GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK: BEGRIFFSSCHRIFTLICH ABGELEITET

Gottlob Frege

Grundgesetze der Arithmetik.

Von

Dr. G. Frege.

GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK.

Begriffsschriftlich abgeleitet

von

Dr. G. FREGE
A. O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

I. Band.

JENA
Verlag von Hermann Pohle
1893.

Vorwort.

Man findet in diesem Buche Lehrsätze, auf denen die Arithmetik beruht, mit Zeichen bewiesen, deren Ganzes ich Begriffsschrift nenne. Die wichtigsten dieser Sätze sind am Ende zum Theil mit angefügter Uebersetzung zusammengestellt. Wie man sieht, sind die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen hier noch von der Betrachtung ausgeschlossen, ebenso auch Addition, Multiplication u. s. w. Auch die Sätze von den Anzahlen sind noch nicht in der zuerst geplanten Vollständigkeit vorhanden. Insbesondere fehlt noch der Satz, dass die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände endlich ist, wenn die Anzahl der Gegenstände endlich ist, die unter einen übergeordneten Begriff fallen. Aeussere Gründe haben mich bestimmt, dies, sowie die Behandlung der andern Zahlen und der Rechnungsarten einer Fortsetzung vorzubehalten, deren Erscheinen von der Aufnahme abhängig sein wird, die dieser erste Band findet. Was ich hier geboten habe, mag hinreichen, von meiner Weise eine Vorstellung zu geben. Man könnte meinen, dass die Sätze über die Anzahl Endlos [1]) hätten fehlen können. Zur Begründung der Arithmetik im hergebrachten Umfange sind sie allerdings nicht nöthig; aber ihre Ableitung ist meist einfacher als die der entsprechenden Sätze für endliche Anzahlen und kann als Vorbereitung für sie dienen. Noch kommen Sätze vor, die nicht von Anzahlen handeln, die aber zu den Beweisen gebraucht werden. Sie handeln z. B. vom Folgen in einer Reihe, von der Eindeutigkeit von Beziehungen, von zusammengesetzten und gekoppelten Beziehungen, von der Abbildung durch Beziehungen u. dergl. Diese Sätze könnte man vielleicht einer erweiterten Combinationslehre zuweisen.

Die Beweise sind allein in den mit „Aufbau“ überschriebenen Paragraphen enthalten, während die mit „Zerlegung“ überschriebenen das Verständniss erleichtern sollen, indem sie vorläufig den Gang des Beweises in groben Umrissen vorzeichnen. Die Beweise selbst enthalten keine Worte, sondern sind allein mit meinen Zeichen geführt. Sie stellen sich dem Auge dar als eine Reihe von Formeln, die durch ausgezogene oder

1) Anzahl einer abzählbar unendlichen Menge.

unterbrochene Striche oder andere Zeichen getrennt sind. Jede dieser Formeln ist ein vollständiger Satz mit allen Bedingungen, die zu seiner Gültigkeit nothwendig sind. Diese Vollständigkeit, welche stillschweigend hinzuzudenkende Voraussetzungen nicht duldet, scheint mir für die Strenge der Beweisführung unentbehrlich zu sein.

Der Fortschritt von einem Satze zum nächsten geht nach den Regeln vor sich, die im § 48 zusammengestellt sind, und kein Uebergang geschieht, der nicht diesen Regeln gemäss wäre. Wie und nach welcher Regel die Folgerung gemacht wird, deutet das zwischen den Formeln stehende Zeichen an, während ——•—— eine Schlusskette abschliesst. Es muss hierbei Sätze geben, die nicht aus andern abgeleitet werden. Solche sind theils die Grundgesetze, die ich im § 47 zusammengestellt habe, theils die Definitionen, die man am Ende in einer Tafel vereinigt findet mit Hinweis auf die Stellen, wo sie zuerst vorkommen. Bei einer Fortsetzung dieses Unternehmens wird immer wieder das Bedürfniss von Definitionen hervortreten. Die Grundsätze, die dabei maassgebend sein müssen, sind im § 33 aufgeführt. Die Definitionen sind nicht eigentlich schöpferisch und dürfen es, wie ich glaube, nicht sein; sie führen nur abkürzende Bezeichnungen (Namen) ein, die entbehrt werden könnten, wenn nicht sonst die Weitläufigkeit unüberwindliche äussere Schwierigkeiten machte.

Das Ideal einer streng wissenschaftlichen Methode der Mathematik, das ich hier zu verwirklichen gestrebt habe, und das wohl nach Euklid benannt werden könnte, möchte ich so schildern. Dass Alles bewiesen werde, kann zwar nicht verlangt werden, weil es unmöglich ist; aber man kann fordern, dass alle Sätze, die man braucht, ohne sie zu beweisen, ausdrücklich als solche ausgesprochen werden, damit man deutlich erkenne, worauf der ganze Bau beruhe. Es muss danach gestrebt werden, die Anzahl dieser Urgesetze möglichst zu verringern, indem man Alles beweist, was beweisbar ist. Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus, verlange ich, dass alle Schluss- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung kommen, vorher aufgeführt werden. Sonst ist die Erfüllung jener ersten Forderung nicht sicher zu stellen. Dieses Ideal glaube ich nun im Wesentlichen erreicht zu haben. Nur in wenig Punkten könnte man noch strengere Anforderungen stellen. Um mir mehr Beweglichkeit zu sichern und nicht in übermässige Breite zu verfallen, habe ich mir erlaubt, von der Vertauschbarkeit der Unterglieder (Bedingungen) und von der Verschmelzbarkeit gleicher Unterglieder stillschweigend Gebrauch zu machen, und habe die Schluss- und Folgerungsweisen nicht auf die geringste Zahl zurückgeführt. Wer mein Büchlein *Begriffsschrift* kennt, wird daraus entnehmen können, wie man auch hierin den strengsten Anforderungen genügen könnte, zugleich aber auch, dass dies eine beträchtliche Zunahme des Umfanges nach sich zöge.

Im Uebrigen, glaube ich, werden die Ausstellungen, die man mit Recht bei diesem Buche machen kann, nicht die Strenge betreffen, sondern nur die Wahl des Beweisganges und der Zwischenstufen. Oft stehen mehre Wege offen, einen Beweis zu führen; ich habe sie nicht alle zu betreten versucht, und so ist es möglich, ja wahrscheinlich, dass ich nicht immer den kürzesten gewählt habe. Wer in dieser Hinsicht etwas zu tadeln hat, der mache es besser. Ueber Anderes wird sich streiten lassen. Einige würden vielleicht vorgezogen haben, den Umkreis der zugelassenen Schluss- und Folgerungsweisen weiter zu ziehen und dadurch grössere Beweglichkeit und Kürze zu erzielen. Aber irgendwo muss man hier Halt machen, wenn man überhaupt mein aufgestelltes Ideal billigt, und wo man auch Halt macht, würden immer Leute sagen können: es wäre besser gewesen, noch mehr Schlussweisen zuzulassen.

Durch die Lückenlosigkeit der Schlussketten wird erreicht, dass jedes Axiom, jede Voraussetzung, Hypothese, oder wie man es sonst nennen will, auf denen ein Beweis beruht, ans Licht gezogen wird; und so gewinnt man eine Grundlage für die Beurtheilung der erkenntnisstheoretischen Natur des bewiesenen Gesetzes. Es ist zwar schon vielfach ausgesprochen worden, dass die Arithmetik nur weiter entwickelte Logik sei; aber das bleibt solange bestreitbar, als in den Beweisen Uebergänge vorkommen, die nicht nach anerkannten logischen Gesetzen geschehn, sondern auf einem anschauenden Erkennen zu beruhen scheinen. Erst wenn diese Uebergänge in einfache logische Schritte zerlegt sind, kann man sich überzeugen, dass nichts als Logik zu Grunde liegt. Ich habe Alles zusammengestellt, was die Beurtheilung erleichtern kann, ob die Schlussketten bündig und die Widerlager fest sind. Wenn etwa jemand etwas fehlerhaft finden sollte, muss er genau angeben können, wo der Fehler seiner Meinung nach steckt: in den Grundgesetzen, in den Definitionen, in den Regeln oder ihrer Anwendung an einer bestimmten Stelle. Wenn man Alles in Ordnung findet, so kennt man damit die Grundlagen genau, auf denen jeder einzelne Lehrsatz beruht. Ein Streit kann hierbei, soviel ich sehe, nur um mein Grundgesetz der Werthverläufe (V) entbrennen, das von den Logikern vielleicht noch nicht eigens ausgesprochen ist, obwohl man danach denkt, z. B. wenn man von Begriffsumfängen redet. Ich halte es für rein logisch. Jedenfalls ist hiermit die Stelle bezeichnet, wo die Entscheidung fallen muss.

Mein Zweck erfordert manche Abweichungen von dem, was in der Mathematik üblich ist. Die Anforderungen an die Strenge der Beweisführung haben eine grössere Länge zur unausweichlichen Folge. Wer dies nicht im Auge hat, wird sich in der That wundern, wie umständlich hier oft ein Satz bewiesen wird, den er in einer einzigen Erkenntnissthat unmittelbar einzusehen glaubt. Besonders wird dies auffallen, wenn man die Schrift des Herrn Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* vergleicht, das Gründlichste, was mir in der letzten Zeit über die Grundlegung der Arithmetik zu Gesicht gekommen ist. Sie verfolgt auf einem weit kleineren Raume die Gesetze der Arithmetik weit höher hinauf, als es hier geschieht. Diese Kürze wird freilich nur dadurch erreicht, dass Vieles überhaupt nicht eigentlich bewiesen wird. Herr Dedekind sagt oft nur, dass der Beweis aus den und den Sätzen folge; er gebraucht Pünktchen, wie in „𝔐(*A*, *B*, *C* . . .)"; nirgends ist bei ihm eine Zusammenstellung der von ihm zu Grunde gelegten logischen oder andern Gesetze zu finden, und wenn sie da wäre, hätte man keine Möglichkeit, zu prüfen, ob wirklich keine andern angewendet wären; denn dazu müssten die Beweise nicht nur angedeutet, sondern lückenlos ausgeführt sein. Auch Herr Dedekind ist der Meinung, dass die Lehre von den Zahlen ein Theil der Logik sei; aber seine Schrift trägt kaum dazu bei, diese Meinung zu erhärten, weil die von ihm angewendeten Ausdrücke „System", „ein Ding gehört zu einem Dinge" in der Logik nicht üblich sind und nicht auf anerkannt Logisches zurückgeführt werden. Ich sage dies nicht als Vorwurf; denn sein Verfahren mag für ihn das zweckdienlichste gewesen sein; ich sage es nur, um meine Absicht durch den Gegensatz in helleres Licht zu setzen. Die Länge eines Beweises soll man nicht mit der Elle messen. Man kann ja leicht einen Beweis auf dem Papiere kurz erscheinen lassen, indem man viele Zwischenglieder in der Schlusskette überspringt und manches nur andeutet. Man begnügt sich ja meistens damit, dass jeder Schritt im Beweise als richtig einleuchte, und das darf man auch, wenn man nur von der Wahrheit des zu beweisenden Satzes überzeugen will. Wenn es sich aber darum handelt, eine Einsicht in die Natur dieses Einleuchtens zu vermitteln, genügt dies Verfahren nicht, sondern man muss alle Zwischenstufen hinschreiben, um das volle Licht des Bewusstseins auf sie fallen zu lassen. Den Mathematikern kommt es ja gewöhnlich nur auf den Inhalt des Satzes an, und dass er bewiesen werde. Hier ist das Neue nicht der Inhalt des Satzes, sondern wie der Beweis geführt wird, auf welche Grundlagen er sich stützt. Dass dieser wesentlich verschiedene Gesichtspunkt auch eine andere Behandlungsweise erfordert, darf nicht befremden. Wenn man einen unserer Sätze in üblicher Weise ableitet, wird leicht ein Satz übersehen werden, der zum Beweise unnöthig zu sein scheint. Bei genauer Durchdenkung meines Beweises wird man, glaube ich, denn doch seine Unentbehrlichkeit einsehen, wenn man nicht etwa einen ganz andern Weg einschlagen will. So findet man auch vielleicht in unsern Sätzen hier und da Bedingungen, die zuerst als unnöthig auffallen, die sich aber doch als nothwendig erweisen, oder wenigstens nur mit einem eigens zu beweisenden Satze entfernt werden können.

Ich führe hiermit ein Vorhaben aus, das ich schon bei meiner *Begriffsschrift* vom Jahre 1879 im Auge gehabt und in meinen *Grundlagen der Arithmetik* vom Jahre 1884 angekündigt habe [1]). Ich will hier durch die

1) Man vergleiche die Einleitung und die §§ 90 und 91 meiner Grundlagen der Arithmetik, Breslau, Verlag von Wilhelm Koebner, 1884.

That die Ansicht über die Anzahl bewähren, die ich in dem zuletzt genannten Buche dargelegt habe. Das Grundlegende meiner Ergebnisse sprach ich dort im § 46 so aus, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte; und darauf beruht hier die Darstellung. Wenn jemand anderer Ansicht ist, so versuche er es, darauf eine folgerechte und brauchbare Darstellung durch Zeichen zu gründen, und er wird sehn, dass es nicht geht. In der Sprache ist die Sachlage freilich nicht so durchsichtig; aber wenn man genau zusieht, findet man, dass auch hier bei einer Zahlangabe immer ein Begriff genannt wird, nicht eine Gruppe, ein Aggregat oder dergl., und dass, wo dies doch einmal vorkommen sollte, die Gruppe oder das Aggregrat immer durch einen Begriff bestimmt ist, d. h. durch die Eigenschaften, die ein Gegenstand haben muss, um zu der Gruppe zu gehören, während das, was die Gruppe zur Gruppe, das System zum System macht, die Beziehungen der Glieder zu einander, für die Anzahl völlig gleichgültig ist.

Der Grund, warum die Ausführung so spät nach der Ankündigung erscheint, liegt zum Theil in innern Umwandlungen der Begriffsschrift, die mich zur Verwerfung einer handschriftlich fast schon vollendeten Arbeit genöthigt haben. Diese Fortschritte mögen hier kurz erwähnt werden. Die in meiner *Begriffsschrift* verwendeten Urzeichen kommen hier mit einer Ausnahme wieder vor. Statt der drei parallelen Striche habe ich nämlich das gewöhnliche Gleichheitszeichen gewählt, da ich mich überzeugt habe, dass es in der Arithmetik grade die Bedeutung hat, die auch ich bezeichnen will. Ich gebrauche nämlich das Wort „gleich" in derselben Bedeutung wie „zusammenfallend mit" oder „identisch mit", und so wird das Gleichheitszeichen auch in der Arithmetik wirklich gebraucht. Der Widerspruch, der sich etwa hiergegen erhebt, wird wohl auf mangelhafter Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem beruhen. Freilich ist in der Gleichung ‚$2^2 = 2+2$' das links stehende Zeichen verschieden von dem rechts stehenden; aber beide bezeichnen oder bedeuten dieselbe Zahl [1]). Zu den alten Urzeichen sind nun noch zwei hinzugekommen: der Spiritus lenis zur Bezeichnung des Werthverlaufs einer Function und ein Zeichen, das den bestimmten Artikel der Sprache vertreten soll. Die Einführung der Werthverläufe der Functionen ist ein wesentlicher Fortschritt, dem eine weit grössere Beweglichkeit zu verdanken ist. Die früheren abgeleiteten Zeichen können nun durch andere, und zwar einfachere ersetzt werden, obwohl die Definitionen der Eindeutigkeit einer Beziehung, des Folgens in einer Reihe, der Abbildung im Wesentlichen dieselben sind, die ich theils in meiner *Begriffsschrift*, theils in meinen *Grundlagen der Arithmetik* gegeben habe. Die

1) Ich sage freilich auch: der Sinn des rechts stehenden Zeichens ist verschieden von dem des links stehenden; aber die Bedeutung ist dieselbe. Man vergleiche meinen Aufsatz über Sinn und Bedeutung in der Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik, 100. Bd., S. 25.

Werthverläufe haben aber auch eine grosse grundsätzliche Wichtigkeit; definire ich doch die Anzahl selbst als einen Begriffsumfang, und Begriffsumfänge sind nach meiner Bestimmung Werthverläufe. Ohne diese wäre also gar nicht auszukommen. Die alten äusserlich unverändert wieder auftretenden Urzeichen, deren Algorithmus sich auch kaum geändert hat, sind doch mit andern Erklärungen versehen worden. Der frühere Inhaltsstrich erscheint als Wagerechter wieder. Das sind Folgen einer eingreifenden Entwickelung meiner logischen Ansichten. Ich hatte früher in dem, dessen äussere Form ein Behauptungssatz ist, zweierlei unterschieden: 1) die Anerkennung der Wahrheit, 2) den Inhalt, der als wahr anerkannt wird. Den Inhalt nannte ich beurtheilbaren Inhalt. Dieser ist mir nun zerfallen in das, was ich Gedanken, und das, was ich Wahrheitswerth nenne. Das ist die Folge der Unterscheidung von Sinn und Bedeutung eines Zeichens. In diesem Falle ist der Sinn des Satzes der Gedanke und seine Bedeutung der Wahrheitswerth. Dazu kommt dann noch die Anerkennung, dass der Wahrheitswerth das Wahre sei. Ich unterscheide nämlich zwei Wahrheitswerthe: das Wahre und das Falsche. Dies habe ich in meinem oben erwähnten Aufsatze über Sinn und Bedeutung eingehender begründet. Hier mag nur erwähnt werden, dass die ungerade Rede nur so richtig aufgefasst werden kann. Der Gedanke nämlich, der sonst Sinn des Satzes ist, wird in der ungeraden Rede seine Bedeutung. Wieviel einfacher und schärfer durch die Einführung der Wahrheitswerthe Alles wird, kann nur eine eingehende Beschäftigung mit diesem Buche lehren. Diese Vortheile allein schon legen ein grosses Gewicht in die Wagschale zu Gunsten meiner Auffassung, die freilich auf den ersten Blick befremden mag. Auch ist das Wesen der Function im Unterschiede vom Gegenstande schärfer als in meiner ***Begriffsschrift*** gekennzeichnet. Daraus ergiebt sich weiter die Unterscheidung der Functionen erster und zweiter Stufe. Wie ich in meinem Vortrage über ***Function und Begriff***[1]) ausgeführt habe, sind Begriffe und Beziehungen Functionen in der von mir erweiterten Bedeutung dieses Wortes, und so haben wir auch Begriffe erster und zweiter Stufe, gleichstufige und ungleichstufige Beziehungen zu unterscheiden.

Wie man sieht, sind die Jahre nicht vergebens seit dem Erscheinen meiner ***Begriffsschrift*** und meiner ***Grundlagen*** verflossen: sie haben das Werk gereift. Aber grade das, was ich als wesentlichen Fortschritt erkenne, steht, wie ich mir nicht verhehlen kann, der Verbreitung und der Wirksamkeit meines Buches als grosses Hemmniss im Wege. Und worin ich seinen Werth nicht zum geringsten Theile sehe, die strenge Lückenlosigkeit der Schlussketten wird ihm, wie ich fürchte, wenig Dank einbringen. Ich habe mich von den hergebrachten Auffassungsweisen weiter

1) Jena, Verlag von Hermann Pohle, 1891.

entfernt und dadurch meinen Ansichten ein paradoxes Gepräge aufgedrückt. Leicht wird ein Ausdruck, der hier oder da beim flüchtigen Durchblättern aufstosst, befremdlich erscheinen und ein ungünstiges Vorurtheil erzeugen. Ich selbst kann ja das Widerstreben einigermaassen abschätzen, dem meine Neuerungen begegnen werden, weil ich selbst ein ähnliches erst in mir überwinden musste, um sie zu machen. Denn nicht aufs Gerathewohl und aus Neuerungssucht, sondern durch die Sache selbst gedrängt, bin ich dahin gelangt.

Hiermit komme ich auf den zweiten Grund der Verspätung: die Muthlosigkeit, die mich zeitweilig überkam angesichts der kühlen Aufnahme, oder besser gesagt, des Mangels an Aufnahme meiner oben genannten Schriften bei den Mathematikern [1]) und der Ungunst der wissenschaftlichen Strömungen, gegen die mein Buch zu kämpfen haben wird. Schon der erste Eindruck muss abschrecken: unbekannte Zeichen, seitenlang nur fremdartige Formeln. So habe ich mich denn zu Zeiten andern Gegenständen zugewendet. Aber auf die Dauer konnte ich doch die Ergebnisse meines Denkens, die mir werthvoll schienen, nicht in meinem Pulte verschliessen, und die aufgewendete Arbeit forderte immer neue Arbeit, um nicht vergeblich zu sein. So liess mich die Sache nicht los. In einem Falle wie hier, wo der Werth eines Buches durch flüchtiges Durchlesen nicht erkannt werden kann, sollte die Kritik helfend einspringen. Aber sie wird im Allgemeinen zu schlecht bezahlt. Ein Kritiker wird nie hoffen können, für die Mühe, die ein gründliches Durcharbeiten dieses Buches in Aussicht stellt, in Geld entschädigt zu werden. Mir bleibt nur übrig zu hoffen, jemand möge von vorneherein soviel Vertrauen zu der Sache schöpfen, dass er in dem innern Gewinn eine hinreichende Belohnung erwartet, und er werde dann das Ergebniss seiner reiflichen Prüfung der Oeffentlickeit übergeben. Nicht, als ob mich nur eine lobende Besprechung befriedigen könnte; im Gegentheil! eine auf gründlicher Kenntnissnahme gestützte Bekämpfung kann mir nur lieber sein als ein Lob, das sich in allgemeinen Wendungen ergeht, ohne den Kern der Sache zu berühren. Einem Leser, der mit solchen Absichten an das Buch herantritt, möchte ich hier durch einige Winke die Arbeit erleichtern.

Um vorerst eine ungefähre Vorstellung zu gewinnen, wie ich mit meinen Zeichen Gedanken ausdrücke, wird es dienlich sein, in der Tafel der wichtigeren Lehrsätze einige der einfacheren näher zu betrachten, denen eine Uebersetzung angehängt ist. Man wird dann auch errathen können, was andere jenen ähnliche besagen wollen, denen keine Uebersetzung folgt. Darauf möge man mit der Einleitung anfangen und die Darlegung der Begriffsschrift in Angriff nehmen. Doch rathe ich, zunächst nur flüchtige Kenntniss davon

1) In dem Jahrb. über die Fortschritte der Math. sucht man meine Grundlagen der Arithm. vergebens. Forscher auf demselben Gebiete, die Herren Dedekind, Otto Stolz, v. Helmholtz scheinen meine Arbeiten nicht zu kennen. Auch Kronecker erwähnt sie in seinem Aufsatze über den Zahlbegriff nicht.

zu nehmen und sich bei einzelnen Bedenken nicht zu lange aufzuhalten. Einige Betrachtungen mussten zwar aufgenommen werden, um allen Einwänden begegnen zu können, sind aber für das Verständniss der Begriffsschriftsätze unwesentlich. Ich rechne dahin die zweite Hälfte des § 8, die auf S. 12 mit den Worten „Wenn wir nun erklären" beginnt, ferner die zweite Hälfte des § 9, die auf S. 15 mit den Worten „Wenn ich allgemein sage" beginnt, und den ganzen § 10. Diese Stellen mögen beim ersten Lesen ganz überschlagen werden. Dasselbe gilt von den §§ 26 und 28 bis 32. Dagegen möchte ich als für das Verständniss besonders wichtig die erste Hälfte des § 8, ferner die §§ 12 und 13 hervorheben. Ein genaueres Durchlesen möge mit § 34 beginnen und bis zum Schlusse andauern. Man wird dann gelegentlich auf die nur flüchtig gelesenen §§ zurückkommen müssen. Das Wörterverzeichniss am Schlusse und das Inhaltsverzeichniss werden das erleichtern. Die Ableitungen in den §§ 49 bis 52 können als Vorbereitung für das Verständniss der Beweise selbst dienen. Alle Weisen des Folgerns und Schliessens und fast alle der Anwendungen unserer Grundgesetze kommen hier schon vor. Nachdem man so bis ans Ende gelangt ist, möge man die Darlegung der Begriffsschrift noch einmal im Zusammenhange und vollständig lesen und sich dabei vor Augen halten, dass die Festsetzungen, die später nicht gebraucht werden und darum unnöthig scheinen, zur Durchführung des Grundsatzes dienen, dass alle rechtmässig gebildeten Zeichen etwas bedeuten sollen, eines Grundsatzes, der für die volle Strenge wesentlich ist. So wird, glaube ich, das Misstrauen allmählich schwinden, das meine Neuerungen zunächst erwecken mögen. Der Leser wird erkennen, dass meine Grundsätze nirgends zu Folgerungen führen, die er nicht selbst als richtig anerkennen muss. Vielleicht wird er dann auch zugeben, dass er die Arbeit zuerst überschätzt hatte, dass mein sprungloses Vorgehen doch auch wieder das Verständniss erleichtert, nachdem einmal das in der Neuheit der Zeichen liegende Hinderniss überwunden ist. Möge es mir glücken, einen solchen Leser und Beurtheiler zu finden! denn eine auf oberflächlicher Durchsicht gegründete Anzeige könnte leicht mehr schaden als nützen.

Sonst sind die Aussichten meines Buches freilich gering. Jedenfalls müssen alle Mathematiker aufgegeben werden, die beim Aufstossen von logischen Ausdrücken, wie „Begriff", „Beziehung", „Urtheil" denken: ***metaphysica sunt, non leguntur!*** und ebenso die Philosophen, die beim Anblicke einer Formel ausrufen: ***mathematica sunt, non leguntur!*** und sehr wenige mögen das nicht sein. Vielleicht ist die Zahl der Mathematiker überhaupt nicht gross, die sich um die Grundlegung ihrer Wissenschaft bemühen, und auch diese scheinen oft grosse Eile zu haben, bis sie die Anfangsgründe hinter sich haben. Und ich wage kaum zu hoffen, dass meine Gründe für die peinliche Strenge und damit verbundene Breite viele von ihnen überzeugen werden. Hat doch das einmal Hergebrachte grosse

Macht über die Gemüther. Wenn ich die Arithmetik mit einem Baume vergleiche, der sich oben in eine Mannichfaltigkeit von Methoden und Lehrsätzen entfaltet, während die Wurzel in die Tiefe strebt, so scheint mir der Wurzeltrieb, in Deutschland wenigstens, schwach zu sein. Selbst in einem Werke, das man dieser Richtung zuzählen möchte, der Algebra der Logik des Herrn E. Schröder, gewinnt doch bald der Wipfeltrieb wieder die Oberhand, bevor noch eine grössere Tiefe erreicht ist, bewirkt ein Umbiegen nach oben und eine Entfaltung in Methoden und Lehrsätze.

Ungünstig für mein Buch ist auch die weit verbreitete Neigung, nur das Sinnliche als vorhanden anzuerkennen. Was nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, sucht man zu leugnen oder doch zu übersehen. Nun sind die Gegenstände der Arithmetik, die Zahlen unsinnlicher Art; wie findet man sich damit ab? Sehr einfach! man erklärt die Zahlzeichen für die Zahlen. In den Zeichen hat man dann etwas Sichtbares, und das ist ja doch die Hauptsache. Freilich haben die Zeichen ganz andere Eigenschaften als die Zahlen selbst; aber was thut's? Man dichtet ihnen die gewünschten Eigenschaften durch sogenannte Definitionen einfach an. Wie freilich eine Definition statthaben kann, wo gar kein Zusammenhang zwischen Zeichen und Bezeichnetem in Frage kommt, ist ein Räthsel. Man knetet Zeichen und Bezeichnetes möglichst ununterscheidbar zusammen; jenachdem es erforderlich ist, kann man dann die Existenz mit Hinweis auf die Greifbarkeit behaupten[1]), oder die eigentlichen Zahleigenschaften hervorkehren. Zuweilen scheint man die Zahlzeichen wie Schachfiguren anzusehen und die sogenannten Definitionen als Spielregeln. Das Zeichen bezeichnet dann nichts, sondern ist die Sache selbst. Eine Kleinigkeit übersieht man freilich dabei, dass wir nämlich mit ‚$3^2+4^2=5^2$' einen Gedanken ausdrücken, während eine Stellung von Schachfiguren nichts besagt. Wo man sich mit solchen Oberflächlichkeiten zufrieden giebt, ist für eine tiefere Auffassung freilich kein Boden.

Es kommt hier darauf an, sich klar zu machen, was Definiren ist und was dadurch erreicht werden kann. Man scheint ihm vielfach eine schöpferische Kraft zuzutrauen, während doch dabei weiter nichts geschieht, als dass etwas abgrenzend hervorgehoben und mit einem Namen bezeichnet wird. Wie der Geograph kein Meer schafft, wenn er Grenzlinien zieht und sagt: den von diesen Linien begrenzten Theil der Wasserfläche will ich Gelbes Meer nennen, so kann auch der Mathematiker durch sein Definiren nichts eigentlich schaffen. Man kann auch nicht einem Dinge durch blosse Definition eine Eigenschaft anzaubern, die es nun einmal nicht hat, es sei denn die eine, nun so zu heissen, wie man es etwa benannt hat. Dass aber ein

1) Vergl. E. Heine, Die Elemente der Functionslehre, in Crelle's Journal, Bd. 74, S. 173: „Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt, indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne, sodass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht.“

eirundes Gebilde, das man mit Tinte auf Papier hervorbringt, durch eine Definition die Eigenschaft erhalten sollte, zu Eins addirt, Eins zu ergeben, kann ich nur für einen wissenschaftlichen Aberglauben halten. Ebensogut könnte man durch blosse Definition einen faulen Schüler fleissig machen. Unklarheit entsteht hier leicht durch die mangelnde Unterscheidung von Begriff und Gegenstand. Wenn man sagt: „Quadrat ist ein Rechteck, in dem zusammenstossende Seiten gleich sind“, so definirt man den Begriff *Quadrat*, indem man angiebt, welche Eigenschaften etwas haben muss, um unter diesen Begriff zu fallen. Diese Eigenschaften nenne ich Merkmale des Begriffes. Aber, wohl gemerkt, diese Merkmale des Begriffes sind nicht seine Eigenschaften. Der Begriff *Quadrat* ist nicht ein Rechteck, nur die Gegenstände, die etwa unter diesen Begriff fallen, sind Rechtecke, wie auch der Begriff *schwarzes Tuch* weder schwarz noch ein Tuch ist. Ob es solche Gegenstände giebt, ist durch die Definition unmittelbar noch nicht bekannt. Nun will man z. B. die Zahl Null definiren, indem man sagt: sie ist etwas, was, zu Eins addirt, Eins ergiebt. Damit hat man einen Begriff definirt, indem man angegeben hat, welche Eigenschaft ein Gegenstand haben muss, um unter den Begriff zu fallen. Aber diese Eigenschaft ist nicht Eigenschaft des definirten Begriffes. Wie es scheint, bildet man sich nun vielfach ein, man habe durch die Definition etwas geschaffen, was, zu Eins addirt, Eins ergiebt. Grosse Täuschung! Weder hat der definirte Begriff diese Eigenschaft noch leistet die Definition Gewähr dafür, dass der Begriff erfüllt sei. Das bedarf erst einer Untersuchung. Erst wenn man bewiesen hat, dass es einen Gegenstand und nur einen einzigen von der verlangten Eigenschaft giebt, ist man in der Lage, diesen Gegenstand mit dem Eigennamen „Null“ zu belegen. Die Null zu schaffen, ist also unmöglich. Solches ist von mir schon wiederholt dargelegt worden, aber, wie es scheint, ohne Erfolg[1]).

Auch bei der herrschenden Logik wird auf kein Verständniss für den Unterschied zu hoffen sein, den ich zwischen dem Merkmal eines Begriffes und der Eigenschaft eines Gegenstandes mache[2]); denn sie scheint durch und durch psychologisch verseucht zu sein. Wenn man statt der Dinge selbst nur ihre subjectiven Abbilder, die Vorstellungen betrachtet, gehen natürlich alle feinern sachlichen Unterschiede verloren, und es treten dafür andere auf, die logisch völlig werthlos sind. Und damit komme ich auf das zu sprechen, was der Wirkung meines Buches bei den Logikern im Wege steht. Es ist der verderbliche Einbruch der Psychologie in die Logik. Entscheidend für die Behandlung dieser Wissenschaft muss die Auffassung der logischen Gesetze sein, und das hängt wieder damit zusammen, wie

1) Mathematiker, die sich ungerne in die Irrgänge der Philosophie begeben, werden gebeten, hier das Lesen des Vorworts abzubrechen.

2) In der Logik des Herrn B. Erdmann finde ich keine Spur dieses wichtigen Unterschiedes.

man das Wort „wahr“ versteht. Dass die logischen Gesetze Richtschnuren für das Denken sein sollen zur Erreichung der Wahrheit, wird zwar vorweg allgemein zugegeben; aber es geräth nur zu leicht in Vergessenheit. Der Doppelsinn des Wortes „Gesetz“ ist hier verhängnissvoll. In dem einen Sinne besagt es, was ist, in dem andern schreibt es vor, was sein soll. Nur in diesem Sinne können die logischen Gesetze Denkgesetze genannt werden, indem sie festsetzen, wie gedacht werden soll. Jedes Gesetz, das besagt, was ist, kann aufgefasst werden als vorschreibend, es solle im Einklange damit gedacht werden, und ist also in dem Sinne ein Denkgesetz. Das gilt von den geometrischen und physikalischen nicht minder als von den logischen. Diese verdienen den Namen „Denkgesetze“ nur dann mit mehr Recht, wenn damit gesagt sein soll, dass sie die allgemeinsten sind, die überall da vorschreiben, wie gedacht werden soll, wo überhaupt gedacht wird. Aber das Wort „Denkgesetz“ verleitet zu der Meinung, diese Gesetze regierten in derselben Weise das Denken, wie die Naturgesetze die Vorgänge in der Aussenwelt. Dann können sie nichts anderes als psychologische Gesetze sein; denn das Denken ist ein seelischer Vorgang. Und wenn die Logik mit diesen psychologischen Gesetzen zu thun hätte, so wäre sie ein Theil der Psychologie. Und so wird sie in der That aufgefasst. Als Richtschnuren können diese Denkgesetze dann in der Weise aufgefasst werden, dass sie einen mittlern Durchschnitt angeben, ähnlich wie man sagen kann, wie die gesunde Verdauung beim Menschen vor sich geht, oder wie man grammatisch richtig spricht, oder wie man sich modern kleidet. Man kann dann nur sagen: nach diesen Gesetzen richtet sich im Durchschnitt das Fürwahrhalten der Menschen, jetzt und soweit die Menschen bekannt sind; wenn man also mit dem Durchschnitte im Einklang bleiben will, richte man sich nach ihnen. Aber, wie das, was heute modern ist, nach einiger Zeit nicht mehr modern sein wird und bei den Chinesen jetzt nicht modern ist, so kann man die psychologischen Denkgesetze auch nur mit Einschränkungen als maassgebend hinstellen. Ja, wenn es sich in der Logik um das Fürwahrgehaltenwerden handelte, und nicht vielmehr um das Wahrsein! Und das verwechseln die psychologischen Logiker. So setzt Herr B. Erdmann im ersten Bande seiner Logik [1]) S. 272 bis S. 275 die Wahrheit mit Allgemeingültigkeit gleich und gründet diese auf die Allgemeingewissheit des Gegenstandes, von dem geurtheilt wird, und diese wieder auf die allgemeine Uebereinstimmung der Urtheilenden. So wird denn schliesslich die Wahrheit auf das Fürwahrhalten der Einzelnen zurückgeführt. Dem gegenüber kann ich nur sagen: Wahrsein ist etwas anderes als Fürwahrgehaltenwerden, sei es von Einem, sei es von Vielen, sei es von Allen, und ist in keiner Weise darauf zurückzuführen. Es ist kein Widerspruch, dass etwas

1) Halle a. S., Max Niemeyer, 1892.

wahr ist, was von Allen für falsch gehalten wird. Ich verstehe unter logischen Gesetzen nicht psychologische Gesetze des Fürwahrhaltens, sondern Gesetze des Wahrseins. Wenn es wahr ist, dass ich dies am 13. Juli 1893 in meiner Stube schreibe, während draussen der Wind heult, so bleibt es wahr, auch wenn alle Menschen es später für falsch halten sollten. Wenn so das Wahrsein unabhängig davon ist, dass es von irgendeinem anerkannt wird, so sind auch die Gesetze des Wahrseins nicht psychologische Gesetze, sondern Grenzsteine in einem ewigen Grunde befestigt, von unserm Denken überfluthbar zwar, doch nicht verrückbar. Und weil sie das sind, sind sie für unser Denken maassgebend, wenn es die Wahrheit erreichen will. Sie stehen nicht in dem Verhältnisse zum Denken, wie die grammatischen Gesetze zur Sprache, so dass sie das Wesen unseres menschlichen Denkens zum Ausdruck brächten und sich mit ihm änderten. Ganz anders ist natürlich die Auffassung der logischen Gesetze bei Herrn Erdmann. Dieser bezweifelt ihre unbedingte, ewige Geltung und will sie einschränken auf unser Denken, wie es jetzt ist (S. 375 ff.). „Unser Denken" kann doch wohl nur heissen das Denken der bis jetzt bekannten Menschheit. Danach bliebe die Möglicheit offen, dass Menschen oder sonstige Wesen entdeckt würden, die unsern logischen Gesetzen widersprechende Urtheile vollziehen könnten. Wenn das nun geschähe? Herr Erdmann würde sagen: Da sehen wir, dass jene Grundsätze nicht überall gelten. Gewiss! wenn sie psychologische Gesetze sein sollen, muss ihr Wortausdruck die Gattung von Wesen kenntlich machen, deren Denken erfahrungsmässig durch sie beherrscht wird. Ich würde sagen: Es giebt also Wesen, welche gewisse Wahrheiten nicht wie wir unmittelbar erkennen, sondern vielleicht auf den langwierigern Weg der Induction angewiesen sind. Wie aber, wenn sogar Wesen gefunden würden, deren Denkgesetze den unsern geradezu widersprächen und also auch in der Anwendung vielfach zu entgegengesetzten Ergebnissen führten? Der psychologische Logiker könnte das nur einfach anerkennen und sagen: Bei denen gelten jene Gesetze, bei uns diese. Ich würde sagen: Da haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit. Wer unter logischen Gesetzen solche versteht, die vorschreiben, wie gedacht werden soll, oder Gesetze des Wahrseins, nicht Naturgesetze des menschlichen Fürwahrhaltens, der wird fragen: wer hat Recht? wessen Gesetze des Fürwahrhaltens sind im Einklange mit den Gesetzen des Wahrseins? Der psychologische Logiker kann nicht so fragen; denn er erkennte damit Gesetze des Wahrseins an, die nicht psychologisch wären. Kann man ärger den Sinn des Wortes „wahr" fälschen, als wenn man eine Beziehung auf den Urtheilenden einschliessen will! Man wirft mir doch nicht etwa ein, dass der Satz „ich bin hungrig" für den Einen wahr und für den Andern falsch sein könne? Der Satz wohl, aber der Gedanke nicht; denn das Wort „ich" bedeutet in dem Munde des Andern einen andern Menschen, und daher drückt auch der Satz, von dem Andern ausgesprochen, einen andern Gedanken aus. Alle Bestimmungen des Orts, der Zeit u. s. w. gehören zu dem Gedanken, um dessen Wahrheit es sich handelt; das Wahrsein selbst ist ort- und zeitlos. Wie lautet nun eigentlich der Grundsatz der Identität? etwa so: „Den Menschen ist es im Jahre 1893 unmöglich, einen Gegenstand als von ihm selbst verschieden anzuerkennen" oder so: „Jeder Gegenstand ist mit sich selbst identisch"? Jenes Gesetz handelt von Menschen und enthält eine Zeitbestimmung, in diesem ist weder von Menschen noch von einer Zeit die Rede. Dieses ist ein Gesetz des Wahrseins, jenes eines des menschlichen Fürwahrhaltens. Ihr Inhalt ist ganz verschieden, und sie sind von einander unabhängig, so dass keins von beiden aus dem andern gefolgert werden kann. Darum ist es sehr verwirrend, beide mit demselben Namen des Grundgesetzes der Identität zu bezeichnen. Solche Vermischungen grundverschiedener Dinge sind Schuld an der gräulichen Unklarheit, die wir bei den psychologischen Logikern antreffen.

Die Frage nun, warum und mit welchem Rechte wir ein logisches Gesetz als wahr anerkennen, kann die Logik nur dadurch beantworten, dass sie es auf andere logische Gesetze zurückführt. Wo das nicht möglich ist, muss sie die Antwort schuldig bleiben. Aus der Logik heraustretend kann man sagen: wir sind durch unsere Natur und die äussern Umstände zum Urtheilen genöthigt, und wenn wir urtheilen, können wir dieses Gesetz — der Identität z. B. — nicht verwerfen, wir müssen es anerkennen, wenn wir nicht unser Denken in Verwirrung bringen und zuletzt auf jedes Urtheil verzichten wollen. Ich will diese Meinung weder bestreiten noch bestätigen und nur bemerken, dass wir hier keine logische Folgerung haben. Nicht ein Grund des Wahrseins wird angegeben, sondern unseres Fürwahrhaltens. Und ferner: diese Unmöglichkeit, die für uns besteht, das Gesetz zu verwerfen, hindert uns zwar nicht, Wesen anzunehmen, die es verwerfen; aber sie hindert uns, anzunehmen, dass jene Wesen darin Recht haben; sie hindert uns auch, daran zu zweifeln, ob wir oder jene Recht haben. Wenigstens gilt das von mir. Wenn Andere es wagen, in einem Athem ein Gesetz anzuerkennen und es zu bezweifeln, so erscheint mir das als ein Versuch, aus der eignen Haut zu fahren, vor dem ich nur dringend warnen kann. Wer einmal ein Gesetz des Wahrseins anerkannt hat, der hat damit auch ein Gesetz anerkannt, das vorschreibt, wie geurtheilt werden soll, wo immer, wann immer und von wem immer geurtheilt werden mag.

Ueberblicke ich das Ganze, so scheint mir die verschiedene Auffassung des Wahren als Ursprung des Streites. Für mich ist es etwas Objectives, von dem Urtheilenden Unabhängiges, für psychologische Logiker ist es das nicht. Was Herr B. Erdmann „objective Gewissheit" nennt, ist nur eine allgemeine Anerkennung der Urtheilenden, die also von diesen nicht unabhängig ist, sondern sich mit deren seelischer Natur ändern kann.

Wir können das noch allgemeiner fassen: ich erkenne ein Gebiet des Objectiven, Nichtwirklichen an, während die psychologischen Logiker das Nichtwirkliche ohne weiteres für subjectiv halten. Und doch ist gar nicht einzusehen, warum das, was einen vom Urtheilenden unabhängigen Bestand hat, wirklich sein, d. h. doch wohl fähig sein müsse, unmittelbar oder mittelbar auf die Sinne zu wirken. Ein solcher Zusammenhang zwischen den Begriffen ist nicht zu entdecken. Man kann sogar Beispiele anführen, die das Gegentheil zeigen. Die Zahl Eins z. B. wird man nicht leicht für wirklich halten, wenn man nicht Anhänger von J. St. Mill ist. Andrerseits ist es unmöglich, jedem Menschen seine eigne Eins zuzuweisen; denn dann müsste erst untersucht werden, wie weit die Eigenschaften dieser Einsen übereinstimmten. Und wenn der Eine sagte „einmal Eins ist Eins“ und der Andere „einmal Eins ist Zwei“, so könnte man nur die Verschiedenheit feststellen und sagen: deine Eins hat jene Eigenschaft, meine diese. Von einem Streite, wer Recht hätte, oder von einem Belehrungsversuche könnte nicht die Rede sein; denn dazu fehlte die Gemeinsamkeit des Gegenstandes. Offenbar ist dies dem Sinne des Wortes „Eins“ und dem Sinne des Satzes „einmal Eins ist Eins“ ganz zuwider. Da die Eins, als dieselbe für Alle, Allen in gleicher Weise gegenübersteht, kann sie ebensowenig wie der Mond durch psychologische Beobachtung erforscht werden. Mag es immerhin Vorstellungen von der Eins in den einzelnen Seelen geben, so sind diese doch von der Eins ebenso zu unterscheiden wie die Vorstellungen des Mondes von dem Monde selbst. Weil die psychologischen Logiker die Möglichkeit des objectiven Nichtwirklichen verkennen, halten sie die Begriffe für Vorstellungen und weisen sie damit der Psychologie zu. Aber die wahre Sachlage macht sich doch zu mächtig geltend, als dass dies leicht durchzuführen wäre. Und daher kommt ein Schwanken in den Gebrauch des Wortes „Vorstellung“, indem es bald etwas zu bedeuten scheint, was dem Seelenleben des Einzelnen angehört und nach psychologischen Gesetzen mit andern Vorstellungen verschmilzt, sich mit ihnen associirt, bald etwas Allen gleicherweise Gegenüberstehendes, bei dem ein Vorstellender weder genannt noch auch nur vorausgesetzt wird. Diese beiden Gebrauchsweisen sind unvereinbar; denn jene Associationen, Verschmelzungen gehen nur im einzelnen Vorstellenden vor sich und gehen nur an etwas vor sich, was diesem Vorstellenden ganz so eigenthümlich zugehört, wie seine Freude oder sein Schmerz es thut. Man darf nie vergessen, dass die Vorstellungen verschiedener Menschen, wie ähnlich sie auch sein mögen, was übrigens von uns nicht genau festzustellen ist, doch nicht in eine zusammenfallen, sondern zu unterscheiden sind. Jeder hat seine Vorstellungen, die nicht zugleich die eines Andern sind. Hier verstehe ich natürlich „Vorstellung“ im psychologischen Sinne. Der schwankende Gebrauch dieses Wortes bewirkt Unklarheit und hilft den psychologischen Logikern ihre Schwäche verbergen. Wann wird man dem endlich einmal ein Ende machen! So wird schliesslich Alles in das Bereich der Psychologie hineingezogen; die Grenze zwischen Objectivem und Subjectivem verschwindet mehr und mehr, und selbst wirkliche Gegenstände werden als Vorstellungen psychologisch behandelt. Denn was ist wirklich anders als ein Prädicat? und was sind logische Prädicate anders als Vorstellungen? So mündet denn Alles in den Idealismus und bei grösster Folgerichtigkeit in den Solipsismus ein. Wenn jeder mit dem Namen „Mond" etwas Anderes bezeichnete, nämlich eine seiner Vorstellungen, etwa so, wie er mit dem Ausrufe „au!" seinen Schmerz äusserte, so wäre freilich die psychologische Betrachtungsweise gerechtfertigt; aber ein Streit über die Eigenschaften des Mondes wäre gegenstandslos: der Eine könnte von seinem Monde ganz gut das Gegentheil von dem behaupten, was der Andere mit demselben Rechte von seinem sagte. Wenn wir nichts erfassen könnten, als was in uns selbst ist, so wäre ein Widerstreit der Meinungen, eine gegenseitige Verständigung unmöglich, weil ein gemeinsamer Boden fehlte, und ein solcher kann keine Vorstellung im Sinne der Psychologie sein. Es gäbe keine Logik, die berufen wäre, Schiedsrichterin im Streite der Meinungen zu sein.

Doch, um nicht den Schein zu erwecken, als kämpfte ich gegen Windmühlen, will ich an einem bestimmten Buche das unrettbare Versinken in den Idealismus zeigen. Ich wähle dazu die oben erwähnte Logik des Herrn B. Erdmann als eins der neuesten Werke der psychologischen Richtung, dem man auch nicht jede Bedeutsamkeit wird absprechen wollen. Sehen wir uns zunächst folgenden Satz an (I, S. 85):

„So belehrt die Psychologie mit Sicherheit, dass die Gegenstände der Erinnerung und der Einbildung sowie diejenigen des krankhaften hallucinatorischen und illusionären Vorstellens idealer Natur sind .... Ideal ist ferner das ganze Gebiet der eigentlich mathematischen Vorstellungen, von der Zahlenreihe bis hinab zu den Gegenständen der Mechanik."

Welche Zusammenstellung! Die Zahl Zehn soll also auf einer Stufe mit Hallucinationen stehen! Hier wird offenbar das objective Unwirkliche mit dem Subjectiven vermengt. Einiges Objective ist wirklich, anderes nicht. *Wirklich* ist nur eines von vielen Prädicaten und geht die Logik gar nicht näher an, als etwa das Prädicat *algebraisch* von einer Curve ausgesagt. Natürlich verwickelt sich Herr Erdmann durch diese Vermengung in die Metaphysik, wie sehr er sich auch davon frei zu halten strebt. Ich halte es für ein sicheres Anzeichen eines Fehlers, wenn die Logik Metaphysik und Psychologie nöthig hat, Wissenschaften, die selber der logischen Grundsätze bedürfen. Wo ist denn hier der eigentliche Urboden, auf dem Alles ruht? oder ist es wie bei Münchhausen, der sich am eignen Schopfe aus dem Sumpfe zog? Ich zweifle stark an der Möglichkeit und vermuthe, dass Herr Erdmann im psychologisch-metaphysischen Sumpfe stecken bleibt.

Eine eigentliche Objectivität giebt es für Herrn Erdmann nicht; denn Alles ist Vorstellung. Ueberzeugen wir uns davon an der Hand seiner eignen Aussagen! Wir lesen auf S. 187 des ersten Bandes:

„Als eine Beziehung zwischen Vorgestelltem setzt das Urteil mindestens zwei Beziehungspunkte voraus, zwischen denen sie stattfindet. Als Aussage über Vorgestelltes fordert es, dass der eine dieser Beziehungspunkte als der Gegenstand, von dem ausgesagt wird, das Subjekt . . ., der zweite als der Gegenstand, der ausgesagt wird, das Prädikat . . . bestimmt werde". Wir sehen hier zunächst, dass sowohl das Subject, von dem ausgesagt wird, als auch das Prädicat als Gegenstand oder Vorgestelltes bezeichnet wird. Statt „der Gegenstand" hätte hier wohl „das Vorgestellte" gesagt werden können; wir lesen nämlich (I, S. 81): „Denn die Gegenstände sind Vorgestelltes." Aber auch umgekehrt soll alles Vorgestellte Gegenstand sein. Auf S. 38 heisst es:

„Seinem Ursprunge nach zerfällt das Vorgestellte einesteils in Gegenstände der Sinneswahrnehmung und des Selbstbewusstseins, andererseits in ursprüngliche und abgeleitete."

Was aus der Sinneswahrnehmung und aus dem Selbstbewusstsein entspringt, ist doch wohl seelischer Natur. Die Gegenstände, das Vorgestellte und damit auch Subject und Prädicat werden hierdurch der Psychologie zugewiesen. Das wird durch folgende Stelle (I, S. 147 u. 148) bestätigt:

„Es ist das Vorgestellte oder die Vorstellung überhaupt. Denn beide sind ein und dasselbe: das Vorgestellte ist Vorstellung, die Vorstellung Vorgestelltes."

Das Wort „Vorstellung" wird ja nun meist im psychologischen Sinne genommen; dass dies auch der Brauch des Herrn Erdmann ist, sehen wir aus den Stellen:

„Bewusstsein ist demnach das Allgemeine zu Fühlen, Vorstellen, Wollen" (S. 35) und

„Das Vorstellen setzt sich zusammen aus den Vorstellungen . . . und den Vorstellungsverläufen" (S. 36).

Danach dürfen wir uns nicht wundern, dass ein Gegenstand auf psychologischem Wege entsteht:

„Sofern eine Perceptionsmasse . . . früheren Reizen und den durch sie ausgelösten Erregungen Gleiches darbietet, reproducirt sie die Gedächtnisresiduen, welche jenem Gleichen der früheren Reize entstammen, und verschmilzt mit ihnen zu dem Gegenstande der appercipirten Vorstellung" (I, S. 42).

Auf S. 43 wird dann beispielsweise gezeigt, wie ohne Stahlplatte, Schwärze, Presse und Papier auf rein psychologischem Wege ein Stahlstich der sixtinischen Madonna von Raphaël zu Stande kommt. Nach dem

Allen kann kein Zweifel sein, dass der Gegenstand, von dem ausgesagt wird, das Subject eine Vorstellung im psychologischen Sinne des Wortes nach Herrn Erdmanns Meinung sein soll, ebenso wie das Prädicat, der Gegenstand, der ausgesagt wird. Wenn das richtig wäre, so könnte von keinem Subjecte mit Wahrheit ausgesagt werden, es sei grün; denn grüne Vorstellungen giebt es nicht. Ich könnte auch von keinem Subjecte aussagen, es sei unabhängig vom Vorgestelltwerden oder von mir, dem Vorstellenden, ebensowenig, wie meine Entschlüsse von meinem Wollen und von mir, dem Wollenden, unabhängig sind, sondern mit mir vernichtet würden, wenn ich vernichtet würde. Eine eigentliche Objectivität giebt es also für Herrn Erdmann nicht, wie auch daraus hervorgeht, dass er das Vorgestellte oder die Vorstellung überhaupt, den Gegenstand im allgemeinsten Sinne des Wortes als höchste Gattung (γενικώτατον, genus summum) hinstellt (S. 147). Er ist also Idealist. Wenn die Idealisten folgerecht dächten, so würden sie den Satz „Karl der Grosse besiegte die Sachsen“ weder für wahr noch für falsch, sondern für Dichtung ausgeben, wie wir gewohnt sind, etwa den Satz „Nessus trug die Deïanira über den Fluss Euenus“ aufzufassen; denn auch der Satz „Nessus trug die Deïanira nicht über den Fluss Euenus“ könnte nur wahr sein, wenn der Name „Nessus“ einen Träger hätte. Von diesem Standpunkte wären die Idealisten wohl nicht leicht zu vertreiben. Aber das braucht man sich nicht gefallen zu lassen, dass sie den Sinn des Satzes in der Weise fälschen, als ob ich von meiner Vorstellung etwas aussagen wollte, wenn ich von Karl, dem Grossen spreche; ich will doch einen von mir und meinem Vorstellen unabhängigen Mann bezeichnen und von diesem etwas aussagen. Man kann den Idealisten zugeben, dass die Erreichung dieser Absicht nicht völlig sicher ist, dass ich vielleicht damit, ohne es zu wollen, aus der Wahrheit in die Dichtung verfalle. Damit kann aber an dem Sinne nichts geändert werden. Mit dem Satze „dieser Grashalm ist grün“ sage ich nichts von meiner Vorstellung aus; ich bezeichne keine meiner Vorstellungen mit den Worten „dieser Grashalm“, und wenn ich es thäte, so wäre der Satz falsch. Da tritt nun eine zweite Fälschung ein, dass nämlich meine Vorstellung des Grünen ausgesagt werde von meiner Vorstellung dieses Grashalms. Ich wiederhole: von meinen Vorstellungen ist in diesem Satze durchaus nicht die Rede; man schiebt einen ganz andern Sinn unter. Beiläufig bemerkt, verstehe ich gar nicht, wie überhaupt eine Vorstellung von etwas ausgesagt werden könne. Ebenso wäre es eine Fälschung, wenn man sagen wollte, in dem Satze „der Mond ist unabhängig von mir und meinem Vorstellen“ werde meine Vorstellung des Unabhängigseins von mir und meinem Vorstellen ausgesagt von meiner Vorstellung des Mondes. Damit wäre ja die Objectivität im eigentlichen Sinne des Wortes preisgegeben und etwas ganz anderes an die Stelle geschoben. Es ist ja möglich, dass bei der Urtheilsfällung solches Spiel der Vorstellungen vorkommt; aber das ist nicht der Sinn des Satzes. Man wird auch wohl beobachten können, dass bei demselben Satze und bei demselben Sinne des Satzes das Spiel der Vorstellungen ganz verschieden sein kann. Und diese logisch gleichgültige Begleiterscheinung nehmen unsere Logiker für den eigentlichen Gegenstand ihrer Forschung.

Wie begreiflich wehrt sich die Natur der Sache gegen das Versinken in den Idealismus, und Herr Erdmann möchte nicht zugeben, dass es für ihn keine eigentliche Objectivität gebe; aber ebenso begreiflich ist die Vergeblichkeit dieses Bemühens. Denn wenn alle Subjecte und alle Prädicate Vorstellungen sind und wenn alles Denken nichts ist als Erzeugen, Verbinden, Verändern von Vorstellungen, so ist nicht einzusehen, wie jemals etwas Objectives erreicht werden könne. Ein Anzeichen dieses vergeblichen Sträubens ist schon der Gebrauch der Wörter „Vorgestelltes" und „Gegenstand", die zunächst etwas Objectives im Gegensatz zur Vorstellung bezeichnen zu wollen scheinen, aber auch nur scheinen; denn es zeigt sich, dass sie dasselbe bedeuten. Wozu nun dieser Ueberfluss von Ausdrücken? Das ist nicht schwer zu errathen. Man bemerke auch, dass von einem Gegenstande der Vorstellung die Rede ist, obwohl der Gegenstand selber Vorstellung sein soll. Das wäre also eine Vorstellung der Vorstellung. Welche Beziehung von Vorstellungen soll hiermit bezeichnet werden? So unklar dies auch ist, so verständlich ist es doch auch, wie durch das Gegeneinanderarbeiten der Natur der Sache und des Idealismus solche Strudel entstehen können. Wir sehen hier überall den Gegenstand, von dem ich mir eine Vorstellung mache, mit dieser Vorstellung verwechselt und dann doch wieder die Verschiedenheit hervortreten. Diesen Widerstreit erkennen wir auch in folgendem Satze:

„Denn eine Vorstellung, deren Gegenstand allgemein ist, ist deshalb als solche, als Bewusstseinsvorgang, so wenig allgemein, wie eine Vorstellung selbst real ist, weil ihr Gegenstand als real gesetzt ist, oder wie ein Gegenstand, den wir als süss . . . empfinden, durch Vorstellungen gegeben ist, die selbst süss . . . sind" (I, S. 86).

Hier macht sich die wahre Sachlage mit Macht geltend. Fast könnte ich dem beistimmen; aber bemerken wir, dass nach den Erdmann'schen Grundsätzen der Gegenstand einer Vorstellung und der Gegenstand, der durch Vorstellungen gegeben ist, selber Vorstellungen sind, so sehen wir, dass alles Sperren umsonst ist. Ich bitte noch die Worte „als solche" im Gedächtnisse zu behalten, die ähnlich auch auf S. 83 in folgender Stelle vorkommen:

„Wo von einem Gegenstande die Wirklichkeit ausgesagt wird, ist das sachliche Subjekt dieses Urteils nicht der Gegenstand oder das Vorgestellte als solches, sondern vielmehr das Transscendente, das als die Seinsgrundlage dieses Vorgestellten vorausgesetzt wird, in dem Vorgestellten sich darstellt. Das Transscendente soll dabei nicht als das Unerkennbare . . . angenommen werden, sondern seine Transscendenz soll nur in der Unabhängigkeit vom Vorgestelltwerden bestehen."

Wieder ein vergeblicher Versuch, sich aus dem Sumpfe herauszuarbeiten! Nehmen wir die Worte ernst, so ist gesagt, dass in diesem Falle das Subject keine Vorstellung ist. Wenn solches aber möglich ist, so ist nicht abzusehen, warum bei andern Prädicaten, die besondere Weisen der Wirksamkeit oder Wirklichkeit angeben, das sachliche Subject durchaus eine Vorstellung sein müsse, z. B. in dem Urtheile „die Erde ist magnetisch". Und so kämen wir denn dahin, dass nur in wenigen Urtheilen das sachliche Subject eine Vorstellung wäre. Wenn aber einmal zugegeben ist, dass es weder für das Subject, noch für das Prädicat wesentlich ist, Vorstellung zu sein, so ist der ganzen psychologischen Logik der Boden unter den Füssen weggezogen. Alle psychologischen Betrachtungen, von denen unsere Logikbücher jetzt anschwellen, erweisen sich dann als zwecklos.

Aber wir dürfen wohl die Transscendenz bei Herrn Erdmann gar nicht so ernst nehmen. Ich brauche ihn nur an seinen Ausspruch (I, S. 148) zu erinnern: „Der höchsten Gattung untersteht auch die metaphysische Grenze unseres Vorstellens, das Transscendente", und er versinkt; denn diese höchste Gattung (*γενικώτατον*, genus summum) ist ja nach ihm das Vorgestellte oder die Vorstellung überhaupt. Oder sollte oben das Wort „Transscendentes" in einem andern Sinne gebraucht sein als hier? In jedem Falle, sollte man denken, müsste das Transscendente der höchsten Gattung unterstehen.

Verweilen wir noch etwas bei dem Ausdrucke „als solches"! Ich setze den Fall, jemand wolle mir einbilden, dass alle Gegenstände nichts seien als Bilder auf der Netzhaut meines Auges. Nun gut! ich antworte noch nichts. Nun behauptet er aber weiter, der Thurm sei grösser als das Fenster, durch das ich ihn zu sehen meine. Da würde ich denn doch sagen: entweder sind nicht beide, der Thurm und das Fenster, Netzhautbilder in meinem Auge, dann mag der Thurm grösser sein als das Fenster; oder der Thurm und das Fenster sind, wie du sagst, Bilder auf meiner Netzhaut; dann ist der Thurm nicht grösser, sondern kleiner als das Fenster. Nun sucht er sich mit dem „als solches" aus der Verlegenheit zu ziehen und sagt: das Netzhautbild des Thurmes als solches ist allerdings nicht grösser, als das des Fensters. Da möchte ich denn doch fast aus der Haut fahren und rufe ihm zu: nun dann ist das Netzhautbild des Thurmes überhaupt nicht grösser als das des Fensters, und wenn der Thurm das Netzhautbild des Thurmes und das Fenster das Netzhautbild des Fensters wäre, so wäre eben der Thurm nicht grösser als das Fenster, und wenn deine Logik dich anders lehrt, so taugt sie nichts. Dieses „als solches" ist eine vortreffliche Erfindung für unklare Schriftsteller, die weder ja noch nein sagen wollen. Aber dieses Schweben zwischen beiden lasse ich mir nicht gefallen, sondern ich frage: wenn von einem Gegenstande die Wirklichkeit ausgesagt wird, ist dann das sachliche Subject des Urtheils die Vorstellung, ja oder nein? Wenn nicht, so ist es wohl das Transscendente, das als Seinsgrundlage dieser Vorstellung vorausgesetzt wird. Aber dies Transscendente ist selber Vorgestelltes oder Vorstellung. So werden wir weiter getrieben zu der Annahme, nicht das vorgestellte Transscendente sei Subject des Urtheils, sondern das Transscendente, das als Seinsgrundlage dieses vorgestellten Transscendenten vorausgesetzt werde. So müssten wir immer weitergehen; wie weit wir aber auch gingen, wir kämen so nie aus dem Subjectiven heraus. Dasselbe Spiel könnten wir übrigens auch beim Prädicate anfangen, und nicht nur beim Prädicate *wirklich*, sondern ebensogut etwa bei *süss*. Wir sagten dann zunächst: wenn von einem Gegenstande die Wirklichkeit oder die Süssheit ausgesagt wird, so ist das sachliche Prädicat nicht die vorgestellte Wirklichkeit oder Süssheit, sondern das Transscendente, das als Grundlage dieses Vorgestellten vorausgesetzt wird. Damit kämen wir aber nicht zur Ruhe, sondern würden rastlos weitergetrieben. Was ist hieraus zu lernen? Dass die psychologische Logik auf einem Holzwege ist, wenn sie Subject und Prädicat der Urtheile als Vorstellungen im Sinne der Psychologie auffasst, dass psychologische Betrachtungen in der Logik ebensowenig angebracht sind, wie in der Astronomie oder Geologie. Wenn wir überhaupt aus dem Subjectiven herauskommen wollen, so müssen wir das Erkennen auffassen als eine Thätigkeit, die das Erkannte nicht erzeugt, sondern das schon Vorhandene ergreift. Das Bild des Ergreifens ist recht geeignet, die Sache zu erläutern. Wenn ich einen Bleistift ergreife, so geht dabei in meinem Leibe mancherlei vor: Nervenerregungen, Veränderungen der Spannung und des Druckes von Muskeln, Sehnen und Knochen, Veränderungen der Blutbewegung. Aber die Gesammtheit dieser Vorgänge ist weder der Bleistift, noch erzeugt sie ihn. Dieser besteht unabhängig von diesen Vorgängen. Und es ist wesentlich für das Ergreifen, dass etwas da ist, was ergriffen wird; die innern Veränderungen allein sind das Ergreifen nicht. So besteht auch das, was wir geistig erfassen, unabhängig von dieser Thätigkeit, von den Vorstellungen und deren Veränderungen, die zu diesem Erfassen gehören oder es begleiten, ist weder die Gesammtheit dieser Vorgänge, noch wird es durch sie als Theil unseres seelischen Lebens erzeugt.

Sehen wir nun noch, wie sich den psychologischen Logikern feinere sachliche Unterschiede verwischen. Bei Merkmal und Eigenschaft ist das schon erwähnt worden. Hiermit hängt der von mir betonte Unterschied von Gegenstand und Begriff zusammen, sowie der von Begriffen erster und zweiter Stufe. Diese Unterschiede sind den psychologischen Logikern natürlich unerkennbar; bei ihnen ist eben Alles Vorstellung. Damit fehlt ihnen auch die richtige Auffassung der Urtheile, die wir im Deutschen mit „es giebt“ aussprechen. Diese Existenz wird von Herrn B. Erdmann (Logik I, S. 311) mit Wirklichkeit zusammengeworfen, die, wie wir sahen, auch von Objectivität nicht deutlich unterschieden wird. Von welchem Dinge behaupten wir denn eigentlich, dass es wirklich sei, wenn wir sagen, es gebe Quadratwurzeln aus Vier? Etwa von der Zwei oder von —2? aber weder die eine noch die andere wird hier in irgend einer Weise genannt. Und wenn ich sagen wollte, die Zahl Zwei wirke oder sei wirksam oder wirklich, so wäre das falsch und ganz verschieden von dem, was ich mit dem Satze „es giebt Quadratwurzeln aus Vier“ sagen will. Die hier vorliegende Verwechselung ist beinahe die gröbste, die überhaupt möglich ist; denn sie geschieht nicht mit Begriffen derselben Stufe, sondern ein Begriff erster wird mit einem Begriffe zweiter Stufe vermengt. Für die Stumpfheit der psychologischen Logik ist dies bezeichnend. Wenn man allgemeiner einen etwas freieren Standpunkt gewonnen haben wird, mag man sich wundern, dass ein solcher Fehler von einem Logiker von Fach begangen werden konnte; aber erst muss man freilich den Unterschied zwischen Begriffen erster und zweiter Stufe erfasst haben, ehe man die Grösse dieses Fehlers ermessen kann, und dazu wird die psychologische Logik wohl unfähig sein. Was dabei am meisten im Wege steht, ist, dass ihre Vertreter sich auf die psychologische Vertiefung Wunder was zu Gute thun, die doch nichts ist als psychologische Verfälschung der Logik. Und so kommen denn unsere dicken Logikbücher zu Stande, aufgedunsen von ungesundem psychologischen Fette, das alle feineren Formen verhüllt. So wird ein fruchtbares Zusammenwirken von Mathematikern und Logikern unmöglich gemacht. Während der Mathematiker Gegenstände, Begriffe und Beziehungen definirt, belauscht der psychologische Logiker das Werden und den Wandel der Vorstellungen, und im Grunde kann ihm das Definiren des Mathematikers nur thöricht erscheinen, weil es das Wesen der Vorstellung nicht wiedergiebt. Er schaut in seinen psychologischen Guckkasten und sagt zum Mathematiker: ich sehe von dem Allen nichts, was du da definirst. Und der kann nur antworten: kein Wunder! denn wo du suchst, da ist es nicht.

Dies mag genügen, um meinen logischen Standpunkt durch den Gegensatz in helleres Licht zu setzen. Der Abstand von der psychologischen Logik scheint mir so himmelweit, dass keine Aussicht ist, jetzt schon durch mein Buch auf sie zu wirken. Es kommt mir vor, als müsste der von mir gepflanzte Baum eine ungeheure Steinlast heben, um sich Raum und Licht zu schaffen. Und doch möchte ich die Hoffnung nicht ganz aufgeben, mein Buch möchte später dazu helfen, die psychologische Logik umzustürzen. Dazu wird ihm einige Anerkennung bei den Mathematikern wohl nicht fehlen dürfen, die jene nöthigen wird, sich mit ihm abzufinden. Und ich glaube einigen Beistand von dieser Seite erwarten zu können;

haben die Mathematiker doch im Grunde gegen die psychologischen Logiker eine gemeinsame Sache zu führen. Sobald sich diese nur erst herablassen werden, sich ernsthaft mit meinem Buche zu beschäftigen, wenn auch nur, um es zu widerlegen, glaube ich gewonnen zu haben. Denn der ganze Abschnitt II ist eigentlich eine Probe auf meine logischen Ueberzeugungen. Es ist von vornherein unwahrscheinlich, dass ein solcher Bau sich auf einem unsichern, fehlerhaften Grunde aufführen lassen sollte. Jeder, der andere Ueberzeugungen hat, kann ja versuchen, auf ihnen einen ähnlichen Bau zu errichten, und er wird, glaube ich, inne werden, dass es nicht geht, oder dass es wenigstens nicht so gut geht. Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, wenn jemand durch die That zeigte, dass auf andern Grundüberzeugungen ein besseres, haltbareres Gebäude errichtet werden könnte, oder wenn mir jemand nachwiese, dass meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird Keinem gelingen. Und so möge denn dies Buch, wenn auch spät, zu einer Erneuerung der Logik beitragen.

Jena im Juli 1893.

G. Frege.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Aufgabe, Ansprüche an die Beweisführung, Dedekind's System, Schröder's Klasse . . . . Seite 1

I. Darlegung der Begriffsschrift.

1. *Die Urzeichen.*

Einleitendes über Function, Begriff, Beziehung.

§ 1. Die Function ist ungesättigt . . . . Seite 5
§ 2. Wahrheitswerthe, Bedeutung und Sinn, Gedanke, Gegenstand . . . . „ 6
§ 3. Werthverlauf einer Function, Begriff, Umfang eines Begriffes . . . . „ 7
§ 4. Functionen mit zwei Argumenten . . . . „ 8

Zeichen von Functionen.

§ 5. Urtheil und Gedanke, Urtheilstrich und Wagerechter . Seite 9
§ 6. Verneinungstrich, Verschmelzung der Wagerechten . . „ 10
§ 7. Gleichheitszeichen . . . . „ 11
§ 8. Allgemeinheit, deutscher Buchstabe, dessen Gebiet, Verschmelzung der Wagerechten . . . . „ 11
§ 9. Bezeichnung des Werthverlaufs, kleiner griechischer Vokalbuchstabe, dessen Gebiet . . . . „ 14
§ 10. Genauere Bestimmung, was der Werthverlauf einer Function sein solle . . . . „ 16
§ 11. Ersatz des bestimmten Artikels, die Function $\backslash\xi$ . . . „ 18
§ 12. Bedingungstrich, und, weder — noch, oder, Unterglieder, Oberglied . . . . „ 20
§ 13. Wenn, alle, jeder, Unterordnung, particulär bejahender Satz, einige . . . . „ 23

Schlüsse und Folgerungen.

§ 14. Erste Schlussweise . . . . Seite 25
§ 15. Zweite Schlussweise, Wendung . . . . „ 26
§ 16. Dritte Schlussweise . . . . „ 30
§ 17. Lateinische Buchstaben, Uebergang von lateinischen zu deutschen Buchstaben . . . . „ 31
§ 18. Gesetze in Begriffsschriftzeichen (I, IV, VI) . . . . . „ 34

Erweiterung der Allgemeinheitsbezeichnung.

§ 19. Die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen; Functions-, Gegenstandsbuchstaben . . . . Seite 34
§ 20. Gesetze in Begriffsschriftzeichen (II a, III, V) . . . . „ 35
§ 21. Functionen und Begriffe erster und zweiter Stufe . . . „ 36
§ 22. Beispiele von Functionen zweiter Stufe, ungleichstufige Functionen und Beziehungen . . . . „ 38
§ 23. Arten der Argumente und Argumentstellen, Functionen zweiter Stufe mit Argumenten zweiter und dritter Art . „ 39
§ 24. Allgemeine Erklärung des Gebrauchs der Functionsbuchstaben . . . . „ 41
§ 25. Die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen zweiter Stufe, Gesetz II b . . . . „ 42

2. *Definitionen.*

Allgemeines.

§ 26. Eintheilung der Zeichen, Namen, Marken, Begriffsschriftsatz, Zwischenzeichen . . . . Seite 43
§ 27. Der Definitionsdoppelstrich . . . . „ 44
§ 28. Rechtmässige Bildung der Namen . . . . „ 45
§ 29. Wann bedeutet ein Name etwas? . . . . „ 45
§ 30. Zwei Weisen, einen Namen zu bilden . . . . „ 46
§ 31. Unsere einfachen Namen bedeuten etwas . . . . . . „ 48
§ 32. Jeder Begriffsschriftsatz drückt einen Gedanken aus . . „ 50
§ 33. Grundsätze des Definirens . . . . „ 51

Besondere Definitionen.

§ 34. Definition der Function $\xi \frown \zeta$ . . . . Seite 52
§ 35. Vertretung der Functionen zweiter Stufe durch solche erster Stufe . . . . „ 54
§ 36. Der Doppelwerthverlauf. Der Umfang einer Beziehung . „ 54
§ 37. Definition der Function Iξ . . . . „ 55
§ 38. Definition der Function)ξ . . . . „ 56
§ 39. Definition der Function ꝑξ . . . . „ 57
§ 40. Definition der Function 𝔐ξ . . . . „ 57
§ 41. Definition der 0 . . . . „ 57
§ 42. Definition der 1, Begriff der Anzahl . . . . „ 58
§ 43. Definition von 𝔣 . . . . „ 58
§ 44. Einige Begriffsschriftsätze als Beispiele . . . . „ 58
§ 45. Definition der Function $\dot{\frown}\xi$, Folgen und Vorhergehen in einer Reihe . . . . „ 59
§ 46. Definition der Function $\dot{\smile}\xi$ . . . . „ 60

3. *Abgeleitete Gesetze.*

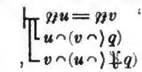
§ 47. Zusammenstellung der Grundgesetze . . . . „ 60
§ 48. Zusammenstellung der Regeln . . . . „ 61
§ 49. Ableitung einiger Sätze aus (I) . . . . „ 64
§ 50. Ableitung der Hauptsätze von der Function $\xi = \zeta$ . . . „ 65

§ 51. Ableitung einiger Sätze aus (IV) . . . . Seite 68
§ 52. Ableitung einiger Sätze aus (V) und (VI) . . . . . . „ 69

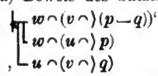
II. Beweise der Grundgesetze der Anzahl.

§ 53. Vorbemerkungen . . . . Seite 70

A. Beweis des Satzes

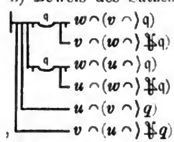


a) Beweis des Satzes



§ 54 bis § 59. Definition der Function $\xi \frown \zeta$, Sätze (1) bis (19) Seite 70

b) Beweis des Satzes

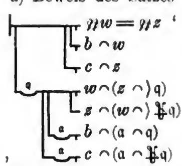


und Ende des Abschnittes *A*.

§ 60 bis § 65. Sätze bis (32) . . . . Seite 80

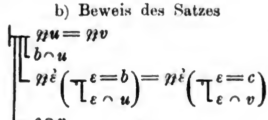
B. Beweis des Satzes „$\vdash$ II f“

a) Beweis des Satzes



§ 66 bis § 77. Sätze bis (56) . . . . Seite 86

b) Beweis des Satzes



und Ende des Abschnittes *B*.

§ 78 bis § 87. Sätze bis (71) . . . . Seite 101

Γ. Beweis des Satzes $\vdash \mathrm{I}\mathfrak{h}\mathfrak{f}$'.

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = m \\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\varepsilon = n \\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right] \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \varepsilon = b \\ \alpha = c\end{array}\right]\right) \\ \quad c \frown (m \frown \mathfrak{h} q) \\ \quad \mathrm{I}\mathfrak{h} q \\ \quad b \frown (n \frown q) \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \end{array}$$'

§ 88 bis § 91. Sätze bis (84) . . . . Seite 113

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{P}u = \mathfrak{P}v \\ \quad \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right) \\ \quad b \frown u \\ \quad c \frown v \end{array}$$'

und Schluss des Abschnittes *Γ.*

§ 92 bis § 95. Sätze bis (90) . . . . Seite 121

Δ. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Null.

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash f(a) \\ \quad \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = 0 \end{array}$$'

§ 96 bis § 97. Sätze bis (95) . . . . Seite 127

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{P}u = 0 \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \end{array}$$'

und einiger Folgesätze.

§ 98 bis § 101. Sätze bis (107) . . . . Seite 128

E. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Eins.

§ 102 bis § 107. Sätze bis (122) . . . . Seite 131

Z. Beweis des Satzes

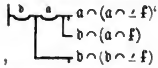
$$\begin{array}{l} \vdash b \frown (b \frown \underline{\smile}\,\mathfrak{f}) \\ \quad 0 \frown (b \frown \underline{\smile}\,\mathfrak{f}) \end{array}$$'

a) Beweis des Satzes

$\vdash a \frown (0 \frown \underline{\smile}\,\mathfrak{f})$'

§ 108 und § 109. Sätze bis (126) . . . . Seite 137

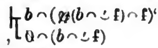
b) Beweis des Satzes



und Schluss des Abschnittes *Z*.

§ 110 bis § 113. Sätze bis (145) . . . . Seite 139

H. Beweis des Satzes



§ 114 bis § 119. Sätze bis (155) . . . . Seite 144

Θ. Einige Folgesätze.

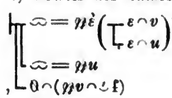
§ 120 und § 121. Sätze bis (161) . . . . Seite 149

I. Beweis einiger Sätze von der Anzahl Endlos.

a) Beweis des Satzes

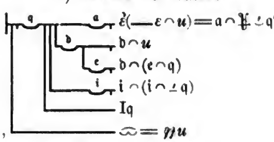
§ 122 bis § 125. Definition von ∞, Sätze bis (167) . . . . Seite 150

b) Beweis des Satzes



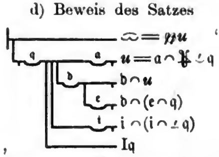
126 § bis § 127. Sätze bis (172) . . . . Seite 154

c) Beweis des Satzes



§ 128 bis § 143. Sätze bis (207) . . . . Seite 160

d) Beweis des Satzes



§ 144 bis § 157. Definitionen der Functionen $\xi ; \zeta$, $\xi \simeq \zeta$, $\xi \nwarrow \zeta$.
Sätze bis (263) . . . . Seite 178

K. Beweis des Satzes

$$\theta \frown (\mathfrak{n}u \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\ u = \mathfrak{A} \mathbin{\underset{\frown}{\wedge}} \mathfrak{q}$$

a) Beweis des Satzes

$$\mathfrak{n}(x; y \mathbin{\underset{\frown}{\wedge}} q) = \mathfrak{n}(1; n \mathbin{\underset{\frown}{\wedge}} \mathfrak{f})$$
$$y \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$\mathrm{I}q$$
$$x; 1 \frown (y; n \frown \dot{\smile} (q \succeq \mathfrak{f}))$$

§ 158 bis § 165. Definition der Function $\xi \mathbin{\underset{\frown}{\wedge}} \zeta$. Sätze bis (298) Seite 201

b) Beweis des Satzes

$$n = \mathfrak{n}(1; n \mathbin{\underset{\frown}{\wedge}} \mathfrak{f})$$
$$\theta \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$$

und Schluss des Abschnittes *K*.

§ 166 bis § 171. Sätze bis (327) . . . . Seite 217

Λ. Beweis des Satzes

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\ \grave{\varepsilon}(-\!\!-\, \varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \mathbin{\underset{\frown}{\wedge}} \mathfrak{q}$$
$$\theta \frown (\mathfrak{n}u \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$$

§ 172 bis § 179. Sätze bis (348) . . . . Seite 224

Anhänge.

1. Tafel der Grundgesetze und der aus ihnen zunächst folgenden Sätze . . . . Seite 239
2. Tafel der Definitionen . . . . „ 240
3. Tafel der wichtigeren Lehrsätze . . . . „ 242
Wörterverzeichniss . . . . „ 252
Berichtigungen . . . . „ 254

Einleitung.

In meinen Grundlagen der Arithmetik[1]) habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen Beweisgrund zu entnehmen brauche. In diesem Buche soll dies nun dadurch bewährt werden, dass allein mit logischen Mitteln die einfachsten Gesetze der Anzahlen abgeleitet werden. Damit dies aber überzeuge, müssen erheblich höhere Ansprüche an die Beweisführung gestellt werden, als in der Arithmetik üblich ist[2]). Ein Kreis von wenigen Schluss- und Folgerungsweisen muss vorher abgegrenzt werden, und kein Schritt darf geschehen, der nicht einer von diesen gemäss wäre. Man darf sich also beim Uebergange zu einem neuen Urtheile nicht daran genügen lassen, wie es die Mathematiker bis jetzt wohl fast immer thun, dass er als richtig einleuchte, sondern man muss ihn in die einfachen logischen Schritte zerlegen, aus denen er besteht, und das sind oft gar nicht wenige. Dabei kann keine Voraussetzung unbemerkt bleiben; jedes Axiom, dessen man bedarf, muss entdeckt werden. Gerade die stillschweigend und ohne klares Bewusstsein gemachten Voraussetzungen verhindern ja die Einsicht in die erkenntnisstheoretische Natur eines Gesetzes.

Damit ein solches Unternehmen Erfolg haben könne, müssen natürlich die Begriffe, deren man bedarf, scharf gefasst werden. Das gilt besonders von dem, was die Mathematiker mit dem Worte ‚Menge' bezeichnen möchten. Dedekind[3]) braucht das Wort ‚System' wohl in derselben Absicht. Aber trotz der in meinen Grundlagen vier Jahre früher erschienenen Darlegungen ist eine klare Einsicht in das Wesen der Sache bei ihm nicht zu finden, obwohl er dem Kerne manchmal nahe kommt wie an der Stelle (S. 2): „Ein solches System S . . . ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht. Das System S ist daher dasselbe wie das System T, in Zeichen $S = T$, wenn jedes Element von S auch

1) Breslau 1884.
2) Vergl. meine Grundlagen § 90.
3) Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888.

Element von T, und jedes Element T auch Element von S ist." Andere Stellen zeigen dagegen wieder ein Abirren, z. B. folgende (S. 1 u. 2): „Es kommt sehr häufig vor, dass verschiedene Dinge a, b, c . . . aus irgend-einer Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, dass sie ein System S bilden." Hier ist zwar in dem gemeinsamen Gesichtspunkte eine Ahnung des Richtigen enthalten; aber jene Auffassung, jene Zusammenstellung im Geiste ist kein objectives Merkmal. Ich frage: in wessen Geiste? Wenn sie nun in einem Geiste zusammengestellt werden, in einem andern nicht, bilden sie dann ein System? Was in meinem Geiste zusammengestellt werden soll, muss doch wohl in meinem Geiste sein. Bilden denn die Dinge ausser mir nicht Systeme? Ist das System ein subjectives Gebilde in der einzelnen Seele? Ist nun danach das Sternbild Orion ein System? Und was sind seine Elemente? Die Sterne, die Molecüle oder die Atome? Bemerkenswerth ist folgende Stelle (S. 2): „Für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ist es vortheilhaft, auch den besondern Fall zuzulassen, dass ein System S aus einem einzigen (aus einem und nur einem) Element a besteht; d. h. dass das Ding a Element von S, aber jedes von a verschiedene Ding kein Element von S ist." Dies wird nachher (S. 3) so verstanden, dass jedes Element s eines Systemes S selbst als System aufgefasst werden kann. Da in diesem Falle Element und System zusammenfallen, so ist hier besonders deutlich, dass nach Dedekind die Elemente den eigentlichen Bestand des Systemes ausmachen. E. Schröder thut in seinen Vorlesungen über die Algebra der Logik [1]) einen Schritt über Dedekind hinaus, indem er auf den Zusammenhang von dessen Systemen mit den Begriffen aufmerksam macht, den dieser übersehen zu haben scheint. In der That ist das, was Dedekind eigentlich meint, wenn er ein System Theil eines Systemes nennt (S. 2), die Unterordnung eines Begriffes unter einen Begriff oder das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff, Fälle, zwischen denen er ebensowenig wie Schröder unterscheidet infolge eines gemeinsamen Fehlers der Auffassung; denn auch Schröder sieht im Grunde die Elemente als das an, was seine Klasse ausmacht. Eine leere Klasse dürfte eigentlich bei ihm ebensowenig vorkommen wie ein leeres System bei Dedekind; aber das aus dem Wesen der Sache entspringende Bedürfniss macht sich bei beiden Schriftstellern in verschiedener Weise geltend. Dedekind fährt an der oben abgebrochenen Stelle so fort: „Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschliessen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten." Danach wäre also eine solche Erdichtung erlaubt; es wird nur aus gewissen Gründen darauf verzichtet. Schröder wagt die Erdichtung

---

1) Leipzig 1890, S. 253.

einer leeren Klasse. Beide sind also darin, wie es scheint, mit vielen Mathematikern einig, man dürfe beliebig etwas erdichten, was nicht da ist, ja was sogar undenkbar ist; denn wenn die Elemente das System bilden, so wird das System mit den Elementen zugleich aufgehoben. Wo die Grenzen dieser Erdichtungswillkür liegen, und ob es überhaupt deren gebe, darüber wird wohl wenig Klarheit und Uebereinstimmung zu finden sein; und doch kann die Richtigkeit eines Beweises davon abhangen. Ich glaube diese Frage in meinen Grundlagen der Arithmetik (§ 92 u. ff.) und in meinem Vortrage Ueber formale Theorien der Arithmetik[1]) für alle Einsichtigen erledigt zu haben. Schröder erdichtet seine Null und verwickelt sich dadurch in grosse Schwierigkeiten[2]). Während demnach eine klare Einsicht bei Schröder wie bei Dedekind fehlt, macht sich doch die wahre Sachlage überall geltend, wo ein System bestimmt werden soll. Dedekind führt dann Eigenschaften an, die ein Ding haben muss, um zu dem Systeme zu gehören, d. h. er definirt einen Begriff durch seine Merkmale[3]). Wenn nun die Merkmale den Bestand des Begriffes ausmachen, nicht die unter den Begriff fallenden Gegenstände, so hat ein leerer Begriff gar keine Schwierigkeiten und Bedenken gegen sich. Freilich kann dann nie ein Gegenstand zugleich Begriff sein; und ein Begriff, unter den nur ein Gegenstand fällt, darf nicht mit diesem verwechselt werden. So wird es denn wohl endgiltig dabei bleiben, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte[4]). Ich habe die Anzahl auf die Beziehung der Gleichzahligkeit zurückgeführt und diese auf die eindeutige Zuordnung. Von dem Worte ‚Zuordnung‘ gilt Aehnliches wie von dem Worte ‚Menge‘. Beide werden in der Mathematik jetzt nicht selten gebraucht, und es fehlt wohl meistens dabei die tiefere Einsicht in das, was man eigentlich damit bezeichnen will. Wenn mein Gedanke richtig ist, dass die Arithmetik ein Zweig der reinen Logik sei, so muss für ‚Zuordnung‘ ein rein logischer Ausdruck gewählt werden. Ich nehme dafür ‚Beziehung‘. Begriff und Beziehung sind die Grundsteine, auf denen ich meinen Bau aufführe.

Aber auch, nachdem die Begriffe scharf gefasst sind, würde es ohne besonderes Hilfsmittel schwer, ja fast unmöglich sein, den Anforderungen zu genügen, die wir hier an die Beweisführung stellen müssen. Ein solches Hilfsmittel ist nun meine Begriffsschrift, deren Darlegung meine erste Aufgabe sein wird. Zuvor mag noch Folgendes bemerkt werden. Es

---

1) Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft, Jahrg. 1885, Sitzung vom 17. Juli.

2) Vergl. E. G. Husserl in den Göttinger gel. Anzeigen, 1891, Nr. 7, S. 272, der den Knoten aber wohl nicht löst.

3) Ueber Begriff, Gegenstand, Eigenschaft, Merkmal vergleiche man meine Grundlagen §§ 38, 47, 53, und meinen Aufsatz Ueber Begriff und Gegenstand in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, XVI, 2.

4) § 46 meiner Grundlagen.

wird nicht immer möglich sein, Alles regelrecht zu definiren, weil es gerade unser Bestreben sein muss, auf das logisch Einfache zurückzugehen, das als Solches nicht eigentlich definirbar ist. Ich muss mich dann begnügen, durch Winke auf das hinzuweisen, was ich meine. Ich muss vor Allem danach trachten, verstanden zu werden, und deshalb werde ich die Sache allmählich zu entfalten suchen, nicht gleich anfangs die volle Allgemeinheit und den endgiltigen Ausdruck erstreben. Man wird sich vielleicht über den häufigen Gebrauch des Anführungszeichens wundern; ich unterscheide damit die Fälle, wo ich vom Zeichen selbst spreche, von denen, wo ich von seiner Bedeutung spreche. So pedantisch dies auch erscheinen mag, ich halte es doch für nothwendig. Es ist merkwürdig, wie eine ungenaue Rede- oder Schreibweise, die ursprünglich vielleicht nur aus Bequemlichkeit und der Kürze halber, aber mit vollem Bewusstsein ihrer Ungenauigkeit gebraucht wurde, zuletzt das Denken verwirren kann, nachdem jenes Bewusstsein geschwunden ist. Hat man es doch fertig gebracht, die Zahlzeichen für die Zahlen, den Namen für das Benannte, das blosse Hilfsmittel für den eigentlichen Gegenstand der Arithmetik zu halten. Solche Erfahrungen lehren, wie nothwendig es ist, an die Genauigkeit der Rede- und Schreibweise die höchsten Anforderungen zu stellen. Und ich habe mich bemüht, ihnen wenigstens überall da gerecht zu werden, wo mir etwas darauf anzukommen schien.

I. Darlegung der Begriffsschrift.

1. Die Urzeichen.

Einleitendes über Function, Begriff, Beziehung[1]).

§ 1. Wenn es sich darum handelt, die ursprüngliche Bedeutung des Wortes ‚Function' in seinem mathematischen Gebrauche anzugeben, so verfällt man leicht darauf, Function von x einen mittelst der Bezeichnungen der Summe, des Products, der Potenz, der Differenz u. s. w. aus ‚x' und bestimmten Zahlen gebildeten Ausdruck zu nennen. Dies ist deshalb unzutreffend, weil hierdurch die Function als ein Ausdruck, als eine Verbindung von Zeichen, nicht als das dadurch Bezeichnete hingestellt wird. Man wird darum versuchen, statt ‚Ausdruck' zu sagen ‚Bedeutung eines Ausdrucks'. Nun kommt in dem Ausdrucke aber der Buchstabe ‚x' vor, der eine Zahl nicht wie etwa das Zeichen ‚2' bedeutet, sondern nur unbestimmt andeutet. Für verschiedene Zahlzeichen, die wir an die Stelle von ‚x' setzen, erhalten wir im Allgemeinen verschiedene Bedeutungen. Setzen wir z. B. in den Ausdruck ‚$(2+3.x^2).x$' für ‚x' der Reihe nach die Zahlzeichen ‚0', ‚1', ‚2', ‚3' ein, so erhalten wir als zugehörige Bedeutungen die Zahlen 0, 5, 28, 87. Keine dieser Bedeutungen kann den Anspruch erheben, unsere Function zu sein. Das Wesen der Function giebt sich vielmehr in der Zusammengehörigkeit kund, die sie zwischen den Zahlen stiftet, deren Zeichen wir für ‚x' setzen, und den Zahlen, die dann als Bedeutungen unseres Ausdruckes auftreten, eine Zusammengehörigkeit, die sich anschaulich in dem Verlaufe der Curve darstellt, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$‚y=(2+3.x^2).x‘$$

ist. Das Wesen der Function liegt demnach in dem Theile des Ausdrucks, der noch ausser dem ‚x' vorhanden ist. Der Ausdruck einer Function ist ergänzungsbedürftig, ungesättigt. Der Buch-

1) Man vergleiche meinen Vortrag über Function und Begriff (Jena 1891) und meinen Aufsatz über Begriff und Gegenstand in der Vierteljahrsschrift für wissensch. Phil. XVI, 2. Meine Begriffsschrift (Halle a. S. 1879) entspricht nicht mehr ganz meinem jetzigen Standpunkte, ist also zur Erläuterung des hier Ausgeführten nur mit Vorsicht heranzuziehen.

stabe ‚x' dient nur dazu, Stellen offen zu halten für ein Zahlzeichen, das den Ausdruck ergänzen soll, und macht so die besondere Art der Ergänzungsbedürftigkeit kenntlich, die das eigenthümliche Wesen der grade bezeichneten Function ausmacht. Im Folgenden soll statt des ‚x' der Buchstabe ‚ξ' zu diesem Zwecke gebraucht werden [1]). Dieses Offenhalten ist so zu verstehen, dass alle Stellen, an denen ‚ξ' steht, immer nur durch dasselbe, nie durch verschiedene Zeichen ausgefüllt werden dürfen. Ich nenne diese Stellen Argumentstellen, und dasjenige, dessen Zeichen (Name) in einem gegebenen Falle diese Stellen einnimmt, nenne ich Argument der Function für diesen Fall. Durch das Argument wird die Function ergänzt; das, wozu sie ergänzt wird, nenne ich Werth der Function für das Argument. Wir erhalten also einen Namen des Werthes einer Function für ein Argument, wenn wir die Argumentstellen des Namens der Function mit dem Namen des Arguments ausfüllen. So ist z. B. ‚$(2+3.1^2).1$' ein Name der Zahl 5, zusammengesetzt aus dem Functionsnamen ‚$(2+3.\xi^2).\xi$' und ‚1'. So ist denn das Argument nicht mit zur Function zu rechnen, sondern dient zur Ergänzung der an sich ungesättigten Function. Wenn im Folgenden ein Ausdruck wie ‚die Function $\Phi(\xi)$' gebraucht wird, so ist immer zu beachten, dass ‚ξ' nur insofern zur Bezeichnung der Function dient, als es die Argumentstellen kenntlich macht, nicht aber so, dass das Wesen der Function geändert wird, wenn irgendein Zeichen für ‚ξ' eintritt.

§ 2. Als functionsbildend hat man zu den Grundrechnungsarten noch den Grenzübergang in seinen verschiedenen Arten als unendliche Reihe, Differentialquotienten, Integral gefügt und zuletzt das Wort ‚Function' so allgemein verstanden, dass der Zusammenhang zwischen Functionswerth und Argument unter Umständen gar nicht mehr durch die Zeichen der Analysis, sondern nur noch durch Worte bezeichnet werden konnte. Eine andere Erweiterung bestand darin, dass man als Argumente und demzufolge auch als Functionswerthe complexe Zahlen zuliess. In diesen beiden Richtungen bin ich weiter gegangen. Während nämlich bisher die Zeichen der Analysis einerseits nicht immer ausreichten, kamen sie andererseits nicht alle bei der Bildung von Functionsnamen zur Verwendung, indem man z. B. ‚$\xi^2 = 4$' und ‚$\xi > 2$' nicht als Namen von Functionen gelten liess, wie ich das thue. Damit ist aber zugleich gesagt, dass der Umkreis der Functionswerthe nicht auf Zahlen beschränkt bleiben kann; denn wenn ich als Argument der Function $\xi^2 = 4$ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 nehme, so erhalte ich keine Zahlen.

$$‚0^2 = 4', \quad ‚1^2 = 4', \quad ‚2^2 = 4', \quad ‚3^2 = 4'$$

sind Ausdrücke von theils wahren, theils falschen Gedanken. Ich spreche

1) Hiermit soll jedoch nichts für die Begriffsschrift festgesetzt sein. Das ‚ξ' wird vielmehr in den begriffsschriftlichen Entwickelungen selbst nie vorkommen; ich werde es nur bei der Darlegung der Begriffsschrift und bei Erläuterungen gebrauchen.

dies so aus: der Werth der Function $\xi^2 = 4$ ist entweder der *Wahrheitswerth* des Wahren oder der des Falschen [1]). Man sieht hieraus schon, dass ich noch nichts behaupten will, wenn ich nur eine Gleichung hinschreibe, sondern dass ich nur einen Wahrheitswerth *bezeichne*, ebenso wie ich nichts behaupte, wenn ich nur ‚2^2' hinschreibe, sondern nur eine Zahl *bezeichne*. Ich sage: die *Namen* ‚$2^2 = 4$' und ‚$3 > 2$' *bedeuten* denselben Wahrheitswerth, den ich kurz *das Wahre* nenne. Ebenso *bedeuten* mir ‚$3^2 = 4$' und ‚$1 > 2$' denselben Wahrheitswerth, den ich kurz *das Falsche* nenne, gerade so, wie der Name ‚2^2' die Zahl Vier *bedeutet*. Ich nenne demnach die Zahl Vier die *Bedeutung* von ‚4' und von ‚2^2', und ich nenne das Wahre die Bedeutung von ‚$3 > 2$'. Ich unterscheide aber von der *Bedeutung* eines Namens seinen *Sinn*. ‚2^2' und $2 + 2$' haben nicht denselben *Sinn*, noch haben ‚$2^2 = 4$' und ‚$2 + 2 = 4$' denselben *Sinn*. Den Sinn des Namens eines Wahrheitswerthes nenne ich *Gedanken*. Ich sage ferner, ein Name *drücke aus* seinen Sinn und *bedeute* seine Bedeutung. Ich *bezeichne* mit dem Namen das, was er bedeutet.

Die Function $\xi^2 = 4$ kann also nur zwei Werthe haben, nämlich das Wahre für die Argumente 2 und —2 und das Falsche für alle übrigen Argumente.

Auch der Umkreis dessen, was als Argument zugelassen wird, muss erweitert und auf Gegenstände überhaupt ausgedehnt werden. *Gegenstände* stehen den Functionen gegenüber. Zu den *Gegenständen* rechne ich demnach Alles, was nicht Function ist, z. B. Zahlen, Wahrheitswerthe und die weiter unten einzuführenden Werthverläufe. Die Namen von Gegenständen, die *Eigennamen*, führen also keine Argumentstellen mit sich, sie sind gesättigt wie die Gegenstände selbst.

§ 3. Ich brauche die Worte

> „die Function $\Phi(\xi)$ hat denselben *Werthverlauf* wie die Function $\Psi(\xi)$"

allgemein als gleichbedeutend mit den Worten

> „die Functionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Werth."

Wir haben diesen Fall bei den Functionen $\xi^2 = 4$ und $3 . \xi^2 = 12$, wenigstens wenn als Argumente Zahlen genommen werden. Wir können uns aber die Zeichen der Quadrirung und Multiplication auch so definirt denken, dass die Function

$$(\xi^2 = 4) = (3 . \xi^2 = 12)$$

für jedes beliebige Argument als Werth das Wahre hat. Hier kann nun auch ein Ausdruck der Logik gebraucht werden: „der Begriff ***Quadrat-***

1) Dies habe ich in meinem Aufsatze *Ueber Sinn und Bedeutung* in der Zeitschrift f. Philos. u. phil. Kritik, 100. Bd., eingehender begründet.

wurzel aus 4 hat denselben Umfang wie der Begriff ***etwas, dessen dreifaches Quadrat*** 12 ***ist***". Bei solchen Functionen, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist, kann man demnach statt ‚Werthverlauf der Function' sagen ‚Umfang des Begriffes', und es erscheint zweckmässig, Begriff geradezu eine Function zu nennen, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist.

§ 4. Bisher war nur von Functionen eines einzigen Arguments die Rede; wir können aber leicht zu Functionen mit zwei Argumenten übergehen. Diese sind zwiefach ergänzungsbedürftig in der Art, dass eine Function mit einem Argumente erhalten wird, nachdem eine Ergänzung durch ein Argument bewirkt ist. Erst durch eine nochmalige Ergänzung gelangen wir zu einem Gegenstande, und dieser heisst dann Werth der Function für die beiden Argumente. Wie uns bei den Functionen mit einem Argumente der Buchstabe „ξ' diente, so gebrauchen wir hier die Buchstaben ‚ξ' und ‚ζ', um die zwiefache Ungesättigtheit der Functionen mit zwei Argumenten anzudeuten wie in

$$‚(\xi + \zeta)^2 + \zeta'.$$

Indem wir für ‚ζ' z. B. ‚1' einsetzen, sättigen wir die Function so, dass wir in $(\xi + 1)^2 + 1$ nur noch eine Function mit einem Argumente haben. Diese Gebrauchsweise der Buchstaben ‚ξ' und ‚ζ' muss immer im Auge behalten werden, wenn ein Ausdruck wie ‚die Function $\Psi(\xi, \zeta)$' vorkommt (vergl. die 2. Anm. in § 1). Ich nenne die Stellen, an denen ‚ξ' steht, ξ-Argumentstellen und die, an denen ‚ζ' steht, ζ-Argumentstellen. Ich sage, die ξ-Argumentstellen seien einander verwandt und ebenso die ζ-Argumentstellen, während ich eine ξ-Argumentstelle nicht verwandt nenne einer ζ-Argumentstelle.

Die Functionen mit zwei Argumenten $\xi = \zeta$ und $\xi > \zeta$ haben als Werth immer einen Wahrheitswerth (wenigstens wenn die Zeichen ‚=' und ‚>' in geeigneter Weise erklärt sind). Solche Functionen werden wir zweckmässig Beziehungen nennen. In der ersten Beziehung steht z. B. die 1 zu der 1, überhaupt jeder Gegenstand zu sich selbst, in der zweiten steht z. B. 2 zu 1. Wir sagen, der Gegenstand Γ stehe zu dem Gegenstande $\varDelta$ in der Beziehung $\Psi(\xi, \zeta)$, wenn $\Psi(\Gamma, \varDelta)$ das Wahre ist. Ebenso sagen wir, der Gegenstand $\varDelta$ falle unter den Begriff $\Phi(\xi)$, wenn $\Phi(\varDelta)$ das Wahre ist. Vorausgesetzt ist hierbei natürlich, dass die Function $\Phi(\xi)$ ebenso wie $\Psi(\xi, \zeta)$ als Werth immer einen Wahrheitswerth habe [1]).

1) Hier ist eine Schwierigkeit vorhanden, die leicht die wahre Sachlage verdunkeln und dadurch Misstrauen in die Richtigkeit meiner Auffassung erregen kann. Wenn wir den Ausdruck ‚der Wahrheitswerth davon, dass Δ unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt', vergleichen mit ‚$\Phi(\Delta)$', so sehen wir, dass dem ‚$\Phi(\ )$' eigentlich entspricht ‚der Wahrheitswerth davon, dass ( ) unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt' und nicht ‚der Begriff $\Phi(\xi)$'. Die letzten Worte bezeichnen also eigentlich nicht einen Begriff (in unserem Sinne), obwohl es nach der sprachlichen Form so aussieht. Ueber die Zwangslage, in der sich hier die Sprache befindet, vergl. meinen Aufsatz Ueber Begriff und Gegenstand.

Zeichen von Functionen.

§ 5. Schon oben ist gesagt, dass in der blossen Gleichung noch gar keine Behauptung liegen soll; es ist mit ‚$2+3=5$' eben nur ein Wahrheitswerth bezeichnet, ohne dass gesagt ist, welcher von beiden es ist. Auch wenn ich schriebe ‚$(2+3=5)=(2=2)$' und voraussetzte, man wüsste, dass $2=2$ das Wahre ist, so würde ich doch damit nicht behauptet haben, dass die Summe von 2 und 3 5 ist, sondern ich hätte nur den Wahrheitswerth davon bezeichnet, dass ‚$2+3=5$' dasselbe bedeute wie ‚$2=2$'. Wir bedürfen also noch eines besonderen Zeichens, um etwas als wahr behaupten zu können. Zu diesem Zwecke lasse ich dem Namen des Wahrheitswerthes das Zeichen ‚$\vdash$' vorhergehen, so dass z. B. in

$$‚\vdash 2^2 = 4‘ \text{ [1]}$$

behauptet wird, dass das Quadrat von 2 4 sei. Ich unterscheide das Urtheil vom Gedanken in der Weise, dass ich unter Urtheil die Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens verstehe. Die begriffsschriftliche Darstellung eines Urtheils mittelst des Zeichens ‚$\vdash$' nenne ich Begriffsschriftsatz oder kurz Satz. Dieses ‚$\vdash$' sehe ich an als zusammengesetzt aus dem senkrechten Striche, den ich Urtheilstrich nenne, und dem wagerechten, den ich jetzt einfach den Wagerechten nennen will [2]). Der Wagerechte wird meist mit andern Zeichen, wie hier mit dem Urtheilstriche verwachsen vorkommen und dadurch vor der Verwechselung mit dem Minuszeichen geschützt sein. Da, wo er gesondert vorkommt, muss er zur Unterscheidung etwas länger als das Minuszeichen gemacht werden. Ich fasse ihn als Functionsnamen auf in der Weise, dass

$$—\Delta$$

das Wahre ist, wenn Δ das Wahre ist, dass es dagegen das Falsche ist, wenn Δ nicht das Wahre ist [3]). Demnach ist

$$—\xi$$

eine Function, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist, oder nach

1) Ich benutze hier vielfach die Bezeichnungen der Summe, des Products, der Potenz vorläufig, obwohl sie hier noch nicht definirt sind, um bequemer Beispiele bilden zu können und durch Winke das Verständniss zu erleichtern. Es muss aber im Auge behalten werden, dass nichts auf die Bedeutungen dieser Bezeichnungen gegründet wird.

