Lehren und Lernen in der Mathematik

Ferdinand Lindemann

Lehren und Lernen in der Mathematik.

Rede

beim Antritt des Rektorats

der

Ludwig-Maximilians-Universität

gehalten

am 26. November 1904

von

Dr. Ferdinand Lindemann.

München 1904.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Königliche Hoheit!*)
Hochansehnliche Versammlung!

Als vor einigen Jahren einer meiner Amtsvorgänger von diesem Platze aus die Verlegung der Ludwig-Maximilians-Universität nach München schilderte, da sahen wir, wie der erhabene Fürst, dessen Bild auch jetzt auf uns herabschaut, bestrebt war, alle Wissenszweige in der neuen Universitas litterarum zu vereinigen, und wie nicht ohne Widerspruch der von alters her anerkannten Fächer die neuen Vertreter der Naturwissenschaft Aufnahme im Lehrkörper fanden.[1] Man fürchtete für die bisherige Einheit der Wissenschaft, man bedachte nicht, daß gerade die bespöttelte Zersplitterung der Naturwissenschaft in einzelne Spezialfächer den Grund zu erneuter Blüte und zu einer höheren umfassenden Einheit des Ganzen bilden könne und werde.

Was damals die Fakultäten erregte, die Teilung der Arbeit, das gilt heute als selbstverständlich; aber eine ähnliche Frage tritt gegenwärtig an unsere Schulen heran und ist zum Teil, wenn auch nicht ohne mannigfachen Widerspruch, schon entschieden: die Anerkennung der mehr mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung als gleichwertig mit der mehr philologisch-

*) Der Feier wohnte S. K. H. Prinz Konrad von Bayern an.

[1]) Vergl. Heigel: Die Verlegung der Ludwig-Maximilians-Universität nach München; Rede beim Antritt des Rektorats, München 1897.

historischen. Wie wir jetzt innerhalb des Lehrkörpers gern gegenseitig anerkennen, daß der eine dieses, der andere jenes Fach als Spezialität beherrscht und daß dadurch eben jeder dem Ganzen am besten dient, so werden künftig die verschiedenartigen Schulen neidlos gegenseitig anerkennen, daß die eine mehr das Griechische, die andere mehr die Physik oder Chemie bevorzugt, daß aber beide gleichmäßig der idealen Bildung der Jugend dienen. Von diesen verschiedenen Schulen werden in Zukunft die Studierenden gleichmäßig die Hochschulen beziehen, und die Universität wird die Aufgabe haben, sie alle trotz der verschiedenartigen Vorbildung zu einem einheitlichen Abschlusse ihrer Fachstudien zu geleiten; und doch wird andererseits im späteren Leben, sei es im Staats- und Gemeinde-Dienste, oder in Industrie und Technik oder in den eigentlich gelehrten Berufen die Zweiteilung der Jugendbildung sich geltend machen, aber nicht zum Schaden, sondern zum Vorteil des Ganzen, da alle divergierenden Kräfte doch je nach ihrer Art durch gemeinsame Arbeit zu einheitlichem Ziele streben.

Es kann nicht meine Absicht sein, hier all' die Fragen zu erörtern, zu denen solche und ähnliche Betrachtungen Veranlassung geben; bei der Mannigfaltigkeit der in Frage kommenden Berufe und Wissenschaften fühle ich mich dazu nicht berufen. Es soll nur meine Aufgabe sein, die Stellung der Mathematik im Unterrichtsysteme von Schule und Universität ins Auge zu fassen; das kann allerdings nicht geschehen, ohne einen Ausblick auf die allgemeinen Ziele der Erziehung zum Hochschulstudium zu werfen; wo ich indessen die Grenzen der von mir vertretenen Wissenschaft überschreiten muß, da werde ich mich nur der Aussprüche anerkannter Autoritäten (wie Harnack, Mommsen, v. Wilamowitz u. a.)

bedienen.[2]) Die Frage einer allgemeinen Schulreform, die gegenwärtig so vielfach öffentlich diskutiert wird, lasse ich absichtlich ganz beiseite.

Vorweg sei daran erinnert, daß die verschiedenen neueren Reformen des Gymnasialunterrichtes die Mathematik nur wenig beeinflußt haben, wohl deshalb, weil die Streitpunkte dabei auf anderen Gebieten lagen und die maßgebenden Persönlichkeiten vorwiegend in anderer Richtung interessiert waren. Auch zwischen humanistischen und Real-Gymnasium werden wir kaum zu unterscheiden haben;[3]) die grundlegenden Fragen sind für beide Schulgattungen dieselben; nur in den Anwendungen der Mathematik auf Physik und andere Fächer wird die eine Schule weiter zu gehen haben als die andere; diese Anwendungen aber treten für uns in den Hintergrund.

Es sind drei Fragen, die uns beschäftigen sollen:

Was ist der Zweck des mathematischen Unterrichtes auf den Gymnasien?

---

[2]) Was im folgenden über den Unterricht in den klassischen Sprachen gesagt ist, lehnt sich enge an die Darlegungen an, welche die genannten Gelehrten bei Gelegenheit der Schulkonferenz in Berlin 1900 gegeben haben: Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts, Berlin, 6. bis 8. Juni 1900, Halle a. S. 1901. — Vergl. auch die Einleitung zu dem griechischen Lesebuche von v. Wilamowitz-Möllendorff, Berlin 1902.

[3]) Nach Helmholtz läßt sich (obgleich die Realgymnasien mehr Kenntnisse in Mathematik und Physik übermitteln) ein wesentlicher Unterschied zwischen den Abiturienten der humanistischen und Real-Gymnasien nicht nachweisen: Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts, Berlin, 4. bis 17. Dezember 1890, Berlin 1891, S. 203 f. Nach Klein zeigt sich bei den Humanisten ein Defizit, weil sie die für die mathematische Literatur unentbehrlichen neueren Sprachen zu wenig kennen, während bei den Realisten die formale Sprachbildung nicht genügt und die mangelhafte Kenntnis des Lateinischen stört: vergl. die „Verhandlungen von 1900“, S. 30. Ähnlich sind die von Slaby bei Studierenden der technischen Hochschule gemachten Erfahrungen, vergl. ib. S. 378 f. Ich selbst habe keine bestimmten Erfahrungen machen können, da ich nicht Veranlassung hatte, festzustellen, von welchen Schulen meine Zuhörer kamen.

Wie weit ist dieser Unterricht auszudehnen, um den Zweck zu erreichen?

Wie müssen die Lehrer zu solchem Zwecke an den Hochschulen gebildet werden?

Die beiden letzten Fragen beantworten sich von selbst, wenn wir uns über die erste geeinigt haben.

Diese aber hängt aufs engste mit der andern zusammen: Was nennt man allgemeine Bildung? Denn daß der Zweck der Schule ist, dem Schüler die sogenannte allgemeine Bildung zu übermitteln, darüber sind alle einig, und seit der Zeit der Humanisten ebenso darüber, daß die Mathematik einen Teil dieser Bildung ausmacht. Und doch, wenn man heute von allgemein bildenden Fächern spricht, wer denkt dabei an die Mathematik? Sprachen, Geschichte, Wirtschaftslehre, Philosophie sind vielmehr die Fächer, die der Student zur Vervollständigung seiner allgemeinen Bildung auf der Universität noch hört und in denen er teilweise später geprüft wird, wo neben dem Staats-Examen seines Faches noch ein solches zum Nachweise allgemeiner Bildung existiert; wer dagegen kommt auf den Gedanken, einen Philologen, Historiker oder Juristen bei gleicher Gelegenheit nach Vervollständigung seiner mathematischen oder physikalischen Bildung zu fragen?

