, così pure quei Membri dei Corpi scientifici che vi siano invitati dal Presidente.

Art. 17.

Ciascun Socio ha diritto di fare letture e comunicazioni alla propria Classe, e d'intervenire all'adunanza dell'altra senza diritto di voto.

Ciascuna Classe può autorizzare persone estranee a fare lettura di lavori già presentati all'Accademia, previo parere di apposita Commissione nominata dal Presidente.

Art. 18.

Tutte le deliberazioni sono prese a maggioranza dei votanti. salvo i casi espressamente previsti dallo Statuto.

Art. 19.

In ogni anno accademico si tiene un'adunanza generale, in cui il Tesoriere, a nome del Consiglio di Amministrazione, presenta il bilancio consuntivo e preventivo, e a nome della Giunta di vigilanza della Biblioteca riferisce intorno all'operato di essa.

Le altre adunanze generali sono convocate dal Presidente quando ne ravvisi il bisogno, o almeno quattro Soci per Classe ne facciano domanda.

Art. 20.

Ciascuna Classe tiene quindici sedute per anno, dal Novembre a tutto Giugno.

Art. 21.

Nulla è innovato alle norme precedentemente seguite per la pensione ai Soci residenti.

Art. 22.

Il Socio residente, il quale abbandoni spontaneamente la sua residenza o sia trasferito ad altra residenza per ragione di pubblico durevole ufficio, e non sia intervenuto ad alcuna adunanza accademica per sei sedute consecutive della propria Classe, su dichiarazione della Classe a cui appartiene, passa nel numero dei non residenti.

Art. 23.

Il Socio residente che, senza giustificato motivo, non interviene alle sedute per un anno accademico. su dichiarazione della propria Classe, passa fra i Soci non residenti.

Art. 24.

Al Socio già residente che riacquisti questa sua qualità dopo averla perduta, non è computato per l'anzianità il tempo durante il quale non fu residente.

Pubblicazioni.

Art. 25.

Le pubblicazioni della Accademia si dividono in *Atti* ed in *Memorie*.

Art. 26.

Gli *Atti*, che si pubblicano in fascicoli mensili, contengono un rendiconto delle adunanze, comunicazioni, letture, discussioni ed elezioni accademiche, relazioni di Commissioni, e l'elenco dei doni ricevuti dall'Accademia. S'inseriscono inoltre negli *Atti*, previa lettura fatta alla Classe, i brevi lavori dei Soci, come pure di persone estranee, purchè presentati da un Socio sotto la propria responsabilità. Le comunicazioni di estranei, presentate direttamente alla Classe, possono essere inserite negli *Atti*, previo giudizio emesso da apposita Commissione nominata dal Presidente, e previa approvazione della Classe.

Il primo fascicolo di ogni anno conterrà l'elenco dei Soci.

Art. 27.

Le *Memorie*, che si pubblicano in volumi, contengono i lavori di maggior mole dei Soci letti alla Classe, e da questa ammessi con votazione segreta e colla maggioranza dei tre quarti dei votanti.

Esse contengono inoltre i lavori presentati da estranei alle Classi quando queste, dopo averli ammessi alla lettura, sul giudizio di apposita Commissione, ne abbiano poi approvato l'inserzione con votazione segreta e coi tre quarti dei voti.

Concorsi e premi.

Art. 28.

Nei limiti del bilancio, le due Classi per turno possono aprire dei concorsi a premio sopra temi o sopra materie determinate. Le norme per tali concorsi sono stabilite volta per volta dalla Classe da cui si apre il concorso.

Per i concorsi aperti coi fondi somministrati da speciali fondazioni o legati, l'Accademia segue le norme prescritte dalle tavole di fondazione.

Amministrazione.

Art. 29.

Compongono il Consiglio d'Amministrazione tutti gli Ufficiali dell'Accademia e due Soci per ciascuna Classe.

Questi sono nominati dalla Classe a semplice maggioranza, durano in ufficio tre anni, e possono essere confermati indefinitamente.

Art. 30.

Il Consiglio d'Amministrazione è convocato e presieduto dal Presidente dell'Accademia.

Esso determina le norme da seguirsi nell'Amministrazione dell'Accademia, ne discute ed approva i contratti e le spese, esamina i bilanci preventivi e consuntivi presentati dal Tesoriere, e sottomette i medesimi all'approvazione dell' Accademia nell'adunanza a Classi unite, di cui nell'art. 19.

Art. 31.

Spetta al Tesoriere la cura dei libri e delle carte relative alle entrate ed alle spese, agl'inventari degli averi, ai verbali del Consiglio d'Amministrazione, e alla corrispondenza amministrativa dell'Accademia.

Art. 32.

La Biblioteca dell'Accademia è sotto la vigilanza di una Giunta composta del Tesoriere e di due Accademici nominati uno per Classe a semplice maggioranza, duranti in ufficio un triennio, e confermabili indefinitamente.

Art. 33.

La Giunta per la Biblioteca, nei limiti delle somme stanziate in bilancio, sovraintende alla compera e alla conservazione dei libri e dei giornali, alla compilazione dei cataloghi, alla distribuzione e al prestito dei libri.

Essa propone ogni anno al Consiglio d'Amministrazione la somma da stanziarsi in bilancio, e per mezzo del Tesoriere riferisce alle Classi unite intorno al proprio operato.

Impiegati.

Art. 34.

L'Accademia avrà un conveniente numero d'impiegati subalterni. La nomina di essi spetterà al Consiglio d'Amministrazione.

Disposizioni transitorie.

Art. 35.

Le disposizioni del presente Statuto non alterano le posizioni accademiche attualmente acquisite.

Roma, addì 2 febbraio 1882

Visto d'ordine di S. M.

Il Ministro per la Pubblica Istruzione
G. Baccelli.

CLASSI UNITE

CLASSI UNITE

Adunanza del 12 Febbraio 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

In questa adunanza furono rieletti alla carica triennale di Presidente il sig. Comm. Senatore Ercole Ricotti, e di Vice-Presidente il sig. Comm. Prof. Prospero Richelmy.

Gli Accademici Segretari { Ascanio Sobrero
Gaspare Gorresio.

SOMMARIO

Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Classi Unite.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

dagli Accademici Segretari delle due Classi

VOL. XVII, DISP. 4ª (*Marzo* 1882)

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Marzo 1882.

TORINO, STAMPERIA REALE
di G. B. Paravia e C.

CLASSE

DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza del 12 Marzo 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Cav. A. NACCARI presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Dott. Angelo EMO, la seguente Nota

SUI CALORI SPECIFICI

E

SULLE DENSITÀ DELLE SOLUZIONI DI GLICERINA

NELL' ACQUA.

Eseguii una prima serie di esperienze sul calore specifico delle soluzioni acquose di glicerina, applicando il metodo del Kopp con qualche leggiera modificazione (1).

Un piccolo calorimetro di ottone a sezione elittica stava in altro vaso d'ottone ed era ben riparato con ischermi. La capacità del calorimetro era cm^3. 60.

Come equivalente in acqua del calorimetro, compresi pure il termometro e l'agitatore, assunsi g. 2,614, per valore medio fra due poco diversi, ottenuti l'uno col calcolo e l'altro con apposite esperienze.

Il termometro immerso nel calorimetro aveva scala arbitraria; una divisione corrispondeva a 0.1 di grado all'incirca. Confrontai

(1) H. KOPP, *Ann. d. Chemie ü. Pharmacie*, 1864-65, III *Supplementenband*.

diligentemente quel termometro con un termometro campione, prima di farne uso.

L'apparato riscaldante era un bagno di mercurio circondato con un altro d'olio; questo era posto a sua volta entro un bagno di sabbia. Non portai mai l'apparato riscaldante a temperatura più elevata di 50°.

Preparai tre tubetti di vetro per collocarvi il liquido di cui voleva determinare il calore specifico. Li chiusi con tappi di sovero lasciati per qualche tempo nell'olio caldo. Un filo di ferro passava attraverso il tappo e serviva ad agevolare il maneggio e la sospensione dei tubetti. Il peso d'acqua equivalente a ciascun d'essi fu determinato con 5 o 6 esperienze calorimetriche apposite. Ecco i medi valori ottenuti:

1° tubetto	0,558
2° »	0,549
3° »	0,557.

Nel determinare il calor specifico della glicerina e delle soluzioni di essa, potendo esser lenta la trasmissione del calore dal liquido contenuto nel tubetto all'acqua del calorimetro, in causa della viscosità di quel liquido, prolungai debitamente l'osservazione della temperatura dell'acqua dopo l'immersione e seguii per le correzioni il metodo più accurato e minuto.

Feci una quarantina di determinazioni del calore specifico della glicerina pura, e ottenni come valor medio $0,576 \pm 0,0005$. Ho determinato la densità a 0° di questa glicerina con un tubo alla Sprengel (1), e l'ho trovata eguale a 1,2691: con un picnometro, e usando glicerina già impiegata nelle determinazioni di calore specifico, trovai 1,2685. Il medio 1,2688 è più grande di quello dato dallo Schöttner nel suo studio sull'attrito interno della glicerina (2). Io credo pertanto di poter ammettere che la glicerina da me adoperata fosse quasi interamente priva d'acqua.

Per ciascuna soluzione eseguii da 9 a 15 determinazioni di calore specifico, e determinai la densità col tubo di Sprengel prima di usare la soluzione nell'esperienze sul calore specifico,

(1) Sprengel, *Pogg. Ann.*, CL. 459 (1873).
(2) Schöttner, *Sitzungsberichte d. Wien. Akademie*, LXXVII.

e col picnometro di poi. Le medie aritmetiche dei valori ottenuti stanno indicate nella tabella che riferisco più sotto: l'unità assunta per i calori specifici è quello dell'acqua a 0°, per le densità quella dell'acqua a 4°.

Il Berthelot ha desunto da alcune sue esperienze, che le soluzioni poco concentrate di glicerina hanno calore specifico maggiore di quello dell'acqua (1). Non avendomi dato lo stesso risultato le mie esperienze, io l'attribuii a mancanza di sensibilità e precisione del metodo adoperato. Per ciò eseguii una seconda serie d'esperienze col metodo calorimetrico del Joule (2), applicato poi dal Pfaundler (3), valendomi dello stesso apparecchio usato dal Pagliani (4) per lo studio dei calori specifici delle soluzioni saline e dei miscugli alcoolici. Questo metodo mi parve particolarmente opportuno per paragonare il calore specifico delle soluzioni di glicerina con quello dell'acqua. Per ciascuna soluzione ho fatto almeno tre esperienze; ho posto 15 grammi d'acqua e di soluzione rispettivamente nei piccoli calorimetri, e ho calcolato il calore specifico della soluzione con la formola

$$c = \frac{(P_1 + a_1)\theta_1 - \rho a_2 \theta_2}{\rho P_2 \theta_2},$$

dove P_1 e P_2 sono i pesi dell'acqua e della soluzione; a_1 a_2 gli equivalenti in acqua dei calorimetri con accessori; θ_1 θ_2 gli innalzamenti di temperatura rispettivamente prodotti in un dato tempo dalla corrente nell'acqua e nella soluzione; ρ il rapporto fra le resistenze dei due fili di platino immersi nei calorimetri. Ho trovato con apposite determinazioni calorimetriche $\rho = 1{,}063$, e una determinazione fatta col ponte di Wheatstone mi diede un valore concordante con quello.

Volendo soltanto eseguire una verificazione, non ho studiato che 7 soluzioni, prendendone 3 fra le più diluite. I valori medii ottenuti son registrati nell'ultima colonna segnata c'' della tabella.

La prima colonna della tabella stessa indica il grado di concentrazione ossia le parti in peso p di glicerina prese nei singoli

(1) Berthelot, *Annales de Chimie et de Physique*, (5), XVIII, 387 (1879).
(2) Joule, *Memoirs of Litterary and Philosophical Society of Manchester*, T. VII (1846), p. 559.
(3) Pfaundler, *Sitzungsber. der k. Wien. Ak.*, LIX, 1869.
(4) Pagliani, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, XVI, 1881.

casi per formarne 100 di soluzione. La seconda colonna contiene le densità a 0°, e sotto la media pressione di 741^{mm}, che sono graficamente rappresentate dalla fig. 1 in funzione del grado di concentrazione p. La terza contiene la quantità γ calcolata con questa formola

$$\gamma = p\,s\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right) + \frac{100\,s}{D} - 100,$$

in cui D e d sono rispettivamente le densità dell'acqua e della glicerina, s quella della soluzione. È questa la contrazione ossia la differenza fra la somma dei volumi dei componenti a 0°, e il volume della soluzione a 0°, espressa in centesime parti del volume della soluzione. Essa è rappresentata graficamente nella fig. 2 in funzione del grado di concentrazione. La massima contrazione corrisponde prossimamente alla soluzione del 55 %.

La quarta colonna contiene i calori specifici c determinati col metodo del Kopp; la quinta, i calori specifici c' calcolati nel modo indicato più sotto; l'ultima, come ho già detto, quelli determinati col metodo del Joule. Notisi che questi ultimi risultano sempre alquanto minori di quelli che spettano alle stesse soluzioni e sono dedotti con l'altro metodo. Ciò devesi principalmente al fatto che le quantità c sono valori medii spettanti all'intervallo di temperatura da 15 a 50°, le quantità c' invece corrispondono a temperature comprese fra 12 e 17°.

p. %	d	γ	c	c'	c''
0	0, 99987	0, 000	1. 003	1. 003	1, 002
1	1, 0021	» 010	—	1, 000	1, 000
2	» 0045	» 037	1, 001	0, 997	0, 994
5	» 0120	» 140	0, 994	» 986	0, 986
8	» 0198	» 263	» 980	» 976	—
10	» 0244	» 282	» 973	» 970	0, 972
15	» 0371	» 426	» 954	» 952	—
20	» 0504	» 600	» 935	» 934	—
25	» 0641	» 784	» 917	» 914	0, 909
30	» 0769	» 855	» 894	» 895	—
35	» 0905	» 973	» 876	» 875	—
40	» 1048	1. 126	» 852	» 854	—
45	» 1184	» 185	» 830	» 833	—
50	» 1317	» 190	» 813	» 813	0, 809
55	» 1456	» 218	» 787	» 791	—
60	» 1597	» 234	» 767	» 769	—
65	» 1731	» 161	» 748	» 747	—
70	» 1872	» 118	» 726	» 724	—
75	» 2011	» 030	» 700	» 701	0, 694
80	» 2160	0, 994	» 678	» 676	—
85	» 2286	» 738	» 656	» 655	—
90	» 2424	» 553	» 634	» 631	—
95	» 2558	» 306	» 611	» 608	—
98	» 2637	» 133	» 594	» 594	—
100	» 2688	» 000	» 576	» 584	0, 574

Per aver graficamente una relazione fra i valori c della tabella precedente e le densità d, ho tracciato una curva (fig. 3) prendendo per ascisse i valori d e per ordinate i valori c, della quale mi servii per calcolare una formola empirica col metodo dei minimi quadrati.

Così ho trovato la formola

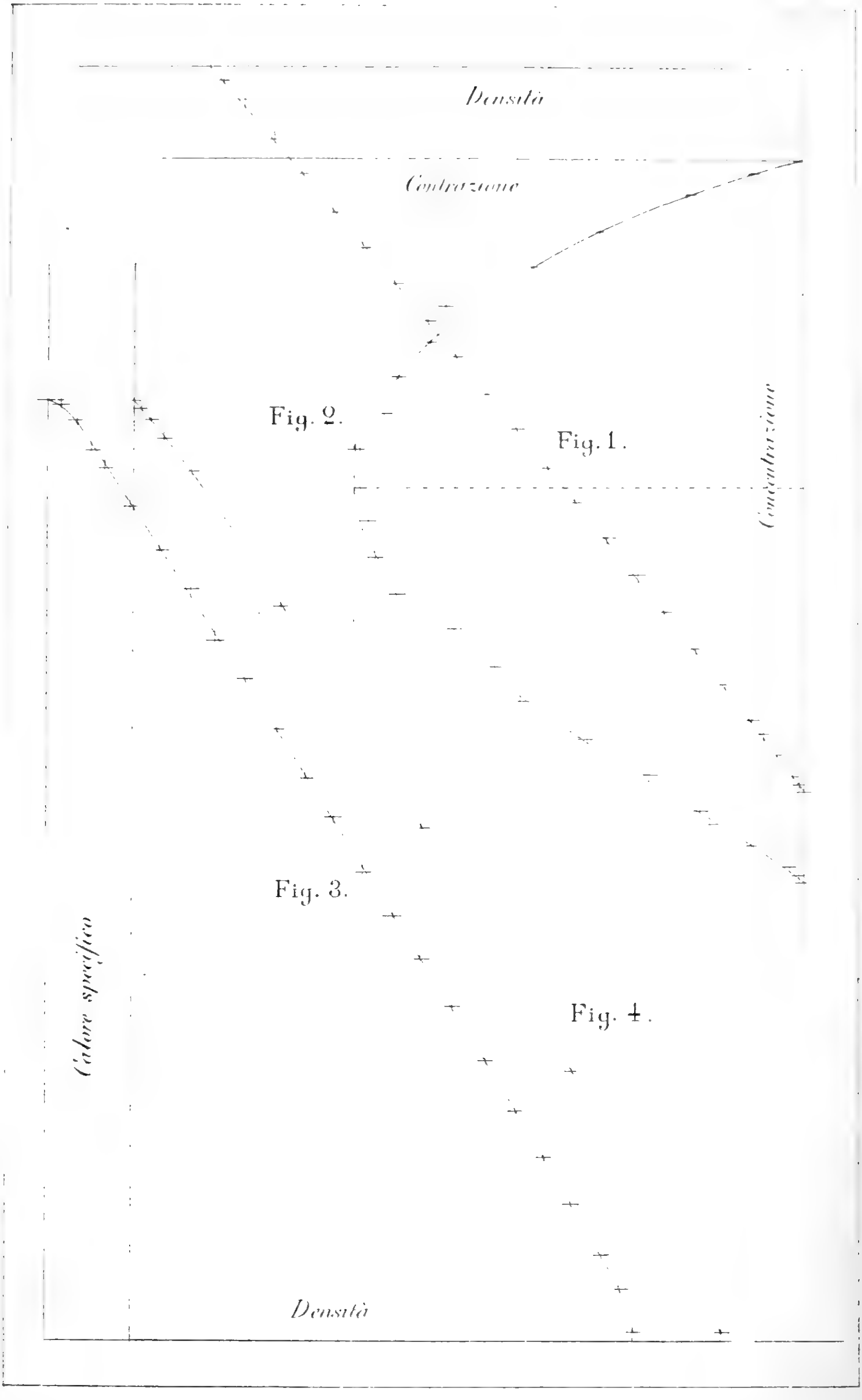
$$c' = 1{,}4818 + 0{,}3689\, d - 0{,}848\, d^2.$$

I valori con essa calcolati concordano abbastanza bene con i valori sperimentali. Nella fig. 4 è tracciata una curva analoga che rappresenta graficamente i valori c''; l'asse delle ordinate, come mostra la figura, venne spostato alquanto rispetto a quello della fig. 3, per rendere più chiaro l'andamento delle due curve. Si vede che esse conservano eguale distanza pressochè in tutta la loro lunghezza.

Infine, dall'esame dei valori c e c'' registrati nella tabella, appare manifesto che, secondo le mie esperienze, le soluzioni molto diluite di glicerina non hanno calore specifico maggiore di quello dell'acqua. Pertanto o questa differenza non esiste, o la sensibilità dei metodi usati non consente di seguirla, benchè quello del Joule in particolare sembri adattissimo all'uopo.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università

Torino, Febbraio 1882.


Densità
Contrazione
Fig. 2.
Fig. 1.
Concentrazione
Fig. 3.
Calore specifico
Fig. 4.
Densità

Il Socio Cav. E. D'Ovidio presenta e legge, a nome dell'Autore, sig. Dott. Saul Piazza, la seguente Nota

SULLE CORRISPONDENZE (1,2) ED (1,3)

I. — Corrispondenza [1, 2].

1)

Se chiamiamo $x\,(x_1\, x_2)$ e $\xi\ (\xi_1\, \xi_2)$ le coordinate omogenee degli elementi variabili di due forme di prima specie nella corrispondenza [1, 2], questa risulta determinata da un'equazione del tipo:

$$\begin{aligned} f = & \ (a_0\, x_1^2 + 2\, a_1\, x_1\, x_2 + a_2\, x_2^2)\, \xi_1 \\ & + (a_0'\, x_1^2 + 2\, a'_1\, x_1\, x_2 + a'_2\, x_2^2)\, \xi_2 = 0 \end{aligned}$$

e sotto forma simbolica $f = a_x^2\, \alpha_\xi = b_x^2\, \beta_\xi = \ldots = 0$.

La corrispondenza [1, 2] dipende da 5 parametri, e quindi è data da 5 coppie di elementi corrispondenti. Se a, α; b, β; c, γ; d, δ; e, ε; sono le coordinate di queste 5 coppie, l'equazione della corrispondenza sarà:

$$\begin{vmatrix} x_1^2\, \xi_1 & x_1\, x_2\, \xi_1 & x_2^2\, \xi_1 & x_1^2\, \xi_2 & x_1\, x_2\, \xi_2 & x_2^2\, \xi_2 \\ a_1^2\, \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1^2\, \beta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^2\, \gamma_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_1^2\, \delta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1^2\, \varepsilon_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0\,.$$

Il primo membro deve svilupparsi nella somma di più termini, ciascuno dei quali è funzione intera di determinanti del tipo $(x\,a)$... $(a\,b)$... $(\xi\,\alpha)$... $(\alpha\beta)$... Se ai determinanti $(p\,q)$ si sostituiscono i segmenti compresi fra i punti p e q che son loro proporzionali, si avrà una relazione fra i segmenti compresi fra 6 punti della prima punteggiata, ed i corrispondenti della seconda, relazione proiettiva su cui si potrebbe basare lo studio sintetico della corrispondenza. Essendo la trattazione generale troppo complicata, farò lo sviluppo precedente in casi particolari.

È evidente che tutte le coppie corrispondenti agli elementi ξ formano involuzione, e quindi vi saranno due coppie di punti coincidenti, che chiamerò *punti doppi*, e gli elementi ξ loro corrispondenti *elementi di diramazione*.

Il discriminante di f rispetto alle x, mi dà gli elementi di diramazione:

$$\begin{aligned} S = & \; (a_0\xi_1 + a'_0\xi_2)(a_2\xi_1 + a'_2\xi_2) - (a_1\xi_1 + a'_1\xi_2)^2 \\ = & \; (a_0 a_2 - a_1^2)\xi_1^2 + (a_0 a'_2 + a'_0 a_2 - 2a_1 a'_1)\xi_1\xi_2 \\ & + (a'_0 a'_2 - a'^2_1)\xi_2^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Il Jacobiano delle due forme

$$a_0 x_1^2 + \ldots = 0\,, \qquad a'_0 x_1^2 + \ldots = 0\,,$$

$$T = \begin{vmatrix} a_0 x_1 + a_1 x_2\,, & a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a'_0 x_1 + a'_1 x_2\,, & a'_1 x_1 + a'_2 x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 a'_1 - a'_0 a_1) x_1^2 + (a_0 a'_2 - a'_0 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a'_2 - a'_1 a_2) x_2^2 = 0$$

mi dà gli elementi doppi, che saranno reali, coincidenti od immaginarii, secondochè

$$R = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a'_0 a'_2 - a'^2_1) - (a_0 a'_2 + a'_0 a_2 - 2a_1 a'_1)^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ a'_0 & 2a'_1 & a'_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & a'_0 & 2a'_1 & a'_2 \end{vmatrix} \gtreqless 0\,.$$

R è ancora il discriminante degli elementi di diramazione, quindi questi e gli elementi doppi sono ad un tempo reali, coincidenti od immaginarii. Inoltre R, sotto forma di determinante, è il risultante delle due quadratiche $a_0 x_1^2 + \ldots = 0$, $a'_0 x_1^2 + \ldots = 0$ calcolato col metodo dialitico di SYLVESTER, e quindi col suo annullarsi dice che la corrispondenza $|1, 2|$ si riduce ad una corrispondenza $[1, 1]$ e ad un elemento fisso x.

Supposti gli elementi doppi reali, abbiano per equazione $X_1^2 = 0$ e $X_2^2 = 0$, dove X_1 e X_2 sono funzioni lineari di x_1 e x_2, allora ogni coppia del sistema avrà per equazione

$$\alpha X_1^2 + \beta X_2^2 = 0 \ .$$

e l'equazione della corrispondenza sarà

$$(\alpha \xi_1 + \alpha' \xi_2) X_1^2 + (\beta \xi_1 + \beta' \xi_2) X_2^2 = 0$$

e posto

$$\alpha \xi_1 + \alpha' \xi_2 = \Xi_2 \ , \qquad \text{e} \qquad \beta \xi_1 + \beta' \xi_2 = -\Xi_1 \ ,$$

si avrà

$$\Xi_2 X_1^2 - \Xi_1 X_2^2 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\Xi_1}{\Xi_2} = \frac{X_1^2}{X_2^2}$$

dove $\Xi_1 = 0$ e $\Xi_2 = 0$ rappresentano i due elementi di diramazione. Se è lecito fare nelle due forme geometriche sostituzioni lineari indipendenti nelle variabili, come avviene se le due forme geometriche sono distinte e non si considerano le loro reciproche posizioni, allora l'equazione $\frac{\Xi_1}{\Xi_2} = \frac{X_1^2}{X_2^2}$ si può assumere come forma *canonica* della corrispondenza, prese X_1, X_2, Ξ_1, Ξ_2 per coordinate degli elementi, altrimenti la forma canonica è

$$(\alpha \xi_1 + \alpha' \xi_2) X_1^2 + (\beta \xi_1 + \beta' \xi_2) X_2^2 = 0 \ .$$

2) *Relazione fra i segmenti.*

Siano α, β gli elementi di diramazione; a, b gli elementi doppi; γ, c una coppia data di elementi corrispondenti; ξ ed x una coppia variabile. Ξ_1, ecc. sono proporzionali alle distanze dei punti ξ ed x, rispettivamente da α, β, a, b, e quindi, essendo C una costante, sarà $\frac{\xi\alpha}{\xi\beta} = \left(\frac{xa}{xb}\right)^2 C$, e così pure $\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} = \left(\frac{ca}{cb}\right)^2 C$, dalle quali $(\alpha\beta\gamma\xi) = (abcx)^2$, dunque:

« Il rapporto anarmonico dei due elementi di diramazione, e di due elementi qualunque è uguale al quadrato di quello dei due elementi corrispondenti a questi ultimi e dei due elementi doppi » (*).

Siano d, δ; e, ε altre coppie di elementi corrispondenti. Si avrà $(\alpha\beta\gamma\delta)=(abcd)^2$, $(\alpha\beta\gamma\varepsilon)=(abce)^2$, donde

$$(\gamma\delta\varepsilon\xi)=\frac{[1-(abce)^2]\,[(abcd)^2-(abcx)^2]}{[1-(abcx)^2]\,[(abcd)^2-(abce)^2]}\,.$$

Siano ora γ, δ, ε, *i punti uniti*, e quindi coincidenti con c, d, e, e chiamiamoli p, q, r. Si avrà

$$(\text{essendo } ab.cd+bc.ad+ca.bd=0)$$

$$(pqr\xi)=\frac{pr.qx}{qr.px}\cdot\frac{bp.ar+ap.br}{bq.ar+aq.br}\cdot\frac{bq.ax+aq.bx}{bp.ax+ap.bx}$$

e dividendo numeratore e denominatore per

$$bp.ar\times bq.ax=bq.ar\times bp.ax$$

avremo

$$(pqr\xi)=(pqrx)\cdot\frac{1+(abpr)}{1+(abqr)}\cdot\frac{1+(abqx)}{1+(abpx)}\,.$$

3) *Costruzione della corrispondenza* [1, 2].

Si sa che se 0 ed Ω sono due fasci di raggi nella corrispondenza [1, 2], il luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti, è una curva di 3° ordine con punto doppio in 0 e con punto semplice in Ω. Stanno collegati colla cubica in tal modo generata, i 3 punti di flesso, le tangenti nel punto doppio, ecc.; ma questi elementi non dipendono dalla natura della corrispondenza [1, 2] colla quale sono solamente collegati gli elementi di diramazione e gli elementi doppi, e che non ha altra proprietà invariantiva che l'essere tali elementi reali od immaginarii; quelli invece dipendono unicamente dalla reciproca posizione dei due fasci. Quindi se gli elementi doppi sono reali, comunque dispo-

(*) Cfr. WEYR, *Beiträge zur Curvenlehre.*

niamo i due fasci nel piano, il punto Ω si troverà sempre sulla campana (*), altrimenti si troverà sulla foglia.

Se poi i due fasci di raggi hanno due raggi corrispondenti comuni, la cubica si decompone nel raggio comune $O\Omega$, ed in una conica passante per O e non passante per Ω. Donde si vede come si possa costrurre la corrispondenza $|1, 2|$ data da 5 coppie di elementi corrispondenti, proiettando i fasci in modo che due elementi corrispondenti vengano a coincidere. Tale costruzione ci permette di costrurre una cubica con punto doppio, dato questo e 6 altri punti.

Si osservi che si può proiettare la figura in modo che la conica diventi un cerchio e che, se Ω era interno alla conica, ne diventi il centro (se Ω è esterno, la trasformazione è immaginaria). Dunque i due fasci si posson proiettare in modo che l'angolo fatto da due raggi qualunque del primo fascio sia la metà dell'angolo formato dai due corrispondenti.

Per tale corrispondenza però, daremo una costruzione speciale applicabile a due punteggiate sovrapposte. Descrivansi i cerchi aventi i centri sulla retta data R, e passanti per le coppie di punti della involuzione. Questi cerchi formano un fascio avente i punti fondamentali reali, se i punti doppi della involuzione sono immaginarii, e precisamente i due punti fondamentali sono quelli, da cui si veggono le coppie della involuzione sotto angolo retto; essi sono poi immaginarii, se i punti doppi sono reali. Ad ogni punto ξ corrisponde un cerchio ed un centro C, ad ogni centro un cerchio ed un punto ξ; quindi esiste omografia fra gli elementi ξ ed i centri dei cerchi corrispondenti. Costrutta tale omografia è costrutta la corrispondenza $[1, 2]$.

Caso particolare di questa è il sistema polare di una cubica binaria. Si proietti la figura in modo da mandare all'∞ uno dei 3 punti dati, sicchè i punti radici della cubica siano A, B, ∞. Centro in A e B, e con raggi uguali ad AB descrivo due cerchi che s'incontrino in I, I', punti fondamentali del fascio di cerchi dell'involuzione. Dato un punto qualunque P, per determinarne il 1° sistema polare, si prenda $OP' = PO$ (essendo $AO = OB$) e col centro P' si costruisca il cerchio del fascio.

(*) Newton, *Theoria curvarum tertii ordinis.*

5) *Siano i due sostegni distinti.*

In tal caso si posson fare nelle due serie di variabili, trasformazioni lineari indipendenti fra loro.

Sia $f = a_x^2\,\alpha_\xi = b_x^2\,\beta_\xi = \ldots = 0$. Gli elementi di diramazione son dati da $S = S_\xi^2 = \alpha_\xi\,\beta_\xi$. Eliminando ξ fra le due equazioni $a_x^2\,\alpha_\xi = 0$, $a_y^2\,\alpha_\xi = 0$, e dividendo per $(x\,y)$, (poichè facciamo astrazione dal caso in cui y coincide con x), si avrà

$$(a\,b)\,(\alpha\beta)\,a_x\,b_y = 0\ ;$$

equazione che mi dà l'involuzione formata dalle coppie corrispondenti agli elementi ξ, per cui, ponendo $x = y$, avremo gli elementi doppi $T = T_x^2 = (a\,b)\,(\alpha\beta)\,a_x\,b_x$. I discriminanti poi di S e T, sono: $R = (a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(\alpha\gamma)\,(\beta\delta)$

$$\begin{aligned} R' &= (a\,b)\,(\alpha\beta)\,(c\,d)\,(\gamma\delta)\,(a\,c)\,(b\,d) \\ &= R - (\alpha\beta)\,(\gamma\delta)\,(a\,c)\,(b\,d)\,(a\,d)\,(b\,c) = R\ , \end{aligned}$$

come si era già visto. L'invariante simultaneo di f e di T (considerando f come funzione delle sole x), è $\Delta = (a\,b)\,(\alpha\beta)\,(a\,c)\,(b\,c)\,\gamma_\xi$, che è identicamente nullo, ossia tutte le coppie di punti corrispondenti agli elementi ξ, dividono armonicamente i punti doppi.

Le forme f, S, T, R, insieme con la

$$L = (a\,T)\,a_x\,T_x\,\alpha_\xi = a_x^2\,(\alpha S)\,S_x\ ,$$

formano (come fu già dimostrato dal Dott. Peano) il sistema completo di forme invariantive.

6) *I due sostegni coincidano.*

In tal caso le due serie di variabili sono assoggettate alla stessa sostituzione lineare. Prendasi un punto y sulla retta, e scrivasi l'equazione $\varphi = a_x\,a_y\,\alpha_\xi$ che dice che la coppia $x\,y$ divide armonicamente la coppia corrispondente a ξ. Dato x, questa equazione individua una corrispondenza [1, 1] avente per punti doppi $a_x\,a_\xi\,\alpha_\xi = 0$. Tale corrispondenza sarà un'involuzione, quando sia identicamente $a_x a_y \alpha_\xi = a_x a_\xi \alpha_y$ ossia $a_x (a\alpha)(y\xi) = 0$ e quindi $B_x = (a\alpha) a_x = 0$, cioè *esiste un sol punto x cui corrisponde una omografia in involuzione.*

Gli elementi uniti della corrispondenza son dati, ponendo in f, $x = \xi$, ossia $A_x^3 = a_x^2 \alpha_x$. Si potrebbero in tal modo cercare altre forme invariantive, però esiste un procedimento insegnato dal Clebsch (*Binären Formen*, § 7) per ridurre la ricerca del sistema completo di forme invariantive, a quello di più (nel nostro caso due) forme binarie semplici. Infatti si ha identicamente: $f = A_x^2 A_\xi + {}^2/_3 (x\xi) B_x$, e quindi il sistema completo di f, coincide con quello delle due forme A e B, e consta quindi delle 13 forme:

$$A_x^3,\quad H_x^2 = (AA')^2 A_x A'_x,\quad Q_x^3 = (AH) A_x^2 H_x,\quad \overline{R} = (HH')^2,\quad B_x,$$
$$C_x^2 = (AB) A_x^2,\quad D_x = (AB)^2 A_x,\quad E = (AB)^3,\quad F_x (HB) H_x,$$
$$G = (HB)^2,\quad M_x^2 = (QB) Q_x^2,\quad N_x = (QB)^2 Q_x,\quad P = (QB)^3.$$

Fra gli invarianti $\overline{R}$, E, G, P passa una relazione.

Infatti si ha l'identità $H^3 = -\frac{1}{2} Q^2 + \frac{\overline{R}}{2} A^2$, e ponendo in vece delle x, le B, si ha

$$G^3 = -\frac{1}{2} P^2 + \frac{\overline{R}}{2} E^2.$$

Se la corrispondenza [1, 2] è quella che proviene dal 1° sistema polare di una cubica binaria, è chiaro che deve essere identicamente $B_x = 0$.

Vediamo ora se sia possibile mediante una trasformazione lineare in una delle serie di variabile, trasformare ogni corrispondenza [1, 2] in una per la quale sia $B_x = 0$. Sian le nuove variabili y legate colle ξ, dalla $p_y \pi_\xi = 0$, allora la f diventa $a_x^2 p_y (\alpha\pi) = 0$. La forma analoga a B sarà $B' = (ap) a_x (\alpha\pi)$, che deve annullarsi identicamente, quindi dovrà essere

$$a_1 (ap)(\alpha\pi) = 0, \quad a_2 (ap)(\alpha\pi) = 0,$$

due equazioni fra i coefficienti della trasformazione $p_y \pi_\xi = 0$, che sono in numero di 4, e vi compaiono omogeneamente, quindi:

Il problema proposto si può risolvere in infiniti modi.

7) *Curve speciali.*

Proponiamoci ora quest' ultima questione. Supponiamo le $x\,(x_1 x_2)$ non più coordinate omogenee di punti di una retta, ma coordinate cartesiane dei punti di un piano; immaginiamo poi $\xi_1 = dx_1$, $\xi_2 = dx_2$. Le variabili x e ξ saranno in questo caso cogredienti, supposto di conservare l'origine degli assi, cambiandone la loro direzione. Integrata l'equazione differenziale che così si ottiene, si avrà l'equazione di una curva, che attraversa le rette del fascio passante per l'origine, sotto un angolo eguale a quello che fa il raggio vettore colla retta a lui corrispondente.

Posto $x_1 = t x_2$, donde $dx_1 = t\,dx_2 + x_2\,dt$, si ha, sostituendo ed integrando,

$$\int \frac{a_0 t^2 + 2 a_1 t + a_2}{(a_0 t^3 + [2 a_1 + a'_0] t^2 + [a_2 + 2 a_1'] t + a'_2)} \,.\, dt = -\log x_2 \,.$$

Supponiamo che i tre fattori lineari del denominatore siano disuguali, e siano α_1, α_2, α_3 le tre radici; avremo, indicando con A_1, A_2, A_3, tre costanti, e con C la costante d'integrazione:

$$-\log C x_2 = A_1 \log (t - \alpha_1) + A_2 \log (t - \alpha_2) + A_3 \log (t - \alpha_3)$$

ossia $\dfrac{1}{C x^2} = (t - \alpha_1)^{A_1} (t - \alpha_2)^{A_2} (t - \alpha_3)^{A_3}$, dove $A_1 + A_2 + A_3 = 1$.

Sostituendo a t, $\dfrac{x_1}{x_2}$, e moltiplicando tutto per $x_2 = x_2^{A_1 + A_2 + A_3}$, avremo (cambiato il significato di C):

$$[1] \ldots \qquad C = (x_1 - \alpha_1 x_2)^{A_1} (x_1 - \alpha_2 x_2)^{A_2} (x_1 - \alpha_3 x_2)^{A_3} \,,$$

equazione cercata, nella quale non occorre più sia $A_1 + A_2 + A_3 = 1$. Queste curve sono algebriche, quando A_1, A_2, A_3 sono commensurabili; α_1, α_2, α_3 poi sono i rapporti direttivi dei 3 raggi uniti, essendo le radici dell'equazione che si ha ponendo $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$. È facile a vedersi, come, avendo la [1], in cui le costanti siano qualunque, e differenziandola, si pervenga ad una equazione differenziale contenente a 1° grado le dx, ed a 2° grado ed omogeneamente le x.

II. — Corrispondenza [1, 3].

1) *Costruzione della corrispondenza* [1, 3].

Una corrispondenza [1, 3] è data da un'equazione del tipo

$$f=(a_0 x_1^3+3a_1 x_1^2 x_2+3a_2 x_1 x_2^2+a_3 x_2^3)\xi_1+(a'_0 x_1^3+\dots)\xi_2=0$$

o sotto forma simbolica $f=a_x^3\alpha_\xi=b_x^3\beta_\xi=\dots=0$. In essa compaiono omogeneamente 8 coefficienti, e quindi è data da 7 coppie di elementi corrispondenti.

Si sa già che, se O ed Ω sono due fasci di raggi nella corrispondenza [1, 3], il luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti è una curva di 4° ordine con punto triplo in O, e punto semplice in Ω, e che, se due raggi corrispondenti sono comuni, essa curva si decompone nel raggio comune $O\Omega$, ed in una cubica con punto doppio in O, e non passante per Ω. Ora una tale cubica si sa costrurre per punti, dato il punto doppio e 6 altri punti (per quanto abbiamo visto nella corrispondenza [1, 2]); donde ne viene che, date 7 coppie di elementi, si sa costrurre colla riga e col compasso l'elemento ξ corrispondente ad un dato x, e quindi si sanno costrurre le quartiche con punto triplo. In generale, data una corrispondenza $a_x^m\alpha_\xi=0$, si saprà costrurre il raggio ξ corrispondente ad un dato x, quando si sappia far l'analogo per la corrispondenza $(m-1, 1)$.

2) *I due sostegni sian distinti. Quaderne fondamentali.*

Gli elementi di diramazione son dati da

$$D_\xi^4=(ab)^2(cd)^2(ac)(bd)\alpha_\xi\beta_\xi\gamma_\xi\delta_\xi .$$

Se eliminiamo ξ fra le due equazioni $a_x^3\alpha_\xi=0$, $a_y^3\alpha_\xi=0$ arriviamo, dopo aver diviso pel fattore (xy), all'equazione

$$M=m_x^2\mu_y=2(ab)(\alpha\beta)a_x^2b_y^2+(ab)(\alpha\beta)a_x a_y b_x b_y=0 ,$$

equazione che, dato x, mi dà i due punti y, che insieme ad esso fanno una terna della corrispondenza.

Gli elementi uniti di tale corrispondenza

$$\Delta = \Delta_x^{\,4} = (ab)(\alpha\beta)\,a_x^2\,b_x^2$$

sono *gli elementi doppi* della $[1, 3]$.

Si verifica facilmente che è:

$$2\,m_x^2\,\mu_y^2 - 6\,\Delta_x^2\,\Delta_y^2 = (ab)^3(\alpha\beta)(xy)^2$$

e posto

$$L = (ab)^3(\alpha\beta)\ ,$$

si ha:

$$M = m_x^2\,\mu_y^2 = 3\,\Delta_x^2\,\Delta_y^2 + \frac{1}{2}\,L\,(xy)^2\ .$$

Se ora scriviamo la condizione, perchè i punti y coincidano, avremo i 4 punti x che formano terne cogli elementi doppi. Tali punti, che chiameremo *elementi complementari*, son dati adunque

da $$\Theta = \Theta_x^{\,4} = \frac{3}{2}\,(\Delta\,\Delta')^2\,\Delta_x^2\,\Delta'^2_x + L\,\Delta_x^{\,4}\ ,$$

ma $$H = H_x^{\,4} = (\Delta\,\Delta')^2\,\Delta_x^2\,\Delta'^2_x$$

non è che l'Essiana di Δ, dunque $\Theta = \frac{3}{2}\,H + L\,\Delta$, ossia « La quaderna degli elementi complementari appartiene all'involuzione individuata dagli elementi doppi e dalla loro Essiana ». Dall'ultima formola si ha ancora che « Se L è nullo, la quaderna degli elementi semplici coincide con l'Essiana degli elementi doppi ».

3) *Invarianti delle quaderne fondamentali.*

Calcoliamo gli invarianti di Δ, Θ, D.

Si ha subito $i_\Delta = (ab)\,(\alpha\beta)\,(cd)\,(\gamma\delta)\,(ac)^2\,(bd)^2 - \frac{1}{3}\,L^2$ $=$ (dopo qualche passaggio) $= \frac{1}{2}\,L^2 - \frac{1}{3}\,L^2 = \frac{1}{6}\,L^2$, dunque se L è nullo, la quaderna degli elementi doppi è equianarmonica. j_Δ lo prenderemo per fondamentale. Gli invarianti di Θ si hanno subito, appartenendo Θ all'involuzione data da Δ ed H, e si ha

$$i_\Theta = \frac{17}{96} L^4 + 3 L j_\Delta \,, \quad j_\Theta = \frac{9}{8} j_\Delta^2 + \frac{19}{16} j_\Delta L^3 + \frac{47}{3^3 2^8} L^6 \,,$$

ossia se L è nullo, anche gli elementi complementari sono equianarmonici, ma non è vero il reciproco.

Per calcolare poi semplicemente i_D, j_D ricorreremo ad un artificio. Sia $E = e_x^2 \varepsilon_\xi^2 = (a b)^2 a_x b_x \alpha_\xi \beta_\xi = 0$ corrispondenza [2, 2], per la quale ad ogni punto ξ corrisponde la coppia di punti Essiana della terna corrispondente a ξ in f. È chiaro che gli elementi di diramazione (nelle ξ) di E, non sono che quelli di f, ossia $(e e')^2 \varepsilon_\xi^2 \varepsilon_\xi'^2 = D_\xi^4$. Se ora poniamo

$$F_x^4 = (\varepsilon \varepsilon')^2 e_x^2 e_x'^2 = (a b)^2 (c d)^2 (\alpha \gamma) (\beta \delta) a_x b_x c_x d_x \,,$$

si sa dalla teoria generale della corrispondenza [2, 2], che $i_D = i_F$, $j_D = j_F$. Ma, ricorrendo alle note identità, dopo qualche scambio di lettere, si ha che $F = \frac{1}{3} L \Delta + H$, per cui, ricorrendo anche qui alle formole date dal Clebsch, si ha che

$$i_D = i_F = \frac{3}{2} L j_\Delta + \frac{1}{72} L^4, \quad j_D = j_F = \frac{10}{27} j_\Delta L^3 + \frac{1}{3} j_\Delta^2 + \frac{17}{6^5} L^6 \,,$$

dunque, se L è nullo, anche la quaderna degli elementi di diramazione è equianarmonica, non è però vero il reciproco.

4) *Collineazione fra le involuzioni di quaderne.*

Nelle 2 punteggiate abbiamo due sistemi di quaderne in involuzione. Nella prima abbiamo Δ, H, Θ ed F colle loro Essiane ecc. Infatti essendo

$$H_{k\lambda} = H \left(k^2 + \frac{1}{36} L^2 \lambda^2 \right) + \Delta \left(\frac{1}{18} L^2 k \lambda + \frac{1}{3} j_\Delta \lambda^2 \right) ,$$

si ha:

$$H_\Theta = \frac{15}{16} L^2 H + \Delta \left(\frac{1}{12} L^3 + \frac{3}{4} j_\Delta \right) ,$$

$$H_F = \frac{1}{12} L^2 H + \Delta \left(\frac{1}{54} L^3 + \frac{1}{3} j_\Delta \right) .$$

Nella seconda poi abbiamo D, la sua Essiana H_D, e gli elementi doppi in E, che diremo Γ. Infatti si ha (*): $H_D = \Gamma + \frac{1}{3} \overline{\overline{L}} D$, $\left(\text{indicando con } \overline{\overline{L}} = \frac{1}{4} L^2, \text{ l'invariante di } E, \text{ così chiamato dal}\right.$ $\left.\text{Capelli}\right)$, e nel nostro caso adunque $H_D = \Gamma + \frac{1}{12} L^2 D$.

Dato uno solo, restano determinati tutti i rapporti anarmonici di queste quaderne, però, la relazione che fra essi passa, risulta piuttosto complicata. Siano le due involuzioni:

$$\lambda \Delta + \mu H = 0 , \quad \lambda' D + \mu' \Gamma = 0 .$$

Si è visto che gli invarianti di D non sono che quelli di

$$F = \frac{1}{3} L \Delta + H .$$

e che quelli di Γ coincidono con quelli di $\Omega \Delta$ (dove Ω è un invariante), quindi le quaderne

$$\lambda' D + \mu' \Gamma = 0 , \quad \lambda' \left(\frac{1}{3} L \Delta + H \right) + \mu' \Omega \Delta = 0$$

hanno rapporti anarmonici eguali; ora la seconda si può scrivere così:

$$\left(\frac{1}{3} \lambda' L + \mu' \Omega \right) \Delta + \lambda' H = 0 ,$$

e quindi, ponendo

$$\lambda \lambda' - \frac{1}{3} \mu \lambda' L + \mu \mu' \Omega = 0 ,$$

si stabilirà corrispondenza univoca fra le quaderne in involuzione, tale cioè che i rapporti anarmonici delle quaderne corrispondenti siano uguali.

(*) Memoria del Capelli, 1879, pag. 86, Giornale del Battaglini.

5) *Sistema completo.*

Il sistema completo di forme invariantive della corrispondenza [1, 3] si può facilissimamente trovare, ricorrendo ad una proprietà *caratteristica* della corrispondenza [1, 3], che è la seguente:

« È possibile fare, ed in modo unico, nelle variabili ξ una trasformazione lineare tale, che la nuova corrispondenza sia la prima polare di una biquadratica ». Sian le nuove variabili y date dalla $p_y \pi_\xi = 0$, si avrà

$$f' = a_x^3 p_y (\alpha \pi) ,$$

e se questa è la prima polare di una biquadratica A_x^4, dovrà essere

[1] . . . $$\alpha_x^3 p_y (\alpha \pi) = A_x A_y ,$$

donde $$\alpha_x^3 p_x (\alpha \pi) = A_x^4$$

e $$3 \alpha_x^2 a_y p_x (\alpha \pi) + \alpha_x^3 p_y (\alpha \pi) = 4 A_x^3 A_y ,$$

dalle quali $$\alpha_x^2 (a p)(\alpha \pi) = 0 .$$

Perchè ciò avvenga, devono annullarsi i tre coefficienti, si hanno così 3 equazioni lineari omogenee fra i 4 coefficienti di $p_y \pi_\xi = 0$, e resta così determinata la sostituzione lineare.

Ora io dico che il sistema completo di forme invariantive della corrispondenza, contenenti le ξ, è dato dai sistemi polari delle forme invariantive di A_x^4, quando si faccia, nelle y, la sostituzione lineare inversa della primitiva.

Sieno infatti A_1, A_2 . . . questi sistemi polari prima della sostituzione; B_1, B_2 . . . le forme ottenute dopo tale sostituzione, e C_1, C_2 . . . le forme invariantive fondamentali della corrispondenza, contenenti le ξ. È chiaro, che le B sono funzioni intere delle C, e così pure le C sono funzioni intere delle B, poichè, se facciamo nelle B e nelle C la trasformazione inversa, le B si riducono alle A, e le C a funzioni intere delle A; quindi si deduce che le C si esprimono in funzione lineare delle B, e che possiamo quindi assumere le B per forme invariantive fondamentali della corrispondenza, il che appunto volea dimostrare.

Restano a trovarsi gli invarianti ed i covarianti contenenti le sole x. Notisi intanto come $i_\Delta = \frac{1}{6} L^2$ ed j_Δ sono indipendenti fra loro; infatti nella corrispondenza speciale $a_x^3 a_y = 0$, essi sono i due invarianti dell'Essiana di a_x^4, e come tali indipendenti, ed a maggior ragione quindi saran tali in una corrispondenza qualunque.

Ciò posto, si vede chiaramente come ogni forma che ammette il fattore $(\alpha\beta)$, ammette pure il fattore (ab), e come ogni forma contenente il fattore $(\alpha\beta)(ab)^2$ contiene il fattore effettivo L. Quindi si deduce che le forme contenenti a 2° grado i coefficienti di f, sono solamente L e Δ.

Ogni forma poi non contenente le ξ, deve contenere tutte le lettere greche sotto simboli determinanti, quindi è di grado pari, e si potrà scriver sotto la forma

$$F = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta)\ldots(ab)(cd)\ldots\Pi\left(\overset{2}{a}, \overset{2}{b}\ldots x\right).$$

Potremo in quest'ultima forma mettere in evidenza le lettere a e b; se Π non contiene il fattore (ab) [poichè altrimenti ci sarebbe il fattore L], potremo scrivere

$$F = (\alpha\beta)(ab)\, a_x a_y b_z b_t \Phi,$$

y, z, r, t potendo essere variabili o simboli, e Φ una espressione, avente, oppure no, significato effettivo.

In ogni caso avrà significato effettivo

$$(ux)(uy)(uz)(ut)\cdot\Phi = F'^{\,4}_{u}.$$

Se si fa il quarto scorrimento di F' su Δ, si trova F; quindi: « ogni forma di grado $2n$ nei coefficienti, contenente n fattori determinanti greci, ed a grado qualunque la x, si può ottenere mediante uno scorrimento di Δ, sopra una forma di grado $2n-2$ ».

Ora si è visto che le forme di 2° grado sono L e Δ; quelle di 4° quindi si avranno facendo gli scorrimenti di Δ sopra queste due. L (essendo invariante) non ammette scorrimenti, e Δ ce ne dà due: H, $i_\Delta = \frac{1}{6} L^2$. Le forme di 6° grado si otterranno facendo gli scorrimenti di Δ su queste di 4°, e sono;

$T = (\Delta H) \Delta_x^3 H_x^3$ ed $j_\Delta = (\Delta H)^4$; il secondo scorrimento darebbe $\frac{i_\Delta}{6} . \Delta = \frac{L^2}{36} . \Delta$, ed il terzo è identicamente nullo. La teoria delle biquadratiche ci insegna che gli scorrimenti di Δ sopra T si esprimono in funzione dei precedenti, e non potendo j_Δ, che è un'invariante, ammettere scorrimenti, il sistema rimane chiuso, e quindi gli invarianti fondamentali sono due, L, j_Δ, ed i covarianti nelle sole x, tre: Δ, H, T.

6) *Singolarità.*

1) Perchè la corrispondenza [1, 3], si riduca ad una corrispondenza [1, 2], e ad un punto fisso, deve annullarsi il risultante delle due forme $a_x^3 \alpha_1 = 0$, $a_x^3 \alpha_2 = 0$, che, calcolato, seguendo il procedimento generale ideato dal CLEBSCH (*Binären Formen*, § 28), si trova essere $8 R = j_\Delta - \frac{1}{36} L^3$. Il discriminante di Δ è $i_\Delta^3 - 6 j_\Delta^2 = -\frac{3}{4} R \left(j_\Delta + \frac{1}{36} L^3 \right)$, ossia « Se R è nullo, la quaderna Δ, e quindi anche H, Θ, F ecc., ammettono un punto doppio ».

Il punto doppio di Δ è precisamente il punto fisso x, che corrisponde ad ogni punto ξ. Di più è facile vedere che anche le quaderne della 2ª punteggiata, p. es. D, Γ ecc., hanno punto doppio, e precisamente quel punto ξ, che, nella corrispondenza superstite [1, 2], corrisponde al punto fisso x.

2) Perchè la corrispondenza [1, 3] si riduca a due punti fissi e ad una corrispondenza [1, 1], Δ deve avere due punti doppi, ossia deve essere un quadrato perfetto, e quindi deve essere $j_\Delta . \Delta - i_\Delta . H = 0$, e nel nostro caso $j_\Delta \Delta - \frac{1}{6} L^2 H = 0$.

3) Perchè una terna di punti consti di 3 punti coincidenti, deve essere $a_x a_1^2 \alpha_\xi = 0$, $a_x a_1 a_2 \alpha_\xi = 0$, $a_x a_2^2 \alpha_\xi = 0$, e quindi in generale ciò non si presenta. Cerchiamo quale condizione deve verificarsi. Dalle 3 equazioni scritte si ricava:

$$a_x b_x^2 (\alpha\beta)(ab) a_1 = 0, \qquad a_x^2 b_x (\alpha\beta)(ab) b_2 = 0,$$

e quindi Δ deve avere un punto doppio, e non potendo ciò provenire dall'annullarsi di R, dovrà annullarsi l'altro fattore del discriminante di Δ, ossia deve essere nullo $\Omega = j_\Delta + \frac{1}{36} L^3$.

7) *I due sostegni siano identici.*

Il sistema completo di forme invariantive si può trovare in questo caso, in modo analogo a quello usato nella [1, 2]. Posto $A_x^4 = a_x^3 \alpha_x$, e $B_x^2 = (a\alpha) a_x$, si ha $f = A_x^3 A_\xi + {}^3/_4 (x\xi) B_x^2$, e quindi il sistema cercato è identico a quello delle due forme A_x^4 e B_x^2.

In questa adunanza furono eletti a Corrispondenti dell'Accademia, per la Sezione di Matematica applicata, i signori Rodolfo Clausius, Prof. all'Università di Bonn, e l'Ing. Alberto Castigliano, Capo Sezione presso la Società delle Strade ferrate a Milano; per la Sezione di Fisica generale e sperimentale, i Signori Emilio Villari, Prof. nella R. Università di Bologna, e Antonio Roiti, Prof. nell'Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze; per la Sezione di Chimica generale e applicata, i Signori Carlo Friedel, dell'Istituto di Francia, e Carlo Remigio Fresenius, Prof. a Wiesbaden; nella Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia, i Signori Giovanni Capellini, Prof. nella R. Università di Bologna, e Antonio Stoppani, Prof. nel R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze.

Adunanza del 26 Marzo 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Conte Tommaso SALVADORI presenta il seguente suo lavoro:

DESCRIZIONE
DI UNA NUOVA SPECIE
DEL
GENERE COLLOCALIA
ed osservazioni
INTORNO ALLA
C. INFUSCATA, SALVAD.

Collocalia marginata, sp. nov.

? COLLOCALIA FUCIPHAGA, Tweedd. (nec Thunb.), P. Z. S. 1878, p. 429 (Luzon).

Supra aeneo-nigra, viridi ac cyaneo nitens, uropygii plumis distincte albo limbatis; alis et cauda dorso concoloribus; loris macula alba parum conspicua notatis; lateribus capitis fusco-nigris: gula pectoreque fuscis, plumis albo marginatis; abdomine albo, fusco striato, basi plumarum fusca; subcaudalibus nigro-viridibus nitentibus, majoribus unicoloribus, minoribus albo marginatis; rostro et pedibus nigris.

Long. tot. $0^m,087$; al. $0^m,093$; caud. $0^m,038$.

Hab. in Cebu (ins. Philippinis) (*Burger*).

Obs. *Collocalia* C. ESCULENTAE (Linn.) *simillima, sed ob uropygii plumas albo marginatas et caudam immaculatam diversa; a* C. LINCHI, H. et M., *cui quoque simillima est, ob uropygii plumas albo marginatas differt.*

Il tipo di questa specie è un esemplare del Museo di Dresda, raccolto dal Burger e che dal Meyer m'è stato inviato, affinchè lo esaminassi e lo descrivessi, se appartenente ad una nuova specie; da una lettera del medesimo apprendo che nel Museo di Berlino si conserva un altro esemplare proveniente anch'esso da Cebu, e che sembra riferibile alla medesima specie, sebbene di questa cosa non si possa aver certezza mancando quell'esemplare delle piume caratteristiche del groppone.

Ho inviato allo Sharpe di Londra il tipo di questa specie affinchè lo confrontasse coi tipi della *Collocalia troglodytes*, G. R. Gr., conservati nel Museo Britannico, ed egli mi ha assicurato che si tratta di una specie differente, avendo la *C. troglodytes* colore più bruno ed una vera *fascia* bianca a traverso il groppone (1).

Questa nuova specie è la sola del genere *Collocalia* trovata finora in Cebu, ma altre tre sono state indicate come viventi nelle Filippine, cioè la *C. troglodytes*, G. R. Gr., in Luzon (Wald., Trans. Zool. Soc. IX, p. 158), in Mindanao (Tweedd., P. Z. S. 1877, p. 823) ed in Panay (fide Wardlaw-Ramsay, Tweedd. Orn. Works, p. 656, n. 73), la vera *C. fuciphaga* (Thunb.) (=*francica*, Tweedd. nec. Gm.) in Negros (Tweedd., P. Z. S. 1878, p. 282) e la *C. linchi*, H. et M. (= *fuciphaga*, Wald.) in Luzon; ma è molto probabile, che l'esemplare conservato nel Museo di Darmstadt, indicato come proveniente da Luzon e da Lord Tweeddale (P. Z. S. 1878, p. 429) attribuito alla specie che egli chiama *C. fuciphaga* (Thunb.), ma che invece deve essere appellata *C. linchi*, H. et M. (2), appartenga invece alla *C. marginata*, rappresentante della *C. linchi* delle Isole della Sonda; per cui le tre specie viventi nelle Filippine sarebbero la *C. troglodytes*, G. R. Gr., la *C. fuciphaga* (Thunb.) e la *C. marginata*, mihi.

---

(1) Giudicando dalla figura che il Gray ha dato della *C. troglodytes* (Gen. B. pl. 19) pare che essa appartenga al gruppo della *C. francica* (Gm.), ma Lord Tweeddale, dopo aver detto che realmente essa appartiene a quel gruppo (*Trans. Zool. Soc.* IX, p. 158), più tardi (*P. Z. S.* 1878, p. 283) afferma che essa spetta invece al gruppo che contiene la *C. esculenta!* Le specie del genere *Collocalia* dovranno essere di nuovo studiate monograficamente prima che esse siano conosciute a dovere.

(2) Io credo di aver dimostrato (Atti R. Acc. Sc. Tor. 1880, p. 345. — Orn. Pap. e Moluc. I, p. 545) che la *C. linchi*, H. et M. non è identica colla *C. fuciphaga* (Thunb.).

Collocalia infuscata Salvad.

Collocalia infuscata, Salvad., Atti R. Acc. Sc. Tor. XV, p. 348 (1880) (Ternate).

Ricercando fra alcune pelli guaste di uccelli, portate dal Beccari da Ternate, ne ho trovate tre simili in tutto al tipo di questa specie, e perciò sono confermato nel crederla perfettamente distinta.

Torino, Museo Zoologico 23 Marzo 1882.

Il Socio Cav. Andrea NACCARI presenta il seguente lavoro, da lui fatto in collaborazione col Prof. Manfredo BELLATI,

SUL
RISCALDAMENTO DEI CORPI ISOLANTI
SOLIDI E LIQUIDI
IN CAUSA DI SUCCESSIVE POLARIZZAZIONI ELETTROSTATICHE.

I fenomeni che avvengono nell' interno dei corpi isolanti, quando questi vengono sottoposti ad induzione elettrostatica, sono ancora mal noti. Quando, ad esempio, le armature di un condensatore vengono alternamente e successivamente caricate con le opposte elettricità, benchè alcune esperienze abbiano indicato che avviene riscaldamento, v'ha ancora chi per principii teorici non l'ammette.

Werner Siemens nel 1865 fece un'esperienza per verificare il riscaldamento del vetro d'un condensatore. Egli usò a quest'uopo una pila termoelettrica di molte coppie, pose metà delle saldature di questa in uno strato di mastice fra due lamine di vetro, ciascuna delle quali era armata sulla faccia esterna, e applicati alle armature i reofori d'un apparato d'induzione, ottenne segni non dubbi di riscaldamento (1). Recentemente il Righi, studiando il fenomeno della dilatazione elettrica, notò che nel caso di cariche successive e alternate l'allungamento d'un tubo di vetro armato sulle due faccie doveva in parte attribuirsi a riscaldamento (2).

---

(1) W. SIEMENS, *Pogg. Ann.*, CXXV, 197 (1865, II).
(2) RIGHI, *Mem. dell'Acc. di Bologna* (3), X, 1879.

Con le esperienze che descriviamo più sotto noi abbiamo posto in chiaro per altra via non solo il riscaldamento degli isolanti solidi, ma anche quello dei liquidi pure isolanti posti fra le armature d'un condensatore, che vengano successivamente caricate con un apparecchio d'induzione. Queste esperienze non sono ancora condotte a tal punto da dare una misura dell'intensità del fenomeno e stabilirne le leggi. Speriamo di far ciò fra poco proseguendo il nostro studio.

I primi tentativi furono fatti con un tubo da saggi, in cui ne stava inserito un altro: quest'ultimo attraversava un tappo di sovero applicato all'orlo del primo. Si turò con ceralacca ogni interstizio. Nell'intervallo fra i due tubi si pose un liquido isolante. Un cannello capillare attraversava il tappo, e serviva ad indicare le variazioni di volume del liquido. La superficie esterna del tubo da saggi più grande fu rivestita con stagnola; l'interna del minore pur con stagnola; in qualche caso si sostituì a quest'armatura mercurio od acqua. Si cacciò accuratamente ogni bolla d'aria dall'intervallo fra i due tubi. I reofori che venivano da un grande rocchetto d'induzione mettevano alle due armature e ogni interruzione del circuito presso queste fu con ogni cura evitata affinchè non scoccasse qualche scintilla. Posto l'apparecchio in tali condizioni che le variazioni della temperatura fossero piccole, si andò osservando di minuto in minuto il movimento del livello del liquido nel cannello capillare, prima che cominciasse l'azione del rocchetto, durante questa, e poi che era cessata. Stanno indicati qui sotto i valori ottenuti con due esperienze eseguite in questo modo. Una piccola coppia Bunsen era applicata al rocchetto. Il liquido isolante era petrolio. T indica il tempo in minuti, N il numero delle divisioni della scala che eran millimetri. Il numero segnato con un asterisco indica l'istante in cui comincia l'azione del rocchetto, quello con due asterischi l'istante in cui l'azione finisce. Un aumento del numero delle divisioni indica riscaldamento. Le due esperienze vennero eseguite con due apparecchi simili, non eguali.

1ª *Esperienza.*

T	*N*	*T*	*N*
0	66, 8	5	77, 2
1	65, 8	6**	85, 0
2	64, 7	7	83, 4
3*	63, 7	8	81, 4
4	70, 0	9	79, 8

L'effetto prodotto dal rocchetto in questa esperienza fu di otto divisioni circa per minuto.

2ª *Esperienza.*

T	*N*	*T*	*N*
0	62, 7	9	63, 4
1	58, 0	10	65, 8
2	54, 0	11	68, 0
3*	50, 0	12	70, 2
4	51, 6	13**	72, 3
5	54, 0	14	68, 8
6	56, 7	15	65, 2
7	59, 0	16	61, 5
8	61, 5	17	57, 9

In questo caso l'effetto prodotto dal rocchetto fu di sei parti circa per minuto. Molte altre esperienze potremmo riferire che diedero valori consimili. Con un apparato costruito come quelli sopra descritti e pieno di benzina abbiamo ottenuto 7,7 divisioni per minuto usando una Bunsen. Nello specchietto seguente sono indicati gli effetti ottenuti usando invece una Daniell: λ è l'effetto totale prodotto dal rocchetto e calcolato nel solito modo, τ è la durata in minuti dell'azione del rocchetto, λ' è l'effetto per minuto:

λ	τ	λ'
2,7	5	0,54
2,0	4	0,50
2,3	4	0,58.

Anche quando nel circuito indotto stava inserita una bottiglia di Leida, anche quando v' era un intervallo occupato da aria e grande abbastanza per impedire il passaggio delle scintille, ottenemmo con una Bunsen effetti di notevole intensità.

Vediamo ora a quali cause possa attribuirsi l'effetto osservato.

La dilatazione elettrica scoperta dal Fontana nel secolo scorso, studiata dal Govi, poi annunziata per cosa nuova dal Duter nel 1879 e finalmente esaminata dal Righi, dal Quincke e dal Röntgen, non può spiegare il fenomeno di cui parliamo, perchè il carattere di quella dilatazione è l'essere essa istantanea, sicchè, cessata l'induzione, tutto ricade nello stato primitivo.

Potrebbe venir sospettato che quantunque nei descritti apparecchi fra i reofori e il liquido stieno le pareti di vetro, il liquido venga in parte decomposto dalla corrente. Per togliere questo dubbio costruimmo due apparati simili a quelli descritti ed eguali fra loro per quanto ci fu possibile, ed empimmo l'uno di petrolio, l'altro di acqua non distillata. Se l'effetto osservato fosse stato dovuto ad elettrolisi, operando successivamente nelle condizioni medesime con quei due apparecchi, si avrebbe dovuto ottenere spostamenti del livello di gran lunga maggiori con l'apparecchio pieno d'acqua. Nel caso di riscaldamento dovevano invece gli spostamenti in quest'ultimo apparecchio essere nulli o piccoli assai. Ecco i valori ottenuti:

petrolio	$\lambda' = 10,8$
	$= 9,3$;
acqua	$= 0,35$
	$= 0,20$.

Tuttavia non fummo da queste esperienze pienamente rassicurati, e diremo più innanzi in qual modo abbiamo eliminato il sospetto del passaggio d'una piccola corrente attraverso il liquido isolante.