2) Früher nannte ich ihn Inhaltsstrich, als ich noch unter dem Ausdrucke ‚beurtheilbarer Inhalt' das zusammenfasste, was ich nun unterscheiden gelernt habe als Wahrheitswerth und Gedanken. Vergl. meinen Aufsatz Ueber Sinn und Bedeutung.

3) Selbstverständlich darf das Zeichen ‚Δ' nicht bedeutungslos sein, sondern muss einen Gegenstand bedeuten. Bedeutungslose Namen dürfen in der Begriffsschrift nicht vorkommen. Die Festsetzung ist so getroffen, dass ‚$—\Delta$' unter allen Umständen etwas bedeutet, sofern nur ‚Δ' etwas bedeutet. Sonst würde $—\xi$ kein scharfbegrenzter Begriff, also in unserm Sinne überhaupt kein Begriff sein. Ich gebrauche hier die grossen griechischen Buchstaben als Namen so, als ob sie etwas bedeuteten, ohne dass ich die Bedeutung angebe. In den Begriffsschriftentwickelungen selbst werden sie ebenso wenig wie ‚ξ' und ‚ζ' vorkommen.

unserer Festsetzung ein Begriff. Unter diesen Begriff fällt das Wahre und nur dieses. Es bedeutet also

$$‚— 2^2 = 4‘$$

dasselbe wie ‚$2^2 = 4$‘, nämlich das Wahre. Um Klammern entbehrlich zu machen, bestimme ich nämlich, dass Alles, was rechts vom Wagerechten steht, als Ganzes aufzufassen ist, das an der Argumentstelle der Function $—\xi$ steht, sofern nicht Klammern das verbieten. Es bedeutet

$$‚— 2^2 = 5‘$$

das Falsche, also dasselbe wie ‚$2^2 = 5$‘, wohingegen

$$‚— 2‘$$

das Falsche bedeutet, also etwas von der Zahl 2 Verschiedenes. Wenn Δ ein Wahrheitswerth ist, so ist $—\Delta$ derselbe und mithin ist dann

$$\Delta = (—\Delta)$$

das Wahre. Es ist dies aber das Falsche, wenn Δ kein Wahrheitswerth ist. Wir können also sagen, dass

$$\Delta = (—\Delta)$$

der Wahrheitswerth davon ist, dass Δ ein Wahrheitswerth sei.

Die Function $—\Phi(\xi)$ ist danach ein Begriff, und die Function $—\Psi(\xi, \zeta)$ ist eine Beziehung, einerlei, ob $\Phi(\xi)$ ein Begriff und $\Psi(\xi, \zeta)$ eine Beziehung ist oder nicht.

Von den beiden Zeichen, aus denen ‚$\vdash$‘ zusammengesetzt ist, enthält nur der Urtheilstrich die Behauptung.

§ 6. Wir brauchen kein eignes Zeichen, um einen Wahrheitswerth als das Falsche zu erklären, wenn wir nur ein Zeichen haben, durch welches jeder Wahrheitswerth in den entgegengesetzten verwandelt wird, das auch sonst unentbehrlich ist. Ich setze nun fest:

Der Werth der Function

$$\top\xi$$

soll für jedes Argument das Falsche sein, für das der Werth der Function

$$—\xi$$

das Wahre ist, und soll für alle andern Argumente das Wahre sein.

Wir haben demnach in

$$\top\xi$$

eine Function, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist; es ist ein Begriff, unter den alle Gegenstände fallen mit einziger Ausnahme des Wahren. Hieraus folgt, dass ‚$\top\Delta$‘ immer dasselbe bedeutet wie ‚$\top(—\Delta)$‘ und wie ‚$—\top\Delta$‘ und wie ‚$—\top(—\Delta)$‘. Wir sehen darum ‚$\top$‘ als zusammengesetzt an aus dem kleinen senkrechten Striche, dem Verneinungstriche, und den beiden Theilen des wagerechten Striches, von denen jeder als Wagerechter in unserm Sinne aufgefasst werden kann. Den Uebergang von ‚$\top(—\Delta)$‘ oder von ‚$—\top\Delta$‘ zu ‚$\top\Delta$‘ sowie den von ‚$——\Delta$‘ zu ‚$—\Delta$‘ nenne ich die Verschmelzung der Wagerechten.

Nach unserer Festsetzung ist $\top 2^2 = 5$ das Wahre; also

$$\vdash\!\top 2^2 = 5,$$

in Worten: $2^2 = 5$ ist nicht das Wahre; oder: das Quadrat von 2 ist nicht 5.

So auch: $\vdash\!\top 2$.

§ 7. Wir haben zwar das Gleichheitszeichen schon beiläufig zur Bildung von Beispielen benutzt; aber es ist nöthig, Genaueres hierüber festzusetzen.

$$‚\Gamma = \Delta‘$$

bedeute das Wahre, wenn Γ dasselbe ist wie Δ; in allen andern Fällen bedeute es das Falsche.

Um Klammern entbehrlich zu machen, bestimme ich, dass Alles, was links vom Gleichheitszeichen bis zum nächsten Wagerechten steht, als Ganzes das ξ-Argument der Function $\xi = \zeta$ bedeute, sofern nicht Klammern es verbieten; dass Alles, was rechts vom Gleichheitszeichen steht bis zum nächsten Gleichheitszeichen, als Ganzes das ζ-Argument jener Function bedeute, sofern nicht Klammern es verbieten (vergl. S. 10).

§ 8. Wir betrachteten in § 3 den Fall, dass eine Gleichung wie

$$‚\Phi(x) = \Psi(x)‘$$

immer einen Namen des Wahren ergiebt, was für einen Eigennamen wir auch für ‚x‘ einsetzen mögen, sofern dieser nur wirklich einen Gegenstand bedeutet. Wir haben dann die Allgemeinheit einer Gleichheit, während wir in ‚$2^2 = 4$‘ nur eine Gleichheit haben. Dieser Unterschied macht sich dadurch bemerklich, dass wir in jenem Falle einen nur unbestimmt andeutenden Buchstaben ‚x‘ haben, während in ‚$2^2 = 4$‘ jedes Zeichen eine bestimmte Bedeutung hat. Um einen Ausdruck für die Allgemeinheit zu erhalten, könnte man auf den Gedanken kommen, zu definiren: „Unter ‚$\Phi(x)$‘ werde das Wahre verstanden, wenn der Werth der Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre ist; sonst bedeute es das Falsche." Vorausgesetzt würde hierbei wie bei allen unsern Betrachtungen ähnlicher Art sein, dass ‚$\Phi(\xi)$‘ immer eine Bedeutung gewinne, wenn wir in ihm ‚ξ‘ durch einen Namen ersetzen, der einen Gegenstand bedeutet. Sonst würde ich $\Phi(\xi)$ nicht Function nennen. Danach bedeutete dann ‚$x.(x-1) = x^2 - 1$‘ das Wahre, wenigstens wenn die Bezeichnungen der Multiplication, Subtraction und Quadrirung auch für Gegenstände, die nicht Zahlen sind, so definirt wären, dass die Gleichung allgemein gälte. Dagegen bedeutete ‚$x.(x-1) = x^2$‘ das Falsche, weil wir als Bedeutung das Falsche erhalten, wenn wir für ‚x‘ ‚1‘ einsetzen, obwohl wir das Wahre erhalten, wenn wir ‚0‘ einsetzen. Aber bei dieser Festsetzung wäre das Gebiet der Allgemeinheit nicht genügend begrenzt. Man wäre z. B. im Zweifel, ob ‚$\top 2 + 3.x = 5.x$‘ als Verneinung einer Allgemeinheit oder als Allgemeinheit einer Verneinung aufzufassen wäre; genauer: ob dies den Wahrheitswerth davon bedeuten solle, dass nicht für jedes Argument der Werth der Function $2+3.\xi=5.\xi$ das Wahre sei, oder ob es den Wahrheitswerth davon bedeuten solle, dass für jedes Argument der Werth der Function $\top 2+3.\xi=5.\xi$ das Wahre sei. Im ersten Falle würde ‚$\top 2+3.x=5.x$' das Wahre bedeuten, im andern das Falsche. Es muss aber sowohl die Allgemeinheit der Verneinung, als auch die Verneinung der Allgemeinheit ausdrückbar sein. Ich drücke nun jene so aus:

$$‚\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}'$$

und die Verneinung der Allgemeinheit so:

$$‚\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}'$$

und die Allgemeinheit selbst so:

$$‚\overset{\mathfrak{a}}{\smile} 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}'.$$

Dies bedeutete das Wahre, wenn für jedes Argument der Werth der Function $2+3.\xi=5.\xi$ das Wahre wäre. Da dies nicht der Fall ist, so ist

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}$$

das Falsche, und darum ist

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}$$

das Wahre.

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}$$

ist das Falsche, weil nicht für jedes Argument der Werth der Function $\top 2+3.\xi=5.\xi$ das Wahre ist; denn für das Argument 1 ist er das Falsche. Mithin ist

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}$$

das Wahre, und

$$‚\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}'$$

besagt: es g i e b t mindestens eine Lösung der Gleichung ‚$2+3.x=5.x$'. Ebenso:

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top \mathfrak{a}^2=1;$$

in Worten: es g i e b t mindestens eine Quadratwurzel aus 1. Man erkennt hieraus, wie das ‚es giebt' in der Begriffsschrift wiedergegeben wird.

Wenn wir nun erklären:

> es bedeute
>
> $$‚\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})'$$
>
> das Wahre, wenn der Werth der Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre ist, und sonst das Falsche;

so bedarf dies einer Ergänzung, indem genauer anzugeben ist, welches in jedem Falle diese Function $\Phi(\xi)$ sei. Wir wollen sie die z u g e h ö r i g e Function nennen. Es können nämlich Zweifel entstehen. $\varDelta=\varDelta$ ist sowohl der Werth der Function $\varDelta=\xi$, als auch der Werth der Function $\xi=\xi$, beide Male für das Argument $\varDelta$. So könnte man von $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ ausgehend als zugehörige Function $\xi=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}=\xi$ oder $\xi=\xi$ annehmen wollen. Aber bei unserm Gebrauche der deutschen Buchstaben hätten wir in den ersten beiden Fällen gar keine **Function**, weil ‚$\xi = \mathfrak{a}$' und ‚$\mathfrak{a} = \xi$' immer bedeutungslos bleiben, was man auch für ‚ξ' einsetzen möge; denn der deutsche Buchstabe ‚$\mathfrak{a}$' darf ausser in ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' selbst nicht ohne vorgesetztes ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' vorkommen. Hier kann also nur $\xi = \xi$ als zugehörige Function in Betracht kommen. Nicht so einfach ist die Sache bei einem Ausdrucke wie

$$‚\overset{\mathfrak{a}}{\smile}((\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2 . \mathfrak{a}) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}))'.$$

Wenn man blindlings vorginge, könnte man in

$$‚(\xi + \xi = 2 . \xi) = (\overset{\xi}{\smile}\, \xi = \xi)'$$

die zugehörige Function zu haben meinen. Wir wollen nun sagen, ‚$\mathfrak{a}$' stehe in ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' über der **Höhlung**. Die Stelle über der Höhlung ist nie eine **Argumentstelle**; das über der zweiten Höhlung stehende ‚$\mathfrak{a}$' wird also mindestens zu bewahren sein. Da aber auf ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' immer eine Zeichenverbindung folgen muss, die ‚$\mathfrak{a}$' enthält, so muss ‚$\mathfrak{a}$' auch mindestens an einer der beiden Stellen in ‚$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' bewahrt bleiben. Man könnte demnach auf folgende Functionen als zugehörige rathen

$$(\xi + \xi = 2 . \xi) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \xi = \mathfrak{a}),$$
$$(\xi + \xi = 2 . \xi) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \xi),$$
$$(\xi + \xi = 2 . \xi) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a});$$

aber den ersten beiden Auffassungen widerspricht, dass die Bedeutung des in

$$‚\overset{\mathfrak{a}}{\smile}((\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2 . \mathfrak{a}) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} + \mathfrak{a}))'$$

vorkommenden ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' schon feststeht und nicht wieder in Frage gestellt werden darf.

Wir nennen nun das auf eine Höhlung mit einem **deutschen Buchstaben** Folgende, das mit eben dieser Höhlung zusammen den Namen des Wahrheitswerthes dafür bildet, dass der Werth der zugehörigen Function für jedes Argument das Wahre sei, das **Gebiet** des über der Höhlung stehenden deutschen Buchstaben. Die **zugehörige** Function wird nun durch die Regel bestimmt:

1. Alle Stellen, an denen ein deutscher Buchstabe in seinem Gebiet, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben noch über einer Höhlung vorkommt, sind verwandte Argumentstellen, und zwar die der zugehörigen Function.

Wenn man aber den Wahrheitswerth davon bezeichnen will, dass die Function

$$(\xi + \xi = 2 . \xi) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \xi = \mathfrak{a})$$

für jedes Argument das Wahre als Werth habe, so wird man einen andern deutschen Buchstaben wählen:

$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}(\mathfrak{e} + \mathfrak{e} = 2 . \mathfrak{e}) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{e} = \mathfrak{a}).$$

Ich fasse dies in die Regel:

2. Wenn in dem Namen einer Function schon deutsche Buchstaben vorkommen, in deren Gebieten Argumentstellen dieser Function liegen, so wähle man einen von diesen verschiedenen, um den zugehörigen Allgemeinheitsausdruck zu bilden.

Nach unsern Bestimmungen ist im Allgemeinen ein deutscher Buchstabe so gut wie ein anderer, jedoch mit der Beschränkung, dass die Verschiedenheit dieser Buchstaben wesentlich sein kann. Für einige deutsche Buchstaben werden wir später eine etwas abweichende Verwendungsweise festsetzen.

$$„\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})“$$

bedeutet dasselbe wie

$$„\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(-\!\!-\Phi(\mathfrak{a}))“$$

und wie

$$„-\!\!-(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a}))“.$$

Ich fasse darum die wagerechten Striche links und rechts von der Höhlung in „$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$“ als W a g e r e c h t e in unserm besondern Sinne des Wortes auf, sodass wir mit V e r s c h m e l z u n g der Wagerechten von den Formen „$-\!\!-(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a}))$“ und „$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(-\!\!-\Phi(\mathfrak{a}))$“ sogleich übergehen zu „$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$“.

§ 9. Wenn $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$ das Wahre ist, so können wir nach unserer frühern Bestimmung (§ 3) auch sagen, dass die Function $\Phi(\xi)$ denselben Werthverlauf habe wie die Function $\Psi(\xi)$; das heisst: wir können die Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit umsetzen und umgekehrt. Diese Möglichkeit muss als ein logisches Gesetz angesehen werden, von dem übrigens schon immer, wenn auch stillschweigend, Gebrauch gemacht ist, wenn von Begriffsumfängen die Rede gewesen ist. Die ganze leibniz-boolesche rechnende Logik beruht darauf. Man könnte diese Umsetzung vielleicht für unwichtig oder gar für entbehrlich halten. Dem gegenüber erinnere ich daran, dass ich in meinen Grundlagen der Arithmetik die Anzahl als Umfang eines Begriffes definirt und schon damals darauf hingewiesen habe, dass auch die negativen, irrationalen, kurz alle Zahlen als Umfänge von Begriffen zu definiren sind. Wir können für einen Werthverlauf ein einfaches Zeichen setzen, und so wird z. B. der Name der Anzahl Null eingeführt werden. In „$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$“ dagegen können wir nicht für „$\Phi(\mathfrak{a})$“ ein einfaches Zeichen setzen, weil der Buchstabe „$\mathfrak{a}$“ immer in dem vorkommen muss, was etwa für „$\Phi(\mathfrak{a})$“ gesetzt wird.

Die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit muss auch in unsern Zeichen ausführbar sein. So schreibe ich z. B. für

$$„\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,.\,(\mathfrak{a} - 1)“$$

$$„\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon) = \acute{\alpha}(\alpha\,.\,(\alpha - 1))“,$$

indem ich unter „$\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon)$“ den Werthverlauf der Function $\xi^2 - \xi$, unter

„$\grave{\alpha}(\alpha.(\alpha-1))$" den Werthverlauf der Function $\xi.(\xi-1)$ verstehe. Ebenso ist $\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2=4)$ der Werthverlauf der Function $\xi^2=4$, oder, wie wir auch sagen können, der Umfang des Begriffes *Quadratwurzel aus Vier*.

Wenn ich allgemein sage:

es bedeute

$$„\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)"$$

den Werthverlauf der Function $\Phi(\xi)$,

so bedarf dies ebenso einer Ergänzung, wie oben unsere Erklärung von „$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$". Es fragt sich nämlich, welche Function in jedem Falle als zugehörige Function $\Phi(\xi)$ anzusehen sei. Dass $\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-\varepsilon)$ der Werthverlauf der Function $\xi^2-\xi$ und nicht von $\xi^2-\varepsilon$ noch von $\varepsilon^2-\xi$ ist, versteht sich von selbst, weil bei unserer Verwendungsweise der kleinen griechischen Vokalbuchstaben weder „$\xi^2-\varepsilon$" noch „$\varepsilon^2-\xi$" für irgendeinen Gegenstand, dessen Name für „ξ" eingesetzt würde, eine Bedeutung gewänne, oder, wie wir dafür auch sagen können, weil jene Zeichenverbindungen keine Functionen bedeuten, sondern getrennt von dem „$\grave{\varepsilon}$" bedeutungslos sind. Eine Zeichenverbindung wie „$\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon,\ \grave{\varepsilon}X(\varepsilon))$" muss ähnlich wie in § 8 „$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Psi(\mathfrak{a},\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}X(\mathfrak{a}))$" beurtheilt werden. Die Stelle unter dem Spiritus lenis ist ebensowenig eine Argumentstelle wie die über der Höhlung. Nennen wir das auf einen kleinen griechischen Vokalbuchstaben mit dem Spiritus lenis Folgende, das mit diesem zusammen den Namen des Werthverlaufs der zugehörigen Function bildet, das Gebiet dieses griechischen Buchstaben, so können wir die Regel aufstellen:

1. Alle Stellen, an denen ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben noch mit dem Spiritus lenis vorkommt, sind verwandte Argumentstellen, und zwar die der zugehörigen Function.

Diese wird hierdurch bestimmt. Demnach ist $\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-\varepsilon))$ der Werthverlauf der Function $\xi=\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2-\varepsilon)$, und es ist $\grave{\alpha}(\alpha=\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\alpha))$ der Werthverlauf der Function $\xi=\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\xi)$. Für die Bildung eines Werthverlaufnamens gilt also die Regel:

2. Wenn in dem Namen einer Function schon kleine griechische Vokalbuchstaben vorkommen, in deren Gebieten Argumentstellen dieser Function liegen, so wähle man einen von diesen verschiedenen, um den Namen des Werthverlaufs dieser Function zu bilden.

Nach unsern Bestimmungen ist im Allgemeinen ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe so gut wie ein anderer, jedoch mit der Beschränkung, dass die Verschiedenheit dieser Buchstaben wesentlich sein kann.

Die Einführung der Bezeichnung für die Werthverläufe scheint mir eine der folgenreichsten Ergänzungen meiner Begriffsschrift zu sein, die ich seit meiner ersten Veröffentlichung über diesen Gegenstand gemacht habe. Hiermit ist zugleich der Umkreis dessen erweitert, was als Argument einer Function auftreten kann. Es ist z. B. $\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon) = \acute{\alpha}(\alpha \,.\, (\alpha - 1))$ der Werth der Function $\xi = \acute{\alpha}(\alpha \,.\, (\alpha - 1))$ für das Argument $\acute{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon)$.

§ 10. Dadurch, dass wir die Zeichenverbindung „$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \acute{\alpha}\Psi(\alpha)$“ als gleichbedeutend mit „$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$“ hingestellt haben, ist freilich die Bedeutung eines Namens wie „$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$“ noch keineswegs vollständig festgestellt. Wir haben nur ein Mittel, einen Werthverlauf immer wiederzuerkennen, wenn er durch einen Namen wie „$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$“ bezeichnet ist, durch welchen er schon als Werthverlauf erkennbar ist. Aber weder können wir bis jetzt entscheiden, ob ein Gegenstand, der uns nicht als solcher gegeben ist, ein Werthverlauf sei, und welcher Function er etwa zugehöre, noch können wir im Allgemeinen entscheiden, ob ein gegebener Werthverlauf eine gegebene Eigenschaft habe, wenn wir nicht wissen, dass diese Eigenschaft verbunden sei mit einer Eigenschaft der zugehörigen Function. Nehmen wir an, es sei

$$X(\xi)$$

eine Function, welche niemals denselben Werth für verschiedene Argumente erhält, so gilt für die Gegenstände, deren Namen die Form „$X(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$“ haben, ganz dasselbe Kennzeichen zur Wiedererkennung wie für die Gegenstände, deren Zeichen die Form „$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$“ haben. Es ist dann nämlich auch „$X(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = X(\acute{\alpha}\Psi(\alpha))$“ gleichbedeutend mit „$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$“ [1]). Hieraus geht hervor, dass durch die Gleichsetzung der Bedeutung von „$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \acute{\alpha}\Psi(\alpha)$“ mit der von „$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$“ die Bedeutung eines Namens wie „$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$“ keineswegs völlig bestimmt ist, wenigstens, wenn es eine solche Function $X(\xi)$ giebt, deren Werth für einen Werthverlauf als Argument diesem selbst nicht immer gleich ist. Wie wird nun diese Unbestimmtheit aufgehoben? Dadurch, dass für jede Function bei ihrer Einführung bestimmt wird, welche Werthe sie für Werthverläufe als Argumente erhält, ebenso wie für alle andern Argumente. Thun wir dies für die bisher betrachteten Functionen! Es sind folgende:

$$\xi = \zeta, \quad -\!\!-\xi, \quad \top\xi.$$

Die letzte kann ausser Betracht bleiben, da als ihr Argument immer ein Wahrheitswerth betrachtet werden kann. Es macht ja bei ihr keinen Unterschied, ob man als Argument einen Gegenstand nimmt oder den Werth, den die Function $-\!\!-\xi$ für diesen Gegenstand als Argument hat. Wir können nun noch die Function $-\!\!-\xi$ auf die Function $\xi = \zeta$ zurückführen. Nach unsern Festsetzungen hat nämlich die Function $\xi = (\xi = \xi)$ für jedes Argument denselben Werth wie die Function $-\!\!-\xi$; denn der Werth der Function $\xi = \xi$ ist für jedes Argument das Wahre. Daraus folgt, dass

1) Damit ist nicht gesagt, dass der Sinn derselbe sei.

der Werth der Function $\xi = (\xi = \xi)$ nur für das Wahre als Argument das Wahre ist, und dass er für alle andern Argumente das Falsche ist, grade wie bei der Function $—\xi$. Nachdem so Alles auf die Betrachtung der Function $\xi = \zeta$ zurückgeführt ist, fragen wir, welche Werthe diese habe, wenn ein Werthverlauf als Argument auftritt. Da wir bisher nur die Wahrheitswerthe und Werthverläufe als Gegenstände eingeführt haben, so kann es sich nur darum handeln, ob einer der Wahrheitswerthe etwa ein Werthverlauf sei. Wenn das nicht der Fall ist, so ist damit auch entschieden, dass der Werth der Function $\xi = \zeta$ immer das Falsche ist, wenn als eins ihrer Argumente ein Wahrheitswerth und als anderes ein Werthverlauf genommen wird. Wenn andrerseits das Wahre zugleich der Werthverlauf der Function $\Phi(\xi)$ ist, so ist damit auch entschieden, was der Werth der Function $\xi = \zeta$ in allen Fällen ist, wo als eins der Argumente das Wahre genommen wird, und ähnlich so verhält es sich, wenn das Falsche zugleich der Werthverlauf einer gewissen Function ist. Die Frage nun, ob einer der Wahrheitswerthe ein Werthverlauf sei, kann unmöglich daraus entschieden werden, dass ‚$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$' dieselbe Bedeutung haben soll wie ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$'. Es ist möglich, allgemein festzusetzen, dass ‚$\tilde{\eta}\Phi(\eta) = \tilde{\alpha}\Psi(\alpha)$' dasselbe bedeuten solle wie ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$', ohne dass daraus die Gleichheit von $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ und $\tilde{\eta}\Phi(\eta)$ erschlossen werden kann. Wir hätten dann etwa eine Klasse von Gegenständen, die Namen von der Form ‚$\tilde{\eta}\Phi(\eta)$' hätten und für deren Unterscheidung und Wiedererkennung dasselbe Kennzeichen gälte wie für die Werthverläufe. Wir könnten nun die Function $X(\xi)$ dadurch bestimmen, dass wir sagten, ihr Werth solle das Wahre sein für $\tilde{\eta}\Lambda(\eta)$ als Argument und er solle $\tilde{\eta}\Lambda(\eta)$ sein für das Wahre als Argument; der Werth der Function $X(\xi)$ solle ferner das Falsche sein für das Argument $\tilde{\eta}M(\eta)$ und er solle $\tilde{\eta}M(\eta)$ sein für das Falsche als Argument; für jedes andere Argument solle der Werth der Function ^{X} $\Phi(\xi)$ mit diesem selbst zusammenfallen. Wenn nun die Functionen $\Lambda(\xi)$ und $M(\xi)$ nicht immer für dasselbe Argument denselben Werth haben, so hat unsere Function $X(\xi)$ für verschiedene Argumente nie denselben Werth, und daher ist dann auch ‚$X(\tilde{\eta}\Phi(\eta)) = X(\tilde{\alpha}\Psi(\alpha))$' immer gleichbedeutend mit ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$'. Die Gegenstände, deren Namen die Form ‚$X(\tilde{\eta}\Phi(\eta))$' hätten, würden dann also durch dasselbe Mittel wiedererkannt wie die Werthverläufe, und es wäre $X(\tilde{\eta}\Lambda(\eta))$ das Wahre und $X(\tilde{\eta}M(\eta))$ das Falsche. Ohne also mit der Gleichsetzung von ‚$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$' mit ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$' in Widerspruch zu gerathen, ist es immer möglich zu bestimmen, dass ein beliebiger Werthverlauf das Wahre und ein beliebiger anderer das Falsche sein solle. Setzen wir demnach fest, dass $\grave{\varepsilon}(—\varepsilon)$ das Wahre und dass $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ das Falsche sein solle! $\grave{\varepsilon}(—\varepsilon)$ ist der Werthverlauf der Function $—\xi$, deren Werth nur dann das Wahre ist, wenn das Argument das Wahre ist, und deren Werth für alle andern Argumente das Falsche ist. Alle Functionen, von denen dies gilt, haben denselben Werthverlauf und dieser ist nach unserer Festsetzung das Wahre. Demnach ist $-\!\!\!-\,\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ nur dann das Wahre, wenn die Function $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den nur das Wahre fällt; in allen andern Fällen ist $-\!\!\!-\,\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ das Falsche. Ferner ist $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ der Werthverlauf der Function $\xi = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$, deren Werth nur dann das Wahre ist, wenn das Argument das Falsche ist, und deren Werth für alle andern Argumente das Falsche ist. Alle Functionen, von denen dies gilt, haben denselben Werthverlauf, und dieser ist nach unserer Festsetzung das Falsche. Jeder Begriff also, unter den das Falsche und nur dieses fällt, hat als Begriffsumfang das Falsche [1].

Wir haben hiermit die *Werthverläufe* so weit bestimmt, als es hier möglich ist. Erst wenn es sich ferner darum handeln sollte, eine Function einzuführen, welche auf die bisher bekannten Functionen nicht ganz zurückführbar ist, können wir festsetzen, welche Werthe sie für Werthverläufe als Argumente haben solle; und dies kann dann ebenso wohl als eine Bestimmung der Werthverläufe wie jener Function angesehen werden.

§ 11. In der That bedürfen wir noch solcher Functionen. Wenn sich die Gleichsetzung von ‚$\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$' mit ‚$\Delta$' allgemein hätte aufrecht erhalten lassen [2], so hätten wir in der Form ‚$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' einen Ersatz für den

---

1) Es liegt nahe, unsere Festsetzung so zu verallgemeinern, dass jeder Gegenstand als Werthverlauf aufgefasst werde, nämlich als Umfang eines Begriffes, unter den er als einziger Gegenstand fällt. Ein Begriff, unter den der Gegenstand Δ als einziger fällt, ist $\Delta = \xi$. Wir versuchen die Festsetzung: es sei $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ dasselbe wie Δ. Eine solche ist für jeden Gegenstand möglich, der uns unabhängig von Werthverläufen gegeben ist, aus demselben Grunde, den wir bei den Wahrheitswerthen gesehen haben. Aber ehe wir diese Festsetzung allgemein machen dürfen, fragt es sich, ob sie nicht in Widerspruch mit unserm Wiedererkennungszeichen der Werthverläufe stehe, wenn wir für Δ einen Gegenstand nehmen, der uns schon als Werthverlauf gegeben ist. Es geht nämlich nicht an, sie nur für solche Gegenstände gelten zu lassen, welche uns nicht als Werthverläufe gegeben sind, weil die Weise wie ein Gegenstand gegeben ist, nicht als dessen unveränderliche Eigenschaft angesehen werden darf, sintemal derselbe Gegenstand in verschiedener Weise gegeben werden kann. Setzen wir also für ‚Δ' ‚$\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$' ein, so erhalten wir

$$‚\grave{\varepsilon}(\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \varepsilon) = \grave{\alpha}\Phi(\alpha)‘$$

und dies wäre gleichbedeutend mit

$$‚-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-(\grave{\alpha}\Phi(\alpha) = \mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})‘,$$

was aber nur dann das Wahre bedeutet, wenn $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den nur ein einziger Gegenstand, nämlich $\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$ fällt. Da dies nicht nothwendig ist, so kann unsere Festsetzung in ihrer Allgemeinheit nicht aufrecht erhalten bleiben.

Die Gleichung ‚$\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$', mit der wir jene Festsetzung versuchten, ist ein besonderer Fall von ‚$\grave{\varepsilon}\Omega(\varepsilon, \Delta) = \Delta$', und man kann fragen, wie die Function $\Omega(\xi, \zeta)$ beschaffen sein müsse, damit allgemein bestimmt werden dürfe, es solle Δ dasselbe sein wie $\grave{\varepsilon}\Omega(\varepsilon, \Delta)$. Dann muss auch

$$\grave{\varepsilon}\Omega(\varepsilon, \grave{\alpha}\Phi(\alpha)) = \grave{\alpha}\Phi(\alpha)$$

das Wahre sein, mithin auch

$$-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,\Omega(\mathfrak{a}, \grave{\alpha}\Phi(\alpha)) = \Phi(\mathfrak{a}),$$

was auch $\Phi(\xi)$ für eine Function sei. Eine Function von dieser Eigenschaft werden wir später in $\xi \frown \zeta$ kennen lernen; aber wir werden sie mit Hilfe des Werthverlaufs definiren, sodass sie uns hier nichts nützen kann.

2) Vergl. Anm. 1.

bestimmten Artikel der Sprache. Angenommen nämlich, es wäre $\Phi(\xi)$ ein Begriff, unter den der Gegenstand $\varDelta$ und nur dieser fiele, so wäre $\smile^{\mathfrak{a}}\ \Phi(\mathfrak{a}) = (\varDelta = \mathfrak{a})$ das Wahre und mithin wäre auch $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\varDelta = \varepsilon)$ das Wahre und zufolge unserer Gleichsetzung von ‚$\grave{\varepsilon}(\varDelta = \varepsilon)$' und ‚$\varDelta$' wäre $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ dasselbe wie $\varDelta$; d. h. in dem Falle, dass $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den ein und nur ein Gegenstand fällt, bezeichnete ‚$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' diesen Gegenstand. Dies ist nun freilich nicht möglich, weil jene Gleichsetzung in ihrer Allgemeinheit fallen gelassen werden musste; aber wir können uns helfen, indem wir die Function

$$\backslash\xi$$

mit der Bestimmung einführen, dass zwei Fälle unterschieden werden:

1) wenn es zu dem Argumente einen Gegenstand $\varDelta$ der Art giebt, dass $\grave{\varepsilon}(\varDelta = \varepsilon)$ das Argument ist, so sei der Werth der Function $\backslash\xi$ $\varDelta$ selbst;
2) wenn es zu dem Argumente keinen Gegenstand $\varDelta$ der Art giebt, dass $\grave{\varepsilon}(\varDelta = \varepsilon)$ das Argument ist, so sei das Argument selbst der Werth der Function $\backslash\xi$.

Danach ist $\backslash\grave{\varepsilon}(\varDelta = \varepsilon) = \varDelta$ das Wahre, und es bedeutet ‚$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' dann den unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fallenden Gegenstand, wenn $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, unter den ein und nur ein Gegenstand fällt; in allen andern Fällen bedeutet ‚$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' dasselbe wie ‚$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$'. So ist z. B. $2 = \backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon + 3 = 5)$ das Wahre, weil 2 der einzige Gegenstand ist, der unter den Begriff

was um 3 *vermehrt* 5 *ergiebt*

fällt — eine geeignete Definition des Pluszeichens dabei vorausgesetzt —. Es ist $\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1)$ das Wahre, weil unter den Begriff *Quadratwurzel aus* 1 nicht nur ein einziger Gegenstand fällt. Es ist $\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon = \varepsilon) = \backslash\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon = \varepsilon)$ das Wahre, weil unter den Begriff *sich selbst ungleich* kein Gegenstand fällt. Es ist $\grave{\varepsilon}(\varepsilon + 3) = \backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon + 3)$, weil die Function $\xi + 3$ kein Begriff ist.

Hierin haben wir einen Ersatz für den bestimmten Artikel der Sprache, der dazu dient, aus Begriffswörtern Eigennamen zu bilden. Wir bilden z. B. aus den Worten

‚positive Quadratwurzel aus 2',

die einen Begriff bedeuten, den Eigennamen

‚die positive Quadratwurzel aus 2'.

Hier ist eine logische Gefahr. Denn wenn wir aus den Worten ‚Quadratwurzel aus 2' den Eigennamen ‚die Quadratwurzel aus 2' bilden wollten, begingen wir einen logischen Fehler, weil dieser Eigenname ohne weitere Festsetzung zweideutig [1]) und eben darum bedeutungslos wäre. Wenn es keine Irrationalzahlen gäbe, was ja behauptet worden ist, so wäre auch der Eigenname ‚die positive Quadratwurzel aus 2' bedeutungslos, wenigstens

1) Ich nehme dabei als zugestanden an, dass es negative und irrationale Zahlen gebe.

dem unmittelbaren Wortsinne nach, ohne besondere Festsetzung. Und gäben wir diesem Eigennamen eigens eine Bedeutung, so hätte diese keinen Zusammenhang mit seiner Bildung, und es dürfte nicht geschlossen werden, dass sie eine positive Quadratwurzel aus 2 wäre, und doch wären wir nur zu geneigt, das zu folgern. Diese Gefahr des bestimmten Artikels ist hier nun ganz vermieden, da ‚$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' immer eine Bedeutung hat, mag nun die Function $\Phi(\xi)$ kein Begriff sein, oder ein Begriff, unter den mehr als ein oder kein Gegenstand fällt, oder mag sie ein Begriff sein, unter den ein und nur ein Gegenstand fällt.

§ 12. Um nun die Unterordnung der Begriffe und andere wichtige Beziehungen bezeichnen zu können, führe ich die Function mit zwei Argumenten

$$\top^{\xi}_{\zeta}$$

durch die Bestimmung ein, dass ihr Werth das Falsche sein soll, wenn als ζ-Argument das Wahre und als ξ-Argument irgendein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; dass in allen andern Fällen der Functionswerth das Wahre sein soll. Nach dieser und den früheren Festsetzungen ist der Werth dieser Function auch für Werthverläufe als Argumente bestimmt. Es folgt, dass

$$\top^{\Gamma}_{\Delta}$$

dasselbe ist wie

$$-\left(\top^{(-\Gamma)}_{(-\Delta)}\right),$$

und wir können daher in

$$‚\top^{\Gamma}_{\Delta}‘$$

den wagerechten Strich vor ‚Δ' sowie die beiden Theile, in die der obere wagerechte Strich durch den senkrechten zerlegt wird, als W a g e r e c h t e in unserm besondern Sinne auffassen. Wir sprechen hier wie früher von der V e r s c h m e l z u n g d e r W a g e r e c h t e n. Den senkrechten Strich nenne ich B e d i n g u n g s t r i c h. Er kann nach Bedürfniss verlängert werden.

Es gelten die Sätze

$$‚\vdash\!\top^{3^2>2}_{3>2}‘; \qquad ‚\vdash\!\top^{2^2>2}_{2>2}‘; \qquad ‚\vdash\!\top^{1^2>2}_{1>2}‘.$$

Die Function $\top^{\xi}_{\zeta}$ oder $\mathrel{-\!\!\!\top}\top^{\xi}_{\zeta}$ hat als Werth immer das Wahre, wenn die Function $\top^{\xi}_{\zeta}$ als Werth das Wahre hat und umgekehrt. Also ist $\top^{\Gamma}_{\Delta}$

dann und nur dann das Wahre, wenn Δ das Wahre und Γ nicht das Wahre ist. Folglich

$$\vdash\!\!\top\!\!\begin{array}{l} 2>3 \\ 2+3=5, \end{array}$$

in Worten: 2 ist nicht grösser als 3 **und** die Summe von 2 und 3 ist 5.

$$\vdash\!\!\top\!\!\begin{array}{l} 3>2 \\ 2+3=5, \end{array}$$

in Worten: 3 ist grösser als 2 **und** die Summe von 2 und 3 ist 5. $\top\!\!\begin{array}{l} 3>2 \\ 2+3=5 \end{array}$ ist nämlich der Werth der Function $\top\!\!\begin{array}{l} \xi \\ \zeta \end{array}$ für das ξ-Argument $\top 3>2$ und das ζ-Argument $2+3=5$.

$$\vdash\!\!\top\!\!\begin{array}{l} 2^3=3^2 \\ \top 1^2=2^1, \end{array}$$

in Worten: **weder** ist die dritte Potenz von 2 die zweite Potenz von 3, **noch** ist die zweite Potenz von 1 die erste Potenz von 2.

Statt der Sätze

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} 3^2>3\text{‘}, \\ \text{,}\top 3<3 \end{array} \qquad \vdash\!\!\begin{array}{l} 2^2>3\text{‘}, \\ \text{,}\top 2<3 \end{array} \qquad \vdash\!\!\begin{array}{l} 1^2>3\text{‘} \\ \text{,}\top 1<3 \end{array}$$

hat man die folgenden

$$\vdash\!\!\top\!\!\begin{array}{l} 3^2>3\text{‘}, \\ \text{,}\top 3<3 \end{array} \qquad \vdash\!\!\top\!\!\begin{array}{l} 2^2>3\text{‘}, \\ \text{,}\top 2<3 \end{array} \qquad \vdash\!\!\top\!\!\begin{array}{l} 1^2>3\text{‘}. \\ \text{,}\top 1<3 \end{array}$$

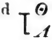
Da nun $\top\!\!\begin{array}{l} 1^2>3 \\ \top 1<3 \end{array}$ der Wahrheitswerth davon ist, dass weder das Quadrat von 1 grösser als 3, noch 1 kleiner als 3 sei, so wird durch unsern letzten Satz dies verneint, also behauptet, mindestens eins von beiden sei wahr, dass das Quadrat von 1 grösser als 3 **oder** dass 1 kleiner als 3 sei. Man sieht aus diesen Beispielen, wie das ‚**und**‘ der Sprache, wenn es Sätze verbindet, das ‚**weder — noch**‘ und das ‚**oder**‘ zwischen Sätzen wiedergegeben werden.

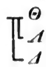
In $\text{,}\top\!\!\begin{array}{l} \xi\text{‘} \\ \Delta \end{array}$ kann für ‚ξ‘ irgendein Eigenname eingesetzt werden, also auch z. B. $\text{,}\top\!\!\begin{array}{l} \Theta\text{‘}. \\ \Delta \end{array}$ Wir erhalten so

$$\text{,}\top\!\!\begin{array}{l} \left(\top\!\!\begin{array}{l} \Theta \\ \Delta \end{array}\right)\text{‘}, \\ \Delta \end{array}$$

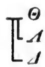
wo wir nun die Wagerechten **verschmelzen** können:

$$\text{,}\top\!\!\begin{array}{l} \Theta\text{‘}. \\ \Delta \\ \Delta \end{array}$$

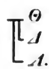
Dies bedeutet das Falsche, wenn Δ das Wahre und  nicht das Wahre ist; d. h. in diesem Falle, wenn  das Falsche ist. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn Λ das Wahre und Θ nicht das Wahre ist. Demnach ist



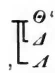
das Falsche, wenn Δ und Λ das Wahre sind, während Θ nicht das Wahre ist; in allen andern Fällen ist es das Wahre. Hieraus folgt die Vertauschbarkeit von Λ und Δ: es ist

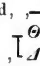


derselbe Wahrheitswerth wie



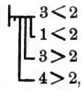
Es mögen in



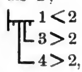
,—Θ' Oberglied, ,—Δ' und ,—Λ' Unterglieder heissen. Wir können aber auch  als Oberglied und ,—Λ' allein als Unterglied auffassen. Die Unterglieder sind demnach vertauschbar. Ebenso erkennt man, dass

dann und nur dann das Falsche ist, wenn sowohl Λ, als auch Δ, als auch Ξ das Wahre ist, während Θ nicht das Wahre ist. In allen andern Fällen ist es das Wahre. Wir haben auch hier wieder die Vertauschbarkeit der Unterglieder ,—Λ', ,—Δ', ,—Ξ'. Diese Vertauschbarkeit muss eigentlich für jeden vorkommenden Fall nachgewiesen werden, und ich habe dies in meinem Büchlein „Begriffsschrift“ für einige Fälle gethan, sodass es leicht sein wird, danach jeden Fall zn behandeln. Um nicht in zu grosse Weitläufigkeiten verstrickt zu werden, will ich hier diese Vertauschbarkeit als allgemein zugestanden annehmen und in Zukunft ohne weitere Erinnerung davon Gebrauch machen.

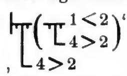
ist dann und nur dann das Wahre, wenn sowohl Λ, als auch Δ, als auch Ξ das Wahre ist, während Θ nicht das Wahre ist. Demnach



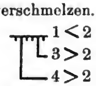
in Worten: 3 ist nicht kleiner als 2 und 1 ist kleiner als 2 und 3 ist grösser als 2 und 4 ist grösser als 2;

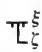
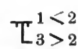
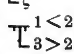


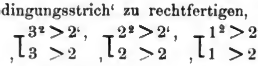
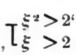
in Worten: 1 ist kleiner als 2 und 3 ist grösser als 2 und 4 ist grösser als 2. Man kann sich dies so zerlegt denken

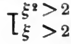


Die Verneinungsstriche zwischen den Bedingungsstrichen heben sich und die Wagerechten lassen sich verschmelzen. Wir haben in



den Werth der Function  für das ξ-Argument  und das ζ-Argument $4>2$, wo nun  der Werth derselben Function für das ξ-Argument $1<2$ und das ζ-Argument $3>2$ ist.

§ 13. Um die Benennung ‚Bedingungsstrich' zu rechtfertigen, weise ich darauf hin, dass die Namen  aus  dadurch hervorgehen, dass für ‚ξ' ‚3', ‚2', ‚1' gesetzt werden. Gebrauchen wir nun das Zeichen ‚$>$' so, dass ‚$\Gamma > \Delta$' das Wahre bedeutet, wenn Γ und Δ reelle Zahlen sind und Γ grösser als Δ ist, und dass in allen andern Fällen ‚$\Gamma > \Delta$' das Falsche bedeutet; nehmen wir ferner an, dass die Bezeichnung ‚Γ^2' so erklärt sei, dass sie immer eine Bedeutung habe, wenn Γ ein Gegenstand ist, so ist der Werth der Function



für jedes Argument das Wahre; also

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{a}^2 > 2\\ \mathfrak{a} \;\; > 2,\end{array}$$

in Worten: wenn etwas grösser als 2 ist, so ist auch sein Quadrat grösser als 2. So auch

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{a}^4 = 1\\ \mathfrak{a}^2 = 1,\end{array}$$

in Worten: wenn das Quadrat von etwas 1 ist, so ist auch dessen vierte Potenz 1. Man kann aber auch sagen: jede Quadratwurzel aus 1 ist auch vierte Wurzel aus 1; oder: alle Quadratwurzeln aus 1 sind vierte Wurzeln aus 1 [1]). Hier haben wir die Unterordnung eines Begriffes unter einen Begriff, einen allgemein bejahenden Satz. Wir haben Begriff eine Function mit einem Argumente genannt, deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist. Solche Functionen sind hier $\xi^4 = 1$ und $\xi^2 = 1$; diese ist der untergeordnete, jene der übergeordnete Begriff. Aus diesen Begriffen als Merkmalen ist $-\!\!\begin{array}{l}\xi^4 = 1\\ \xi^2 = 1\end{array}$ zusammengesetzt. Unter diesen Begriff fällt z. B. die Zahl -1:

$$\vdash\begin{array}{l}(-1)^4 = 1\\ (-1)^2 = 1,\end{array}$$

in Worten: -1 ist Quadratwurzel aus 1 und vierte Wurzel aus 1. Wir haben in § 8 gesehen, wie das ‚es giebt' der Wortsprache wiedergegeben wird. Wir wenden das an, um auszudrücken, dass es etwas giebt, was Quadratwurzel aus 1 und vierte Wurzel aus 1 ist: $\vdash\!\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\neg\neg\begin{array}{l}\neg\,\mathfrak{a}^4 = 1.\\ \mathfrak{a}^2 = 1\end{array}$ Offenbar heben sich hier zwei Verneinungsstriche gegenseitig auf: $\vdash\!\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\neg\,\mathfrak{a}^4 = 1.\\ \mathfrak{a}^2 = 1\end{array}$ Betrachten wir dies noch von einer andern Seite! $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\neg\,\mathfrak{a}^4 = 1\\ \mathfrak{a}^2 = 1\end{array}$ ist der Wahrheitswerth davon, dass, wenn etwas Quadratwurzel aus 1 ist, es nicht vierte Wurzel aus 1 sei, oder, wie wir auch sagen können, dass keine Quadratwurzel aus 1 vierte Wurzel aus 1 sei. Dieser Wahrheitswerth ist das Falsche und folglich: $\vdash\!\neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\neg\,\mathfrak{a}^4 = 1.\\ \mathfrak{a}^2 = 1\end{array}$ Wir haben hier die Verneinung eines allgemein verneinenden Satzes, d. h. einen particulär bejahenden Satz [2]), für den wir auch sagen können: ‚einige Quadratwurzeln aus 1

---

1) Man verbindet hiermit leicht den Nebengedanken, dass es etwas gebe, was Quadratwurzel aus 1 sei. Dieser muss hier ganz fern gehalten werden. Ebenso ist hier der Nebengedanke abzuwehren, dass es mehr als eine Quadratwurzel aus 1 gebe.

2) Der particulär bejahende Satz besagt einerseits zwar weniger als der allgemein bejahende, andererseits aber auch, was leicht übersehen wird, mehr, da er das Erfülltsein der Begriffe behauptet, während die Unterordnung auch bei leeren Begriffen und grade bei diesen immer stattfindet. Manche Logiker scheinen die Begriffe ohne Weiteres als erfüllt anzunehmen und den sehr wichtigen Fall des leeren Begriffes ganz zu übersehen, vielleicht weil sie leere Begriffe sehr mit Unrecht nicht als berechtigt

sind vierte Wurzeln aus 1', wobei aber die Form des Plurals nicht so verstanden werden muss, dass es gerade mehre sein müssen.

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{a}^4 = 1\\ \llcorner\, \mathfrak{a}^3 = 1,\end{array}$$

in Worten: es giebt mindestens eine dritte Wurzel aus 1, die auch vierte Wurzel aus 1 ist; oder: e i n i g e — oder mindestens doch eine — dritte Wurzel aus 1 ist vierte Wurzel aus 1.

In unsern Zeichen erscheint das Sätze verbindende ‚und' weniger einfach als der Functionsname ‚$\begin{array}{l}\top\,\xi\\ \llcorner\,\zeta\end{array}$', wofür ein einfacher Wortausdruck fehlt. Das in der Wortsprache vorliegende Verhältniss scheint leicht das natürlichere und sachgemässere zu sein, weil es das gewohnte ist. Was aber, vom logischen Standpunkte aus betrachtet, einfacher sei, ist nicht leicht zu sagen: man kann mit ‚und' und der Verneinung unser ‚$\begin{array}{l}\top\,\xi\\ \llcorner\,\zeta\end{array}$' erklären, aber auch umgekehrt mit dem Functionsnamen ‚$\begin{array}{l}\top\,\xi\\ \llcorner\,\zeta\end{array}$' und dem Verneinungsstriche das ‚und'. Offenbar besagt z. B. ‚$\vdash\!\begin{array}{l}\top\, 2+3=5\\ \llcorner\, 2+2=4\end{array}$' weniger als ‚$\vdash\!\!\top\!\begin{array}{l}\top\, 2+3=5\\ \llcorner\, 2+3=4\end{array}$' und könnte darum für einfacher gelten. Der eigentliche Grund für die Einführung des ‚$\begin{array}{l}\top\,\xi\\ \llcorner\,\zeta\end{array}$' ist die Leichtigkeit und Uebersichtlichkeit, mit der sich damit das Schliessen darstellt, zu dem wir jetzt übergehn.

Schlüsse und Folgerungen.

§ 14. Aus den Sätzen ‚$\vdash\!\begin{array}{l}\top\, \Gamma\\ \llcorner\, \Delta\end{array}$' und ‚$\vdash \Delta$' kann geschlossen werden: ‚$\vdash \Gamma$'; denn, wäre Γ nicht das Wahre, so wäre, da Δ das Wahre ist, $\begin{array}{l}\top\, \Gamma\\ \llcorner\, \Delta\end{array}$ das Falsche. Ich werde nun jedem in Begriffsschriftzeichen aufgestellten Satze, wenn er später zu einer weitern Beweisführung gebraucht werden soll, ein A b z e i c h e n geben, um ihn heranziehen zu können. Wenn nun so der Satz ‚$\vdash\!\begin{array}{l}\top\, \Gamma\\ \llcorner\, \Delta\end{array}$' das Abzeichen ‚$\alpha$' und ‚$\vdash \Delta$' das Abzeichen ‚$\beta$' erhalten hat, so schreibe ich den Schluss entweder so

$$\begin{array}{c}\vdash\!\begin{array}{l}\top\, \Gamma\\ \llcorner\, \Delta\end{array}\\ (\beta)::\overline{}\\ \vdash \Gamma\end{array} \qquad \text{oder so} \qquad \begin{array}{c}\vdash \Delta\\ (\alpha):\overline{}\\ \vdash \Gamma\end{array}$$

mit Doppelkolon mit einfachem Kolon.

anerkennen. Daher kommt es, dass ich die Ausdrücke ‚Unterordnung', ‚allgemein bejahend', ‚particulär bejahend' nicht ganz in demselben Sinne gebrauche, wie jene Logiker, und zu Aussprüchen gelange, die jene mit Unrecht für falsch zu halten geneigt sein werden.

Dies ist die einzige Schlussweise, die ich in meiner Begriffsschrift angewendet habe, und man kann mit ihr auch auskommen. Das Gebot der wissenschaftlichen Sparsamkeit würde nun eigentlich verlangen, es zu thun; aber dem treten praktische Gründe entgegen, denen ich hier, wo ich lange Schlussketten bilden will, etwas nachgeben muss. Es würde sich nämlich eine zu grosse Weitschweifigkeit ergeben, wenn ich nicht noch einige andere Schlussweisen zulassen wollte, was ich schon in dem Vorworte jenes meines Werkchens in Aussicht genommen habe.

Wenn uns die Sätze

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\\ \Lambda\\ \Pi\end{array} \ (\gamma \quad \text{und} \quad \vdash \Delta \ (\beta$$

gegeben sind, so können wir nicht unmittelbar wie oben schliessen, sondern erst, nachdem wir, von der Vertauschbarkeit der Unterglieder Gebrauch machend, (γ) umgewandelt haben in

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Lambda\\ \Pi\\ \Delta\end{array}.$$

Um aber übermässige Weitläufigkeit zu vermeiden, schreibe ich das nicht ausdrücklich hin, sondern gleich

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\\ \Lambda\\ \Pi\end{array} \\ (\beta)::\overline{\qquad\qquad} \\ \vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Lambda\\ \Pi\end{array} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \vdash \Delta \\ (\gamma):\overline{\qquad\qquad} \\ \vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Lambda\\ \Pi\end{array} \end{array},$$

wo im Schlusssatze die Unterglieder auch anders geordnet sein könnten.

W e n n e i n U n t e r g l i e d e i n e s S a t z e s s i c h v o n e i n e m z w e i t e n S a t z e n u r d u r c h d e n f e h l e n d e n U r t h e i l s t r i c h u n t e r s c h e i d e t , s o k a n n m a n a u f e i n e n S a t z s c h l i e s s e n , d e r a u s d e m e r s t e n d u r c h U n t e r d r ü c k u n g j e n e s U n t e r g l i e d e s h e r v o r g e h t.

Wir ziehen auch zwei solche Schlüsse zusammen, wie aus Folgendem zu ersehen ist. Es sei noch gegeben der Satz $\vdash \Lambda$ (ρ. Dann schreiben wir den doppelten Schluss so:

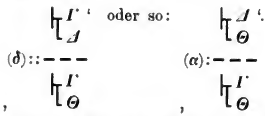
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\\ \Lambda\\ \Pi\end{array} \\ (\beta,\varrho)::\overline{\overline{\qquad\qquad}} \\ \vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Pi\end{array} \end{array}.$$

§ 15. Etwas weniger einfach ist folgende Schlussweise. Aus den beiden Sätzen

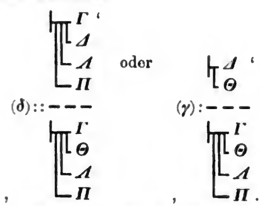
$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Delta\end{array} \ (\alpha \quad \text{und} \quad \vdash\!\!\begin{array}{l}\Delta\\ \Theta\end{array} \ (\delta$$

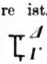
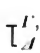
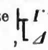
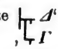
können wir auf den Satz $\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Theta\end{array}$ schliessen. $\vdash\!\!\begin{array}{l}\Gamma\\ \Theta\end{array}$ ist nämlich nur dann das Falsche, wenn Θ das Wahre und Γ nicht das Wahre ist. Wenn aber Θ das Wahre ist, so muss auch Δ das Wahre sein, weil sonst $-\!\!\begin{array}{l}\Delta\\ \Theta\end{array}$ das Falsche wäre. Wenn aber Δ das Wahre ist und Γ nicht das Wahre wäre, so wäre  das Falsche. Der Fall, wo  das Falsche wäre, findet also nicht statt und es ist  das Wahre.

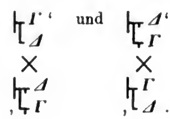
Diesen Schluss schreibe ich entweder so:



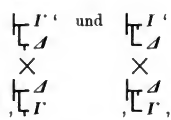
Wenn wir statt des Satzes (α) den in § 14 mit dem Abzeichen ‚γ' versehenen als Praemisse haben, so müssen wir eigentlich wie dort erst eine Umwandlung vor dem Schlusse vornehmen. Aber wir machen dies der Kürze halber wie oben im Kopfe und schreiben



Es ist  das Falsche, wenn  das Wahre und  nicht das Wahre ist; d. h. wenn das Falsche und Δ das Wahre ist. In allen andern Fällen ist  das Wahre. Dasselbe gilt aber auch von , sodass die Functionen  und  immer für dieselben Argumente denselben Werth haben. Ebenso haben die Functionen  und  für dieselben Argumente immer denselben Werth. Man führt diesen auf den vorigen Fall zurück, indem man für ‚ζ' ‚' setzt und unmittelbar auf einander folgende Verneinungstriche aufhebt. Auch die Functionen  und  haben für dieselben Argumente immer denselben Werth. Wir können also von dem Satze  zu dem Satze  übergehen und umgekehrt von diesem zu jenem. Wir schreiben diese Uebergänge so:



Ebenso auch:

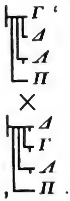


Fälle, die auf den ersten zurückführbar sind durch Aufhebung von Verneinungstrichen. Wir können dies in eine Regel so fassen:

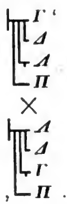
> Man darf ein Unterglied mit dem Obergliede vertauschen, wenn man gleichzeitig die Wahrheitswerthe beider umkehrt.

Wir nennen diesen Uebergang W e n d u n g. Es können aber auch mehre

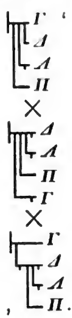
Unterglieder vorhanden sein. So haben wir den Uebergang



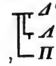
Indem wir von der Vertauschbarkeit der Unterglieder stillschweigend Gebrauch machen, können wir aber auch schreiben:



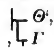
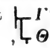
Durch zweimalige Wendung gelingt es, alle Unterglieder in eins zusammenzufassen, wie folgt:



Wir fassen nämlich bei der zweiten Wendung

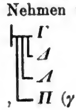
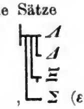


als Oberglied und ‚$\top\Gamma$‘ als Unterglied auf. Nennen wir zur Abkürzung den Wahrheitswerth

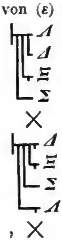
‚Θ‘! Der vorletzte Satz geht dann über in , woraus folgt . Setzen wir dann für ‚Θ‘ den ausführlichen Ausdruck wieder ein, so erhalten wir den Schlusssatz. Wie aus dem § 12 zu ersehen ist, haben wir in

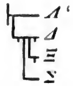
den Wahrheitswerth davon, dass Δ das Wahre, Λ nicht das Wahre und Π das Wahre sei.

Nehmen wir die Sätze

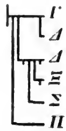
 und 

als gegeben an, so können wir so folgern: wir fassen zunächst die Unterglieder von (ε) zusammen:

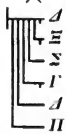



[1])

(γ): - - - -



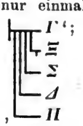
×


[2])

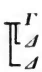
×


,

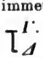
Dies können wir dadurch vereinfachen, dass wir ‚Δ' nur einmal schreiben:


;

denn



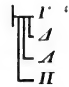
ist immer derselbe Wahrheitswerth wie

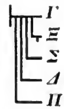

.

Ein zweimal auftretendes Unterglied braucht nur einmal geschrieben zu werden.

Wir nennen dies die **Verschmelzung gleicher Unterglieder.**

Ich schreibe nun diesen Uebergang abgekürzt so:

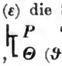
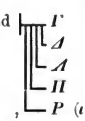
ε  oder so: γ 

(γ): - - - -  , (ε):: - - - -  ,

und stelle für ihn folgende Regel auf:

> **Wenn dieselbe Zeichenverbindung in einem Satze als Oberglied und in einem andern als Unterglied auftritt, so kann man auf einen Satz schliessen, in welchem das Oberglied des zweiten als Oberglied und alle Unterglieder beider ohne das genannte als Unterglieder erscheinen. Doch brauchen Unterglieder, die in beiden vorkommen, nur einmal geschrieben zu werden.**

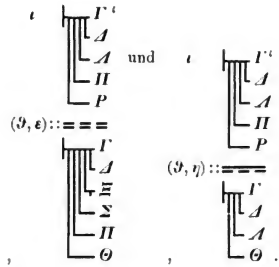
In ähnlicher Weise wie in § 14 können wir hier zwei Schlüsse zusammenziehen. Es seien z. B. ausser (ε) die Sätze

 (ϑ ‚ und ‚ (ι' und ‚ (ι

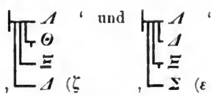
gegeben, so können wir schreiben

1) Wir können jetzt wie im Anfange dieses Paragraphen schliessen, da dieser Satz dieselbe Form hat wie dort (δ).

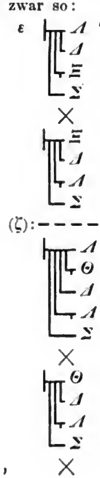
2) Wir lösen jetzt das zusammengesetzte Unterglied wieder auf.

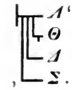


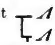
§ **16.** Nehmen wir an, es seien die Sätze

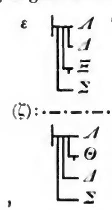


gegeben, so können wir diesen Fall auf den eben behandelten zurückführen, und zwar so:





Diese beiden Wendungen haben den Zweck, durch Verschmelzung gleicher Unterglieder ‚$\top$Α' einmal wegzuschaffen. Dass  immer derselbe Wahrheitswerth ist wie —Α, kann auch unmittelbar eingesehen werden; denn es ist  das Falsche, wenn $\top$Α das Wahre und Α nicht das Wahre ist, sonst das Wahre. In der letzten Bedingung ist die erste enthalten. Es ist aber auch —Α das Falsche, wenn Α nicht das Wahre ist, sonst das Wahre. Wir schreiben nun diesen Uebergang abgekürzt so:



und sprechen die Regel so aus:

> Wenn zwei Sätze in den Obergliedern übereinstimmen, während ein Unterglied des einen sich von einem Untergliede des andern nur durch den davor stehenden Verneinungstrich unterscheidet, so können wir auf einen Satz schliessen, in welchem das übereinstim-

mende Oberglied als Oberglied und alle Unterglieder beider mit Ausnahme der beiden genannten als Unterglieder erscheinen. Dabei brauchen Unterglieder, die in beiden vorkommen, nur einmal hingeschrieben zu werden (Verschmelzung gleicher Unterglieder).

§ 17. Sehen wir nun zu, wie der in der Logik ‚Barbara' genannte Schluss sich hier einreiht! Aus den beiden Sätzen:

‚alle Quadratwurzeln aus 1 sind vierte Wurzeln aus 1'

und

‚alle vierte Wurzeln aus 1 sind achte Wurzeln aus 1'

können wir schliessen:

‚alle Quadratwurzeln aus 1 sind achte Wurzeln aus 1'.

Wenn wir nun die Praemissen so schreiben:

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\begin{array}{l}\mathfrak{a}^4 = 1\\ \mathfrak{a}^2 = 1\end{array},\quad\text{und}\quad \vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\begin{array}{l}\mathfrak{a}^8 = 1\\ \mathfrak{a}^4 = 1\end{array},$$

so können wir unsere Schlussweisen nicht anwenden, wohl aber, wenn wir sie so schreiben:

$$\vdash\begin{array}{l}x^4 = 1\\ x^2 = 1\end{array},\quad\text{und}\quad \vdash\begin{array}{l}x^8 = 1\\ x^4 = 1\end{array}.$$

Wir haben hier den Fall des § 15. Wir versuchten schon früher, die Allgemeinheit mittels eines lateinischen Buchstaben in dieser Weise auszudrücken, kamen aber davon wieder ab, weil wir bemerkten, dass das Gebiet der Allgemeinheit nicht genügend abgegrenzt wäre. Wir begegnen diesem Bedenken nun durch die Festsetzung, dass bei einem lateinischen Buchstaben das Gebiet Alles umfassen solle, was in dem Satze ausser dem Urtheilstriche vorhanden ist[1]). Mit einem lateinischen Buchstaben kann man demnach nie die Verneinung der Allgemeinheit ausdrücken, wohl aber die Allgemeinheit der Verneinung. Eine Zweideutigkeit ist also nun nicht mehr vorhanden. Man sieht aber, dass der Ausdruck der Allgemeinheit mit deutschen Buchstaben und Höhlung dadurch nicht überflüssig wird. Unsere Festsetzung über das Gebiet eines lateinischen Buchstaben soll dieses nur nach unten, nicht nach oben abgrenzen. Es bleibt also erlaubt, ein solches Gebiet auf mehrere Sätze auszudehnen, und das macht die lateinischen Buchstaben geeignet, beim Schliessen Dienste zu leisten, welche die deutschen bei der strengen Abgeschlossenheit ihres Gebietes nicht leisten können. Wenn wir die Prämissen $\vdash\begin{array}{l}x^8 = 1\\ x^2 = 1\end{array}$, und $\vdash\begin{array}{l}x^4 = 1\\ x^2 = 1\end{array}$, haben und auf den Satz $\vdash\begin{array}{l}x^8 = 1\\ x^4 = 1\end{array}$, schliessen, so erweitern wir vorübergehend, um zu schliessen, das Gebiet des ‚x' auf beide Praemissen und den Schlusssatz, wobei jedoch jeder dieser Sätze auch ohne diese Erweiterung gilt.

Wir sagen von einem lateinischen Buchstaben nicht, dass er einen Gegenstand bedeute, sondern dass er einen Gegenstand andeute.

---

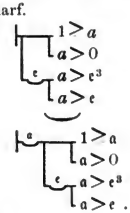
1) Hiermit ist der Gebrauch der lateinischen Buchstaben nur für den Fall erklärt, dass ein Urtheilstrich vorhanden ist. Das ist aber in einer reinen Begriffsentwickelung immer der Fall; denn wir schreiten dabei immer von Satz zu Satz fort.

Ebenso sagen wir auch, ein deutscher Buchstabe d e u t e einen Gegenstand a n da, wo er nicht über einer Höhlung steht.

Ein Satz mit einem lateinischen Buchstaben kann immer umgewandelt werden in einen solchen mit einem deutschen Buchstaben, dessen Höhlung von dem Urtheilstriche nur durch einen Wagerechten getrennt ist. Wir schreiben einen solchen Uebergang so:

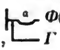
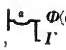
$$\vdash \Phi(x)$$
$$\smile$$
$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!-\Phi(\mathfrak{a}).$$

Hierbei ist die zweite Regel des § 8 zu beachten, wie im folgenden Beispiele, wo als neu einzuführender deutscher Buchstabe nicht ‚e' gewählt werden darf.

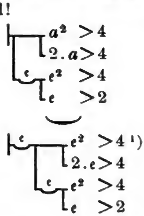


Bei dem Uebergange von einem lateinischen zu einem deutschen Buchstaben muss noch folgender Fall erwähnt werden. Betrachten wir den Satz ‚$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\begin{smallmatrix}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$', worin ‚$\Gamma$' ein Eigenname und ‚$\Phi(\xi)$' ein Functionsname sei! $\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\begin{smallmatrix}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$ ist das Falsche, wenn die Function $\top\begin{smallmatrix}\Phi(\xi)\\ \Gamma\end{smallmatrix}$ für irgendein Argument das Falsche als Werth hat. Das ist dann der Fall, wenn Γ das Wahre ist und der Werth der Function $-\Phi(\xi)$ für irgendein Argument das Falsche ist. In allen andern Fällen ist $\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\begin{smallmatrix}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$ das Wahre. Es besagt also ‚$\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\begin{smallmatrix}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$', dass Γ nicht das Wahre sei, oder dass der Werth der Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre sei. Vergleichen wir hiermit ‚$\top\begin{smallmatrix}\smile^{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$'! Dies bedeutet das Falsche, wenn Γ das Wahre und $\smile^{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})$ das Falsche ist. Das ist aber der Fall, wenn für irgendein Argument der Werth der Function $-\Phi(\xi)$ das Falsche ist. In allen andern Fällen ist $\top\begin{smallmatrix}\smile^{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$ das Wahre. Der Satz ‚$\vdash\!\top\begin{smallmatrix}\smile^{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$' besagt also dasselbe wie ‚$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\begin{smallmatrix}\Phi(\mathfrak{a})\\ \Gamma\end{smallmatrix}$'. Wenn für ‚$\Gamma$' und ‚$\Phi(\xi)$' Zeichenverbindungen gesetzt werden, welche einen Gegenstand und eine Function nicht bedeuten, sondern nur andeuten, indem sie lateinische Buchstaben enthalten, so gilt das eben Gesagte doch, wenn für jeden lateinischen Buchstaben ein Name gesetzt wird, welcher dies auch sei, also allgemein.

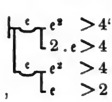
Um mich genauer ausdrücken zu können, will ich folgende Sprechweise einführen. N a m e n nenne ich nur solche Zeichen und Zeichenverbindungen, welche etwas bedeuten sollen. Lateinische Buchstaben und Zeichenverbindungen, in denen solche vorkommen, sind also keine N a m e n, weil sie nur andeuten. Eine Zeichenverbindung, welche lateinische Buchstaben enthält und welche immer in einen Eigennamen übergeht, wenn wir jeden lateinischen Buchstaben durch einen Namen ersetzen, will ich **lateinische Gegenstandsmarke** nennen. Und eine Zeichenverbindung, welche lateinische Buchstaben enthält und welche immer in einen Functionsnamen übergeht, wenn wir jeden lateinischen Buchstaben durch einen Namen ersetzen, will ich **lateinische Functionsmarke** oder **lateinische Marke einer Function** nennen.

Wir können nun sagen: der Satz ‘ besagt immer dasselbe wie der Satz ‘ nicht nur, wenn ‚$\Phi(\xi)$‘ ein Functionsname und ‚Γ‘ ein Eigenname ist, sondern auch wenn ‚$\Phi(\xi)$‘ eine lateinische Functionsmarke und ‚Γ‘ eine lateinische Gegenstandsmarke ist.

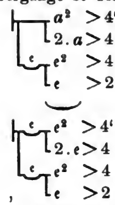
Wenden wir dies an auf folgenden Fall!



Nach dem eben Gesagten können wir für den letzten Satz auch schreiben



Es ist klar, dass nur solche Unterglieder aus dem Gebiete des neu einzuführenden deutschen Buchstaben entlassen werden können, welche den zu ersetzenden lateinischen Buchstaben nicht enthielten. Ich will solche Uebergänge so schreiben:



Statt mehre deutsche Buchstaben nach einander einzuführen, schreiben wir gleich unter das Zeichen ‚$\smile$‘ das Endergebniss hin.

Wir fassen dies in folgende Regel:

Es ist erlaubt, in einem Satze einen lateinischen Buchstaben überall, wo er vorkommt, durch einen und denselben deutschen Buchstaben zu ersetzen. Dieser muss dann zugleich über einer Höhlung vor einem solchen Obergliede angebracht werden, ausserhalb dessen der lateinische Buchstabe nicht vorkommt[1]**. Wenn in diesem Obergliede das Gebiet eines deutschen Buch-**

1) Die zweite Regel des § 8 verbietet hier nicht den nochmaligen Gebrauch des ‚e‘, weil ‚a‘ in dem ersten Satze nicht im Gebiete des ‚e‘ vorkommt.

1) Wenn also der lat. Buchstabe in jedem Untergliede vorkommt, so muss der ganze Satz ohne den Urtheilstrich als Oberglied aufgefasst werden, und die Höhlung mit dem deutschen Buchstaben darf dann von dem Urtheilstriche nur durch einen Wagerechten getrennt sein.

staben enthalten ist und in diesem Gebiete der lateinische Buchstabe vorkommt, so muss der für diesen einzuführende deutsche Buchstabe von jenem verschieden gewählt werden (zweite Regel des § 8).

§ 18. Wir wollen nun mit lateinischen Buchstaben einige allgemeine Gesetze aufstellen, von denen wir später Gebrauch machen müssen. Nach § 12 wäre

$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\, \Gamma \\ \;\lfloor\, \varDelta \\ \lfloor\, \Gamma \end{array}$$

nur dann das Falsche, wenn Γ und $\varDelta$ das Wahre wären, während Γ nicht das Wahre wäre. Dies ist unmöglich; also

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\!\!\top\, a \\ \;\;\lfloor\, b \\ \;\lfloor\, a \end{array} \qquad \text{(I}$$

Die ‚I' ist diesem Satze als Abzeichen (§ 14) gegeben, und so werden auch fernerhin Abzeichen den Sätzen beigelegt werden. Wenn wir statt ‚b' ‚a' schreiben, können wir gleiche Unterglieder verschmelzen, sodass wir in $\begin{array}{l}\vdash\!\top\, a \\ \;\lfloor\, a\end{array}$ einen besondern Fall von (I) haben, der auch ohne Erinnerung mit unter (I) verstanden werden soll.

$—\varDelta$ und $\mp\varDelta$ sind immer verschieden und Wahrheitswerthe. Da nun $—\Gamma$ ebenfalls immer ein Wahrheitswerth ist, so muss er entweder mit $—\varDelta$ oder mit $\mp\varDelta$ zusammenfallen. Daraus folgt, dass

$$\begin{array}{l} \top(—\Gamma)=(—\varDelta) \\ \lfloor_{\!\top}(—\Gamma)=(\mp\varDelta) \end{array}$$

immer das Wahre ist; denn es würde nur dann das Falsche sein, wenn $\mp(—\Gamma)=(\mp\varDelta)$ das Wahre, d. h. $(—\Gamma)=(\mp\varDelta)$ das Falsche, und $(—\Gamma)=(—\varDelta)$ nicht das Wahre, d. h. das Falsche wäre. Mit andern Worten:

$$\begin{array}{l} \top(—\Gamma)=(—\varDelta) \\ \lfloor_{\!\top}(—\Gamma)=(\mp\varDelta) \end{array}$$

wäre nur dann das Falsche, wenn sowohl $(—\Gamma)=(—\varDelta)$, als auch $(—\Gamma)=(\mp\varDelta)$ das Falsche wäre, was, wie wir eben gesehen, nicht möglich ist. Also

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top(—a)=(—b) \\ \;\lfloor_{\!\top}(—a)=(\mp b) \end{array} \qquad \text{(IV}$$

Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens könnten die Klammern allenfalls entbehrt werden.

Aus der Bedeutung des Functionsnamens $\backslash\xi$ (§ 11) folgt

$$\vdash a = \backslash\grave{\varepsilon}(a=\varepsilon) \qquad \text{(VI}$$

Erweiterung der Allgemeinheitsbezeichnung.

§ 19. Bisher ist die Allgemeinheit nur in Hinsicht auf Gegenstände ausgedrückt worden. Um dasselbe für Functionen thun zu können, sondern wir die Buchstaben ‚f', ‚g', ‚h', ‚F', ‚G', ‚H' und die entsprechenden deutschen als Functionsbuchstaben von den andern ab, die wir Gegenstandsbuchstaben nennen[1]), sodass sie nie wie diese Gegenstände, sondern nur Functionen andeuten sollen. Zu den Gegenstandsbuchstaben rechnen wir auch die kleinen griechischen

1) mit Ausnahme von ‚M', das einem besondern Zwecke vorbehalten bleibt.

Vokalbuchstaben, da sie ohne den Spiritus lenis nur an solchen Stellen vorkommen, wo auch Eigennamen stehen können. Auf einen Functionsbuchstaben folgt überall in seinem Gebiete eine **Klammer**, deren Innenraum eine Stelle oder zwei durch ein Komma getrennte Stellen enthält, jenachdem der Buchstabe eine Function mit einem oder mit zwei Argumenten andeuten soll. Eine solche Stelle dient zur Aufnahme des einfachen oder zusammengesetzten Zeichens, das ein Argument bedeutet oder andeutet oder, wie die kleinen griechischen Vokalbuchstaben, die Argumentstelle einnimmt. Es ist klar, dass ein Functionsbuchstabe in seinem Gebiete überall mit einer oder überall mit zwei Argumentstellen vorkommen muss. Das **Gebiet** umfasst bei den lateinischen Functionsbuchstaben Alles, was ausser dem Urtheilstriche im Satze vorhanden ist, bei den deutschen wird es begrenzt durch eine Höhlung mit dem alleinstehenden deutschen Buchstaben. Hierin stimmt der Gebrauch der Functionsbuchstaben ganz mit dem der Gegenstandsbuchstaben überein. Zunächst mag dies an Beispielen erläutert werden.

§ 20. $\smile^{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})$ ist nur dann das Wahre, wenn der Werth der zugehörigen Function $\Phi(\xi)$ für jedes Argument das Wahre ist. Dann muss also $\Phi(\Gamma)$ ebenfalls das Wahre sein. Daraus folgt, dass $\begin{array}{l} \Phi(\Gamma) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{a}) \end{array}$ immer das Wahre ist, was auch $\Phi(\xi)$ für eine Function mit einem Argumente sein mag. Hierbei ist die erste Regel des § 8 zu beachten, um die zugehörige Function $\Phi(\xi)$ zu erkennen. Schriebe man z. B. „$\begin{array}{l} \Psi(\Gamma, \smile^{\mathfrak{a}} X(\Gamma, \mathfrak{a})) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \Psi(\mathfrak{a}, \smile^{\mathfrak{a}} X(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})) \end{array}$“, so hätte man nur scheinbar im Ober- und Untergliede den Namen derselben Function; in Wahrheit wäre das Unterglied mit dem Functionsnamen „$\Psi(\xi, \smile^{\mathfrak{a}} X(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}))$“ und das Oberglied mit dem Functionsnamen „$\Psi(\xi, \smile^{\mathfrak{a}} X(\xi, \mathfrak{a}))$“ gebildet. Wir verstehen nun unter „$\smile^{\mathfrak{f}}\begin{array}{l} \mathfrak{f}(\Gamma) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \end{array}$“ den Wahrheitswerth davon, dass man stets einen Namen des Wahren erhalte, welchen Functionsnamen man auch an die Stelle von „$\mathfrak{f}$“ in „$\begin{array}{l} \mathfrak{f}(\Gamma) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \end{array}$“ einsetze. Dieser Wahrheitswerth ist das Wahre, was auch „Γ“ für einen Gegenstand bedeute: $\vdash\smile^{\mathfrak{f}}\begin{array}{l} \mathfrak{f}(a) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \end{array}$. Da hier die Höhlung mit dem „$\mathfrak{f}$“ vom Urtheilstriche nur durch einen Wagerechten getrennt ist, so können wir auch unter Wegfall der Höhlung statt des deutschen einen lateinischen Buchstaben schreiben:

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) \\ \smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a}) \end{array} \qquad \text{(IIa}$$

Man könnte dies Gesetz in Worten etwa so wiedergeben: Was von allen Gegenständen gilt, gilt auch von irgendeinem.

Nach § 7 hat die Function mit zwei Argumenten $\xi = \zeta$ als Werth immer einen Wahrheitswerth, und zwar das Wahre dann und nur dann, wenn das ζ-Argument mit dem ξ-Argumente zusammenfällt. Wenn $\Gamma = \Delta$ das Wahre ist, so ist auch

$\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{f}(\Gamma) \\ \quad\llcorner\, \mathfrak{f}(\varDelta) \end{array}$ das Wahre; d. h. wenn Γ dasselbe ist wie $\varDelta$, so fällt Γ unter jeden Begriff, unter den $\varDelta$ fällt, oder, wie man auch sagen kann, so gilt jede Aussage von Γ, die von $\varDelta$ gilt. Aber auch umgekehrt: wenn $\Gamma = \varDelta$ das Falsche ist, so gilt nicht jede Aussage von Γ, die von $\varDelta$ gilt; d. h. dann ist $\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{f}(\Gamma) \\ \quad\llcorner\, \mathfrak{f}(\varDelta) \end{array}$ das Falsche. Es fällt z. B. Γ nicht unter den Begriff $\xi = \varDelta$, unter den $\varDelta$ fällt. Es ist also $\Gamma = \varDelta$ immer derselbe Wahrheitswerth wie $\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{f}(\Gamma) \\ \quad\llcorner\, \mathfrak{f}(\varDelta) \end{array}$. Folglich fällt $\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{f}(\Gamma) \\ \quad\llcorner\, \mathfrak{f}(\varDelta) \end{array}$ unter jeden Begriff, unter den $\Gamma = \varDelta$ fällt; also

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, g\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{f}(a) \\ \quad\llcorner\, \mathfrak{f}(b) \end{array}\right) \\ \quad\llcorner\, g(a = b) \end{array} \qquad \text{(III}$$

Wir sahen (§ 3, § 9), dass eine Werthverlaufsgleichheit immer in eine Allgemeinheit einer Gleichheit umsetzbar ist und umgekehrt:

$$\vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \qquad \text{(V}$$

Hierbei sind die ersten Regeln der §§ 8 und 9 zu beachten.

§ 21. Um nun den Gebrauch der Functionsbuchstaben allgemein erklären zu können, bedürfen wir noch einer Benennung, die jetzt erklärt werden soll.

Betrachten wir die Namen

$$\text{,}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 4\text{'} \qquad \text{,}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a} > 0\text{'}$$

$$\text{,}\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 1 \\ \qquad\llcorner\, \mathfrak{a} > 0 \end{array}\text{'}$$

so erkennen wir leicht, dass wir sie aus ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \Phi(\mathfrak{a})$'[1]) erhalten, indem wir den Functionsnamen ‚$\Phi(\xi)$' der Reihe nach ersetzen durch die Namen der Functionen $\xi^2 = 4$, $\xi > 0$, $\begin{array}{l} \top\!\top\, \xi^2 = 1 \\ \llcorner\, \xi > 0 \end{array}$. Es ist klar, dass nur Namen von Functionen mit einem Argumente, nicht Eigennamen oder Namen von Functionen mit zwei Argumenten eingesetzt werden können; denn die einzusetzende Zeichenverbindung muss immer offene Argumentstellen haben zur Aufnahme des Buchstaben ‚$\mathfrak{a}$'[2]), und wenn wir einen Namen einer Function mit zwei Argumenten einsetzen wollten, so würden die ζ-Argumentstellen etwa unausgefüllt bleiben. Um z. B. den Namen der Function $\Psi(\xi, \zeta)$ einzusetzen, möchte man vielleicht schreiben ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \Psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$'; aber dann hätte man in Wahrheit nicht den Namen der Function $\Psi(\xi, \zeta)$ eingesetzt, sondern den der Function mit einem Argumente $\Psi(\xi, \xi)$ (1. Regel des § 8). Wollte man schreiben ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \Psi(\mathfrak{a}, 2)$', so würde man auch nur den Namen einer Function mit einem Argumente, $\Psi(\xi, 2)$ einsetzen. Man könnte etwa das ‚ζ' stehen lassen: ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \Psi(\mathfrak{a}, \zeta)$' und hätte hier eine Function, deren Argument durch ‚ζ' angedeutet wäre. Wir fassen dies in der Betrachtung zusammen mit dem Falle, wo das Argumentzeichen in ‚$X(\xi)$' ersetzt wird durch ‚$\Phi(\xi)$': ‚$X(\Phi(\xi))$'. Man spricht hier gewöhnlich von einer

1) Vergl. § 13.

2) Dass Functionen, wie $\xi = \xi$ oder $\xi^2 - \xi \cdot \xi$, die für jedes Argument denselben Werth haben — man könnte sie Constante nennen —, doch von diesem Werthe (Gegenstande) selbst zu unterscheiden sind, habe ich in meinem Vortrage über Function und Begriff (S. 8) gezeigt.

Function von einer Function, aber ungenau; denn, wenn wir uns daran erinnern, dass Functionen von den Gegenständen grundverschieden sind, und dass der Werth einer Function für ein Argument von dieser selbst zu unterscheiden ist, so erkennen wir, dass ein Functionsname niemals die Stelle eines Eigennamens einnehmen kann, weil er leere Stellen entsprechend der Ungesättigtheit der Function mit sich führt. Wenn wir sagen ‚die Function $\Phi(\xi)$', so dürfen wir nie vergessen, dass ‚ξ' nur in der Weise zum Functionsnamen gehört, dass es die Ungesättigtheit erkennbar macht. Als Argument der Function $X(\xi)$ kann also niemals selbst wieder eine Function auftreten, wohl aber der Werth einer Function für ein Argument, etwa $\Phi(2)$, wobei dann der Werth ist $X(\Phi(2))$. Wenn wir ‚$X(\Phi(\xi))$' schreiben, so deuten wir durch ‚$\Phi(\xi)$' das Argument nur an, wie wir es in ‚$X(\xi)$' durch ‚ξ' andeuten. Der Functionsname ist eigentlich nur ein Theil von ‚$\Phi(\xi)$', sodass die Function hier nicht als Argument von $X(\xi)$ auftritt, weil der Functionsname nur einen Theil der Argumentstelle ausfüllt. So kann man auch nicht sagen, dass in ‚$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Psi(\mathfrak{a}, \zeta)$' der Functionsname ‚$\Psi(\xi, \zeta)$' die Stelle des Functionsnamens ‚$\Phi(\xi)$' in ‚$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a})$' einnehme; denn er füllt nur einen Theil davon aus, während ein anderer Theil, nämlich die Stelle des ‚ζ', noch für einen Eigennamen offen ist. *Functionen mit zwei Argumenten* sind von *Functionen mit einem Argumente* ebenso grundverschieden wie diese von den *Gegenständen*. Denn während diese ganz *gesättigt* sind, sind die Functionen mit zwei Argumenten weniger gesättigt, als die mit einem Argumente, die auch schon *ungesättigt* sind.

Wir haben also in ‚$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a})$' einen Ausdruck, in dem wir den Namen der Function $\Phi(\xi)$ durch Namen von Functionen mit einem Argumente ersetzen können, aber weder durch solche von Gegenständen, noch durch solche von Functionen mit zwei Argumenten. Dies veranlasst uns, $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}^2 = 4$, $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a} > 0$, $\begin{array}{l}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 1\\ \qquad\;\llcorner\, \mathfrak{a} > 0\end{array}$ als Werthe derselben Function $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\varphi(\mathfrak{a})$ für verschiedene *Argumente* aufzufassen. Diese Argumente sind hier aber selbst wieder Functionen, nämlich die Functionen mit einem Argumente $\xi^2 = 4$, $\xi > 0$, $\begin{array}{l}\top\, \xi^2 = 1\\ \llcorner\, \xi > 0\end{array}$; und nur Functionen eines Arguments können Argumente unserer Function $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\varphi(\mathfrak{a})$ sein. Wenn wir sagen ‚die Function $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\varphi(\mathfrak{a})$', so vertritt ‚$\varphi$' ebenso das Argumentzeichen, wie ‚ξ' in dem Ausdrucke ‚die Function $\xi^2 = 4$' einen Eigennamen vertritt, der als Argumentzeichen erscheinen könnte. Ebensowenig wie ‚ξ' im letzten Falle gehört ‚φ' in unserm mit zur Function. Wir nennen nun die Functionen, deren Argumente Gegenstände sind, *Functionen erster Stufe*; die Functionen dagegen, deren Argumente Functionen erster Stufe sind, mögen *Functionen zweiter Stufe* heissen. Der Werth unserer Function $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\varphi(\mathfrak{a})$ ist immer ein Wahrheitswerth, welche Function erster Stufe wir auch als Argument nehmen mögen. In Uebereinstimmung mit dem Frühern werden wir sie demnach Begriff nennen, und zwar **Begriff zweiter Stufe** zum Unterschiede von den **Begriffen erster Stufe**, die Functionen erster Stufe sind.

Unsere Function $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$ hatte für die vorhin genommenen Argumente als Werth das Wahre. Nehmen wir nun als Argument die Function $\begin{array}{l}\xi^3=-1,\\ \xi>0\end{array}$ so erhalten wir in $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\begin{array}{l}\mathfrak{a}^3=-1\\ \mathfrak{a}>0\end{array}$ das Falsche, weil es keine positive Cubikwurzel aus -1 giebt. Ebenso ist der Werth unserer Function für das Argument $\xi+3$ das Falsche; denn wir können $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a}+3$ immer ersetzen durch $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(-\mathfrak{a}+3)$, und dies ist das Falsche, weil der Werth der Function $-\xi+3$ immer das Falsche ist, wenn wir nämlich das Pluszeichen so erklärt voraussetzen, dass für kein Argument der Werth der Function $\xi+3$ das Wahre ist.

§ 22. Eine andere Function zweiter Stufe haben wir in

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{a}=\mathfrak{e}\\ \varphi(\mathfrak{e})\\ \varphi(\mathfrak{a})\end{array}$$

wo ‚φ' wieder das Zeichen des Arguments vertritt. Ihr Werth ist das Wahre für jeden Begriff erster Stufe als Argument, unter den nicht mehr als ein einziger Gegenstand fällt. Demnach

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{a}=\mathfrak{e}\\ \mathfrak{e}+1=3\\ \mathfrak{a}+1=3\end{array}\qquad\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{a}=\mathfrak{e}\\ \mathfrak{e}=\mathfrak{e}\\ \mathfrak{a}=\mathfrak{a}\end{array}$$

Dagegen:

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{a}=\mathfrak{e}\\ \mathfrak{e}^2=1\\ \mathfrak{a}^2=1\end{array}$$

Eine Function zweiter Stufe haben wir auch in $\varphi(2)$. Die Werthe dieser Function sind theils Wahrheitswerthe, wie z. B. für die Argumente $\xi+\xi=\xi.\xi$, $\xi+1=4$, denen die Werthe $2+2=2.2$ und $2+1=4$ entsprechen, theils andere Gegenstände, wie z. B. die Zahl 3 für das Argument $\xi+1$. Diese Function zweiter Stufe ist von der blossen Zahl 2 verschieden, da sie wie alle Functionen ungesättigt ist.

Die Function zweiter Stufe $-\varphi(2)$ unterscheidet sich von der vorigen dadurch, dass ihr Werth immer ein Wahrheitswerth ist. Sie ist also ein Begriff zweiter Stufe, den wir Eigenschaft der Zahl 2 nennen können; denn jeder Begriff, unter den die Zahl 2 fällt, fällt unter diesen Begriff zweiter Stufe, und alle andern Functionen erster Stufe mit einem Argumente fallen nicht unter diesen Begriff zweiter Stufe [1]).

Auch in

$$\begin{array}{l}\varphi(2)\\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{a}=2\\ \varphi(\mathfrak{a})\end{array}\end{array}$$

haben wir einen Begriff zweiter Stufe, den wir nennen könnten: Eigenschaft der Zahl 2, welche dieser ausschliesslich zukommt.

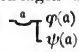
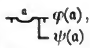
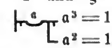
Ein Begriff zweiter Stufe ist auch $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$. Eine Function zweiter Stufe, die kein Begriff ist, haben wir in $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$.

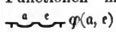
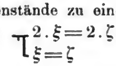
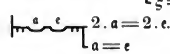
Um ein Beispiel aus der Analysis

1) Vergl. Anm. S. 8.

zu haben, betrachten wir den Differentialquotienten einer Function. Wir sehen diese als Argument an. Nehmen wir eine bestimmte Function, z. B. ξ^2 als Argument, so erhalten wir zunächst wieder eine Function erster Stufe $2.\xi$, und erst, wenn wir als Argument dieser einen Gegenstand, z. B. die Zahl 3 nehmen, erhalten wir als Werth einen Gegenstand: die Zahl 6. Der Differentialquotient ist demnach als Function mit zwei Argumenten anzusehn, von denen das eine eine Function erster Stufe mit einem Argumente, das andere ein Gegenstand sein muss. Wir können ihn deshalb ungleichstufige Function mit zwei Argumenten nennen. Aus dieser erhalten wir eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente; indem wir sie mit einem Gegenstandsargumente — z. B. der Zahl 3 — sättigen; d. h. indem wir bestimmen, dass der Differentialquotient für das Argument 3 gebildet werden solle [1]).

Eine ungleichstufige Function mit zwei Argumenten haben wir auch in $— \varphi(\xi)$, wo ‚ξ' die Stelle des Gegenstandsarguments und ‚$\varphi(\ )$' die des Functionsarguments einnimmt und kenntlich macht. Da der Werth dieser Function stets ein Wahrheitswerth ist, können wir sie ungleichstufige Beziehung nennen. Es ist die Beziehung eines Gegenstandes zu einem Begriffe, unter den er fällt.

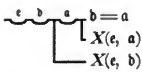
Gleichstufige Beziehungen zweiter Stufe haben wir in  und , wo ‚φ' und ‚ψ' die Argumentstellen kenntlich machen. In der letzten Beziehung stehen z. B. die Begriffe $\xi^3 = 1$ und $\xi^2 = 1$; denn wir haben  in Worten: mindestens eine Quadratwurzel aus 1 ist auch Cubikwurzel aus 1.

§ 23. In den bisher gegebenen Beispielen hatten wir als Argumente Functionen mit einem Argumente;  ist ein Begriff zweiter Stufe, dessen Argument eine Function mit zwei Argumenten sein muss. Unter diesen Begriff fallen alle Beziehungen, für welche es Gegenstände giebt, die in ihr stehn. Man kann nämlich auch Beziehungen angeben — man könnte sie leere nennen —, in denen keine Gegenstände zu einander stehen, z. B.  denn 

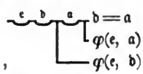
Um noch ein Beispiel für diesen Fall zu haben, suchen wir die Eindeutigkeit einer Beziehung auszudrücken. Darunter verstehen wir, dass es für jedes ξ-Argument nicht mehr als ein ζ-Argument gebe der Art, dass der Werth unserer Function (Beziehung) $X(\xi, \zeta)$ das Wahre wird. Wir können auch sagen: wenn daraus, dass a zu b in dieser Beziehung steht und dass a zu c in

1) Es muss hierbei wie bei allen der Arithmetik entnommenen Beispielen vorausgesetzt werden, dass die Zeichen der Addition, Multiplication u. s. w. sowie das des Differentialquotienten so definirt seien, dass ein aus ihnen und Eigennamen rechtmässig gebildeter Name immer eine Bedeutung habe, was freilich die üblichen Definitionen nicht leisten, weil dabei immer nur auf Zahlen Bedacht genommen wird, meistens ohne dass gesagt würde, was Zahl sei.

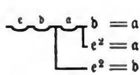
dieser Beziehung steht, allgemein folgt, dass b mit c zusammenfalle, so sagen wir, diese Beziehung sei eindeutig. Oder: wenn daraus, dass $X(a, b)$ das Wahre ist und dass $X(a, c)$ das Wahre ist, allgemein folgt, dass $c = b$ das Wahre ist, so nennen wir die Function $X(\xi, \zeta)$ eine eindeutige Beziehung, sofern sie eine Beziehung ist.



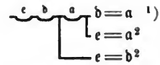
muss das Wahre sein, wenn die Beziehung $—X(\xi, \zeta)$ eindeutig sein soll. Setzen wir für ‚X' das Argumentstellen kenntlich machende ‚φ', so erhalten wir in



den Namen einer Function zweiter Stufe, die als Argument eine Function mit zwei Argumenten verlangt. Diese Function zweiter Stufe ist ein Begriff zweiter Stufe, unter den alle eindeutigen Beziehungen, aber auch solche Functionen $X(\xi, \zeta)$ fallen, für welche $—X(\xi, \zeta)$ eine eindeutige Beziehung ist. Die Eindeutigkeit ist hier immer in der Richtung vom ξ- zum ζ-Argumente gemeint. Nehmen wir als Argument unserer Function zweiter Stufe die Function $\xi^2 = \zeta$, so erhalten wir als Functionswerth



d. i. das Wahre, während das Falsche als Functionswerth erscheint, wenn wir als Argument die Function $\xi = \zeta^2$ nehmen:



Wir erkennen aus diesen Beispielen die grosse Mannichfaltigkeit der Functionen. Wir sehen auch, dass es grundverschiedene Functionen giebt, da die Argumentstellen grundverschieden sind. Diejenigen nämlich, welche zur Aufnahme von Eigennamen geeignet sind, können keine Namen von Functionen aufnehmen und umgekehrt. Die Argumentstellen ferner, welche Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente aufnehmen können, sind unfähig, solche von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten aufzunehmen. Wir unterscheiden demnach:

Argumente erster Art: Gegenstände;

Argumente zweiter Art: Functionen erster Stufe mit einem Argumente;

Argumente dritter Art: Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten.

Ebenso unterscheiden wir:

Argumentstellen erster Art, die zur Aufnahme von Eigennamen geeignet sind;

Argumentstellen zweiter Art, die zur Aufnahme von Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente geeignet sind;

Argumentstellen dritter Art, die zur Aufnahme von Namen

1) bei geeigneter Definition von ξ^2 für Argumente, welche nicht Zahlen sind.

von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten geeignet sind.

Eigennamen und Gegenstandsbuchstaben sind passend für die Argumentstellen erster Art; Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente sind passend für die Argumentstellen zweiter Art; Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten sind passend für die Argumentstellen dritter Art. Die Gegenstände und Functionen, deren Namen passend sind für die Argumentstellen des Namens einer Function, sind passende Argumente für diese Function. Functionen mit einem Argumente, für welche Argumente zweiter Art passend sind, nennen wir Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art; Functionen mit einem Argumente, für welche Argumente dritter Art passend sind, nennen wir Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente dritter Art.

Wie wir in $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ den Werth der Function zweiter Stufe $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$ für das Argument $\xi = \xi$ haben, so können wir $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\begin{array}{l}\mathfrak{f}(1+1)\\ \mathfrak{f}(2)\end{array}$ als Werth einer Function dritter Stufe ansehn für das Argument $\begin{array}{l}\varphi(1+1),\\ \varphi(2)\end{array}$ das selbst eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art ist.

§ 24. Es ist nun möglich, den Gebrauch der Functionsbuchstaben allgemein zu erklären.

Wenn auf eine Höhlung mit einem deutschen Functionsbuchstaben eine Zeichenverbindung folgt, zusammengesetzt aus dem Namen einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente und diesem Functionsbuchstaben, der die Argumentstellen ausfüllt, so bedeutet dies Ganze das Wahre, wenn der Werth jener Function zweiter Stufe für jedes passende Argument das Wahre ist; in allen andern Fällen bedeutet es das Falsche. Welche Stellen Argumentstellen der zugehörigen Function zweiter Stufe sind, ist nach der ersten Regel des § 8 zu beurtheilen. Auch die zweite Regel des § 8 hat für Functionsbuchstaben ebenso Geltung wie für Gegenstandsbuchstaben.

Wir haben hiermit zwei Functionen dritter Stufe eingeführt, deren Namen so

$$‚\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))‘ \text{ und } ‚\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta, \gamma))‘$$

aussehn mögen, indem wir mit ‚μ_{β}‘ und ‚$\mu_{\beta\gamma}$‘ die Argumentstelle hier ebenso kenntlich machen, wie wir die Argumentstellen zweiter und dritter Art mit ‚φ‘ und ‚ψ‘ und die erster Art mit ‚ξ‘ und ‚ζ‘ kenntlich machen. ‚μ_{β}‘ und ‚$\mu_{\beta\gamma}$‘ sollen übrigens ebenso wenig wie jene Buchstaben Zeichen der Begriffsschrift sein, sondern uns nur vorläufig dienen. Nehmen wir als Argumente für die erste dieser Functionen der Reihe nach die Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$, $\varphi(2)$, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!\begin{array}{l}\mathfrak{a} = \mathfrak{e},\\ \varphi(\mathfrak{e})\\ \varphi(\mathfrak{a})\end{array}$ so erhalten wir als Werthe $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$, $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mathfrak{f}(2)$, $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!\begin{array}{l}\mathfrak{a} = \mathfrak{e}.\\ \mathfrak{f}(\mathfrak{e})\\ \mathfrak{f}(\mathfrak{a})\end{array}$

§ 25. Wir bedürfen noch einer Ausdrucksweise für die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art. Man könnte meinen, dass dies noch längst nicht genügte; aber wir werden sehen, dass wir mit dieser auskommen, und dass auch sie nur in einem einzigen Satze vorkommt. Es mag hier zunächst nur kurz bemerkt werden, dass diese Sparsamkeit dadurch möglich wird, dass die Functionen zweiter Stufe in gewisser Weise durch Functionen erster Stufe vertreten werden können, wobei die Functionen, die als Argumente jener erscheinen, durch ihre Werthverläufe vertreten werden. Doch die dazu nöthige Bezeichnungsweise gehört nicht zu den ursprünglichen der Begriffsschrift; wir werden sie später mittels unserer Urbezeichungen einführen. Da unsere Ausdrucksweise nur in einem einzigen Satze gebraucht wird, ist es unnöthig, sie ganz allgemein zu erklären.

Wir deuten eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art so an:

$$,M_\beta(\varphi(\beta))`$$

mittels des lateinischen Functionsbuchstaben ‚M'[1]), wie wir mit ‚$f(\xi)$' eine Function erster Stufe mit einem Argumente andeuten. ‚$\varphi(\;)$' macht hier die Argumentstelle kenntlich, wie ‚ξ' es in ‚$f(\xi)$' thut. Der Buchstabe ‚β' füllt hier in der Klammer die Stelle des Arguments der als Argument auftretenden Function aus. Der Gebrauch von ‚$M_\beta(\varphi(\beta))$' ist für Functionen zweiter Stufe ganz entsprechend dem von ‚$f(\xi)$' für Functionen erster Stufe. Wir bedienen uns dieses Allgemeinheitsausdrucks in folgendem Gesetze

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, M_\beta(f(\beta)) \\ \;\;\llcorner\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \end{array} \qquad \text{(II b}$$

in Worten: Was von allen Functionen erster Stufe mit einem Argumente gilt, das gilt auch von irgendeiner. Dies Gesetz ist offenbar das für unsere Functionen zweiter Stufe, was (II a) für Functionen erster Stufe ist. Dem Buchstaben ‚f' in (II a) entspricht hier ‚M_β', dem ‚a' in (II a) entspricht hier ‚f' und dem ‚$\mathfrak{a}$' ‚$\mathfrak{f}$'. Es sei $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art, dessen Stelle durch ‚φ' kenntlich gemacht ist. Dann ist $-\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\, \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ nur dann das Wahre, wenn für jedes passende Argument der Werth unserer Function zweiter Stufe das Wahre ist. Dann muss auch $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ das Wahre sein. Mithin ist

$$\begin{array}{l} \top\!\!-\!\!-\, \Omega_\beta(\Phi(\beta)) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \end{array}$$

immer das Wahre, was auch $\Phi(\xi)$ für eine Function erster Stufe mit einem Argumente sein möge, einerlei ob $-\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\, \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ das Wahre oder das Falsche ist; und das besagt unser Gesetz (II b) allgemein für jede Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art.

---

1) Dieser Buchstabe ist also kein Gegenstandsbuchstabe.

2. Definitionen.

Allgemeines.

§ 26. Es sollen nun die bisher erklärten Zeichen benutzt werden, um neue Namen einzuführen. Bevor ich jedoch auf die Regeln eingehe, die dabei zu befolgen sind, wird es zur Verständigung dienlich sein, die Zeichen und Zeichenverbindungen in Arten einzutheilen und diese zu benennen [1]).

Die deutschen, lateinischen und griechischen Buchstaben will ich in der Begriffsschrift nicht *Namen* nennen, weil sie nichts bedeuten sollen. Dagegen nenne ich z. B. „$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$“ einen *Namen*, weil es das Wahre bedeutet; es ist ein *Eigenname*. Ich nenne also *Eigennamen* oder *Namen* eines Gegenstandes ein Zeichen, welches einen Gegenstand bedeuten soll, mag es einfach oder zusammengesetzt sein, aber nicht ein solches, welches einen Gegenstand nur andeutet.

Wenn wir von einem Eigennamen einen Eigennamen, der einen Theil von jenem bildet oder mit ihm zusammenfällt, an einigen oder allen Stellen, wo er vorkommt, ausschliessen, so jedoch, dass diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Eigennamen auszufüllen (als *Argumentstellen erster Art*) kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, *Namen* einer Function erster Stufe mit einem Argumente. Ein solcher Name bildet zusammen mit einem Eigennamen, der die Argumentstellen ausfüllt, einen Eigennamen. Demnach haben wir auch in „ξ“ selbst einen Functionsnamen, wenn der Buchstabe „ξ“ nur die Argumentstelle kenntlich machen soll. Die hierdurch benannte Function hat die Eigenschaft, dass ihr Werth für jedes Argument mit diesem zusammenfällt.

Wenn wir von einem Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente einen Eigennamen, der einen Theil von jenem bildet, an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschliessen, so jedoch, dass diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Eigennamen auszufüllen (als Argumentstellen erster Art) kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, *Namen* einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten.