Worin ist diese Erscheinung begründet? Wie kommt es, daß schon das Wort Mathematik bei vielen Gebildeten ein gewisses Entsetzen hervorruft als der Ausdruck der denkbar größten Langeweile, daß [1]) die Mathe-

[1]) Diese Frage ist von Pringsheim eingehend behandelt: Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik, Festrede in der öffentlichen Sitzung der k. bayer. Akademie der Wissenschaften, München 1904, abgedruckt in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jahrgang 1904.

matik vielen eben als die „Wissenschaft des Unfaßbaren“ gilt? Da muß doch wohl ein Mangel im Unterrichtsbetriebe zu Grunde liegen, ein Mangel allerdings, der schwer zu beheben ist, da die Leitung des Unterrichtes an den Gymnasien meist in den Händen von Männern liegt, die der Mathematik zu fern stehen, um eine hinreichend umfassende Vorstellung von dem wahren Wesen derselben zu besitzen und da die eigentlichen Mathematiker von den leitenden Stellen, ja auch von den Stellen der Klassen-Ordinarien, fast überall ausgeschlossen werden. Trotzdem Melanchthon unter Berufung auf Plato so warm für die Mathematik eingetreten war,[5]) ward diese Wissenschaft in den folgenden Jahrhunderten immer mehr zurückgedrängt; der harte Spruch „Mathematicus non est collega“ charakterisiert am besten die herrschende Stimmung des siebenzehnten und achtzehnten Jahrhunderts; wenn auch Carnots, Napoleons und Scharnhorsts mächtiger Einfluß seit 1811 eine gründliche Wandlung hervorbrachte,[6]) haben wir jene Epoche des Verkennens mathematischer Bildung

---

[5]) Insbesondere hat Melanchthon in seiner Vorrede zu der lateinischen Euklid-Ausgabe (Basel 1537) sich eingehend über den Wert der Mathematik ausgesprochen, ausgehend von Platos bekanntem Worte: ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Auch sonst hat er sein Interesse für die Mathematik durch Vorreden zu mathematischen Werken oder durch Ratschläge bei Besetzung mathematischer Professuren betätigt.

[6]) Wegen der hier und im folgenden gemachten historischen Angaben sei verwiesen auf die Abhandlung von Max Simon: Rechnen und Mathematik, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen, herausgegeben von A. Baumeister, Bd. 4, 2. Hälfte, München 1898; ferner K. A. Schmid, Geschichte der Erziehung von Anfang an bis auf unsere Zeit, besonders Bd. 5, 1. Abt., Stuttgart 1901 mit Aufsätzen von Bender und H. Schmid; F. Paulsen, Geschichte des gelehrten Unterrichts auf den deutschen Schulen und Universitäten, 2 Auflage, zwei Bände, Leipzig 1896/7; und kürzer bei F. Klein: Der Unterricht in der Mathematik (in dem Werke von Lexis, Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen, Halle 1902), abgedruckt untee dem Titel „Hundert Jahre mathematischer Unterricht an den höheren Schulen Preußens“ in dem Werke desselben Verfassers: „Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen, mit einem Abdrucke verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting und F. Klein.“

noch nicht ganz überwunden; und heimlich hängt wohl mancher Schulmann noch an dem Ausspruche von Johannes Schulze aus dem Jahre 1837: „In einer Zeile Cornel liegt mehr bildende Kraft als in der ganzen Mathematik."

Wie anders dagegen im Altertum, in jener Zeit, die dem Schüler des Gymnasiums als die Periode der höchsten Blüte von Kunst und Wissenschaft geschildert wird, von der er aber wegen allzu einseitiger oder zeitlich beschränkter Betrachtung nur ein lückenhaftes Bild erhalten kann.

Diese Bemerkungen richten sich nicht etwa gegen den Satz, daß die Sprachen immer den Grundstock aller Bildung und Erziehung abgeben sollen, denn ohne reine Sprache und ohne logisch richtigen Gebrauch derselben gibt es keine Wissenschaft. Der Unterricht in den logisch so intensiv durchgebildeten klassischen Sprachen kann wesentlich dazu beitragen, auch die Präzision des Ausdrucks in unserer Muttersprache zu heben. In wie weit dies freilich durch die gegenwärtige Unterrichtsmethode erreicht wird, das ist eine andere Frage, über die gerade wir Mathematiker Gelegenheit haben, bei den späteren Prüfungen uns ein Urteil zu bilden. Es kann in dieser Richtung nur voll bestätigt werden, was von Helmholtz bei der erwähnten Gelegenheit 1890 ausführte:

„Was mir als der wesentlichste Mangel erscheint, das ist die Ausbildung des deutschen Stils, nicht sowohl seiner Schönheit als zunächst seiner grammatischen Richtigkeit und der Präzision des Ausdrucks, und ich bin überzeugt, daß darin sich mehr erreichen ließe. . . . . Bei meinen Laboranten und ihren schriftlichen Ausarbeitungen handelt es sich schließlich nur um Punkte, die meist als untergeordnet betrachtet werden, um einfache Auseinandersetzung von Tatsachen, aber sie mußten in übersichtlicher und leicht verständlicher Ordnung auseinandergesetzt werden, es durfte nichts ungesagt bleiben, was zum Verständnis nötig war. Es handelt sich also wesentlich nur um Vollständigkeit und Ordnung und die klare und scharfe Darstellung der Schlüsse. Schließlich, wenn alle diese Dinge erfüllt sind, ist eigentlich der gute Stil da. .... Ich muß nun sagen, daß ich immer gewisse Zeit gebraucht habe, bis ich meinen Schülern die schönen Einleitungen abgewöhnt hatte und sie dazu gebracht, klar, einfach und vollständig auseinander zu setzen, was auseinander zu setzen war. .... Ich glaube, das sind Ziele, die sich erreichen lassen."

Und über die Art, wie sie zu erreichen sind, bemerkt Helmholtz:

„Wirkliches Verständnis der Mathematik wird meines Erachtens durch schriftliche Ausarbeitung mathematischer Sätze und sorgfältige Kontrolle des dabei gebrauchten Ausdruckes erreicht. .... Wenn man im Kopfe etwas überdenkt, kann man sich immer noch irren, irgend ein Wort übersehen, was man erst dann merkt, wenn man es ausgearbeitet hat. Ich halte das für eine der vorzüglichsten Übungen, um zu wirklich klarem logischen Denken zu kommen und die Mathematik zu verstehen. Denn wenn die Schüler es nicht ausarbeiten und aufschreiben, werden sie es doch niemals sicher verstehen."

Die mitgeteilten Erfahrungen beziehen sich nicht nur auf die Prüfungsarbeiten von Lehramtskandidaten, sondern sie lassen sich auf einen großen Teil der gebräuchlichen mathematischen Lehr- und Übungs-Bücher ausdehnen, in denen man nur zu oft eine klare Fassung von Sätzen und Aufgaben vermißt. Hier muß und kann Wandel geschaffen werden: Der Mathematiker an der Schule soll zusammenwirken mit den Sprachlehrern; die Mathematik soll nicht äußerlich, wie jetzt, neben den anderen

Disziplinen stehen, sie soll mit dem *ganzen* Unterrichte organisch verwachsen, und zwar sowohl am humanistischen als am Real-Gymnasium.

Was hier in Bezug auf Ausdrucksweise und Stil gesagt wurde, gilt ähnlich für fast alle Zweige des Schulunterrichts: die Mathematik ist stets ein großer Faktor im Kulturleben der Menschheit gewesen; als solcher ist sie dem Schüler in historischem Zusammenhange vorzuführen; und das sollte nicht schwer sein im Anschlusse an den Unterricht in der Geschichte und in jenen klassischen Sprachen, in denen doch auch die Grundwerke der Mathematik geschrieben sind, jene Werke, in deren klarem und oft mit Unrecht geschmähtem Beweisgange unvergängliche Vorbilder für Ordnung und Präzision vorliegen.