L'effetto osservato nelle precedenti esperienze era certamente complesso, e restava ad esaminare qual parte vi avessero il solido e il liquido.

Per vedere se il riscaldamento dell'isolante solido fosse considerevole abbiamo usato un apparecchio simile a quelli descritti, senonchè il tubo interno era rivestito di stagnola su ambedue le superficie. In tal caso quel tubo soltanto faceva ufficio di condensatore; il reoforo, che dall'armatura esterna di esso andava al rocchetto, passava attraverso il tappo che chiudeva lo spazio anulare fra i due tubi ed era in quel tratto diligentemente isolato. Anche in queste condizioni l'effetto fu notevole, anzi dello stesso ordine di grandezza degli effetti prima osservati. Conviene però notare che, essendo in questo caso le due armature molto più vicine, la capacità del condensatore doveva essere molto più grande del solito.

Cercammo dipoi di mettere in chiaro se veramente l'isolante liquido si riscaldasse. In un bicchiere di vetro ponemmo un cilindro di rame alto circa 4 cm., del diametro di circa 3, 3, aperto alle due estremità. Entro questo si pose un cilindro di rame alto 4 cm., col diametro di 1, 6, chiuso al di sotto e fornito al di sopra di un foro con collo sottile a modo di bottiglia. A questo foro fu applicato con mastice un cannello capillare che si ripiegava due volte, correva orizzontalmente per buon tratto e avea l'estremità immersa in un bicchierino pieno di benzina. Così il cilindro interno faceva l'ufficio di serbatoio d'un termoscopio ad aria, che doveva indicare le variazioni di temperatura del liquido isolante. Questo, ch'era pure benzina, venne versato nel bicchiere. Così il serbatoio del termoscopio e il cilindro circostante formavano le armature di un condensatore, il cui strato isolante era formato dalla benzina interposta. Il bicchiere fu poi coperto e sospeso in una bottiglia circondata con segatura di legno. Si applicò al rocchetto una coppia ad acido cromico con liquidi più volte adoperati, e per attenuare ancor più la corrente si pose nel circuito induttore una resistenza di 1 U. S. Ecco i valori ottenuti con due esperienze:

λ	τ	λ'
4,23	3	1,41
3,63	3	1,21 .

In condizioni diverse ottenemmo:

λ	τ	λ'
4,4	1,5	2,94
4,3	1,5	2,88 .

Quattro esperienze fatte con una Bunsen indebolita da una resistenza di 1,6 U. S. diedero questi valori molto concordanti di λ':

3,97 ; 3,87 ; 3,97 ; 3,9 .

Con una sola coppia Daniell, indebolita mediante una resistenza accessoria di mezza U. S., avemmo dei valori poco concordanti, ma tutti indicanti riscaldamento. In ciascuna esperienza l'azione del rocchetto durò 2 minuti, e passando dall'una esperienza alla successiva, si mutò il senso della polarità del rocchetto. Ecco i valori di λ ottenuti con cinque esperienze:

2,1 ; 3,2 ; 1,7 ; 1,4 ; 3,9 .

Posta dell'acqua non distillata invece del liquido isolante, l'effetto diventò incerto o appena avvertibile, e senza liquido, purchè non avvenisse scarica alcuna nell'intervallo fra i due cilindri, non si osservò riscaldamento.

Abbiamo pure eseguito alcune esperienze col voltametro del Bunsen, il cui tubo di svolgimento venne surrogato con un cannello capillare. Una coppia Bunsen era applicata al rocchetto. Il liquido isolante era petrolio. Ecco i valori ottenuti con quattro esperienze:

λ	τ	λ'
13,0	4	3,2
26,5	10	2,6
9.1	3	3,0
11,3	4	2,8 .

Con una Daniell invece ottenemmo:

λ	τ	λ'
2,7	5	0,54
2,8	4	0,70
2,3	5	0,46.

Posta dell'acqua nel voltametro invece del petrolio, non si vide più alcun effetto.

Temendo che nel voltametro del Bunsen i reofori non fossero sufficientemente isolati, e riuscendo difficile l'adattare bene ad esso il tubo capillare. abbiamo costruito un apparecchio consimile valendoci di un tubo da saggi di 3 cm. circa di diametro. Un tappo di sovero chiudeva il tubo; due reofori bene isolati con mastice e vetro l'attraversavano e mettevano a due lamine, che stavano dentro il tubo affacciate l'una all'altra alla distanza di 5,5 mm. Ciascuna faccia delle lamine aveva l'area di 40 cm^2 circa. Inoltre attraversavano il tappo un cannello termometrico di sezione un po' maggiore del solito e un tubo di 3 mm. di diametro fornito di chiavetta. Il cannello appena uscito dal tappo si ripiegava ad angolo retto. correva orizzontalmente per lungo tratto, poi, ripiegatosi verso il basso, s'immergeva in un bicchierino. Coperto il tappo con mastice, si riempiva il recipiente per mezzo del tubo con chiavetta, e quando si voleva osservare le variazioni di volume del liquido, si faceva in modo che una colonnina d'aria occupasse parte del cannello, il cui capo libero restava sempre immerso nel petrolio. Quando si apriva la chiavetta, la colonnina d'aria si spostava andando verso il capo libero del cannello; aspirando all'estremità del tubo con chiavetta, la si poteva riportare verso l'altro capo. Per mostrare come anche nel caso in cui fra le armature del condensatore vi sia solamente un liquido isolante, il riscaldamento sia nettamente determinato dall'azione del rocchetto, riferiamo le osservazioni spettanti ad un'esperienza. Un aumento del numero N delle divisioni significa raffreddamento.

T	N	T	N
1	111, 2	7	106, 2
2	111, 2	8**	105, 5
3*	111, 2	9	105, 4
4	110, 3	10	105, 6
5	108, 9	11	105, 8
6	107, 6	12	105, 9

Seguono qui sotto i valori di λ e λ' ottenuti con alcune esperienze eseguite nel modo testè descritto. Le due prime furono eseguite con un intervallo di un millimetro occupato da aria nel circuito indotto; le due successive dopo aver tolto questo intervallo, la quinta e la sesta dopo aver inserito nel circuito una bottiglia di Leida, la settima e l'ottava con due bottiglie disposte l'una dietro l'altra:

λ	τ	λ'
4,4	4	1,1
3,4	4	0,85
15,1	5	3,03
10,6	4	2,65
6,4	4	1,6
7,4	4	1,85
5,6	4	1,4
6,1	4	1,78 .

Sperimentammo altresì ponendo entro un cilindro metallico di 3 cm. e 20 di lunghezza, chiuso al di sotto, un altro cilindro pure metallico di cm. 1,4 di diametro. L'orlo del primo cilindro era circondato da un tubo di vetro che s'innalzava per qualche centimetro, ed all'orlo di questo era applicato il tappo che sosteneva il cilindro minore. Nell'intervallo si pose petrolio, poi lo si surrogò con benzina. Un cannello capillare e un tubo con chiavetta erano applicati all'apparecchio, come a quello poc'anzi descritto. I due cilindri metallici formavano le due armature del condensatore e il liquido interposto lo strato isolante. Una debole coppia Daniell venne applicata al rocchetto e si ottennero effetti simili affatto a quelli riferiti da ultimo.

Il dubbio che l'effetto osservato fosse dovuto al passaggio di una debole corrente ci trattenne per qualche tempo dal pubblicare queste esperienze. Benchè quando la sola corrente indotta diretta percorreva il circuito esterno, in cui stava inserito uno dei condensatori usati nell'esperienza, non si avesse alcuna deviazione in un sensibile reometro, benchè i liquidi isolanti usati fossero tali, che, quando la forza elettromotrice indotta era abbastanza grande, scoccava una scintilla vivissima e luminosa fra due elettrodi immersi in quei liquidi, pur volevamo ottenere una prova diretta che togliesse ogni dubbio. Ecco in qual modo abbiamo operato a quest'uopo.

Due apparecchi simili aperti, ciascuno con due cilindri di latta, uno dei quali, l'interno, faceva l'ufficio, come si disse di sopra, di termoscopio ad aria, furono inseriti nel circuito indotto. Il liquido isolante era petrolio. Per di più stavano nel circuito, una dietro l'altra, quattro bottiglie di Leida, due da una parte e due dall'altra dei due apparecchi. Anche questi erano disposti per serie. Di mezzo minuto in mezzo minuto si osservava alternamente l'uno e l'altro apparecchio. Uno di questi aveva resistenza r_1 molto minore di quella r_2 del secondo. Ora se l'effetto osservato fosse stato dovuto a riscaldamento prodotto da una debole corrente di intensità i, le quantità di calore q_1 e q_2, rispettivamente sviluppate in pari tempo nei due apparecchi, dovevano essere nella ragione stessa delle resistenze, cioè dovea sussistere la relazione

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2},$$

e quindi doveva essere λ_1 molto minore di λ_2. Se invece l'effetto era dovuto alle polarizzazioni elettrostatiche, essendo nell'apparecchio di minor resistenza maggiore la parte immersa delle lamine, doveva probabilmente avvenire il contrario. Ecco i valori dati dalle quattro esperienze eseguite:

λ_1	λ_2	τ	λ'_1	λ'_2
9,1	5,0	4,5	2,02	1,11
10,7	5,8	5,5	1,95	1,06
7,2	1,5	5,0	1,64	0,30
13,9	9,7	4,0	3,49	2,40.

Le esperienze mostrano che λ'_1 è maggiore di λ'_2 e che quindi non si tratta di un riscaldamento il quale segua la legge del Joule.

Scambiati i termoscopi ad aria, si ottenne:

λ_1	λ_2	τ	λ'_1	λ'_2
5,0	3,8	4	1,25	0,95
10,8	10,1	4	2,70	2,52 ;

valori, che confermano la conclusione dedotta dalle esperienze precedenti.

La cosa fu pure verificata con due apparecchi chiusi, simili a quello con lamine di latta che fu prima descritto. In tal caso la sostanza termometrica, anzichè esser l'aria, era lo stesso liquido isolante. Gli apparecchi erano eguali in tutto fuorchè nella grandezza delle lamine di latta. In uno di essi le lamine affacciate aveano superficie ch'era circa la metà di quella delle lamine dell'altro. La resistenza r_1 era circa la metà di r_2. Per l'effetto Joule avrebbe dovuto essere λ'_1 minore di λ'_2, essendo i due apparecchi inseriti l'un dietro l'altro nel circuito indotto. Ecco i valori dati da tutte le 17 esperienze, che furono così eseguite:

λ_1	λ_2	τ	λ'_1	λ'	λ_1	λ_2	τ	λ'_1	λ'_2
2,2	0,9	5	0,44	0,18	2,4	0,55	4	0,6	0,14
1,3	0,19	4	0,32	0,05	2,8	0,17	5	0,56	0,03
2,2	1,1	4	0,55	0,28	4,7	1,70	5	0,94	0,34
4,3	1,3	4	1,08	0,32	3,2	1,0	4	0,8	0,25
0,54	0,7	4	0,13	0,18	5,8	0,95	5	1,16	0,19
4,05	0,6	5	0,81	0,12	4,3	0,08	5	0,86	0,02
1,6	0,8	3	0,53	0,27	4,26	0,65	4	1,06	0,16
4,0	-0,3	4	1,0	-0,07	5,3	1,1	5	1,06	0,22
2,5	0,17	4	0,6	0,04					

Questi valori non sono concordanti fra loro, perchè non abbiamo ancora avuto agio di rendere abbastanza buone e costanti le condizioni sperimentali, ma li abbiamo tutti riferiti perchè ci pare che da essi manifestamente risulti che la quantità λ'_2 è notevolmente minore di λ'_1 anzichè maggiore, come dovrebbe essere, se il riscaldamento fosse dovuto al passaggio d'una corrente.

Pare adunque posto fuori di dubbio che anche un isolante liquido si riscaldi in causa di successive polarizzazioni. A ciò solo tendevano le esperienze descritte, il cui grado di precisione non è sufficiente a dar misure di qualche valore. Ora ci proponiamo di esaminare con cura le particolarità dell'effetto osservato, indagando le condizioni da cui dipende e le leggi che lo governano.

15 Marzo 1882.

Il Socio Conte Tommaso SALVADORI, incaricato col Socio Comm. Michele LESSONA di esaminare una Memoria del Sig. Dottore Lorenzo CAMERANO, Assistente al Museo Zoologico della R. Università di Torino, avente per titolo « *Ricerche intorno all'anatomia di un feto di* Otaria jubata (FORST.) », legge la seguente

RELAZIONE.

Il lavoro presentato dal Dott. Camerano ha per oggetto la descrizione anatomica di un feto di *Otaria jubata* (FORSTER), estratto dal corpo di una grossa femmina catturata dall'equipaggio del R. Piro-Avviso Cristoforo Colombo nello stretto di Magellano e donato al R. Museo Zoologico di Torino dal Cavaliere Angelo Chionio, tenente di vascello.

Poche sono le ricerche che sono state fatte finora intorno agli stadi fetali dei Pinnipedi, ed esse si aggirano quasi esclusivamente intorno alle specie del genere *Phoca* propriamente detto. Nessun lavoro venne fatto finora intorno agli stadi fetali delle Otarie.

Non vi sono dati sicuri per stabilire l'età del feto studiato dall'Autore, appare tuttavia dall'esame dei vari apparati che esso è già in un periodo avanzato di sviluppo. Ciò non di meno lo studio di questo feto conduce a constatare diversi fatti relativi alla morfologia ed alla filogenia delle Otarie e dei Pinnipedi in generale.

L'Autore, premesso il Catalogo cronologico delle pubblicazioni relative all'anatomia ed allo sviluppo dei Pinnipedi, passa a descrivere successivamente: 1° L'aspetto esterno, la colorazione e le dimensioni del feto studiato; 2° la pelle e le produzioni epidermiche; 3° il sistema muscolare; 4° lo scheletro; 5° il cervello e gli apparati dei sensi; 6° l'apparato respiratorio; 7° il cuore; 8° l'apparato digerente; 9° l'apparato riproduttore; e 10° finalmente l'apparato urinario.

Dalla descrizione di queste parti e dal loro confronto colle corrispondenti negli altri Pinnipedi e nei mammiferi più affini ai medesimi, e con quelle dell'adulto dell'*Otaria jubata* stessa, l'Autore trova argomenti per mettere sempre più in sodo le affinità dei Pinnipedi coi Carnivori e per confermare l'opinione di quei naturalisti che inclinano a considerare i Pinnipedi come un ramo dei Carnivori, modificato dall'adattamento.

L'Autore finalmente, a schiarimento delle cose dette nel suo lavoro, unisce al medesimo cinque tavole coi disegni della massima parte degli organi studiati.

I sottoscritti, incaricati dalla Classe di esaminare questa Memoria, ne propongono la lettura.

MICHELE LESSONA.

T. SALVADORI, *Relatore*.

La Classe accoglie la proposta, e udita la lettura del lavoro del sig. Dott. L. CAMERANO, ne approva la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Cav. Alessandro Dorna, Direttore dell'Osservatorio astronomico della R. Università di Torino, presenta all'Accademia, per l'annessione agli Atti, in continuazione delle precedenti, le Osservazioni barografiche e termografiche dell'anno 1881, state redatte, insieme alle ore della temperatura massima e minima, dall'Assistente Prof. Donato Levi, al quale sono affidati i relativi strumenti registratori.

Le sopra accennate Osservazioni verranno stampate nel solito fascicolo annuale che si pubblica per cura dell'Accademia, e che va annesso agli *Atti*.

In questa adunanza il Socio Cav. Capitano F. Siacci presenta una *Nota intorno ad alcune formole di* Hermite *per l'addizione delle funzioni ellittiche,* del Dott. Enrico Novarese, Assistente alla Cattedra di Algebra e Geometria analitica della R. Università di Torino, che verrà pubblicata nella seguente disp. degli *Atti* di Aprile.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

SOMMARIO

Classe di Scienze fisiche e matematiche.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

dagli Accademici Segretari delle due Classi

VOL. XVII, DISP. 5ª (*Aprile* 1882)

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Aprile 1882.

TORINO, STAMPERIA REALE
di G. B. Paravia e C.

CLASSE

DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza del 16 Aprile 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. PROSPERO RICHELMY
VICE-PRESIDENTE

Il Socio GENOCCHI presenta un volume stampato che contiene la *Correspondance inédite de* LAGRANGE *et* D'ALEMBERT *publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par* Ludovic LALANNE, e che forma il Tomo XIII delle Opere del Lagrange pubblicate a Parigi per cura dell'illustre matematico J. A. SERRET. Il medesimo Socio dichiara di fare omaggio di questo volume all'Accademia per incarico che gliene hanno dato gli scienziati or nominati SERRET e LALANNE e con essi l'editore sig. GAUTHIER-VILLARS, avvertendo che sebbene l'Accademia riceva già in dono dal Ministero dell'Istruzione Pubblica di Francia un esemplare della edizione delle Opere del Lagrange, hanno tuttavia creduto i due scienziati e l'editore di offrirle questo esemplare separato: « Cet envoi (dicono essi nella lettera scritta al Genocchi) est indépendant de celui fait d'ordinaire par le Ministère de l'Instruction publique ».

Il carteggio contenuto nel volume che si presenta è tratto dai manoscritti che si conservano nella Biblioteca dell'Istituto di Francia. Si compone di 93 lettere indirizzate dal D'Alembert al Lagrange e di 79 indirizzate dal Lagrange al D'Alembert: comincia con una lettera del D'Alembert scritta il 27 settembre 1759 dopo la pubblicazione del primo volume delle *Miscellanea* *taurinensia*, e finisce con altra dello stesso D'Alembert fatta scrivere il 27 settembre 1783, un mese e due giorni prima della sua morte, e da lui soltanto sottoscritta con queste parole *Tuus D'Alembert.* Quasi ad ogni pagina si veggono annotazioni pregevolissime del signor Ludovico Lalanne che porgono intorno alle persone e ai fatti ricordati nel carteggio notizie molto utili; e alla fine un indice compilato dallo stesso Lalanne espone un suntò del contenuto di ciascuna lettera.

Questo carteggio offre molto interesse per le importanti particolarità che rivela intorno alla vita del Lagrange e di altri uomini celebri del suo tempo. Vi apparisce da un capo all'altro l'alta stima e l'affetto sincero che legava i due autori se anche trovavano a ridire in qualche punto speciale dei loro lavori; e vi spicca soprattutto l'indole mite e tranquilla del Lagrange e l'animo suo sommamente modesto e benevolo. Il D'Alembert lo afferma giudice non meno competente in letteratura che in matematica, e fra molte altre sue cose una volta gli manda un suo discorso sulla poesia ove sembra non apprezzare ne' poeti fuorchè certi meriti da lui individuati; il Lagrange non dimentico della sua origine italiana gli risponde: « permettez que je vous demande grâce pour nos poëtes italiens, et surtout pour mon poëte favori, l'Arioste, qui n'a guère ni l'un ni l'autre de ces mérites ».

Vuol anche ricordarsi che circostanze notevoli risultano dalle stesse lettere intorno alla chiamata del Lagrange all'Accademia di Berlino; alle sue relazioni col marchese Caraccioli ambasciatore della Corte di Napoli e poi Vicerè di Sicilia, e all'invito che questi gli fece per passare all'Accademia Napoletana, e a cui si riferisce la lettera comunicataci nel 1872 dal nostro Presidente Conte Sclopis. Una delle prime lettere accenna ad un fatto poco noto cioè alla parte avuta dal Lagrange in una edizione delle Opere di Leibnizio fatta a Ginevra nel 1768 per cura di Luigi Dutens, alla quale il Lagrange avrebbe dovuto aggiungere una prefazione. Oltre a discussioni scientifiche, e a certi particolari dei diversi concorsi vinti dal Lagrange presso l'Accademia delle Scienze di Parigi, si trovano esposte le dispute del D'Alembert col Clairaut, e quelle del D'Alembert e del Lagrange con Daniele Bernoulli, e col Fontaine il quale era stato un tempo amico del Lagrange e poi lo censurò aspramente e senza ragione. Sono altresì mentovati e sempre con circostanze utili a conoscersi gl'illustri matematici Eulero, Condorcet, Laplace, Lambert, Bernoulli juniore, Ab. Bossut, Borda, e altresì, con colori poco favorevoli, Castillon, Lalande, il P. Frisi, il P. Boscovich.

Aggiunge il Genocchi che un esemplare del medesimo volume fu anche a lui offerto dagli stessi Donatori a cui se ne professa gratissimo, e che gli consta per alcune lettere del principe B. Boncompagni, del signor Aristide Marre, e del signor Serret, avere il Boncompagni per mezzo del signor Marre fatto pratiche a Parigi consigliando gli accennati doni; laonde sente il debito di manifestare qui ai medesimi la sua gratitudine.

Il Socio Cav. Prof. Angelo Mosso legge la seguente sua Nota:

APPLICAZIONE DELLA BILANCIA

ALLO STUDIO

DELLA CIRCOLAZIONE DEL SANGUE NELL'UOMO.

Per studiare lo spostamento che può subire il sangue nelle varie parti del corpo, ho costrutto una grande bilancia fatta in modo che un uomo si potesse coricare comodamente sopra il suo giogo. Perchè la bilancia fosse stabile portai il centro di gravità molto in basso per mezzo di una palla di ferro mobile sopra una spranga metallica piantata perpendicolarmente sull'asse di rotazione del giogo.

Il nostro corpo, messo in equilibrio sul giogo di una bilancia, può paragonarsi ad un vaso aperto pieno di liquido, basta una inclinazione di pochi millimetri del suo asse longitudinale, perchè il sangue passi rapidamente da una parte all'altra, dalla testa nelle gambe e viceversa.

Per evitare che le minime inclinazioni del giogo facessero traboccare la bilancia, ho dovuto impiegare una palla di ferro del peso di 25 kilogrammi, messa all'estremità di una spranga metallica lunga circa un metro, impiantata sull'asse di rotazione.

Per dare alla bilancia quel grado di sensibilità che era necessario ai miei studi, potevo avvicinare od allontanare dai coltelli per mezzo di una vite la palla di ferro di 25 kilog.; una penna applicata all'estremità del giogo scriveva sopra la carta di un cilindro rotante le oscillazioni della bilancia.

Lo scopo per cui ho costrutto questa bilancia era essenzialmente quello di studiare i mutamenti della circolazione sanguigna per effetto del respiro.

Quando applichiamo intorno al torace uno strumento che per mezzo di un lungo tubo di gomma elastica scrive sul cilindro rotante i movimenti del respiro, si vede che ad ogni inspirazione la bilancia si inclina fortemente verso i piedi.

La contrazione del diaframma produce un ostacolo alla circolazione venosa addominale e le gambe aumentano di peso.

Quando la respirazione è unicamente toracica succede una aspirazione del sangue dalle parti superiori del tronco.

Facendo una profonda inspirazione, si accumula il sangue nei polmoni; è per questa ragione che molti soffiando hanno le vertigini. Ho determinato il tempo che trascorre secondo le varie circostanze prima che il sangue, accumulatosi nei polmoni per mezzo della inspirazione, ritorni nelle gambe.

Le emozioni, il sonno, l'azione delle sostanze medicamentose, del caldo e del freddo producono dei mutamenti nella distribuzione del sangue, che possono facilmente studiarsi per mezzo della bilancia, senza dover come prima applicare degli strumenti alla superficie del corpo, i quali disturbano sempre in modo apprezzabile la circolazione del sangue.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta e legge la seguente Memoria del sig. Ingegnere Mario Zecchini, Assistente al Laboratorio chimico della Stazione Agraria di Torino,

SULLA
MAGNETITE COMPATTA
DI COGNE (Valle d'Aosta).

Tra i minerali di ferro di cui è ricca la miniera di Cogne nella Valle d'Aosta, presenta un grande interesse, sotto il punto di vista petrografico, la magnetite compatta che trovasi nel filone denominato *Licone*.

Un campione di questa roccia, non ancora studiata da alcuno, mi venne cortesemente offerto dal Prof. Cossa, invitandomi ad eseguire nel suo laboratorio le ricerche chimiche e microscopiche di cui riassumo i risultati in questa nota.

Sulle condizioni di giacitura di questa roccia trascrivo testualmente le indicazioni che l'egregio Prof. M. Baretti ebbe la cortesia di trasmettermi:

« L'esame comparativo di varii allineamenti mi pose in grado di riconoscere che i differenti giacimenti di ferro magnetico nel Comune di Cogne, a partire dalla base della Punta della Creia, si dirigono quasi da E. ad O. Questa direzione può presentare delle variazioni, però poco sentite, a cagione dei rigonfiamenti e restringimenti della massa serpentinosa che racchiude il minerale.

Un primo fatto da notare è che l'affioramento serpentinoso ferrifero non presenta mai delle soluzioni di continuità, per lo meno nei punti della montagna che non sono ricoperti da rottami di frane o di morene. Partendo dall'Est si incontra anzitutto un giacimento abbandonato, quantunque vi sia ancora molto ferro, detto di *Carlo Muta;* dove la serpentina è mescolata con talco ed amfibolo. Discendendo ad Ovest, una lunga distesa di rottami copre la roccia, ma a meno di 800 metri di distanza si ritrova la serpentina per una larghezza di più di 60 metri (visibili) e ricchissima di minerale di ferro, e precisamente ai filoni di *Licone* e *Farcoz*.

La serpentina da Licone continua sempre in massa potente sino al filone di *Colonna*, e discende sempre ad Ovest con potenza sempre crescente fino a monte di *Montsalé* dove si trovano le traccie di un'antica lavorazione. Di là discende nella *Valle dell'Arcina* coperta da un'enorme frana, e la massa è aperta da gallerie per l'estrazione del ferro magnetico. La direzione continua verso Ovest, traversando il torrente *Grauson*, e riappare sul lato destro della valle dove sono aperte altre gallerie. La massa serpentinosa sul fianco di *Cimilian* è rotta in grossi pezzi, e proseguendo la sua strada si ricopre di un mantello morenico al terrazzo di Cimilian, e riappare al poggio del *Châtelard*; là nuovamente si nasconde per riapparire ancora una volta ferrifera al torrente *Tarambel*.

Convien però notare che la formazione serpentinosa si fa sempre più piccola dall'Arcina al Tarambel, come da Licone al filone di Carlo Muta. Ma tra Licone e l'Arcina il suo sviluppo è realmente grandioso ».

Da questa descrizione del deposito metallifero si scorge come il filone di Licone, da cui è tratto il campione da me esaminato, si trova precisamente nella parte più centrale di esso, e dove ha il maggiore sviluppo.

La roccia magnetitica esaminata ha colore grigio-cupo, è compatta e presenta una struttura omogenea a grana finissima.

Sotto i colpi del martello si divide facilmente in piastre a superficie piane spalmate da macchie verdi-ocracee. La sua frattura è scagliosa.

Trattata con acido cloridrico si discioglie in massima parte, lasciando un residuo di colore bianco-verdognolo che è formato da poca silice amorfa (proveniente molto probabilmente da scomposizione di silicati) e da un ammasso di cristalli minutissimi quasi incolori, che esaminati al microscopio polarizzante, presentano i caratteri di una sostanza trimetrica.

Le ricerche per determinare la quantità di materie insolubili contenute nella roccia, furono eseguite sempre nello stesso modo, cioè facendo bollire la roccia ridotta in minuti frammenti con acido cloridrico puro diluito con acqua ed avente una densità di circa 1. 13, finchè erasi disciolto tutto il minerale metallico.

Si ebbero i risultati seguenti:

a. *Roccia pura, cioè senza macchie ocracee.*

			Residuo insolubile	
I	con grammi	44. 850	6. 01	per cento
II	»	4. 817	6. 18	»
III	»	0. 794	6. 07	»
IV	»	0. 305	6. 12	»
V	»	0. 397	6. 09	»

b. *Roccia con spalmature di serpentino.*

I	con grammi	8. 105	7. 45	per cento
II	»	5. 272	7. 62	»

I suesposti risultati, mentre provano la perfetta omogeneità della roccia, lasciano sospettare che essa non risulti, come succede nella maggior parte dei minerali metallici, da un agglomeramento irregolare di ferro ossidulato con una ganga costituita da uno o più minerali; ma che invece il minerale ferrifero del filone Licone di Cogne sia costituito da un silicato ben definito da cui si è a poco a poco ed in modo uniforme separato e deposto il minerale di ferro; ossia che questa roccia rappresenti una serpentina in cui il minerale magnetico ha preso tale estensione da invadere tutta la massa.

Questa mia supposizione trovò piena conferma nei risultati dell'esame microscopico della roccia.

Riducendola anche in lamine molto sottili essa appare quasi completamente opaca, e soltanto si possono osservare delle lamelle di color rosso costituite da ematite. Trattando con precauzione i preparati microscopici con acido cloridrico, dopo alcun tempo il minerale metallico scompare affatto, e le sezioni sottili, pur conservando i loro primitivi contorni, sono ridotte ad un tessuto alveolare costituito da minutissimi cristalli perfettamente trasparenti ed identici a quelli precedentemente osservati nel residuo insolubile, ottenuto trattando i frammenti della roccia con acido cloridrico.

Nei preparati però riesce molto meglio marcata la forma dei cristallini che è prismatica, e si possono più facilmente constatare col microscopio polarizzante le direzioni delle estinzioni caratteristiche delle sostanze trimetriche.

Pertanto la roccia del filone Licone ha una costituzione affatto simile a quella che il Prof. A. Cossa ha descritto per i nuclei e le granulazioni di magnetite disseminate nella serpentina di Verrayes (*Ricerche microscopiche e chimiche su roccie e minerali d'Italia*. Torino, 1881, pag. 119).

Non è cosa troppo ardita l'ammettere che i nuclei e le granulazioni di magnetite aumentando di numero ed anastomizzandosi tra loro possono cangiare le serpentine ricche di magnetite in roccie che a prima vista presentano l'aspetto di un vero minerale metallico.

Qualche cosa di analogo si è già osservato nelle pirrotiti nichelifere della Valsesia studiate dal Prof. Cossa e dal Professore Stelzner, le quali, quantunque abbiano l'apparenza di un vero minerale metallico, risultano invece costituite da peridotiti completamente imbevute da pirrotite.

Peso specifico della roccia. — Le determinazioni del peso specifico eseguite sulla porzione della roccia priva di spalmature di serpentino diedero i seguenti risultati:

I	con grammi	5. 9750	4. 728 a + 12° C.
II	»	4. 2355	4. 737 a + 13° »
III	»	5. 6535	4. 730 a + 13°. 5 »

Densità media: 4. 73.

Composizione chimica della roccia. — Porzione della roccia ridotta in scheggie sottili venne immersa in una soluzione leggermente acida di solfato di rame e riscaldata per qualche tempo alla temperatura di 50 gradi circa. Dopo il riscaldamento, e nemmeno dopo parecchi giorni di contatto colla soluzione cuprica, non ho potuto riscontrare traccia di rame ridotto.

Questo risultato negativo prova che nel campione del minerale da me studiato non si trovano traccie di ferro allo stato metallico, che qualche volta si riscontra associato ai minerali di ferro nelle roccie serpentinose.

La roccia ridotta in polvere e calcinata in tubo chiuso non dà luogo a separazione di zolfo, nè a sviluppo di anidride solforosa. Trattata con acqua regia non si osservò nella soluzione indizio della formazione di acido solforico.

Per il che bisogna ammettere che il minerale magnetifero di Cogne non contiene pirite, pirrotina, od altro solfuro metallico. Questo risultato è importante perchè prova che il cobalto ed il nichelio, trovati da me in questa roccia, sono intimamente associati al ferro ossidulato, e non provengono da miscuglio di quantità anche piccole di solfuri metallici.

I saggi qualitativi eseguiti su questa roccia hanno dimostrato che essa contiene dell'acqua, ossido ferroso, ossido ferrico, magnesia, anidride silicica, piccole quantità di calce e di ossido di cobalto, e traccie non determinabili d'ossido di nichelio, di cromo e di manganese.

La presenza quasi costante di piccole quantità di ossidi di nichelio e di cromo nelle serpentine e nei minerali di ferro, che in questo sono impegnati, è un fatto già conosciuto. Ciò che rende veramente interessante la composizione della serpentina ferrifera di Cogne è la presenza del cobalto in quantità superiore a quella del nichelio e del cromo, che costituisce un fatto finora non osservato, almeno nelle serpentine italiane.

Per quanto si riferisce alla determinazione quantitativa del ferro contenuto nella roccia allo stato di ossido ferroso, ho proceduto nel modo seguente:

Sciolsi la roccia polverizzata nell'acido solforico diluito e non nell'acido cloridrico, ed in una atmosfera di anidride carbonica: nella soluzione determinai l'ossido ferroso con una soluzione titolata di permanganato potassico, di cui ogni centimetro cubo corrispondeva a grammi 0. 00972 di ossido ferroso.

Da due determinazioni ottenni i seguenti risultati:

		Ossido ferroso	Per cento
I con grammi	1. 032	0. 1866	18. 083
II »	0. 674	0. 1219	18. 098
		Media	18. 09 .

Per determinare la quantità totale del ferro contenuto nella roccia, si trattò la soluzione cloridrica della roccia stessa, dopo averne eliminata completamente la silice solubile, con acido nitrico per perossidare completamente il ferro. Quindi si precipitò l'ossido ferrico con cloruro ammonico ed ammoniaca. Il precipitato ottenuto fu nuovamente ridisciolto e precipitato per separare completamente la magnesia e gli ossidi di cobalto e nichelio.

I risultati ottenuti furono i seguenti:

		Ossido ferrico	Per cento
I	con grammi 0. 794	0. 743	93. 57
II	» 0. 305	0. 285	93. 44
III	» 0. 397	0. 372	93. 70
		Media	93. 57 .

Sottraendo da questa quantità 20. 10 corrispondenti a 18. 09 per cento di ossido ferroso trovati nell'antecedente determinazione, risulta che la roccia analizzata contiene il 73. 47 per cento di ossido ferrico.

Per la determinazione del cobalto si adoperarono grammi 5. 272 di minerale; dopo di averlo separato completamente dal ferro, si ottennero grammi 0. 012 di ossido salino di cobalto ($Co_3 O_4$) corrispondenti a grammi 0. 0112 di ossido cobaltoso ($Co O$); quantità equivalente a 0. 212 per cento.

Le traccie di nichelio furono separate dall'ossido di cobalto mediante il nitrito potassico.

Ecco i risultati dell'analisi complessiva della roccia:

Acqua	0. 60
Silicati insolubili, e silice libera . .	5. 54
Ossido ferroso	18. 09
Ossido ferrico	73. 47
Magnesia	1. 65
Calce	0. 55
Ossido di cobalto	0. 21
Ossidi di nichelio e di cromo . .	traccie
	100. 11 .

Il residuo insolubile nell'acido cloridrico fu ripetutamente trattato con una soluzione bollente di carbonato di sodio per separare completamente la silice libera proveniente dalla decomposizione di parte del silicato magnesiaco che forma la trama della roccia.

Il residuo insolubile così depurato presentava la seguente composizione:

Acqua	11. 87
Anidride silicica . .	43. 15
Ossido ferroso . .	4. 10
Magnesia	40. 31
Calce	traccie
	99. 43 .

Questa composizione si approssima assai a quella dei silicati magnesiaci cristallizzati, ed aventi la composizione normale del serpentino, che si trovano associati a quello detto amorfo in varie serpentine delle Alpi occidentali.

Il Socio Cav. Prof. Andrea Naccari presenta e legge la seguente Memoria del signor Dott. Giovanni Guglielmo.

SULL'USO DELL'ELETTROMETRO

NELLA

MISURA DELLA RESISTENZA DEI LIQUIDI

COL METODO

di Mance e con quello di Wheatstone

E SULLA RESISTENZA

DI ALCUNE SOLUZIONI ALCOOLICHE DI POTASSA.

Avendo da qualche tempo dovuto occuparmi spesso di determinazioni di forze elettromotrici e resistenze di coppie e voltametri col metodo di Mance, pensai di usare questo metodo per la determinazione della resistenza dei liquidi e specialmente delle soluzioni alcooliche di sali diversi, sulle quali si sa assai poco.

Questo metodo era già stato proposto dal Lodge (1), ma non pare che egli lo abbia applicato, nè egli diede norme pratiche per evitare le cause d'errore e per avere grande sensibilità e precisione.

Le prime esperienze non essendo riuscite molto bene, credetti di non poter ottenere sufficiente precisione, e che dopo il perfezionamento e la semplificazione introdotti in queste ricerche per opera specialmente del Kohlrausch, meglio valesse il far uso delle correnti indotte.

Disposi perciò per eseguire le esperienze con tali correnti e coll'elettrodinamometro, ma, forse per mancanza d'un conveniente apparecchio d'induzione (i rocchetti di Ruhmkorff che avevo a mia disposizione o davano poca sensibilità o avrebbero potuto danneggiare l'elettrodinamometro), non ottenni risultati soddisfacenti. Notai di più che oltre all'incomodo proveniente dalla irre-

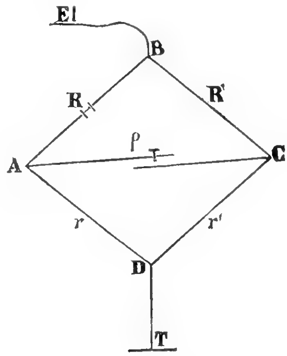
(1) Lodge, *Phil. Mag.* (5), III, 515, 1877. — *L'elettricista*, I, p. 275.

quietezza del rocchetto centrale dell'elettrodinamometro, fatto maggiore dalla poca stabilità del locale, ottenevo, ripetendo più volte l'inversione del commutatore, deviazioni abbastanza diverse. Non so se ciò dipendesse dall'uso delle correnti indotte in genere, oppure da quelle che ottenevo io cogli apparecchi di cui potevo disporre.

Quindi, considerato meglio il metodo del Mance, lo applicai con qualche opportuna modificazione, e parmi con sufficiente risultato. Forma oggetto del presente lavoro la descrizione del metodo e la sua applicazione alle soluzioni di varia concentrazione della potassa caustica nell'alcool assoluto.

1. *Sul metodo di Mance applicato alla misura della resistenza dei liquidi.* È noto che in questo metodo, se si hanno cinque reofori di resistenza R, R', r, r', ρ (fig. 1) contenenti tutti,

Fig. 1.



o almeno uno, una forza elettromotrice, si riconosce che fra le prime quattro resistenze si ha la relazione $\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}$, quando variando ρ da 0 ad ∞ non varia la differenza di potenziale dei punti B e D. La dimostrazione ne è stata data più volte, almeno nel caso che il reoforo con forza elettromotrice sia uno solo: ora pel principio di Helmholtz sulla sovrapposizione delle correnti, la stessa dimostrazione si può estendere al caso generale.

Se si suppone che la forza elettromotrice si trovi in r o in r' la sensibilità è piccola se r ed r' sono maggiori di R ed R'; cresce prima rapidamente poi sempre più lentamente se r ed r' divengono sempre più piccoli rispetto ad R ed R' e cresce ancora col crescere della variazione che subisce ρ; inoltre la sensibilità cresce proporzionalmente alla forza elettromotrice (nel caso che questa sia nulla è nulla la sensibilità), ed alla sensibilità dello strumento che misura la variazione avvenuta nella differenza di potenziale.

Questo metodo si applica dunque alla misura di qualsiasi resistenza avente o no forza elettromotrice, usando tre resistenze note ed una ignota. — La variazione della resistenza del reoforo ρ si produce interponendovi un tasto che permette di chiudere o interrompere detto reoforo.

La variazione della differenza di potenziale dei punti B e D nel metodo originale del Mance veniva riconosciuta ponendo questi punti in comunicazione coi capi d'un galvanometro; il Lodge ha introdotto un perfezionamento notevole, che ne facilita l'applicazione alle coppie incostanti col separare il galvanometro dai punti B, D mediante una conveniente disposizione del tasto, non appena chiuso esso tasto: in tal caso la deviazione dell'ago sarebbe proporzionale alla quantità di elettricità effluita che dipende, a parità delle altre condizioni, dalla durata dell'intervallo fra la chiusura del reoforo ρ e la separazione del galvanometro, ma egli inoltre interrompe il circuito di questo con un condensatore le cui armature accolgono o cedono quantità di elettricità proporzionali alla variazione della differenza di potenziale indipendentemente dalla durata di detto intervallo. Inoltre si ha così il vantaggio che l'ago rimane allo zero e si può usare un galvanometro anche molto delicato. — Devo però notare che non so se l'uso del condensatore sia stato finora adottato, giacchè, sebbene il Lodge osservi che la sensibilità può crescere indefinitamente, perchè non v'hanno limiti alla capacità del condensatore e alla lunghezza del filo del galvanometro, nel fatto per ottenere una discreta sensibilità pare che occorra o un condensatore d'una capacità straordinaria o un galvanometro d'una sensibilità non comune.

Dimostrai tempo fa (1) come sostituendo al galvanometro un elettrometro a quadranti, la determinazione della forza elettromotrice e della resistenza delle coppie costanti ed incostanti si faccia contemporaneamente, in una sola operazione e con grande semplicità, e sebbene nelle presenti esperienze non abbia luogo la misura di potenziali (a meno che occorresse determinare oltre alla resistenza dell'elettrolito la polarizzazione degli elettrodi), tuttavia mi parve ancora utile l'uso dell'elettrometro.

(1) *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino*, t. XVI. — *Nuovo Cimento*, t. IX, p. 266.

Riguardo alla applicazione del metodo, importava anzitutto d'assicurarsi che la polarizzazione, o piuttosto le sue variazioni al chiudere del tasto, fossero assolutamente senza effetto sulla variazione di potenziale accusata dall'ago dell'elettrometro. Difatti conviene notare che al chiudere del tasto la corrente cessa quasi interamente dall'attraversare l'elettrolito, ed inoltre si chiude a parte il circuito della coppia secondaria formata da esso coi relativi elettrodi, per cui cessa la forza che produceva la polarizzazione, che inoltre decresce per la chiusura del nuovo circuito; ciò produce o almeno tende a produrre nell'ago una deviazione per effetto della quale si verrebbe ad attribuire all'elettrolito una resistenza maggiore della vera. — Bisogna dunque, diminuendo la durata dell'intervallo fra la chiusura del tasto e la separazione dell'elettrometro, o aumentando la resistenza dell'elettrolito, fare in modo che tale variazione sia insensibile.

Per assicurarmi che così era in realtà, nelle condizioni delle mie esperienze, sperimentai prima con una o più coppie costanti (che naturalmente facevano parte dei reofori r ed r' di minor resistenza) e con reofori metallici, e quindi nel reoforo R' introdussi un voltametro formato da lamine di platino platinato aventi all'incirca la superficie degli elettrodi usati nel corso delle esperienze. Essendo $r=r'=100$ ed $R=R'=450$ U. S., ed essendo la resistenza del voltametro di circa $\frac{1}{10}$ di U. S. e quindi trascurabile rispetto ad R', la introduzione del voltametro non produsse un effetto sensibile (ossia superiore alle variazioni assai piccole che si potevano osservare anche senza il voltametro) e ciò anche quando la pila principale era di 4 Bunsen, nel qual caso l'elettrometro accusava chiaramente la variazione di $\frac{1}{2000}$ nella resistenza di uno qualunque dei reofori. — Ora, siccome nelle mie esperienze non usai mai più di 2 Bunsen, e la resistenza da misurare era molto superiore, non credetti necessario di ricercare fino a che punto si poteva aumentare la densità della corrente sugli elettrodi e diminuire le resistenze R ed R' senza che fosse sensibile l'errore dovuto alla polarizzazione.

Bisogna ancora che le variazioni di resistenza della pila siano trascurabili, ciò che si ottiene facilmente, come fu già consigliato dal Lodge accrescendo la resistenza del reoforo in cui essa si trova.

Un inconveniente si ha in ciò, che la polarizzazione aumentando gradatamente, occorre un certo tempo prima che l'ago sia sensibilmente fermo e si possa incominciare la determinazione: nelle mie esperienze occorrevano perciò circa 5' e la durata della determinazione era di circa 15'.

Si potrebbe rimediare a ciò interponendo nel reoforo adiacente di ugual resistenza, un altro vaso avente diversa capacità di resistenza, con due elettrodi possibilmente uguali per natura e grandezza a quelli del primo e con lo stesso elettrolito; chiamando x, y le resistenze dei due vasi con l'elettrolito, dovrebbe essere acciocchè l'ago non fosse deviato $(R + x) : (R' + y) = r : r'$; il rapporto $\frac{x}{y}$ della capacità di resistenza dei due vasi, si può determinare in una sola operazione usando, come nel caso d'un solo recipiente, un liquido di conducibilità nota e si può quindi ricavare x ed y. Del resto si potrebbe anche costruire il secondo vaso, di piccola capacità di resistenza e con forma geometrica semplice in modo da poterne calcolare la capacità di resistenza senza errore sensibile, usando un valore approssimato della conducibilità del liquido. Essendo la densità della corrente sugli elettrodi, e la natura di questi e dell'elettrolito la stessa nei due vasi, le polarizzazioni rispettive saranno almeno molto prossimamente uguali, ed agendo sull'ago in senso contrario si neutralizzeranno.

Si ha ancora il vantaggio, che, quando la polarizzazione producesse un piccolo errore nell'apprezzamento della resistenza incognita, questo errore presentandosi nei due reofori con valori prossimamente uguali e di segno contrario si annullerebbe, ossia l'ago spinto dalla variazione delle due polarizzazioni in senso contrario, non risentirebbe tale influenza. Il principio di tale disposizione del resto non è certo nuovo, giacchè fu uno dei primi artificî cui si ricorse per eliminare l'errore dovuto alla polarizzazione. Fin adesso non essendosi presentata la necessità di tale modificazione, pur riconoscendola comoda più per la prima che per la seconda delle ragioni accennate, non l'ho messa in effetto.

Finalmente un inconveniente più grave dei precedenti, e che rimane escluso usando le correnti indotte, si ha nell'alterazione dell'elettrolito per effetto del passaggio della corrente. Tale inconveniente è grave, specialmente nel caso di liquidi che per l'elettrolisi depongono sostanze isolanti, come per es. i sali di calcio, ecc. Si rimedia però facilmente a tale inconveniente usando vasi di resistenza molto grande in modo che la intensità della corrente sia piccola (ciò che non presenta nessun inconveniente speciale; la sensibilità dipendendo solo dalla forza elettromotrice della pila, non ne verrebbe punto alterata) ed usando vasi della forma già usata da Kohlrausch e Grotrian cioè costituiti da due larghi tubi riuniti da un tubo ad U di sezione molto minore; così l'alterazione del liquido essendo piccola ed inoltre diffusa su un largo elettrodo è senza influenza sensibile (ciò di cui m'assicurai colla esperienza) sulla resistenza costituita in massima parte dal tubo più stretto.

Nel caso di sali che depongono prodotti insolubili, l'esperienza mi convinse presto che ciò era insufficiente, e conviene ricorrere ad un artificio come sarebbe circondare l'elettrodo con un largo tubo di vetro con fondo di carta pergamena (il tubo di vetro potrebbe essere sostituito dalla ripiegatura della carta), ed in questo vaso poroso mescolare una piccola quantità di un sale che impedisca tale deposizione. Così p. es. mescolando alla soluzione di cloruro di calcio un poco di cloruro di zinco disciolto, essendo la densità della corrente piccolissima, lo zinco si depone invece della calce, e d'altra parte, opponendosi la corrente all'uscita dal vaso poroso del catione che tende invece a trasportare sul catodo, ed essendo l'anione lo stesso nei due sali, non si ha da temere che il sale aggiunto esca dal vaso poroso dove l'alterazione della resistenza è trascurabile, a causa della sezione molto grande relativamente a quella del tubo stretto.

2. *Sul metodo del ponte di Wheatstone applicato alla misura della resistenza dei liquidi.* Cercando i mezzi di aumentare nel metodo ora descritto la sensibilità (del resto abbastanza grande), e di eliminare possibilmente gl' inconvenienti, pensai di introdurre nel reoforo ρ una forza elettromotrice che tende ad inviare in R ed R' una corrente contraria a quella della forza elettromotrice principale; come è noto, e d'altronde è facile a dimostrare, neppure in tal caso al chiudere del tasto varia la differenza di potenziale dei punti B e D quando sia verificata la solita relazione.

Ciò aumenta la sensibilità, ed era naturale poscia di sopprimere la pila che trovasi nel circuito $A\ B\ C\ D$, e giovarsi unicamente della pila del reoforo ρ: si è così condotti dal metodo di Mance a quello di Wheatstone, però con la modificazione di staccare il reoscopio appena chiuso il tasto e sostituire al galvanometro, che misura le quantità di elettricità, l'elettrometro, che misura le differenze di potenziale. È evidente che questo metodo presenta non lievi vantaggi su quello del Mance, giacchè non si hanno più nè variazioni nella posizione dell'ago, nè alterazione, nè possibile riscaldamento del liquido: mi pare anche che presenti non lievi vantaggi sul metodo usato dal Kohlrausch, giacchè non richiede l'uso d'uno speciale apparecchio d'induzione, ed invece dell'elettrodinamometro, strumento il cui uso non è privo d'incomodi, ed è non molto frequente, si adopera l'elettrometro a quadranti, strumento d'un uso assai comodo che non richiede una speciale stabilità di locale; e che, con una disposizione di reofori identica o quasi a quella attuale, si presta con altrettanta facilità alla determinazione della forza elettromotrice delle coppie e di quella di polarizzazione a circuito chiuso. Credo inoltre che in questo metodo, non meno che in quello del Kohlrausch, sarebbe possibile l'uso del telefono invece dell'elettrometro.

Riservandomi di fare ulteriori studi sull'applicazione di questo metodo e sulla sostituzione del telefono all'elettrometro, dirò solo che ho fatto delle esperienze per vedere se e fino a che punto possa considerarsi come trascurabile l'influenza della polarizzazione prodotta dalla corrente che attraversa per un istante l'elettrolito. Il caso non è essenzialmente diverso da quello del metodo di Mance, e solo le variazioni della polarizzazione avvengono in senso contrario. L'elettrolito, finchè il tasto è aperto, non è attraversato da corrente e quindi non ha polarizzazione: chiudendo il tasto per un istante viene attraversato da una corrente che aumenta la polarizzazione, ed anche in questo caso essa tende a deviare l'ago, come se la resistenza del liquido fosse maggiore della vera. Per vedere fino a che punto è insensibile tale influenza usai il metodo già seguito pel metodo di Mance, cioè osservai se l'introduzione in uno dei reofori di un voltametro a lamine di platino platinate in acqua acidulata con acido solforico, di resistenza trascurabile rispetto a quella del reoforo, producesse effetto sensibile. Essendo la superficie delle lamine di circa 15 cm^2, e la resistenza calcolata del voltametro approssimativamente di 0,1 di U. S., ed essendo $R = R' = 450$, $r = r' = 100$ usando 3 coppie ad acido cromico un po' esauste, ed accusando l'elettrometro chiaramente una variazione di 0,001 nella resistenza di uno qualunque dei reofori, l'introduzione del voltametro in R non produsse effetto sensibile.

Determinai anche la capacità di resistenza del vaso di resistenza usato nelle esperienze con una soluzione neutra e nota di solfato di zinco, prima fra elettrodi di zinco amalgamato ed ottenni $152,9 . 10^{-5}$, quindi fra elettrodi di argento platinato e di platino non platinato che sono suscettibili di una forte polarizzazione ed ottenni $152,4 . 10^{-5}$. La resistenza del reoforo R e quella uguale del vaso di resistenza colla sua soluzione era di 368,8, $r = r' = 100$, la pila era ancora di 3 coppie ad acido cromico, e la sensibilità di $\frac{1}{1500}$. Come vedesi, l'accordo è abbastanza soddisfacente, e la piccola differenza, dovuta probabilmente ad incertezza sul coefficiente per la temperatura, non può essere attribuita all'influenza della polarizzazione, giacchè essa sarebbe di segno contrario.

Ho anche fatto qualche tentativo per sostituire all'elettrometro un galvanometro, strumento che è d'un uso più semplice e più comune. Senza condensatore non s'avrebbe precisione, e d'altronde non ottenni che una sensibilità assai piccola: neppure con un condensatore della capacità di 1 microfarad e con un galvanometro comune discretamente sensibile ottenni sensibilità sufficiente: si potrà forse ottenere con un galvanometro a specchio, e con un condensatore di maggior capacità, ma allora non s'ha alcun vantaggio sull'uso dell'elettrometro.

3. *Resistenza elettrica delle soluzioni alcooliche di potassa.* Determinai col metodo di Mance la conducibilità delle soluzioni di idrato potassico nell'alcool assoluto.

R ed R' erano costituiti da due reostati di Siemens ed Halske, la cui resistenza totale era rispettivamente di 500 e 10000 U. S.; r ed r' dalle due metà d'un reostato a rocchetti costruito in Laboratorio ciascuna di 100 U. S.; la pila era sempre formata da due Bunsen, l'una inserita nel reoforo r, l'altra in r'. L'elettrometro a quadranti era quello di Mascart costruito da Carpentier, nel quale le oscillazioni dell'ago sono smorzate pressochè totalmente da due palettine che pescano nell'acido solforico concentrato. Ciò conveniva assai bene alla non grande stabilità del locale, ma il liquido, per la sua grande viscosità, opponeva sensibile ostacolo ai movimenti, tanto che occorreva non di rado di doverlo cambiare perchè la deviazione prodotta p. es. da una Daniell non prendeva il suo vero valore, se non dopo molto tempo; e similmente, ponendo i quadranti in comunicazione col suolo, l'ago non ritornava allo zero se non lentamente e in modo imperfetto. Da ciò potrà forse venire qualche inesattezza nella misura delle piccole deviazioni e forse sarebbe stato più conveniente un elettrometro come quello di Branly, in cui si sarebbe potuto osservare anche solamente un accenno ad una deviazione in un senso.

Per avere una discreta sensibilità l'angolo della sospensione bifilare era ridotto assai piccolo, ma non quanto sarebbe stato possibile. L'ago dell'elettrometro era in comunicazione col polo d'una pila Zamboni di 350 elementi costruita nel 1870, l'altro polo comunicava col suolo; ponendo i due quadranti in comunicazione coi due poli di una Daniell s'aveva una deviazione di 110 divisioni di cui si apprezzava con facilità il decimo; questa deviazione si riduceva invece a 4 divisioni quando l'ago era in comunicazione con un polo di due Bunsen, di cui l'altro comunicava col suolo, per cui si può ritenere che la forza elettromotrice della pila secca fosse approssimativamente di 50 Bunsen. Come vedesi la sensibilità era discreta, ma non eccessiva, e non sarebbe stato difficile nè molto incomodo raddoppiarla o triplicarla usando una pila secca d'un numero doppio o triplo di elementi, e pur non volendo diminuire maggiormente l'angolo della sospensione bifilare.

L'elettrometro sebbene inizialmente fosse stato regolato come è necessario nelle misure di potenziali, presto o per flessione della mensola su cui stava o per altre cause non lo era più; così le deviazioni prodotte da una Daniell erano di 110 divisioni a destra, di 107 a sinistra, quindi spostamenti uguali dell'ago, a destra o a sinistra indicavano variazioni di potenziali non affatto uguali, ma differenti di qualche centesimo; ciò però nel nostro caso non ha influenza sensibile, che del resto sarebbe stato facile calcolare.

Per chiudere il reoforo ρ e quasi simultaneamente separare l'elettrometro usai presso a poco la disposizione già usata nella misura della forza elettromotrice e resistenza delle coppie. Un piccolo bilanciere è formato da due bracci metallici isolati l'uno dall'altro e in comunicazione uno col punto B l'altro col punto C del circuito. Il primo, che chiamerò anteriore, nella posizione ordinaria riposa su una colonnina metallica, isolata, ed in comunicazione con una coppia di quadranti dell'elettrometro, mentre l'altra coppia è permanentemente in comunicazione col suolo.

Picchiando con un'asta metallica, tenuta con manico isolante ed in comunicazione col punto A sul secondo braccio del bilanciere si chiude il reoforo $A\,C\,(\rho)$, e nel tempo stesso si stacca il braccio anteriore dalla colonnina e l'elettrometro rimase isolato. Così la durata dell'intervallo fra la chiusura del reoforo ρ e la separazione dell'elettrometro dal punto B è piccolissima e quasi inapprezzabile.

Di più la prima coppia di quadranti era, come nel caso delle coppie elettriche, in comunicazione con un'armatura di un condensatore di cui l'altra comunicava col suolo. Ciò ha per iscopo di rendere insensibili le piccole quantità di elettricità che per caso si generassero per attrito o per induzione nel moto del tasto, diffondendole in una grande capacità. Non parrebbe impossibile di costruire un tasto in cui tale irregolarità fosse insensibile, ma nel mio caso il tasto era costruito alla meglio, adattando un apparecchio destinato ad altro scopo, e l'uso del condensatore era indispensabile, e d'altronde punto incomodo: bastava $\frac{1}{20}$ della capacità totale del condensatore che era di 1 microfarad e forse sarebbe bastato assai meno perchè tale causa d'errore fosse insensibile.

I vasi di resistenza avevano la forma già usata dal Kohlrausch di due vasetti riuniti da un tubo ad U basso di sezione minore; così oltrechè gli errori dovuti alla polarizzazione, o alla alterazione del liquido per l'elettrolisi ove esistano, vengono considerevolmente ridotti, si ha anche il vantaggio che una piccola variazione nella posizione dell'elettrodo nelle varie esperienze riesce senza influenza. Il diametro interno dei vasetti era di circa 45mm., quello del tubo di 12mm., la lunghezza di questo 15 cm.

Un segno tutt'attorno al vetro indicava la profondità a cui si facevano giungere gli elettrodi.

Gli elettrodi formati da dischi, cui era saldata normalmente un' asticciuola protetta da un tubo di vetro, erano l'uno di argento, l'altro, l'anodo, di platino, acciocchè non venisse attaccato; il primo era già antecedentemente platinato, non credetti necessario di platinare il secondo. Essi erano tenuti dai tappi di sughero dei vasetti, la cui buona chiusura era guarentita inoltre da un largo tubo di gomma legato sulle giunture; nelle ultime esperienze inoltre i tappi furono esternamente spalmati con paraffina.

Per determinare la capacità di resistenza di questi vasi usai una soluzione di solfato di zinco neutralizzata facendola bollire lungamente con carbonato di zinco in eccesso, e di tale concentrazione da avere la massima conducibilità. Non essendo ben certo della purezza del sale, credetti conveniente di determinarne la resistenza specifica col solito metodo, cioè ponendola in un tubo di vetro, di cui avevo determinato la sezione a varie altezze, fra elettrodi di zinco amalgamato di cui calcolai la distanza media. misurando col catetometro le distanze delle estremità di due diametri ortogonali di un elettrodo dalle omologhe dell'altro elettrodo, giacchè le due lamine non erano assolutamente parallele. Il tubo durante la determinazione di resistenza era naturalmente contenuto in un bagno con agitatore e termometro diviso in quinti di grado: feci tre determinazioni con diversa distanza degli elettrodi ed alle temperature di 18°,4 17°,44 e 15°,33; nella prima determinazione la temperatura variò di qualche decimo di grado. ma feci le osservazioni alternate e presi la media. Ammettendo come coefficiente per la temperatura il valore 11,9 riportato da Kohlrausch, si ha per la conducibilità della soluzione a 18°: 431,6 429,2 430,3 rispettivamente, ed il valore medio è $430,4.10^{-8}$.

Con questa soluzione determinai la capacità di resistenza del vaso usato nelle esperienze (ossia la sua resistenza quando fosse pieno di mercurio a 0°) ed ottenni $151,5.10^{-5}$: fatta la media coi due valori ottenuti con un'altra soluzione pure neutra di solfato di zinco e col metodo del Wheatstone presi il valore $152,3.10^{-5}$.

Le soluzioni di cui determinai la resistenza finora sono solamente quelle a varia concentrazione di idrato potassico nell'alcool assoluto. Questo aveva la densità di 0,79595 a 17°,0. La potassa caustica proveniva dalla casa Trommsdorff: era in un vaso sigillato che non era mai stato aperto; dopo averne tolto in ciascuna esperienza la quantità occorrente con la maggiore prestezza possibile, veniva nuovamente sigillato, ma nondimeno l'idrato potassico conteneva una quantità non indifferente di carbonato che rimaneva indisciolto.

La soluzione nell'alcool avveniva molto lentamente, ciò che probabilmente deriva da lentezza di diffusione della potassa nell'alcool: non ostante il frequente agitare, occorreva una intera mattina perchè la soluzione fosse quasi completa, ed allora veniva filtrata attraverso amianto.

Le soluzioni alcooliche di potassa e specialmente le più concentrate, come è noto, in breve si colorano in giallo che diventa sempre più carico per una alterazione dell'alcool; non sempre potei fare la determinazione di resistenza prima che incominciasse tale alterazione, però nelle esperienze che feci con una stessa soluzione appena filtrata e 24 ore dopo, quando aveva già una notevole colorazione non scorsi nella resistenza un grande cambiamento, maggiore di quello che potesse essere attribuito all'assorbimento di quantità minime di acqua o di acido carbonico.

Le determinazioni di resistenza furono fatte a tre temperature, cioè a 0°, alla temperatura ambiente che era di circa 12°, ed alla temperatura di 30° a 35°. Per la prima il vaso di resistenza colla soluzione veniva posto nel ghiaccio per 45′ o 60′ avanti di incominciare la determinazione; per le altre veniva posto in un bagno formato da due recipienti concentrici della capacità complessiva di 8 litri, con termometro diviso in quinti di grado, di cui era nulla la correzione per lo zero, ed agitatore. Nel caso della temperatura di 30° a 35° incominciavo la determinazione chiudendo il circuito quando la temperatura mi pareva sufficientemente costante, però dovendo osservare l'elettrometro, e non volendo prolungare troppo la durata del passaggio della corrente talora avvenne che la temperatura variasse più di quello che avrei desiderato; però le variazioni non superarono 0,1 di grado e facendo le osservazioni alternate, credo d'aver ridotto abbastanza piccolo l'errore molto notevole che potrebbe derivare da una tal causa.

In ciascuna serie di determinazioni incominciavo a verificare i valori della resistenza metallica posta in R' che producevano alla chiusura del tasto, essendo $r = r' = 100$ U. S., $R = 450$, due deviazioni di segno contrario non superiori ad una divisione, e determinavo così il rapporto $r : r'$ che per qualche inesattezza del reostato relativo, o per le coppie che si trovavano appunto in r ed r', non era precisamente uguale all'unità, ed invece trovai sempre $\frac{r}{r'} = \frac{450}{452,2}$; in seguito fatto $R = 0$ vi sostituivo la resistenza incognita, e determinavo i valori di R' tali, che alla chiusura del tasto si producesse una deviazione inferiore ad una divisione in un senso e nel senso contrario, e quindi colla relazione $\frac{x}{R'} = \frac{450}{452,2}$ potevo determinare x. Per assicurarmi che le deviazioni dell'ago non fossero per qualche causa accidentale erronee, ripetevo due volte la chiusura del tasto per ciascun valore di R'.

Come dissi di già, la durata di ciascuna determinazione era di 15 a 20 minuti, ed a causa della gran resistenza delle soluzioni, l'intensità della corrente e l'alterazione del liquido dovevano essere piccolissime; non m'occupai di fare una ricerca speciale sull'errore proveniente da un passaggio prolungato della corrente, ma mi bastò di verificare che facendo passare la corrente per molte ore di seguito (essendo sempre la soluzione a 0°) non si osservasse una piccola variazione (diminuzione) della resistenza se non dopo molte ore, e non so se essa fosse dovuta ad assorbimento di vapor acqueo attraverso i larghi tappi di sughero, anzichè ad un effetto del passaggio della corrente.

La proporzione di potassa ed alcool in ciascuna soluzione era determinata col noto metodo di saturare la potassa col volume occorrente d'una soluzione titolata d'acido solforico, neutralizzando un piccolo eccesso d'acido con una soluzione titolata di idrato sodico, usando per indicatore del punto di saturazione la tintura di tornasole. La soluzione d'acido solforico era stata preparata con un noto peso di acido solforico puro che aveva la densità: 1,8561 a 0° per cui, secondo la tavola data da Bineau, ritenni che contenesse $^{9}/_{1000}$ di acqua.

L'analisi veniva fatta due volte; prima su una porzione di soluzione non ancora sottoposta alla misura di resistenza, e poscia su una parte della soluzione già sottoposta a questa misura. Nelle prime esperienze, o per essere i tappi di sughero un po' troppo porosi, o per maggior durata della determinazione, trovai nella prima analisi fino a $\frac{5}{1000}$ della quantità di potassa in più che nella seconda; turati i pori con paraffina, e divenuta anche minore la durata dell'esperienza, la differenza scese fino ad $\frac{1}{1500}$ sempre nello stesso senso, dipendendo ciò probabilmente dall'assorbimento di un po' d'acido carbonico nel versare da un vaso nell'altro e nel depositarsi quindi del carbonato che così almeno in parte si sottrae all'analisi. Bisogna notare ancora che specialmente nelle soluzioni più concentrate, che furono le prime studiate, il liquido era notevolmente colorato in rosso, tanto da rendere meno precisa l'osservazione del cambiamento di colore del tornasole, ed inoltre una piccola quantità di potassa poteva essersi combinata coll'acido derivante dall'alterazione dell'alcool.

A proposito della colorazione pel passaggio della corrente si può notare che essa si produceva specialmente attorno al catodo, e che cresceva notevolmente anche dopo rimesso il liquido nella propria boccia; pare quindi che debba attribuirsi non al piccolissimo eccesso di potassa trasportato verso il catodo, ma all'azione dell'aria aiutata dal nero di platino di cui era ricoperto l'elettrodo, ed all'aria in esso racchiusa. Difatti in esperienze su altro argomento con correnti più intense, dimodochè s'aveva uno sviluppo visibile di ossigeno sull'anodo, la colorazione si produsse invece molto intensa attorno a questo elettrodo.

Delle varie soluzioni determinai il peso specifico col metodo della boccetta con un tubo di Sprengel [tubo ad U affilato ai due estremi di cui uno con apertura capillare (1)] proteggendo le aperture della piccola evaporazione possibile con tubetti di vetro chiusi ad un capo. Siccome le soluzioni erano già note per le analisi fattene, ed il peso specifico ad altro non serviva che a calcolare il numero di molecole, esso fu determinato alla temperatura ambiente qualunque essa si fosse e data da un apposito bagno, e presi per coefficiente di dilatazione del vetro quello dato da Regnault e che trovasi nelle tavole usuali.

Ecco ora nella seguente tabella: nella prima linea la proporzione di potassa delle varie soluzioni, nella seconda il numero di molecole a 12°, nella terza la densità con allato la temperatura a cui fu determinata, nelle successive le resistenze osservate con la relativa temperatura. Le resistenze sono quali furono lette in R'; quindi, per avere il loro vero valore, devono essere moltiplicate per $\frac{450}{452,2}$:

%	21,27 %		14,42		12,61		9,24		8,625	
N_{12}	3,695		2,3647		2,032		1,445		1,338	
D	0,9730 (11°,7)		0,9192 (10°,7)		0,0008 (14°,0)		0,8755 (11°,5)		0,8688 (12°,0)	
t ed R	0°	7137,5	0°	4432,4	0°	4040	0°	3667	0°	3632
»	10°,6	4400	14°	2709,5	12°,85	2650	13.9 13,7	2455 2459	14°,3	2418
»	37° appr.	1762	39,85	1621,7	32,15	1584	33,15	1560	34,4	1523

(1) Pogg., *Ann.*, t. 150, p. 459.