Wenn wir von einem Eigennamen einen Namen einer Function erster Stufe, der einen Theil von jenem bildet, an allen oder einigen Stellen, wo er vorkommt, ausschliessen, so jedoch, dass diese Stellen als durch einen und denselben beliebigen Namen einer Function erster Stufe auszufüllen (als Argumentstellen zweiter oder dritter Art) kenntlich bleiben, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, *Namen* einer Function zweiter Stufe

1) Vergl. § 17.

mit einem Argumente, und zwar zweiter oder dritter Art, jenachdem die Argumentstellen zweiter oder dritter Art sind.

Namen von Functionen nenne ich kurz *Functionsnamen*.

Es ist nicht nöthig, diese Erklärungen von Namenarten weiter fortzusetzen.

Wenn wir in einem Eigennamen Eigennamen, die einen Theil von ihm bilden oder mit ihm zusammenfallen, durch Gegenstandsbuchstaben, Functionsnamen durch Functionsbuchstaben ersetzen, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, *Gegenstandsmarke* oder *Marke* eines Gegenstandes. Geschieht jene Ersetzung nur durch lateinische Buchstaben, so nenne ich die erhaltene Marke *lateinische Gegenstandsmarke*. Auch die Gegenstandsbuchstaben sind also Gegenstandsmarken und die lateinischen Gegenstandsbuchstaben sind lateinische Gegenstandsmarken.

Ein Zeichen (Eigennamen oder Gegenstandsmarke), das nur aus dem Functionsnamen ‚$\xi = \zeta$‘ und Eigennamen oder Gegenstandsmarken besteht, die an den beiden Argumentstellen stehen, nenne ich *Gleichung*.

Wenn wir in einem Functionsnamen Eigennamen durch Gegenstandsbuchstaben, Functionsnamen durch Functionsbuchstaben ersetzen, so nenne ich das, was wir dadurch erhalten, *Functionsmarke*, und zwar *Marke* einer Function derselben Art wie die, aus deren Namen sie hervorgegangen ist. Geschieht jene Ersetzung nur durch lateinische Buchstaben, so nenne ich die erhaltene Marke *lateinische* Marke einer Function. Auch die Functionsbuchstaben sind Functionsmarken und die lateinischen Functionsbuchstaben sind lateinische Functionsmarken.

Den Urtheilstrich rechne ich weder zu den *Namen* noch zu den *Marken*; er ist ein Zeichen eigner Art. Ein Zeichen, welches aus einem Urtheilstriche und einem mit einem Wagerechten angefügten Namen eines Wahrheitswerthes besteht, nenne ich *Begriffsschriftsatz* oder *Satz*, wo kein Zweifel sein kann. Ebenso nenne ich *Begriffsschriftsatz* (oder *Satz*) ein Zeichen, das aus einem Urtheilstriche und einer mit einem Wagerechten angeführten lateinischen Marke eines Wahrheitswerthes besteht.

Zeichen wie

‚(α):————‘, ‚(α, β)::= = = = = =‘, ‚(α)::- - - - - -‘ ‚$\times$‘,

die zwischen den Sätzen stehn, um anzudeuten, wie der folgende sich aus dem vorhergehenden ergiebt, nenne ich *Zwischenzeichen*.

§ 27. Um nun neue Zeichen mit den schon bekannten einzuführen, bedürfen wir des *Definitionsdoppelstriches*, der als verdoppelter Urtheilstrich mit einem Wagerechten verbunden in

‚$\Vdash$‘

erscheint und statt des Urtheilstriches gebraucht wird, wo nicht geurtheilt, sondern definirt werden soll. Wir führen durch eine *Definition* einen neuen Namen ein, indem wir bestimmen, dass er denselben Sinn und dieselbe Bedeutung haben solle wie ein aus bekannten Zeichen zusammengesetzter. Dadurch wird nun das neue Zeichen gleichbedeutend mit dem erklärenden; die Definition geht also sofort in einen Satz über. Wir dürfen daher eine Definition wie einen Satz anziehen und dabei den Definitionsstrich durch den Urtheilstrich ersetzen.

Eine Definition wird hier immer in der Form einer Gleichung mit davor gesetztem ‚$\Vdash$‘ dargestellt. Wir wollen immer auf die linke Seite des Gleichheitszeichens das erklärende, auf die rechte das erklärte Zeichen schreiben. Jenes wird aus bekannten Zeichen zusammengesetzt sein.

§ 28. Für die Definitionen stelle ich nun folgenden obersten Grundsatz auf:

Rechtmässig gebildete Namen müssen immer etwas bedeuten.

Rechtmässig gebildet nenne ich einen Namen, wenn er nur aus solchen Zeichen besteht, welche ursprünglich oder durch Definition eingeführt sind, und wenn diese Zeichen nur als das verwendet sind, als was sie eingeführt sind, also Eigennamen als Eigennamen, Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente als solche u. s. w., sodass die Argumentstellen immer durch passende Namen oder Marken ausgefüllt sind. Zur *rechtmässigen* Bildung gehört ferner, dass die deutschen und die kleinen griechischen Buchstaben immer nur so verwendet werden, wie es ihrem Zwecke gemäss ist. Ein deutscher Buchstabe darf also über einer Höhlung nur stehen, wenn auf diese Höhlung unmittelbar eine Marke eines Wahrheitswerthes folgt, zusammengesetzt aus dem Namen oder der Marke einer Function mit einem Argumente und demselben deutschen Buchstaben an den Argumentstellen. Ein Functionsbuchstabe muss in seinem Gebiete überall entweder mit einer oder mit zwei Argumentstellen vorkommen. Ein deutscher Buchstabe darf an einer Argumentstelle nur stehen, wenn eine Höhlung mit demselben Buchstaben links davor steht, die sein Gebiet abgrenzt. Ueber einer Höhlung darf nur ein deutscher Buchstabe stehen. Ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe darf unter dem Spiritus lenis nur dann stehen, wenn sich daran unmittelbar folgend eine Gegenstandsmarke schliesst, zusammengesetzt aus einem Namen oder einer Marke einer Function erster Stufe mit einem Argumente und aus demselben griechischen Buchstaben, der die Argumentstellen ausfüllt. Ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe darf an einer Argumentstelle nur stehen, wenn derselbe mit dem Spiritus lenis sein Gebiet abgrenzend vorhergeht. Mit dem Spiritus lenis darf nur ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe vorkommen.

§ 29. Wir beantworten nun die Frage: wann bedeutet ein Name etwas? und beschränken uns auf folgende Fälle.

Ein Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente hat dann eine Bedeutung (bedeutet etwas, ist bedeutungsvoll), wenn der Eigenname, der aus diesem Functionsnamen dadurch entsteht, dass die Argumentstellen mit einem Eigennamen ausgefüllt werden, immer dann eine Bedeutung hat, wenn dieser eingesetzte Name etwas bedeutet.

Ein Eigenname hat eine Bedeutung, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, dass jener die Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Function erster Stufe mit einem Argumente ausfüllt, und wenn der Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, dass der zu prüfende Eigenname die ξ-Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten ausfüllt, und wenn dasselbe auch für die ζ-Argumentstellen gilt.

Ein Name einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten hat dann eine Bedeutung, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der aus diesem Functionsnamen dadurch entsteht, dass die ξ-Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen und dass auch die ζ-Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen ausgefüllt werden.

Ein Name einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art hat eine Bedeutung, wenn allgemein daraus, dass der Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente etwas bedeute, folgt, dass der durch seine Einsetzung in die Argumentstellen unserer Function zweiter Stufe entstehende Eigenname eine Bedeutung habe.

Folglich bildet jeder Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente, welcher mit jedem bedeutungsvollen Eigennamen einen bedeutungsvollen Eigennamen bildet, auch mit jedem bedeutungsvollen Namen einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art einen bedeutungsvollen Namen.

Der Name ‚$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$' einer Function dritter Stufe ist bedeutungsvoll, wenn allgemein daraus, dass ein Name einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art etwas bedeute, folgt, dass auch der durch dessen Einsetzung in die Argumentstelle von ‚$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$' entstehende Eigenname eine Bedeutung habe.

§ 30. Diese Sätze sind nicht als Erklärungen der Worte ‚eine Bedeutung haben' oder ‚etwas bedeuten' aufzufassen, weil ihre Anwendung immer voraussetzt, dass man einige Namen schon als bedeutungsvolle erkannt habe; sie können aber dazu dienen, den Kreis solcher Namen allmählich zu erweitern. Es folgt aus ihnen, dass jeder aus bedeutungsvollen Namen gebildete Name etwas bedeutet. Diese Bildung geschieht so, dass ein Name Argumentstellen eines andern ausfüllt, die für ihn passend sind. So entsteht ein Eigenname aus einem Eigennamen und einem Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente oder aus einem Namen einer Function erster Stufe und einem Namen einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente oder aus dem Namen einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art und dem Namen „$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\,\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$" einer Function dritter Stufe. So entsteht der Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente aus einem Eigennamen und einem Namen einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten. Die so gebildeten Namen können in derselben Weise weiter zur Bildung von Namen verwendet werden, und alle so entstehenden Namen sind bedeutungsvoll, wenn die ursprünglichen einfachen es sind.

Ein Eigenname kann nur dadurch bei dieser Bildung zur Verwendung kommen, dass er die Argumentstellen einer der einfachen oder zusammengesetzten Functionen erster Stufe ausfüllt. Zusammengesetzte Namen von Functionen erster Stufe entstehen in der angegebenen Weise nur aus einfachen Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten dadurch, dass ein Eigenname die ξ- oder die ζ-Argumentstellen ausfüllt. Die übrigbleibenden Argumentstellen des zusammengesetzten Functionsnamens sind also immer auch solche eines einfachen Namens einer Function mit zwei Argumenten. Daraus folgt, dass ein Eigenname, welcher Theil eines so gebildeten Namens ist, wo er auch vorkommt, immer an einer Argumentstelle eines der einfachen Namen von Functionen erster Stufe steht. Wenn wir nun diesen Eigennamen an einigen oder allen Stellen durch einen andern ersetzen, so ist der so entstandene Eigenname ebenfalls in der oben angegebenen Weise gebildet, hat also auch eine Bedeutung, wenn alle dabei verwendeten einfachen Namen bedeutungsvoll sind. Vorausgesetzt ist hierbei freilich, dass die einfachen Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente nur eine Argumentstelle haben, und dass die einfachen Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten nur eine ξ- und eine ζ-Argumentstelle haben. Wenn dies nicht der Fall wäre, so könnte es ja bei der angegebenen Ersetzung vorkommen, dass verwandte Argumentstellen einfacher Functionsnamen mit verschiedenen Namen ausgefüllt würden, und es fehlte für diesen Fall eine Erklärung der Bedeutung. Aber das kann immer vermieden werden und muss vermieden werden, um das Auftreten bedeutungsloser Namen zu verhindern. Es hätte ja auch gar keinen Zweck, bei den einfachen Functionsnamen mehre ξ-Argumentstellen und mehre ζ-Argumentstellen anzubringen. Setzen wir dies voraus, so erkennen wir die Möglichkeit einer zweiten Bildung von Namen von Functionen erster Stufe. Wir bilden nämlich zunächst in der ersten Weise einen Namen und schliessen dann von ihm einen Eigennamen, der ein Theil von ihm ist (oder ganz mit ihm zusammenfällt), an allen oder einigen Stellen aus, so jedoch, dass diese als Argumentstellen erster Art kenntlich bleiben. Der so entstehende Functionsname hat ebenfalls immer eine Bedeutung, wenn die einfachen Namen, aus denen er gebildet ist, etwas bedeuten, und kann weiter zur Bildung von bedeutungsvollen Namen in der ersten oder zweiten Weise verwendet werden.

So können wir z. B. in der ersten Weise aus dem Eigennamen ‚Δ‘ und dem Functionsnamen ‚$\xi = \zeta$‘ den Functionsnamen ‚$\Delta = \zeta$‘ bilden und weiter aus diesem und ‚Δ‘ den Eigennamen ‚$\Delta = \Delta$‘. In der zweiten Weise bilden wir aus diesem den Functionsnamen ‚$\xi = \xi$‘ und aus diesem und dem Functionsnamen ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})$‘ in der ersten Weise den Eigennamen ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$‘.

Alle rechtmässig gebildeten Namen sind so gebildet.

§ 31. Wir wenden dies an, um zu zeigen, dass die Eigennamen und Namen von Functionen erster Stufe, die wir so aus unsern bisher eingeführten einfachen Namen bilden können, immer eine Bedeutung haben. Nach dem Gesagten ist dazu nur nöthig, von unsern ursprünglichen Namen nachzuweisen, dass sie etwas bedeuten. Es sind

1. Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente:

$$‚\!-\!\!-\, \xi‘ \quad ‚\!\top\, \xi‘, \quad ‚\backslash\xi‘;$$

2. Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten:

$$‚\begin{array}{l}\top\, \xi \\ \llcorner\, \zeta\end{array}‘, \quad ‚\xi = \zeta‘;$$

3. Namen von Functionen zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art:

$$‚\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})‘, \quad ‚\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)‘;$$

4. Namen von Functionen dritter Stufe:

$$‚\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))‘, \quad ‚\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{f}(\beta, \gamma))‘,$$

von denen der letzte ausser Betracht bleiben mag, weil er nicht gebraucht werden wird.

Zunächst sei bemerkt, dass immer nur eine ξ- und nur eine ζ-Argumentstelle vorkommt. Wir gehen davon aus, dass die Namen von Wahrheitswerthen etwas bedeuten, nämlich entweder das Wahre oder das Falsche. Wir erweitern dann allmählich den Kreis der als bedeutungsvoll anzuerkennenden Namen, indem wir nachweisen, dass die aufzunehmenden mit den schon aufgenommenen bedeutungsvolle Namen bilden, indem die einen an passende Argumentstellen der andern treten.

Um nun zunächst zu zeigen, dass die Functionsnamen ‚$-\!\!-\, \xi$‘ und ‚$\top\, \xi$‘ etwas bedeuten, haben wir nur nachzuweisen, dass die Namen bedeutungsvoll sind, die entstehen, wenn wir für ‚ξ‘ einen Namen eines Wahrheitswerthes setzen (andere Gegenstände kennen wir hier noch nicht). Dies folgt unmittelbar aus unsern Erklärungen. Die erhaltenen Namen sind wieder solche der Wahrheitswerthe.

Wenn wir in den Functionsnamen ‚$\begin{array}{l}\top\, \xi \\ \llcorner\, \zeta\end{array}$‘ und ‚$\xi = \zeta$‘ für ‚$\xi$‘ und für ‚$\zeta$‘ Namen von Wahrheitswerthen einsetzen, so erhalten wir Namen, die Wahrheitswerthe bedeuten. Folglich haben unsere Namen von Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten Bedeutungen.

Um zu untersuchen, ob der Name einer Function zweiter Stufe ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' etwas bedeute, fragen wir, ob allgemein daraus, dass der Functionsname ‚$\Phi(\xi)$' etwas bedeute, folge, dass ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$' bedeutungsvoll sei. Nun hat ‚$\Phi(\xi)$' eine Bedeutung, wenn für jeden bedeutungsvollen Eigennamen ‚$\varDelta$' ‚$\Phi(\varDelta)$' etwas bedeutet. Ist dies der Fall, so ist diese Bedeutung entweder immer (was auch ‚$\varDelta$' bedeute) das Wahre oder nicht immer. Im ersten Falle bedeutet ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$' das Wahre, im andern das Falsche. Es folgt also allgemein daraus, dass der eingesetzte Functionsname ‚$\Phi(\xi)$' etwas bedeute, dass ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Phi(\mathfrak{a})$' etwas bedeute. Folglich ist der Functionsname ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\varphi(\mathfrak{a})$' in den Kreis der bedeutungsvollen Namen aufzunehmen. In ähnlicher Weise folgt dies für ‚$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$'.

Weniger einfach ist die Sache bei ‚$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$'; denn wir führen hiermit nicht blos einen neuen Functionsnamen, sondern zugleich zu jedem Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente einen neuen Eigennamen (Werthverlaufsnamen) ein, und zwar nicht nur zu den schon bekannten, sondern im voraus zu allen, die etwa noch eingeführt werden mögen. Der Untersuchung, ob ein Werthverlaufsname etwas bedeute, brauchen wir nur solche zu unterwerfen, welche aus bedeutungsvollen Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente gebildet sind. Wir wollen dies kurz r e c h t e Werthverlaufsnamen nennen. Wir müssen prüfen, ob ein rechter Werthverlaufsname, an die Argumentstellen von ‚$—\xi$' und ‚$\top\xi$' gesetzt, einen bedeutungsvollen Eigennamen ergebe, und ferner, ob er, an die ξ- oder an die ζ-Argumentstellen von ‚$\begin{array}{l}\top\xi\\ \llcorner\zeta\end{array}$' und ‚$\xi = \zeta$' gesetzt, je einen bedeutungsvollen Namen einer Function erster Stufe mit einem Argumente bilde. Setzen wir den Werthverlaufsnamen ‚$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' für ‚$\zeta$' in ‚$\xi = \zeta$' ein, so ist also die Frage, ob ‚$\xi = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' ein bedeutungsvoller Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente sei, und dazu ist wieder zu fragen, ob alle Eigennamen etwas bedeuten, die hieraus dadurch hervorgehen, dass wir in die Argumentstelle entweder einen Namen eines Wahrheitswerthes oder einen rechten Werthverlaufsnamen setzen. Durch unsere Festsetzungen, dass ‚$\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' immer gleichbedeutend sein solle mit ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\Psi(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})$', dass ‚$\grave{\varepsilon}(—\varepsilon)$' das Wahre und dass ‚$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' das Falsche bedeuten solle, ist in jedem Falle einem Eigennamen von der Form ‚$\Gamma = \varDelta$' eine Bedeutung gesichert, wenn ‚Γ' und ‚$\varDelta$' rechte Werthverlaufsnamen oder Namen von Wahrheitswerthen sind. Damit ist auch bekannt, dass wir aus dem Functionsnamen ‚$\xi = (\xi = \xi)$' immer einen bedeutungsvollen Eigennamen erhalten, wenn wir in die Argumentstellen einen rechten Werthverlaufsnamen setzen. Da nun gemäss unsern Bestimmungen die Function $—\xi$ für dasselbe Argument immer denselben Werth hat wie die Function $\xi = (\xi = \xi)$, so ist auch von dem Functionsnamen ‚$—\xi$' bekannt, dass aus ihm durch Einsetzung eines rechten Werthverlaufsnamens immer ein Eigenname eines Wahrheitswerthes hervorgeht.

Nach unsern Bestimmungen haben die Namen ‚$\top\!\Delta$‘ und ‚$\begin{array}{l}\top\Gamma\\ \llcorner\Delta\end{array}$‘ immer dann Bedeutungen, wenn die Namen ‚$—\Delta$‘ und ‚$—\Gamma$‘ etwas bedeuten. Da dies nun der Fall ist, wenn ‚Γ‘ und ‚Δ‘ rechte Werthverlaufsnamen sind, so erhalten wir aus den Functionsnamen ‚$\top\!\xi$‘ und ‚$\begin{array}{l}\top\xi\\ \llcorner\zeta\end{array}$‘ immer dadurch bedeutungsvolle Eigennamen, dass wir in die Argumentstellen rechte Werthverlaufsnamen oder Namen von Wahrheitswerthen setzen. Wir haben gesehen, dass jeder unserer bisher als bedeutungsvoll anerkannten einfachen Namen von Functionen erster Stufe ‚$—\xi$‘, ‚$\top\!\xi$‘, ‚$\begin{array}{l}\top\xi\\ \llcorner\zeta\end{array}$‘, ‚$\xi = \zeta$‘ durch Aufnahme von rechten Werthverlaufsnamen an die Argumentstellen bedeutungsvolle Namen liefert. Die rechten Werthverlaufsnamen dürfen also in unsern Kreis von bedeutungsvollen Namen aufgenommen werden. Damit ist aber dasselbe für unsern Functionsnamen ‚$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$‘ entschieden, da nun allgemein daraus, dass ein Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente etwas bedeute, folgt, dass der durch dessen Einsetzung in ‚$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$‘ entstehende Eigenname etwas bedeute.

Es fehlt von unsern ursprünglichen Namen jetzt nur noch ‚$\backslash\xi$‘. Wir haben nun bestimmt, dass ‚$\backslash\Delta$‘ Γ bedeuten soll, wenn ‚Δ‘ ein Name des Werthverlaufs $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \Gamma)$ ist, dass dagegen ‚$\backslash\Delta$‘ Δ bedeuten soll, wenn es keinen Gegenstand Γ der Art giebt, dass ‚Δ‘ ein Name des Werthverlaufs $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \Gamma)$ ist. Hierdurch ist für alle Fälle einem Eigennamen von der Form ‚$\backslash\Delta$‘ und damit dem Functionsnamen ‚$\backslash\xi$‘ eine Bedeutung gesichert.

§ 32. So ist gezeigt, dass unsere acht ursprünglichen Namen eine Bedeutung haben, und damit, dass auch von allen rechtmässig aus ihnen zusammengesetzten Namen dasselbe gilt. Aber nicht nur eine Bedeutung, sondern auch ein Sinn kommt allen rechtmässig aus unsern Zeichen gebildeten Namen zu. Jeder solche Name eines Wahrheitswerthes drückt einen Sinn, einen Gedanken aus. Durch unsere Festsetzungen ist nämlich bestimmt, unter welchen Bedingungen er das Wahre bedeute. Der Sinn dieses Namens, der Gedanke ist der, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Ein Begriffsschriftsatz besteht nun aus dem Urtheilstriche und aus einem Namen oder einer lateinischen Marke eines Wahrheitswerthes. Eine solche Marke verwandelt sich aber in den Namen eines Wahrheitswerthes durch Einführung deutscher Buchstaben statt der lateinischen mit Vorsetzung von Höhlungen nach § 17. Denken wir dies ausgeführt, so haben wir nur den Fall, dass der Satz aus dem Urtheilstriche und einem Namen eines Wahrheitswerthes zusammengesetzt ist. Durch einen solchen Satz wird nun behauptet, dass dieser Name das Wahre bedeute. Da er nun zugleich einen Gedanken ausdrückt, so haben wir in jedem rechtmässig gebildeten Begriffsschriftsatze ein Urtheil, dass ein Gedanke wahr sei; und ein Gedanke kann nun gar nicht fehlen. Es wird die Aufgabe des Lesers sein, sich den Gedanken jedes vorkommenden Begriffsschriftsatzes klar zu machen, und ich werde mich bemühen, dies im Anfange möglichst zu erleichtern.

Die einfachen oder selbst schon zusammengesetzten Namen nun, aus denen der Name eines Wahrheitswerthes besteht, tragen dazu bei, den Gedanken auszudrücken, und dieser Beitrag des einzelnen ist sein S i n n. Wenn ein Name Theil des Namens eines Wahrheitswerthes ist, so ist der Sinn jenes Namens Theil des Gedankens, den dieser ausdrückt.

§ 33. Für die Definitionen sind folgende Grundsätze maassgebend.

1. Jeder aus den definirten Namen rechtmässig gebildete Name muss eine Bedeutung haben. Es muss sich also immer ein aus unsern acht Urnamen zusammengesetzter Name angeben lassen, der gleichbedeutend mit ihm ist, und dieser muss bis auf die unwesentliche Wahl deutscher und griechischer Buchstaben durch die Definitionen unzweideutig bestimmt sein.

2. Daraus folgt, dass nie dasselbe doppelt definirt werden darf, weil dann zweifelhaft bliebe, ob diese Definitionen im Einklange mit einander wären.

3. Der definirte Name muss einfach sein; d. h. er darf nicht aus bekannten oder noch zu erklärenden Namen zusammengesetzt sein; denn sonst bliebe zweifelhaft, ob die Erklärungen der Namen mit einander im Einklange wären.

4. Wenn wir in der Definitionsgleichung links einen Eigennamen haben, der aus unsern Urnamen oder definirten Namen rechtmässig gebildet ist, so hat dieser immer eine Bedeutung, und wir werden rechts ein einfaches noch nicht verwendetes Zeichen setzen können, das nun durch die Definition als gleichbedeutender Eigenname eingeführt wird, sodass wir in Zukunft dieses Zeichen überall, wo es vorkommt, durch den links stehenden Namen ersetzen dürfen. Selbstverständlich darf es nie als Functionsname verwendet werden, weil damit der Rückgang auf die Urnamen abgeschnitten wäre.

5. Ein Name, der für eine Function erster Stufe mit einem Argumente eingeführt wird, darf nur eine einzige Argumentstelle enthalten. Bei mehren Argumentstellen wäre es möglich, diese mit verschiedenen Namen auszufüllen, und dann würde der definirte Name als der einer Function mit mehren Argumenten gebraucht, während er nicht als solcher definirt wäre. Wenn ein Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente definirt wird, müssen die Argumentstellen auf der linken Seite der Definitionsgleichung mit einem lateinischen Gegenstandsbuchstaben ausgefüllt werden, der auch rechts die Argumentstelle des neuen Functionsnamens kenntlich macht. Die Definition besagt dann, dass der Eigenname, der rechts durch

Einsetzung eines bedeutungsvollen Eigennamens in die Argumentstelle entsteht, immer gleichbedeutend sein solle mit dem links durch Einsetzung desselben Eigennamens in alle Argumentstellen entstehenden. Die eine Argumentstelle des erklärten Namens vertritt also alle des erklärenden. Wo nun auch der definirte Functionsname weiterhin vorkommen mag, immer muss seine Argumentstelle mit einem Eigennamen oder einer Gegenstandsmarke ausgefüllt sein.

6. Ein Name, der für eine Function erster Stufe mit zwei Argumenten eingeführt wird, muss zwei und darf nicht mehr Argumentstellen enthalten. Die unter einander verwandten Argumentstellen links müssen mit einem und demselben lateinischen Gegenstandsbuchstaben besetzt sein, der auch rechts eine der beiden Argumentstellen kenntlich macht; die nicht verwandten Argumentstellen müssen verschiedene lateinische Buchstaben enthalten. Die Definition besagt dann, dass der Eigenname, der rechts durch Einsetzung von bedeutungsvollen Eigennamen in die Argumentstellen entsteht, immer gleichbedeutend sein solle mit dem links durch Einsetzung derselben Eigennamen in die entsprechenden Argumentstellen entstehenden. Die eine Argumentstelle rechts vertritt also alle ξ-Argumentstellen links, die andere alle ζ-Argumentstellen.

7. Es darf also nie auf der einen Seite einer Definitionsgleichung ein lateinischer Buchstabe vorkommen, der nicht auch auf der andern steht. Wenn die Gegenstandsmarke auf der linken Seite sich in einen rechtmässig gebildeten Eigennamen verwandelt, falls die lateinischen Buchstaben durch Eigennamen ersetzt werden, so hat nach unsern Festsetzungen der erklärte Functionsname stets eine Bedeutung.

Andere als die eben besprochenen Fälle werden weiterhin nicht vorkommen.

Besondere Definitionen.

§ 34. Es ist schon im § 25 darauf hingewiesen worden, dass man statt der Functionen zweiter Stufe im weitern Fortgange Functionen erster Stufe verwenden kann. Dies soll nun gezeigt werden. Wie dort angedeutet worden, wird dies dadurch möglich, dass die Functionen, die als Argumente der Function zweiter Stufe erscheinen, durch ihre Werthverläufe vertreten werden, natürlich nicht so, dass sie diesen einfach ihre Stelle einräumen; denn das ist unmöglich. Es handelt sich zunächst nur darum, den Werth der Function $\Phi(\xi)$ für das Argument $\varDelta$, also $\Phi(\varDelta)$ mittels ‚$\varDelta$' und und ‚$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' zu bezeichnen. Ich mache dies so:

$$‚\varDelta \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)‘,$$

was gleichbedeutend mit ‚$\Phi(\varDelta)$' sein soll. Der Gegenstand $\Phi(\varDelta)$ erscheint also als Werth der Function $\xi \frown \zeta$ mit zwei Argumenten für $\varDelta$ als ξ-Argument und $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ als ζ-Argument. Es muss nun aber $\xi \frown \zeta$ für alle möglichen Gegenstände als Argumente erklärt werden. Dies kann so geschehn:

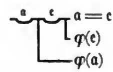
$$\Vdash \backslash\grave{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)=\alpha\\ u=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)=a\frown u \qquad (A$$

Da hier eine Function mit zwei Argumenten definirt wird, kommen zwei lateinische Buchstaben links und rechts vor. Obwohl der erklärende Ausdruck nur bekannte Bezeichnungen enthält, mögen einige Erläuterungen nicht überflüssig sein. Wir haben links eine lateinische Marke, die aus dem Eigennamen ‚$\backslash\grave{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\alpha\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$' dadurch hervorgeht, dass ‚Θ' durch ‚a' und ‚Γ' durch u ersetzt werden. Dieser Eigenname hat die Form von $\backslash\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$. Es sind dabei nach § 11 zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem sich ein Gegenstand Δ angeben lässt, der als einziger unter den Begriff $-\Phi(\xi)$ fällt, oder nicht. Im ersten Falle ist Δ selbst $\backslash\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$. Auf unsern Fall angewendet, heisst dies, wenn es einen Gegenstand Δ giebt, so dass $\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\Delta\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}$ das Wahre ist, während die Function $\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\xi\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}$ für alle von Δ verschiedenen Argumente das Falsche als Werth hat, so ist Δ selbst $\backslash\grave{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\alpha\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$. Nun ist $\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\Delta\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}$ das Wahre, wenn es eine Function erster Stufe eines Arguments giebt, deren Werth für das Argument Θ Δ ist und deren Werthverlauf Γ ist. Sonst ist $\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\Delta\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}$ das Falsche. Nehmen wir an, Γ sei ein Werthverlauf, so ist durch Γ bestimmt, welchen Werth eine Function, deren Werthverlauf Γ ist, für das Argument Θ hat. Es giebt dann immer einen solchen Werth und nur einen einzigen und dieser Werth ist $\backslash\grave{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\alpha\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$ oder $\Theta\frown\Gamma$. Wenn aber Γ gar kein Werthverlauf ist, so hat die Function $\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\Theta)=\xi\\ \Gamma=\grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}$ für jedes Argument das Falsche als Werth, und dann ist unsere Festsetzung heranzuziehn, dass ‚$\backslash\Delta$' Δ selbst bedeuten soll, wenn es keinen Gegenstand Δ der Art giebt, dass Δ der Werthverlauf $\grave{\varepsilon}(\Delta=\varepsilon)$ ist. Demnach bedeutet ‚$\Theta\frown\Gamma$', wenn Γ kein Werthverlauf ist, den Werthverlauf einer Function, deren Werth für jedes Argument das Falsche ist, also $\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon)$.

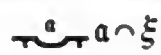
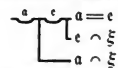
Fassen wir Alles zusammen, so müssen zwei Fälle unterschieden werden, wenn der Werth der Function $\xi\frown\zeta$ bestimmt werden soll. Wenn das ζ-Argument ein Werthverlauf ist, so ist der Werth der Function $\xi\frown\zeta$ der Werth der Function, deren Werthverlauf das ζ-Argument ist, für das ξ-Argument als Argument. Wenn dagegen das ζ-Argument kein Werthverlauf ist, so ist der Werth der Function $\xi\frown\zeta$ für jedes ξ-Argument $\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon)$.

§ 35. Wir sehen hier bestätigt, was wir den vorausgeschickten Ueberlegungen entnehmen können, dass der Functionsname ‚$\xi \frown \zeta$' eine Bedeutung hat. Dies allein ist für die spätern Beweisführungen grundlegend; im Uebrigen könnte unsere Erläuterung falsch sein, ohne die Richtigkeit jener Beweise in Frage zu stellen; denn nur die Definition selbst ist die Grundlage für diesen Aufbau. Sie sollte, wie anfangs gesagt, dazu dienen, eine Function erster Stufe statt einer zweiter Stufe verwenden zu können. Sehen wir nun an Beispielen, wie dieser Zweck erreicht wird! Wir haben in § 22 die Function zweiter Stufe $\varphi(2)$ angeführt. Jetzt können wir für ‚$\varphi(2)$' schreiben ‚$2 \frown \grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$'. Dies ist noch immer der Name einer Function zweiter Stufe; schreiben wir aber für ‚$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$' ‚$\xi$', so haben wir in ‚$2 \frown \xi$' den Namen einer Function erster Stufe. Die Function $\varphi(2)$ hat für die Function $\Phi(\xi)$ als Argument denselben Werth $\Phi(2)$ wie die Function $2 \frown \xi$ für $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ als Argument. Wenn als Argument der Function $2 \frown \xi$ ein Gegenstand genommen wird, der kein Werthverlauf ist, so haben wir kein entsprechendes Argument der Function zweiter Stufe $\varphi(2)$ und die gegenseitige Vertretbarkeit der beiden Functionen erster und zweiter Stufe hört auf.

Den Functionen zweiter Stufe

 und 

entsprechen in derselben Weise die Functionen erster Stufe

 und 

§ 36. Um andere Beispiele zu finden, suchen wir Functionen mit zwei Argumenten in ähnlicher Weise durch Gegenstände vertreten zu lassen, wie wir es bei Functionen mit einem Argumente gethan haben. Ein einfacher Werthverlauf kann hierzu freilich nicht gebraucht werden, sondern nur ein Doppelwerthverlauf, der das für eine Function mit zwei Argumenten ist, was jener für eine Function mit einem Argumente ist.

Wir gehn beispielsweise aus von der Function mit zwei Argumenten $\xi + \zeta$. Nehmen wir als ζ-Argument z. B. die Zahl 3, so haben wir in $\xi + 3$ nur noch eine Function mit einem Argumente, deren Werthverlauf $\grave{\varepsilon}(\varepsilon + 3)$ ist. Das Entsprechende gilt für jedes ζ-Argument, und wir haben in $\grave{\varepsilon}(\varepsilon + \zeta)$ eine Function eines Arguments, deren Werth immer ein Werthverlauf ist. Denken wir uns das ξ- und das ζ-Argument sowie den Werth der Function $\xi + \zeta$ als rechtwinklige Coordinaten im Raume dargestellt, so können wir uns den Werthverlauf $\grave{\varepsilon}(\varepsilon + 3)$ durch eine Gerade veranschaulichen. Lassen wir das ζ-Argument sich stetig ändern, so verschiebt sich diese Gerade und beschreibt dabei eine Ebene. In jeder ihrer Lagen veranschaulicht sie einen Werthverlauf, den Werth der Function $\grave{\varepsilon}(\varepsilon + \zeta)$ für ein gewisses ζ-Argument. Der Werthverlauf der Function $\grave{\varepsilon}(\varepsilon + \zeta)$ ist nun

$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon + \alpha)$, und dies nenne ich einen Doppelwerthverlauf. Es ist nun

$$\Delta \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon + \alpha) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon + \Delta)$$

das Wahre und ebenso

$$\Gamma \frown (\Delta \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon + \alpha)) = \Gamma \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon + \Delta),$$

und da

$$\Gamma \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon + \Delta) = \Gamma + \Delta$$

das Wahre ist, so ist auch

$$\Gamma \frown (\Delta \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon + \alpha)) = \Gamma + \Delta$$

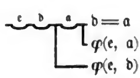
das Wahre. Hier sehen wir links einen Doppelwerthverlauf die Function mit zwei Argumenten rechts vertreten, freilich nicht so, dass das Vertretende die Stelle des Vertretenen einfach einnimmt, was unmöglich ist, sondern nur so, dass links im Doppelwerthverlaufe das Besondere der Function rechts steckt, wodurch sie sich von andern Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten unterscheidet. Wenn die Function mit zwei Argumenten eine Beziehung ist, sagen wir für ‚Doppelwerthverlauf' auch ‚Umfang der Beziehung'.

Man kann noch fragen, was $\Gamma \frown (\Delta \frown \Theta)$ sei, wenn Θ kein Doppelwerthverlauf, sondern entweder nur ein einfacher oder gar kein Werthverlauf sei. Im ersten Falle ist $\Delta \frown \Theta$ kein Werthverlauf, und folglich ist dann $\Gamma \frown (\Delta \frown \Theta)$ dasselbe wie $\grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon = \varepsilon)$. Im andern Falle fällt $\Delta \frown \Theta$ mit $\grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon = \varepsilon)$ zusammen, und

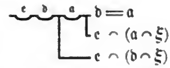
$$\Gamma \frown (\Delta \frown \Theta) = \Gamma \frown \grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon = \varepsilon)$$

ist das Wahre; mithin ist auch $\Gamma \frown (\Delta \frown \Theta) = (\top\, \Gamma = \Gamma)$ das Wahre; d. h. $\Gamma \frown (\Delta \frown \Theta)$ ist dann das Falsche.

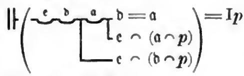
§ 37. Statt der Function zweiter Stufe



(§ 23) können wir nun nun die Function erster Stufe

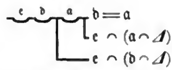


betrachten. Wir führen dafür eine einfache Bezeichnungsweise ein, indem wir definiren:



(I

Es ist nach § 23



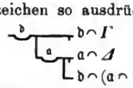
der Wahrheitswerth davon, dass die Beziehung $—\xi \frown (\zeta \frown \Delta)$ eindeutig ist; d. h. dass es für jedes ξ-Argument kein oder nur ein ζ-Argument giebt, für das der Werth unserer Function das Wahre ist, oder, wie wir auch sagen können, dass es zu jedem Gegenstande höchstens einen giebt, zu dem er in der Beziehung $—\xi \frown (\zeta \frown \Delta)$ steht. Wenn Δ kein Doppelwerthverlauf ist, so ist nach § 36 der Werth der Function $\xi \frown (\xi \frown \Delta)$ entweder das Falsche oder $\grave{\varepsilon}(\top\, \varepsilon = \varepsilon)$. Da dieses nicht das Wahre ist, so ist der Werth der Function $—\xi \frown (\zeta \frown \Delta)$ immer das Falsche, wenn Δ kein Doppelwerthverlauf ist; d. h. es ist dann $—\xi \frown (\zeta \frown \Delta)$ eine Beziehung, in der kein Gegenstand zu einem Gegenstande steht. Dann ist $\mathrm{I}\Delta$ das Wahre. Den Functionsnamen ‚$\mathrm{I}\xi$' führen wir besonders in Hinblick auf die Fälle ein, wo als Argument der Umfang einer Beziehung auftritt. Ist diese Beziehung $X(\xi, \zeta)$, so ist $\mathrm{I}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}X(\varepsilon, \alpha)$ das Wahre, wenn die Beziehung $X(\xi, \zeta)$ eindeutig ist (im Fortgange vom ξ- zum ζ-Argumente). Also z. B. $\vdash \mathrm{I}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = \alpha)$. Nach unserer Definition darf ‚I‘ immer nur als Functionszeichen gebraucht werden, dass dem Argumentzeichen oder dessen Vertreter vorhergeht.

§ 38. Wir können nun unserm Ziele, der Definition der Zahl näher rücken. Ich habe sie in meinen Grundlagen der Arithmetik auf die Beziehung gegründet, die ich Gleichzahligkeit genannt habe. Im § 72 (S. 85) meiner Grundlagen definire ich:

Der Ausdruck ‚der Begriff *F* ist gleichzahlig dem Begriffe *G*‘ sei gleichbedeutend mit dem Ausdrucke ‚es giebt eine Beziehung φ, welche die unter den Begriff *F* fallenden Gegenstände den unter *G* fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuordnet‘.

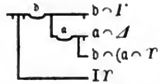
Was heisst es nun, dass die Beziehung φ die unter den Begriff *F* fallenden Gegenstände den unter den Begriff *G* fallenden zuordne? Es heisst (§ 71 der Grundlagen), dass jeder Gegenstand, der unter *F* fällt, in der Beziehung φ zu einem unter *G* fallenden Gegenstande stehe, oder genauer, dass die beiden Sätze ‚*a* fällt unter *F*‘ und ‚*a* steht zu keinem unter *G* fallenden Gegenstande in der Beziehung φ‘ für kein *a* mit einander bestehen können.

Wir nehmen nun als Begriff *F* $-\xi \frown \Gamma$, als Begriff *G* $-\xi \frown \varDelta$, als Beziehung φ $-\xi \frown (\zeta \frown \Upsilon)$. Dann können wir das Gesagte in Begriffsschriftzeichen so ausdrücken:

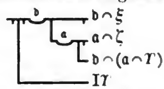

[1]

1) Dem ‚*a*‘ im Wortausdrucke entspricht hier ‚𝔟‘.

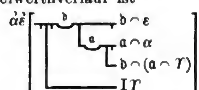
Die Beziehung muss eindeutig sein. Fügen wir dies noch hinzu, so haben wir



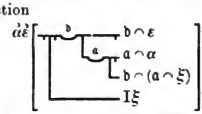
(Ueber ‚und‘ vergleiche man § 12.) Wir betrachten dies als Werth der Function mit zwei Argumenten



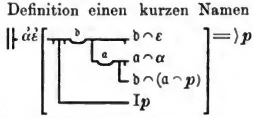
für die Argumente Γ und $\varDelta$. Diese Function ist eine Beziehung. Ihr Doppelwerthverlauf ist



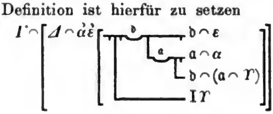
Wir sehen ihn an als Werth der Function



für das Argument Υ. Für diese Function führen wir durch folgende Definition einen kurzen Namen ein:


($\varDelta$

Der Werth dieser Function ist immer der Umfang einer Beziehung. Was ist nun $\Gamma \frown (\varDelta \frown \rangle\, \Upsilon)$? Nach der Definition ist hierfür zu setzen



oder

$$\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \text{———} \mathfrak{b} \frown \Gamma \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \varDelta \\ \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown \Upsilon) \end{array} \end{array} \\ \text{————} \mathrm{I}\Upsilon \end{array}$$

Dies ist der Wahrheitswerth davon, dass die Beziehung $—\xi \frown (\zeta \frown \Upsilon)$ die unter den Begriff $—\xi \frown \Gamma$ fallenden Gegenstände solchen, die unter den Begriff $—\xi \frown \varDelta$ fallen, eindeutig zuordne. Wir wollen dafür den kürzern Ausdruck einführen ‚die Υ-Beziehung **bildet** den Γ-Begriff in den $\varDelta$-Begriff ab', indem wir allgemein einen Begriff, dessen Umfang Γ ist, Γ-**Begriff** und eine Beziehung, deren Umfang Υ ist, Υ-**Beziehung** nennen.

§ 39. Wenn nun Gleichzahligkeit zwischen den Begriffen bestehen soll, so muss es eine Beziehung geben, von der nicht nur das gilt, was wir eben von der Υ-Beziehung sagten, sondern von deren Umkehrung auch das Entsprechende gilt mit Vertauschung der Rollen von Γ und $\varDelta$, sodass sie den $\varDelta$-Begriff in den Γ-Begriff abbildet. Zu diesem Zwecke ist es wünschenswerth, einen Functionsnamen ‚$\mathfrak{Y}\xi$' einzuführen der Art, dass, wenn Υ der Umfang einer Beziehung ist, $\mathfrak{Y}\Upsilon$ der Umfang von deren Umkehrung ist. Zu diesem Zwecke definiren wir

$$\Vdash \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown p)) = \mathfrak{Y}p \qquad (E$$

Es ist dann die Beziehung

$$—\xi \frown (\zeta \frown \mathfrak{Y}\Upsilon) \text{ oder}$$
$$—\xi \frown (\zeta \frown \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown \Upsilon)))$$

dieselbe wie $—\zeta \frown (\xi \frown \Upsilon)$.

§ 40. Um also dasselbe von der Umkehrung der Beziehung $—\xi \frown (\zeta \frown \Upsilon)$ zu sagen, was wir von ihr selbst gesagt haben, brauchen wir nur ‚Υ' durch ‚$\mathfrak{Y}\Upsilon$' zu ersetzen. Demnach ist $\begin{array}{l}\text{—}\!\!\top \Gamma \frown (\varDelta \frown \rangle \Upsilon) \\ \quad\llcorner \varDelta \frown (\Gamma \frown \rangle \mathfrak{Y}\Upsilon)\end{array}$ der Wahrheitswerth davon, dass die Υ-Beziehung den Γ-Begriff in den $\varDelta$-Begriff, und dass deren Umkehrung diesen in jenen abbilde, natürlich in der Voraussetzung, dass Γ und $\varDelta$ Begriffsumfänge seien und Υ ein Beziehungsumfang. Damit nun diese Begriffe gleichzahlig seien, muss es eine solche Beziehung geben. Es ist $—\xi \frown (\zeta \frown \Upsilon)$ immer eine Beziehung, was auch ‚Υ' für einen Gegenstand bedeuten möge, und jede Beziehung lässt sich in der Form ‚$—\xi \frown (\zeta \frown \Upsilon)$' bezeichnen, indem man für Υ ihren Umfang nimmt. Danach ist $\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\!\top \Gamma \frown (\varDelta \frown \rangle \mathfrak{q}) \\ \quad\llcorner \varDelta \frown (\Gamma \frown \rangle \mathfrak{Y}\mathfrak{q})\end{array}$ der Wahrheitswerth davon, dass die Begriffe $—\xi \frown \Gamma$ und $—\xi \frown \varDelta$ gleichzahlig seien. Wir können dies als Werth der Function $\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\!\top \xi \frown (\varDelta \frown \rangle \mathfrak{q}) \\ \quad\llcorner \varDelta \frown (\xi \frown \rangle \mathfrak{Y}\mathfrak{q})\end{array}$ für das Argument Γ ansehen. Diese Function ist ein Begriff, dessen Umfang $\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\!\top \varepsilon \frown (\varDelta \frown \rangle \mathfrak{q}) \\ \quad\llcorner \varDelta \frown (\varepsilon \frown \rangle \mathfrak{Y}\mathfrak{q})\end{array}\right)$ ist. Und nach meiner Definition (Grundlagen § 68) ist dieser Begriffsumfang die **Anzahl**, die dem Begriffe $—\xi \frown \varDelta$ zukommt. Statt ‚Anzahl, die dem $\varDelta$-Begriffe zukommt' sage ich auch kurz ‚Anzahl des $\varDelta$-Begriffes'. Ich definire nun:

$$\Vdash \dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\!\top \varepsilon \frown (u \frown \rangle \mathfrak{q}) \\ \quad\llcorner u \frown (\varepsilon \frown \rangle \mathfrak{Y}\mathfrak{q})\end{array}\right) = \mathfrak{N}u \qquad (Z$$

§ 41. Danach ist $\mathfrak{N}\dot{\varepsilon}(\top \varepsilon = \varepsilon)$ die Anzahl des $\dot{\varepsilon}(\top \varepsilon = \varepsilon)$-Begriffes oder die Anzahl, die dem Begriffe

$\top\xi = \xi$ zukommt, und dies ist die Anzahl Null (Grundlagen § 74). Später wird es sich als nothwendig erweisen, die Anzahl Null von der Zahl Null zu unterscheiden, und ich will darum jene durch einen schräg durchgehenden Strich auszeichnen. Ich definire

$$\Vdash \natural\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon = \varepsilon) = \emptyset \qquad (\Theta$$

§ 42. So definire ich auch (Grundlagen § 77)

$$\Vdash \natural\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \emptyset) = \not1 \qquad (I$$

Der schräge Strich in ‚$\not1$' soll die Anzahl Eins von der Zahl Eins unterscheiden. $\not1$ ist danach die Anzahl, die dem Begriffe $\xi = \emptyset$ zukommt.

$\overset{\mathfrak{u}}{\top\!\smile\!\top}\ \natural\mathfrak{u} = \Gamma$ ist der Wahrheitswerth davon, dass es einen Begriff giebt, dem die Anzahl Γ zukommt, oder, wie wir auch sagen können, dass Γ eine Anzahl ist. Demnach nennen wir die Function $\overset{\mathfrak{u}}{\top\!\smile\!\top}\ \natural\mathfrak{u} = \xi$ den Begriff der A n z a h l.

§ 43. Es ist nun noch die Beziehung zu erklären, in der ein Glied der Anzahlenreihe zum nächstfolgenden steht. Ich führe hier meine Definition (Grundlagen § 76) in etwas veränderter Fassung wieder an:

Wenn es einen Begriff $—\xi \frown \Gamma$ und einen unter ihn fallenden Gegenstand $\varDelta$ der Art giebt, dass die Anzahl, die dem Begriffe $—\xi \frown \Gamma$ zukommt, Λ ist, und dass die Anzahl, die dem Begriffe $\top\!\!\begin{array}{l}\xi = \varDelta\\ \xi \frown \Gamma\end{array}$ zukommt, Θ ist, so sage ich: Λ folgt in der Anzahlenreihe unmittelbar auf Θ.

Wir haben nun in

$$\begin{array}{l} \top\!\!\top\ \natural\Gamma = \Lambda \\ \quad\llcorner\ \varDelta \frown \Gamma \\ \llcorner\ \natural\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l}\varepsilon = \varDelta\\ \varepsilon \frown \Gamma\end{array}\right) = \Theta \end{array}$$

den Wahrheitswerth davon, dass Λ die Anzahl sei, die dem Begriffe $—\xi \frown \Gamma$ zukomme, dass $\varDelta$ unter diesen Begriff falle und dass Θ die Anzahl des $\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l}\varepsilon = \varDelta\\ \varepsilon \frown \Gamma\end{array}\right)$-Begriffes sei.

Danach haben wir in

$$\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{u}}{\top\!\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\top\ \natural\mathfrak{u} = \Lambda \\ \qquad\llcorner\ \mathfrak{a} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\llcorner\ \natural\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a}\\ \varepsilon \frown \mathfrak{u}\end{array}\right) = \Theta \end{array}$$

den Wahrheitswerth davon, dass Λ in der A n z a h l e n r e i h e unmittelbar auf Θ folge. Wir betrachten dies als Werth der Function

$$\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{u}}{\top\!\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\top\ \natural\mathfrak{u} = \zeta \\ \qquad\llcorner\ \mathfrak{a} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\llcorner\ \natural\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a}\\ \varepsilon \frown \mathfrak{u}\end{array}\right) = \xi \end{array}$$

für die Argumente Θ und Λ. Der Umfang dieser Beziehung ist

$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{u}}{\top\!\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\top\ \natural\mathfrak{u} = \alpha \\ \qquad\llcorner\ \mathfrak{a} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\llcorner\ \natural\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a}\\ \varepsilon \frown \mathfrak{u}\end{array}\right) = \varepsilon \end{array}\right]$$

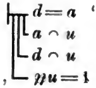
und dafür werde ein einfacher Name eingeführt:

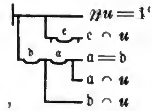
$$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{u}}{\top\!\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!\!\top\ \natural\mathfrak{u} = \alpha \\ \qquad\llcorner\ \mathfrak{a} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\llcorner\ \natural\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a}\\ \varepsilon \frown \mathfrak{u}\end{array}\right) = \varepsilon \end{array}\right] = \mathfrak{f} \qquad (H$$

Danach drückt ‚$\emptyset \frown (\not1 \frown \mathfrak{f})$' aus, dass $\not1$ in der Anzahlenreihe unmittelbar auf $\emptyset$ folge.

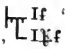
§ 44. Es mögen die sechs im § 78 meiner Grundlagen aufgeführten Sätze in unsern Zeichen folgen:

$$,\begin{array}{l}\vdash\!\top\ a = \not1 \\ \quad\llcorner\ \emptyset \frown (a \frown \mathfrak{f})\end{array}' \qquad ,\begin{array}{l}\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a} \frown u \\ \quad\llcorner\ \natural u = \not1\end{array}'$$

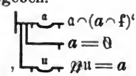




Ich überlasse es dem Leser, sich den Sinn selbst klar zu machen. ‚If' drückt aus, dass die f-Beziehung eindeutig sei, mit andern Worten: dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine einzige gebe, die auf sie unmittelbar in der Anzahlenreihe folge. ‚I⸸f' drückt aus, dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine einzige gebe, auf die sie unmittelbar in der Anzahlenreihe folge. Durch

 ' wird der fünfte jener Sätze

wiedergegeben.



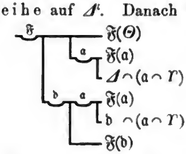
besagt, dass es zu jeder Anzahl mit Ausnahme der 0 eine ihr in der Anzahlenreihe unmittelbar vorhergehende gebe.

§ 45. Die f-Beziehung ordnet die Anzahlen, sodass eine Reihe entsteht. Wir haben nun allgemein zu erklären, was das heisst ‚ein Gegenstand folgt auf einen Gegenstand in einer Reihe', wobei die Art dieser Reihe durch die Beziehung bestimmt ist, in der stets ein Glied der Reihe zum nächstfolgenden steht. Ich wiederhole die im § 79 meiner Grundlagen und in der Begriffsschrift gegebene Erklärung in etwas andern Worten.

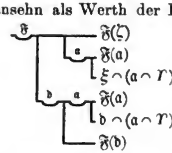
Wenn der Satz

> ‚wenn jeder Gegenstand, zu dem Δ in der Υ-Beziehung steht, unter den Begriff $—F(\xi)$ fällt, und wenn daraus, dass ein Gegenstand unter diesen Begriff fällt, allgemein folgt, dass jeder Gegenstand, zu dem jener in der Υ-Beziehung steht, gleichfalls unter den Begriff $—F(\xi)$ falle, so fällt Θ unter diesen Begriff'

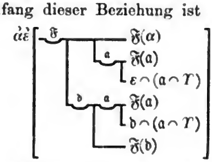
allgemein für jeden Begriff $—F(\xi)$ gilt, so sagen wir: ‚Θ folgt in der Υ-Reihe auf Δ'. Danach ist



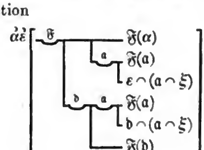
der Wahrheitswerth davon, dass Θ in der Υ-Reihe auf Δ folge. Wir können dies ansehn als Werth der Function



für die Argumente Δ und Θ. Der Umfang dieser Beziehung ist



Wir können ihn als Werth der Function



für das Argument Υ ansehen. Für diese Function führe ich einen einfachen Namen ein, indem ich definire:

$$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{F}}\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; \mathfrak{F}(\alpha) \\ \quad\;\; \smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad\;\; \llcorner\, \varepsilon \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad \smile^{\mathfrak{d}}\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \qquad\quad\;\; \llcorner\, \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \qquad\quad\; \llcorner\, \mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \end{array}\right] = \grave{\ }q \qquad (K$$

Danach drückt ‚$\varDelta \frown (\varTheta \frown \grave{\ }\Upsilon)$' aus, dass $\varTheta$ auf $\varDelta$ in der Υ-Reihe folge. Und ‚$\varDelta \frown (\varTheta \frown \grave{\ }\mathfrak{f})$' drückt aus, dass $\varTheta$ auf $\varDelta$ in der Anzahlenreihe folge.

Statt ‚$\varTheta$ folgt auf $\varDelta$ in der Υ-Reihe' sage ich auch ‚$\varDelta$ geht dem $\varTheta$ in der Υ-Reihe vorher'.

§ 46. $\begin{array}{l} \top\, \varTheta = \varDelta \\ \llcorner\, \varDelta \frown (\varTheta \frown \grave{\ }\Upsilon) \end{array}$ ist der Wahrheitswerth davon, dass $\varTheta$ auf $\varDelta$ in der Υ-Reihe folge oder mit $\varDelta$ zusammenfalle. Dafür sage ich kürzer, dass $\varTheta$ der mit $\varDelta$ anfangenden Υ-Reihe angehöre, oder dass $\varDelta$ der mit $\varTheta$ endenden Υ-Reihe angehöre. Ich betrachte dies als Werth der Function $\begin{array}{l} \top\, \zeta = \xi \\ \llcorner\, \xi \frown (\zeta \frown \grave{\ }\Upsilon) \end{array}$ für die Argumente $\varDelta$ und $\varTheta$. Der Umfang dieser Beziehung ist $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\, \alpha = \varepsilon \\ \llcorner\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \grave{\ }\Upsilon) \end{array}\right)$. Diesen fasse ich auf als Werth der Function $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\, \alpha = \varepsilon \\ \llcorner\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \grave{\ }\xi) \end{array}\right)$ für das Argument Υ und führe einen einfachen Namen ein, indem ich definire:

$$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\, \alpha = \varepsilon \\ \llcorner\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \grave{\ }q) \end{array}\right) = \grave{\ }q \qquad (\varDelta$$

Danach ist $\varDelta \frown (\varTheta \frown \grave{\ }\Upsilon)$ der Wahrheitswerth davon, dass $\varTheta$ der mit $\varDelta$ anfangenden Υ-Reihe angehöre. Demzufolge ist $0 \frown (\varTheta \frown \grave{\ }\mathfrak{f})$ der Wahrheitswerth davon, dass $\varTheta$ der mit 0 anfangenden Anzahlenreihe angehöre, wofür ich auch sage, dass $\varTheta$ eine endliche Anzahl sei.

Im § 82 meiner Grundlagen erwähne ich den Satz, dass die Anzahl, die dem Begriffe

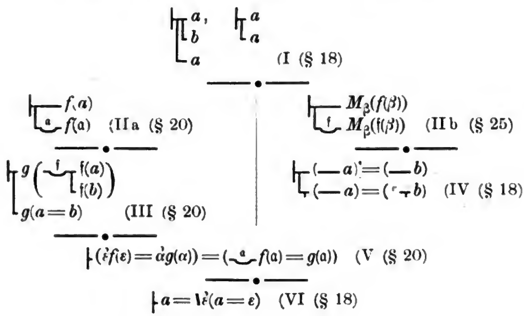
der mit n endenden Anzahlenreihe angehörend

zukommt, auf n in der Anzahlenreihe unmittelbar folgt, wenn n eine endliche Anzahl ist. Wir können dies nun so wiedergeben: ‚$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, n \frown (\mathfrak{N}(n \frown \grave{\ }\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \quad\llcorner\, 0 \frown (n \frown \grave{\ }\mathfrak{f}) \end{array}$'; denn $(\varTheta \frown \grave{\ }\mathfrak{f})$ ist der Umfang des Begriffes *der mit $\varTheta$ endenden Anzahlenreihe angehörend.*

3. Abgeleitete Gesetze.

§ 47. Wir haben eben gesehen, wie sich mit unsern Zeichen Begriffe und Gegenstände bezeichnen lassen, mit denen wir uns später beschäftigen werden. Aber dies würde noch wenig zu bedeuten haben, wenn sich nicht auch mit ihnen rechnen liesse, wenn sich nicht Schlussreihen ohne Beimischung von Worten darstellen, Beweise führen liessen. Wir haben nun schon die Grundgesetze und die Schlussweisen kennen gelernt, die dabei zur Anwendung kommen. Es sollen nun Gesetze aus ihnen abgeleitet werden, die wir später gebrauchen werden, um dabei zugleich die Art des Rechnens zu zeigen. Zunächst mögen die Grundgesetze und Regeln zusammengenstellt und einige Ergänzungen hinzugefügt werden.

Zusammenstellung der Grundgesetze.



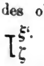
§ 48. Zusammenstellung der Regeln.

1. *Verschmelzung der Wagerechten.*

Wenn als Argument der Function $—\xi$ der Werth dieser selben Function für ein Argument erscheint, so können die Wagerechten verschmolzen werden.

Wagerechte in unserm Sinne sind die beiden durch den Verneinungsstrich getrennten Theile des wagerechten Striches in ‚$\top\xi$‘.

Wagerechte in unserm Sinne sind auch der untere und die beiden Theile des obern wagerechten Striches in



Wagerechte in unserm Sinne sind endlich die beiden an die Höhlung gefügten geraden Striche in ‚$\smile^{\mathfrak{a}}\varphi(\mathfrak{a})$‘.

2. *Vertauschung der Unterglieder.*

Die Unterglieder desselben Satzes können beliebig mit einander vertauscht werden.

3. *Wendung.*

Man darf in einem Satze ein Unterglied mit einem Obergliede vertauschen, wenn man zugleich die Wahrheitswerthe beider umkehrt.

Zwischenzeichen: $\times$.

4. *Verschmelzung gleicher Unterglieder.*

Ein mehrmals in demselben Satze auftretendes Unterglied braucht nur einmal geschrieben zu werden.

5. ***Verwandlung eines lateinischen Buchstaben in einen deutschen.***

Es ist erlaubt, in einem Satze einen lateinischen Buchstaben überall, wo er vorkommt, durch einen und denselben deutschen Buchstaben zu ersetzen, und zwar einen Gegenstandsbuchstaben durch einen Gegenstandsbuchstaben und einen Functionsbuchstaben durch einen Functionsbuchstaben. Dieser muss dann zugleich über einer Höhlung angebracht werden vor einem Obergliede, ausserhalb dessen der lateinische Buchstabe nicht vorkam. Wenn in diesem Obergliede das Gebiet eines deutschen Buchstaben ganz enthalten ist, in welchem Gebiete der lateinische Buchstabe vorkam, so muss der für diesen zu setzende deutsche Buchstabe von jenem verschieden gewählt werden.

Zwischenzeichen: ‿ .

Dies Zeichen wird auch angewendet, wenn mehre deutsche Buchstaben in dieser Weise eingeführt werden sollen. Wiewohl man gleich das Endergebniss hinschreibt, muss man doch einen nach dem andern eingeführt denken.

6. *Schliessen* (*a*).

Wenn ein Unterglied eines Satzes sich von einem andern Satze nur durch den fehlenden Urtheilstrich unterscheidet, so kann man auf einen Satz schliessen, der aus dem ersten durch Unterdrückung jenes Untergliedes hervorgeht.

Zwischenzeichen: ( ): ——
und ( ):: ——;

zusammengezogene Schlüsse mit (,):: ═══.

7. *Schliessen* (*b*).

Wenn dieselbe Zeichenverbindung (Eigenname oder lateinische Gegenstandsmarke) in einem Satze als Oberglied und in einem andern als Unterglied erscheint, so kann man auf einen Satz schliessen, in dem das Oberglied des zweiten Satzes als Oberglied und alle Unterglieder beider ohne das genannte als Unterglieder erscheinen. Dabei können gleiche Unterglieder nach Regel (4) verschmolzen werden.

Zwischenzeichen: ( ): – – –
und ( ):: – – –;

zusammengezogene Schlüsse mit (,):: = = = = und (,):: ═ ═ ═ ═

8. *Schliessen* (*c*).

Wenn zwei Sätze in den Obergliedern übereinstimmen, während ein Unterglied des einen sich von einem Untergliede des andern nur durch den davor stehenden Verneinungsstrich unterscheidet, so können wir auf einen Satz schliessen, in dem das gleiche Oberglied als Oberglied und alle Unterglieder beider mit Ausnahme der beiden genannten als Unterglieder erscheinen.

Zwischenzeichen: ( ): ·—·—·—·—·.

9. ***Anziehen von Sätzen. Ersatz der lateinischen Buchstaben.***

Wenn wir einen Satz mittels seines Abzeichens anziehen, können wir damit einen einfachen Schluss verbinden, indem wir jeden lateinischen Gegenstandsbuchstaben überall, wo er in dem Satze vorkommt, durch denselben Eigennamen oder dieselbe lateinische Gegenstandsmarke ersetzen.

Desgleichen können wir dabei jeden der lateinischen Functionsbuchstaben ‚f‘, ‚g‘, ‚h‘, ‚F‘, ‚G‘, ‚H‘ überall, wo er in dem Satze vorkommt, durch denselben Namen oder dieselbe lateinische Marke einer Function erster Stufe mit einem oder mit zwei Argumenten ersetzen, je nachdem der lateinische Buchstabe eine Function mit einem oder mit zwei Argumenten andeutet.

Wenn wir das Gesetz (IIb) anziehen, können wir das darin vorkommende ‚M_β‘ an beiden Stellen durch denselben Namen oder dieselbe lateinische Marke einer Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art ersetzen.

In Betreff der Wörter ‚denselben‘ und ‚dieselbe‘ im zweiten und dritten Absatze dieser Regel ist zu beachten, dass das Argument nicht mit zur Function gehört, dass also ein Wechsel des Argumentzeichens keine Aenderung des Functionsnamens ist. Damit hier und da derselbe Functionsname vorkomme, ist erforderlich, dass die verwandten Argumentstellen sich entsprechen. Für die Frage, was als verwandte Argumentstellen anzusehn seien, sind die Regeln zu beachten:

Alle Stellen, an denen ein deutscher Buchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben, noch über einer Höhlung vorkommt, sind verwandte Argumentstellen der zugehörigen Function;

alle Stellen, an denen ein kleiner griechischer Vokalbuchstabe in seinem Gebiete, jedoch weder in einem eingeschlossenen Gebiete desselben Buchstaben, noch mit dem Spiritus lenis vorkommt, sind verwandte Argumentstellen der zugehörigen Function.

10. *Anziehen von Sätzen. Ersetzung deutscher Buchstaben.*

Wenn wir einen Satz mittels seines Abzeichens anziehen, dürfen wir einen deutschen Buchstaben über der Höhlung und zugleich an allen Argumentstellen der zugehörigen Function durch einen und denselben andern, und zwar einen Gegenstandsbuchstaben durch einen solchen und einen Functionsbuchstaben durch einen solchen ersetzen, wenn dadurch nicht ein deutscher Buchstabe, der in einem dem eignen eingeschlossenen Gebiete vorkommt, dem Buchstaben gleich wird, dessen Gebiet das eingeschlossene ist.

11. *Anziehen von Sätzen. Ersetzung der griechischen Vokalbuchstaben.*

Wenn wir einen Satz mittels seines Abzeichens anziehen, dürfen wir einen griechischen Vokalbuchstaben unter dem Spiritus lenis und zugleich an allen Argumentstellen der zugehörigen Function durch einen und denselben andern ersetzen, wenn dadurch nicht ein griechischer Buchstabe, der in einem dem eignen eingeschlossenen Gebiete vorkommt, dem Buchstaben gleich wird, dessen Gebiet das eingeschlossene ist.

12. *Anziehen von Definitionen.*

Wenn wir eine Definition mittels ihres Abzeichens anziehen, dürfen wir den Definitionsstrich durch den

Urtheilstrich ersetzen und die Aenderungen vornehmen, die nach (9), (10), (11) bei der Anziehung eines Satzes erlaubt sind.

Festsetzungen über den Gebrauch der Klammern.

13. Alles, was rechts von einem Wagerechten im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Stelle des ‚ξ‘ in ‚$—\xi$‘ steht, sofern nicht Klammern das verbieten.

14. Alles, was links vom Gleichheitszeichen bis zum nächsten Wagerechten — diesen ausgeschlossen — im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Stelle des ‚ξ‘ in ‚$\xi = \zeta$‘ steht, sofern nicht Klammern das verbieten.

Danach ist z. B. ‚$a = b = c$‘ aufzufassen wie ‚$(a = b) = c$‘. Da jedoch ‚$a = b = c$‘ in anderm Sinne gebräuchlich ist, werde ich in solchem Falle die Klammern hinschreiben.

15. Alles was rechts von einem Gleichheitszeichen steht bis zum nächsten Gleichheitszeichen — dieses ausgeschlossen —, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Stelle des ‚ζ‘ in ‚$\xi = \zeta$‘ steht, sofern nicht Klammern das verbieten.

16. Wir haben Namen von Functionen mit zwei Argumenten wie z. B. ‚$\xi = \zeta$‘, ‚$\xi \frown \zeta$‘, welche ihre Argumentstellen links und rechts haben. Ich will solche Functionszeichen z w e i s e i t i g e nennen. Für zweiseitige Functionszeichen mit Ausnahme des Gleichheitszeichens sei Folgendes bestimmt.

Alles, was links von einem solchen Zeichen bis zum nächsten Gleichheitszeichen oder Wagerechten im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der linken Argumentstelle steht, sofern nicht Klammern das verbieten, und Alles, was rechts von einem solchen Zeichen bis zum nächsten zweiseitigen Functionszeichen im Zusammenhange steht, ist als Ganzes aufzufassen, das an der rechten Argumentstelle steht, sofern nicht Klammern es verbieten.

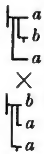
17. Wir haben einfache Namen von Functionen erster Stufe mit einem Argumente bisher so gebildet und werden es auch in Zukunft thun, dass die Argumentstelle rechts vom eigentlichen Functionszeichen steht wie bei ‚$\mathrm{I}\xi$‘, ‚$\rangle\xi$‘, ‚$\nmid\xi$‘ ‚$\mathfrak{u}\xi$‘, ‚$\acute{-}\xi$‘, ‚$\acute{\smile}\xi$‘. Für solche e i n s e i t i g e Functionszeichen mit Ausnahme des Wagerechten bestimme ich Folgendes.

Alles, was rechts von einem einseitigen Functionszeichen im Zusammenhange steht bis zum nächsten zweiseitigen Functionszeichen, ist als Ganzes aufzufassen, das an der Argumentstelle steht.

18. Wenn ein Wagerechter links frei endet, so schliessen wir ihn sammt seinem Argumentzeichen in Klammern ein.

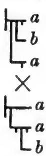
§ 49. Leiten wir zunächst einige Sätze aus (I) ab!

Ich werde nun (I) so anziehen, dass ich dabei nach Regel (9) des § 48 für ‚b‘ ‚$\top b$‘ schreibe und nach Regel (1) die Wagerechten verschmelze. Aus dem Folgenden ist zu ersehen, wie ich einen Satz anziehe.

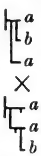
I  (Ia

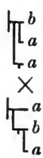
(Ia) ist hiermit zum Abzeichen des neuen Satzes gemacht. Zu dem Uebergange vergleiche man Regel (3). Hierbei ist auch von der Vertauschbarkeit der Unterglieder Gebrauch gemacht nach Regel (2).

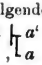
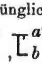
In der folgenden Ableitung ziehe ich (I) in der Weise an, dass ich für ‚a' ‚$\mathbin{\top} a$' schreibe.

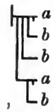
I  (Ib

Bei der Anwendung der Regel (3) ist hier  als Oberglied anzusehen.

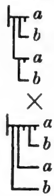
I  (Ic

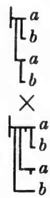
Ia  (Id

In der folgenden Ableitung ist (I) in der Form  gedacht und nun statt ‚a'  geschrieben. Wenn man (I) in der ursprünglichen Form annimmt und statt ‚a'  schreibt, so erhält man zunächst



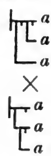
wo man nun die gleichen Unterglieder nach Regel (4) verschmelzen kann. Auch so kann man das Folgende auffassen.

I  (Ie

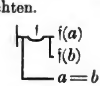
I  (If

Man vergleiche hierzu das im § 12 über ‚und' Gesagte.

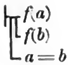
Im Folgenden wird (Ie) so angezogen, dass für ‚b' ‚a' geschrieben wird und die gleichen Unterglieder verschmolzen werden.

Ie  (Ig

§ 50. Es sollen nun die Hauptgesetze der Function $\xi = \zeta$ abgeleitet werden. Wir ersetzen zunächst nach Regel (9) § 48 den Functionsbuchstaben ‚g' in (III) durch den Namen der Function $—\xi$ und verschmelzen die Wagerechten.

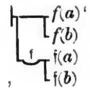
III 

(IIb): — — — — —

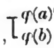


(IIIa

Der Uebergang geschieht hierbei nach Regel (7) und (IIb) ist in der Form

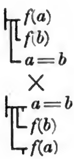


herangezogen, indem nach Regel (9) ‚$M_\beta(\varphi(\beta))$' durch die lateinische Marke einer Function zweiter Stufe



ersetzt ist.

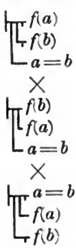
IIIa



(IIIb

In der folgenden Ableitung ist der Functionsbuchstabe ‚f' in (IIIa) durch die lateinische Functionsmarke ‚$\top f(\xi)$' ersetzt, und dann sind die Wagerechten verschmolzen.

IIIa



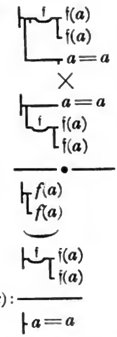
(IIIc

(IIId

Wir können (IIIa) in Worten etwa so wiedergeben: Wenn a mit b zusammenfällt, so gilt Alles von a, was von b gilt. Aehnlich (IIIc). (IIId) können wir so aussprechen: Wenn eine Aussage von a gilt, die von b nicht gilt, so fällt a mit b nicht zusammen.

In der folgenden Ableitung ist der Functionsbuchstabe ‚g' in (III) durch den Functionsnamen ‚$\top\xi$' und ‚b' durch ‚a' ersetzt.

III



(α

I

(β

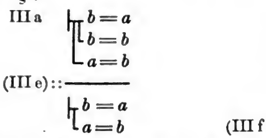
(α):

(IIIe

Dieser Satz ist zwar nach unserer Erklärung des Gleichheitszeichens selbstverständlich, aber es ist der Mühe werth zu sehen, wie er aus (III) entwickelt werden kann. Dabei bietet sich überdies Gelegenheit, einiges zu bemerken, was auch für spätere Ableitungen gelten soll. Der zweite Satz hat das Abzeichen ‚α' erhalten. Ein kleiner griechischer Buchstabe, so verwendet, soll nur innerhalb derselben Ableitung als Abzeichen unverändert gelten, sodass er in einer andern Ableitung als Abzeichen für einen andern Satz gebraucht werden kann. Eine Ableitung endet mit einem Satze, der zuerst ein von einem kleinen griechischen Buchstaben verschiedenes Abzeichen erhält. In unserer Ableitung folgt unter dem Satze (α) das Zeichen

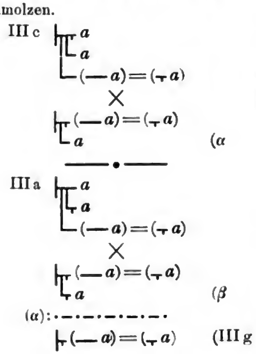
‚——•——‘

um anzuzeigen, dass wir hier die Schlussreihe abbrechen und eine neue anfangen, die erst da, wo wir (α) anziehen, mit jener verknüpft wird. Der Uebergang zu (β) erfolgt nach Regel (5), der von (β) zu (III e) nach Regel (6). Ersetzen wir nun in (III a) den Functionsbuchstaben ‚f‘ durch die lateinische Functionsmarke ‚$b = \xi$‘!



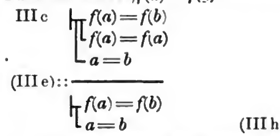
Der Schluss erfolgt nach Regel (6).

In der folgenden Ableitung sind in (III c) und (III a) ‚a‘ durch ‚— a‘, ‚b‘ durch ‚⊤ a‘ und der Functionsbuchstabe ‚f‘ durch den Functionsnamen ‚— ξ‘ ersetzt, und die Wagerechten sind, wo es möglich ist, verschmolzen.

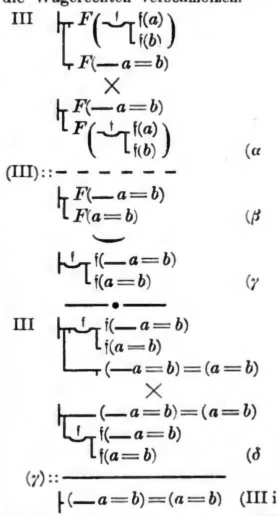


Bei den Uebergängen zu (α) und (β) sind die gleichen Unterglieder nach Regel (4) verschmolzen. Der letzte Schluss geschieht nach Regel (8).

In der folgenden Ableitung ersetzen wir den Functionsbuchstaben ‚f‘ in (III c) durch die lateinische Functionsmarke ‚$f(a) = f(\xi)$‘.



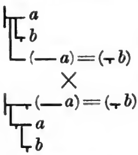
In der folgenden Ableitung ist in (III) der Functionsbuchstabe ‚g‘ ersetzt durch ‚⊤ F(— ξ)‘ und es sind die Wagerechten verschmolzen.



Bei der zweiten Anziehung von (III) ist ‚g‘ durch ‚F‘ ersetzt. Bei der letzten Anziehung von (III) ist ‚$g(\xi)$‘ durch ‚$\top\xi$‘, ‚a‘ durch ‚$— a = b$‘, ‚b‘ durch ‚$a = b$‘ ersetzt.

§ 51. Es sollen nun einige Sätze aus (IV) abgeleitet werden.

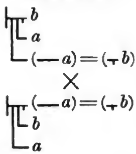
III a



(α

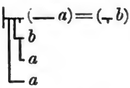
——•——

III c



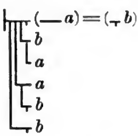
(β

(I)::- - - - - -



(γ

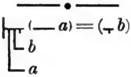
(I)::- - - - - -



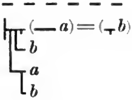
(δ

——•——

β

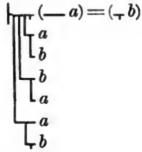


(I)::- - - - - -



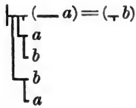
(ε

(δ):·-·-·-·-·



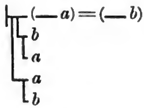
(ζ

(α):·-·-·-·-·



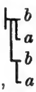
(η

(IV):- - - - - -



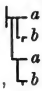
(IV a

(I) ist hier bei seiner ersten Anwendung in der Form



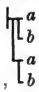
,

bei seiner zweiten in der Form



,

bei seiner dritten in der Form



,

zu denken. Man bemerke an den Uebergängen zu (γ), (δ) und (ε) die Wirkung dieser Anwendung von (I). So wird (I) noch oft gebraucht werden. Man vergleiche hierzu die Ableitung von (I e) in § 49. Der Satz (IV a) wird oft gebraucht, um die Gleichheit von Wahrheitswerthen zu beweisen.

$$\text{IV}\quad \vdash \begin{array}{l} (\text{—}\,a)=(\neg\, a) \\ (\text{—}\,a)=(\neg\neg\, a) \end{array}$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} (\text{—}\,a)=(\neg\neg\, a) \\ (\text{—}\,a)=(\neg\, a) \end{array}$$

$$\text{(III g)}::\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (\text{—}\,a)=(\neg\neg\, a) \qquad \text{(IV b}$$

$$\text{(III a)}:\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(\text{—}\,a) \\ f(\neg\neg\, a) \end{array} \qquad \text{(IV c}$$

—— • ——

$$\text{IV b}\quad \vdash (\text{—}\,a)=(\neg\neg\, a)$$

$$\text{(III c)}:\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(\neg\neg\, a) \\ f(\text{—}\,a) \end{array} \qquad \text{(IV d}$$

Ein Beispiel für die Anwendung von (IV a) haben wir im Folgenden.

$$\text{III f}\quad \vdash \begin{array}{l} a=b \\ b=a \end{array}$$

$$\text{(IV a)}:\overline{\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} (\text{—}\,a=b)=(\text{—}\,b=a) \\ b=a \\ a=b \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\text{(III f)}::\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (\text{—}\,a=b)=(\text{—}\,b=a) \qquad (\beta$$

$$\text{(III c)}:\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} (a=b)=(\text{—}\,b=a) \\ (\text{—}\,a=b)=(a=b) \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\text{(III i)}::\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (a=b)=(\text{—}\,b=a) \qquad (\delta$$

$$\text{(III c)}:\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} (a=b)=(b=a) \\ (\text{—}\,b=a)=(b=a) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$$\text{(III i)}::\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash (a=b)=(b=a) \qquad \text{(IV e}$$

Beim Uebergange zu (γ) ist hier (III c) in der Form

$$‚\vdash \begin{array}{l} (a=b)=(\text{—}\,b=a) \\ (\text{—}\,a=b)=(\text{—}\,b=a) \\ (\text{—}\,a=b)=(a=b) \end{array}‘$$

zu denken, indem ‚$f(\xi)$‘ durch ‚$\xi=(\text{—}\,b=a)$‘, ‚a‘ durch ‚$(\text{—}\,a=b)$‘, ‚b‘ durch ‚$(a=b)$‘ ersetzt ist. Für den Uebergang zu (ε) haben wir in (III c) ‚$f(\xi)$‘ durch ‚$(a=b)=\xi$‘, ‚a‘ durch ‚$(\text{—}\,b=a)$‘, ‚b‘ durch ‚$(b=a)$‘ ersetzt zu denken.

§ 52. Es mögen endlich noch einige Sätze aus (V) und (VI) abgeleitet werden.

$$\text{V}\quad \vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha))=(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}))$$

$$\text{(III a)}:\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}) \end{array}$$

$$\text{(III h)}:\text{- - - - - -}$$

$$\vdash \begin{array}{l} F(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon))=F(\grave{\alpha}g(\alpha)) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}) \end{array} \qquad \text{(V a}$$

—— • ——

$$\text{V}\quad \vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha))=(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}))$$

$$\text{(III c)}:\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}) \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\text{(II a)}:\text{- - - - - -}$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(a)=g(a) \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha) \end{array} \qquad \text{(V b}$$

In (II a) ist hier ‚$f(\xi)$‘ durch ‚$f(\xi)=g(\xi)$‘ ersetzt zu denken.

Bei der folgenden Ableitung ist in (V a) ‚$g(\xi)$‘ durch ‚$a=\xi$‘ ersetzt und zugleich für ‚α‘ ‚ε‘ geschrieben nach Regel (11) § 48.

$$\text{V a}\quad \vdash \begin{array}{l} \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\varepsilon}(a=\varepsilon) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=(a=\mathfrak{a}) \end{array}$$

$$\text{(III a)}:\text{- - - - - - - -}$$

$$\vdash \begin{array}{l} a=\backslash\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ a=\backslash\grave{\varepsilon}(a=\varepsilon) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=(a=\mathfrak{a}) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\text{VI}::\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\vdash \begin{array}{l} a=\backslash\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})=(a=\mathfrak{a}) \end{array} \qquad \text{(VI a}$$

II. Beweise der Grundgesetze der Anzahl.

Vorbemerkungen.

§ 53. In Beziehung auf die nun folgenden Beweise hebe ich hervor, dass die Ausführungen, die ich regelmässig unter der Ueberschrift ‚Zerlegung' vorausschicke, nur der Bequemlichkeit des Lesers dienen sollen; sie könnten fehlen, ohne dem Beweise etwas von seiner Kraft zu nehmen, der allein unter der Ueberschrift ‚Aufbau' zu suchen ist.

Die Regeln, auf die ich mich in den Zerlegungen beziehe, sind oben in § 48 unter den entsprechenden Nummern aufgeführt worden. Die zuletzt abgeleiteten Gesetze findet man am Schlusse des Buches mit den im § 47 zusammengestellten Grundgesetzen auf einer besondern Tafel vereinigt. Auch die Definitionen des Abschnittes I, 2 und andere sind am Schlusse des Buches zusammengestellt.

Zunächst beweisen wir den Satz:

Die Anzahl eines Begriffes ist gleich der Anzahl eines zweiten Begriffes, wenn eine Beziehung den ersten in den zweiten und wenn die Umkehrung dieser Beziehung den zweiten in den ersten abbildet.

A. Beweis des Satzes

$$\vdash\!\!\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{N}u = \mathfrak{N}v \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \mathfrak{U} q) \end{array}\text{‘},$$

a) Beweis des Satzes

$$\vdash\!\!\!\!\begin{array}{l} w \frown (v \frown) (p - q))\text{‘} \\ w \frown (u \frown) p) \\ u \frown (v \frown) q) \end{array},$$

§ 54. *Zerlegung.*

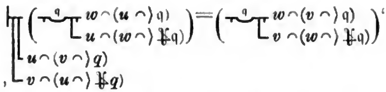
Nach der Definition (Z) ist der Satz

$$\vdash\!\!\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{N}u = \mathfrak{N}v\text{‘} \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \mathfrak{U} q) \end{array}, \qquad (\alpha$$

eine Folge von

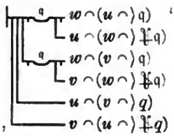
$$\vdash\!\!\!\!\begin{array}{l} \dot{\varepsilon}\left(\mathfrak{q}\!\!\begin{array}{l} \varepsilon \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ u \frown (\varepsilon \frown) \mathfrak{U}\mathfrak{q}) \end{array}\right) = \dot{\varepsilon}\left(\mathfrak{q}\!\!\begin{array}{l} \varepsilon \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (\varepsilon \frown) \mathfrak{U}\mathfrak{q}) \end{array}\right)\text{‘} \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \mathfrak{U} q) \end{array}, \qquad (\beta$$

Dieser Satz ist mit (Va) und nach Regel (5) abzuleiten aus dem Satze



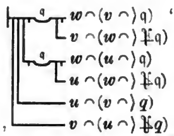
(γ

der mit (IVa) zu beweisen ist. Wir bedürfen dazu der Sätze



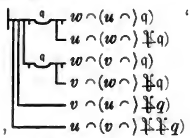
(δ

und



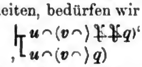
(ε

Wenn wir in (ε) ‚u' mit ‚v' vertauschen und für ‚q' ‚$\nmid q$' schreiben, so erhalten wir



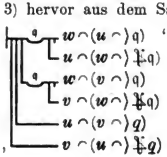
(ζ

Dieser Satz stimmt nahezu mit (δ) überein. Um (δ) aus (ζ) nach Regel (7) abzuleiten, bedürfen wir des Satzes



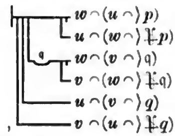
(η

Wir suchen also zunächst den Satz (ε) zu beweisen. Er geht durch Wendung (Regel 3) hervor aus dem Satze



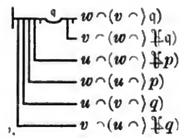
(ϑ

der nach Regel (5) folgt aus



(ι

Um den Sinn hiervon besser zu erkennen, verwandeln wir es durch Wendung in



(κ

Des bequemern Ausdrucks halber sage ich nun statt ‚Begriff, dessen Umfang durch ‚u' angedeutet wird ‚u-Begriff', statt ‚Beziehung, deren Umfang durch ‚p' angedeutet wird' ‚p-Beziehung', statt ‚durch die p-Beziehung werden die unter den w-Begriff fallenden Gegenstände den unter den u-Begriff fallenden eindeutig zugeordnet' ‚die p-Beziehung bildet den w-Begriff in den u-Begriff ab'. Wir können nun (κ) so in Worten wiedergeben:

‚Wenn die Umkehrung der p-Beziehung den u-Begriff in den w-Begriff abbildet und die p-Beziehung den w-Begriff in den u-Begriff abbildet, wenn ferner die q-Beziehung den u-Begriff in den v-Begriff und die $\nmid q$-Beziehung den v-Begriff in den u-Begriff abbildet, so giebt es eine Beziehung, die den w-Begriff in den v-Begriff und deren Umkehrung den v-Begriff in den w-Begriff abbildet‘.

Eine solche Beziehung ist offenbar eine aus der p-Beziehung und aus der q-Beziehung zusammengesetzte [1]), wie folgendes Bild anschaulich macht

$$w \underset{p}{\longrightarrow} u \underset{q}{\longrightarrow} v$$

Ich führe nun für den Umfang einer aus der p-Beziehung und aus der q-Beziehung zusammengesetzten Beziehung die abgekürzte Bezeichnung ‚$p \smile q$‘ ein, indem ich definire

$$\Vdash \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{r}}\!\!\top \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \quad\;\; \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown q) \end{array}\right) = p \smile q \qquad (B$$

Es wird nun auf den Satz ankommen

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top w \frown (v \frown)(p \smile q))‘ \\ \quad \llcorner\, w \frown (u \frown)p) \\ ,\; \llcorner\, u \frown (v \frown)q) \end{array} \qquad (\lambda$$

in Worten:

‚Wenn die p-Beziehung den w-Begriff in den u-Begriff abbildet und wenn die q-Beziehung den u-Begriff in den v-Begriff abbildet, so bildet die aus beiden zusammengesetzte ($p \smile q$)-Beziehung den w-Begriff in den v-Begriff ab‘.

Ferner bedürfen wir des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top v \frown (w \frown) \mathfrak{I}(p \smile q))‘ \\ \quad \llcorner\, u \frown (w \frown) \mathfrak{I}p) \\ ,\; \llcorner\, v \frown (u \frown) \mathfrak{I}q) \end{array} \qquad (\mu$$

der auf (λ) zurückgeführt werden kann mit dem Satze

$$,\vdash \mathfrak{I}(p \smile q) = \mathfrak{I}q \smile \mathfrak{I}p‘ \qquad (\nu$$

Wir versuchen zunächst den Satz (λ) zu beweisen. Aus der Definition (Δ) ist zu entnehmen, dass zweierlei bewiesen werden muss, nämlich erstens

$$\begin{array}{l} \vdash\!\smile^{\mathfrak{d}}\!\!\top \mathfrak{d} \frown w \quad ‘ \\ \quad\;\; \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad\qquad \llcorner\, \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ \quad \llcorner\, w \frown (u \frown) p) \\ ,\; \llcorner\, u \frown (v \frown) q) \end{array} \qquad (\xi$$

und zweitens

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \mathrm{I}(p \smile q)‘ \\ \quad \llcorner\, \mathrm{I}q \\ ,\; \llcorner\, \mathrm{I}p \end{array} \qquad (o$$

(ξ) geht hervor aus

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top d \frown w \quad ‘ \\ \quad\;\; \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad\qquad \llcorner\, d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ \quad \llcorner\, w \frown (u \frown) p) \\ ,\; \llcorner\, u \frown (v \frown) q) \end{array} \qquad (\pi$$

nach Regel (5). Um (π) in Worten auszusprechen, ist es bequemer, ihn zuvor durch Wendung in

$$\begin{array}{l} \vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top \mathfrak{a} \frown v \quad ‘ \\ \qquad\quad \llcorner\, d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ \quad \llcorner\, d \frown w \\ \quad \llcorner\, w \frown (u \frown) p) \\ ,\; \llcorner\, u \frown (v \frown) q) \end{array} \qquad (\varrho$$

zu verwandeln. Sagen wir nun statt ‚Gegenstand, der durch ‚d‘ angedeutet wird‘ kurz ‚d‘, so lautet unser Satz in Worten so:

‚Wenn d unter den w-Begriff fällt und wenn der w-Begriff durch die p-Beziehung in den u-Begriff abgebildet wird und wenn der u-Begriff durch die q-Beziehung in den v-Begriff abgebildet wird, so giebt es einen Gegenstand, der unter den v-Begriff fällt und zu dem d in der ($p \smile q$)-Beziehung steht‘.

1) Vergl. Grundlagen S. 86.

Der Beweis wird sich stützen müssen auf den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, d\frown(m\frown(p\smile q)) \\ \quad\llcorner\, e\frown(m\frown q) \\ \llcorner\, d\frown(e\frown p) \end{array} \qquad (\sigma$$

in Worten:

‚Wenn d zu e in der p-Beziehung steht und wenn e zu m in der q-Beziehung steht, so steht d zu m in der $(p\smile q)$-Beziehung'.

Dies wird abzuleiten sein aus dem Satze

$$\vdash\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\top\, d\frown(\mathfrak{r}\frown p) \\ \quad\llcorner\, \mathfrak{r}\frown(m\frown q) \end{array}\right) = d\frown(m\frown(p\smile q)) \qquad (\tau$$

der aus der Definition (B) folgt. Um ihn zu beweisen, bedürfen wir des Satzes

$$\vdash f(a, b) = a\frown(b\frown\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \qquad (\upsilon$$

denn die linke Seite der Definitionsgleichung (B) ist ein Doppelwerthverlauf. (υ) ist auf den Satz

$$\vdash f(a) = a\frown\dot{\varepsilon}f(\varepsilon) \qquad (\varphi$$

zurückzuführen, der aus der Definition (A) abzuleiten ist. Nach dieser ist zu beweisen

$$\vdash f(a) = \backslash\dot{\alpha}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \quad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) \qquad (\chi$$

Das muss mit (VIa) geschehen und mit dem Satze

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = \mathfrak{a} \\ \quad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) = (f(a) = \mathfrak{a}) \qquad (\psi$$

indem man in (VIa) für ‚$f(\xi)$' nimmt

$$\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = \xi \\ \quad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}$$

und ‚a' durch ‚$f(a)$' ersetzt. (ψ) geht nach Regel (5) hervor aus

$$\vdash\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) = (f(a) = b) \qquad (\omega$$

was mit (IVa) zu beweisen ist. Dazu bedürfen wir der Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \qquad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \llcorner\, f(a) = b \end{array} \qquad (\alpha'$$

und

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, f(a) = b \\ \llcorner\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \qquad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \qquad (\beta'$$

von denen der erste durch Wendung nach Regel (3) folgt aus

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, f(a) = b \\ \llcorner\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \qquad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \qquad (\gamma'$$

Schreiben wir nun (IIb) in der Form

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, f(a) = b \\ \quad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \qquad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}$$

so sehen wir, dass hieraus mit (IIIe) (γ') folgt. Der Satz (β') folgt durch Wendung aus

$$\begin{array}{l} \vdash\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \qquad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \llcorner\!\top\, f(a) = b \end{array} \qquad (\delta'$$

und dies nach Regel (5) aus

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, g(a) = b \\ \quad\llcorner\, \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}g(\varepsilon) \\ \llcorner\!\top\, f(a) = b \end{array} \qquad (\varepsilon'$$

Dieser Satz geht nach Regel (7) mit (Vb) hervor aus

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, g(a) = b \\ \quad\llcorner\, f(a) = g(a) \\ \llcorner\!\top\, f(a) = b \end{array}$$

das mit Vertauschung der Unterglieder nur ein besonderer Fall von (IIIc) ist. Wir bauen nun hiernach den Beweis auf. Zu der Ableitung von (2) ist noch zu bemerken, dass bei der ersten Anziehung von (1) nach Regel (9) ‚$f(\xi)$' durch die Functionsmarke ‚$f(\xi, b)$' ersetzt ist. (III c) ist darauf in der Form

$$\text{‚}\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ f(a, b) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, b) \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, b) = b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) \end{array}\text{'}$$

zu denken. Bei der zweiten Anziehung von (1) ist dieses in der Form

$$\text{‚}\vdash \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, b) = b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)\text{'}$$

zu denken, indem statt ‚$f(\xi)$' gesetzt ist ‚$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \xi)$' und statt ‚$a$' ‚$b$' und statt ‚$\varepsilon$' ‚$\alpha$' nach den Regeln (9) und (11).

§ 55. *Aufbau.*

$$\text{V b}\quad \vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon) \end{array}$$

(III c): - - - - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} g(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon) \\ f(a) = b \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \\ f(a) = b \end{array} \qquad (\beta$$

$\times$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) = b \\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \end{array} \qquad (\gamma$$

(IVa): ————————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) = (—f(a) = b) \\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \\ f(a) = b \end{array} \qquad (\delta$$

——•——

$$\text{III e}\quad \vdash \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$$

(II b): ————————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) = b \\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$\times$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \\ f(a) = b \end{array} \qquad (\zeta$$

(δ): ————————

$$\vdash \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) = (—f(a) = b) \qquad (\eta$$

(III a): ————————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) = (f(a) = b) \\ (—f(a) = b) = (f(a) = b) \end{array} \qquad (\vartheta$$

(III i):: ————————

$$\vdash \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = b \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right) = (f(a) = b) \qquad (\iota$$

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right) = (f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a})$$ (κ

(VI a): ————————————

$$\vdash f(a) = \backslash\grave{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = \alpha\\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right)$$ (λ

(III a): ————————————

$$\vdash\begin{array}{l} f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)\\ \backslash\grave{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = \alpha\\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)\end{array}$$ (μ

(A) :: ————————————

$$\vdash f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$$ (1

——— • ———

1 $\vdash f(a, b) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, b)$

(III c): ————————————

$$\vdash\begin{array}{l} f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))\\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, b) = b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)\end{array}$$ (α

(1) :: ————————————

$$\vdash f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))$$ (2

(III c): ————————————

$$\vdash\begin{array}{l} f(a, b) = a \frown (b \frown q)\\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = q\end{array}$$ (3

——— • ———

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown p)\\ \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown q)\end{array}\right) = p \smile q$$ (B

(3): ————————————

$$\vdash \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}d \frown (\mathfrak{r} \frown p)\\ \mathfrak{r} \frown (m \frown q)\end{array}\right) = d \frown (m \frown (p \smile q))$$ (4

(III o): ————————————

$$\vdash\begin{array}{l} d \frown (m \frown (p \smile q))\\ \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}d \frown (\mathfrak{r} \frown p)\\ \mathfrak{r} \frown (m \frown q)\end{array}\end{array}$$ (α

×

$$\vdash\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}d \frown (\mathfrak{r} \frown p)\\ \mathfrak{r} \frown (m \frown q)\end{array}\\ d \frown (m \frown (p \smile q))\end{array}$$ (β

(II a): - - - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} d \frown (e \frown p)\\ e \frown (m \frown q)\\ d \frown (m \frown (p \smile q))\end{array}$$ (γ

×

$$\vdash\begin{array}{l} d \frown (m \frown (p \smile q))\\ e \frown (m \frown q)\\ d \frown (e \frown p)\end{array}$$ (5

§ 56. *Zerlegung.*

Um nun den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown w \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p - q)) \\ \quad w \frown (u \frown \rangle p) \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(§ 54, π) zu beweisen, müssen wir auf ($\varDelta$) zurückgehen. Daraus leiten wir den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown w \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown u \\ \qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown p) \\ \quad w \frown (u \frown \rangle p) \end{array} \qquad (\beta$$

ab. Um von diesem aus (α) zu erreichen, müssen wir den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown u \\ \qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown p) \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p - q)) \end{array} \qquad (\gamma$$

haben, der nach Regel (5) hervorgeht aus

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown u \\ \quad d \frown (e \frown p) \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p - q)) \end{array} \qquad (\delta$$

Wir können nun den Satz (β) auch so schreiben:

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown u \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \end{array} \qquad (\beta$$

Um hieraus (δ) zu gewinnen, bedürfen wir des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad d \frown (e \frown p) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p - q)) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

der nach Regel (5) folgt aus

$$\begin{array}{l} \vdash m \frown v \\ \quad e \frown (m \frown q) \\ \quad d \frown (e \frown p) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p - q)) \end{array} \qquad (\zeta$$

Dieser Satz ist leicht mit (II a) und (5) zu beweisen. Es kommt also darauf an, den Satz (β) aus ($\varDelta$) abzuleiten. Das geschieht mit

$$\begin{array}{l} \vdash F(f(a, b)) \\ \quad F(a \frown (b \frown q)) \\ \quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array} \qquad (\eta$$

was aus (3) folgt.

§ 57. *Aufbau.*

$$\begin{array}{l} 3 \quad \vdash f(a, b) = a \frown (b \frown q) \\ \qquad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array}$$

(III a): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash F(f(a, b)) \\ \quad F(a \frown (b \frown q)) \\ \quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array} \qquad (6$$

———•———

$$\varDelta \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{d}}\ \mathfrak{d} \frown \varepsilon \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown \alpha \\ \qquad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array}\right] = \rangle q$$

(6): ————————————————

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{d}}\ \mathfrak{d} \frown u \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad \mathrm{I}q \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \end{array} \qquad (7$$

(I b): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{d}}\ \mathfrak{d} \frown u \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(II a): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown u \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad u \frown (v \frown \rangle q) \end{array} \qquad (8$$

———•———

5 $\vdash d \frown (m \frown (p \smile q))$
$e \frown (m \frown q)$
$d \frown (e \frown p)$

(IIa): - - - - - - - -

$m \frown v$
$e \frown (m \frown q)$
$d \frown (e \frown p)$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q))$ (α

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$e \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$d \frown (e \frown p)$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q))$ (β

(8): - - - - - - - - -

$e \frown u$
$d \frown (e \frown p)$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q))$
$u \frown (v \frown \rangle q)$ (γ

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown u$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q))$
$u \frown (v \frown \rangle q)$ (δ

(8): - - - - - - - - -

$d \frown w$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q))$
$u \frown (v \frown \rangle q)$
$w \frown (u \frown \rangle p)$ (ε

$\mathfrak{d}$: $\mathfrak{d} \frown w$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q))$
$u \frown (v \frown \rangle q)$
$w \frown (u \frown \rangle p)$ (9

———•———

3 $\vdash f(a, b) \;= a \frown (b \frown q)$
$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q$

(IIIc): - - - - - - - - -

$\vdash F(a \frown (b \frown q))$
$F(f(a, b))$
$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q$ (10

———•———

Δ $\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\Big[$ $\mathfrak{d}$: $\mathfrak{d} \frown \varepsilon$; $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown \alpha$; $\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$; $\mathrm{I}q$ $\Big] = \rangle q$

(10): ————————————

$w \frown (v \frown \rangle q)$
$\mathfrak{d}$: $\mathfrak{d} \frown w$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathrm{I}q$ (α

(Ie): - - - - - - - - -

$w \frown (v \frown \rangle q)$
$\mathfrak{d}$: $\mathfrak{d} \frown w$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathrm{I}q$ (11

———•———

11 $w \frown (v \frown \rangle (p \smile q))$
$\mathfrak{d}$: $\mathfrak{d} \frown w$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown v$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q))$
$\mathrm{I}(p \smile q)$

(9):: - - - - - - - - - - -

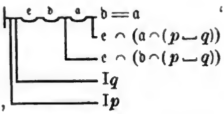
$w \frown (v \frown \rangle (p \smile q))$
$u \frown (v \frown \rangle q)$
$w \frown (u \frown \rangle p)$
$\mathrm{I}(p \smile q)$ (12

§ 58. *Zerlegung.*

Wir müssen jetzt den Satz (§ 54, *o*)

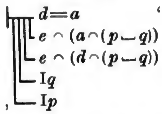
$\vdash \mathrm{I}(p \smile q)$'
$\mathrm{I}q$
, $\mathrm{I}p$ (α

beweisen; d. h.: ‚die aus der *p*-Beziehung und der *q*-Beziehung zusammengesetzte Beziehung ist eindeutig, wenn sowohl die *p*-Beziehung, als auch die q-Beziehung eindeutig ist'. Nach der Definition (I') ist zu beweisen



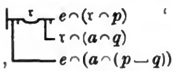
(β

was nach Regel (5) hervorgeht aus



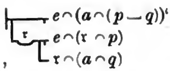
(γ

Aus der Definition (B) ist nun leicht zu folgern



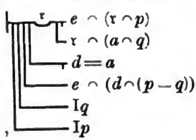
(δ

oder



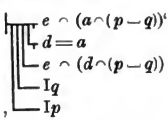
(ε

Mit diesem Satze gelangt man von



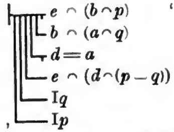
(ζ

leicht zu dem Satze



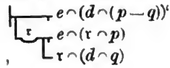
(η

aus dem (γ) durch Wendung folgt. Der Satz (ζ) geht nun nach Regel (5) hervor aus



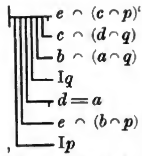
(ϑ

Dieser Satz ist in ähnlicher Weise mit



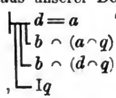
(ε

aus



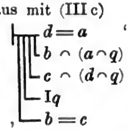
(ι

abzuleiten wie (η) aus (ϑ). Es wird dabei das ‚c' durch das ‚r' zu ersetzen sein. Deshalb ist die Verschiedenheit der Buchstaben ‚b' und ‚c' nothwendig; sonst würde nach Regel (5) das ‚r' nicht nur an den Stellen einzuführen sein, wo jetzt ‚c' steht, sondern auch da, wo ‚b' steht. Nun folgt aus unserer Definition (I')



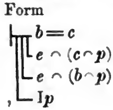
(κ

und hieraus mit (III c)



(λ

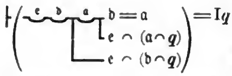
Wendet man hierauf den Satz (κ) an in der Form



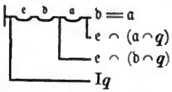
(κ

so beweist man den Satz (ι), von dem ausgehend wir zu unserm Satze (α) gelangen können, wie wir sahen.