Diese Forderung freilich steht in Widerspruch sowohl mit der bisherigen Entwicklung des mathematischen Unterrichts als mit den Forderungen nach Reform dieses Unterrichts, die gerade gegenwärtig von anderer Seite gestellt werden und die sich hauptsächlich auf die Unentbehrlichkeit der Mathematik in den Anwendungen, vor allem in der Technik gründen.[7])

---

[7]) Solche Forderungen sind besonders von *Klein* erhoben und genauer formuliert; sie stimmen in der Hauptsache (Einführung der Grundbegriffe der Differentialrechnung in den Schulunterricht) mit den von mir weiterhin entwickelten überein; nur die Begründung ist eine andere, indem *Klein* hauptsächlich auf die Forderungen der Technik und auf die zu erhaltende Konkurrenzfähigkeit Deutschlands mit anderen Staaten hinweist (vergl. „Verhandlungen" von 1900, Seite 153 f.; *Kleins* weitere Aufsätze sind in der oben zitierten Schrift wieder abgedruckt); er betont demnach auch die notwendige Entlastung des mathematischen Unterrichtes an den technischen Hochschulen und denkt vorwiegend an eine entsprechende Reform des Unterrichts an den Realgymnasien. Nach meiner Auffassung sollten dagegen gerade *alle* Gebildeten in der Mathematik mehr als bisher gefördert werden; gerade die Schüler der humanistischen Gymnasien bedürfen einer solchen Ergänzung am meisten, da ja diejenigen der Realgymnasien meist auf Universität und technischer Hochschule hinreichend Gelegenheit haben, sich weiter mathematisch zu bilden. Man sollte es vermeiden, die ideale Gleichberechtigung der beiden Schulgattungen dadurch zu stören, daß man die eine wieder zu einer Fachschule macht, indem man ihren Lehr-

Aber dieses Prinzip des Utilitarismus sollte man hier beiseite lassen; dadurch wird die ganze Frage in ein schiefes Licht gestellt; es handelt sich nicht um den Gegensatz von Ideal und Real, sondern um den allseitigen Ausbau der höchsten Ideale, um den Kampf gegen die weit verbreitete Vorstellung, als ob die Ideale der Menschheit in den künstlerischen und politischen Leistungen und in der sprachlichen Ausdrucksweise des Altertums so gut wie erschöpft wären. Die rein wissenschaftlichen Errungenschaften des Altertums stehen allerdings zurück gegen jene anderen Gaben, die uns dasselbe so reichlich darbietet; aber in einer Wissenschaft, in der Mathematik und besonders der Geometrie haben die Griechen für alle Zeiten Unvergängliches geleistet, diese eine ist ein unzerreißbares Band, das unser modernes Denken direkt mit dem antiken verknüpft, nicht verwittert durch die Stürme der Zeiten, nicht ausgegraben aus dem Schutte der Ruinen, sondern in unzerstörbarer Frische noch heute brauchbar, wie vor zweitausend Jahren. Wie ist es möglich, daß dieses Band an den Gymnasien nicht mehr beachtet und hervorgezogen wird, um die Verknüpfung antiker Philosophie mit moderner induktiver Wissenschaft im Geiste der Schüler anzubahnen? In der Tat, wer von unseren Abiturienten kennt mehr als die Namen der großen Mathematiker Euklid, Archimed, Apollonius, Diophant?

Die stetige Entwicklung griechischer Wissenschaft setzt sich fort bis in die ersten Jahrhunderte unserer Zeitrechnung, und an die dort gesponnenen Fäden knüpften Männer wie Kopernikus und Kepler

plan den Nützlichkeitsforderungen der Technik anpaßt. Auch die Erleichterung des Unterrichts für Chemiker und Techniker an den Hochschulen gibt allein keinen genügenden Grund zur erstrebten Reform des Schulunterrichts. Analoge Reformbestrebungen treten neuerdings auch in Frankreich hervor, wie man a. a. O. näher angegeben findet.

direkt wieder an; denn die griechische Philosophie repräsentiert uns die Naturwissenschaft des Altertums, und die moderne Naturwissenschaft ist nichts anderes als deren konsequente Fortentwicklung. Das sollte eine Schule, welche das klassische Altertum zur Grundlage hat, den Schülern begreiflich machen und zwar durch die Mathematik und die Physik.

Dazu allerdings müßte die nachalexandrinische Zeit des Hellenentums auf dem Gymnasium durch Geschichte und Lektüre eine eingehendere Würdigung finden als gegenwärtig; und dahin ging auch fast einmütig aus anderen Gründen die Forderung der Berliner Schulkonferenz vom Jahre 1900: Es muß jene Zeit dem Schüler nahe gebracht werden, in der neben dem stoffansammelnden Fleiße eines Aristoteles oder Plinius doch immer eine glückliche Verallgemeinerung philosophischer, d. h. naturwissenschaftlicher Ideen zur Geltung kam, jene Zeit, die uns in ihrer künstlerischen Größe erst neuerdings wieder zu vollem Bewußtsein gekommen ist, und in deren Leistungen auf dem Gebiete der plastischen Kunst wir ebenso etwas unserem modernen Denken und Empfinden Verwandtes finden,*) wie in den wissenschaftlichen Bestrebungen dieser Epoche. Ein idealer Unterricht — darin sind wohl alle einig — soll so gegeben werden, daß er die großen und zugleich durchsichtigen und schönen Verhältnisse des Altertums klar vor Augen führt; wir müssen uns Rechenschaft geben können, wie unsere Kultur zustande kam und wo in der Vergangenheit Kräfte, Ideale und Persönlichkeiten zu finden sind, die uns wie Sterne voran leuchten. Wir sollen aber außerdem erkennen, daß jenseits des Mittelalters eine Zeit lag, die wir in ihrer historischen Einheit

*) So drückt sich Kekule von Stradonitz in seiner Rektoratsrede aus: Die Vorstellung von griechischer Kunst und ihre Wandlung im neunzehnten Jahrhundert, Berlin 1901.

nicht bewundern, wie es die Schule in Bezug auf die klassische Zeit meist verlangt, sondern verstehen sollen: jene schon erwähnte Epoche von Alexander bis in die römische Kaiserzeit, wo sich die griechische und römische Weltkultur ausbildete und aus welcher sowohl das Christentum als der moderne Staat erwachsen sind. Und wenn bei solchem Unterrichte tatsächlich das Hauptgewicht auf die klassischen Sprachen gelegt wird, so ist das nur deshalb zu rechtfertigen, weil dadurch am besten die Fähigkeit gewonnen wird, geschichtlich zu sehen und das Gegenwärtige aus dem Vergangenen zu begreifen. Und dies geschichtliche Sehen sollte für die Mathematik ebenso gelten, wie für jede andere Wissenschaft. Wir lernen zwar heute ein Stück antiker Geometrie, aber ohne uns dessen bewußt zu werden; wir lernen auch ein Stück etwas modernerer Trigonometrie und Algebra, aber wo bleibt der Zusammenhang mit der Vergangenheit, wo der Ausblick auf die großartige Entwicklung unserer heutigen wissenschaftlichen Mathematik, wo die Beziehung zu jenen anderen Kulturelementen, die an der Schule so sorgsame Pflege finden?

Unser Gymnasium hat sich in der Zeit des Humanismus entwickelt; die durch dasselbe vermittelte Bildung bestand zunächst in bestimmten Kenntnissen und Fertigkeiten, alles basierte auf den formalen Künsten von Grammatik und Rhetorik; heute stehen wir auf Grund moderner Wissenschaft auf anderem Standpunkte; Platons Schule der Wissenschaft hat auf der ganzen Linie die Schule der Rhetorik besiegt; aber wo ist der so oft zitierte Spruch geblieben, der über dem Eingange zu Platons Schule stand? Äußerlich befolgen wir ihn; es wird Mathematik gelehrt; aber ist sie, wie Platon es dachte, die wesentliche Grundlage der Erkenntnis aller Gebildeten? Steht sie z. B. auf der

Schule auch im geringsten in Zusammenhang mit dem übrigen Unterrichtsbetriebe?

Was sind die Gründe dieser unerfreulichen Erscheinung? Was ihre Folgen? Letztere sind leicht ersichtlich: Die größten Entdeckungen der letzten dreihundert Jahre bleiben dem größeren Teile der Gebildeten unserer Zeit verschlossen. Zu Platons Zeit war die Mathematik ein reines Spiel des freien Gedankens; die mathematisch-mystischen Träumereien eines Pythagoras ließen eine weitgehende Bedeutung der Mathematik ahnen, aber eine solche Bedeutung lag noch (abgesehen von der Musik) ganz in der Einbildung; und doch sollte schon damals alles Studium mit der Mathematik beginnen! Und heute, wo wir in der Mathematik die einzige Sprache haben, durch welche allein sich die umfassendsten, vom Altertume kaum geahnten Naturgesetze formulieren lassen, und das einzige Hilfsmittel, diese Gesetze zu verstehen, — wie wenig lernen heute etwas von dem eigentlichen Wesen unserer Mathematik! Das letztere besteht nicht im Konstruieren von Dreiecken aus möglichst unpassend gewählten Stücken, nicht im Wälzen von Logarithmen-Tafeln oder im Hersagen von trigonometrischen Formeln, so nützlich derartige Vorübungen auch sind; man kann ruhig sagen: wer heute unsere Gymnasien als Absolvent verläßt, hat nicht die geringste Ahnung davon, was Mathematik eigentlich ist, was sie leisten kann und was wir ihr verdanken; ihm fehlt ein großes Stück aus der Erkenntnis des Naturzusammenhanges, ihm fehlt gerade das, was die griechischen Philosophen als das Höchste anstrebten und demgemäß heute als die höchste Errungenschaft preisen würden, dieselben Männer, deren Studium unsere Gymnasien über alles stellen! Verehren wir nur deshalb die Vorbilder des Altertums, um deren Beispiele nicht zu befolgen? Die Mathematik gilt heute an den Schulen nur als formales Bildungsmittel, als Turngerät für die Übungen des Geistes; daß sie den höchsten idealen Gehalt für unsere Erkenntnis des Weltganzen umschließt, daran wagt man beim heutigen Unterrichte kaum zu denken.