%	5,535		3,732		1,408		18,36	
N_{12}	0,8317		0,5540		0,2034		3,12	
D	0,8431 (16°,3)		0,8303 (13°,2)		0,8113 (13°,4)		0,953 (12°,6)	
t ed R	0°	3982	0°	4752	0°	8740	0°	—
»	14°,22	2808	14°,4	3442,5	14°,3	6639	12°,3	3391
»	—	—	33°,3	2460	—	—	—	—

Vedesi come per la soluzione più concentrata che doveva essere prossimamente satura, la resistenza sia molto grande e diminuisca rapidamente, sia coll'aumentare della diluizione, sia con quello della temperatura. Crescendo la prima, la conducibilità raggiunge un valore massimo verso la soluzione che ha 9,24 di potassa caustica per cento di soluzione.

L'esperienza a cui si riferisce il valore riportato nell'ultima colonna fu la prima in ordine di tempo, essa fu una esperienza di saggio con una soluzione che preparata da circa 15 giorni era stata in questo tempo in un pallone con una gran quantità di aria, inoltre durante l'esperienza essa venne versata da uno in un altro vaso di resistenza per ottenere la sensibilità opportuna, per cui è probabile che avesse assorbito qualche piccola quantità di acqua; inoltre l'analisi non potè esser fatta con grande precisione a causa dell'intensa colorazione del liquido.

Riguardo all'influenza della temperatura vedonsi nella seguente tabella i coefficienti relativi calcolati ponendo

$$K_t = K_0 (1 + \alpha t + \beta t^2) .$$

essendo K_0, K_t le conducibilità a 0° e t°; inoltre nella seconda e terza linea trovansi le conducibilità a 0° ed a 12° che è la temperatura per la quale furono calcolati i numeri di molecole. Come è noto, per numero di molecole prendesi il numero di milligrammi di sale contenuto in 1 cm³ di soluzione diviso pel peso della molecola; fu scelta la temperatura di 12° perchè più prossima a quella delle varie densità e di parecchie resistenze; e per le piccole correzioni occorrenti per la riduzione delle densità a 12° esatti mi servii del coefficiente di dilatazione dell' alcool non essendo noto, credo, quello delle soluzioni in questione:

N_{12}	0,2034	0,5540	0,8317	1,338	1,445	2,032	2,3647	3,695	3,12
$K_0\ 10^8$	17,58	32,33	38,58	42,30	44,89	38,03	34,66	21,52	—
$K_{12}\ 10^8$	22,02	42,07	51,55	59,18	59,06	56,23	52,56	37,38	45,5
α	0,02208	0,02523	0,0273	0,03145	0,03203	0,03589	0,03857	0,04913	—
β	0,000032	0,000082	0,000147	0,000256	0,000251	0,000384	0,000489	0,000902	—

I coefficienti α e β, come rilevasi dalla tabella, vanno crescendo col crescere del numero di molecole; prendendo questi come ascisse e i coefficienti come ordinate, la curva delle α è in tutta la sua estensione rettilinea, quella delle β lo è pure ma solo fin verso la 5ª soluzione, dopo si solleva presentando una leggera convessità verso l'asse delle ascisse. Delle soluzioni 1ª e 3ª non essendo nota la resistenza che a due temperature, i valori di β furono dedotti dalla curva relativa e quindi furono calcolati i valori di α; anche essi cadono sulla retta determinata delle altre α. Anche per la soluzione di saggio, dedotto il valore di α dalla curva fu calcolata la conducibilità a 12^0, ma questa, rispetto alla curva delle conducibilità, risultò di circa $\frac{3}{100}$ troppo grande; errore che non parrà troppo grande considerate le condizioni speciali in cui venne determinata.

La curva delle conducibilità rispetto al numero di molecole non è abbastanza semplice per poter essere rappresentata con una delle solite relazioni; prendendo per le soluzioni più diluite la relazione usata dal Kohlrausch: $K_{12} = \lambda N + \lambda' N^2$, relazione che nel nostro caso può valere appena per le tre soluzioni più diluite, si ha per la conducibilità molecolare $\left(\text{limite di } \frac{K_{12}}{N}\right)$, $\lambda = 127,53.10^{-8}$, mentre è $\lambda' = 92,55.10^{-8}$. Per le soluzioni acquose invece è $\lambda = 1991.10^{-8}$, $\lambda' = 270.10^{-8}$, quindi la conducibilità molecolare (bensì a 18^0) è quasi 15 volte maggiore che nelle soluzioni alcooliche.

Ho anche fatto poche esperienze aggiungendo una determinata proporzione d'acqua ad alcune delle soluzioni precedenti, cioè: 29^{gr},73 d'acqua a 59,61 della soluzione prima nella prima tabella, 32,66 gr. d'acqua a 52,78 della soluzione seconda, e 73,32 gr. di acqua a 22,11 gr. della stessa soluzione seconda.

La composizione delle tre soluzioni è dunque di 12,69 gr. di potassa, 46,92 di alcool, 29,73 di acqua per la prima (S_1); 7,625 gr. 45,16 e 32,66 per la seconda (S_2); 3,192 18,92 e 73,22 rispettivamente di potassa, alcool ed acqua per la terza (S_3). Nella qui annessa tabella si hanno il numero di molecole e la densità a 13°,5, la conducibilità a 0°, ed i coefficienti α e β. Le densità di queste soluzioni come anche quella di soluzione di saggio nell'alcool assoluto furono determinate più d'un mese dopo la determinazione della resistenza:

	%	$N_{13,5}$	$D_{13,5}$	$K_0 \cdot 10^8$	α	β
S_1	14,2	2,55	1,007	299	0,0393	0,000288
S_2	8,94	1,55	0,974	249	0,0408	0,000217
S_3	3,35	0,598	1,002	335	0,0066	0,0000125

Vedesi che l'aggiunta dell'acqua aumenta sempre la conducibilità, che rimane però sempre molto inferiore a quella delle soluzioni nell'acqua. Naturalmente aumentando la quantità d'acqua, la conducibilità dovrà raggiungere un massimo per il facilitato movimento degli ioni e quindi decrescere a causa della sempre crescente rarità di essi ioni per mezzo dei quali si effettua il passaggio della corrente.

Lo studio delle soluzioni di un solo corpo non può naturalmente offrire molto campo a raffronti. Sarebbe interessante di studiare, sia le soluzioni alcooliche di altri sali, sia le soluzioni di uno stesso sale in varî solventi aventi una qualche relazione nella composizione della molecola, nel suo volume, ecc. come sarebbero i varî alcool d'una serie organica, sia anche di studiare le soluzioni in uno stesso solvente di varî sali aventi pure una relazione nella composizione, volume, peso della molecola, e tali argomenti saranno forse oggetto di uno studio speciale.

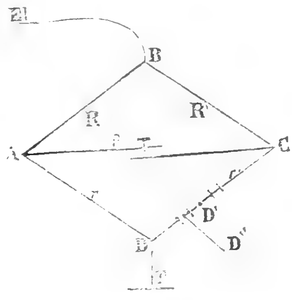
Non è improbabile che dalla conoscenza della diffusione e della resistenza elettrica delle soluzioni saline si possa giungere ad avere sulla costituzione dei liquidi nozioni un po' più precise di quelle, che si hanno al dì d'oggi.

APPENDICE

Sulla determinazione delle forze elettromotrici di polarizzazione.

Il metodo usato per la determinazione delle resistenze dei liquidi, può anche servire con poca o nessuna modificazione, alla determinazione della polarizzazione degli elettrodi. Difatti, se si pone in uno dei reofori, p. es., in r' la coppia e l'apparecchio di polarizzazione, e si regolino le resistenze in modo che sia $\frac{R}{R'} = \frac{r}{r'}$, e sia anche per semplicità $R = R'$ e quindi $r = r'$, chiamando D la differenza di potenziale dei punti B e D (fig. 2), E la

Fig. 2



forza elettromotrice della pila, ed e quella di polarizzazione si avrà: $D = \frac{1}{2}(E - e)$, da cui si potrà ricavare e se si è adoperata una pila costante, e mediante un'esperienza preliminare sia stato determinato E. Oppure si può portare il filo $D\,T$ da D in D' tra la pila e l'apparecchio di polarizzazione, ed allora, regolando la resistenza del reoforo in modo che sia nuovamente $R = R'$, $r = r'$, e che non abbia variato la resistenza totale, si avrà: $D' = \frac{1}{2}(E + e)$ e tra le due eguaglianze si può ricavare E ed e.

Si ha così la forza elettromotrice di polarizzazione, senza aprire il circuito, ciò che lascia sempre adito al dubbio che nell'intervallo per quanto piccolo d'apertura del circuito sia variata la quantità che si vuol misurare. Adottando pel tasto, ove occorra, una conveniente disposizione perchè il reoforo ρ non rimanga chiuso che per un brevissimo istante, la perturbazione causata nel passaggio della corrente per la chiusura del nuovo circuito può essere insensibile, e si possono quindi studiare le varie fasi per cui passa la polarizzazione crescendo la durata del passaggio della corrente. Essendo nota la resistenza totale è quindi nota anche l'intensità della corrente, la sua densità su ciascun elettrodo, come sono note del pari le resistenze della coppia e dell'apparecchio di polarizzazione, e ciò senza che occorra alcuna determinazione supplementare.

Nel caso che si voglia sperimentare con correnti intense, o con apparecchi di polarizzazione di gran resistenza, gioverà porre questo nel reoforo R o R', anzichè in r', giacchè è noto che per avere sensibilità devono essere r ed r' piccoli rispetto R ed R', o al più uguali.

Come saggio d'applicazione del metodo estraggo da una serie di esperienze sulla polarizzazione di elettrodi di piccola superficie, che non potei fin adesso condurre a termine, le seguenti esperienze sulla polarizzazione dello zinco nell'acqua acidulata e nel solfato di zinco, esperienze che sebbene richiedano di essere estese e completate, pure non mancano d'interesse.

Volendo determinare la polarizzazione di un solo elettrodo, sia per l'ossigeno che per l'idrogeno, usai come uno degli elettrodi una lamina di zinco di 38 cm^2 di superficie per ciascuna faccia, e per altro elettrodo un filo di zinco di 3,3 mm. di diametro coperto da un tubo di vetro e ceralacca, lasciando libero un tratto di 4,5 mm. all'estremità, cosicchè la superficie dell'elettrodo era di 55 mm^2. In tali condizioni, poichè la polarizzazione diminuisce al crescere della superficie dell'elettrodo, si può ammettere che la polarizzazione della lamina sia trascurabile di fronte a quella del filo, e ritenere che la polarizzazione dell'intero apparecchio sia composto unicamente da questa; occorrendo, si potrebbe anche fare l'opportuna correzione (1).

(1) Si potrebbe anche portare da r' in r, o da R' in R solo una parte dell'apparecchio di polarizzazione, ossia immergere nell'acqua acidulata del vol-

Nella seguente tabella trovasi la forza elettromotrice di polarizzazione dello zinco per l'idrogeno nell'acqua acidulata con acido solforico puro ad $\frac{1}{20}$ in volume; l'anodo ed il catodo erano separati da un diaframma. La pila era costituita da una Daniell. Le forze elettromotrici sono riferite a quella d'una Daniell campione (a sifone e con solfato di zinco) che produceva nell'ago dell'elettrometro una deviazione di 51,3 divisioni della scala, esse hanno il segno *meno* quando sono contrarie a quella della pila primaria:

Resistenza totale . . .	∞	827	∞	219	∞	55	∞	∞	868	33,4	∞
Resistenz. della coppia . .	—	6,25	—	4,6	—	3,7	—	—	6,3	3,1	—
Resistenza del voltametro .	—	7,25	—	4,9	—	1,0	—	—	7,7	3,6	—
F. elettromotr. della coppia	1,035	1,03	1,03	1,015	1,025	0,995	1,02	1,03	1,02	1,00	1,025
Id. del voltametro . . .	+0,01	— 0,18	— 0,24	— 0,24	— 0,03	— 0,27	— 0,02	0,0	— 0,15	— 0,31	— 0,015

La coppia ed il voltametro essendo stati preparati recentemente, ed i vasi porosi ancora imbevuti di acqua pura, la loro resistenza per un certo tempo continuò a decrescere fino ad un certo limite. Ecco un'altra esperienza in condizioni simili alle precedenti, ma con due Daniell per pila: l'acqua acidulata era nuova non bollita:

Resistenza totale . . .	∞	816	214	72,8	21,2	815	∞
» della coppia .	—	4,4	4,1	4,0	3,7	—	—
» del voltametro .	—	3,5	2,9	2,4	1,9	—	—
F. elettromotrice della pila	2,04	2,03	2,03	2,02	2,005	D come nella 2ª col.ª	2,015
» del voltametro.	+ 0,05	— 0,265	— 0,319	— 0,347	— 0,399	—	— 0,02

tametro in D'' il capo del filo TD, che comunica con una coppia di quadranti dell'elettrometro o col suolo, e che prima stava ad un'estremità del voltametro. Si ha così: $D = \frac{1}{2}(E - e - \varepsilon)$ e $D' = \frac{1}{2}(E - e + \varepsilon) + A$, essendo e la polarizzazione della lamina, ε quella dell'elettrodo, che si vuole determinare, ed A la forza elettromotrice proveniente dall'immersione del filo nell'acqua acidulata, e che si può determinare a circuito aperto. Converrebbe però assicurarsi, che essa fosse veramente costante e non cambi p. es. al passaggio della costante.

Nelle seguenti esperienze la pila fu di 2 Daniell nella prima serie (A), di 5 Bunsen nella seconda (B). L'acqua acidulata era preparata nuovamente, bollita e versata ancor calda:

	A						B				
Resistenza totale . . .	∞	815,8	215,0	73,6	22,4	∞	806,5	206,4	45,4	14,86	206,4
Resistenz. della pila . . .	—	4,8	4,7	4,5	4,2		0,20	0,28	0,16	0,155	—
Resistenza del voltametro .	—	3,1	2,7	2,3	2,0	—	3,6	3,22	3,04	2,69	—
F. elettromotr. della pila .	2,045	2,01	2,02	2,01	1,99	2,01	1,725	1,725	1,705	1,665	D come nella 2ª col.ª
F. del voltametro . . .	+0,025	−0,239	−0,275	−0,323	−0,387	−0,03	−0,327	−0,387	−0,441	−0,456	—

Nella serie B le 5 Bunsen trovavansi 3 in r e 2 in r' per cui la resistenza indicata come pure la forza elettromotrice è quella della differenza, cioè d'una sola Bunsen. Da queste esperienze appare manifesto che la polarizzazione dello zinco per l'idrogeno nell'acqua acidulata non è nulla come voleva Exner con uno specioso ragionamento (1), ma ha un valore notevole che può giungere fino a quasi $\frac{1}{2}$ Daniell quando la densità della corrente sia abbastanza grande; niente inoltre indica che debba arrestarsi là, e che aumentando ancora la densità della corrente non aumenti la polarizzazione.

Ho eseguito delle esperienze con elettrodi pure di piccola superficie di carbone e di rame, ed i valori della forza elettromotrice della coppia (Cu_H, Zn), (C_H, Zn) per grandi densità di corrente furono presso a poco uguali a quello della coppia (Zn_H, Zn), ma l'annerimento dell'elettrodo mi fa supporre che nonostante che io interponessi fino a 3 e 4 diaframmi lasciati lungamente in grandi recipienti d'acqua, pure dello zinco trasportato dalla corrente, andasse a deporsi sul rame o sul carbone a causa della grande densità di essa.

Attendendo che altre esperienze diano spiegazione del fatto, si potrebbe congetturare che il metallo idrogeno fosse più elettro-

(1) Wied., *Ann.* VI, p. 368.

positivo dello zinco, sebbene il calore di combustione dell'idrogeno gazoso, la forza elettromotrice della coppia Pt_H, Pt_O facciano credere il contrario. In tale ipotesi si spiegherebbe il fatto del non essere lo zinco puro attaccato dall'acqua acidulata meglio che colla formazione di uno strato gazoso la cui esistenza non è provata da nulla, e che impedisce l'azione chimica, ma non il passaggio della corrente.

Nella seguente tabella si trovano i risultati di due serie di esperienze in cui la punta di zinco serviva come anodo. La pila era di 1 Daniell nella serie A, di due nella serie B:

	A				B					
Resistenza totale .	∞	833,6	30,6	∞	∞	815	114,60	44,0	22,8	114
» della coppia	—	2,8	2,4	—	4,25	4,25	4,1	4,0	3,7	3,9
» del voltam.	—	3,7	2,9	—	—	3,25	3,2	3,0	2,7	3,2
F. elettromotr. della pila	1,02	1,01	1,00	1,015	2,05	2,06	2,04	2,03	2,00	2,00
Id. del voltametro	+0,01	−0,015	−0,165	0,00	−0,03	−0,07	−0,17	−0,29	−0,375	−0,20

Tenuto il circuito chiuso per 10' con resistenza totale = 114 la forza elettromotrice totale, e la resistenza si mantenne prossimamente invariata: tenendo chiuso il circuito con resistenza totale = 24 la forza elettromotrice totale decrebbe in 10' di $\frac{1}{30}$ di Daniell, la resistenza si mantenne prossimamente la stessa.

Anche in questo caso l'intensità della polarizzazione è assai notevole per quanto una parte sia da attribuirsi al cambiamento del liquido che attorno all'anodo diviene una soluzione di solfato di zinco, e alla piccola polarizzazione della lamina per l'idrogeno.

Ecco ora i risultati di alcune esperienze sulla polarizzazione di elettrodi di zinco nel solfato di zinco. La forma e grandezza degli elettrodi era come nelle esperienze precedenti; il solfato di zinco era stato fatto cristallizzare ripetutamente, la soluzione era stata bollita a lungo con carbonato di zinco, secondo le indicazioni di Patry (1). Usando la punta di zinco come catodo e come pila 2 Daniell, ebbi i seguenti risultati:

(1) Pogg., *Ann.*, t. 136, p. 495.

Resistenza totale	∞	236,4	45,6
» della coppia . . .	—	6,3	6,1
» del voltametro . .	—	9,95	8,9
F. elettromotrice della coppia .	—	2,01	1,99
» del voltametro	0	— 0,032	— 0,034

Ripetei più volte questa determinazione ed ottenni prossimamente per la polarizzazione dello zinco come catodo gli stessi valori, qualche volta valori anche minori, purchè la soluzione di solfato di zinco fosse stata di recente bollita con carbonato; la polarizzazione fu invece molto più forte e giunse anche a 0,16 di Daniell con una soluzione che era stata bollita con carbonato varî mesi prima.

Feci anche delle esperienze sulla polarizzazione dello zinco come anodo, ma non ottenni buoni risultati, per la cristallizzazione del sale sulla piccola superficie dell'elettrodo.

In entrambi questi lavori il Chiar^mo^ Prof. A. Naccari mi fu largo di consigli, e compio quindi ad un grato dovere nel porgergliene i miei più vivi ringraziamenti.

Dal Laboratorio di Fisica dell'Università di Torino,
15 Aprile 1882.

Il Socio Cav. Prof. Enrico D'Ovidio presenta e legge la Nota seguente del sig. Dott. Francesco Gerbaldi.

SUI

GRUPPI DI SEI CONICHE

IN INVOLUZIONE.

Date due coniche di equazioni locali

$$f = a_x^2 = b_x^2 = 0 \qquad f' = a'^2_x = b'^2_x = 0$$

e di equazioni tangenziali

$$(a\,b\,u)^2 = u_\alpha^2 = 0 \qquad (a'\,b'\,u)^2 = u_{\alpha'}^2 = 0\ .$$

l'annullarsi dell'invariante $a_{\alpha'}^2$ significa (come è noto) che esistono infiniti triangoli scritti in f e autoconiugati rispetto a f', ed infiniti triangoli circoscritti a f', ed autoconiugati rispetto a f; analogo significato ha l'annullarsi dell'invariante a'^2_α, basta scambiare le veci delle coniche f ed f'. Due coniche che siano in tal posizione l'una rispetto all'altra furon dette *armoniche* o *in posizione unita*. Quando son nulli tutti e due gli invarianti $a_{\alpha'}^2$ e a'^2_α, è scambievole l'ufficio dell'una conica rispetto all'altra, e noi diremo *in involuzione* due coniche siffatte. Se prendiamo per triangolo di riferimento il triangolo autoconiugato rispetto ad entrambe, le loro equazioni locali e tangenziali sono

$$(1)\ \ldots\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

$$(2)\ \ldots\ x_1^2 + \omega x_2^2 + \omega^2 x_3^2 = 0 \qquad u_1^2 + \omega^2 u_2^2 + \omega u_3^2 = 0\ .$$

dove ω ed ω^2 denotano le radici cubiche imaginarie dell'unità; infatti le equazioni di due coniche qualunque, che abbiano il triangolo di riferimento per triangolo autoconiugato, sono

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \qquad u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$$

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2=0 \qquad \lambda_2\lambda_3 u_1^2+\lambda_3\lambda_1 u_2^2+\lambda_1\lambda_2 u_3^2=0 \quad ,$$

e se tali coniche sono in involuzione si ha

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \qquad \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2=0 \quad ,$$

donde

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : : 1 : \omega : \omega^2 \quad .$$

Due coniche in involuzione godono di parecchie proprietà; per es. si può dimostrare che in ciascuna si possono iscrivere infiniti triangoli circoscritti all'altra; che i quattro punti in cui si secano sono equianarmonici sopra tutte e due; che per ogni punto del piano esiste una retta tale, che la polare del punto e il polo della retta rispetto a una qualunque delle due coniche si corrispondono fra loro come polare e polo rispetto all'altra conica; la detta retta poi non è altro che la polare del punto rispetto ad una terza conica

$$(a) \ldots \quad x_1^2+\omega^2 x_2^2+\omega x_3^2=0 \qquad u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2 u_3^2=0 \quad .$$

Questa conica è nello stesso tempo inviluppo delle rette che secano in due coppie armoniche di punti le due coniche in involuzione, luogo dei punti da cui le due coppie di tangenti condotte alle stesse sono armoniche, e conica polare reciproca di ciascuna delle due dette coniche rispetto all'altra; essa è poi in involuzione con entrambe. Le tre coniche (1) (2) e (a) hanno ognuna lo stesso ufficio rispetto alle altre due e posseggono in comune uno stesso triangolo autoconiugato. La rete ed il tessuto di coniche da esse individuati sono una stessa serie di coniche. Esse possono essere tutte e tre reali, ma allora dei quattro punti e delle quattro tangenti che due di esse hanno in comune due soli punti e due sole tangenti sono reali, ed il triangolo autoconiugato rispetto a tutte e tre ha reali soltanto un lato ed il vertice opposto. Una siffatta terna di coniche fu detta *terna coniugata* dal Prof. G. Battaglini (*).

(*) *Sulle cubiche ternarie sizigetiche.* COLLECTANEA MATHEMATICA..., pag. 36. Cf. G. VERONESE, *Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani* ecc. Atti della R. Accademia dei Lincei, Serie III, Mem. d. cl. di sc fis., mat. e nat., vol. IX, pag. 282 e seg.

Le equazioni separate dei quattro punti comuni alle due coniche (1) e (2) sono

$$(b)\ldots\quad \begin{cases} u_1+\omega^2 u_2+\omega u_3=0\\ -u_1+\omega^2 u_2+\omega u_3=0\\ u_1-\omega^2 u_2+\omega u_3=0\\ u_1+\omega^2 u_2-\omega u_3=0\ , \end{cases}$$

e le equazioni separate delle quattro tangenti comuni alle medesime sono

$$(c)\ldots\quad \begin{cases} x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=0\\ -x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=0\\ x_1-\omega x_2+\omega^2 x_3=0\\ x_1+\omega x_2-\omega^2 x_3=0\ . \end{cases}$$

Di qui, considerando il quadrangolo iscritto ed il quadrilatero circoscritto alle due coniche (1) e (2), si vede facilmente che ogni lato del primo passa per un vertice del secondo. Ad ogni lato del quadrilatero faremo corrispondere quel vertice del quadrangolo, in cui concorrono i tre lati di questo opposti a quelli che passano per i tre vertici di quel lato.

Premesse queste cose su due coniche in involuzione, veniamo a considerare nel piano quei gruppi di coniche tali, che due coniche qualunque d'uno stesso gruppo siano fra loro in involuzione. Vedremo che un tal gruppo può constare al più di sei coniche, e studieremo la notevole configurazione piana cui esso dà luogo.

Scegliamo ad arbitrio due coniche d'un gruppo siffatto, e prendiamo per triangolo di riferimento il triangolo autoconiugato rispetto ad entrambe; le equazioni di quelle due coniche saranno la (1) e la (2). Consideriamo ora una conica qualunque del piano

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

$$(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)u_1^2+\ldots+2(a_{21}a_{31}-a_{11}a_{23})u_2u_3+\ldots=0\ .$$

Se essa appartiene al gruppo in discorso, è in involuzione colle coniche (1) e (2); ora perchè ciò avvenga si hanno le quattro equazioni di condizione

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$$

$$a_{11}+\omega^2 a_{22}+\omega a_{33}=0$$

$$a_{22}a_{33}-a_{23}^2+a_{33}a_{11}-a_{31}^2+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

$$a_{22}a_{33}-a_{23}^2+\omega(a_{33}a_{11}-a_{31}^2)+\omega^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0\ .$$

Dalle due prime si ricava

$$a_{11}=\rho \qquad a_{22}=\rho\omega^2 \qquad a_{33}=\rho\omega\ .$$

dove ρ è un fattore arbitrario; sostituendo nelle altre due, esse diventano

$$a_{23}^2+a_{31}^2+a_{12}^2=0$$

$$a_{23}^2+\omega a_{31}^2+\omega^2 a_{12}^2=0$$

e danno

$$a_{23}=\pm\sigma \qquad a_{31}=\pm\sigma\omega^2 \qquad a_{12}=\pm\sigma\omega\ .$$

dove σ è ancora un fattore arbitrario.

Si hanno pertanto le quattro serie di coniche di equazioni locali

(3) . . . $x_1^2+\omega^2x_2^2+\omega x_3^2+2k(\ \ x_2x_3+\omega^2x_3x_1+\omega x_1x_2)=0$

(4) . . . $x_1^2+\omega^2x_2^2+\omega x_3^2+2\,l\,(\ \ x_2x_3-\omega^2x_3x_1-\omega x_1x_2)=0$

(5) . . . $x_1^2+\omega^2x_2^2+\omega x_3^2+2m(-x_2x_3+\omega^2x_3x_1-\omega x_1x_2)=0$

(6) . . . $x_1^2+\omega^2x_2^2+\omega x_3^2+2\,n\,(-x_2x_3-\omega^2x_3x_1+\omega x_1x_2)=0$

e di equazioni tangenziali

(3)...$(k+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2u_3^2)-2\,k\,(u_2u_3+\omega u_3u_1+\omega^2u_1u_2)=0$

(4)...$(\,l+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2u_3^2)-2\,l\,(u_2u_3-\omega u_3u_1-\omega^2u_1u_2)=0$

(5)...$(m+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2u_3^2)+2\,m(u_2u_3-\omega u_3u_1+\omega^2u_1u_2)=0$

(6)...$(\,n+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2u_3^2)+2\,n\,(u_2u_3+\omega u_3u_1-\omega^2u_1u_2)=0$:

tutte le coniche di ciascuna di queste serie sono in involuzione colle coniche (1) e (2).

Segue pertanto che tutte le coniche, le quali insieme alla (1) ed alla (2) fan parte del gruppo che noi consideriamo, si troveranno fra le coniche delle dette quattro serie. Or bene, in ciascuna serie non se ne può trovare più di una; perchè se in una serie, per es. la (3), ve ne fossero due, chiamando k' e k''

i valori dei parametri ad esse corrispondenti, siccome esse sono in involuzione, così deve essere:

$$1+k''-2k'k''=0 \qquad 1+k'-2k'k''=0\ :$$

le quali equazioni non possono coesistere per $k' \gtrless k''$. Adunque non vi possono essere più di quattro coniche, che insieme alla (1) ed alla (2) costituiscano un gruppo della sorta che si vuole. Prendiamo intanto da ciascuna serie (3), (4), (5), (6) una conica, e scriviamo le condizioni affinchè tali quattro coniche siano due a due in involuzione

$$3(k+1)+2lk=0 \qquad 3(l+1)+2lk=0$$
$$3(l+1)+2lm=0 \qquad 3(m+1)+2lm=0$$

ecc. ecc.

avremo così 12 equazioni nelle k, l, m, n, le quali sono coesistenti e danno

$$k=l=m=n=\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}.$$

Si hanno adunque due sistemi di valori per k, l, m, n, e quindi due quaterne di coniche tali che le coniche d'una stessa quaterna sono due a due in involuzione, e ogni conica di ciascuna quaterna è in involuzione con tutte e due le coniche (1) e (2); perciò raggruppando queste due con ciascuna quaterna, si hanno due gruppi di sei coniche, di cui ciascuna è in involuzione colle altre cinque. Dando una conica qualunque del piano (varietà cinque volte infinita) e un'altra fra quelle che sono con essa in involuzione (varietà tre volte infinita), esse si possono assumere come coniche (1) e (2), ed allora sono determinate le due quaterne di coniche suddette. Dunque *nel piano esiste una varietà otto volte infinita di gruppi di sei coniche, tali che ogni conica d'un gruppo è in involuzione colle altre cinque dello stesso gruppo.* Combinando due a due le sei coniche d'un gruppo, per ogni coppia si ha una quaterna di coniche, che con quella coppia dà luogo ad un altro gruppo analogo; cioè *ad ogni gruppo di sei coniche in involuzione son congiunti altri* 15 *gruppi analoghi, che hanno con quello due coniche comuni.*

Ritornando alle serie (3), (4), (5), (6) di coniche, osserviamo che il parametro entra linearmente sia nella equazione locale che nella tangenziale, laonde ciascuna di esse è ad un tempo fascio e schiera, e quindi si conchiude che quelle sono serie di coniche bitangenti. Di fatto le loro equazioni si possono scrivere come segue

$$
\begin{aligned}
&(1-k)(x_1^2+\omega^2 x_2^2+\omega x_3^2)+2k(\quad x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^2=0\\
&(1-l)(x_1^2+\omega^2 x_2^2+\omega x_3^2)+2l(\quad x_1-\omega x_2-\omega^2 x_3)^2=0\\
&(1-m)(x_1^2+\omega^2 x_2^2+\omega x_3^2)+2m(-x_1+\omega x_2-\omega^2 x_3)^2=0\\
&(1-n)(x_1^2+\omega^2 x_2^2+\omega x_3^2)+2n(-x_1-\omega x_2+\omega^2 x_3)^2=0
\end{aligned}
$$

in coordinate di punti, e

$$
\begin{aligned}
&(2k+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2 u_3^2)-2k(\quad u_1+\omega^2 u_2+\omega u_3)^2=0\\
&(2l+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2 u_3^2)-2l(\quad u_1-\omega^2 u_2-\omega u_3)^2=0\\
&(2m+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2 u_3^2)-2m(-u_1+\omega^2 u_2-\omega u_3)^2=0\\
&(2n+1)(u_1^2+\omega u_2^2+\omega^2 u_3^2)-2n(-u_1-\omega^2 u_2+\omega u_3)^2=0
\end{aligned}
$$

in coordinate di rette. Queste equazioni mostrano che le quattro serie di coniche in involuzione colle coniche (1) e (2) son serie di coniche bitangenti, che le quattro corde di contatto sono le tangenti comuni alle coniche (1) e (2), e che i quattro punti in cui si secano le coppie di tangenti di contatto sono i punti comuni alle coniche (1) e (2). Pertanto, osservando che, dati due gruppi congiunti, le due coniche comuni si possono assumere come coniche (1) e (2), e che allora le coniche delle due quaterne residue son contenute a coppie nelle serie (3), (4), (5), (6), si conchiude: *In due gruppi congiunti le coniche non comuni si corrispondono una ad una per guisa che due coniche corrispondenti sono bitangenti; il quadrilatero delle quattro corde di contatto e il quadrangolo dei quattro punti d'incontro delle coppie di tangenti di contatto non sono altro che il quadrilatero circoscritto ed il quadrangolo iscritto nelle due coniche comuni ai due gruppi;* e precisamente quel lato del quadrilatero, che si riferisce ad una certa coppia di coniche corrispondentisi nei due gruppi, ha per corrispondente quel vertice del quadrangolo che si riferisce alla stessa coppia di coniche; quindi il primo è polare del secondo rispetto ad entrambe le coniche. Di qui segue che *in un gruppo di sei coniche in involuzione considerandone due ad arbitrio ogni lato del quadrilatero ad esse* *circoscritto, e così pure ogni vertice del quadrangolo in esse iscritto, si può far corrispondere ad una delle rimanenti quattro coniche, per guisa che ogni lato del quadrilatero è polare del vertice corrispondente del quadrangolo rispetto alla conica che corrisponde ad entrambi.*

La conica (a) appartiene a tutte e quattro le serie (3), (4), (5), (6), dunque è bitangente a tutte le coniche delle medesime, e quindi anche alle due quaterne di coniche, ciascuna delle quali colle (1) e (2) forma un gruppo di sei coniche in involuzione. Dunque *per ogni gruppo di sei coniche in involuzione si hanno 15 coniche, ciascuna delle quali è bitangente a quattro coniche del gruppo. Con tali 15 coniche insieme alle sei del gruppo proposto si possono formare altri sei differenti gruppi di sei coniche in involuzione*, ciascuno dei quali contiene una conica del gruppo proposto e le cinque polari reciproche rispetto ad essa delle cinque coniche rimanenti, perchè se due coniche sono in involuzione le loro reciproche rispetto ad una conica qualunque sono ancora in involuzione. *Si ottiene così un gruppo di 21 conica, ciascuna delle quali è in involuzione con altre 10 del gruppo.*

Se nelle equazioni (3), (4), (5), (6) si pone $x_1 = 0$, si vede che le (3) e (4) diventano identiche fra loro, e lo stesso avviene per le (5) e (6); dunque la retta $x_1 = 0$ è una corda comune alle due coniche (3) e (4) ed alle due (5) e (6); analogamente si vede che la retta $x_2 = 0$ è una corda comune alle coniche (3), (5) e alle (4), (6), e che la retta $x_3 = 0$ è una corda comune alle coniche (3), (6) e alle (4), (5). Ma le rette $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ sono i lati del triangolo autoconiugato rispetto alle coniche (1) e (2). Dunque combinando due a due quattro coniche di un gruppo, ogni lato del triangolo autoconiugato rispetto alle due coniche residue fa da corda per due coppie di coniche, e precisamente per due coppie complementari. Pertanto se si considerano per es. le coniche 1 e 2 come appartenenti alle sei quaterne 1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, si conchiude che i sei lati del quadrangolo completo iscritto nelle due coniche 1 e 2 son lati dei triangoli autoconiugati rispetto alle coppie 56, 46, 45, 36, 35, 34. Si hanno così 15 quadrangoli completi (uno per ogni combinazione binaria) i cui lati son lati di triangoli autoconiugati: cioè *i 45 lati dei 15 triangoli autoconiugati formano 15 quadrangoli completi*, *in ciascuno dei quali i quattro vertici sono una quaterna di punti comuni a due coniche, e però il triangolo diagonale è eziandio uno dei triangoli autoconiugati. Si può in sei modi differenti prendere cinque di tali quadrangoli completi in modo che i 30 lati di questi, insieme ai 15 lati dei 5 rispettivi triangoli diagonali, esauriscano tutti i 45 lati dei 15 triangoli autoconiugati:* perchè basta considerare cinque quadrangoli corrispondenti alle cinque combinazioni binarie che contengono una stessa conica, come risulta dalla tabella seguente

	12	13	14	15	16	23	24	25	26	34	35	36	45	46	56
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	I	I	I	I	I	I
13	.	.	.	.	.	.	I	I	I	.	.	.	II	II	II
14	.	.	.	.	.	I	.	II	II	.	II	II	.	.	III
15	.	.	.	.	.	II	II	.	III	II	.	III	.	III	.
16	.	.	.	.	.	III	III	III	.	III	III	.	III	.	.
23	.	.	I	I	I	.	.	.	.	.	.	.	III	III	III
24	.	I	.	II	II	.	.	.	.	.	III	III	.	.	II
25	.	II	II	.	III	.	.	.	.	III	.	II	.	II	.
26	.	III	III	III	.	.	.	.	.	II	II	.	II	.	.
34	I	.	.	III	III	.	.	III	III	.	.	.	.	.	I
35	II	.	III	.	II	.	III	.	II	.	.	.	.	I	.
36	III		II	II	.	.	II	II	.	.	..	.	I	.	.
45	III	III	.	.	I	III	.	.	I	.	.	I	.	.	.
46	II	II		I	.	II	.	I	.	.	I	.	.	.	.
56	I	I	I	.	.	I	I	.	.	I	.	.	.	.	.

nella quale i numeri I, II, III d'una stessa colonna denotano i lati d'uno stesso triangolo autoconiugato rispetto alla coppia di coniche che intesta la colonna; in ogni linea si hanno i sei lati del quadrangolo iscritto nella coppia di coniche che intesta la linea. Si vede che due quadrangoli, le cui linee hanno un indice comune, non hanno alcun lato comune, e due quadrangoli, le cui linee hanno indici differenti, hanno uno ed un solo lato comune.

Mediante le equazioni (*b*) è facile verificare che in un quadrangolo iscritto in due coniche i tre lati uscenti da un vertice son lati dei tre triangoli autoconiugati rispetto alla conica corrispondente al vertice e rispetto a una delle altre tre. Di qui segue che nella tabella precedente i lati d'ogni quadrangolo sono così disposti, che concorrono in un vertice i tre lati le cui colonne hanno un indice comune, e sono lati opposti quelli le cui colonne non hanno indici comuni. Segue inoltre che *ogni congiungente due punti comuni a due coniche è un lato del triangolo autoconiugato rispetto a quelle due coniche, cui quei punti corrispondono.*

Siccome nella configurazione che noi consideriamo vige una perfetta dualità, così possiamo senz'altro conchiudere che *i* 45 *vertici dei* 15 *triangoli autoconiugati formano* 15 *quadrilateri completi, di ciascuno dei quali i quattro lati sono le tangenti comuni a due coniche, e però il triangolo diagonale è eziandio un triangolo autoconiugato. Si può in sei modi differenti prendere cinque di tali quadrilateri in modo che i* 30 *vertici di questi, insieme ai* 15 *vertici dei* 5 *rispettivi triangoli diagonali, esauriscano tutti i* 45 *vertici dei* 15 *triangoli autoconiugati. Ogni punto, in cui si secano due delle tangenti comuni a due coniche, è un vertice del triangolo autoconiugato rispetto a quelle due coniche cui quelle tangenti corrispondono.*

La tabella precedente è valevole anche pei vertici, quando i numeri I, II, III d'una stessa colonna denotino i vertici d'uno stesso triangolo autoconiugato; allora in ogni linea stanno scritti i vertici del quadrilatero circoscritto alle due coniche che intestano la linea.

Intanto da ciò che precede si ricava che *i* 45 *lati dei* 15 *triangoli autoconiugati concorrono quattro a quattro nei* 45 *vertici, e queste quaterne sono armoniche; concorrono inoltre tre a tre nei* 60 *punti in cui si secano le coppie di coniche del gruppo.* E dualmente *i* 45 *vertici dei* 15 *triangoli autoconiugati giacciono quattro a quattro sui* 45 *lati, e tali quaterne sono armoniche; giacciono inoltre tre a tre sulle* 60 *tangenti alle coppie di coniche.*

Convenendo di rappresentare con uno stesso numero romano I o II o III il vertice d'un triangolo ed il suo lato opposto, dato un lato (o vertice), dei quattro vertici (o lati) che esso contiene due son vertici (o lati) del triangolo cui quel lato (o vertice) appartiene, i rimanenti due si rinvengono nella tabella sulla linea omonima alla colonna in cui giace il dato lato (o vertice), e sulle due colonne omonime alle linee su cui si trova il lato (o vertice) stesso.

Consideriamo per es. le due coniche 1 e 2; le due corde di contatto di esse colla conica, che è bitangente alle medesime ed alle 3 e 4, sono (come abbiam visto) due tangenti comuni alle 5 e 6 e precisamente quelle che abbiamo chiamato corrispondenti alle coniche 1 e 2, così che concorrono nel vertice I_{12} (*); in questo vertice concorrono eziandio i lati I_{34} e I_{56}, i quali essendo corde comuni alle coniche 1 e 2 sono perciò armonici con quelle due tangenti (**). Analogamente considerando le stesse due coniche 1 e 2 e la conica che è bitangente ad esse e alle 5 e 6, si conchiude che in I_{12} concorrono le due tangenti comuni alle 3 e 4 che corrispondono alle 1 e 2, e che queste tangenti sono armoniche coi lati I_{34} e I_{56}. Infine nello stesso vertice concorrono ancora i lati II_{12} e III_{12} i quali sono pur essi armonici con I_{34} e I_{56}. Tutto ciò si può enunciare generalmente così: *Da un vertice d'un triangolo escono due suoi lati, due coppie di rette tangenti ciascuna a una coppia di coniche, e due lati di altri due triangoli; le prime tre coppie di rette appartengono ad una involuzione, di cui le ultime due rette sono i raggi doppi.*

Rispetto a quattro coniche del gruppo in involuzione esistono (come in generale per quattro coniche qualunque del piano) tre coppie di punti coniugati, i quali sono i vertici del quadrilatero circoscritto alle due coniche residue. perchè queste individuano la schiera unita alla serie lineare di ∞^3 coniche determinata dalle prime quattro. Pertanto se consideriamo tre coniche per es. 1 2 3 come appartenenti alle quaterne 1 2 3 4, 1 2 3 5, 1 2 3 6, i 18 vertici dei tre quadrilateri circoscritti alle coppie di coniche 56, 46, 45 sono a coppie coniugati rispetto alle tre coniche 1 2 3, dunque stanno su una curva del 3° ordine, che è la loro Jacobiana: risulta subito dalla tabella che essi sono i 9 vertici dei tre triangoli coniugati rispetto alle coppie di coniche 12,

(*) Apponendo due indici ad un numero I, II, III, intendiamo parlare di un vertice o lato del triangolo coniugato rispetto alle due coniche corrispondenti a quei due indici.

(**) Perchè, se due coniche sono bitangenti a una terza, le loro corde di contatto e una coppia delle loro corde comuni concorrono in un punto e formano fascio armonico.

13, 23, e 9 vertici scelti uno da ciascuno dei 9 triangoli coniugati rispetto alle coppie di coniche 14, 15, 16, 24, 25, 26, 34, 35, 36. Questi ultimi 9 punti sono i poli coniugati dei primi 9, e sono i terzi punti in cui i 9 lati dei primi tre triangoli secano ancora la Jacobiana delle coniche 1 2 3; considerando poi la Jacobiana delle coniche 4 5 6 si vede che essi giacciono ancora su di questa: essi sono adunque le intersezioni di queste due Jacobiane, ed anzi son flessi su entrambe. Infatti, posto per brevità di scrittura

$$x_2 x_3 (\omega x_2 + \omega^2 x_3) + x_3 x_1 (\omega^2 x_1 + \omega x_3) + x_1 x_2 (\omega x_1 + \omega^2 x_2) = X ,$$

la Jacobiana delle tre coniche 1 2 3 ha per equazione

$$3 x_1 x_2 x_3 + k X = 0$$

la Jacobiana delle tre coniche 4 5 6 ha per equazione

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 2 k x_1 x_2 x_3 - X = 0$$

inoltre la curva di 3° ordine, rispetto a cui la rete individuata dalle coniche 1 2 3 è rete polare, ha per equazione

$$(3 - 2 k) [x_1^3 + x_2^3 + x_3^3] + 6 k x_1 x_2 x_3 + 3 k X = 0 \quad (*).$$

Ora dall' equazione $3 (k + 1) + 2 k^2 = 0$ moltiplicata per $2 k - 3$ segue quest'altra

$$\frac{4 k^2}{3 + k} = \frac{3}{k}$$

mercè la quale è facile vedere che le tre curve considerate formano fascio; ma la prima è Hessiana della terza; dunque i punti basi del fascio son flessi su tutte e tre.

Dualmente la curva di 3ª classe Hermitiana della rete 123, potendosi considerare come Jacobiana del tessuto 456, ha per tangenti i 18 lati dei tre quadrangoli iscritti nelle coppie di coniche 12, 13, 23, i quali sono i 9 lati dei tre triangoli coniugati rispetto alle coppie 45, 46, 56, e 9 lati scelti uno da ciascuno dei 9 triangoli coniugati rispetto alle coppie 14, 15, 16, 24, 25, 26, 34, 35, 36: questi ultimi sono le tangenti cuspidali.

(*) Le coniche 1, 2, 3 sono polari rispettivamente dei punti (1, 1, 1) (1, ω, ω^2) (1, ω^2, ω).

La Jacobiana e la Hermitiana delle tre coniche 123 (come in generale) si toccano dove si secano, i 9 punti comuni sono i 9 vertici dei tre triangoli coniugati rispetto alle coppie di coniche 12, 13, 23, perchè questi sono i poli coniugati dei flessi: e le 9 tangenti comuni sono i 9 lati dei tre triangoli coniugati rispetto alle coppie 45, 46, 56. Dunque combinando tre a tre le sei coniche del gruppo si ha che *i 45 vertici dei 15 triangoli autoconiugati stanno a 18 a 18 sopra 20 curve del 3° ordine, che sono le Jacobiane delle terne di coniche, e alle quali son tangenti 9 dei 45 lati. Le Jacobiane di due terne complementari di coniche si secano secondo 9 vertici, i quali son flessi su entrambe: così coi 45 vertici si possono formare 10 gruppi di 9, basi di 10 fasci sizigetici di curve del 3° ordine.* E dualmente.

Consideriamo il gruppo di 9 vertici che son flessi sulle Jacobiane delle due terne di coniche 123 e 456, essi sono

$$\begin{array}{ccc} I_{14} & I_{24} & I_{34} \\ I_{15} & I_{25} & I_{35} \\ I_{16} & I_{26} & I_{36} \end{array} .$$

È noto che i 9 flessi d'una curva del 3° ordine stanno tre a tre in linea retta, e danno luogo a quattro triangoli ciascuno dei quali ha distribuiti sui suoi lati tutti i 9 flessi. Nel nostro caso le tre terne di vertici

$$(I_{14} \quad I_{24} \quad I_{34}) \qquad (I_{15} \quad I_{25} \quad I_{35}) \qquad (I_{16} \quad I_{26} \quad I_{36})$$

son terne di punti in linea retta, perchè i punti di una stessa terna sono scritti in una stessa linea della tabella (rispettivamente 56, 46, 45) e le relative colonne hanno un indice comune (rispettivamente 4, 5, 6); per analoghe ragioni son terne di punti in linea retta le terne di vertici

$$(I_{14} \quad I_{15} \quad I_{16}) \qquad (I_{24} \quad I_{25} \quad I_{26}) \qquad (I_{34} \quad I_{35} \quad I_{36}) .$$

Così si hanno già due triangoli dei flessi, i loro lati son rette fra le 60 tangenti alle coppie di coniche. Inoltre ciò basta per determinare la disposizione dei flessi e per dedurre che le tre terne

$$(I_{14} \quad I_{25} \quad I_{36}) \qquad (I_{16} \quad I_{24} \quad I_{35}) \qquad (I_{15} \quad I_{26} \quad I_{34})$$

son terne di punti in linea retta e danno luogo al terzo triangolo dei flessi; e così pure le tre terne

$$(I_{14} \quad I_{26} \quad I_{35}) \qquad (I_{15} \quad I_{24} \quad I_{36}) \qquad (I_{16} \quad I_{25} \quad I_{34})$$

son terne di punti in linea retta e danno luogo al quarto triangolo dei flessi. I sei lati di questi ultimi due triangoli sono 6 nuove rette su cui giacciono tre a tre i 9 vertici considerati. Dunque tenendo conto di tutti e 10 i gruppi di 9 vertici che son flessi di cubiche, si conchiude che *i 45 vertici dei 15 triangoli autoconiugati, oltrechè giacere tre a tre sulle 60 tangenti alle coppie di coniche, giacciono ancora tre a tre sopra altre 60 rette, le quali colle prime formano l'insieme delle 120 rette dei flessi per le 20 cubiche Jacobiane.* E dualmente.

Consideriamo ora un vertice qualunque, per es. I_{14}; questo l'abbiamo riscontrato tra i flessi comuni alle due Jacobiane delle due terne di coniche 123 e 456; esso figura inoltre tra i flessi comuni alle due Jacobiane delle due terne di coniche 156 e 234, i quali flessi sono:

$$\begin{array}{ccc} I_{12} & I_{13} & I_{14} \\ III_{25} & III_{35} & III_{45} \\ III_{26} & III_{36} & III_{46} \end{array} .$$

Pertanto nel vertice I_{14} concorrono le 8 rette congiungenti le seguenti coppie di vertici

$$\begin{array}{cccc} (I_{24} \quad I_{34}) & (I_{15} \quad I_{16}) & (I_{25} \quad I_{36}) & (I_{26} \quad I_{35}) \\ (I_{12} \quad I_{13}) & (III_{45} \quad III_{46}) & (III_{25} \quad III_{36}) & (III_{26} \quad III_{35}) \end{array} ;$$

inoltre nel vertice I_{14} concorrono (come si è visto) quattro lati di triangoli autoconiugati, e precisamente i lati II_{14}, III_{14}, I_{23}, III_{56}, i quali oltre I_{14} contengono le seguenti quattro terne di vertici

$$(III_{14}\ II_{35}\ II_{36}) \quad (II_{14}\ II_{36}\ II_{35}) \quad (II_{23}\ III_{23}\ III_{56}) \quad (I_{56}\ II_{56}\ I_{23}) .$$

Di qui appare che i due triangoli coniugati rispetto alle coppie di coniche 25 e 36 sono omologici, e così pure sono omologici i due triangoli autoconiugati rispetto alle coppie di coniche 26, 35; centro di omologia è il vertice I_{14}. Dualmente ragionando sul lato I_{14} si trova l'omologia delle stesse coppie di triangoli, e per asse di omologia il lato I_{14}. Questo risultato si può enunciare generalmente così: *In ognuno dei 15 triangoli coniugati* *ciascun vertice ed il lato opposto son centro ed asse di omologia per due coppie di quei 15 triangoli;* questi quattro triangoli son coniugati rispetto a quattro delle sei coppie di coniche formate combinando due a due le quattro coniche rispetto a cui il primo triangolo non è coniugato (essendo escluse le due coppie rispetto a ciascuna delle quali il vertice ed il lato considerato sono rispettivamente vertice del quadrilatero circoscritto e lato del quadrangolo iscritto): e sono complementari le due coppie di coniche rispetto a cui son coniugati due triangoli omologici.

Di qui segue facilmente che due triangoli coniugati rispetto a due coppie di coniche tutte differenti sono doppiamente omologici, hanno cioè due centri e due assi di omologia: i primi son due vertici e i secondi son due lati del triangolo coniugato rispetto alle due coniche residue (essendo esclusi quel vertice e quel lato di quest'ultimo triangolo, che appartengono il primo come vertice comune ai due quadrilateri circoscritti, il secondo come lato comune ai due quadrangoli iscritti nelle due coppie di coniche). Dunque *ognuno dei 15 triangoli coniugati è omologico con altri sei, e l'omologia è doppia.*

Siccome due di questi triangoli doppiamente omologici hanno una coppia di vertici corrispondentisi in entrambe le omologie, così per essi non è vero ciò che vale per due triangoli omologici in doppia guisa, quando ai tre vertici dell'uno corrispondono due permutazioni cicliche dei tre vertici dell'altro, cioè che essi siano ancora omologici in una terza maniera (*).

Torino, Aprile 1882.

(*) V. Rosanes, *Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage*, Math. Ann. Bd. II. Schroeter, *Ueber perspectivisch liegende Dreiecke*, ib.

Qui mi accade notare, che del teorema accennato si può dare una dimostrazione molto semplice e differente da quelle di Rosanes e di Schroeter, considerando il fascio di curve di 3° ordine che ha per punti base i 9 punti in cui i tre lati dell'un triangolo secano i tre lati dell'altro, e osservando che se 6 di quei 9 punti stanno su due rette (due assi di omologia) i rimanenti tre saranno ancora in linea retta (terzo asse di omologia).

Il Socio Cav. Prof. Enrico D'Ovidio presenta e legge la seguente Nota del sig. Dott. Giuseppe Peano, Assistente presso la R. Università di Torino.

SUI SISTEMI DI FORME BINARIE

DI EGUAL GRADO

E SISTEMA COMPLETO DI QUANTE SI VOGLIANO CUBICHE.

Si immagini il sistema completo di forme invariantive di N forme binarie di grado eguale n: si dicano d'uno stesso *tipo* due formazioni che si possono ottenere l'una dall'altra con operazioni polari, derivando rispetto ai coefficienti di una forma, ed introducendo quelli di un'altra: le forme del sistema completo apparterranno ad un certo numero di tipi. Si supponga ora che N cresca indefinitamente; si presenta la questione se il numero dei tipi cresce pure indefinitamente, o rimane finito. Il calcolo diretto mostra che per $n=1$, e per $n=2$ il numero dei tipi è finito (e vale rispettivamente 2 e 4); voglio dimostrare che lo stesso avviene qualunque sia il grado delle forme. La dimostrazione che sto per dare basa sul seguente teorema:

« Una funzione F omogenea di n sistemi di n variabili si può ordinare secondo le potenze ascendenti del determinante delle variabili in modo che i coefficienti siano forme polari di funzioni ottenute da f con operazioni polari, e che contengono un sistema di variabili di meno ».

Questo teorema, che per $n=2$ dà la formola di Gordan (*) fu dimostrato dal chiar. Prof. A. Capelli prima per $n=3$ (**) ed ultimamente per ogni valore di n (***).

(*) *Math. Annalen*, Bd. III — Clebsch - *Binären Formen*, pag. 15.

(**) *Forme algebriche ternarie a più serie di variabili. Giornale di matematiche*, vol. 18, pag. 17. — Confr. anche id. id., vol. 19, pag. 87.

(***) Debbo alla gentilezza del Capelli la conoscenza di questo teorema, presentato all'Accademia dei Lincei nella seduta 5 Febbraio 1882. — Confr. anche *Transunti*, pag. 165.

Siano:
$$\begin{aligned}
f_1 &= a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots \\
f_2 &= b_0 x_1^n + n b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_n &= h_0 x_1^n + n h_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots \\
f_{n+1} &= k_0 x_1^n + n k_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots
\end{aligned}$$

$n+1$ forme binarie di grado n: F una funzione intera omogenea dei coefficienti di queste $n+1$ forme (e, ove occorra, di altre quantità): posto:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0 & k_1 & \dots & k_n \end{vmatrix}.$$

F si potrà, in virtù del teorema citato, ordinare secondo le potenze di R, in modo che i coefficienti siano forme polari di funzioni φ_0 $\varphi_1 \dots$ ottenute da F mediante operazioni polari, e le quali funzioni non contengono k_0 $k_1 \dots k_n$.

Se F è una forma invariantiva delle

$$f_1,\ f_2,\ \dots f_n,\ f_{n+1},\ f_{n+2},\ \dots f_{n+i},$$

ordinandola secondo le potenze di R, le funzioni φ, che si ottengono da F con operazioni polari, sono funzioni invariantive di tutte le forme date, eccettuata la f_{n+1}. Considerando le funzioni φ in quanto funzioni dei coefficienti di $f_1, f_2 \dots f_n, f_{n+2}$, si potranno ordinare secondo le potenze del determinante che si ottiene da R sostituendo ai coefficienti della f_{n+1} quelli della f_{n+2}; e così operando i volte di seguito si avrà la forma F espressa in funzione di invarianti dello stesso tipo R, e di forme che si ottengono con operazioni polari da formazioni invariantive di n sole fra le forme date. Quindi si può enunciare la seguente proposizione:

« In un sistema di quante si vogliano forme binarie dello stesso grado n prendansene n ad arbitrio, se ne calcoli il sistema completo, e si aggiunga ad esso l'invariante R (ove sia fondamentale): si facciano di queste forme invariantive tutti i sistemi polari, introducendo i coefficienti delle altre forme: si avrà un sistema di forme invariantive, in funzione delle quali si esprime ogni forma invariantiva delle date: in questo sistema trovansi perciò tutte le forme fondamentali delle date forme ».

Od ancora, siccome le forme invariantive di n forme binarie (rimanendo n costante) sono in numero finito, ed appartengono ad un numero finito di tipi, non alterato con operazioni polari, conchiudo:

« Le forme invariantive di forme binarie di egual grado, crescenti in numero indefinitamente, appartengono ad un numero finito di tipi ».

Le proposizioni precedenti ci permetterebbero agevolmente di ritrovare i sistemi completi già noti delle forme lineari e delle quadratiche; io l'applicherò alla ricerca del sistema ancora incognito di quante vogliansi cubiche.

Abbiansi le cubiche binarie in numero qualunque:

$$f_1 = a_x^3 = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + \ldots$$
$$f_2 = b_x^3 = b_0 x_1^3 + 3 b_1 x_1^2 x_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La proposizione precedente dice che il loro sistema completo si ottiene con operazioni polari dal sistema composto delle forme fondamentali di tre di esse, per es. f_1, f_2, f_3 e dell'invariante:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = (ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd);$$

ma farò vedere che R non è fondamentale, e che il sistema di tre cubiche si può dedurre da quello di due.

Si ha invero l'identità:

$$(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)$$
$$= -\tfrac{1}{3}\left\{(ab)^3(cd)^3 + (bc)^3(ad)^3 + (ca)^3(bd)^3\right\} \text{ (*)},$$

che dice appunto non essere R fondamentale.

(*) CLEBSCH - *Binären Formen*, pag. 275

Per la seconda parte mi occorre premettere una formula (*). Il teorema accennato del Capelli, dà per $n=3$:

$$F=\Sigma\,\Delta\,\varphi_0+\Sigma\,(XYZ)\,\Delta\,\varphi_1+\Sigma\,(XYZ)^2\Delta\,\varphi_2+\ \ldots$$

dove F è funzione delle tre terne di variabili X_1, X_2, X_3; Y, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3, (XYZ) il loro determinante; φ_0, φ_1, ... sono funzioni che contengono le sole variabili X ed Y, Δ è il simbolo d'un sistema d'operazioni polari, ed il Σ si estende alla somma di più termini analoghi. Siccome un'operazione polare fatta sul determinante (XYZ) lo annulla, si potrà portare il simbolo operativo Δ davanti al fattore determinante, e si avrà:

$$F=\Sigma\Delta\varphi_0+\Sigma\,\Delta\Big|(XYZ)\,\varphi_1\Big|+\Sigma\,\Delta\Big|(XYZ)^2\varphi_2\Big|+\ \ldots$$

le nuove funzioni φ potendo differire dalle precedenti per fattori numerici.

Prendasi per funzione F il prodotto $X_1^{\,l}\ Y_2^{\,m}\ Z_3^{\,p}$ e nella formula alle variabili si sostituiscano le seguenti funzioni lineari di tre nuovi sistemi con n variabili:

$$X_1=\alpha_x,\quad X_2=\beta_x,\quad X_3=\gamma_x;\quad Y_1=\alpha_y,\quad Y_2=\beta_y,\quad Y_3=\gamma_y;$$
$$Z_1=\alpha_z,\quad Z_2=\beta_z,\quad Z_3=\gamma_z.$$

A sinistra si ottiene $\alpha_x^{\,l}\ \beta_y^{\,m}\ \gamma_z^{\,p}$; a destra si avranno funzioni delle espressioni lineari precedenti: le operazioni polari fatte rispetto alle variabili X, Y, Z e rappresentate dal simbolo Δ sono equivalenti ad operazioni polari fatte sulle nuove variabili x, y, z, perchè si ha, essendo ψ una funzione qualunque:

$$\frac{\partial\psi}{\partial X_1}Y_1+\frac{\partial\psi}{\partial X_2}Y_2+\frac{\partial\psi}{\partial X_3}Y_3=\sum_i\frac{\partial\psi}{\partial X_i}Y_i$$

$$=\sum_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial X_i}\sum_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j}y_j\right)=\sum_j\left(y_j\sum_i\frac{\partial\psi}{\partial X_i}\,\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)$$

$$=\sum_j y_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}.\qquad \text{C. V. D.}$$

(*) Questa formola, ed il ragionamento per trovarla presentano completa analogia con quanto trovasi nel Clebsch - *Ueber eine Fundamentalaufgabe* ecc. § 7, pag. 22, cui rimando per maggiori schiarimenti.

ed il determinante (XYZ) diventa:

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \\ y_1\, y_2 \ldots y_n \\ z_1\, z_2 \ldots z_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n \\ \gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_n \end{Vmatrix}.$$

Sostituendo, si ottiene:

$$\alpha_x{}^l \beta_y{}^m \gamma_z{}^p = \Sigma\, \Delta\, \varphi_0 + \Sigma\, \Delta \left\{ \begin{Vmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \\ z_1 \ldots z_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \ldots \beta_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_n \end{Vmatrix} \varphi_1 \right\} + \ldots$$

che è un'identità, qualunque siano le quantità che vi compaiono.

Suppongasi in essa le α, β, γ simboli; il membro di sinistra può rappresentare qualunque funzione di tre sistemi di variabili x, y, z, e l'identità continua a sussistere perchè in ambo i membri i coefficienti di questa funzione effettiva entrano a primo grado; e la formula così interpretata dice:

« Una funzione F di tre sistemi di n variabili x, y, z si può ottenere mediante operazioni polari da funzioni delle variabili x, y e dei determinanti della matrice (x, y, z), ottenute alla loro volta da F con operazioni polari ».

Suppongasi ora $n = 4$, i tre sistemi di variabili quaternarie i coefficienti di tre cubiche f_1, f_2, f_3, e la F funzione invariantiva di esse; si avrà F espressa mediante forme polari di forme invariantive, funzioni dei coefficienti:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

e dei determinanti della matrice:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}.$$

Si consideri ora il covariante cubico delle tre forme:

$$p_x{}^3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -x_2{}^3 & x_1 x_2{}^2 & -x_1{}^2 x_2 & x_1{}^3 \end{vmatrix} = (ab)(ac)(bc)\, a_x\, b_x\, c_x$$

$$= -\tfrac{1}{3}\left[f_1 A_{23} + f_2 A_{31} + f_3 A_{12} \right];$$

posto $A_{12} = (a\,b)^3$, ecc., e l'ultima riduzione ottenendosi colla stessa formula che già servì per R. I determinanti della matrice $(a\,b\,c)$ sono eguali ai coefficienti di p^3_x, e quindi funzioni lineari degli invarianti A: sostituendo questa loro espressione in F, tutti i termini, a meno del primo, che contengono i determinanti della matrice $(a\,b\,c)$ al grado per es. r, vengono a contenere omogeneamente al grado r gli invarianti A, e si decomporranno in funzione di questi invarianti, e di altre forme invariantive di grado totale diminuito di $2\,r$; e applicando a queste nuove forme lo stesso procedimento, si ricava che ogni forma invariantiva F simultanea di tre cubiche viene espressa in funzione di forme polari di formazioni invariantive di due cubiche, e degli invarianti A, che appartengono pure alla stessa categoria.

I risultati precedenti, uniti al sistema completo noto di due cubiche (*), ci permettono la seguente conclusione:

« Le forme invariantive di quante si vogliano cubiche ternarie appartengono a 10 tipi distinti, che sono i seguenti - ogni tipo essendo determinato da una forma - :

1° Una delle cubiche date (covariante cubico);

2° Il Jacobiano di due cubiche (covariante biquadratico);

3° L'Hessiano di una cubica (covariante quadratico);

4° Il terzo scorrimento di due cubiche (invariante);

5° Il covariante Q di una cubica (covariante cubico);

6° Il secondo scorrimento di una forma (3) su una cubica (covariante lineare);

7° Il risultante d'una cubica (invariante):

8° Il Jacobiano di due forme del tipo 3° (covariante quadratico);

9° Il primo scorrimento di una forma (3) con una (6) (covariante lineare);

10° Il risultante di due forme lineari (6) (invariante) ».

Per completare la questione si potrebbe trovare il numero delle forme appartenenti ad ogni tipo, le relazioni che passano fra esse, ed i loro significati geometrici. Riguardo al numero

(*) Clebsch - *Binären Formen*, § 61. Ivi però presentansi due covarianti lineari appartenenti ad un undicesimo tipo, dimostrati sovrabbondanti dal Sylvester (*Comptes rendus*, etc. nov. 1879) ed espressi in funzione dei fondamentali dal mio Ch.mo Prof. D'Ovidio (*Atti R. Acc. Torino*, Dicembre 1879).

osserverò solamente che le 26 forme invariantive di due cubiche si raggruppano nei dieci tipi rispettivamente in numero di 2, 1, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 4, 1; e se le forme date sono in numero di N, le forme fondamentali appartenenti ad ogni tipo sono rispettivamente in numero di:

$$N, \quad \frac{1}{2}N(N-1), \quad \frac{1}{2}N(N+1), \quad \frac{1}{2}N(N-1),$$

$$\frac{1}{2.3}N(N+1)(N+2), \quad \frac{1}{3}(N-1)N(N+1),$$

$$\frac{1}{2.3.4}N(N+1)(N+2)(N+3), \quad \frac{1}{8}(N-1)N(N+1)(N+2); \text{ ecc.}$$

come per alcuni è evidente, e per altri si dimostra dopo alcune considerazioni.

In questa adunanza il Socio Alessandro DORNA legge una sua Memoria intitolata: « *Interpretazione matematica dell'ipotesi con cui Domenico Cassini determinò la rifrazione astronomica, e teoria esatta che ne risulta, libera da ogni supposizione arbitraria sulla costituzione dell'atmosfera, per una proprietà di questa che non era ancora stata indicata* ». Questo lavoro del Socio DORNA è ad unanimità approvato per la stampa nei Volumi *delle Memorie*.

Adunanza del 30 Aprile 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Naccari presenta e legge il seguente lavoro del signor Prof. Antonio Roiti, Corrispondente dell'Accademia:

METODO

PER

DETERMINARE L' OHM.

Nel 1874, come si trova indicato al § 12 de' miei studi sull'azione elettromotrice dei solenoidi neutri (1), mi era venuto in mente un modo di prendere la misura assoluta delle resistenze elettriche, che ho poi trascurato di applicare per non aver avuto in pronto gli strumenti necessari. Ma ora, che la determinazione dell'*ohm* è, come si dice, all'ordine del giorno, stimo opportuno di riprendere quel concetto, quantunque vi abbia già ricorso, almeno in parte, anche il Prof. Rowland (2), quando nel 1878 verificò alcune copie del campione di resistenza costruito sotto gli auspicî dell'Associazione Britannica.

Egli misurava colla bussola delle tangenti l'intensità i d'una corrente primaria che circolava in un rocchetto, e deduceva dal primo impulso d'un galvanometro l'intensità q' della corrente integrale indotta in un secondo rocchetto all'atto che invertiva quella corrente primaria. La resistenza del circuito indotto era data dalla formola

$$R = 2\,M\,\frac{i}{q'}\,,$$

(1) *Nuovo Cimento*, S. 2, vol. XI, pag. 55.
(2) *Journal de Physique*, vol. VIII, p. 246.

dove M è il coefficiente d'induzione mutua dei due rocchetti, ed il rapporto $\frac{i}{q}$ viene espresso in funzione dei coefficienti di riduzione dei due reometri, del decremento logaritmico e della durata di oscillazione del galvanometro.