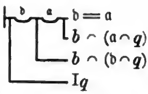
§ 59. *Aufbau.*

Γ 

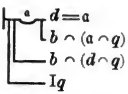
(III a): ————————

 (α

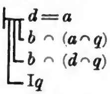
(II a): - - - - - - - -

 (β

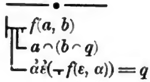
(II a): - - - - - - -

 (γ

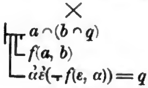
(II a): - - - - - -

 (13

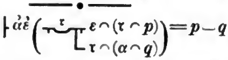
——•——

6 

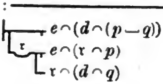
×

 (14

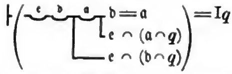
——•——

B 

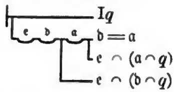
(14): ————————

 (15

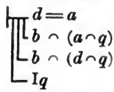
——•——

Γ 

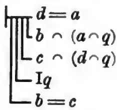
(III c): ————————

 (16

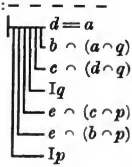
——•——

13 

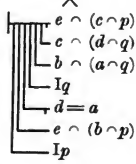
(III c): ————

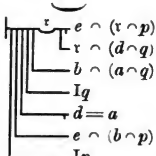
 (α

(13):: - - - - -

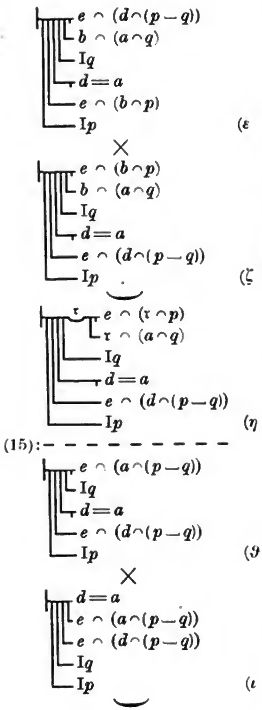
 (β

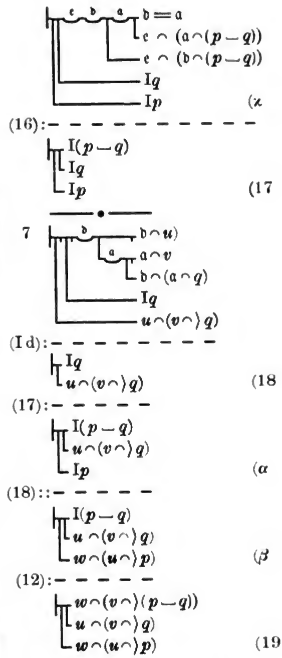
×

 (γ

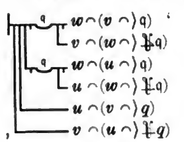
 (δ

(15): - - - - - - -





b) Beweis des Satzes



und Ende des Abschnittes *A*.

§ 60. *Zerlegung.*

Wir haben nun den Satz (§ 54, ν)

$$,\vdash \text{⅄}(p \smile q) = \text{⅄}q \smile \text{⅄}p\text{'} \qquad (\alpha$$

zu beweisen. Nach den Definitionen (E) und (B) kommt dies darauf hinaus, den Satz

$$,\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown \text{⅄}q) \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown \text{⅄}p) \end{array}\right)\text{'} \qquad (\beta$$

abzuleiten. Wir können uns dazu des Satzes

$$,\vdash \begin{array}{l} \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \alpha)\text{'} \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\gamma$$

bedienen, den wir auch sonst noch brauchen werden und der durch zweimalige Anwendung des Satzes (Va) bewiesen werden kann. Um diesen Satz hier anzuwenden, müssen wir den Satz

$$,\vdash b \frown (a \frown (p \smile q)) = \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} a \frown (\mathfrak{r} \frown \text{⅄}q) \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \text{⅄}p) \end{array}\right)\text{'} \qquad (\delta$$

haben, der mit (4) aus

$$,\vdash \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} b \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (a \frown q) \end{array}\right) = \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} a \frown (\mathfrak{r} \frown \text{⅄}q) \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \text{⅄}p) \end{array}\right)\text{'} \qquad (\varepsilon$$

folgt. (ε) ist mit (IVa) zu beweisen. Wir bedürfen dazu der Sätze

$$,\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} b \frown (\mathfrak{r} \frown p)\text{'} \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (a \frown q) \end{array} \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} a \frown (\mathfrak{r} \frown \text{⅄}q) \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \text{⅄}p) \end{array} \end{array} \qquad (\zeta$$

und

$$,\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} a \frown (\mathfrak{r} \frown \text{⅄}q)\text{'} \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \text{⅄}p) \end{array} \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} b \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (a \frown q) \end{array} \end{array} \qquad (\eta$$

Wir leiten sie aus dem Satze

$$,\vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \text{⅄}q)\text{'} \qquad (\vartheta$$

ab, der leicht aus (E) folgt. Den so bewiesenen Satz (α) benutzen wir, wie in § 54 angedeutet wurde, zum Beweise des Satzes (§ 54, μ)

$$,\vdash \begin{array}{l} v \frown (w \frown)\, \text{⅄}(p \smile q))\text{'} \\ \llcorner\, u \frown (w \frown)\, \text{⅄}p) \\ \llcorner\, v \frown (u \frown)\, \text{⅄}q) \end{array} \qquad (\iota$$

und leiten aus diesem und (19) den Satz (§ 54, ε) ab.

§ 61. *Aufbau.*

$$\text{Va} \quad \vdash \begin{array}{l} \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, d) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, d) \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}, d) = g(\mathfrak{a}, d) \end{array}$$

(IIa)::- - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, d) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, d) \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \mathfrak{a}) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \mathfrak{a}) \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\beta$$

(Va):- - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \alpha) \\ \llcorner\, \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (20$$

———•———

$$E \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown q)) = \text{⅄}q$$

(3):————————————

$$\vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \text{⅄}q) \qquad (21$$

(IIIc):————————————

$$\vdash \begin{array}{l} F(a \frown (r \frown \text{⅄}q)) \\ \llcorner\, F(r \frown (a \frown q)) \end{array} \qquad (22$$

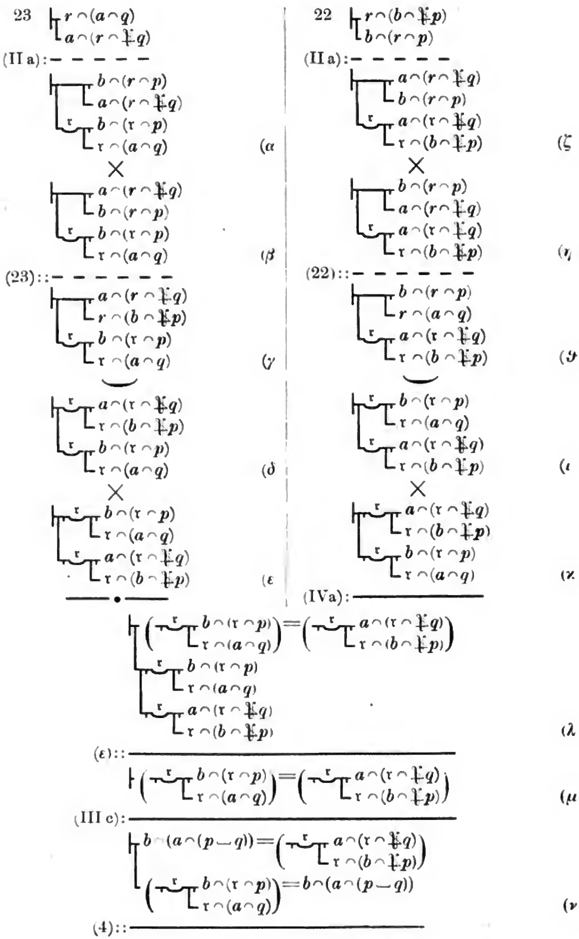
———•———

$$21 \quad \vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \text{⅄}q)$$

(IIIa):————————————

$$\vdash \begin{array}{l} F(r \frown (a \frown q)) \\ \llcorner\, F(a \frown (r \frown \text{⅄}q)) \end{array} \qquad (23$$

———•———



$$\vdash b \frown (a \frown (p \smile q)) = \left(\stackrel{\mathfrak{r}}{\smile} \begin{array}{l} a \frown (\mathfrak{r} \frown \ddagger q) \\ \mathfrak{r} \frown (b \frown \ddagger p) \end{array} \right) \qquad (\xi$$

$$\vdash \stackrel{\mathfrak{b}}{\smile}\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) = \left(\stackrel{\mathfrak{r}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{r} \frown \ddagger q) \\ \mathfrak{r} \frown (\mathfrak{b} \frown \ddagger p) \end{array} \right) \qquad (o$$

(20): ———————————————

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\stackrel{\mathfrak{r}}{\smile} \begin{array}{l} \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown \ddagger q) \\ \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown \ddagger p) \end{array} \right) \qquad (\pi$$

(III c): ———————————————

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \ddagger q \smile \ddagger p \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\stackrel{\mathfrak{r}}{\smile} \begin{array}{l} \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown \ddagger q) \\ \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown \ddagger p) \end{array} \right) = \ddagger q \smile \ddagger p \end{array} \qquad (\varrho$$

(B):: ———————————————

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \ddagger q \smile \ddagger p \qquad (\sigma$$

(III c): ———————————————

$$\vdash \begin{array}{l} \ddagger(p \smile q) = \ddagger q \smile \ddagger p \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \ddagger(p \smile q) \end{array} \qquad (\tau$$

(E):: ———————————————

$$\vdash \ddagger(p \smile q) = \ddagger q \smile \ddagger p \qquad (24$$

(III a): ———————————————

$$\vdash \begin{array}{l} v \frown (w \frown) \ddagger (p \smile q)) \\ v \frown (w \frown) (\ddagger q \smile \ddagger p)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(19):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} v \frown (w \frown) \ddagger (p \smile q)) \\ u \frown (w \frown) \ddagger p) \\ v \frown (u \frown) \ddagger q) \end{array} \qquad (\beta$$

(II a): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown) (p \smile q)) \\ u \frown (w \frown) \ddagger p) \\ v \frown (u \frown) \ddagger q) \\ \stackrel{\mathfrak{q}}{\smile} \begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \end{array} \qquad (\gamma$$

———•———

$$19 \quad \vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown) (p \smile q)) \\ u \frown (v \frown) q) \\ w \frown (u \frown) p) \end{array}$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (u \frown) p) \\ u \frown (v \frown) q) \\ w \frown (v \frown) (p \smile q)) \end{array} \qquad (\delta$$

(γ):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (u \frown) p) \\ u \frown (w \frown) \ddagger p) \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \ddagger q) \\ \stackrel{\mathfrak{q}}{\smile} \begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$$\vdash \begin{array}{l} \stackrel{\mathfrak{q}}{\smile} \begin{array}{l} w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ u \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \ddagger q) \\ \stackrel{\mathfrak{q}}{\smile} \begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \end{array} \qquad (\zeta$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} \stackrel{\mathfrak{q}}{\smile} \begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \\ \stackrel{\mathfrak{q}}{\smile} \begin{array}{l} w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ u \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \ddagger q) \end{array} \qquad (25$$

§ 62. *Zerlegung.*

Um nun den Satz (§ 54, δ) aus (25) abzuleiten, bedürfen wir des Satzes (§ 54, η) bei der ersten Anziehung von (1) nach Regel (9) ‚$f(\xi)$' durch die Functionsmarke ‚$f(\xi, b)$' ersetzt ist. (III c) ist darauf in der Form

$$‚\begin{array}{l}\vdash f(a, b) = a \frown (b \frown \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad f(a, b) = a \frown \dot{\varepsilon}f(\varepsilon, b) \\ \quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon, b) = b \frown \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)\end{array}'$$

zu denken. Bei der zweiten Anziehung von (1) ist dieses in der Form

$$‚\vdash \dot{\varepsilon}f(\varepsilon, b) = b \frown \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)'$$

zu denken, indem statt ‚$f(\xi)$' gesetzt ist ‚$\dot{\varepsilon}f(\varepsilon, \xi)$' und statt ‚$a$' ‚$b$' und statt ‚$\varepsilon$' ‚$\alpha$' nach den Regeln (9) und (11).

§ 55. *Aufbau.*

V b $\begin{array}{l}\vdash f(a) = g(a) \\ \quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}g(\varepsilon)\end{array}$

(III c): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash g(a) = b \\ \quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}g(\varepsilon) \\ \quad f(a) = b\end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{g}\!\!\smile\; \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \quad f(a) = b\end{array} \qquad (\beta$$

$\times$

$$\begin{array}{l}\vdash f(a) = b \\ \quad \mathfrak{g}\!\!\smile\; \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad\quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array} \qquad (\gamma$$

(IV a): ———————————

$$\begin{array}{l}\vdash \left(\mathfrak{g}\!\!\smile \begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right) = (—f(a) = b) \\ \quad \mathfrak{g}\!\!\smile\; \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad\quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \quad f(a) = b\end{array} \qquad (\delta$$

———•———

III e $\vdash \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}f(\varepsilon)$

(II b): ———————

$$\begin{array}{l}\vdash f(a) = b \\ \quad \mathfrak{g}\!\!\smile\; \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad\quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array} \qquad (\varepsilon$$

$\times$

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{g}\!\!\smile\; \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \quad f(a) = b\end{array} \qquad (\zeta$$

(δ): ———————————

$$\vdash \left(\mathfrak{g}\!\!\smile \begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right) = (—f(a) = b) \qquad (\eta$$

(III a): ———————————————

$$\begin{array}{l}\vdash \left(\mathfrak{g}\!\!\smile \begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right) = (f(a) = b) \\ \quad (—f(a) = b) = (f(a) = b)\end{array} \qquad (\vartheta$$

(III i):: ———————————————

$$\vdash \left(\mathfrak{g}\!\!\smile \begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = b \\ \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right) = (f(a) = b) \qquad (\iota$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{|l} \mathfrak{g}(a) = \mathfrak{a} \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = (f(a) = \mathfrak{a})$$ (κ

(VI a): ―――――――――――――――――

$$\vdash f(a) = \setminus \grave{\alpha} \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{|l} \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right)$$ (λ

(III a): ―――――――――――――――

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \setminus \grave{\alpha} \left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{|l} \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array}$$ (μ

(A):: ―――――――――――――――――

$$\vdash f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$$ (1

――•――

1 $\vdash f(a, b) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, b)$

(III c): ――――――――――

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, b) = b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) \end{array}$$ (α

(1):: ――――――――――

$$\vdash f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))$$ (2

(III c): ――――――――――

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} f(a, b) = a \frown (b \frown q) \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array}$$ (3

――•――

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{|l} \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown q) \end{array} \right) = p \smile q$$ (B

(3): ――――――――――――――

$$\vdash \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{|l} d \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (m \frown q) \end{array} \right) = d \frown (m \frown (p \smile q))$$ (4

(III c): ――――――――――――――――――

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} d \frown (m \frown (p \smile q)) \\ \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{|l} d \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (m \frown q) \end{array} \end{array}$$ (α

×

$$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\begin{array}{|l} d \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (m \frown q) \\ d \frown (m \frown (p \smile q)) \end{array}$$ (β

(II a): - - - - - - - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} d \frown (e \frown p) \\ e \frown (m \frown q) \\ d \frown (m \frown (p \smile q)) \end{array}$$ (γ

×

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} d \frown (m \frown (p \smile q)) \\ e \frown (m \frown q) \\ d \frown (e \frown p) \end{array}$$ (5

§ 56. *Zerlegung.*

Um nun den Satz

$$\begin{array}{lll} \vdash & & d \frown w \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ & & d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ & & w \frown (u \frown) p \\ , & & u \frown (v \frown) q \end{array} \qquad (\alpha$$

(§ 54, π) zu beweisen, müssen wir auf (Δ) zurückgehen. Daraus leiten wir den Satz

$$\begin{array}{lll} \vdash & & d \frown w \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown u \\ & & d \frown (\mathfrak{a} \frown p) \\ , & & w \frown (u \frown) p \end{array} \qquad (\beta$$

ab. Um von diesem aus (α) zu erreichen, müssen wir den Satz

$$\begin{array}{lll} \vdash & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown u \\ & & d \frown (\mathfrak{a} \frown p) \\ & & u \frown (v \frown) q \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ , & & d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \end{array} \qquad (\gamma$$

haben, der nach Regel (5) hervorgeht aus

$$\begin{array}{lll} \vdash & & e \frown u \\ & & d \frown (e \frown p) \\ & & u \frown (v \frown) q \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ , & & d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \end{array} \qquad (\delta$$

Wir können nun den Satz (β) auch so schreiben:

$$\begin{array}{lll} \vdash & & e \frown u \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ & & e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ , & & u \frown (v \frown) q \end{array} \qquad (\beta$$

Um hieraus (δ) zu gewinnen, bedürfen wir des Satzes

$$\begin{array}{lll} \vdash & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ & & e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ & & d \frown (e \frown p) \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ , & & d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

der nach Regel (5) folgt aus

$$\begin{array}{lll} \vdash & & m \frown v \\ & & e \frown (m \frown q) \\ & & d \frown (e \frown p) \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ , & & d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \end{array} \qquad (\zeta$$

Dieser Satz ist leicht mit (II a) und (5) zu beweisen. Es kommt also darauf an, den Satz (β) aus (Δ) abzuleiten. Das geschieht mit

$$\begin{array}{l} \vdash F(f(a, b)) \\ \quad F(a \frown (b \frown q)) \\ , \quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array} \qquad (\eta$$

was aus (3) folgt.

§ 57. *Aufbau.*

$$3 \quad \begin{array}{l} \vdash f(a, b) \quad = a \frown (b \frown q) \\ \quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array}$$

(III a): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash F(f(a, b)) \\ \quad F(a \frown (b \frown q)) \\ \quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array} \qquad (6$$

——•——

$$\Delta \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} \left[\begin{array}{lll} \smile^{\mathfrak{b}} & & \mathfrak{b} \frown \varepsilon \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown \alpha \\ & & \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ & & \mathrm{I} q \end{array} \right] = \rangle q$$

(6): ______________________

$$\begin{array}{llll} \vdash & \smile^{\mathfrak{b}} & & \mathfrak{b} \frown u \\ & & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ & & & \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ & & & \mathrm{I} q \\ & & & u \frown (v \frown) q \end{array} \qquad (7$$

(I b): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{llll} \vdash & \smile^{\mathfrak{b}} & & \mathfrak{b} \frown u \\ & & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ & & & \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ & & & u \frown (v \frown) q \end{array} \qquad (\alpha$$

(II a): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{lll} \vdash & & e \frown u \\ & \smile^{\mathfrak{a}} & \mathfrak{a} \frown v \\ & & e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ & & u \frown (v \frown) q \end{array} \qquad (8$$

——•——

$$5 \quad \vdash \begin{array}{l} d \frown (m \frown (p \smile q)) \\ e \frown (m \frown q) \\ d \frown (e \frown p) \end{array}$$

(II a): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} m \frown v \\ e \frown (m \frown q) \\ d \frown (e \frown p) \\ \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \quad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ d \frown (e \frown p) \\ \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \end{array} \qquad (\beta$$

(8): - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown u \\ d \frown (e \frown p) \\ \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ u \frown (v \frown)\, q) \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown u \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown p) \\ \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ u \frown (v \frown)\, q) \end{array} \qquad (\delta$$

(8): - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown w \\ \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ u \frown (v \frown)\, q) \\ w \frown (u \frown)\, p) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{b}:\ \mathfrak{b} \frown w \\ \quad \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ u \frown (v \frown)\, q) \\ w \frown (u \frown)\, p) \end{array} \qquad (9$$

———•———

$$3 \quad \vdash \begin{array}{l} f(a, b) \quad = a \frown (b \frown q) \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array}$$

(III c): - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} F(a \frown (b \frown q)) \\ F(f(a, b)) \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array} \qquad (10$$

———•———

$$\varDelta \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{b}:\ \mathfrak{b} \frown \varepsilon \\ \quad \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown \alpha \\ \qquad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \right] =)\, q$$

(10): ————————————————

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown)\, q) \\ \mathfrak{b}:\ \mathfrak{b} \frown w \\ \quad \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\alpha$$

(I e): - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown)\, q) \\ \mathfrak{b}:\ \mathfrak{b} \frown w \\ \quad \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (11$$

———•———

$$11 \quad \vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown)\, (p \smile q)) \\ \mathfrak{b}:\ \mathfrak{b} \frown w \\ \quad \mathfrak{a}:\ \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) \\ \mathrm{I}(p \smile q) \end{array}$$

(9) : : - - - - - - - - - - -

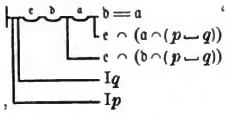
$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown)\, (p \smile q)) \\ u \frown (v \frown)\, q) \\ w \frown (u \frown)\, p) \\ \mathrm{I}(p \smile q) \end{array} \qquad (12$$

§ 58. *Zerlegung.*

Wir müssen jetzt den Satz (§ 54, *o*)

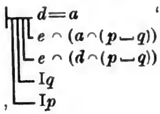
$$„\vdash \begin{array}{l} \mathrm{I}(p \smile q)“ \\ \mathrm{I}q \\ \mathrm{I}p \end{array} \qquad (\alpha$$

beweisen; d. h.: „die aus der p-Beziehung und der q-Beziehung zusammengesetzte Beziehung ist eindeutig, wenn sowohl die p-Beziehung, als auch die q-Beziehung eindeutig ist'. Nach der Definition (I') ist zu beweisen



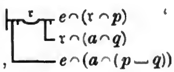
(β

was nach Regel (5) hervorgeht aus



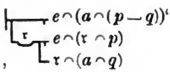
(γ

Aus der Definition (B) ist nun leicht zu folgern



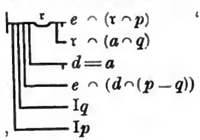
(δ

oder



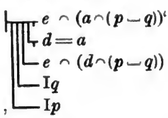
(ε

Mit diesem Satze gelangt man von



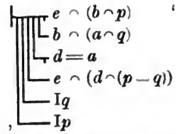
(ζ

leicht zu dem Satze



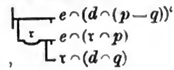
(η

aus dem (γ) durch Wendung folgt. Der Satz (ζ) geht nun nach Regel (5) hervor aus



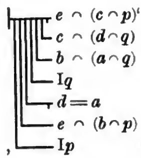
(ϑ

Dieser Satz ist in ähnlicher Weise mit



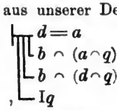
(ε

aus



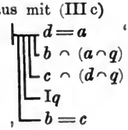
(ι

abzuleiten wie (η) aus (ϑ). Es wird dabei das ‚c' durch das ‚$\mathfrak{r}$' zu ersetzen sein. Deshalb ist die Verschiedenheit der Buchstaben ‚b' und ‚c' nothwendig; sonst würde nach Regel (5) das ‚$\mathfrak{r}$' nicht nur an den Stellen einzuführen sein, wo jetzt ‚c' steht, sondern auch da, wo ‚b' steht. Nun folgt aus unserer Definition (I')



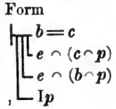
($\varkappa$

und hieraus mit (III c)



(λ

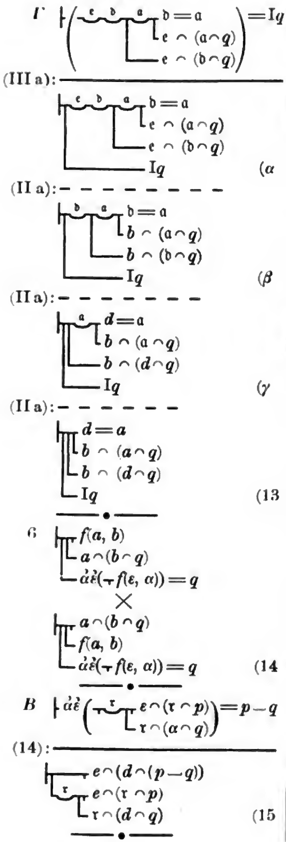
Wendet man hierauf den Satz ($\varkappa$) an in der Form

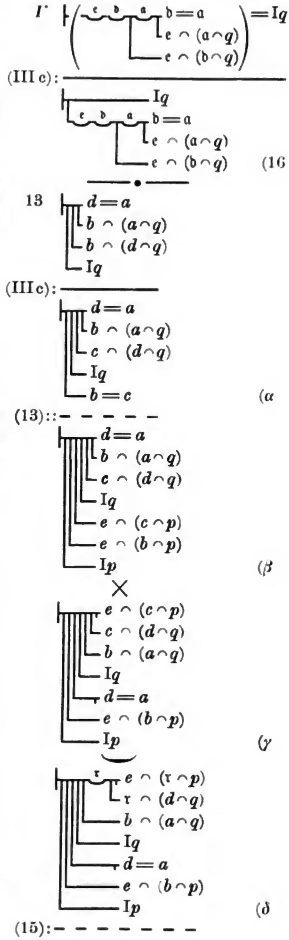


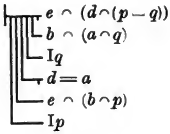
($\varkappa$

so beweist man den Satz (ι), von dem ausgehend wir zu unserm Satze (α) gelangen können, wie wir sahen.

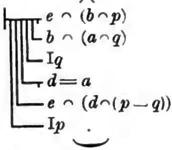
§ 59. *Aufbau.*



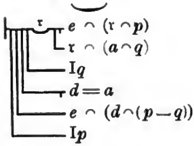




(ε

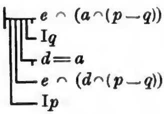


(ζ

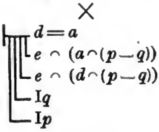


(η

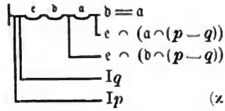
(15):- - - - - - - - -



(ϑ

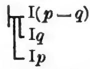


(ι



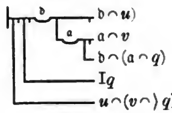
(κ

(16):- - - - - - - - - - -

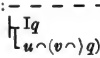


(17

7

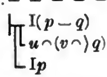


(Id):- - - - - - - -



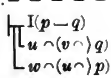
(18

(17):- - - - -



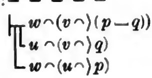
(α

(18)::- - - - -



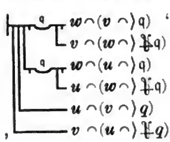
(β

(12):- - - - -



(19

b) Beweis des Satzes



und Ende des Abschnittes *A*.

§ 60. *Zerlegung.*

Wir haben nun den Satz (§ 54, ν)

$$\vdash \maltese(p \smile q) = \maltese q \smile \maltese p \qquad (\alpha$$

zu beweisen. Nach den Definitionen (E) und (B) kommt dies darauf hinaus, den Satz

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown \maltese q) \\ \quad\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown \maltese p) \end{array} \right) \qquad (\beta$$

abzuleiten. Wir können uns dazu des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!-\!\!-\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \alpha) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \end{array} \qquad (\gamma$$

bedienen, den wir auch sonst noch brauchen werden und der durch zweimalige Anwendung des Satzes (Va) bewiesen werden kann. Um diesen Satz hier anzuwenden, müssen wir den Satz

$$\vdash b \frown (a \frown (p \smile q)) = \left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top a \frown (\mathfrak{r} \frown \maltese q) \\ \quad\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \maltese p) \end{array} \right) \qquad (\delta$$

haben, der mit (4) aus

$$\vdash \left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top b \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \quad\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (a \frown q) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top a \frown (\mathfrak{r} \frown \maltese q) \\ \quad\ \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \maltese p) \end{array} \right) \qquad (\varepsilon$$

folgt. (ε) ist mit (IVa) zu beweisen. Wir bedürfen dazu der Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top b \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \quad\ \ \quad \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (a \frown q) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top a \frown (\mathfrak{r} \frown \maltese q) \\ \quad\ \ \quad \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \maltese p) \end{array} \qquad (\zeta$$

und

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top a \frown (\mathfrak{r} \frown \maltese q) \\ \quad\ \ \quad \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (b \frown \maltese p) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\top b \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \quad\ \ \quad \llcorner\, \mathfrak{r} \frown (a \frown q) \end{array} \qquad (\eta$$

Wir leiten sie aus dem Satze

$$\vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \maltese q) \qquad (\vartheta$$

ab, der leicht aus (E) folgt. Den so bewiesenen Satz (α) benutzen wir, wie in § 54 angedeutet wurde, zum Beweise des Satzes (§ 54, μ)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top v \frown (w \frown) \maltese(p \smile q)) \\ \quad \ \ \llcorner\, u \frown (w \frown) \maltese p) \\ \quad \llcorner\, v \frown (u \frown) \maltese q) \end{array} \qquad (\iota$$

und leiten aus diesem und (19) den Satz (§ 54, ε) ab.

§ 61. *Aufbau.*

$$\text{Va} \quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, d) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, d) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}, d) = g(\mathfrak{a}, d) \end{array}$$

(IIa) : : - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\!\!-\, \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, d) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, d) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \mathfrak{a}) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \mathfrak{a}) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \end{array} \qquad (\beta$$

(Va) : - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\!\!-\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \alpha) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \end{array} \qquad (20$$

———•———

$$E \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown q)) = \maltese q$$

(3) : ———————————

$$\vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \maltese q) \qquad (21$$

(IIIc) : ———————————

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top F(a \frown (r \frown \maltese q)) \\ \quad \llcorner\, F(r \frown (a \frown q)) \end{array} \qquad (22$$

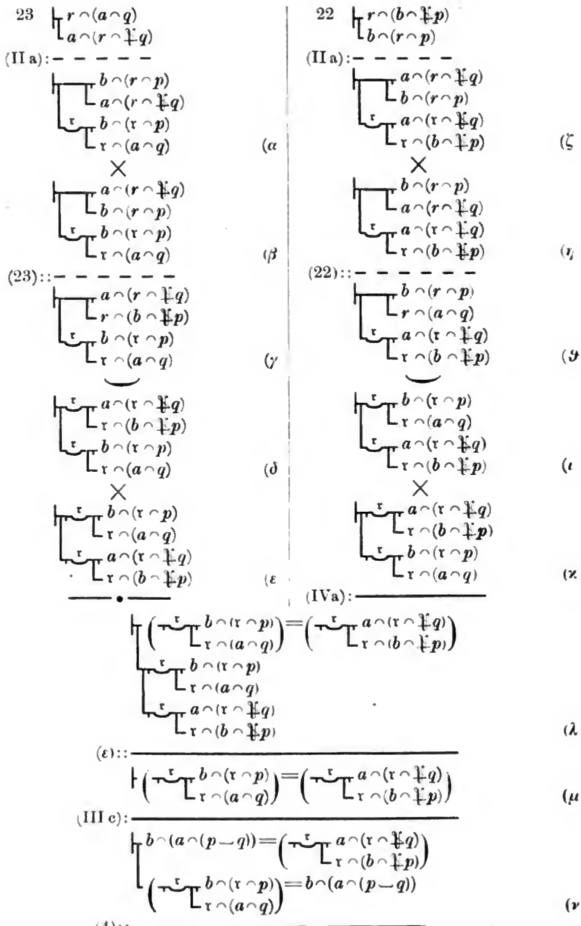
———•———

$$21 \quad \vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \maltese q)$$

(IIIa) : ———————————

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top F(r \frown (a \frown q)) \\ \quad \llcorner\, F(a \frown (r \frown \maltese q)) \end{array} \qquad (23$$

———•———



$$\vdash b \frown (a \frown (p \smile q)) = \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} a \frown (\mathfrak{r} \frown \mathbb{X}q) \\ \mathfrak{r} \frown (b \frown \mathbb{X}p) \end{array}\right) \qquad (\xi$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q)) = \left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{r} \frown \mathbb{X}q) \\ \mathfrak{r} \frown (\mathfrak{b} \frown \mathbb{X}p) \end{array}\right) \qquad (o$$

(20): ——————————

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown \mathbb{X}q) \\ \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown \mathbb{X}p) \end{array}\right) \qquad (\pi$$

(III c): ——————————

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \mathbb{X}q \smile \mathbb{X}p \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown \mathbb{X}q) \\ \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown \mathbb{X}p) \end{array}\right) = \mathbb{X}q \smile \mathbb{X}p \end{array} \qquad (\varrho$$

(B):: ——————————

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \mathbb{X}q \smile \mathbb{X}p \qquad (\sigma$$

(III c): ——————————

$$\vdash \begin{array}{l} \mathbb{X}(p \smile q) = \mathbb{X}q \smile \mathbb{X}p \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown (p \smile q))) = \mathbb{X}(p \smile q) \end{array} \qquad (\tau$$

(E):: ——————————

$$\vdash \mathbb{X}(p \smile q) = \mathbb{X}q \smile \mathbb{X}p \qquad (24$$

(III a): ——————————

$$\vdash \begin{array}{l} v \frown (w \frown) \mathbb{X}(p \smile q)) \\ v \frown (w \frown) (\mathbb{X}q \smile \mathbb{X}p)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(19):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} v \frown (w \frown) \mathbb{X}(p \smile q)) \\ u \frown (w \frown) \mathbb{X}p) \\ v \frown (u \frown) \mathbb{X}q) \end{array} \qquad (\beta$$

(II a): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown) (p \smile q)) \\ u \frown (w \frown) \mathbb{X}p) \\ v \frown (u \frown) \mathbb{X}q) \\ \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \mathbb{X}\mathfrak{q}) \end{array} \end{array} \qquad (\gamma$$

——•——

$$19 \quad \vdash \begin{array}{l} w \frown (v \frown) (p \smile q)) \\ u \frown (v \frown) q) \\ w \frown (u \frown) p) \end{array}$$

×

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (u \frown) p) \\ u \frown (v \frown) q) \\ w \frown (v \frown) (p \smile q)) \end{array} \qquad (\delta$$

(γ):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} w \frown (u \frown) p) \\ u \frown (w \frown) \mathbb{X}p) \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \mathbb{X}q) \\ \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \mathbb{X}\mathfrak{q}) \end{array} \end{array} \qquad (\varepsilon$$

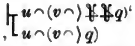
$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\begin{array}{l} w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ u \frown (w \frown) \mathbb{X}\mathfrak{q}) \end{array} \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \mathbb{X}q) \\ \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \mathbb{X}\mathfrak{q}) \end{array} \end{array} \qquad (\zeta$$

×

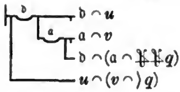
$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \mathbb{X}\mathfrak{q}) \end{array} \\ \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\begin{array}{l} w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ u \frown (w \frown) \mathbb{X}\mathfrak{q}) \end{array} \\ u \frown (v \frown) q) \\ v \frown (u \frown) \mathbb{X}q) \end{array} \qquad (25$$

§ 62. *Zerlegung.*

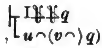
Um nun den Satz (§ 54, δ) aus (25) abzuleiten, bedürfen wir des Satzes (§ 54, η)


(α

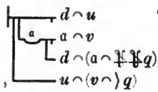
Nach (11) haben wir dazu die Sätze


(β

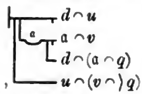
und


(γ

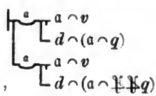
zu beweisen. (β) geht nach Regel (5) hervor aus


(δ

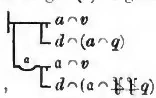
Nach (8) haben wir nun


(ε

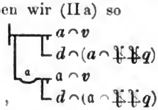
Es bleibt also zu beweisen


(ζ

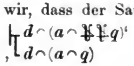
was nach Regel (5) folgt aus


(η

Schreiben wir (II a) so

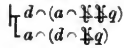

(ϑ

so sehen wir, dass der Satz

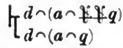

(ι

abzuleiten ist, was mit (22) leicht geschehen kann.

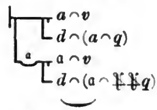
§ 63. *Aufbau.*

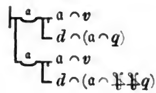
22 

(22)::- - - - - -

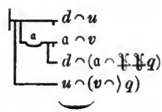

(26

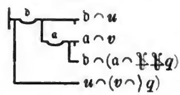
(II a):- - - - - -


(α

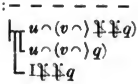

(β

(8):- - - - - - -


(γ

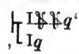

(δ

(11):- - - - - - - -

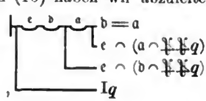

(27

§ 64. *Zerlegung.*

Es fehlt uns noch der Satz (§ 62, γ). Wir beweisen zunächst


(α

woraus dann mit (18) jener folgt. Nach (16) haben wir abzuleiten


(β

oder

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \ddagger\ddagger q) \\ \quad e \frown (d \frown \ddagger\ddagger q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\gamma$$

Nun haben wir nach (13)

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown q) \\ \quad e \frown (d \frown q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\delta$$

Hieraus folgt (γ) mit dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown (a \frown q) \\ \quad e \frown (a \frown \ddagger\ddagger q) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

der aus (23) ähnlich folgt wie (26) aus (22). Nachdem wir so den Satz (§ 62, γ) bewiesen haben, benutzen wir ihn, um in (27) das Unterglied ‚$\mathrm{I}\ddagger\ddagger q$' durch Verschmelzung der Unterglieder verschwinden zu lassen. Darauf gelangen wir ans Ziel unseres Abschnittes $\mathcal{A}$, wie in § 54 angegeben worden ist.

§ 65. *Aufbau.*

23

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (e \frown \ddagger q) \\ \quad e \frown (a \frown \ddagger\ddagger q) \end{array}$$

(23): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown (a \frown q) \\ \quad e \frown (a \frown \ddagger\ddagger q) \end{array} \qquad (28$$

(13): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \ddagger\ddagger q) \\ \quad e \frown (d \frown q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\alpha$$

(28):: - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \ddagger\ddagger q) \\ \quad e \frown (d \frown \ddagger\ddagger q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{d}}\smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown \ddagger\ddagger q) \\ \quad \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown \ddagger\ddagger q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\gamma$$

(16): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I}\ddagger\ddagger q \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (29$$

(18):: - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I}\ddagger\ddagger q \\ \quad u \frown (v \frown) q) \end{array} \qquad (30$$

(27): - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash u \frown (v \frown) \ddagger\ddagger q) \\ \quad u \frown (v \frown) q) \end{array} \qquad (31$$

(25): - - - - - -

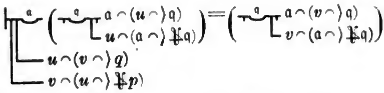
$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{q}}\ w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ \qquad u \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \\ \quad \smile^{\mathfrak{q}}\ w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ \qquad v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \\ \quad v \frown (u \frown) \ddagger q) \\ \quad u \frown (v \frown) q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(IVa): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \left(\smile^{\mathfrak{q}} \begin{array}{l} w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ u \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \right) = \left(\smile^{\mathfrak{q}} \begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \right) \\ \quad \smile^{\mathfrak{q}}\ w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ \qquad v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \\ \quad \smile^{\mathfrak{q}}\ w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ \qquad u \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \\ \quad v \frown (u \frown) \ddagger q) \\ \quad u \frown (v \frown) q) \end{array} \qquad (\beta$$

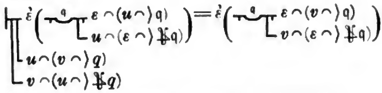
(25):: - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \left(\smile^{\mathfrak{q}} \begin{array}{l} w \frown (u \frown) \mathfrak{q}) \\ u \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \right) = \left(\smile^{\mathfrak{q}} \begin{array}{l} w \frown (v \frown) \mathfrak{q}) \\ v \frown (w \frown) \ddagger \mathfrak{q}) \end{array} \right) \\ \quad u \frown (v \frown) q) \\ \quad v \frown (u \frown) \ddagger q) \end{array} \qquad (\gamma$$



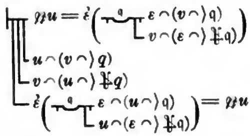
(δ

(Va): - - - - - - - - - - - - - - - - -



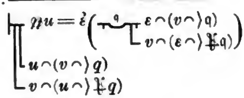
(ε

(IIIc): ———————————



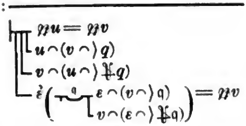
(ζ

(Z):: ———————————



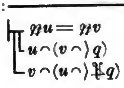
(η

(IIIc): ———————————



(ϑ

(Z):: ———————————

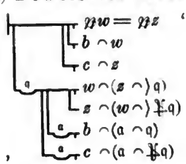


(32

B. Beweis des Satzes

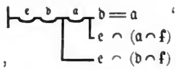
„⊦ If‘

a) Beweis des Satzes

„‘,

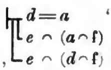
§ 66. *Zerlegung.*

Um den Satz zu beweisen, dass die Beziehung einer Anzahl zur nächstfolgenden eindeutig sei, oder, wie man auch sagen kann, dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine gebe, welche auf sie unmittelbar in der Anzahlenreihe folge [1]), haben wir den Satz (16) zu benutzen und demnach



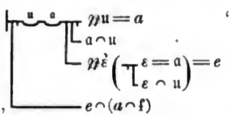
(α

abzuleiten, was aus



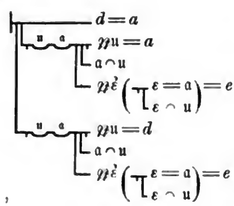
(β

folgt. Aus der Definition (*H*) ist nun leicht



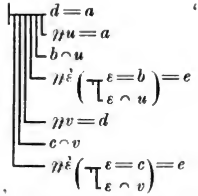
(γ

zu folgern. Demnach wäre zu beweisen



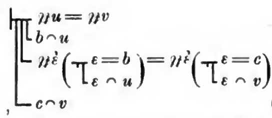
(δ

ein Satz, der durch mehrfache Wendung und Einführung deutscher Buchstaben hervorgeht aus



(ε

Dieser Satz kann abgeleitet werden aus



(ζ

Nach dem eben bewiesenen Satze (32) brauchen wir hierzu nur eine Beziehung nachzuweisen, die den *u*-Begriff in den *v*-Begriff abbildet, und deren Umkehrung den *v*-Begriff in den *u*-Begriff abbildet. Dass es nun eine Beziehung giebt, die den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\mathrm{T}\,\varepsilon = b\\ \mathrm{L}\,\varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriff in den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\mathrm{T}\,\varepsilon = c\\ \mathrm{L}\,\varepsilon \frown v\end{array}\right)$-Begriff abbildet, folgt aus der Gleichheit der diesen Begriffen zukommenden Anzahlen, was freilich noch zu beweisen sein wird. Nun unterscheidet sich der *v*-Begriff seinem Umfange nach nur dadurch von dem $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\mathrm{T}\,\varepsilon = c\\ \mathrm{L}\,\varepsilon \frown v\end{array}\right)$-Begriffe, dass unter ihn der Gegenstand *c* fällt, der unter diesen nicht fällt; und es unterscheidet sich der *u*-Begriff von dem $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\mathrm{T}\,\varepsilon = b\\ \mathrm{L}\,\varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriffe seinem Umfange nach nur dadurch, dass unter ihn der Gegenstand *b* fällt, der unter diesen nicht fällt. Hieraus muss nun geschlossen

1) Vergl. § 43.

werden können, dass es auch eine Beziehung giebt, die den *u*-Begriff in den *v*-Begriff abbildet. Nach dem, was bei den Mathematikern üblich ist, möchte man etwa sagen: wir ordnen die Gegenstände, die ausser dem *b* noch unter den *u*-Begriff fallen, mit der schon bekannten Beziehung den unter den *v*-Begriff noch ausser dem *c* fallenden Gegenständen zu, und wir ordnen *b* dem *c* zu. So haben wir den *u*-Begriff in den *v*-Begriff und umgekehrt diesen in jenen abgebildet. Also sind nach dem soeben bewiesenen Satze die ihnen zukommenden Anzahlen gleich. Dies ist freilich viel kürzer, als der nun folgende Beweis, den Manche, die meine Absicht missverstehen, wegen seiner Länge tadeln werden. Was thun wir denn eigentlich, wenn wir zum Zwecke des Beweises zuordnen? Offenbar etwas Aehnliches, wie wenn wir in der Geometrie eine Hilfslinie ziehen. Euklid, dessen Methode noch vielfach als Muster von Strenge dienen kann, hat für diesen Zweck seine Forderungssätze, die angeben, dass man gewisse Linien ziehen könne. Aber das Ziehen einer Linie darf eigentlich ebensowenig als ein Schaffen angesehen werden, wie das Bestimmen eines Schnittpunkts. Wir bringen uns vielmehr in beiden Fällen nur zum Bewusstsein, fassen nur auf, was schon da war. Für den Beweis ist nur wesentlich, dass es so etwas gebe. Die Forderungssätze Euklids haben also für die Beweise die Kraft von Axiomen, die behaupten, dass es gewisse Linien, gewisse Punkte gebe. Da wir hier nun überall auf die tiefsten Grundlagen dringen wollen, so fragen wir, worauf die Möglichkeit solcher Zuordnung beruhe. Wenn man einen Forderungssatz nach dem Vorgange Euklids aufstellen wollte, so könnte er etwa lauten: ‚es wird gefordert, jedem Gegenstande jeden Gegenstand zuzuordnen', oder ‚es ist möglich, jeden Gegenstand jedem Gegenstande zuzuordnen'. Dies dürfte jedoch ebensowenig als ein psychologischer Satz aufgefasst werden wie ein Forderungssatz Euklids, als behauptete er ein Vermögen unserer Seelen; denn als solcher wäre er sogar falsch, da uns nicht alle Gegenstände und nicht Allen dieselben bekannt sind. So würde etwas Subjectives hineinkommen, was der Sache ganz fremd ist. Man muss auch unendlich viele Gegenstände unendlich vielen zuordnen können, obwohl von diesen unendlich vielen Zuordnungen nur wenige wirklich vollzogen werden könnten, wenn das Zuordnen ein schöpferisches Thun der Seele wäre. Vielmehr wäre der Forderungssatz etwa so zu verstehen: ‚jeder Gegenstand ist jedem Gegenstande zugeordnet', oder ‚es giebt zwischen jedem Gegenstande und jedem Gegenstande eine Zuordnung'. Was wäre nun eine solche Zuordnung, wenn sie nichts Subjectives ist, was durch unser Thun erst geschaffen wird? Aber eine einzelne Zuordnung eines Gegenstandes zu einem Gegenstande ist auch nicht das, worauf es uns hier ankommen kann, und was der Hilfslinie in der Geometrie entspricht; sondern wir bedürfen einer Gattung von Zuordnungen, wie man sagen könnte, einer

Sache, die wir bisher Beziehung genannt haben und ferner nennen werden. Die gewünschte Zuordnung ist also geleistet, wenn wir eine Beziehung aufgefunden[1]) haben, in welcher der Gegenstand b zum Gegenstande c steht und die den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriff in den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)$-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Dabei kann eine q-Beziehung als bekannt vorausgesetzt werden, welche den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriff in den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)$-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Nicht bekannt ist aber von dieser Beziehung, ob in ihr b zu irgendeinem Gegenstande stehe, noch auch, ob irgendein Gegenstand in ihr zu c stehe. Wir können nun eine Beziehung angeben, in der alle die Paare von Gegenständen stehen, die in der q-Beziehung stehen, und in der b zu c steht. Das ist die $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \ \llcorner\ \varepsilon = b\\ \ \llcorner\ \alpha = c\end{array}\right)$-Beziehung[2]). Sie hat zwar die andern gewünschten Eigenschaften, aber ob sie und ihre Umkehrung eindeutig seien, lässt sich nicht sagen, solange von der q-Beziehung nichts Näheres bekannt ist. Es wäre z. B. möglich, dass b zu einem von c verschiedenen Gegenstande d in der q-Beziehung stände. Dann stände b zu zwei Gegenständen in der angegebenen Beziehung, nämlich zu c und zu d, und diese wäre nicht eindeutig, wiewohl die q-Beziehung es der Annahme nach ist. Um dies zu vermeiden, suchen wir eine Beziehung auf, welche zwar in den für uns werthvollen Eigenschaften mit der q-Beziehung übereinstimmt, in welcher aber b zu keinem Gegenstande und in welcher auch kein Gegenstand zu c steht. Die $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \ \llcorner\!\!\top\ \varepsilon = b\\ \ \ \ \llcorner\ \alpha = c\end{array}\right)$-Beziehung ist eine solche. Indem wir nun zunächst für ‚$\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$' der Kürze halber ‚$w$' und für ‚$\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)$' ‚$z$' schreiben, haben wir den Satz zu beweisen: ‚Wenn es eine q-Beziehung giebt, die den w-Begriff in den z-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet, so giebt es auch eine Beziehung, die dasselbe thut, in der aber b zu keinem Gegenstande steht und in der auch zu c kein Gegenstand steht, sofern weder b unter den w-Begriff noch c unter den z-Begriff fällt'.

Für die Begriffsschriftableitung ist es bequemer, den durch Wendung hieraus hervorgehenden Satz

1) Nach dem Vorbilde der Geometrie könnte man ‚construirt' sagen, müsste sich aber immer bewusst bleiben, dass das kein Schaffen ist.

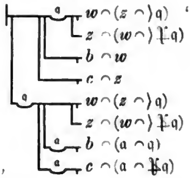
2) Wir können für

$$‚\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-x \frown (y \frown q)\\ \ \llcorner\ x = b\\ \ \llcorner\ y = c\end{array}‘$$

ohne wesentliche Aenderung

$$‚\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\!\!-x \frown (y \frown q)\\ \ \llcorner\!\!\top\ x = b\\ \ \ \ \llcorner\ y = c\end{array}‘$$

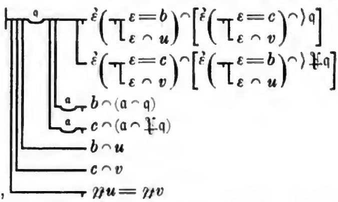
schreiben. Man vergl. hierzu das über ‚oder' und ‚und' in § 12 Gesagte.



(η

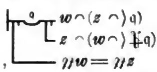
zu beweisen. Wir werden dann ferner den Satz ableiten: ‚Wenn es eine Beziehung giebt, die den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)$-Begriff in den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)$-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet und die so beschaffen ist, dass b in ihr zu keinem Gegenstande und dass kein Gegenstand in ihr zu c steht, so giebt es eine Beziehung, die den u-Begriff in den v-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet, sofern b unter den u-Begriff und c unter den v-Begriff fällt'.

Für den Nachsatz kann man auch sagen: ‚so ist die Anzahl des u-Begriffes gleich der Anzahl des v-Begriffes'. Nach einer Wendung sieht dann der Satz so aus



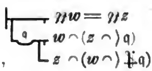
(ϑ

Aus beiden Sätzen (η) und (ϑ) und dem oben schon erwähnten Satze



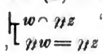
(ι

oder



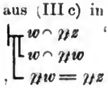
(κ

folgt unser Satz (ζ). Der Satz (κ) folgt leicht aus (Z) und

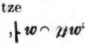


(λ

und dieser aus (III c) in der Form



und dem Satze



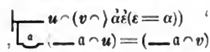
(μ

Dieser Satz ist leicht zu beweisen, indem man zeigt, dass die Gleichheit eine Beziehung ist, welche jeden Begriff in sich abbildet und deren Umkehrung dasselbe thut. Es sind also abzuleiten die Sätze

$$,\vdash w \frown (w \frown)\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha))` \qquad (\nu$$

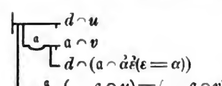
$$,\vdash w \frown (w \frown)\, \rangle\!\!\!\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha))` \qquad (\xi$$

Statt (ν) beweisen wir zunächst den etwas umfassenderen Satz



(o

den wir auch später brauchen werden. Wir bedürfen dazu der Sätze



(π

und

$$\vdash \mathrm{I}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) \qquad (\varrho$$

Dieser folgt aus (III c) und (16) mit (2). Um (π) zu beweisen, schreiben wir (II a) so:

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown v \\ \quad d \frown (d \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \\ \quad \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{a} \frown v \\ \quad\quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \end{array}$$

Es bleibt noch zu zeigen

$$\vdash d \frown (d \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \qquad (\sigma$$

was aus (III e) mit (2) zu erschliessen ist. Das Oberglied „$\top d \frown v$" kann mittels des Untergliedes

$$\smile^{\mathfrak{a}}(—\mathfrak{a} \frown u) = (—\mathfrak{a} \frown v)$$

leicht in „$\top d \frown u$" verwandelt werden.

§ 67. *Aufbau.*

2 $\vdash f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))$

(III a): ———

$$\begin{array}{l} \vdash F(f(a, b)) \\ \quad F(a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))) \end{array} \qquad (33$$

—•—

II a
$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad f(e, a) \\ \quad \mathfrak{a}\colon\ d = \mathfrak{a} \\ \quad\quad f(e, \mathfrak{a}) \end{array}$$

(33):: - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad \mathfrak{a}\colon\ d = \mathfrak{a} \\ \quad\quad f(e, \mathfrak{a}) \end{array} \qquad (\alpha$$

(II a):: - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad f(e, d) \\ \quad \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad f(e, \mathfrak{a}) \\ \quad\quad f(e, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\beta$$

(33):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad e \frown (d \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad f(e, \mathfrak{a}) \\ \quad\quad f(e, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\gamma$$

(II a):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad e \frown (d \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad \mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad f(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) \\ \quad\quad f(\mathfrak{e}, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\delta$$

$\smile$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad\quad \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad \mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad f(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) \\ \quad\quad f(\mathfrak{e}, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(16): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) \\ \quad \mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad f(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) \\ \quad\quad f(\mathfrak{e}, \mathfrak{d}) \end{array} \qquad (34$$

—•—

III c
$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e = a \\ \quad e = d \end{array}$$

$\smile$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\colon\ \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad \mathfrak{e} = \mathfrak{a} \\ \quad\quad \mathfrak{e} = \mathfrak{d} \end{array} \qquad (\alpha$$

(34): ———

$$\vdash \mathrm{I}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) \qquad (35$$

—•—

2 $\vdash f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))$

(III c): ———

$$\begin{array}{l} \vdash F(a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))) \\ \quad F(f(a, b)) \end{array} \qquad (36$$

—•—

III e $\vdash d = d$

(36): ———

$\vdash d \frown (d \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha))$ (37

(II a): ______________

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, d \frown v \\ \quad \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad\quad \llcorner\, d \frown (\mathfrak{a} \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \end{array}$$ (α

(III a): ______________

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, d \frown u \\ \quad \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a} \frown v \\ \quad \mid \qquad \llcorner\, d \frown (\mathfrak{a} \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \\ \quad \llcorner\!\!-\!\!-\, (-\, d \frown u) = (-\, d \frown v) \end{array}$$ (β

(II a):: - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, d \frown u \\ \quad \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a} \frown v \\ \quad \mid \qquad \llcorner\, d \frown (\mathfrak{a} \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \\ \quad \llcorner\!\!-\!\!-\, \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (-\, \mathfrak{a} \frown u) = (-\, \mathfrak{a} \frown v) \end{array}$$ (γ

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\top\!\!-\!\!-\, \mathfrak{b} \frown u \\ \quad \mid \quad \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{a} \frown v \\ \quad \mid \qquad\quad \llcorner\, \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \\ \quad \llcorner\!\!-\!\!-\, \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (-\, \mathfrak{a} \frown u) = (-\, \mathfrak{a} \frown v) \end{array}$$ (δ

(11): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, u \frown (v \frown)\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \\ \quad \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (-\, \mathfrak{a} \frown u) = (-\, \mathfrak{a} \frown v) \\ \quad \llcorner\!\!-\!\!-\, \mathrm{I}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) \end{array}$$ (ε

(35):: ______________

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, u \frown (v \frown)\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \\ \quad \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (-\, \mathfrak{a} \frown u) = (-\, \mathfrak{a} \frown v) \end{array}$$ (38

——•——

III e $\vdash (-\, a \frown w) = (-\, a \frown w)$

$$\smile$$

$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (-\, \mathfrak{a} \frown w) = (-\, \mathfrak{a} \frown w)$ (α

(38): ______________

$\vdash w \frown (w \frown)\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha))$ (39

§ 68. *Zerlegung.*

Um nun den Satz

„$\vdash w \frown (w \frown)\, \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha))$"

zu beweisen, bedienen wir uns des Satzes

„$\vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)$"

den wir aus den Sätzen

„$\vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\alpha, \varepsilon) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)$"

„$\vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) = \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\alpha = \varepsilon)$"

ableiten. Jener wird aus (2) und der Definition (*E*), Dieser aus (IVe) abzuleiten sein, beidemal mit Benutzung von (20).

§ 69. *Aufbau.*

2 $\vdash f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))$

$$\smile$$

$\vdash\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))$ (α

(20): ______________

$\vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\alpha, \varepsilon) = \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)))$ (β

(III a): ______________

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\alpha, \varepsilon) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) \\ \quad \llcorner\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) \end{array}$$ (γ

(*E*):: ______________

$\vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\alpha, \varepsilon) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)$ (40

——•——

IVe $\vdash (a = b) = (b = a)$

$$\smile$$

$\vdash\!\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\mathfrak{a} = \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b} = \mathfrak{a})$ (α

(20): ______________

$\vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) = \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\alpha = \varepsilon)$ (β

(III a): ______________

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) \\ \quad \llcorner\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\alpha = \varepsilon) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) \end{array}$$ (γ

(40):: ______________

$\vdash \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) = \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)$ (41

(III c): ______________

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, w \frown (w \frown)\, \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \\ \quad \llcorner\, w \frown (w \frown)\, \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha)) \end{array}$$ (α

(39):: ______________

$\vdash w \frown (w \frown)\, \mathfrak{X}\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha))$ (42

——•——

1 $\vdash f(a) = a \frown \acute{\varepsilon}f(\varepsilon))$

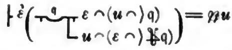
(III c): ______________

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, f(a) = a \frown v \\ \quad \llcorner\, \acute{\varepsilon}f(\varepsilon) = v \end{array}$$ (43

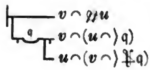
(III c): - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, F(a \frown v) \\ \quad \top\, F(f(a)) \\ \quad \llcorner\, \acute{\varepsilon}f(\varepsilon) = v \end{array}$$ (44

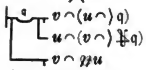
——•——

Z 

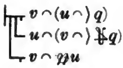
(44):

 (α

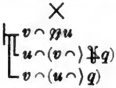
×

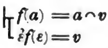
 (β

(II a): - - - - - -

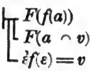
 (γ

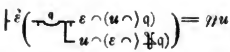
×

 (45

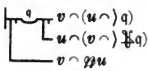
43 

(III a): - - - - -

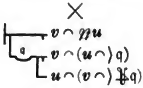
 (46

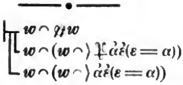
Z 

(46):

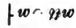
 (α

×

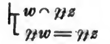
 (47

45 

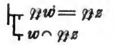
(42,39)::

 (48

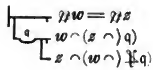
(III c):

 (α

×

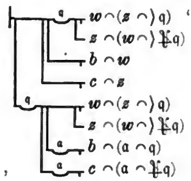
 (β

47:: - - - - -

 (49

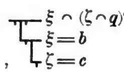
§ 70. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz

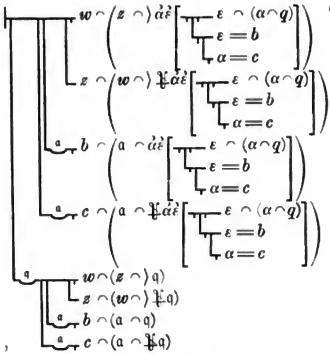


(Vergl. § 66, η.)

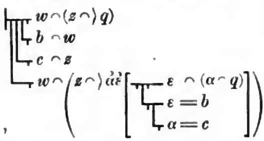
Wir sahen in § 66, dass



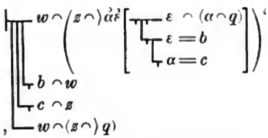
eine Beziehung andeutet, welche in den für uns in Betracht kommenden Eigenschaften mit der q-Beziehung übereinstimmt, in welcher aber b zu keinem Gegenstande steht und in welcher auch kein Gegenstand zu c steht. Wir schreiben deshalb (II a) in der Form



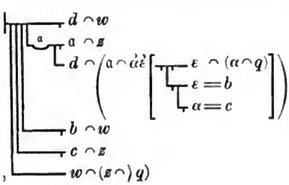
und haben nun unter andern den Satz:



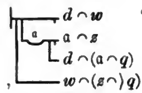
zu beweisen, der durch Wendung folgt aus



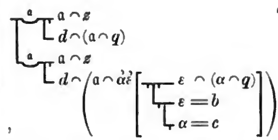
Wir bedürfen hierzu des Satzes



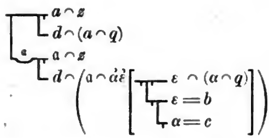
Nun haben wir nach (8)



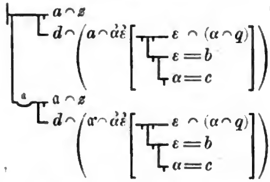
Es würde demnach etwa zu beweisen sein



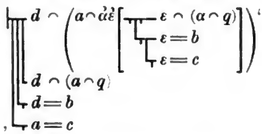
wo ich den Urtheilstrich noch nicht gesetzt habe wegen etwa noch hinzuzufügender Bedingungen (Unterglieder). In dem eigentlichen Beweise dürfen ja Ausdrücke mit lateinischen Buchstaben ohne Urtheilstrich nicht vorkommen; hier, wo es sich um vorläufige Auskundschaftung handelt, mögen sie gestattet sein. Das Letzte wird nach Regel (5) hervorgehen aus einem Ausdrucke wie



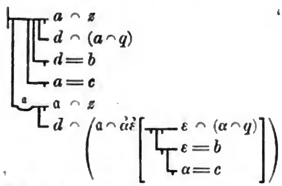
Wir haben nun nach (II a)



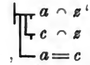
und es bliebe mit (36) zu beweisen



wobei die Unterglieder ‚$\top d=b$' und ‚$\top a=c$' auftreten. Aus den beiden letzten Sätzen schliessen wir nach Regel (7) auf

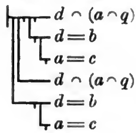


Wenn wir hier nun das deutsche ‚$\mathfrak{a}$' statt des lateinischen ‚a' nach Regel (5) einführen wollten, so würden wir nicht zum gewünschten Ziele kommen wegen des Untergliedes ‚$\top a=c$', das ins Gebiet des ‚$\mathfrak{a}$' aufgenommen werden müsste. Nun haben wir nach (III a)

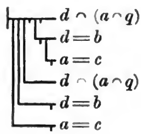


und es kann nach Regel (8) das Unterglied ‚$\top a=c$' durch ‚$\top c\frown z$' ersetzt werden. Später ist ebenso das Unterglied ‚$\top d=b$' durch ‚$\top b\frown w$' zu ersetzen.

§ 71. *Aufbau.*

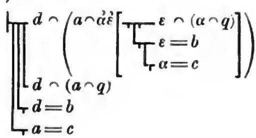
I e 

(I f)::- - - - -



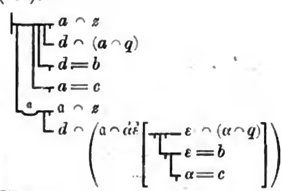
(α

(36):- - - - -



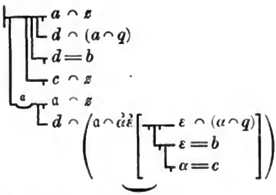
(β

(II a):- - - - - - - - - - -

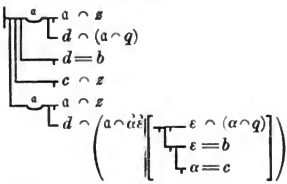


(γ

(III a):—·—·—·—·—·—·—·—·—·—·—·—.

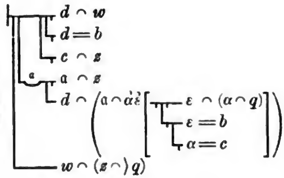


(δ



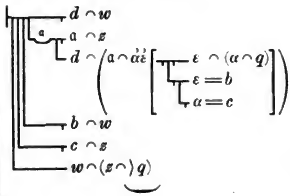
(ε

(8): - - - - - - - - - - - - - -

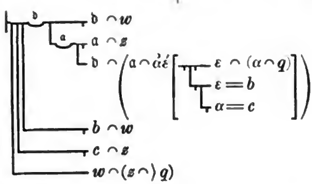


(ζ

(III a): -·-·-·-·-·-·-·-·-·-

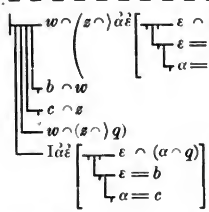


(η



(ϑ

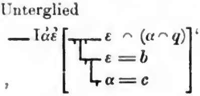
(11): - - - - - - - - - - - - - - -



(50

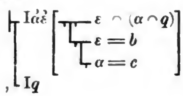
§ 72. *Zerlegung.*

Wir haben aus dem Satze (50) das Unterglied



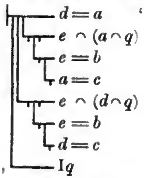
,

wegzuschaffen. Dies geschieht durch den Satz



,

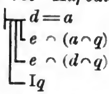
zu dessen Beweise wir den Satz (34) benutzen. Wir haben dazu den Satz



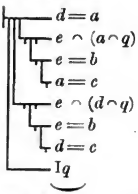
nöthig, der leicht aus (13) folgt.

§ 73. *Aufbau.*

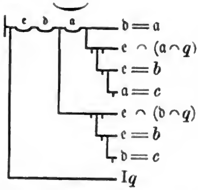
13



(Ib, Ib)::= = = =

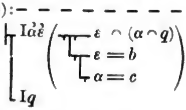


(α



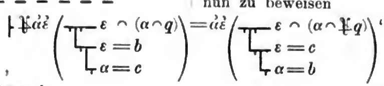
(β

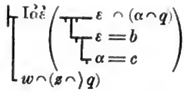
(34):- - - - - - - - - -



(γ

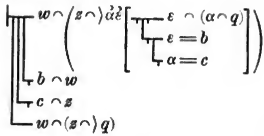
(18)::- - - - - - - - -





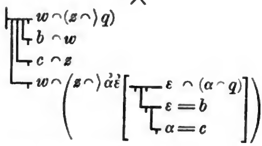
(δ

(50):- - - - - - - - -



(51

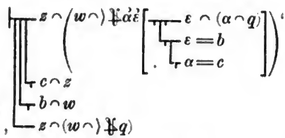
×



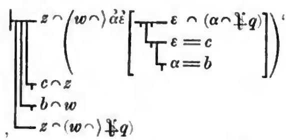
(52

§ 74. *Zerlegung.*

Um nun noch den Satz



zu beweisen, schreiben wir zunächst (51) so



indem wir ‚*q*‘ mit ‚⅄*q*‘, ‚*c*‘ mit ‚*b*‘, ‚*z*‘ mit ‚*w*‘ vertauschen. Wir haben nun zu beweisen was mit (40) aus

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-\alpha \frown (\varepsilon \frown q) \\ \quad\llcorner\!\!-\alpha = b \\ \quad\ \llcorner\!\!-\varepsilon = c\end{array}\right) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown \ddagger q) \\ \quad\llcorner\!\!-\varepsilon = c \\ \quad\ \llcorner\!\!-\alpha = b\end{array}\right),$$

folgt. Dieser Satz ist mit (20) zu beweisen. Dazu bedürfen wir des Satzes

$$\vdash \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-r \frown (a \frown q) \\ \quad\llcorner\!\!-r = b \\ \quad\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-a \frown (r \frown \ddagger q) \\ \quad\llcorner\!\!-a = c \\ \quad\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}\right),$$

der aus (21) und dem Satze

$$\vdash \left(\begin{array}{l}\top\!\!-a = c \\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!-r = b \\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right),$$

folgt. Dieser ist mit (IVa) zu beweisen.

§ 75. *Aufbau.*

21 $\vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \ddagger q)$

(IIIh): ———————

$$\vdash \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-r \frown (a \frown q) \\ \quad\llcorner\!\!-r = b \\ \quad\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-a \frown (r \frown \ddagger q) \\ \quad\llcorner\!\!-r = b \\ \quad\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right) \qquad (\alpha$$

(IIIa): ———————

$$\vdash\!\!\top \left[\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-r \frown (a \frown q) \\ \quad\llcorner\!\!-r = b \\ \quad\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-a \frown (r \frown \ddagger q) \\ \quad\llcorner\!\!-a = c \\ \quad\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}\right) \\ \llcorner\!\!\left(\begin{array}{l}\top\!\!-a = c \\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!-r = b \\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right)\end{array}\right. \qquad (\beta$$

———•———

If
$$\vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!-a = c \\ \begin{array}{l}\quad\quad\llcorner\!\!-r = b \\ \quad\llcorner\!\!-a = c \\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}$$

(Id, Ic):: = = = =

$$\vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!-a = c \\ \begin{array}{l}\quad\quad\llcorner\!\!-r = b \\ \quad\top\!\!-r = b \\ \quad\ \llcorner\!\!-a = c\end{array} \qquad (\gamma$$

$$\vdash\!\!\top\!\!-\left(\begin{array}{l}\top\!\!-a = c \\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!-r = b \\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right) \\ \begin{array}{l}\quad\top\!\!\top\!\!-r = b \\ \quad\quad\llcorner\!\!-a = c \\ \quad\top\!\!-a = c \\ \quad\ \llcorner\!\!-r = b\end{array} \qquad (\delta$$

(γ):: ———————

$$\vdash \left(\begin{array}{l}\top\!\!-a = c \\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!-r = b \\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right) \qquad (\varepsilon$$

(IVa): ——————— (β): ———————

$$\vdash \underbrace{\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-r \frown (a \frown q) \\ \quad\llcorner\!\!-r = b \\ \quad\ \llcorner\!\!-a = c\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!-a \frown (r \frown \ddagger q) \\ \quad\llcorner\!\!-a = c \\ \quad\ \llcorner\!\!-r = b\end{array}\right)}_{} \qquad (\zeta$$

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{e} \frown q)\\ \quad\llcorner\, \mathfrak{a}=b\\ \quad\llcorner\, \mathfrak{e}=c\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown \text{⅄} q)\\ \quad\llcorner\, \mathfrak{e}=c\\ \quad\llcorner\, \mathfrak{a}=b\end{array}\right) \qquad (\eta$$

(20): ―――――――――――――――

$$\vdash \acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \alpha \frown (\varepsilon \frown q)\\ \quad\llcorner\, \alpha=b\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=c\end{array}\right) = \acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \text{⅄} q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=c\\ \quad\llcorner\, \alpha=b\end{array}\right) \qquad (\vartheta$$

(III c): ―――――――――――――――

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, \text{⅄}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=b\\ \quad\llcorner\, \alpha=c\end{array}\right) = \acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \text{⅄} q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=c\\ \quad\llcorner\, \alpha=b\end{array}\right)\\ \llcorner\, \acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \alpha \frown (\varepsilon \frown q)\\ \quad\llcorner\, \alpha=b\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=c\end{array}\right) = \text{⅄}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=b\\ \quad\llcorner\, \alpha=c\end{array}\right)\end{array} \qquad (\iota$$

(40):: ―――――――――――――――

$$\vdash \text{⅄}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=b\\ \quad\llcorner\, \alpha=c\end{array}\right) = \acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \text{⅄} q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=c\\ \quad\llcorner\, \alpha=b\end{array}\right) \qquad (\varkappa$$

(III a): ―――――――――――――――

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, F\left(\text{⅄}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=b\\ \quad\llcorner\, \alpha=c\end{array}\right]\right)\\ \llcorner\, F\left(\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \text{⅄} q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=c\\ \quad\llcorner\, \alpha=b\end{array}\right]\right)\end{array} \qquad (53$$

――•――

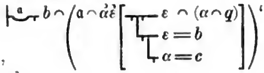
51
$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\!\top\, z \frown \left(w \frown \acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown \text{⅄} q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=c\\ \quad\llcorner\, \alpha=b\end{array}\right]\right)\\ \quad\llcorner\, c \frown z\\ \quad\llcorner\, b \frown w\\ \llcorner\, z \frown (w \frown \text{⅄} q)\end{array}$$

(53): ―――――――――――――――

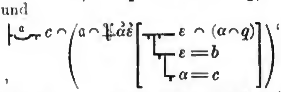
$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\!\top\, z \frown \left(w \frown \text{⅄}\acute{\alpha}\acute{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\top\, \varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon=b\\ \quad\llcorner\, \alpha=c\end{array}\right]\right)\\ \quad\llcorner\, c \frown z\\ \quad\llcorner\, b \frown w\\ \llcorner\, z \frown (w \frown \text{⅄} q)\end{array} \qquad (54$$

§ 76. *Zerlegung.*

Wenn wir den Satz (II a) wie in § 70 schreiben, so sehen wir, dass uns noch die Sätze



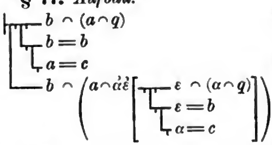
und



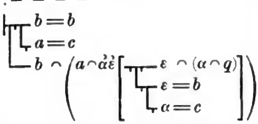
fehlen, von denen dieser mit (53) auf jenen zurückgeführt werden kann, der seinerseits mit (33) zu beweisen ist.

§ 77. *Aufbau.*

33

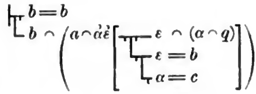


(I d): - - - - - - - - - - - - - -



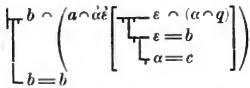
(α

(I c): - - - - - - - - - - - - - -



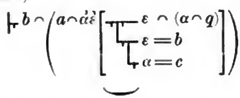
(β

×

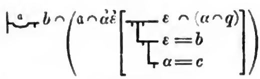


(γ

(III e)::

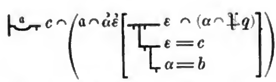


(δ

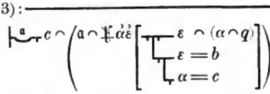


(ε

ε

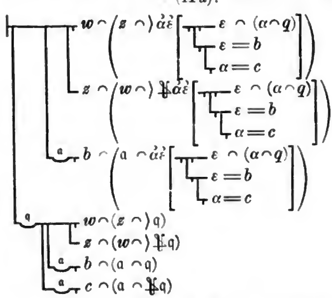


(53):



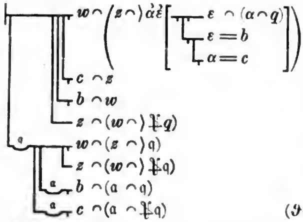
(ζ

(II a):



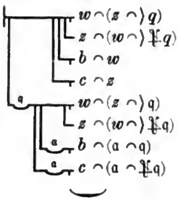
(η

(ε, 54):: - - - - - - - - - - - - - - - - - -

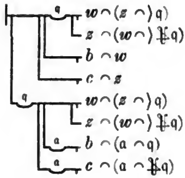


(ϑ

(52): - - - - - - - - - - - -

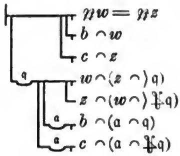


(ι



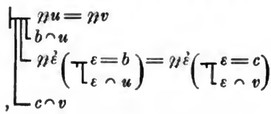
(55

(49): - - - - - - - -



(56

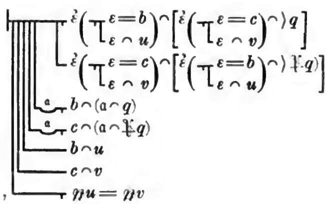
b) Beweis des Satzes



und Ende des Abschnittes *B*.

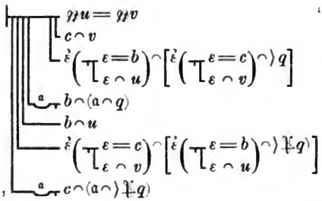
§ 78. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (ϑ) des § 66, der nach Regel (5) hervorgeht aus



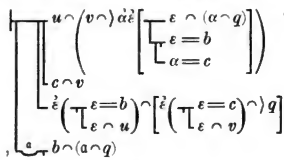
(α

Für das Verständniss ist es bequemer, den durch Wendung hieraus sich ergebenden Satz



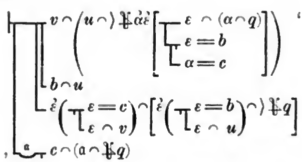
(β

zu betrachten. Nach (32) wird es genügen, irgendeine Beziehung anzugeben, welche den *u*-Begriff in den *v*-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet, um zu beweisen, dass die Anzahl des *u*-Begriffes gleich der Anzahl des *v*-Begriffes ist. Eine solche Beziehung haben wir schon in § 66 kennen gelernt. Wir werden demnach zuerst den Satz



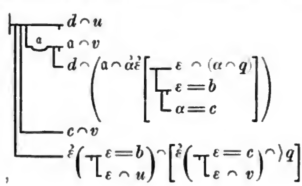
(γ

und dann den Satz



(δ

ableiten. Um jenen mit (11) zu beweisen, bedürfen wir zunächst des Satzes



(ε

Es sind die Fälle $d=b$ und $\top d=b$ zu unterscheiden. Wir schreiben (8) in der Form

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\, d\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=b\\ \llcorner\,\varepsilon\frown u\end{array}\right)\\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\\ \llcorner\, d\frown(\mathfrak{a}\frown q)\end{array}\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=b\\ \llcorner\,\varepsilon\frown u\end{array}\right)\frown\left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown\rangle q\right]\end{array} \quad (\zeta$$

woraus leicht folgt

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\begin{array}{l} d=b\\ \llcorner\, d\frown u\end{array}\\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\\ \llcorner\, d\frown(\mathfrak{a}\frown q)\end{array}\\ \llcorner\,\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=b\\ \llcorner\,\varepsilon\frown u\end{array}\right)\frown\left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown\rangle q\right]\end{array} \quad (\eta$$

Von diesem gelangen wir leicht durch Wendung zu unserm Satze für den Fall $\top d=b$, nachdem wir bewiesen haben

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\\ \llcorner\, d\frown(\mathfrak{a}\frown q)\end{array}\\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown v\\ \llcorner\, d\frown\left(\mathfrak{a}\frown\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \top\,\varepsilon=b\\ \llcorner\,\alpha=c\end{array}\right]\right)\end{array}\end{array} \quad (\vartheta$$

Schreiben wir zu diesem Zwecke (IIa) in der Form

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\begin{array}{l}a\frown v\\ \llcorner\, d\frown\left(a\frown\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \top\,\varepsilon=b\\ \llcorner\,\alpha=c\end{array}\right]\right)\end{array}\\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown v\\ \llcorner\, d\frown\left(\mathfrak{a}\frown\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \top\,\varepsilon=b\\ \llcorner\,\alpha=c\end{array}\right]\right)\end{array}\end{array} \quad (\iota$$

so müssen wir beweisen

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d\frown\left(a\frown\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \top\,\varepsilon=b\\ \llcorner\,\alpha=c\end{array}\right]\right)\\ \llcorner\, d\frown(a\frown q)\end{array} \quad (\varkappa$$

was leicht mit (I) und (36) geschehen kann. Dann muss noch abgeleitet werden

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} a\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\\ \llcorner\!\top\, a\frown v\end{array} \quad (\lambda$$

aus (Ia) in der Form

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\begin{array}{l}a=c\\ \llcorner\, a\frown v\end{array}\\ \llcorner\!\top\, a\frown v\end{array} \quad (\mu$$

und dem Satze

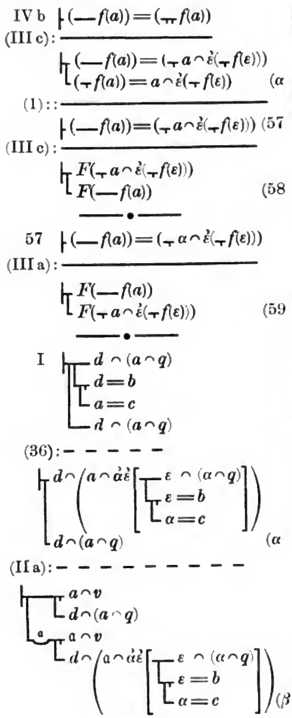
$$\vdash\!\!\begin{array}{l} F(\top\, a\frown\grave{\varepsilon}(\top f(\varepsilon)))\\ \llcorner\, F(-f(a))\end{array} \quad (\nu$$

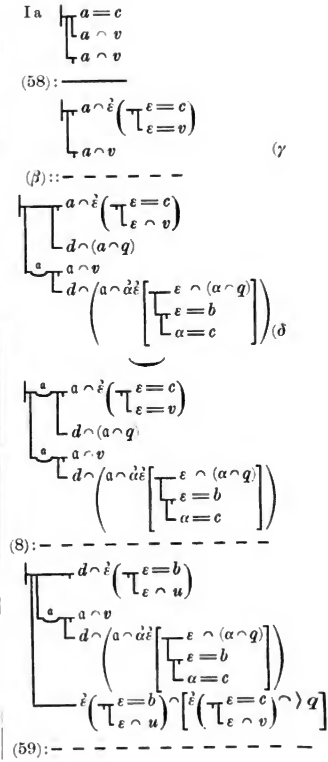
der aus

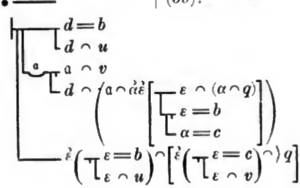
$$\vdash(-f(a))=(\top\, a\frown\grave{\varepsilon}(\top f(\varepsilon))) \quad (\xi$$

folgt. Dieser Satz ist aus (1) mit (IVb) leicht zu beweisen.

§ 79. *Aufbau.*



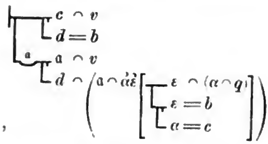




(60

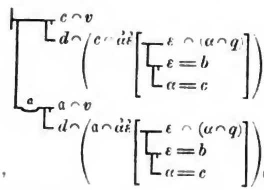
§ 80. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz



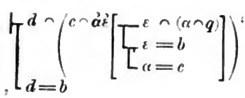
(α

der mit (60) verbunden zu dem Satze (ε) § 78 führt. Schreiben wir (II a) in der Form



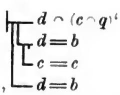
(β

so ist noch



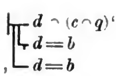
(γ

abzuleiten, was mit (36) folgt aus



(δ

Dieser Satz ergiebt sich aus (I a) in der Form

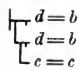


(I) und (III e).

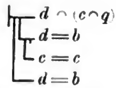
§ 81. *Aufbau.*

III e $\vdash c = c$

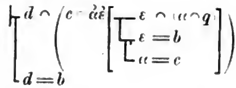
(I):



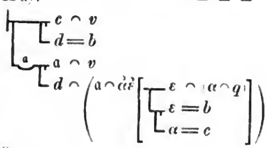
(I a):



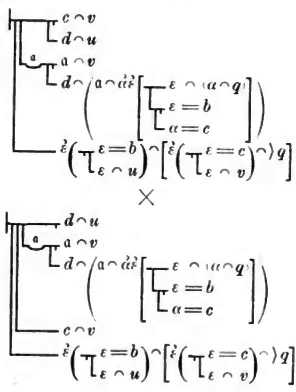
(36):

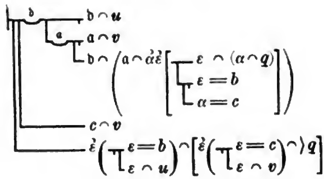


(II a):

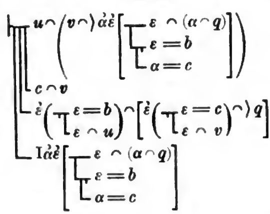


(60)::





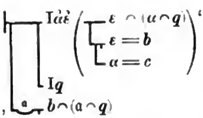
(11): - - - - - - - - - - - - - - - - - -



(61

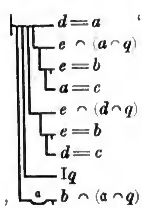
§ 82. *Zerlegung.*

Es fehlt uns der Beweis des Satzes



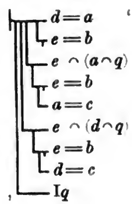
(α

(vergl. § 78, γ). Um diesen mit (34) zu führen, bedürfen wir des Satzes



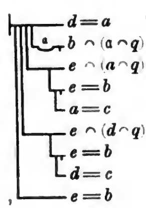
(β

den wir aus den Sätzen



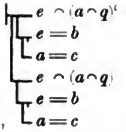
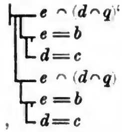
(γ

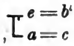
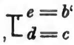
und

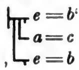
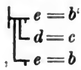


(δ

nach Regel (8) beweisen. (γ) folgt aus (13) mit (I) in den Formen

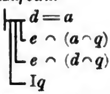
 und 

Dabei treten zunächst die Unterglieder  und  auf. Diese können mit (I) in den Formen

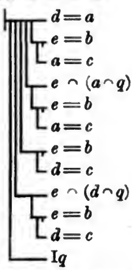
 und 

durch  ersetzt werden.

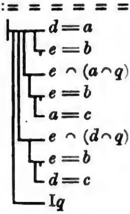
§ 83. *Aufbau.*

13 

(I, I)::= = = = =

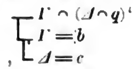
 (α

(I, I)::= = = = = = =

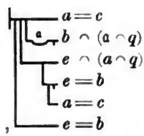
 (62

§ 84. *Zerlegung.*

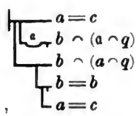
Um nun den Satz (δ) des § 82 zu beweisen, bemerken wir, dass



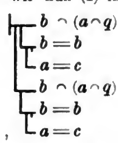
den Wahrheitswerth davon andeutet, dass Γ zu Δ in der q-Beziehung stehe, oder dass Γ mit b und Δ mit c zusammenfalle. Wenn wir für Γ nun b nehmen, so kann von diesen beiden Fällen nur der letzte eintreten, wenn es keinen Gegenstand giebt, zu dem b in der q-Beziehung steht; d. h. es muss dann Δ mit c zusammenfallen. Demnach wird man den Satz

 (α

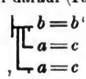
beweisen können, der zunächst folgt aus

 (β

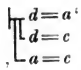
Schreiben wir nun (I) in der Form

 (γ

so können wir darauf (Ia) in der Form



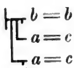
anwenden und gelangen dann durch Wendung und mit (IIa) leicht zu unserm Satze (β). In dem Satze (α) ersetzen wir dann ‚a' durch ‚d' und gelangen mit (IIIa) in der Form



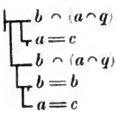
an unser Ziel.

§ 85. *Aufbau.*

Ia

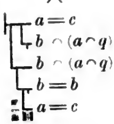


(I):- - - -



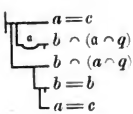
(α

×



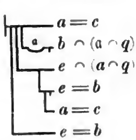
(β

(IIa)::- - - - -



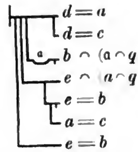
(γ

(IIIa):————



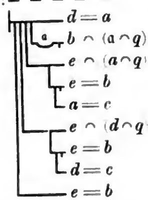
(δ

(IIIa):- - - - - -



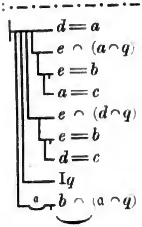
(ε

(δ)::- - - - - -

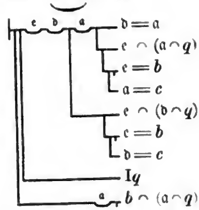


(ζ

(62)::-·-·-·-·-·-

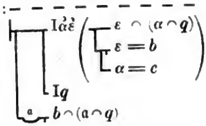


(η



(ϑ

(34):- - - - - - - - - - -



(ι

(61):- - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; u \frown \Big(v \frown \big)\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon = b\\ \llcorner\, \alpha = c\end{array}\right]\Big)\\ \quad\llcorner\; c \frown v\\ \quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = b\\ \llcorner\, \varepsilon \frown u\end{array}\right) \frown \left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = c\\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right) \frown \big)\, q\right]\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}q\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q)\end{array} \qquad (\varkappa$$

(18)::- - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; u \frown \Big(v \frown \big)\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon = b\\ \llcorner\, \alpha = c\end{array}\right]\Big)\\ \quad\llcorner\; c \frown v\\ \quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = b\\ \llcorner\, \varepsilon \frown u\end{array}\right) \frown \left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = c\\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right) \frown \big)\, q\right]\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q)\end{array} \qquad (63$$

§ 86. *Zerlegung.*

Wir haben hiermit den Satz (γ) des § 78 bewiesen. Um (δ) abzuleiten, vertauschen wir in (63) ‚q' mit ‚$\rotatebox[origin=c]{180}{\$}q$', ‚$b$' mit ‚$c$', ‚$u$' mit ‚$v$'. So erhalten wir (63) in der Form

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\!\top\!\!\top\!\!\top\; v \frown \Big(u \frown \big)\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown \rotatebox[origin=c]{180}{\$}q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon = c\\ \llcorner\, \alpha = b\end{array}\right]\Big)\\ \quad\llcorner\; b \frown u\\ \quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = c\\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right) \frown \left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = b\\ \llcorner\, \varepsilon \frown u\end{array}\right) \frown \big)\, \rotatebox[origin=c]{180}{\$}q\right]\\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; \mathfrak{c} \frown (\mathfrak{a} \frown \rotatebox[origin=c]{180}{\$}q)\end{array}$$

und wir brauchen nur den Beweis des Satzes

$$\vdash \rotatebox[origin=c]{180}{\$}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon = b\\ \llcorner\, \alpha = c\end{array}\right) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!-\varepsilon \frown (\alpha \frown \rotatebox[origin=c]{180}{\$}q)\\ \quad\llcorner\, \varepsilon = c\\ \llcorner\, \alpha = b\end{array}\right)$$

zu liefern, der dem von § 75 ($\varkappa$) ähnlich ist.

§ 87. *Aufbau.*

21 $\vdash r \frown (a \frown q) = a \frown (r \frown \rotatebox[origin=c]{180}{\$}q)$

(IIIh): ————————————

$$\vdash\left(\begin{array}{l}\top\!\!-r \frown (a \frown q)\\ \quad\llcorner\, r = b\\ \llcorner\, a = c\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!-a \frown (r \frown \rotatebox[origin=c]{180}{\$}q)\\ \quad\llcorner\, r = b\\ \llcorner\, a = c\end{array}\right) \qquad (\alpha$$

(IIIa): ————————————————————

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\left(\begin{array}{l}\top\!\!-r \frown (a \frown q)\\ \quad\llcorner\, r = b\\ \llcorner\, a = c\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\!\!-a \frown (r \frown \rotatebox[origin=c]{180}{\$}q)\\ \quad\llcorner\, a = c\\ \llcorner\, r = b\end{array}\right)\\ \llcorner\left(\begin{array}{l}\top\, a = c\\ \llcorner\, r = b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\, r = b\\ \llcorner\, a = c\end{array}\right)\end{array} \qquad (\beta$$

———•———

I
$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!\top\, a = c\\ \quad\llcorner\, r = b\\ \;\llcorner\!\!\top\, a = c\\ \quad\llcorner\, r = b\end{array}$$

$\times$

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!\top\, r = b\\ \quad\llcorner\, a = c\\ \;\llcorner\!\!\top\, a = c\\ \quad\llcorner\, r = b\end{array} \qquad (\gamma$$

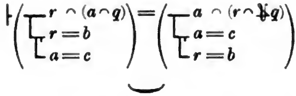
(IVa): ————

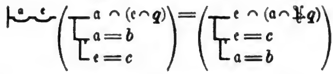
$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!\top\left(\begin{array}{l}\top\, a = c\\ \llcorner\, r = b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\, r = b\\ \llcorner\, a = c\end{array}\right)\\ \quad\llcorner\!\!\top\, a = c\\ \qquad\llcorner\, r = b\\ \quad\llcorner\!\!\top\, r = b\\ \qquad\llcorner\, a = c\end{array} \qquad (\delta$$

(γ):: ————————————————

$$\vdash\left(\begin{array}{l}\top\, a = c\\ \llcorner\, r = b\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\, r = b\\ \llcorner\, a = c\end{array}\right) \qquad (\varepsilon$$

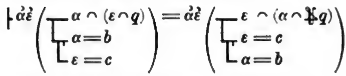
(β): ————————————————





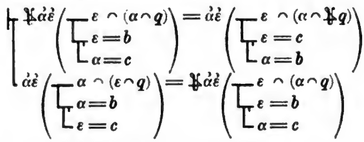
(ζ

(20):



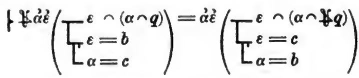
(η

(III c):



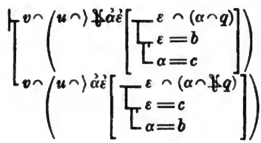
(ϑ

(40)::



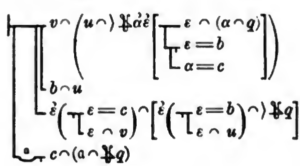
(ι

(III a):



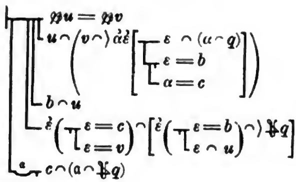
(κ

(63):: - - - - - - - - - - - - - -



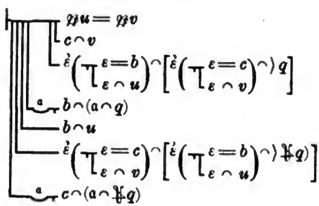
(λ

(32): - - - - - - - - - - - - - - -



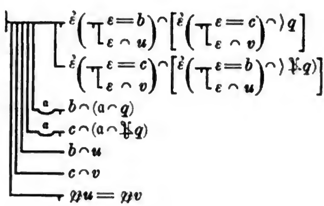
(μ

(63)::- - - - - - - - - - - - - -



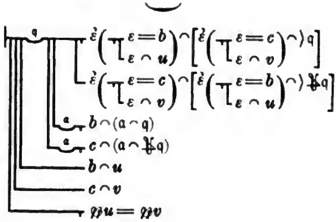
(ν

×



(ξ

$\smile$



(ο

(56):- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\vdash$ $\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u) = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v)$
$b \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u)$
$c \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v)$
$b \frown u$
$c \frown v$
$\mathfrak{p}u = \mathfrak{p}v$ (64

III e $\vdash b = b$

(I): ———

$\vdash b = b$
$b \frown u$ (α

(58): ———

$\vdash b \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u)$ (65

(64): ———

$\vdash$ $\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u) = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v)$
$c \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v)$
$b \frown u$
$c \frown v$
$\mathfrak{p}u = \mathfrak{p}v$ (α

(65):: ———

$\vdash$ $\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u) = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v)$
$b \frown u$
$c \frown v$
$\mathfrak{p}u = \mathfrak{p}v$ (β

×

$\vdash \mathfrak{p}u = \mathfrak{p}v$
$b \frown u$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u) = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v)$
$c \frown v$ (66

(IIIa): - - - - - - - - - -

$\vdash \mathfrak{p}u = a$
$\mathfrak{p}v = a$
$b \frown u$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u) = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v)$
$c \frown v$ (α

(III c): ———

$\vdash \mathfrak{p}u = a$
$b \frown u$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = b \text{ if } \varepsilon \frown u) = e$
$\mathfrak{p}v = a$
$c \frown v$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v) = e$ (β

$\vdash$ $\forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}\mathfrak{u} = \mathfrak{a}$
$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{u}$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \mathfrak{a} \text{ if } \varepsilon \frown \mathfrak{u}) = e$
$\mathfrak{p}v = a$
$c \frown v$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v) = e$ (67

$H \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\Big[\forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}\mathfrak{u} = \alpha$
$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{u}$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \mathfrak{a} \text{ if } \varepsilon \frown \mathfrak{u}) = \varepsilon\Big] = \mathfrak{f}$

(14): ———

$\vdash e \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$\forall \mathfrak{u}\, \forall \mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}\mathfrak{u} = a$
$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{u}$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \mathfrak{a} \text{ if } \varepsilon \frown \mathfrak{u}) = e$ (68

(67):: - - - - - - - - - -

$\vdash e \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$\mathfrak{p}v = a$
$c \frown v$
$\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c \text{ if } \varepsilon \frown v) = e$ (69

(III c): ———

$$\vdash\ e \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$d = a$$
$$c \frown v$$
$$\wp\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right) = e$$
$$\wp v = d \qquad (\alpha$$

×

$$\vdash\ \wp v = d$$
$$c \frown v$$
$$\wp\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right) = e$$
$$d = a$$
$$e \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (\beta$$

$$\vdash\ \mathfrak{u}\ \mathfrak{a}\ \ \wp\mathfrak{u} = d$$
$$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{u}$$
$$\wp\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a}\\ \varepsilon \frown \mathfrak{u}\end{array}\right) = e$$
$$d = a$$
$$e \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (\gamma$$

(68): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\ e \frown (d \frown \mathfrak{f})$$
$$d = a$$
$$e \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (\delta$$

×

$$\vdash\ d = a$$
$$e \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$e \frown (d \frown \mathfrak{f}) \qquad (70$$

$$\vdash\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\ \ \mathfrak{d} = \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f})$$
$$\mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown \mathfrak{f}) \qquad (\alpha$$

(16): ————————

$$\vdash \mathrm{I}\mathfrak{f} \qquad (71$$

—•—

Γ. Beweis des Satzes

$$„\vdash \mathrm{I}\rlap{\,\backslash}\mathfrak{f}“$$

a) Beweis des Satzes

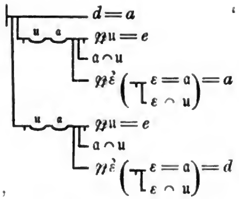
$$„\vdash\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = m\\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\varepsilon = n\\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right] \frown)\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \varepsilon = b\\ \alpha = c\end{array}\right]\right)“$$
$$c \frown (m \frown \rlap{\,\backslash}q)$$
$$\mathrm{I}\rlap{\,\backslash}q$$
$$b \frown (n \frown q)$$
$$, u \frown (v \frown) q)$$

§ 88. *Zerlegung.*

Wir wollen jetzt den Satz beweisen, dass es zu jeder Anzahl nicht mehr als eine gebe, die ihr unmittelbar in der Anzahlenreihe vorhergehe. Dies führt zurück auf den Satz

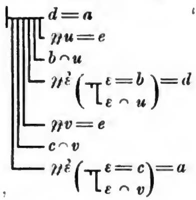
$$„\vdash\ d = a$$
$$a \frown (e \frown \mathfrak{f})$$
$$, d \frown (e \frown \mathfrak{f})“ \qquad (\alpha$$

Führen wir hier die aus der Definition (H) folgenden Ausdrücke ein, so haben wir



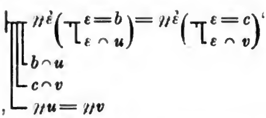
(β

einen Satz, der durch wiederholte Wendung und Einführung deutscher Buchstaben hervorgeht aus



(γ

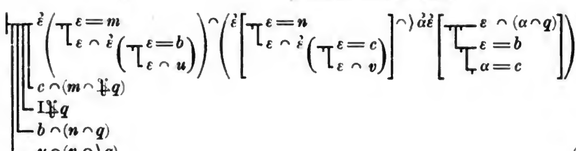
Dieser Satz kann abgeleitet werden aus



(δ

Nach dem Satze (32) brauchen wir nur eine Beziehung aufzuzeigen, die den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriff in den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)$-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Das Unterglied ‚$\mathfrak{n}u = \mathfrak{n}v$' sagt uns nun, dass es eine Beziehung giebt, die den u-Begriff in den v-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Die q-Beziehung sei eine solche. Wir wissen nun von der $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \varepsilon = b\\ \alpha = c\end{array}\right)$-Beziehung, dass kein Gegenstand zu c und dass b zu keinem Gegenstande in dieser Beziehung steht [1]). Ferner steht kein Gegenstand zu n und m steht zu keinem Gegenstande in dieser Beziehung, wenn m zu c und b zu n in der q-Beziehung steht, weil diese ebenso wie ihre Umkehrung eindeutig ist. Jene Beziehung bildet den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = m\\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right)$-Begriff in den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = n\\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right)$-Begriff ab, und ihre Umkehrung bildet diesen in jenen ab. Nach (32) ist dann die Anzahl dieses Begriffes gleich der Anzahl jenes. Mit (66) können wir dann hoffen zum Ziele zu gelangen.

Zunächst wenden wir uns dem Beweise des Satzes



(ε

1) Vergl. § 66.

zu. Schreiben wir (51) in der Form

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=m\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=b\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right)\frown\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\varepsilon=n\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=c\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\frown)\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!\top\ \varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \quad\llcorner\varepsilon=b\\ \quad\llcorner\alpha=c\end{array}\right]\right)\\
\quad\llcorner b\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=m\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=b\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right)\\
\quad\llcorner c\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=n\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=c\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right)\\
\quad\llcorner\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=m\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=b\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right)\frown\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\varepsilon=n\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=c\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\frown)q\right)
\end{array}$$

so sehen wir, dass hauptsächlich noch zu beweisen bleibt

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=m\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=b\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right)\frown\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\varepsilon=n\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=c\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\frown)q\right)\\
\quad\llcorner m\frown(c\frown q)\\
\quad\llcorner \mathrm{I}\!\!\!\backslash q\\
\quad\llcorner b\frown(n\frown q)\\
\quad\llcorner u\frown(v\frown)q)
\end{array} \qquad (\zeta$$

denn der Satz

$$\vdash b\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=m\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=b\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right)$$

bietet keine Schwierigkeit. Wenn wir nun den Satz

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=b\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\frown\left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=n\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown)q\right]\\
\quad\llcorner b\frown(n\frown q)\\
\quad\llcorner \mathrm{I}\!\!\!\backslash q\\
\quad\llcorner u\frown(v\frown)q)
\end{array} \qquad (\eta$$

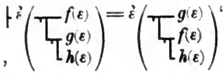
bewiesen haben, so können wir ihn zweimal anwenden und dadurch zum Satze

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=m\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=b\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right)\frown\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\varepsilon=c\\ \llcorner\varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=n\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\frown)q\right)\\
\quad\llcorner m\frown(c\frown q)\\
\quad\llcorner \mathrm{I}\!\!\!\backslash q\\
\quad\llcorner b\frown(n\frown q)\\
\quad\llcorner u\frown(v\frown)q)
\end{array} \qquad (\vartheta$$

gelangen. Wir bedürfen nun noch der Sätze

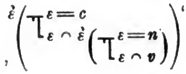
$$\vdash \grave{\varepsilon}g(\varepsilon,\ f(\varepsilon))=\grave{\varepsilon}g(\varepsilon,\ \varepsilon\frown\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \qquad (\iota$$

und

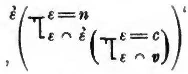


(κ

um

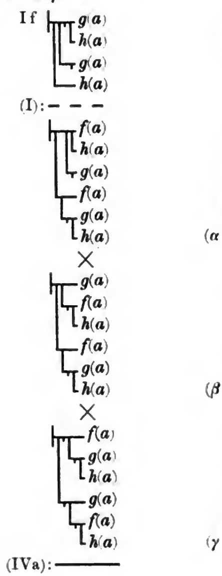


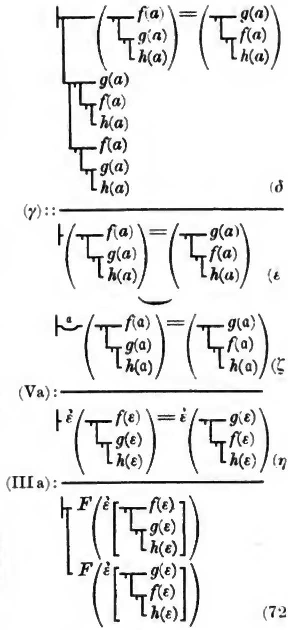
durch



ersetzen zu können. Diese Sätze leiten wir zunächst ab.

§ 89. *Aufbau.*





—•—

1 $\vdash f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$

(IIIh): ———

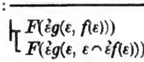
$\vdash g(a, f(a)) = g(a, a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon))$ (α

$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\; g(\mathfrak{a}, f(\mathfrak{a})) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon))$ (β

(Va): ———

$\vdash \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, f(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon))$ (73

(IIIa): ———



(74

—•—

73 $\vdash \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, f(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}g(\varepsilon, \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon))$

(IIIc): ———

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top F(\grave{\varepsilon} g(\varepsilon, \varepsilon \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon))) \\ \quad\llcorner F(\grave{\varepsilon} g(\varepsilon, f(\varepsilon))) \end{array} \qquad (75$$

—•—

$$74 \quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top F\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!\top \varepsilon = c \\ \quad\llcorner\, \varepsilon = n \\ \quad\quad\llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right]\right) \\ \llcorner F\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top \varepsilon = c \\ \llcorner\, \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = n \\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\right) \end{array}$$

(72): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top F\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\!\top \varepsilon = n \\ \quad\llcorner\, \varepsilon = c \\ \quad\quad\llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right]\right) \\ \llcorner F\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top \varepsilon = c \\ \llcorner\, \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = n \\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\right) \end{array} \qquad (\alpha$$

(75): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top F\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top \varepsilon = n \\ \llcorner\, \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = c \\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\right) \\ \llcorner F\left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top \varepsilon = c \\ \llcorner\, \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = n \\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right]\right) \end{array} \qquad (76$$

§ 90. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (η) des § 88. Wenn die q-Beziehung den u-Begriff in den v-Begriff abbildet, so giebt es zu jedem unter den u-Begriff fallenden Gegenstande einen unter den v-Begriff fallenden, zu dem er in der q-Beziehung steht. Nun fällt jeder unter den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = b \\ \llcorner\, \varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriff fallende Gegenstand unter den u-Begriff, und es giebt also bei unserer Bedingung zu jedem unter den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = b \\ \llcorner\, \varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriff fallenden Gegenstande einen unter den v-Begriff fallenden, zu dem er in der q-Beziehung steht; aber unter den v-Begriff fällt n, das nicht unter den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = n \\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right)$-Begriff fällt. Wenn nun unter den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = b \\ \llcorner\, \varepsilon \frown u\end{array}\right)$-Begriff ein Gegenstand fiele, der zu n in der q-Beziehung stände, so brauchte es keinen Gegenstand zu geben, zu dem er in der q-Beziehung stände, und der unter den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = n \\ \llcorner\, \varepsilon \frown v\end{array}\right)$-Begriff fiele. Aber dieser Fall ist durch die Unterglieder ‚$—b \frown (n \frown q)$' und ‚$\mathrm{I}\natural q$' ausgeschlossen.