Wie viele feiern die Namen eines Newton und Leibnitz! Wie wenige haben eine tiefere Vorstellung von dem, was diese Männer an Unvergänglichem geschaffen haben! Hier liegen die Wurzeln unserer heutigen Erkenntnis, hier die wahre Fortsetzung der Bestrebungen antiker Weisheit, welche durch die vorzeitig abschließende oder wenigstens als abschließend betrachtete Arbeit des Aristoteles für zwei Jahrtausende zum Stillstande gekommen waren.

Und doch scheint gerade für solche Gesichtspunkte manchem von denen das Verständnis zu fehlen, die wir als die größten Kenner der klassischen Zeit und des ganzen Altertums verehren. Daß ich nicht übertreibe, zeigt Mommsens Ausspruch[9]): „Wir werden auch ferner das Ideal menschlicher Gesittung fortfahren auf gut lateinisch Humanität und denjenigen, welcher den Homer meint mit der Zeit durch die Lehre von den Kegelschnitten ersetzen zu können, auf gut griechisch einen Banausen zu nennen.“ Hierin liegt eine völlige Verkennung der Tatsachen; wir stimmen mit Mommsen darin überein, daß griechisches Sinnen und römisches Denken auch jetzt noch bewußt oder unbewußt die humane Bildung beherrschen, daß wir das Ideal menschlicher Gesittung als Humanität bezeichnen; aber dies Ideal umfaßt nicht nur Inhalt und Entwicklung von Kunst, Politik, Literatur, Geschichte, sondern auch von

[9]) Festrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der kgl. preußischen Akademie der Wissenschaften, 20. März 1884, Sitzungsberichte, Seite 246, Berlin 1884.

exakter Wissenschaft. Die unzähligen Sätze über Kegelschnitte freilich machen nicht die Mathematik aus, ebenso wenig wie das Deklamieren homerischer Gesänge als Zeichen klassischer Bildung gelten kann. Wenn man die Elemente der Kegelschnittheorie neuerdings in den Schulunterricht eingeführt hat, so liegt der Wert dieses dankenswerten Schrittes auf anderem Gebiete.

Die Behandlung der Kegelschnitte in analytisch-geometrischer Methode soll dem Schüler ein Beispiel allgemeiner Abhängigkeitsgesetze geben; der allgemeine Funktionsbegriff, hier zunächst geometrisch eingekleidet, ist es, der die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten durchsetzt und beherrscht, auf dem die großen Entdeckungen von Newton und Leibnitz beruhen. Das sollte dem Schüler in Prima klar gemacht werden, und dies durchzuführen ist nicht unmöglich, denn dazu liegen in der Trigonometrie die besten Vorübungen zur Hand, dazu bietet sich in der Physik mannigfache Gelegenheit, dazu wird auch die Kegelschnittlehre beitragen, wenn nicht der Lehrer, um schöne Aufgaben zu Prüfungen und Skriptionen zu haben,[10]) die Energie der Schüler in unnützen Spielereien

[10]) Die entscheidende Bedeutung von Skriptionen und Extemporalien für Beurteilung der Schüler ist auf der Berliner Schulkonferenz von 1890 allseitig verneint, dagegen ihre schädliche Wirkung betont worden (vergl. Seite 274 und 543 jener „Verhandlungen“).

Mit dem Arbeiten der Schüler für bestimmte Termine solcher Skriptionen (wie es hier in Bayern wenigstens üblich zu sein scheint) dürfte auch die leidige Überbürdungsfrage zusammenhängen. In meiner Jugend kannte man dergleichen nicht; niemand dachte an Überbürdung, und doch wurde viel mehr verlangt als jetzt (lateinischer Aufsatz, griechische Skriptionen, umfangreiche Privatlektüre, lateinischer Kommentar zu Horazischen Oden, analytische Geometrie der Kegelschnitte); ähnlich spricht sich Helmholtz 1890 aus. Die Überbürdung liegt meiner Meinung nach nur in der Unterrichtsmethode, nicht in der Fülle des Stoffes; so sagt auch Holzmüller (Verhandlungen von 1890): „Mit einigen verminderten Lehrstunden ist es nicht getan, die Methode muß die richtige sein“; vergl. entsprechende noch jetzt zutreffende Urteile aus älterer Zeit, mitgeteilt bei Paulsen a. a. O. Bd. 2, S. 368 ff.; sowie ibid. S. 637 ff. Nicht auf die Unterrichtsmethode in einer einzelnen Disziplin kommt es an, sondern auf die pädagogischen Grundsätze, nach denen die Schulen geleitet werden.

erschöpft, sondern selbst mit Begeisterung und Hingabe den großartigen Inhalt der allgemeinen Begriffe und das weite Feld ihrer Anwendungen zu bezeichnen und zu erläutern weiß.

Wie schon oben bemerkt, sind hier nicht solche Anwendungen gemeint, bei denen es sich um die Verwertung der Mathematik in der Technik handelt, sondern Anwendungen auf andere Zweige der reinen Naturwissenschaften, besonders der Astronomie, Physik und neuerdings Chemie, also Anwendungen, die selbst wieder dem theoretischen und damit philosophischen Erkennen des Naturganzen dienen. Dem Laien gegenüber ist es zwar leicht, den Wert der höheren Mathematik als Unterrichtsgegenstand dadurch ins rechte Licht zu setzen, daß man auf die ungeheuren Fortschritte der Technik verweist; aber die eigentliche Technik gehört nicht auf die Schule; sie kann nützliche Beispiele liefern, um das Interesse der Schüler zu wecken, aber nicht Zweck des Unterrichtes sein; das Gymnasium soll die Grundlagen unserer Erkenntnis übermitteln, es soll allen Gebildeten eine Idee von der Sicherheit und dem Wesen induktiver Forschung geben; die Hochschule hat dann die Früchte dieser Kenntnisse im einzelnen hervorzuholen. Das kann nicht genug hervorgehoben werden gegenüber den Bestrebungen von anderer Seite,[11]) welche die Technik als einziges Leit-

[11]) Die Forderungen der Technik in Bezug auf eine bessere Vorbereitung der von den Realgymnasien kommenden Studierenden sind besonders von Riedler betont, der aber entschieden zu weit geht, wenn er z. B. von jedem Mathematiker technische Bildung verlangt: Unsere Hochschulen und die Anforderungen des zwanzigsten Jahrhunderts, Berlin 1898; und: Die technischen Hochschulen und ihre wissenschaftlichen Bestrebungen, Rektoratsrede, Berlin 1899. Mit Recht betont er, daß der Unterricht an den technischen Hochschulen ein seminaristischer ist, da er stets mit ausgedehnten Übungen verbunden wird; es wäre aber ein Unglück, wenn solche Übungen auch an den Universitäten mehr als bisher üblich würden, denn durch dieselben wird das selbständige Denken der Studierenden nicht gestärkt; wer die Mathematik nicht ohne „Übungen“ lernen kann, sollte lieber ganz davon bleiben. Etwas anderes ist die Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten in den Seminarien.

motiv für die Reform des mathematischen Unterrichtes oder gar des Unterrichtes überhaupt hinzustellen versuchen. Die Schule hat den inneren Menschen zu bilden; für diesen sollte stets eines der höchsten Ideale sein, die Menschheit in ihrem Werden aus der Vergangenheit zu verstehen, aber auch weiter die Methoden gegenwärtiger und künftiger exakter Kenntnis abzuwägen, die zwar verschiebbaren aber nicht übersteigbaren Grenzen aller menschlichen Erkenntnis zu begreifen oder wenigstens zu ahnen; und der einzige Weg dahin geht durch das Tor der höheren Mathematik.[12]) Dafür sind die ewigen Gesetze der Planeten-Bewegung, wie sie Kepler aufgestellt und Newton im Gravitationsgesetze zusammengefaßt hat, herrliche Beispiele oder das Grundgesetz der Energie, wie wir es Mayer und Helmholz verdanken; dafür ist es aber ganz gleichgültig, mit welcher Geschwindigkeit wir die Welt durcheilen, mittels welcher Konstruktionen unsere Schienenwege Gebirge und Schluchten überwinden. Daß sich elektrische Wellen nach Hertz ohne Drähte im Raume fortpflanzen, ist eine grundlegende Tatsache, die in den Schulunterricht gehört; daß man aber diese Tatsache zur Funkentelegraphie benutzen kann, ist zwar von der allergrößten wirtschaftlichen Bedeutung, kann aber in der Schule nur beiläufig erwähnt werden.