Stando alle mie idee del 1874, avrei adoperato, invece del rocchetto induttore, un solenoide neutro; ed invece del rocchetto indotto, un circuito qualunque che fosse stato concatenato un certo numero di volte con esso solenoide. Per tal modo l'espressione del coefficiente d'induzione mutua diventa semplice quanto mai in funzione delle dimensioni lineari del solo solenoide inducente.

Avrei voluto anche emanciparmi dal fare delle misure assolute d'intensità, che trascinano con sè delle determinazioni e correzioni alquanto complicate: e però avrei pensato di adoperare il medesimo reometro per entrambe le quantità d'elettricità, facendovi passare una successione di correnti d'apertura (o di chiusura) ad intervalli piccoli rispetto alla durata d'oscillazione del magnete, così da poterne osservare la deviazione definitiva anzichè l'impulsiva.

Sia q la quantità totale di elettricità che circola nel galvanometro ad ogni apertura dell'inducente, e sia n il numero di tali aperture in un secondo: sarà come se nel galvanometro passasse una corrente costante d'intensità:

$$I = n\,q\ .$$

Ma se la corrente primaria ha l'intensità i, ed il circuito indotto ha la resistenza r ed è concatenato μ volte col solenoide: e se il coefficiente d'induzione mutua fra questo e quello è $\mu\,L$, sarà:

$$q = \frac{\mu\,L}{r}\,i$$

e però:

$$(1)\ \ldots\ldots \qquad r = n\,\mu\,L\,\frac{i}{I} = n\,\mu\,L\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\ .$$

trattandosi d'una bussola delle tangenti.

Sarà forse malagevole il rendere I ed i dello stesso ordine di grandezza in maniera che le deviazioni α e β corrispondano circa allo stesso grado di sensibilità del reometro. Ma allora, invece di misurare tutta la i, si potrà misurarne una derivazione j: e sarà:

$$i = j\left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

se c e b rappresentano le resistenze de' due rami derivati. In tal caso la (1) assume la forma:

$$r = n\,\mu\,L\left(1 + \frac{c}{b}\right)\frac{j}{I};$$

la quale diventa ancora più semplice se si prende

$$(2)\ldots\ldots \qquad r = b + c\,.$$

perchè si riduce a:

$$b = n\,\mu\,L\frac{I}{j}\,.$$

E, disponendo convenientemente di L, n, μ, si potrà rendere anche:

$$(3)\ldots\ldots \qquad j = I\,;$$

in guisa che basterà un semplice galvanoscopio, e risulterà:

$$(4)\ldots\ldots \qquad b = n\,\mu\,L\,.$$

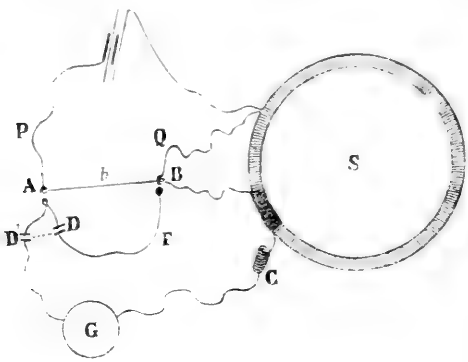
dove L ha la dimensione d'una linea; n è la reciproca di un tempo, e μ è un numero.

Riepilogando, ecco come si dovrebbe procedere:

Unire [vedi la figura alla pagina seguente] uno dei reofori P della pila direttamente col punto di derivazione A, e l'altro Q unirlo col punto B mediante il filo del solenoide neutro S. Prendere per rami derivati fra A e B la resistenza b, che si vuol determinare, e la resistenza c costituita dal galvanoscopio G e dal filo C da concatenare col solenoide. E leggere la deviazione prodotta dalla corrente costante j.

Poi sostituire, mercè rapido commutatore, alle comunicazioni di P e Q con b, quelle di P e Q con un filo F di resistenza $\dfrac{b\,c}{b+c}$, in guisa che non abbia a variare per tale commutazione la corrente i, che circola nel solenoide S: e che il circuito indotto $A\,G\,C\,B\,A$ abbia la resistenza $b + c$ voluta dalla (2).

Oltre a ciò, bisognerà che in F possa funzionare un interruttore D di conserva con un altro D' nel circuito indotto:



cosicchè questo sia chiuso per le sole aperture (o per le sole chiusure) dell'inducente: e, volendo applicare la (3), si dovrà variare il numero delle concatenazioni fino ad ottenere in G la medesima deviazione di dianzi.

Tutta la difficoltà del metodo pare adunque che si concentri nell'interruttore $D\,D'$, che dovrà produrre ad ogni secondo un numero n, esattamente determinabile, di aperture nell'inducente e nell'indotto: e tale che sia grande di fronte al numero di oscillazioni che nello stesso tempo compie il magnete del galvanoscopio; ma non troppo grande per lasciar agio alle extracorrenti di spegnersi compiutamente fra due interruzioni consecutive.

Questa difficoltà non è certo insormontabile dal lato meccanico; e d'altro lato si presentano numerosi e spediti e sicuri i mezzi per verificare se sieno bene soddisfatte le condizioni ora dette.

Finirò col dare, come esempio, l'espressione completa (4) in due casi particolari.

Il solenoide è un anello coi diametri massimo e minimo d' e d, e contiene m giri di filo equabilmente distribuito. Ha la sezione circolare, ed in tal caso:

$$b = \mu\, n\, m\, \pi\, (\sqrt{d'} - \sqrt{d}\,)^2 .$$

Ha la sezione rettangolare di altezza a, ed allora:

$$b = \mu\, n\, m\, 2\, a \log \text{nat} \frac{d'}{d} .$$

Rammento, che n è il numero delle interruzioni al secondo dell'inducente, che μ è il numero delle concatenazioni dell'indotto col solenoide neutro: e che n e μ vanno scelti in maniera che la deviazione del galvanometro rimanga la medesima tanto sotto l'azione continua dell'inducente, quanto sotto quella di n indotte d'apertura (o di chiusura) per ogni secondo.

Firenze, 20 Aprile 1882.

Il Socio Conte Tommaso SALVADORI presenta la seguente sua Nota

INTORNO AD UNA SPECIE POCO NOTA

DEL

GENERE CYCLOPSITTACUS.

L'Oustalet, Assistente per la ornitologia nel Museo del Jardin des Plantes in Parigi, descrisse nel 1880 (1) una nuova specie di *Cyclopsittacus*, che per sua grande cortesia egli mi dedicava, chiamandola *Cyclopsittacus salvadorii*.

La descrizione che egli ne dette non era compiuta, e forse neppure abbastanza chiara, per cui il Reichenow nella sua recente Monografia dei Papagalli (2) non potè darne una diagnosi latina e fu obbligato a riferire la originale descrizione francese dell'Oustalet.

Avendo io potuto esaminare recentemente un esemplare del *C. salvadorii* nel Museo Turati in Milano, ho colto questa favorevole opportunità per descrivere in modo compiuto questa bella e rara specie.

Cyclopsittacus salvadorii, Oust.

CYCLOPSITTACUS SALVADORII, Oust., Bull. Ass. Sc. de France, 1880, p. 172. — Meyer, Journ. f. Orn. 1880, p. 312 (nota).

---

(1) *Description de quelques oiseaux nouveaux de la Nouvelle-Guinée* (Ass. Sc. de France, Bull. hebdomadaire, n° 11, 1880.

(2) *Conspectus Psittacorum. Systematische Uebersicht aller bekannten Papageienarten* (Journ. f. Orn. 1881).

— Ibis, 1881, p. 165. — Rchnw. et Schal., Journ. f. Orn. 1881, p. 79. — Salvad., Ibis, 1881, p. 287. — Rchnw., Journ. f. Orn. 1881, p. 136, 137. — Id., Consp. Psitt. p. 72, 73 (1882).

Viridis, superne saturatior, subtus pallidior flavescens, pileo prasino, pulcherrime caeruleo striolato (1)*; genis flavidis, plumis longis strictis praeditis; macula postoculari laetissime caerulea; cervice viridi, paullum flavescente; pectoris fascia transversa lata parum conspicua pallide virescente; lateribus pectoris brunneo-aurantio tinctis; alis viridi-caerulescentibus, superne dorso concoloribus; remigibus intus basin versus late flavis, remigibus ultimis, dorso proximis, in pogonio interno macula aurantia obtecta ornatis; subalaribus pallide viridibus; cauda cuneata longiuscula, superne viridi-caerulescente, subtus olivacea; rostro nigro; pedibus in exuvie plumbeis.*

Long. tot. circa $0^{m},220$; al. $0^{m},115$; caud. $0^{m},075$; rostri $0^{m},020$; tarsi $0^{m},016$.

Hab. in Papuasia — Nova Guinea, ad littora orientalia sinus Geelwinkiani (*Bruijn*).

L'esemplare conservato nel Museo Turati, cui è stato inviato dal Laglaize, è indicato come femmina; probabilmente esso è uno dei tipi della specie, giacchè l'Oustalet descrivendola menzionò due soli esemplari.

Il *C. salvadorii*, appartiene al gruppo delle specie che comprende il *C. desmarestii*, ma si distingue da questa e da tutte le altre affini per avere il pileo non aranciato, o rosso, ma di color verde con bellissime strie azzurre verso gli apici delle piume; inoltre esso si distingue per la lunghezza notevole delle strette piume delle gote e della regione auricolare ed anche per avere la coda alquanto più lunga di quella delle altre specie; per le dimensioni delle altre parti non differisce gran fatto dal *C. desmarestii*.

---

(1) Nella diagnosi dell'Oustalet si legge: *le front n'est pas d'un rouge vif passant en arrière au jaune orangé, mais d'une couleur* CENDRE VERTE *fortement mélangée de bleu d'outremer*. Nell'esemplare da me esaminato la fronte non è certamente di color *cendre verte*, ma di un bel verde erba.

Ad onta della sua maggiore uniformità di colorazione, questa è una bellissima specie ed inoltre molto interessante, perchè appunto per la sua semplicità, cioè pel colorito verde anche delle parti che nelle altre specie sogliono essere di color rosso-arancio, si può supporre che essa sia più somigliante allo stipite primitivo, d'onde derivarono le varie forme, che vivono ora nella Nuova Guinea.

Questa specie fu scoperta dai cacciatori del Bruijn sulla costa orientale della Baia del Geelwink, in una località posta fra i gradi 136° 30 e 137° di longitudine orientale.

Il Socio Cav. Prof. Giuseppe Basso presenta e legge la seguente Memoria del sig. Dott. G. Albertotti (Junior), Assistente alla Clinica oftalmologica della R. Università di Torino:

GRADUAZIONE
DELL' OFTALMOMETRO
DI HELMHOLTZ.

Allorquando Helmholtz propose l'applicazione all'oftalmometro delle lamine deviatrici come mezzo pratico per misurare la grandezza delle immagini riflesse dalla cornea, il Donders, lo Knapp, Woinow, Mauthner e Reuss si servirono molto vantaggiosamente dello strumento per rinnovare e continuare gli studi sulle curvature della cornea e del cristallino dall'Helmholtz intrapresi. A siffatte determinazioni pochi in seguito si dedicarono, e per lo stesso scopo vennero proposti altri mezzi (Landolt, Javal), fra cui alcuni giudicati meno fragili ed imbarazzanti del sistema a lamine deviatrici (Giraud-Teulon).

A me invece, praticando il sistema, è sembrato che l'uso delle lamine deviatrici fosse abbastanza facile e spedito. Lo stesso sistema inoltre può venir costruito in modo da subire l'applicazione dell'oftalmoscopio, del microscopio e del cannocchiale (*), frapponendolo nel primo di tali strumenti fra lo specchio e la lente collettiva, e nei due ultimi fra il sistema oculare ed il sistema obbiettivo. Così esso può servire alla determinazione della grandezza

(*) Albertotti - *Determinazione sperimentale della grandezza della immagine oftalmoscopica rovesciata*, *Micrometria*, *Telemetria*. Torino, 1882.

dell'immagine oftalmoscopica rovesciata, alla micrometria ed alla telemetria. Egli è per ciò che, esteso l'ufficio delle lamine deviatrici, ho creduto argomento di non lieve importanza l'occuparmi in modo speciale della graduazione del sistema.

Per la graduazione dell'oftalmometro di Helmholtz, si conoscono due metodi: uno empirico, l'altro razionale.

1° *Metodo empirico.* — Consiste nello sdoppiamento, per mezzo dello strumento, di dimensioni conosciute, come ad esempio delle divisioni di una scala a decimi di millimetro situata sull'asse dello strumento a qualsiasi distanza dal piano in cui giacciono inizialmente le lamine deviatrici. Si costruisce poscia una tavola scrivendo accanto a ciascuna delle suddette dimensioni il corrispondente valore di sdoppiamento. Ciò fatto, la dimensione di un altro oggetto sarà nota quando il valore angolare necessario per lo sdoppiamento di questo oggetto corrisponda ad un valore già trovato nello sdoppiamento delle dimensioni della scala millimetrica e scritto perciò nella tavola.

Nella pratica si usa l'istrumento per determinare la grandezza di immagini riflesse della cornea, oppure di immagini capovolte della papilla ottica e dei vasi retinici, ovvero sia di immagini reali fornite da sistemi diottrici. Perciò le dimensioni, per le quali occorre conoscere il corrispondente valore di sdoppiamento, variano per lo più fra un decimo di millimetro e sei millimetri, benchè possano in casi speciali oltrepassare questi due limiti; e siffatte determinazioni sarebbero tuttavia sperimentalmente possibili, perchè lo strumento dà il grado di rotazione delle lamine corrispondente anche allo sdoppiamento di dimensioni minori di un centesimo di millimetro e maggiori di nove millimetri.

Poniamo il caso che si debbano solamente misurare tratti di dimensione multipla di un decimo di millimetro e compresi fra i limiti accennati di un decimo di millimetro e sei millimetri. Seguendo il metodo empirico della formazione della tavola di graduazione si dovranno eseguire 60 determinazioni; ma gli angoli di rotazione corrispondenti allo sdoppiamento di uno stesso tratto, e quindi teoricamente equivalenti fra di loro, sono quattro, uno per ciascun quadrante, epperciò ad una serie di sdoppiamenti di tratti di dimensione crescente corrisponderanno quattro serie alternativamente crescenti e decrescenti, di angoli equivalenti disposte come segue:

1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**
0°	— 180° —		360°
1°	179°	181°	359°
2°	178°	182°	358°
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
88°	92°	268°	272°
89°	91°	269°	271°
— 90° —		— 270° —	

Per ogni tratto adunque debbonsi praticare quattro sdoppiamenti, e per tali 60 determinazioni occorron quindi 240 letture. Di più, come è di regola in esperimenti ad osservazione diretta, non si è autorizzati a tener per buona una lettura se non quando dessa risulta dalla media di parecchie osservazioni, fra cui la differenza sia minima, epperciò trascurabile nell'ordine di grandezze che si vogliono misurare.

Or bene, per poco si pratichi lo strumento, si scorge tosto come siano sensibili le differenze fra le osservazioni relative ad una stessa determinazione, anche per una medesima posizione delle lamine. Di qui la necessità di praticare un discreto numero di osservazioni per ciascheduna determinazione prima di poterne ricavare una media costante: il che fa tosto salire a parecchie migliaia il numero totale delle letture necessario per le determinazioni comprese nei limiti sopraindicati.

La lunghezza e la fatica per l'esecuzione materiale del lavoro sarebbero un lieve inconveniente, o non lo sarebbero punto, ove si fosse compensati dalla maggior esattezza dei risultati: ma dopo tutto si trova aver fatto un lavoro incompleto e non si potranno misurare con precisione che oggetti di cui la dimensione cada in una di quelle di cui già si determinò l'angolo di rotazione necessario per lo sdoppiamento.

Osservando inoltre che per lo sdoppiamento di un decimo di millimetro occorre un angolo maggiore di 1'' e considerando come collo strumento si possano misurare angoli di $0^0\ 6'$, si vede qual considerevole numero di dimensioni pur determinabili venga trascurato nelle descritte tavole.

2° *Metodo razionale.* — Il procedimento razionale si fonda sull'uso della formola (*)

$$[1] \ldots\ldots \qquad \Delta = 2\,h\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$$

in cui Δ rappresenta la dimensione di un oggetto visto a traverso le lamine deviatrici dell'oftalmometro: h lo spessore delle lamine deviatrici: α l'angolo di rotazione delle lamine che corrisponde allo sdoppiamento di Δ, ovvero sia l'angolo d'incidenza fatto dal prolungamento della linea visuale colla superficie delle lamine rivolta verso l'oggetto: β l'angolo di rifrazione relativo all'angolo α.

Il valore di β vien dedotto dalla nota formola

$$[2] \ldots\ldots \qquad n = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$

in cui n rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo di cui sono costituite le lamine: donde:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\ .$$

Sostituendo questo valore nella formola [1] si ha:

$$[3] \ldots\ldots \qquad \Delta = 2\,h\left(1 - \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\alpha}}\right).$$

Dalla qual formola si vede come per valutare la dimensione di un oggetto Δ non è necessario determinare a qual distanza questo si trova, ma basta conoscere lo spessore h delle lamine e l'indice di rifrazione n delle lamine stesse, essendo che l'an-

(*) H. Helmholtz - *Ueber die Accommodation des Auges.* Archiv für Ophthalm. Berlin, 1855.

golo α ci vien dato dallo strumento. Ma la necessità di dover determinare sperimentalmente in via preliminare i valori h ed n costituisce una difficoltà di grandissimo momento.

È chiaro però come determinati questi due valori per costruire le tavole di graduazione non resterà che sostituirli nell'equazione [3] e cercare successivamente il valore di Δ in funzione dell'angolo α crescente di $6'$ in $6'$ da 0^0 fino a 90^0.

Per l'oftalmometro sul quale ho eseguiti i miei studi, il valore di h venne accuratamente determinato dal Meyerstein ed è uguale a

$$0^{m},00509 \ .$$

Della conoscenza di questo valore mi valsi nel metodo che sto per descrivere, e che essenzialmente si appoggia così sull'uno come sull'altro dei procedimenti indicati.

3° *Metodo seguito dall'A.* — Il procedimento empirico seguii nella determinazione di cinque sole dimensioni; misurai cioè quale angolo di rotazione delle lamine fosse necessario per lo sdoppiamento successivo di 1, 2, 3, 4, 5 millimetri. E questo feci con ogni cura, sia pel numero delle letture, moltiplicando le osservazioni fino a che non ottenni una media costante; ma specialmente per la scelta dell'oggetto di cui mi valsi per il raddoppiamento dell'immagine.

a) Eseguii da prima le stesse esperienze sopra i tre oggetti seguenti:

1° Un piccolo regolo d'avorio costruito dal Meyerstein somigliante a quello di cui si servì il Donders; la lunghezza è di 4 centimetri e su di esso sta incisa in nero una scala graduata a millimetri da una parte ed a mezzi millimetri dall'altra; la lunghezza dei tratti delle divisioni è di tre millimetri circa; le divisioni spiccano abbastanza bene sul bianco dell'avorio;

2° Un medaglione di madreperla, già annesso come micrometro ad un antico strumento di ottica, su di esso sta scalfita per un tratto di tre centimetri di lunghezza una scala a decimi di millimetri, e le linee di divisione misurano circa tre millimetri di altezza:

3° Un disegno a striscie parallele bianche e nere di egual larghezza (1 millimetro) somigliante alla figura seguente:

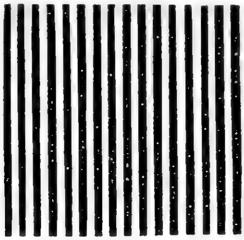


Fig. 1.

Ciascuno di questi tre oggetti veniva illuminato convenientemente e si disponeva in modo che la superficie divisa fosse verticale e che la fessura delle lamine, situata in un piano orizzontale, corrispondesse perpendicolarmente alla metà della lunghezza dei tratti di divisione successivamente della scala e del medaglione e tagliasse pure perpendicolarmente le linee del disegno. Praticai a questo modo due serie di esperienze, le une osservando l'oggetto direttamente a traverso le lamine, le altre osservando l'oggetto a maggior distanza con un cannocchiale munito anteriormente all'obbiettivo del sistema delle lamine deviatrici.

I risultati che ne ottenni sono consegnati nella tabella seguente:

TABELLA dei risultati ottenuti dalle esperienze fatte successivamente (**I**) col regolo, (**II**) col medaglione, (**III**) col disegno a striscie, osservati col cannocchiale alla distanza di m. **1,50**.

DIMENSIONE SDOPPIATA	POSIZIONE DELLE LAMINE	Media dell'angolo corrispondente agli sdoppiamenti considerato in ciascuna delle quattro posizioni delle lamine. (**III**)	Differenza fra il massimo ed il minimo dei termini della media. (**I**)	(**II**)	(**III**)	Media dell'angolo corrispondente agli sdoppiamenti considerato nelle quattro posizioni delle lamine. (**III**)	Differenza fra il massimo ed il minimo dei termini della media. (**I**)	(**II**)	(**III**)
Un millimetro	1° quad.	**14°,2**	1,0	0,8	0,2	**14°,00**	1,0	0,9	0,4
	4° »	**346 ,1**	0,6	0,7	0,2				
	3° »	**193 ,8**	1,0	0,9	0,3				
	2° »	**165 ,9**	0,9	1,0	0,1				
Due millimetri	1° quad.	**26°,8**	0,9	1,0	0,3	**26°,9**	1,0	1,2	0,5
	4° »	**333 ,1**	0,8	1,5	0,8				
	3° »	**206 ,7**	1,1	0,8	0,1				
	2° »	**152 ,8**	1,0	1,2	0,7				
Tre millimetri	1° quad.	**37°,5**	1,0	0,9	0,2	**37°,7**	1,0	0,9	0,4
	4° »	**322 ,3**	1,3	0,5	0,5				
	3° »	**217 ,7**	1,0	0,9	0,1				
	2° »	**142 ,1**	0,8	1,0	0,2				
Quattro millimetri	1° quad.	**46°,9**	1,0	0,9	0,4	**46°,9**	1,1	0,9	0,6
	4° »	**312 ,8**	1,5	0,7	0,3				
	3° »	**227**	0,9	0,9	0,7				
	2° »	**133 ,5**	1,0	1,2	0,2				
Cinque millimetri	1° quad.	**54°,6**	0,7	0,9	0,1	**54°,6**	0,9	0,8	0,2
	4° »	**305 ,5**	0,9	1,0	0,3				
	3° »	**234 ,7**	1,0	0,8	0,5				
	2° »	**125 ,4**	1,5	0,8	0,1				

b) Dall'ispezione della tabella apparisce come sia piccolissima la differenza fra il massimo ed il minimo delle medie ottenute coll'esame del disegno a righe alterne (III) relativamente a quelle ottenute col medaglione (II) e col regolo (I), e tale uniformità delle medie relative al disegno si nota non solo quando l'osservazione vien fatta a traverso il cannocchiale, ma pure quando la medesima si fa direttamente a traverso le lamine. In fatti, basta osservare ad occhio nudo a traverso le lamine deviatrici la scala del regolo e la scala del medaglione in modo che la fessura delle lamine corrisponda orizzontalmente alla metà dei tratti di divisione, si noterà come appena incomincia lo sdoppiamento si dura fatica, per causa della brevità dei tratti, a far coincidere la metà superiore di un primo tratto con la metà inferiore di un altro tratto che lo sdoppiamento fa apparire nella direzione del primo. Questa difficoltà è resa più sentita per la confusione portata nel complesso della figura dalla linea mediana che corrisponde alla linea di fessura delle lamine.

Osservando invece il disegno a striscie equilarghe alterne bianche e nere avviene che, in grazia della lunghezza delle striscie, il complesso della figura che corrisponde ai successivi sdoppiamenti delle dimensioni millimetriche, non è alterato gran che dalla accennata confusione, corrisponde alla linea di fessura. Inoltre, quando succede lo sdoppiamento di dimensioni pari, il complesso della figura nella sua parte mediana è un disegno a striscie continue bianche e nere in tutto somigliante al disegno reale come nella seguente fig.[a];

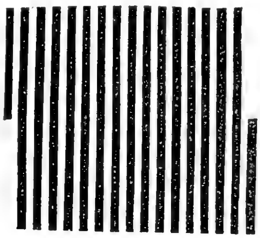


Fig. 2.

e negli sdoppiamenti corrispondenti alle dimensioni dispari il complesso della figura è costituito pure da righe alterne bianco-nere, ma spezzate trasversalmente nel mezzo del campo, sì che ad una linea bianca superiormente corrisponde inferiormente una linea nera (fig. 3). Da ciò ne deriva che l'occhio, oltre al non avvertire per la continuità delle striscie negli sdoppiamenti dispari la linea mediana di interruzione, resta colpito dalla spiccatissima differenza del disegno nei tratti corrispondenti agli sdoppiamenti pari.

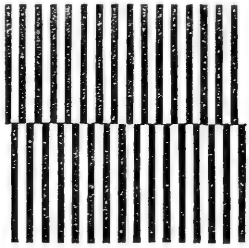


Fig. 3.

Ma questo inconveniente della interruzione mediana corrispondente alla linea di fessura scomparisce quando noi osserviamo ciascuno dei tre oggetti indicati col cannocchiale frapposto fra le lamine e l'occhio; in questa condizione l'immagine è rovesciata, netta in tutta la sua estensione e con tutto ciò le medie più costanti si hanno pure col disegno a striscie longitudinali. Credo rilevarne il motivo analizzando l'esperimento. Nel caso del regolo e del medaglione lo sdoppiamento di un millimetro è dato quando la metà superiore di un tratto corrisponde alla metà inferiore di un altro tratto distante dal primo di un millimetro, e guardando col cannocchiale si percepisce un disegno somigliante alla seguente

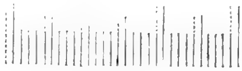


Fig. 4.

L'occhio adunque, per ogni determinazione, deve adattarsi per una linea di piccolissima dimensione, qual è il tratto che segna le divisioni nella scala; linea che, teoricamente, non dovrebbe avere larghezza; osservando invece il disegno a striscie, lo sdoppiamento di un millimetro si fa manifesto quando la parte del disegno superiore alla linea mediana si è spostata di un mezzo millimetro da un lato e la parte inferiore di un mezzo millimetro dall'altro lato; in guisa che una striscia bianca superiore si continui in una striscia nera inferiore. Somigliante figura, come accennai, apparisce se si guarda il disegno direttamente a traverso le lamine disposte per li sdoppiamenti dispari. Ma un tale disegno parzialmente sdoppiato dal sistema delle lamine venendo veduto a traverso il cannocchiale, non apparisce più come un disegno a tratti alterni non corrispondentisi; bensì si scorge come un fondo a striscie di tinta bigia uniforme, come nella seguente

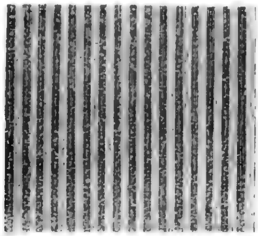


Fig. 5.

Invece, trattandosi di sdoppiamenti pari, il sistema del cannocchiale non influisce sull'aspetto della parte mediana dell'immagine, che apparisce perciò come nel disegno reale (fig. 1). L'occhio adunque avverte lo sdoppiamento dei passi dispari, non per la differenza di disegno (come nel caso dell'osservazione diretta a traverso le lamine), ma per la trasformazione di questo in striscie di una tinta unita: ciò potrebbe spiegare l'uniformità dei termini delle medie corrispondenti specialmente agli sdoppiamenti dispari.

Mi pare che questo fatto sia di certa importanza, siccome quello che indica quale norma sia da seguirsi nella scelta dell'oggetto luminoso, la cui immagine, data per riflessione della cornea e misurata in grandezza coll'oftalmometro, serve a calcolare il raggio di curvatura della cornea stessa.

c) Ottenuti così i cinque dati seguenti,

per lo sdoppiam. di $\Delta = 0,^{m}001$	ang. di rotaz. corrisp^{te} $\alpha = 14^{0}$
0, 002	$26^{0},57'$
0, 003	$37^{0},36'$
0, 004	$46^{0},48'$
0, 005	$54^{0},40'$

cercai il valore di n^2 nella formola [3] ed ebbi

$$[4] \ldots\ldots \qquad n^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\left(1 - \frac{\Delta}{2\,h \operatorname{sen}^2 \alpha}\right)^2}$$

nella qual formola [4] sostituendo successivamente i 5 dati trovati ricavai i cinque seguenti valori di n^2

per $\alpha = 0,^{m}00509$,	$\Delta = 0,^{m}001$	$\alpha = 14^0$	$n^2 = 2,72728$
	0, 002	$26^0,57'$	2,69133
	0, 003	$37^0,36'$	2,72063
	0. 004	$46^0,48'$	2,73652
	0, 005	$54^0,40'$	2,77765

valori abbastanza concordi e di cui la media è

$$n^2 = 2,73 \ldots$$

per cui $$n = 1,65 \ldots$$

Trovato questo valore n, valendomi dell'eguaglianza [2] cercai man mano il valore di β

$$\operatorname{sen} \beta = n \operatorname{sen} \alpha$$

e sostituito poscia β nella formola [1] ottenni il valore di Δ corrispondente successivamente all' angolo α crescente di $30'$ in $30'$ da 0^0 fino a 90^0; interpolai in seguito la differenza per la formazione dei gradi intermedii e costruii le tavole a decimi di grado in cui, nelle quattro prime colonne a sinistra su una stessa linea, si leggono i quattro angoli corrispondentisi per ciascuna delle posizioni delle lamine: nella quinta stanno i valori relativi di sdoppiamento in dimensione lineare che puossi ritenere esatta sino ai micromillimetri: nella sesta le differenze che servirono per l'interpolazione e che possono servire ancora ove si desideri spingere più oltre il limite della determinazione.

Dalla Clinica oftalmologica della R. Università di Torino

24 Aprile 1882.

Il Socio Capitano F. Siacci nell'adunanza del 26 p. p. marzo presentò e lesse la seguente Nota del Dott. Enrico Novarese, Assistente alla Cattedra di Algebra e Geometria analitica della R. Università di Torino,

INTORNO
AD ALCUNE
FORMOLE DI HERMITE
PER L'ADDIZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Per esprimere le funzioni ellittiche della somma di $2n-1$ argomenti mediante le funzioni degli argomenti singoli, Hermite ha dato nel 1862 (*) le relazioni

$$(1) \ldots \quad \mathrm{sn}(u_1+u_2+\ldots+u_{2n-1}) = \frac{\pm L}{\mathrm{sn}\, u_1\, \mathrm{sn}\, u_2 \ldots \mathrm{sn}\, u_{2n-1}} ,$$

$$(2) \ldots \quad \mathrm{cn}(u_1+u_2+\ldots+u_{2n-1}) = \frac{\pm M}{\mathrm{cn}\, u_1\, \mathrm{cn}\, u_2 \ldots \mathrm{cn}\, u_{2n-1}} ,$$

$$(3) \ldots \quad \mathrm{dn}(u_1+u_2+\ldots+u_{2n-1}) = \frac{\pm N}{\mathrm{dn}\, u_1\, \mathrm{dn}\, u_2 \ldots \mathrm{dn}\, u_{2n-1}} ,$$

in cui L, M, N hanno il seguente significato. Si consideri la funzione

$$\varphi(u) = F(z^2) + \frac{dz}{du} z F_1(z^2) ,$$

dove F ed F_1 indicano delle funzioni razionali intere rispettivamente del grado n ed $n-2$, e z designa indifferentemente

(*) Hermite, *Note sur la Théorie des fonct. ellipt.*, aggiunta alla 6ª ediz. del *Traité élém. de calcul diff. et int.* del Lacroix, T. II, p. 432.

sn u, cn u o dn u. Le $2n-1$ costanti che entrano in questa espressione (posto uguale ad 1 il coefficiente di z^{2n}) si intendano determinate mediante le $2n-1$ equazioni

$$(4)\ldots \qquad \varphi(u_i)=0\,, \quad (i=1,2,\ldots,2n-1)\,.$$

Orbene, il termine del polinomio F indipendente da z è ciò che si rappresenta con L, M, N secondo i tre casi corrispondenti ai tre significati di z.

L'applicazione delle formole (1), (2), (3) richiede per ogni singolo caso che si costruisca la funzione φ, si calcolino le quantità L, M, N e si determini il segno ricorrendo ad un caso speciale. Inoltre, se il numero degli argomenti sommati è pari, fa d'uopo considerarne uno di più e metterlo a zero.

Io mi propongo in questa Nota di sviluppare le formole dell'Hermite, ponendo le espressioni di

$$\mathrm{sn}\,(u_1+u_2+\ldots+u_m)\,,\quad \mathrm{cn}\,(u_1+u_2+\ldots+u_m)\,,\quad \text{ecc.}\,,$$

m essendo un intiero qualunque, sotto forma di rapporti di due determinanti dell'ordine m sbarazzati dall'ambiguità di segno. Questa forma, mentre è applicabile senz'altro ad un caso qualsiasi, mi sembra altresì che metta bene in luce la legge con cui varia la funzione della somma col variare del numero degli argomenti sommati. Aggiungerò alcune relazioni notevoli che da tali formole discendono, riserbandomi di far vedere altra volta come se ne possa ricavare anche il teorema della moltiplicazione.

Per brevità, adotterò la seguente notazione (*), assai comoda nella presente ricerca:

$$s_i=\mathrm{sn}\,u_i\,,\quad c_i=\mathrm{cn}\,u_i\,,\quad \Delta_i=\mathrm{dn}\,u_i\,,\quad t_i=\mathrm{tn}\,u_i\,.$$

(*) Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, I Bd., p. 605.

§ 1.

Le equazioni (4), scritte in disteso, dànno il sistema

$$p_1 z_1^{2n-2} + p_2 z_1^{2n-4} + \ldots + p_n$$
$$+ (q_1 z_1^{2n-3} + q_2 z_1^{2n-5} + \ldots + q_{n-1} z_1) \frac{d z_1}{d u_1} = - z_1^{2n}$$

$$p_1 z_2^{2n-2} + p_2 z_2^{2n-4} + \ldots + p_n$$
$$+ (q_1 z_2^{2n-3} + q_2 z_2^{2n-5} + \ldots + q_{n-1} z_2) \frac{d z_2}{d u_2} = - z_2^{2n}$$

. . . .

$$p_1 z_{2n-1}^{2n-2} + p_2 z_{2n-1}^{2n-4} + \ldots + p_n$$
$$+ (q_1 z_{2n-1}^{2n-3} + q_2 z_{2n-1}^{2n-5} + \ldots + q_{n-1} z_{2n-1}) \frac{d z_{2n-1}}{d u_{2n-1}} = - z_{2n-1}^{2n}$$

lineare nelle p e nelle q, dal quale, risolvendo rispetto a p_n, si trae

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad p_n = (-1)^n \times \frac{\begin{vmatrix} z_1^{2n} & z_1^{2n-2} \ldots z_1^2 & z_1^{2n-3}\frac{d z_1}{d u_1} & z_1^{2n-5}\frac{d z_1}{d u_1} & \ldots & z_1 \frac{d z_1}{d u_1} \\ z_2^{2n} & z_2^{2n-2} \ldots z_2^2 & z_2^{2n-3}\frac{d z_2}{d u_2} & z_2^{2n-5}\frac{d z_2}{d u_2} & \ldots & z_2 \frac{d z_2}{d u_2} \\ \cdot & \cdot \;\; \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ z_{2n-1}^{2n} & z_{2n-1}^{2n-2} \ldots z_{2n-1}^2 & z_{2n-1}^{2n-3}\frac{d z_{2n-1}}{d u_{2n-1}} & z_{2n-1}^{2n-5}\frac{d z_{2n-1}}{d u_{2n-1}} & \ldots & z_{2n-1}\frac{d z_{2n-1}}{d u_{2n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^{2n-2} & z_1^{2n-4} \ldots 1 & z_1^{2n-3}\frac{d z_1}{d u_1} & z_1^{2n-5}\frac{d z_1}{d u_1} & \ldots & z_1 \frac{d z_1}{d u_1} \\ z_2^{2n-2} & z_2^{2n-4} \ldots 1 & z_2^{2n-3}\frac{d z_2}{d u_2} & z_2^{2n-5}\frac{d z_2}{d u_2} & \ldots & z_2 \frac{d z_2}{d u_2} \\ \cdot & \cdot \;\; \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ z_{2n-1}^{2n-2} & z_{2n-1}^{2n-4} \ldots 1 & z_{2n-1}^{2n-3}\frac{d z_{2n-1}}{d u_{2n-1}} & z_{2n-1}^{2n-5}\frac{d z_{2n-1}}{d u_{2n-1}} & \ldots & z_{2n-1}\frac{d z_{2n-1}}{d u_{2n-1}} \end{vmatrix}}$$

Questo 2° membro rappresenta L, M od N secondochè supponiamo z uguale a $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ o $\operatorname{dn} u$.

Facendovi dapprima $z_i = s_i$, e dividendo per $s_1 s_2 \dots s_{2n-1}$, avremo, in virtù della (1):

(6) .....
$$\operatorname{sn}(u_1 + u_2 + \dots + u_{2n-1}) =$$
$$\pm \frac{\begin{vmatrix} s_1^{2n-1} & s_1^{2n-3} & \dots & s_1 & s_1^{2n-4} c_1 \Delta_1 & s_1^{2n-6} c_1 \Delta_1 & . & c_1 \Delta_1 \\ . & . & \dots & . & . & . & . \\ s_{2n-1}^{2n-1} & s_{2n-1}^{2n-3} & \dots & s_{2n-1} & s_{2n-1}^{2n-4} c_{2n-1} \Delta_{2n-1} & s_{2n-1}^{2n-6} c_{2n-1} \Delta_{2n-1} & . & c_{2n-1} \Delta_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{2n-2} & s_1^{2n-4} & \dots & 1 & s_1^{2n-3} c_1 \Delta_1 & s_1^{2n-5} c_1 \Delta_1 & . & s_1 c_1 \Delta_1 \\ . & . & \dots & . & . & . & . \\ s_{2n-1}^{2n-2} & s_{2n-1}^{2n-4} & \dots & 1 & s_{2n-1}^{2n-3} c_{2n-1} \Delta_{2n-1} & s_{2n-1}^{2n-5} c_{2n-1} \Delta_{2n-1} & . & s_{2n-1} c_{2n-1} \Delta_{2n-1} \end{vmatrix}}$$

formola che serve quando il numero m degli integrali u è dispari.

Quella relativa ad m pari se ne ottiene subito annullando un argomento, p. es. u_{2n-1}, con che l'equazione soprascritta diviene

$$\operatorname{sn}(u_1 + \dots + u_{2n-2}) =$$
$$\pm \frac{\begin{vmatrix} s_1^{2n-1} & \dots & s_1 & s_1^{2n-4} c_1 \Delta_1 & \dots & s_1^2 c_1 \Delta_1 & c_1 \Delta_1 \\ . & \dots & . & . & \dots & . & . \\ s_{2n-2}^{2n-1} & \dots & s_{2n-2} & s_{2n-2}^{2n-4} c_{2n-2} \Delta_{2n-2} & \dots & s^2_{2n-2} c_{2n-2} \Delta_{2n-2} & c_{2n-2} \Delta_{2n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{2n-2} & \dots & s_1^2 & 1 & s_1^{2n-3} c_1 \Delta_1 & \dots & s_1 c_1 \Delta_1 \\ . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ s_{2n-2}^{2n-2} & \dots & s^2_{2n-2} & 1 & s_{2n-2}^{2n-3} c_{2n-2} \Delta_{2n-2} & \dots & s_{2n-2} c_{2n-2} \Delta_{2n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}},$$

ossia, sviluppando secondo gli elementi dell'ultima orizzontale e dividendo sopra e sotto per $s_1 s_2 \dots s_{2n-2}$.

$$(7) \ldots\ldots \quad \operatorname{sn}(u_1 + \ldots + u_{2n-2}) = \pm (-1)^{n-1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} s_1^{2n-2} & \ldots & 1 & s_1^{2n-5} c_1 \Delta_1 & . & s_1 c_1 \Delta_1 \\ . & \ldots & . & . & . & . \\ s_{2n-2}^{2n-2} & \ldots & 1 & s_{2n-2}^{2n-5} c_{2n-2} \Delta_{2n-2} & . & s_{2n-2} c_{2n-2} \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{2n-3} & \ldots & s_1 & s_1^{2n-4} c_1 \Delta_1 & . & . & . & c_1 \Delta_1 \\ . & \ldots & . & . & . & . & . & . \\ s_{2n-2}^{2n-3} & \ldots & s_{2n-2} & s_{2n-2}^{2n-4} c_{2n-2} \Delta_{2n-2} & . & . & . & c_{2n-2} \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}}$$

la qual formola (a parte il segno) conserva perfettamente il tipo della (6). Così la questione propostaci, quanto al seno amplitudine, è risolta a meno del segno: per determinare quest'ultimo è necessario l'investigare ancora che cosa succeda quando da $m = 2n - 2$ si discenda ad $m = 2n - 3$ e ad $m = 2n - 4$.

La (7) per $u_{2n-2} = 0$ dà

$$(8) \ldots \operatorname{sn}(u_1 + \ldots + u_{2n-3}) = \pm (-1) \frac{\begin{vmatrix} s_1^{2n-3} & \ldots & s_1 & s_1^{2n-6} c_1 \Delta_1 & \ldots & c_1 \Delta_1 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{2n-4} & \ldots & 1 & s_1^{2n-5} c_1 \Delta_1 & \ldots & s_1 c_1 \Delta_1 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \end{vmatrix}}$$

onde, annullando u_{2n-3};

$$(9) \ldots \operatorname{sn}(u_1 + \ldots + u_{2n-4}) = \pm (-1)^{n-1} \frac{\begin{vmatrix} s_1^{2n-4} & \ldots & 1 & s_1^{2n-7} c_1 \Delta_1 & \ldots & s_1 c_1 \Delta_1 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{2n-5} & \ldots & s_1 & s_1^{2n-6} c_1 \Delta_1 & \ldots & c_1 \Delta_1 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \end{vmatrix}}$$

Dal confronto delle relazioni (6), (7), (8), (9) risulta che: Passando da un numero dispari (pari) di argomenti al numero pari (dispari) immediatamente inferiore, c'è o non c'è cangiamento di segno secondo la natura di n: passando da un numero pari ad un altro pari, non c'è mai variazione di segno, e vi è sempre passando da un dispari al dispari immediatamente successivo. Concludiamo che, quando m è pari, il quoziente dei due determinanti va sempre preso con uno stesso segno: quando m è impari, esso va preso alternativamente con un segno e coll'opposto. — Ora, assumendo uguale a 2 il numero degli argomenti.

l'equazione (7) dà (detto k il modulo):

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2)=\pm\frac{s_1^2-s_2^2}{s_1c_2\Delta_2-s_2c_1\Delta_1}=\pm\frac{s_1c_2\Delta_2+s_2c_1\Delta_1}{1-k^2s_1^2s_2^2}\,,$$

valore conosciuto che c'insegna che dobbiamo prendere il segno $+$: dunque per m pari, nel 2° membro delle formole ottenute si deve scegliere il segno $+$. Così pure, per un solo argomento, l'equazione (6) si riduce a $\operatorname{sn} u_1=\pm s_1$; sicchè, per m dispari, si deve scegliere il segno $+$ se m è della forma $1+4\lambda$, il segno $-$ se è della forma $3+4\lambda$ $(\lambda=0,1,2,\ldots)$.

Riassumendo, il seno amplitudine della somma di m argomenti sarà dato dalle formole:

Per m *pari*:

$$(\mathrm{I})\ \ldots\ldots\quad \operatorname{sn}(u_1+u_2+\ldots+u_m)=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_1^m & s_1^{m-2} & \ldots & 1 & s_1^{m-3}c_1\Delta_1 & s_1^{m-5}c_1\Delta_1 & \ldots & s_1c_1\Delta_1\\ s_2^m & s_2^{m-2} & \ldots & 1 & s_2^{m-3}c_2\Delta_2 & s_2^{m-5}c_2\Delta_2 & \ldots & s_2c_2\Delta_2\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ s_m^m & s_m^{m-2} & \ldots & 1 & s_m^{m-3}c_m\Delta_m & s_m^{m-5}c_m\Delta_m & \ldots & s_mc_m\Delta_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{m-1} & s_1^{m-3} & \ldots & s_1 & s_1^{m-2}c_1\Delta_1 & s_1^{m-4}c_1\Delta_1 & \ldots\ldots & c_1\Delta_1\\ s_2^{m-1} & s_2^{m-3} & \ldots & s_2 & s_2^{m-2}c_2\Delta_2 & s_2^{m-4}c_2\Delta_2 & \ldots\ldots & c_2\Delta_2\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot\\ s_m^{m-1} & s_m^{m-3} & \ldots & s_m & s_m^{m-2}c_m\Delta_m & s_m^{m-4}c_m\Delta_m & \ldots\ldots & c_m\Delta_m \end{vmatrix}}\,.$$

Per m *dispari*:

$$(\mathrm{II})\ \ldots\ldots\quad \operatorname{sn}(u_1+u_2+\ldots+u_m)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\times$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_1^m & s_1^{m-2} & \ldots & s_1 & s_1^{m-3}c_1\Delta_1 & s_1^{m-5}c_1\Delta_1 & \ldots & c_1\Delta_1\\ s_2^m & s_2^{m-2} & \ldots & s_2 & s_2^{m-3}c_2\Delta_2 & s_2^{m-5}c_2\Delta_2 & \ldots & c_2\Delta_2\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ s_m^m & s_m^{m-2} & \ldots & s_m & s_m^{m-3}c_m\Delta_m & s_m^{m-5}c_m\Delta_m & \ldots & c_m\Delta_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{m-1} & s_1^{m-3} & \ldots & 1 & s_1^{m-2}c_1\Delta_1 & s_1^{m-4}c_1\Delta_1 & \ldots & s_1c_1\Delta_1\\ s_2^{m-1} & s_2^{m-3} & \ldots & 1 & s_2^{m-2}c_2\Delta_2 & s_2^{m-4}c_2\Delta_2 & \ldots & s_2c_2\Delta_2\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ s_m^{m-1} & s_m^{m-3} & \ldots & 1 & s_m^{m-2}c_m\Delta_m & s_m^{m-4}c_m\Delta_m & \ldots & s_mc_m\Delta_m \end{vmatrix}}\,.$$

La formola (II), e così pure quelle dei successivi paragrafi relative alle altre funzioni, credo siano originali: la (I) è data nelle *Vorles. ü. Geom.* del CLEBSCH, I Bd., pp. 624-25, dove essa è calcolata per uno scopo geometrico, partendo da una equazione analoga alla nostra (1). Tale equazione (basata sopra una funzione un po' diversa da φ, che Hermite chiama φ_1) s'incontra per la prima volta nelle *Vorlesungen* a p. 605; ed ivi, pel caso particolare di 3 argomenti, se ne trasforma il secondo membro nel quoziente di due determinanti del 3° ordine. Che io sappia, è l'unico esempio sinora di impiego dei determinanti nella teorica dell'addizione delle funzioni ellittiche. Il presente lavoro è stato appunto inspirato da quest'ultimo luogo del Clebsch, ma il processo seguito mi pare più semplice e più naturale: dippiù, l'autore tedesco non discute la scelta del segno (cosa indifferente pel suo assunto); e ciò anzi lo induce in errore nella formola relativa a 3 argomenti (pag. 606), nella quale bisogna cangiar segno al 2° membro. E diffatto, se in essa si fa $u_3 = 0$, vien fuori l'espressione di $-\operatorname{sn}(u_1 + u_2)$.

§ 2.

Ponendo nella (5) $z_i = c_i$ e sostituendo nell'equazione (2), si ha

(10) . . . . .

$$\operatorname{cn}(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n-1}) = \frac{\begin{vmatrix} c_1^{2n-1} & c_1^{2n-3} & \ldots & c_1 & c_1^{2n-4} s_1 \Delta_1 & c_1^{2n-6} s_1 \Delta_1 & \ldots & s_1 \Delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{2n-1}^{2n-1} & c_{2n-1}^{2n-3} & \ldots & c_{2n-1} & c_{2n-1}^{2n-4} s_{2n-1} \Delta_{2n-1} & c_{2n-1}^{2n-6} s_{2n-1} \Delta_{2n-1} & \ldots & s_{2n-1} \Delta_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1^{2n-2} & c_1^{2n-4} & \ldots & 1 & c_1^{2n-3} s_1 \Delta_1 & c_1^{2n-5} s_1 \Delta_1 & \ldots & c_1 s_1 \Delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{2n-1}^{2n-2} & c_{2n-1}^{2n-4} & \ldots & 1 & c_{2n-1}^{2n-3} s_{2n-1} \Delta_{2n-1} & c_{2n-1}^{2n-5} s_{2n-1} \Delta_{2n-1} & \ldots & c_{2n-1} s_{2n-1} \Delta_{2n-1} \end{vmatrix}}.$$

e di qui, annullando u_{2n-1},

$$\mathrm{cn}\,(u_1 + \ldots + u_{2n-2}) =$$

$$\pm \frac{\begin{vmatrix} c_1^{2n-1} & \ldots & c_1 & c_1^{2n-4}s_1\Delta_1 & \ldots & s_1\Delta_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n-2}^{2n-1} & \ldots & c_{2n-2} & c_{2n-2}^{2n-4}s_{2n-2}\Delta_{2n-2} & \ldots & s_{2n-2}\Delta_{2n-2} \\ 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1^{2n-2} & \ldots & 1 & c_1^{2n-3}s_1\Delta_1 & \ldots & c_1 s_1\Delta_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n-2}^{2n-2} & \ldots & 1 & c_{2n-2}^{2n-3}s_{2n-2}\Delta_{2n-2} & \ldots & c_{2n-2}s_{2n-2}\Delta_{2n-2} \\ 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}}.$$

Per poter ridurre questi due determinanti all'ordine $2n-2$, sottraggo dalla n^{ma} colonna la $(n-1)^{ma}$, dalla $(n-1)^{ma}$ la $(n-2)^{ma}$, e così via fino alla 2^a da cui sottraggo la 1^a. Osservando che $c^r - c^{r+2} = c^r s^2$, e dividendo sopra e sotto per $s_1 s_2 \ldots s_{2n-2}$, si trova così:

$$\mathrm{cn}\,(u_1 + \ldots + u_{2n-2}) =$$

$$\pm \frac{\begin{vmatrix} c_1^{2n-3}s_1 & c_1^{2n-5}s_1 & \ldots & c_1 s_1 & c_1^{2n-4}\Delta_1 & c_1^{2n-6}\Delta_1 & \ldots & \Delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ c_{2n-2}^{2n-3}s_{2n-2} & c_{2n-2}^{2n-5}s_{2n-2} & \ldots & c_{2n-2}s_{2n-2} & c_{2n-2}^{2n-4}\Delta_{2n-2} & c_{2n-2}^{2n-6}\Delta_{2n-2} & \ldots & \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1^{2n-4}s_1 & c_1^{2n-6}s_1 & \ldots & s_1 & c_1^{2n-3}\Delta_1 & c_1^{2n-5}\Delta_1 & \ldots & c_1\Delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n-2}^{2n-4}s_{2n-2} & c_{2n-2}^{2n-6}s_{2n-2} & \ldots & s_{2n-2} & c_{2n-2}^{2n-3}\Delta_{2n-2} & c_{2n-2}^{2n-5}\Delta_{2n-2} & \ldots & c_{2n-2}\Delta_{2n-2} \end{vmatrix}}$$

la qual formola, valevole per un numero pari di argomenti, è, come si vede, essenzialmente diversa dalla (10) ma non offre variazione di segno. E se da essa, con procedimento eguale, si passa al caso di $m = 2n-3$, ritorna il tipo della (10) ed ancora senza cambiamento di segno. Dunque, nel caso del coseno, il rapporto dei due determinanti va sempre affetto, qualunque sia m, da un segno medesimo: che questo poi sia il positivo, riesce manifesto riducendo ad 1 il numero delle u.

Laonde avremo pel coseno amplitudine:

Per m *pari*:

$$(\mathrm{III}) \ldots\ldots \qquad \mathrm{cn}\,(u_1+u_2+\ldots+u_m)=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1^{m-1}s_1 & c_1^{m-3}s_1 & \ldots & c_1 s_1 & c_1^{m-2}\Delta_1 & c_1^{m-4}\Delta_1 & \ldots & \Delta_1 \\ c_2^{m-1}s_2 & c_2^{m-3}s_2 & \ldots & c_2 s_2 & c_2^{m-2}\Delta_2 & c_2^{m-4}\Delta_2 & \ldots & \Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_m^{m-1}s_m & c_m^{m-3}s_m & \ldots & c_m s_m & c_m^{m-2}\Delta_m & c_m^{m-4}\Delta_m & \ldots & \Delta_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1^{m-2}s_1 & c_1^{m-4}s_1 & \ldots & s_1 & c_1^{m-1}\Delta_1 & c_1^{m-3}\Delta_1 & \ldots & c_1\Delta_1 \\ c_2^{m-2}s_2 & c_2^{m-4}s_2 & \ldots & s_2 & c_2^{m-1}\Delta_2 & c_2^{m-3}\Delta_2 & \ldots & c_2\Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_m^{m-2}s_m & c_m^{m-4}s_m & \ldots & s_m & c_m^{m-1}\Delta_m & c_m^{m-3}\Delta_m & \ldots & c_m\Delta_m \end{vmatrix}},$$

Per m *dispari*:

$$(\mathrm{IV}) \ldots\ldots \qquad \mathrm{cn}\,(u_1+u_2+\ldots+u_m)=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1^{m} & c_1^{m-2} & \ldots & c_1 & c_1^{m-3}s_1\Delta_1 & c_1^{m-5}s_1\Delta_1 & \ldots & s_1\Delta_1 \\ c_2^{m} & c_2^{m-2} & \ldots & c_2 & c_2^{m-3}s_2\Delta_2 & c_2^{m-5}s_2\Delta_2 & \ldots & s_2\Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_m^{m} & c_m^{m-2} & \ldots & c_m & c_m^{m-3}s_m\Delta_m & c_m^{m-5}s_m\Delta_m & \ldots & s_m\Delta_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1^{m-1} & c_1^{m-3} & \ldots & 1 & c_1^{m-2}s_1\Delta_1 & c_1^{m-4}s_1\Delta_1 & \ldots & c_1 s_1\Delta_1 \\ c_2^{m-1} & c_2^{m-3} & \ldots & 1 & c_2^{m-2}s_2\Delta_2 & c_2^{m-4}s_2\Delta_2 & \ldots & c_2 s_2\Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_m^{m-1} & c_m^{m-3} & \ldots & 1 & c_m^{m-2}s_m\Delta_m & c_m^{m-4}s_m\Delta_m & \ldots & c_m s_m\Delta_m \end{vmatrix}}.$$

§ 3.

Se infine facciamo nella (5) $z_i = \Delta_i$, operando precisamente come nel caso del coseno, troviamo pel delta amplitudine:

Per *m pari*:

$$(\mathrm{V}) \ldots\ldots \qquad \mathrm{dn}\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_m) =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \Delta_1^{m-1} s_1 & \Delta_1^{m-3} s_1 & \ldots & \Delta_1 s_1 & \Delta_1^{m-2} c_1 & \Delta_1^{m-4} c_1 & \ldots & c_1 \\ \Delta_2^{m-1} s_2 & \Delta_2^{m-3} s_2 & \ldots & \Delta_2 s_2 & \Delta_2^{m-2} c_2 & \Delta_2^{m-4} c_2 & \ldots & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Delta_m^{m-1} s_m & \Delta_m^{m-3} s_m & \ldots & \Delta_m s_m & \Delta_m^{m-2} c_m & \Delta_m^{m-4} c_m & \ldots & c_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta_1^{m-2} s_1 & \Delta_1^{m-4} s_1 & \ldots & s_1 & \Delta_1^{m-1} c_1 & \Delta_1^{m-3} c_1 & \ldots & \Delta_1 c_1 \\ \Delta_2^{m-2} s_2 & \Delta_2^{m-4} s_2 & \ldots & s_2 & \Delta_2^{m-1} c_2 & \Delta_2^{m-3} c_2 & \ldots & \Delta_2 c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Delta_m^{m-2} s_m & \Delta_m^{m-4} s_m & \ldots & s_m & \Delta_m^{m-1} c_m & \Delta_m^{m-3} c_m & \ldots & \Delta_m c_m \end{vmatrix}}.$$

Per *m dispari*:

$$(\mathrm{VI}) \ldots\ldots \qquad \mathrm{dn}\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_m) =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \Delta_1^{m} & \Delta_1^{m-2} & \ldots & \Delta_1 & \Delta_1^{m-3} s_1 c_1 & \Delta_1^{m-5} s_1 c_1 & \ldots & s_1 c_1 \\ \Delta_2^{m} & \Delta_2^{m-2} & \ldots & \Delta_2 & \Delta_2^{m-3} s_2 c_2 & \Delta_2^{m-5} s_2 c_2 & \ldots & s_2 c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Delta_m^{m} & \Delta_m^{m-2} & \ldots & \Delta_m & \Delta_m^{m-3} s_m c_m & \Delta_m^{m-5} s_m c_m & \ldots & s_m c_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta_1^{m-1} & \Delta_1^{m-3} & \ldots & 1 & \Delta_1^{m-2} s_1 c_1 & \Delta_1^{m-4} s_1 c_1 & \ldots & \Delta_1 s_1 c_1 \\ \Delta_2^{m-1} & \Delta_2^{m-3} & \ldots & 1 & \Delta_2^{m-2} s_2 c_2 & \Delta_2^{m-4} s_2 c_2 & \ldots & \Delta_2 s_2 c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Delta_m^{m-1} & \Delta_m^{m-3} & \ldots & 1 & \Delta_m^{m-2} s_m c_m & \Delta_m^{m-4} s_m c_m & \ldots & \Delta_m s_m c_m \end{vmatrix}}.$$

§ 4.

Della tangente amplitudine non si dànno per solito le equazioni di addizione, poichè per essa il problema si può sempre risolvere colle formole relative al seno ed al coseno. Tuttavia non mi pare inopportuno l'esporre qui un metodo che ci permette di ricavare rapidamente dall'espressione del seno amplit. quella della tang. amplit. della somma di più argomenti in funzione delle tang. amplit. degli argomenti singoli. Basterà all'uopo un'ovvia trasformazione immaginaria, ricordando che (posto $i = \sqrt{-1}$):

$$\operatorname{sn}(iu) = i \operatorname{tn}(u, k'), \quad \operatorname{cn}(iu) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}, \quad \operatorname{dn}(iu) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')},$$

k' essendo il modulo complementare.

Cambiando nella formola (I) u in iu, avremo:

$$i \operatorname{tn}(u_1 + u_2 + \dots + u_m, k') =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} t_1^m & t_1^{m-2} & \dots & 1 & t_1^{m-3}\frac{\Delta_1}{c_1^2} & t_1^{m-5}\frac{\Delta_1}{c_1^2} & \dots & t_1\frac{\Delta_1}{c_1^2} \\ t_2^m & t_2^{m-2} & \dots & 1 & t_2^{m-3}\frac{\Delta_2}{c_2^2} & t_2^{m-5}\frac{\Delta_2}{c_2^2} & \dots & t_2\frac{\Delta_2}{c_2^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_m^m & t_m^{m-2} & \dots & 1 & t_m^{m-3}\frac{\Delta_m}{c_m^2} & t_m^{m-5}\frac{\Delta_m}{c_m^2} & \dots & t_m\frac{\Delta_m}{c_m^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1^{m-1} & t_1^{m-3} & \dots & t_1 & t_1^{m-2}\frac{\Delta_1}{c_1^2} & t_1^{m-4}\frac{\Delta_1}{c_1^2} & \dots & \frac{\Delta_1}{c_1^2} \\ t_2^{m-1} & t_2^{m-3} & \dots & t_2 & t_2^{m-2}\frac{\Delta_2}{c_2^2} & t_2^{m-4}\frac{\Delta_2}{c_2^2} & \dots & \frac{\Delta_2}{c_2^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_m^{m-1} & t_m^{m-3} & \dots & t_m & t_m^{m-2}\frac{\Delta_m}{c_m^2} & t_m^{m-4}\frac{\Delta_m}{c_m^2} & \dots & \frac{\Delta_m}{c_m^2} \end{vmatrix}} \pmod{k'}.$$

Nel determinante numeratore aggiungiamo alla $\left(\frac{m}{2}+1\right)^{ma}$ colonna la $\left(\frac{m}{2}\right)^{ma}$, alla $\left(\frac{m}{2}\right)^{ma}$ la $\left(\frac{m}{2}-1\right)^{ma}$. e così via, e nel denominatore facciamo la stessa operazione cominciando dalla colonna $\left(\frac{m}{2}\right)^{ma}$. Con ciò gli elementi r^{mi} delle colonne operate acquisteranno il fattore $1+t_r^2$, ossia $\frac{1}{c_r^2}$; quindi, moltiplicando sopra e sotto per $c_1^2\, c_2^2 \dots c_m^2$, e tralasciando di tener conto del modulo che è il medesimo nei due membri, avremo

$$
(\mathrm{VII}) \dots\dots \quad \operatorname{tn}(u_1+u_2+\dots+u_m) =
$$

$$
\frac{\begin{vmatrix}
t_1^{m-2}s_1^2 & t_1^{m-2} & \dots & 1 & t_1^{m-3}\Delta_1 & t_1^{m-5}\Delta_1 & \dots & t_1\Delta_1 \\
t_2^{m-2}s_2^2 & t_2^{m-2} & \dots & 1 & t_2^{m-3}\Delta_2 & t_2^{m-5}\Delta_2 & \dots & t_2\Delta_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
t_m^{m-2}s_m^2 & t_m^{m-2} & \dots & 1 & t_m^{m-3}\Delta_m & t_m^{m-5}\Delta_m & \dots & t_m\Delta_m
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
t_1^{m-3}s_1^2 & t_1^{m-3} & \dots & t_1 & t_1^{m-2}\Delta_1 & t_1^{m-4}\Delta_1 & \dots\dots & \Delta_1 \\
t_2^{m-3}s_2^2 & t_2^{m-3} & \dots & t_2 & t_2^{m-2}\Delta_2 & t_2^{m-4}\Delta_2 & \dots\dots & \Delta_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
t_m^{m-3}s_m^2 & t_m^{m-3} & \dots & t_m & t_m^{m-2}\Delta_m & t_m^{m-4}\Delta_m & \dots\dots & \Delta_m
\end{vmatrix}},
$$

dove m è supposto pari. La formola per m dispari si ricava in modo eguale dalla (II) od anche direttamente dall'ultima annullando uno degli argomenti.

Colla trasformazione immaginaria possiamo pure dall'espressione del seno ottenere quella del delta sotto un'altra forma. Infatti, se nell'equazione (I) assumiamo immaginarî i primi $m-1$ argomenti e l'm^{mo} uguale a K (integrale completo di 1ª specie), abbiamo:

$$
\operatorname{sn}(iu_1+iu_2+\dots+iu_{m-1}+K)
$$

$$
=\frac{\operatorname{cn}(iu_1+iu_2+\dots+iu_{m-1})}{\operatorname{dn}(iu_1+iu_2+\dots+iu_{m-1})}=\frac{1}{\operatorname{dn}(u_1+u_2+\dots+u_{m-1},k')}.
$$

Eseguendo questa trasformazione, viene:

$$\frac{1}{\operatorname{dn}(u_1+u_2+\ldots+u_{m-1})}=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} i^m t_1^m & i^{m-2} t_1^{m-2} & \ldots & 1 & i^{m-3} t_1^{m-3}\frac{\Delta_1}{c_1^2} & \ldots & i t_1 \frac{\Delta_1}{c_1^2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ i^m t_{m-1}^m & i^{m-2} t_{m-1}^{m-2} & \ldots & 1 & i^{m-3} t_{m-1}^{m-3}\frac{\Delta_{m-1}}{c^2_{m-1}} & \ldots & i t_{m-1} \frac{\Delta_{m-1}}{c^2_{m-1}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i^{m-1} t_1^{m-1} & i^{m-3} t_1^{m-3} & \ldots & i t_1 & i^{m-2} t_1^{m-2}\frac{\Delta_1}{c_1^2} & \ldots & \frac{\Delta_1}{c_1^2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ i^{m-1} t_{m-1}^{m-1} & i^{m-3} t_{m-1}^{m-3} & \ldots & i t_{m-1} & i^{m-2} t_{m-1}^{m-2}\frac{\Delta_{m-1}}{c^2_{m-1}} & \ldots & \frac{\Delta_{m-1}}{c^2_{m-1}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}}$$

Sottraendo nel numeratore dalla $\left(\frac{m}{2}+1\right)^{ma}$ colonna la $\left(\frac{m}{2}\right)^{ma}$, dalla $\left(\frac{m}{2}\right)^{ma}$ la $\left(\frac{m}{2}-1\right)^{ma}$, ecc. ed operando istessamente nel denominatore a partire dalla colonna $\left(\frac{m}{2}\right)^{ma}$, i due determinanti diventano riducibili all'ordine $m-1$. E si trova facilmente

$$\operatorname{dn}(u_1+u_2+\ldots+u_{m-1})=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} t_1^{m-3} & t_1^{m-5} & \ldots & t_1 & t_1^{m-2}\Delta_1 & t_1^{m-4}\Delta_1 & \ldots & \Delta_1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ t_{m-1}^{m-3} & t_{m-1}^{m-5} & \ldots & t_{m-1} & t_{m-1}^{m-2}\Delta_{m-1} & t_{m-1}^{m-4}\Delta_{m-1} & \ldots & \Delta_{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1^{m-2} & t_1^{m-4} & \ldots & 1 & t_1^{m-3}\Delta_1 & t_1^{m-5}\Delta_1 & \ldots & t_1\Delta_1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ t_{m-1}^{m-2} & t_{m-1}^{m-4} & \ldots & 1 & t_{m-1}^{m-3}\Delta_{m-1} & t_{m-1}^{m-5}\Delta_{m-1} & \ldots & t_{m-1}\Delta_{m-1} \end{vmatrix}}.$$

Dalla qual formola, che ci dà il Δ amplitudine della somma di più argomenti in funzione delle tangenti amplitudini dei singoli argomenti, possiamo ricavare un'altra forma notabile rimpiazzando quelle tangenti con seni e coseni, col moltiplicare sopra e sotto per $c_1^{m-2} c_2^{m-2} \dots c_{m-1}^{m-2}$.

Osserviamo da ultimo che, dividendo la (I) pella (VII), si potrebbe pervenire ad una nuova espressione del cos am; sicchè resta provato che dalle sole formole del sen am conseguono quelle relative a tutte le altre funzioni.

§ 5.

È noto che il modulo k delle funzioni ellittiche è compreso ordinariamente tra 0 e ± 1. Al primo di questi valori limiti corrispondono le funzioni circolari, al secondo le funzioni di GUDERMANN. Non è forse privo d'interesse il vedere come si trasformino le formole precedenti in questi due casi particolari.