§ 91. *Aufbau.*

$$1 \quad \vdash f(a) = a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

(III c): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top F(a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)) \\ \quad\llcorner F(f(a)) \end{array} \qquad (77$$

—•—

$$13 \quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top d = b \\ \quad\llcorner\, n \frown (b \frown \natural q) \\ \quad\llcorner\, n \frown (d \frown \natural q) \\ \quad\llcorner\, \mathrm{I}\natural q \end{array}$$

(22):: - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top d = b \\ \quad\llcorner\, b \frown (n \frown q) \\ \quad\llcorner\, n \frown (d \frown \natural q) \\ \quad\llcorner\, \mathrm{I}\natural q \end{array} \qquad (78$$

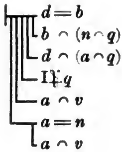
(22):: - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top d = b \\ \quad\llcorner\, b \frown (n \frown q) \\ \quad\llcorner\, d \frown (n \frown q) \\ \quad\llcorner\, \mathrm{I}\natural q \end{array} \qquad (79$$

(III a): ————————

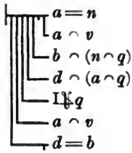
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top d = b \\ \quad\llcorner\, b \frown (n \frown q) \\ \quad\llcorner\, d \frown (a \frown q) \\ \quad\llcorner\, \mathrm{I}\natural q \\ \quad\llcorner\, a = n \end{array} \qquad (\alpha$$

(I):: - - - - -



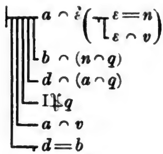
(β

×



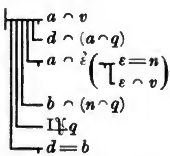
(γ

(77): - - - - - - - -



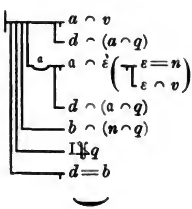
(δ

×

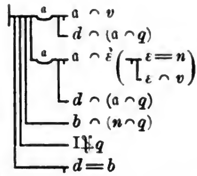


(ε

(II a):: - - - - - - - - -

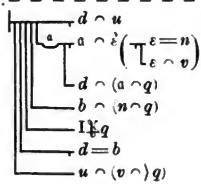


(ζ



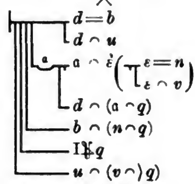
(η

8: - - - - - - - - - - -



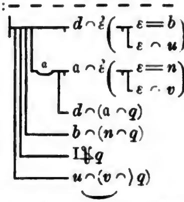
(ϑ

×

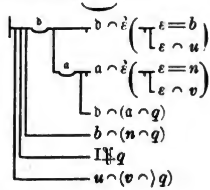


(ι

(58): - - - - - - - - - - -

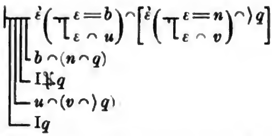


(κ



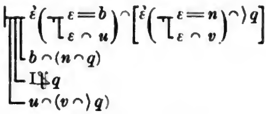
(λ

(11): - - - - - - - - - - - - -



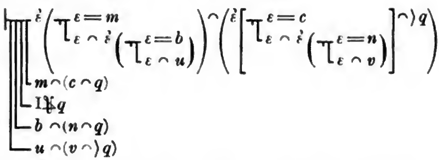
(μ

(18)::- - - - - - - - - - - - - -



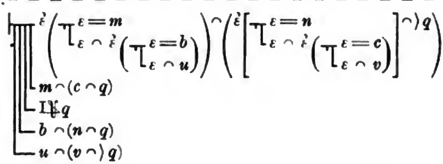
(80

(80):- - - - - - - - - - - - - -



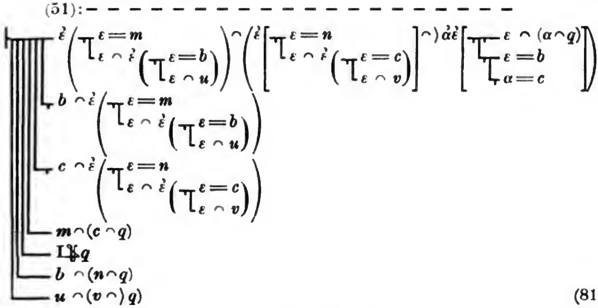
(α

(76):- - - - - - - - - - - - - - - - - - -



(β

(51):- - - - - - - - - - - - - - - - - - -



(81

$$1 \quad \vdash f(a) = a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

(III a): ________

$$\vdash \begin{array}{l} \top\ F(f(a)) \\ \llcorner\ F(a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)) \end{array} \qquad (82$$

——•——

$$\mathrm{Id} \quad \vdash \begin{array}{l} b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) \\ \llcorner\ \begin{array}{l} \top\ b = m \\ \llcorner\ b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) \end{array} \end{array} \qquad (\alpha$$

(82):: - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) \\ \llcorner\ b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \\ \llcorner\ b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) \end{array} \qquad (\gamma$$

(65):: ________

$$\vdash b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \qquad (\delta$$

(81): ________

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = n \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c \\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right] \frown\!\rangle\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon \frown (\alpha \frown q) \\ \ \ \top\ \varepsilon = b \\ \ \ \llcorner\ \alpha = c\end{array}\right]\right) \\ \llcorner\ c \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = n \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c \\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right) \\ \llcorner\ m \frown (c \frown q) \\ \llcorner\ \mathrm{I}\sharp q \\ \llcorner\ b \frown (n \frown q) \\ \llcorner\ u \frown (v \frown\!\rangle\, q) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(δ):: ________

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = n \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c \\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right] \frown\!\rangle\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon \frown (\alpha \frown q) \\ \ \ \top\ \varepsilon = b \\ \ \ \llcorner\ \alpha = c\end{array}\right]\right) \\ \llcorner\ m \frown (c \frown q) \\ \llcorner\ \mathrm{I}\sharp q \\ \llcorner\ b \frown (n \frown q) \\ \llcorner\ u \frown (v \frown\!\rangle\, q) \end{array} \qquad (83$$

(23):: -

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b \\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = n \\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c \\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\end{array}\right] \frown\!\rangle\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon \frown (\alpha \frown q) \\ \ \ \top\ \varepsilon = b \\ \ \ \llcorner\ \alpha = c\end{array}\right]\right) \\ \llcorner\ c \frown (m \frown \sharp q) \\ \llcorner\ \mathrm{I}\sharp q \\ \llcorner\ b \frown (n \frown q) \\ \llcorner\ u \frown (v \frown\!\rangle\, q) \end{array} \qquad (84$$

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\ \eta u = \eta v \\
\quad \llcorner\!\!\top\ \eta\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = \eta\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\\
\quad \llcorner\ b \frown u\\
\quad \llcorner\ c \frown v
\end{array}$$

und Schluss des Abschnittes *I*.

§ 92. *Zerlegung.*

Aus (83 können wir mit (53) und (22) den Satz

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = n\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right] \frown)\ \between\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\top\ \varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad \llcorner\!\neg\ \varepsilon = b\\ \quad\ \ \llcorner\!\neg\ \alpha = c\end{array}\right]\right)\\
\quad \llcorner\ b \frown (n \frown q)\\
\quad \llcorner\ \mathrm{I}\between\between q\\
\quad \llcorner\ c \frown (m \frown \between q)\\
\quad \llcorner\ v \frown (u \frown)\between q
\end{array} \qquad (\alpha$$

ableiten. Von diesem Satze und (84) gelangen wir dann mit (66) zu einem Satze mit dem Obergliede

$$\eta\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = \eta\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)$$

§ 93. *Aufbau.*

83 $$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = n\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right] \frown)\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\top\ \varepsilon \frown (\alpha \frown \between q)\\ \quad \llcorner\!\neg\ \varepsilon = c\\ \quad\ \ \llcorner\!\neg\ \alpha = b\end{array}\right]\right)\\
\quad \llcorner\ n \frown (b \frown \between q)\\
\quad \llcorner\ \mathrm{I}\between\between q\\
\quad \llcorner\ c \frown (m \frown \between q)\\
\quad \llcorner\ v \frown (u \frown)\between q
\end{array}$$

(53):- -

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = n\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = c\\ \llcorner\ \varepsilon\frown v\end{array}\right)\end{array}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = m\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = b\\ \llcorner\ \varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right] \frown)\ \between\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\top\!\top\ \varepsilon \frown (\alpha \frown q)\\ \quad \llcorner\!\neg\ \varepsilon = b\\ \quad\ \ \llcorner\!\neg\ \alpha = c\end{array}\right]\right)\\
\quad \llcorner\ n \frown (b \frown \between q)\\
\quad \llcorner\ \mathrm{I}\between\between q\\
\quad \llcorner\ c \frown (m \frown \between q)\\
\quad \llcorner\ v \frown (u \frown)\between q
\end{array} \qquad (\alpha$$

(22)::- -

$$\vdash \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = n}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = c}_{\varepsilon \frown v}\right)}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\mathrm{T}^{\varepsilon = m}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = b}_{\varepsilon \frown u}\right)}\right] \frown) \between \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\alpha \frown q) \\ \varepsilon = b \\ \alpha = c \end{array}\right]\right)$$

$$\begin{array}{l} b \frown (n \frown q) \\ \mathrm{I} \between \between q \\ c \frown (m \frown \between q) \\ v \frown (u \frown) \between q) \end{array} \qquad (\beta$$

(32):- -

$$\vdash \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = m}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = b}_{\varepsilon \frown u}\right)}\right) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = n}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = c}_{\varepsilon \frown v}\right)}\right)$$

$$\grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = m}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = b}_{\varepsilon \frown u}\right)}\right) \frown \left(\grave{\varepsilon}\left[\mathrm{T}^{\varepsilon = n}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = c}_{\varepsilon \frown v}\right)}\right] \frown) \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\alpha \frown q) \\ \varepsilon = b \\ \alpha = c \end{array}\right]\right)$$

$$\begin{array}{l} b \frown (n \frown q) \\ \mathrm{I} \between \between q \\ c \frown (m \frown \between q) \\ v \frown (u \frown) \between q) \end{array} \qquad (\gamma$$

(84)::- -

$$\vdash \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = m}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = b}_{\varepsilon \frown u}\right)}\right) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = n}_{\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = c}_{\varepsilon \frown v}\right)}\right)$$

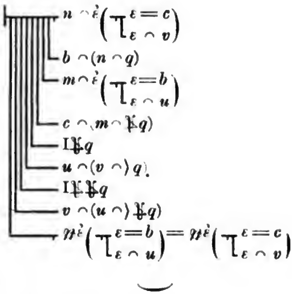
$$\begin{array}{l} c \frown (m \frown \between q) \\ \mathrm{I} \between q \\ b \frown (n \frown q) \\ u \frown (v \frown) q) \\ \mathrm{I} \between \between q \\ v \frown (u \frown) \between q) \end{array} \qquad (\delta$$

(66):- -

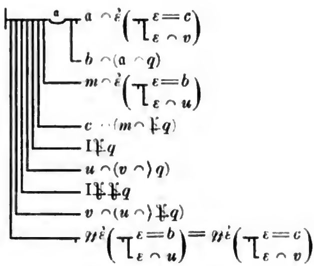
$$\vdash \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = b}_{\varepsilon \frown u}\right) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = c}_{\varepsilon \frown v}\right)$$

$$\begin{array}{l} m \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = b}_{\varepsilon \frown u}\right) \\ c \frown (m \frown \between q) \\ \mathrm{I} \between q \\ b \frown (n \frown q) \\ u \frown (v \frown) q) \\ \mathrm{I} \between \between q \\ v \frown (u \frown) \between q) \\ n \frown \grave{\varepsilon}\left(\mathrm{T}^{\varepsilon = c}_{\varepsilon \frown v}\right) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

×



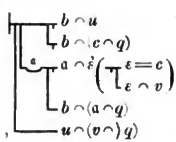
(ζ



(85

§ 94. *Zerlegung.*

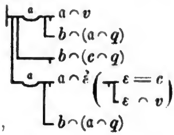
Die letzten beiden Uebergänge deuten schon auf den Weg hin, der nun weiter zu verfolgen sein wird. In (ε) hatten wir n und m als Hilfsgegenstände ähnlich den Hilfslinien in der Geometrie. Sie sollen in unserm Satze nicht vorkommen, müssen also entfernt werden. Dies geschieht wie immer dadurch, dass man zeigt, es gebe etwas von der verlangten Beschaffenheit, oder, was begriffsschriftlich bequemer ist, wenn es etwas der Art nicht gebe, so gelte eine der Voraussetzungen nicht, die wir machen. Wir nehmen uns nun vor, den Satz



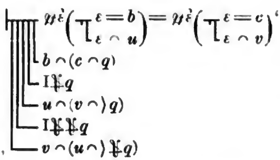
(α

zu beweisen. Hierdurch bekommen wir zwar das Unterglied ‚$\top b \frown (c \frown q)$' herein; aber wir können auch bei dem entgegengesetzten Untergliede ‚$— b \frown (c \frown q)$' den im Uebrigen unveränderten Satz beweisen. Um (α)

aus (8) abzuleiten, bedürfen wir des Satzes



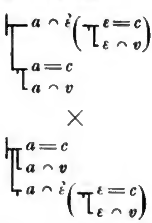
der aus (77) folgt. Ebenso wie ‚n' entfernen wir auch ‚m' aus unserm Satze und beweisen dann, wie eben angedeutet worden ist, den Satz



mit (80) und (32) und schaffen nun nach Regel (8) die Unterglieder ‚$—b \frown (c \frown q)$' und ‚$\top b \frown (c \frown q)$' weg. Nachdem dann die Unterglieder ‚I⟊q' und ‚I⟊⟊q' mit (30) und (18) entfernt sind, gelangen wir mit (49) zum Ziele unseres Abschnittes (b) und darauf, wie im § 88 angedeutet worden ist, mit (68) zum Satze ‚⊢I⟊f'.

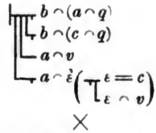
§ 95. *Aufbau.*

77

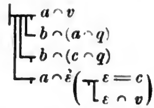


(α

(IIIa): - - - - - - -

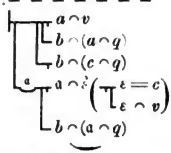


(β

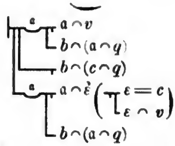


(γ

(IIa):: - - - - - - -

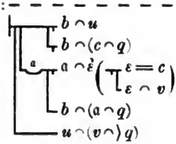


(δ



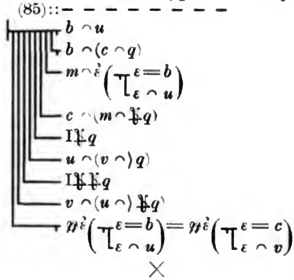
(ε

(8): - - - - - - - - -



(ζ

(85):: - - - - - - - -



(η

$$
\begin{array}{l}
\vdash m \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)\\
\quad c \frown (m \frown \ddagger q)\\
\quad b \frown (c \frown q)\\
\quad b \frown u\\
\quad \mathrm{I}\ddagger q\\
\quad u \frown (v \frown) q)\\
\quad \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\
\quad v \frown (u \frown) \ddagger q)\\
\quad \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{smallmatrix}\right)
\end{array}
\qquad (\vartheta
$$

$$
\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)\\
\quad c \frown (\mathfrak{a} \frown \ddagger q)\\
\quad b \frown (c \frown q)\\
\quad b \frown u\\
\quad \mathrm{I}\ddagger q\\
\quad u \frown (v \frown) q)\\
\quad \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\
\quad v \frown (u \frown) \ddagger q)\\
\quad \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{smallmatrix}\right)
\end{array}
\qquad (\iota
$$

(ζ): - - - - - - - - - - - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash c \frown v\\
\quad c \frown (b \frown \ddagger q)\\
\quad b \frown (c \frown q)\\
\quad b \frown u\\
\quad \mathrm{I}\ddagger q\\
\quad u \frown (v \frown) q)\\
\quad \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\
\quad v \frown (u \frown) \ddagger q)\\
\quad \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{smallmatrix}\right)
\end{array}
\qquad (\varkappa
$$

(22):: - - - - - - - - - - - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash c \frown v\\
\quad b \frown (c \frown q)\\
\quad b \frown u\\
\quad \mathrm{I}\ddagger q\\
\quad u \frown (v \frown) q)\\
\quad \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\
\quad v \frown (u \frown) \ddagger q)\\
\quad \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = b\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{smallmatrix}\right)
\end{array}
\qquad (\lambda
$$

×

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; b\frown(c\frown q)\\ \quad\llcorner\; b\frown u\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger q\\ \quad\llcorner\; u\frown(v\frown)q)\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\ \quad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger q)\\ \quad\llcorner\; c\frown v\end{array}\qquad (86$$

———•———

$$32\quad\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)\frown\left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\frown)q\right]\\ \quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\frown\left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)\frown)\ddagger q\right]\end{array}$$

(80)::- - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)\frown\left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\frown)q\right]\\ \quad\llcorner\; c\frown(b\frown\ddagger q)\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\ \quad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger q)\end{array}\qquad (\alpha$$

(22)::- - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)\frown\left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\frown)q\right]\\ \quad\llcorner\; b\frown(c\frown q)\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\ \quad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger q)\end{array}\qquad (\beta$$

(80)::- - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; b\frown(c\frown q)\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger q\\ \quad\llcorner\; u\frown(v\frown)q)\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\ \quad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger q)\end{array}\qquad (\gamma$$

(86)::-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger q\\ \quad\llcorner\; u\frown(v\frown)q)\\ \quad\llcorner\; \mathrm{I}\ddagger\ddagger q\\ \quad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger q)\\ \quad\llcorner\; b\frown u\\ \quad\llcorner\; c\frown v\end{array}\qquad (\delta$$

(30, 18)::= = = = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; u\frown(v\frown)q)\\ \quad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger q)\\ \quad\llcorner\; b\frown u\\ \quad\llcorner\; c\frown v\end{array}\qquad (\varepsilon$$

×

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; u\frown(v\frown)q)\\ \quad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger q)\\ \quad\llcorner\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; b\frown u\\ \quad\llcorner\; c\frown v\end{array}\qquad (\zeta$$

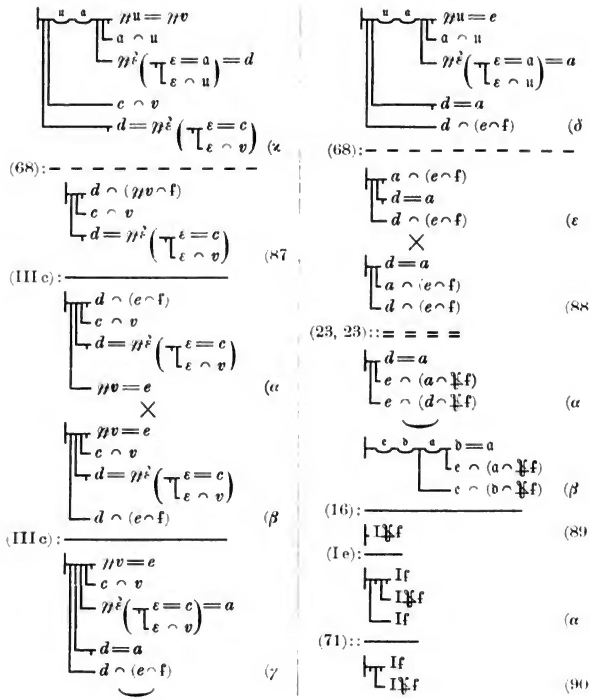
$$\begin{array}{l}\vdash\!\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\top\; u\frown(v\frown)\mathfrak{q})\\ \qquad\llcorner\; v\frown(u\frown)\ddagger\mathfrak{q})\\ \quad\llcorner\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; b\frown u\\ \quad\llcorner\; c\frown v\end{array}\qquad (\eta$$

(49):- - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}u=\mathfrak{N}v\\ \quad\llcorner\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\\ \quad\llcorner\; b\frown u\\ \quad\llcorner\; c\frown v\end{array}\qquad (\vartheta$$

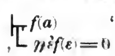
(III c)::———————————

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\; \mathfrak{N}u=\mathfrak{N}v\\ \quad\llcorner\; b\frown u\\ \quad\llcorner\; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=b\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)=d\\ \quad\llcorner\; c\frown v\\ \quad\llcorner\; \underset{\smile}{d}=\mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon=c\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\end{array}\qquad (\iota$$



Δ. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Null.

a) Beweis des Satzes



§ 96. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz, dass kein Gegenstand unter einen Begriff fällt, dessen zugehörige Anzahl 0 ist. Der in der Ueberschrift genannte Satz ist eigentlich etwas allgemeiner, weil der Functionsbuchstabe „f“ nicht nur Begriffe andeutet. Unser Satz folgt leicht aus dem Satze

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{p}u = 0 \\ a \frown u \end{array}\text{'}$$

Nach der Definition (Θ) haben wir

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{p}u = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \\ a \frown u \end{array}\text{'}$$

zu beweisen, was mit (49) geschehen kann, indem wir $\vdash\!\!\begin{array}{l} a \frown u \\ u \frown (\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \frown) q) \end{array}$' ableiten. Hierzu benutzen wir (8) und bedürfen des Satzes $\vdash\!\!\begin{array}{l} b \frown \grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \\ a \frown (b \frown q) \end{array}$', der sich leicht aus (58) ergiebt.

§ 97. *Aufbau.*

$$\Theta \quad \vdash \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) = 0$$

(IIIc): ———————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} F(0) \\ F(\mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon)) \end{array} \qquad (91$$

———•———

$$\text{IIIe} \quad \vdash b = b$$

(58): ———

$$\vdash b \frown \grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \qquad (92$$

(I): ———————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} b \frown \grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \\ a \frown (b \frown q) \end{array} \qquad (\alpha$$

$\smile$

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \\ a \frown (\mathfrak{a} \frown q) \end{array} \qquad (\beta$$

(8): ———————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} a \frown u \\ u \frown (\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \frown) q) \end{array} \qquad (\gamma$$

$\times$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} u \frown (\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \frown) q) \\ a \frown u \end{array} \qquad (\delta$$

(I): ———————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} u \frown (\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \frown) q) \\ \grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \frown (u \frown) \nparallel q) \\ a \frown u \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$\smile$

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\begin{array}{l} u \frown (\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \frown) \mathfrak{q}) \\ \grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \frown (u \frown) \nparallel \mathfrak{q}) \end{array} \\ \quad a \frown u \qquad (\zeta$$

(49): - - - - - - - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{p}u = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon) \\ a \frown u \end{array} \qquad (\eta$$

(91): ———————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{p}u = 0 \\ a \frown u \end{array} \qquad (93$$

$\times$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} a \frown u \\ \mathfrak{p}u = 0 \end{array} \qquad (94$$

———•———

$$94 \quad \vdash\!\!\begin{array}{l} a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = 0 \end{array}$$

(82): - - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(a) \\ \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = 0 \end{array} \qquad (95$$

b) Beweise des Satzes

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{p}u = 0 \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\neg\; \mathfrak{a} \frown u \end{array}\text{'}$$

und einiger Folgesätze.

§ 98. *Zerlegung.*

Der in der Ueberschrift genannte Satz ist etwas allgemeiner als der, den wir in Worten so aussprechen: „Wenn unter einen Begriff kein Gegenstand fällt, so ist Null die Anzahl, die diesem Begriffe zukommt.“

Wir beweisen zunächst mit (32) und (38) den Satz

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{p}u = \mathfrak{p}v \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}(\!-\mathfrak{a} \frown u) = (\!-\mathfrak{a} \frown v) \end{array}\text{'}$$

und dann

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} (\!-a \frown u) = (\!-a \frown \grave{\varepsilon}(\neg\,\varepsilon = \varepsilon)) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\neg\; \mathfrak{a} \frown u \end{array}\text{'}$$

§ 99. *Aufbau.*

$$\text{IIIf}\quad \begin{array}{l}\vdash\!\top (-a\frown v)=(-u\frown u)\\ \quad\llcorner(-a\frown u)=(-a\frown v)\end{array}$$

(IIa):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top (-a\frown v)=(-a\frown u)\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown v)\end{array}\qquad(\alpha$$

$$\begin{array}{l}\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown v)=(-\mathfrak{a}\frown u)\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown v)\end{array}\qquad(\beta$$

(38): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top v\frown(u\frown)\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\alpha))\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown v)\end{array}\qquad(\gamma$$

(IIIc): ─────────────

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top v\frown(u\frown)\mathfrak{U}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\alpha))\\ \quad\vert\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown v)\\ \quad\llcorner\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\alpha)=\mathfrak{U}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\alpha)\end{array}\qquad(\delta$$

(41):: ─────────────

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top v\frown(u\frown)\mathfrak{U}\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\alpha))\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown v)\end{array}\qquad(\varepsilon$$

(32): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top \eta u=\eta v\\ \quad\vert\llcorner u\frown(v\frown)\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\alpha))\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown v)\end{array}\qquad(\zeta$$

(38):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top \eta u=\eta v\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown v)\end{array}\qquad(96$$

———•———

$$92\quad \vdash a\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon)$$

(Ia): ─────────

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top a\frown u\\ \quad\llcorner a\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon)\end{array}\qquad(\alpha$$

(IVa): ─────────

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top (-a\frown u)=(-a\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon))\\ \quad\vert\llcorner a\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon)\\ \quad\llcorner a\frown u\end{array}\qquad(\beta$$

———•———

$$\text{IIa}\quad \begin{array}{l}\vdash\!\top a\frown u\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown u\end{array}$$

(Ia): - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top a\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon)\\ \quad\vert\llcorner a\frown u\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown u\end{array}\qquad(\gamma$$

(β): - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top (-a\frown u)=(-a\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon))\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown u\end{array}\qquad(\delta$$

$$\begin{array}{l}\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{a}\frown u)=(-\mathfrak{a}\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon))\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown u\end{array}\qquad(\varepsilon$$

(96): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top \eta u=\eta\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon=\varepsilon)\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown u\end{array}\qquad(\zeta$$

(91): ─────────────

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top \eta u=0\\ \quad\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown u\end{array}\qquad(97$$

§ 100. *Zerlegung.*

Wir ziehen aus (97) zunächst einige einfache Folgerungen und wenden uns dann dem Satze zu: „Wenn eine Anzahl nicht die Null ist, so giebt es eine ihr in der Anzahlenreihe unmittelbar vorhergehende“, in Zeichen:

$$\begin{array}{l}\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown(a\frown\mathfrak{f})'\\ \quad\vert\llcorner\top a=0\\ ,\llcorner\smile^{\mathfrak{u}}\top\eta\mathfrak{u}=a\end{array}$$

Wir leiten zuerst den einfachern Satz

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top c\frown u\\ ,\llcorner\smile^{\mathfrak{a}}\top\mathfrak{a}\frown(\eta u\frown\mathfrak{f})\end{array}$$

ab. Hierzu bedürfen wir des Satzes

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top \eta\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=c\\ \llcorner\varepsilon\frown u\end{array}\right)\frown(\eta u\frown\mathfrak{f})'\\ ,\llcorner c\frown u\end{array}$$

der aus der Definition (H) folgt.

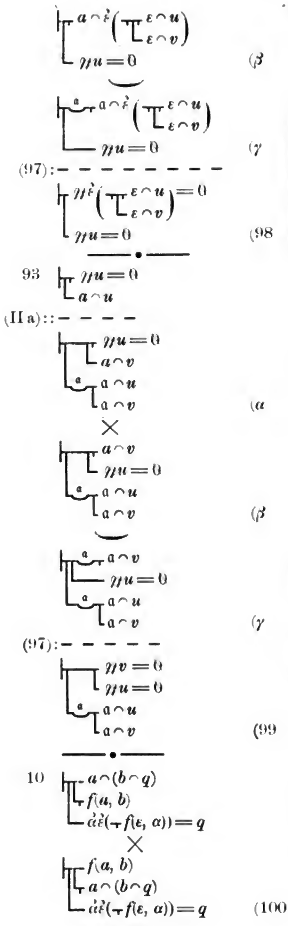
§ 101. *Aufbau.*

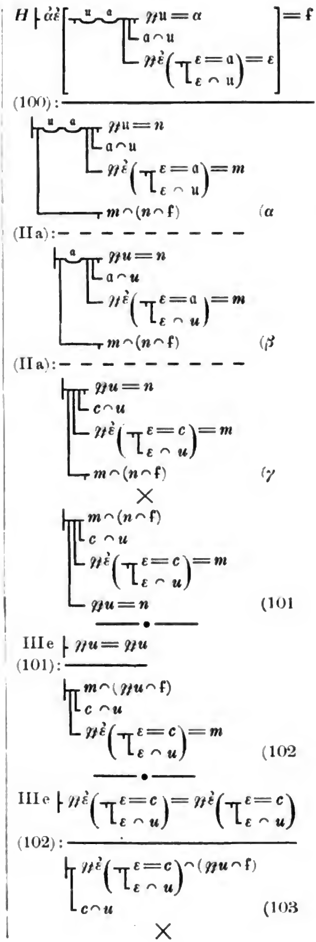
$$94\quad \begin{array}{l}\vdash\!\top a\frown u\\ \quad\llcorner\eta u=0\end{array}$$

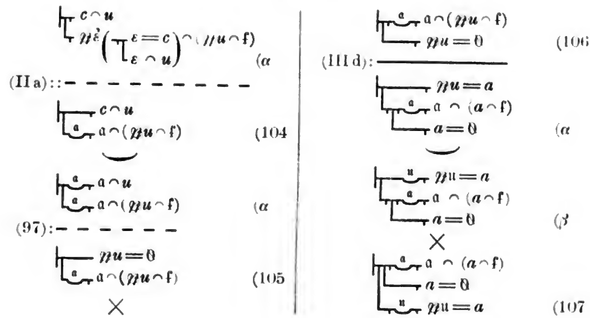
(I): ─────────

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top a\frown u\\ \quad\vert\llcorner a\frown v\\ \quad\llcorner\eta u=0\end{array}\qquad(\alpha$$

(58): - - - -


(β
(γ
(97):
(98
93
(IIa)::
(α
(β
(γ
(97):
(99
10
(100

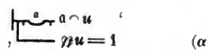

H
= f
(100):
(α
(IIa):
(β
(IIa):
(γ
(101
IIIe
(101):
(102
IIIe
(102):
(103



E. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Eins.

§ 102. *Zerlegung.*

Wir beweisen den Satz



den wir in Worten so aussprechen:

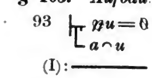
„Es giebt einen Gegenstand, der unter einen Begriff fällt, wenn Eins die Anzahl dieses Begriffes ist.“

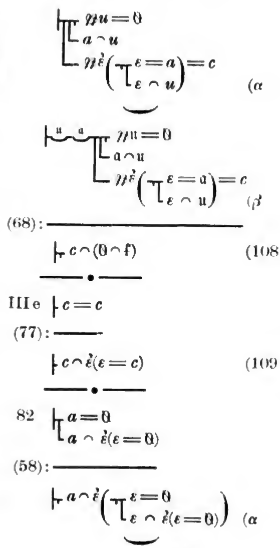
Wäre dies nicht richtig, so würde zufolge des Satzes (97) die Anzahl Eins mit der Anzahl Null zusammenfallen. Es ist zu zeigen, dass dies nicht sein kann. Wir beweisen zu diesem Zwecke die Sätze

‚$\vdash \theta \frown (1 \frown \mathfrak{f})$‘ ($\beta$, ‚$\vdash \theta \frown (\theta \frown \mathfrak{f})$‘ ($\gamma$

Von diesen folgt (β) aus (101) mit der Definition (*I*), (γ) aus (68) mit dem Satze (93).

§ 103. *Aufbau.*





$$\vdash^{\mathfrak{a}}\!\smile\!\top a \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)\end{array}\right) \qquad (\beta$$

(97): ———————————————

$$\vdash \wp\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)\end{array}\right) = 0 \qquad (\gamma$$

(101): ———————————————

$$\begin{array}{l}\vdash\ 0 \frown (1 \frown \mathfrak{f})\\ \llcorner\ 0 \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)\\ \llcorner\ \wp\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) = 1\end{array} \qquad (\delta$$

(109, l):: ═══════════

$$\vdash 0 \frown (1 \frown \mathfrak{f}) \qquad (110$$

(IIIb): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash\ 0 = 1\\ \llcorner\top\ 0 \frown (0 \frown \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\alpha$$

(108):: ————————

$$\vdash\top\ 0 = 1 \qquad (111$$

——•——

$$97 \quad \begin{array}{l}\vdash\ \wp u = 0\\ \llcorner^{\mathfrak{a}}\!\smile\!\top\ \mathfrak{a} \frown u\end{array}$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l}\vdash^{\mathfrak{a}}\!\smile\!\top\ \mathfrak{a} \frown u\\ \llcorner\top\ \wp u = 0\end{array} \qquad (112$$

(IIId):: - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash^{\mathfrak{a}}\!\smile\!\top\ \mathfrak{a} \frown u\\ \llcorner\ \wp u = 1\\ \llcorner\top\ 0 = 1\end{array}$$

(111):: ————————

$$\begin{array}{l}\vdash^{\mathfrak{a}}\!\smile\!\top\ \mathfrak{a} \frown u\\ \llcorner\ \wp u = 1\end{array} \qquad (113$$

——•——

§ 104. *Zerlegung.*

Mit (110) und (71) können wir leicht den Satz beweisen, dass eine Anzahl die Eins ist, wenn sie in der Anzahlenreihe unmittelbar auf die Null folgt.

Um den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash\ d = a\\ \llcorner\ a \frown u\\ \llcorner\ \wp u = 1\\ \llcorner\ d \frown u\end{array} \qquad (\alpha$$

zu beweisen, wenden wir (49) an in der Form

$$\begin{array}{l}\vdash\ \wp u = \wp\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)\\ \llcorner^{\mathfrak{q}}\!\smile\!\top\ u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown)\, \mathfrak{q})\\ \llcorner\ \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown)\maltese \mathfrak{q})\end{array}$$

und bedürfen nun des Satzes

$$\begin{array}{l}\vdash\ d = a\\ \llcorner\ \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown)\maltese q)\\ \llcorner\ u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown)\, q)\\ \llcorner\ a \frown u\\ \llcorner\ d \frown u\end{array} \qquad (\beta$$

Nach (79) und (18) haben wir den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash\ d = a\\ \llcorner\ a \frown (0 \frown q)\\ \llcorner\ d \frown (0 \frown q)\\ \llcorner\ \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown)\maltese q)\end{array} \qquad (\gamma$$

und wenden nun den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash\ a \frown (c \frown q)\\ \llcorner\ a \frown u\\ \llcorner\ u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \frown)\, q)\end{array}$$

an, der sich mit (77) und (8) leicht ableiten lässt.

§ 105. *Aufbau.*

$$13 \quad \begin{array}{l}\vdash\ a = 1\\ \llcorner\ 0 \frown (1 \frown \mathfrak{f})\\ \llcorner\ 0 \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ \llcorner\ \mathrm{I}\mathfrak{f}\end{array}$$

(110, 71):: ═══════════

$$\begin{array}{l}\vdash\ a = 1\\ \llcorner\ 0 \frown (a \frown \mathfrak{f})\end{array} \qquad (114$$

——•——

$$\mathrm{IIId} \quad \begin{array}{l}\vdash\ e = c\\ \llcorner\ a \frown (e \frown q)\\ \llcorner\top\ a \frown (c \frown q)\end{array}$$

(77): ———————————

$$\begin{array}{l}\vdash\ e \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = c)\\ \llcorner\ a \frown (e \frown q)\\ \llcorner\top\ a \frown (c \frown q)\end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{ll} \vdash^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) & \\ \quad \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{a} \frown q) & \\ \quad a \frown (c \frown q) & (\beta \end{array}$$

(8): - - - - - -

$$\begin{array}{ll} \vdash a \frown u & \\ \quad a \frown (c \frown q) & \\ \quad u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \frown) q) & (\gamma \end{array}$$

$\times$

$$\begin{array}{ll} \vdash a \frown (c \frown q) & \\ \quad a \frown u & \\ \quad u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \frown) q) & (115 \end{array}$$

———•———

$$I \quad \vdash \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) = 1$$

(IIIc): ————————

$$\begin{array}{ll} \vdash F(1) & \\ \quad F(\mathfrak{n}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)) & (116 \end{array}$$

———•———

$$\begin{array}{ll} 18 \quad \vdash \mathrm{I}\mathfrak{U}q & \\ \quad \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown) \mathfrak{U}q) & \end{array}$$

(79): - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll} \vdash d = a & \\ \quad a \frown (0 \frown q) & \\ \quad d \frown (0 \frown q) & \\ \quad \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown) \mathfrak{U}q) & (\alpha \end{array}$$

(115, 115)::= = = = = = = =

$$\begin{array}{ll} \vdash d = a & \\ \quad a \frown u & \\ \quad u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown) q) & \\ \quad d \frown u & \\ \quad \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown) \mathfrak{U}q) & (\beta \end{array}$$

$\times$

$$\begin{array}{ll} \vdash u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown) q) & \\ \quad \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown) \mathfrak{U}q) & \\ \quad a \frown u & \\ \quad d = a & \\ \quad d \frown u & (\gamma \end{array}$$

$\smile$

$$\begin{array}{ll} \vdash^{\mathfrak{q}}\ u \frown (\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown) \mathfrak{q}) & \\ \quad \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) \frown (u \frown) \mathfrak{U}\mathfrak{q}) & \\ \quad a \frown u & \\ \quad d = a & \\ \quad d \frown u & (\delta \end{array}$$

(49): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll} \vdash \mathfrak{n}u = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) & \\ \quad a \frown u & \\ \quad d = a & \\ \quad d \frown u & (\varepsilon \end{array}$$

(116): ————————————

$$\begin{array}{ll} \vdash \mathfrak{n}u = 1 & \\ \quad a \frown u & \\ \quad d = a & \\ \quad d \frown u & (\zeta \end{array}$$

$\times$

$$\begin{array}{ll} \vdash d = a & \\ \quad a \frown u & \\ \quad \mathfrak{n}u = 1 & \\ \quad d \frown u & (117 \end{array}$$

———•———

§ 106. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz

$$\begin{array}{ll} \vdash \mathfrak{n}u = 1 & \\ \quad {}^{\mathfrak{e}}\ \mathfrak{e} \frown u & \\ \quad {}^{\mathfrak{b}}\,{}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{b} & \\ \qquad \mathfrak{a} \frown u & \\ \qquad \mathfrak{b} \frown u & (\alpha \end{array}$$

d. h. „Eins ist die Anzahl eines Begriffes, unter welchen ein Gegenstand fällt, wenn allgemein daraus, dass ein Gegenstand a und dass ein Gegenstand d unter den Begriff falle, folgt, dass a dasselbe sei wie d“.

Dieser Satz ist eine Folge des Satzes

$$\begin{array}{ll} \vdash \mathfrak{n}u = 1 & \\ \quad {}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} = c & \\ \qquad \mathfrak{a} \frown u & \\ \quad c \frown u & (\beta \end{array}$$

den wir auf den folgenden

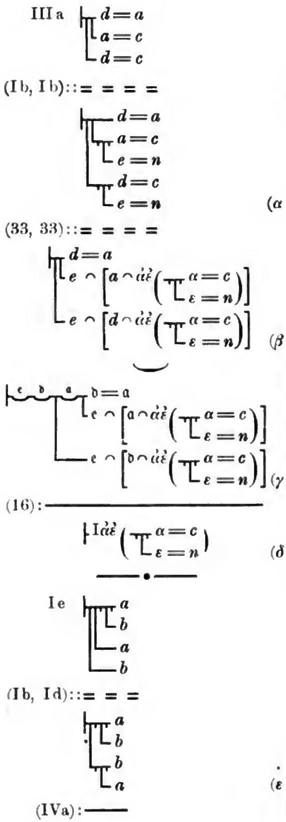
$$\vdash 1 = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \quad \text{oder}$$

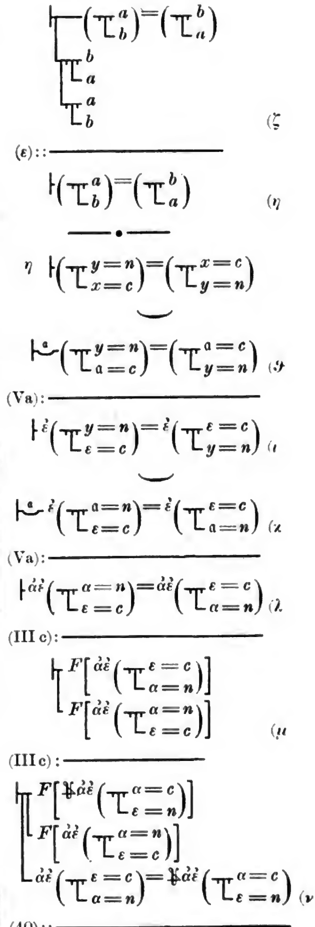
$$\vdash \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = n) = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \quad (\gamma$$

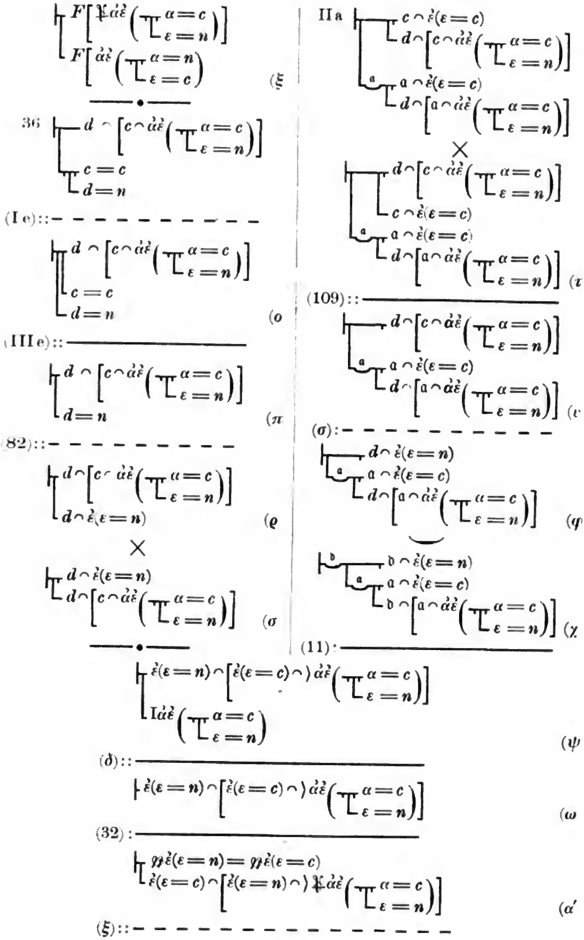
zurückführen. Als abbildende Beziehung bietet sich die $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \top\ \alpha = c \\ \ \ \varepsilon = n \end{array}\right)$.

Beziehung dar. Dieser und ihrer Umkehrung Eindeutigkeit muss bewiesen werden.

§ 107. *Aufbau.*






(ξ
36
(I e)::
(o
(III e)::
(π
(82)::
(ϱ
(σ
II a
(τ
(109)::
(υ
(σ):
(φ
(χ
(11):
(ψ
(δ)::
(ω
(32):
(α′
(ξ)::

$$\vdash \; \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = n) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c)$$
$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \frown \left[\grave{\varepsilon}(\varepsilon = n) \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \alpha = n \\ \varepsilon = c \end{array}\right)\right] \qquad (\beta'$$

(ω)::

$$\vdash \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = n) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \qquad (118$$

118 $\vdash \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c)$

(116):

$$\vdash 1 = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c) \qquad (119$$

(IIIa):

$$\vdash F(1)$$
$$F(\mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c)) \qquad (120$$

IIIa $\vdash a \frown u$
$a = c$
$c \frown u$

(IVa)::

$$\vdash (\text{—} a \frown u) = (\text{—} a = c)$$
$a = c$
$a \frown u$
$c \frown u \qquad (\alpha$

(IIa)::

$$\vdash (\text{—} a \frown u) = (\text{—} a = c)$$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = c$
$\mathfrak{a} \frown u$
$c \frown u \qquad (\beta$

(77):

$$\vdash (\text{—} a \frown u) = (\text{—} a \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = c))$$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = c$
$\mathfrak{a} \frown u$
$c \frown u \qquad (\gamma$

$$\vdash \mathfrak{a}\text{: } (\text{—} \mathfrak{a} \frown u) = (\text{—} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(\varepsilon = c))$$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = c$
$\mathfrak{a} \frown u$
$c \frown u \qquad (\delta$

(96):

$$\vdash \mathfrak{P}u = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = c)$$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = c$
$\mathfrak{a} \frown u$
$c \frown u \qquad (\varepsilon$

(120):

$$\vdash \mathfrak{P}u = 1$$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = c$
$\mathfrak{a} \frown u$
$c \frown u \qquad (121$

(IIa)::

$$\vdash \mathfrak{P}u = 1$$
$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$
$\mathfrak{a} \frown u$
$\mathfrak{d} \frown u$
$c \frown u \qquad (\alpha$

×

$$\vdash c \frown u$$
$\mathfrak{P}u = 1$
$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$
$\mathfrak{a} \frown u$
$\mathfrak{d} \frown u \qquad (\beta$

$$\vdash \mathfrak{c}\text{: } \mathfrak{c} \frown u$$
$\mathfrak{P}u = 1$
$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$
$\mathfrak{a} \frown u$
$\mathfrak{d} \frown u \qquad (\gamma$

×

$$\vdash \mathfrak{P}u = 1$$
$\mathfrak{c}$: $\mathfrak{c} \frown u$
$\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$
$\mathfrak{a} \frown u$
$\mathfrak{d} \frown u \qquad (122$

Z. Beweis des Satzes

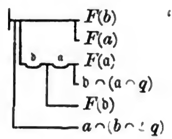
$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\; b \frown (b \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})' \\ ,\llcorner\; 0 \frown (b \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array}$$

a) Beweis des Satzes

$$,\vdash\; a \frown (0 \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})'$$

§ 108. *Zerlegung.*

Der in der Hauptüberschrift aufgeführte Satz besagt, dass kein Gegenstand, der der mit Null anfangenden Anzahlenreihe angehört, auf sich selbst in der Anzahlenreihe folge. Wir können dafür auch sagen: „Keine endliche Anzahl folgt auf sich selbst in der Anzahlenreihe." Die Wichtigkeit dieses Satzes wird klarer durch folgende Ueberlegung erkannt. Wenn wir die zu einem Begriffe $\Phi(\xi)$ gehörende Anzahl bestimmen, oder, wie man gewöhnlich sagt, wenn wir die unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fallenden Gegenstände zählen, so ordnen wir diese den Zahlwörtern von Eins an der Reihe nach zu bis zu einem Zahlworte ‚N', das dadurch bestimmt wird, dass die zuordnende Beziehung den Begriff $\Phi(\xi)$ in den Begriff „Glied der Reihe der Zahlwörter von ‚Eins' bis ‚N'" und dass die umgekehrte Beziehung diesen Begriff in jenen abbildet. Dann bezeichnet ‚N' die gesuchte Anzahl; d. h. N ist diese Anzahl. Dieses Verfahren lässt mannichfache Ausführungen zu, da die zuordnende Beziehung nicht völlig bestimmt ist. Es entsteht die Frage, ob man bei einer andern Wahl dieser Beziehung zu einem andern Zahlworte ‚M' gelangen könnte. Dann wäre nach unsern Bestimmungen M dieselbe Anzahl wie N, zugleich aber folgte das eine der beiden Zahlwörter auf das andere, z. B. ‚N' auf ‚M'. Dann folgte auch N in der Anzahlenreihe auf M, das hiesse auf sich selbst. Das schliesst unser Satz für endliche Anzahlen aus. Wir beweisen ihn mit den Sätzen



(α

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\; a \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})' \\ \;\;\llcorner\; d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ ,\llcorner\!\top\; d \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array} \quad \text{und} \quad ,\vdash\; 0 \frown (0 \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})'$$

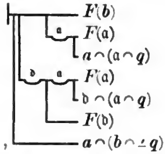
Der letzte ist ein besonderer Fall von

$$,\vdash\; a \frown (0 \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})'$$

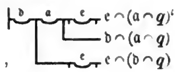
der besagt, dass die Anzahl 0 auf keinen Gegenstand in der Anzahlenreihe folge. Diesen beweisen wir zuerst. Wir brauchen hierzu den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\; a \frown (b \frown \underline{\smile}\, q)' \\ ,\llcorner\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{e} \frown (b \frown q) \end{array}$$

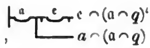
und (108). Jener besagt, dass ein Gegenstand auf keinen Gegenstand in der q-Reihe folge, wenn kein Gegenstand zu ihm in der q-Beziehung stehe. Um ihn zu beweisen, brauchen wir den Satz



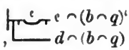
der aus (*K*) mit (6) folgt. Wir ersetzen dann die Functionsmarke ‚*F*(ξ)' durch ‚𝔢 ⌢ (ξ ⌢ *q*)' und haben dann die Sätze



und

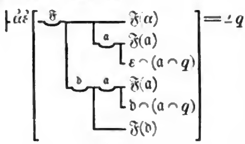


zu beweisen, die beide aus

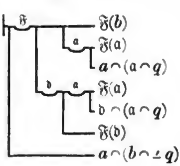


folgen.

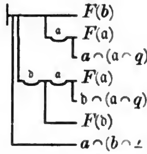
§ 109. *Aufbau.*

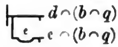
K 

(6):

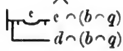
 (α

(IIb): - - - - - - - - - - -

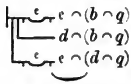
 (123

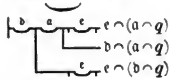
IIa 

×

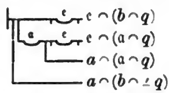
 (α

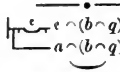
(I):

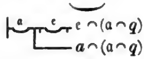
 (β

 (γ

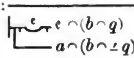
(123):

 (δ

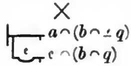
α 

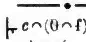
 (ε

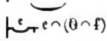
(δ):

 (124

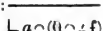
×

 (125

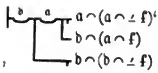
108 

 (α

(125):

 (126

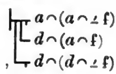
b) Beweis des Satzes



und Schluss des Abschnittes Z.

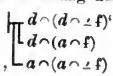
§ 110. *Zerlegung.*

Der Satz



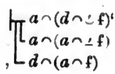
(α

geht durch Wendung hervor aus



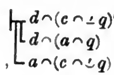
(β

Dieser Satz kann erschlossen werden aus den Sätzen



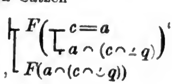
(γ

und

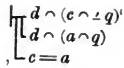


(δ

indem man in diesem für ‚*c*' ‚*d*' und für ‚*q*' ‚f' setzt. Wir beweisen (δ) aus den Sätzen

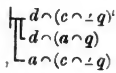


(ε



(ζ

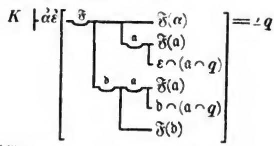
und



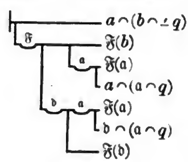
(η

die leicht aus (Λ), (*K*) und (123) folgen.

§ 111. *Aufbau.*

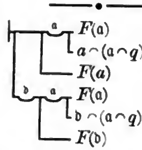


(10):

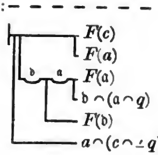


(127

IIa

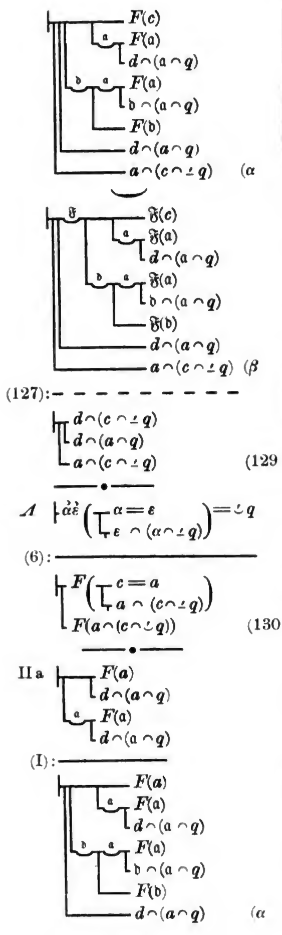


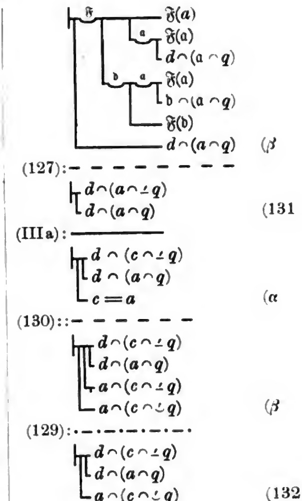
(123): - - - - - - -



(128

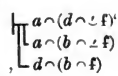
(IIa):: - - - - - - - -





§ 112. *Zerlegung.*

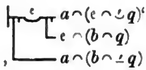
Wir haben nun den Satz (γ) des § 110 zu beweisen. Er ist ein besonderer Fall von



in Worten:

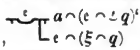
„Wenn eine Anzahl (*b*) auf eine zweite Anzahl (*a*) in der Anzahlenreihe folgt und auf eine dritte (*d*) in der Anzahlenreihe unmittelbar folgt, so gehört die dritte (*d*) der mit der zweiten (*a*) anfangenden Anzahlenreihe an."

Offenbar würde das Entsprechende in einer beliebigen Reihe im Allgemeinen nicht gelten. Es ist hier wesentlich, dass der Rückgang in der Anzahlenreihe eindeutig stattfindet (88). Wir stützen uns auf den Satz, dass, wenn in irgendeiner (q-)Reihe ein Gegenstand (b) auf einen zweiten (a) folgt, es einen Gegenstand giebt, der der mit dem zweiten (a) anfangenden (q-)Reihe angehört und zum ersten in der reihenbildenden (q-)Beziehung steht; in Zeichen:

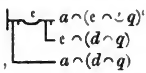


(α

Wenn man nun weiss, dass es nicht mehr als einen Gegenstand giebt, der zum ersten (b) in der (q-)Beziehung steht, so muss dieser auch der mit dem zweiten (a) anfangenden (q-)Reihe angehören. Zum Beweise dieses Satzes gebrauchen wir (123), indem wir die Functionsmarke ‚$F(\xi)$' durch

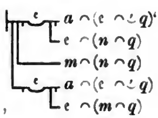


ersetzen. Wir bedürfen also der beiden Sätze



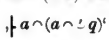
(β

und

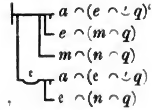


(γ

Jener folgt mit (IIa) aus dem Satze

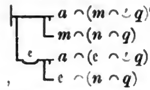


der eine Folge der Definition (Δ) ist. Dieser geht durch Einführung des deutschen ‚e' und Wendung hervor aus

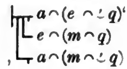


(δ

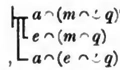
Nach (IIa) haben wir nun



Es bleibt noch zu zeigen

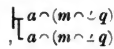


oder



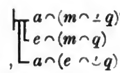
(ε

(ε) ist eine Folge von



(ζ

und

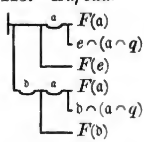


(η

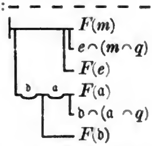
Dieser Satz ist in ähnlicher Weise wie (132) zu beweisen.

§ 113. *Aufbau.*

IIa



(IIa):- - - - - - -



(α

(123)::- - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} F(m) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a}) \\ \quad \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ F(\mathfrak{d}) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{F}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{F}(m) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \quad \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \quad \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{d}) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (\gamma$$

(127): - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (133$$

——•——

131 $$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ a\frown(m\frown q) \end{array}$$

(IIIa): ————

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\dot{\smile} q) \\ e\frown(m\frown q) \\ e=a \end{array} \qquad (\alpha$$

(130):: - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \\ a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (\beta$$

(133): ·-·-·-·-·-·

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (134$$

——•——

$$\Lambda \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \alpha=\varepsilon \\ \varepsilon\frown(\alpha\frown\dot{\smile} q) \end{array}\right) = \dot{\smile} q$$

(10): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} F(a\frown(m\frown\dot{\smile} q)) \\ F\left(\begin{array}{l} m=a \\ a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \end{array}\right) \end{array} \qquad (135$$

——•——

135 $$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ m=a \\ a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \end{array}$$

(Ia):: - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (136$$

(134):: - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (137$$

×

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(IIa):: - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \\ e\frown(m\frown q) \\ m\frown(n\frown q) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{e}\frown(n\frown q) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{e}\frown(m\frown q) \\ m\frown(n\frown q) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{e}\frown(n\frown q) \end{array} \qquad (\gamma$$

×

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{e}\frown(n\frown q) \\ m\frown(n\frown q) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{e}\frown(m\frown q) \end{array} \qquad (\delta$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{e}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{e}\frown(\mathfrak{d}\frown q) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(123): ————————

$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (b \frown q)$
$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$a \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$ (138

135 $a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$
$b = a$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$

(I):: - - - - - -

$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$
$b = a$ (139

IIIe $a = a$

(139): ———

$a \frown (a \frown \dot{\smile} q)$ (140

IIa $a \frown (a \frown \dot{\smile} q)$
$a \frown (d \frown q)$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (d \frown q)$

×

$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (d \frown q)$
$a \frown (d \frown q)$
$a \frown (a \frown \dot{\smile} q)$ (α

(140):: ———

$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (d \frown q)$
$a \frown (d \frown q)$ (β

$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$a \frown (\mathfrak{a} \frown q)$ (γ

(133): ———

$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (b \frown q)$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$ (141

×

$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (b \frown q)$ (142

IIIc $a \frown (c \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$d = c$
$a \frown (d \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$

(88):: - - - - - -

$a \frown (c \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$c \frown (b \frown \mathfrak{f})$
$d \frown (b \frown \mathfrak{f})$
$a \frown (d \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (α

$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ a \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\mathfrak{e} \frown (b \frown \mathfrak{f})$
$d \frown (b \frown \mathfrak{f})$
$a \frown (d \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (β

(142): - - - - - - - -

$a \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$d \frown (b \frown \mathfrak{f})$
$a \frown (d \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (γ

×

$a \frown (d \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$d \frown (b \frown \mathfrak{f})$ (143

130 $b = a$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$

(IIIa): - - - - - -

$F(b)$
$F(a)$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$ (α

(128):: -·-·-·-·-·-

$F(b)$
$F(a)$
$\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ F(\mathfrak{a})$
$\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$F(\mathfrak{b})$
$a \frown (b \frown \dot{\smile} q)$ (144

132 $d \frown (d \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$a \frown (d \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$

(143):: - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (d \frown \smile\mathfrak{f}) \\ \quad d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ \quad a \frown (a \frown \smile\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (a \frown \smile\mathfrak{f}) \\ \quad d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ \quad d \frown (d \frown \smile\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{b}}\smile^{\mathfrak{a}}\smile \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{a} \frown \smile\mathfrak{f}) \\ \quad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \\ \quad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{b} \frown \smile\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\gamma$$

(144): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash b \frown (b \frown \smile\mathfrak{f}) \\ \quad 0 \frown (0 \frown \smile\mathfrak{f}) \\ \quad 0 \frown (b \frown \smile\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\delta$$

(126):: ———————

$$\begin{array}{l} \vdash b \frown (b \frown \smile\mathfrak{f}) \\ \quad 0 \frown (b \frown \smile\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (145$$

H. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash b \frown (\mathfrak{n}(b \frown \smile\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \quad 0 \frown (b \frown \smile\mathfrak{f}) \end{array}$$

§ 114. *Zerlegung.*

Wir wollen den Satz beweisen, dass die Anzahl, die dem Begriffe

der mit b endenden Anzahlenreihe angehörend

zukommt, auf *b* in der Anzahlenreihe unmittelbar folgt, wenn *b* eine endliche Anzahl ist. Hieran schliesst sich dann gleich die Folgerung, dass die Anzahlenreihe unendlich ist; d. h. dass es zu jeder endlichen Anzahl eine unmittelbar auf sie folgende giebt.

Wir versuchen den Beweis zunächst mit dem Satze (144), indem wir die Functionsmarke „$F(\xi)$" durch „$\xi \frown (\mathfrak{n}(\xi \frown \smile\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f})$" ersetzen. Dazu bedürfen wir des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (\mathfrak{n}(a \frown \smile\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \quad d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ \quad d \frown (\mathfrak{n}(d \frown \smile\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\alpha$$ [1]

Setzen wir in (102) für „u" „$(a \frown \smile\mathfrak{f})$" und für „$m$" und für „$c$" „$a$", so erhalten wir

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (\mathfrak{n}(a \frown \smile\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \quad a \frown (a \frown \smile\mathfrak{f}) \\ \quad \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = a \\ \quad \varepsilon \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\end{array}\right) = a \end{array}$$

woraus wir das Unterglied

$$—a \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})$$

mit (140) entfernen können. Es fragt sich, ob das Unterglied

$$—\mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = a \\ \quad \varepsilon \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\end{array}\right) = a$$

als Folge von

„$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$" und „$d \frown (\mathfrak{n}(d \frown \smile\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f})$"

nachgewiesen werden könne. Wegen der Eindeutigkeit des Fortschrittes in der Anzahlenreihe (70) haben wir

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{n}(d \frown \smile\mathfrak{f}) = a \\ \quad d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ \quad d \frown (\mathfrak{n}(d \frown \smile\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\beta$$

Wir versuchen also, ob sich

$$\mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = a \\ \quad \varepsilon \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\end{array}\right) = \mathfrak{n}(d \frown \smile\mathfrak{f})$$

1) Dieser Satz ist, wie es scheint, unbeweisbar, wird hier aber auch nicht als wahr behauptet, da er in Anführungszeichen steht.

als Folge von ‚$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$' nachweisen lasse. Das muss mit (96) geschehen. Dazu ist nöthig

$$,\left(\neg\begin{array}{l} b = a \\ b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array}\right) = (— b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}))\text{'}$$

als Folge von ‚$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$' nachzuweisen, wozu (IVa) zu benutzen sein wird. Es wäre also zu zeigen, dass dieselben Anzahlen der mit einer ersten Anzahl (a) endenden Anzahlenreihe angehören, ohne diese selbst zu sein, die der mit einer zweiten Anzahl (d) endenden Anzahlenreihe angehören, wenn die erste Anzahl (a) in der Anzahlenreihe unmittelbar auf die zweite (d) folgt. Dazu ist nöthig,

$$,\ \begin{array}{l} \neg\, b = a \\ b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array}\text{' und }\ ,\ \begin{array}{l} b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ \neg\, b = a \\ b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array}\text{'}$$

als Folgen von ‚$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$' nachzuweisen. Es zeigt sich aber, dass noch eine Bedingung hinzuzufügen ist. Es wäre nämlich ‚$\neg\, b = a$' als Folge von ‚$b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})$' und von ‚$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$' zu erweisen. Wir haben nun nach (134)

$$,\vdash \begin{array}{l} b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array}\text{'}$$

Fiele nun b mit a zusammen, so ginge das Oberglied über in ‚$— a \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})$'. Nach (145) ist das ausgeschlossen, wenn a eine endliche Anzahl ist. Es kommt also noch das Unterglied

$$‚— 0 \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})\text{'}$$

hinzu. Dadurch wird freilich die Anwendung von (144) so, wie wir gewollt hatten, unmöglich; wir können aber mit (137) dieses Unterglied durch ‚$— 0 \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f})$' ersetzen und aus (144) den Satz

$$,\vdash \begin{array}{l} F(b) \\ \quad F(a) \\ \overset{\mathfrak{b}\ \ \mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} F(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ a \frown (\mathfrak{b} \frown \underline{\smile}\, q) \\ F(\mathfrak{b}) \end{array} \\ a \frown (b \frown \underline{\smile}\, q) \end{array}\text{'} \qquad (\gamma$$

ableiten, der uns dann zum Ziele führt. Zunächst müssen wir, um den Satz

$$,\vdash \begin{array}{l} \neg\, b = a \\ b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ 0 \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \end{array}\text{'} \qquad (\delta$$

vollständig zu haben, den Satz (137) in der Form

$$,\vdash \begin{array}{l} b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array}\text{'}$$

heranziehen. Dann bleibt noch der Satz

$$,\vdash \begin{array}{l} b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ \neg\, b = a \\ b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \end{array}\text{'} \qquad (\varepsilon$$

zu beweisen. Nach (143) haben wir

$$,\vdash \begin{array}{l} b \frown (d \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ b \frown (a \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \end{array}\text{'}$$

Dazu bedürfen wir nun noch des Satzes

$$,\vdash \begin{array}{l} b \frown (a \frown \underline{\smile}\, q) \\ \neg\, b = a \\ b \frown (a \frown \underline{\smile}\, q) \end{array}\text{'} \qquad (\zeta$$

der leicht aus (130) folgt.

§ 115. *Aufbau.*

130
$$\vdash a = b$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{q})$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{q})$$

(III f): - - - - - -

$$\vdash b = a$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{q})$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{q}) \qquad (146$$

$$\times$$

$$\vdash b \frown (a \frown \smile \mathfrak{q})$$
$$b = a$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{q}) \qquad (147$$

———•———

147
$$\vdash b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$b = a$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$

(143): - - - - - -

$$\vdash b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$b = a$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (\alpha$$

(IVa): - - - - - -

$$\vdash \left(\begin{array}{l} b = a \\ b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) = (\text{—} b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}))$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$b = a$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}) \qquad (\beta$$

134
$$\vdash b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})$$

(III d): - - - - -

$$\vdash b = a$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$a \frown (a \frown \smile \mathfrak{f}) \qquad (\gamma$$

(145):: - - - - - -

$$\vdash b = a$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$\mathfrak{d} \frown (a \frown \smile \mathfrak{f}) \qquad (\delta$$

(I f): - - - - - -

$$\vdash b = a$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$\mathfrak{d} \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f}) \qquad (\varepsilon$$

(137):: - - - - - -

$$\vdash b = a$$
$$b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$\mathfrak{d} \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (\zeta$$

(β): - - - - - -

$$\vdash \left(\begin{array}{l} b = a \\ b \frown (a \frown \smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) = (\text{—} b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}))$$
$$\mathfrak{d} \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (\eta$$

(77): - - - - - - - - - - - -

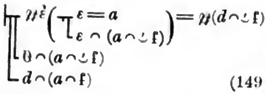
———•———

$$\vdash \left[\text{—} b \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = a \\ \varepsilon \frown (a \frown \smile \mathfrak{f}) \end{array}\right)\right] = (\text{—} b \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}))$$
$$\mathfrak{d} \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (148$$

$$\smile$$

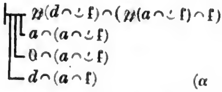
$$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \left[\text{—} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = a \\ \varepsilon \frown (a \frown \smile \mathfrak{f}) \end{array}\right)\right] = (\text{—} \mathfrak{a} \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}))$$
$$\mathfrak{d} \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f}) \qquad (\alpha$$

(96): - - - - - - - - - - - - - - - - -



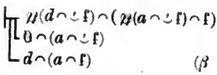
(149

102): - - - - - - - - - - - - -



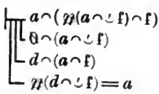
(α

(140)::



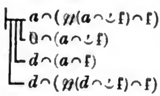
(β

(IIIc):



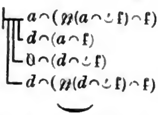
(γ

(70):: - - - - - - - -

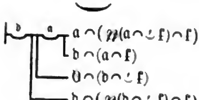


(δ

(137):: - - - - - - - -



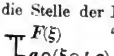
(ε



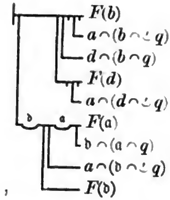
(150

§ 116. *Zerlegung.*

Um den Satz (γ) des § 114 zu beweisen, setzen wir in (144) an die Stelle der Functionsmarke ‚$F(\xi)$'



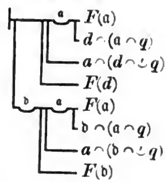
'. Wir haben dann zu beweisen



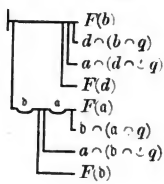
was leicht mit (137) geschehen kann. Für den Uebergang zu (γ) vergleiche man S. 68.

§ 117. *Aufbau.*

II a

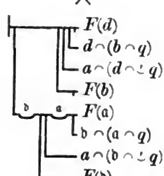


(II a): - - - - - - -



(α

×



(β

(I):: - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash F(d) \\ d \frown (b \frown q) \\ a \frown (d \frown \dot{\smile}\, q) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(b) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \\ \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(\mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\gamma$$

(137):: - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash F(d) \\ a \frown (d \frown \dot{\smile}\, q) \\ d \frown (b \frown q) \\ F(b) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \\ \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(\mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\delta$$

$\times$

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \\ d \frown (b \frown q) \\ F(d) \\ a \frown (d \frown \dot{\smile}\, q) \\ \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(\mathfrak{d}) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$\smile$

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ a \frown (\mathfrak{a} \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ F(\mathfrak{d}) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(\mathfrak{d}) \end{array} \qquad (151$$

———•———

140 $\vdash a \frown (a \frown \dot{\smile}\, q)$

(Ie): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash F(a) \\ a \frown (a \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(a) \end{array} \qquad (\alpha$$

(144): - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(a) \\ \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ a \frown (\mathfrak{a} \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ F(\mathfrak{d}) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \end{array} \qquad (\beta$$

(151):: - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(a) \\ \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(\mathfrak{d}) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \end{array} \qquad (\gamma$$

(Ib): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ F(a) \\ \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ F(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ a \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, q) \\ F(\mathfrak{d}) \\ a \frown (b \frown \dot{\smile}\, q) \end{array} \qquad (152$$

———•———

$$150 \quad \begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{d}} \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown (\gamma\!\!/\!\!/(\mathfrak{a} \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{d} \frown (\gamma\!\!/\!\!/(\mathfrak{d} \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \end{array}$$

(152): ————————————

$$\begin{array}{l} \vdash b \frown (\gamma\!\!/\!\!/(b \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{e} \frown (\gamma\!\!/\!\!/(\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{e} \frown (b \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (153$$

———•———

§ 118. *Zerlegung.*

Es bleibt noch der Satz

$$\vdash 0 \frown (\mathfrak{n}(0 \frown \backsim \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f})$$

zu beweisen. Wir haben nach (102)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top 0 \frown (\mathfrak{n}(0 \frown \backsim \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \;\;\llcorner 0 \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f}) \\ \;\;\llcorner \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = 0 \\ \llcorner \varepsilon \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array}\right) = 0 \end{array}$$

Hier können wir (140) anwenden. Wir haben dann auch noch den Satz

$$\vdash \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = 0 \\ \llcorner \varepsilon \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array}\right) = 0$$

zu beweisen. Wir benutzen den Satz (97), indem wir zeigen, dass unter den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = 0 \\ \llcorner \varepsilon \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array}\right)$-Begriff kein Gegenstand fällt. Dies folgt leicht aus

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top a = 0 \\ \;\;\llcorner a \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f}) \end{array}$$

d. h. der mit 0 endenden Anzahlenreihe gehört nur 0 selbst an. Dieser Satz folgt aus (126) und (130).

§ 119. *Aufbau.*

$$\begin{array}{lll}
126 & \vdash a \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f}) & \\
(130): & \overline{} & \\
 & \begin{array}{l}\vdash\!\!\top 0 = a \\ \;\;\llcorner a \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array} & (\alpha \\
(\mathrm{III\,f}): & - - - - - & \\
 & \begin{array}{l}\vdash\!\!\top a = 0 \\ \;\;\llcorner a \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array} & (\beta \\
(58): & \overline{} & \\
 & \vdash a \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = 0 \\ \llcorner \varepsilon \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array}\right) & (\gamma \\
 & \smile & \\
 & \vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = 0 \\ \llcorner \varepsilon \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array}\right) & (\delta \\
(97): & \overline{} & \\
 & \vdash \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = 0 \\ \llcorner \varepsilon \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array}\right) = 0 & (\varepsilon \\
(102): & \overline{} & \\
 & \begin{array}{l}\vdash\!\!\top 0 \frown (\mathfrak{n}(0 \frown \backsim \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \;\;\llcorner 0 \frown (0 \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array} & (\zeta \\
(140):: & \overline{} & \\
 & \vdash 0 \frown (\mathfrak{n}(0 \frown \backsim \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) & (154 \\
(153): & \overline{} & \\
 & \begin{array}{l}\vdash\!\!\top b \frown (\mathfrak{n}(b \frown \backsim \mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \;\;\llcorner 0 \frown (b \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array} & (155
\end{array}$$

Θ. Einige Folgesätze.

§ 120. *Zerlegung.*

Wir können zunächst aus (155) leicht folgern, dass es zu jeder endlichen Anzahl eine unmittelbar auf sie folgende giebt. Hiermit ist gesagt, dass die mit 0 anfangende Anzahlenreihe ohne Ende fortläuft.

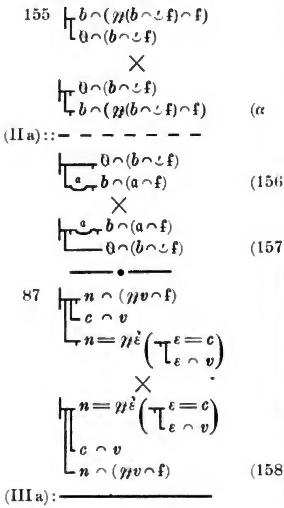
Ferner beweisen wir einen Satz, der unser Zählen begründet, indem er besagt, dass *n* die Anzahl ist, die einem Begriffe zukommt, wenn eine Beziehung diesen Begriff in die Anzahlenreihe bis *n* einschliesslich und mit Ausschluss der 0 abbildet und wenn die Umkehrung dieser Beziehung jene Anzahlenreihe in den Begriff abbildet, falls *n* eine endliche Anzahl ist.

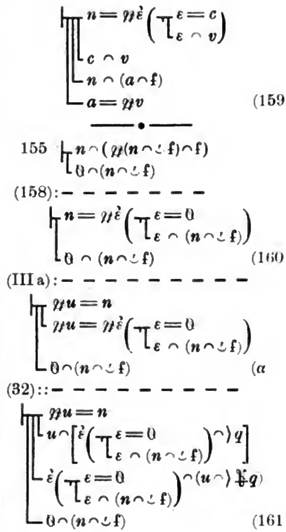
Dieser Satz folgt leicht aus dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top n = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon = 0 \\ \llcorner \varepsilon \frown (n \frown \backsim \mathfrak{f})\end{array}\right) \\ \;\;\llcorner 0 \frown (n \frown \backsim \mathfrak{f}) \end{array}$$

den wir mit (87) und (155) beweisen.

§ 121. *Aufbau.*





l. Beweis einiger Sätze von der Anzahl Endlos.

a) Beweis des Satzes

$$„\vdash 0 \frown (\infty \frown \smile \mathfrak{f})“$$

§ 122. *Zerlegung.*

Es giebt Anzahlen, die nicht der mit 0 anfangenden Anzahlenreihe angehören, oder, wie wir auch sagen, die nicht endlich, die unendlich sind. Eine solche ist die des Begriffes *endliche Anzahl*; ich will sie *Endlos* nennen und mit „∞“ bezeichnen. Ich definire sie so:

$$\Vdash \mathfrak{N}(0 \frown \underset{\smile}{\mathfrak{f}}) = \infty \qquad (M$$

Es ist nämlich $0 \frown \underset{\smile}{\mathfrak{f}}$ der Umfang des Begriffes *endliche Anzahl*. Der in der Ueberschrift genannte Satz besagt nun, dass die Anzahl Endlos keine endliche Anzahl ist. Wir beweisen ihn, wie im § 84 meiner Grundlagen angedeutet ist, indem wir zeigen, dass die Anzahl Endlos auf sich selbst in der Anzahlenreihe folgt, was nach (145) keine endliche Anzahl thut. Zunächst ist zu zeigen, dass Endlos zu sich selbst in der $\mathfrak{f}$-Beziehung steht:

$$„\vdash \infty \frown (\infty \frown \mathfrak{f})“ \qquad (\alpha$$

Diesen Satz führen wir zurück auf

$$\vdash \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array}\right) = \infty' \qquad (\beta$$

der aus den Sätzen

$$\vdash \grave{\varepsilon}(0 \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \frown \left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array}\right) \frown \rangle\, \mathfrak{f}\right]' \qquad (\gamma$$

und

$$\vdash \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array}\right) \frown (\grave{\varepsilon}(0 \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \frown \rangle\, \ddagger \mathfrak{f})' \qquad (\delta$$

folgt. Um (γ) abzuleiten, haben wir nach (11) zu zeigen

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} d \frown \grave{\varepsilon}(0 \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f}))\\ \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array}\right)\\ d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f})\end{array}\ ' \qquad (\varepsilon$$

was leicht zurückzuführen ist auf den Satz

$$\vdash \begin{array}{l} 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ \top\ a = 0\\ \llcorner\ a \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array}\ ' \qquad (\zeta$$

der in die Sätze

$$\vdash \begin{array}{l} a = 0\\ 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\end{array}\ ' \qquad (\eta$$

und (137) zerfällt.

§ 123. *Aufbau.*

126 $\vdash 0 \frown (0 \frown \smile \mathfrak{f})$

(IIId): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} a = 0\\ 0 \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\alpha$$

(134):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a = 0\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\beta$$

(If): - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \top\ a = 0\\ \llcorner\ a \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\\ a \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\gamma$$

(22):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \top\ a = 0\\ \llcorner\ a \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\\ 0 \frown (a \frown \smile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\delta$$

(137):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \top\ a = 0\\ \llcorner\ a \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\varepsilon$$

×

$$\vdash \begin{array}{l} 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ \top\ a = 0\\ \llcorner\ a \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\zeta$$

(59):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ a \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array}\right)\end{array}$$

(IIa):: - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} 0 \frown (d \frown \smile \mathfrak{f})\\ d \frown (a \frown \mathfrak{f})\\ \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\ \varepsilon = 0\\ \llcorner\ \varepsilon \frown (0 \frown \ddagger \smile \mathfrak{f})\end{array}\right)\\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f})\end{array}$$

×

$$\vdash \left[\begin{array}{l} d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{0} \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \\ d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

$$\vdash \left[\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{a}}\, d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{0} \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \\ d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

(156): - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \left[\begin{array}{l} \mathfrak{0} \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{0} \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \\ d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

(I g): - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \left[\begin{array}{l} \mathfrak{0} \frown (d \frown \smile \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \\ d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

(77): ————————————————

$$\vdash \left[\begin{array}{l} d \frown \grave{\varepsilon}(\mathfrak{0} \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \\ d \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

$$\vdash \smile^{\mathfrak{d}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{d} \frown \grave{\varepsilon}(\mathfrak{0} \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \end{array}\right] \end{array}\right]$$

(11): ————————————————

$$\vdash \left[\begin{array}{l} \grave{\varepsilon}(\mathfrak{0} \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \frown \left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \frown \rangle \mathfrak{f}\right] \\ \mathrm{I}\mathfrak{f} \end{array}\right]$$

(71):: ————————————————

$$\vdash \grave{\varepsilon}(\mathfrak{0} \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \frown \left[\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \mathfrak{0} \\ \varepsilon \frown (\mathfrak{0} \frown \not\,\smile \mathfrak{f}) \end{array}\right) \frown \rangle \mathfrak{f}\right] \qquad (162$$

§ 124. *Zerlegung.*

Statt des Satzes (δ) des § 122 beweisen wir zunächst den folgenden

$$\vdash \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = c \\ \varepsilon \frown (c \frown \not\,\smile q) \end{array}\right) \frown (\grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \frown \rangle \not\, q)\text{'}$$

,

Dazu bedürfen wir des Satzes

$$\vdash \left[\begin{array}{l} d \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = c \\ \varepsilon \frown (c \frown \not\,\smile q) \end{array}\right) \\ \smile^{\mathfrak{a}} \left[\begin{array}{l} \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \\ d \frown (\mathfrak{a} \frown \not\, q) \end{array}\right] \end{array}\right]\text{'}$$

,

der auf den Satz

$$\vdash \left[\begin{array}{l} d = c \\ c \frown (d \frown \smile q) \\ \smile^{\mathfrak{e}} \left[\begin{array}{l} c \frown (\mathfrak{e} \frown \smile q) \\ \mathfrak{e} \frown (d \frown q) \end{array}\right] \end{array}\right]\text{'}$$

,

zurückzuführen ist. Dieser folgt leicht aus (142).

§ 125. *Aufbau.*

$$130 \quad \vdash \left[\begin{array}{l} d = c \\ c \frown (d \frown \smile q) \\ c \frown (d \frown \smile q) \end{array}\right]$$

(142):: - - - - - -

$$\vdash \left[\begin{array}{l} d = c \\ \smile^{\mathfrak{e}} \left[\begin{array}{l} c \frown (\mathfrak{e} \frown \smile q) \\ \mathfrak{e} \frown (d \frown q) \end{array}\right] \\ c \frown (d \frown \smile q) \end{array}\right] \qquad (\alpha$$

———•———

$$22 \quad \vdash \left[\begin{array}{l} d \frown (\mathfrak{a} \frown \not\, q) \\ \mathfrak{a} \frown (d \frown q) \end{array}\right]$$

(II a): - - - - -

$$\vdash \; a \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; a \frown (d \frown q) \;|\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; d \frown (\mathfrak{a} \frown \rangle q) \qquad (\beta$$

(82):

$$\vdash \; c \frown (a \frown \smile q) \;|\; a \frown (d \frown q) \;|\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; d \frown (\mathfrak{a} \frown \rangle q) \qquad (\gamma$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile} \; c \frown (\mathfrak{e} \frown \smile q) \;|\; \mathfrak{e} \frown (d \frown q) \;|\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; d \frown (\mathfrak{a} \frown \rangle q) \qquad (\delta$$

(α): - - - - - - - - - -

$$\vdash \; d = c \;|\; c \frown (d \frown \smile q) \;|\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; d \frown (\mathfrak{a} \frown \rangle q) \qquad (\varepsilon$$

(23):: - - - - - - - - - -

$$\vdash \; d = c \;|\; d \frown (c \frown \rangle \smile q) \;|\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; d \frown (\mathfrak{a} \frown \rangle q) \qquad (\zeta$$

(58):

$$\vdash \; d \frown \grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = c \;|\; \varepsilon \frown (c \frown \rangle \smile q) \right) \;|\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; d \frown (\mathfrak{a} \frown \rangle q) \qquad (\eta$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile} \; \mathfrak{d} \frown \grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = c \;|\; \varepsilon \frown (c \frown \rangle \smile q) \right) \;|\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \; \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \;|\; \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown \rangle q) \;. \qquad (\vartheta$$

(11):

$$\vdash \; \grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = c \;|\; \varepsilon \frown (c \frown \rangle \smile q) \right) \frown (\grave{\varepsilon}(c \frown (\varepsilon \frown \smile q)) \frown \rangle \rangle q) \;|\; \mathrm{I} \rangle q \qquad (163$$

E $\quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown q)) = \rangle q$

(44):

$$\vdash \; F(a \frown \rangle q) \;|\; F(\grave{\varepsilon}(a \frown (\varepsilon \frown q))) \qquad (164$$

---

89 $\quad \vdash \mathrm{I} \rangle \mathfrak{f}$

(163):

$$\vdash \; \grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = 0 \;|\; \varepsilon \frown (0 \frown \rangle \smile \mathfrak{f}) \right) \frown (\grave{\varepsilon}(0 \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \frown \rangle \rangle \mathfrak{f}) \qquad (\alpha$$

(32):

$$\vdash \; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}(0 \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) = \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = 0 \;|\; \varepsilon \frown (0 \frown \rangle \smile \mathfrak{f}) \right) \;|\; \grave{\varepsilon}(0 \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) \frown \left[\grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = 0 \;|\; \varepsilon \frown (0 \frown \rangle \smile \mathfrak{f}) \right) \frown \rangle \mathfrak{f} \right] \qquad (\beta$$

(162)::

$$\vdash \; \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}(0 \frown (\varepsilon \frown \smile \mathfrak{f})) = \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = 0 \;|\; \varepsilon \frown (0 \frown \rangle \smile \mathfrak{f}) \right) \qquad (\gamma$$

(164):

$$\vdash \; \mathfrak{N}(0 \frown \rangle \smile \mathfrak{f}) = \mathfrak{N}\grave{\varepsilon}\left(\varepsilon = 0 \;|\; \varepsilon \frown (0 \frown \rangle \smile \mathfrak{f}) \right) \qquad (\delta$$

(III c):

$$\vdash\ \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \theta\\ \varepsilon \frown (\theta \frown \mathfrak{p} \,\dot{\smile}\, \mathfrak{f})\end{array}\right) = \infty$$
$$\mathfrak{P}\theta \frown \mathfrak{p} \,\dot{\smile}\, \mathfrak{f}) = \infty \qquad (\varepsilon$$

(101): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\ \infty \frown (\infty \frown \mathfrak{f})$$
$$\mathfrak{P}(\theta \frown \mathfrak{p} \,\dot{\smile}\, \mathfrak{f}) = \infty$$
$$\theta \frown (\theta \frown \mathfrak{p} \,\dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \qquad (\zeta$$

(22, M):: ═════════

$$\vdash\ \infty \frown (\infty \frown \mathfrak{f})$$
$$\theta \frown (\theta \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \qquad (\eta$$

(140):: ―――――

$$\vdash\ \infty \frown (\infty \frown \mathfrak{f}) \qquad (165$$

(131): ―――――

$$\vdash\ \infty \frown (\infty \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \qquad (166$$

――•――

145 $\vdash\ \infty \frown (\infty \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f})$
$$\theta \frown (\infty \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f})$$

×

$$\vdash\ \theta \frown (\infty \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f})$$
$$\infty \frown (\infty \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \qquad (\alpha$$

(166):: ―――――

$$\vdash\ \theta \frown (\infty \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \qquad (167$$

b) Beweis des Satzes

$$\vdash\ \infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown v\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$$
$$\infty = \mathfrak{P}u$$
$$\theta \frown (\mathfrak{P}v \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f})$$

§ 126. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz:

„Wenn Endlos die Anzahl eines Begriffes ist und wenn die Anzahl eines andern Begriffes endlich ist, so ist Endlos die Anzahl des Begriffes ***unter den ersten oder unter den zweiten Begriff fallend***“

mit (144), indem wir statt der Functionsmarke ‚$F(\xi)$‘ nehmen

$$\mathfrak{v}\ \ \infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$$
$$\xi = \mathfrak{P}\mathfrak{v}$$

und haben zunächst den Satz

$$\vdash\ \infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown v\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$$
$$a = \mathfrak{P}v$$
$$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$$
$$\mathfrak{v}\ \ \infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$$
$$d = \mathfrak{P}\mathfrak{v} \qquad (\alpha$$

abzuleiten. Wir haben nach (IIa)

$$\vdash\ \infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$$
$$d = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)$$
$$\mathfrak{v}\ \ \infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$$
$$d = \mathfrak{P}\mathfrak{v}$$

Hierauf können wir nun (159) anwenden. Um das gewünschte Oberglied zu erhalten, müssen wir den Satz

$$\vdash\ \infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown v\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$$
$$\infty = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown v\end{array}\right)\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) \qquad (\beta$$

beweisen. Zu diesem Zwecke unterscheiden wir die Fälle, dass c unter den u-Begriff fällt, und den entgegengesetzten. Wir haben so die Sätze

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\\ \llcorner\,\varepsilon\frown u\end{array}\right)=\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown v\\ \llcorner\,\varepsilon\frown u\end{array}\right)\\ \llcorner\, c\frown u\end{array}\qquad(\gamma$$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown v\end{array}\right)\\ \llcorner\,\varepsilon\frown u\end{array}\right)=\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon\frown v\\ \llcorner\,\varepsilon\frown u\end{array}\right)\end{array}\right)\\ \llcorner\, c\frown u\end{array}\qquad(\delta$$

Im zweiten Falle bedürfen wir noch des Satzes

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\tilde{\alpha}=\eta w\\ \llcorner\,\tilde{\alpha}=\eta\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)\end{array}$$

der leicht aus (165) und (69) folgt.

§ 127. *Aufbau.*

IIId
$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\top\, a=c\\ \llcorner\, a\frown w\\ \llcorner\, c\frown w\end{array}$$

(If): - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\top\, a=c\\ \llcorner\, a\frown w\\ \llcorner\, a\frown w\\ \llcorner\, c\frown w\end{array}\qquad(\alpha$$

(IVa): - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}(-a\frown w)=\left(\begin{array}{l}\top\, a=c\\ \llcorner\, a\frown w\end{array}\right)\\ \llcorner\, c\frown w\\ \llcorner\, a\frown w\\ \llcorner\,\top\, a=c\\ \quad\llcorner\, a\frown w\end{array}\qquad(\beta$$

(Id):: ————————————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}(-a\frown w)=\left(\begin{array}{l}\top\, a=c\\ \llcorner\, a\frown w\end{array}\right)\\ \llcorner\, c\frown w\end{array}\qquad(\gamma$$

(77): ————————•————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}(-a\frown w)=\left[-a\frown\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)\right]\\ \llcorner\, c\frown w\end{array}\qquad(\delta$$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\overset{a}{\smile}(-a\frown w)=\left[-a\frown\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)\right]\\ \llcorner\, c\frown w\end{array}\qquad(\varepsilon$$

(96): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\eta w=\eta\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)\\ \llcorner\, c\frown w\end{array}\qquad(\zeta$$

(IIIa): - - - - - - - - - -

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\top\, n=\eta w\\ \llcorner\, n=\eta\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)\\ \llcorner\, c\frown w\end{array}\qquad(168$$

———•———

69
$$\vdash\!\!\begin{array}{l}m\frown(n\frown\mathfrak{f})\\ \llcorner\,\eta w=n\\ \llcorner\, c\frown w\\ \llcorner\,\eta\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)=m\end{array}$$

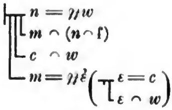
$\times$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\eta w=n\\ \llcorner\, m\frown(n\frown\mathfrak{f})\\ \llcorner\, c\frown w\\ \llcorner\,\eta\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)=m\end{array}\qquad(169$$

(IIIf):: - - - - - - - -

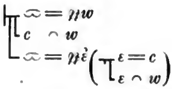
$$\vdash\!\!\begin{array}{l}\eta w=n\\ \llcorner\, m\frown(n\frown\mathfrak{f})\\ \llcorner\, c\frown w\\ \llcorner\, m=\eta\dot\varepsilon\left(\begin{array}{l}\top\,\varepsilon=c\\ \llcorner\,\varepsilon\frown w\end{array}\right)\end{array}\qquad(\alpha$$

(IIIf): - - - - - - - -

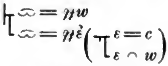

(170

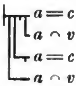
165 

(170):

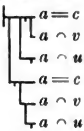

(α

(168): ·—·—·—·—·—·—·—·

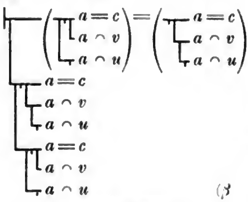

(171

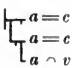
If 

(Ic, Id):: = = =

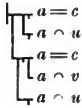

(α

(IVa):

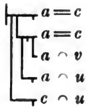

(β

Ic 

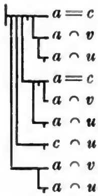
(I):: — — — —

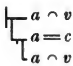

(γ

(IIId): ·—·—·—·

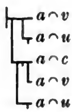

(δ

(If): — — — —

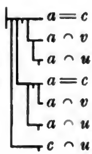

(ε

Id 

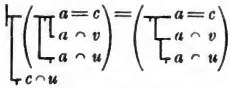
(I):: — — — —


(ζ

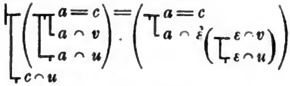
(ε): — — — —

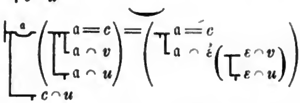

(η

(β): — — — — —

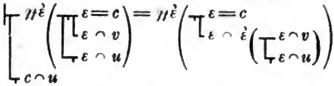
 (ϑ

(77):

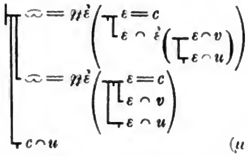
 (ι

 (κ

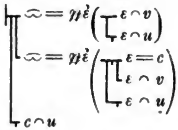
(Va):

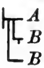
 (λ

(IIIc):

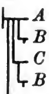
 (μ

(171):

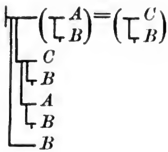
 (ν

Ia 

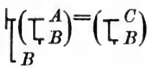
(I):

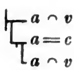
 (ξ

(IVa):

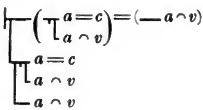
 (ο

(ξ)::

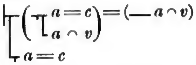
 (π

Id 

(IVa):

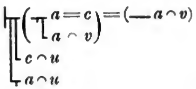
 (ϱ

(If)::



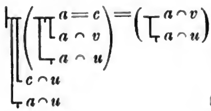
(σ

(IIIb)::



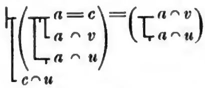
(τ

(IIIh):

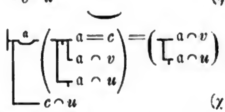


(υ

(π):

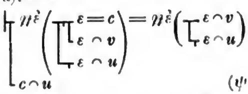


(φ



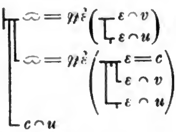
(χ

(Va):



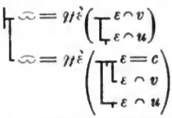
(ψ

(IIIc):



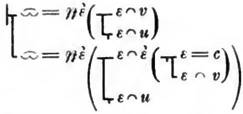
(ω

(ν):



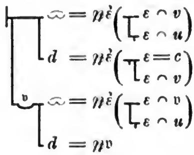
(α'

(75):



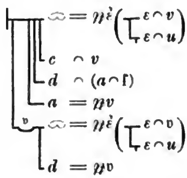
(β'

(IIa)::



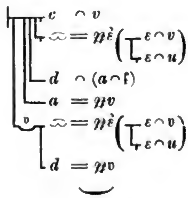
(γ'

(159)::

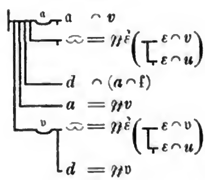


(δ'

×



(ε'



(ζ'

108 $\vdash d \frown (\mathfrak{o} \frown \mathfrak{f})$

(III a): ―――――

$\vdash d \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$a = \mathfrak{o}$ (η'

(III a): ―――――

$\vdash d \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$a = \mathfrak{n}v$
$\mathfrak{n}v = \mathfrak{o}$ (ϑ'

(97):: - - - - -

$\vdash d \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$a = \mathfrak{n}v$
$\overset{a}{\smile}\, a \frown v$ (ι'

(ζ'):: - - - - - -

$\vdash d \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$a = \mathfrak{n}v$
$\backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown v\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$\overset{\mathfrak{v}}{\smile}\, \backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$d = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$ (κ'

×

$\vdash \backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown v\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$a = \mathfrak{n}v$
$d \frown (a \frown \mathfrak{f})$
$\overset{\mathfrak{v}}{\smile}\, \backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$d = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$ (λ'

$\smile$

$\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{v}}{\smile}\, \backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$\mathfrak{a} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f})$
$\overset{\mathfrak{v}}{\smile}\, \backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$\mathfrak{d} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$ (μ'

(144): ―――――――――――

$\vdash \overset{\mathfrak{v}}{\smile}\, \backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$\mathfrak{n}v = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$
$\overset{\mathfrak{v}}{\smile}\, \backsim = \mathfrak{n}\grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown \mathfrak{v}\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)$
$\mathfrak{o} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$
$\mathfrak{o} \frown (\mathfrak{n}v \frown \backsim \mathfrak{f})$ (ν'

――•――

I a $\vdash a \frown v$
$a \frown u$
$a \frown u$

(IV a): ―――――

$\vdash \left(\begin{smallmatrix}a \frown v\\ a \frown u\end{smallmatrix}\right) = (— a \frown u)$
$a \frown u$
$a \frown v$
$a \frown u$ (ξ'

――•――

I $\vdash a \frown v$
$a \frown u$
$a \frown v$
$a \frown u$

×

$\vdash a \frown u$
$a \frown v$
$a \frown u$
$a \frown v$ (ο'

(ξ'): - - - -

$\vdash \left(\begin{smallmatrix}a \frown v\\ a \frown u\end{smallmatrix}\right) = (— a \frown u)$
$a \frown v$ (π'

(94):: - - - - - - - - - -

$\vdash \left(\begin{smallmatrix}a \frown v\\ a \frown u\end{smallmatrix}\right) = (— a \frown u)$
$\mathfrak{n}v = \mathfrak{o}$ (ϱ'

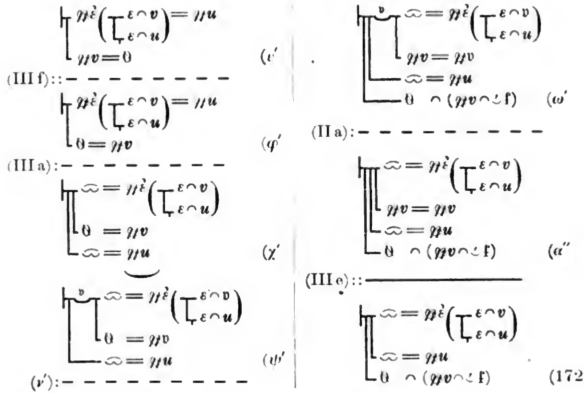
(77): ―――――――――

$\vdash \left[— a \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown v\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)\right] = (— a \frown u)$
$\mathfrak{n}v = \mathfrak{o}$ (σ'

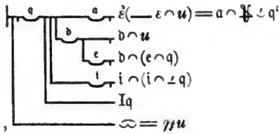
$\smile$

$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\left[— \mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon \frown v\\ \varepsilon \frown u\end{smallmatrix}\right)\right] = (— \mathfrak{a} \frown u)$
$\mathfrak{n}v = \mathfrak{o}$ (τ'

(96): - - - - - - - - - - - -



c) Beweis des Satzes



§ 128. *Zerlegung.*

Den nun zu beweisenden Satz können wir in Worten so wiedergeben:

„Wenn Endlos die Anzahl eines Begriffes ist, so können die unter diesen Begriff fallenden Gegenstände in eine unverzweigte Reihe geordnet werden, die mit einem bestimmten Gegenstande anfängt und, ohne in sich zurückzukehren, endlos fortläuft.“

Wenn ∾ die Anzahl des *u*-Begriffes ist, so muss es eine Beziehung geben, die den Begriff ***endliche Anzahl*** in den *u*-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Es sei die *p*-Beziehung dieser Art; wir fragen nun, ob dann die (𝔍*p*—𝔣—*p*)-Beziehung als reihenbildende unsern Anforderungen genüge, wenn wir als Anfangsglied das nehmen, zu dem 0 in der *p*-Beziehung steht. Mit (17), (18) und (71) beweisen wir leicht die Eindeutigkeit unserer reihenbildenden Beziehung. Dass die Reihe ohne Ende fortlaufe, werden wir aus (156) und (8) ableiten können.

§ 129. *Aufbau.*

71 $\vdash \mathrm{I}\mathfrak{f}$

(17): ——

$\mathrm{I}(\nmid p - \mathfrak{f})$
$\mathrm{I}\nmid p$ (α

(17): – – – –

$\mathrm{I}(\nmid p - \mathfrak{f} - p)$
$\mathrm{I}p$
$\mathrm{I}\nmid p$ (β

(18, 18):: = = = = =

$\mathrm{I}(\nmid p - \mathfrak{f} - p)$
$v \frown (u \frown \rangle p)$
$u \frown (v \frown \rangle \nmid p)$ (173

———•———

5 $d \frown (c \frown (\nmid p - q))$
$b \frown (c \frown q)$
$d \frown (b \frown \nmid p)$

(5): – – – – – – – –

$d \frown (e \frown (\nmid p - q - p))$
$c \frown (e \frown p)$
$b \frown (c \frown q)$
$d \frown (b \frown \nmid p)$ (174

×

$c \frown (e \frown p)$
$d \frown (e \frown (\nmid p - q - p))$
$b \frown (c \frown q)$
$d \frown (b \frown \nmid p)$ (α

(IIa):: – – – – – – – – –

$c \frown (e \frown p)$
$\mathfrak{e}\; d \frown (\mathfrak{e} \frown (\nmid p - q - p))$
$b \frown (c \frown q)$
$d \frown (b \frown \nmid p)$ (β

(Ia): – – – – – – – – – – –

$e \frown u$
$c \frown (e \frown p)$
$\mathfrak{e}\; d \frown (\mathfrak{e} \frown (\nmid p - q - p))$
$b \frown (c \frown q)$
$d \frown (b \frown \nmid p)$ (γ

$\mathfrak{a}\; \mathfrak{a} \frown u$
$c \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$\mathfrak{e}\; d \frown (\mathfrak{e} \frown (\nmid p - q - p))$
$b \frown (c \frown q)$
$d \frown (b \frown \nmid p)$ (δ

(8): – – – – – – – – – – – –

$c \frown (m \frown \nmid \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e}\; d \frown (\mathfrak{e} \frown (\nmid p - q - p))$
$b \frown (c \frown q)$
$d \frown (b \frown \nmid p)$
$m \frown \nmid \dot{\smile} q \frown (u \frown \rangle p)$ (ε

———•———

137 $\vartheta \frown (c \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$b \frown (c \frown \mathfrak{f})$
$\vartheta \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$

(22): ————————

$c \frown (\vartheta \frown \nmid \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$b \frown (c \frown \mathfrak{f})$
$\vartheta \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (ζ

×

$\vartheta \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$b \frown (c \frown \mathfrak{f})$
$c \frown (\vartheta \frown \nmid \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (η

(ε):: – – – – – –

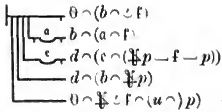
$\vartheta \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$b \frown (c \frown \mathfrak{f})$
$\mathfrak{e}\; d \frown (\mathfrak{e} \frown (\nmid p - \mathfrak{f} - p))$
$d \frown (b \frown \nmid p)$
$\vartheta \frown \nmid \dot{\smile} \mathfrak{f} \frown (u \frown \rangle p)$ (ϑ

×

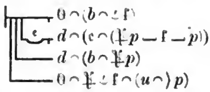
$b \frown (c \frown \mathfrak{f})$
$\vartheta \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\mathfrak{e}\; d \frown (\mathfrak{e} \frown (\nmid p - \mathfrak{f} - p))$
$d \frown (b \frown \nmid p)$
$\vartheta \frown \nmid \dot{\smile} \mathfrak{f} \frown (u \frown \rangle p)$ (ι

$\mathfrak{a}\; b \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f})$
$\vartheta \frown (b \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\mathfrak{e}\; d \frown (\mathfrak{e} \frown (\nmid p - \mathfrak{f} - p))$
$d \frown (b \frown \nmid p)$
$\vartheta \frown \nmid \dot{\smile} \mathfrak{f} \frown (u \frown \rangle p)$ (κ

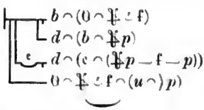
×

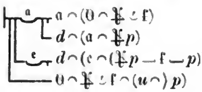

(λ

(156):

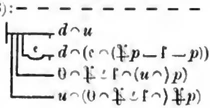

(μ

(22):


(ν


(ξ

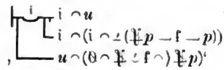
(8):


(175

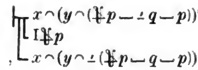
§ 130. *Zerlegung.*

Dass kein Gegenstand in der (‡p — 𝔣 — p)-Reihe auf sich selber folge, kann nicht bewiesen werden, sondern nur, dass kein unter den u-Begriff fallender Gegenstand in dieser Reihe auf sich selber folge, wenn der u-Begriff in den Begriff *endliche Anzahl* durch die ‡p-Beziehung abgebildet wird. Wir begnügen uns einstweilen mit einer solchen Reihe, um dann mit unserer (‡p — 𝔣 — p)-Beziehung eine andere zu definiren, die mit ihr in den übrigen hier in Betracht kommenden Eigenschaften übereinstimmt, dazu aber noch die hat, dass kein Gegenstand in ihrer Reihe auf sich selbst folgt.