In Aufstellung allgemeiner Naturgesetze hat man in neuerer Zeit einen Grad der Vollendung und logischen Durchbildung erreicht, dem das

---

[12]) Die mathematische Auffassung der Erkenntnistheorie geht vor allem auf Leibniz zurück. Kants Ausspruch (den der Mathematiker Jacobi als These bei seiner Doktorpromotion aufstellte), wonach in jeder Naturwissenschaft soviel eigentliche Wissenschaft liegt, als darin Mathematik enthalten ist, deutet auf eine analoge Auffassung. Aus neuerer Zeit ist für Deutschland auf Mach und Volkmann zu verweisen, für England auf Clifford und Pearson, für Frankreich auf A. Comte und Poincaré.

Altertum nichts an die Seite zu stellen hat. „Ich muß sagen," fährt Helmholtz bei der erwähnten Gelegenheit fort, „ich fühle es als ein Bedürfnis für die Gebildeten unserer Zeit, daß sie mindestens begreifen, wie man zu dergleichen kommt. Die Grammatik und die Syntax sind allerdings auch geeignet, eine logische Ausbildung zu geben und an scharfe Formen des Denkens zu gewöhnen; aber da ist das Unglück mit den Ausnahmen. . . . . Die jungen Leute, die bis dahin überwiegend vom Sprachunterricht gelebt haben, kommen nun zu den Naturgesetzen und sollen dieselben anwenden. Sie können im Anfange sich gar nicht entschließen, diese Forderung ernst zu nehmen und einzusehen, daß ein Naturgesetz etwas anderes ist als eine grammatische Regel und keine Ausnahme gestattet, und daß man mit der größten Sicherheit, wenn man seine Schlüsse scharf zieht, vorwärts gehen kann, Gebäude von Schlüssen darauf bauen kann, ohne fürchten zu müssen, auf Ausnahmen zu stoßen. Also eine Laxheit oder Furchtsamkeit im Denken erlaubt die Grammatik denn doch immer; das liegt zum großen Teile daran, daß der in der Sprache auszudrückende Stoff sich nicht immer in allgemein gültige und ganz scharf gefaßte Sätze einreihen läßt. Aber es gibt doch Gebiete des menschlichen Wissens, wo man in dieser Weise vorwärts gehen kann, und die sind der eigentliche Tummelplatz für die reine Verstandesarbeit. Diese Art der Verstandesarbeit ist schließlich in unserem Jahrhundert eine Kraft geworden, welche man nicht übersehen darf, und man muß verlangen, daß Leute, die sich zu den Gebildeten rechnen, mindestens begreifen, wie dergleichen Dinge möglich sind. Wie oft passiert es mir, daß ich versuche, irgend einem literarisch unterrichteten Manne einen mir relativ leicht erscheinenden Satz aus den Naturwissenschaften auseinanderzusetzen, und daß ich die Erfahrung mache: der Mann versteht mich gar nicht. Ich habe gar keinen Anhaltspunkt für ihn; es ist nicht bloß Unkenntnis des Stoffes, sondern er hat nicht gelernt, die Tatsachen als solche in ihrer unbedingten Zuverlässigkeit anzuerkennen und damit zu rechnen. . . . . Er kennt eben den Unterschied nicht zwischen der Einsicht in die Ursachen, worauf jede wirkliche Erklärung beruht, und zwischen Worterläuterungen. Das ist eine Sache, bei der es nicht bloß auf eine Reihe von materiellen Kenntnissen ankommt, sondern wo es sich darum handelt, unseren gebildeten Mitbürgern, die die beste Bildung zu erlangen streben, auch das Verständnis zu eröffnen für die Anwendung dieser Geisteskräfte und Methoden, deren Wichtigkeit jetzt unser ganzes Leben beherrscht. Deshalb glaube ich, daß wir die Mathematik ernsthaft betonen müssen. . . . . Die Differentialrechnung würde ich wenigstens für jetzt nicht verlangen, aber es müßte darauf hingearbeitet werden, daß der physikalische Unterricht Einsicht in das Wesen und die Fülle der Anwendungen der einfachsten Naturgesetze gibt."

Diese Forderung von Helmholtz kann der physikalische Unterricht nur erfüllen, wenn er dem Schüler die Grundbegriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung, Potential, Energie klar macht; und um das zu tun, muß schließlich der Differentialbegriff auf Umwegen heimlich eingeschmuggelt werden, wie es tatsächlich in vielen elementaren Lehrbüchern der Physik geschieht.[13]) Da sei man lieber offen und konsequent: nachdem die analytische Theorie der Kegelschnitte gelehrt wird, nachdem man den Coordinaten- und Funktions-Begriff eingeführt hat, entschließe man sich dazu, auch die Elemente der Differentialrechnung (natürlich stets in engem Anschlusse an den physikalischen Unterricht) prinzipiell zu erörtern.

[13]) Vergl. Beispiele hierfür bei Klein a. a. O. Seite 11 f.

Denselben Wunsch haben neuerdings die Vertreter der Technik dringend geltend gemacht, wenn auch teilweise aus anderen Gründen. Dieselbe Forderung aber ist schon vor hundert Jahren von Herbart ganz ebenso erhoben; und 1873 hat der Physiker Arthur von Öttingen in einer Dorpater Rektoratsrede die gleiche Notwendigkeit betont.[14]) Den Pädagogen galt Herbarts Name stets als Autorität, aber seinen Rat zu befolgen konnte man sich nicht entschließen. Auch der Inhalt der Süvern'schen Lehrpläne, die 1816 für Preußen die Anforderungen an die Gymnasien festlegten, stimmt damit im wesentlichen überein; die Durchführung allerdings blieb hinter den enthusiastischen Erwartungen zurück, da es für solche Zwecke weder brauchbare Lehrer noch Lehrbücher gab; und was der Mathematik schließlich gewährt wurde, konnte sie nur mit Mühe unter beständigen Kämpfen[15]) gegen Angriffe

---

[14]) Vergl. Arthur von Öttingen: Über den mathematischen Unterricht in der Schule, Festrede zur Jahresfeier der Stiftung der Universität Dorpat am 12. Dezember 1872. Der Verfasser wünscht ebenfalls eine enge Verbindung von mathematischem und physikalischem Unterrichte.

Auf der Berliner Schulkonferenz von 1890 hatte sich der Mathematiker Holzmüller gegen die Einführung der Elemente der Differentialrechnung in den Schulunterricht ausgesprochen; derselbe hat indessen inzwischen seine Anschauungen wesentlich modifiziert, indem er anrät, „zunächst an einzelnen Stellen methodische Versuche zu machen, um zu erkennen, ob in der zur Verfügung stehenden Zeit eine organische Eingliederung der neuen Gedanken in das Unterrichtsgebiet ermöglicht werden kann, ohne die allgemeine mathematische Durchbildung des Durchschnittsschülers zu schädigen". Vergl. bei Klein a. a. O. Seite 30 f.

Auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Breslau sind die einschlägigen Fragen über Reform des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts eingehend diskutiert worden (vergl. den vorläufigen Bericht in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 24. September 1904); Kleins bei dieser Gelegenheit gehaltener Vortrag ist abgedruckt: Physikalische Zeitschrift, Jahrgang 5, S. 710 ff.

Speziellere Vorschläge, betreffend die Einfügung der Infinitesimal-Begriffe in den Schulunterricht hat Götting ausgearbeitet, dessen Abhandlung in der zitierten Schrift von Klein abgedruckt ist.