Assumendo $k = 0$, locchè implica

$$s_i = \operatorname{sen} u_i, \quad c_i = \cos u_i, \quad \Delta_i = 1 ,$$

le equazioni (I), (II), (III).... dànno delle formole generali di trigonometria, probabilmente nuove. Per economia di spazio, mi limito a trascriverne una, p. es. quella che dà il seno della somma di m archi, m essendo dispari. Scrivendo sen_i e $\cos_i$ in luogo di $\operatorname{sen} u_i$ e $\cos u_i$, risulta

$$\operatorname{sen}(u_1 + u_2 + \dots + u_m) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \times$$

$$\frac{\begin{array}{cccccccc} \operatorname{sen}_1^m & \operatorname{sen}_1^{m-2} & . & \operatorname{sen}_1 & \operatorname{sen}_1^{m-3}\cos_1 & \operatorname{sen}_1^{m-5}\cos_1 & . & \cos_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \operatorname{sen}_m^m & \operatorname{sen}_m^{m-2} & . & \operatorname{sen}_m & \operatorname{sen}_m^{m-3}\cos_m & \operatorname{sen}_m^{m-5}\cos_m & . & \cos_m \end{array}}{\begin{array}{cccccccc} \operatorname{sen}_1^{m-1} & \operatorname{sen}_1^{m-3} & . & 1 & \operatorname{sen}_1^{m-2}\cos_1 & \operatorname{sen}_1^{m-4}\cos_1 & . & \operatorname{sen}_1 \cos_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \operatorname{sen}_m^{m-1} & \operatorname{sen}_m^{m-3} & . & 1 & \operatorname{sen}_m^{m-2}\cos_m & \operatorname{sen}_m^{m-4}\cos_m & . & \operatorname{sen}_m \cos_m \end{array}}$$

Ponendo invece $k^2 = 1$, viene

$$s_i = \operatorname{sen}\operatorname{gud} u_i\,, \qquad c_i = \Delta_i = \cos\operatorname{gud} u_i\,,$$

e le formole (I), (II), (III), ... si cangiano nelle analoghe pel seno e pel coseno gudermanniano.

Termino notando che, se nelle formole ottenute si attribuisce a tutti gli argomenti un egual valore u, si è condotti al teorema della moltiplicazione. Però, mentre i primi membri diventano $\operatorname{sn}(mu)$, $\operatorname{cn}(mu)$, ... i secondi membri, pell'annullarsi dei due determinanti, pigliano la forma $\frac{0}{0}$. Quest'indeterminazione non è che apparente, e in una prossima Nota mostrerò in qual modo la si possa rimuovere.

L'Accademico Segretario
A. SOBRERO.

SOMMARIO

Classe di Scienze fisiche e matematiche.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

dagli Accademici Segretari delle due Classi

VOL. XVII, DISP. 6ª (*Maggio* 1882)

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO

ERMANNO LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Maggio 1882.

TORINO, STAMPERIA REALE
di G. B. Paravia e C.

CLASSE

DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza del 14 Maggio 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. SENATORE E. RICOTTI

Il Socio Cav. Alessandro Dorna, condeputato coi Soci Cavalieri Giuseppe Bruno e Enrico D'Ovidio ad esaminare un lavoro del sig. Prof. N. Jadanza intitolato: « *Alcuni problemi di Geodesia* », legge la seguente

RELAZIONE.

Colle serie di Legendre relative alla geodetica che unisce due punti dell'ellissoide di rotazione, Puissant, il quale le ha anche trovate in altro modo, trattò nel suo sesto libro tutte le questioni di Geodesia superiore o sferoidica, relative alle posizioni geografiche ed alle loro minime distanze. Nè si è ancora cessato di elaborare quelle importantissime ricerche, le quali richiedono dei calcoli assai prolissi; mentre occorre, in pratica, per la moltiplicità delle operazioni, che si riduca al minimo il calcolo numerico, con delle formole meno complicate, ed ancora abbastanza precise. Il lavoro del Prof. Jadanza, intorno al quale dobbiamo riferire, ha principalmente questo scopo; come quello, dal medesimo lodato, del danese C. G. Andrae, le cui formole sono state adottate dal nostro Ufficio Topografico.

Poste le serie di Legendre che determinino, a meno dei termini di 5° ordine, le variazioni di latitudine, di longitudine e di azimut fra i due punti A e B, in funzione della latitudine di A, della sua minima distanza da B e dell'azimuto di B sull'orizzonte di A, il Prof. Jadanza ne deduce direttamente delle formole che riuniscono il rigore richiesto ad una grande facilità nel calcolo numerico. Egli considera: 1° la geodetica meridiana; 2° la geodetica perpendicolare al meridiano in A; 3° una geodetica qualunque. Nella ricerca generale applica la proprietà dimostrata da Legendre, che quando una rete geodetica è su di una superficie poco differente da una sfera, come la terra, si può adoperare il teorema di quell'Illustre, relativo ai triangoli sferici piccolissimi; e mostra con un esempio la precisione e la brevità delle formole che trova.

L'Autore, in ultimo, studia « l'influenza delle altezze sugli angoli azimutali ». Fa il caso in cui da un punto M, collocato ad una data altezza sulla superficie del mare, siasi misurato l'azimut di un punto di quella superficie. Fa il caso inverso. E, pel caso generale, addiziona le due piccole correzioni ottenute nei precedenti; mostrando che, in generale, la prima correzione è trascurabile.

Una questione preliminare di Geometria, risoluta per trovare la prima correzione indica l'ipotesi dell'Autore che in M, il piano orizzontale in cui si misura l'azimut, sia tangente ad una superficie concentrica ed omotetica a quella delle acque tranquille dei mari. In verità Puissant dice, che due punti sono di livello fra loro, allorchè appartengono ad una tal superficie. Ma il piano tangente alla medesima è perpendicolare al filo a piombo, ossia è effettivamente il piano in cui si misura l'azimuto?

I Commissarî sono unanimi nel proporre, che del lavoro sul quale riferiscono venga data lettura alla Classe, reputandolo meritevole dell'inserzione nelle Memorie.

12 Maggio 1882.

A. Dorna, *Relatore.*
Bruno.
D'Ovidio.

Il Socio Comm. Alfonso Cossa presenta e legge il seguente lavoro del sig. Ingegnere Ettore Mattirolo, Assistente al Laboratorio chimico della Stazione agraria di Torino,

SULLA

TORMALINA NERA

NELLO SCISTO CLORITICO DI MONASTERO DI LANZO

(Valle del Tesso).

Sulla cresta dei monti che separano la valle del Tesso da quella della Stura di Lanzo, fra le due aride sommità dette Rocco del Casello e Punta delle Mene, a due ore circa da Lanzo, trovasi sul versante del Tesso nella direzione di Coassolo un forte pendio a pascolo, sull'alto del quale corre un tratto contestato di confine fra i comuni di Mezzenile e di Monastero Torinese.

Appunto in questo pascolo, e principalmente sotto il sentiero che lo attraversa, riscontrasi uno scisto cloritico che tiene impigliati in quantità, relativamente grande, grossi cristalli di una tormalina nera (1).

Di tale roccia, che finora non fu da alcuno analizzata, ho intrapreso nel Laboratorio del Prof. Alfonso Cossa uno studio, per quanto ho potuto, completo, e del quale indico in questa nota i principali risultati.

M'astengo per ora dal parlare della relazione di posizione ch'essa può avere colla serpentina e col micascisto passante allo gneiss, che si trovano nella stessa località, giacchè la rapida escursione da me compiuta sul luogo, non mi permise di stabilirla in modo sicuro.

(1) A questo minerale in alcune collezioni si attribuisce la località di Ala, o più specificatamente di Becco di Corbassera; ma queste sono indicazioni erronee date dagli incettatori di minerali della valle di Ala, i quali non amano dare precise nozioni sui veri giacimenti.

La roccia è scistosa, a strati sottili, e le superficie di scistosità sono ondulate e mai piane. Ha colore verdiccio; si lascia rigare dall'unghia ed il suo componente essenziale, la clorite, si presenta in minutissime squamette.

Talora però la scistosità è meno evidente, la durezza è maggiore ed appare cosparsa di macchiette bianchiccie dovute ad epidoto, assumendo un aspetto granulare.

Esaminando al microscopio sezioni sottili di questa roccia, ho potuto osservare ch'essa risulta in gran parte costituita da minutissime laminette di clorite, di un colore verde sbiadito, dotate di una polarizzazione cromatica molto debole. In alcuni punti delle sezioni esaminate coi nicol incrociati si osserva distintamente il fenomeno della croce nera che si muove apparentemente in una direzione contraria a quella del nicol; fenomeno che appare frequente più che in altri minerali in alcuni aggregati di clorite. Si trovano associate alla clorite delle laminette incolore di talco, ed in maggior copia, dei cristalli irregolarmente disposti di epidoto egualmente incolori e riconoscibili ai loro contorni salienti, alla polarizzazione cromatica viva con tinte prevalentemente gialle e rosse ed alle direzioni di sfaldatura.

In quantità molto minore di quella dei minerali suaccennati, osservansi, nelle sezioni sottili della roccia, cristallini di sfeno di colore bianco grigiastro e qualche microlito di apatite e di rutilo. Negli esemplari da me osservati manca affatto la magnetite; e così pure non potei scorgere alcuna traccia di tormalina in cristalli microscopici.

La determinazione della densità e le ricerche chimiche furono eseguite su campioni di roccia che presentavano la massima omogeneità, cioè su quei campioni in cui riesce più evidente la struttura scistosa, e non già su quelli nei quali appare anche macroscopicamente la presenza dell'epidoto.

Le esperienze fatte col picnometro su minuti frammenti della roccia diedero per il valore della densità i seguenti risultati.

I.	Con	grammi	7,191	di roccia	2,98 a	$+$	15°	c.
II.	»	»	5,546	»	2,98 a	»	»	»

Al cannello la roccia si fonde ribollendo formando una massa scoriacea di color nero. Riscaldata in tubo chiuso emette acqua; è decomposta parzialmente dagli acidi e contiene: silice, allumina, ossido ferroso, magnesia, calce, acqua, traccie di anidride titanica, di anidride fosforica, di ossido di manganese e di ossido cromico.

La determinazione quantitativa diede i risultati seguenti:

Anidride silicica	33,45
» titanica	traccie
» fosforica	traccie
Allumina	22,51
Ossido cromico	traccie
» ferroso	13,61
» di manganese	traccie
Magnesia	13,52
Calce	8,54
Perdita per calcinazione	7,01
	98,64 .

La tormalina impigliata nello scisto cloritico di Monastero si presenta in prismi esagonali a faccie ordinariamente striate nel senso dell'asse del prisma. Essa si trova per lo più in cristalli isolati, non terminati e solamente in alcuni pochi campioni di scisto cloritico da me osservati trovansi aggruppamenti di cristalli.

Questi cristalli raggiungono qualche volta la lunghezza di circa sette centimetri; e nei più grossi il diametro è di circa 15 millimetri.

Essi trovansi nella roccia disposti in tutte direzioni, ma assecondano principalmente le superficie di scistosità.

Questi cristalli fanno testimonianza dei movimenti e pressioni che la roccia ebbe a subire dopo la loro formazione, giacchè si presentano contorti e rotti, e sovente la disposizione dei pezzi appartenenti ad uno stesso individuo cristallino indica che la roccia ebbe a subire uno stiramento. La rottura dei cristalli è sempre in una direzione normale all'asse del prisma, ed in uno stesso cristallo si verificano sovente quattro o più spaccature, per modo che questo riesce diviso in diversi segmenti. Gl' interstizi fra questi segmenti sono riempiti dalla pasta della roccia.

Esaminando i cristalli separati dalla roccia, si osserva che essi non hanno una struttura omogenea, ma che presentano, disposte irregolarmente nella loro massa, delle piccole cavità riempite dalla pasta cloritica della roccia, accompagnata frequentemente da una materia bianca che, isolata ed analizzata qualitativamente, riconobbi essere epidoto. Macroscopicamente si osservano talvolta nella sostanza inclusa nei cristalli dei piccoli bacilli di tormalina che sembrano essersi staccati dalla massa del cristallo, in seguito a quelle azioni che ne hanno prodotto la rottura e lo scontorcimento.

Il colore della tormalina è nero lucente, però, osservando questo minerale in sezioni molto sottili parallele all'asse ottico, esso appare verde bruno. Le sezioni normali all'asse invece riescono in generale colorate in bleu verdastro; ma qualche volta presentano due colorazioni ben distinte disposte in zone concentriche, delle quali la più esterna è colorata in bruno e l'interna in bleu verdastro. Questa struttura zonare può forse accennare a qualche piccola differenza nella composizione chimica del cristallo verificatasi nei diversi stadî della sua formazione, oppure, ma meno verosimilmente, dipende dall'azione esercitata dalla pasta della roccia sulla porzione più esterna del cristallo.

L'esame microscopico delle sezioni sottili della tormalina mette in evidenza un gran numero di inclusioni ed un fortissimo dicroismo.

Le inclusioni si possono dividere in due categorie ben distinte; alla prima appartengono quelle che derivano dall'intrusione della pasta della roccia nella massa del minerale e queste sono formate da laminette di clorite e da granuli cristallini di epidoto. Le altre sono costituite da microliti di tormalina e di rutilo, da qualche piccolissimo cristallo di quarzo e sono distribuite irregolarmente nella massa della tormalina anche in quelle plaghe in cui non è penetrata la pasta componente lo scisto cloritico.

Rispetto al dicroismo osservato nelle sezioni parallele all'asse ottico, notai che il raggio straordinario appare colorato in bianco roseo, mentre il raggio ordinario è colorato in bruno. Le sezioni normali all'asse ottico presentano ben distinta la struttura zonare che, come venne già accennato, si può osservare anche senza bisogno d'ingrandimento. La zona periferica è colorata in verde bruno, mentre la zona centrale ha un colore bleu. La linea di demarcazione di queste due zone riesce ben netta e regolare, cioè la zona periferica ha un eguale spessore in tutta la sezione del cristallo, il che rende molto più probabile la prima delle due ipotesi sopra indicate.

La determinazione della densità col picnometro diede questi risultati:

I.	Con grammi	9,313	3,062	a + 13° c.
II.	» »	9,815	3,068	» » »
		Media . . .	3,065 .	

Nel tubo chiuso si ha sviluppo di vapor acqueo.

Il minerale riscaldato con una fiamma a gas, alimentata da una corrente d'aria compressa, si fonde in una scoria vetrosa verde bruna.

Anche finamente polverizzato il minerale non è attaccato dall'acido solforico ed assai incompletamente dall'acido fluoridrico. Però dopo la fusione si scompone assai facilmente con quest'ultimo acido.

Sul filo di platino con bisolfato potassico e fluoruro di calcio, la polvere della roccia colora la fiamma in verde intenso. Esaminando questa fiamma così colorata collo spettroscopio, risultò che il coloramento verde è dovuto all'anidride borica.

Le ricerche sulla composizione chimica furono eseguite sopra frammenti di minerale separati colla maggior diligenza possibile dalle materie estranee.

Il ferro vi esiste allo stato di ossido ferroso.

Il fluorio fu dosato direttamente allo stato di fluoruro di calcio nella roccia polverizzata e fusa con carbonato sodico-potassico.

L'acido borico fu determinato per differenza.

Tre determinazioni della perdita per calcinazione diedero i seguenti risultati:

3,40 3,48 3,50 .

Ecco pertanto i risultati delle determinazioni quantitative.

							Media
Silice.	36,75	36,76	—	—	—	—	36,76
Anidride borica (per differ.).	—	—	—	—	—	—	9,09
» titanica .	traccie	traccie	—	—	—	—	traccie
» fosforica .	traccie	traccie	—	—	—	—	traccie
Allumina . . .	28,38	28,73	—	—	—	—	28,55
Ossido di cromo .	traccie	traccie	—	—	—	—	traccie
» ferroso . . .	7,90	8,24	—	—	—	—	8,07
» di manganese	traccie	traccie	—	—	—	—	traccie
Magnesia . . .	8,08	8,16	—	—	—	—	8,12
Calce	3,81	3,83	—	—	—	—	3,82
Soda	—	—	2,09	2,14	—	—	2,12
Potassa . . .	—	—	0,14	0,18	—	—	0,16
Fluorio	—	—	—	—	0,35	0,34	0,35
Acqua	3,00	2,93	—	—	—	—	2,96
							100,00

Stando alla classificazione proposta dal Rammelsberg nel pregevolissimo suo lavoro sulle tormaline (1), la tormalina di Monastero di Lanzo va collocata nel gruppo delle tormaline ferro magnesiache.

Laboratorio chimico della R. Stazione Agraria di Torino — Maggio 1882.

---

(1) *Handbuch der Mineralchemie*, 2e Auflage, pag. 538.

Il Socio Comm. Alfonso Cossa presenta ancora e legge, a nome dell'Autore, sig. Ingegnere G. Spezia, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, i seguenti

CENNI GEOGNOSTICI E MINERALOGICI

SUL

GNEISS DI BEURA.

Nelle adiacenze di Beura, in valle d'Ossola, sono coltivate molte cave di pietra, le quali forniscono un buonissimo materiale da costruzione per lastre da balconi, terrazzi, scalini, ecc., conosciuto nel commercio del luogo e della Lombardia col nome di *beola* o *bevola*.

L'epoca precisa in cui cominciò l'esportazione dei prodotti di dette cave, che sono le più antiche dell'Ossola, è ignota. Certamente già nel 1513 somministravano grossi pezzi lavorati, come ne fa prova un coperchio di sepolcro esistente un tempo nel convento dei Francescani in Domodossola ed ora posto esternamente ad una cappella in Pallanzeno. Esso misura metri 2,10 di altezza e 1,54 di larghezza; ha in basso rilievo le figure in grandezza naturale di due monaci, e attorno, con la data suindicata, l'inscrizione di chi fece costrurre il sepolcro, e fra le due figure le parole incise: **HVNC LAPIDEM BEVRA DEDIT.** Inoltre il nome di *bevola* corrisponde a quello dato al paese nel secolo XV, come risulta da una lettera del Duca di Milano scritta nel 1487 (1) al comandante la torre di Bevola sollecitandone la riattazione a scopo difensivo.

Ma l'esportazione deve risalire a parer mio al fine del secolo XIII, epoca in cui fu reso navigabile il Naviglio Grande

(1) E. Bianchetti, *Ossola inferiore*, vol. II, pag. 431.

sino a Milano, perchè rimaneva aperta fra Beura e la capitale Lombarda la via diretta di comunicazione, usata anche oggidì, di successiva navigazione sulle acque del Toce, che, scorrendo vicino alle cave, affluisce al Lago Maggiore, dal quale esce il Ticino le cui acque alimentano il Naviglio.

E sebbene anticamente dovessero i grossi massi erratici somministrare, dove si trovavano, un materiale da costruzione, tuttavia non è improbabile che i romani abbiano esportato la pietra da Beura, stante che l'antica via romana passava per detta località. E un accurato studio litologico delle lapidi romane del Novarese, unito a quello storico sulle vie di comunicazioni in quei tempi, potrebbe dare nozioni a tale riguardo.

L'importanza commerciale delle cave di Beura è abbastanza indicata dal seguente specchio di produzione per l'anno 1874 desunto dalla statistica dell'Ingegnere Laporte (1):

Lastre per pavimenti . . .	37610	metri quadrati
» per balconi e terrazzi da 1,50 a 6 metri di lunghezza . . .	6354	id.
Scalini e cornici da tetto .	45441	metri lineari.

L'accennato materiale è scelto fra alcune varietà di gneiss le quali appartengono, secondo la carta del Gerlach (2), al gneiss recente del Monte Rosa; e la maggior parte delle cave sono situate fra Beura ed una zona di roccie anfiboliche posta a due chilometri al sud del paese, la quale divide il gneiss del Monte Rosa da quello detto, dallo stesso autore, di Valsesia.

Non essendomi noto per osservazioni bibliografiche una descrizione dei minerali che si rinvengono in tale gneiss, credetti interessante farne studio per la mineralogia ossolana della quale mi occupo. Alla lista dei minerali sinora da me trovati, faccio precedere alcuni cenni geognostici parendomi dovere di mineralogo il farlo quando si descrivono minerali di una data loca-

---

(1) *Tableau des carrières de dalles granitiques en exploitation dans la vallée de l'Ossola Inférieure et Supérieure*, 1874.

(2) *Die Penninischen Alpen.*

lità, tanto più che non credo esistano studii litologici sulle roccie di Beura. E sebbene l'area a cui si riferiscono i seguenti cenni geognostici possa essere trascurabile per l'occhio di un geologo, tuttavia non li credo inutili, recando sovente le minute indagini del mineralogo notevoli vantaggi alle grandi deduzioni geologiche.

Le varie qualità di gneiss hanno in generale una stratificazione concordante, ma sono fra loro ben distinte sia per la struttura, la quale vi è rappresentata in tutti i modi possibili, sia per l'oscillazione dei componenti mineralogici; e quest'ultima è tale riguardo all'ortosio, che la roccia in qualche luogo è litologicamente un vero micaschisto.

A meglio stabilire la situazione in posto delle varietà di gneiss aggiungo uno schizzo, fig. 1, rilevato dalla carta dello Stato Maggiore, ove indicai con tratti le direzioni ed inclinazioni osservate degli strati, dalle quali risulta che la direzione media è di N. 63° E. e l'inclinazione oscilla fra 66° S. e 85° N. a causa di una ripiegatura degli strati al N° 6.

La roccia gneissica nelle dette posizioni ha i seguenti caratteri generali:

N° 1. Sottile strato di roccia a struttura micromera, ricchissimo in mica biotite, talchè i granuli di ortosio e quarzo sono solo visibili nelle sezioni trasversali alla stratificazione; il colore è oscuro e la schistosità facilissima. Si osservano numerose vene di quarzo colorite in giallo da parziale decomposizione di pirite abbondante in esso;

N° 2. Struttura micromera come la precedente, ma il colore della roccia più chiaro per predominanza di ortosio e presenza di mica bianca biasse. In sezioni parallele alla direzione e ortogonali alla stratificazione presenta una struttura listata di linee bianche feldispatico-quarzose, interrotte ad intervalli irregolari da noduli lenticolari feldispatici.

La mica uniasse bruna, che conserva anche in lamine esilissime il suo colore, per essere molto ferrifera si fonde più facilmente della bianca. Sottoponendo una lastrella di roccia a varie temperature coll'uso prima di un cannello ad aria fredda e poi a quello ad aria riscaldata di Fletscher, ed osservandola al microscopio, dopo successivi raffreddamenti, si possono distinguere le progressive fusioni prima della mica bruna poi della bianca e dell'ortosio.

A proposito della fusibilità mi pare che a paragone della temperatura si possa introdurre in mineralogia oltre il cannello ordinario anche quello ad aria calda, perchè è naturale che con quest'ultimo si potrà ancora osservare il carattere di relativa fusibilità di quei minerali che sono infusibili al cannello ordinario. A cagion d'esempio, un frammento di staurotide fusibile in smalto nero col cannello ad aria calda si distinguerà facilmente dallo zircone infusibile; o un frammento di topazzo il quale imbianca e fonde sui margini, si distinguerà dal quarzo perfettamente inalterabile; parimente l'imbiancarsi ed il fondere in smalto bianco della cianite potrà essere p. es. un carattere distintivo quando abbia struttura fibrosa, dalla fibrolite che fonde più difficilmente e quasi senza imbiancarsi.

La varietà di gneiss del N° 2 alterna in piccoli strati con altra a noduli e rari cristalli di ortosio.

Al N° 3 continua l'alternazione precedente, solo che i noduli lasciano posto a maggior numero di cristalli.

Al N° 4 il gneiss ha struttura porfiroide con grossi cristalli a spigoli smussati di ortosio, e senza alcuna relazione colla stratificazione, la quale è tuttavia palese nella massa, e dal modo che questa li involge è improbabile che detti cristalli siansi formati *in loco*, massime che l'aspetto complessivo presenta come una specie di struttura fluidale.

I cristalli sono talvolta della lunghezza di 7 centimetri, presentano per rottura un piano di geminazione la quale, dalla direzione delle sfaldature visibili nei due individui, deve essere secondo la legge di Carlsbad. Essi contengono inclusioni di quarzo e mica.

Vi sono anche cristalli i quali non ritengono più forma esterna, talchè le loro sezioni invece di dare dei poligoni si presentano come noduli, mostrando però sempre il loro stato cristallino per mezzo di perfetta sfaldatura e della linea di geminazione, come alla fig. 2 metà del vero. Sembra che siano cristalli i quali abbiano perduto la loro forma per cause posteriori alla loro origine, come sarebbe di un cristallo immerso in una massa, liquida per fusione o naturalmente, la quale potesse agire come solvente sulla massa di esso. Il cristallo consumandosi all'esterno perde naturalmente la forma poliedrica lasciandosi sempre riconoscere come residuo di cristallo dalla struttura del pezzo che rimane.

In seguito il gneiss passa alla struttura granitica micromera e contiene dei frammenti di gneiss analogo al N° 2, ed irregolare ne è la stratificazione.

Al N° 5 vi ha una cava di gneiss a struttura micromera listata, ricco in feldispato con mica muscovite predominante sulla biotite, e traccie di clorite. Le geminazioni polisintetiche caratteristiche dei feldispati triclini sono rare.

Tale gneiss contiene inoltre in cristalli sia macroscopici che microscopici una quantità ragguardevole di tormalina nera; essa si trova sparsa nella massa, e si presenta in maggior copia generalmente nelle venature bianche del gneiss, le quali sono quasi prive di mica.

I cristalli sono generalmente rotti, e orientati coll'asse di simmetria parallelo alla direzione degli strati. Sono poi ricchissimi in inclusioni di quarzo. La presenza di tale minerale è così costante in detto gneiss, che è la varietà più estesa di Beura, da ritenersi come un accessorio caratteristico, ed io credo si possa chiamare gneiss tormalinifero; e tale denominazione mi sembra star bene per il parallelismo col granito tormalinifero.

Nei trattati di litologia in generale non si parla di un gneiss tormalinifero, bensì di una roccia affine al gneiss, cioè della granulite tormalinifera. Ma il gneiss di Beura accennato non può ritenersi per una granulite, roccia che incontrai in altre località ossolane, per la mancanza del granato componente caratteristico di detta roccia. Neppure si può ritenerlo per una granulite tormalinifera, dove cioè il granato è sostituito dalla tormalina per la troppa quantità di mica, minerale non necessario alla granulite, e nella quale, se si presenta, è in piccola quantità, o se diventa abbondante avviene, secondo Zirkel (1), perdendo granato, passando così al gneiss. E se in tal modo in una granulite la mica esclude il granato, non si può certamente ammettere, volendo rispettare le classificazioni, una granulite tormalinifera molto ricca in mica, perchè la tormalina rappresenterebbe il granato in detta roccia.

La quantità di mica poi nel gneiss di Beura ricco in tormalina non varia da quello analogo in struttura che ne è privo, e solo differisce, secondo le mie osservazioni, nella qualità; cioè che nel gneiss tormalinifero la mica muscovite prevale di molto

(1) *Lehrbuch der Petrographie*, II, pag. 440.

sulla biotite. Questo fatto sarebbe anche favorevole per mantenere un gneiss tormalinifero corrispondente al granito tormalinifero nel quale pare caratteristica secondo Lasaulx (1) la mica muscovite invece della biotite (2).

Il gneiss a tormalina di Beura non potrebbe manco ascriversi alla leptinite di Fouqué e Levy perchè in detta roccia, secondo essi, l'associazione della tormalina colla mica bianca è rarissima (3); nè alla granulite tormalinifera degli stessi autori, perchè anzi tutto vi osta la stratificazione, e poi la mica nera non è la predominante.

Un gneiss tormalinifero fu indicato senza descrizioni particolari dal Baretti (4) nella località di Tresenta e Moncorvé presso il Gran Paradiso.

Oltre la tormalina si osservano rare inclusioni di microscopiche lamelle di ematite o forse menaceanite esistendo questa anche macroscopica nelle druse. E fra la mica bianca osservai pure una sezione quadratica con tinta rosea così leggera da distinguersi difficilmente dall'incolora, e che fra i prismi incrociati si dimostra isotropa; ed essendovi nella stessa mica altre sezioni prismatiche che sono anisotrope, ritengo che si tratti di zircone e spero di poterlo constatare in altro lavoro più speciale sulla presente varietà di gneiss.

Nel detto gneiss tormalinifero della cava al N° 5 esistono due strati, uno di metri 1,50 e l'altro 0,50 di spessore interposti concordemente alla stratificazione di un micaschisto bianco argentino o leggermente rossastro e ricco di minuti cristalli di tormalina gialla topazio. La mica con lo stauroscopio Brezina si presenta distintamente biasse.

Ciò che è interessante in tale giacimento intercalato nel gneiss si è la mancanza di passaggio al micaschisto per diminuzione di feldispato, e non esservi nel micaschisto assolutamente traccia di tormalina nera che abbonda nel gneiss incassante privo a sua volta assolutamente di tormalina gialla.

Di simile micaschisto bianco argentino ne vidi detriti in altre località ossolane, ma non potei ancora studiarli in posto onde

(1) *Elemente der Petrographie*, pag. 328.

(2) *Mikroskopische Physiographie;* I, pag. 235.

(3) *Minéralogie micrographique des roches éruptives françaises*, pag. 174.

(4) *Studi geologici sul gruppo del Gran Paradiso*, pag. 19.

conoscere se siano tutti tormaliniferi o se incassati in roccie a tormaline, perchè io credo che vi debba essere uno stretto rapporto di genesi trattandosi di interstrati, e che il diverso colore del minerale accessorio, sebbene nettamente delimitato, debba dipendere da quelle piccole differenze di costituzione chimica corrispondente alle stesse differenze dei minerali componenti la roccia, come deve essere necessariamente nel nostro caso fra la mica biasse del gneiss e quella del micaschisto rimanendo il quarzo identico.

Al N° 6 dove gli strati diventano verticali il gneiss è porfiroide a grossi cristalli come al N° 4.

Al N° 7 la roccia ritorna all'inclinazione primitiva ed è costituita da un gneiss porfiroide a noduli ed a cristalli di feldispato, e da altro a struttura micromera, il quale talvolta involge delle lenti del primo, e la linea limite fra i due gneiss è precisa, non havvi cioè alcun passaggio di struttura.

Dopo il N° 7 si presenta un sottile strato di gneiss micromero, povero in feldispato e ricco di mica specialmente bruna uniasse; essa contiene della staurotide in minuti cristalli generalmente semplici, e la cui orientazione, rispetto alla stratificazione, è irregolare; vi si osservano pure, benchè più raramente, piccole lamine di cianite.

Detto gneiss micaceo passa insensibilmente ad altro di eguale struttura ma più ricco di feldispato e la tormalina nera prende in maggior copia il posto della staurotide.

Al N° 8 è la località dove esistono le più estese e numerose cave situate le une sopra le altre sul pendio del monte.

Le varietà di gneiss che si lavorano si riducono a due principali, intendo litologicamente parlando, ossia escludendo quelle che i lavoratori nello stesso gneiss trovano riguardo alla diversa resistenza del materiale prodotta naturalmente sia da struttura, sia da piccola oscillazione dei componenti principali. Come si osserva nel granito di Monte Orfano il quale, sebbene ritenuto eguale in tutta la sua massa dai litologi, presenta tuttavia in alcune cave tale diversità di resistenza da influire sulla scelta del materiale a seconda lo scopo cui deve servire.

Le due varietà indicate sono il gneiss tormalinifero come al N° 5, nel quale la tormalina nera, oltre l'essere sparsa nella roccia, si trova anche come costituente nuclei centrali di noduli feldispatici quarzosi.

E l'altro gneiss è della varietà glandolare, sebbene tale struttura sia visibile solo in sezioni ortogonali al piano di stratificazione ed alla direzione, perchè parallelamente si scorge, che ciò che sembra una ghianda od un nodulo, non sono che sezioni di lunghi regoli feldispatici orientati parallelamente fra loro ed alla direzione dello strato.

Al N° 9 esiste un'altra cava di gneiss tormalinifero analogo a quello dei Ni. 5 e 8. In esso vi sono intercalati due straticelli di micaschisto poverissimo in quarzo ed assai ricco in cristalli di tormalina verdastra. La mica è in massima parte uniasse, ma di colore più chiaro che la biotite del gneiss.

Il gneiss di Beura sia il micromero che il glandolare possiede una schistosità tale da essere facile avere lastroni di 6 metri di lunghezza e 1,50 e anche più di larghezza. Ed un esempio sorprendente di fissilità si osserva al Museo di Domodossola dove havvi una lastra di metri 2,80 di lunghezza e 0,25 di larghezza, e collo spessore uniforme di soli cinque millimetri. E si noti che tale pezzo faceva parte di lastra più ampia rottasi nel trasporto da Beura. Naturalmente tale esempio serve solo per dimostrare il parallelismo della schistosità perchè, riguardo alla facilità di fendersi, vi è a mio credere ancora la disaggregazione prodotta dagli agenti atmosferici. Infatti, tutte le roccie schistose sono alla superficie non solo di più facile fissilità, ma trovansi sovente già in posto ridotte in sottili lastre separate.

Nell'area contenente le varietà di gneiss indicate sono frequenti i piani di rottura, pei quali credo opportuno di adottare secondo Daubrée (1) il nome generale di litoclase e quelli particolari di diaclasi e paraclasi per le rotture senza o con spostamento.

Il piano delle litoclasi è generalmente quasi normale alla direzione degli strati, vi sono sia diaclasi che paraclasi, ma in quest'ultime lo spostamento è minimo. Le litoclasi a larga apertura sono rare e sempre riempite da quarzo, mentre quelle a pareti vicine sono anche riempite da clorite.

Talvolta poi le linee delle litoclasi, massime al loro termine, sono appena riconoscibili da laterali infiltrazioni ocracee. La fig. 3ª *a* rappresenta al naturale il fine di una litoclasi la quale, ove non è più visibile, rimane ancora indicata da un'infiltrazione laterale ocracea eguale in intensità di colore, ma che diminuisce in esten-

---

(1) *Études synthétiques de géologie expérimentale*, pag. 351.

sione laterale. Altre volte invece, come nella fig. 3ª *b*, le infiltrazioni laterali sono parallele alla linea di rottura ed il colore diminuisce gradatamente d'intensità.

Dette infiltrazioni sono sovente il solo indizio di una litoclasi.

I minerali che sinora io rinvenni nelle indicate varietà di gneiss, eccettuando quelli che hanno uno sviluppo solo microscopico, tenendo conto anche degli accessori nelle roccie e dei componenti principali quando formino druse cristalline, sono per ordine di frequenza i seguenti: *Quarzo*, *Tormalina*, *Clorite*, *Ortosio*, *Mica*, *Staurotide*, *Cianite*, *Laumontite*, *Calcite*, *Fluorite*, *Menaccanite*, *Limonite*, *Pirite*, *Pirrotina*, *Marcassite*, *Stilbite*, *Titanite*, *Apatite*, *Anatasio*.

Detto ordine di frequenza è solo relativo agli esemplari da me trovati.

Il *Quarzo* è il minerale più abbondante. Le forme cristalline osservate, oltre le comuni del prisma e dei due romboedri sono: i romboedri diretti: $13\,\bar{2}\,\bar{2}$, $7\,\bar{2}\,\bar{2}$, $3\,\bar{1}\,\bar{1}$ e gli inversi $8\,8\,\bar{7}$, $4\,4\,\bar{5}$ i quali due trovai ben distinti solo in qualche cristallo, ma la curvatura che osservasi comunemente fra le faccie del prisma e del romboedro $2\,2\,\bar{1}$ deve certamente attribuirsi alle faccie dei detti romboedri inversi, le quali sono generalmente coperte da strie parallele alle caratteristiche del prisma.

Oltre ai detti romboedri vi sono a seconda dei cristalli le emiedrie di destra o di sinistra dello scalenoedro $4\,\bar{1}\,\bar{2}$ generalmente molto sviluppato come nella fig. 4 e nella fig. 5 dove la faccia 100 già poco estesa per uno sviluppo con pseudosimmetria rombica del cristallo, è quasi scomparsa per l'estensione della faccia $4\,\bar{2}\,\bar{1}$. Non tanto comuni sono le emiedrie dell'isosceloedro $4\,1\,\bar{2}$. In qualche cristallo osservai pure piccolissime faccie striate che ritengo dell'emiscalenoedro $5\,2\,\bar{4}$.

Nel gneiss di Beura non si trovarono sinora giganteschi cristalli come in altre località alpine, e la grandezza maggiore da me veduta fu di 30 centimetri di diametro.

Riguardo al colore sono o ialini o affumicati, questi sembrano i più comuni.

Non osservai differenze morfologiche per sviluppo o numero di forme cristalline fra le due varietà di colore.

Vi sono cristalli levogiri e destrogiri, e talvolta trovansi entrambi nello stesso aggruppamento cristallino di una drusa, la qual cosa credo interessante per la genesi.

I cristalli di quarzo sono ricchissimi d'inclusioni. Anzitutto vi sono bolle microscopiche con liquido, delle quali si può osservare la mobilità muovendone il cristallo. Per tale osservazione si presta bene la costruzione del goniometro-microscopico di Hirschwald perchè centrata una bolla di una lamina di quarzo si può, contemporaneamente all'osservazione microscopica, imprimere un movimento sufficiente a spostare il liquido. Esaminando al microscopio, coll'apparato elettrico di Vogelsang, l'influenza della temperatura sopra dette bolle trovai che a 120° esse si spostano ma non scompaiono. Ponendo invece la lamina di quarzo semplicemente sopra un sostegno di filo di platino, onde evitare le perdite di calore che si hanno coll'apparato, le bolle si possono far scomparire e ricomparire per successiva diminuzione di temperatura, e se si prolunga il riscaldamento, il quarzo si screpola con fessure che hanno per origine i vani delle inclusioni. Il liquido deve ritenersi acqua.

Non ho trovato esemplari di quarzo con bolle semoventi.

Ho notato anche inclusioni di quarzo in microscopici cristalli sparsi nell'interno sopra piani paralleli a due faccie adiacenti del prisma e di quelle d'un romboedro. Sembra che essi dopo di essersi depositati sopra dette faccie del cristallo siano stati compresi da altro involucro di quarzo. Ciò dimostrerebbe la cristallogenesi ad intervalli successivi.

Comuni poi sono le inclusioni di tormalina nera, e la fig. 6 rappresenta in grandezza naturale un frammento di cristallo di quarzo affumicato nel quale vi sono una quantità di prismi aciculari di detto silicato. Talvolta hanno comunicazioni all'esterno, altre volte sono frammenti di varia lunghezza e diametro sparsi senz'ordine nella massa quarzosa. Mi fu dato anche di osservare dei vani lasciati dai cristalli di tormalina, ed in uno di questi, che però comunica all'esterno trovai un complesso di cilindri concentrici, forse concrezioni, di colore bianchiccio, e la fig. 7 ne indica la disposizione con ingrandimento di 60 diametri.

La clorite è pure sovente inchiusa nel quarzo, disposta talvolta a strati esili e paralleli a due o tutto al più tre faccie adiacenti del prisma e dei romboedri, e ciò dipendentemente dalla posizione che aveva nella drusa il cristallo quando vi si depositava sopra la clorite fra i depositi ad intervallo di quarzo. Lamelle di menaccanite sono pure non rare come inclusioni.

La *Tormalina nera* si presenta sempre in cristalli aciculari del maggior diametro, da me osservato, di 4 millimetri, e della lunghezza anche di 10 centimetri. Per essere detti cristalli generalmente penetranti coi loro capi nelle pareti delle druse o dei cristalli di quarzo riesce difficile averli colle faccie terminali, ed i pochi da me esaminati presentano, oltre il prisma e l'emiprisma esagono, le cui faccie sono sempre striate, solo i romboedri $11\bar{1}$, 100 predominanti, e poi poco sviluppate quelle del 110 e del pinakoide. I cristalli aciculari costituiscono sovente delle masse a struttura fibrosa, ed altre volte si trovano nelle druse degli aggruppamenti cristallini così capillari da sembrare, se si fa astrazione del colore, all'asbesto.

Il colore è apparentemente nero; ma il vero colore visibile, nelle lamine sottili e nei cristalli di un diametro inferiore a mezzo millimetro, è bruno rossastro.

Detto colore non è sempre uniforme, e talvolta si vedono nei cristalli capillari due colori; parimente, osservando il dicroismo in lamine tagliate parallelamente all'asse ottico, mi accadde di vedere due colorazioni disposte come nella fig. 8, dove le macchie oscure danno i colori dicroici roseo-bruno ed azzurro, ed il resto del cristallo rossastro e bruno. La differenza di colore si scorge sovente anche nelle sezioni perpendicolari all'asse ottico, e la fig. 9 ne rappresenta una nella quale si vede un cristallo interno di colore non uniforme, ma con venature verdi celesti in campo verde oliva oscuro, ed un inviluppo di colore verde oliva chiaro con venature più oscure. Nell'interno si osservano inoltre tre macchie poligonali di colore ocraceo e coi lati orientati colla simmetria del cristallo.

La *Tormalina gialla* non si rinvenne mai in druse, e non si presenta con struttura così aciculare come la nera, ma in piccoli cristalli colle faccie terminali del romboedro 100; e le faccie degli emiprismi più distinte e meno striate che nella varietà nera.

Il colore è giallo topazio nel micaschisto a mica bianca, e giallo verdognolo in quello a mica oscura.

Dette tormaline gialle sono fusibili in scoria bianca, epperò debbono appartenere al gruppo detto da Rammelsberg (1) delle magnesiache non ferrifere.

---

(1) *Handbuch der Mineralchemie*, pag. 539.

Riguardo ad inclusioni, le tormaline nere delle druse è rarissimo che ne abbiano, e le impastate nelle roccie invece ne contengono assai di quarzo, come alla fig. 10, in tale quarzo poi talvolta vi sono bolle ed anche di quelle semoventi. Le gialle sono ricche in bolle, e in quarzo contenenti anche bolle, inoltre si osservano microliti con forma prismatica rettangolare e osservando le varie sezioni alla luce polarizzata, sembrano trimetrici.

La *Clorite* si trova sia compatta che scagliosa, ma in ambi i casi al microscopio si presenta cristallizzata. La compatta è costituita da un intreccio di tanti prismi esagonali vermiformi, come nella fig. 11, con un diametro in generale non maggiore di 40 micromillimetri.

Per detta struttura, frequentissima in molti cloriti, potrebbe anche avere il nome di Elminto se la clorite, così chiamata da Otto Volger, non fosse rombica, o secondo Naumann monoclina, come varietà di Clinocloro, ossia non fosse biasse, mentre la nostra si sfalda in lamine esagonali, le quali si comportano alle osservazioni stauroscopiche assolutamente come uniassi.

Anche la clorite in polvere o scagliosa è costituita da lamine esagonali uniassi.

Il colore verde è più chiaro nella scagliosa che nella compatta, differenza solo causata dalla struttura perchè la seconda, ridotta in polvere, ha lo stesso colore che la prima.

Nella compatta si osservano anche venuzze giallastre, le quali corrispondono a superficie di separazione di colore ocraceo per parziale alterazione dell'ossido di ferro del minerale.

L'*Ortosio*, considerato come minerale accessorio, è rappresentato dalla varietà adularia ed in cristalli semplici con le forme 110 e 101 se in druse con molta clorite, se invece non havvi clorite, allora, oltre le dette forme, vi sono anche le 010, 001 e 111. Accenno tale differenza perchè credo possa essere utile per lo studio dell' influenza che può avere riguardo la ricchezza di forme cristalline, la presenza di altre sostanze durante la cristallogenesi.

Quando vi è associata la clorite, sovente questa si trova rinchiusa per un certo tratto dalla superficie, come si vede nella fig. 12. In detta adularia si trovano frequenti inclusioni di bolle non solo, ma io ne osservai anche semoventi con movimento però più lento che in quelle del quarzo. La presenza di bolle semoventi nell'adularia non pare comune, perchè, a cagion d'esempio, le adularie di Pfitschthale e del S. Gottardo, secondo Rosenbusch (1) ne sarebbero prive.

La *Mica*, sia la bianca biasse che la bruna uniasse si trova in piccole lamine sparse nella clorite, e si distingue da quella della roccia dall'essere le lamine affatto piane, prive cioè di quelle ondulazioni caratteristiche in generale della mica considerata come componente principale del gneiss.

La *Staurotide* e la *Cianite* sparse nella roccia, si presentano la prima in minuti cristalli rombici, la seconda in piccole lamine.

La *Laumontite* si rinviene nelle litoclasi del gneiss in piccoli cristalli con le forme 110 e $\bar{1}01$. e di colore bianco. Essa si altera presto sgretolandosi, se non si ha l'avvertenza di conservarla in un'atmosfera umida od anche nell'acqua.

La *Calcite*, frequente nelle druse, è cristallizzata abitualmente in lamine esagonali, le quali se sottili sono trasparenti; ma il più delle volte sono opache per una sovrapposizione di lamelle parallela alla faccia del pinakoide. Ed in alcuni esemplari, come nella fig. 13, si riconosce facilmente che dopo essersi formato un piccolo cristallo prismatico, avvenne un successivo deposito in lamine esagonali con eguale orientazione, così si osserva il nucleo trasparente ed il resto della lamina opaco. È una struttura analoga a quella osservata nello stesso minerale da Scharff nella valle di Madaran.

Altra forma della calcite di Beura sono cristalli, come nella fig. 14, con le faccie di un romboedro inverso tutte rugose e con splendore sericeo prodotto dai riflessi di microscopiche sporgenze lamellari perpendicolari all'asse di simmetria, mentre le faccie del pinakoide sono piane ed in direzione ad esse perpendicolari: il cristallo è di una perfetta trasparenza.

Osservai pure piccoli scalenoedri molto alterati, e associati con clorite.

Nella calcite non sono rare le inclusioni di tormalina, clorite, fluorite, pirite; pure frequenti sono le inclusioni liquide specialmente nelle lamine costituite da sovrapposizione parallela al pinakoide. I vani di tali inclusioni (fig. 14 *bis*) sono compresi fra dette sovrapposizioni e perciò molto allargati secondo il piano della lamina, e limitati ai fianchi generalmente da linee rette,

---

(1) Op. c., vol. 1, pag. 335.

e talvolta hanno la forma di triangoli equilateri. La bolla non si presenta quindi come una sfera, ma bensì come un cilindro di altezza minima in confronto al diametro delle basi formate dalle due pareti parallele del vano. A 100° la bolla si sposta, ma con poca variazione di volume. A temperatura più alta essa scompare, ed arrestando il calore prima che ne avvenga la rottura del vano, ricompare o la bolla o si formano repentinamente varie bollicine, le quali si riuniscono poi a formare la bolla primitiva. Credo che nell'inclusione vi sia acqua con bicarbonato calcico e acido carbonico.

La *Fluorite* è in ottaedri con traccie del cubo e del rombododecaedro. In alcuni cristalli le faccie sono rugose per corrosione, ed hanno profonde solcature secondo le linee di sfaldatura. La fig. 15 ne dà un saggio in grandezza naturale di un esemplare rinvenuto senz'altri minerali in una litoclasi.

Il colore è generalmente roseo pallido talvolta verdognolo.

Anche la fluorite contiene inclusioni liquide a bolla mobile per riscaldamento.

La *Menaccanite* è in lamine esilissime e le reazioni avute per il titanio mi autorizzano a ritenere il minerale per menaccanite piuttostochè per ematite titanifera.

La *Pirite*, in piccoli cristalli di cubo ottaedri, si trova nelle litoclasi cloritose, e quarzose.

La *Pirrotina* non rinvenni mai in cristalli come nei giacimenti metalliferi ossolani di Miggiandone, Pestarena e Val Toppa, ma solo in noduli nel quarzo.

La *Limonite* si presenta pseudomorfa dei solfuri di ferro.

Alla *Marcassite* ascrivo una polvere nerastra che trovai in piccole druse di quarzo con pirrotina, e che al microscopio si presenta costituita da minuti aggregati dendritici, e al saggio chimico dà la reazione della pirite.

La *Titanite*, la *Stilbite*, l'*Anatasio* e l'*Apatite* sono i minerali che nelle mie ricerche sono i più rari, avendone di essi un solo esemplare.

La *Titanite* è in piccoli aggregati cristallini sopra quarzo e di colore roseo pallido.

La *Stilbite* è in un aggregato radiato di cristalli associato in una drusa con adularia e quarzo.

D'*Anatasio* sono tre cristalli del diametro di $^1/_4$ di millimetro, e al microscopio presentano le nitide faccie del pinakoide e le striate dell'ottaedro 111.

Per *Apatite* ritengo alcuni cristalli aciculari di $^1/_3$ di millimetro di diametro sparsi fra l'adularia e che al microscopio, in direzione dello allungamento del cristallo, presentano un pinakoide, e disposte in simmetrie esagonali le faccie corrispondenti a 3 piramidi.

Il Barelli (1), alla località Beura, fa menzione solo di gneiss a grana fina con mica bianca argentina e dei minerali, *attinoto verde oscuro*, e *clorite polverolenta*. Il Bombicci (2) nel suo itinerario mineralogico a Beura indica l'*attinoto verde oscuro*, *clorite terrosa* e *mica argentina nel gneiss*. Infine il Jervis (3) a Beura cita i minerali *quarzo*, *anfibolo verde oscuro* e *tormalina nera*. Niuno però descrive i minerali citati.

Risulta quindi che i tre autori stabiliscono la presenza dello attinoto che io non rinvenni. Ora, siccome è probabile che i due ultimi, riguardo tale minerale, abbiano riprodotto, sebbene non lo dicano, la citazione del Barelli, e ciò sarebbe consono colla data delle pubblicazioni del Barelli nel 1835, del Bombicci nel 1862 e del Jervis nel 1873, così mi basta di fare l'osservazione sul Barelli.

L'esemplare che servì al Barelli esiste al Museo della Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, e dalla mia osservazione risulta bensì di anfibolo e magnetite, ma non posso credere che provenga dal gneiss di Beura, perchè ha tutto il carattere di un esemplare proveniente dalla zona anfibolica, la quale, comparendo a giorno più in alto delle cave di gneiss e sullo stesso versante, non è fuori caso che di essa si trovino detriti insieme a quelli del sottostante gneiss.

Ho fatto quest'osservazione perchè essendo l'attinoto menzionato da tre autori, parrebbe dovesse essere assai comune, e quindi abbastanza strano che fosse sfuggito alle mie ricerche, le quali dànno un numero di minerali maggiore di quello indicato dai detti scrittori.

Gli accennati minerali di Beura si rinvengono o nelle druse o sulle pareti delle litoclasi, o disseminati nella massa gneissica.

Le druse poi sono o sparse nella roccia generalmente attorniate da matrice quarzosa, ovvero si trovano nel quarzo che riempie le grandi litoclasi.

---

(1) *Cenni di statistica mineralogica degli Stati Sardi*, pag. 452.

(2) *Corso di mineralogia*.

(3) *I tesori sotterranei dell'Italia*, parte I, pag. 176.

Talvolta poi, come osservai nella cava Cirla, vi sono druse che formano come centro di un sistema raggiante di piccole diaclasi riempite di quarzo.

I minerali che si trovano solamente disseminati nella roccia sono le tormaline gialle, la staurotide e la cianite.

La tormalina nera, oltre all'essere sparsa nel gneiss come accessorio caratteristico, è pure abbondante nelle druse, specialmente associata al quarzo, di preferenza se affumicato, e alla clorite.

I cristalli di quarzo sono sempre presenti, sia nelle druse della roccia, che in quelle dei riempimenti quarzosi delle litoclasi; alle prime è più comune la varietà affumicata, alle seconde la jalina.

La clorite, sebbene frequente nelle druse della roccia, è però più abbondante in quelle delle litoclasi, delle quali, se piccole, costituisce non di rado tutto il riempimento. La compatta si trova in ambo le giaciture, la scagliosa solo nelle druse.

Talvolta nelle vicinanze delle litoclasi cloritose la clorite si trova sparsa nella roccia in modo da formare quasi un gneiss cloritico, e sembra che sostituisca piuttosto la mica biotite che non la muscovite.

Talvolta le litoclasi presentano delle cavità per non avvenuto riempimento, e sovente alle pareti così libere sono attaccati dei cristalli isolati o di quarzo o di laumontite o di fluorite.

Quest'ultimo minerale, quando ha tale giacitura, si presenta in cristalli con faccie rugose per corrosione, come nella fig. 15, dove un cristallo di fluorite cementa un frammento di roccia alle pareti, ed in esso si ha pure un evidente esempio che la corrosione nei minerali sfaldabili debba agire più facilmente secondo le linee di sfaldatura. I cristalli di fluorite nelle druse hanno invece faccie liscie.

Una spiegazione di tale diverso stato fisico delle facce può aversi considerando che i cristalli delle druse sono più preservati generalmente dalle infiltrazioni di quelle acque minerali, le quali possono sciogliere il fluoruro di calcio, ciò che non avviene nelle litoclasi non riempite. Ed una prova che la solcatura delle facce sia prodotta da soluzioni che s'infiltrano si è, che le pareti delle litoclasi non presentano una superficie ordinaria di rottura, ma vi si osserva che le lamine di mica e i granuli di quarzo sono sporgenti per i vani lasciativi dall'ortosio, che più facilmente fu decomposto.

Del resto, il minuto esame delle litoclasi ancora aperte, e dei minerali che vi si trovano, dimostra ad evidenza come esse costituiscano le arterie e le vene necessarie a quella continua circolazione acquea sotterranea che aiuta il moto della materia nelle sue continue evoluzioni.

Riguardo all'epoca relativa della genesi dei minerali, dirò solo di quelli che potei osservare in varie associazioni, e mi pare di poter conchiudere che la tormalina nera è il più antico minerale. S'intende delle druse, perchè quella che fa parte della roccia doveva essere ancora più antica, cioè contemporanea ai componenti del gneiss, come ne sono prova le numerose inclusioni di quarzo nella tormalina delle roccie, mentre quella delle druse ne è priva; che il quarzo si formò a varii intervalli, come pure la calcite, la fluorite e la clorite, e che la laumontite sia il più recente.

E la descrizione di un minerale, il quale rinchiude: Quarzo, Calcite, Tormalina nera, Fluorite, Clorite, Laumontite e Titanite può avvalorare le induzioni fatte in parziali osservazioni.

Ad un cristallo di quarzo affumicato sono attaccate grosse lamine parallele di calcite, le quali penetrano in parte nella massa quarzosa, sopra detta calcite, ed anche inchiusi fra le lamine vi son piccoli ottaedri di fluorite, e della clorite. Cristalli aciculari di Tormalina sono inchiusi nel quarzo in parte e attraversano la calcite, ed involgente uno di essi, vi ha un cristallo di laumontite orientato in modo che gli spigoli del prisma sono paralleli all'asse di simmetria della tormalina.

La Titanite giace con cristallini di adularia sul quarzo.

Dallo studio dei minerali nelle druse ho potuto conoscere come si possano constatare, anche indipendentemente dalle litoclasi, i movimenti cui va soggetta la crosta terrestre.

Nella clorite delle druse, massime scagliosa, non è raro trovarvi sepolti frammenti di minerali costituenti la drusa; e non è a credersi che ciò possa avere per causa scuotimenti artificiali, perchè sovente si rinvengono cristalli di quarzo staccati dalla matrice quarzosa della drusa, coperti di una patina di clorite fortemente aderente anche alla superficie di rottura del cristallo.

Di tale fatto ebbi già altra volta esempio in una cava di pietra sopra Dresio di Vogogna, dove avendo io da una cavità ripiena di clorite compatta toltone un pezzo, nel suddividerlo, vi trovai inchiuso un cristallo di quarzo colla clorite così aderente anche alla superficie di frattura da non potersi levare.

Altra prova di movimenti sono le inclusioni, frequentissime a Beura, nel quarzo, di tormalina nera in frammenti di varia grossezza e senza corrispondenza all'esterno.

In tali casi mi pare debba ammettersi che vi furono scosse le quali produssero la rottura di cristalli di tormalina preesistenti durante la formazione del cristallo di quarzo che li inchiude.

E per gli esemplari da me raccolti non si potrebbe ammettere la spiegazione data dal Bischof (1) per un fatto analogo osservato al S. Gottardo, perchè i frammenti di tormalina non appartengono allo stesso cristallo, ma bensì a varii di diverso diametro, nè tanto meno si può spiegare il fatto con la ingegnosa ipotesi data dal Volger (2) per dimostrare la presenza di cristalli di titanite sospesi nell'adularia.

A mio credere è fuori dubbio che l'inclusione dei frammenti siasi operata durante la cristallizzazione, e ritengo più facile di spiegare il fatto con tale ipotesi sostenuta dalle moderne ricerche microscopiche, che non ricorrendo ad una speculazione di pseudomorfosi; massime che nel nostro caso, se si dovesse anche trovare un possibile processo chimico di pseudomorfosi, rimarrebbe sempre per incognita la forma frammentaria dei cristalli inchiusi, dovendo la pseudomorfosi lasciare inalterato il carattere morfologico esterno.

L'ipotesi, che i frammenti di tormalina, che si trovano sospesi nei cristalli di quarzo, siano caduti nella soluzione dalla quale cristallizzava l'anidride silicica, può avere in favore la seguente osservazione.

Molti dei frammenti non sono perfettamente circondati dalla massa quarzosa, ma vi ha un leggero distacco visibile solo per luce riflessa e talvolta per gli anelli di Newton, e la larghezza e la forma di tale distacco varia, come nella fig. 16, dove sono rappresentati tre esempi presi dal vero con ingrandimento di 10 volte.

Ora detta circostanza può benissimo spiegarsi dal fatto che lasciando cadere minuti frammenti di una sostanza in un liquido di minore densità, essi trascinano sovente seco delle bolle d'aria, le quali difficilmente abbandonano il frammento, massime se il liquido è vischioso.

---

(1) *Lehrbuch der chemischen u. physikalischen Geologie*, II, pag. 553.

(2) *Studien zur Entwickelungsgeschichte der Mineralien*, pag. 160.

Se quindi dal liquido si solidifica una sostanza in modo quasi repentino come da soluzioni soprasature, non è improbabile che la compressione prodotta dalla contrazione ritenga aderente al frammento l'aria della bolla, togliendo però a questa la forma sferica permessale prima dal liquido in cui era, e darle quella forma casuale proveniente dall'irregolare azione delle forze contrattive, prodotta dalla presenza dello stesso frammento.

Escirei dalla cerchia di cenni monografici se io dovessi trattare la difficile questione delle origini delle inclusioni nel quarzo, massime che dopo il classico lavoro dello Söchting sulle varie ipotesi messe per spiegare le inclusioni nei minerali, non si ebbe sino ad oggi un positivo progresso che possa facilitare la soluzione di problemi così astrusi ed in pari tempo importanti di minerogenesi.

Un altro fatto che dimostra potersi trovare nelle druse gli effetti di scosse, è il seguente, che, sebbene non osservato a Beura, tuttavia credo opportuno il citarlo.

A Monte Orfano, nella cava di granito del signor Maulini, alcuni anni or sono, potei io stesso staccare dall'interno di una drusa, di circa 30 centimetri di larghezza e 50 di profondità, un conglomerato di frammenti di cristalli di ortosio cementati da calcite cristallizzata in grossi prismi.

Lo stabilire le cause di tali rotture non è certo cosa facile. Si possono attribuire alle litoclasi quando le druse sono attraversate da esse, ma per le altre che non lo sono, pare meglio il darne motivo alla pressione, la quale, deformando le druse, può naturalmente causare la rottura di cristalli preesistenti attaccati alle pareti. E che la pressione possa produrre tale effetto oltre essere provato dalle esperienze di Daubrée, il quale la ritiene anche come causa delle stesse litoclasi, è anche appoggiato dalla osservazione delle piccole screpolature riempite di quarzo, le quali irradiano per breve tratto da alcune druse della roccia, e che possono aversi per compressione di vani inchiusi in materia poco elastica.

Naturalmente in tale ordine di ipotesi bisogna ammettere che il riempimento quarzoso delle screpolature sia stato posteriore alla formazione dei cristalli interni di quarzo che subirono frattura, che cioè il deposito della anidride silicica siasi fatto in varie epoche; fatto del resto provato da altre osservazioni.

Altra ipotesi che, a parer mio, non è senza valore per spiegare le rotture di cristalli nelle druse, sarebbe quella fondata sulle rapide scosse che i terremoti possono trasmettere alle masse rocciose, specialmente quando scosse precedenti, producendo numerose litoclasi, abbiano interrotta la continuità di resistenza, ossia diminuita la superficie di elasticità che impedirebbe l'urto repentino.

Termino questi cenni col riferire un altro fatto di osservazione, che, sebbene trovasse posto parlando delle inclusioni dei minerali, tuttavia per la sua singolarità merita di essere citato a parte.

In un grosso cristallo di quarzo affumicato vi sono due vani la cui forma è rappresentata dalla fig. 17 ingrandita di 8 volte, e le cui pareti sembrano formate da una rete di cristalli capillari, ed all'estremità dei vani vi è un frammento di tormalina nera.

Daubrée (1), parlando di cavità con impronte cristalline nel quarzo, si esprime: « Les cavités avaient la forme de cube, mais » elles sont souvent déformées, comme si le quartz avait été » encore mou, lorsque les cristaux ont disparu ».

Io, per meglio descrivere il mio caso, potrei dire: la cavità sembra il vano che lascierebbe dietro a sè un corpo unito a bolla d'aria, il quale, trovandosi sospeso in una sostanza gelatinosa, subisse un repentino moto di translazione.

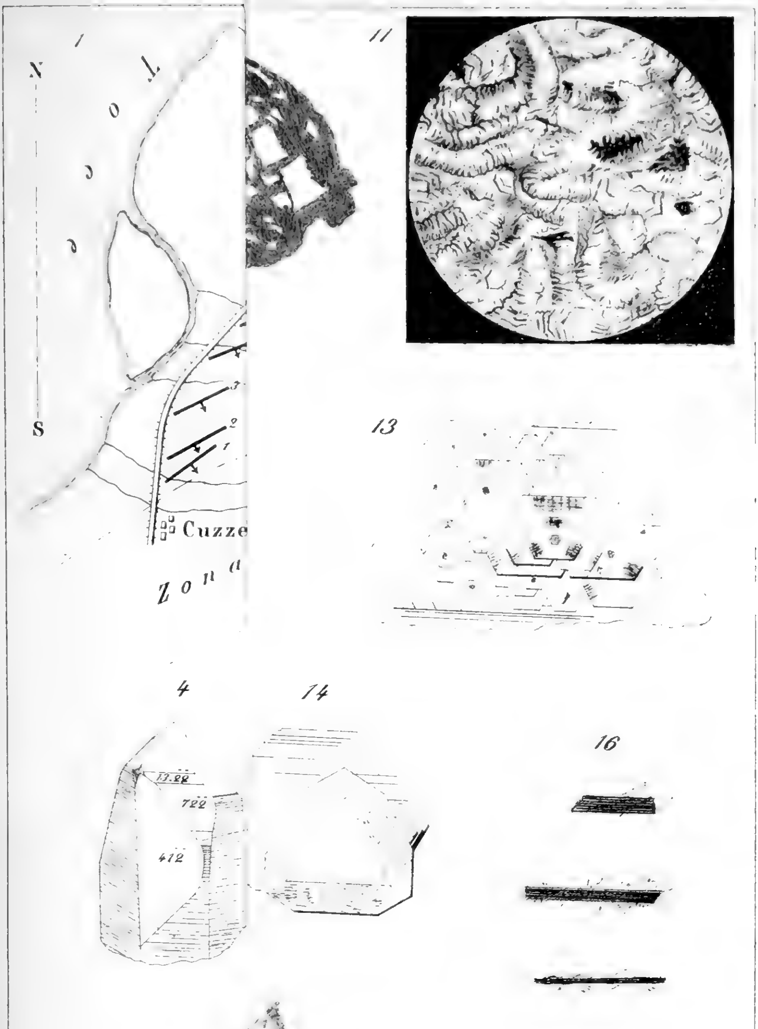
Sono quei fatti che talvolta si descrivono meglio con paragoni, i quali spiegherebbero facilmente la causa, se l'ipotesi che inchiudono non fosse troppo strana.

Dette inclusioni le osservai in un solo esemplare, ma debbo aggiungere che è anche l'unico cristallo da me trovato che presenti una superficie di rottura con successiva cementazione; inoltre noto che la direzione longitudinale delle cavità è quasi parallela alla detta superficie.

E. Naville, nella sua *Logica delle ipotesi*, ridusse a tre le operazioni del pensiero per la soluzione dei problemi scientifici: osservare, supporre, verificare. E nel presente caso, essendo la seconda troppo facile e la terza troppo difficile, io mi limitai alla prima.

---

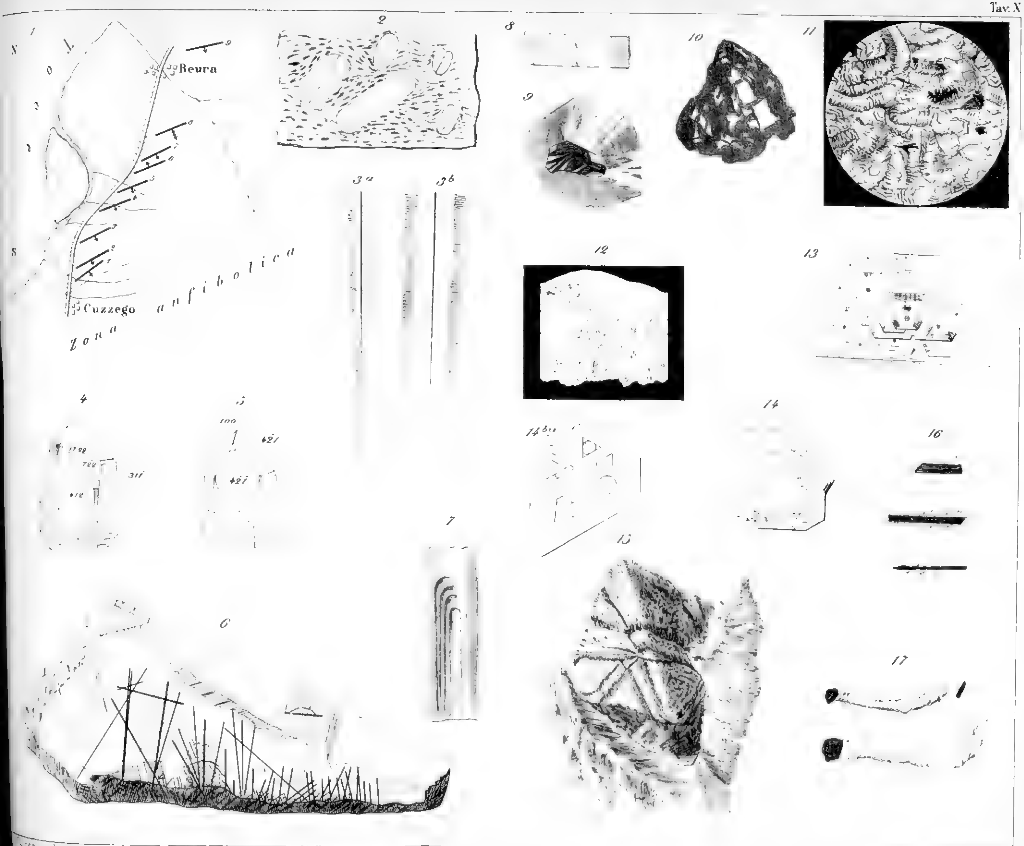
(1) *Ann. des Mines*, 5. 13, pag. 237.



G. Spezia disegnò

Torino Lit. F.lli Doyen

Tav. X


Beura
Cuzzego
Zona anfibolica
N
S
1
2
3a
3b
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
14bis
15
16
17

Il Socio Cav. Giuseppe Basso legge il seguente suo lavoro:

APPARATO REOMETRICO

A MASSIMA DEVIAZIONE.