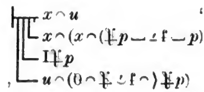
Den Satz



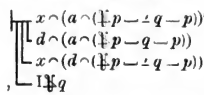
beweisen wir aus den Sätzen


(α

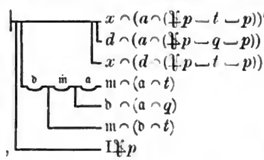
und


(β

Jenen beweisen wir mit (123) und bedürfen dazu des Satzes


(γ

den wir aus dem allgemeinern Satze


(δ

ableiten. Zum Beweise von (δ) gehen wir auf die Gegenstände, etwa m, b, c, zurück, die zu x, d, a in der p-Beziehung stehen. Mit (15) ist zu zeigen, dass es solche Gegenstände giebt. b kommt dabei zwiefach vor: erstens, indem m zu ihm in der t-Beziehung steht, und zweitens als in der q-Beziehung zu c stehend. Folgendes Bild mag die Uebersicht erleichtern.

$$\begin{array}{c} c \xrightarrow[p]{} a \\ q\updownarrow \\ b \xrightarrow[p]{} d \\ t\updownarrow \\ m \xrightarrow[p]{} x \end{array}$$

Aus der Eindeutigkeit der Umkehrung der p-Beziehung muss geschlossen werden, dass es nur einen einzigen Gegenstand der Art giebt, der für uns in Betracht kommen kann.

§ 131. *Aufbau.*

174
$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad c \frown (a \frown p) \\ \quad m \frown (c \frown t) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \end{array}$$

(IIa):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad c \frown (a \frown p) \\ \quad b \frown (c \frown q) \\ \quad \mathfrak{a}\ m \frown (\mathfrak{a} \frown t) \\ \quad\quad b \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \end{array} \qquad (\alpha$$

(IIIc): ————————————

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad c \frown (a \frown p) \\ \quad b \frown (c \frown q) \\ \quad \mathfrak{a}\ m \frown (\mathfrak{a} \frown t) \\ \quad\quad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \\ \quad b = e \end{array} \qquad (\beta$$

(78):: - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad c \frown (a \frown p) \\ \quad b \frown (c \frown q) \\ \quad \mathfrak{a}\ m \frown (\mathfrak{a} \frown t) \\ \quad\quad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \\ \quad e \frown (d \frown p) \\ \quad d \frown (b \frown \text{⅄}p) \\ \quad \mathrm{I}\text{⅄}p \end{array} \qquad (\gamma$$

×

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (b \frown \text{⅄}p) \\ \quad b \frown (c \frown q) \\ \quad c \frown (a \frown p) \\ \quad \mathfrak{a}\ m \frown (\mathfrak{a} \frown t) \\ \quad\quad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \\ \quad e \frown (d \frown p) \\ \quad x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad \mathrm{I}\text{⅄}p \end{array} \qquad (\delta$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{r}\ d \frown (\mathfrak{r} \frown \text{⅄}p) \\ \quad\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown q) \\ \quad c \frown (a \frown p) \\ \quad \mathfrak{a}\ m \frown (\mathfrak{a} \frown t) \\ \quad\quad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \\ \quad e \frown (d \frown p) \\ \quad x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad \mathrm{I}\text{⅄}p \end{array} \qquad (\varepsilon$$

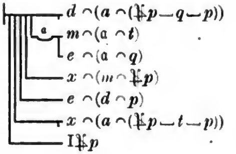
(15): - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (c \frown (\text{⅄}p \smile q)) \\ \quad c \frown (a \frown p) \\ \quad \mathfrak{a}\ m \frown (\mathfrak{a} \frown t) \\ \quad\quad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \\ \quad e \frown (d \frown p) \\ \quad x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad \mathrm{I}\text{⅄}p \end{array} \qquad (\zeta$$

$$\smile$$

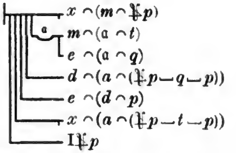
$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{r}\ d \frown (\mathfrak{r} \frown (\text{⅄}p \smile q)) \\ \quad\quad \mathfrak{r} \frown (a \frown p) \\ \quad \mathfrak{a}\ m \frown (\mathfrak{a} \frown t) \\ \quad\quad e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad x \frown (m \frown \text{⅄}p) \\ \quad e \frown (d \frown p) \\ \quad x \frown (a \frown (\text{⅄}p \smile t \smile p)) \\ \quad \mathrm{I}\text{⅄}p \end{array} \qquad (\eta$$

(15): - - - - - - - - - - -



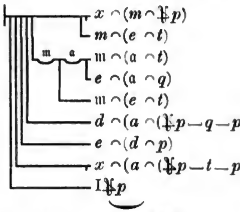
(ϑ

×

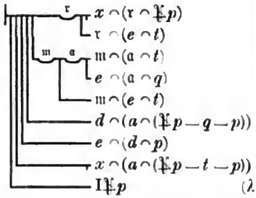


(ι

(IIa):: - - - - - - - - - -

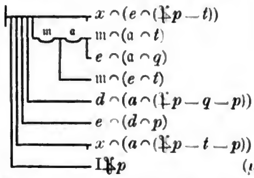


(κ



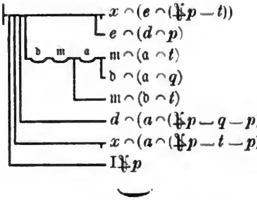
(λ

(15): - - - - - - - - - - - -

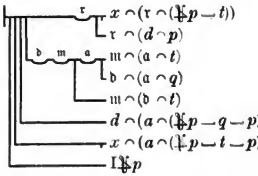


(μ

(IIa):: - - - - - - - - - - - -

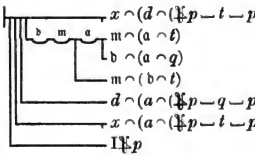


(ν



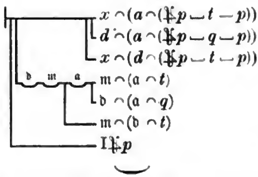
(ξ

(15): - - - - - - - - - - - -

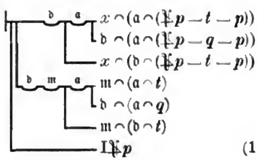


(ο

×



(π



(176

$$133\quad \vdash \begin{array}{l} a\frown(m\frown\dot{-}q) \\ e\frown(m\frown q) \\ a\frown(e\frown\dot{-}q) \end{array}$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{d}\;\mathfrak{m}\;\mathfrak{a}} \begin{array}{l} \mathfrak{m}\frown(\mathfrak{a}\frown\dot{-}q) \\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \mathfrak{m}\frown(\mathfrak{d}\frown\dot{-}q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(176): ———————————

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{d}\;\mathfrak{a}} \begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{a}\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(\ddagger p - q - p)) \\ x\frown(\mathfrak{d}\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ \mathrm{I}\ddagger p \end{array} \qquad (\beta$$

(123): - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(y\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; x\frown(\mathfrak{a}\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ \quad x\frown(\mathfrak{a}\frown(\ddagger p - q - p)) \\ \mathrm{I}\ddagger p \\ x\frown(y\frown\dot{-}(\ddagger p - q - p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

——•——

$$131\quad \vdash \begin{array}{l} m\frown(c\frown\dot{-}q) \\ m\frown(c\frown q) \end{array}$$

(174): - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ c\frown(a\frown p) \\ m\frown(c\frown q) \\ x\frown(m\frown\ddagger p) \end{array} \qquad (\delta$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(m\frown\ddagger p) \\ m\frown(c\frown q) \\ c\frown(a\frown p) \\ x\frown(a\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$$\smile$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{r}} \begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{r}\frown\ddagger p) \\ \mathfrak{r}\frown(c\frown q) \\ c\frown(a\frown p) \\ x\frown(a\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \end{array} \qquad (\zeta$$

(15): - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(c\frown(\ddagger p - q)) \\ c\frown(a\frown p) \\ x\frown(a\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \end{array} \qquad (\eta$$

$$\smile$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{r}} \begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{r}\frown(\ddagger p - q)) \\ \mathfrak{r}\frown(a\frown p) \\ x\frown(a\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \end{array} \qquad (\vartheta$$

(15): - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown(\ddagger p - q - p)) \\ x\frown(a\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \end{array} \qquad (\iota$$

$$\times$$

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ x\frown(a\frown(\ddagger p - q - p)) \end{array} \qquad (\varkappa$$

$$\smile$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{a}\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ x\frown(\mathfrak{a}\frown(\ddagger p - q - p)) \end{array} \qquad (\lambda$$

(γ): ———————————

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(y\frown(\ddagger p - \dot{-}q - p)) \\ \mathrm{I}\ddagger p \\ x\frown(y\frown\dot{-}(\ddagger p - q - p)) \end{array} \qquad (177$$

§ 132. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (β) des § 130, indem wir aus der Eindeutigkeit der $\ddagger p$-Beziehung folgern, dass es nur einen Gegenstand gebe, der zu x in dieser Beziehung stehe, während es, wenn x zu sich selbst in der ($\ddagger p - \dot{-}\mathfrak{f} - p$)-Beziehung stände, nach (15) mindestens einen solchen Gegenstand geben müsste, der auf sich selbst in der Anzahlenreihe folgte und der dann nach (145) keine endliche Anzahl sein könnte. Daraus folgte dann nach (8), dass x nicht unter den u-Begriff fallen könnte, wenn der u-Begriff durch die $\ddagger p$-Beziehung in den Begriff *endliche Anzahl* abgebildet wird.

§ 133. *Aufbau.*

$$145\quad \vdash \begin{array}{l} b\frown(b\frown\dot{-}\mathfrak{f}) \\ \mathfrak{b}\frown(b\frown\dot{-}\mathfrak{f}) \end{array}$$

(IIIa): ———————

$$\vdash \begin{array}{l} m\frown(b\frown\dot{-}\mathfrak{f}) \\ \mathfrak{b}\frown(b\frown\dot{-}\mathfrak{f}) \\ m = b \end{array} \qquad (\alpha$$

(13):: - - - - - -

$\vdash m \frown (b \frown \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad 0 \frown (b \frown \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (b \frown \sharp p)$
$\quad x \frown (m \frown \sharp p)$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$ (β

×

$\vdash x \frown (m \frown \sharp p)$
$\quad m \frown (b \frown \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad 0 \frown (b \frown \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (b \frown \sharp p)$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$ (γ

$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ x \frown (\mathfrak{r} \frown \sharp p)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (b \frown \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad 0 \frown (b \frown \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (b \frown \sharp p)$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$ (δ

(15): - - - - - - - -

$\vdash x \frown (b \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f}))$
$\quad 0 \frown (b \frown \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (b \frown \sharp p)$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$ (ε

(23):: - - - - - - - - -

$\vdash x \frown (b \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f}))$
$\quad b \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (b \frown \sharp p)$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$ (ζ

(III a): ———————————

$\vdash x \frown (b \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f}))$
$\quad n \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (b \frown \sharp p)$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$
$\quad n = b$ (η

(13):: - - - - - - - - -

$\vdash x \frown (b \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f}))$
$\quad n \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (b \frown \sharp p)$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$
$\quad x \frown (n \frown \sharp p)$ (ϑ

(22):: - - - - - - - - -

$\vdash x \frown (b \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f}))$
$\quad b \frown (x \frown p)$
$\quad n \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$
$\quad x \frown (n \frown \sharp p)$ (ι

$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ x \frown (\mathfrak{r} \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f}))$
$\quad \mathfrak{r} \frown (x \frown p)$
$\quad n \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$
$\quad x \frown (n \frown \sharp p)$ (κ

(15): - - - - - - - - - -

$\vdash x \frown (x \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f} - p))$
$\quad n \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$
$\quad x \frown (n \frown \sharp p)$ (λ

×

$\vdash n \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (n \frown \sharp p)$
$\quad x \frown (x \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f} - p))$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$ (μ

$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f})$
$\quad x \frown (\mathfrak{a} \frown \sharp p)$
$\quad x \frown (x \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f} - p))$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$ (ν

(8): - - - - - - - - - - -

$\vdash x \frown u$
$\quad x \frown (x \frown (\sharp p - \acute{}\mathfrak{f} - p))$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$
$\quad u \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f} \frown) \sharp p)$ (ξ

(177):: - - - - - - - - -

$\vdash x \frown u$
$\quad x \frown (x \frown \acute{}(\sharp p - \mathfrak{f} - p))$
$\quad \mathrm{I}\sharp p$
$\quad u \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f} \frown) \sharp p)$ (ο

(18):: - - - - - - - -

$\vdash x \frown u$
$\quad x \frown (x \frown \acute{}(\sharp p - \mathfrak{f} - p))$
$\quad u \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f} \frown) \sharp p)$ (π

$\vdash \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown u$
$\quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \acute{}(\sharp p - \mathfrak{f} - p))$
$\quad u \frown (0 \frown \sharp \acute{}\mathfrak{f} \frown) \sharp p)$ (178

§ 134. *Zerlegung.*

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, dass alle Glieder unserer Reihe unter den u-Begriff fallen, und umgekehrt, dass alle unter den u-Begriff fallenden Gegenstände Glieder unserer Reihe sind. Das sind die beiden Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown u \\ \quad x \frown (y \frown \dot{-}(\between p - q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad m \frown \between \dot{-} q \frown (u \frown) p) \\ \quad \mathrm{I}\between p \end{array} \qquad (\alpha$$

und

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (y \frown \dot{-}(\between p - q - p)) \\ \quad y \frown u \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad m \frown \between \dot{-} q \frown (u \frown) p) \\ \quad u \frown (m \frown \between \dot{-} q \frown) \between p) \end{array} \qquad (\beta$$

wo für die Anzahlenreihe allgemeiner die mit m anfangende q-Reihe genommen ist. Wir beweisen (α) aus den Sätzen

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (y \frown (\between p - \dot{-} q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad \mathrm{I}\between p \\ \quad x \frown (y \frown \dot{-}(\between p - q - p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

und

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown u \\ \quad m \frown (x \frown p \\ \quad x \frown (y \frown (\between p - \dot{-} q - p)) \\ \quad m \frown \between \dot{-} q \frown (u \frown) p) \\ \quad \mathrm{I}\between p \end{array} \qquad (\delta$$

von denen (γ) leicht wie (177) abgeleitet wird. Um (δ) zu beweisen, folgern wir aus der Eindeutigkeit der $\between p$-Beziehung, dass es nur einen Gegenstand giebt, der zu x in der $\between p$-Beziehung steht, und daraus, dass x zu y in der ($\between p - \dot{-} q - p$)-Beziehung steht, schliessen wir, dass es einen solchen Gegenstand giebt, welcher einer q-Reihe angehört, die endet mit einem zu y in der p-Beziehung stehenden Gegenstande n. Wenn also der Gegenstand m zu x in der $\between p$-Beziehung steht, so wird er auch der mit n endenden q-Reihe angehören. Wir beweisen ferner den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash n \frown v \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad y \frown u \\ \quad v \frown (u \frown) p) \end{array}$$

und gelangen zu unserm Ziele, indem wir hierin als v-Begriff den ($m \frown \between \dot{-} q$)-Begriff nehmen.

§ 135. *Aufbau.*

$$\text{III c} \quad \begin{array}{l} \vdash a \frown u \\ \quad y = a \\ \quad y \frown u \end{array}$$

(13) : : - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown u \\ \quad n \frown (a \frown p) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad \mathrm{I}p \\ \quad y \frown u \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, a \frown u \\ \qquad n \frown (a \frown p) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad \mathrm{I}p \\ \quad y \frown u \end{array} \qquad (\beta$$

(8) : - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash n \frown v \\ \quad n \frown (y \frown p \\ \quad \mathrm{I}p \\ \quad y \frown u \\ \quad v \frown (u \frown) p) \end{array} \qquad (\gamma$$

(18) : : - - - - - -

⊢ n ⌢ v
  n ⌢ (y ⌢ p)
  y ⌢ u
  v ⌢ (u ⌢) p) (179

——•——

22 ⊢ n ⌢ (m ⌢ ⫲ ⌣ q)
  m ⌢ (n ⌢ ⌣ q)

(III a): ————————

⊢ n ⌢ (m ⌢ ⫲ ⌣ q)
  a ⌢ (n ⌢ ⌣ q)
  a = m (α

(13):: - - - - - - - -

⊢ n ⌢ (m ⌢ ⫲ ⌣ q)
  a ⌢ (n ⌢ ⌣ q)
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  x ⌢ (a ⌢ ⫲ p)
  I⫲ p (β

×

⊢ x ⌢ (a ⌢ ⫲ p)
  a ⌢ (n ⌢ ⌣ q)
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  n ⌢ (m ⌢ ⫲ ⌣ q)
  I⫲ p (γ

⊢ 𝔯 x ⌢ (𝔯 ⌢ ⫲ p)
  𝔯 ⌢ (n ⌢ ⌣ q)
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  n ⌢ (m ⌢ ⫲ ⌣ q)
  I⫲ p (δ

(15): - - - - - - - - -

⊢ x ⌢ (n ⌢ (⫲ p — ⌣ q))
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  n ⌢ (m ⌢ ⫲ ⌣ q)
  I⫲ p (ε

(179):: - - - - - - - - -

⊢ x ⌢ (n ⌢ (⫲ p — ⌣ q))
  n ⌢ (y ⌢ p)
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  y ⌢ u
  m ⌢ ⫲ ⌣ q ⌢ (u ⌢) p)
  I⫲ p (ζ

⊢ 𝔯 x ⌢ (𝔯 ⌢ (⫲ p — ⌣ q))
  𝔯 ⌢ (y ⌢ p)
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  y ⌢ u
  m ⌢ ⫲ ⌣ q ⌢ (u ⌢) p)
  I⫲ p (η

(15): - - - - - - - - - - - -

⊢ x ⌢ (y ⌢ (⫲ p — ⌣ q — p))
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  y ⌢ u
  m ⌢ ⫲ ⌣ q ⌢ (u ⌢) p)
  I⫲ p (ϑ

×

⊢ y ⌢ u
  x ⌢ (m ⌢ ⫲ p)
  x ⌢ (y ⌢ (⫲ p — ⌣ q — p))
  m ⌢ ⫲ ⌣ q ⌢ (u ⌢) p)
  I⫲ p (ι

(22):: - - - - - - - - - - - -

⊢ y ⌢ u
  m ⌢ (x ⌢ p)
  x ⌢ (y ⌢ (⫲ p — ⌣ q — p))
  m ⌢ ⫲ ⌣ q ⌢ (u ⌢) p)
  I⫲ p (κ

——•——

137 ⊢ a ⌢ (m ⌢ ⌣ q)
  e ⌢ (m ⌢ q)
  a ⌢ (e ⌢ ⌣ q)

⊢ 𝔡 𝔪 𝔞 𝔪 ⌢ (𝔞 ⌢ ⌣ q)
  𝔡 ⌢ (𝔞 ⌢ q)
  𝔪 ⌢ (𝔡 ⌢ ⌣ q) (λ

(176): ————————————

⊢ 𝔡 𝔞 x ⌢ (𝔞 ⌢ (⫲ p — ⌣ q — p))
  𝔡 ⌢ (𝔞 ⌢ (⫲ p — q — p))
  x ⌢ (𝔡 ⌢ (⫲ p — ⌣ q — p))
  I⫲ p (μ

(144): - - - - - - - - - - - -

⊢ x ⌢ (y ⌢ (⫲ p — ⌣ q — p))
  x ⌢ (x ⌢ (⫲ p — ⌣ q — p))
  I⫲ p
  x ⌢ (y ⌢ ⌣ (⫲ p — q — p)) (ν

(174):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (y \frown (\ddagger p - \dot\smile q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad m \frown (m \frown \dot\smile q) \\ \quad x \frown (m \frown \ddagger p) \\ \quad \mathrm{I}\ddagger p \\ \quad x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \end{array} \qquad (\xi$$

(22, 140) :: ═══════

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (y \frown (\ddagger p - \dot\smile q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad \mathrm{I}\ddagger p \\ \quad x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \end{array} \qquad (180$$

$(\varkappa)$: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown u \\ \quad x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad m \frown \ddagger \dot\smile q \frown (u \frown) p) \\ \quad \mathrm{I}\ddagger p \end{array} \qquad (\alpha$$

(18) :: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown u \\ \quad x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad m \frown \ddagger \dot\smile q \frown (u \frown) p) \\ \quad u \frown (m \frown \ddagger \dot\smile q \frown) \ddagger p) \end{array} \qquad (181$$

§ 136. *Zerlegung.*

Wir haben nun den Satz (β) des § 134 zu beweisen. Daraus, dass der **u**-Begriff durch die $\ddagger p$-Beziehung in den ($m \frown \ddagger \dot\smile q$)-Begriff abgebildet wird und dass y unter den **u**-Begriff fällt, können wir schliessen, dass es einen Gegenstand (**n**) giebt, zu dem y in der $\ddagger p$-Beziehung steht und der unter den ($m \frown \ddagger \dot\smile q$)-Begriff fällt, d. h. der mit **m** anfangenden q-Reihe angehört. Wir beweisen nun den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p))' \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad m \frown \ddagger \dot\smile q \frown (u \frown) p) \\ \quad m \frown (n \frown \dot\smile q) \end{array} \qquad (\alpha$$

mit (152). Wir bedürfen dazu des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{e}}\, x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p))' \\ \quad a \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad m \frown (d \frown \dot\smile q) \\ \quad \smile^{\mathfrak{e}}\, x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \\ \qquad d \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\ \quad m \frown \ddagger \dot\smile q \frown (u \frown) p) \end{array} \qquad (\beta$$

Daraus, dass der ($m \frown \ddagger \dot\smile q$)-Begriff in den **u**-Begriff durch die **p**-Beziehung abgebildet wird, schliessen wir, dass es einen Gegenstand (**e**) giebt, zu dem **d** in der **p**-Beziehung steht, wenn **d** der mit **m** anfangenden q-Reihe angehört. Hieraus und aus dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (c \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p))' \\ \quad a \frown (c \frown p) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad d \frown (e \frown p) \\ \quad x \frown (e \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

folgt leicht (β).

§ 137. *Aufbau.*

$$139 \quad \begin{array}{l} \vdash x \frown (e \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \\ \quad e = x \end{array}$$

(13) :: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (e \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \\ \quad m \frown (e \frown p) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad \mathrm{I}p \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{e}}\, x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \\ \qquad m \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad \mathrm{I}p \end{array} \qquad (\beta$$

(18) :: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \smile^{\mathfrak{e}}\, x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot\smile (\ddagger p - q - p)) \\ \qquad m \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad v \frown (u \frown) p) \end{array} \qquad (182$$

II a $\vdash d \frown (a \frown p)$
$\mathfrak{a}\;\; d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$

(I a): - - - - - -

$a \frown u$
$d \frown (a \frown p)$
$\mathfrak{a}\;\; d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$ (α

$\mathfrak{e}\;\; \mathfrak{e} \frown u$
$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$
$\mathfrak{a}\;\; d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$ (β

(8): - - - - - -

$d \frown v$
$\mathfrak{e}\;\; d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$
$v \frown (u \frown \rangle p)$ (183

———•———

174 $\vdash e \frown (c \frown (\ddagger p - q - p))$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$e \frown (d \frown \ddagger p)$

(22):: - - - - - - - - - -

$e \frown (c \frown (\ddagger p - q - p))$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$d \frown (e \frown p)$ (184

(137): - - - - - - - - - -

$x \frown (c \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$d \frown (e \frown p)$
$x \frown (e \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$ (α

(II a):: - - - - - - - - - -

$x \frown (c \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$d \frown (e \frown p)$
$\mathfrak{e}\;\; x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$ (β

×

$d \frown (e \frown p)$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$\mathfrak{e}\;\; x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$ (γ

$\mathfrak{a}\;\; d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$\mathfrak{e}\;\; x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$ (185

(183): - - - - - - - - - - -

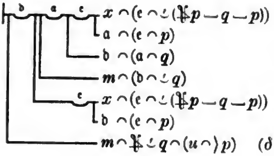
$d \frown (m \frown \ddagger \dot{\smile} q)$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$\mathfrak{e}\;\; x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$
$m \frown \ddagger \dot{\smile} q \frown (u \frown \rangle p)$ (α

×

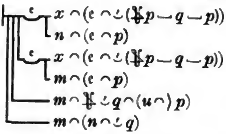
$x \frown (c \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$d \frown (m \frown \ddagger \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e}\;\; x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$
$m \frown \ddagger \dot{\smile} q \frown (u \frown \rangle p)$ (β

(22):: - - - - - - - - - -

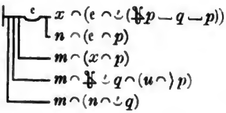
$x \frown (c \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$a \frown (c \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$m \frown (d \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e}\;\; x \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (\ddagger p - q - p))$
$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$
$m \frown \ddagger \dot{\smile} q \frown (u \frown \rangle p)$ (γ

 (δ

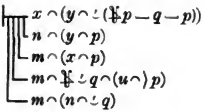
(152): - - - - - - - - - - -

 (ε

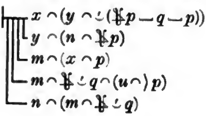
(182):: - - - - - - - - - -

 (ζ

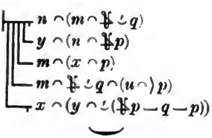
(IIa): - - - - - - - - - -

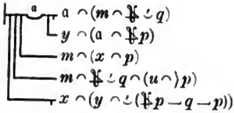
 (η

(23, 23):: = = = = = = =

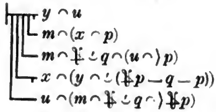
 (ϑ

×

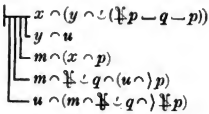
 (ι

 (κ

(8): - - - - - - - - - - - -

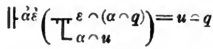
 (λ

×

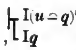
 (186

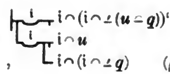
§ 138. *Zerlegung.*

Wir definiren nun, wie im § 130 angekündigt war, eine Beziehung der Art, dass kein Gegenstand in ihrer Reihe auf sich selbst folgt und die sonst in den für uns werthvollen Eigenschaften mit der (ℌp — f — p)-Beziehung übereinstimmt.

 (N

Wir zeigen nun, dass die ($u \bumpeq q$)-Beziehung jene Eigenschaften hat, wenn die q-Beziehung sie hat, und dass kein Gegenstand in der ($u \bumpeq q$)-Reihe auf sich selbst folgt, wenn kein unter den u-Begriff fallender Gegenstand in der q-Reihe auf sich selbst folgt. Wir beweisen zuerst die Sätze

 (α

 (β

Der erste bietet keine Schwierigkeit; (β) kann zerlegt werden in die Sätze

$$\vdash\begin{array}{l} y\frown u \\ x\frown(y\frown\lrcorner(u\asymp q)) \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(y\frown\lrcorner q) \\ x\frown(y\frown\lrcorner(u\asymp q)) \end{array} \qquad (\delta$$

§ 139. *Aufbau.*

$$N \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon\frown(\alpha\frown q) \\ \alpha\frown u \end{array}\right) = u\asymp q$$

(6): ——————

$$\vdash\begin{array}{l} e\frown(a\frown q) \\ a\frown u \\ e\frown(a\frown(u\asymp q)) \end{array} \qquad (187$$

(I b): - - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} e\frown(a\frown q) \\ e\frown(a\frown(u\asymp q)) \end{array} \qquad (188$$

(13): - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} d=a \\ e\frown(a\frown(u\asymp q)) \\ e\frown(d\frown q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\alpha$$

(188):: - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} d=a \\ e\frown(a\frown(u\asymp q)) \\ e\frown(d\frown(u\asymp q)) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\beta$$

$$\vdash\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{d}=\mathfrak{a} \\ \mathfrak{e}\frown(\mathfrak{a}\frown(u\asymp q)) \\ \mathfrak{e}\frown(\mathfrak{d}\frown(u\asymp q)) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\gamma$$

(16): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} \mathrm{I}(u\asymp q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (189$$

——•——

$$189 \quad \vdash\begin{array}{l} \mathrm{I}(u\asymp(\not\Vdash p - \mathfrak{f} - p)) \\ \mathrm{I}(\not\Vdash p - \mathfrak{f} - p) \end{array}$$

(173):: - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} \mathrm{I}(u\asymp(\not\Vdash p - \mathfrak{f} - p)) \\ v\frown(u\frown\rangle p) \\ u\frown(v\frown\rangle\not\Vdash p) \end{array} \qquad (190$$

——•——

$$187 \quad \vdash\begin{array}{l} d\frown(y\frown q) \\ y\frown u \\ d\frown(y\frown(u\asymp q)) \end{array}$$

(I d): - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} y\frown u \\ d\frown(y\frown(u\asymp q)) \end{array} \qquad (191$$

$\times$

$$\vdash\begin{array}{l} d\frown(y\frown(u\asymp q)) \\ y\frown u \end{array} \qquad (192$$

$$\vdash\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\begin{array}{l} \mathfrak{e}\frown(y\frown(u\asymp q)) \\ y\frown u \end{array} \qquad (\alpha$$

(125): - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(y\frown\lrcorner(u\asymp q)) \\ y\frown u \end{array} \qquad (193$$

——•——

$$188 \quad \vdash\begin{array}{l} d\frown(a\frown q) \\ d\frown(a\frown(u\asymp q)) \end{array}$$

(133): - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(a\frown\lrcorner q) \\ d\frown(a\frown(u\asymp q)) \\ x\frown(d\frown\lrcorner q) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{a}\frown\lrcorner q) \\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(u\asymp q)) \\ x\frown(\mathfrak{d}\frown\lrcorner q) \end{array} \qquad (\beta$$

(123): ——————

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(y\frown\lrcorner q) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{a}\frown\lrcorner q) \\ x\frown(\mathfrak{a}\frown(u\asymp q)) \end{array} \\ x\frown(y\frown\lrcorner(u\asymp q)) \end{array} \qquad (\gamma$$

——•——

$$188 \quad \vdash\begin{array}{l} x\frown(a\frown q) \\ x\frown(a\frown(u\asymp q)) \end{array}$$

(131): - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(a\frown\lrcorner q) \\ x\frown(a\frown(u\asymp q)) \end{array} \qquad (\delta$$

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{a}\frown\lrcorner q) \\ x\frown(\mathfrak{a}\frown(u\asymp q)) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(γ): ——————

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (y \frown \angle q) \\ \quad x \frown (y \frown \angle (u \asymp q)) \end{array} \qquad (194$$

$$\bullet$$

$$194 \quad \begin{array}{l} \vdash y \frown (y \frown \angle q) \\ \quad y \frown (y \frown \angle (u \asymp q)) \end{array}$$

(IIa): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown u \\ \quad y \frown (y \frown \angle (u \asymp q)) \\ \quad \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown u \\ \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle q) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown (y \frown \angle (u \asymp q)) \\ \quad y \frown u \\ \quad \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown u \\ \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle q) \end{array} \qquad (\beta$$

(193): -.-.-.-.-.-.-.-.-

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown (y \frown \angle (u \asymp q)) \\ \quad \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown u \\ \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle q) \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle (u \asymp q)) \\ \quad \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown u \\ \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle q) \end{array} \qquad (195$$

$$\bullet$$

$$178 \quad \begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown u \\ \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad u \frown (\vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown) \mathfrak{P}p) \end{array}$$

(195): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle (u \asymp (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p))) \\ \quad u \frown (\vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown) \mathfrak{P}p) \end{array} \qquad (196$$

§ 140. *Zerlegung.*

Wir haben nun zu beweisen, dass unter unsern Voraussetzungen die $(u \asymp (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p))$-Reihe endlos fortläuft. Es kommt dabei auf den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ d \frown (\mathfrak{e} \frown (u \asymp (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p))) \\ \quad d \frown u \\ \quad \vartheta \frown (x \frown p) \\ \quad \vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown (u \frown) p) \\ \quad u \frown (\vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown) \mathfrak{P}p) \end{array} \qquad (\alpha$$

an. Er ist mit dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (u \asymp q)) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad a \frown u \end{array}$$

zu beweisen, der aus (N) folgt.

§ 141. *Aufbau.*

$$N \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\alpha \frown q) \\ \alpha \frown u \end{array}\right) = u \asymp q$$

(10): ————————————

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (u \asymp q)) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad a \frown u \end{array} \qquad (\alpha$$

(Ie):: - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (u \asymp q)) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad a \frown u \end{array} \qquad (197$$

$$\bullet$$

$$137 \quad \begin{array}{l} \vdash x \frown (a \frown \angle (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad d \frown (a \frown (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad x \frown (d \frown \angle (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \end{array}$$

(181): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown u \\ \quad d \frown (a \frown (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad x \frown (d \frown \angle (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad \vartheta \frown (x \frown p) \\ \quad \vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown (u \frown) p) \\ \quad u \frown (\vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown) \mathfrak{P}p) \end{array} \qquad (\alpha$$

(197): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (u \asymp (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p))) \\ \quad d \frown (a \frown (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad x \frown (d \frown \angle (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad \vartheta \frown (x \frown p) \\ \quad \vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown (u \frown) p) \\ \quad u \frown (\vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown) \mathfrak{P}p) \end{array} \qquad (198$$

(186):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (u \asymp (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p))) \\ \quad d \frown (a \frown (\mathfrak{P}p - \mathfrak{f} - p)) \\ \quad d \frown u \\ \quad \vartheta \frown (x \frown p) \\ \quad \vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown (u \frown) p) \\ \quad u \frown (\vartheta \frown \mathfrak{P} \angle \mathfrak{f} \frown) \mathfrak{P}p) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l} d\frown(a\frown(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)) \\ d\frown(a\frown(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ d\frown u \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\beta$$

(II a)::- - - - - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} d\frown(a\frown(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, d\frown(\mathfrak{e}\frown(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ d\frown u \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\gamma$$

$$\vdash\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, d\frown(\mathfrak{e}\frown(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, d\frown(\mathfrak{e}\frown(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ d\frown u \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\delta$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l} d\frown u \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, d\frown(\mathfrak{e}\frown(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, d\frown(\mathfrak{e}\frown(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)) \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\varepsilon$$

(175):·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·

$$\vdash\begin{array}{l} d\frown u \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, d\frown(\mathfrak{e}\frown(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\zeta$$

$$\vdash\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, \mathfrak{d}\frown u \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{e}\frown(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\eta$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l} \theta\frown(x\frown p) \\ \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, \mathfrak{d}\frown u \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{e}\frown(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (199$$

§ 142. *Zerlegung.*

Es bleibt nun noch der Satz

$$\vdash\begin{array}{l} (-y\frown u)=x\frown(y\frown\dot{\smile}(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))' \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\alpha$$

zu beweisen. Mit den Sätzen (181) und (186) ist dieser zurückzuführen auf die Sätze

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(y\frown\dot{\smile}q)' \\ x\frown(y\frown\dot{\smile}(u\asymp q)) \end{array}\qquad (\beta$$

und

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(y\frown\dot{\smile}(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))' \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \\ x\frown(y\frown\dot{\smile}(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)) \end{array}\qquad (\gamma$$

Von diesen kann (β) aus (194) abgeleitet werden, während (γ) mit (152) zu beweisen ist. Wir bedürfen dazu des Satzes

$$\vdash\begin{array}{l} x\frown(a\frown\dot{\smile}(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))' \\ d\frown(a\frown(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)) \\ x\frown(d\frown\dot{\smile}(\ddagger p - \mathfrak{f} - p)) \\ x\frown(d\frown\dot{\smile}(u\asymp(\ddagger p - \mathfrak{f} - p))) \\ \theta\frown(x\frown p) \\ \theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown(u\frown)p \\ u\frown(\theta\frown\ddagger\dot{\smile}\mathfrak{f}\frown)\ddagger p \end{array}\qquad (\delta$$

der aus (198) und (137) folgt.

Wir gelangen dann leicht an das Ende unseres Abschnittes (*c*).

§ 143. *Aufbau.*

130 $\vdash$ $y = x$
$x \frown (y \frown \dot\smile q)$
$x \frown (y \frown \dot\smile q)$

$\times$

$\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile q)$
$y = x$
$x \frown (y \frown \dot\smile q)$ (200

———•———

136 $\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile q)$
$x \frown (y \frown \dot\smile q)$

(194) :: - - - -

$\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile q)$
$x \frown (y \frown \dot\smile (u \doteq q))$ (α

(200) :: - - - - - -

$\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile q)$
$y = x$
$x \frown (y \frown \dot\smile (u \doteq q))$ (β

(139) : -·-·-·-·-·-·-

$\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile q)$
$x \frown (y \frown \dot\smile (u \doteq q))$ (201

———•———

201 $\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - \mathfrak{f} - p))$
$x \frown (y \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$

(181) : - - - - - - - - - - -

$\vdash$ $y \frown u$
$x \frown (y \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$0 \frown (x \frown p)$
$0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown (u \frown) p)$
$u \frown (0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown) \ddagger p)$ (202

———•———

130 $\vdash$ $F\left(\begin{matrix} c = a \\ a \frown (c \frown \dot\smile q) \end{matrix}\right)$
$F(— a \frown (c \frown \dot\smile q))$

(135) : - - - - - - - - -

$\vdash$ $F(a \frown (c \frown \dot\smile q))$
$F(— a \frown (c \frown \dot\smile q))$ (203

———•———

140 $\vdash a \frown (a \frown \dot\smile q)$

(22) : ————————

$\vdash a \frown (a \frown \ddagger \dot\smile q)$ (204

———•———

M $\vdash \mathfrak{m}(0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f}) = \backsim$

(III c) : ————————————

$\vdash$ $F(\backsim)$
$F(\mathfrak{m}(0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f}))$ (205

———•———

137 $\vdash$ $x \frown (a \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$d \frown (a \frown (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$x \frown (d \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$

(198) :: - - - - - - - - - - -

$\vdash$ $x \frown (a \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$d \frown (a \frown (\ddagger p - \mathfrak{f} - p))$
$x \frown (d \frown \dot\smile (\ddagger p - \mathfrak{f} - p))$
$x \frown (d \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$0 \frown (x \frown p)$
$0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown (u \frown) p)$
$u \frown (0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown) \ddagger p)$ (α

$\vdash$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}$ $x \frown (\mathfrak{a} \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown (\ddagger p - \mathfrak{f} - p))$
$x \frown (\mathfrak{b} \frown \dot\smile (\ddagger p - \mathfrak{f} - p))$
$x \frown (\mathfrak{b} \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$0 \frown (x \frown p)$
$0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown (u \frown) p)$
$u \frown (0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown) \ddagger p)$ (β

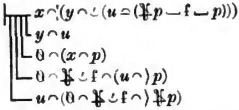
(152) : - - - - - - - - - - - - - - -

$\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$x \frown (x \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$0 \frown (x \frown p)$
$0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown (u \frown) p)$
$u \frown (0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown) \ddagger p)$
$x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - \mathfrak{f} - p))$ (γ

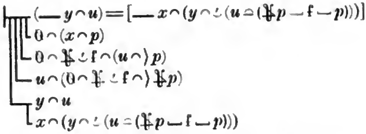
(140) :: ————————————————

$\vdash$ $x \frown (y \frown \dot\smile (u \doteq (\ddagger p - \mathfrak{f} - p)))$
$0 \frown (x \frown p)$
$0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown (u \frown) p)$
$u \frown (0 \frown \ddagger \dot\smile \mathfrak{f} \frown) \ddagger p)$
$x \frown (y \frown \dot\smile (\ddagger p - \mathfrak{f} - p))$ (δ

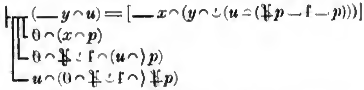
(186) :: - - - - - - - - - - -

 (ε

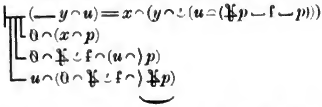
(IVa): - - - - - - - - - - - - -

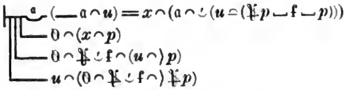
 (ζ

(202):: - - - - - - - - - - - - - - - - -

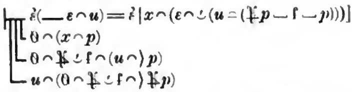
 (η

(203): ———————————————

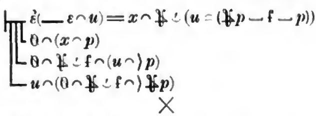
 (ϑ

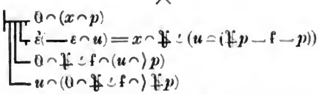
 (ι

(Va): - - - - - - - - - - - - - - - - -

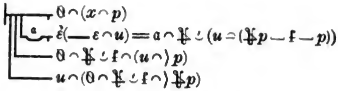
 (κ

(164): ———————————————

 (λ

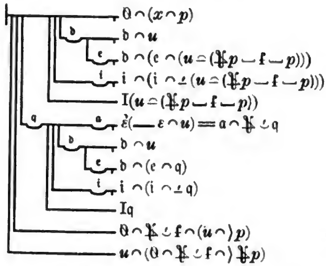
 (μ

(IIa):: - - - - - - - - - - - - - - -



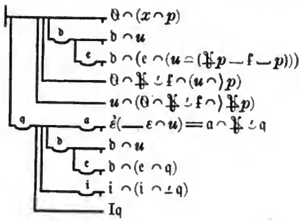
(ν

(II a)::- - - - - - - - - - - - - - - - - -



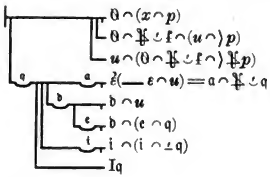
(ξ

(196, 190)::= = = = = = = = = = = = = = =

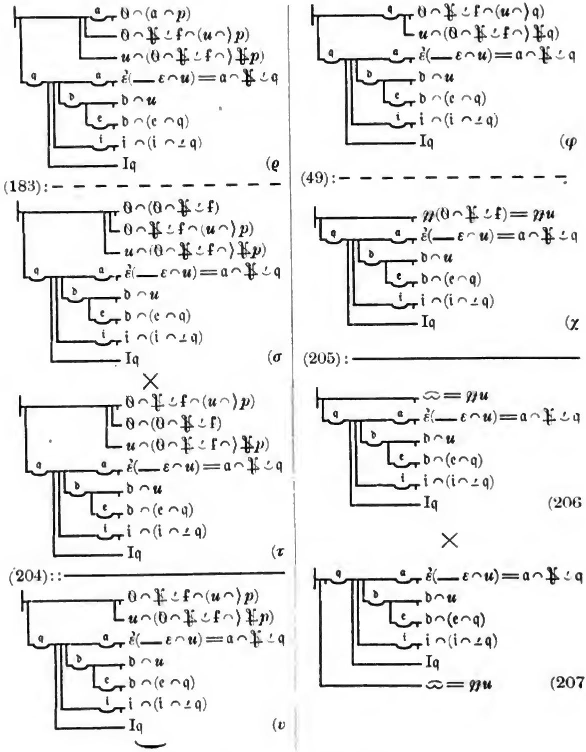


(ο

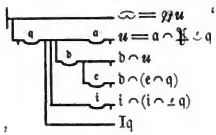
(199):·—·—·—·—·—·—·—·—·—·—·—·—·—·—·



(π

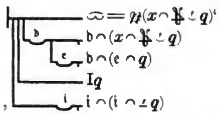


d) Beweis des Satzes



§ 144. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun die Umkehrung des Satzes (207), dass nämlich Endlos die Anzahl ist, die einem Begriffe zukommt, wenn sich die unter diesen Begriff fallenden Gegenstände in eine Reihe ordnen lassen, die mit einem gewissen Gegenstande anfängt und endlos fortläuft, ohne in sich zurückzulaufen und ohne sich zu verzweigen. Es kommt darauf an zu zeigen, dass Endlos die Anzahl ist, die dem Begriffe *Glied einer solchen Reihe* zukommt, in Zeichen:



(α

Wir benutzen hierzu den Satz (32) und haben eine Beziehung nachzuweisen, welche die Anzahlenreihe in die mit x anfangende q-Reihe und deren Umkehrung diese in jene abbildet. Es liegt nahe, die 0 dem x, die 1 dem auf x nächstfolgenden Gliede der q-Reihe und so immer die nächstfolgende Anzahl dem nächstfolgenden Gliede der q-Reihe zuzuordnen. Wir fassen immer ein Glied der Anzahlenreihe und ein Glied der q-Reihe zu einem Paare zusammen und bilden aus diesen Paaren eine Reihe. Die reihenbildende Beziehung ist dadurch bestimmt, dass ein Paar zu einem zweiten Paare dann in ihr steht, wenn das erste Glied des ersten Paares zum ersten Gliede des zweiten Paares in der $\mathfrak{f}$-Beziehung und das zweite Glied des ersten Paares zum zweiten Gliede des zweiten Paares in der q-Beziehung steht. Wenn dann das Paar (n; y) unserer mit dem Paare (0; x) anfangenden Reihe angehört, so steht n zu y in der aufzuweisenden abbildenden Beziehung. Wir definiren nun das Paar so:

$$\Vdash \grave{\varepsilon}(o \frown (a \frown \varepsilon)) = o;\, a \qquad (\Xi$$

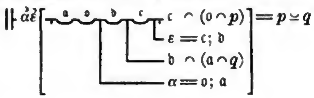
Das Semikolon ist hierbei zweiseitiges Functionszeichen. Der Ausdruck

$$„\Pi \frown (\Gamma;\, \Delta)“$$

ist demnach gleichbedeutend mit

$$„\Gamma \frown (\Delta \frown \Pi)“,$$

wenn „Γ“, „Δ“, „Π“ Gegenstände bedeuten. Für den Umfang der Beziehung, die in der oben angegebenen Weise aus der p-Beziehung und der q-Beziehung, wie ich sage, g e k o p p e l t ist, führe ich ein einfaches Zeichen ein, indem ich definire:



(O

Danach deutet

$$„0;\, x \frown (\xi;\, \zeta \frown \smile(\mathfrak{f} \simeq q))“$$

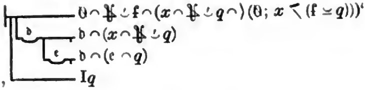
unsere abbildende Beziehung und

$$„\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(0;\, x \frown (\varepsilon;\, \alpha \frown \smile(\mathfrak{f} \simeq q)))“$$

deren Umfang an. Wir definiren nun

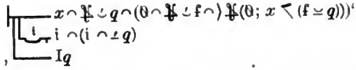
$$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\Delta \frown (\varepsilon;\, \alpha \frown \smile t)) = \Delta \lessdot t \qquad (\Pi$$

Es sind dann die Sätze



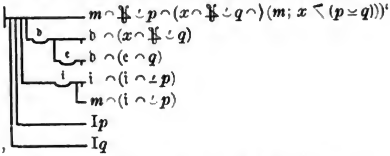
(β

und



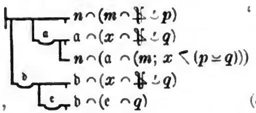
(γ

zu beweisen. Statt (β) beweisen wir zunächst den etwas allgemeinern Satz



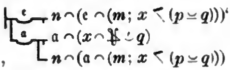
(δ

den wir dann auch beim Beweise von (γ) verwenden können. Wir benutzen (11) und müssen demnach den Satz



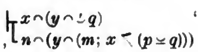
(ε

ableiten. Der Satz



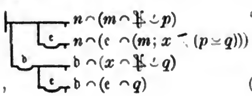
(ζ

ist leicht aus dem Satze



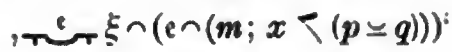
(η

abzuleiten, und wir können damit (ε) auf

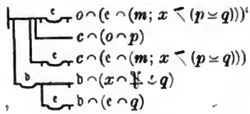


(ϑ

zurückführen. Wir beweisen diesen Satz mit (144), indem wir für ‚$F(\xi)$' die Functionsmarke



setzen. Wir haben dann den Satz



(ι

nöthig. Ich stelle zur bessern Verständigung die p-Reihe und die q-Reihe hier bildlich neben einander dar:

p-Reihe	q-Reihe
m	x
.	.
.	.
.	.
c	d
o	a

Es ist zu zeigen:

„Wenn die mit x anfangende q-Reihe ohne Ende fortläuft und wenn es einen Gegenstand (d) giebt, der mit c zusammen ein Paar bildet, das der mit dem Paare $m; x$ anfangenden ($p \mathrel{\underline{\smile}} q$)-Reihe angehört, so giebt es auch einen Gegenstand (a), der mit o zusammen ein solches Paar bildet, sofern c zu o in der p-Beziehung steht."

Wir beweisen zunächst den Satz

$$\begin{array}{ll}\vdash\; o \frown (a \frown (A \nwarrow (p \mathrel{\underline{\smile}} q)))'\,{}^{1)} & \\ \quad d \frown (a \frown q) & \\ \quad c \frown (o \frown p) & \\ ,\; c \frown (d \frown (A \nwarrow (p \mathrel{\underline{\smile}} q))) & (\varkappa\end{array}$$

wofür wir wegen der Definition (II)

$$\begin{array}{ll}\vdash\; A \frown (o;\, a \frown \dot{\underline{\smile}}(p \mathrel{\underline{\smile}} q))' & \\ \quad d \frown (a \frown q) & \\ \quad c \frown (o \frown p) & \\ ,\; A \frown (c;\, d \frown \dot{\underline{\smile}}(p \mathrel{\underline{\smile}} q)) & (\lambda\end{array}$$

schreiben können. Dies kann leicht mit dem Satze

$$\begin{array}{ll}\vdash\; c;\, d \frown (o;\, a \frown (p \mathrel{\underline{\smile}} q))' & \\ \quad d \frown (a \frown q) & \\ ,\; c \frown (o \frown p) & (\mu\end{array}$$

bewiesen werden, der aus der Definition (O) folgt.

§ 145. *Aufbau.*

$$O \quad \Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{o}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{c}}{\smile}\;\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p) \\ \quad \varepsilon = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d} \\ \quad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad \alpha = \mathfrak{o};\, \mathfrak{a}\end{array}\right] = p \mathrel{\underline{\smile}} q$$

(100): ———————————————

$$\begin{array}{ll}\vdash\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{o}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{c}}{\smile}\;\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p) & \\ \quad c;\, d = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d} & \\ \quad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) & \\ \quad o;\, a = \mathfrak{o};\, \mathfrak{a} & \\ \quad c;\, d \frown (o;\, a \frown (p \mathrel{\underline{\smile}} q)) & (\alpha\end{array}$$

(IIa): - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll}\vdash\; \overset{\mathfrak{o}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{c}}{\smile}\;\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p) & \\ \quad c;\, d = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d} & \\ \quad \mathfrak{d} \frown (a \frown q) & \\ \quad o;\, a = \mathfrak{o};\, a & \\ \quad c;\, d \frown (o;\, a \frown (p \mathrel{\underline{\smile}} q)) & (\beta\end{array}$$

(IIa): - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll}\vdash\; \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{c}}{\smile}\;\mathfrak{c} \frown (o \frown p) & \\ \quad c;\, d = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d} & \\ \quad \mathfrak{d} \frown (a \frown q) & \\ \quad o;\, a = o;\, a & \\ \quad c;\, d \frown (o;\, a \frown (p \mathrel{\underline{\smile}} q)) & (\gamma\end{array}$$

(IIIe):: ———————————————

1) Hier ist für „$m; x$" „A" geschrieben.

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{b}}\smile^{\mathfrak{c}}\smile\ \mathfrak{c}\frown(o\frown p) \\ \quad c;\ d=\mathfrak{c};\ \mathfrak{b} \\ \quad \mathfrak{b}\frown(a\frown q) \\ \quad c;\ d\frown(o;\ a\frown(p\simeq q)) \end{array} \quad (\delta$$

(IIa): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{c}}\smile\ \mathfrak{c}\frown(o\frown p) \\ \quad c;\ d=\mathfrak{c};\ d \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad c;\ d\frown(o;\ a\frown(p\simeq q)) \end{array} \quad (\varepsilon$$

(IIa): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash c\frown(o\frown p) \\ \quad c;\ d=c;\ d \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad c;\ d\frown(o;\ a\frown(p\simeq q)) \end{array} \quad (\zeta$$

(IIIe):: ————————————

$$\begin{array}{l} \vdash c\frown(o\frown p) \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad c;\ d\frown(o;\ a\frown(p\simeq q)) \end{array} \quad (\eta$$

$\times$

$$\begin{array}{l} \vdash c;\ d\frown(o;\ a\frown(p\simeq q)) \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad c\frown(o\frown p) \end{array} \quad (208$$

(137): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash A\frown(o;\ a\frown\smallsmile(p\simeq q)) \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad A\frown(c;\ d\frown\smallsmile(p\simeq q)) \end{array} \quad (209$$

——•——

II $\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(A\frown(\varepsilon;\ \alpha\frown\smallsmile t)) = A \prec t$

(10): ————————————

$$\begin{array}{l} \vdash F(o\frown(a\frown(A \prec t))) \\ \quad F(A\frown(o;\ a\frown\smallsmile t)) \end{array} \quad (210$$

——•——

$$210 \quad \begin{array}{l} \vdash o\frown(a\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad A\frown(o;\ a\frown\smallsmile(p\simeq q)) \end{array}$$

(209):: - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash o\frown(a\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad A\frown(c;\ d\frown\smallsmile(p\simeq q)) \end{array} \quad (\alpha$$

(210): ————————————

$$\begin{array}{l} \vdash o\frown(a\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad c\frown(d\frown(A \prec (p\simeq q))) \end{array} \quad (211$$

$\times$

$$\begin{array}{l} \vdash d\frown(a\frown q) \\ \quad o\frown(a\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad c\frown(d\frown(A \prec (p\simeq q))) \end{array} \quad (\alpha$$

(IIa):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d\frown(a\frown q) \\ \quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ o\frown(\mathfrak{e}\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad c\frown(d\frown(A \prec (p\simeq q))) \end{array} \quad (\beta$$

$\smile$

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{e}}\smile\ d\frown(\mathfrak{e}\frown q) \\ \quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ o\frown(\mathfrak{e}\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad c\frown(d\frown(A \prec (p\simeq q))) \end{array} \quad (\gamma$$

(IIa): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d\frown(x\frown\mathfrak{F}\smallsmile q) \\ \quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ o\frown(\mathfrak{e}\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad c\frown(d\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad ^{\mathfrak{b}}\smile\ \mathfrak{b}\frown(x\frown\mathfrak{F}\smallsmile q) \\ \quad\quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ \mathfrak{b}\frown(\mathfrak{e}\frown q) \end{array} \quad (\delta$$

(23): ————————————

$$\begin{array}{l} \vdash x\frown(d\frown\smallsmile q) \\ \quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ o\frown(\mathfrak{e}\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad c\frown(d\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad ^{\mathfrak{b}}\smile\ \mathfrak{b}\frown(x\frown\mathfrak{F}\smallsmile q) \\ \quad\quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ \mathfrak{b}\frown(\mathfrak{e}\frown q) \end{array} \quad (\varepsilon$$

$\times$

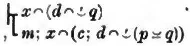
$$\begin{array}{l} \vdash c\frown(d\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ o\frown(\mathfrak{e}\frown(A \prec (p\simeq q))) \\ \quad c\frown(o\frown p) \\ \quad x\frown(d\frown\smallsmile q) \\ \quad ^{\mathfrak{b}}\smile\ \mathfrak{b}\frown(x\frown\mathfrak{F}\smallsmile q) \\ \quad\quad ^{\mathfrak{e}}\smile\ \mathfrak{b}\frown(\mathfrak{e}\frown q) \end{array} \quad (212$$

§ 146. *Zerlegung.*

Es ist nun in (212) das Unterglied

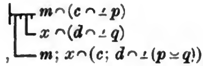
$,\!— x\frown(d\frown\dot{\angle}\,q)$'

wegzuschaffen. Wir benutzen dazu den Satz (η) des § 144, der aus



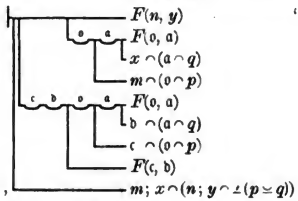
(α

folgt. Wir beweisen zunächst den Satz



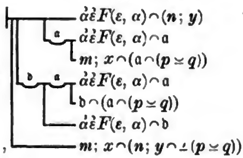
(β

den wir auch sonst brauchen werden. Hierzu bedürfen wir des Satzes

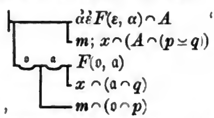


(γ

der ähnlich dem Satze (123) ist und mit ihm bewiesen werden kann. Wir schreiben (123) dazu in der Form

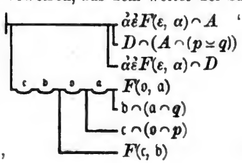


Es ist nun zunächst der Satz



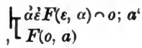
(δ

zu beweisen, aus dem weiter der Satz

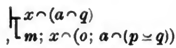


(ε

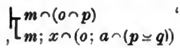
folgt, den wir auch brauchen. Aus den Sätzen



(ζ

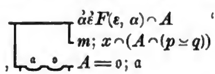


(η

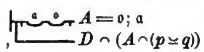


(ϑ

können wir leicht einen Satz gewinnen, der sich von (δ) nur dadurch unterscheidet, dass statt ‚A' ‚$o;\,\mathfrak{a}$' steht. Wir können dann das aus den beiden ersten Zeilen bestehende Oberglied ersetzen durch



Um das Unterglied ‚$\smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{o}}\, A = \mathfrak{o};\,\mathfrak{a}$' wegzuschaffen, benutzen wir den Satz



(ι

der aus (O) folgt.

§ 147. *Aufbau.*

O ⊢ $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}$[⌣𝔞 ⌣𝔬 ⌣𝔟 ⌣𝔠 𝔠 ⌒ (𝔬 ⌒ p)] $= p \asymp q$
  $\varepsilon =$ 𝔠; 𝔟
  𝔟 ⌒ (𝔞 ⌒ q)
  $\alpha =$ 𝔬; 𝔞

(14): ————————————

⊢ D ⌒ (A ⌒ ($p \asymp q$))
  ⌣𝔞 ⌣𝔬 ⌣𝔟 ⌣𝔠 𝔠 ⌒ (𝔬 ⌒ p)
  $D =$ 𝔠; 𝔟
  𝔟 ⌒ (𝔞 ⌒ q)
  $A =$ 𝔬; 𝔞 (213

——•——

II a ⊢ ⌣𝔬 $A =$ 𝔬; a
  ⌣𝔞 ⌣𝔬 $A =$ 𝔬; 𝔞

(II a): - - - - - - - -

⊢ $A =$ 𝔬; a
  ⌣𝔞 ⌣𝔬 $A =$ 𝔬; 𝔞 (α

(I a): - - - - - - - -

⊢ c ⌒ (o ⌒ p)
  $D = c$; d
  d ⌒ (a ⌒ q)
  $A = o$; a
  ⌣𝔞 ⌣𝔬 $A =$ 𝔬; 𝔞 (β

⊢ ⌣𝔞 ⌣𝔬 ⌣𝔟 ⌣𝔠 𝔠 ⌒ (𝔬 ⌒ p)
  $D =$ 𝔠; 𝔟
  𝔟 ⌒ (𝔞 ⌒ q)
  $A =$ 𝔬; 𝔞
  ⌣𝔞 ⌣𝔬 $A =$ 𝔬; 𝔞 (γ

(213): - - - - - - - - - -

⊢ D ⌒ (A ⌒ ($p \asymp q$))
  ⌣𝔞 ⌣𝔬 $A =$ 𝔬; 𝔞 (214

——•——

Ξ ⊢ $\grave{\varepsilon}$(o ⌒ (a ⌒ ε)) $= o$; a

(III h): ————————

⊢ q ⌒ $\grave{\varepsilon}$(o ⌒ (a ⌒ ε)) $= q$ ⌒ (o; a) (α

(82): ————————

⊢ o ⌒ (a ⌒ q) $= q$ ⌒ (o; a) (215

——•——

215 ⊢ o ⌒ (a ⌒ $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha)$) $= \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha)$ ⌒ (o; a)

(33): ————————

⊢ $F(o, a) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha)$ ⌒ (o; a) (216

(III c): ————————

⊢ $G(\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha)$ ⌒ (o; a))
  $G(F(o, a))$ (217

——•——

§ 148. *Zerlegung.*

Um die Sätze (η) und (ϑ) des § 146 zu beweisen, benutzen wir (213) und bedürfen dazu des Satzes

⊢ c ⌒ (e ⌒ p)
  m; $x = c$; d
  d ⌒ (i ⌒ q)
  o; $a = e$; i
  m ⌒ (o ⌒ p)
  , x ⌒ (a ⌒ q) (α

den wir mit dem Satze

⊢ $m = c$
  $x = d$
  , m; $x = c$; d

beweisen können. Dieser folgt aus (Ξ).

§ 149. *Aufbau.*

Ξ ⊢ $\grave{\varepsilon}$(m ⌒ (x ⌒ ε)) $= m$; x

(III c): ————————

⊢ $\grave{\varepsilon}$(m ⌒ (x ⌒ ε)) $= c$; d
  m; $x = c$; d (α

(III a): ————————

$$\vdash\!\!\top\; \grave{\varepsilon}(m \frown (x \frown \varepsilon)) = \grave{\varepsilon}(c \frown (d \frown \varepsilon)) \quad\text{— } m;\ x = c;\ d \quad\text{— } \grave{\varepsilon}(c \frown (d \frown \varepsilon)) = c;\ d$$ (β

(Ξ)::

$$\vdash\!\!\top\; \grave{\varepsilon}(m \frown (x \frown \varepsilon)) = \grave{\varepsilon}(c \frown (d \frown \varepsilon)) \quad\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (γ

(V b): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\!\!\top\; m \frown \left[x \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \alpha = d\end{array}\right)\right] = c \frown \left[d \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \alpha = d\end{array}\right)\right] \quad\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (δ

(33):

$$\vdash\!\!\top\; \left(\begin{array}{l}m = c\\ x = d\end{array}\right) = c \frown \left[d \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \alpha = d\end{array}\right)\right] \quad\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (ε

(33):

$$\vdash\!\!\top\; \left(\begin{array}{l}m = c\\ x = d\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}c = c\\ d = d\end{array}\right) \quad\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (ζ

(III a): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\; m = c \;\text{— } x = d \;\text{— } c = c \;\text{— } d = d \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (η

(I e):: - - - - - -

$$\vdash\; m = c \;\text{— } x = d \;\text{— } c = c \;\text{— } d = d \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (ϑ

(III e, III e):: ═══════

$$\vdash\; m = c \;\text{— } x = d \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (218

(I d): - - - - - -

$$\vdash\; x = d \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (219

——•——

218 $$\vdash\; m = c \;\text{— } x = d \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$

(I b): - - - - - -

$$\vdash\; m = c \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (220

(III h): - - - - -

$$\vdash\; f(m, x) = f(c, x) \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (α

(III c):

$$\vdash\; f(m, x) = f(c, d) \;\text{— } m;\ x = c;\ d \;\text{— } x = d$$ (β

(219):: - - - - - - - -

$$\vdash\; f(m, x) = f(c, d) \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (221

(III c): - - - - - - -

$$\vdash\; f(c, d) \;\text{— } f(m, x) \;\text{— } m;\ x = c;\ d$$ (222

——•——

222 $$\vdash\; c \frown (o \frown p) \;\text{— } m;\ x = c;\ d \;\text{— } d \frown (a \frown q) \;\text{— } m \frown (o \frown p) \;\text{— } x \frown (a \frown q)$$

(222):

$$\vdash\; c \frown (e \frown p) \;\text{— } m;\ x = c;\ d \;\text{— } d \frown (i \frown q) \;\text{— } o;\ a = e;\ i \;\text{— } m \frown (o \frown p) \;\text{— } x \frown (\underbrace{a \frown q)}$$ (α

$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$m;\ x = \mathfrak{c};\ \mathfrak{b}$
$\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$o;\ a = \mathfrak{o};\ \mathfrak{a}$
$m \frown (o \frown p)$
$x \frown (a \frown q)$ (β

(213): - - - - - - - - - - -

$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$
$m \frown (o \frown p)$
$x \frown (a \frown q)$ (γ

×

$m \frown (o \frown p)$
$x \frown (a \frown q)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$ (223

(I d): - - - - - - - - - - -

$x \frown (a \frown q)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$ (224

———•———

223 $m \frown (o \frown p)$
$x \frown (a \frown q)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$

(I b): - - - - - - - - - - -

$m \frown (o \frown p)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$ (225

(II a): - - - - - - - - -

$F(o, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$ (α

(II a): - - - - - - - - - - -

$F(o, a)$
$x \frown (a \frown q)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$ (β

(224):: - - - - - - - - - - -

$F(o, a)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$ (γ

(217): ————————————

$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown (o;\ a)$
$m;\ x \frown (o;\ a \frown (p \simeq q))$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$ (δ

(III b): - - - - - - - - - - -

$A = o;\ a$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$m;\ x \frown (A \frown (p \simeq q))$ (ε

‿

$A = \mathfrak{o};\ \mathfrak{a}$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$m;\ x \frown (A \frown (p \simeq q))$ (ζ

(214): - - - - - - - - - - -

$m;\ x \frown (A \frown (p \simeq q))$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$m;\ x \frown (A \frown (p \simeq q))$ (η

×

$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$m;\ x \frown (A \frown (p \simeq q))$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$ (226

‿

$\vdash$ $\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown \mathfrak{a}$
$m;\, x \frown (\mathfrak{a} \frown (p \simeq q))$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$x \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$m \frown (\mathfrak{o} \frown p)$ (227

———•———

IIa $\vdash$ $D = \mathfrak{c};\, d$
$D = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d}$

(IIa): - - - - - - -

$\vdash$ $D = c;\, d$
$D = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d}$ (α

(Ia): - - - - - - -

$\vdash$ $c \frown (o \frown p)$
$D = c;\, d$
$d \frown (a \frown q)$
$A = o;\, a$
$D = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d}$ (β

$\vdash$ $\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$D = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d}$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$A = \mathfrak{o};\, \mathfrak{a}$
$D = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d}$ (γ

(213): - - - - - - - - - - -

$\vdash$ $D \frown (A \frown (p \simeq q))$
$D = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d}$ (228

———•———

216 $\vdash F(n, y) = \grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown (n;\, y)$

(IIIa): ————————————

$\vdash$ $G(F(n, y))$
$G(\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown (n;\, y))$ (229

———•———

IIa $\vdash$ $F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$c \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(c, \mathfrak{d})$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$

(IIa): - - - - - - - - - -

$\vdash$ $F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$c \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(c, d)$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ (α

(226): - - - - - - - - -

$\vdash$ $\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$c;\, d \frown (A \frown (p \simeq q))$
$F(c, d)$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ (β

(217): ————————————

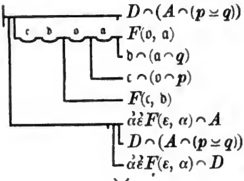
$\vdash$ $\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$c;\, d \frown (A \frown (p \simeq q))$
$\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown (c;\, d)$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ (γ

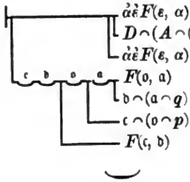
(IIIb): - - - - - - - - - - -

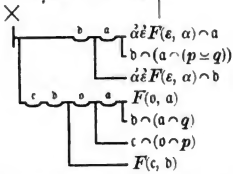
$\vdash$ $D = c;\, d$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$
$\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$D \frown (A \frown (p \simeq q))$
$\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown D$ (δ

$\vdash$ $D = \mathfrak{c};\, \mathfrak{d}$
$F(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$F(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$
$\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown A$
$D \frown (A \frown (p \simeq q))$
$\grave{\alpha}\acute{\varepsilon}F(\varepsilon, \alpha) \frown D$ (ε

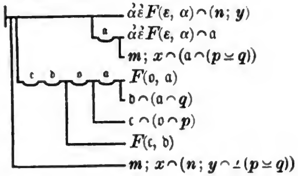
(228): - - - - - - - - - - -


(ζ

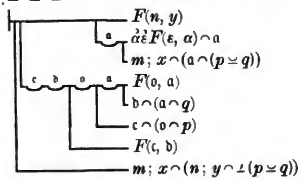

(η


(230

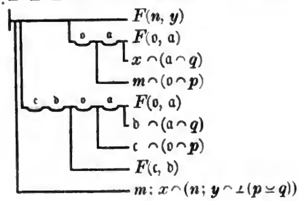
(123):


(α

(229):

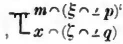

(β

(227)::


(231

§ 150. *Zerlegung.*

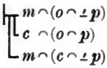
Um nun den Satz (β) des § 146 abzuleiten, ersetzen wir in (231) die Functionsmarke ‚$F(\xi, \zeta)$' durch



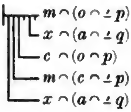
Die dazu erforderlichen Sätze beweisen wir leicht aus (133) und (131).

§ 151. *Aufbau.*

133

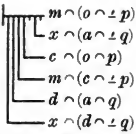


(I e): - - - - -



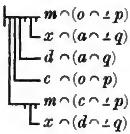
(α

(133):: - - - - - -

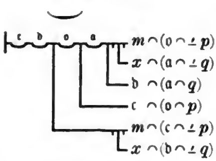


(β

(I b, I d):: = = = = =

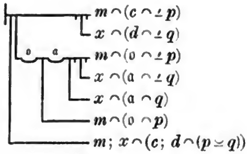


(γ



(δ

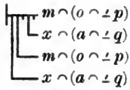
(231): ————————



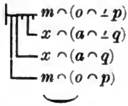
(ε

———•———

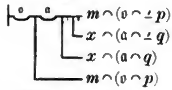
I e



(131, 131):: = = = =

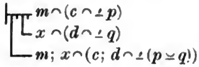


(ζ



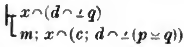
(η

(ε): ————————



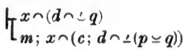
(232

(I d): - - - - - - - - -



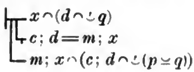
(233

(136): - - - - - - - - -



(α

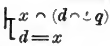
(200):: - - - - - - - -



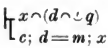
(β

———•———

139



(219):: - - - - -



(γ

(β): ·—·—·—·—·—·

⊢ x⌢(d⌢⌣q)
  m: x⌢(c; d⌢⌣(p≃q)) (234

(210): ————————

⊢ x⌢(d⌢⌣q)
  c⌢(d⌢(m; x⋖(p≃q))) (235

×

⊢ c⌢(d⌢(m; x⋖(p≃q)))
  x⌢(d⌢⌣q) (236

(212): -·-·-·-·-·-·-·-·-·-

⊢ c⌢(d⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔢 o⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  c⌢(o⌢p)
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q) (α

⊢ 𝔢 c⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔢 o⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  c⌢(o⌢p)
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q) (β

×

⊢ 𝔢 o⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  c⌢(o⌢p)
  𝔢 c⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q) (γ

⊢ 𝔡 𝔞 𝔢 𝔞⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔡⌢(𝔞⌢p)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q) (δ

(144): - - - - - - - - - - -

⊢ 𝔢 n⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔢 m⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q)
  m⌢(n⌢⌣p) (237

———•———

140 ⊢ m; x⌢(m; x⌢⌣t)

(210): ————————

⊢ m⌢(x⌢(m; x⋖t)) (238

———•———

IIa ⊢ m⌢(x⌢(m; x⋖t))
  𝔢 m⌢(𝔢⌢(m; x⋖t))

×

⊢ 𝔢 m⌢(𝔢⌢(m; x⋖t))
  m⌢(x⌢(m; x⋖t)) (α

(238):: ————————

⊢ 𝔢 m⌢(𝔢⌢(m; x⋖t)) (239

———•———

239 ⊢ 𝔢 m⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))

(237): ————————

⊢ 𝔢 n⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q)
  m⌢(n⌢⌣p) (α

(22): ————————

⊢ 𝔢 n⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q)
  n⌢(m⌢⋠⌣p) (β

×

⊢ n⌢(m⌢⋠⌣p)
  𝔢 n⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔡 𝔡⌢(x⌢⋠⌣q)
  𝔢 𝔡⌢(𝔢⌢q) (240

———•———

236 ⊢ n⌢(y⌢(m; x⋖(p≃q)))
  x⌢(y⌢⌣q)

(22): ————————

⊢ n⌢(y⌢(m; x⋖(p≃q)))
  y⌢(x⌢⋠⌣q) (α

(IIa):: - - - - - - - - - -

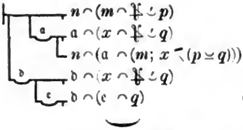
⊢ n⌢(y⌢(m; x⋖(p≃q)))
  n⌢(y⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔞 𝔞⌢(x⌢⋠⌣q)
  n⌢(𝔞⌢(m; x⋖(p≃q))) (β

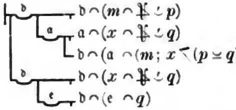
(Ig): - - - - - - - - - - -

⊢ n⌢(y⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔞 𝔞⌢(x⌢⋠⌣q)
  n⌢(𝔞⌢(m; x⋖(p≃q))) (γ

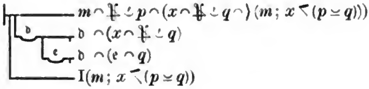
⊢ 𝔢 n⌢(𝔢⌢(m; x⋖(p≃q)))
  𝔞 𝔞⌢(x⌢⋠⌣q)
  n⌢(𝔞⌢(m; x⋖(p≃q))) (δ

(240): - - - - - - - - - - -


(ε

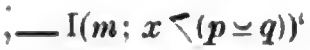

(ζ

(11):- - - - - - - - - - - - -

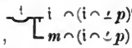

(241

§ 152. *Zerlegung.*

Wir haben in (241) das Unterglied

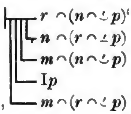


durch andere zu ersetzen, um unsern Satz (δ) des § 144 zu erhalten. Der Gedankengang ist dabei folgender. Wenn die Paare (*b*; *d*) und (*b*; *a*) der mit (*m*; *x*) anfangenden ($p \simeq q$)-Reihe angehören, so muss (*b*; *d*) der mit (*b*; *a*) anfangenden ($p \simeq q$)-Reihe angehören oder auf (*b*; *d*) in dieser Reihe folgen, sofern die ($p \simeq q$)-Beziehung eindeutig ist. Sowohl wenn (*b*: *a*) auf (*b*; *d*), als auch wenn (*b*; *d*) auf (*b*; *a*) in dieser Reihe folgte, müsste *b* auf sich selbst in der *p*-Reihe folgen, was gegen unser Unterglied



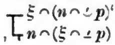
verstossen würde. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass (*b*; *d*) mit (*b*; *a*) zusammenfällt. Dann fällt auch *d* mit *a* zusammen.

Wir bedürfen demnach des Satzes

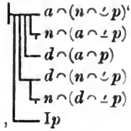

(α

in Worten: „Wenn ein erster und ein zweiter Gegenstand der mit einem dritten anfangenden *p*-Reihe angehören, so geht der erste dem zweiten vorher oder gehört der mit dem zweiten anfangenden Reihe an, falls die reihende Beziehung eindeutig ist."

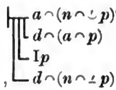
Wir beweisen diesen Satz mit (144), indem wir die Functionsmarke ‚$F(\xi)$' durch



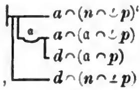
ersetzen. Wir haben dann den Satz


(β

zu beweisen. Dazu brauchen wir den Satz


(γ

den wir aus den Sätzen


(δ

und

$\vdash^{\mathfrak{a}}$ $a \frown (\mathfrak{a} \frown \smile p)$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$d \frown (a \frown p)$
, $\mathrm{I}p$ (ε

ableiten.

§ 153. *Aufbau.*

137 $\vdash$ $a \frown (m \frown \smile p)$
$e \frown (m \frown p)$
$a \frown (e \frown \smile p)$

$\vdash^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}$ $a \frown (\mathfrak{a} \frown \smile p)$
$\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$a \frown (\mathfrak{b} \frown \smile p)$ (α

(123): ————————

$\vdash$ $a \frown (n \frown \smile p)$
$^{\mathfrak{a}}$ $a \frown (\mathfrak{a} \frown \smile p)$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$d \frown (n \frown \perp p)$ (β

——•——

13 $\vdash$ $b = a$
$d \frown (a \frown p)$
$d \frown (b \frown p)$
$\mathrm{I}p$

(139): - - - - -

$\vdash$ $a \frown (b \frown \smile p)$
$d \frown (b \frown p)$
$d \frown (a \frown p)$
$\mathrm{I}p$ (γ

$\vdash^{\mathfrak{a}}$ $a \frown (\mathfrak{a} \frown \smile p)$
$d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$d \frown (a \frown p)$
$\mathrm{I}p$ (δ

(β): - - - - - -

$\vdash$ $a \frown (n \frown \smile p)$
$d \frown (a \frown p)$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (n \frown \perp p)$ (242

——•——

131 $\vdash$ $n \frown (a \frown \perp p)$
$n \frown (a \frown p)$

(IIIc): ————————

$\vdash$ $n \frown (a \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$n = d$ (α

(130):: - - - - -

$\vdash$ $n \frown (a \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$d \frown (n \frown \perp p)$
$d \frown (n \frown \smile p)$ (β

(Ia): - - - - - -

$\vdash$ $a \frown (n \frown \smile p)$
$n \frown (a \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$d \frown (n \frown \perp p)$
$d \frown (n \frown \smile p)$ (γ

(242): -·-·-·-·-·-·-

$\vdash$ $a \frown (n \frown \smile p)$
$n \frown (a \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$d \frown (n \frown \smile p)$
$\mathrm{I}p$ (δ

(I):: - - - - - -

$\vdash$ $a \frown (n \frown \smile p)$
$n \frown (a \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$n \frown (d \frown \perp p)$
$d \frown (n \frown \smile p)$
$n \frown (d \frown \perp p)$
$\mathrm{I}p$ (ε

——•——

133 $\vdash$ $n \frown (a \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$n \frown (d \frown \perp p)$

×

$\vdash$ $n \frown (d \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$n \frown (a \frown \perp p)$ (ζ

(ε): - - - - -

$\vdash a \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$n \frown (a \frown \perp p)$
$d \frown (a \frown p)$
$d \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$n \frown (d \frown \perp p)$
$\mathrm{I}p$ (η

$\vdash^{\mathfrak{d}}\ ^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$n \frown (\mathfrak{a} \frown \perp p)$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$\mathfrak{d} \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$n \frown (\mathfrak{d} \frown \perp p)$
$\mathrm{I}p$ (ϑ

(144): - - - - - - - - -

$\vdash r \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$n \frown (r \frown \perp p)$
$m \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$n \frown (m \frown \perp p)$
$\mathrm{I}p$
$m \frown (r \frown \stackrel{\smile}{-} p)$ (ι

(I):: - - - - - - -

$\vdash r \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$n \frown (r \frown \perp p)$
$m \frown (n \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$\mathrm{I}p$
$m \frown (r \frown \stackrel{\smile}{-} p)$ (243

———•———

232 $\vdash m \frown (b \frown \perp p)$
$x \frown (d \frown \perp q)$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \perp (p \simeq q))$

(I b): - - - - - - - - - - -

$\vdash m \frown (b \frown \perp p)$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \perp (p \simeq q))$ (244

×

$\vdash m;\, x \frown (b;\, d \frown \perp (p \simeq q))$
$m \frown (b \frown \perp p)$ (245

———•———

136 $\vdash m \frown (b \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$m \frown (b \frown \perp p)$

(244):: - - - - - -

$\vdash m \frown (b \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \perp (p \simeq q))$ (α

(200:: - - - - - - - - - -

$\vdash m \frown (b \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$b;\, d = m;\, x$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$ (β

———•———

139 $\vdash m \frown (b \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$b = m$

(220):: - - - - - -

$\vdash m \frown (b \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$b;\, d = m;\, x$ (γ

(β): -·-·-·-·-·-

$\vdash m \frown (b \frown \stackrel{\smile}{-} p)$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$ (246

———•———

II $\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(A \frown (\varepsilon;\, \alpha \frown \stackrel{\smile}{-} t)) = A \prec t$

(6): ————————————

$\vdash F(A \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} t))$
$F(b \frown (d \frown (A \prec t)))$ (247

———•———

243 $\vdash b;\, a \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$
$b;\, d \frown (b;\, a \frown \perp (p \simeq q))$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$
$\mathrm{I}(p \simeq q)$
$m;\, x \frown (b;\, a \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$

(130): - - - - - - - - - - - -

$\vdash b;\, d = b;\, a$
$b;\, a \frown (b;\, d \frown \perp (p \simeq q))$
$b;\, d \frown (b;\, a \frown \perp (p \simeq q))$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$
$\mathrm{I}(p \simeq q)$
$m;\, x \frown (b;\, a \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$ (α

(245, 245)::= = = = = = = = =

$\vdash b;\, d = b;\, a$
$b \frown (b \frown \perp p)$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$
$\mathrm{I}(p \simeq q)$
$m;\, x \frown (b;\, a \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$ (β

(219): - - - - - - - - -

$\vdash d = a$
$b \frown (b \frown \perp p)$
$m;\, x \frown (b;\, d \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$
$\mathrm{I}(p \simeq q)$
$m;\, x \frown (b;\, a \frown \stackrel{\smile}{-} (p \simeq q))$ (γ

(II a):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} d = a \\ m \frown (b \frown \dot\smile p) \\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ m \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ m;\, x \frown (b;\, d \frown \dot\smile (p \simeq q)) \\ \mathrm{I}(p \simeq q) \\ m;\, x \frown (b;\, a \frown \dot\smile (p \simeq q)) \end{array} \qquad (\delta$$

(246)::- - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} d = a \\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ m \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ m;\, x \frown (b;\, d \frown \dot\smile (p \simeq q)) \\ \mathrm{I}(p \simeq q) \\ m;\, x \frown (b;\, a \frown \dot\smile (p \simeq q)) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(247, 247)::= = = = = = = = =

$$\begin{array}{l} d = a \\ b \frown (a \frown (m;\, x \,\bar{\frown}\, (p \simeq q))) \\ b \frown (d \frown (m;\, x \,\bar{\frown}\, (p \simeq q))) \\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ m \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ \mathrm{I}(p \simeq q) \end{array} \qquad (\zeta$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown (m;\, x \,\bar{\frown}\, (p \simeq q))) \\ \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown (m;\, x \,\bar{\frown}\, (p \simeq q))) \\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ m \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ \mathrm{I}(p \simeq q) \end{array} \qquad (\eta$$

(16):- - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}(m;\, x \,\bar{\frown}\, (p \simeq q)) \\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ m \frown (\mathfrak{i} \frown \dot\smile p) \\ \mathrm{I}(p \simeq q) \end{array} \qquad (248$$

§ 154. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun noch den Satz

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}(p \simeq q)\text{‘} \\ \mathrm{I}p \\ ,\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\alpha$$

Dazu bedürfen wir des Satzes

$$\begin{array}{l} o;\, a = e;\, i\text{‘} \\ o = e \\ ,\ a = i \end{array} \qquad (\beta$$

der aus (Ξ) abzuleiten ist. Mit (13) gewinnen wir hieraus den Satz

$$\begin{array}{l} o;\, a = e;\, i\text{‘} \\ c \frown (e \frown p) \\ c \frown (o \frown p) \\ \mathrm{I}p \\ d \frown (i \frown q) \\ d \frown (a \frown q) \\ ,\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\gamma$$

Für ‚$o;\, a$‘ führen wir ‚D‘ und für ‚$e;\, i$‘ ‚A‘ ein und wenden dann nach Einführung deutscher Buchstaben (213) an.

§ 155. *Aufbau.*

$\Xi \quad \vdash \grave{\varepsilon}(o \frown (a \frown \varepsilon)) = o;\, a$

(IIIc): ————————————

$$\begin{array}{l} F(o;\, a) \\ F(\grave{\varepsilon}(o \frown (a \frown \varepsilon))) \end{array} \qquad (249$$

———•———

$$221 \quad \begin{array}{l} f(m, x) = f(c, d) \\ m;\, x = c;\, d \end{array}$$

(IIIa):- - - - - - - -

$$\begin{array}{l} f(m, x) \\ f(c, d) \\ m;\, x = c;\, d \end{array} \qquad (250$$

———•———

$$\mathrm{III\,h} \quad \begin{array}{l} o \frown (i \frown t) = e \frown (i \frown t) \\ o = e \end{array}$$

(IIIa): ————————————

$$\begin{array}{l} o \frown (a \frown t) = e \frown (i \frown t) \\ o = e \\ a = i \end{array} \qquad (\alpha$$

$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; o \frown (a \frown \mathfrak{a}) = e \frown (i \frown \mathfrak{a})$
$o = e$
$a = i$ (β

(Va): - - - - - - - - - - -

$\vdash\; \grave{\varepsilon}(o \frown (a \frown \varepsilon)) = \grave{\varepsilon}(e \frown (i \frown \varepsilon))$
$o = e$
$a = i$ (γ

(249): ———————

$\vdash\; o;\, a = \grave{\varepsilon}(e \frown (i \frown \varepsilon))$
$o = e$
$a = i$ (δ

(249): ———————

$\vdash\; o;\, a = e;\, i$
$o = e$
$a = i$ (251

(13, 13): = = = =

$\vdash\; o;\, a = e;\, i$
$c \frown (e \frown p)$
$c \frown (o \frown p)$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (i \frown q)$
$d \frown (a \frown q)$
$\mathrm{I}q$ (α

(IIIa): ———————

$\vdash\; D = e;\, i$
$c \frown (e \frown p)$
$c \frown (o \frown p)$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (i \frown q)$
$d \frown (a \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$D = o;\, a$ (β

×

$\vdash\; c \frown (o \frown p)$
$c \frown (e \frown p)$
$\neg\; D = e;\, i$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (i \frown q)$
$d \frown (a \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$D = o;\, a$ (γ

(250): ———————

$\vdash\; m \frown (o \frown p)$
$c \frown (e \frown p)$
$\neg\; D = e;\, i$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (i \frown q)$
$x \frown (a \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$D = o;\, a$
$m;\, x = c;\, d$ (δ

(IIIa): ———————

$\vdash\; m \frown (o \frown p)$
$E = m;\, x$
$x \frown (a \frown q)$
$D = o;\, a$
$c \frown (e \frown p)$
$\neg\; D = e;\, i$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (i \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$E = c;\, d$ (ε

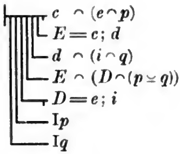
$\smile$

$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{o}}{\smile}\overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{c}}{\smile}\; \mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown p)$
$E = \mathfrak{c};\, \mathfrak{b}$
$\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$D = \mathfrak{o};\, \mathfrak{a}$
$c \frown (e \frown p)$
$\neg\; D = e;\, i$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (i \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$E = c;\, d$ (ζ

(213): - - - - - - - - - - -

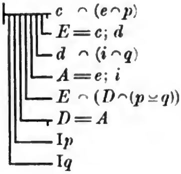
$\vdash\; E \frown (D \frown (p \preceq q))$
$c \frown (e \frown p)$
$\neg\; D = e;\, i$
$\mathrm{I}p$
$d \frown (i \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$E = c;\, d$ (η

×

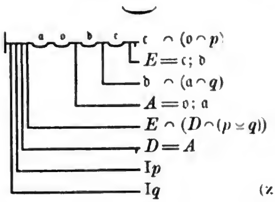


(ϑ

(III a): ————

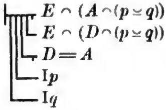


(ι

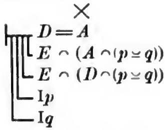


(κ

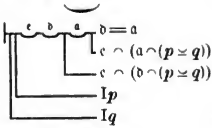
(213): - - - - - - - - - -



(λ

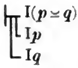


(μ



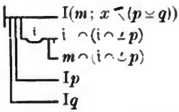
(ν

(16): - - - - - - - - - - -



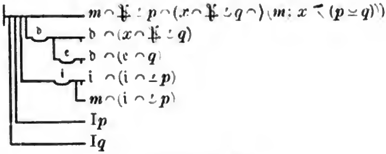
(252

(248): - - - -



(253

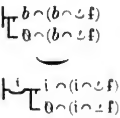
(241): - - - - - - - - - - -



(254

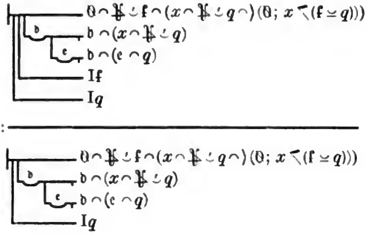
———•———

145



(255

(254): ————



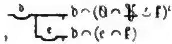
(α

(71)::

(256

§ 156. *Zerlegung.*

In (256) haben wir den Satz (β) des § 144. Es ist nun noch (γ) zu beweisen. Wir gebrauchen dazu (254), indem wir für ‚p' ‚q', für ‚x' ‚θ', für ‚m' ‚x' und für ‚q' ‚$\mathfrak{f}$' schreiben. Das dann auftretende Unterglied



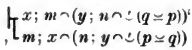
können wir mit (156) wegschaffen. Es bleibt noch der Satz

$$,\vdash x;\, m \nwarrow (q \simeq p) = \not\succ(m;\, x \nwarrow (p \simeq q))' \qquad (\alpha$$

abzuleiten, wo allgemeiner statt ‚θ' ‚x' und statt ‚$\mathfrak{f}$' ‚p' geschrieben ist. Dieser Satz ist auf

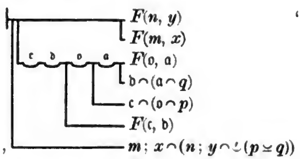
$$,\vdash x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) = m;\, x \frown (n;\, y \frown \dot{\smile}(p \simeq q))' \qquad (\beta$$

zurückzuführen. Wir leiten (β) aus



(γ

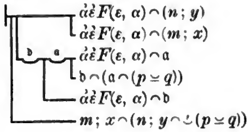
ab, den wir mit dem Satze



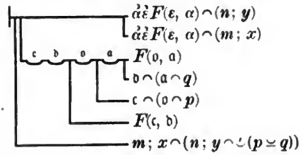
(δ

beweisen. (δ) folgt aus (230) und (144).

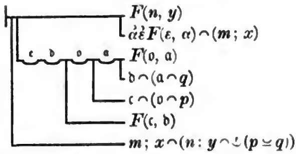
§ 157. ***Aufbau.***

144 

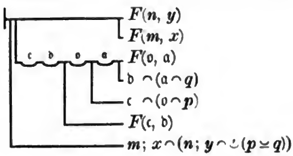
(230)::

 (α

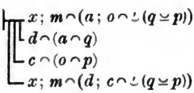
(229):

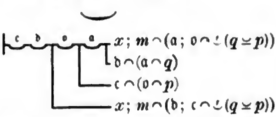
 (β

(229):

 (257

———•———

209 

 (α

(257):

$$\vdash\ x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p))$$
$$\quad x;\,m\frown(x;\,m\frown\dot{\smile}(q\asymp p))$$
$$\quad m;\,x\frown(n;\,y\frown\dot{\smile}(p\asymp q))\qquad(\beta$$

(140)::

$$\vdash\ x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p))$$
$$\quad m;\,x\frown(n;\,y\frown\dot{\smile}(p\asymp q))\qquad(258$$

(IVa):

$$\vdash\ (-\!\!-x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=(-\!\!-m;\,x\frown(n;\,y\frown\dot{\smile}(p\asymp q)))$$
$$\quad m;\,x\frown(n;\,y\frown\dot{\smile}(p\asymp q))$$
$$\quad x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p))\qquad(\alpha$$

(258)::

$$\vdash(-\!\!-x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=(-\!\!-m;\,x\frown(n;\,y\frown\dot{\smile}(p\asymp q)))\qquad(\beta$$

(203):

$$\vdash x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p))=(-\!\!-m;\,x\frown(n;\,y\frown\dot{\smile}(p\asymp q)))\qquad(\gamma$$

(203):

$$\vdash x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p))=m;\,x\frown(n;\,y\frown\dot{\smile}(p\asymp q))\qquad(\delta$$

(210):

$$\vdash x;\,m\frown(y;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p))=n\frown(y\frown(m;\,x\nwarrow(p\asymp q)))\qquad(\varepsilon$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\ x;\,m\frown(\mathfrak{a};\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p))=n\frown(\mathfrak{a}\frown(m;\,x\nwarrow(p\asymp q)))\qquad(\zeta$$

(Va):

$$\vdash \grave{\varepsilon}(x;\,m\frown(\varepsilon;\,n\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=\grave{\varepsilon}[n\frown(\varepsilon\frown(m;\,x\nwarrow(p\asymp q)))]\qquad(\eta$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\ \grave{\varepsilon}(x;\,m\frown(\varepsilon;\,\mathfrak{a}\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=\grave{\varepsilon}[\mathfrak{a}\frown(\varepsilon\frown(m;\,x\nwarrow(p\asymp q)))]\qquad(\vartheta$$

(Va):

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(x;\,m\frown(\varepsilon;\,\alpha\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}[\alpha\frown(\varepsilon\frown(m;\,x\nwarrow(p\asymp q)))]\qquad(\iota$$

(III c):

$$\vdash\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(x;\,m\frown(\varepsilon;\,\alpha\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=\maltese(m;\,x\nwarrow(p\asymp q))$$
$$\quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}[\alpha\frown(\varepsilon\frown(m;\,x\nwarrow(p\asymp q)))]=\maltese(m;\,x\nwarrow(p\asymp q))\qquad(\varkappa$$

(E)::

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(x;\,m\frown(\varepsilon;\,\alpha\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=\maltese(m;\,x\nwarrow(p\asymp q))\qquad(\lambda$$

(III c):

$$\vdash\ x;\,m\nwarrow(q\asymp p)=\maltese(m;\,x\nwarrow(p\asymp q))$$
$$\quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(x;\,m\frown(\varepsilon;\,\alpha\frown\dot{\smile}(q\asymp p)))=x;\,m\nwarrow(q\asymp p)\qquad(\mu$$

(II)::

$$\vdash x;\,m\nwarrow(q\asymp p)=\maltese(m;\,x\nwarrow(p\asymp q))\qquad(259$$

(III c):

$$\vdash\ F(\maltese(m;\,x\nwarrow(p\asymp q)))$$
$$\quad F(x;\,m\nwarrow(q\asymp p))\qquad(260$$

I ⊢ $f(i)$
$g(i)$
$f(i)$

(II a)::- - -

⊢ $f(i)$
$g(i)$
$\mathfrak{i}$ $f(\mathfrak{i})$ (α

⊢ $\mathfrak{i}$ $f(\mathfrak{i})$
$g(\mathfrak{i})$
$\mathfrak{i}$ $f(\mathfrak{i})$ (261

156 ⊢ $\mathfrak{d} \frown (b \frown \smile \mathfrak{f})$
$\mathfrak{e}$ $b \frown (\mathfrak{e} \frown \mathfrak{f})$

(22): ———

⊢ $b \frown (\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f})$
$\mathfrak{e}$ $b \frown (\mathfrak{e} \frown \mathfrak{f})$ (α

⊢ $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f})$
$\mathfrak{e}$ $\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{e} \frown \mathfrak{f})$ (β

(254): ———

⊢ $x \frown ∦ \smile q \frown (\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f} \frown)(x ; \mathfrak{d} \,\bar{\frown}\, (q \simeq \mathfrak{f})))$
$\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$x \frown (\mathfrak{i} \frown \smile q)$
$\mathrm{I}q$
$\mathrm{I}\mathfrak{f}$ (γ

(261, 71):: - - - - - - - - - - - - - - -

⊢ $x \frown ∦ \smile q \frown (\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f} \frown)(x ; \mathfrak{d} \,\bar{\frown}\, (q \simeq \mathfrak{f})))$
$\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathrm{I}q$ (δ

(260): ———

⊢ $x \frown ∦ \smile q \frown (\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f} \frown) ∦ (\mathfrak{d} ; x \,\bar{\frown}\, (\mathfrak{f} \simeq q)))$
$\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathrm{I}q$ (ε

(32): - - - - - - - - - - - - - - -

⊢ $\mathfrak{N}(\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f}) = \mathfrak{N}(x \frown ∦ \smile q)$
$\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f} \frown (x \frown ∦ \smile q \frown)(\mathfrak{d} ; x \,\bar{\frown}\, (\mathfrak{f} \simeq q)))$
$\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathrm{I}q$ (ζ

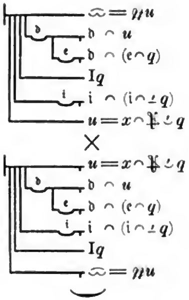
(256):: - - - - - - - - - - - - - - -

⊢ $\mathfrak{N}(\mathfrak{d} \frown ∦ \smile \mathfrak{f}) = \mathfrak{N}(x \frown ∦ \smile q)$
$\mathfrak{d}$ $\mathfrak{d} \frown (x \frown ∦ \smile q)$
$\mathfrak{e}$ $\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{e} \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$ (η

(205): ———

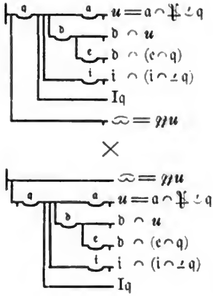
⊢ $\infty = \mathfrak{N}(x \frown ∦ \smile q)$
$\mathfrak{d}$ $\mathfrak{d} \frown (x \frown ∦ \smile q)$
$\mathfrak{e}$ $\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{e} \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$ (262

(III a): ———



(α

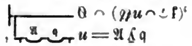
(β



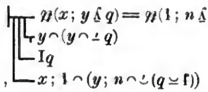
(γ

(263

K. Beweis des Satzes

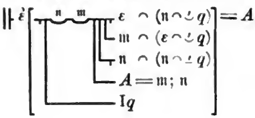


a) Beweis des Satzes



§ 158. *Zerlegung.*

Wir können für endliche Anzahlen einen dem letzten ähnlichen Satz beweisen, dass nämlich die Anzahl eines Begriffes endlich ist, wenn sich die unter ihn fallenden Gegenstände in eine *einfache* (unverzweigte, nicht in sich zurücklaufende) Reihe ordnen lassen, die mit einem gewissen Gegenstande anfängt und mit einem gewissen Gegenstande endet. Wir bedürfen dazu einer Abkürzung, die wir im Folgenden einführen:



(P

Wenn Γ, Δ, Θ Gegenstände sind und Υ der Umfang einer Beziehung ist, so drückt

$$\Gamma \frown (\Delta;\, \Theta \mathbin{\S} \Upsilon)$$

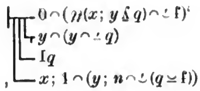
aus, dass Γ der mit Δ anfangenden und der mit Θ endenden Υ-Reihe angehöre, wobei die Υ-Beziehung eindeutig sei und Θ in der Υ-Reihe nicht auf sich selbst folge. Wir sprechen dies in Worten kurz so aus: *„Γ gehört der von Δ bis Θ laufenden Υ-Reihe an"*. Mit der so erklärten Bezeichnung stellt sich unser Satz in der Form dar, wie ihn die Hauptüberschrift zeigt. Es ist nämlich

$$\Delta;\, \Theta \mathbin{\S} \Upsilon$$

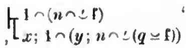
der Umfang des Begriffes *der von*

Δ bis Θ laufenden Υ-Reihe angehörig.

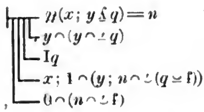
Wir beweisen zunächst den Satz


(α

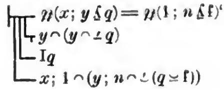
aus dem dann die Unterglieder wegzuschaffen sein werden. Wir leiten (α) aus (234) in der Form

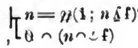


und dem Satze

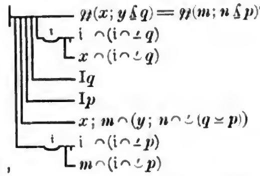

(β

ab, den wir mit den Sätzen

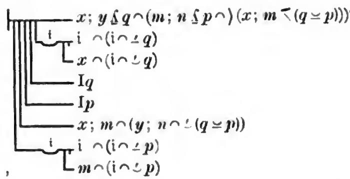

(γ


(δ

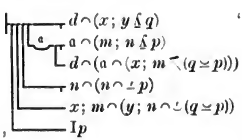
beweisen. (γ) ist auf den allgemeinern Satz


(ε

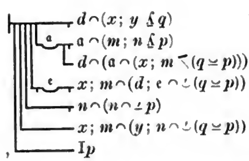
zurückzuführen, zu dessen Beweise wir des Satzes


(ζ

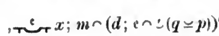
bedürfen. Dieser löst sich nach (11) in die Sätze (253) und


(η

auf. Wir leiten (η) aus


(ϑ

ab, indem wir das Unterglied



wegschaffen. Wir beweisen (ϑ) mit dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (m;\, n \mathbin{\S} p) \\ \quad x;\, m \frown (d;\, c \frown \smile(q \simeq p)) \\ \quad n \frown (n \frown \perp p) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\S} q) \\ \quad x;\, m \frown (y;\, n \frown \smile(q \simeq p)) \\ ,\quad \mathrm{I}p \end{array} \qquad (\iota$$

der auf die Sätze (234) in der Form

$$\begin{array}{l} \vdash m \frown (c \frown \smile p) \\ ,\quad x;\, m \frown (d;\, c \frown \smile(q \simeq p)) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (n \frown \smile p) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\S} q) \\ \quad x;\, m \frown (y;\, n \frown \smile(q \simeq p)) \\ \quad \mathrm{I}p \\ ,\quad x;\, m \frown (d;\, c \frown \smile(q \simeq p)) \end{array} \qquad (\varkappa$$

zurückgeht. Nach (243) haben wir

$$\begin{array}{l} \vdash d;\, c \frown (y;\, n \frown \smile(q \simeq p)) \\ \quad y;\, n \frown (d;\, c \frown \perp(q \simeq p)) \\ \quad x;\, m \frown (y;\, n \frown \smile(q \simeq p)) \\ \quad \mathrm{I}(q \simeq p) \\ ,\quad x;\, m \frown (d;\, c \frown \smile(q \simeq p)) \end{array}$$

Mit (244) beweisen wir

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown (y \frown \perp q) \\ \quad y;\, n \frown (d;\, c \frown \perp(q \simeq p)) \\ ,\quad d \frown (y \frown \smile q) \end{array} \qquad (\lambda$$

womit wir das Unterglied

$$, \top y;\, n \frown (d;\, c \frown \perp(q \simeq p))$$

wegschaffen können.

Zunächst ziehen wir die unmittelbaren Folgerungen aus unserer Definition (P).