[15]) Vergl. die betreffende Darstellung bei Paulsen a. a. O. Bd. 2, Seite 515 f.; Schmid a. a. O. Bd. 5, 1, S. 330 ff.

der sogenannten humanistischen Fächer behaupten. Richtig bezeichnet war aber schon damals der einzuschlagende Weg: die Erläuterung und Verbindung der höheren mathematischen Begriffe durch und mit dem Unterrichte in Mechanik und Physik. Auf diesem Wege kann das gesteckte Ziel erreicht werden, ohne daß die Zahl der wöchentlichen Stunden vermehrt würde, zumal wenn es gelingt, andere Gebiete der Mathematik etwas zu beschränken; wozu ist z. B. die so weitläufig behandelte Zinseszins-Rechnung dienlich? wozu die Auflösung der kubischen Gleichungen? So läßt sich mancher Ballast über Bord werfen, um die kostbare Zeit fruchtbareren Gegenständen zu widmen.

Diese Bemerkungen beziehen sich zunächst auf diejenigen deutschen Staaten, in denen für Mathematik und Physik mindestens sechs Stunden wöchentlich zur Verfügung gestellt werden. Unsere bayerischen Gymnasien mit nur vier Stunden für beide Fächer stehen da noch weit zurück. In Bayern setzte die Reform der Gymnasien durch die sogenannten Neuhumanisten 1808 ein, und zwar auf Grund der Niethammer'schen Lehrpläne, welche eine Trennung aller Schulen in Realschulen und humanistische Anstalten durchführten, aber seit 1830 durch andere von Thiersch ausgearbeitete ersetzt wurden. Die Realschulen wurden wieder aufgehoben; der für das Hellenentum so begeisterte Philologe wollte auch die Jugend ganz in seinen Ideen erzogen wissen; mehr als in allen anderen deutschen Staaten herrschen seitdem die klassischen Sprachen in den Schulen Bayerns [16]);

[16]) Thiersch verteidigte sein System mehrfach in heftigen Streitschriften gegen verschiedenene Angriffe, später hat er indessen sein abweisendes Urteil über den in Preußen eingeschlagenen, weniger einseitigen Weg zur Schulreform wesentlich modifiziert; vergl. Schmid a. a. O. S. 294. — Manches Bemerkenswerte über bayerische Schulen findet man in der Schrift von Flach: Betrachtungen über die Schulreform in Bayern und Preußen, München 1893.

selbst der besondere Unterricht im Deutschen sollte nach Thierschs Plänen ausfallen, was aber nicht zur Durchführung kam; die Mathematik ward beibehalten, aber der Unterricht bis 1854 vielfach von den philologischen Klassenlehrern erteilt, die Trigonometrie seit 1854 eingeführt, 1857 die noch heute sehr stiefmütterlich behandelte Physik; aber die Zahl der wöchentlichen Stunden für beide Fächer, die z. B. in Preußen seit 1856 auf sechs erhöht war, blieb auf vier beschränkt. Es kann wohl nicht bezweifelt werden, daß infolgedessen die Leistungen der bayerischen Schulen in der Mathematik hinter denen anderer Staaten zurückstehen; das kommt allerdings nicht in dem für ganz Deutschland ziemlich einheitlich geregelten Absolutorium zur Geltung; aber letzteres ist überhaupt kein richtiger Maßstab für das wirkliche mathematische Können der Schüler; Aufgaben, wie sie dabei gestellt werden, setzen meist mehr Routine und Drill als geistige Reife voraus. Wir Dozenten der Mathematik an den Universitäten haben indessen wohl alle die Erfahrung gemacht, daß die mathematischen Anfangsvorlesungen dem bayerischen Studenten mehr Schwierigkeiten bereiten als anderen. Hier bei uns ist daher eine Reform des mathematischen und physikalischen Unterrichts nur möglich, wenn die Zahl der Stunden vermehrt wird; aber auch hier kann viel Zeit gespart werden, indem z. B. in der vierten Klasse das Rechnen mit eingekleideten Gleichungen beschränkt oder ausgesetzt wird, das allen Schülern ganz unnötige Anstrengungen zumutet, da ja diese Aufgaben später in der Algebra ihre naturgemäße Behandlung finden.[17]) Das Realgymnasium scheint mir der darstellenden Geometrie, die doch nur für spätere Techniker unentbehrlich

[17]) Vergl. Ziegler: Über den mathematischen Unterricht mit Beziehung auf den neuesten Lehrplan für die bayerischen Studienanstalten, Blätter für das Bayerische Gymnasialschulwesen, Bd. 1, 1865, S. 121 ff.

ist, eine unverhältnismäßige Zeit zu widmen,[18]) die besser für die Grundbegriffe der modernen Geometrie oder der höheren Analysis verwandt würde. Ferner wird in der Oberklasse fast die ganze Zeit verbraucht, um die Schüler durch Repetitionen auf das Absolutorium vorzubereiten, was ja um so mehr notwendig ist, da die Aufgaben nicht durch die einzelne Schule, sondern für alle Schulen gleichmäßig durch die vorgesetzte Behörde festgelegt werden.[19]) Hier könnte gebessert werden, um so Zeit zu gewinnen und dadurch dem Lehrer die Möglichkeit zu geben, seinen Unterricht individuell zu gestalten und um den Schüler mehr mit mathematischem Geiste zu erfüllen, als mit Formeln und Kunststücken zu ermüden.

Andersartig sind die Reformbestrebungen, welche sich neuerdings gegen die althergebrachte euklidische Methode in der Geometrie richten; besonders in England traten dieselben in den letzten Dezennien scharf hervor, da dort noch heute die wörtliche Übersetzung von Euklids Werke das einzig gebrauchte Lehrbuch der Elementargeometrie ist.[20]) Allerdings,

[18]) Die große Bedeutung, die man der darstellenden Geometrie beilegt, entspricht den Verhältnissen, wie sie zu Anfang des vorigen Jahrhunderts durch das Wirken von Monge in Frankreich gegeben waren; von dort verpflanzte sich mit den polytechnischen Schulen auch der Unterricht in der darstellenden Geometrie nach Deutschland. Inzwischen aber hat in der geometrischen Wissenschaft nach dem Erstarken der sogenannten neueren oder projektivischen Geometrie durch die Arbeiten von Poncelet, Chasles, Steiner, Plücker die darstellende Geometrie ihre grundlegende Bedeutung eingebüßt; für den Techniker bleibt sie ein unentbehrliches Hilfsmittel. Es erscheint aber fraglich, ob das ein hinreichender Grund ist, sie in den Schulen beizubehalten. Das Zeichnen ist gewiß für alle Gebildeten ein wünschenswertes Mittel zur Ausbildung der Raum Anschauung (vergl. den Vortrag von A. Brill: Über die Schulreform und den Unterricht in Mathematik und Zeichnen auf den Gymnasien, Darmstadt 1890); dasselbe braucht aber nicht an die Darstellung durch die zwei Projektionstafeln der deskriptiven Geometrie anzuknüpfen.

[19]) Diese Verhältnisse werden schon 1865 in den Blättern für das Gymnasialschulwesen (Nr. 6, S. 215 ff) in gleichem Sinne besprochen.

[20]) Vergl. Henrici, Eröffnungsrede der Sektion A (Mathematical and physical science) der British Association for the advancement of science, Report of the Southport meeting, 1883,

Euklids Buch ist kein Schulbuch, deshalb auch in Deutschland seit lange durch Bearbeitungen von größerem oder geringerem Werte ersetzt; man kann in der Tat dem Anfänger manches durch Verweisen auf die Anschauung erleichtern, die bei Euklid (wenn man über die Axiome, Definitionen und Postulate hinaus ist) keine Rolle mehr spielt; man kann aber niemals die logische Schärfe der euklidischen Schlußweise dem Schüler durch ein anderes Verfahren ersetzen. Möge man daher für die Anfänger noch weiter als bisher von Euklid abweichen; auf einer späteren Stufe muß man zu ihm zurückkehren, wenn der Schüler wirklichen Einblick in ein wissenschaftliches System gewinnen soll. Bekannt ist Euklids Ausspruch gegenüber dem Könige Ptolemäus: „Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.“ Um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts glaubte man einen solchen in der sogenannten neueren Geometrie gefunden zu haben;[21]) ich selbst war früher ein begeisterter Anhänger dieser Auffassung, habe sie aber vollkommen aufgegeben: Je mehr man sich in das einzigartige Buch, das über zwei Jahrtausende das Lehrbuch von jung und alt gewesen ist, vertieft, je mehr erkennt man die innere Notwendigkeit seines Verfahrens und seines Aufbaues; und manche Lücken, die man bei ihm

p. 393 ff. Die von Perry neuerdings gemachten Reformvorschläge scheinen mir zu weit zu gehen, vergl. deren Darlegung bei Fricke: Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13, 1904, S. 283 ff. — Besonders heftig ist Méray gegen Euklid aufgetreten (L'Enseignement mathematique, 6ième année, 1904, p. 89); seine Einwände erledigen sich zum Teil dadurch, daß der euklidische Gleichheitsbegriff durch die sogenannten Gleichheits-Axiome genau so mit kinematischen Vorstellungen verbunden ist, wie wir es heute verlangen, worauf ich schon wiederholt hingewiesen habe (vergl. Vorlesungen über Geometrie Bd. 2, S. 540 ff., Leipzig 1891).