Gli importanti progressi che nel campo dell'elettrologia si fecero in questi ultimi anni, ed in particolare l'invenzione delle macchine dinamoelettriche, rendono in molti casi economicamente utile la mutua trasformazione delle energie elettrica, meccanica, termica e chimica. Per conseguenza, la determinazione degli elementi che influiscono sulla produzione e sulla distribuzione della energia elettrica, e, fra le altre cose, la misura dell'intensità delle correnti elettriche, dànno luogo a problemi sperimentali la cui risoluzione viene ricercata, non più solamente nel laboratorio del fisico, ma eziandio nell'officina dell'industriale.

Di qui la necessità di cercare procedimenti applicabili allo studio delle correnti elettriche di notevole intensità, e dai quali si esiga non tanto somma precisione di misure, quanto la semplicità e la speditezza delle operazioni.

Per ciò che riguarda la valutazione dell'intensità delle correnti, parecchi nuovi apparati vennero proposti di recente; basterà citare gli elettrodinamometri di Werner Siemens e di Walter-N-Hill (*), il galvanometro a spina di pesce di Marcel Deprez (**) ed infine la bussola senza resistenza di Terquem e Damien (***).

Ora, a me non parve inutile cercare se, per la facile misura dell'intensità delle correnti elettriche alquanto poderose, non si

(*) *American Journal of sciences and arts*; 1° semestre 1880, vol. XIX.
(**) *Journal de Physique, théorique et appliquée*; luglio 1880, tom. IX.
(***) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; seduta 20 febbraio 1882.

potesse trarre partito da un fenomeno di elettrodinamica relativo alla massima deviazione di un solenoide sotto l'azione della corrente: fenomeno da me studiato sotto l'aspetto teorico in un recente lavoro (*). Perciò procurai innanzi tutto di immaginare e di attuare un apparato, nel quale fossero prossimamente verificate le condizioni teoriche del fatto a cui alludo. Dopo qualche tentativo mi attenni alla seguente disposizione sperimentale.

Da uno zoccolo MM (vedi fig. 1ª) orizzontale di legno si ergono, a guisa di colonnette, due vasetti cilindrici A, B, della altezza comune di 6 centimetri, del diametro interno di 4 millimetri circa, e distanti l'un dall'altro di mezzo metro. Ciascuno di essi contiene mercurio ed è in comunicazione metallica con un serrafilo vicino. È fissata sul piano dello zoccolo una bussola ordinaria L L, in cui l'ago ha la lunghezza di 7 centimetri e l'asse verticale, intorno a cui questo può girare, giace nel piano degli assi dei due vasetti A, B ed è equidistante dai medesimi. Il piano orizzontale in cui è mobile l'ago è di qualche millimetro al disopra del piano dello zoccolo e passa per i fori dei due serrafili. Lo strumento deve sempre essere orientato in maniera che il piano degli assi dei due vasetti e dell'asse di rotazione dell'ago, coincida col meridiano magnetico del luogo; a far che ciò sia in ogni caso, basta evidentemente ricorrere all'ago stesso. Un filo di rame *a b c d* del diametro di 3 mm. circa ha la forma e la disposizione indicata nella fig. 1ª; ciascuno dei suoi capi pesca nel mercurio di uno dei vasetti e la sua porzione orizzontale *b c* è sostenuta in due punti *p*, *q* da una solida forchetta d'ottone *p o q*, dalla quale però resta elettricamente isolata. Questa forchetta, nel suo punto *o* di mezzo, è rigidamente unita ad una dentiera verticale che, mediante un bottone *r*, si può far scorrere in senso verticale: così anche la parte orizzontale *b c* del conduttore di rame potrà muoversi parallelamente a se stessa abbassandosi od alzandosi, mentre i suoi capi stanno sempre immersi più o meno profondamente nel mercurio dei vasetti.

Il filo *b c* può in tal modo venir abbassato tanto, da sfiorare il vetro che serve di custodia alla bussola; in questa posizione esso si trova di pochi millimetri soltanto distante dall'ago. Ne

(*) *Sopra un caso particolare di equilibrio per un solenoide soggetto all'azione magnetica terrestre ed a quella d'una corrente elettrica;* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XVII.

può poi venir allontanato con movimento dolce e regolare fino all'altezza di 5 centimetri ed oltre.

Quando il conduttore mobile, mediante i serrafili ed i corrispondenti vasetti di mercurio, si trova inserito in un circuito elettrico, è chiaro che le piccole porzioni a e b, c e d di corrente verticale situate al disopra della porzione orizzontale bc esercitano sull'ago azioni che fra loro si elidono. Così ancora è insensibile l'azione esercitata dalle porzioni di filo esterne allo istrumento che vengono ad attaccarsi ai due serrafili; purchè però si abbia cura di tenerne i tratti più vicini distesi press'a poco nel piano orizzontale dell'ago. Infatti, ogni elemento di corrente giacente in questo piano agisce su ciascun polo dell'ago con una forza diretta verticalmente, la quale perciò non ha componente parallela al piano in cui l'ago può muoversi.

Se l'azione esercitata sull'ago calamitato, nell'apparato ora descritto, da una corrente elettrica continua passante per il conduttore A$abcd$B fosse precisamente identica a quella che una corrente lineare della stessa disposizione produrrebbe sopra un solenoide elementare rettilineo sostituito all'ago ed avente per lunghezza la distanza fra i poli di quest'ultimo, si avrebbe la formola:

$$I = p \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \alpha + q \operatorname{sen}^3 \alpha \operatorname{tang} \alpha \quad \ldots\ldots (1),$$

nella quale I è l'intensità della corrente elettrica che si fa passare per il conduttore; α è l'angolo massimo di cui l'ago devia dal meridiano magnetico e che si trova facendo variare la distanza della porzione orizzontale cb del conduttore dal piano della bussola; p è una quantità sensibilmente costante per uno stesso ago, non dipendendo da altro che dal momento magnetico proprio di questo e dal momento della coppia magnetica terrestre proiettata orizzontalmente; q è pure una costante dello strumento e vale $-pr^2$, essendo r il rapporto fra la distanza dei poli dell'ago e la lunghezza cb orizzontale del conduttore.

L'espressione di I si semplificherebbe, riducendosi al solo primo termine $p \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \alpha$, quando la parte cb del conduttore fosse molto lunga per rapporto alle dimensioni dell'ago; cosicchè la sua azione su questo eguagliasse sensibilmente quella d'una corrente orizzontale indefinita e diventassero trascurabili le azioni esercitate dalle porzioni verticali di corrente.

L'assimilazione del grosso filo di rame destinato a far parte di un circuito ad una semplice corrente lineare e l'assimilazione dell'ago magnetico ad un solenoide elementare, non sono certo abbastanza legittime da permetterci di applicare rigorosamente al nostro apparato la relazione (1). Tuttavia è possibile, che, calcolando per questo le costanti p e q per mezzo di buone esperienze preliminari, si abbia a trovare un soddisfacente accordo fra la realtà e la legge teorica della formola, almeno per valori di α e quindi di I compresi entro certi limiti.

Per accertarmi di ciò, risolsi di istituire una serie di ricerche sperimentali nel modo seguente. In uno stesso circuito erano intercalati:

1° Una pila di elementi Bunsen di media grandezza il cui numero poteva salire a cinquanta;

2° Il conduttore dell'apparato reometrico precedentemente descritto;

3° Uno o più rocchetti di resistenza;

4° Un voltametro ad acqua acidulata, nel quale gli elettrodi erano laminette di platino di estensione superficiale varia secondo i casi.

Potevasi far variare, nelle successive esperienze, l'intensità della corrente, sia per mezzo dei rocchetti di resistenza, sia modificando il numero e la disposizione degli elementi di pila. Per ciascuna corrente, mantenuta costante, si osservava allo apparato reometrico l'angolo α di deviazione massima e, contemporaneamente, raccoglievasi al voltametro l'idrogeno che in un tempo determinato si svolgeva per l'elettrolisi dell'acqua. Nella misura di tale effetto elettrolitico procurai di applicare le ben note precauzioni che tendono a scemare le cause d'errore, e tenni speciale conto delle indicazioni fornite a tale riguardo da Mascart nel suo recente lavoro « *Sull' equivalente elettro-chimico dell'acqua* » (*), che fa seguito a quelli di Weber e di Kohlrausch sullo stesso argomento. Ritenendo poscia che un *ampère* svolga al minuto primo centimetri cubi 10, 64 di gaz tonante, esprimevo immediatamente in ampère le intensità delle correnti esperimentate.

(*) *Journal de Physique, théorique et appliquée;* marzo 1882.

Raccolti ed ordinati i risultati numerici relativi ad un grande numero di osservazioni, reietti senz'altro tutti quelli che erano evidentemente alterati da errori sperimentali troppo gravi, non tardai ad accorgermi che, così per le correnti più deboli da me adoperate, come per quelle d'intensità molto considerevole, non sarebbe stato possibile determinare le costanti p e q in maniera da rendere la formola (1) atta a rappresentare in modo soddisfacente i fatti. E ciò era a prevedersi, poichè:

1° Per correnti tanto deboli che la corrispondente deviazione massima dell'ago sia solo di qualche diecina di gradi, a fine di ottenere questa deviazione devesi abbassare di molto il conduttore bc dello strumento, tanto da fargli quasi sfiorare il vetro sotto il quale trovasi a pochissima distanza l'ago. In questo caso è evidente che le condizioni teoriche, rispetto cui fu dedotta la formola (1) non sono più verificate, neppure in modo grossolano; non si può più considerare come lineare la corrente che attraversa il conduttore, e non è lecito ritenere come invariabile la posizione dei poli nell'ago;

2° Per correnti troppo poderose il difetto di sensibilità del procedimento si fa molto grave; quand'anche la legge che collega l'intensità della corrente colla deviazione massima fosse presso a poco quella rappresentata dalla relazione (1), risulta dalle mie sperienze che, se l'angolo α è vicino a $90°$, una piccola variazione del suo valore importa una variazione notevolissima nel corrispondente valore di I. Ne consegue che, ad ogni inesattezza, anche lieve, che si commetta nella osservazione della deviazione massima, quando il suo valore è molto grande, corrisponde un errore, che può essere gravissimo, nella valutazione dell'intensità di corrente.

Per l'apparecchio rappresentato nella fig. 1ª, sul quale ho istituite le mie ricerche, riconobbi che non si possono avere buoni risultati quando le correnti, di cui si fa uso, imprimono all'ago deviazioni massime inferiori a $20°$, ovvero superiori a $65°$. Le intensità corrispondenti alle deviazioni comprese fra questi limiti variano all'incirca fra una metà di ampère e dieci ampère.

A cagione di quanto ora si è detto, per procedere alla determinazione dei valori di p e di q relativi al mio apparato, mi sono ristretto ad applicare il metodo dei minimi quadrati ai risultati di sole 10 esperienze, scelte fra quelle che ho motivo di credere più degne di fiducia.

Indico con α la deviazione massima letta all'apparato reometrico in una qualunque delle dieci esperienze e con I la corrispondente intensità di corrente espressa in ampère e trovata col procedimento elettrolitico. Pongo per brevità:

$$a = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tang}\alpha \ ,$$
$$b = \operatorname{sen}^3\alpha \operatorname{tang}\alpha \ ;$$

e calcolo i valori $a_1, a_2, a_3, \ldots$ di a ed i valori $b_1, b_2, b_3, \ldots$ di b per ciascuno dei valori di α osservati. Si hanno così dieci equazioni della forma

$$I = ap + bq \ ,$$

e si debbono cercare per le costanti p e q valori che meglio si adattino alle equazioni stesse. Perciò si ponga:

$$\begin{aligned}
\Sigma a^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots\ldots + a_{10}^2 \ , \\
\Sigma b^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots\ldots + b_{10}^2 \ ; \\
\Sigma ab &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_{10} b_{10} \ ; \\
\Sigma aI &= a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots\ldots + a_{10} I_{10} \ ; \\
\Sigma bI &= b_1 I_1 + b_2 I_2 + \ldots\ldots + b_{10} I_{10} \ .
\end{aligned}$$

Il metodo dei minimi quadrati conduce alle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
p\Sigma a^2 + q\Sigma ab &= \Sigma aI \\
p\Sigma ab + q\Sigma b^2 &= \Sigma bI
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2).$$

Servendomi dei valori sperimentali di α contenuti nella colonna (I) della tabella seguente e dei valori corrispondenti di I, pure forniti dalle migliori esperienze e contenuti nella colonna (V) della stessa tabella, trovo:

$$\begin{aligned}
\log \Sigma a^2 &= 0,7914801 \\
\log \Sigma b^2 &= 0,4489381 \\
\log \Sigma ab &= 0,6108092 \\
\log \Sigma aI &= 1,4748550 \\
\log \Sigma bI &= 1,2947600 \ .
\end{aligned}$$

Quindi le equazioni (2) dànno:

$$p = 4,7517$$
$$q = 0,2212 \ .$$

Mediante i valori di p e di q così trovati, si calcolano i prodotti ap, bq, corrispondenti a ciascuno dei dieci valori sperimentati di α: essi sono scritti rispettivamente nelle colonne (II) e (III) della tabella. La colonna (IV) contiene i valori della somma $ap + bq$, cioè i valori di I calcolati nell'ipotesi che sia verificata la relazione (1); infine la colonna (VI) dà le differenze fra le I calcolate e le I sperimentali.

Sperienze n° 10.

I	II	III	IV	V	VI
Deviazioni massime α	Valori di ap	Valori di bq	Valori di I calcolati	Valori di I sperimentali	Differenze
19°	0,5326	0,0026	0,5352	0,56	−0,0248
24°	0,8605	0,0066	0,8671	0,89	−0,0229
26° 30′	1,0571	0,0098	1,0669	1,08	−0,0131
31°	1,4705	0,0181	1,4886	1,49	−0,0014
34°	1,7922	0,0261	1,8183	1,81	+0,0083
39° 30′	2,4914	0,0469	2,5383	2,50	+0,0383
45°	3,3600	0,0782	3,4382	3,37	+0,0682
51°	4,5602	0,1282	4,6884	4,57	+0,1184
57°	6,1365	0,2009	6,3374	6,20	+0,1374
61°	7,4975	0,2669	7,7644	7,70	+0,0644

La figura 2ª dimostra, sotto forma grafica, i risultati più importanti contenuti nella tabella. Le ordinate della curva rappresentano le intensità di corrente riportate nella colonna (IV); l'ampère corrisponde alla lunghezza del doppio centimetro. Le ascisse sono le deviazioni massime della colonna (I), corrispondendo il grado alla lunghezza del millimetro. La curva è tangente nell'origine all'asse delle ascisse ed ha per assintoto la retta M N parallela all'asse delle ordinate e distante di 90 da questo. I punti segnati con piccole croci rappresentano i valori di I sperimentali della colonna (V).

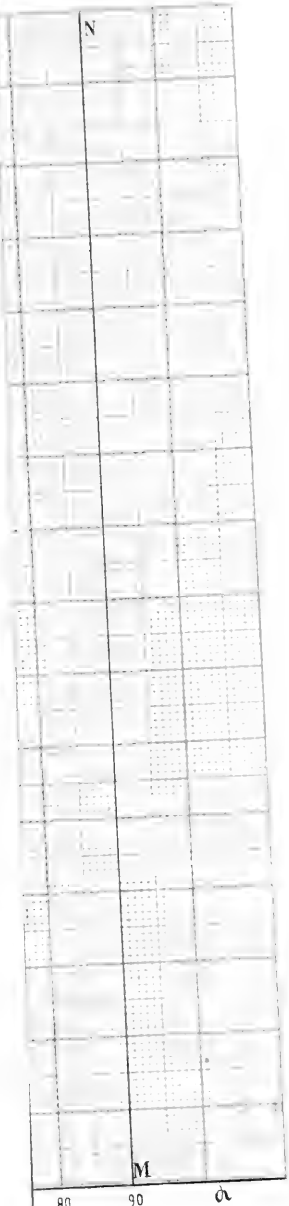
Ho ricordato più sopra che la costante q è, secondo la teoria, una quantità negativa e dipendente dal rapporto che passa fra la distanza dei poli nell'ago e la lunghezza orizzontale del conduttore mobile. Invece, calcolata sui dati forniti dalla sperienza, la q risulta positiva. Questa discrepanza però non è di grave momento, se si considera la piccolezza del termine bq del binomio che dà l'espressione (1) della intensità I. Anzi, se si confrontano i valori di bq inscritti nella colonna (III) con quelli corrispondenti di ap contenuti nella colonna (II), si scorge subito quanto sia lieve l'influenza esercitata dai primi nella valutazione delle intensità e come si possa ritenere, senza grave errore, che queste ultime sono date semplicemente dal termine ap.

Credo pertanto che si possano accogliere come prossime al vero le conclusioni seguenti:

1° Un apparecchio fondato sul principio della deviazione massima, può, entro certi limiti, essere impiegato convenientemente per la misura dell' intensità delle correnti elettriche. Quello da me adoperato dà risultati abbastanza soddisfacenti, purchè l'angolo da leggersi non sia minore di 20°, nè maggiore di 65°; le correnti elettriche corrispondenti a tali angoli sono a un dipresso comprese fra un mezzo ampère e dieci ampère;

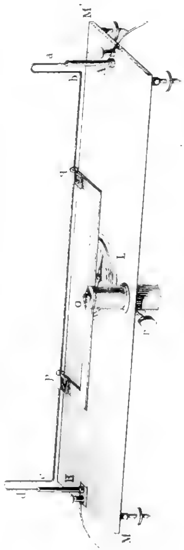
2° Dalle determinazioni fatte apparisce che, se si tratta di correnti deboli, l'apparecchio dà valori ordinariamente minori del vero; peccano invece per eccesso le misure eseguite su correnti di grande intensità;

3° Se la lunghezza della porzione orizzontale del conduttore mobile è molto considerevole rispetto alla lunghezza dell'ago, l'azione esercitata dalle parti verticali di corrente è trascurabile, e l'azione esercitata dalla porzione orizzontale è sensibilmente eguale a quella che sarebbe dovuta ad un conduttore di lunghezza indefinita. In tal caso si può ritenere che l'intensità della corrente sia semplicemente proporzionale al prodotto del seno per la tangente dell'angolo di deviazione massima.



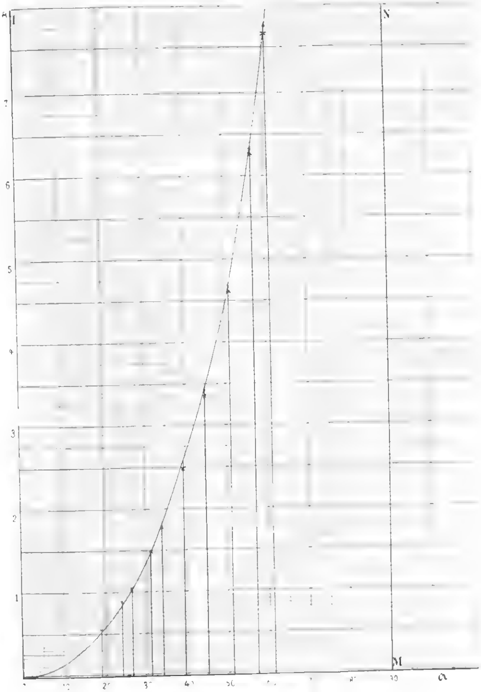
Torino Lit. F.^lli Doyen

Fig 1ª



Apparato reometrico a massima deviazione

Fig 2ª



Il Socio Cav. Angelo Mosso presenta e legge una Nota preliminare da lui scritta in collaborazione col sig. I. Guareschi, intitolata « *Ricerche sulle ptomaine* », la quale verrà pubblicata nel seguente fascicolo di Giugno.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

SOMMARIO

Classe di Scienze fisiche e matematiche.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

dagli Accademici Segretari delle due Classi

VOL. XVII, DISP. 7ª (*Giugno* 1882)

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche.

TORINO
ERMANNO LOESCHER
Libraio della R. Accademia delle Scienze.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Giugno 1882.

TORINO, STAMPERIA REALE
di G. B. Paravia e C.

CLASSE
DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Adunanza dell' 11 Giugno 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. PROSPERO RICHELMY VICE-PRESIDENTE

Il Socio Cav. Prof. Galileo FERRARIS presenta e legge una Memoria del sig. Ingegnere Alberto CASTIGLIANO, Corrispondente dell'Accademia.

INTORNO AD UNA PROPRIETÀ DEI SISTEMI ELASTICI.

1. Consideriamo un corpo o un sistema elastico nel quale un punto sia fisso, un secondo punto possa muoversi soltanto sopra una retta fissa passante pel primo, ed un terzo punto non possa spostarsi che in un piano passante per quella retta.

Un tal corpo o sistema sarebbe assolutamente immobile, se fosse rigido, ma essendo elastico, vi si potranno produrre liberamente, in causa delle forze esterne, tutte le deformazioni dovute all'elasticità.

Ora, è noto che, per un tal corpo o sistema elastico, la proiezione sopra una direzione fissa qualunque, dello spostamento del punto cui è applicata una delle forze esterne, è una funzione lineare, senza termine costante, di tutte le forze esterne applicate al sistema.

Se dunque chiamiamo P, Q, R, S, ... le forze applicate ad un corpo o sistema elastico; e p, q, r, s, ... le proiezioni sulle direzioni delle forze stesse, degli spostamenti dei loro punti d'applicazione, queste ultime saranno funzioni della forma

$$p = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \ldots\ldots, \tag{1}$$

essendo α, β, γ, δ, ... quantità indipendenti dalle forze.

Per brevità chiameremo d'ora innanzi *spostamento* del punto d'applicazione di una forza, la proiezione, sulla direzione della forza, dello spostamento effettivo di quel punto.

È anche noto che, il lavoro di deformazione di un corpo o sistema elastico, ossia il lavoro delle forze esterne, quando queste crescono con legge qualunque, ma continua, da zero sino al loro valore finale, è espresso dalla formola

$$\tfrac{1}{2}(Pp + Qq + Rr + Ss + \ldots\ldots).$$

Quindi, se invece di p, q, r, s, ... si sostituiscono le loro espressioni della forma (I), e si raccolgono i termini simili, si ottiene, per esprimere il lavoro di deformazione del sistema, la formola di secondo grado

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} a P^2 + b PQ + c PR + d PS &+ \ldots\ldots \\ + \tfrac{1}{2} b_1 Q^2 + c_1 QR + d_1 QS &+ \ldots\ldots \\ + \tfrac{1}{2} c_2 R^2 + d_2 RS &+ \ldots\ldots \\ + \tfrac{1}{2} d_3 S^2 &+ \ldots\ldots \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}$$

ove a, b, c, ..., b_1, c_1, ... sono quantità indipendenti dalle forze P, Q, R, ...

Ora, l'autore del presente scritto ha dimostrato in altri lavori che, *la derivata del lavoro di deformazione di un corpo o sistema elastico, rispetto ad una delle forze esterne, esprime la proiezione, sulla direzione della forza, dello spostamento del suo punto d'applicazione.* Prendendo dunque le derivate della formola precedente rispetto a P, Q, R, S, ... si ottengono le seguenti espressioni degli spostamenti p, q, r, s, ...:

$$\left.\begin{aligned} p &= aP + b\,Q + c\,R + d\,S + \ldots\ldots, \\ q &= bP + b_1 Q + c_1 R + d_1 S + \ldots\ldots, \\ r &= cP + c_1 Q + c_2 R + d_2 S + \ldots\ldots, \\ s &= dP + d_1 Q + d_2 R + d_3 S + \ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vedesi qui che i coefficienti della prima linea sono uguali a quelli della prima colonna dopo il segno d'uguaglianza, quelli della seconda linea a quelli della seconda colonna, e così di seguito. In altre parole, dalle formole precedenti risulta il seguente teorema generale:

Se P *e* Q *sono due qualunque fra le forze esterne applicate ad un corpo o sistema elastico, e* p, q *gli spostamenti dei loro punti d'applicazione, il coefficiente di* Q *nell'espressione di* p *è uguale al coefficiente di* P *nell'espressione di* q.

2. Faremo ora alcune applicazioni di questo teorema.

Se si suppone la forza P uguale all'unità, e tutte le altre nulle, le equazioni (2) ci danno:

$$p = a\,, \qquad q = b\,, \qquad r = c\,, \ldots\ldots,$$

cosicchè i coefficienti a, b, c, ... non sono altro che gli spostamenti dei punti d'applicazione delle forze P, Q, R, ... quando la prima è uguale all'unità e tutte le altre son nulle: ora, quando tutte le forze P, Q, R, ... hanno valori finiti, lo spostamento del punto d'applicazione della forza P è dato dall'equazione

$$p = aP + bQ + cR + \ldots\ldots, \tag{3}$$

il cui secondo membro non è altro che la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando gli spostamenti a, b, c, ... del caso precedente per le forze P, Q, R, ... Dunque, *se si conosce la deformazione di un corpo, prodotta da una forza applicata in un punto, si può facilmente calcolare lo spostamento di questo punto qualunque siano le forze applicate al corpo.*

Abbiamo già veduto che se la forza P è uguale all'unità e tutte le altre son nulle, lo spostamento del punto d'applicazione della forza Q è $q = b$: dalla formola (3) vediamo che se invece $Q = 1$ e tutte le altre forze son nulle, si ha $p = b$; dunque, *in un corpo o sistema elastico, lo spostamento di un punto quando una forza è applicata ad un altro,* è uguale *allo spostamento di quest'ultimo quando la forza è applicata al primo.*

Passiamo a qualche applicazione pratica.

Abbiasi per es. una trave orizzontale, colla sezione comunque variabile, appoggiata soltanto alle estremità o anche in altri punti intermedi, oppure incastrata, o vincolata in un altro modo qualunque.

Segue dall'ultima proprietà dimostrata che caricando la trave con un peso P in un punto A, un altro punto B si abbassa di una quantità $b\,P$, uguale all'abbassamento che avverrebbe nel punto A se il peso si caricasse in B.

Segue poi dalla formola (3) un modo molto facile per calcolare l'abbassamento di un punto qualunque della trave sotto l'azione di un carico composto di pesi isolati, come occorre nei ponti delle strade ferrate al passaggio dei convogli. Difatti, abbiamo veduto che i coefficienti a, b, c, ... non sono altro che gli spostamenti dei punti d'applicazione delle forze P, Q, R, ... nel caso che sia $P=1$, e che tutte le altre forze sian nulle: quindi, si comincierà a determinare la curva d'inflessione della trave nel caso ch'essa sia caricata di un peso uguale all'unità nel punto di cui si vuol trovare l'abbassamento, e si calcoleranno le ordinate a, b, c, ... di questa curva nei punti di applicazione delle forze P, Q, R, ... Si otterrà allora l'abbassamento del punto considerato per mezzo della formola

$$p = a\,P + b\,Q + c\,R + \ldots\ldots$$

Questa medesima formola, cambiando soltanto le ordinate della curva sopra definita, servirà a far conoscere l'abbassamento del punto considerato qualunque sia la posizione dei pesi P, Q, R, ..., e sarà pertanto da applicarsi, nel caso di un convoglio che percorra un ponte, per trovare i valori dell'abbassamento in un punto considerato per diverse posizioni del carico, donde poi si potrà desumere la posizione del carico per la quale si ottiene il massimo abbassamento.

La formola (3) si applica anche quando la trave sia gravata d'un carico continuo che occupi tutta intiera la travata od una parte soltanto. In tal caso, se si chiama x la distanza di un punto della trave da un'estremità, $p\,d\,x$ il peso caricato sull'elemento $d\,x$, η l'ordinata, corrispondente all'ascissa x, della curva d'inflessione della trave, quando questa è caricata soltanto d'un peso uguale all'unità nel punto di cui si vuol trovare lo abbassamento, risulta dalle cose precedenti che quest'abbassamento, sotto l'azione del carico continuo, sarà la somma dei prodotti elementari $\eta\,p\,d\,x$, e sarà dato pertanto dalla formola

$$f = \int_{l_0}^{l} \eta\,p\,d\,x\ ,$$

se il carico è esteso da $x = l_0$ sino ad $x = l$.

Quando il carico è uniformemente distribuito si ha p costante, onde

$$f = p \int_0^l \eta \, dx .$$

Benchè non vi sia alcun bisogno di confermare con un esempio particolare la verità delle precedenti considerazioni, cercheremo per mezzo dell'ultima formola la freccia d'inflessione nel mezzo di una trave rettilinea di sezione costante, semplicemente appoggiata alle estremità, caricata d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza. È noto che se nel mezzo della trave qui considerata si carica un peso uguale all'unità; la trave s'inflette secondo la curva rappresentata dall'equazione

$$\eta = \frac{1}{48\,E\,I}(3\,l^2 x - 4\,x^3) + \frac{A}{2\,F\,\Omega}\,x ,$$

essendo

E ed F i coefficienti dell'elasticità normale e tangenziale,
Ω ed I l'area ed il momento d'inerzia della sezione della trave,
A una quantità costante dipendente dalla forma di quella sezione,
l la lunghezza della trave,
x l'ascissa a partire da una delle estremità.

L'equazione riportata non può estendersi che tra 0 ed $\frac{l}{2}$ ossia sino alla metà della trave, ma le due metà della curva sono uguali fra loro e simmetriche rispetto al mezzo della trave, onde bisognerà estendere l'integrale $\int \eta \, dx$ soltanto da 0 ad $\frac{l}{2}$, e duplicarlo: si ottiene così

$$f = \frac{p}{24\,E\,I}\int_0^{\frac{l}{2}}(3\,l^2 x - 4\,x^2)\,dx + \frac{A p}{F\Omega}\int_0^{\frac{l}{2}} x\,dx$$

$$= \frac{5}{384}\,\frac{p\,l^4}{E\,I} + \frac{1}{8}\,\frac{A p\,l^2}{F\,\Omega} ,$$

che è il noto valore della freccia d'inflessione nel mezzo d'una trave orizzontale di sezione costante, appoggiata semplicemente per le estremità e caricata d'un peso uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza.

3. Imaginiamo un corpo o sistema elastico, al quale siano applicate in quattro punti A, A', B, e B', quattro forze P, P', Q, e Q', le due prime essendo nella direzione della retta $A\,A'$, ma rivolte in sensi contrarii, e le due ultime essendo dirette secondo la retta BB', ma rivolte anch'esse in sensi contrarii. Chiamiamo p e p' gli spostamenti dei punti A, A', quando al corpo sono applicate le sole forze Q, Q'; e q, q' gli spostamenti dei punti B, B', quando al corpo sono applicate le sole forze P e P'. S'intende che gli spostamenti p, p' sono valutati nella direzione $A\,A'$, e quelli q, q' nella direzione $B\,B'$, avremo

$$p = a\,Q + b\,Q' \,, \qquad p' = a'\,Q + b'\,Q' \,,$$

a, a', b e b' essendo coefficienti indipendenti dalle forze: di più, avuto riguardo al teorema dimostrato alla fine del N.° 1, avremo anche

$$q = a\,P + a'\,P' \,, \qquad q' = b\,P + b'\,P' \,.$$

Supponendo dunque $Q' = Q = P' = P$, avremo

$$p + p' = (a + b + a' + b')\,P = q + q' \,.$$

Dunque, *l'allungamento della retta* A A' *quando al corpo sono applicate le due forze* P *nei punti* B *e* B', *è uguale allo allungamento della retta* B B' *quando al corpo sono applicate le due forze* P *nei punti* A , A'.

Naturalmente abbiam parlato di allungamento, ma effettivamente vi sarà accorciamento, il che sarà manifestato dal risultar negativo il coefficiente $a + b + a' + b'$.

Come caso molto particolare della proprietà dimostrata si vede che in un dinamometro ellittico l'accorciamento dell'asse minore quando si applica la forza da sperimentarsi all'estremità dell'asse maggiore, è uguale all'accorciamento che subirebbe quest'ultimo, se la forza si applicasse all'estremità dell'asse minore.

4. Risolvendo rispetto alle forze P, Q, R, ... le equazioni (2), le quali sono in numero uguale a quello delle forze e chiamando Δ, per brevità, il determinante simmetrico formato coi coefficienti dei secondi membri, si ottiene

$$P = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p & b & c & d & \dots \\ q & b_1 & c_1 & d_1 & \dots \\ r & c_1 & c_2 & d_2 & \dots \\ s & d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & p & c & d & \dots \\ b & q & c_1 & d_1 & \dots \\ c & r & c_2 & d_2 & \dots \\ d & s & d_2 & d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Sviluppando i secondi membri, vedesi che il coefficiente di q nell'espressione di P, e quello di p nell'espressione di Q, sono rispettivamente

$$-\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b & c & d & \dots \\ c_1 & c_2 & d_2 & \dots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \qquad -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b & c_1 & d_1 & \dots \\ c & c_2 & d_2 & \dots \\ d & d_2 & d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

e perciò sono uguali fra loro, perchè il numeratore del secondo diventa identico con quello del primo, facendolo ruotare intorno alla sua diagonale principale.

Dunque, esprimendo le forze in funzione degli spostamenti dei loro punti d'applicazione, si ha una proprietà simile a quella degli spostamenti espressi in funzione delle forze.

5. Faremo vedere ancora come dalla proprietà dimostrata al N.° 1, si deduca facilmente un teorema dovuto al chiaro Professore E. Betti.

Al corpo o sistema elastico considerato al N° 1, supponiamo che invece delle forze P, Q, R, ... si applichino, agli stessi punti e nelle stesse direzioni, altre forze P', Q', R', ..., e siano p', q', r', ... gli spostamenti corrispondenti dei punti d'applicazione. Moltiplichiamo le equazioni (2) rispettivamente per P', Q', R', S', ... e sommiamole in colonna, mettendo in evidenza le forze primitive P, Q, R, ...: otterremo

$$\begin{aligned} P'p + Q'q + R'r + \dots = {} & P(aP' + bQ' + cR' + \dots) \\ & + Q(bP' + b_1 Q' + c_1 R' + \dots) \\ & + R(cP' + c_1 Q' + c_2 R' + \dots) \\ & + \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

I polinomi chiusi fra parentesi nel secondo membro non sono altro che i secondi membri delle equazioni (2) colla sostituzione delle forze P', Q', R', ... alle forze P, Q, R, ..., e perciò esprimono gli spostamenti p', q', r', ...; quindi si ha

$$P'p + Q'q + R'r + \ldots = Pp' + Qq' + Rr' + \ldots, \tag{4}$$

cioè:

In un corpo elastico, due sistemi di forze applicate agli stessi punti e nelle stesse direzioni, corrispondono a due tali sistemi di spostamenti, che, la somma dei prodotti delle forze del primo sistema per gli spostamenti del secondo, è uguale alla somma dei prodotti delle forze del secondo sistema per gli spostamenti del primo.

Il Prof. Betti ha ottenuto questo teorema partendo dalle equazioni generali dell'elasticità dei solidi, e vi ha dato una forma analitica diversa dalla precedente, ma contenuta in essa. Difatti, se per un corpo o sistema elastico chiamasi ρ la densità nel punto di coordinate x, y, z,

u, v, w gli spostamenti di quel punto parallelamente agli assi delle coordinate,

X, Y, Z le componenti, riferite all'unità di massa, della forza applicata all'elemento di volume dS nel punto considerato,

L, M, N le componenti, riferite all'unità di superficie, della forza applicata all'elemento ds della superficie del corpo,

u', v', w' un altro sistema di spostamenti,

X', Y', Z' e L', M', N' il corrispondente sistema di forze, è chiaro che la formola (4) diventa in questo caso

$$\int_S \rho(Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int_s (Lu' + Mv' + Nw')\,ds$$

$$= \int_S \rho(X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int_s (L'u + M'v + N'w)\,ds,$$

avvertendo che il simbolo $\int_S$ indica un'integrazione estesa a tutta la massa del corpo, e il simbolo $\int_s$ indica un'integrazione estesa a tutta la sua superficie. È questa precisamente l'equazione data dal Prof. Betti.

La forma più semplice che qui abbiam dato a questo teorema, ci mostra come esso si presti ad alcune applicazioni pratiche, in sostituzione delle formole (2) dalle quali l'abbiamo dedotto.

Se per es. si fa

$$\begin{array}{lllll} P=0\,, & Q=1\,, & R=0\,, & S=0\,, & \text{ecc.} \\ P'=1\,, & Q'=0\,, & R'=0\,, & S'=0\,, & \text{ecc.} \end{array}$$

l'equazione (4) ci dà

$$p=q'\,,$$

onde si ha la proprietà dimostrata al N° 2, cioè che *in un corpo o sistema elastico, lo spostamento di un punto, quando una forza è applicata ad un altro, è uguale allo spostamento di quest'ultimo, quando la forza è applicata al primo.*

Se si suppone

$$P'=1\,,\quad Q'=0\,,\quad R'=0\,,\quad S'=0\,,\quad \ldots$$

l'equazione (4) diventa

$$p=Pp'+Qq'+Rr'+\ldots\,,$$

e coincide colla formola (3), perchè p', q', r', ... sono gli spostamenti dei punti d'applicazione delle forze P, Q, R, ... nel caso che la prima fosse uguale all'unità e tutte le altre fossero nulle; cioè p', q', r',... non sono altro che i coefficienti a, b, c, ecc.

Milano, il 20 Aprile 1882.

Il Socio FERRARIS presenta ancora e legge la seguente Nota del sig. N. JADANZA, Professore nella R. Università di Torino,

SOPRA UN DETERMINANTE GOBBO CHE SI PRESENTA NELLO STUDIO DEI CANNOCCHIALI.

— 1 —

Quando si vogliono determinare i parametri di una retta di emergenza da un sistema diottrico centrato in funzione dei parametri di una data retta d'incidenza le cui equazioni sono:

$$y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - N^\circ) + b^\circ$$

$$z = \frac{\gamma^\circ}{n^\circ}(x - N^\circ) + c^\circ \ .$$

Si ottiene per equazioni della corrispondente retta di emergenza:

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - N^*) + b^*$$

$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - N^*) + c^* \ ,$$

dove n°, n^* sono gl'indici assoluti di rifrazione del primo ed ultimo mezzo, ed N°, N^* indicano ad un tempo i vertici e le ascisse dei vertici della prima ed ultima superficie sferica rifrangente.

I parametri

$$\beta^*, \quad b^*, \quad \gamma^*, \quad c^*$$

sono espressi in funzione di

$$\beta^\circ, \quad b^\circ, \quad \gamma^\circ, \quad c^\circ$$

mediante le equazioni

$$\begin{aligned} \beta^* &= k b^\circ + l \beta^\circ \\ b^* &= g b^\circ + h \beta^\circ \\ \gamma^* &= k c^\circ + l \gamma^\circ \\ c^* &= g c^\circ + h \gamma^\circ , \end{aligned}$$

nelle quali i coefficienti l, g, h dipendono tutti da k. Il coefficiente k viene espresso in funzione degli elementi dati del sistema diottrico mediante il seguente determinante gobbo di grado dispari:

$$k = \begin{vmatrix} u^\circ & -1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & t' & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u' & -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t'' & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & t^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & u^* \end{vmatrix} \tag{1}$$

ed i coefficienti l, g, h si ottengono, il primo, togliendo nel determinante precedente la prima orizzontale e la prima verticale; il secondo, togliendo l'ultima orizzontale e l'ultima verticale; il terzo togliendo la prima ed ultima orizzontale, e la prima ed ultima verticale. In altri termini si ha (*):

$$l = \frac{dk}{du^\circ} \; ; \quad g = \frac{dk}{du^*} \; ; \quad h = \frac{d^2 k}{du^\circ du^*} = \frac{dl}{du^*} = \frac{dg}{du^\circ} .$$

(*) Casorati. *Le proprietà cardinali dei cannocchiali.*

— 2 —

Se il numero delle superficie sferiche rifrangenti che compongono il dato sistema diottrico è m, il determinante k è di grado $2m-1$, e quindi i determinanti l, g sono di grado $2m-2$, ed h è di grado $2m-3$.

Per semplicità ed uniformità di scrittura indicheremo con k_{2m-1} il determinante gobbo (1) e con l_{2m-1}, g_{2m-1}, h_{2m-1}, i determinanti l, g, h, non importa che i loro gradi sieno differenti; intendendo così di dire che essi si possono tutti dedurre dal corrispondente k, colle regole dette innanzi.

Per mettere in evidenza il grado del determinante k, lo scriveremo nel seguente modo:

$$k_{2m-1} = \begin{vmatrix} u_1 & -1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & t_2 & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_3 & -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_4 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & t_{2m-2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & u_{2m-1} \end{vmatrix} .$$

Tra il determinante k_{2m-1} ed i suoi *derivati* l_{2m-1}, g_{2m-1}, h_{2m-1}, vi è la relazione

$$l_{2m-1}\, g_{2m-1} - h_{2m-1} \quad k_{2m-1} = +1 \qquad (2).$$

Infatti, se aumentiamo di un'unità il grado del determinante k_{2m-1}, facendone rimanere inalterata la forma, ed indichiamo con t^0 il primo elemento del nuovo determinante di grado pari k_{2m}, sviluppando questo nuovo determinante secondo gli elementi della prima orizzontale, si otterrà:

$$k_{2m} = t_0\, k_{2m-1} + l_{2m-1} .$$

Se con l_{2m}, g_{2m}, h_{2m} indichiamo i determinanti derivati di k_{2m}, è evidente che si ha:

$$l_{2m} = k_{2m-1}$$

$$g_{2m} = t_0\, g_{2m-1} + h_{2m-1}$$

$$h_{2m} = g_{2m-1}\,,$$

e quindi

$$l_{2m}\, g_{2m} = t_0\, k_{2m-1}\, g_{2m-1} + k_{2m-1}\, h_{2m-1}$$

e

$$k_{2m}\, h_{2m} = t_0\, k_{2m-1}\, g_{2m-1} + g_{2m-1}\, l_{2m-1}\,,$$

donde

$$g_{2m}\, l_{2m} - h_{2m}\, k_{2m} = -(g_{2m-1}\, l_{2m-1} - h_{2m-1}\, k_{2m-1}) \qquad (3).$$

Ponendo $m = 2$ si ha:

$$k_3 = \begin{vmatrix} u_1 & -1 & 0 \\ 1 & t_2 & -1 \\ 0 & 1 & u_3 \end{vmatrix}\;;$$

e poichè

$$l_3 = t_2\, u_3 + 1\,, \qquad g_3 = u_1\, t_2 + 1\,, \qquad h_3 = t_2\,,$$

si avrà

$$l_3\, g_3 - h_3\, k_3 = +1\,.$$

Quindi per la (3), sarà:

$$l_4\, g_4 - h_4\, k_4 = -1$$

ecc.

Ed in generale se k è un determinante gobbo della forma (1), si avrà:

$$l\, g - h\, k = \pm 1 \qquad (4)$$

secondo che k è di grado dispari o di grado pari.

— 3 —

È facile sviluppare il determinante k_{2m-1} in funzione dei determinanti di grado minore e della stessa forma, poichè si ha:

$$\begin{aligned}
k_{2m-1} &= u_1\, k_{2m-2} + k_{2m-3}\\
k_{2m-3} &= u_3\, k_{2m-4} + k_{2m-5}\\
k_{2m-5} &= u_5\, k_{2m-6} + k_{2m-7}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k_3 &= u_{2m-3}\, k_2 + k_1\\
k_1 &= u_{2m-1}\ ,
\end{aligned}$$

e quindi, sommando

$$\left.\begin{aligned} k_{2m-1} = u_1\, k_{2m-2} + u_3\, k_{2m-4} + u_5\, k_{2m-6} + \ldots\ldots\\ + u_{2m-3}\, k_2 + u_{2m-1} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Allo stesso modo, per un determinante di grado pari k_{2m}, si ottiene (chiamando t_0 il primo elemento)

$$\begin{aligned}
k_{2m} &= t_0\, k_{2m-1} + k_{2m-2}\\
k_{2m-2} &= t_2\, k_{2m-3} + k_{2m-4}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k_4 &= t_{2m-4}\, k_3 + k_2\\
k_2 &= t_{2m-2}\, k_1 + 1\ ,
\end{aligned}$$

e quindi:

$$k_{2m} = t_0\, k_{2m-1} + t_2\, k_{2m-3} + \ldots + t_{2m-2}\, k_1 + 1 \quad (6).$$

A causa della relazione (4) i due determinanti k_{2m-1}, k_{m-2} non possono mai essere nulli simultaneamente. È quindi facile vedere che una delle condizioni da verificarsi perchè sia

$$k_{2m-1} = 0$$

è espressa dalle equazioni:

$$u_1 = 0\ ;\quad u_3 = 0\ ;\quad u_5 = 0\ \ldots\ldots;\quad u_{2m-1} = 0 \quad (7).$$

— 4 —

Se le condizioni (7) non sono soddisfatte, il determinante k_{2m-1} in generale non sarà nullo; a meno che il secondo membro non si riduca a due gruppi eguali e di segno contrario. Vediamo questo secondo caso quando può avverarsi e quali condizioni esso richiede.

Se il sistema diottrico dato lo immaginiamo composto di $m+n$ superficie sferiche rifrangenti, il corrispondente k sarà di grado $2(m+n)-1$, e sarà indicato con $k_{2(m+n)-1}$. D'altra parte è chiaro che il sistema diottrico di $m+n$ superficie rifrangenti può immaginarsi decomposto in due, uno composto di m, e l'altro di n superficie rifrangenti. A ciascuno di questi due sistemi diottrici corrispondono rispettivamente i due determinanti

$$k_{2m-1}\,; \qquad k_{2n-1}\,.$$

Vediamo l'espressione di $k_{2(m+n)-1}$ in funzione di k_{2m-1}, k_{2n-1}.

Evidentemente si ha:

$$k_{2(m+n)-1} = \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & t_2 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & t_{2m-2} & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & u_{2m-1} & -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & t_{2m} & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & u_{2m+1} & -1 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & t_{2m+2} & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & t_{2(m+n)-2} & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & u_{2(m+n)-1} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

ed è pure evidente che i determinanti k_{2m-1}, k_{2n-1} sono quelli formati dalle prime $2m-1$ orizzontali e verticali, e dalle ultime $2n-1$ orizzontali e verticali del determinante precedente.

Se prendiamo la matrice formata dalle prime $2m-1$ orizzontali del determinante $k_{2(m+n)-1}$, e sviluppiamo esso determinante secondo i minori della matrice ora detta, si ottiene:

$$k_{2(m+n)-1} = k_{2m-1}\, l_{2n-1} + k_{2n-1}\, g_{2m-1} + t_{2m}\, k_{2m-1}\, k_{2n-1} \qquad (9)$$

e quindi se k_{2m-1}, k_{2n-1} non sono amendue nulli, il determinante $k_{2(m+n)-1}$ sarà nullo se è soddisfatta la condizione:

$$k_{2m-1}\, l_{2n-1} + k_{2n-1}\, g_{2m-1} + t_{2m}\, k_{2m-1}\, k_{2n-1} = 0 \qquad (10).$$

— 5 —

Un sistema diottrico dicesi *telescopico* quando il corrispondente k è nullo; sicchè nel caso di un sistema telescopico debbono essere soddisfatte l'una o l'altra delle condizioni (7) o (10).

Se si osserva che i simboli u_1, u_3, u_5 ... u_{2m-1} rappresentano rispettivamente (*)

$$u_1 = \frac{n^0 - n'}{r^0}\ ; \qquad u_3 = \frac{n' - n''}{r'}\ \ldots\ldots$$

dove, come si è detto innanzi, n^0, n', n'' ... sono gli indici assoluti di rifrazione dei successivi mezzi, ed r^0, r', r'' ... sono i raggi delle successive superficie rifrangenti, si vede subito che, perchè abbiano luogo le (7), bisogna che sieno verificate le seguenti equazioni:

$$r^0 = \infty\ , \qquad r' = \infty\ \ldots\ldots \qquad (11)\ ;$$

ossia: *Tutte le superficie che dividono i differenti mezzi debbono essere piane.* Quando le (11) non sono verificate, è necessario, perchè il sistema sia telescopico, che, immaginandolo decomposto in due sistemi, l'uno di m, l'altro di n, superficie rifrangenti, sia verificata la (10).

(*) Vedi Casorati, l. c.; e Gauss, *Dioptrische Untersuchungen.*

Ora se
$$N^{\circ},\ N' \ldots\ldots N^{*}$$
sono i vertici delle superficie rifrangenti del primo sistema, ed
$$N_{1}^{\circ},\ N_{1}' \ldots\ldots N_{1}^{*}$$
quelli del secondo, e si osserva che
$$t_{2m} = \frac{N_{1}^{\circ} - N^{*}}{n^{*}}\ .$$
dove n^{*} è l'indice assoluto di rifrazione del mezzo compreso tra le superficie sferiche i cui vertici sono
$$N^{*},\ N_{1}^{\circ}$$
la (10) si trasforma nell'altra:
$$k_{2m-1}\, l_{2n-1} + k_{2n-1}\, g_{2m-1} + \frac{N_{1}^{\circ} - N^{*}}{n^{*}}\, k_{2m-1}\, k_{2n-1} = 0\ ,$$
ovvero
$$k_{2n-1}\left(g_{2m-1} - k_{2m-1}\frac{N^{*}}{n^{*}}\right) + k_{2m-1}\left(l_{2n-1} + k_{2n-1}\frac{N_{1}^{\circ}}{n^{*}}\right) = 0\ ,$$
e quindi
$$\frac{N^{*}}{n^{*}} - \frac{g_{2m-1}}{k_{2m-1}} = \frac{l_{2n-1}}{k_{2n-1}} + \frac{N_{1}^{\circ}}{n^{*}} \qquad (12).$$

Ossia: Un sistema diottrico sarà *telescopico*, quando decomposto in due sistemi non telescopici, *il secondo fuoco principale del primo coincide col primo fuoco principale del secondo.*

La esposizione elementare delle precedenti proprietà del determinante gobbo della forma (1), sarà utile per facilitare la intelligenza della memoria di Gauss, o il libro del Prof. Casorati sulle *proprietà cardinali dei cannocchiali.*

Torino, Maggio 1882.

Il Socio Cav. Capitano F. Siacci presenta e legge una Nota del sig. Dott. Enrico Novarese, Assistente alla Cattedra di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino,

INTORNO

ALLA

MOLTIPLICAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

In una Nota precedente sulle formole di addizione delle funzioni ellittiche (*), io ho ricavato le espressioni di

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+\ldots+u_m),\quad \operatorname{cn}(u_1+u_2+\ldots u_m),\quad \text{ecc.}$$

sotto forma di quozienti di due determinanti d'ordine m, costituiti colle funzioni de'singoli argomenti. Come ho allora osservato, supponendo $u_1=u_2=\ldots=u_m=u$, i primi membri di quelle formole divengono $\operatorname{sn}(mu)$, $\operatorname{cn}(mu)$, ecc., ma i secondi membri prendono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Nella presente Nota, mediante un teorema gentilmente comunicatomi dal ch.^{mo} Professore Siacci, questa indeterminazione apparente è vinta; e così ottengo le formole per la moltiplicazione delle funzioni ellittiche sotto forme diverse dalle conosciute, e come caso particolare di quelle per l'addizione.

(*) V. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* fascic. di Aprile 1882.

§ 1.

Il teorema del Prof. SIACCI è il seguente:

« Per $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots x_{n-1} = x$, il quoziente

» $$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x_0)\,\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_{n-1}(x_{n-1})}{\Sigma \pm \psi_0(x_0)\,\psi_1(x_1)\ldots\psi_{n-1}(x_{n-1})}$$

» si riduce a

» $$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x)\,\varphi_1'(x)\ldots\varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)}{\Sigma \pm \psi_0(x)\,\psi_1'(x)\ldots\psi_{n-1}^{(n-1)}(x)}$$ ».

Infatti consideriamo il rapporto di determinanti

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{10} & \cdot\cdot & \varphi_{n-1,0} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \cdot\cdot & \varphi_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \varphi_{0,n-1} & \varphi_{1,n-1} & \cdot\cdot & \varphi_{n-1,n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_{00} & \psi_{10} & \cdot\cdot & \psi_{n-1,0} \\ \psi_{01} & \psi_{11} & \cdot\cdot & \psi_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \psi_{0,n-1} & \psi_{1,n-1} & \cdot\cdot & \psi_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

ove si è posto

$$\varphi_{ir} = \varphi_i(x_r)\,, \qquad \psi_{ir} = \psi_i(x_r) :$$

e proponiamoci di determinare il valore di tale espressione quando $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ si riducono tutte eguali ad x_0.

Posto

$$x_r = x_0 + h_r\,,$$

gli elementi della $(r+1)^{\text{ma}}$ orizzontale nei due determinanti saranno rispettivamente:

$$\varphi_{ir} = \varphi_{i0} + h_r \varphi'_{i0} + \ldots + \frac{h_r^r}{r!}\varphi_i^{(r)}(x_0 + \theta h_r)$$

$$[i = 0, 1, 2, \ldots, n-1]$$

$$\psi_{ir} = \psi_{i0} + h_r \psi'_{i0} + \ldots + \frac{h_r^r}{r!}\psi_i^{(r)}(x_0 + \theta h_r)\,,$$

θ essendo una quantità compresa tra 0 ed 1.

Sottragghiamo nei due determinanti la 1ª linea da tutte le successive, e dividiamo sopra e sotto per $h_1 h_2 \dots h_{n-1}$. Gli elementi della $(r+1)^{ma}$ linea diverranno rispettivamente:

$$\varphi'_{io} + \frac{h_r}{2}\varphi''_{io} + \dots + \frac{h_r^{r-1}}{r!}\varphi_i^{(r)}(x_0 + \theta h_r),$$

$$\psi'_{io} + \frac{h_r}{2}\psi''_{io} + \dots + \frac{h_r^{r-1}}{r!}\psi_i^{(r)}(x_0 + \theta h_r).$$

Facciamo $h_1 = 0$ (cioè $x_1 = x_0$), sottragghiamo la 2ª linea da tutte le successive e dividiamo sopra e sotto per $\frac{h_2}{2}\frac{h_3}{2}\dots\frac{h_{n-1}}{2}$: gli elementi della $(r+1)^{ma}$ linea si ridurranno a

$$\varphi''_{io} + \frac{h_r}{3}\varphi'''_{io} + \dots + \frac{h_r^{r-2}}{3\,.\,4\dots r}\varphi_i^{(r)}(x_0 + \theta h_r).$$

$$\psi''_{io} + \frac{h_r}{3}\psi'''_{io} + \dots + \frac{h_r^{r-2}}{3\,.\,4\dots r}\psi_i^{(r)}(x_0 + \theta h_r).$$

Facciamo $h_2 = 0$, sottragghiamo la 3ª linea da tutte le seguenti e dividiamo sopra e sotto per $\frac{h_3}{3}\frac{h_4}{3}\dots\frac{h_{n-1}}{3}$, e così di seguito: continuiamo quest'operazione finchè siansi poste a zero tutte le h, cioè siansi uguagliate tutte le x. Si vede che allora le linee del determinante numeratore (denominatore) saranno formate dalle n funzioni φ_{io} (ψ_{io}) e dalle loro successive $n-1$ derivate; cioè i due determinanti apparterranno a quelli che il BALTZER (*Theorie und Anwend. der Determ.*, ed. 1881, p. 77) chiama *determinanti di* n *funzioni ad una variabile*. E così resta dimostrato il teorema.

§ 2.

Il teorema sovraesposto, applicato alle nostre formole di addizione, ci fornisce l'espressione determinata di sn (mu), cn (mu), ... Gli elementi dei determinanti riescono assai complicati, ma, mercè opportuni artifizî, si possono praticare molte semplificazioni. Facciamone un esempio nel caso del seno amplitudine e per un numero pari di argomenti. Abbiamo, per m pari [Nota citata, eq. (I)]:

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+\ldots+u_m)=$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_1^m & s_1^{m-2} & \ldots & 1 & s_1^{m-3}c_1\Delta_1 & s_1^{m-5}c_1\Delta_1 & \ldots & s_1c_1\Delta_1 \\ s_2^m & s_2^{m-2} & \ldots & 1 & s_2^{m-3}c_2\Delta_2 & s_2^{m-5}c_2\Delta_2 & \ldots & s_2c_2\Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_m^m & s_m^{m-2} & \ldots & 1 & s_m^{m-3}c_m\Delta_m & s_m^{m-5}c_m\Delta_m & \ldots & s_mc_m\Delta_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^{m-1} & s_1^{m-3} & \ldots & s_1 & s_1^{m-2}c_1\Delta_1 & s_1^{m-4}c_1\Delta_1 & \ldots & c_1\Delta_1 \\ s_2^{m-1} & s_2^{m-3} & \ldots & s_2 & s_2^{m-2}c_2\Delta_2 & s_2^{m-4}c_2\Delta_2 & \ldots & c_2\Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_m^{m-1} & s_m^{m-3} & \ldots & s_m & s_m^{m-2}c_m\Delta_m & s_m^{m-4}c_m\Delta_m & \ldots & c_m\Delta_m \end{vmatrix}},$$

essendo

$$s_i=\operatorname{sn}u_i\ ,\qquad c_i=\operatorname{cn}u_i\ ,\qquad \Delta_i=\operatorname{dn}u_i\ .$$

Supponiamo in tale equazione che tutte le u diventino uguali, ed indichiamo con s, c, Δ, il valor comune che assumono rispettivamente le s_i, le c_i, le Δ_i; riguardando gli elementi dei due determinanti come funzioni di s, avremo:

$$
\operatorname{sn}(m u) = \left|\begin{array}{cccccccc}
s^{m} & s^{m-2} & \dots & 1 & s^{m-3} c \Delta & s^{m-5} c \Delta & \dots & s c \Delta \\
\frac{d . s^{m}}{d s} & \frac{d . s^{m-2}}{d s} & \dots & 0 & \frac{d . s^{m-3} c \Delta}{d s} & \frac{d . s^{m-5} c \Delta}{d s} & \dots & \frac{d . s c \Delta}{d s} \\
. & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\
\frac{d^{m-1} . s^{m}}{d s^{m-1}} & \frac{d^{m-1} . s^{m-2}}{d s^{m-1}} & \dots & 0 & \frac{d^{m-1} . s^{m-3} c \Delta}{d s^{m-1}} & \frac{d^{m-1} . s^{m-5} c \Delta}{d s^{m-1}} & \dots & \frac{d^{m-1} . s c \Delta}{d s^{m-1}} \\
\hline
s^{m-1} & s^{m-3} & \dots s & s^{m-2} c \Delta & s^{m-4} c \Delta & \dots & \dots & c \Delta \\
\frac{d . s^{m-1}}{d s} & \frac{d . s^{m-3}}{d s} & \dots 1 & \frac{d . s^{m-2} c \Delta}{d s} & \frac{d . s^{m-4} c \Delta}{d s} & \dots & \dots & \frac{d . c \Delta}{d s} \\
. & . & \dots & . & . & \dots & \dots & . \\
\frac{d^{m-1} . s^{m-1}}{d s^{m-1}} & \frac{d^{m-1} . s^{m-3}}{d s^{m-1}} & \dots 0 & \frac{d^{m-1} . s^{m-2} c \Delta}{d s^{m-1}} & \frac{d^{m-1} . s^{m-4} c \Delta}{d s^{m-1}} & \dots & \dots & \frac{d^{m-1} c \Delta}{d s^{m-1}}
\end{array}\right|
$$

Chiameremo d'ora innanzi colonna (μ) quella nel cui primo elemento l'esponente di s è μ. Posto ciò, limitiamoci per ora a considerare in questi determinanti le prime $\frac{m}{2}$ colonne: l'elemento $(r+1)^{\text{mo}}$ della colonna (μ) sarà

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-r+1)s^{\mu-r}.$$

E, se si osserva che il determinante numeratore è riducibile subito all'ordine $m-1$, si vede che tutti gli elementi della sua 1ª colonna saranno divisibili per m, quelli della 2ª per $m-2$, ecc., quelli della $\left(\frac{m}{2}\right)^{\text{ma}}$ colonna per 2. Laonde, ponendo per brevità

$$a_{\mu,r}=(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-r+1),$$

avremo

$$(1)\quad\ldots\quad \operatorname{sn}(mu)=(-1)^{\frac{m}{2}}m(m-2)(m-4)\ldots 2\,\frac{P}{Q}$$

dove

$$P=\begin{vmatrix}
s^{m-1} & s^{m-3} & . & s & \dfrac{d.s^{m-3}c\Delta}{ds} & \ldots & \dfrac{d.sc\Delta}{ds}\\
a_{m,2}s^{m-2} & a_{m-2,2}s^{m-4} & . & 1 & \dfrac{d^2.s^{m-3}c\Delta}{ds^2} & \ldots & \dfrac{d^2.sc\Delta}{ds^2}\\
a_{m,3}s^{m-3} & a_{m-2,3}s^{m-5} & . & 0 & . & \ldots & .\\
. & . & . & . & . & \ldots & .\\
a_{m,m-2}s^2 & a_{m-2,m-2} & . & 0 & . & \ldots & .\\
a_{m,m-1}s & 0 & . & 0 & \dfrac{d^{m-1}.s^{m-3}c\Delta}{ds^{m-1}} & \ldots & \dfrac{d^{m-1}.sc\Delta}{ds^{m-1}}
\end{vmatrix}$$

$$Q=\begin{vmatrix}
s^{m-1} & s^{m-3} & . & s & s^{m-2}c\Delta & \ldots & c\Delta\\
a_{m,2}s^{m-2} & a_{m-2,2}s^{m-4} & . & 1 & \dfrac{d.s^{m-2}c\Delta}{ds} & \ldots & \dfrac{d.c\Delta}{ds}\\
a_{m,3}s^{m-3} & a_{m-2,3}s^{m-5} & . & 0 & . & \ldots & .\\
. & . & . & . & . & \ldots & .\\
a_{m,m-2}s^2 & a_{m-2,m-2} & . & 0 & . & \ldots & .\\
a_{m,m-1}s & 0 & . & 0 & . & \ldots & .\\
a_{m,m} & 0 & . & 0 & \dfrac{d^{m-1}.s^{m-2}c\Delta}{ds^{m-1}} & \ldots & \dfrac{d^{m-1}.c\Delta}{ds^{m-1}}
\end{vmatrix}$$

In entrambi questi determinanti si moltiplichi per s^2 la 2^a colonna e la si sottragga dalla 1^a, la 3^a colonna e la si sottragga dalla 2^a ecc., finchè si moltiplicherà per s^2 la $\left(\frac{m}{2}\right)^{\text{ma}}$ colonna e la si sottrarrà dalla $\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\text{ma}}$. Si ripeta tale operazione, arrestandosi però alla colonna $\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\text{ma}}$; si ripeta un' altra volta arrestandosi alla $\left(\frac{m}{2}-2\right)^{\text{ma}}$, e così via finchè la $\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\text{ma}}$ operazione si ridurrà a moltiplicare per s^2 la 2^a colonna ed a sottrarla dalla 1^a. È chiaro che dopo queste $\frac{m}{2}-1$ operazioni ciò che avrà cangiato in ogni elemento sarà il coefficiente della potenza di s. Dopo la 1^a sottrazione $a_{\mu,r}$ si sarà mutato in $a_{\mu,r}-a_{\mu-2,r}$ ed $a_{\mu-2,r}$ in $a_{\mu-2,r}-a_{\mu-4,r}$; e quindi dopo la 2^a sottrazione $a_{\mu,r}$ sarà divenuto $a_{\mu,r}-2a_{\mu-2,r}+a_{\mu-4,r}$. In generale, denotando con $a^{(i)}_{\mu,r}$ ciò che diviene $a_{\mu,r}$ dopo i sottrazioni, si avrà

$$(2)\ldots\quad a^{(i)}_{\mu,r}=a_{\mu,r}-\binom{i}{1}a_{\mu-2,r}+\binom{i}{2}a_{\mu-4,r}-\ldots+(-1)^i\binom{i}{i}a_{\mu-2i,r}$$
$$=\sum_{0}^{i}{}_h(-1)^h\binom{i}{h}a_{\mu-2h,r}\,.$$

Questo si dimostra, o ricorrendo alle formole conosciute del calcolo delle differenze finite, poichè in sostanza $a^{(i)}_{\mu,r}$, $a^{(i)}_{\mu-2,r}$, ecc., sono le i^{me} differenze delle quantità $a_{\mu,r}$, $a_{\mu-2,r}$, ecc., oppure direttamente coll'induzione. Ammettiamo vera la (2) per un numero i di sottrazioni; dico che è vera per un numero $i+1$.

Infatti abbiamo:

$$a^{(i)}_{\mu-2,r}=a_{\mu-2,r}-\binom{i}{1}a_{\mu-4,r}+\ldots+(-1)^i\binom{i}{i}a_{\mu-2(i+1),r}\,,$$

onde

$$a^{(i)}_{\mu,r}-a^{(i)}_{\mu-2,r}=a^{(i+1)}_{\mu,r}=a_{\mu,r}-\binom{i+1}{1}a_{\mu-2,r}+\binom{i+1}{2}a_{\mu-4,r}$$
$$-\ldots+(-1)^{i+1}\binom{i+1}{i+1}a_{\mu-2(i+1),r}\,,$$

in virtù dell'identità

$$\binom{\nu}{\rho} = \binom{\nu - 1}{\rho} + \binom{\nu - 1}{\rho - 1} .$$

Ma la formola in questione si verifica per $i = 1, 2$, dunque essa si verifica in generale.

Mettendo nella (2) in luogo di $a_{\mu - 2h, r}$ il suo valore, risulta

$$a_{\mu, r}^{(i)} = \sum_{0}^{i}{}_{h} (-1)^h \binom{i}{h} \sum_{0}^{r-1}{}_{k} S_k (-2h)^{r-k-1} ,$$

indicando con S_k la somma dei prodotti delle quantità $\mu - 1$, $\mu - 2$, ..., $\mu - r + 1$ combinate k a k; e questo si può scrivere

$$(3) \ldots \quad a_{\mu, r}^{(i)} = \sum_{0}^{r-1}{}_{k} (-2)^{r-k-1} S_k \sum_{0}^{i}{}_{h} (-1)^h \binom{i}{h} h^{r-k-1} .$$

Tale equazione ci rivela due importanti proprietà dei numeri a. Supponiamo $i = r - 1$: allora è noto (*) che l'ultimo Σ per $k = 0$ vale $(-1)^{r-1}(r-1)!$, e pegli altri valori di k è nullo; dunque

$$(4) \ldots \qquad a_{\mu, r}^{(r-1)} = 2^{r-1}(r-1)! .$$

Se invece assumiamo $i = r$, il secondo Σ è sempre zero; dunque

$$(5) \ldots \qquad a_{\mu, r}^{(r)} = 0 \quad (^{**}).$$

(*) Ricordiamo le formole di analisi combinatoria:

$$\sum_{0}^{n}{}_{i} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!$$

e

$$\sum_{0}^{n}{}_{i} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^{n-\alpha} = 0 ,$$

purchè α sia intero positivo e non maggiore di n.

(**) Anche queste due equazioni [(4) e (5)] si potrebbero stabilire immediatamente colla teoria delle differenze finite, riguardando $a_{\mu, r}$ come una funzione razionale intera di μ del grado $r - 1$.

Da quest'ultima proprietà segue tosto una rilevante semplificazione nei determinanti P e Q. In entrambi sulla colonna (μ) noi operiamo $\frac{\mu-1}{2}$ volte, quindi ad operazioni compiute saranno nulli in essa i primi $\frac{\mu-1}{2}$ elementi $\Big($oltre a quelli successivi al $(\mu+1)^{\text{mo}}\Big)$.