§ 159. *Aufbau.*

$$P \quad \vdash \grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}}{\smile\smile}\ \varepsilon \frown (\mathfrak{n} \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (\varepsilon \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp q) \\ \quad A = \mathfrak{m};\, \mathfrak{n} \\ \quad \mathrm{I}q \end{array}\right] = A \mathbin{\S} q$$

(46): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}}{\smile\smile}\ d \frown (\mathfrak{n} \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (d \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp q) \\ \quad A = \mathfrak{m};\, \mathfrak{n} \\ \quad \mathrm{I}q \\ \quad d \frown (A \mathbin{\S} q) \end{array} \qquad (264$$

(Id): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I}q \\ \quad d \frown (A \mathbin{\S} q) \end{array} \qquad (265$$

———•———

$$264 \quad \begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}}{\smile\smile}\ d \frown (\mathfrak{n} \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (d \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp q) \\ \quad A = \mathfrak{m};\, \mathfrak{n} \\ \quad \mathrm{I}q \\ \quad d \frown (A \mathbin{\S} q) \end{array}$$

(Ic): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\!\smile^{\mathfrak{n}\;\mathfrak{m}}\; d \frown (\mathfrak{n} \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (d \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp q) \\ \quad A = \mathfrak{m} ; \mathfrak{n} \\ d \frown (A \,\S\, q) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (A \,\S\, q) \\ \quad \smile^{\mathfrak{n}\;\mathfrak{m}}\; d \frown (\mathfrak{n} \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (d \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp q) \\ \quad A = \mathfrak{m} ; \mathfrak{n} \end{array} \qquad (266$$

222
$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (n \frown \smile q) \\ \quad m \frown (d \frown \smile q) \\ \quad n \frown (n \frown \perp q) \\ \quad x ; y = m ; n \\ \quad d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad y \frown (y \frown \perp q) \end{array}$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\smile^{\mathfrak{n}\;\mathfrak{m}}\; d \frown (\mathfrak{n} \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (d \frown \smile q) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp q) \\ \quad x ; y = \mathfrak{m} ; \mathfrak{n} \\ \quad d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad y \frown (y \frown \perp q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(266): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (x ; y \,\S\, q) \\ \quad d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad y \frown (y \frown \perp q) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad y \frown (y \frown \perp q) \\ \quad d \frown (x ; y \,\S\, q) \end{array} \qquad (267$$

(I c): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad d \frown (x ; y \,\S\, q) \end{array} \qquad (268$$

(I b): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad d \frown (x ; y \,\S\, q) \end{array} \qquad (269$$

268
$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad d \frown (x ; y \,\S\, q) \end{array}$$

(I d): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad d \frown (x ; y \,\S\, q) \end{array} \qquad (270$$

267
$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (y \frown \smile q) \\ \quad x \frown (d \frown \smile q) \\ \quad y \frown (y \frown \perp q) \\ \quad d \frown (x ; y \,\S\, q) \end{array}$$

(I d): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown (y \frown \perp q) \\ \quad d \frown (x ; y \,\S\, q) \end{array} \qquad (271$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (x ; y \,\S\, q) \\ \quad y \frown (y \frown \perp q) \end{array} \qquad (272$$

$$P \quad \vdash \grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{n}\;\mathfrak{m}}\; \varepsilon \frown (\mathfrak{n} \frown \smile p) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (\varepsilon \frown \smile p) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp p) \\ \quad m ; n = \mathfrak{m} ; \mathfrak{n} \\ \mathrm{I}p \end{array}\right] = m ; n \,\S\, p$$

(44): ————————————

$c \frown (m;\, n \lesssim p)$
$\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}$: $c \frown (\mathfrak{n} \frown \dot{\smile} p)$
$\mathfrak{m} \frown (c \frown \dot{\smile} p)$
$\mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp p)$
$m;\, n = \mathfrak{m};\, \mathfrak{n}$
$\mathrm{I}p$ (α

(I f):: - - - - - - - - - - -

$c \frown (m;\, n \lesssim p)$
$\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}$: $c \frown (\mathfrak{n} \frown \dot{\smile} p)$
$\mathfrak{m} \frown (c \frown \dot{\smile} p)$
$\mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp p)$
$m;\, n = \mathfrak{m};\, \mathfrak{n}$
$\mathrm{I}p$ (β

×

$\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}$: $c \frown (\mathfrak{n} \frown \dot{\smile} p)$
$\mathfrak{m} \frown (c \frown \dot{\smile} p)$
$\mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \perp p)$
$m;\, n = \mathfrak{m};\, \mathfrak{n}$
$c \frown (m;\, n \lesssim p)$
$\mathrm{I}p$ (γ

(II a): - - - - - - - - - - -

$\mathfrak{m}$: $c \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\mathfrak{m} \frown (c \frown \dot{\smile} p)$
$n \frown (n \frown \perp p)$
$m;\, n = \mathfrak{m};\, n$
$c \frown (m;\, n \lesssim p)$
$\mathrm{I}p$ (δ

(II a): - - - - - - - - - -

$c \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$m \frown (c \frown \dot{\smile} p)$
$n \frown (n \frown \perp p)$
$m;\, n = m;\, n$
$c \frown (m;\, n \lesssim p)$
$\mathrm{I}p$ (ε

(III e):: ————————

$c \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$m \frown (c \frown \dot{\smile} p)$
$n \frown (n \frown \perp p)$
$c \frown (m;\, n \lesssim p)$
$\mathrm{I}p$ (273

×

$c \frown (m;\, n \lesssim p)$
$m \frown (c \frown \dot{\smile} p)$
$n \frown (n \frown \perp p)$
$c \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\mathrm{I}p$ (274

———•———

133 $x \frown (a \frown \perp q)$
$d \frown (a \frown q)$
$x \frown (d \frown \perp q)$

$\mathfrak{d}\ \mathfrak{a}$: $x \frown (\mathfrak{a} \frown \perp q)$
$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$x \frown (\mathfrak{d} \frown \perp q)$ (α

(128): ————————

$x \frown (y \frown \perp q)$
$x \frown (d \frown \perp q)$
$d \frown (y \frown \perp q)$ (275

(200):: - - - - -

$x \frown (y \frown \perp q)$
$x \frown (d \frown \perp q)$
$y = d$
$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$ (α

(III a): -·-·-·-·-·-

$x \frown (y \frown \perp q)$
$x \frown (d \frown \perp q)$
$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$ (276

———•———

244 $y \frown (d \frown \perp q)$
$y;\, n \frown (d;\, c \frown \perp (q \simeq p))$

(276): - - - - - - - -

$y \frown (y \frown \perp q)$
$y;\, n \frown (d;\, c \frown \perp (q \simeq p))$
$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$ (α

×

$y;\, n \frown (d;\, c \frown \perp (q \simeq p))$
$y \frown (y \frown \perp q)$
$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$ (β

(271, 269)::= = = = = = = =

$y;\, n \frown (d;\, c \frown \perp (q \simeq p))$
$d \frown (x;\, y \lesssim q)$ (γ

(243): - - - - - - - - - -

d; c ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
I(q ≚ p)
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p)) (δ

(252) : : - - - - - - - - - -

d; c ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Iq
Ip
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p)) (ε

(265) : : - - - - - - - - - -

d; c ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p)) (ζ

(234) : - - - - - - - - - -

c ⌢(n ⌢ ⌣ p)
d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p)) (η

(274) : - - - - - - - - - -

c ⌢(m; n ∆ p)
m ⌢(c ⌢ ⌣ p)
n ⌢(n ⌢ ⊥ p)
d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p)) (ϑ

(234) : : - - - - - - - - - -

c ⌢(m; n ∆ p)
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p))
n ⌢(n ⌢ ⊥ p)
d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip (ι

×

d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p))
n ⌢(n ⌢ ⊥ p)
c ⌢(m; n ∆ p)
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip (κ

(II a) : : - - - - - - - - - -

d ⌢(x; y ∆ q)
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p))
n ⌢(n ⌢ ⊥ p)
d ⌢(c ⌢(x; m ⧹(q ≚ p)))
a: a ⌢(m; n ∆ p)
d ⌢(a ⌢(x; m ⧹(q ≚ p)))
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip (λ

(210) : : - - - - - - - - - -

d ⌢(x; y ∆ q)
n ⌢(n ⌢ ⊥ p)
x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p))
a: a ⌢(m; n ∆ p)
d ⌢(a ⌢(x; m ⧹(q ≚ p)))
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip (μ

×

x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p))
n ⌢(n ⌢ ⊥ p)
d ⌢(x; y ∆ q)
a: a ⌢(m; n ∆ q)
d ⌢(a ⌢(x; m ⧹(q ≚ p)))
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip (ν

‿

c: x; m ⌢(d; c ⌢ ⌣(q ≚ p))
n ⌢(n ⌢ ⊥ p)
d ⌢(x; y ∆ q)
a: a ⌢(m; n ∆ p)
d ⌢(a ⌢(x; m ⧹(q ≚ p)))
x; m ⌢(y; n ⌢ ⌣(q ≚ p))
Ip (ξ

×

$$\begin{array}{l}
\vdash d \frown (x;\, y \S q) \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (m;\, n \S p) \\
\qquad d \frown (\mathfrak{a} \frown (x;\, m \,\overline{\lessdot}\, (q \simeq p))) \\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile} x;\, m \frown (d;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (q \simeq p)) \\
\quad n \frown (n \frown \dot{\smile} p) \\
\quad x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile} (q \simeq p)) \\
\quad \mathrm{I}p
\end{array} \qquad (277$$

§ 160. *Zerlegung.*

Es muss nun das Unterglied

$$,\overset{\mathfrak{e}}{\smile} x;\, m \frown (d;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (q \simeq p))'$$

weggeschafft werden (vergl. § 158). Dies geschieht mit dem Satze

$$\begin{array}{l}
\vdash d \frown (x;\, y \S q) \\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile} x;\, m \frown (d;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (q \simeq p)) \\
,\quad x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile} (q \simeq p))
\end{array} ' \qquad (\alpha$$

den wir mit (257) beweisen, indem wir die Functionsmarke ,$F(\xi, \zeta)$' durch

$$\begin{array}{l}
\overset{\mathfrak{r}}{\smile} \mathfrak{r} \frown (x;\, \xi \S q) \\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile} x;\, m \frown (\mathfrak{r};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (q \simeq p)) \\
,\quad x;\, m \frown (\xi;\, \zeta \frown \dot{\smile} (q \simeq p))
\end{array} '$$

ersetzen. Wir bedürfen dazu des Satzes

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile} \mathfrak{r} \frown (x;\, o \S q) \\
\qquad \overset{\mathfrak{e}}{\smile} x;\, m \frown (\mathfrak{r};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (q \simeq p)) \\
\quad x;\, m \frown (o;\, a \frown \dot{\smile} (q \simeq p)) \\
\quad d \frown (a \frown p) \\
\quad c \frown (o \frown q) \\
\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile} r \frown (x;\, c \S q) \\
\qquad \overset{\mathfrak{e}}{\smile} x;\, m \frown (\mathfrak{r};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile} (q \simeq p)) \\
,\quad x;\, m \frown (c;\, d \frown \dot{\smile} (q \simeq p))
\end{array} ' \qquad (\beta$$

Dieser ist auf den Satz

$$\begin{array}{l}
\vdash r \frown (x;\, c \S q) \\
\quad r \frown (x;\, o \S q) \\
\quad c \frown (o \frown q) \\
\quad o = r \\
,\quad x \frown (c \frown \dot{\smile} q)
\end{array} ' \qquad (\gamma$$

zurückzuführen, der aus

$$\begin{array}{l}
\vdash r \frown (c \frown \dot{\smile} q) \\
\quad c \frown (o \frown q) \\
\quad \mathrm{I}q \\
\quad o \frown (o \frown \dot{\smile} q) \\
\quad r \frown (o \frown \dot{\smile} q) \\
\quad x \frown (c \frown \dot{\smile} q) \\
,\quad x \frown (r \frown \dot{\smile} q)
\end{array} ' \qquad (\delta$$

folgt. Um (δ) zu beweisen, benutzen wir den Satz (243) in der Form

$$\begin{array}{l}
\vdash r \frown (c \frown \dot{\smile} q) \\
\quad c \frown (r \frown \dot{\smile} q) \\
\quad x \frown (c \frown \dot{\smile} q) \\
\quad \mathrm{I}q \\
,\quad x \frown (r \frown \dot{\smile} q)
\end{array} '$$

und zeigen, dass bei unsern Bedingungen r nicht auf c in der q-Reihe folgen kann, weil dann nach (242) r der mit o anfangenden q-Reihe angehörte, und mithin o auf sich selbst in der q-Reihe folgte.

§ 161. *Aufbau.*

$$134 \quad \begin{array}{l}
\vdash a \frown (a \frown \dot{\smile} q) \\
\quad d \frown (a \frown q) \\
\quad a \frown (d \frown \dot{\smile} q)
\end{array}$$

(242) :: - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash a \frown (a \frown \dot{\smile} q) \\
\quad d \frown (a \frown q) \\
\quad \mathrm{I}q \\
\quad d \frown (d \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (278$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l}
\vdash d \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\
\quad d \frown (a \frown q) \\
\quad \mathrm{I}q \\
\quad a \frown (a \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (279$$

———•———

$$275 \quad \begin{array}{l}
\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q) \\
\quad x \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\
\quad d \frown (y \frown \dot{\smile} q)
\end{array}$$

(200) :: - - - - -

$\vdash x \frown (y \frown \dot{-} q)$
$d = x$
$x \frown (d \frown \dot{\smile} q)$
$d \frown (y \frown \dot{-} q)$ (α

(III c): - · - · - · - · - · -

$\vdash x \frown (y \frown \dot{-} q)$
$x \frown (d \frown \dot{\smile} q)$
$d \frown (y \frown \dot{-} q)$ (280

———•———

280 $\vdash o \frown (o \frown \dot{-} q)$
$o \frown (r \frown \dot{\smile} q)$
$r \frown (o \frown \dot{-} q)$

(242):: - - - - -

$\vdash o \frown (o \frown \dot{-} q)$
$c \frown (o \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$c \frown (r \frown \dot{-} q)$
$r \frown (o \frown \dot{-} q)$ (α

×

$\vdash c \frown (r \frown \dot{-} q)$
$c \frown (o \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$o \frown (o \frown \dot{-} q)$
$r \frown (o \frown \dot{-} q)$ (β

(243): - - - - - -

$\vdash r \frown (c \frown \dot{\smile} q)$
$c \frown (o \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$o \frown (o \frown \dot{-} q)$
$r \frown (o \frown \dot{-} q)$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} q)$
$x \frown (r \frown \dot{\smile} q)$ (γ

(274): - - - - - -

$\vdash r \frown (x;\, c \S q)$
$x \frown (r \frown \dot{\smile} q)$
$c \frown (c \frown \dot{-} q)$
$c \frown (o \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$o \frown (o \frown \dot{-} q)$
$r \frown (o \frown \dot{-} q)$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} q)$ (δ

(279, 200):: = = = = =

$\vdash r \frown (x;\, c \S q)$
$x \frown (r \frown \dot{\smile} q)$
$c \frown (o \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$o \frown (o \frown \dot{-} q)$
$o = r$
$r \frown (o \frown \dot{\smile} q)$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} q)$ (ε

(269, 270):: = = = = =

$\vdash r \frown (x;\, c \S q)$
$r \frown (x;\, o \S q)$
$c \frown (o \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$o \frown (o \frown \dot{-} q)$
$o = r$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} q)$ (ζ

(271, 265):: = = = = =

$\vdash r \frown (x;\, c \S q)$
$r \frown (x;\, o \S q)$
$c \frown (o \frown q)$
$o = r$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} q)$ (η

×

$\vdash r \frown (x;\, o \S q)$
$r \frown (x;\, c \S q)$
$c \frown (o \frown q)$
$o = r$
$x \frown (c \frown \dot{\smile} q)$ (ϑ

———•———

II a $\vdash x;\, m \frown (r;\, \mathfrak{a} \frown \dot{\smile}(q \simeq p))$
$\mathfrak{e}$ $x;\, m \frown (r;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p))$

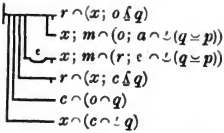
(III a): ————————————

$\vdash x;\, m \frown (o;\, \mathfrak{a} \frown \dot{\smile}(q \simeq p))$
$\mathfrak{e}$ $x;\, m \frown (r;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p))$
$o = r$ (ι

(I a): - - - - - - - - - -

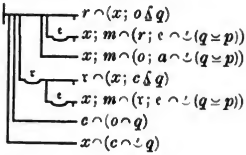
$\vdash r \frown (x;\, o \S q)$
$x;\, m \frown (o;\, \mathfrak{a} \frown \dot{\smile}(q \simeq p))$
$\mathfrak{e}$ $x;\, m \frown (r;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p))$
$o = r$ (κ

(ϑ): - · - · - · - · - · - · - · -

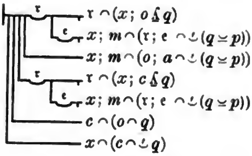


(λ

(II a)::- - - - - - - - - - -

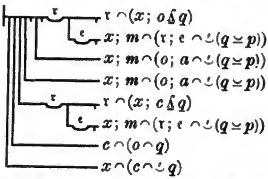


(μ



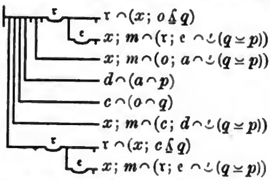
(ν

(I e):- - - - - - - - - - - - -



(ξ

(209, 246)::= = = = = = = = = = =



(o

(I d, I b)::= = = = = = = = = = = = =

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\!\!\!\!\!\!\!\;\; \mathfrak{r}\frown(x;\, o\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(o;\, a\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$d\frown(a\frown p)$$
$$c\frown(o\frown q)$$
$$\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, c\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(c;\, d\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p)) \qquad (\pi$$

$$\smile$$

$$\vdash\overset{\mathfrak{c}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{o}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, \mathfrak{o}\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(\mathfrak{o};\, \mathfrak{a}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown p)$$
$$\mathfrak{c}\frown(\mathfrak{o}\frown q)$$
$$\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, \mathfrak{c}\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(\mathfrak{c};\, \mathfrak{d}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p)) \qquad (\varrho$$

(257): ————————————————

$$\vdash\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, y\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(y;\, n\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, x\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(x;\, m\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(y;\, n\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p)) \qquad (\sigma$$

(I b): - - - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, y\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, x\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(x;\, m\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(y;\, n\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p)) \qquad (\tau$$

(I e):: - - - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, y\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$\overset{\mathfrak{r}}{\smile}\; \mathfrak{r}\frown(x;\, x\,\S\, q)$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; x;\, m\frown(\mathfrak{r};\, \mathfrak{e}\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(x;\, m\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p))$$
$$x;\, m\frown(y;\, n\frown\overset{.}{\smile}(q\simeq p)) \qquad (\upsilon$$

(140):: ————————————————

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ \mathfrak{r} \frown (x;\, y \int q) \\ \quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ x;\, m \frown (\mathfrak{r};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ \mathfrak{r} \frown (x;\, x \int q) \\ \quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ x;\, m \frown (\mathfrak{r};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \end{array} \quad (281$$

———•———

270 $$\vdash \begin{array}{l} x \frown (r \frown \dot{\smile} q) \\ r \frown (x;\, x \int q) \end{array}$$

(200): - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (r \frown \dot{\perp} q) \\ r = x \\ r \frown (x;\, x \int q) \end{array} \quad (\alpha$$

(276): - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (x \frown \dot{\perp} q) \\ r = x \\ r \frown (x;\, x \int q) \\ r \frown (x \frown \dot{\smile} q) \end{array} \quad (\beta$$

(269):: - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (x \frown \dot{\perp} q) \\ r = x \\ r \frown (x;\, x \int q) \end{array} \quad (\gamma$$

×

$$\vdash \begin{array}{l} r = x \\ x \frown (x \frown \dot{\perp} q) \\ r \frown (x;\, x \int q) \end{array} \quad (\delta$$

(271):: - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} r = x \\ r \frown (x;\, x \int q) \end{array} \quad (282$$

(III a): - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x;\, m \frown (r;\, m \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ x;\, m \frown (x;\, m \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ r \frown (x;\, x \int q) \end{array} \quad (\alpha$$

(140):: ————————————

$$\vdash \begin{array}{l} x;\, m \frown (r;\, m \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ r \frown (x;\, x \int q) \end{array} \quad (\beta$$

×

$$\vdash \begin{array}{l} r \frown (x;\, x \int q) \\ x;\, m \frown (r;\, m \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \end{array} \quad (\gamma$$

(II a):: - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} r \frown (x;\, x \int q) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ x;\, m \frown (r;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \end{array} \quad (\delta$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ \mathfrak{r} \frown (x;\, x \int q) \\ \quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ x;\, m \frown (\mathfrak{r};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \end{array} \quad (\varepsilon$$

(281): ————————————

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ \mathfrak{r} \frown (x;\, y \int q) \\ \quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ x;\, m \frown (\mathfrak{r};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \end{array} \quad (\zeta$$

(II a): - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (x;\, y \int q) \\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ x;\, m \frown (d;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \end{array} \quad (\eta$$

(277): -·-·-·-·-·-·-·-·-·-

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (x;\, y \int q) \\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} \frown (m;\, n \int p) \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown (x;\, m \prec (q \simeq p))) \\ n \frown (n \frown \dot{\perp} p) \\ x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ \mathrm{I}p \end{array} \quad (\vartheta$$

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\ \mathfrak{b} \frown (x;\, y \int q) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} \frown (m;\, n \int p) \\ \quad\quad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown (x;\, m \prec (q \simeq p))) \\ n \frown (n \frown \dot{\perp} p) \\ x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ \mathrm{I}p \end{array} \quad (\iota$$

(11): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x;\, y \int q \frown (m;\, n \int p \frown \rangle (x;\, m \prec (q \simeq p))) \\ \mathrm{I}(x;\, m \prec (q \simeq p)) \\ n \frown (n \frown \dot{\perp} p) \\ x;\, m \frown (y;\, n \frown \dot{\smile}(q \simeq p)) \\ \mathrm{I}p \end{array} \quad (\varkappa$$

(253):: - - - - - - - - - - - - - - -

⊢ x; y ∆ q ⌢ (m; n ∆ p ⌢) (x; m ⟨(q ⊻ p)))
i ⌢ (i ⌢ ⊥ q)
x ⌢ (i ⌢ ⌣ q)
Iq
Ip
n ⌢ (n ⌢ ⊥ p)
x; m ⌢ (y; n ⌢ ⌣ (q ⊻ p)) (λ

———•———

234 ⊢ m ⌢ (n ⌢ ⌣ p)
x; m ⌢ (y; n ⌢ ⌣ (q ⊻ p))

(II a): - - - - - - - - - -

⊢ n ⌢ (n ⌢ ⊥ p)
x; m ⌢ (y; n ⌢ ⌣ (q ⊻ p))
i ⌢ (i ⌢ ⊥ p)
m ⌢ (i ⌢ ⌣ p) (μ

(λ): - - - - - - - - - - -

⊢ x; y ∆ q ⌢ (m; n ∆ p ⌢) (x; m ⟨(q ⊻ p)))
i ⌢ (i ⌢ ⊥ q)
x ⌢ (i ⌢ ⌣ q)
Iq
Ip
x; m ⌢ (y; n ⌢ ⌣ (q ⊻ p))
i ⌢ (i ⌢ ⊥ p)
m ⌢ (i ⌢ ⌣ p) (283

———•———

260 ⊢ m; n ∆ p ⌢ (x; y ∆ q ⌢) ⊀ (x; m ⟨(q ⊻ p)))
m; n ∆ p ⌢ (x; y ∆ q ⌢) (m; x ⟨(p ⊻ q)))

(32): - - - - - - - - - - - - - - -

⊢ 𝔫(x; y ∆ q) = 𝔫(m; n ∆ p)
x; y ∆ q ⌢ (m; n ∆ p ⌢) (x; m ⟨(q ⊻ p)))
m; n ∆ p ⌢ (x; y ∆ q ⌢) (m; x ⟨(p ⊻ q))) (α

(283, 283)·: = = = = = = = = = = = = = =

⊢ 𝔫(x; y ∆ q) = 𝔫(m; n ∆ p)
i ⌢ (i ⌢ ⊥ q)
x ⌢ (i ⌢ ⌣ q)
Iq
Ip
x; m ⌢ (y; n ⌢ ⌣ (q ⊻ p))
i ⌢ (i ⌢ ⊥ p)
m ⌢ (i ⌢ ⌣ p)
m; x ⌢ (n; y ⌢ ⌣ (p ⊻ q)) (β

(258):: - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\!\top\!\!\!\top\!\!\!\top\!\!\!\top\!\!\!\top\;\mathfrak{P}(x;y\,\delta\,q)=\mathfrak{P}(m;n\,\delta\,p)\\
\quad\stackrel{\mathfrak{i}}{\smile}\top\;\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}\,q)\\
\qquad\;\llcorner\; x\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{\smile}\,q)\\
\quad\llcorner\;\mathrm{I}q\\
\quad\llcorner\;\mathrm{I}p\\
\quad\llcorner\; x;m\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\simeq p))\\
\quad\stackrel{\mathfrak{i}}{\smile}\top\;\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}\,p)\\
\qquad\;\llcorner\; m\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{\smile}\,p)
\end{array}\qquad(284$$

———•———

$$\begin{array}{l}
136\quad\vdash\!\top\; d\frown(y\frown\dot{\smile}\,q)\\
\qquad\quad\llcorner\; d\frown(y\frown\dot{-}\,q)\\
(132)::-----\\
\vdash\!\top\!\top\; d\frown(y\frown\dot{\smile}\,q)\\
\quad\llcorner\; d\frown(a\frown q)\\
\quad\llcorner\; a\frown(y\frown\dot{\smile}\,q)
\end{array}\qquad(285$$

———•———

$$\begin{array}{l}
145\quad\vdash\!\top\; b\frown(b\frown\dot{-}\,\mathfrak{f})\\
\qquad\quad\llcorner\; 0\frown(b\frown\dot{\smile}\,\mathfrak{f})\\
(285)::-----\\
\vdash\!\top\!\top\; b\frown(b\frown\dot{-}\,\mathfrak{f})\\
\quad\llcorner\; 0\frown(1\frown\mathfrak{f})\\
\quad\llcorner\; 1\frown(b\frown\dot{\smile}\,\mathfrak{f})
\end{array}\qquad(\alpha$$

$$\begin{array}{l}
(110)::\overline{\qquad\qquad}\\
\vdash\!\top\; b\frown(b\frown\dot{-}\,\mathfrak{f})\\
\quad\llcorner\; 1\frown(b\frown\dot{\smile}\,\mathfrak{f})
\end{array}\qquad(286$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\stackrel{\mathfrak{i}}{\smile}\top\;\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}\,\mathfrak{f})\\
\qquad\llcorner\; 1\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{\smile}\,\mathfrak{f})
\end{array}\qquad(287$$

$$\begin{array}{l}
(284):\overline{\qquad\qquad}\\
\vdash\!\!\!\top\!\!\!\top\!\!\!\top\!\!\!\top\;\mathfrak{P}(x;y\,\delta\,q)=\mathfrak{P}(1;n\,\delta\,\mathfrak{f})\\
\quad\stackrel{\mathfrak{i}}{\smile}\top\;\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}\,q)\\
\qquad\;\llcorner\; x\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{\smile}\,q)\\
\quad\llcorner\;\mathrm{I}q\\
\quad\llcorner\;\mathrm{I}\mathfrak{f}\\
\quad\llcorner\; x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\simeq\mathfrak{f}))
\end{array}\qquad(\alpha$$

$$\begin{array}{l}
(71)::\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
\vdash\!\!\!\top\!\!\!\top\!\!\!\top\;\mathfrak{P}(x;y\,\delta\,q)=\mathfrak{P}(1;n\,\delta\,\mathfrak{f})\\
\quad\stackrel{\mathfrak{i}}{\smile}\top\;\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}\,q)\\
\qquad\;\llcorner\; x\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{\smile}\,q)\\
\quad\llcorner\;\mathrm{I}q\\
\quad\llcorner\; x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\simeq\mathfrak{f}))
\end{array}\qquad(\beta$$

$$\begin{array}{l}
(261)::---------\\
\vdash\!\!\!\top\!\!\!\top\!\!\!\top\;\mathfrak{P}(x;y\,\delta\,q)=\mathfrak{P}(1;n\,\delta\,\mathfrak{f})\\
\quad\stackrel{\mathfrak{i}}{\smile}\top\;\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}\,q)\\
\quad\llcorner\;\mathrm{I}q\\
\quad\llcorner\; x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\simeq\mathfrak{f}))
\end{array}\qquad(288$$

§ 162. *Zerlegung.*

Um in (288) das Unterglied

$$\text{„}\stackrel{\mathfrak{i}}{\smile}\top\,\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}\,q)\text{“}$$

durch „$\top\, y\frown(y\frown\dot{-}\,q)$“ zu ersetzen, vertauschen wir in (288) „q“ mit „$y\frown\dot{\smile}\,q\doteq q$“. Es ist nämlich leicht der Satz

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\;\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{-}(y\frown\dot{\smile}\,q\doteq q))\text{“}\\
\quad\llcorner\; y\frown(y\frown\dot{-}\,q)\\
,\;\llcorner\;\mathrm{I}q
\end{array}\qquad(\alpha$$

zu beweisen. Damit dann für „$y\frown\dot{\smile}\,q\doteq q$“ wieder „$q$“ in den Satz komme, sind die Sätze (189),

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\;\mathfrak{P}(x;y\,\delta\,q)=\mathfrak{P}(x;y\,\delta\,(y\frown\dot{\smile}\,q\doteq q))\text{“}\\
\quad\llcorner\; y\frown(y\frown\dot{-}\,q)\\
,\;\llcorner\;\mathrm{I}q
\end{array}\qquad(\beta$$

und

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\; x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}\,q\doteq q\simeq\mathfrak{f}))\text{“}\\
,\;\llcorner\; x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\simeq\mathfrak{f}))
\end{array}\qquad(\gamma$$

anzuwenden. Wir beweisen mit (257) den allgemeinern Satz, der aus (γ) durch Ersetzung von „1“ durch „m“ und von „$\mathfrak{f}$“ durch „p“ entsteht. Wir haben dazu den Satz

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\top\!\top\!\top\!\top\; x;m\frown(a;o\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}\,q\doteq q\simeq p))\text{“}\\
\quad\llcorner\; a\frown(y\frown\dot{\smile}\,q)\\
\quad\llcorner\; c\frown(o\frown p)\\
\quad\llcorner\; d\frown(a\frown q)\\
\quad\llcorner\!\top\; x;m\frown(d;c\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}\,q\doteq q\simeq p))\\
,\qquad\llcorner\; d\frown(y\frown\dot{\smile}\,q)
\end{array}\qquad(\delta$$

nöthig, der aus (209) und (197) folgt.

§ 163. *Aufbau.*

197
$$\vdash d \frown (a \frown (y \frown \dot{\smile} q \simeq q))$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$a \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$

(209): - - - - - - - - -

$$\vdash x;\, m \frown (a;\, o \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$c \frown (o \frown p)$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$a \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$x;\, m \frown (d;\, c \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$ (α

(I):: - - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash x;\, m \frown (a;\, o \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$c \frown (o \frown p)$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$a \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$x;\, m \frown (d;\, c \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$ (β

(285):: - - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash x;\, m \frown (a;\, o \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$a \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$c \frown (o \frown p)$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$x;\, m \frown (d;\, c \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$ (γ

$$\vdash \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{o}\ \mathfrak{a}\ \ x;\, m \frown (\mathfrak{o};\, \mathfrak{a} \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$\mathfrak{o} \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown p)$$
$$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{o} \frown q)$$
$$x;\, m \frown (\mathfrak{c};\, \mathfrak{d} \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$\mathfrak{c} \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$ (δ

(257): ————————————————

$$\vdash x;\, m \frown (a;\, o \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$a \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$x;\, m \frown (x;\, m \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$x;\, m \frown (a;\, o \frown \dot{\smile} (q \succeq p))$$ (ε

(I):: - - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash x;\, m \frown (a;\, o \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$a \frown (y \frown \dot{\smile} q)$$
$$x;\, m \frown (x;\, m \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \simeq q \succeq p))$$
$$x;\, m \frown (a;\, o \frown \dot{\smile} (q \succeq p))$$ (ζ

(140):: ————————————————

⊢┬┬ x; m⌢(a; o⌢∸(y⌢∸q ≏ q ≚ p))
 │└ a⌢(y⌢∸q)
 └─ x; m⌢(a; o⌢∸(q ≚ p)) (289

———•———

140 ⊢ y⌢(y⌢∸q)

(289): ————————

⊢┬ x; m⌢(y; n⌢∸(y⌢∸q ≏ q ≚ p))
 └ x; m⌢(y; n⌢∸(q ≚ p)) (290

§ 164. *Zerlegung.*

Um den Satz (β) des § 162 zu beweisen, brauchen wir die Sätze

⊢┬┬ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q))‘
 │└ d⌢(y⌢∸q)
,└─ x⌢(d⌢∸q) (α

(194) und (189). Wir beweisen (α) mit (144).

§ 165. *Aufbau.*

194 ⊢┬ x⌢(y⌢∸q)
 └ x⌢(y⌢∸(u ≏ q))

×

⊢┬ x⌢(y⌢∸(u ≏ q))
 └┬ x⌢(y⌢∸q) (291

———•———

137 ⊢┬┬ x⌢(a⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 │└ d⌢(a⌢(y⌢∸q ≏ q))
 └─ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q))

(197):: - - - - - - - - - -

⊢┬┬┬ x⌢(a⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 ││└ d⌢(a⌢q)
 │└─ a⌢(y⌢∸q)
 └── x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q)) (α

(I):: - - - - - - - - - -

⊢┬┬┬┬ x⌢(a⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 │││└ d⌢(a⌢q)
 ││└─ a⌢(y⌢∸q)
 │└── d⌢(y⌢∸q)
 └──┬ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
    └ d⌢(y⌢∸q) (β

(285):: - - - - - - - - - -

⊢┬┬┬ x⌢(a⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 ││└ a⌢(y⌢∸q)
 │└─ d⌢(a⌢q)
 └─┬ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
   └ d⌢(y⌢∸q) (γ

‿

⊢‿𝔡‿𝔞┬┬┬ x⌢(𝔞⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
     ││└ 𝔞⌢(y⌢∸q)
     │└─ 𝔡⌢(𝔞⌢q)
     └─┬ x⌢(𝔡⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
       └ 𝔡⌢(y⌢∸q) (δ

(144): ————————————————

⊢┬┬┬ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ p))
 ││└ d⌢(y⌢∸q)
 │├┬ x⌢(x⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 ││└ x⌢(y⌢∸q)
 └── x⌢(d⌢∸q) (ε

(I):: - - - - - - - - - -

⊢┬┬┬ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 ││└ d⌢(y⌢∸q)
 │└─ x⌢(x⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 └── x⌢(d⌢∸q) (ζ

(140):: ————————————

⊢┬┬ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 │└ d⌢(y⌢∸q)
 └─ x⌢(d⌢∸q) (292

———•———

140 ⊢ y⌢(y⌢∸q)

(292): ————————

⊢┬ d⌢(y⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 └ d⌢(y⌢∸q) (293

(274): - - - - - - - -

⊢┬┬┬┬ d⌢(x; y ᵹ(y⌢∸q ≏ q))
 │││└ x⌢(d⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 ││└┬ y⌢(y⌢∸(y⌢∸q ≏ q))
 │└── d⌢(y⌢∸q)
 └─── I(y⌢∸q ≏ q) (α

(291, 292):: = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad d \frown (y \frown \dot{\smile} q) \\ \quad x \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}(y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)\end{array} \qquad (\beta$$

(269, 270) :: = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}(y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)\end{array} \qquad (\gamma$$

(189) :: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (\delta$$

(271, 265) :: = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q)\end{array} \qquad (294$$

274

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q) \\ \quad x \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad d \frown (y \frown \dot{\smile} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array}$$

(201, 201) :: = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q) \\ \quad x \frown (d \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad d \frown (y \frown \dot{\smile} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (\alpha$$

(269, 270) :: = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (\beta$$

(IVa) : - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash (\text{—}\, d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q)) = (\text{—}\, d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q))) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (\gamma$$

(294) :: ————————————————

$$\begin{array}{l}\vdash (\text{—}\, d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q)) = (\text{—}\, d \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q))) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (\delta$$

$$\begin{array}{l}\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (\text{—}\, \mathfrak{a} \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} q)) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \frown (x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q))) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (\varepsilon$$

(96) : - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{N}(x;\, y \mathbin{\triangle} y) = \mathfrak{N}(x;\, y \mathbin{\triangle} (y \frown \dot{\smile} q \mathrel{\underline{\frown}} q)) \\ \quad y \frown (y \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (295$$

278

$$\begin{array}{l}\vdash a \frown (a \frown \dot{\bot} q) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad d \frown (d \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\vdash \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\, \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{a} \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{b} \frown \dot{\bot} q) \\ \quad \mathrm{I}q\end{array} \qquad (\alpha$$

(144) : - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad i\frown(i\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad i\frown(y\frown\dot{\smile}q)\end{array}\qquad (296$$

(194):: — — — — —

$$\begin{array}{l}\vdash y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad i\frown(i\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q))\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad i\frown(y\frown\dot{\smile}q)\end{array}\qquad (\alpha$$

$\times$

$$\begin{array}{l}\vdash i\frown(i\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q))\\ \quad y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad i\frown(y\frown\dot{\smile}q)\end{array}\qquad (\beta$$

(193): —·—·—·—·—·—·—·—

$$\begin{array}{l}\vdash i\frown(i\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q))'\\ \quad y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\end{array}\qquad (\gamma$$

$$\begin{array}{l}\vdash \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\ \mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q))\\ \quad y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\end{array}\qquad (297$$

(288): — — — — — — — — — —

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{N}(x;y\S(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q))=\mathfrak{N}(1;n\S\mathfrak{f})\\ \quad y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad \mathrm{I}(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q)\\ \quad x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q\overset{\vee}{=}\mathfrak{f}))\end{array}\qquad (\alpha$$

(290, 189):: = = = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{N}(x;y\S(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q))=\mathfrak{N}(1;n\S\mathfrak{f})\\ \quad y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\overset{\vee}{=}\mathfrak{f}))\end{array}\qquad (\beta$$

(IIIa): ————————————————

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{N}(x;y\S q)=\mathfrak{N}(1;n\S\mathfrak{f})\\ \quad y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\overset{\vee}{=}\mathfrak{f}))\\ \quad \mathfrak{N}(x;y\S q)=\mathfrak{N}(x;y\S(y\frown\dot{\smile}q\overset{\frown}{=}q))\end{array}\qquad (\gamma$$

(295):: — — — — — — — — — — —

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{N}(x;y\S q)=\mathfrak{N}(1;n\S\mathfrak{f})\\ \quad y\frown(y\frown\dot{\smile}q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad x;1\frown(y;n\frown\dot{\smile}(q\overset{\vee}{=}\mathfrak{f}))\end{array}\qquad (298$$

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l}\vdash n=\mathfrak{N}(1;n\S\mathfrak{f})'\\ ,\quad 0\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\end{array}$$

und Schluss des Abschnittes *K*.

§ 166. *Zerlegung.*

Wir beweisen den Satz (δ) des § 158 mit (160). Dazu brauchen wir den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{N}(1;n\S\mathfrak{f})=\mathfrak{N}\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon=0\\ \quad \varepsilon\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\end{array}\right)'\\ ,\quad 0\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\end{array}\qquad (\alpha$$

der mit (IVa) und (96) aus den Sätzen

$$\begin{array}{l}\vdash a\frown(1;n\S\mathfrak{f})'\\ \quad a=0\\ \quad 0\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\\ ,\quad a\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\end{array}\qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l}\vdash a=0\quad '\\ \quad a\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\\ ,\quad a\frown(1;n\S\mathfrak{f})\end{array}\qquad (\gamma$$

folgt. (β) ist auf den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash 1\frown(a\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})'\\ \quad a=0\\ \quad 0\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\\ ,\quad a\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\end{array}\qquad (\delta$$

zurückzuführen, der aus (242) abzuleiten ist. Wir erhalten zunächst

$$\begin{array}{l}\vdash 1\frown(a\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})'\\ ,\quad 0\frown(a\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\end{array}\qquad (\varepsilon$$

Es kommt nun darauf an, den Satz

$$\vdash\begin{array}{l}\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\\ \mathfrak{d}\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\\ \mathfrak{a}\frown(n\frown\dot{\smile}\mathfrak{f})\end{array} \qquad (\zeta$$

zu beweisen. Dieser folgt aus dem Satze

$$\vdash\begin{array}{l}m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ n\frown(m\frown\dot{\smile}p)\\ m\frown(r\frown\dot{\smile}p)\\ n\frown(r\frown\dot{\smile}p)\\ \mathrm{I}\sharp p\end{array} \qquad (\eta$$

der ähnlich (243) ist und daraus abgeleitet werden kann. Schreiben wir (243) so

$$\vdash\begin{array}{l}n\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ m\frown(n\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ r\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ r\frown(n\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ \mathrm{I}\sharp p\end{array}$$

so bleiben die Sätze

$$\vdash\begin{array}{l}m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ n\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\end{array} \qquad (\vartheta$$

$$\vdash\begin{array}{l}n\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\end{array} \qquad (\iota$$

und ähnliche zu beweisen, was mit (123) geschehen kann.

§ 167. *Aufbau.*

23 $\vdash\begin{array}{l}a\frown(d\frown p)\\ d\frown(a\frown\sharp p)\end{array}$

(129):

$$\vdash\begin{array}{l}a\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ d\frown(a\frown\sharp p)\\ d\frown(n\frown\dot{\smile}p)\end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown\sharp p)\\ \mathfrak{d}\frown(n\frown\dot{\smile}p)\end{array} \qquad (\beta$$

(123):

$$\vdash\begin{array}{l}m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ \mathfrak{a}\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ n\frown(\mathfrak{a}\frown\sharp p)\\ n\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\end{array} \qquad (\gamma$$

131 $\vdash\begin{array}{l}a\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ a\frown(n\frown p)\end{array}$

(23)::

$$\vdash\begin{array}{l}a\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ n\frown(a\frown\sharp p)\end{array} \qquad (\delta$$

$$\vdash\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ n\frown(\mathfrak{a}\frown\sharp p)\end{array} \qquad (\varepsilon$$

(γ):

$$\vdash\begin{array}{l}m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ n\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\end{array} \qquad (299$$

$$\vdash\begin{array}{l}n\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\end{array} \qquad (300$$

IIIf $\vdash\begin{array}{l}n=m\\ m=n\end{array}$

(139):

$$\vdash\begin{array}{l}m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\\ m=n\end{array} \qquad (301$$

22 $\vdash\begin{array}{l}a\frown(d\frown\sharp p)\\ d\frown(a\frown p)\end{array}$

(129):

$$\vdash\begin{array}{l}a\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ d\frown(a\frown p)\\ d\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash\begin{array}{l}\mathfrak{a}\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown p)\\ \mathfrak{d}\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\end{array} \qquad (\beta$$

(123):

$$\vdash\begin{array}{l}n\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ \mathfrak{a}\frown(m\frown\dot{\smile}\sharp p)\\ m\frown(\mathfrak{a}\frown p)\\ m\frown(n\frown\dot{\smile}p)\end{array} \qquad (\gamma$$

131 $\vdash a \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad a \frown (m \frown \nmid p)$

(22)::- - - - - -

$\vdash a \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad m \frown (a \frown p)$ (δ

$\vdash^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad m \frown (\mathfrak{a} \frown p)$ (ε

(γ): ————————

$\vdash n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$ (302

(136): - - - - - -

$\vdash n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$ (α

(200):: - - - - - -

$\vdash n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad n = m$
$\quad m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$ (β

(301): -·-·-·-·-·-·-

$\vdash n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$ (303

———•———

299 $\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\quad n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$

(136): - - - - - -

$\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\quad n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$ (α

(200):: - - - - - -

$\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\quad m = n$
$\quad n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$ (β

(301): -·-·-·-·-·-·-

$\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\quad n \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$ (304

(243):: - - - - - -

$\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\quad m \frown (n \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad r \frown (m \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad r \frown (n \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad \mathrm{I} \nmid p$ (α

(303, 303):: = = = = =

$\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\quad m \frown (n \frown \dot{\smile} \nmid p)$
$\quad m \frown (r \frown \dot{\smile} p)$
$\quad n \frown (r \frown \dot{\smile} p)$
$\quad \mathrm{I} \nmid p$ (β

(300):: - - - - - - -

$\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p)$
$\quad n \frown (m \frown \dot{\smile} p)$
$\quad m \frown (r \frown \dot{\smile} p)$
$\quad n \frown (r \frown \dot{\smile} p)$
$\quad \mathrm{I} \nmid p$ (305

———•———

242 $\vdash 1 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad 0 \frown (1 \frown \mathfrak{f})$
$\quad \mathrm{I}\mathfrak{f}$
$\quad 0 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$

(110, 71):: ========

$\vdash 1 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad 0 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (306

———•———

305 $\vdash 0 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad a \frown (0 \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad 0 \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad a \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad \mathrm{I} \nmid \mathfrak{f}$

(126, 89):: ========

$\vdash 0 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad 0 \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad a \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (307

(200): - - - - -

$\vdash 0 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad a = 0$
$\quad 0 \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad a \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (α

(306): - - - - - -

$\vdash 1 \frown (a \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad a = 0$
$\quad 0 \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$\quad a \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (308

———•———

274
$$\begin{aligned}&\vdash a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\\ &\quad 1 \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad n \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad \mathrm{I}\mathfrak{f}\end{aligned}$$

(145, 71):: = = = = =

$$\begin{aligned}&\vdash a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\\ &\quad 1 \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad 0 \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (309

(308):: - - - - - -

$$\begin{aligned}&\vdash a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\\ &\quad a = 0\\ &\quad 0 \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (α

(Ic, Id):: = = = = = =

$$\begin{aligned}&\vdash a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\\ &\quad a = 0\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad 0 \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (310

———•———

270
$$\begin{aligned}&\vdash 1 \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\end{aligned}$$

(132): - - - - -

$$\begin{aligned}&\vdash 0 \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad 0 \frown (1 \frown \mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\end{aligned}$$ (α

(110):: ————

$$\begin{aligned}&\vdash 0 \frown (a \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\end{aligned}$$ (311

(IIId): - - - - -

$$\begin{aligned}&\vdash a = 0\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\\ &\quad 0 \frown (0 \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (α

(126):: ————

$$\begin{aligned}&\vdash a = 0\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\end{aligned}$$ (312

(If): - - - - - -

$$\begin{aligned}&\vdash a = 0\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (α

(269):: - - - - - -

$$\begin{aligned}&\vdash a = 0\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\end{aligned}$$ (β

(IVa): ————

$$\begin{aligned}&\vdash (\text{—}\, a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})) = \left(\text{—} \begin{array}{l} a = 0\\ a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{array}\right)\\ &\quad a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})\\ &\quad a = 0\\ &\quad a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (γ

(310):: - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{aligned}&\vdash (\text{—}\, a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})) = \left(\text{—} \begin{array}{l} a = 0\\ a \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{array}\right)\\ &\quad 0 \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (δ

(77): ————————————

$$\begin{aligned}&\vdash (\text{—}\, a \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})) = \left[\text{—}\, a \frown \dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = 0\\ \varepsilon \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{array}\right)\right]\\ &\quad 0 \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (ε

$$\begin{aligned}&\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, (\text{—}\, \mathfrak{a} \frown (1;\, n \,\Delta\, \mathfrak{f})) = \left[\text{—}\, \mathfrak{a} \frown \dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon = 0\\ \varepsilon \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{array}\right)\right]\\ &\quad 0 \frown (n \frown \smile\mathfrak{f})\end{aligned}$$ (ζ

(96): - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{y}(1;n \mathbin{\S} \mathfrak{f}) = \mathfrak{y}\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{array}{l}\varepsilon = 0\\ \varepsilon \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array}\right)\\ \quad 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \tag{313}$$

(IIIa): – – – – – – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash n = \mathfrak{y}(1;n \mathbin{\S} \mathfrak{f})\\ \quad n = \mathfrak{y}\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{array}{l}\varepsilon = 0\\ \varepsilon \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array}\right)\\ \quad 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\alpha$$

(160):: – – – – – – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash n = \mathfrak{y}(1;n \mathbin{\S} \mathfrak{f})\\ \quad 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \tag{314}$$

(IIIa): – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{y}(x;y \mathbin{\S} q) = n\\ \quad \mathfrak{y}(x;y \mathbin{\S} q) = \mathfrak{y}(1;n \mathbin{\S} \mathfrak{f})\\ \quad 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\alpha$$

(298):: – – – – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash \mathfrak{y}(x;y \mathbin{\S} q) = n\\ \quad y \frown (y \frown \smallsmile q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad x;1 \frown (y;n \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\\ \quad 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\beta$$

(IIIa): – – – – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash 0 \frown (\mathfrak{y}(x;y \mathbin{\S} q) \frown \smallsmile \mathfrak{f})\\ \quad y \frown (y \frown \smallsmile q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad x;1 \frown (y;n \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\\ \quad 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \tag{315}$$

———•———

$$110 \quad \vdash 0 \frown (1 \frown \mathfrak{f})$$

(285): ————

$$\begin{array}{l}\vdash 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\\ \quad 1 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \tag{316}$$

(234):: – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash 0 \frown (n \frown \smallsmile \mathfrak{f})\\ \quad x;1 \frown (y;n \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\end{array} \tag{317}$$

(315): – – – – – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash 0 \frown (\mathfrak{y}(x;y \mathbin{\S} q) \frown \smallsmile \mathfrak{f})\\ \quad y \frown (y \frown \smallsmile q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad x;1 \frown (y;n \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\end{array} \qquad (\alpha$$

×

$$\begin{array}{l}\vdash x;1 \frown (y;n \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\\ \quad y \frown (y \frown \smallsmile q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad 0 \frown (\mathfrak{y}(x;y \mathbin{\S} q) \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l}\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, x;1 \frown (y;\mathfrak{e} \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\\ \quad y \frown (y \frown \smallsmile q)\\ \quad \mathrm{I}q\\ \quad 0 \frown (\mathfrak{y}(x;y \mathbin{\S} q) \frown \smallsmile \mathfrak{f})\end{array} \tag{318}$$

§ 168. *Zerlegung.*

Die letzten beiden Uebergänge dienen zur Wegschaffung des ‚n'. Wir beweisen nun den Satz

$$\begin{array}{l}‚\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, x;1 \frown (y;\mathfrak{e} \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))'\\ \quad x \frown (y \frown \smallsmile q)\end{array} \qquad (\alpha$$

mit (144) und brauchen dazu den Satz

$$\begin{array}{l}‚\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, x;1 \frown (a;\mathfrak{e} \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))'\\ \quad d \frown (a \frown q)\\ \quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, x;1 \frown (d;\mathfrak{e} \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\end{array} \qquad (\beta$$

den wir aus (209) ableiten.

§ 169. *Aufbau.*

$$\begin{array}{l}209 \quad \vdash x;1 \frown (a;o \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\\ \quad c \frown (o \frown \mathfrak{f})\\ \quad d \frown (a \frown q)\\ \quad x;1 \frown (d;c \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\end{array}$$

×

$$\begin{array}{l}\vdash c \frown (o \frown \mathfrak{f})\\ \quad x;1 \frown (a;o \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\\ \quad d \frown (a \frown q)\\ \quad x;1 \frown (d;c \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\end{array} \qquad (\alpha$$

(IIa):: – – – – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash c \frown (o \frown \mathfrak{f})\\ \quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, x;1 \frown (a;\mathfrak{e} \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\\ \quad d \frown (a \frown q)\\ \quad x;1 \frown (d;c \frown \smallsmile (q \succeq \mathfrak{f}))\end{array} \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\vdash\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{a}}\; c \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (\mathfrak{a};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ d \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ x;\, 1 \frown (d;\, c \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (\gamma$$

(156): - - - - - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} \mathfrak{d} \frown (c \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (a;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ d \frown (a \frown q) \\ x;\, 1 \frown (d;\, c \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (\delta$$

×

$$\vdash\begin{array}{l} d \frown (a \frown q) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (a;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ \mathfrak{d} \frown (c \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ x;\, 1 \frown (d;\, c \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(317):: - - - - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} d \frown (a \frown q) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (a;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ x;\, 1 \frown (d;\, c \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (\zeta$$

×

$$\vdash\begin{array}{l} x;\, 1 \frown (d;\, c \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (a;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ d \frown (a \frown q) \end{array} \qquad (\eta$$

$$\vdash\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (d;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (a;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ d \frown (a \frown q) \end{array} \qquad (\vartheta$$

×

$$\vdash\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (a;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ d \frown (a \frown q) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (d;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (\iota$$

$$\vdash \smile^{\mathfrak{b}}\;\smile^{\mathfrak{a}}\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (\mathfrak{a};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (\mathfrak{b};\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (\varkappa$$

(144): ————————————

$$\vdash\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (y;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (x;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \end{array} \qquad (\lambda$$

———•———

IIa $$\vdash\begin{array}{l} x;\, 1 \frown (x;\, 1 \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (x;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array}$$

×

$$\vdash\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (x;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ x;\, 1 \frown (x;\, 1 \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (\mu$$

(140):: ————————————

$$\vdash \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (x;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \qquad (\nu$$

(λ): ————————————

$$\vdash\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (y;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \\ x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \end{array} \qquad (319$$

×

$$\vdash\begin{array}{l} x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \\ \smile^{\mathfrak{e}}\; x;\, 1 \frown (y;\, \mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(q \simeq \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (320$$

(318):: - - - - - - - -

$$\vdash\begin{array}{l} x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \\ y \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathrm{I}q \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{n}(x;\, y \underline{\int} q) \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\alpha$$

×

$$\vdash\begin{array}{l} \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{n}(x;\, y \underline{\int} q) \frown \dot{\smile}\, \mathfrak{f}) \\ x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \\ y \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (321$$

§ 170. *Zerlegung.*

Es soll nun das Unterglied in (321) weggeschafft werden. Wir beweisen dazu den Satz

$$\vdash\begin{array}{l} \mathfrak{n}(x;\, y \underline{\int} q) = \mathfrak{d}\text{‘} \\ x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \\ y \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \\ ,\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\alpha$$

mit (97), (271), (265) und dem Satze

$$\vdash\begin{array}{l} x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q)\text{‘} \\ ,\ d \frown (x;\, y \underline{\int} q) \end{array} \qquad (\beta$$

der aus (269) und (270) mit dem Satze

$$\vdash\begin{array}{l} x \frown (y \frown \dot{\smile}\, q)\text{‘} \\ x \frown (d \frown \dot{\smile}\, q) \\ ,\ d \frown (y \frown \dot{\smile}\, q) \end{array} \qquad (\gamma$$

folgt, den wir mit (144) beweisen.

§ 171. *Aufbau.*

137 $\vdash x \frown (a \frown \dot{\smile} q)$
$d \frown (a \frown q)$
$x \frown (d \frown \dot{\smile} q)$

$\vdash^{\mathfrak{b}\ \mathfrak{a}}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$x \frown (\mathfrak{b} \frown \dot{\smile} q)$ (α

(144): ————————

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$x \frown (d \frown \dot{\smile} q)$
$d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$ (322

(269, 270):: = = = =

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$d \frown (x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q)$ (323

(I e): — — — — —

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$d \frown (x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$ (α

(271):: — — — — — —

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$d \frown (x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q)$ (β

(I f): — — — — — —

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$\mathrm{I}q$
$d \frown (x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q)$
$\mathrm{I}q$ (γ

(265):: — — — — — —

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$\mathrm{I}q$
$d \frown (x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q)$ (δ

$\times$

$\vdash d \frown (x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q)$
$x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$\mathrm{I}q$ (324

$\vdash^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown (x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q)$
$x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$\mathrm{I}q$ (α

(97): — — — — — — —

$\vdash \mathfrak{M}(x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q) = 0$
$x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$\mathrm{I}q$ (β

(139): — — — — — — —

$\vdash 0 \frown (\mathfrak{M}(x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$\mathrm{I}q$ (γ

(321): —·—·—·—·—·—·—·—·

$\vdash 0 \frown (\mathfrak{M}(x ; y \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (325

(III a): ————————

$\vdash 0 \frown (\mathfrak{M}(A \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$
$A = x ; y$ (α

$\times$

$\vdash A = x ; y$
$0 \frown (\mathfrak{M}(A \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (β

(I a): — — — — — — — —

$\vdash d \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$x \frown (d \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q)$
$A = x ; y$
$0 \frown (\mathfrak{M}(A \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (γ

$\vdash^{\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}}\ d \frown (\mathfrak{n} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{m} \frown (d \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \underline{\cdot}\, q)$
$A = \mathfrak{m} ; \mathfrak{n}$
$0 \frown (\mathfrak{M}(A \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} q)$ (δ

(266): — — — — — — — — — — —

$\vdash d \frown (A \mathbin{\underline{\smallint}} q)$
$0 \frown (\mathfrak{M}(A \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (ε

$\vdash^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown (A \mathbin{\underline{\smallint}} q)$
$0 \frown (\mathfrak{M}(A \mathbin{\underline{\smallint}} q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f})$ (ζ

(97): — — — — — — — —

$$\begin{array}{ll}
\vdash\!\!\begin{array}{l} \eta(A\int q)=0 \\ \theta\frown(\eta(A\int q)\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} & (\eta \\
\times & \\
\vdash\!\!\begin{array}{l} \theta\frown(\eta(A\int q)\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) \\ \eta(A\int q)=0 \end{array} & (\vartheta \\
(139): \text{- · - · - · - · - · -} & \\
\vdash \theta\frown(\eta(A\int q)\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) & (326 \\
(\mathrm{III\,b}): \text{————————} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\vdash\!\!\begin{array}{l} u=A\int q \\ \theta\frown(\eta u\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} & (\alpha \\
\smile & \\
\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{A}\;\;\mathfrak{q}}{\smile\smile}\; u=\mathfrak{A}\int\mathfrak{q} \\ \theta\frown(\eta u\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} & (\beta \\
\times & \\
\vdash\!\!\begin{array}{l} \theta\frown(\eta u\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) \\ \overset{\mathfrak{A}\;\;\mathfrak{q}}{\smile\smile}\; u=\mathfrak{A}\int\mathfrak{q} \end{array} & (327
\end{array}$$

A. Beweis des Satzes

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{A}\;\;\mathfrak{q}}{\smile\smile}\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon\frown u)=\mathfrak{A}\int\mathfrak{q} \\ \theta\frown(\eta u\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) \end{array}$$

§ 172. *Zerlegung.*

Wir versuchen den zu beweisenden Satz in Worten so wiederzugeben:

„Wenn die Anzahl eines Begriffes endlich ist, so lassen sich die unter ihn fallenden Gegenstände in eine einfache Reihe ordnen, die von einem bestimmten Gegenstande bis zu einem bestimmten Gegenstande läuft.“

Dieser Ausdruck ist insofern unvollkommen, als danach der Satz für die Anzahl Null nicht zu gelten scheint. Wir können aber eine reihende Beziehung so annehmen, dass ihrer von $\varDelta$ bis Θ laufenden Reihe kein Gegenstand angehört, indem das niemals eintritt, was die Definition (P) fordert, damit ein Gegenstand dieser von $\varDelta$ bis Θ laufenden Reihe angehöre.

Wir haben nach (314)

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \eta u=\eta(1\,;\,\eta u\int\mathfrak{f}) \\ \theta\frown(\eta u\frown\overset{\cdot}{\smile}\mathfrak{f}) \end{array}$$

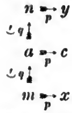
Danach giebt es eine Beziehung, die den $(1\,;\,\eta u\int\mathfrak{f})$-Begriff in den u-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet. Es sei dies die p-Beziehung. Wir zeigen nun, dass wir die $(\rangle p - \mathfrak{f} - p)$-Beziehung als reihende nehmen können. Es ist zunächst zu zeigen, dass jeder unter den u-Begriff fallende Gegenstand der von x bis y laufenden $(\rangle p - \mathfrak{f} - p)$-Reihe angehört, wo 1 zu x und ηu zu y in der p-Beziehung steht. Wir schreiben allgemeiner statt ‚1‘ ‚m‘, statt ‚ηu‘ ‚n‘ und statt ‚$\mathfrak{f}$‘ ‚q‘ und beweisen den Satz

$$\vdash\!\!\begin{array}{ll} c\frown(x\,;\,y\int(\rangle p - q - p)) & \\ c\frown u & \\ m\frown(x\frown p) & \\ m\,;\,n\int q\frown(u\frown\rangle p) & \\ u\frown(m\,;\,n\int q\frown\rangle p) & \\ n\frown(y\frown p) & (\alpha \end{array}$$

der mit (8) aus

$$\vdash\!\!\begin{array}{ll} c\frown(x\,;\,y\int(\rangle p - q - p)) & \\ c\frown(a\frown\rangle p) & \\ a\frown(m\,;\,n\int q) & \\ m\frown(x\frown p) & \\ m\,;\,n\int q\frown(u\frown\rangle p) & \\ \mathrm{I}\rangle p & \\ n\frown(y\frown p) & (\beta \end{array}$$

folgt. Folgendes Bild erleichtere das Verständniss:



Um (β) zu beweisen, brauchen wir unter andern folgende Sätze

$$\vdash x \frown (c \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p))$$
$$a \frown (c \frown p)$$
$$a \frown (m;\, n \int q)$$
$$m \frown (x \frown p)$$
$$,\ m;\, n \int q \frown (u \frown) p) \qquad (\gamma$$

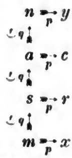
und

$$\vdash c \frown (y \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p))$$
$$n \frown (y \frown p)$$
$$a \frown (c \frown p)$$
$$a \frown (m;\, n \int q)$$
$$,\ m;\, n \int q \frown (u \frown) p) \qquad (\delta$$

die wir aus

$$\vdash r \frown (c \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p))$$
$$a \frown (c \frown p)$$
$$a \frown (n \frown \dot{\smile} q)$$
$$s \frown (r \frown p)$$
$$m \frown (s \frown \dot{\smile} q)$$
$$b \frown (m;\, n \int q)$$
$$m;\, n \int q \frown (u \frown) p)$$
$$,\ s \frown (a \frown \dot{\smile} q) \qquad (\varepsilon$$

ableiten, indem wir einmal r mit x, s mit m und b mit a, das andere Mal c mit y, a mit n und b mit s zusammenfallen lassen und dann für „s" „a" und für „r" „c" schreiben. Man vergleiche hierzu folgendes Bild.



Wir gebrauchen, um (ε) abzuleiten, (152), indem wir die Functionsmarke „$F(\xi)$" durch

$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p))$$
$$\xi \frown (\mathfrak{e} \frown p)$$
$$,\ \xi \frown (n \frown \dot{\smile} q)$$

ersetzen. Dabei werden wie im Beweise von (186) die Sätze (183) und (185) angewendet, wodurch das Unterglied

$$„— m;\, n \int q \frown (u \frown) p)"$$

eingeführt wird.

§ 173. *Aufbau.*

$$183 \quad \vdash d \frown (m;\, n \int q)$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$$
$$m;\, n \int q \frown (u \frown) p)$$

(273): - - - - - - - - - -

$$\vdash d \frown (n \frown \dot{\smile} q)$$
$$m \frown (d \frown \dot{\smile} q)$$
$$n \frown (n \frown \dot{\smile} q)$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$$
$$m;\, n \int q \frown (u \frown) p)$$
$$\mathrm{I} q \qquad (\alpha$$

(271, 265):: = = = = = = =

$$\vdash d \frown (n \frown \dot{\smile} q)$$
$$m \frown (d \frown \dot{\smile} q)$$
$$b \frown (m;\, n \int q)$$
$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ d \frown (\mathfrak{a} \frown p)$$
$$m;\, n \int q \frown (u \frown) p) \qquad (\beta$$

(185):: - - - - - - - - - -

$$\vdash d \frown (n \frown \dot{\smile} q)$$
$$m \frown (d \frown \dot{\smile} q)$$
$$b \frown (m;\, n \int q)$$
$$a \frown (c \frown p)$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$r \frown (c \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p))$$
$$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p))$$
$$d \frown (\mathfrak{e} \frown p)$$
$$m;\, n \int q \frown (u \frown) p) \qquad (\gamma$$

$$\begin{array}{l}
r \frown (c \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
m \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
a \frown (c \frown p) \\
d \frown (a \frown q) \\
d \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
d \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
m ; n \,\S\, q \frown (u \frown \rangle p)
\end{array} \qquad (\delta$$

(I):: - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
r \frown (c \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
m \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
a \frown (c \frown p) \\
d \frown (a \frown q) \\
d \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
d \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
d \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
m ; n \,\S\, q \frown (u \frown \rangle p)
\end{array} \qquad (\varepsilon$$

(285):: - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
r \frown (c \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
a \frown (c \frown p) \\
a \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
d \frown (a \frown q) \\
m \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
d \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
d \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
m ; n \,\S\, q \frown (u \frown \rangle p)
\end{array} \qquad (\zeta$$

(322):: - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
r \frown (c \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
a \frown (c \frown p) \\
a \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
d \frown (a \frown q) \\
s \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
d \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
d \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
m \frown (s \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
m ; \underbrace{n \,\S}\, q \frown (u \frown \rangle p)
\end{array} \qquad (\eta$$

$$\begin{array}{l}
\smile^{\mathfrak{d}}\;\smile^{\mathfrak{a}}\;\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
\mathfrak{a} \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
\mathfrak{a} \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\
s \frown (\mathfrak{d} \frown \dot{\smile} q) \\
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
\mathfrak{d} \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
\mathfrak{d} \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
m \frown (s \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
m ; n \,\S\, q \frown (u \frown \rangle p)
\end{array} \qquad (\vartheta$$

(152): - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
a \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
a \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
s \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
s \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
m \frown (s \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
m ; n \,\S\, q \frown (u \frown \rangle p) \\
s \frown (a \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (\iota$$

(I):: - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
a \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
a \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
s \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
m \frown (s \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
m ; n \,\S\, q \frown (u \frown \rangle p) \\
s \frown (a \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (\varkappa$$

(182):: - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\smile^{\mathfrak{e}}\; r \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile}(\ddagger p - q - p)) \\
a \frown (\mathfrak{e} \frown p) \\
a \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
s \frown (r \frown p) \\
m \frown (s \frown \dot{\smile} q) \\
b \frown (m ; n \,\S\, q) \\
m ; n \,\S\, q \frown (u \frown \rangle p) \\
s \frown (a \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (\lambda$$

(IIa): - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash r \frown (c \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad a \frown (c \frown p) \\
\quad a \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\quad s \frown (r \frown p) \\
\quad m \frown (s \frown \dot{\smile} q) \\
\quad b \frown (m;\, n \measuredangle q) \\
\quad m;\, n \measuredangle q \frown (u \frown \rangle p) \\
\quad s \frown (a \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (328$$

———•———

$$140 \quad \vdash m \frown (m \frown \dot{\smile} q)$$

(328): ————————

$$\begin{array}{l}
\vdash x \frown (c \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad a \frown (c \frown p) \\
\quad a \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\quad m \frown (x \frown p) \\
\quad a \frown (m;\, n \measuredangle q) \\
\quad m;\, n \measuredangle q \frown (u \frown \rangle p) \\
\quad m \frown (a \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (\alpha$$

(269, 270) :: = = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}
\vdash x \frown (c \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad a \frown (c \frown p) \\
\quad a \frown (m;\, n \measuredangle q) \\
\quad m \frown (x \frown p) \\
\quad m;\, n \measuredangle q \frown (u \frown \rangle p)
\end{array} \qquad (329$$

———•———

$$140 \quad \vdash n \frown (n \frown \dot{\smile} q)$$

(328): ————————

$$\begin{array}{l}
\vdash c \frown (y \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad n \frown (y \frown p) \\
\quad a \frown (c \frown p) \\
\quad m \frown (a \frown \dot{\smile} q) \\
\quad a \frown (m;\, n \measuredangle q) \\
\quad m;\, n \measuredangle q \frown (u \frown \rangle p) \\
\quad a \frown (n \frown \dot{\smile} q)
\end{array} \qquad (\alpha$$

(269, 270) :: = = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}
\vdash c \frown (y \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad n \frown (y \frown p) \\
\quad a \frown (c \frown p) \\
\quad a \frown (m;\, n \measuredangle q) \\
\quad m;\, n \measuredangle q \frown (u \frown \rangle p)
\end{array} \qquad (\beta$$

(274): — — — — — — — — — —

$$\begin{array}{l}
\vdash c \frown (x;\, y \measuredangle (\between p - q - p)) \\
\quad x \frown (c \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad \top\, y \frown (y \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad n \frown (y \frown p) \\
\quad a \frown (c \frown p) \\
\quad a \frown (m;\, n \measuredangle q) \\
\quad m;\, n \measuredangle q \frown (u \frown \rangle p) \\
\quad \mathrm{I}(\between p - q - p)
\end{array} \qquad (\gamma$$

(329) :: — — — — — — — — — — —

$$\begin{array}{l}
\vdash c \frown (x;\, y \measuredangle (\between p - q - p)) \\
\quad a \frown (c \frown p) \\
\quad a \frown (m;\, n \measuredangle q) \\
\quad m \frown (x \frown p) \\
\quad m;\, n \measuredangle q \frown (u \frown \rangle p) \\
\quad \top\, y \frown (y \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad n \frown (y \frown p) \\
\quad \mathrm{I}(\between p - q - p)
\end{array} \qquad (330$$

§ 174. *Zerlegung.*

Um das Unterglied

$$„\top\, y \frown (y \frown \dot{\smile}(\between p - q - p))“$$

wegzuschaffen, beweisen wir den Satz

$$\begin{array}{l}
„\vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\
\quad \mathrm{I}\between p \\
\quad x \frown (y \frown \dot{\smile}(\between p - q - p)) \\
\quad m \frown (x \frown p) \\
\quad n \frown (y \frown p)“,
\end{array} \qquad (\alpha$$

den wir mit (177) auf

$$\begin{array}{l}
„\vdash m \frown (n \frown t) \\
\quad x \frown (y \frown (\between p - t - p)) \\
\quad m \frown (x \frown p) \\
\quad \mathrm{I}\between p \\
\quad n \frown (y \frown p)“.
\end{array} \qquad (\beta$$

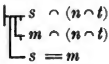
zurückführen. Wir zeigen, dass es Gegenstände s und a giebt der Art, dass s zu x und a zu y in der p-Beziehung stehen, und dass a auf s in der q-Reihe folgt. Aus der Eindeutigkeit der umgekehrten p-Beziehung folgt dann, dass s mit m

und a mit n zusammenfällt, dass also n auf m in der q-Reihe folgt. Auch das Unterglied

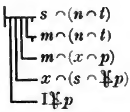
$$,\!-\mathrm{I}(\natural p \frown q \frown p)`$$

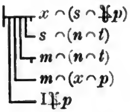
ist zu entfernen. Das geschieht leicht mit (17).

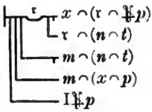
§ 175. *Aufbau.*

IIIa 

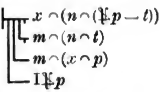
(78):: - - - - -

 (α

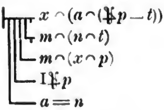
 (β

 (γ

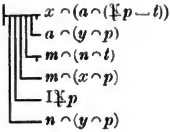
(15): - - - - - - - -

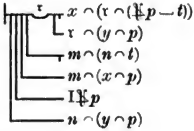
 (δ

(IIIa): ————————

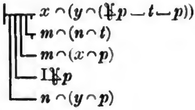
 (ε

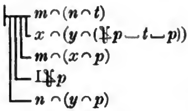
(79):: - - - - - - - - - -

 (ζ

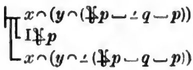
 (η

(15): - - - - - - - - - - -

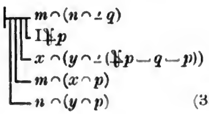
 (ϑ

 (331

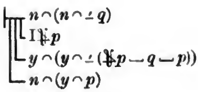
———•———

177 

(331): - - - - - - - - - - -

 (332

———•———

332 

```
├┬┬─ y ⌢ (y ⌢ ⫠ (⋕p ─ q ─ p))
││└─ I⋕p
│└┬─ n ⌢ (n ⌢ ⫠ q)
└──── n ⌢ (y ⌢ p)                               (α
```

(271)::- - - - - - - - - - -

```
├┬┬─ y ⌢ (y ⌢ ⫠ (⋕p ─ q ─ p))
││└─ I⋕p
│└── a ⌢ (m; n ꞩ q)
└──── n ⌢ (y ⌢ p)                               (333
```

———•———

```
17   ├┬┬─ I(⋕p ─ q)
      ││└─ Iq
      └─── I⋕p
```

(17):- - - - - -

```
├┬┬─ I(⋕p ─ q ─ p)
││└─ Ip
│└── Iq
└──── I⋕p                                       (α
```

(265, 18)::= = = = =

```
├┬┬─ I(⋕p ─ q ─ p)
││└─ m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
│└── a ⌢ (m; n ꞩ q)
└──── I⋕p                                       (β
```

(330):- - - - - - - -

```
├┬┬┬┬┬┬─ c ⌢ (x; y ꞩ (⋕p ─ q ─ p))
││││││└─ a ⌢ (c ⌢ p)
│││││└── a ⌢ (m; n ꞩ q)
││││└─── m ⌢ (x ⌢ p)
│││└──── m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
││└┬──── y ⌢ (y ⌢ ⫠ (⋕p ─ q ─ p))
│└────── n ⌢ (y ⌢ p)
└─────── I⋕p                                    (γ
```

(23, 333)::= = = = = = = = = =

```
├┬┬┬┬┬┬─ c ⌢ (x; y ꞩ (⋕p ─ q ─ p))
││││││└─ c ⌢ (a ⌢ ⋕p)
│││││└── a ⌢ (m; n ꞩ q)
││││└─── m ⌢ (x ⌢ p)
│││└──── m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
││└───── I⋕p
│└────── n ⌢ (y ⌢ p)                            (δ
```

×

```
├┬┬┬┬┬┬─ a ⌢ (m; n ꞩ q)
││││││└─ c ⌢ (a ⌢ ⋕p)
│││││└┬─ c ⌢ (x; y ꞩ (⋕p ─ q ─ p))
││││└─── m ⌢ (x ⌢ p)
│││└──── m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
││└───── I⋕p
│└────── n ⌢ (y ⌢ p)                            (ε
```

‿

```
├┬┬┬┬─𝔞─┬─ 𝔞 ⌢ (m; n ꞩ q)
│││││    └─ c ⌢ (𝔞 ⌢ ⋕p)
││││└────┬─ c ⌢ (x; y ꞩ (⋕p ─ q ─ p))
│││└──────── m ⌢ (x ⌢ p)
││└───────── m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
│└────────── I⋕p
└─────────── n ⌢ (y ⌢ p)                        (ζ
```

(8):- - - - - - - - - - - - -

```
├┬┬┬┬┬┬─ c ⌢ u
││││││└┬ c ⌢ (x; y ꞩ (⋕p ─ q ─ p))
│││││└── m ⌢ (x ⌢ p)
││││└─── m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
│││└──── I⋕p
││└───── n ⌢ (y ⌢ p)
│└────── u ⌢ (m; n ꞩ q ⌢) ⋕p)                   (η
```

(18)::- - - - - - - - - -

```
├┬┬┬┬┬─ c ⌢ u
│││││└┬ c ⌢ (x; y ꞩ (⋕p ─ q ─ p))
││││└── m ⌢ (x ⌢ p)
│││└─── m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
││└──── u ⌢ (m; n ꞩ q ⌢) ⋕p)
│└───── n ⌢ (y ⌢ p)                             (ϑ
```

×

```
├┬┬┬┬┬─ c ⌢ (x; y ꞩ (⋕p ─ q ─ p))
│││││└─ c ⌢ u
││││└── m ⌢ (x ⌢ p)
│││└─── m; n ꞩ q ⌢ (u ⌢) p)
││└──── u ⌢ (m; n ꞩ q ⌢) ⋕p)
│└───── n ⌢ (y ⌢ p)                             (334
```

§ 176. *Zerlegung.*

Wir haben nun den Satz (α) des § 172 bewiesen. Es bleibt uns noch der Satz

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown u \\ \quad c \frown (x;\, y \,\underline{\wedge}\, (\natural p - q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad u \frown (m;\, n \,\underline{\wedge}\, q \frown) \natural p) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad n \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \quad m;\, n \,\underline{\wedge}\, q \frown (u \frown) p) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\alpha$$

abzuleiten. Dieser ist mit (179) aus den Sätzen

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (c \frown \underline{\smile}(\natural p - q - p)) \\ \quad m \frown (x \frown p) \\ \quad \mathrm{I}\natural p \\ \quad \mathfrak{r}:\; m \frown (\mathfrak{r} \frown \underline{\smile}\, q) \\ \qquad \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \end{array} \qquad (\beta$$

und

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (y \frown \underline{\smile}(\natural p - q - p)) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad \mathfrak{r}:\; \mathfrak{r} \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \qquad \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \\ \quad \mathrm{I}\natural p \end{array} \qquad (\gamma$$

abzuleiten, indem aus der Eindeutigkeit der $\natural p$-Beziehung geschlossen wird, dass derselbe Gegenstand, der zu c in der p-Beziehung steht, auch der mit m anfangenden und auch der mit n endenden q-Reihe angehört. Statt (β) und (γ) beweisen wir zunächst die Sätze, die bei denselben Untergliedern als Oberglieder haben

$$\text{„} \vdash x \frown (c \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \text{“}$$

und

$$\text{„} \vdash c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \text{“}$$

Mit dem Satze (180) gehen wir zu (β) über. Um zu (γ) überzugehen, bedürfen wir des ähnlichen Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad c \frown (y \frown \underline{\smile}(\natural p - q - p)) \\ \quad \mathrm{I}\natural p \end{array} \qquad (\delta$$

den wir aus (177) ableiten.

§ 177. *Aufbau.*

$$\begin{array}{l} 136 \quad \vdash a \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \qquad\quad a \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \end{array}$$

(174): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad a \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \quad c \frown (a \frown \natural p) \end{array} \qquad (\alpha$$

$\times$

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (a \frown \natural p) \\ \quad a \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{r}:\; c \frown (\mathfrak{r} \frown \natural p) \\ \qquad \mathfrak{r} \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

(15): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (n \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q)) \\ \quad n \frown (y \frown p) \\ \quad c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \end{array} \qquad (\delta$$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{r}:\; c \frown (\mathfrak{r} \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q)) \\ \qquad \mathfrak{r} \frown (y \frown p) \\ \quad c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(15): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \\ \quad c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \end{array} \qquad (\zeta$$

$\times$

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \\ \quad c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \end{array} \qquad (\eta$$

(177):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \\ \quad \mathrm{I}\natural p \\ \quad c \frown (y \frown \underline{\smile}(\natural p - q - p)) \end{array} \qquad (\vartheta$$

———•———

$$140 \quad \vdash n \frown (n \frown \underline{\smile}\, q)$$

(184): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown (y \frown (\natural p - \underline{\smile}\, q - p)) \\ \quad n \frown (y \frown p) \end{array} \qquad (\iota$$

(IIIc): ————————————

$$\begin{array}{l} c \frown (y \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q \smile p)) \\ n \frown (y \frown p) \\ y = c \end{array} \qquad (\varkappa$$

(130):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} c \frown (y \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q \smile p)) \\ n \frown (y \frown p) \\ c \frown (y \frown \dot{\smile}(\nmid p \smile q \smile p)) \\ c \frown (y \frown \dot{\smile}(\nmid p \smile q \smile p)) \end{array} \qquad (\lambda$$

(ϑ): -·-·-·-·-·-·-·-·-

$$\begin{array}{l} c \frown (y \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q \smile p)) \\ n \frown (y \frown p) \\ c \frown (y \frown \dot{\smile}(\nmid p \smile q \smile p)) \\ \mathrm{I} \nmid p \end{array} \qquad (335$$

×

$$\begin{array}{l} c \frown (y \frown \dot{\smile}(\nmid p \smile q \smile p)) \\ n \frown (y \frown p) \\ c \frown (y \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q \smile p)) \\ \mathrm{I} \nmid p \end{array} \qquad (336$$

———•———

23 $$\begin{array}{l} a \frown (c \frown p) \\ c \frown (a \frown \nmid p) \end{array}$$

(II a): - - - - -

$$\begin{array}{l} a \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ c \frown (a \frown \nmid p) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \end{array} \qquad (\alpha$$

×

$$\begin{array}{l} c \frown (a \frown \nmid p) \\ a \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} c \frown (\mathfrak{r} \frown \nmid p) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \end{array} \qquad (\gamma$$

(15): - - - - - - -

$$\begin{array}{l} c \frown (n \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q)) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \end{array} \qquad (\delta$$

(III a): ————————————

$$\begin{array}{l} c \frown (e \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q)) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \\ e = n \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(79):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} c \frown (e \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q)) \\ e \frown (y \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \\ n \frown (y \frown p) \\ \mathrm{I} \nmid p \end{array} \qquad (\zeta$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l} c \frown (\mathfrak{r} \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q)) \\ \mathfrak{r} \frown (y \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \\ n \frown (y \frown p) \\ \mathrm{I} \nmid p \end{array} \qquad (\iota$$

(15): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} c \frown (y \frown (\nmid p \smile \dot{\smile}\, q \smile p)) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \\ n \frown (y \frown p) \\ \mathrm{I} \nmid p \end{array} \qquad (\vartheta$$

(336): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} c \frown (y \frown \dot{\smile}(\nmid p \smile q \smile p)) \\ n \frown (y \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \\ \mathrm{I} \nmid p \end{array} \qquad (337$$

———•———

III a $$\begin{array}{l} s \frown (a \frown \dot{\smile}\, q) \\ m \frown (a \frown \dot{\smile}\, q) \\ s = m \end{array}$$

(II a):: - - - - - -

$$\begin{array}{l} s \frown (a \frown \dot{\smile}\, q) \\ a \frown (c \frown p) \\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile}\, q) \\ \mathfrak{r} \frown (c \frown p) \\ s = m \end{array} \qquad (\alpha$$

(78):: - - - - - - -

$\vdash s \frown (a \frown \smile q)$
$\quad a \frown (c \frown p)$
$\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \smile q)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad x \frown (s \frown \nparallel p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$ (β

×

$\vdash x \frown (s \frown \nparallel p)$
$\quad s \frown (a \frown \smile q)$
$\quad a \frown (c \frown p)$
$\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \smile q)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$ (γ

$\smile$

$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ x \frown (\mathfrak{r} \frown \nparallel p)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (a \frown \smile q)$
$\quad a \frown (c \frown p)$
$\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \smile q)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$ (δ

(15): - - - - - - - -

$\vdash x \frown (a \frown (\nparallel p \smile \smile q))$
$\quad a \frown (c \frown p)$
$\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \smile q)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$ (ε

$\smile$

$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ x \frown (\mathfrak{r} \frown (\nparallel p \smile \smile q))$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$
$\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \smile q)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$ (ζ

(15): - - - - - - - - - - -

$\vdash x \frown (c \frown (\nparallel p \smile \smile q \smile p))$
$\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \smile q)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$ (η

——•——

180 $\vdash x \frown (c \frown (\nparallel p \smile \smile q \smile p))$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$
$\quad x \frown (c \frown \smile (\nparallel p \smile q \smile p))$

×

$\vdash x \frown (c \frown \smile (\nparallel p \smile q \smile p))$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$
$\quad x \frown (c \frown (\nparallel p \smile \smile q \smile p))$ (ϑ

(η):: - - - - - - - - - - -

$\vdash x \frown (c \frown \smile (\nparallel p \smile q \smile p))$
$\quad m \frown (x \frown p)$
$\quad \mathrm{I}\nparallel p$
$\quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ m \frown (\mathfrak{r} \frown \smile q)$
$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$ (338

——•——

II a $\vdash g(a) = (\text{—} a \frown u)$
$\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ g(\mathfrak{a}) = (\text{—} \mathfrak{a} \frown u)$

(46): - - - - - - - - -

$\vdash g(a) = (\text{—} f(a))$
$\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ g(\mathfrak{a}) = (\text{—} \mathfrak{a} \frown u)$
$\quad \grave{\varepsilon}(\text{—} f(\varepsilon)) = u$ (α

$\smile$

$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ g(\mathfrak{a}) = (\text{—} f(\mathfrak{a}))$
$\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ g(\mathfrak{a}) = (\text{—} \mathfrak{a} \frown u)$
$\quad \grave{\varepsilon}(\text{—} f(\varepsilon)) = u$ (β

(Va): - - - - - - - - - -

$\vdash \grave{\varepsilon} g(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\text{—} f(\varepsilon))$
$\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ g(\mathfrak{a}) = (\text{—} \mathfrak{a} \frown u)$
$\quad \grave{\varepsilon}(\text{—} f(\varepsilon)) = u$ (γ

(III c): ————————————

$\vdash \grave{\varepsilon} g(\varepsilon) = u$
$\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ g(\mathfrak{a}) = (\text{—} \mathfrak{a} \frown u)$
$\quad \grave{\varepsilon}(\text{—} f(\varepsilon)) = u$ (339

——•——

P $\vdash \grave{\varepsilon}\left[\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{n}\ \mathfrak{m}}{\smile\smile}\ \varepsilon \frown (\mathfrak{n} \frown \dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{m} \frown (\varepsilon \frown \dot{\smile} q) \\ \quad \mathfrak{n} \frown (\mathfrak{n} \frown \bot q) \\ \quad A = \mathfrak{m};\mathfrak{n} \\ \quad \mathrm{I}q \end{array}\right] = A \mathbin{\unicode{x2A1B}} q$

(339):

$\vdash \grave{\varepsilon} g(\varepsilon) = A \mathbin{\unicode{x2A1B}} q$

$\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ g(\mathfrak{a}) = (\text{—}\, \mathfrak{a} \frown (A \mathbin{\unicode{x2A1B}} q))$ (340

---

179 $\vdash a \frown (m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q)$

$a \frown (c \frown p)$

$c \frown u$

$m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q \frown (u \frown) p)$

(273): - - - - - - - - -

$\vdash a \frown (n \frown \dot{\smile} q)$

$m \frown (a \frown \dot{\smile} q)$

$n \frown (n \frown \bot q)$

$a \frown (c \frown p)$

$c \frown u$

$m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q \frown (u \frown) p)$

$\mathrm{I}q$ (α

(III a): ————————

$\vdash s \frown (n \frown \dot{\smile} q)$

$m \frown (a \frown \dot{\smile} q)$

$n \frown (n \frown \bot q)$

$s \frown (c \frown p)$

$c \frown u$

$m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q \frown (u \frown) p)$

$\mathrm{I}q$

$s = a$ (β

(79):: - - - - - - - - - -

$\vdash s \frown (n \frown \dot{\smile} q)$

$s \frown (c \frown p)$

$m \frown (a \frown \dot{\smile} q)$

$n \frown (n \frown \bot q)$

$c \frown u$

$m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q \frown (u \frown) p)$

$\mathrm{I}q$

$a \frown (c \frown p)$

$\mathrm{I}\rlap{\,\times}\mathrm{I}p$ (γ

$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\smile} q)$

$\quad \mathfrak{r} \frown (c \frown p)$

$m \frown (a \frown \dot{\smile} q)$

$n \frown (n \frown \bot q)$

$c \frown u$

$m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q \frown (u \frown) p)$

$\mathrm{I}q$

$a \frown (c \frown p)$

$\mathrm{I}\rlap{\,\times}\mathrm{I}p$ (δ

(337): - - - - - - - - - - -

$\vdash c \frown (y \frown \dot{\smile} (\mathrm{I}\rlap{\,\times}\mathrm{I}p - q - p))$

$n \frown (y \frown p)$

$m \frown (a \frown \dot{\smile} q)$

$n \frown (n \frown \bot q)$

$c \frown u$

$m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q \frown (u \frown) p)$

$\mathrm{I}q$

$a \frown (c \frown p)$

$\mathrm{I}\rlap{\,\times}\mathrm{I}p$ (ε

×

$\vdash m \frown (a \frown \dot{\smile} q)$

$a \frown (c \frown p)$

$n \frown (y \frown p)$

$c \frown (y \frown \dot{\smile} (\mathrm{I}\rlap{\,\times}\mathrm{I}p - q - p))$

$n \frown (n \frown \bot q)$

$c \frown u$

$m;n \mathbin{\unicode{x2A1B}} q \frown (u \frown) p)$

$\mathrm{I}q$

$\mathrm{I}\rlap{\,\times}\mathrm{I}p$ (ζ

⊢ 𝔯 ⌣ m ⌢ (𝔯 ⌢ ⌣q)
 𝔯 ⌢ (c ⌢ p)
 n ⌢ (y ⌢ p)
 c ⌢ (y ⌢ ⌣(⅍p — q — p))
 n ⌢ (n ⌢ ⊥ q)
 c ⌢ u
 m; n ⨼ q ⌢ (u ⌢) p)
 Iq
 I⅍p (η

(338): - - - - - - - - - - - - -

⊢ x ⌢ (c ⌢ ⌣(⅍p — q — p))
 m ⌢ (x ⌢ p)
 I⅍p
 n ⌢ (y ⌢ p)
 c ⌢ (y ⌢ ⌣(⅍p — q — p))
 n ⌢ (n ⌢ ⊥ q)
 c ⌢ u
 m; n ⨼ q ⌢ (u ⌢) p)
 Iq (ϑ

×

⊢ c ⌢ u
 m ⌢ (x ⌢ p)
 I⅍p
 n ⌢ (y ⌢ p)
 c ⌢ (y ⌢ ⌣(⅍p — q — p))
 n ⌢ (n ⌢ ⊥ q)
 x ⌢ (c ⌢ ⌣(⅍p — q — p))
 m; n ⨼ q ⌢ (u ⌢) p)
 Iq (ι

(269, 270):: = = = = = = = = =

⊢ c ⌢ u
 m ⌢ (x ⌢ p)
 I⅍p
 n ⌢ (y ⌢ p)
 c ⌢ (x; y ⨼ (⅍p — q — p))
 n ⌢ (n ⌢ ⊥ q)
 m; n ⨼ q ⌢ (u ⌢) p)
 Iq (κ

(18):: - - - - - - - - - - -

⊢ c ⌢ u
 c ⌢ (x; y ⨼ (⅍p — q — p))
 m ⌢ (x ⌢ p)
 u ⌢ (m; n ⨼ q ⌢) ⅍p)
 n ⌢ (y ⌢ p)
 n ⌢ (n ⌢ ⊥ q)
 m; n ⨼ q ⌢ (u ⌢) p)
 Iq (λ

(IVa): - - - - - - - - - - - -

⊢ (— c ⌢ u) = (— c ⌢ (x; y ⨼ (⅍p — q — p)))
 c ⌢ (x; y ⨼ (⅍p — q — p))
 c ⌢ u
 m ⌢ (x ⌢ p)
 u ⌢ (m; n ⨼ q ⌢) ⅍p)
 n ⌢ (y ⌢ p)
 n ⌢ (n ⌢ ⊥ q)
 m; n ⨼ q ⌢ (u ⌢) p)
 Iq (μ

(334):: - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash (—c\frown u)=(—c\frown(x;\,y\,\S\,(\between p — q — p)))\\
\quad m\frown(x\frown p)\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (\nu$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}(—\mathfrak{a}\frown u)=(—\mathfrak{a}\frown(x;\,y\,\S\,(\between p — q — p)))\\
\quad m\frown(x\frown p)\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (\xi$$

(340): - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash \grave{\varepsilon}(—\varepsilon\frown u)=x;\,y\,\S\,(\between p — q — p)\\
\quad m\frown(x\frown p)\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (o$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l}
\vdash m\frown(x\frown p)\\
\quad \neg\; \grave{\varepsilon}(—\varepsilon\frown u)=x;\,y\,\S\,(\between p — q — p)\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (\pi$$

(IIa):: - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash \neg\; m\frown(x\frown p)\\
\quad \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\neg\; \grave{\varepsilon}(—\varepsilon\frown u)=x;\,y\,\S\,\mathfrak{q}\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (\varrho$$

(IIa):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash \neg\; m\frown(x\frown p)\\
\quad \overset{\mathfrak{A}}{\smile}\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\neg\; \grave{\varepsilon}(—\varepsilon\frown u)=\mathfrak{A}\,\S\,\mathfrak{q}\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (\sigma$$

(Ia): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash \neg\; x\frown u\\
\qquad m\frown(x\frown p)\\
\quad \overset{\mathfrak{A}}{\smile}\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\neg\; \grave{\varepsilon}(—\varepsilon\frown u)=\mathfrak{A}\,\S\,\mathfrak{q}\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (\tau$$

$$\smile$$

$$\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\neg\; \mathfrak{a}\frown u\\
\qquad m\frown(\mathfrak{a}\frown p)\\
\quad \overset{\mathfrak{A}}{\smile}\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\neg\; \grave{\varepsilon}(—\varepsilon\frown u)=\mathfrak{A}\,\S\,\mathfrak{q}\\
\quad u\frown(m;\,n\,\S\,q\frown)\between p)\\
\quad n\frown(y\frown p)\\
\quad \neg\; n\frown(n\frown\perp q)\\
\quad m;\,n\,\S\,q\frown(u\frown)\,p)\\
\quad \mathrm{I}q
\end{array} \qquad (341$$

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\!-\!\!\!\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = x;\, y \,\S\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) & \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\; \mathfrak{a} \frown u & (\vartheta \end{array}$$

$$\times$$

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\; \mathfrak{a} \frown u & \\ \quad \llcorner\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = x;\, y \,\S\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \alpha) & (\iota \end{array}$$

(IIa)::- - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\; \mathfrak{a} \frown u & \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{q}}\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = x;\, y \,\S\, \mathfrak{q} & (\varkappa \end{array}$$

(IIa)::- - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\top\!\!-\!\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\; \mathfrak{a} \frown u & \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{A}}\!\smile^{\mathfrak{q}}\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \,\S\, \mathfrak{q} & (\lambda \end{array}$$

$$\times$$

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{A}}\!\smile^{\mathfrak{q}}\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \,\S\, \mathfrak{q} & \\ \quad \llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\; \mathfrak{a} \frown u & (\mu \end{array}$$

(345):-·-·-·-·-·-·-·-·-·

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{A}}\!\smile^{\mathfrak{q}}\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \,\S\, \mathfrak{q} & \\ \quad \llcorner\!-\; \mathfrak{N}(m;\, n \,\S\, q) = \mathfrak{N}u & (346 \end{array}$$

(IIIf)::- - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{A}}\!\smile^{\mathfrak{q}}\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \,\S\, \mathfrak{q} & \\ \quad \llcorner\!-\; \mathfrak{N}u = \mathfrak{N}(m;\, n \,\S\, q) & (347 \end{array}$$

———•———

$$\begin{array}{ll} 347\quad \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{A}}\!\smile^{\mathfrak{q}}\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \,\S\, \mathfrak{q} & \\ \quad \llcorner\!-\; \mathfrak{N}u = \mathfrak{N}(1;\, \mathfrak{N}u \,\S\, \mathfrak{f}) & \end{array}$$

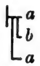
(314)::- - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\top\!\smile^{\mathfrak{A}}\!\smile^{\mathfrak{q}}\!\top\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \,\S\, \mathfrak{q} & \\ \quad \llcorner\!-\; 0 \frown (\mathfrak{N}u \frown \breve{}\,\mathfrak{f}) & (348 \end{array}$$

Anhänge.

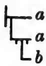
1. Tafel der Grundgesetze

und der aus ihnen zunächst folgenden Sätze.

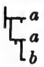


(I (§ 18))

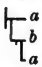
(Ia (§ 49))



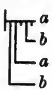
(Ib (§ 49))



(Ic (§ 49))

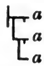


(Id (§ 49))

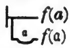


(Ie (§ 49))

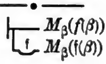
(If (§ 49))



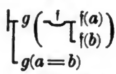
(Ig (§ 49))



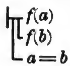
(IIa (§ 20))



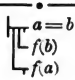
(IIb (§ 25))



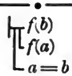
(III (§ 20))



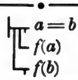
(IIIa (§ 50))



(IIIb (§ 50))



(IIIc (§ 50))



(IIId (§ 50))

$\vdash a = a$ (IIIe (§ 50)

$\vdash b = a$; condition: $a = b$ (IIIf (§ 50)

$\vdash (—a) = (\neg a)$ (IIIg (§ 50)

$\vdash f(a) = f(b)$; condition: $a = b$ (IIIh (§ 50)

$\vdash (—a = b) = (a = b)$ (IIIi (§ 50)

$\vdash (—a) = (—b)$; condition: $\neg((—a) = (\neg b))$ (IV (§ 18)

$\vdash (—a) = (—b)$; conditions: b, a, $\neg(a$, $b)$ (IVa (§ 51)

$\vdash (—a) = (\neg\neg a)$ (IVb (§ 51)

$\vdash f(—a)$; condition: $f(\neg\neg a)$ (IVc (§ 51)

$\vdash f(\neg\neg a)$; condition: $f(—a)$ (IVd (§ 51)

$\vdash (a = b) = (b = a)$ (IVe (§ 51)

$\vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = (\forall\mathfrak{a}\; f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$ (V (§ 20)

$\vdash F(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) = F(\grave{\alpha}g(\alpha))$; condition: $\forall\mathfrak{a}\; f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$ (Va (§ 52)

$\vdash f(a) = g(a)$; condition: $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)$ (Vb (§ 52)

$\vdash a = \backslash\grave{\varepsilon}(a = \varepsilon)$ (VI (§ 18)

$\vdash a = \backslash\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$; condition: $\forall\mathfrak{a}\; f(\mathfrak{a}) = (a = \mathfrak{a})$ (VIa (§ 52)

2. Tafel der Definitionen.

$\Vdash \backslash\grave{\alpha}\left(\neg\forall\mathfrak{g}\neg\left[g(a) = \alpha;\ \text{condition: } u = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\right]\right) = a \frown u$ (A

(Beziehung des Hineinfallens eines Gegenstandes in einen Begriffsumfang. § 34, S. 53.)[1])

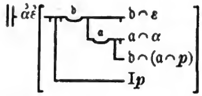
$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\neg\forall\mathfrak{r}\neg\left[\varepsilon \frown (\mathfrak{r} \frown p);\ \text{condition: } \mathfrak{r} \frown (\alpha \frown q)\right]\right) = p \mathbin{\rule[0.5ex]{0.6em}{0.4pt}} q$ (B

(Zusammengesetzte Beziehung. § 54, S. 72.)

$\Vdash \left(\forall\mathfrak{e}\,\forall\mathfrak{d}\,\forall\mathfrak{a}\; \mathfrak{d} = \mathfrak{a};\ \text{conditions: } \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown p),\ \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown p)\right) = \mathrm{I}p$ (Γ

(Eindeutigkeit einer Beziehung. § 37, S. 55.)

1) Diese kurzen Hindeutungen, die ich in Worten den Begriffsschriftdefinitionen hinzufüge, erschöpfen die Sache nicht und machen keinen Anspruch auf strengste Genauigkeit.

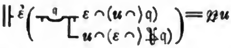


(Δ

(Abbildung durch eine Beziehung. § 38, S. 57.)

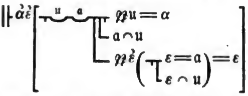
$\Vdash \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}(\alpha \frown (\varepsilon \frown p)) = \between p$ (E

(Umkehrung einer Beziehung. § 39, S. 56.)



(Z

(Die Anzahl eines Begriffes; d. h. die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände. § 40, S. 57.)



(H

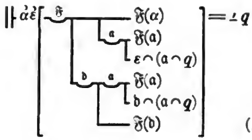
(Beziehung einer Anzahl zur nächstfolgenden. § 43, S. 58.)

$\Vdash \mathfrak{N}\dot{\varepsilon}(\neg\, \varepsilon = \varepsilon) = 0$ (Θ

(Die Anzahl Null. § 41, S. 58.)

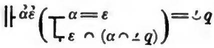
$\Vdash \mathfrak{N}\dot{\varepsilon}(\varepsilon = 0) = 1$ (I

(Die Anzahl Eins. § 42, S. 58.)



(K

(Das Folgen eines Gegenstandes auf einen Gegenstand in der Reihe einer Beziehung. § 45, S. 60.)

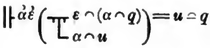


(Λ

(Die Beziehung, dass ein Gegenstand der mit einem Gegenstande anfangenden Reihe einer Beziehung angehört. § 46, S. 60.)

$\Vdash \mathfrak{N}(0 \frown \between \bot f) = \infty$ (M

(Die Anzahl Endlos. § 122, S. 150.)

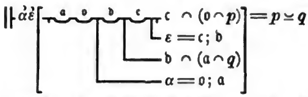


(N

(§ 138, S. 171.)

$\Vdash \dot{\varepsilon}(o \frown (a \frown \varepsilon)) = o;\, a$ (Ξ

(Das Paar. § 144, S. 179.)

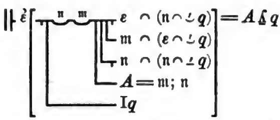


(O

(Koppelung einer Beziehung mit einer Beziehung. § 144, S. 179.)

$\Vdash \dot{\alpha}\dot{\varepsilon}(A \frown (\varepsilon;\, \alpha \frown \bot t)) = A \nwarrow t$ (Π

(§ 144, S. 179.)



(P

(Der Umstand, dass ein Gegenstand einer von einem Gegenstande bis zu einem Gegenstande laufenden Reihe angehört. § 158, S. 201.)

3. Tafel der wichtigeren Lehrsätze.

$$\vdash f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \qquad (1$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \\ \quad\llcorner F(f(a)) \end{array} \qquad (77$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top F(f(a)) \\ \quad\llcorner F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \end{array} \qquad (82$$

—•—

$$\vdash f(a, b) = a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha)) \qquad (2$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top F(f(a, b)) \\ \quad\llcorner F(a \frown (b \frown q)) \\ \quad\llcorner \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array} \qquad (6$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top F(a \frown (b \frown q)) \\ \quad\llcorner F(f(a, b)) \\ \quad\llcorner \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha) = q \end{array} \qquad (10$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top F(f(a, b)) \\ \quad\llcorner F(a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))) \end{array} \qquad (33$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top F(a \frown (b \frown \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}f(\varepsilon, \alpha))) \\ \quad\llcorner F(f(a, b)) \end{array} \qquad (36$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top F(\top a \frown \grave{\varepsilon}(\top f(\varepsilon))) \\ \quad\llcorner F(— f(a)) \end{array} \qquad (58$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top d \frown (m \frown (p \smile q)) \\ \quad\llcorner e \frown (m \frown q) \\ \quad\llcorner d \frown (e \frown p) \end{array} \qquad (5$$

Wenn ein Gegenstand (d) zu einem zweiten (e) in einer (p-)Beziehung steht und wenn der zweite Gegenstand (e) zu einem dritten (m) in einer zweiten (q-)Beziehung steht, so steht der erste Gegenstand zum dritten in der aus der ersten und zweiten zusammengesetzten Beziehung [1]).

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top d \frown (e \frown (\mathbin{)\!(}p \smile q \smile p)) \\ \quad\llcorner c \frown (e \frown p) \\ \quad\llcorner b \frown (c \frown q) \\ \quad\llcorner d \frown (b \frown \mathbin{)\!(}p) \end{array} \qquad (174$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top e \frown (d \frown (p \smile q)) \\ \quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{r}}\!\top e \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \qquad\quad\llcorner \mathfrak{r} \frown (d \frown q) \end{array} \qquad (15$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \mathrm{I}q \\ \quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{e}\;\mathfrak{d}\;\mathfrak{a}}\!\top \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \qquad\qquad\llcorner \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \qquad\qquad\llcorner \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown q) \end{array} \qquad (16$$

—•—

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top d = a \\ \quad\llcorner b \frown (a \frown q) \\ \quad\llcorner b \frown (d \frown q) \\ \quad\llcorner \mathrm{I}q \end{array} \qquad (13$$

Wenn eine Beziehung eindeutig ist und wenn ein Gegenstand (b) zu einem zweiten (d) und einem dritten (a) in dieser Beziehung steht, so fällt der zweite (d) mit dem dritten (a) zusammen.

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top \mathrm{I}(p \smile q) \\ \quad\llcorner \mathrm{I}q \\ \quad\llcorner \mathrm{I}p \end{array} \qquad (17$$

Eine aus zwei Beziehungen zusammengesetzte Beziehung ist eindeutig, wenn jene es sind.