[21]) Vergl. H. Hankel, Die Elemente der projektivischen Geometrie, Vorlesungen, herausgegeben von A. Harnack, Leipzig 1875, Schluß der historischen Einleitung; oder auch desselben Verfassers Tübinger Antrittsrede: Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, 1869.

hat nachweisen wollen, werden als nur scheinbare erkannt, wenn man sich wirklich in den antiken Geist der reinsten Geometrie hineinzuleben vermag, welcher alles Rechnen und jede uns heute so geläufige Verbindung zwischen Zahlen und geometrischen Figuren vollkommen fern lag. Dann wird man aus vollem Herzen dem Ausspruche von Stewart Chamberlain zustimmen, wonach Euklids Elemente ein so vollkommenes Kunstwerk sind, daß sie ihm fast ebenso schön dünken wie Homers Ilias.[22])

Besonders dankenswert ist es deshalb, daß von Wilamowitz in seinem griechischen Lesebuche für die oberen Klassen ein Stück aus Euklids Elementen den Schülern im Originaltexte vorlegt, wie denn überhaupt dies Buch aus dem Gedanken heraus entstanden ist, den Gesichtskreis der Schüler über die Werke der üblichen Klassiker hinaus zu erweitern und auch mit den Schriftstellern jener eben besprochenen nachalexandrinischen Epoche durch Proben bekannt zu machen. Aus Euklids Elementen sind die einleitenden Abschnitte über Definitionen und Axiome sowie einige weitere Sätze mit den Beweisen aufgenommen.

Hier jedoch kann ich ein großes „aber“ nicht zurückhalten: wird auch der Lehrer des Griechischen imstande sein, dem Schüler den Inhalt klar zu legen? Gewiß, wird man denken, denn es handelt sich ja nur um die einfachsten Dinge, welche der Schüler aus der Geometrie seit lange kennt! Und doch müssen wir Zweifel hegen; denn in dieser Einleitung zu Euklids Elementen haben wir eines der schwierigsten und bewunderns-

---

22) Vergl. Houston Stewart Chamberlain: Die Grundlagen des neunzehnten Jahrhunderts, 1. Lieferung, München 1899, Seite 88.

wertesten Werke vor uns. Wie viel ist nicht über diese Dinge geschrieben! seit 100 Jahren hat man auf Grund der Arbeiten von Bolyai, Lobatschewski und Gauß Klarheit geschaffen, indem man von zunächst ganz anderen Gesichtspunkten ausging. Aber was die Wissenschaft gebaut hat, dringt nur langsam durch in die Praxis der Schule. Eine große Zahl der heute gebrauchten Schul-Lehrbücher stehen noch immer auf dem falschen Standpunkte, daß es möglich sei, Euklid zu verbessern;[23]) und trotzdem seit Dezennien wohl an allen Universitäten Vorlesungen über diese Grundbegriffe gehalten werden, bringen jene Lehrbücher noch immer Definitionen und sogar Beweise, die seit lange als unzulässig erkannt sind. Selbst manchem Mathematiker wird es unter diesen Umständen Schwierigkeiten machen, an der Verwirklichung des schönen Gedankens mitzuarbeiten und den Schüler wieder direkt mit den mathematischen Schätzen des Altertums bekannt zu machen.

Es gibt leider eine Anzahl von Studierenden und späteren Lehrern, welche die ganze höhere Mathematik als unnützen Ballast betrachten, da sie nichts mit dem eigentlichen Schulunterrichte gemein zu haben scheint. Aber hier, wo die Grundbegriffe in Frage stehen, da kommt die ganze Ärmlichkeit solchen Denkens zutage. Das erste Kapitel Euklids sollte jeder Lehrer, sei es im Urtexte, sei es in einer Übersetzung, erklären können; das ist aber nur möglich, wenn er sich entweder ganz in die antike Auffassung versenkt (und wie wenige sind dazu imstande!) oder wenn er durch die moderne höhere Mathematik hindurch zu jenen Ele-

[23]) Vergl. die näheren Angaben hierüber in meinen erläuternden Anmerkungen zu der deutschen Ausgabe des Werkes von Poincaré: Wissenschaft und Hypothese, Leipzig 1904.

menten zurückkehrt; der letztere Weg ist für die meisten der gangbarere und wird doch noch von vielen verschmäht; ja, Männer wie Lotze und Dühring warnen vor diesem Wege und geben damit einen Beweis der Lückenhaftigkeit ihrer mathematischen Bildung. Euklids Buch sollte ferner allen ein Muster sein, wie eine Wissenschaft ihre Voraussetzungen zu formulieren hat; keine Wissenschaft kann ohne dieselben bestehen, aber jede einzelne Voraussetzung muß ausgesprochen werden; es darf keine unbewußten Voraussetzungen geben. Auch davon sollte den Schülern eine Vorstellung verschafft werden; sie sollten merken, daß es sich nicht um einzelne Sätze, sondern um ein großartiges, in sich abgeschlossenes Gebäude mit solidem Unterbau handelt.

Damit sind wir in die Erörterung der letzten von den anfangs gestellten drei Fragen eingetreten, die sich auf die Vorbildung der Lehrer bezog. Sie beantwortet sich jetzt von selbst; er soll auf der Universität so weit eindringen, daß er die soeben gestellte Forderung erfüllen kann, er soll außerdem seinen Schülern Hinweise geben können, bis wie weit solche Probleme, wie sie die Phantasie aller Gebildeten und der Schüler stets erregt haben, verfolgt werden können und zu welchen Resultaten die Wissenschaft gekommen ist, ich meine z. B. die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises. Der Lehrer soll ferner z. B. einmal gehört und gelernt haben, wie man die Bewegung eines Pendels oder die Drehung eines Kreisels mathematisch genau behandelt, ohne sich mit den üblichen Näherungsformeln zu begnügen; sodann soll er die Grundbegriffe der analytischen Mechanik beherrschen, ohne welche ein exaktes Verständnis der Physik kaum möglich ist; er soll hier vor allem mehr wissen, als er zu lehren braucht. Das alles sind Forderungen, denen der heutige Universitätsbetrieb vollauf genügt,[24]) deren Erfüllung den Studierenden durch drei bis vier Jahre auch voll beschäftigt, zumal wenn

[24]) Diesen Forderungen entsprechen auch im wesentlichen die Prüfungsordnungen für Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik; in Bayern dürfte die theoretische Physik mehr betont werden; überall sollte neben grundlegenden, von jedem unbedingt zu fordernden Kenntnissen (Infinitesimal Rechnung, analytische und synthetische Geometrie der Kurven und Flächen zweiter Ordnung, Elemente der Differentialgleichungen und bestimmten Integrale, Theorie der komplexen Funktionen bis einschließlich der elliptischen Funktionen, Fundamentalbegriffe aus der Algebra und der Invariantentheorie, Grundbegriffe der Geometrie, Elemente der Theorie der krummen Oberflächen, analytische Mechanik) auch Spezialkenntnisse in irgend einer bestimmten Richtung gefordert werden. Es sollte Gelegenheit gegeben sein, diese Richtung auch nach der technischen Seite zu wählen; die mathematische Prüfung aber vollkommen zu trennen in eine für reine Mathematik und eine andere für angewandte Mathematik (wie es die neue preußische Prüfungsordnung tut) erscheint mir nicht als ein Fortschritt. Mehr Gewicht sollte auf die historische Entwicklung der Mathematik gelegt werden; nur dann wird es möglich sein, den mathematischen Schulunterricht den historisch-philologischen Disziplinen der Gymnasien besser anzugliedern; in dieser Richtung bleibt der Studierende allerdings an den meisten Hochschulen auf Privatstudium angewiesen.