Passiamo ad occuparci delle rimanenti $\frac{m}{2}-1$ colonne del determinante P: in esse l'elemento r^{mo} della verticale (μ) sarà

$$\frac{d^r}{ds^r}s^\mu c\Delta = \sum_0^r{}_j \binom{r}{j}\frac{d^j.s^\mu}{ds^j}\frac{d^{r-j}.c\Delta}{ds^{r-j}}$$

$$= s^\mu \frac{d^r.c\Delta}{ds^r} + \sum_1^r{}_j \binom{r}{j} \mu(\mu-1)\ldots(\mu-j+1)s^{\mu-j}\frac{d^{r-j}.c\Delta}{ds^{r-j}}$$

$$= s^\mu \frac{d^r.c\Delta}{ds^r} + \sum_1^r{}_j \binom{r}{j} \mu\, a_{\mu,j}\, s^{\mu-j}\frac{d^{r-j}.c\Delta}{ds^{r-j}},$$

avvertendo però che si deve convenire $a_{\mu,1}=1$.

Pratichiamo su questo secondo gruppo di colonne le medesime operazioni di poco fa, e vediamo come si mutino i loro elementi. Dopo la 1ª sottrazione $\frac{d^r}{ds^r}s^\mu c\Delta$ diventerà

$$\frac{d^r}{ds^r}s^\mu c\Delta - s^2\frac{d^r}{ds^r}s^{\mu\ \ 2}c\Delta$$

$$= \sum_1^r{}_j \binom{r}{j} s^{\mu-j}\frac{d^{r-j}.c\Delta}{ds^{r-j}}\left[\mu\, a_{\mu,} - (\mu-2)\,a_{\mu-2,j}\right].$$

Ora quest'ultima differenza vale $\mu\, a'_{\mu,j} + 2\,a_{\mu-2,j}$ e rappresenta ciò che diviene $\mu\, a_{\mu,j}$ dopo la 1ª sottrazione: per induzione si dimostra colla massima facilità che, dopo i operazioni, $\mu\, a_{\mu,j}$ si cambia in

$$\mu\, a^{(i)}_{\mu,j} + 2\,i\,a^{(i-1)}_{\mu-2,j} \;;$$

sicchè, dopo i operazioni, l' elemento r^{mo} della colonna (μ) diverrà

$$\sum_{1}^{r}{}_{j}\binom{r}{j}\left[\mu\, a_{\mu,j}^{(i)}+2\,i\,a_{\mu-2,j}^{(i-1)}\right]s^{\mu-j}\frac{d^{r-j}.\,c\,\Delta}{d\,s^{r-j}}\ .$$

Ora il coefficiente tra parentesi quadra è nullo per $i-1=j$, per conseguenza dopo i sottrazioni saranno zero i primi $i-1$ termini di questa somma, e dopo $r+1$ sottrazioni sarà zero tutta la somma. Ma sulla colonna (μ) operiamo $\frac{\mu-1}{2}$ volte; dunque ad operazioni compiute saranno zero in ogni colonna i primi $\frac{\mu-3}{2}$ elementi, e degli elementi successivi i primi $\frac{\mu-3}{2}$ termini. Quindi l'elemento r^{mo} della colonna (μ) varrà

$$\sum_{\frac{\mu-1}{2}}^{r}{}_{j}\binom{r}{j}\left[\mu\, a_{\mu,j}^{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}+(\mu-1)\,a_{\mu-2,j}^{\left(\frac{\mu-3}{2}\right)}\right]s^{\mu-j}\,\frac{d^{r-j}.\,c\Delta}{d\,s^{r-j}}\ .$$

la qual somma rappresenteremo brevemente con $\Phi_{\mu,r}$ $\Big($Naturalmente questo non regge pell'ultima colonna, rimasta intatta, e di cui l'elemento r^{mo} è $s\,\frac{d^r.\,c\,\Delta}{ds^r}+r\,\frac{d^{r-1}.\,c\,\Delta}{ds^{r-1}}\Big)$.

Tali osservazioni sul secondo gruppo di colonne valgono anche pel determinante Q, senonchè vuolsi osservare che qui esse sono in numero di $\frac{m}{2}$ e comprendono m elementi in guisa che $\frac{d^r}{ds^r}\,s^{\mu}c\Delta$ riesce l'elemento $(r+1)^{\text{mo}}$. Quindi ad operazioni compiute saranno nulli nella colonna (μ) i primi $\frac{\mu}{2}$ elementi, e degli elementi successivi i primi $\frac{\mu}{2}-1$ termini; per cui l'elemento

$(r+1)^{mo}$ si ridurrà a $\mu \Psi_{\mu,r}$, posto per brevità

$$\Psi_{\mu,r} = \sum_{j=\frac{\mu}{2}}^{r} \binom{r}{j} \left[a_{\mu,j}^{\left(\frac{\mu}{2}\right)} + a_{\mu-2,j}^{\left(\frac{\mu}{2}-1\right)} \right] s^{\mu-j} \frac{d^{r-j}. \, c\,\Delta}{d s^{r-j}} \; .$$

(E qui pure è quasi superfluo il notare che ciò non vale pel-l'ultima colonna).

Osserviamo infine che i fattori $m-2$, $m-4$, . . . , 2 moltiplicanti le funzioni Ψ si elidono coi fattori stessi già presenti nel numeratore: facciamo per comodità di scrittura

$$a_{\mu,r}^{\left(\frac{\mu}{2}-1\right)} = A_{\mu,r} \quad \text{e} \quad m = 2 \quad ;$$

ed in forza di tutto ciò la formola (1) diverrà:

$$\text{(A)} \; \ldots . \qquad \operatorname{sn}(2\,n\,u) = (-1)^n \, 2\, n \, \frac{R}{S}$$

dove R ed S rappresentano rispettivamente i seguenti determinanti:

$$R=\begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdot\,\cdot\, s & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & s\dfrac{d\,.\,c\,\Delta}{d\,s}+c\,\Delta \\
0 & 0 & \cdot\,\cdot\, 1 & 0 & \cdot & \cdot\,\cdot & s\dfrac{d^2.\,c\,\Delta}{d\,s^2}+2\,\dfrac{d\,.\,c\,\Delta}{d\,s} \\
\cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\, 0 & \cdot & 0 & \cdot\,\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & 0 & \Phi_{2n-5,\,n-3} & \cdot\,\cdot & \cdot \\
\cdot & 0 & \cdot\,\cdot\,\cdot & \Phi_{2n-3,\,n-2} & \Phi_{2n-5,\,n-2} & \cdot\,\cdot & \cdot \\
0 & A_{2n-2,\,n-1}\,s^{n-1} & \cdot\,\cdot\,\cdot & \Phi_{2n-3,\,n-1} & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\
A_{2n,\,n}\,s^n & A_{2n-2,\,n}\,s^{n-2} & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\
A_{2n,\,n+1}\,s^{n-1} & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\
\cdot & A_{2n-2,\,2n-2} & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\
A_{2n,\,2n-1}\,s & 0 & \cdot\,\cdot\, 0 & \Phi_{2n-3,\,2n-1} & \Phi_{2n-5,\,2n-1} & \cdot\,\cdot & s\dfrac{d^{2n-1}.\,c\,\Delta}{d\,s^{2n-1}}+(2n-1)\dfrac{d^{2n-2}.\,c\,\Delta}{d\,s^{2n-2}}
\end{vmatrix}$$

$$S = \left| \begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & \cdot\,\cdot\, s & 0 & 0 & \cdots & c\,\Delta \\
0 & 0 & \cdot\,\cdot\, 1 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{d\,.\,c\,\Delta}{d\,s} \\
\cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\, 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & \cdots & \cdot \\
\cdot & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{2n-4,\,n-2} & \cdots & \cdot \\
0 & A_{2n-2,\,n-1}\,s^{n-1} & \cdots & \Psi_{2n-2,\,n-1} & \Psi_{2n-4,\,n-1} & \cdots & \cdot \\
A_{2n,\,n}\,s^{n} & A_{2n-2,\,n}\,s^{n-2} & \cdots & \Psi_{2n-2,\,n} & \cdot & \cdots & \cdot \\
A_{2n,\,n+1}\,s^{n-1} & & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & A_{2n-2,\,2n-2} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
A_{2n,\,2n-1}\,s & 0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
A_{2n,\,2n} & 0 & \cdot\,\cdot\, 0 & \Psi_{2n-2,\,2n-1} & \Psi_{2n-4,\,2n-1} & \cdot\,\cdot & \dfrac{d^{2n-1}\,.\,c\,\Delta}{d\,s^{2n-1}}
\end{array} \right.$$

È probabile che, nei singoli casi particolari, si presentino spontanee nuove semplificazioni, ma nel caso generale non par conveniente il procedere oltre. Una sola ne accennerò ancora, e consiste nell'abbassare la grandezza numerica dei coefficienti A. Ciò è reso possibile dal fatto che « in ognuna delle prime n verticali, tutti i coefficienti sono divisibili pel primo coefficiente non nullo ».

Infatti, in una qualsiasi di queste colonne il primo coefficiente diverso da zero è $A_{2\nu,\nu}$, cioè $a_{2\nu,\nu}^{(\nu-1)}$; e questo sappiamo [eq. (4)] che vale

$$2^{\nu-1}(\nu-1)!$$

D'altra parte, una qualunque delle A successive, p. es. $A_{2\nu,\nu+\alpha}$, $(\alpha=1, 2, \ldots, \nu)$, vale [eq. (3)]

$$a_{2\nu,\nu+\alpha}^{(\nu-1)}=\sum_{0}^{\nu+\alpha-1}{}_k(-2)^{\nu+\alpha-k-1}S_k\sum_{0}^{\nu-1}{}_h(-1)^h\binom{\nu-1}{h}h^{\nu+\alpha-k-1}.$$

ossia (giacchè la seconda somma è zero per $k>\alpha$)

$$2^{\nu-1}\sum_{0}^{\alpha}{}_k(-2)^{\alpha-k}S_k\sum_{0}^{\nu-1}{}_h(-1)^{\nu-1-h}\binom{\nu-1}{h}h^{\nu+\alpha-k-1}.$$

Ora è dimostrato (*) che ogni numero $\sum_{0}^{n}{}_i(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^{n+p}$ (dove p è un intiero positivo qualunque) è divisibile per $n!$; dunque ogni numero $A_{2\nu,\nu+\alpha}$ sarà divisibile per $A_{2\nu,\nu}$, $c.d.d.$

Per compiere lo studio dell'equazione (A) potrebbe proporsi di esibire l'espressione di $\frac{d^r.\,c\,\Delta}{d\,s^r}$ in funzione di s, c, Δ: io starò contento ad indicarne la forma. Dico che $\frac{d^r.\,c\,\Delta}{d\,s^r}$ è un fratto avente per numeratore una funzione razionale intera di $c^2\,\Delta^2$ del grado $r-1$, i cui coefficienti sono funzioni razionali

(*) F. Gerbaldi, *Nota sopra alcune applicaz. di una formola combinat.*, Giorn. Battaglini, vol. XVIII.

intere di s e di k^2, e per denominatore $(c\Delta)^{2r-1}$. Per dimostrarlo mi varrò anche qui del metodo induttivo. Ammettiamo che si abbia

$$\frac{d^r . c\Delta}{ds^r} = \frac{1}{(c\Delta)^{2r-1}} \left| f_1 (c\Delta)^{2r-2} + f_2 (c\Delta)^{2r-4} + \ldots + f_{r-1} (c\Delta)^2 + f_r \right|,$$

$f_1, \ldots, f_r$ essendo funzioni razionali intere di s e di k^2. Differenziando, sarà

$$\frac{d^{r+1} . c\Delta}{ds^{r+1}}$$

$$= \frac{1}{(c\Delta)^{4r-2}} \left\{ \begin{array}{l} (c\Delta)^{2r-1} \left[\begin{array}{l} f_1' (c\Delta)^{2r-2} + f_2' (c\Delta)^{2r-4} + \ldots + f_r' \\ + (2r-2) f_1 (c\Delta)^{2r-3} \dfrac{d . c\Delta}{ds} \\ + (2r-4) f_2 (c\Delta)^{2r-5} \dfrac{d . c\Delta}{ds} + \ldots \\ + 2 f_{r-1} c\Delta \dfrac{d . c\Delta}{ds} \end{array} \right] \\ + (2r-1)(c\Delta)^{2r-2} \dfrac{d . c\Delta}{ds} \left[f_1 (c\Delta)^{2r-2} + f_2 (c\Delta)^{2r-4} + \ldots + f_r \right] \end{array} \right\}.$$

Ora

$$(6)\ldots \quad \frac{d . c\Delta}{ds} = \frac{d}{ds} \sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)} = \frac{2 k^2 s^3 - (1+k^2) s}{c\Delta};$$

quindi

$$\frac{d^{r+1} . c\Delta}{ds^{r+1}}$$

$$= \frac{1}{(c\Delta)^{2r-1}} \left[\begin{array}{l} f_1' (c\Delta)^{2r-2} + f_2' (c\Delta)^{2r-4} + \ldots + f_r' \\ + F_1 (c\Delta)^{2r-4} + F_2 (c\Delta)^{2r-6} + \ldots + F_{r-1} \end{array} \right]$$

$$+ \frac{1}{(c\Delta)^{2r+1}} \left| \mathfrak{f}_1 (c\Delta)^{2r-2} + \mathfrak{f}_2 (c\Delta)^{2r-4} + \ldots + \mathfrak{f}_{r-1} (c\Delta)^2 + \mathfrak{f}_r \right|,$$

denotando con $F_1, \ldots, F_{r-1}, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$ altre funzioni razionali intere di s e di k^2; ovvero

$$\frac{d^{r+1} . c\Delta}{ds^{r+1}}$$

$$= \frac{1}{(c\Delta)^{2r+1}} \left[\begin{array}{l} f_1' (c\Delta)^{2r} + (f_2' + F_1 + \mathfrak{f}_1)(c\Delta)^{2r-2} + \ldots \\ + (f_r' + F_{r-1} + \mathfrak{f}_{r-1})(c\Delta)^2 + \mathfrak{f}_r \end{array} \right],$$

il che prova che, se la legge è vera per r derivazioni, è vera per $r+1$. Ma l'equazione (6) ci mostra che la legge è vera per $r=1$, dunque essa è vera in generale.

§ 3.

I paragrafi precedenti erano scritti quando ebbi notizia di due formole di moltiplicazione pel seno amplitudine, dovute al Prof. BRIOSCHI (*), le quali offrono qualche analogia colle nostre. Tali formole sono rivolte a dimostrare un enunciato di JACOBI. Dice il Brioschi, che, in una delle Memorie di Jacobi intorno alle funzioni ellittiche, pubblicate nei primi volumi del CRELLE, il celebre analista osserva come le formole pella moltiplicazione delle funzioni ellittiche « possono essere semplicemente formate per mezzo di talune espressioni delle derivate di due particolari funzioni irrazionali che egli assegna, aggiungendo, ad esempio, le formole relative dalla duplicazione alla quintuplicazione » (**). E, ad avviso del Brioschi, se nessuno, nelle ricerche posteriori sulla teorica della moltiplicazione, tenne presente « quel primo risultato ottenuto da Jacobi, ... fu a torto, giacchè ... *esso* costituisce quanto di più generale sia stato scritto sulla quistione ».

Dette rispettivamente $A^{(r)}$, $B^{(r)}$ le derivate r^{esime} delle funzioni $sc\Delta$, $\dfrac{c\Delta}{s}$ rispetto ad s^2, e posto

$$H_{r-1}=\frac{1}{r!}A^{(r)}, \qquad K_{r-1}=\frac{1}{r!}B^{(r)},$$

(*) BRIOSCHI, *Sopra una formola di Jacobi per la moltiplicaz. delle funz. ellitt.*, *Rendiconti del R. Istituto Lomb. di Scienze e Lettere*, adun. 24 Novembre 1864. Il lavoro fu poi riprodotto in appendice alla traduzione italiana dell'opera del CAYLEY, *An elementary treatise on elliptic functions*, pp. 365-71.

(**) Dice precisamente JACOBI: « Supposant $x=\operatorname{sn} u$, les quantités $\operatorname{sn}(2u)$, $\operatorname{sn}(3u)$, $\operatorname{sn}(4u)$, etc., peuvent être exprimées d'une manière assez remarquable, au moyen des différentielles des quantités $\sqrt{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, $\sqrt{\dfrac{(1-x^2)(1-k^2x^2)}{x^2}}$ prises par rapport à x^2 ». E più sotto: « On aura des formules analogues si l'on veut employer au lieu de *ces* différentielles, celles des quantités

$$\frac{1}{\sqrt{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1-x^2)(1-k^2x^2)}{x^2}}} »$$

(*Giorn. di* CRELLE, IV, p. 187).

la formola, che dà il Brioschi per la moltiplicazione d'ordine pari, è

$$\operatorname{sn}(2nu) = (-1)^n \frac{1}{s^{2n}} \frac{\begin{vmatrix} H_2 & H_3 & \cdot\cdot & H_n \\ H_3 & H_4 & \cdot\cdot & H_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ H_n & H_{n+1} & \cdot\cdot & H_{2(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_0 & K_1 & \cdot\cdot & K_{n-1} \\ K_1 & K_2 & \cdot\cdot & K_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ K_{n-1} & K_n & \cdot\cdot & K_{2(n-1)} \end{vmatrix}};$$

e quella per la moltiplicazione di ordine impari

$$\operatorname{sn}[(2n+1)u] = (-1)^{n-1} s^{2n-1} \frac{\begin{vmatrix} K_1 & K_2 & \cdot\cdot & K_n \\ K_2 & K_3 & \cdot\cdot & K_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ K_n & K_{n+1} & \cdot\cdot & K_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_1 & H_2 & \cdot\cdot & H_n \\ H_2 & H_3 & \cdot\cdot & H_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ H_n & H_{n+1} & \cdot\cdot & H_{2n-1} \end{vmatrix}}.$$

Senza dilungarmi oltre in questo cenno, noto che all'asserto di Jacobi provato da tali formole, possiamo contrapporre un'osservazione dimostrata dalle formole cui conduce il nostro metodo. E, cioè, che le formole per la moltiplicazione di ordine m del seno amplitudine si possono formare con *derivate* di $\operatorname{sn}^m u$, intendendo però per *derivate* funzioni dedotte da $\operatorname{sn}^m u$ col solo processo della derivazione, e precisamente funzioni dei due tipi

$$\frac{d^k}{ds^k} s^m \quad \text{e} \quad \frac{d^i}{ds^i} \frac{d}{du} \frac{d^k}{ds^k} s^m.$$

Il Socio Comm. Prof. Angelo GENOCCHI presenta e legge la seguente Nota del sig. H. A. SCHWARZ, Professore nell'Università di Gottinga, avvertendo che il metodo così semplice ed elegante in essa usato già gli era stato comunicato dall'Autore con lettera del dì 8 gennaio 1881:

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UNE PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

DES FONCTIONS INTERPOLAIRES.

1° Désignons par t une variable indépendante qui puisse prendre toutes les valeurs réelles comprises entre deux limites données, par $F(t)$ une fonction de cette variable et par $F'(t)$, $F''(t)$, ... $F^{(n-1)}(t)$ ses dérivées des $n-1$ premiers ordres.

Supposons que la fonction $F(t)$ ne prenne que des valeurs réelles et que chacune des fonctions $F(t)$, $F'(t)$, $F''(t)$, ... $F^{(n-1)}(t)$ soit une fonction continue ne prenant qu'une seule valeur pour chaque valeur de son argument.

Supposons enfin que la fonction $F(t)$ s'annule pour les n valeurs différentes t_λ $[\lambda = 1, 2, \ldots n]$ de son argument.

$$[t_1 < t_2 < \ldots < t_n]$$

Des équations

$$F(t_1) = 0 \;, \qquad F(t_2) = 0 \;, \qquad \ldots, \qquad F(t_n) = 0$$

on conclut, d'après un théorème connu, que, choisissant convenablement les $n-1$ valeurs t'_λ

$$\left[\lambda = 1, 2, \ldots (n-1) \;; \qquad t_\lambda < t'_\lambda < t_{\lambda+1}\right],$$

on aura les équations

$$F'(t'_1)=0\ ,\qquad F'(t'_2)=0\ ,\qquad \ldots\qquad F'(t'_{n-1})=0\ .$$

En continuant ainsi le raisonnement on parviendra aux équations analogues

$$F''(t_1'')=0\ ,\qquad F''(t_2'')=0\ ,\qquad \ldots\qquad F''(t''_{n-2})=0\ ,$$
$$F'''(t_1''')=0\ ,\qquad \ldots\qquad F'''(t'''_{n-3})=0\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(n-1)}(t_1^{(n-1)})=0\ .$$

Toutes les valeurs $t_\lambda^{(\mu)}$ sont intermédiaires entre t_1 et t_n.

2° Désignons par $f(t)$ une fonction de la variable t qui soit soumise aux mêmes conditions que la fonction $F(t)$ sauf la condition de s'annuler pour les valeurs $t_1, t_2, \ldots t_n$. Soit $f(t)$ la fonction génératrice des fonctions interpolaires $f(t_1, t_2)$, $f(t_1, t_2, t_3), \ldots f(t_1, t_2, \ldots t_n)$. (Voir les *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* vol. XIII, pag. 716, et vol. XVI, pag. 270-272).

Soit $g(t)$ la fonction entière du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré donnée par la formule d'interpolation dite de Newton

$$g(t)=f(t_1)+f(t_1, t_2)\cdot(t-t_1)+f(t_1, t_2, t_3)\cdot(t-t_1)(t-t_2)+\ldots$$
$$+f(t_1, t_2, \ldots t_n)\cdot(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{n-1})$$

on aura pour $\lambda=1, 2\ldots n$

$$f(t_\lambda)=g(t_\lambda)\ .$$

En désignant la valeur constante de la dérivée du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre de la fonction $g(t)$ par $g^{(n-1)}(t)$, on aura

$$g^{(n-1)}(t)=1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)f(t_1, t_2, \ldots t_n)\ .$$

La fonction $F(t)$ définie par l'équation

$$F(t) = f(t) - g(t)$$

répond précisément aux conditions énoncées dans le n° 1. Donc posant $t = t_1^{(n-1)} = u$, où u désigne une valeur intermédiaire entre t_1 et t_n, on aura

$$F^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - g^{(n-1)}(t)\ , \qquad F^{(n-1)}(u) = 0\ ,$$

ou

$$f(t_1\,,\, t_2\,, \ldots t_n) = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(u)\,. \quad [t_1 < u < t_n]$$

C. Q. F. D.

In questa adunanza la Classe, giusta quanto nella loro Relazione conchiudevano i Commissarii il 14 del p. p. Maggio, udita la lettura del lavoro del sig. N. JADANZA, intitolato: « *Alcuni problemi di Geodesia* », ne approva la stampa nei Volumi delle *Memorie*.

In questa adunanza la Classe approva il seguente

PROGRAMMA.

La Reale Accademia delle Scienze di Torino apre il Concorso ad un premio di lire **2000** (duemila) da conferirsi ad un lavoro che tratti di Mineralogia, o di Geologia, o di Paleontologia.

Il lavoro dovrà essere presentato all'Accademia entro il giorno 31 Dicembre 1883, e potrà essere inviato manoscritto o stampato. Nel primo caso, qualora l'Autore non voglia palesare il suo nome, dovrà unire al manoscritto una scheda sigillata, in cui il nome sia indicato, e dovrà contrassegnare con una medesima epigrafe il manoscritto e la scheda.

Non si conferirà il premio a un lavoro, che sia stato già pubblicato prima del 1° Gennaio 1882, o sia stato già premiato da altra Accademia.

Sono ammessi al Concorso tutti gli Italiani, eccettuati i Soci residenti e non residenti dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Il giudizio verrà dato entro i primi sei mesi del 1884.

Torino, addì 11 Giugno 1882.

Il Presidente
ERCOLE RICOTTI

L'Accademico Segretario
ASCANIO SOBRERO.

Adunanza del 25 Giugno 1882.

PRESIDENZA DEL SIG. COMM. PROF. PROSPERO RICHELMY
VICE-PRESIDENTE

Il Socio Cav. Prof. Giulio Bizzozero legge la seguente sua

COMMEMORAZIONE

DI

TEODORO SCHWANN.

Sogliono alcuni popoli tributare solenni onoranze ad illustri trapassati non prima di parecchi anni dal dì della morte, affinchè le passioni e gli affetti ancor caldi, e lo zelo degli amici e dei discepoli, ed il fervore interessato dei partigiani non faccian velo alla verità, e non rechino offesa a quell'imparzialità che non dovrebbe essere dimenticata nemmeno dinanzi alle tombe.

Ed è per consimile ragione, che quando ci accade di udire o di leggere una commemorazione fatta su di un fresco tumulo, pendiamo incerti sul quanto spetti alle virtù del defunto, e sul quanto gli accordi immeritamente la facile liberalità del vivo.

Alla memoria di Teodoro Schwann appena morto vennero resi straordinarî tributi d'onore, sì da Corpi scientifici che da scienziati illustri. Ma per lui non si può dire che sia stato l'amor cieco degli amici o il fervore interessato dei partigiani che abbian fatto suonare le trombe della fama. Giacchè su di lui la storia ha già da molto tempo pronunciato il suo giudizio. In Schwann, l'uomo per molti anni ha sopravvissuto allo scienziato; ed il silenzio in cui trasse l'ultimo periodo della sua vita fu così profondo, che si era abituati a considerarlo come appartenente ad una generazione già spenta.

Quanto si disse di lui, adunque, è quanto si meritava. Le sue scoperte sono passate sotto la critica ed il lavoro di quasi mezzo secolo; sicchè si può fin d'ora, non solo accertare quanto ci sia in esse di vero, ma eziandio determinare l'influenza direttiva che ebbero sugli studi della biologia.

Teodoro Schwann nacque, quarto figlio dell'editore Leonardo, il 7 dicembre 1810 a Neuss, presso Düsseldorf. Dopo aver percorso i primi studi nella sua città ed a Colonia, seguì i corsi universitarî a Bonn ed a Würzburg e li terminò a Berlino, ove venne addottorato nel 1834. È a Berlino ch'ebbe la ventura d'essere apprezzato da Giovanni Müller, che se lo scelse ad assistente; ed è dagli anni in cui fruì della compagnia del grande fisiologo che datano i principali suoi lavori. — Nel 1838, mentre si preparava alla abilitazione per la docenza privata, gli venne offerta ed accettò la cattedra di anatomia all'università cattolica di Lovanio; qui si trattenne dieci anni, poi passò a Liegi qual professore, prima di anatomia, poi di fisiologia; e a Liegi rimase fin poco prima della sua morte, che ebbe luogo il 14 gennaio di quest'anno a Colonia.

Il periodo brillante della vita scientifica di Schwann è brevissimo. Esso si chiude poco tempo dopo la sua partenza da Berlino, e resta chiuso per sempre. A che dobbiamo l'improvviso arrestarsi di una attività che aveva già dato tanti frutti? Alcuni l'attribuirono alla mancanza di mezzi di lavoro, poichè fu solo negli ultimi anni di sua vita che egli potè istituire un piccolo laboratorio. Ma difficilmente questa spiegazione soddisferà noi, che in Italia siamo costretti a strappare lembo a lembo al pubblico erario quanto ci abbisogna, e che sappiamo come anche in ciò nulla resista a chi fortemente vuole. La ragion vera s'ha forse a cercare in un campo più elevato, in quello in cui scienza e fede, a seconda degli individui, s'affratellano o si combattono? La coscienza cattolica di Schwann s'è forse spaventata delle illazioni a cui lo doveva condurre la scienza sua? Non si è egli ricordato troppo di essere il professore dell'università cattolica di Lovanio e troppo poco di dover essere un indipendente investigatore del vero? Che nelle lotte religiose si sieno giovati di lui non è dubbio; e lo si sarebbe anche impigliato nell'ignobile commedia di Luigia Lateau, se la sua coscienza di uomo e di pensatore non si fosse alla fine sollevata contro le improntitudini della religione bottegaia.

Dei lavori di Schwann io non ricorderò che i principali:

A 24 anni, nella sua tesi di laurea, egli studiò la respirazione nell'uovo incubato, e dimostrò che in un'atmosfera di idrogeno o d'azoto, o nel vuoto esso produce acido carbonico e continua a svilupparsi, ma soltanto per un certo numero d'ore. A questo seguirono altri scritti sulla contrattilità delle arterie, sulle membrane dei capillari e delle fibre nervose, sulle funzioni della bile negli intestini e così via. È a lui che dobbiamo la scoperta, fatta nel 1836, della pepsina nel succo gastrico; ed egli così esattamente ne descrisse le proprietà, ed indicò le condizioni necessarie alla sua azione, che ben poco d'allora in poi vi si potè aggiungere dagli altri osservatori. Ed è pure a lui che dobbiamo delle esperienze che formano epoca nella storia della generazione spontanea. Egli dimostrò, che quando l'aria che arriva ad una sostanza putrescibile venne previamente arroventata, non ha luogo putrefazione, perchè a questo modo andaron distrutti i germi da cui questa è destata; e fu tra i primi a porre in luce l'analogia che corre fra i fenomeni della putrefazione e quelli della fermentazione; concorrendo così a stabilire una dottrina che ha preso tanto sviluppo ed ha dato risultati così prodigiosi ai giorni nostri.

Ma il nome di Schwann è legato ad un'opera di interesse ben più generale. Il microscopio, già da due secoli in mano agli investigatori, aveva svelato forme nuove e meravigliose nella struttura degli esseri organizzati; ma le nozioni con esso raccolte non potevano ancora venir riunite in un corpo di dottrina, poichè non eran collegate da principii generali, da leggi. L'organizzazione colla sua varietà infinita di apparenze sembrava l'espressione di una forza creatrice bizzarra ed instancabilmente sfrenata. Non fu che nel decennio dal 1830 al 40 che un potente ingegno, lo Schleiden, nel più facile campo dell'istologia vegetale, comparando fra loro le diverse strutture e tenendo dietro alle modificazioni che subiscono nel loro sviluppo, le ridusse tutte ad una forma unica elementare, alla cellula. S'era fatto un gran passo: ma non era tutto. Restava il campo assai più oscuro della morfologia animale, ove i tessuti raggiungono i più alti gradi dell'evoluzione per compiere funzioni sempre più perfette e più complesse. Ci voleva l'uomo che alla mano abile ed all'occhio acuto dell'investigatore unisse una larga mente sintetica, la quale sapesse coordinare i fatti raccolti, raffrontarli fra loro, distinguere l'essenziale dall'accessorio, e ricavarne per questa via le leggi dell'organizzazione. Quest'uomo fu Schwann; ed è nella sua opera: *Mikroskopische*

Untersuchungen ueber die Uebereinstimmung in der Structur und dem Wachstum der Thiere und Pflanzen (Berlin, 1839), che noi troviamo esposto e dimostrato il principio dell'unità di struttura degli esseri organizzati. Tutti i tessuti, anche i più complicati dei più elevati organismi, derivano dalla trasformazione di un unico elemento, la cellula. E si noti ch'egli mirava anche più in là della forma. Divinando le scoperte future, egli fu tra i primi a riconoscere nelle cellule che costituiscono i tessuti una certa autonomia: e, nemico del vitalismo, esprimeva il suo concetto in forma positiva: le cellule hanno in sè le ragioni della propria esistenza; le combinazioni delle molecole, quali esse si trovano in ogni singola cellula, bastano a render libere quelle forze, per le quali la cellula può attrarre nuove molecole.

Noi, che siamo cresciuti coi principii della fisiologia cellulare, difficilmente possiamo farci un'idea dell'eco che ebbe, e del movimento che destò il loro primo annuncio nel mondo della scienza. Ecco quanto ne scrive un illustre testimonio, il Virchow: « Io cominciai i miei studi a Berlino nello stesso anno in cui Schwann, ancora a Berlino e dopo averci pubblicato la sua opera, accettò la nomina di Professore all'Università cattolica di Lovanio. L'atmosfera scientifica era ancora impregnata delle nuove idee. Giovanni Müller stesso, il nostro venerato Maestro, le accettava pienamente; anzi, egli era stato il primo ad introdurle in larga misura nella patologia, usando degli stessi principii nello studio dei tumori. Che meraviglia, adunque, che noi giovani cominciassimo precocemente a pensare secondo i dettami della teoria cellulare? ».

La dottrina di Schwann non incontrò nè grandi nè tenaci contradditori, tanto furono numerose ed accurate le indagini con cui egli ne assicurò l'entrata nel dominio della scienza. Non tutte le parti della sua dottrina ebbero egual sorte: alcuna, per es. quella che spiega colla formazione libera l'origine delle cellule, accettata generalmente dapprima, non trova oggi seguito. Ma la parte essenziale, quella che ripete dalla cellula l'origine d'ogni tessuto, non ebbe dalle ricerche fatte in più di quattro decenni da tanti osservatori, che nuove conferme e nuove applicazioni.

Ben di raro un rivolgimento scientifico si fa da un uomo solo. Vi ha un periodo di preparazione, ed il creatore ha, anche qui, non uno ma molti precursori. Si potrà dire di Schwann ch'egli fu accarezzato dalla fortuna; ch'egli crebbe nel momento opportuno, quando la messe, da altri seminata, era matura. E sia pure! ma quanti al posto di lui, avrebbero saputo afferrare tale fortuna?

Anche nella scienza si distinguono i gregari ed i duci. Quelli lavorano e non di rado s'illustrano con grandi scoperte, ma correndo nella via tracciata da questi. Schwann fu dei duci, ed è sui principii ch'egli ha stabilito, che posò ed allargò le sue fondamenta la biologia.

Il Socio Cav. Prof. Giuseppe Basso presenta e legge la seguente Memoria del sig. Dott. G. Albertotti (*Junior*), Assistente alla Clinica oftalmologica della R. Università di Torino:

TELEMETRIA

Apprezzamento delle distanze.

L'occhio emmetropico considerato nello stato di riposo può giudicare delle distanze dal minimo angolo visuale sotto cui vede distintamente un oggetto di dimensione conosciuta. Quest'angolo si suol ritenere uguale a 5′ benchè in realtà sia minore e presenti notevoli variazioni individuali, le quali possono però considerarsi costanti per uno stesso occhio. Il rapporto fra la distanza massima (d) a cui date dimensioni sono ancor vedute distintamente e la distanza (D) a cui le stesse dimensioni si presentano sotto un angolo di 5′ stabilisce, come è noto, l'acuità visiva (V) di un occhio:

$$V = \frac{d}{D} .$$

Determinato quindi per un dato occhio il V, poco o punto lascierebbe a desiderare il giudizio che sulle distanze quest'occhio arreca, tenendo per base l'osservazione di figure speciali, come ad es. le tavole *Optotypi* di Snellen (*). Dal numero della tavola che viene ancor veduta distintamente si dedurrebbe quale ne sia la distanza dell'osservatore. Ma la percezione distinta di un oggetto alla distanza massima cui, stante la dimensione dell'oggetto, questo potrebbe ancora essere distintamente veduto, non è molto agevole ottenere; specialmente poi quando si tratti di osservare oggetti

(*) Snellen H., *Optotypi ad visum determinandum*; I. Greven. Utrecht, MDCCCLXXV.

di dimensione non troppo piccola, come ad es. il N[ro] *CC* delle tavole suddette, oppure figure disegnate nelle stesse proporzioni e corrispondenti ai N[ri] *CCC*. . . *D*. . . *M*. . di SNELLEN; si troverà che i rapporti del massimo d'acutezza visiva determinati con dimensioni diverse, differenziano notevolmente fra di loro. Fra le condizioni esterne che più direttamente concorrono a modificare tali rapporti, astrazion fatta dallo stato di trasparenza e dall'indice di rifrazione dell'atmosfera, esercita speciale influenza il grado di rischiaramento generale. Come noi sappiamo, nel grado di illuminazione necessario per godere del massimo d'acutezza visiva, havvi un certo limite (*) chiamato *Luce minima sufficiente* (*L. m. s.*), al disotto del quale riesce impossibile di vedere distintamente ed occorre ingrandire l'angolo visuale per compensare la deficienza di luce.

Or bene, questo grado *L. m. s.* relativo ad una data dimensione non vale che per quella, e, trattandosi d'osservare dimensioni maggiori, tale grado di illuminazione sarà già insufficiente, mentre che sarà più che sufficiente nel caso d'osservazione di dimensioni minori.

Infatti nelle condizioni di luce più favorevoli che permettono ancora di godere un $V = \frac{20}{XX}$, se è possibile constatare nel tempo istesso $V = \frac{10}{X}$, ciò non è più per i N[ri] *C*. . *CC*. . *M*. . per i quali sarà necessario accrescere il grado di illuminazione, ovvero sia compensarvi coll'ingrandimento dell'angolo visuale (**), ed allora varia la distanza; epperciò le determinazioni delle distanze che se ne deducono soggiacciono a gravissime cause d'errore dipendenti sovrattutto dalla difficoltà di valutare il grado di illuminazione.

(*) REYMOND C., *Annotazioni sul torpore della retina.* Giorn. dell'Acc. R. di Med. Torino, 1872.

Id. *Stato torpido e stati emeralopici della retina.* Ann. d'Oftalm. Milano, 1872.

(**) Tobia MAYER, 1654; Foerster. Breslau, 1857.

KLEIN (N. Th.), *De l'influence de l'éclairage sur l'acuité visuelle.* Paris, 1873.

RICCÒ A., *Relazione fra il minimo angolo visuale e l'intensità luminosa.* Modena, 1877.

ALBERTOTTI G., *Sul rapporto tra* V *ed* L. Milano, 1877.

Nè giova servirsi di cannocchiali di determinato ingrandimento: l'intensità luminosa dei raggi scemata nell'attraversare i molteplici mezzi rifrangenti dello strumento renderà più incerta ancora la determinazione.

Di qui la necessità di ricorrere ad altri metodi telemetrici fra cui, specialmente ove si tratti di celerimetria, offrono speciali vantaggi quelli che si fondano sullo sdoppiamento dell'immagine che dà luogo alla diplopia monoculare.

Sistemi a doppia immagine.

Accennerò brevemente a qualcuno dei principali sistemi a rifrazione all'uopo adoperati per ottenere lo sdoppiamento della immagine, rinviando per più complete ed estese nozioni sulle loro applicazioni e modificazioni alle dottissime monografie che scrissero sopra i telemetri i capitani AMICI e BOTTO (*).

La prima descrizione particolareggiata che io trovo del sistema si è del BOUGUER (1748) (**), il quale costruì un cannocchiale con due obbiettivi a lungo fuoco e di uguale distanza focale, dei quali uno era mobile; otteneva in tal guisa sdoppiabile l'immagine del grande astro e ne determinava i due diametri, denominando perciò il suo istrumento Astrometro od Eliometro. La priorità della scoperta viene però da alcuno contrastata al BOUGUER e si attribuisce a SERVINGTON SAVERY (1743) (***). Il DOLLOND, poco dopo (1753), divise l'obbiettivo in due parti secondo un diametro: le due semilenti spostandosi parallelamente al diametro comune per spazii uguali l'una in un senso e l'altra nell'altro, quando si gira una vite micrometrica, di cui l'apparecchio è munito, dànno luogo allo sdoppiamento dell'immagine: ad ogni modo però con tali mezzi, che presentano d'altronde notevolissime difficoltà di costruzione e d'applicazione, non si può

(*) AMICI G. B., *Sopra la misura delle distanze in guerra.* Giornale d'Artiglieria e Genio. Roma, 1877.

BOTTO A., *Relazione sui telemetri.* Giorn. d'Art. e Gen. Roma, 1882.

(**) BOUGUER, *De la mesure des diamètres des plus grandes planètes; descr. d'un nouvel instr., qu'on peut nommer* Héliomètre, *propre à les déterminer et obs. sur le soleil.* – Hist. de l'Acc. Roy. des Sciences. Ann. MDCCXLVII. Paris, 1752.

(***) *Phil. Trans.*, vol. XLVIII, part. I, for the Y, p. 167.

ottenere che lo sdoppiamento di piccoli tratti del campo del cannocchiale, e l'istromento non può quindi adoperarsi che per l'osservazione di oggetti veduti sotto angoli piccolissimi.

Il prof. G. B. AMICI di Modena (*) pensò di ovviare a questo inconveniente, ed in una lettera al barone ZACH (1823) propose di trasportare la lente con cui si opera lo sdoppiamento fra l'obiettivo ed il suo fuoco; fra i molteplici vantaggi di tale disposizione si annovererebbe ancora quello di dare una più grande scala e di rendere le immagini ugualmente chiare e luminose nella misura dei piccoli angoli come dei grandi, benchè le immagini siano, come nel sistema, leggermente deformate.

Di un mezzo più semplice si era servito il ROCHON (1777) (**), interponendo un doppio prisma di cristallo di rocca, tra l'obiettivo e l'oculare di un cannocchiale; il doppio prisma è costruito in guisa che l'angolo di sdoppiamento delle immagini varia col variare della distanza del prisma dell'obiettivo, così che quando il prisma si trova nel piano focale principale dell'obiettivo non si ha sdoppiamento, mentre che questo ha luogo e cresce quanto più il prisma si avvicina all'obiettivo.

ARAGO (***) trovò opportuno di porre il prisma tra l'occhio e l'oculare; era però necessario servirsi di un oculare mobile per cambiare a volontà l'ingrandimento. Ma il difetto principale del sistema, specialmente nello strumento di ROCHON, sta nella non completa acromicità d'una delle due immagini per cui queste non sono egualmente chiare e distinte, difetto che spicca vie più ove il sistema venga applicato a cannocchiali di forte ingrandimento; al che deve ancora aggiungersi la difficoltà di ottenere che il doppio prisma ne' suoi movimenti non si inclini sull' asse del cannocchiale (****).

Più recentemente abbiamo GIRAUD-TEULON (1875) (*****), il quale ottenne lo sdoppiamento dell'immagine in un cannocchiale per mezzo della divisione dell'oculare, ed in ultimo il D[r] LAN-

(*) AMICI G. B., loc. cit., nota A.

(**) POUILLET, *Éléments de Physique expérimentale.* Lib. Hachette et C. Paris, 1853.

(***) Ibid.

(****) DESPRETZ C., *Traité de Physique*, Bruxelles, 1837.

(*****) GIRAUD-TEULON F., *Télémètre par division de l'oculaire.* Compt. rend. de l'Acad. des Sciences. Paris, 7 juin 1875.

Le même, *La vision et ses anomalies.* Paris, 1881.

DOLT (1878) (*), il quale raggiunse lo stesso scopo con un metodo suo speciale, che consiste nell'applicare al cannocchiale di Galileo il doppio prisma di Herschell perforato al centro da un'apertura più piccola della pupilla: effettuandosi la visione di un oggetto contemporaneamente a traverso il foro centrale ed a traverso il prisma, ne avviene che l'oggetto è veduto semplice, finchè il prisma è a 0°; ma si produce lo sdoppiamento e va crescendo man mano che, colla rotazione reciproca, aumenta l'angolo del prisma.

Parmi però che il concetto dello sdoppiamento dell'immagine sia stato concretato in guisa oltremodo semplice, spedita e pratica dall'HELMHOLTZ (**) nel sistema di cui si servì per l'Oftalmometro, istromento destinato alla misura di dimensioni che non eccedono i pochi millimetri, come ad es.: i riflessi della cornea e del cristallino, il diametro della pupilla, ecc.; la perfetta acromicità rende le immagini ugualmente chiare e nitide e se ne determina perciò assai facilmente lo sdoppiamento.

(*) LANDOLT, *Un télémètre.* Archives d'ophtalmologie, publiées par F. PANAS, E. LANDOLT, F. PONCET (de Cluny), tom. I. Paris, 1880.

(**) H. HELMHOLTZ, *Ueber die Accommodation des Auges.* Archiv. für Ophthalm. Berlin, 1855.

Ho creduto pregio dell'opera ricercare specialmente, per quanto le circostanze e la natura del lavoro lo consentivano, se altri prima dell'HELMHOLTZ avesse potuto far uso del sistema da lui adottato per lo sdoppiamento dell'immagine nell'Oftalmometro. — Dopo aver consultato in proposito l'illustre SCHIAPARELLI, che mi fu largo di cortesi spiegazioni, da cui trassi il convincimento che si debba al solo HELMHOLTZ la priorità del sistema, reputai debito di riverenza lo interpellare direttamente questo illustre Uomo, il quale con una lealtà e con una modestia pari al di lui merito, mi onorò della seguente risposta: da cui ben si può concludere con certezza non conoscersi altra precedente applicazione di due lamine piano-parallele per ottenere doppie immagini:

Berlin. 31 *Juli* 1882.

Geehrter Herr Doctor,

indem ich Ihnen für die freundliche Uebersendung Ihrer Abhandlungen meinen besten Dank sage...
.... erlaube ich mir auf die in dem Briefe gestellte Frage zu antworten, dass mir keine frühere Anwendung je zweier planparalleler Glasplatten zur Erzeugung von Doppelbildern bekannt geworden ist, als die von mir im Ophthalmometer gemachte. Ich muss aber gleichzeitig sagen, dass ich eine methodische Durchforschung der älteren Litteratur nach dieser Frage nicht ausgeführt habe.
Hochachtungsvoll

Ihr H. HELMHOLTZ.

Al sig. Dott. G. ALBERTOTTI, Torino.

Lo strumento dell'Helmholtz consiste essenzialmente in un cannocchiale munito anteriormente all'obiettivo di un telaio in cui sono imperniate due lamine di vetro a superficie parallele, suscettibili di ruotare in senso inverso una dell'altra sopra uno stesso asse di rotazione perpendicolare e simmetrico all'asse del cannocchiale.

Lo sdoppiamento dell'immagine viene operato dalle lamine e si fonda sullo spostamento laterale degli oggetti veduti a traverso una lamina di vetro limitata da superficie parallele, inclinata sulla linea visuale (*).

Sia $ABCD$ (fig. 1ª) la sezione di una lamina di vetro a superficie piane e parallele; AB e CD rappresentano per ciò due linee rette e parallele; poniamo che un raggio ab cada obliquamente sopra AB e che bc normale ad AB nel punto b rappresenti la normale d'incidenza; allora $abc = \alpha$ rappresenta l'angolo d'incidenza. Il raggio ab passando dall'aria nel vetro si avvicina alla normale d'incidenza, cosicchè l'angolo $dbe = \beta$ formato dal raggio rifratto be col prolungamento della normale bd sarà più piccolo dell'angolo d'incidenza; arrivato il raggio be in e esce dal vetro e rientra nell'aria; sia ef la normale al punto d'emergenza e ed eg ne sia il prolungamento. Il raggio emergente eh formerà colla normale ef un angolo d'emergenza hef uguale all'angolo d'incidenza $abc = \alpha$, epperciò eh sarà parallelo ad ab. Arrivando il raggio eh all'occhio dell'osservatore, questi vede il punto luminoso a non più dove si trova, sibbene nella direzione della linea d'emergenza situato quindi sul prolungamento della medesima in a. Qualsiasi normale xy eretta sulle due parallele ab ed ah e compresa fra di esse serve di espressione allo spostamento che subì la posizione apparente del punto luminoso per opera della lamina di vetro. Il valore di xy viene così calcolato; facendo cadere da b la normale bz sopra ah naturalmente sarà $bz = xy$. Ora bz essendo cateto del trian-

---

(*) H. Helmholtz, loc. cit.
W. Wundt, *Traité de Physique médicale*. Trad. par le Dr Monoyer. Paris, 1871.
L. Mauthner, *Vorlesungen über die optischen Fehler des Auges*. Wien, 1842.
L. De Wecker et Landolt, *Traité complet d'ophthalmologie*, tom. I. Paris, 1880.

golo rettangolo bze è uguale all'ipotenusa moltiplicata pel seno dell'angolo opposto, abbiamo quindi

$$bz = be \operatorname{sen} bez \qquad \ldots\ldots [1].$$

Ma be è allo stesso tempo l' ipotenusa del triangolo rettangolo bed, e quindi è uguale ad un cateto, p. es. bd diviso pel coseno dell'angolo acuto adiacente a questo cateto stesso, cioè dell'angolo β: abbiamo perciò

$$be = \frac{bd}{\cos\beta} \; ;$$

abbiamo inoltre:

$$\text{ang}\; bez = \text{ang}\; gez - \text{ang}\; gbc = \alpha - \beta \;,$$

essendo che

$$\text{ang}\; gez = \text{ang}\; hef = \alpha$$

siccome angoli opposti al vertice, ed egualmente

$$\text{ang}\; geb = \text{ang}\; ebd = \beta$$

siccome angoli alterni interni.

Sostituendo i valori di be e di ang bez nella equazione [1], otteniamo

$$bz = \frac{bd}{\cos\beta} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \;,$$

e se esprimiamo con h la linea bd che rappresenta lo spessore della lamina, si ha

$$h = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\beta} \;.$$

Ne risulta poi che lo spostamento prodotto da due lamine di ugual spessore della stessa sostanza e girate di angoli eguale in direzioni opposte, sarà

$$2h \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\beta} \;.$$

Ora, la grandezza Δ di un oggetto, ottenuta col fare coincidere i punti d'origine e di fine dell'oggetto (cioè col raddoppiarlo) mediante la rotazione delle lamine, vien determinata dalla grandezza dello spostamento, ed abbiamo quindi

$$\Delta = 2h \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$$

dalla qual formola possiamo eliminare l'angolo β ricorrendo alla nota eguaglianza

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}$$

in cui n rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo di cui sono costituite le lamine ed avere

$$\Delta = 2h\left(1 - \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\alpha}}\right) \quad \ldots\ldots [2].$$

Come si vede dalla formola [2] non occorre conoscere la distanza dell'oggetto per determinarne la grandezza. Inoltre l'angolo di rotazione delle lamine che corrisponde allo sdoppiamento di uno stesso oggetto non cambia, sia che questo oggetto sia veduto direttamente a traverso le lamine, oppure lo si osservi coll'interposizione fra le lamine e l'occhio di un cannocchiale; l'aggiunta del cannocchiale favorisce l'osservazione perchè l'oggetto venendo veduto sotto un dato ingrandimento, può osservarsi a maggiore distanza, ma non ha influenza sulla porzione del tratto sdoppiabile con una data rotazione. In amendue i casi il grado di rotazione relativo allo sdoppiamento di uno stesso tratto è identico per qualsiasi distanza dell'oggetto, dipende quindi solo dalla dimensione dell'oggetto ed il valore corrispondente letto sulle tavole di graduazione (*) ci rappresenta delle grandezze reali, le quali partendo da $^1/_{100}$ di mm. non oltrepassano però i 10 mm., a meno che venga aumentato a dismisura lo spessore delle lamine, ciò che evidentemente nuocerebbe sotto il rapporto della nitidezza della immagine.

Tale posizione delle lamine adunque non permette di sdoppiare tratti di dimensione maggiore della indicata. Egli è disponendo il sistema delle lamine deviatrici lungo l'asse di un cannocchiale terrestre e di un cannocchiale di Galileo che ideai il seguente sistema telemetrico: nel quale il valore corrispondente al grado di rotazione delle lamine non si riferisce più come nell' Oftalmometro a grandezze reali, ma ci rappresenta invece valori relativi che dipendono principalmente dall'angolo sotto cui l'oggetto viene osservato epperciò, entro noti limiti, per una data distanza, diret-

(*) G. Albertotti (Junior), *Graduazione dell'oftalmometro di Helmholtz;* Atti della R. Acc. delle Scienze, vol. XVII, Aprile 1882.

tamente proporzionali alla dimensione dell'oggetto, e per un dato oggetto inversamente proporzionali alla distanza, come del resto indicherò più avanti.

Sistema telemetrico proposto.

Le lamine deviatrici dell'Oftalmometro di Helmholtz disposte fra l'obiettivo e l'oculare di un cannocchiale terrestre o di un cannocchiale di Galileo in modo che il loro asse di rotazione sia simmetricamente perpendicolare all'asse del cannocchiale, permettono, colla rotazione delle medesime, di sdoppiare un tratto qualsiasi dell'immagine degli oggetti veduti a traverso il cannocchiale; e potendosi determinare il grado di rotazione che occorre per lo sdoppiamento dei diversi tratti, si possono poi col mezzo delle tavole di graduazione dell'Oftalmometro conoscere i valori corrispondenti al grado di rotazione delle lamine relativo a ciascun sdoppiamento ed inferirne in seguito col calcolo circa grandezza e circa distanza degli oggetti osservati.

Il valore lineare corrispondente al grado di rotazione delle lamine necessario per lo sdoppiamento di uno stesso tratto di un oggetto posto ad una data distanza per cui il cannocchiale sia adattato, dipende per uno stesso paio di lamine, dall'inclinazione sulla superficie anteriore delle lamine dei fascetti luminosi che prolungandosi vanno in seguito a formare l'immagine. Epperciò questo valore, per una stessa posizione delle lamine rispetto all'obiettivo, varia colla distanza focale dell'obiettivo; e per un dato istromento varia colla posizione del piano, nel quale giacciono inizialmente le lamine lungo l'asse dello strumento; praticamente però questo valore non subisce variazione sensibile per la massima parte del tragitto dall'obiettivo all'oculare nel cannocchiale di Galileo e per il tratto dall'obiettivo sino a breve distanza dal sistema raddirizzatore, nel cannocchiale terrestre; mentre aumenta spiccatamente in determinata proporzione, ove il piano delle lamine si trovi in prossimità del sistema raddirizzatore, oppure fra questo e l'oculare.

Per ciascuno dei casi accennati sonvi circostanze speciali di applicazione a seconda delle determinazioni che voglionsi praticare. Però le considerazioni che io verrò esponendo possono ritenersi in tesi generale applicabili ai singoli casi.

Celerimetria.

Quando la posizione del piano nel quale giacciono inizialmente le due lamine deviatrici si mantiene invariata rispetto alla posizione di uno stesso obiettivo, si conserva pure invariato l'angolo di rotazione corrispondente allo sdoppiamento di uno stesso tratto dell'oggetto; se si prendono ad esame tratti dell'oggetto di lunghezze diverse, i valori lineari di sdoppiamento che corrispondono ai rispettivi angoli di rotazione sono direttamente proporzionali a quelle lunghezze.

Di qui, per una invariata posizione del piano iniziale delle lamine lungo l'asse dello strumento, conoscendo noi il valore lineare v corrispondente al grado di rotazione necessario per lo sdoppiamento di un dato oggetto o situato ad una data distanza d., potremo giudicare della dimensione di un altro oggetto o' situato alla stessa distanza, e ciò determinando il valore v' corrispondente al grado di rotazione necessario per lo sdoppiamento di questo secondo oggetto:

$$o : o' :: v : v'$$

$$o' = o \frac{v'}{v} \qquad \ldots\ldots [I].$$

In una posizione costante del piano in cui giacciono inizialmente le lamine rispetto alla posizione di uno stesso obiettivo il valore lineare corrispondente al grado di rotazione delle lamine necessario per ottenere lo sdoppiamento dello stesso tratto di un oggetto varia colla distanza dell'oggetto dallo strumento; se si prende ad esame lo stesso tratto situando successivamente l'oggetto a diverse distanze si troverà che i valori di sdoppiamento che corrispondono ai rispettivi angoli di rotazione sono inversamente proporzionali a quelle distanze.

Quindi per una invariata posizione del piano in cui giacciono inizialmente le lamine sull'asse dello strumento, conoscendo noi il valore lineare v corrispondente al grado di rotazione necessario per lo sdoppiamento di un oggetto dato o situato ad una data distanza d, potremo determinare la distanza d' cui si trova questo oggetto o e ciò determinando il valore v' corrispondente allo sdoppiamento dello stesso oggetto sito a questa seconda distanza:

$$v : v' : : d' : d$$

$$d' = d \frac{v}{v'} \qquad \ldots\ldots [II].$$

Telemetria propriamente detta o con base.

Ciò premesso, come è palese, si può anche risolvere il problema di conoscere la dimensione di un oggetto x situato ad una distanza y purchè:

1° Si determini il valore lineare v corrispondente allo sdoppiamento di un oggetto dato o situato ad una distanza data d (chiamerò v_y il valore di sdoppiamento dello stesso oggetto situato alla distanza y):

2° Si determini il valore v'' corrispondente al grado di rotazione delle lamine necessario per lo sdoppiamento dell'oggetto x alla distanza y;

3° Avvicinandosi od allontanandosi di una quantità data a nella direzione dell'oggetto x, si determini il valore v''' corrispondente al grado di rotazione delle lamine necessario per lo sdoppiamento dell'oggetto x alla distanza $y \pm a$ che chiamerò y'.

Infatti per la 2ª e la 3ª determinazione ricorrendo alla formola [II] si ha:

$$v'' : v''' : : y' : y$$

$$y = \frac{v''' y'}{v''} .$$

per la 1ª e 2ª determinazione, ricorrendo alla formola [II] si ha:

$$v : d : : y : v_y$$

$$v_y = \frac{d y}{v} ,$$

per la 2ª e la 1ª determinazione, ricorrendo alla formola [1] si ha:

$$v'' : x :: v_y : o$$

$$x = \frac{v'' o}{v_y} .$$

Dietro siffatte considerazioni giunsi a costruire il sotto descritto istrumento. E non occorre aggiungere che debbo al mio Maestro Prof. Reymond l'aver potuto disporre del tempo necessario per questi studî, ed usare liberamente per tale intento dei copiosi mezzi d'osservazione, da lui con tanta cura e criterio raccolti in questo clinico laboratorio.

Descrizione dello strumento.

Lo strumento (V. fig. 2), nel suo complesso consta dei seguenti pezzi:

a) Un telaio metallico foggiato a scatola rettangolare nel cui interno sulle pareti laterali sono imperniate le lamine deviatrici dell'Oftalmometro di Helmholtz, delle quali l'asse di rotazione si prolunga all'esterno in un tamburo graduato, su cui si legge l'angolo di rotazione delle lamine; le pareti superiore ed inferiore sono libere — l'anteriore e la posteriore sono perforate al centro da un'apertura circolare che si continua esteriormente in un colletto dentro cui si invaginano i pezzi *b)*, *c)*. Quando l'angolo di rotazione è $= 0^0$, esse giacciono in uno stesso piano verticale e le loro faccie sono parallele ed equidistanti dalle pareti anteriore e posteriore. La linea di divisione delle lamine corrisponde simmetricamente alla metà delle due imboccature:

distanza fra le due imboccature . .	$= 0^m,13$
spessore delle lamine	$= 0^m,00509$
diametro del tamburo graduato . .	$= 0^m,06$
larghezza app. delle suddivisioni in gradi	$= 0^m,0005$.

Con un nonio annesso *e)* si misurano i decimi di grado.

b) Un breve tubo che entra a sfregamento nell'imboccatura anteriore al quale si avvita il sistema obiettivo di un cannocchiale.

c) Un breve tubo somigliante al precedente cui si avvita il sistema oculare del cannocchiale.

Ambedue le parti del cannocchiale sono costituite da tubi rientranti uno nell'altro, dei quali la lunghezza totale quando sono del tutto svaginati, è maggiore della lunghezza necessaria perchè l'istrumento sia a fuoco.

Siccome si può a volontà svaginare una o l'altra delle due parti del cannocchiale, così senza spostare il corpo dello strumento si può variare la posizione iniziale del piano delle lamine portandolo vicinissimo all'obiettivo, oppure allontanarnelo. La costruzione permette inoltre di frapporre le lamine tra il sistema raddirizzatore e l'oculare propriamente detto.

d) Una staffa volta in su, della quale le corna finiscono in due anelli spezzati, che simmetricamente abbracciano i colletti del pezzo *a)*, mentre che la concavità della staffa è occupata dal corpo del telaio che può quindi ruotare liberamente attorno all'asse di figura, e sullo stesso asse possono alla lor volta girare indipendentemente fra di loro i pezzi *a)*, *b)*, invaginati nelle rispettive imboccature. — Dal centro della convessità della staffa si abbassa un'appendice cilindrica a guisa di piuolo di pochi centimetri di lunghezza, che può impiantarsi in qualsiasi sostegno a mano, oppure adattarsi alla parte superiore di un cavalletto comune da cannocchiale di campagna come nella figura.

I due colletti del telaio, potendo girare a dolce pressione negli anelli spezzati che sovrastano alla staffa, permettono di sdoppiare l'immagine dell'oggetto in qualsiasi dimensione, considerata nello stesso piano verticale e normale, perciò alla linea visuale dell'osservatore.

Risultati.

Con siffatto sistema ho verificato sperimentalmente in via preliminare le leggi sovraccennate, adattandolo a diversi cannocchiali (*). Applicandolo poscia ad un cannocchiale terrestre di circa 20 diametri di ingrandimento in modo che il piano iniziale delle lamine distasse costantemente dall'obiettivo di una quantità uguale alla metà c. della distanza focale, ho eseguito, col sig. Pietro

---

(*) Nell'eseguire coteste esperienze preliminari adoprai diversi cannocchiali terrestri e Galileani, dei quali dovevo necessariamente conoscere l'ingrandimento, e per determinarlo ricorsi al metodo indiretto più spiccio, a quello

Buttini, egregio allievo della nostra Università, le seguenti serie di esperienze, sdoppiando tratti di diversa grandezza a varie distanze ed in condizioni diverse di rischiaramento.

1ª Sul viale da Torino a Rivoli, trasportando successivamente la mira da 100^m a 200^m..... 2500^m (altezza dal suolo m. 1,30).

---

cioè che consiste nel calcolare il rapporto del diametro dell'obbiettivo al diametro del circolo oculare, rapporto, come si sa, uguale a quello $\frac{R}{r}$ dei raggi uguale quindi all'ingrandimento (1).

Per misurare il diametro dell'anello oculare mi valsi da principio del Dinametro di Troughton e Simms, ma difficilmente mi riusciva determinare il punto preciso in cui il circolo oculare incominciava a restringersi, in virtù dell'aggiunta all'obbiettivo di cappelletti anulari messi allo scopo di eliminarne la parte periferica inattiva e potere perciò misurare esattamente il diametro dell'obbiettivo. Questa difficoltà costituisce l'inconveniente principale di tutti i micrometri a scala divisa, nei quali non sempre avviene che la dimensione del tratto che si vuol misurare coincida esattamente colle divisioni del micrometro. Nel dinametro accennato per di più, i cambiamenti di dimensione del circolo oculare dovendosi leggere ai due capi del diametro, che non possono essere veduti contemporaneamente, ne deriva che la differenza si presenta sotto un angolo della metà circa minore di quello sotto cui si presenterebbe la dimensione reale d'aumento o di diminuzione del diametro che si misura. Trattisi per esempio di misurare il diametro del circolo oculare accresciuto o diminuito di un decimo di millimetro dalla misura antecedentemente presa; poniamo la circostanza favorevole, che cioè i tratti della scala rappresentino decimi di millimetro e che i due estremi del diametro del circolo coincidano esattamente con due divisioni della scala — la differenza totale di un decimo di mm. sarà avvertita leggendo successivamente ai due estremi del diametro la differenza parziale di un mezzo decimo di mm.; l'occhio adunque deve adattarsi per una dimensione più piccola di quella che corrisponde alla differenza totale — a meno che si sposti la scala lungo il diametro finchè un capo corrisponda nuovamente ad una divisione, ciò che evidentemente provoca altre cause di errore.

Ciò considerando, realizzai il concetto del Dinametro di Dollond (2), istrumento che non ebbe pratica applicazione a cagione delle difficoltà tecniche di costruzione e di adattamento, servendomi con grandissimo vantaggio dell'oftalmometro di Helmholtz, il quale si presta egualmente bene alla misura del circolo oculare virtuale dato dai cannocchiali ad oculare divergente ed alla misura di quello reale dato dagli altri cannocchiali superando di gran lunga i principali dinametri in uso sia per la speditezza come per la precisione della misura.

Per praticare la determinazione, basta disporre il cannocchiale da esami-

(1) Ferraris G. — *d. Fundamental-Eigenschaften d. dioptr. Instrumente. Elementare Darstellg. d.* Gauss' *schen Theorie u. ihrer Anwendg.* Uebers. v. F. Lippich, Lpzg., 79.

(2) Ferraris G., l. c.

2ª Dal R° Osservatorio del Palazzo Madama orizzontalmente all'Osservatorio della R. Accademia delle Scienze [distanza 348m,82 (*)], ed al Campanile Faà di Bruno in Borgo S. Donato; dal Laboratorio dell'Ospedale Oftalmico alla Specola della R. Acc. delle Scienze.

3ª Dal R. Osservatorio alla mira di Cavoretto [distanza 4488m,91 (**)].

Nella 1ª e nella 2ª serie la mira era costituita da uno schermo a striscie verticali bianche e nere di uguale larghezza, variante da 0m,20 a 0m,40 a 0m,80: nella terza mi servii della colonnetta imbiancata di 0m,80 di larghezza che è innalzata accanto alla stessa mira sulla mura di Cavoretto; in ciascuna delle tre serie di esperienze la visuale attraversava strati atmosferici in condizioni diverse di trasparenza e di rifrazione.

La media, però, di diverse osservazioni prese in circostanze di percezione favorevoli fu abbastanza costante e potei determinare il grado di rotazione delle lamine necessario per lo sdoppiamento di un metro a diverse distanze: servendomi poscia delle tavole di graduazione ho potuto stabilire la seguente tabella, in cui si legge: a sinistra una serie di distanze (D) in metri; ed a destra, accanto a ciascuna, il grado corrispondente di rotazione delle lamine necessario per lo sdoppiamento della dimensione di un metro considerata a quella distanza.

---

narsi nella direzione dell'asse dell'oftalmometro, a qualsiasi distanza dallo strumento, purchè questo possa venir adattato per la visione distinta del circolo oculare — e si nota il grado di rotazione necessario per ottenere lo sdoppiamento del circolo oculare; il valore corrispondente equivarrà al diametro del circolo oculare.

Sdoppiato il circolo in modo da osservare due dischi tangenti, appena avviene una leggiera diminuzione nel diametro del circolo, per l'aggiunta dei cappelletti anulari all'obiettivo, i due dischi si scostano e la loro distanza si presenta sotto un angolo che equivale a quello cui si presenterebbe la differenza totale fra i due diametri dei circoli oculari considerati; condizione questa, come è chiaro, favorevolissima per la percezione di differenze anche minime.

(*) Distanza ricavata da note manoscritte del Plana, gentilmente comunicatemi dal ch.mo Prof. Levi D..

(**) Dorna A. *Supplemento al Bollettino ann.* 1870 *dell'Osservatorio.* — Mem. dell'Acc. delle Scienze, vol. XXVI e XXVII.

TABELLA *dei gradi di rotazione* (α), *corrispondenti allo sdoppiamento della dimensione di un metro alle distanze* (D).