In Betreff der genannten allgemeinen Anforderungen sind die bayerischen und preußischen Prüfungsvorschriften im Prinzipe ziemlich gleichwertig. Hier in Bayern wird von jedem Kandidaten darstellende Geometrie verlangt, das ist entschieden ein Vorteil; andererseits fehlt es an der nötigen wissenschaftlichen Tradition. Die von 1873 bis 1895 gültige ältere Prüfungsordnung entsprach den wissenschaftlichen Anforderungen um die Mitte des vorigen Jahrhunderts; sie hatte dadurch an Wert verloren, daß die zweite, eigentlich wissenschaftliche Prüfung (welche nach erfolgter Anstellung als Lehrer abgelegt wurde) fast ganz außer Übung gekommen war. Für die meisten Kandidaten kam so nur die erste Prüfung in Betracht, d. h. eine Anzahl von Klausurarbeiten über bestimmt umgrenzte und bezeichnete Fächer, wobei die (nach meiner Anschauung viel wichtigere) mündliche Prüfung ganz vernachlässigt ward; bei dieser Prüfung kam es dann auch mehr auf Routine und Drill als auf wirkliches Können an. Fächer, wie Funktionentheorie und Theorie der krummen Flächen, partielle Differentialgleichungen 2c. konnten nicht geprüft werden, und so ward das wissenschaftliche Niveau der Kandidaten herabgedrückt (natürlich immer mit einzelnen Ausnahmen). Als ich vor etwa zehn Jahren hier Vorlesungen über komplexe Funktionen und elliptische Funktionen ankündigte, ward ich von Kollegen darauf aufmerksam gemacht, daß man für solche Gegenstände (die an allen anderen Universitäten seit Dezennien im Mittelpunkte des Interesses standen) in München nur auf wenige Zuhörer rechnen könne, da diese Dinge nicht geprüft würden. Seitdem ist eine sehr wesentliche Besserung eingetreten; und wenn es auch wünschenswert wäre, daß die Sache an sich und nicht die Prüfungsordnung für die Studierenden bestimmend ist, so glaube ich doch, daß wir der (seit 1895 geltenden) neuen Prüfungsordnung trotz mancher ihr anhaftenden Mängel diese Besserung wesentlich zu danken haben.

er, was absolut nötig ist, auch der Physik ausgiebig gerecht werden und auch sonst seine Kenntnisse erweitern will. Insbesondere werden viele mit Vorliebe auch die Anwendungen ihrer Wissenschaft in der Technik kennen lernen wollen, und hier in München können wir uns glücklich schätzen, daß die technische Hochschule den Mathematikern eine so wichtige Ergänzung in so vorzüglicher Weise darbietet; andere Universitäten, die nicht in gleich günstiger Lage sind, bemühen sich deshalb mit Recht, ihren Lehrbetrieb durch Angliederung einzelner technischer Fächer zu erweitern.[25]) Aber für den künftigen Lehrer soll nicht die technische Anwendung den Studiengang bestimmen, Aufgabe unserer Hochschulen und Gymnasien ist es vielmehr, vor allem die idealen Errungenschaften der Erkenntnis und besonders der durch Mathematik bezw. Physik gewonnenen Erkenntnis den Studierenden und Schülern zu übermitteln.

Hält man an diesem Gedanken fest, so können in der Mathematik an den beiden Arten von Gymnasien wesentlich die gleichen Ziele erstrebt werden, an der einen werden die Anwendungen nur mehr hervortreten

[25]) Die Frage, welche neuen Aufgaben dadurch den philosophischen Fakultäten erwachsen, ist mehrfach eingehend erörtert worden; vergl. F. Klein: Über die Aufgaben und die Zukunft der philosophischen Fakultät, akademische Festrede, Göttingen 1904 (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, S. 267 ff.); Gutzmer: Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten (ibid. S. 517); F. Klein: Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts der Universität Göttingen, Göttinger Nachrichten 1895; von Escherich: Reformfragen unserer Universitäten, Rede bei der feierlichen Inauguration des Rektors der Wiener Universität für das Studienjahr 1903/4; Bernheim: Die gefährdete Stellung unserer deutschen Universitäten, Rede zum Antritt des Rektorats der Universität Greifswald, 1899; L. Fuchs: Über das Verhältnis der exakten Naturwissenschaft zur Praxis, Rede beim Antritt des Rektorats der Universität Berlin, 1899; Fricke: Über die Bedeutung der allgemeinen Bildung, Rede beim Antritt des Rektorats der technischen Hochschule zu Braunschweig, 1904; Schanz: Die neue Universität und die neue Mittelschule, akademische Festrede, Würzburg 1902. In der zuletzt genannten Schrift sind zahlreiche weitere Literatur-Nachweise gegeben.

als an der andern; die Unterscheidung wird sich wesentlich auf das Lehren des Griechischen an der einen, auf das Berücksichtigen der Biologie an der andern zu gründen haben;[26]) die Mathematik wird nicht notwendig die Einheit der Vorbildung zum Hochschulstudium zerstören.

Der ideale Sinn der studierenden Jugend wird am besten gepflegt, wenn man an der Lehrmethode festhält, die sich seit Mitte des vorigen Jahrhunderts, d. h. mit dem Auftreten von Jacobi und F. Neumann in Königsberg, von Dirichlet in Berlin und Riemann in Göttingen, an den deutschen Universitäten in der Mathematik ausgebildet und bewährt hat; sie besteht einfach darin, daß der Lehrer den Schüler möglichst Anteil nehmen läßt an der wissenschaftlichen Forschung. Diese untrennbare Verbindung von Lehre und Forschung ist das wesentliche Moment in dem Aufblühen unserer Hochschulen, denn es hat sich in gleicher Weise bei allen Wissenszweigen bewährt.

Und wenn ich dazu übergehe gemäß dem Willen des Stifters unserer Alma Mater, wie er in der Urkunde von 1472 ausgesprochen ist, an Sie, meine jungen Freunde und Commilitonen, einige Worte der Ermahnung am heutigen Tage zu richten, so möchte ich Ihnen vor allem nahe legen, diese Verbindung von Lehre und Forschung nicht aus dem Auge zu verlieren, sich dessen bewußt zu bleiben, daß es zwar in Rücksicht auf zu bestehende Prüfungen notwendig ist, vielerlei Kenntnisse auf der Universität zu erwerben, daß aber für die innere Bildung und Befriedigung

[26]) Auch die Reform bezw. Einführung des biologischen Unterrichts ist neuerdings vielfach diskutiert worden, so auch auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung zu Breslau; vergl. Beiträge zur Frage des naturwissenschaftlichen Unterrichtes an den höheren Schulen von Detmer, Hertwig, Verworn, H. und J. Wagner, Walther, herausgegeben von Verworn, Jena 1904.

des einzelnen das Eindringen in ein Spezialgebiet von ungleich größerer Bedeutung ist, daß nur der den Zweck des Hochschulstudiums voll erfaßt, welcher den Genuß kennen gelernt hat, den das Bewußtsein bietet, auch seinerseits zu dem wachsenden Kapitale des Wissens beigetragen zu haben. Und wenn Sie sich dabei der Führung Ihrer Lehrer anvertrauen, so lassen Sie sich nicht irre machen durch Zurufe und Ratschläge von auswärts über die Richtung des einzuschlagenden Weges. Die Wahrheit, nach der wir alle forschen, thront so hoch, daß sie uns in absoluter Reinheit vielleicht für immer durch Nebel und Wolken verborgen bleibt, aber wer es unternimmt, den Weg zu bahnen und die Hindernisse hinwegzuräumen, der kann nur von Schritt zu Schritt, von Stufe zu Stufe Umschau halten, um aus einem sicheren Tritte einen neuen zu gewinnen. Er ist nur sich selbst verantwortlich, niemand kann von unten dem kühnen Bergsteiger an steiler Wand Ratschläge erteilen wollen. Seine Erfahrung wird ihn weiter helfen, und diese Erfahrung seinen Schülern mitzuteilen, dadurch neue Führer und Forscher heranzuziehen, das ist seine schönste Aufgabe, und das Vertrauen seiner Gehilfen und Schüler sein schönster Lohn.