D	α	D	α	D	α
metri		metri		metri	
100	54° . 12'	310	21° . 36'	520	13° . 18'
110	50 . 42	320	20 . 54	530	13
120	47 . 36	330	20 . 24	540	12 . 42
130	44 . 42	340	19 . 48	550	12 . 36
140	42 . 6	350	19 . 18	560	12 . 18
150	39 . 54	360	18 . 48	570	12 . 12
160	42 . 18	370	18 . 24	580	11 . 54
170	36 . 6	380	17 . 48	590	11 . 36
180	34 . 36	390	17 . 30	600	11 . 30
190	33 . 6	400	17 . 6	610	11 . 18
200	31 . 42	410	16 . 42	620	11 . 12
210	30 . 18	420	16 . 18	630	10 . 54
220	29 . 12	430	15 . 48	640	10 . 48
230	28 . 6	440	15 . 36	650	10 . 36
240	27 . 6	450	15 . 12	660	10 . 30
250	26 . 6	460	14 . 54	670	10 . 24
260	25 . 18	470	14 . 36	680	10 . 12
270	24 . 30	480	14 . 24	690	10 . 6
280	23 . 36	490	14	700	9 . 54
290	22 . 54	500	18 . 42	710	9 . 48
300	22 . 18	510	13 . 30	720	9 . 42

D	α	D	α	D	α
metri		metri		metri	
730	9′ . 30°	1050	6° . 36′	2200	3°. 12′
740	9 . 24	1100	6 . 18	2250	3 . 6
750	9 . 12	1150	6	2300	3
760	9 . 6	1200	5 . 48	2400	2 . 54
770	9	1250	5 . 36	2550	2 . 48
790	8 . 54	1300	5 . 18	2600	2 . 42
800	8 . 42	1350	5 . 12	2700	2 . 36
810	8 . 30	1400	4 . 54	2850	2 . 30
830	8 . 24	1450	4 . 48	2950	2 . 24
840	8 . 18	1500	4 . 36	3050	2 . 18
860	8 . 6	1550	4 . 30	3250	2 . 12
880	8	1600	4 . 18	3350	2 . 6
890	7 . 48	1650	4 . 12	3550	2
910	7 . 42	1700	4 . 6	3750	1 . 54
920	7 . 36	1800	3 . 54	3950	1 . 48
940	7 . 24	1850	3 . 42	4200	1 . 42
960	7 . 18	1950	3 . 36	4450	1 . 36
980	7 . 6	2000	3 . 30	4850	1 . 30
990	7	2050	3 . 24	5000	1 . 24
1000	6 . 54	2100	3 . 18		

Evidentemente le cifre della tabella non hanno un valore assoluto; con un cannocchiale dotato di campo più vasto e di maggiore ingrandimento si potrà (a pari ed anche migliore nitidezza d'immagini) sdoppiare con uno stesso angolo di rotazione la medesima dimensione posta a distanza maggiore di quella che nella sovrascritta tabella vi corrisponde. Ma il fattore principale risiede però sempre, come indicai in principio di queste note, nelle condizioni di visibilità della mira.

Mi riservo di pubblicare più tardi la descrizione particolareggiata delle prove preliminari e delle surriferite esperienze, studiate più specialmente sotto il punto di vista del rapporto fra la visione e lo stato di rischiaramento, di trasparenza e di rifrazione del mezzo in cui si praticarono. Al che io spero di poter aggiungere, se il tempo e le circostanze mi favoriscano, i risultati che avrò ottenuto con esperimenti eseguiti su più vasta scala e con istrumenti più adatti.

Non potrei intanto chiudere questa mia memoria senza una parola di grazie all'ottimo Prof. Basso, il quale volle onorarla della sua approvazione e del suo patrocinio, presentandola a cotesta illustre R. Accademia.

Dal Laboratorio Clinico-Oftalmologico della R. Università di Torino.

21 Giugno, 1882.

BIBLIOGRAFIA

DOLLOND, *Phil. Trans.*, vol. XLVIII, P. 1, for 1753, p. 178.

P. A. HANSEN, *Ausführliche Methode mit dem Fraunhofer'schen Heliometer Beobachtungen anzustellen.* Gotha, 1827, S. 12.

Joh. Sam. TRAUGOTT GEHLER'S, *Physikalisches Wörterbuch (Heliometer)* — Leipzig, 1829.

GIORNALE D'ARTIGLIERIA, pubblicato d'ordine del Ministero della Guerra, Parte 2ª (Scientifica), Torino, Stamperia dell'Unione Tipografico-Editrice-Torinese, *Ricerche sulla Misura delle distanze*, 1866, p. 105.

Ibid. — *Telemetri per l'Artiglieria da campagna*, BOUSSON e GOULIER, 1869, p. 259.

Ibid. — *Esperienze sul Telemetro tascabile*, GAUTIER, 1868, p. 169.

Ibid. — *Resoconto dell'Esame dell'Autostadiometro* PLEBANI, *e dei Telemetri*, NOLAN, GAUTIER et KLÖCKNER, 1872, p. 379.

Ibid. — *Telemetro*, PASCHWITZ, 1872, p. 200.

Ibid. — *Telemetro* del Dott. GASTALDI, 1872, p. 353.

GIORNALE D'ARTIGLIERIA E GENIO — Roma, Tip. G. Voghera. parte 2ª (Scientifica), *Sopra un nuovo Telemetro da campagna* del Cap. d'Art. AMICI, 1876, vol. 1°, p. 260.

Ibid. — *Telemetro* LE BOULENGÉ, 1875, p. 341.

Ibid. — *Resoconto delle Esperienze sui Telemetri da costa*, 1877, vol. 1°, p. 253.

Ibid. — *Resoconto delle esperienze sui Telemetri da campagna*, 1877, vol. 1°, p. 360.

MINISTÈRE DE LA MARINE ET DES COLONIES - *Revue Maritime et Coloniale.* — Paris, Berger Levrault et Comp. édit. *Le Télémètre* Stubendorf. Tom. 34°, 1872, p. 938.

Ibid. — *Telemetro*, E. Schneider. Tom. 54°, 1877, p. 846.

Ibid. — *Télémètre*, Roskiewicz. Tom. 53°, 1877, p. 260.

Ibid. — *Nuovo Telemetro*, Hennique, Luogotenente di Vascello. Tom. 48°, 1876, p. 329.

ARMY AND NAVY GAZETTE, 1878, N. 943-948. Riunione di ufficiali ad Aldershot per assistere alle esperienze di due misuratori delle distanze:

1° *Micrometro* del Capitano di Fanteria Poste ;
2° *Telemetro* del Capitano d'Artiglieria Watkins, ultimo.

MILITÄR-VOCHENBLATT, 1878 (N. 64). Esperienze per dotare di Telemetro la fanteria francese.

MITTHEILUNGEN ÜBER GEGENSTÄNDE DES ARTILLERIE- UND GENIE-WESENS, 1877, 3 Heft. Telemetro del Colonnello Roskiewicz.

ALLGEMEINE MILITÄR-ZEITUNG, 1879, N. 47 e 48. Esperienze con un Telemetro ottico da campagna in Isvezia e Norvegia, invenz. del Tenente W. Unge, 1881, Aprile, parte 2ª.

REVUE D'ARTILLERIE, Paris, April, 1881. *Telemetro a specchi*, del sig. Labbez.

JOURNAL DES ARMES SPÉCIALES ET DE L'ÉTAT-MAJOR — Paris, Éd. J. Correard.

Distanziometro di Broers F. C., Capitano d'Artiglieria, e *Telemetro*, cit. dal Magg. d'Artiglieria Darapsky, prussiano. Tom. VI, 1869.

THE ENGINEER — London, vol. LI, pag. 262. Ap. 1881.

ZEITSCHRIFT FÜR INSTRUMENTENKUNDE *Red.* Dr Georg. Schwirkus, Berlin, Telemeter von Le Cyre — Ers. Jah. 1881, S. 411.

Id. *Der Faden Distanzmesser* von Prof. Dr Wilhelm Finter in Wien. — Zweih. Jah. 1882, S. 117.

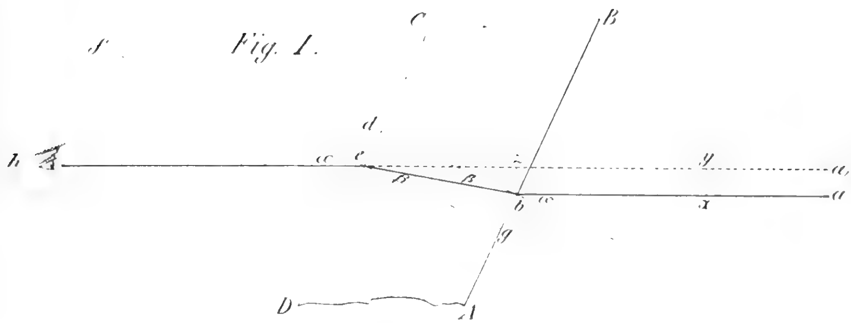


Fig. 1.

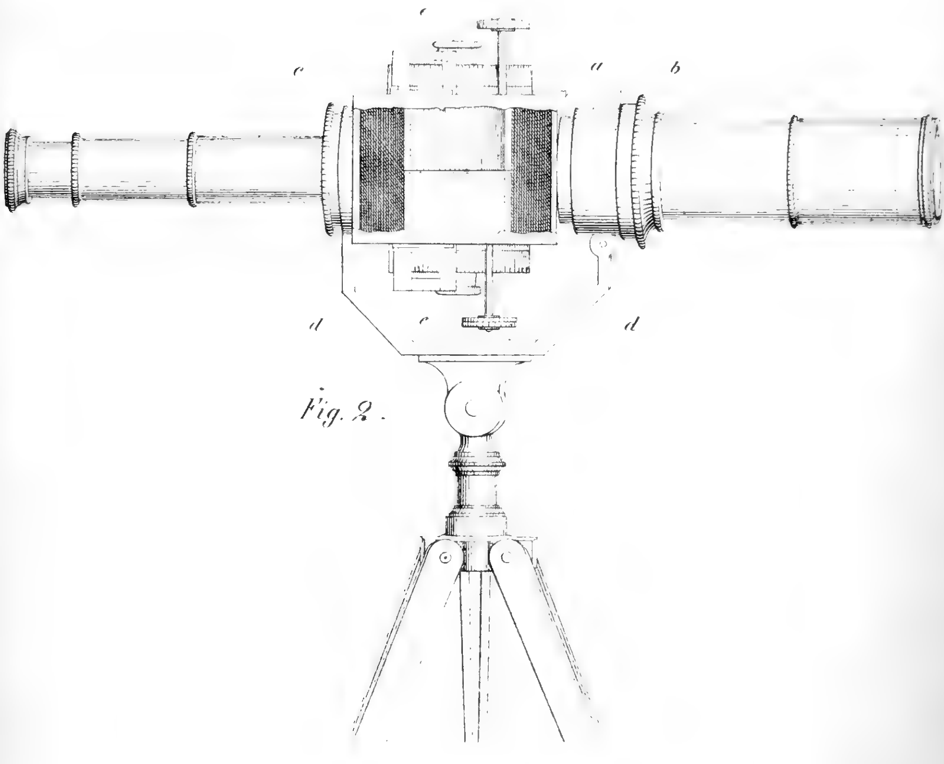


Fig. 2.

Il Socio Comm. Prof. Alfonso Cossa presenta e legge la seguente Memoria del sig. Ing. G. Spezia, Professore di Mineralogia, Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino.

SUL

BERILLO DI CRAVEGGIA

(Piemonte).

Il signor G. B. Dell'Angelo, da Craveggia in valle Vigezzo, dilettante di studi mineralogici e diligente raccoglitore di minerali, mi mostrò nella sua raccolta un esemplare di berillo che io credetti utile per la mineralogia ossolana farne oggetto d'esame.

A tale scopo il predetto signore, al quale rendo mille grazie, mi diede un frammento del minerale e gentilmente mi condusse sul posto per avere nozioni sulla giacitura e per procurarmi altro materiale.

La località dove si rinvenne il minerale trovasi a mezz'ora da Craveggia lungo il sentiero, che, passando pel vallone di Vasca, conduce all'alpe Marco. Il berillo è inchiuso in alcuni dei grandi massi detritici, i quali costituiscono il piano detto del Lavonchio sovrastante il sentiero indicato e coperto da bosco di pini. Nel visitare poi detto piano io potei osservare altri massi di maggior volume, i quali, emergendo fra le piante, lasciano scorgere la loro natura, ed in cui vidi pure lo stesso silicato.

Io spero di poter con altre ricerche rintracciare la roccia in posto onde meglio studiarne il giacimento, se pure non porrà ostacolo la lussureggiante vegetazione che distingue la valle Vigezzo fra le vallate ossolane, e che ricopre quasi tutto il versante su cui giace Craveggia.

Rimanendo per ora all'esame dei detti massi, si può già avere un certo indizio sulla giacitura del minerale. I massi lungo il sentiero sono costituiti da quarzo e feldispato, i quali presentano talvolta l'intreccio caratteristico della pegmatite grafica, e grosse lamine di mica muscovite sono in essi disseminate. Il berillo è generalmente posto in concentrazioni speciali di quarzo o di quarzo e mica, sparse nella massa quarzoso-feldispatica. Inoltre vi sono cristalli di granato che pel saggio a via secca appartiene alla varietà manganesifera cioè spessartina, e pochi cristalli di tormalina, ambedue i minerali sono impastati nella roccia. Sopra il piano del Lavonchio poi vidi un grosso masso costituito in parte come i precedenti ed in esso ha eguale giacitura ed associazione il berillo, ed il restante è formato da un gneiss micromero molto schistoso. Sembra quindi che le masse quarzoso-feldispatiche nelle quali ha sede il berillo, appartengano o a concrezioni o a riempimenti di litoclasi del gneiss.

Gli esemplari di berillo che ho potuto raccogliere non sono che frammenti di cristalli involti in materie quarzose.

Nel rompere un pezzo di prisma per formare il materiale d'analisi, comparve nell'interno e quasi al centro un altro piccolo prisma con eguale orientazione. Il berillo ha anche una sfaldatura prismatica, ma assai imperfetta, quindi nel mio caso non è a ritenersi per un effetto di sfaldatura, sia per la perfezione di separazione delle faccie del piccolo prisma, sia perchè su di esse si osservano con una lente le sottili striature parallele agli spigoli del prisma. Sembra che siasi formato un piccolo cristallo e dopo un intervallo di tempo sia aumentato per successivo deposito di berillo.

Il colore nelle parti trasparenti è leggermente azzurrognolo, ma la maggior parte si presenta opaco e bianco.

Lamine osservate al microscopio dimostrano come l'opacità provenga da un principio di decomposizione, la quale s'infiltra a modo di rete. Si veggono poi molte linee di colore biancastro, le quali osservate con forte ingrandimento, si scopre che sono costituite da una serie di inclusioni liquide e molte a bolla semovente. Pare che la decomposizione tenga la via di detti strati d'inclusioni. Le bolle di tali inclusioni riscaldate coll'apparato di Vogelsang alla temperatura di 100° non scompaiono. Vi sono anche inclusioni di minute scaglie di mica.

L'analisi quantitativa, eseguita sopra materiale scelto possibilmente trasparente, mi diede:

Silice	65, 12
Allumina	19, 65
Glucina	11, 49
Ossido di ferro	0, 67
Magnesia	0, 48
Calce	tracce
Perdita per calore	1, 95
	99, 36 .

In quest'analisi la separazione della glucina dall'allumina fu fatta col metodo del cloruro ammonico.

Con altra quantità di minerale, operata la separazione col carbonato ammonico, ottenni 11, 39 di glucina.

All'analisi spettroscopica si presentò la linea del litio, forse proveniente da inclusioni di mica, massime che la muscovite a larghe lamine che accompagna il berillo, sebbene non dia, direttamente riscaldata, la reazione del litio come avviene per la lepidolite, tuttavia la dà, se previamente umettata con acido fluoridrico.

Riguardo la perdita per calore ho fatto tre esperienze e mi diedero i valori 1,62, 1,93, 1,95, ed in una quarta, osservando le varie temperature e il tempo, trovai che dopo 3 ore a 150° la perdita fu solo di 0,08 p. %. Dopo 2 ore a 350° altra perdita di 0,17; al calor rosso oscuro per 3 ore altra di 0,18; al calore rosso ciliege per 3 ore altra di 0,37; infine al bianco per 3 ore una perdita di 1,05, in totale 1,85 p. %.

Da ciò si scorge come la perdita varia per materiale e per temperatura, e che la maggior parte avviene al calore bianco.

Ora tale perdita può benissimo ritenersi in parte per acqua di costituzione dovuta forse ad un prodotto di decomposizione del minerale, massime che il berillo tende a caolinizzarsi, ma una parte, sebbene si sviluppi pure ad alta temperatura, può essere acqua meccanica, che io direi d'inclusioni per distinguerla dall'igroscopica.

Già Pfaff (1), nelle sue esperienze sull'acqua inchiusa nei minerali, riteneva come impossibile l'aprire, col mezzo della triturazione, tutte le cavità delle inclusioni; ed io posso aggiungere che neppure la temperatura di 100° è sufficiente a togliere tutta l'acqua alle inclusioni.

---

(1) *Annalen der Physik u. Chemie* von Poggendorf, vol. CXLIII, p. 612.

Per quanto il minerale sia ridotto in polvere, i frammenti di questa sono sempre grandi relativamente a molte inclusioni liquide. Infatti in una polvere che al tatto era impalpabile misurai ancora, al microscopio, frammenti di 12 micromillimetri di larghezza; e detta polvere messa in acqua e decantata, dopo 10 minuti di riposo, la parte sospesa, in questa vidi ancora frammenti di 5 micromillimetri.

Ora una quantità d'inclusioni, specialmente di quelle a bolle semoventi, sono di un diametro inferiore ad 1 micromillimetro.

Quindi, se si paragona l'inclusione ad una sfera vuota, ritenendo la resistenza alla trazione del berillo eguale a quella del vetro, si può con un calcolo approssimativo stabilire, che, detta sfera con una parete di spessore eguale ad una volta e mezzo il diametro interno, potrà resistere ad una pressione di 100 atmosfere. Per avere detta pressione coll'acqua si richiede la temperatura di 311°. Quindi un'inclusione di 1 micromillimetro che si trovi per caso in mezzo a frammenti di 4 micr. perderà l'acqua solo al di sopra i 300°, e se l'inclusione sarà più piccola od il frammento più grande, la temperatura necessaria ad espellere l'acqua sarà maggiore, s'intende nel caso che nell'inclusione non vi sia tensione preesistente.

Gastaldi già accennò (1) il berillo trovato nell'Ossola a Pallanzeno dall'Ing. Traverso, e mi rincresce di non poter fare un paragone sulla composizione chimica, perchè la piccola quantità data dal Gastaldi al Prof. Cossa, per verificare se il minerale era berillo, non permise un'analisi quantitativa. L'importanza di un confronto chimico sarebbe interessante per la paragenesi dei minerali, massime che anche il berillo di Pallanzeno, dall'esame dell'esemplare esistente al Museo della R. Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, è posto in noduli feldispatici quarzoso con mica, e accompagnato parimenti da granato pure manganesifero, e da tormalina nera in maggior copia però che pel berillo di Craveggia. Inoltre le due località sono situate nella stessa zona di gneiss recente detta, dal Gerlach (2), del Monte Rosa.

---

(1) *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. VI, pag. 282.
(2) *Die Penninischen Alpen*.

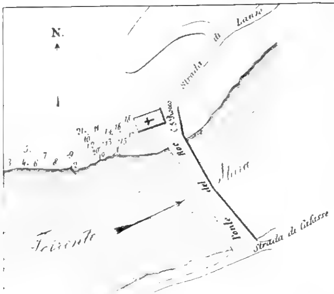


Fig.a 1

Scala 1:1500

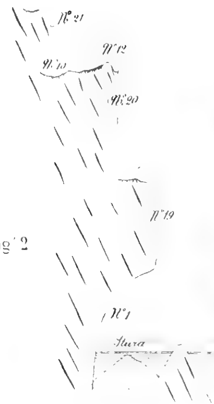


Fig. 2

Direzione della Sezione N.35°O
degli strati N.S
Inclinazione degli strati ad E di 63°

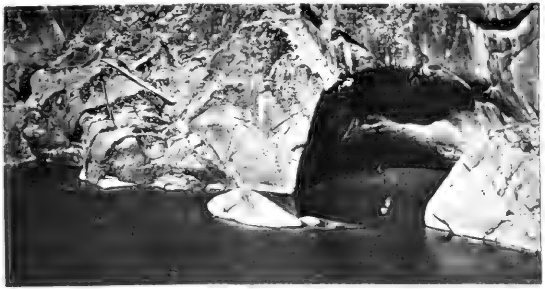


Fig.a 3 Marmitte N.° 1 e N.° 2

Fig. 4 — Marmitte N.° 17, N.° 16, e N.° 13

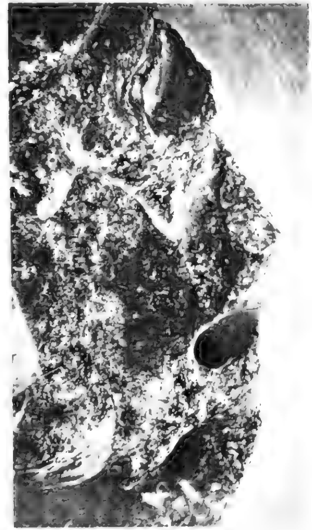


Fig. 5 — Marmitte N.° 13 e N.° 12

Torino Lit. F.lli Doyen

Tav. VIII

Il Socio Comm. Giacinto Berruti presenta e legge il seguente lavoro del sig. Dott. F. Virgilio, Assistente al Museo geologico della R. Università di Torino:

LE
MARMITTE DEI GIGANTI
DEL PONTE DEL ROC
(Lanzo)

Capitolo I.

Cenni oro-idrografici e geologici dei dintorni del Ponte del Roc.

Lanzo, capoluogo di mandamento, dista da Torino 32 chilm. di strada ferrata in direzione nord-ovest e giace allo sbocco della Stura nella pianura del Po, a monte della confluenza del torrente Tesso nella Stura medesima, di cui il bacino idrografico, dal lato orografico, è uno dei più importanti del versante meridionale delle Alpi Graie. Lanzo sorge a scalinata sul monte Buriasco, ultima terminazione del contrafforte che separa le valli del Tesso da quelle della Stura. Il piazzale della stazione ferroviaria misura m. 477 sul livello del mare, ed il collegio, posto nel locale del già convento dei Cappuccini costrutto sulle rovine di un antico castello, trovasi a m. 526 sul mare (1).

A sud di Lanzo, ed alla distanza di appena 15 minuti, per una stradicciuola che partendo dal piede del fabbricato si dirige prima a sud-est su lembi del cono di deiezione del Tesso e poscia a sud lambendo la rocciosa falda del monte Buriasco, incontrasi il luogo in cui la Stura, per un'orrida e pittoresca forra intagliata

(1) Martelli e Vaccarone, *Guida alle Alpi occidentali del Piemonte.* - Sezione Torinese del Club Alpino Italiano, 1880.

nella viva roccia, si *stura* nella pianura, come giustamente dice il Gastaldi (1).

In corrispondenza appunto di questa forra sorge il *Ponte del Diavolo* o *del Roc*. Questo ponte, di un solo arco, elevato di m. 14,51 sul pelo d'acqua della Stura e di m. 460 sul mare, misura m. 65 di lunghezza e m. 2,27 di larghezza, e mette in comunicazione Lanzo coll'antica strada che dalle valli omonime, passando sulla sponda destra della Stura per Cafasse, Robassomero e Veneria Reale, metteva a Torino. Si crede che la sua costruzione rimonti al secolo XIV, nell'anno 1379. Sul versante sinistro della forra ed in principio del ponte sorge una cappelletta dedicata a S. Rocco. Le denominazioni quindi che ricevette il ponte, quella cioè del *Roc* e quella del *Diavolo*, sembrano derivare, la prima dallo spuntone roccioso stesso che dà uscita alla Stura, isolato e scoperto, nome che probabilmente contribuì pure, per analogia, a far dedicare la suaccennata cappella a S. Rocco, e la seconda dalla immaginazione popolare trascinata dall'arditezza del ponte e dall'aspetto selvaggio della forra ad attribuire ad un essere sovrannaturale quella costruzione; anzi è credenza popolare che due leggiere escavazioni visibili l'una sulla roccia in prossimità della cappella e l'altra sul ciglione roccioso dell'opposto versante rappresentino le impronte lasciate dai piedi del Diavolo, a cui prese vaghezza una volta oltrepassare quella forra d'un sol passo!

La Stura di Lanzo è formata dalla unione di tre ben distinti torrenti, i quali individualizzano le tre così dette Valli di Lanzo facenti capo appunto in corrispondenza di questo capoluogo di mandamento. Tutto il distretto montuoso costituente le tre suaccennate valli è compreso fra la valle dell'Orco al nord e la valle della Dora Riparia al sud. I tre torrenti prendono tutti lo stesso nome di Stura, rimanendo distinti dai nomi delle rispettive valli a cui appartengono.

Tutto il bacino idrografico della Stura di Lanzo presenta i seguenti limiti. Lasciando da parte il bacino idrografico del Tesso, posto al nord di Lanzo, torrente che si origina dalle sommità chiamate *Monte la Rossa* e che confluisce, come precedentemente

---

(1) B. Gastaldi, *Alcuni dati sulle punte alpine situate fra la Levanna ed il Rocciamelone.* - Bollettino del Club Alpino Italiano, n° 10-11. Torino, 1867-68.

si è detto, poco a valle del Ponte del Roc, lo spartiacque, a cominciare dal Monte Buriasco che separa le valli di Lanzo dalla vicina e settentrionale valle dell'Orco, si dirige a nord-ovest pel Santuario di S. Ignazio (m. 932) e Chiaves, indi a nord fino al Monte la Rossa; tortuosamente di nuovo a nord-ovest passante per l'Uja di Bellavarda (m. 2334) e per il Tovo (m. 2772), ed infine per la Deserta e Bellagarda (m. 2947) raggiunge in direzione ovest la Levanna (m. 3607), punto di diramazione di tutto questo contrafforte. Da questa vetta il clinale, che segna il confine italo-franco, si dirige a sud-ovest fino al Colle di Sea (m. 3105), s'inflette quindi a sud per ghiacciai ed aguzze creste, fra cui spiccano la Bessanese (m. 3600), la Croce Rossa (m. 3570), la Punta dell'Altaretto, ecc., e raggiunge la Rocciamelone (m. 3540). Da questa vetta lo spartiacque, passando per il Pallone, le Coupe dle Trape, il Civrari (m. 2210), raggiunge in direzione ovest-est la Punta dell'Arpone, si piega a sud-est fino al Monte Basso, ed infine da sud a nord prima, e poscia da sud-est a nord-ovest, va a terminare alla forra su cui è gettato il Ponte del Roc. A sud ed in prossimità del Colle di Sea si distacca un primo contrafforte, il quale si dirige ad est per l'Uja di Mondrone (m. 2963), e termina alla Cappella di S. Cristina al nord di Ceres; ed un secondo contrafforte, dipartendosi in corrispondenza della Punta della Rossa, si dirige pure ad est per terminare ad ovest di Traves. Di tal modo restano individualizzate le tre Valli di Lanzo, la Valle Grande o di Forno Alpi Graie al nord, la Valle d'Ala al sud e quella di Usseglio o di Viù ancora più al sud. La Stura della Valle Grande ha dapprima la direzione ovest-est fino a Chialamberto, indi, in curva colla convessità rivolta a nord-est, raggiunge Pessinetto avendo già ricevuto poco al disotto di Ceres il contributo acqueo proveniente dalla Stura di Ala che scorre pure in direzione ovest-est. Le due Sture, della Valle Grande e di Ala, così riunite si dirigono poscia a sud-est, e poco a valle di Traves ricevono la terza Stura, quella cioè della Valle di Usseglio, che, come le prime due, scorre pure in direzione ovest-est fino alle Maddalene; da questo punto poi piega direttamente a nord fino a raggiungere le altre due Sture. Di tal modo riunite le acque dei tre torrenti si origina la così detta Stura di Lanzo, la quale segue dapprima la direzione primitiva ovest-est, ma per il protendersi della falda sud-ovest del Monte Buriasco è spinta poscia a sud, si spande rallentando il suo corso nel piccolo bacino posto a sud di Germagnano e, descrivendo una curva colla convessità rivolta a sud per lo sperone roccioso proveniente dal Monte Basso, è obbligata a piegarsi a nord e venire a battere di nuovo contro il Monte Buriasco per farsi quindi strada attraverso alla stretta forra del Diavolo. Ma non appena oltrepassata la forra e ricevuto le acque del Tesso, per il cono di deiezione di quest'ultimo torrente essa è obbligata a scorrere rasente il piede roccioso del versante destro ed a prendere la direzione nord-ovest-sud-est.

La costituzione geologica del tratto di terreno che corrisponde ai dintorni di Lanzo si presenta in un modo del tutto semplice. La roccia che unicamente forma non solo tutto il Monte Buriasco ed i versanti occidentale e meridionale del vallone del Tesso, ma anche tutta la costiera rocciosa dalla Punta dell'Arpone fino alla sua terminazione nel Monte Basso, è serpentina pura e compatta che in alcuni punti assume anche una struttura schistosa; su di essa poi si appoggiano i lembi residui dell'antico cono di deiezione, *diluvium*, della Stura di Lanzo. Quella roccia appartiene alla così detta *zona delle pietre verdi* del Gastaldi, zona che, costituita da un complesso di roccie di natura svariatissima, sempre stratificate, ed a struttura cristallina, quali le lherzoliti, le dioriti, le eufotidi, i gneiss recenti, le amfiboliti, i calceschisti, ecc., intercalate ed accompagnanti la serpentina, si sovrappone in tutte le nostre Alpi e con uno sviluppo considerevole ad un'altra zona di roccie più antiche costituita da gneiss antichi e porfiroidi, graniti, calcari cristallini, ecc. e formante i nuclei centrali dei diversi ellissoidi di sollevamento. Dagli studi compiuti dal Gastaldi (1) e dal Baretti (2) nelle Alpi piemontesi risulta che le roccie tutte costituenti la *zona delle pietre verdi* sembrano essere sincrone con quelle del Laurenziano superiore e dell'Huroniano o Cambriano del Canadà, coi trappi del Lago Superiore, e colle ofiti dei Pirenei, e che il gneiss antico, centrale, roccia non eruttiva, ma sollevante e sollevata contemporaneamente, può riferirsi alla parte più antica del Laurenziano dei geologi americani. Quindi in complesso tutte roccie sedimentarie più o meno metamorfizzate a seconda della loro relativa antichità.

(1) B. Gastaldi, *Studi geologici sulle Alpi occidentali.* Parte seconda. - Memorie del R. Comitato Geologico, vol. II. Firenze, 1874.

(2) M. Baretti, *Studi geologici sul gruppo del Gran Paradiso.* - Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 3ª, vol. I. Roma, 1877.

La forra perciò su cui è gettato il Ponte del Roc, e per la quale la Stura sbocca nella pianura, è completamente scavata nella serpentina. In corrispondenza di questa laceratura normale all'andamento degli strati, resa ancora più ampia dalla azione erosiva delle acque della Stura stessa (1), i banchi serpentinosi presentano una direzione quasi da nord a sud (Mag.) con una inclinazione di circa 63° ad est (Mag.). Questa direzione nord-sud non corrispondente esattamente all'andamento stratigrafico di tutte le roccie appartenenti o dipendenti dal nucleo di sollevamento del Gran Paradiso (2), di cui l'ellissoide centrale è orientato da est-nord-est ad ovest-sud-ovest con una certa inclinazione sul versante italiano dello stesso massiccio montuoso, può spiegarsi col fatto che quelle masse rocciose più estreme e meridionali del gruppo dovettero sentire anche l'influenza di un secondo centro di sollevamento che sviluppossi più a sud, l'ellissoide cioè Dora-Varaita (3) avente una direzione quasi da nord a sud.

Venendo ora al cono di deiezione della Stura di Lanzo, esso indubbiamente è preglaciale per essere la sua formazione evidentemente sincrona con quella di tutti gli altri coni di deiezione prodottisi allo sbocco delle principali vallate alpine, i quali più o meno modificati nel loro andamento dagli impedimenti che reciprocamente si opponevano nell'individuale loro sviluppo, dalle azioni erodenti dei ghiacciai sopravvenuti posteriormente e delle acque dei medesimi torrenti da cui furono originati, formano

(1) In proposito di siffatte lacerature rocciose il Desor fin dal 1864 (Comunicazione fatta all'adunanza 21 marzo 1864 della Società Geologica di Francia, *Bull.*, 2ª serie, tom. 21, pag. 222) facendo risaltare le differenze esistenti fra la *cluse* (chiusa), lacerazione fattasi contemporaneamente al sollevamento di una massa di strati ed attraversante da parte a parte una catena montuosa in modo da lasciar scorrere le acque da una vallata in un'altra, e la *ruz* (burrone), lacerazione limitata ad uno dei fianchi della catena, proponeva, in occasione della riunione dei Naturalisti tenutasi in Samaden, di chiamare le lacerazioni dovute all'azione erosiva dell'acqua, come ad esempio le gorgie della Via Mala, della Tamina e del Rummel in particolare, col nome di *rofla*, parola romanza e tutta locale, colla quale in quella parte della Svizzera così si appellano siffatte gole. Crediamo che la parola italiana *forra* corrisponda esattamente alla romanza *rofla.*

(2) M. Baretti, lavoro precitato.

(3) B. Gastaldi, *Sui rilevamenti geologici fatti nelle Alpi piemontesi durante la campagna* 1877. - Memoria della R. Accademia dei Lincei. Serie 3ª, vol. II. Roma, 1878.

tutta la parte sinistra della pianura del Po. E lasciando del tutto a parte la questione relativa ai periodi glaciali ci atteniamo alle seguenti conclusioni del Gastaldi (1):

« In Piemonte adunque non possiamo ammettere la esistenza » di due epoche o periodi glaciali: 1° perchè nell'estesissimo e » regolarissimo fondo della valle del Po, allo infuori degli anfi- » teatri morenici, non troviamo più massi erratici sparsi sul suolo, » nè ci consta che se ne siano trovati a più o meno grande » profondità; 2° perchè il *diluvium* che si estende a valle ed » all'incontro degli anfiteatri morenici è un deposito eminente- » mente torrenziale e non glaciale; 3° perchè sappiamo che i » massi superficiali delle colline Moncalieri, Superga, Valenza, » appartengono ad un'epoca glaciale ben più remota ».

Il grandioso cono di deiezione della Stura di Lanzo presenta ancora intatto il suo apice per il fatto che l'antico ghiacciaio delle valli di Lanzo non arrivò fino allo sbocco della valle nella pianura, al contrario di quello che avvenne nelle altre principali vallate alpine, di cui i giacciai col loro avanzamento e successivo ritiro dettero origine agli attuali anfiteatri morenici erodendo i corrispondenti apici dei preesistenti coni di deiezione.

Per trovare traccia di antichi depositi morenici o di altri indizî attestanti la dimora di antiche masse glaciali nelle valli di Lanzo bisogna risalire fino a Mezzenile, poco al dissotto della confluenza delle due Sture di Valle Grande e di Valle di Ala da un lato, e sino al villaggio di Viù nella valle omonima. Per questo fatto, rilevanti lembi del precitato *diluvium* si trovano ancora conservati nell'interno della valle; così ad occidente di Lanzo il torrente Upic scorre in siffatto deposito; ed una gran parte dei versanti orientale e meridionale dello stesso Monte Buriasco si trova ricoperta da potente lembo del cono di deiezione della Stura (in parte riunito con quello originato dal Tesso), lembo che si estende fino al sud ed a sud-ovest di Germagnano. Ancora più a monte e sulla stessa sponda sinistra della Stura, in corrispondenza di *Roc Berton*, havvi un altro rilevante lembo di *diluvium*. Sulla sponda destra poi il cono di deiezione riveste il versante occidentale dell'ultima terminazione del Monte Basso fino

(1) B. Gastaldi, *Appunti sulla Memoria del sig.* G. Geikie F. R. S. E. – « *On changes of climate during the glacial epoch* ». Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. VIII, 1873, pag. 5.

all'altezza di circa 60 metri sul livello attuale della Stura. Sono completamente allo scoperto dal *diluvium* gli speroni rocciosi che formano la forra del Diavolo ed una parte inferiore del versante orientale del Monte Buriasco prima di giungere al ponte.

Tenendo poi conto della estensione nella pianura di questo cono di deiezione che si prolunga fino a Venaria Reale, per cui la sua periferia non misura meno di 80 chilometri, nonchè dei potenti lembi che ancora riscontransi sulle roccie su cui sorge l'antico convento di Lanzo da una parte e sul monte a destra della Stura sino ad una elevazione di circa 60 m. sull'attuale torrente, si potrà facilmente dedurre la straordinaria potenza posseduta dalla Stura nell'epoca appunto che formava quell'ampio cono diluviale, nonchè il livello di molto superiore all'attuale che dovevano avere nei tempi passati le sue acque, livello che andò poco per volta abbassandosi dapprima colla continua e graduale erosione dello stesso cono di deiezione fino a che rimasero scoperte le roccie della forra, e poscia colla erosione della roccia stessa in corrispondenza di una probabile preesistente lacerazione degli strati.

L'indizio infine più palese, attestante la presenza delle acque ad un livello di molto superiore all'attuale in tempi remoti, si è quello di evidenti traccie della potenza erosiva dell'acqua, prodotta dal lavorìo meccanico della sabbia e dei ciottoli da essa stessa trascinati, che riscontransi sulle roccie poste a sinistra in corrispondenza del Ponte del Diavolo fino ad una elevazione di 18 m. e più sull'attuale corso della Stura.

Relativamente a ciò citiamo quello che il Gastaldi lasciò scritto (1): « L'esame geologico della località (sbocco della Stura » di Lanzo) mette in chiaro che la gola per la quale esce il » torrente fu scavata dal torrente stesso; e la erosione è in lavoro » continuo poichè nell'alveo del torrente, al dissotto del ponte, » vedesi una larga e profonda *marmite de géants* ». Il presentarsi poi più grandioso il risultato dell'azione meccanica dell'acqua sullo sperone roccioso di sinistra e non su quello di destra devesi attribuire al fatto che la Stura, obbligata dall'ultima terminazione del Monte Basso a volgersi al nord per farsi strada attraverso

---

(1) B. Gastaldi, *Appunti sulla Memoria del sig.* G. Geikie F. R. S. E. - « *On changes of climate during the glacial epoch* ». Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIII, 1873, pag. 37.

la forra nella pianura, veniva, come tuttora si verifica, a battere quasi normalmente contro le roccie della sponda sinistra, per conseguenza su queste doveva essere massimo l'urto e perciò massima l'azione meccanica, mentre minima o nulla sulle roccie dell'opposta sponda. L'azione infine erosiva prodotta dagli agenti atmosferici deve pure avere grandemente contribuito alla scomparsa di consimili traccie ad un livello superiore ai 18 metri su entrambi i versanti rocciosi in corrispondenza dello sbocco della Stura nella pianura, massime per quello di destra, dove l'andamento e l'inclinazione degli strati si prestano molto di più al continuo sfacelo e franamento degli stessi banchi rocciosi.

Lievi traccie di questa azione meccanica dell'acqua si riscontrano presso a poco all'altezza precedentemente indicata sull'attuale corso del torrente sulle roccie poste superiormente alla strada che conduce da Lanzo al ponte, poco prima di arrivarvi. Così pure, a poca elevazione sul livello della Stura, ed in epoca di magra, riscontransi altre traccie sulla stessa sponda sinistra ad una cinquantina di metri a monte del ponte, e sulla sponda rocciosa destra poco a valle di questo, quasi a livello delle acque del torrente.

Dove però siffatta azione meccanica assume un carattere veramente meraviglioso, sia per l'intensità della forza agente, sia per la molteplicità, varietà e vaghezza delle forme prese dalla roccia che subì per un tempo lunghissimo e subisce tuttora nella sua parte inferiore quella azione, è certamente su tutto lo sperone roccioso posto a sinistra della Stura, immediatamente a monte del Ponte del Roc.

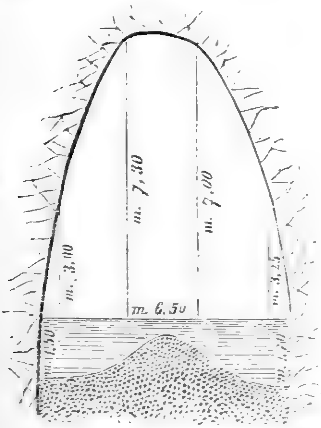
Prestandosi la serpentina per la sua tenacità a ricevere un discreto pulimento superficiale, bellissimi si presentano tutti i più minuti rilievi, alternati da avvallamenti, su tutta quella roccia a cominciare dal livello del tetto della cappelletta fino al fondo dell'alveo del torrente stesso, il quale, come già dicemmo, continua pur sempre nella sua azione erodente. Coll'aiuto di disegni e fotografie, di cui parecchi dovuti alla cortesia dei signori geometra Macchiorlatti, che gentilmente ci fornì pure diverse misure, pittore A. Balduino ed L. Bottan, cercammo di illustrare il più efficacemente possibile la località in parola, che certamente merita, sotto ogni aspetto, di essere visitata.

Capitolo II.

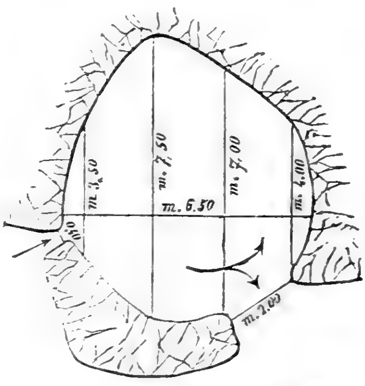
Descrizione delle marmitte dei giganti poste a monte del Ponte del Roc.

Senza tener conto delle numerose conche, scanalature ed altre curiosissime forme assunte della roccia in posto di questa località, passeremo a descrivere ora tutte quelle escavazioni che presentano veramente i caratteri e la configurazione di marmitte dei giganti, qualunque siano la orientazione e l'inclinazione sull'orizzonte della parete rocciosa nella quale sono scavate. La loro posizione è indicata da numeri progressivi nella Fig. 1, ricavata da un disegno topografico del geometra Macchiorlatti della unita tavola. E comincieremo dalle due più grandi N. 1 e N. 2 (Fig. 3) poste al pelo d'acqua del torrente, per cui la loro escavazione continua pur sempre.

Entrambe hanno l'apertura rivolta a sud quasi normalmente alla direzione della corrente del fiume, ed in entrambe si verifica lo sporgere più in avanti dello sperone roccioso che forma il bordo a valle di ciascuna marmitta, contro il quale battendo la corrente acquea è obbligata a cangiare in parte di direzione ed a volgersi a sinistra rasente la parete rocciosa, acquistando così un vero movimento vorticoso.



Sezione verticale della marmitta N° 1.

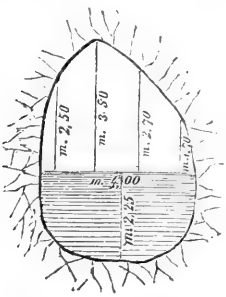


Sezione al pelo d'acqua della marmitta N° 1.

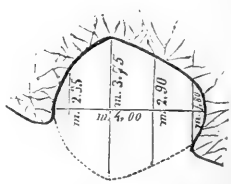
Le sezioni della marmitta N. 1, gentilmente trasmesseci dal geometra Macchiorlatti, ne indicano le dimensioni.

All'entrata di questa marmitta, detta *del Diavolo*, la più grandiosa di tutte, havvi uno scoglio che solo nelle grandi piene rimane del tutto coperto dalle acque; a seconda però della maggiore o minore elevazione del pelo d'acqua l'apertura a valle, per cui esce la corrente acquea, varia nella sua ampiezza, ciò che non si verifica per l'apertura a monte, per la quale entra la corrente; questo è dovuto al presentarsi pressochè verticale la parete dello scoglio rivolta a monte, mentre quella opposta è leggiermente inclinata. Così in una visita da noi fatta l'8 Aprile corrente anno l'apertura a monte era di m. 0,40, come quella verificatasi nell'Aprile 1880, epoca in cui furono prese dal sig. Macchiorlatti le misure, mentre l'apertura a valle fu da noi trovata maggiore di 2 metri, ciò che indica un livello d'acqua superiore a quello durante il quale furono prese le primitive misure. Il fondo della marmitta è ripieno di sabbia (agente escavatore sotto il moto impressovi dall'acqua) che per il vortice stesso della corrente ha forma di cono, di cui l'apice è più vicino alla parete interna della marmitta, e sporge dall'acqua solo nelle più forti magre. Nello stesso giorno dell'8 Aprile di quest'anno la profondità dell'acqua in corrispondenza dell'apertura d'entrata era di m. 0,55, e quella al piede dello stesso scoglio, verso l'interno della marmitta, di m. 2,90. Non si conosce fino a quale profondità si estende la escavazione rocciosa che forma il fondo di questa veramente enorme marmitta. Le sue pareti in tutta la loro estensione si presentano levigate senza traccia di strie.

La marmitta N. 2 (Fig. 3), posta anch'essa a fior d'acqua



Sezione verticale
della marmitta N° 2.



Sezione al pelo d'acqua
della marmitta N° 2.

e scavata come la prima in modo da avere l'apertura rivolta a sud verso la corrente, presenta il suo bordo a valle sporgente di circa 1 metro più verso la corrente relativamente al bordo a monte, per cui anche qui una parte della corrente è obbligata a volgersi a sinistra acquistando un movimento vorticoso che amplifica di continuo colla sabbia e coi ciottoli la escavazione. Le sue dimensioni sono indicate nelle unite sezioni. La parete interna, anch'essa levigata in tutta la sua estensione, è incavata in modo da presentare una curva che va sempre più addentrandosi nel cuore della roccia, ciò che fa supporre una grande profondità verticale della marmitta; il suo bordo roccioso anteriore trovavasi a circa 1 metro al dissotto del livello dell'acqua. Il fondo è anche qui ripieno di sabbia; e l'acqua in tal punto misurava una profondità maggiore di 2 metri.

Descritte così le due marmitte più ampie passeremo ora a dire di tutte le altre a cominciare dalla più estrema a monte.

Havvi dapprima la marmitta N. 3 di forma irregolarmente ellittica coll'apertura rivolta a monte verso il torrente. Nel giorno della prima nostra visita trovavasi a fior d'acqua, per cui durante le piene della Stura rimane sommersa, come appunto verificossi nella seconda visita da noi fatta il 6 Maggio pure di quest'anno. Misura in media m. 1 di lunghezza, m. 0,90 di larghezza e m. 0,75 di profondità. L'asse maggiore è rivolto a nord-est in modo da formare un angolo di circa 45° coll'asse longitudinale del torrente.

A valle della marmitta N. 3 e più elevata sul torrente trovasi la marmitta N. 4. Per la regolarità della sua forma, questa può prendersi come marmitta tipica, giacchè può dare una idea esatta del modo di formazione e del progressivo e continuato lavorio che si opera sulla superficie rocciosa mediante la sabbia ed i ciottoli trasportati dall'acqua in movimento vorticoso. La sua forma è veramente elegante. L'apertura, posta a livello d'acqua quando il torrente è in piena, l'8 Aprile di quest'anno trovavasi di circa 1 metro più alta. Essa è una spaccatura della roccia che segna il punto più basso dell'orlo, ed è rivolta a monte. L'orlo regolarissimamente va sempre più innalzandosi in forma ellittica fino a raggiungere una elevazione di circa m. 1,20 sul suo punto più basso. Le dimensioni della marmitta sono in media m. 3,00 di lunghezza, m. 1,50 di larghezza, m. 0,32 di profondità in corrispondenza della laceratura del bordo, e m. 1,50 in corrispondenza del punto opposto. Dal livello dell'apertura la parete interna presenta una inclinazione molto più forte di quella della parete superiore all'apertura stessa, per cui essa elegantemente s'innalza fino al punto più alto dell'orlo accennato precedentemente. L'asse maggiore della marmitta è orientato a nord 40° est (Mag.). Le pareti e l'orlo si presentano levigatissimi senza alcuna traccia di righe o strie.

La marmitta N. 5, posta a nord della precedente, è più ampia ed ha l'apertura rivolta normalmente al corso del torrente; il suo fondo fu da noi trovato a circa m. 2,50 sul livello dell'acqua; misura in media m. 4,20 di lunghezza, m. 2 di larghezza e m. 4 di profondità.

A sud e poco a valle delle due ultime accennate trovasi la marmitta N. 6 che presentava il bordo anteriore d'apertura a livello del torrente e m. 0,50 di acqua nel suo interno. Misura m. 1,40 di lunghezza, m. 1,00 di larghezza e m. 1,20 di profondità. Il suo asse maggiore è orientato a nord 15° est (Mag.). Questa fu l'unica marmitta che contenesse ancora nel suo interno un bellissimo ciottolo di serpentina a forma ellissoidale, schiacciato in un senso, e misurante m. 1,04 di circonferenza massima, m. 0,35 d'asse maggiore, m. 0,30 d'asse minore e m. 0,12 di spessore.

Immediatamente al dissopra della marmitta N. 6 havvi la marmitta N. 7, riempita da frammenti rocciosi e da terriccio, e misurante in media m. 1,10 di lunghezza e m. 0,90 di larghezza.

A valle delle due ultime accennate havvi la marmitta N. 8 coll'apertura rivolta a monte, colma di massi rocciosi e misurante m. 1,80 di lunghezza e m. 1,50 di larghezza. L'asse maggiore è orientato a nord 45° est (Mag.).

La marmitta N. 9, di forma pressochè circolare, è posta poco a valle e superiormente alla marmitta N. 8, quasi in corrispondenza della marmitta N. 2. Misura un diametro di circa m. 0,60. L'apertura è rivolta normalmente all'asse longitudinale del torrente ed il bordo inferiore trovasi a m. 4,10 circa sul livello della Stura.

Passiamo ora a descrivere le altre marmitte poste sullo sperone roccioso, al piede del quale è scavata la grande marmitta del Diavolo, cominciando anche per queste dalla parte a monte.

Questo sperone roccioso è quasi distaccato dal resto della montagna per una larga squarciatura nei banchi serpentinosi che si ergono inaccessibili a monte verso il primo gruppo di marmitte già descritte, lacerazione che si prolunga fin contro la cappelletta di S. Rocco. Per accedervi quindi è d'uopo rimontare d'un certo tratto il versante proprio della montagna e discendere poscia frammezzo a lievi insenature della roccia stessa. Si arriva così su di una specie di piattaforma erbosa posta superiormente alla grande marmitta, piattaforma che in massima parte è formata da terriccio colmante in totalità un'altra ben ampia marmitta (Fig. 5). Intorno ad essa sonvi dapprima le due marmitte N. 10 (Fig. 2) e N. 11 scavate entrambe nella parete verticale del monte guardante il torrente, e misuranti, la prima m. 2,80 di lunghezza e m. 1,00 di larghezza, e la seconda, di forma pressochè circolare, un diametro di circa m. 1,30. La marmitta N. 10, perchè completamente ricolma di terriccio, non ci offrì la possibilità di misurarne la profondità: al contrario l'altra, contenente minore quantità di terra vegetale, ci permise di verificarne una profondità di oltre m. 1,50.

Anteriormente a queste due marmitte havvi il ciglione roccioso (Fig. 4 e 5), di cui il punto più elevato sulla Stura, 14 metri, forma il bordo della marmitta N. 17. Tutta questa roccia, vagamente arrotondata e lisciata dall'azione strofinante della sabbia e dei ciottoli trasportati dalla furiose onde della Stura durante il tempo che questa oltrepassava tale altezza, presenta bellissimi scolatoi, conche, ecc. e non meno di cinque marmitte, due delle quali veramente tipiche. Havvi dapprima la marmitta N. 12 (Fig. 5) scavata nella parete del ciglione roccioso opposta a quella prospiciente la Stura; la roccia in questo punto misura m. 13 sul livello dell'acqua. La marmitta è scavata quasi verticalmente: misura m. 0,80 di lunghezza, m. 0,60 di larghezza e m. 0,70 di profondità massima; l'asse maggiore è orientato a nord 67° est (Mag.). L'apertura è una lacerazione del bordo opposto al torrente che arriva fino a m. 0,20 dal fondo della marmitta e che a livello del bordo generale della medesima ha una larghezza di m. 0,70.

Proseguendo da questo punto verso la cappelletta di S. Rocco, sempre lungo il ciglione roccioso, alla distanza di m. 0,30 incontrasi la bellissima marmitta N. 13 (Fig. 4 e 5) che presenta ben marcate sulle pareti interne le strie svolgentisi a spira dal fondo e prolungantisi in senso opposto sul ciglione della roccia. Esse indicano chiaramente la via d'uscita della corrente acquea, dopo aver roteata nell'interno della marmitta. Il bordo roccioso dal lato che guarda il torrente è di poco più di 13 metri elevato sul livello dell'acqua e va gradatamente abbassandosi verso il lato opposto fino a stabilire una differenza di livello di m. 0,42 nei due bordi. Misura m. 0,80 di lunghezza, m. 0,50 di larghezza e m. 0,80 di media profondità ; l'asse maggiore orizzontale è diretto a sud 15° est (Mag.), quasi normalmente all'asse longitudinale del torrente. L'asse mediano dall'alto al basso della escavazione presenta una inclinazione di 75° a nord 70° est (Mag.).

La marmitta N. 14 trovasi un po' più verso il monte. Di forma irregolare e colma in gran parte di terriccio, misura m. 1,80 per m. 1,40.

Procedendo sempre ad est della marmitta N. 13, lungo il ciglione roccioso riscontransi due ben marcati scolatoi che si dirigono dall'esterno verso il torrente (Fig. 4 e 5), oltre i quali si arriva ad una spaccatura nella roccia, prolungamento del secondo scolatoio, in fondo alla quale e sulla parte di parete a picco che guarda il torrente trovasi scavata la marmitta N. 15 di forma irregolarmente circolare, e misurante un diametro di circa m. 1,40 ed una profondità media di circa m. 1,30.

A nord-est di quest'ultima marmitta e sulla faccia guardante in alto verso il monte trovansi le marmitte N. 16 e N. 17 (Fig. 4) a brevissima distanza l'una dall'altra. La prima, a bordo irregolare, misura una lunghezza di circa m. 1,30, una larghezza di m. 0,80 ed una profondità di 0,55 ; la seconda presenta invece una certa regolarità nella forma e le strie marcatissime al pari della marmitta N. 13. L'orlo roccioso prospiciente alla Stura misura m. 14 sul pelo d'acqua e va leggiermente abbassandosi dal lato opposto. Questa marmitta misura m. 0,70 di lunghezza, m. 0,60 di larghezza e m. 0,70 di profondità; il suo asse orizzontale è diretto da nord a sud (Mag.), e l'asse dall'alto al basso dell'escavazione è inclinato di circa 80° verso nord (Mag.).

Infine un'ultima marmitta, N. 18, bellissima per la forma regolare e per le sue piccole dimensioni, è quella posta immediatamente dietro il muro della cappella, a circa 17 metri sul torrente, su di uno sperone roccioso arrotondato. È la più alta di tutte. È scavata verticalmente e misura m. 0,13 per m. 0,12 con una inflessione del bordo rivolta a monte; la profondità dal punto più alto dell'orlo è di m. 0,22 e dal punto più basso m. 0,12 ; il suo asse maggiore orizzontale è diretto a nord 20° est (Mag.).

Oltre a tutte le suddescritte marmitte havvene altre scavate in pareti rocciose verticali guardanti il torrente, per le quali passa la sezione rappresentata dalla Fig. 2. Esse hanno le seguenti dimensioni. Marmitta N. 19 m. 3,00 di larghezza, m. 2,60 di altezza e m. 1,00 di profondità; marmitta N. 20 m. 1,80 di larghezza, m. 1,70 di altezza e m. 0,80 di profondità; marmitta N. 21 m. 0,30 di lunghezza, in direzione della corrente, m. 0,25 di larghezza e m. 0,11 di profondità dall'orlo anteriore.

Da quanto abbiamo fin qui esposto e dall'esame comparativo di tutte queste marmitte riguardo al modo come si presentano conformate, risulta anzi tutto evidente la loro origine; vale a dire che esse non riconoscono altra causa tranne quella dell'azione puramente meccanica esercitata dalla sabbia e dai ciottoli trasportati e messi in movimento dai vortici della corrente della Stura durante il tempo in cui essa ricopriva quella località rocciosa, nello stesso modo che tale lavorìo continua tuttora per quelle marmitte poste a livello dell'acqua o completamente sommerse. Riguardo poi più specialmente alle marmitte stesse risultano alcuni fatti generali che si possono riassumere nel seguente modo. Il loro vano si presenta in sezione orizzontale più frequentemente ellittico che circolare; esso va sempre più restringendosi coll'approfondirsi, e termina in calotta pressochè sferica o ellittica e mai in punta. Le pareti nella loro parte inferiore sono regolari e presentano il massimo d'inclinazione, mentre nella parte superiore si allargano rapidamente, presentando quindi minore inclinazione. In alcune sono marcatissime le strie che, svolgendosi a spira dal fondo verso l'esterno della escavazione, indicano la direzione della corrente acquea e la regolarità del suo movimento vorticoso.

Il Socio Conte T. Salvadori, condeputato col Socio Comm. Michele Lessona a portare giudizio sopra un lavoro del signor Dott. Lorenzo Camerano, intitolato « *Monografia sugli Anfibi anuri italiani* », legge la seguente

RELAZIONE.

L'Autore, già noto per altri lavori intorno agli Anfibi, in questa Monografia esamina molto diligentemente le specie italiane di un gruppo di vertebrati, i quali, per quanto già studiati da altri, avevano bisogno di essere riveduti criticamente alla luce derivante dalle odierne dottrine biologiche.

L'Autore alla parte speciale del suo lavoro premette alcune considerazioni generali, e primieramente intorno al modo d'intendere la specie, le sottospecie e le varietà; egli crede che sia utile di stabilire nella descrizione delle forme degli Anfibi i seguenti gruppi, cominciando dai meno comprensivi: 1° Varietà; 2° Sottospecie; 3° Specie. L'Autore fa pure alcune considerazioni sul modo di considerare il *genere*, e crede che sia poco conveniente di fare generi troppo ricchi di specie, soprattutto quando le differenze fra le medesime siano troppo grandi.

Inoltre l'Autore fa alcune considerazioni intorno alle cause modificatrici delle forme degli Anfibi anuri; queste cause sarebbero principalmente l'adattamento, il mimismo, l'altitudine sul livello del mare, la vita acquatica o terragnola, la funzione di riproduzione, il perdurare dei caratteri giovanili, la selezione artificiale fatta dall'uomo.

Finalmente l'Autore esamina la questione relativa ai limiti della fauna italiana. Egli crede di poter stabilire la seguente divisione del territorio faunistico italiano:

1° Provincia continentale o settentrionale, limitata a Nord. ad Ovest e ad Est dalle Alpi fino al Quarnero, ed a Sud dalla catena degli Appennini fino alla Cattolica.

2° Provincia peninsulare e meridionale, che comprende il resto d'Italia fino alla valle nella Roja all'Est.

3° Provincia insulare Corso-sarda coll'Arcipelago Toscano.

4° Provincia insulare Siculo-maltese.

Premesse queste generalità l'Autore passa a descrivere le seguenti forme di Anfibi anuri, riferibili a dieci specie, riconosciute finora come appartenenti con certezza alla Fauna italiana:

Fam. DISCOGLOSSIDAE - Sp. 1. *Discoglossus pictus*, Otth. var. vittata, var. ocellata. Subsp. *sardus*. - Sp. 2. *Bombinator igneus* (Laur.).

Fam. PELOBATIDAE - Sp. 3. *Pelobates fuscus* (Laur.), var. albovittata, var. maculata.

Fam. HYLIDAE - Sp. 4. *Hyla arborea* (Linn.), var. intermedia. Subsp. *Savignyi*, var. fusca.

Fam. BUFONIDAE - Sp. 5. *Bufo viridis*, Laur., var. maculata, var. crucigera, var. lineata, var. concolor. - Sp. 6. *Bufo vulgaris*.

Fam. RANIDAE - Sp. 7. *Rana esculenta*, Linn. Subsp. *Lessonae* var. immaculata, var. maculata, var. punctata, var. nigrovittata - Sp. 8. *Rana muta*, Laur. var. subconcolor, var. nigromaculata, var. flavomaculata, var. nigroguttata, var. atra - Sp. 9. *Rana Latastii*, Boul. - Sp. 10. *Rana agilis*, Thomas.

L'Autore si è servito pel suo lavoro di un ricco materiale risultante di circa 1000 esemplari, provenienti da moltissime località italiane, e così ha potuto riconoscere le variazioni e la importanza di queste.

In un ultimo capitolo l'Autore ha dato una breve descrizione di quelle forme che a torto furono dai varii scrittori citate come rinvenute in Italia, o che vennero incluse nella Fauna

Anfibiologica italiana da quelli che soverchiamente allargarono i confini faunistici italiani.

Crediamo infine di far notare che l'Autore ha unito al suo lavoro due tavole, nelle quali sono rappresentate le specie del genere *Rana* e lo scheletro di tutti i generi di Anfibi anuri italiani; vari disegni intercalati nel testo rappresentano le parti caratteristiche più importanti delle varie specie.

La vostra commissione è lieta di proporre la lettura di questa Memoria, fatta con grande diligenza e che costituisce una contribuzione importante per la conoscenza dei vertebrati italiani.

Torino, 25 Giugno 1882.

Michele LESSONA.
T. SALVADORI, *Relatore*.

La Classe accoglie la conclusione della Relazione, e udita la lettura del lavoro del sig. Dott. L. CAMERANO, ne approva la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Cav. Prof. L. Bellardi, condeputato col Socio Conte T. Salvadori ad esaminare un lavoro dei signori Dott. Mario Lessona e Carlo Pollonera « *Sui Limacidi italiani* », legge la seguente

RELAZIONE.

I sottoscritti adempiono all'onorevole incarico che l'Accademia ha loro affidato di esaminare il manoscritto presentato dai signori Mario Lessona e Carlo Pollonera ed avente per titolo *Monografia dei Limacidi italiani* riferendole il loro giudizio in proposito.

Questa Memoria ha per oggetto la descrizione di tutti i *Limacidi* finora noti come viventi sul suolo italiano sia del continente, sia delle isole.

Le specie che vi sono comprese sommano a 36, delle quali 7 sono nuove per la scienza ed alcune finora sconosciute sul suolo italiano.

La descrizione delle singole specie e delle loro varietà è preceduta da alcuni cenni sulla loro distribuzione geografica, e da un quadro sistematico indicante i generi ai quali appartengono.

I caratteri specifici sono esposti in modo chiaro e sufficiente per modo da rendere facile il riconoscere le forme alle quali si riferiscono, e la parte sinonimica dimostra che gli Autori conoscono benissimo l'argomento trattato.

Oltre la descrizione dei caratteri specifici esterni gli Autori hanno aggiunti minuti particolari anatomici tanto sull'apparato genitale di parecchie specie quanto sulla forma delle radule che guerniscono la membrana linguale di questi Molluschi e che porgono al Malacologo colla loro differente forma un buon mezzo per la circoscrizione dei generi.

Dietro l'esame fatto di questo lavoro i sottoscritti sono di parere che esso meriti di essere preso in considerazione dall'Accademia pei seguenti motivi:

1. Questo lavoro riempie una lacuna nella Malacologia terrestre italiana, sulla quale la scienza possiede bensì parecchie pubblicazioni di distinti osservatori, ma per la quale mancava tuttora uno scritto complessivo della famiglia dei *Limacidi*.

2. Esso contiene: 1° la descrizione di sette specie nuove per la scienza e di parecchie varietà finora sconosciute, oltre l'indicazione di alcune, delle quali era fino adesso ignorata l'esistenza sul suolo italiano; 2° la descrizione dell'apparato genitale di parecchie specie e di quello boccale, nella quale sono esposti fatti nuovi illustrativi di questi animali.

3. Il manoscritto per la sua estensione entra nei confini assegnati dai regolamenti per l'inserzione nei volumi accademici, ed è accompagnato da tre tavole contenenti, la prima i disegni in colore delle forme nuove o poco note; la seconda i particolari anatomici dell'apparato genitale accuratamente disegnati; la terza, della quale gli Autori hanno dichiarato di assumersi la spesa, le figure delle radule delle quali inoltre talune sono intercalate nel testo.

Per queste considerazioni i Commissarii sottoscritti giudicano questo lavoro degno di essere inserto nelle Memorie dell'Accademia e ne propongono la lettura.

Torino, 25 Giugno 1882.

Tommaso Salvadori.
Prof. L. Bellardi, *Relatore.*

La conclusione della Relazione è accolta dalla Classe, la quale, udita la lettura del lavoro dei signori Dott. Mario Lessona e Carlo Pollonera, ne approva la stampa nei volumi delle *Memorie*.

Nell'adunanza del 14 p. p. Maggio il Socio Cav. Professore Angelo Mosso presentava la seguente Nota preliminare da lui scritta in collaborazione col sig. Dott. I. Guareschi:

RICERCHE

SULLE

SOSTANZE ESTRATTE DA ORGANI ANIMALI

FRESCHI E PUTREFATTI

Cervelli freschi.

Circa 30 kg. di cervelli freschi furono trattati col noto metodo di Stass-Otto. Dall'estratto etereo, del liquido reso alcalino con bicarbonato di sodio, si ebbe dell'ammoniaca, della trimetilammina ed un residuo il quale convenientemente purificato, diede tutte le reazioni che in generale servono a caratterizzare gli alcaloidi.

Avvertiamo, una volta per sempre, che, in tutte queste ricerche, furono adoperati solventi e reattivi di nota purezza, e che gli estratti ottenuti furono convenientemente purificati.

Il liquido, esaurito con etere, estratto con benzina, fornì una piccolissima quantità di residuo, che dava tutte le reazioni generali degli alcaloidi. Anche dagli estratti eterei, ottenuti dai liquidi acidi, si ebbero residui i quali, convenientemente purificati, davano le reazioni generali degli alcaloidi.

Dai cervelli, in istato normale, abbiamo dunque estratto piccole quantità di ammoniaca, trimetilammina ed alcaloidi. Siccome ci trovavamo in condizioni favorevoli per la temperatura invernale e per la rapidità con la quale i cervelli, 24 ore dopo la morte, venivano spappolati e messi immediatamente nell'alcool, dobbiamo concludere che le materie alcaloidee estratte, preesistevano veramente alla putrefazione.

Cervelli putrefatti.

36 kg. di cervelli furono lasciati a sè, entro palloni, durante 1-2 mesi e ad una temperatura di circa 10°-15° c. Il contenuto dei palloni, con odore sgradevolissimo, si trovò trasformato in una omogenea poltiglia. Tutta questa materia venne trattata col metodo Stass-Otto, facendo costantemente le stesse operazioni eseguite sui cervelli freschi. Si ottennero quantità notevolissime di ammoniaca e di trimetilammina ed estratti, i quali fornirono manifestissime le reazioni degli alcaloidi. Questi però non erano in tale quantità da potersi analizzare.

Orina normale di porcellino.

Questa orina, trattata nello stesso modo che i cervelli freschi e putrefatti, ci fornì una piccolissima quantità d'estratto, il quale dava tutte le reazioni degli alcaloidi.

Orina di porcellino avvelenato coll'estratto dei cervelli putrefatti.

Analizzammo l'orina, in quantità eguale alla precedente, d'un porcellino avvelenato coll'estratto dei cervelli putrefatti. Da questa ottenemmo tutte le reazioni generali degli alcaloidi ed in modo assai più manifesto che non nella precedente.

Ora abbiamo in corso numerose serie d'esperienze su altri cervelli putrefatti, sopra sangue putrefatto, fibrina e carne muscolare putrefatta ed inoltre sui prodotti volatili che si producono durante la putrefazione dei cervelli.

Ricerche fisiologiche.

Le ricerche fisiologiche fatte sulle sostanze estratte dal cervello fresco e dal cervello putrefatto dimostrarono che queste producono sulle rane fenomeni di avvelenamento analoghi al curaro. Le indagini fatte sul cuore, sui muscoli e sulla eccitabilità per mezzo del metodo grafico verranno esposte diffusamente in una prossima memoria.

L'Accademico Segretario
A. Sobrero.

INDICE

DEL VOLUME XVII

SOMMARIO

Classe di Scienze fisiche e matematiche.