1) Die Uebersetzungen, die ich den Begriffsschriftsätzen anhänge, geben zwar den Hauptinhalt wieder, erschöpfen aber nicht immer den ganzen Inhalt.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, \mathrm{I}q \\ \quad\llcorner\, u \frown (v \frown) q\end{array} \qquad (18$$

—•—

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!-\!\!-\!\!-\, e \frown u \\ \quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad\quad\llcorner\, e \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad\llcorner\!-\!\!-\!\!-\, u \frown (v \frown) q\end{array} \qquad (8$$

—•—

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!-\!\!-\!\!-\, w \frown (v \frown) q \\ \quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{b}}\!\top\, \mathfrak{b} \frown w \\ \qquad\quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \mathfrak{a} \frown v \\ \qquad\qquad\quad\llcorner\, \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad\llcorner\!-\!\!-\!\!-\, \mathrm{I}q\end{array} \qquad (11$$

—•—

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, w \frown (v \frown)(p \smile q)) \\ \quad\llcorner\, u \frown (v \frown) q) \\ \quad\llcorner\, w \frown (u \frown) p)\end{array} \qquad (19$$

Wenn ein Begriff in einen zweiten durch eine erste Beziehung und dieser zweite Begriff in einen dritten durch eine zweite (q-)Beziehung abgebildet wird, so bildet die aus der ersten und zweiten Beziehung zusammengesetzte Beziehung den ersten Begriff in den dritten ab.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, F(\mathfrak{a} \frown (r \frown \mathfrak{U}q)) \\ \quad\llcorner\, F(r \frown (\mathfrak{a} \frown q))\end{array} \qquad (22$$

—•—

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, F(r \frown (\mathfrak{a} \frown q)) \\ \quad\llcorner\, F(\mathfrak{a} \frown (r \frown \mathfrak{U}q))\end{array} \qquad (23$$

—•—

$$\vdash \mathfrak{U}(p \smile q) = \mathfrak{U}q \smile \mathfrak{U}p \qquad (24$$

Die Umkehrung einer Beziehung, die aus einer ersten und einer zweiten zusammengesetzt ist, ist zusammengesetzt aus der Umkehrung der zweiten und der Umkehrung der ersten.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!-\!\!-\, \natural w = \natural z \\ \quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, w \frown (z \frown) \mathfrak{q}) \\ \qquad\quad\llcorner\, z \frown (w \frown) \mathfrak{U}\mathfrak{q})\end{array} \qquad (49$$

Die Anzahl der unter einen ersten (w-)Begriff fallenden Gegenstände fällt nicht zusammen mit der Anzahl der unter einen zweiten (z-)Begriff fallenden, wenn es keine Beziehung giebt, die den ersten Begriff in den zweiten und deren Umkehrung zugleich den zweiten in den ersten abbildet.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, \natural u = \natural v \\ \quad\llcorner\, u \frown (v \frown) q) \\ \quad\llcorner\, v \frown (u \frown) \mathfrak{U}q)\end{array} \qquad (32$$

Die Anzahl der unter einen ersten (u-)Begriff fallenden Gegenstände fällt zusammen mit der Anzahl der unter einen zweiten (v-)Begriff fallenden, wenn eine Beziehung den ersten in den zweiten Begriff abbildet, deren Umkehrung den zweiten in den ersten abbildet.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!-\, \natural u = \natural v \\ \quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\, (-\!\!-\, \mathfrak{a} \frown u) = (-\!\!-\, \mathfrak{a} \frown v)\end{array} \qquad (96$$

—•—

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!-\!\!-\!\!-\, e \frown (a \frown \mathfrak{f}) \\ \quad\llcorner\!\smile^{\mathfrak{u}}\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\top\, \natural\mathfrak{u} = a \\ \qquad\qquad\llcorner\, \mathfrak{a} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\qquad\llcorner\, \natural\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = \mathfrak{a} \\ \llcorner\, \varepsilon \frown \mathfrak{u}\end{array}\right) = e\end{array} \qquad (68$$

—•—

$$\vdash \mathrm{I}\mathfrak{f} \qquad (71$$

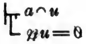
Die Beziehung einer Anzahl zur nächstfolgenden in der Anzahlenreihe ist eindeutig.

$$\vdash \mathrm{I}\mathfrak{U}\mathfrak{f} \qquad (89$$

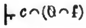
Die Beziehung einer Anzahl zur nächstvorhergehenden in der Anzahlenreihe ist eindeutig.

$$\begin{array}{l}\vdash\!\top\, m \frown (n \frown \mathfrak{f}) \\ \quad\llcorner\, c \frown u \\ \quad\llcorner\, \natural\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon = c \\ \llcorner\, \varepsilon \frown u\end{array}\right) = m \\ \quad\llcorner\, \natural u = n\end{array} \qquad (101$$

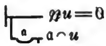
—•—


(94

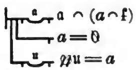
Wenn Null die Anzahl der Gegenstände ist, die unter einen Begriff fallen, so fällt kein Gegenstand unter diesen Begriff.


(108

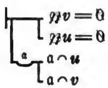
In der Anzahlenreihe geht der Null nichts unmittelbar vorher.


(97

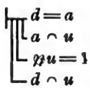
Wenn kein Gegenstand unter einen Begriff fällt, so ist Null die Anzahl der unter diesen Begriff fallenden Gegenstände.


(107

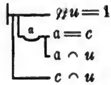
Zu jeder von der Null verschiedenen Anzahl giebt es eine ihr in der Anzahlenreihe unmittelbar vorhergehende.


(99

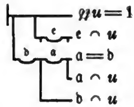
Wenn Null die Anzahl der unter einen ersten Begriff fallenden Gegenstände ist, so ist Null auch die Anzahl der Gegenstände, die unter einen dem ersten untergeordneten Begriff fallen.


(117

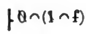
Wenn Eins die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände ist und wenn ein erster Gegenstand unter diesen Begriff fällt und ebenso ein zweiter, so fallen beide Gegenstände zusammen.


(121

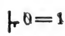
Wenn ein Gegenstand unter einen Begriff fällt und wenn jeder Gegenstand, der unter diesen Begriff fällt, mit jenem zusammenfällt, so ist Eins die Anzahl der unter den Begriff fallenden Gegenstände.


(122

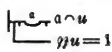
Eins ist die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände, wenn es einen Gegenstand giebt, der unter diesen Begriff fällt, und wenn jeder unter den Begriff fallende Gegenstand mit jedem Gegenstande zusammenfällt, der unter den Begriff fällt.


(110

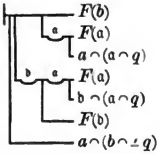
Die Anzahl Eins folgt in der Anzahlenreihe unmittelbar auf die Anzahl Null.

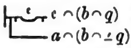

(111

Die Anzahl Null ist von der Anzahl Eins verschieden.

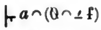

(113

Wenn Eins die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände ist, so giebt es einen unter diesen Begriff fallenden Gegenstand.

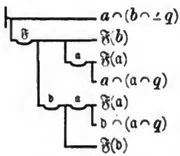

(123

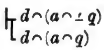

(124

Wenn ein Gegenstand auf einen Gegenstand in einer Reihe folgt, so giebt es einen Gegenstand, der zu dem ersten in der reihenden Beziehung steht.

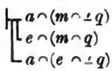

(126

Der Anzahl Null geht nichts in der Anzahlenreihe vorher.

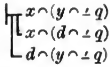

(127


(131

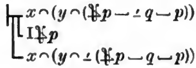
Ein erster Gegenstand geht einem zweiten in einer Reihe vorher, wenn er zu ihm in der reihenden Beziehung steht.

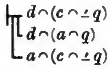

(133

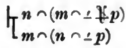
Wenn ein Gegenstand auf einen zweiten in einer Reihe folgt und zu einem dritten in der reihenden Beziehung steht, so folgt auch der dritte auf den zweiten in dieser Reihe.

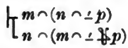

(275

Wenn ein Gegenstand auf einen zweiten in einer Reihe folgt und einem dritten in dieser Reihe vorhergeht, so folgt auch der dritte auf den zweiten in dieser Reihe.

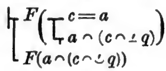

(177

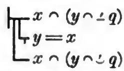

(129


(302

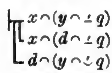

(299

Ein Gegenstand folgt auf einen zweiten in der Reihe einer Beziehung, wenn der zweite auf den ersten in der Reihe der umgekehrten Beziehung folgt.


(130


(200

Wenn ein Gegenstand einer mit einem zweiten anfangenden Reihe angehört, so fällt er entweder mit ihm zusammen oder er folgt auf ihn in dieser Reihe.


(276

$$\begin{array}{l} \vdash x\frown(y\frown\dot{\smile} q) \\ \quad x\frown(d\frown\dot{\smile} q) \\ \quad d\frown(y\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (280$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ \quad F(a) \\ \quad \overset{\mathfrak{b}\;\mathfrak{a}}{\smile}\; F(\mathfrak{a}) \\ \qquad \mathfrak{b}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \qquad F(\mathfrak{b}) \\ \quad a\frown(b\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (144$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ \quad e\frown(m\frown q) \\ \quad a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (134$$

Wenn ein Gegenstand einer mit einem zweiten anfangenden Reihe angehört und zu einem dritten in der reihenden Beziehung steht, so folgt der dritte auf den zweiten in dieser Reihe.

$$\begin{array}{l} \vdash d\frown(c\frown\dot{\smile} q) \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad a\frown(c\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (132$$

Wenn ein Gegenstand einer mit einem zweiten endenden Reihe angehört und wenn ein dritter zu ihm in der reihenden Beziehung steht, so folgt der zweite auf den dritten in dieser Reihe.

$$\begin{array}{l} \vdash a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ \quad a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (136$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash a\frown(m\frown\dot{\smile} q) \\ \quad e\frown(m\frown q) \\ \quad a\frown(e\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (137$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash x\frown(y\frown\dot{\smile} q) \\ \quad x\frown(d\frown\dot{\smile} q) \\ \quad d\frown(y\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (322$$

Wenn ein Gegenstand (d) der mit einem zweiten (y) endenden und zugleich der mit einem dritten (x) anfangenden Reihe derselben Beziehung angehört, so gehört der zweite ebenfalls der mit dem dritten anfangenden Reihe an.

$$\begin{array}{l} \vdash d\frown(y\frown\dot{\smile} q) \\ \quad d\frown(a\frown q) \\ \quad a\frown(y\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (285$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash a\frown(b\frown\dot{\smile} q) \\ \quad b = a \end{array} \qquad (139$$

———•———

$$\vdash a\frown(a\frown\dot{\smile} q) \qquad (140$$

Jeder Gegenstand gehört der mit ihm selbst anfangenden Reihe irgendeiner Beziehung an.

$$\begin{array}{l} \vdash c\frown(y\frown(\maltese p\smile\dot{\smile} q\smile p)) \\ \quad n\frown(y\frown p) \\ \quad c\frown(y\frown\dot{\smile}(\maltese p\smile q\smile p)) \\ \quad \mathrm{I}\maltese p \end{array} \qquad (335$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash x\frown(y\frown(\maltese p\smile\dot{\smile} q\smile p)) \\ \quad m\frown(x\frown p) \\ \quad \mathrm{I}\maltese p \\ \quad x\frown(y\frown\dot{\smile}(\maltese p\smile q\smile p)) \end{array} \qquad (180$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ \quad F(a) \\ \quad \overset{\mathfrak{b}\;\mathfrak{a}}{\smile}\; F(\mathfrak{a}) \\ \qquad \mathfrak{b}\frown(\mathfrak{a}\frown q) \\ \qquad a\frown(\mathfrak{b}\frown\dot{\smile} q) \\ \qquad F(\mathfrak{b}) \\ \quad a\frown(b\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (152$$

———•———

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; a\frown(\mathfrak{e}\frown\dot{\smile} q) \\ \qquad \mathfrak{e}\frown(b\frown q) \\ \quad a\frown(b\frown\dot{\smile} q) \end{array} \qquad (141$$

Wenn ein Gegenstand (b) auf einen zweiten (a) in einer Reihe folgt, so giebt es einen Gegenstand, welcher zu dem ersten (b) in der reihenden Beziehung steht und welcher der mit dem zweiten (a) anfangenden Reihe dieser Beziehung angehört (S. 143).

$$\begin{array}{l} \vdash b \frown (b \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \\ \quad \mathrm{0} \frown (b \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (145$$

Keine endliche Anzahl folgt auf sich selbst in der Anzahlenreihe (S. 137 u. 144).

$$\begin{array}{l} \vdash b \frown (\mathfrak{p}(b \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \frown \mathfrak{f}) \\ \quad \mathrm{0} \frown (b \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (155$$

Die Anzahl der Glieder der mit einer endlichen Anzahl (b) endenden Anzahlenreihe folgt in der Anzahlenreihe unmittelbar auf diese Anzahl (b).

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} b \frown (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{f}) \\ \quad \mathrm{0} \frown (b \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (157$$

Zu jeder endlichen Anzahl giebt es ein unmittelbar folgendes Glied der Anzahlenreihe.

$$\begin{array}{l} \vdash n \frown (m \frown \dot{\smile}\mathfrak{U}p) \\ \quad m \frown (n \frown \dot{\smile} p) \end{array} \qquad (303$$

—— • ——

$$\begin{array}{l} \vdash m \frown (n \frown \dot{\smile} p) \\ \quad n \frown (m \frown \dot{\smile}\mathfrak{U}p) \end{array} \qquad (304$$

Ein Gegenstand (n) gehört der mit einem zweiten (m) anfangenden Reihe einer (p-)Beziehung an, wenn der zweite (m) der mit dem ersten (n) anfangenden Reihe der umgekehrten Beziehung angehört.

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (n \frown \dot{\smile} p) \\ \quad d \frown (a \frown p) \\ \quad \mathrm{I}p \\ \quad d \frown (n \frown \dot{\smile} p) \end{array} \qquad (242$$

Wenn ein Gegenstand (d) einem zweiten (n) in einer Reihe vorhergeht, deren reihende Beziehung eindeutig ist, und wenn er zu einem dritten (a) in dieser Beziehung steht, so gehört der zweite (n) der mit dem dritten (a) anfangenden Reihe dieser Beziehung an.

$$\begin{array}{l} \vdash r \frown (n \frown \dot{\smile} p) \\ \quad n \frown (r \frown \dot{\smile} p) \\ \quad m \frown (n \frown \dot{\smile} p) \\ \quad \mathrm{I}p \\ \quad m \frown (r \frown \dot{\smile} p) \end{array} \qquad (243$$

Wenn ein Gegenstand (r) der mit einem zweiten (m) anfangenden Reihe angehört, deren reihende Beziehung eindeutig ist und wenn derselben Reihe ein dritter Gegenstand (n) angehört, so gehört dieser (n) der mit dem ersten (r) anfangenden Reihe dieser Beziehung an oder geht diesem in der Reihe vorher.

$$\begin{array}{l} \vdash 1 \frown (a \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \\ \quad \mathrm{0} \frown (a \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (306$$

Wenn ein Gegenstand auf Null in der Anzahlenreihe folgt, so gehört er der mit Eins anfangenden Anzahlenreihe an.

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{0} \frown (a \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \\ \quad \mathrm{0} \frown (n \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \\ \quad a \frown (n \frown \dot{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (307$$

Wenn ein Gegenstand der mit einer endlichen Anzahl endenden Anzahlenreihe angehört, so ist er selber eine endliche Anzahl.

$$\begin{array}{l} \vdash y \frown (y \frown \dot{\smile} q) \\ \quad i \frown (i \frown \dot{\smile} q) \\ \quad \mathrm{I}q \\ \quad i \frown (y \frown \dot{\smile} q) \end{array} \qquad (296$$

Wenn ein Gegenstand (y) einer mit einem zweiten (i) anfangenden Reihe angehört, deren reihende Beziehung eindeutig ist, und wenn der zweite Gegenstand (i) auf sich selbst in der Reihe dieser Beziehung folgt, so folgt auch der erste (y) auf sich selbst.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} F(\backsim) \\ \llcorner F(\mathfrak{p}(0 \frown \nparallel \smile \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (205$$

———•———

$$\vdash \backsim \frown (\backsim \frown \mathfrak{f}) \qquad (165$$

Endlos folgt auf sich selbst unmittelbar in der Anzahlenreihe.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \backsim = \mathfrak{p}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon \frown v \\ \llcorner \varepsilon \frown u \end{array}\right) \\ \llcorner \backsim = \mathfrak{p}u \\ \llcorner 0 \frown (\mathfrak{p}v \frown \smile \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (172$$

Wenn Endlos die Anzahl eines Begriffes ist und wenn die Anzahl eines andern Begriffes endlich ist, so ist Endlos die Anzahl des Begriffes *unter den ersten oder unter den zweiten Begriff fallend* (S. 154).

$$\vdash 0 \frown (\backsim \frown \smile \mathfrak{f}) \qquad (167$$

Endlos ist keine endliche Anzahl.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} e \frown (a \frown q) \\ \llcorner e \frown (a \frown (u \frown q)) \end{array} \qquad (188$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \mathrm{I}(u \frown q) \\ \llcorner \mathrm{I}q \end{array} \qquad (189$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} x \frown (y \frown \underline{\smile}\, q) \\ \llcorner x \frown (y \frown \underline{\smile}\,(u \frown q)) \end{array} \qquad (194$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} x \frown (y \frown \smile q) \\ \llcorner x \frown (y \frown \smile (u \frown q)) \end{array} \qquad (201$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} y \frown u \\ \llcorner d \frown (y \frown (u \frown q)) \end{array} \qquad (191$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \frown (a \frown (u \frown q)) \\ \llcorner d \frown (a \frown q) \\ \llcorner a \frown u \end{array} \qquad (197$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{q}}{\smile}\; \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{a} \frown \nparallel \smile \mathfrak{q} \\ \quad \llcorner \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\; \mathfrak{d} \frown u \\ \quad\quad \llcorner \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{e} \frown \mathfrak{q}) \\ \quad \llcorner \overset{\mathfrak{i}}{\smile}\; \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{q}) \\ \quad \llcorner \mathrm{I}\mathfrak{q} \\ \llcorner \backsim = \mathfrak{p}u \end{array} \qquad (207$$

Wenn Endlos die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände ist, so können diese in eine unverzweigte Reihe geordnet werden, die mit einem bestimmten Gegenstande anfängt und, ohne in sich zurückzukehren, endlos fortläuft (S. 160).

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} F(o;\, a) \\ \llcorner F(\grave{\varepsilon}(o \frown (a \frown \varepsilon))) \end{array} \qquad (249$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} o;\, a = e;\, i \\ \llcorner o = e \\ \llcorner a = i \end{array} \qquad (251$$

Wenn ein Gegenstand mit einem zweiten und ein dritter Gegenstand mit einem vierten zusammenfällt, so fällt das aus dem ersten und dritten bestehende Paar zusammen mit dem aus dem zweiten und vierten bestehenden.

$$\vdash o \frown (a \frown q) = q \frown (o;\, a) \qquad (215$$

———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} x = d \\ \llcorner m;\, x = c;\, d \end{array} \qquad (219$$

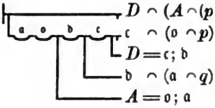
Wenn ein Paar mit einem zweiten zusammenfällt, so fällt das zweite Glied des ersten mit dem zweiten Gliede des zweiten zusammen.

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} m = c \\ \llcorner m;\, x = c;\, d \end{array} \qquad (220$$

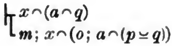
———•———

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} f(m,\, x) = f(c,\, d) \\ \llcorner m;\, x = c;\, d \end{array} \qquad (221$$

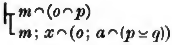
———•———



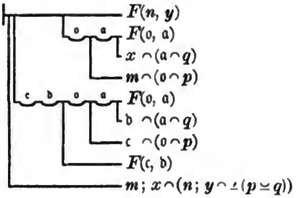
(213



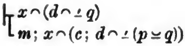
(224



(225

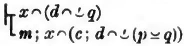


(231

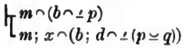


(233

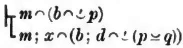
Wenn ein Paar auf ein zweites in der Reihe einer gekoppelten Beziehung folgt, so folgt das zweite Glied des ersten Paares (d) auf das zweite Glied des zweiten Paares (x) in einer Reihe, deren reihende Beziehung das zweite Glied der gekoppelten Beziehung ist.



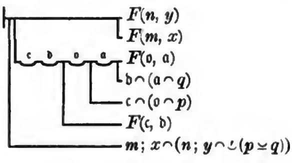
(234



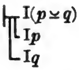
(244



(246



(257



(252

Wenn eine Beziehung eindeutig ist und ebenso eine zweite, so ist die aus der ersten und zweiten Beziehung gekoppelte ebenfalls eindeutig.

$$\begin{array}{l} \vdash c;\, d \frown (o;\, a \frown (p \succeq q)) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad c \frown (o \frown p) \end{array} \qquad (208$$

Wenn ein Gegenstand (c) zu einem zweiten (o) in einer (p-)Beziehung steht und wenn ein dritter Gegenstand (d) zu einem vierten (a) in einer zweiten (q-)Beziehung steht, so steht das aus dem ersten und dritten Gegenstande bestehende Paar (c; d) zu dem aus dem zweiten und vierten bestehenden Paare (o; a) in der aus der ersten und zweiten Beziehung gekoppelten Beziehung.

$$\begin{array}{l} \vdash A \frown (o;\, a \frown \underline{\smile}(p \succeq q)) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad c \frown (o \frown p) \\ \quad A \frown (c;\, d \frown \underline{\smile}(p \succeq q)) \end{array} \qquad (209$$

$$\begin{array}{l} \vdash x;\, m \frown (y;\, n \frown \underline{\smile}(q \succeq p)) \\ \quad m;\, x \frown (n;\, y \frown \underline{\smile}(p \succeq q)) \end{array} \qquad (258$$

$$\begin{array}{l} \vdash F(A \frown (b;\, d \frown \underline{\smile}\, t)) \\ \quad F(b \frown (d \frown (A \nwarrow t))) \end{array} \qquad (247$$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I}(m;\, x \nwarrow (p \succeq q)) \\ \quad \mathfrak{i}\; \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \underline{\smile}\, p) \\ \qquad m \frown (\mathfrak{i} \frown \underline{\smile}\, p) \\ \quad \mathrm{I}p \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (253$$

$$\begin{array}{l} \vdash F(o \frown (a \frown (A \nwarrow t))) \\ \quad F(A \frown (o;\, a \frown \underline{\smile}\, t)) \end{array} \qquad (210$$

$$\vdash m \frown (x \frown (m;\, x \nwarrow t)) \qquad (238$$

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (d \frown \underline{\smile}\, q) \\ \quad c \frown (d \frown (m;\, x \nwarrow (p \succeq q))) \end{array} \qquad (235$$

$$\begin{array}{l} \vdash o \frown (a \frown (A \nwarrow (p \succeq q))) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad c \frown (o \frown p) \\ \quad c \frown (d \frown (A \nwarrow (p \succeq q))) \end{array} \qquad (211$$

$$\vdash x;\, m \nwarrow (q \succeq p) = \maltese(m;\, x \nwarrow (p \succeq q)) \qquad (259$$

$$\begin{array}{l} \vdash \acute{\varepsilon} = \not\!\!\mathfrak{u} \\ \quad \mathfrak{q}\;\; \mathfrak{a}\;\; \mathfrak{u} = \mathfrak{a} \frown \maltese \underline{\smile}\, \mathfrak{q} \\ \qquad \mathfrak{b}\;\; \mathfrak{b} \frown \mathfrak{u} \\ \qquad\quad \mathfrak{c}\;\; \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{c} \frown \mathfrak{q}) \\ \qquad \mathfrak{i}\;\; \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \underline{\smile}\, \mathfrak{q}) \\ \quad \mathrm{I}\mathfrak{q} \end{array} \qquad (263$$

Endlos ist die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände, wenn sich diese in eine Reihe ordnen lassen, die mit einem gewissen Gegenstande anfängt und endlos fortläuft, ohne sich zu verzweigen und ohne in sich zurückzukehren (S. 179).

$$\begin{array}{l} \vdash c \frown (m;\, n \,\S\, p) \\ \quad m \frown (c \frown \underline{\smile}\, p) \\ \quad n \frown (n \frown \underline{\smile}\, p) \\ \quad c \frown (n \frown \underline{\smile}\, p) \\ \quad \mathrm{I}p \end{array} \qquad (274$$

Ein Gegenstand (c) gehört der von einem zweiten (m) bis zu einem dritten (n) laufenden Reihe einer Beziehung an, wenn diese eindeutig ist, wenn der dritte Gegenstand (n) nicht auf sich selbst in der Reihe dieser Beziehung folgt und wenn endlich der erste Gegenstand (c) sowohl der mit dem zweiten (m) anfangenden als auch der mit dem dritten (n) endenden Reihe dieser Beziehung angehört.

$$\begin{array}{l} \vdash n \frown (m;\, n \,\S\, q) \\ \quad m \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \quad n \frown (n \frown \underline{\smile}\, q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (344$$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I}q \\ \quad d \frown (A \,\S\, q) \end{array} \qquad (265$$

$$\vdash\begin{array}{l} d \frown (y \frown \dot{\smile} q) \\ \llcorner\, d \frown (x;\, y \int q) \end{array} \qquad (269$$

———•———

$$\vdash\begin{array}{l} x \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\ \llcorner\, d \frown (x;\, y \int q) \end{array} \qquad (270$$

Wenn ein Gegenstand einer von einem zweiten bis zu einem dritten laufenden Reihe angehört, so gehört er der mit dem zweiten anfangenden Reihe derselben Beziehung an.

$$\vdash\begin{array}{l} \top a = 0 \\ \llcorner\, a \frown (1;\, n \int \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (312$$

Wenn ein Gegenstand der von der Eins bis zu einem zweiten Gegenstande laufenden Anzahlenreihe angehört, so ist er von der Null verschieden.

$$\vdash\begin{array}{l} n = \mathfrak{N}(1;\, n \int \mathfrak{f}) \\ \llcorner\, 0 \frown (n \frown \dot{\smile} \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (314$$

Jede endliche Anzahl ist die Anzahl der Glieder der von Eins bis zu ihr selbst laufenden Anzahlenreihe.

$$\vdash\begin{array}{l} x \frown (y \frown \dot{\smile} q) \\ \llcorner\, d \frown (x;\, y \int q) \end{array} \qquad (323$$

———•———

$$\vdash\begin{array}{l} \top y \frown (y \frown \dot{-} q) \\ \llcorner\, d \frown (x;\, y \int q) \end{array} \qquad (271$$

———•———

$$\vdash\begin{array}{l} r = x \\ \llcorner\, r \frown (x;\, x \int q) \end{array} \qquad (282$$

———•———

$$\vdash\begin{array}{l} \mathfrak{N}(x;\, y \int q) = \mathfrak{N}(1;\, n \int \mathfrak{f}) \\ \llcorner\!\top y \frown (y \frown \dot{-} q) \\ \llcorner\, \mathrm{I}q \\ \llcorner\, x;\, 1 \frown (y;\, n \frown \dot{\smile} (q \veebar \mathfrak{f})) \end{array} \qquad (298$$

(S. 202.)

$$\vdash 0 \frown (\mathfrak{N}(x;\, y \int q) \frown \dot{\smile} \mathfrak{f}) \qquad (325$$

Die Anzahl der Glieder einer von einem Gegenstande bis zu einem Gegenstande laufenden Reihe ist endlich.

$$\vdash\begin{array}{l} 0 \frown (\mathfrak{N}u \frown \dot{\smile} \mathfrak{f}) \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{x}\quad\mathfrak{q}}{\smile\smile}\!\top u = \mathfrak{A} \int \mathfrak{q} \end{array} \qquad (327$$

Wenn die unter einen Begriff fallenden Gegenstände in eine Reihe geordnet werden können, die von einem bestimmten Gegenstande bis zu einem bestimmten Gegenstande läuft, so ist ihre Anzahl endlich.

$$\vdash\begin{array}{l} \grave{\varepsilon} g(\varepsilon) = A \int q \\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, g(\mathfrak{a}) = (-\, \mathfrak{a} \frown (A \int q)) \end{array} \qquad (340$$

———•———

$$\vdash\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{A}\quad\mathfrak{q}}{\top\!\smile\smile\!\top}\, \grave{\varepsilon}(-\,\varepsilon \frown u) = \mathfrak{A} \int \mathfrak{q} \\ \llcorner\, 0 \frown (\mathfrak{N}u \frown \dot{\smile} \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (348$$

Wenn die Anzahl der unter einen Begriff fallenden Gegenstände endlich ist, so lassen sich diese in eine Reihe ordnen, die von einem bestimmten Gegenstande bis zu einem bestimmten Gegenstande läuft (S. 224).

Wörterverzeichniss.

Die Ziffern geben die Seiten an.

abbilden 57, 71.
Abzeichen 25, 66.
alle 24.
allgemein 24.
Allgemeinheit 11, 12, 31, 34.
andeuten 31, 32.
anfangen 60.
angehören 60, 201.
Anzahl 57, 58.
Anzahlenreihe 58, deren Unendlichkeit 144.
Argument 6, 37, 40.
Argumentstellen 6, 8, 13, 15.
Art der Argumente und Argumentstellen 40, 43.
ausdrücken 7, 50.

bedeuten, 7, 31, 46.
Bedeutung 7, 46.
bedeutungsvoll 46.
Bedingungstrich 20.
Begriff 3, 8, 38, 57, u-Begriff 71.
Begriffsschriftsatz 9, 44.
Begriffsumfang 8.
bezeichnen 7.
Beziehung 8, 57, p-Beziehung 71.
Buchstaben, deutsche 13, grosse griechische 9, kleine griechische Vokale 15, kleine griechische als Abzeichen 66, lateinische 31.

Definition 44.
Definitionsdoppelstrich 44.
Doppelwerthverlauf 55.

Eigenname 7, 43.
Eigenschaft 3.
Eindeutigkeit 39, 55.
einfache Reihe 201.
einige 24.
Eins 58.
einseitig 64.
enden 60.
endlich 60, 137.
Endlos 150.
ergänzungsbedürftig 5, 8.

fallen unter 8.
Falsche, das 7.
folgen 59, unmittelbar in der Anzahlenreihe 58.
Folgerungen 25 ff.
Function 5, 6, 8, 11, 13, 37, 41.
Functionsbuchstabe 34, 42.
Functionsmarke 33, 44.
Functionsname 44, zweiseitiger 64.

Gebiet 13, 15, 31, 35.
Gedanke 7, 9, 50.
Gegenstand 3, 7, 37.
Gegenstandsbuchstabe 34, 42.
Gegenstandsmarke 33, 44.
gekoppelte Beziehung 179.
gesättigt 37.
giebt, es 12.
Gleichung 44.

Höhlung 13.

Inhaltstrich 9.

Jeder 24.

Klammer 10, 11, 35, 64.
kein 24.
koppeln 179.

lateinisch 31, 33, 42, 44.
laufen 201.

Marke 33, 44.
Merkmal 3.
Minuszeichen 9.

Name 7, 32, 43, 44.
Null 58.

Oberglied 22.
oder 21

Paar 179
particulär 24.
passend 41.

recht 49.
rechtmässig 45.
Reihe 59, 60, einfache 201.

Satz 9, 44.
Sinn 7, 51.
stehen in 8.
Schlüsse 25 ff.
Spiritus lenis 15.
Stufe 37, 38, 41.

Umfang einer Beziehung 55.
umkehren 27.
Umkehrung einer Beziehung 57.
und 21.
Unendlichkeit der Anzahlenreihe 144.
ungesättigt 5, 6, 37.
ungleichstufig 39.
unmittelbar folgen in der Anzahlenreihe 58.
untergeordnet 24.
Unterglied 22.
Unterordnung 24.
Urtheil 9.
Urtheilstrich 9.

übergeordnet 24.

Verneinungstrich 10.
verschmelzen 21.
Verschmelzung 10, 14, 20, 29.
Vertauschbarkeit 22.
verwandt 8.
vorhergehen 60.

Wagerechter 9, 10, 14, 20.
Wahre, das 7.
Wahrheitswerth 7.
weder — noch 21.
Wendung 27.
wenn 24.
Werth 6
Werthverlauf 7, 18.

Zeichen 43.
zugehörig 12, 13, 15, 41.
zusammengesetzte Beziehung 72.
zweiseitig 64.
Zwischenzeichen 44.

Berichtigungen.

Auf S. 152 fehlt in der ersten Formel des § 124 das Unterglied ‚$—\mathrm{I}\mathfrak{P}q$'.

Auf der zweiten Spalte von S. 168 hätte der Satz, der das Abzeichen ‚$\varkappa$' erhalten hat, nach den sonst hier befolgten Grundsätzen eine Ziffer — etwa ‚179a' — als Abzeichen erhalten und eben damit auf der ersten Spalte von S. 169 beim Beweise des Satzes (181) angezogen werden müssen.

Die letzten beiden Sätze auf S. 196 müssen so aussehen:

$$145 \quad \vdash \begin{array}{l} b \frown (b \frown \underline{\cdot}\, \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{d} \frown (b \frown \underline{\cdot}\, \mathfrak{f}) \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\quad}$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{i}}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \underline{\cdot}\, \mathfrak{f}) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{i} \frown \underline{\cdot}\, \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (255$$

(254): ——————

Auf S. 216 muss der Satz (295) so aussehen:

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{P}(x;\, y \,\mathfrak{S}\, q) = \mathfrak{P}(x;\, y \,\mathfrak{S}\, (y \frown \underline{\cdot}\, q \asymp q)) \\ y \frown (y \frown \underline{\cdot}\, q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (295$$

Frommannsche Buchdruckerei (Hermann Pohle) in Jena. — 1077

Grundgesetze der Arithmetik.

Von

Dr. G. Frege.

GRUNDGESETZE
DER ARITHMETIK.

Begriffsschriftlich abgeleitet

von

Dr. G. FREGE
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

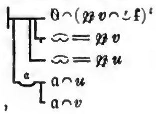
II. Band.

JENA
Verlag von Hermann Pohle
1903.

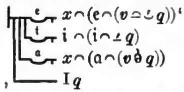
Inhaltsverzeichnis.

Vorbemerkung . . . . Seite 1

M. Beweis des Satzes

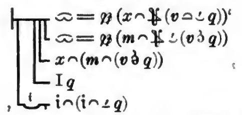


a) Beweis des Satzes



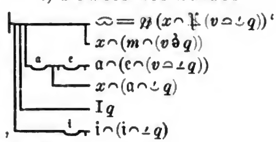
§ 1 bis § 6. Definition der Function $\xi \grave{\mathfrak{d}} \zeta$. Sätze (349) bis (359) Seite 1

b) Beweis des Satzes



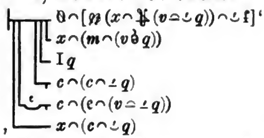
§ 7 bis § 20. Definition der Function $\xi \mathfrak{d} \zeta$. Sätze bis (408) . Seite 7

c) Beweis des Satzes



§ 21 bis § 24. Sätze bis (416) . . . . Seite 25

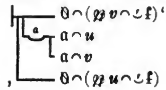
d) Beweis des Satzes



und Ende des Abschnittes *M.*

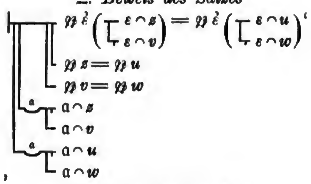
§ 25 bis § 28. Sätze bis (428) . . . . Seite 30

N. Beweis des Satzes

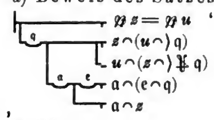


§ 29 bis § 32. Sätze bis (443) . . . . Seite 37

Ξ. Beweis des Satzes

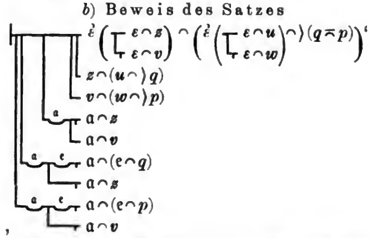


a) Beweis des Satzes



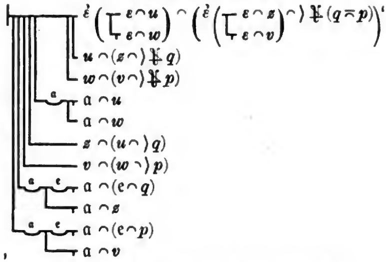
§ 33 bis § 36. Sätze bis (453) . . . . Seite 44

b) Beweis des Satzes



§ 37 bis § 40. Definition der Function $\xi \frown \zeta$. Sätze bis (463) . Seite 48

c) Beweis des Satzes

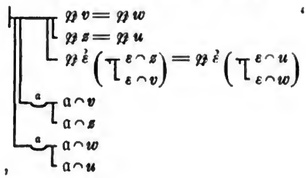


und Schluss des Abschnittes Ξ.

§ 41 bis § 44. Sätze bis (469) . . . . Seite 52

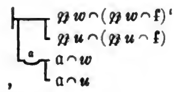
O. Folgesätze.

a) Beweis des Satzes



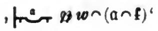
§ 45 und § 46. Sätze bis (472) . . . . Seite 58

b) Beweis des Satzes

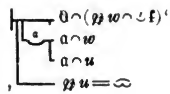


§ 47 bis § 50. Sätze bis (476) . . . . Seite 61

c) Beweise der Sätze



und



§ 51 bis § 54. Sätze bis (484) . . . . Seite 66

III. Die reellen Zahlen.

1. Kritik der Lehren von den Irrationalzahlen.

a) Grundsätze des Definirens.

§ 55. Vorbemerkung . . . . Seite 69

1. Grundsatz der Vollständigkeit.

§ 56. Der Begriff muss scharf begrenzt sein . . . . Seite 69
§ 57. Unzulässigkeit des stückweisen Definirens . . . . . . „ 70
§ 58. Entschuldigung des stückweisen Definirens durch die Entwickelung der Wissenschaft . . . . „ 70
§ 59. Unhaltbarkeit von Heines Definition der Gleichheit von Zahlzeichen . . . . „ 72
§ 60. Vermuthliche Vertheidigung Heines und ihre Widerlegung „ 73
§ 61. Ohne ungültige Definitionen haben wir nicht endgültige Lehrsätze . . . . „ 74
§ 62. Für die Beziehungen gilt das Entsprechende. Die Beziehungen des Grösserseins und der Gleichheit . . . . „ 74
§ 63. Folgerung für die Functionen erster Stufe mit einem Argumente . . . . „ 75
§ 64. Die entsprechende Forderung für die Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten . . . . „ 75
§ 65. Dasselbe gilt auch von den arithmetischen Zeichen, die Functionsnamen sind . . . . „ 77

2. Grundsatz der Einfachheit des erklärten Ausdrucks.

§ 66. Erläuterung und Begründung dieses Grundsatzes . . . Seite 79
§ 67. Verstösse gegen beide Grundsätze des Definirens zugleich „ 80

b) Cantors Lehre von den Irrationalzahlen.

§ 68. G. Cantor ordnet jeder seiner Fundamentalreihen eine Zahl *b* zu. Zweifel über den Sinn. Annahme, dass die Zahl *b* ein Zeichen sei und die Fundamentalreihe bezeichnen solle Seite 80
§ 69. Cantors Erklärungen der Ausdrücke „gleich Null“, „grösser als Null“ und „kleiner als Null“ verstossen gegen unsere beiden Grundsätze des Definirens . . . . „ 81
§ 70. Einwand von Illigens gegen Cantors Lehre . . . . . „ 81
§ 71. Weitere Einwände von Illigens. Bedenken dagegen . . „ 82
§ 72. Pringsheims Satz, dass die rationalen Zahlen wohl bestimmte Quantitäten vorstellen können, aber nicht müssen „ 83
§ 73. Die reelle Zahl ist ein Grössenverhältnis . . . . . . „ 84
§ 74. Cantors Antwort auf Illigens Einwände vermengt Zeichen und Bezeichnetes. Von den hier erwähnten abstracten Gedankendingen ist in seiner eigenen Erklärung keine Rede „ 85
§ 75. Die quantitative Bestimmung concreter Grössen durch abstracte nach Cantor. Wir haben in dem von Cantor erklärten Ausdrucke nichts der Erklärung Fähiges . . . „ 86
§ 76. Die Cantorschen Zahlgrössen sind überflüssig. Das Hereinziehen der Geometrie giebt uns die Hauptsache, das Verhältnis. Darum ist es entscheidend . . . . „ 88
§ 77. Versuch, die Cantorschen Erklärungen so aufzufassen, dass die Zahlgrössen nicht Zeichen, sondern etwa abstracte

Gedankendinge seien. Dies misslingt, weil die Zuordnung erst möglich ist, wenn man das Zuzuordnende kennt . Seite 88
§ 78. Cantor ordnet in seiner scheinbaren Erklärung des Ausdruckes „gleich Null“ gewissen Fundamentalreihen die Zahl Null zu und giebt in den scheinbaren Erklärungen für „positiv“ und „negativ“ nur Winke für weitere Zuordnungen. Definirt wird dadurch nichts . . . . . „ 90
§ 79. Cantors Definitionen von Summe, Differenz und Product sind in mehrfacher Hinsicht fehlerhaft . . . . . . „ 90
§ 80. Cantors Festsetzung, dass einer Fundamentalreihe, deren Glieder sämmtlich die rationale Zahl a sind, diese Zahl a zugeordnet werde, enthält einen Widerspruch und bringt uns dem Ziele nicht näher . . . . „ 91
§ 81. Cantors Definition des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins. Zweifache Auffassung des Gleichheitszeichens. Bei der ersten können wir nicht über die rationalen Zahlen hinaus, bei der zweiten haben wir einen Verstoss gegen unsern ersten Grundsatz des Definirens. Das Schillern zwischen Bekannt- und Unbekanntsein . . . . . . „ 91
§ 82. Die Definitionen der Summe, des Grösserseins u. s. w. scheinen die Irrationalzahlen schaffen zu sollen, ein Verstoss gegen unsern zweiten Grundsatz . . . . . . „ 92
§ 83. Die Täuschung verschwindet, wenn man statt der alten, schon erklärten Wörter und Zeichen ganz neue nimmt „ 93
§ 84. Zusammenfassender Rückblick auf die Ergebnisse der Prüfung der Cantorschen Theorie . . . . „ 94
§ 85. Eine früher von Cantor gegebene Darstellung ist gleichfalls fehlerhaft . . . . „ 95

c) Die Theorien des Irrationalen von E. Heine und J. Thomae.

§ 86. Vorläufige Kennzeichnung dieser Theorien . . . . . Seite 96
§ 87. Heines grundlegende Aeusserung . . . . „ 96
§ 88. Thomaes grundlegende Aeusserung . . . . „ 97
§ 89. Grund für die Vorziehung der formalen vor der inhaltlichen Arithmetik . . . . „ 98
§ 90. Die formale Arithmetik und die Begriffsschrift als Spiele „ 99
§ 91. In der formalen Arithmetik drücken Gleichungen und Ungleichungen keine Gedanken aus; auf diesem Standpunkte sind also auch keine Anwendungen möglich . . „ 100
§ 92. Die formale Arithmetik entlastet sich auf Kosten der Wissenschaften, in denen Anwendungen gemacht werden „ 101
§ 93. Im Rechenspiele giebt es weder Lehrsätze, noch Beweise, noch Definitionen, wohl aber in der Theorie dieses Spieles. Die Möglichkeit einer Theorie des Rechenspieles ist zweifelhaft . . . . „ 101
§ 94. Man braucht von den eigentlichen Zahlen im Rechenspiele garnichts . . . . „ 102
§ 95. Thomaes Ausdruck, den Zahlzeichen werde in Bezug auf ihr Verhalten zu den Spielregeln ein Inhalt beigelegt . „ 103
§ 96. Thomaes Ausdrücke, den Schachfiguren werden gewisse Eigenschaften beigelegt und sie seien äussere Zeichen für ihr durch diese Eigenschaften bedingtes Verhalten . „ 103

§ 97.	Thomaes Zugeständnisse, dass die Zahlfiguren zuweilen auch als Zahlzeichen gebraucht werden	Seite	104
§ 98.	Was sind Zeichen?	„	105
§ 99.	Gleichgestaltete Zeichen sind nicht dasselbe Zeichen	„	106
§ 100.	Anders in der formalen Arithmetik. Hier haben wir Figuren. Gleichgestaltete Figuren. Unterschiede der formalen von der inhaltlichen Arithmetik	„	107
§ 101.	Das Rechnen in der formalen Arithmetik	„	108
§ 102.	Was ist Addiren, Multipliciren, Subtrahiren im Rechenspiele?	„	109
§ 103.	Die *Null*, die *negativen* und *gebrochenen Zahlen* bei Thomae	„	110
§ 104.	Die Rechenoperationen nach Heine	„	110
§ 105.	Die Einführung des Negativen bei Heine	„	112
§ 106.	Die Rechnungsregeln Thomaes	„	113
§ 107.	Sinn der Thomaeschen Formeln als Spielregeln	„	114
§ 108.	Die Spielhandlungen im Rechenspiele. Doppelte Rolle der Gleichungen	„	115
§ 109.	Doppeltes System von Regeln in der formalen Arithmetik. Um dies zu vermeiden, müssen die Regeln in Worten ausgedrückt werden. Ersatz der Formeln durch eine Regel	„	116
§ 110.	Regeln der formalen Arithmetik, Gesetze der inhaltlichen Arithmetik und Sittengesetze	„	117
§ 111.	Unvollständigkeit des Thomaeschen Regelverzeichnisses	„	117
§ 112.	Die formale Subtraction als Umkehrung der formalen Addition	„	118
§ 113.	Die Ausnahmestellung der Null, weist auf eine verbietende Regel hin	„	119
§ 114.	Versuch, diese verbietende Regel auszusprechen	„	120
§ 115.	Unsicherheit bei der Anwendung dieser Regel	„	121
§ 116.	Fernere Unzulänglichkeit des Thomaeschen Regelverzeichnisses und Versuch der Abhülfe	„	122
§ 117.	Thomaes Ausspruch, dass die Division nicht immer widerspruchsfrei vollzogen werden könne	„	122
§ 118.	Thomaes Ausspruch über die Widerspruchsfreiheit der Gebilde	„	123
§ 119.	Lässt die formale Arithmetik eine vollkommen widerspruchsfreie Begründung zu?	„	123
§ 120.	Nicht jede inhaltliche Arithmetik gründet sich auf Sinneswahrnehmung	„	125
§ 121.	Das Ordnen in Reihe und das Grössersein bei Thomae	„	125
§ 122.	Positive und negative, gemeine Zahlfiguren bei Thomae	„	126
§ 123.	Das Unendliche bei Thomae	„	127
§ 124.	Einführung des Irrationalen. Heines Zahlenreihen	„	128
§ 125.	Thomaes Definition der unendlichen Folge	„	129
§ 126.	Thomaes Nullfolgen. Zahlfiguren, die nicht hingeschrieben sind, sind nicht vorhanden	„	130
§ 127.	Können alle Terme einer Folge nicht angeschrieben werden?	„	131
§ 128.	Der Formalarithmetiker wird seinem Plane untreu	„	131
§ 129.	Versuch, Thomaes Meinung besser zu treffen. Hindernisse	„	133

§ 130. Weder der Umstand, dass ein Satz aus der Vorschrift für die Fortsetzung der Reihe folge, noch dieser Satz selbst, kann zur Definition der Nullvorschrift dienen . Seite 133
§ 131. Wegen der Endlichkeit der Menge der Zahlfiguren ist die formale Arithmetik unfähig zur Definition des Irrationalen. Verhüllung dieses Sachverhalts . . . . „ 134
§ 132. Die Gruppe »(0 0 0 . . 0 . .)« ist keine Zahlenfolge . . „ 135
§ 133. Die Gruppe »(a_1 a_2 a_3 . . a_n . .)« ist ohne Rücksicht auf ihre Zusammensetzung wie ein einzelner Buchstabe aufzufassen . . . . „ 135
§ 134. Der Folge wird ein Zeichen durch das Gleichheitszeichen zugeordnet. Wie ist die entstehende Gleichung aufzufassen? . . . . „ 136
§ 135. Die gemeine Zahl als zugeordnetes Zeichen. Vieldeutigkeit „ 137
§ 136. Scheitern der formalen Arithmetik . . . . „ 138
§ 137. Rückblick auf die formale Arithmetik . . . . . . „ 138

d) Das Schaffen neuer Gegenstände nach R. Dedekind, H. Hankel, O. Stolz.

§ 138. Die drei Hauptvorzüge der Dedekindschen Lehre. Schroffer Gegensatz zur formalen Arithmetik . . . . Seite 140
§ 139. Der Schnitt. Das Schaffen einer Irrationalzahl. Ist es möglich? Die Schaffensmacht ist beschränkt . . . „ 141
§ 140. Ein schrankenloses Schaffen wäre zu bequem, als dass es erlaubt sein könnte . . . . „ 141
§ 141. Die alternirenden Zahlen nach H. Hankel. Die mit diesen geführten Beweise sind hinfällig. Ihre Eigenschaften bleiben dunkel. Durch die Festsetzungen wird nicht einmal eine Klasse bestimmt, der die alternirenden Einheiten angehören, viel weniger sie selbst . . . . „ 142
§ 142. Eine grössere Formstrenge des Beweises würde den Fehler offenbaren. Beweise, die mit der imaginären Einheit geführt werden, sind oft ebenso mangelhaft . „ 144
§ 143. Schöpferische Definitionen von O. Stolz. Folgenschwere Einschränkung der Schöpfermacht . . . . „ 144
§ 144. Aus dem Nichtoffenbarsein eines Widerspruchs kann nicht auf dessen Nichtbestehen geschlossen werden . „ 145
§ 145. Ist Stolzens Theorie formal im Sinne von Thomae? Grosser Unterschied der Ansichten von Stolz und Thomae. Dedekind. G. Cantor . . . . „ 146
§ 146. Unsere Einführung der Werthverläufe ist verschieden von dem Zahlenschaffen der Mathematiker . . . . „ 147
§ 147. Unser Verfahren ist eigentlich nicht neu, wird mit vollem Bewusstsein seiner logischen Zulässigkeit ausgeübt. Ohne es wäre eine wissenschaftliche Begründung der Mathematik unmöglich . . . . „ 148

e) Weierstrassens Lehre.

§ 148. Schwierigkeiten, die der genauen Erfassung und Beurtheilung dieser Lehre entgegenstehen . . . . . . Seite 149
§ 149. Der Pfeffernussstandpunkt hinsichtlich der Anzahlen . „ 149
§ 150. Die beiden Fehler der Weierstrassischen Lehre von den Anzahlen, Einschmuggelung der eigentlichen Zahl „ 150

§ 151. Kampf der Weierstrassischen Lehre gegen die Natur der Sache. Singular und Plural beim Worte „Einheit". Eigenname oder Begriffswort? Ist das Gleichheitszeichen Identitätszeichen? Der Werth eines Aggregates . . Seite 151
§ 152. Verschiedene Bedeutungen des Pluszeichens. Das Wunder der wiederholt vorkommenden Gegenstände . . . . „ 151
§ 153. Die Zahl als Aggregat abstracter Einheiten oder der wiederholt vorkommenden Eins. Die drei Auffassungen der Zahl bei Weierstrass . . . . „ 152
§ 154. Die höhern Zahlen bei Weierstrass. Sinnlose Gleichung, sinnloser Satz. Die Erklärungen reichen nicht hin oder fehlen ganz . . . . „ 153
§ 155. Die Anerkennung der höhern Zahlen beruht nach Kossak auf ihrer Definition. Ein Schaffen, dessen Berechtigung zweifelhaft bleibt . . . . „ 153

f) Rückblick und Ausschau.

§ 156. Formale und inhaltliche Arithmetik. Beide Wege haben bisher nicht zum Ziele geführt . . . . Seite 154
§ 157. Die reellen Zahlen als Grössenverhältnisse. Das Gebiet der Anzahlen kann nicht zu dem der reellen Zahlen erweitert werden . . . . „ 155
§ 158. Die Zahlzeichen bedeuten nicht Strecken. Loslösung von der Geometrie. Logische Natur der Arithmetik. „Formal" in anderm Sinne . . . . „ 156
§ 159. Mittelweg zwischen der geometrischen Begründungsweise und den in neuerer Zeit versuchten Wegen. Ablösung von jeder besondern Grössenart, ohne das Messen zu vernachlässigen. Handhaben für die Anwendung. Bedenken . . . . „ 156

g) Grösse.

§ 160. Misslungene Versuche, das Wort „Grösse" zu erklären Seite 157
§ 161. Grund der Misserfolge ist eine falsche Fragestellung. Klasse. Welche Eigenschaften muss eine Klasse haben, um ein Grössengebiet zu sein? . . . . „ 158
§ 162. Bemerkung von Gauss. Relation. Das Grössengebiet als eine Klasse von Relationen . . . . „ 159
§ 163. Beispiel: Abstandsrelationen . . . . „ 160
§ 164. Vorläufige Entkräftung unseres Bedenkens im § 159 . „ 160

2. Grössenlehre.

A. Sätze über die Zusammensetzung von Relationen im Allgemeinen.

§ 165. Das associative Princip ist für alle Zusammensetzungen von Relationen zu beweisen . . . . Seite 163
§ 166. Beweis des associativen Princips. Sätze von (485) bis (491) . . . . „ 163
§ 167 bis § 170. Das commutative Princip in gewissen Reihen. Definition der Function $_*\xi$. Sätze bis (502) . . . . „ 166
Sätze, in denen die Aehnlichkeit der Umkehrung der

Relationen mit der Umkehrung des Vorzeichens hervortritt.
§ 171 und 172. Sätze bis (508) . . . . Seite 168

B. Die Positivalklasse.

a) Definitionen der Functionen $\eth\xi$ und $\not{y}\xi$ und Folgerungen.
§ 173 und § 174. Definition der Function $\eth\xi$ und Folgerungen. Sätze bis (517) . . . . Seite 168
§ 175 und § 176. Positivalklasse. Definition der Function $\not{y}\xi$ und Folgerungen. Sätze bis (544) . . . . „ 170

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash q \smile \mathfrak{Y}q = \mathfrak{Y}p \smile p' \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ ,\quad \not{y}s \end{array}$$

§ 177 und § 178. Sätze bis (559) . . . . Seite 176

c) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash p = r \smile \mathfrak{Y}r' \\ \quad p \frown s \\ \quad r \frown s \\ \quad \not{y}s \\ \quad \mathfrak{Y}p \frown s \\ ,\quad p \frown \eth s \end{array}$$

§ 179 und § 180. Sätze bis (561) . . . . Seite 180

d) Beweise der Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash q \smile (p \smile \mathfrak{Y}p) = q' \\ \quad p \frown s \\ \quad \not{y}s \\ ,\quad q \frown s \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdash p \smile \mathfrak{Y}p \smile q = q' \\ \quad q \frown s \\ \quad \not{y}s \\ ,\quad p \frown s \end{array}$$

und Folgerungen.
§ 181 bis § 186. Sätze bis (585) . . . . Seite 181

e) Sätze über das Grössere und Kleinere in einer Positivalklasse.
§ 187 bis § 192. Sätze bis (589) . . . . Seite 185

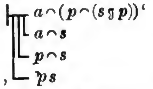
Γ. Die Grenze.

Definitionen der Functionen $\xi \mathfrak{I} \zeta$ und $\xi \wr \zeta$.
§ 193 bis § 196. Es giebt nur eine *s*-Grenze von *u*. Sätze bis (602) . . . . Seite 187

Δ. Die Positivklasse.

a) Definition der Function $\not{p}\xi$ und Folgerungen.
§ 197 und § 198. (Sätze bis (607) . . . . Seite 189

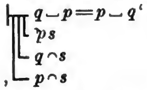
b) Beweis des Satzes



(Archimedisches Axiom.)

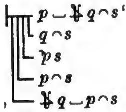
§ 199 bis § 214. Definitionen der Function $\xi \mathfrak{g} \zeta$. Sätze bis (636) . . . . Seite 191

E. Beweis des Satzes



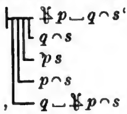
(Commutatives Princip in einer Positivklasse.)

a) Beweis des Satzes



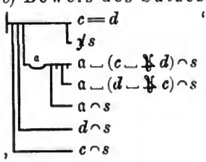
§ 215 und § 216. Sätze bis (638) . . . . Seite 204

b) Beweis des Satzes



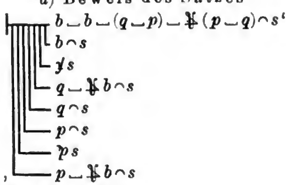
§ 217 und § 218. Sätze bis (641) . . . . Seite 207

c) Beweis des Satzes



§ 219 und § 220. Sätze bis (644) . . . . Seite 209

d) Beweis des Satzes



§ 221 bis § 230. Sätze bis (666) . . . . Seite 211 *e*) Beweis des Satzes

$$\vdash a \frown s$$
$$\mathfrak{y}s$$
$$\mathfrak{p}s$$
$$q \frown s$$
$$p \frown s$$
$$a \smile \maltese(\mathfrak{e} \smile e) \frown s$$
$$\mathfrak{e} \frown s$$
$$p \smile \maltese\,\mathfrak{e} \frown s$$
$$q \smile \maltese\,\mathfrak{e} \frown s$$

und Ende des Abschnittes *E.*

§ 231 bis § 238. Sätze bis (678) . . . . Seite 230

Z. Beweis des Satzes

$$\vdash p \smile q = q \smile p$$
$$\mathfrak{p}s$$
$$p \frown \mathfrak{d}s$$
$$q \frown \mathfrak{d}s$$

§ 239 bis § 244. Sätze bis (689) . . . . Seite 239
§ 245. Die nächste Aufgabe . . . . „ 243

Anhänge.

1. Tafel der Definitionen . . . . Seite 244
2. Tafel der wichtigeren Lehrsätze . . . . „ 245

Nachwort . . . . „ 253

Wörterverzeichnis . . . . „ 266

Berichtigungen.

Band I.

S. 20, letzte Zeile. Lies „das Falsche“ statt „das Wahre“.

S. 73, zweite Spalte. Die zweite Formel muss das Abzeichen β' statt β erhalten.

S. 77. Beim Uebergange zu Satz (11) ist ein doppeltes Kolon zu setzen.

S. 86. In der letzten Zeile des Satzes (δ) muss »q« statt »p« stehn.

S. 86. Das letzte Unterglied des Satzes (ϑ) muss

$$»\grave{\varepsilon}\left(\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\!\top\!\!\begin{array}{l} \varepsilon \frown (v \frown)\,\mathfrak{q}) \\ v \frown (\varepsilon \frown)\nsim \mathfrak{q}) \end{array}\right) = \wp v« \quad \text{sein.}$$

S. 92, zweite Spalte. Im Satze, der (43) vorhergeht, muss am Ende die schliessende Klammer gestrichen werden.

S. 104, erste Spalte. Im Satze, der (59) vorhergeht, muss statt »α« »a« stehn.

S. 104, zweite Spalte. In dem Obergliede von (γ) ist »$\varepsilon \frown v$« statt »$\varepsilon = v$« zu setzen. Ebenso im Obergliede des auf (δ) folgenden Satzes.

S. 109. Das letzte Unterglied des Satzes (63) muss »$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top b \frown (\mathfrak{a} \frown q)$« sein.

S. 111. Im Satze (μ) muss im vorletzten Untergliede

$$»\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l} \varepsilon = c \\ \varepsilon \frown v \end{array}\right)« \text{ statt } »\grave{\varepsilon}\left(\top\!\!\begin{array}{l} \varepsilon = c \\ \varepsilon = v \end{array}\right)« \text{ stehn.}$$

S. 120. In der ersten eckigen Klammer des Obergliedes von (ε) muss in der ersten Zeile »ε« statt »$\grave{\varepsilon}$« stehn.

S. 126, zweite Spalte. Beim Uebergange zu (ι) muss das zweite Kolon gestrichen werden.

S. 135, erste Spalte. Es fehlt der Verneinungsstrich vor dem Untergliede von (σ).

S. 142, erste Spalte. Das Oberglied von (α) muss »$a \frown (m \frown \underline{\prime}\, q)$« sein.

S. 156, zweite Spalte. In der dritten Zeile von (ζ) muss »$a = c$« statt »$a \frown c$« stehn.

Band II.

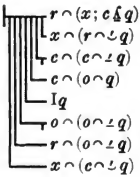
S. 150. In der dritten Zeile des § 150 lies „*color* mit *pigmentum*“ statt „*color* oder *pigmentum*“.

S. 183, erste Spalte. Im Satze (567) ist in der letzten Zeile »$q \frown s$« statt »$q \smile s$« zu setzen.

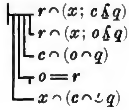
S. 200, zweite Spalte. In der vierten Zeile des Satzes (δ) ist die letzte schliessende Klammer zu streichen.

Vorbemerkung.

Es mögen hier zwei Sätze nochmals aufgeführt werden, die im ersten Band bei der Ableitung von (281) auf S. 208 die Buchstaben δ und η als Abzeichen erhalten hatten, um sie mit andern Abzeichen zu versehen, mit denen sie fernerhin angezogen werden sollen.

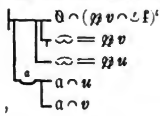


. (280a

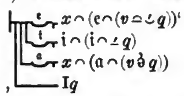


(280b

M. Beweis des Satzes



a) Beweis des Satzes

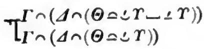


§ 1. *Zerlegung.*

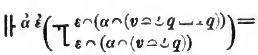
Den in der Hauptüberschrift angeführten Satz können wir in Worten so wiedergeben:

„Wenn ein Begriff einem zweiten übergeordnet ist, und wenn Endlos die Anzahl des ersten ist, so ist die Anzahl des zweiten auch Endlos, oder sie ist endlich."

Wir wissen zunächst nach (207), dass die unter den *u*-Begriff fallenden Gegenstände sich in eine einfache Reihe ordnen lassen, die mit einem bestimmten Gegenstande anfängt und ohne in sich zurückzukehren endlos fortläuft. Heben wir nun aus dieser Reihe die Gegenstände heraus, die unter den *v*-Begriff fallen, so ist zu beweisen, dass diese sich — wenn es deren giebt — ebenfalls in eine Reihe ordnen lassen, die entweder auch endlos fortläuft oder mit irgendeinem Gegenstande endet. Mit den Sätzen (263) und (327) gelangen wir dann an's Ziel. Diese Ordnung geschieht am einfachsten so, dass wir mit dem Gegenstande der ursprünglichen Reihe anfangen, der als der erste unter den v-Begriff fällt, und dann immer zu demjenigen weitergehen, der zunächst in der ursprünglichen Reihe unter den v-Begriff fällt. Wir haben zunächst zu zeigen, dass es in der mit x anfangenden q-Reihe einen Gegenstand giebt, der zuerst unter den v-Begriff fällt, wenn es in dieser Reihe überhaupt einen Gegenstand giebt, der unter den v-Begriff fällt. Was heisst das nun „der Gegenstand y fällt in der mit x anfangenden q-Reihe zuerst unter den v-Begriff"? y muss unter den v-Begriff fallen und der mit x anfangenden q-Reihe angehören; aber kein Gegenstand, der ihm in dieser Reihe vorhergeht, darf unter den v-Begriff fallen. In unsern Zeichen ist

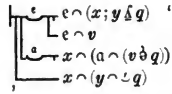


der Wahrheitswerth davon, dass $\varDelta$ der mit Γ anfangenden Υ-Reihe angehört und unter den Θ-Begriff fällt, dass es aber keinen Gegenstand giebt, welcher der mit Γ anfangenden Υ-Reihe angehört, unter den Θ-Begriff fällt und dem $\varDelta$ in der Υ-Reihe vorhergeht. Wir definiren nun:


(Σ

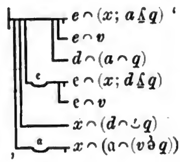
Danach ist $\Gamma \frown (\varDelta \frown (\Theta \mathbin{\grave{\partial}} \Upsilon))$ der Wahrheitswerth davon, dass $\varDelta$ zuerst in der mit Γ anfangenden Υ-Reihe unter den Θ-Begriff fällt.

Demnach haben wir in der zweiten Ueberschrift im Wesentlichen unsern Satz. Wir beweisen ihn mit dem Satze


(α

den wir in Worten so aussprechen: „Es giebt keinen Gegenstand, welcher der von x bis y laufenden q-Reihe angehört und unter den v-Begriff fällt, wenn es in der mit x anfangenden q-Reihe keinen Gegenstand giebt, der als erster unter den v-Begriff fällt, und wenn y der mit x anfangenden q-Reihe angehört."

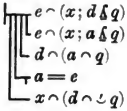
Giebt es nun ein Glied der mit x anfangenden q-Reihe, das unter den v-Begriff fällt, so können wir dies als y in dem Satze (α) annehmen und gelangen so an's Ziel unseres Abschnittes **a**. Den Satz (α) leiten wir mit (152) ab und bedürfen dazu des Satzes


(β

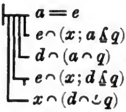
Wir unterscheiden dabei die Fälle, dass a unter den v-Begriff fällt und den entgegengesetzten. Im zweiten Falle zeigen wir mit dem Satze (280b)[1]), dass dann auch kein Glied der von x bis a laufenden q-Reihe unter den v-Begriff fällt.

1) Man vergl. die Vorbemerkung.

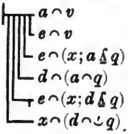
§ 2. *Aufbau.*

280b 

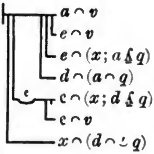
×

 (α

(IIIa): - - - - - -

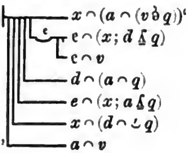
 (β

(IIa):: - - - - - -

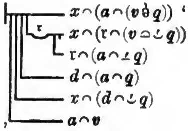
 (349

§ 3. *Zerlegung.*

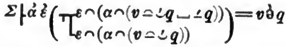
Wir kommen, um den Satz (β) des § 1 zu beweisen, zu dem Falle, dass *a* unter den *v*-Begriff fällt. Dann fällt *a* selbst in der mit *x* anfangenden *q*-Reihe zuerst unter den *v*-Begriff; es giebt also ein solches Glied. Wir haben den Satz

 (α

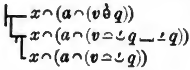
zu beweisen. Wir brauchen dazu den aus (Σ) leicht folgenden Satz

 (β

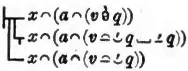
§ 4. *Aufbau.*



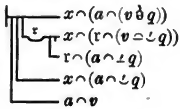
(10): ————————

 (α

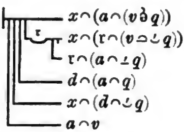
(If):: - - - - - - - -

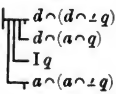
 (β

(15, 197):: = = = = = =

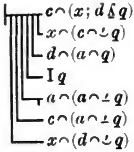
 (350

(137):: - - - - - - -

 (351

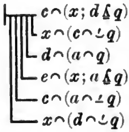
279 

(280a): - - - - -



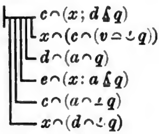
(352

(265, 271) :: = = = = = =



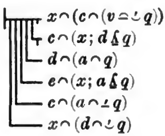
(α

(188) :: — — — — — —



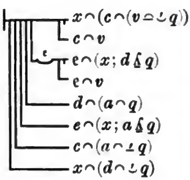
(β

×



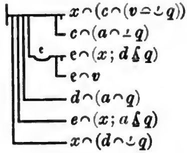
(γ

(IIa) :: — — — — — — —

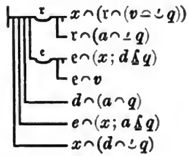


(δ

(192) : -·-·-·-·-·-·-·-·-

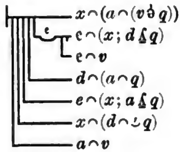


(ε



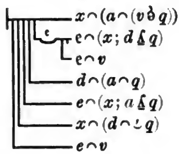
(ζ

(351) : — — — — — — —



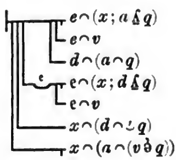
(η

(349) :: — — — — — — —



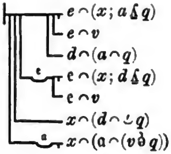
(ϑ

×

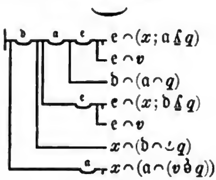


(ι

(IIa) :: — — — — — — —

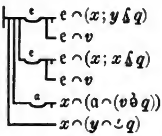


(κ



(λ

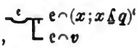
(152): - - - - - - - - - -



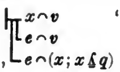
(353

§ 5. *Zerlegung.*

Wir haben das Unterglied

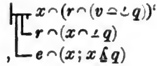


wegzuschaffen, indem wir zeigen, dass x selbst unter den v-Begriff fiele, wenn es ein Glied der von x bis x laufenden q-Reihe gäbe, das unter den v-Begriff fiele. Dann wäre x das Glied der mit x anfangenden q-Reihe, das zuerst unter den v-Begriff fiele. Wir beweisen mit (282) den Satz



(α

Wir haben dann, um (350) anwenden zu können, noch den Satz

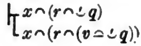


(β

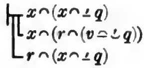
abzuleiten.

§ 6. *Aufbau.*

188

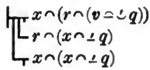


(280): - - - - - -



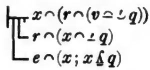
(α

×

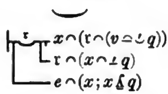


(β

(271):: - - - - - -

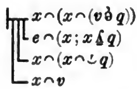


(γ



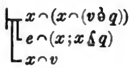
(δ

(350): - - - - - - -



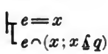
(ε

(140):: ———————



(ζ

282



(IIIc): - - - - -

$\vdash x \frown v$
$e \frown v$
$e \frown (x ; x \S q)$ (η

(ζ): - - - - - -

$\vdash x \frown (x \frown (v \eth q))$
$e \frown (x ; x \S q)$
$e \frown v$ (ϑ

×

$\vdash e \frown (x ; x \S q)$
$e \frown v$
$x \frown (x \frown (v \eth q))$ (ι

(IIa):: - - - - - - -

$\vdash e \frown (x ; x \S q)$
$e \frown v$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$ (κ

$\smile$

$\vdash \mathfrak{e}\ \mathfrak{e} \frown (x ; x \S q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$ (λ

(353): - - - - - - - -

$\vdash \mathfrak{e}\ \mathfrak{e} \frown (x ; y \S q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$
$x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$ (354

×

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$
$\mathfrak{e}\ \mathfrak{e} \frown (x ; y \S q)$
$\mathfrak{e} \frown v$ (355

187 $\vdash x \frown (y \frown p)$
$y \frown v$
$x \frown (y \frown (v \asymp p))$

×

$\vdash x \frown (y \frown (v \asymp p))$
$x \frown (y \frown p)$
$y \frown v$ (356

344 $\vdash y \frown (x ; y \S q)$
$x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (y \frown \dot{\perp} q)$
$\mathrm{I} q$

×

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown (x ; y \S q)$
$y \frown (y \frown \dot{\perp} q)$
$\mathrm{I} q$ (α

(IIa):: - - - - - -

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown v$
$\mathfrak{e}\ \mathfrak{e} \frown (x ; y \S q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$y \frown (y \frown \dot{\perp} q)$
$\mathrm{I} q$ (β

(355): -·-·-·-·-·-·-

$\vdash x \frown (y \frown \dot{\smile} q)$
$y \frown v$
$y \frown (y \frown \dot{\perp} q)$
$\mathrm{I} q$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$ (357

(356): - - - - - - - -

$\vdash x \frown (y \frown (v \asymp \dot{\smile} q))$
$y \frown (y \frown \dot{\perp} q)$
$\mathrm{I} q$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$ (358

(IIa):: - - - - - - - -

$\vdash x \frown (y \frown (v \asymp \dot{\smile} q))$
$\mathfrak{i}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \dot{\perp} q)$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$
$\mathrm{I} q$ (358a

$\smile$

$\vdash \mathfrak{e}\ x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \dot{\smile} q))$
$\mathfrak{i}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \dot{\perp} q)$
$\mathfrak{a}\ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q))$
$\mathrm{I} q$ (359

b) Beweis des Satzes

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \smile = \mathfrak{N}\,(x \frown \natural\!\!\!\!\!\times (v \cong \dot{\angle}\, q))^{\prime} \\ \smile = \mathfrak{N}\,(m \frown \natural\!\!\!\!\!\times \dot{\angle}(v \eth\, q)) \\ x \frown (m \frown (v \eth\, q)) \\ \mathrm{I}q \\ \,,\ \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle\, q) \end{array}$$

§ 7. *Zerlegung.*

Wir knüpfen nun an § 1 wieder an, indem wir eine Beziehung definiren, mit der wir die unter den v-Begriff fallenden Glieder der mit x anfangenden q-Reihe ordnen können wie dort angegeben war:

$$\Vdash \dot{\alpha}\,\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\alpha \frown (v \cong \angle\, q \smile \angle\, q)) \\ \varepsilon \frown (\alpha \frown (v \cong \angle\, q)) \end{array}\right) = v \eth\, q \qquad (T$$

Wir deuten mit ‚m' das Glied an, das zuerst in der mit x anfangenden q-Reihe unter den v-Begriff fällt, und haben die beiden Sätze

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} x \frown (c \frown (v \cong \dot{\angle}\, q))^{\prime} \\ m \frown (c \frown \dot{\angle}(v \eth\, q)) \\ ,\ x \frown (m \frown (v \eth\, q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} m \frown (c \frown \dot{\angle}(v \eth\, q))^{\prime} \\ x \frown (c \frown (v \cong \dot{\angle}\, q)) \\ x \frown (m \frown (v \eth\, q)) \\ \mathrm{I}q \\ ,\ \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \angle\, q) \end{array} \qquad (\beta$$

zu beweisen, aus denen sich ergiebt, dass die $(v \eth\, q)$-Beziehung in der That die von ihr verlangte Ordnung leistet, dass also Endlos die Anzahl der Glieder der mit x anfangenden q-Reihe ist, die unter den v-Begriff fallen, wenn Endlos die Anzahl der Glieder der mit m anfangenden $(v \eth\, q)$-Reihe ist, falls m in der mit x anfangenden q-Reihe zuerst unter den v-Begriff fällt und die q-Beziehung eindeutig ist und kein Gegenstand in der q-Reihe auf sich selbst folgt. Dies ist der in unserer Ueberschrift aufgeführte Satz. Wir beweisen (α) mit (144).

§ 8. *Aufbau.*

$$T \qquad \vdash \dot{\alpha}\,\dot{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon \frown (\alpha \frown (v \cong \angle\, q \smile \angle\, q)) \\ \varepsilon \frown (\alpha \frown (v \cong \angle\, q)) \end{array}\right) = v \eth\, q$$

(14): ————————————

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \frown (a \frown (v \eth\, q)) \\ d \frown (a \frown (v \cong \angle\, q \smile \angle\, q)) \\ d \frown (a \frown (v \cong \angle\, q)) \end{array} \qquad (360$$

(Ia):: – – – – – – – – – –

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \frown (a \frown (v \eth\, q)) \\ d \frown (a \frown (v \cong \angle\, q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

$\times$

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \frown (a \frown (v \cong \angle\, q)) \\ d \frown (a \frown (v \eth\, q)) \end{array} \qquad (361$$

(188): – – – – – –

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} d \frown (a \frown \angle\, q) \\ d \frown (a \frown (v \eth\, q)) \end{array} \qquad (362$$

(280): – – – – – –

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown\bot q) \\ x\frown(d\frown\grave{\bot} q) \\ d\frown(a\frown(v\,\eth\, q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(136): - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown\grave{\bot} q) \\ x\frown(d\frown\grave{\bot} q) \\ d\frown(a\frown(v\,\eth\, q)) \end{array} \qquad (363$$

(197): - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ x\frown(d\frown\grave{\bot} q) \\ d\frown(a\frown(v\,\eth\, q)) \\ a\frown v \end{array} \qquad (\alpha$$

(188): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ x\frown(d\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ d\frown(a\frown(v\,\eth\, q)) \\ a\frown v \end{array} \qquad (364$$

361 $$\vdash \begin{array}{l} d\frown(a\frown(v\bumpeq\bot q)) \\ d\frown(a\frown(v\,\eth\, q)) \end{array}$$

(191): - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown v \\ d\frown(a\frown(v\,\eth\, q)) \end{array} \qquad (365$$

(364): - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(a\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ d\frown(a\frown(v\,\eth\, q)) \\ x\frown(d\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} x\frown(\mathfrak{a}\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(v\,\eth\, q)) \\ x\frown(\mathfrak{d}\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \end{array} \qquad (\beta$$

(144): ————————————

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(c\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ m\frown(c\frown\grave{\bot}(v\,\eth\, q)) \\ x\frown(m\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \end{array} \qquad (366$$

———•———

$$\Sigma \qquad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \varepsilon\frown(\alpha\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q \smile \bot q)) \\ \varepsilon\frown(\alpha\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \end{array}\right) = v\,\vartheta\, q$$

(6): ————————————

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(m\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q \smile \bot q)) \\ x\frown(m\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ x\frown(m\frown(v\,\vartheta\, q)) \end{array} \qquad (367$$

(Id): - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(m\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ x\frown(m\frown(v\,\vartheta\, q)) \end{array} \qquad (368$$

(366): - - - - - - - -

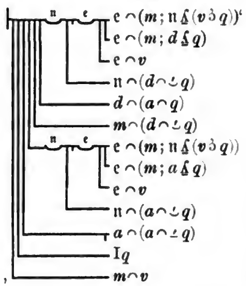
$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(c\frown(v\bumpeq\grave{\bot} q)) \\ m\frown(c\frown\grave{\bot}(v\,\eth\, q)) \\ x\frown(m\frown(v\,\vartheta\, q)) \end{array} \qquad (369$$

§ 9. *Zerlegung.*

Um den Satz (β) des § 7 zu beweisen, leiten wir zuerst den Satz

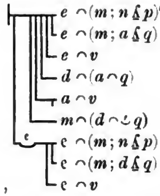
$$\vdash \overset{\mathfrak{n}}{\smile}\overset{\mathfrak{e}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{e}\frown(m;\mathfrak{n}\,\S(v\,\eth\, q))' \\ \mathfrak{e}\frown(m;c\,\S\, q) \\ \mathfrak{e}\frown v \\ \mathfrak{n}\frown(c\frown\grave{\bot} q) \\ c\frown(c\frown\bot q) \\ \mathrm{I}q \\ m\frown v \\ m\frown(c\frown\grave{\bot} q) \end{array} \qquad (\alpha$$

ab; d. h. wir zeigen, dass es unter gewissen Bedingungen ein Glied der mit *c* endenden *q*-Reihe giebt, von dem gilt, dass jedes Glied der von *m* bis *c* laufenden *q*-Reihe, das unter den *v*-Begriff fällt, der von *m* bis zu diesem Gliede laufenden (*v* ̀ *q*)-Reihe angehört. Aus diesem Satze schliessen wir dann, dass *c*, wenn es unter den *v*-Begriff fällt und der mit *m* anfangenden *q*-Reihe angehört, auch der mit *m* anfangenden (*v* ̀ *q*)-Reihe angehöre. Die Bedingungung, dass *c* der mit *m* anfangenden *q*-Reihe angehöre, kann ersetzt werden durch die, dass es der mit *x* anfangenden *q*-Reihe angehöre, wenn *m* das erste Glied der mit *x* anfangenden *q*-Reihe ist, das unter den *v*-Begriff fällt. Den Satz (*α*) beweisen wir nun mit (152) und bedürfen dazu des Satzes



(*β*

Um diesen abzuleiten, unterscheiden wir die Fälle, dass *a* unter den *v*-Begriff fällt und den entgegengesetzten. In diesem haben wir den Satz

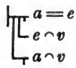


(*γ*

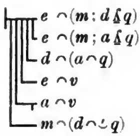
worin ‚*p*' statt ‚*v* ̀ *q*' geschrieben ist. Dieser folgt leicht aus (280b).

§ 10. *Aufbau.*

IIIb

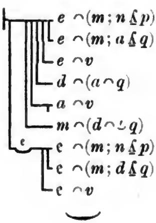


(280b): — — —

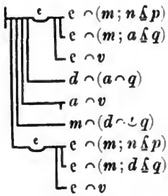


(*α*

(IIa): — — — — — — —

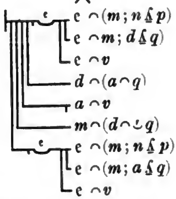


(*β*



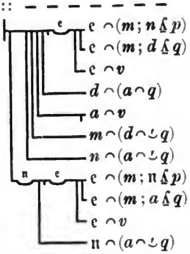
(γ

×



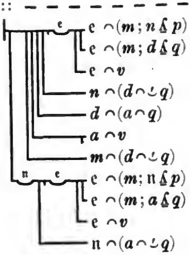
(δ

(IIa):: - - - - - - - -



(ε

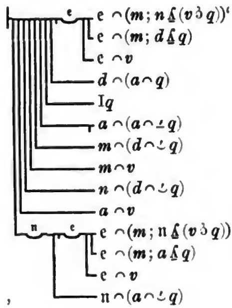
(137):: - - - - - - - - -



(370

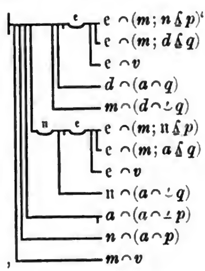
§ 11. *Zerlegung.*

Zum Beweise des Satzes (β) des § 9 fassen wir nun den Fall ins Auge, dass *a* unter den *v*-Begriff fällt, und beweisen den Satz



(α

Indem wir den Fall, dass *n* zu *a* in der (*v* ò *q*)-Beziehung steht, von dem entgegengesetzten unterscheiden, beweisen wir die beiden Sätze



(β

wo ‚*p*' die Stelle von ‚(*v* ò *q*)' vertritt, und

$\mathfrak{e} \frown (m; n \,ʃ\, (v \eth q))'$
$\mathfrak{e} \frown (m; d \,ʃ\, q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$d \frown (a \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a \frown (a \frown \dot{\bot}\, q)$
$m \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$
$m \frown v$
$n \frown (a \frown (v \eth q))$
$n \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$
, $a \frown v$ (γ

Zum Beweise von (β) unterscheiden wir wieder den Fall, dass e mit a zusammenfällt vom entgegengesetzten. Wir haben mithin die Sätze

$a \frown (m; a \,ʃ\, p)'$
$n \frown (a \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$e \frown (m; a \,ʃ\, q)$
$m \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$
$m \frown v$
$\mathfrak{e} \frown (m; n \,ʃ\, p)$
$\mathfrak{e} \frown (m; d \,ʃ\, q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
, $a \frown (a \frown \dot{\bot}\, p)$ (δ

$e \frown (m; a \,ʃ\, p)'$
$e \frown (m; a \,ʃ\, q)$
$d \frown (a \frown q)$
$a = e$
$m \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$
$e \frown v$
$\mathfrak{e} \frown (m; n \,ʃ\, p)$
$\mathfrak{e} \frown m; d \,ʃ\, q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$a \frown (a \frown \dot{\bot}\, p)$
, $n \frown (a \frown p)$ (ε

zu beweisen. Jener ist auf (344) zurückzuführen, und wir müssen zu dem Zwecke zeigen, dass unter unsern Voraussetzungen a der mit m anfangenden p-Reihe angehört. Wir zeigen dazu, dass m der von m bis n laufenden p-Reihe angehört, woraus folgt, dass n der mit m anfangenden p-Reihe angehört (269).

§ 12. *Aufbau.*

342
$m \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$
$d \frown (d \frown \dot{\bot}\, q)$
$m \frown (m; d \,ʃ\, q)$
$\mathrm{I}q$

$\times$

$m \frown (m; d \,ʃ\, q)$
$d \frown (d \frown \dot{\bot}\, q)$
$m \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$
$\mathrm{I}q$ (371

(279):: - - - - - -

$m \frown (m; d \,ʃ\, q)$
$d \frown (a \frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a \frown (a \frown \dot{\bot}\, q)$
$m \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$ (372

(271, 265):: = = = = =

$m \frown (m; d \,ʃ\, q)$
$d \frown (a \frown q)$
$e \frown (m; a \,ʃ\, q)$
$m \frown (d \frown \dot{\smile}\, q)$ (373

269
$m \frown (n \frown \dot{\smile}\, p)$
$m \frown (m; n \,ʃ\, p)$

(137): - - - - - -

$m \frown (a \frown \dot{\smile}\, p)$
$n \frown (a \frown p)$
$m \frown (m; n \,ʃ\, p)$ (α

(344): - - - - - -

$a \frown (m; a \,ʃ\, p)$
$n \frown (a \frown p)$
$m \frown (m; n \,ʃ\, p)$
$a \frown (a \frown \dot{\bot}\, p)$
$\mathrm{I}p$ (β

(265):: - - - - - -

$a \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$
$n \frown (a \frown p)$
$m \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$a \frown (a \frown \perp p)$ (γ

(IIa):: - - - - - -

$a \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$
$n \frown (a \frown p)$
$m \frown (m ; d \mathbin{\underline{\int}} q)$
$m \frown v$
$\mathfrak{e}$
$\mathfrak{e} \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$\mathfrak{e} \frown (m ; d \mathbin{\underline{\int}} q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$a \frown (a \frown \perp p)$ (δ

(373):: - - - - - - - -

$a \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$
$n \frown (a \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$e \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} q)$
$m \frown (d \frown \smile q)$
$m \frown v$
$\mathfrak{e}$
$\mathfrak{e} \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$\mathfrak{e} \frown (m ; d \mathbin{\underline{\int}} q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$a \frown (a \frown \perp p)$ (ε

(IIIc): ————————

$e \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$
$n \frown (a \frown p)$
$d \frown (a \frown q)$
$e \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} q)$
$m \frown (d \frown \smile q)$
$m \frown v$
$\mathfrak{e}$
$\mathfrak{e} \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$\mathfrak{e} \frown (m ; d \mathbin{\underline{\int}} q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$a \frown (a \frown \perp p)$
$a = e$ (374

§ 13. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (ε) des § 11. Dazu dient uns der Satz (280b) und der Satz

$e \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$'
$e \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$a \frown (a \frown \perp p)$
, $n \frown (a \frown p)$ (α

der leicht mit (137) abzuleiten ist.

§ 14. *Aufbau.*

137
$e \frown (a \frown \smile p)$
$n \frown (a \frown p)$
$e \frown (n \frown \smile p)$

(269):: - - - - -

$e \frown (a \frown \smile p)$
$n \frown (a \frown p)$
$e \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$ (α

(274): - - - - - -

$e \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$
$m \frown (e \frown \smile p)$
$a \frown (a \frown \perp p)$
$n \frown (a \frown p)$
$e \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$\mathrm{I} p$ (β

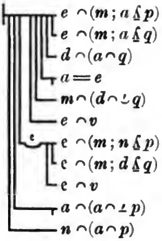
(270, 265):: = = = = =

$e \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$
$e \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$a \frown (a \frown \perp p)$
$n \frown (a \frown p)$ (375

(IIa):: - - - - - -

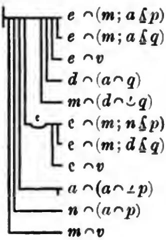
$e \frown (m ; a \mathbin{\underline{\int}} p)$
$e \frown (m ; d \mathbin{\underline{\int}} q)$
$e \frown v$
$\mathfrak{e}$
$\mathfrak{e} \frown (m ; n \mathbin{\underline{\int}} p)$
$\mathfrak{e} \frown (m ; d \mathbin{\underline{\int}} q)$
$\mathfrak{e} \frown v$
$a \frown (a \frown \perp p)$
$n \frown (a \frown p)$ (α

(280b):: - - - - - - - -

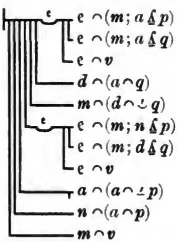


(β

(374): ·—·—·—·—·—·—·—·

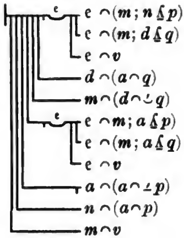


(γ



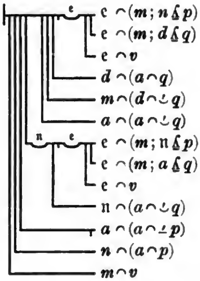
(δ

×



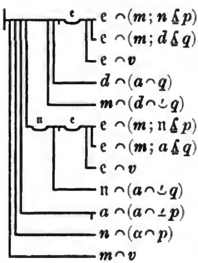
(ε

(IIa):: — — — — — — — — —



(ζ

(140):: ————————————



(376

§ 15. *Zerlegung.*

Es ist jetzt der Satz (γ) des § 11 zu beweisen. Dazu brauchen wir den Satz

$$\begin{array}{ll} \vdash & n\frown(a\frown(v\,\eth\,q)) \\ & \lnot\, n\frown(a\frown(v\bumpeq\perp q\smile\perp q)) \\ , & n\frown(a\frown(v\bumpeq\perp q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

der leicht aus (T) abzuleiten ist. Es bleibt hier das Unterglied

$$,\lnot\, n\frown(a\frown(v\bumpeq\perp q\smile\perp q))\text{'}$$

wegzuschaffen. Man muss also zeigen, dass es kein Glied geben kann, das auf n in der q-Reihe folgt und dem a in der q-Reihe vorhergeht und unter den v-Begriff fällt. Wäre r ein solches Glied, so müsste es unter unsern Voraussetzungen der von m bis d laufenden q-Reihe angehören:

$$\begin{array}{ll} \vdash & r\frown(m;d\S q) \\ & d\frown(a\frown q) \\ & \mathrm{I}q \\ & \lnot\, a\frown(a\frown\perp q) \\ & m\frown(d\frown\dot{\perp} q) \\ & m\frown v \\ & \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ \mathfrak{e}\frown(m;n\S(v\,\eth\,q)) \\ & \quad \mathfrak{e}\frown(m;d\S q) \\ & \quad \mathfrak{e}\frown v \\ & n\frown(r\frown\perp q) \\ , & r\frown(a\frown\perp q) \end{array} \qquad (\beta$$

Dann würde r aber auch der von m bis n laufenden ($v\,\eth\,q$)-Reihe angehören und mithin auch der mit n endenden q-Reihe nach dem zu beweisenden Satze

$$\begin{array}{ll} \vdash & r\frown(n\frown\dot{\perp} q) \\ , & r\frown(m;n\S(v\,\eth\,q)) \end{array} \qquad (\gamma$$

Da nun nach der Annahme n dem r in der q-Reihe vorherginge, so müsste n auf sich selbst in der q-Reihe folgen, ein Fall, den wir ausschliessen. Um (γ) zu beweisen, leiten wir mit (144) und (363) den Satz

$$\begin{array}{ll} \vdash & r\frown(n\frown\dot{\perp} q) \\ , & r\frown(n\frown\dot{\perp}(v\,\eth\,q)) \end{array} \qquad (\delta$$

ab.

§ 16. *Aufbau.*

$$136 \quad \begin{array}{ll} \vdash & n\frown(a\frown\dot{\perp} q) \\ & n\frown(a\frown\perp q) \end{array}$$

(275):: — — — —

$$\begin{array}{ll} \vdash & n\frown(a\frown\dot{\perp} q) \\ & n\frown(r\frown\perp q) \\ & r\frown(a\frown\perp q) \end{array} \qquad (377$$

(296): — — — —

$$\begin{array}{ll} \vdash & a\frown(a\frown\perp q) \\ & n\frown(n\frown\perp q) \\ & \mathrm{I}q \\ & n\frown(r\frown\perp q) \\ & r\frown(a\frown\perp q) \end{array} \qquad (378$$

———•———

$$363 \quad \begin{array}{ll} \vdash & r\frown(a\frown\dot{\perp} q) \\ & d\frown(a\frown(v\,\eth\,q)) \\ & r\frown(d\frown\dot{\perp} q) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \vdash\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} & \mathfrak{r}\frown(\mathfrak{a}\frown\dot{\perp} q) \\ & \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(v\,\eth\,q)) \\ & \mathfrak{r}\frown(\mathfrak{d}\frown\dot{\perp} q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(144): ————————

$$\begin{array}{ll} \vdash & r\frown(n\frown\dot{\perp} q) \\ & r\frown(r\frown\dot{\perp} q) \\ & r\frown(n\frown\dot{\perp}(v\,\eth\,q)) \end{array} \qquad (\beta$$

(140):: ————————

$$\begin{array}{ll} \vdash & r\frown(n\frown\dot{\perp} q) \\ & r\frown(n\frown\dot{\perp}(v\,\eth\,q)) \end{array} \qquad (379$$

(269):: — — — — — —

$$\begin{array}{ll} \vdash & r\frown(n\frown\dot{\perp} q) \\ & r\frown(m;n\S(v\,\eth\,q)) \end{array} \qquad (380$$

(276): — — — — — — —

$$\vdash n \frown (n \frown \perp q)$$
$$n \frown (r \frown \perp q)$$
$$r \frown (m ; n \S (v \ni q)) \qquad (\alpha$$

(378): - - - - - - - -

$$\vdash a \frown (a \frown \perp q)$$
$$n \frown (r \frown \perp q)$$
$$r \frown (m ; n \S (v \ni q))$$
$$\mathrm{I}q$$
$$r \frown (a \frown \perp q) \qquad (\beta$$

(IIa) :: - - - - - - - - -

$$\vdash a \frown (a \frown \perp q)$$
$$n \frown (r \frown \perp q)$$
$$r \frown (m ; d \S q)$$
$$r \frown v$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; n \S (v \ni q))$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; d \S q)$$
$$\mathfrak{e} \frown v$$
$$\mathrm{I}q$$
$$r \frown (a \frown \perp q) \qquad (381$$

———•———

280
$$\vdash m \frown (r \frown \perp q)$$
$$m \frown (n \frown \perp q)$$
$$n \frown (r \frown \perp q)$$

(136): - - - - - -

$$\vdash m \frown (r \frown \perp q)$$
$$m \frown (n \frown \perp q)$$
$$n \frown (r \frown \perp q) \qquad (382$$

(380) :: - - - - - -

$$\vdash m \frown (r \frown \perp q)$$
$$m \frown (m ; n \S (v \ni q))$$
$$n \frown (r \frown \perp q) \qquad (\alpha$$

(IIa) :: - - - - - - - -

$$\vdash m \frown (r \frown \perp q)$$
$$m \frown (m ; d \S q)$$
$$m \frown v$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; n \S (v \ni q))$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; d \S q)$$
$$\mathfrak{e} \frown v$$
$$n \frown (r \frown \perp q) \qquad (\beta$$

(372) :: - - - - - - - - -

$$\vdash m \frown (r \frown \perp q)$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$\mathrm{I}q$$
$$a \frown (a \frown \perp q)$$
$$m \frown (d \frown \perp q)$$
$$m \frown v$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; n \S (v \ni q))$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; d \S q)$$
$$\mathfrak{e} \frown v$$
$$n \frown (r \frown \perp q) \qquad (\gamma$$

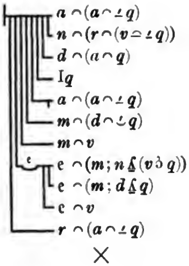
(352): - - - - - - - - -

$$\vdash r \frown (m ; d \S q)$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$\mathrm{I}q$$
$$a \frown (a \frown \perp q)$$
$$m \frown (d \frown \perp q)$$
$$m \frown v$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; n \S (v \ni q))$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; d \S q)$$
$$\mathfrak{e} \frown v$$
$$n \frown (r \frown \perp q)$$
$$r \frown (a \frown \perp q) \qquad (\delta$$

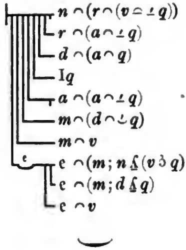
(381): - - - - - - - - -

$$\vdash a \frown (a \frown \perp q)$$
$$n \frown (r \frown \perp q)$$
$$d \frown (a \frown q)$$
$$\mathrm{I}q$$
$$a \frown (a \frown \perp q)$$
$$m \frown (d \frown \perp q)$$
$$m \frown v$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; n \S (v \ni q))$$
$$\mathfrak{e} \frown (m ; d \S q)$$
$$\mathfrak{e} \frown v$$
$$r \frown (a \frown \perp q)$$
$$r \frown v \qquad (\varepsilon$$

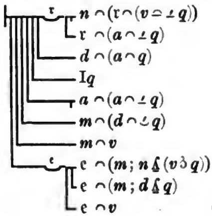
(188, 191) :: = = = = = =



(ζ

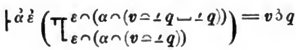


(η

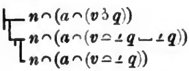


(383

———•———

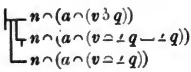
T 

(10): ————————————



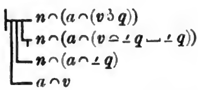
(α

(If):: - - - - - - - - -



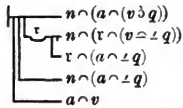
(384

(197):: - - - - - - - - -



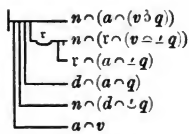
(α

(15):: - - - - - - - - - -



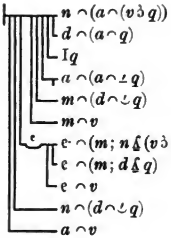
(385

(134):: - - - - - - - - -



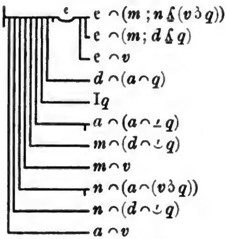
(α

(383):: - - - - - - - - -



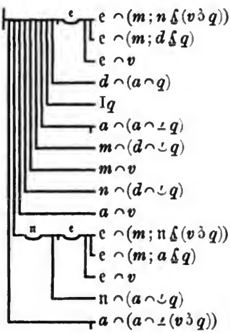
(β

×



(γ

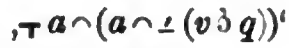
(376): -·-·-·-·-·-·-·-



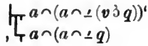
(386

§ 15. *Zerlegung.*

Wir schaffen aus (386) noch das Unterglied

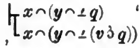


weg mit dem Satze



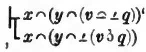
(α

der auf den Satz



(β

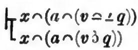
zurückzuführen ist. Dieser folgt mit (123). Wir beweisen aber besser zunächst den etwas inhaltreicheren Satz

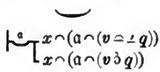


(γ

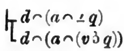
den wir später brauchen werden. Die Ableitung ist ähnlich der von (366).

§ 16. *Aufbau.*

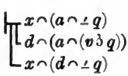
361 



(α

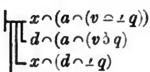
362 

(275): - - - - - - -



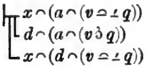
(β

(197): - - - - - - -

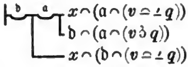


(γ

(365, 188): = = = = = =

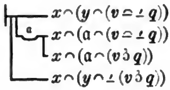


(δ



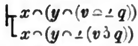
(ε

(123): ———



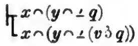
(ζ

(α):: ———



(387

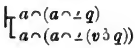
(188): - - - - - -



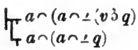
(388

———•———

388

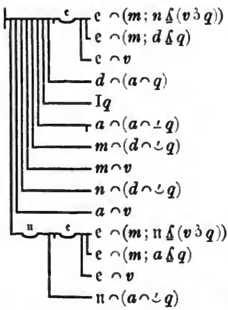


×



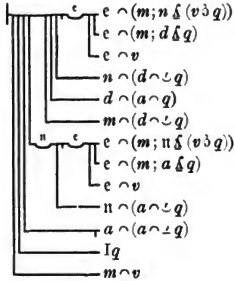
(389

(386): - - - - - -

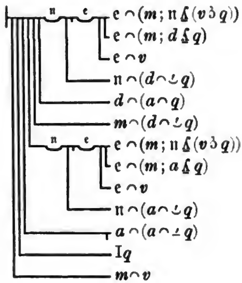


(α

(370): -·-·-·-·-·-·-·-·-

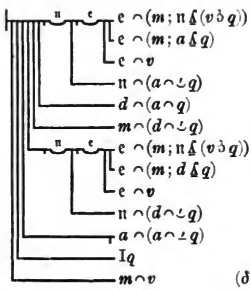


(β



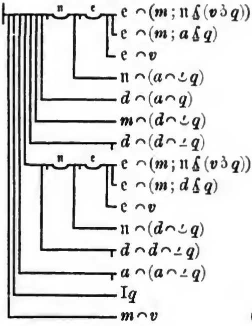
(γ

×



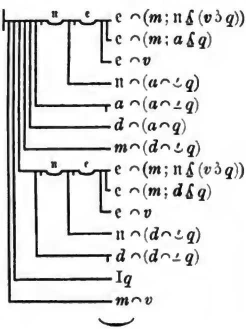
(δ

(I):: - - - - - - - - - - - -

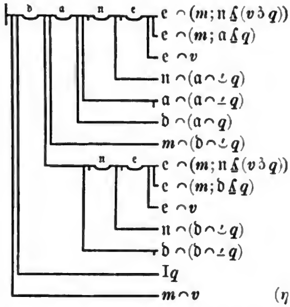


(ε

(279)::- - - - - - - - - - -

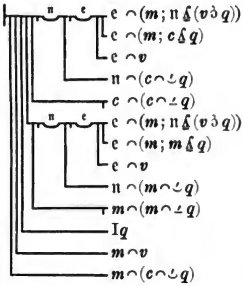


(ζ



(η

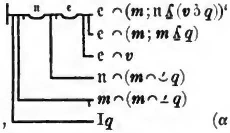
(152):- - - - - - - - - - - -



(390

§ 17. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz



(α

der zurückzuführen ist auf den Satz

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (m; m \int (v \eth q)) \\ m \frown (m \frown \perp q) \\ \mathrm{I}q \\ e \frown (m; m \int q) \end{array} \qquad (\beta$$

den wir aus (344) und (282) ableiten. Wir haben dazu noch den Satz

$$\vdash \begin{array}{l} \mathrm{I}(v \eth q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\gamma$$

nöthig, der aus (243) und dem Satze

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown \perp q) \\ e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (\delta$$

folgt.

§ 18. *Aufbau.*

140 $\vdash m \frown (m \frown \dot{\perp} p)$

(344): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} m \frown (m; m \int p) \\ m \frown (m \frown \perp p) \\ \mathrm{I}p \end{array} \qquad (391$$

——•——

136 $\vdash \begin{array}{l} e \frown (d \frown \dot{\perp} q) \\ e \frown (d \frown \perp q) \end{array}$

(362):: - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (d \frown \dot{\perp} q) \\ e \frown (d \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (392$$

——•——

360 $\vdash \begin{array}{l} e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (a \frown (v \simeq \perp q \smile \perp q)) \\ e \frown (a \frown (v \simeq \perp q)) \end{array}$

(I):: - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (a \frown (v \simeq \perp q \smile \perp q)) \end{array} \qquad (393$$

(5):: - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ d \frown (a \frown \perp q) \\ e \frown (d \frown (v \simeq \perp q)) \end{array} \qquad (394$$

×

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown \perp q) \\ e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown (v \simeq \perp q)) \end{array} \qquad (395$$

(361):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown \perp q) \\ e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (396$$

(243): - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \frown (d \frown \dot{\perp} q) \\ e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown \dot{\perp} q) \\ \mathrm{I}q \\ e \frown (a \frown \dot{\perp} q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(392, 392):: = = = = =

$$\vdash \begin{array}{l} a \frown (d \frown \dot{\perp} q) \\ e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown (v \eth q)) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\beta$$

(130): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} d = a \\ a \frown (d \frown \perp q) \\ e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown (v \eth q)) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\gamma$$

(396):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d = a \\ e \frown (a \frown (v \eth q)) \\ e \frown (d \frown (v \eth q)) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\delta$$

$$\vdash\, \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\, \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\, \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q)) \\ \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown (v \eth q)) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(16): - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \mathrm{I}(v \eth q) \\ \mathrm{I}q \end{array} \qquad (397$$

(391): - - - -

⊢ m ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
m ⌢ (m ⌢ ⊥ (v ɔ q))
I q (α

(389) :: - - - - - - - - -

⊢ m ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
m ⌢ (m ⌢ ⊥ q)
I q (β

(IIIa) : ————————

⊢ e ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
m ⌢ (m ⌢ ⊥ q)
I q
e = m (γ

(282) :: - - - - - - - - -

⊢ e ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
m ⌢ (m ⌢ ⊥ q)
I q
e ⌢ (m ; m Ş q) (δ

(I) : - - - - - - - - -

⊢ e ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
e ⌢ (m ; m Ş q)
e ⌢ v
m ⌢ (m ⌢ ⊥ q)
I q (ε

⊢ 𝔢 — 𝔢 ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
𝔢 ⌢ (m ; m Ş q)
𝔢 ⌢ v
m ⌢ (m ⌢ ⊥ q)
I q (398

—•—

I ⊢ F(n)
G(n)
F(n)

(IIa) :: - - -

⊢ F(n)
G(n)
𝔫 — F(𝔫) (α

⊢ 𝔫 — F(𝔫)
G(𝔫)
𝔫 — F(𝔫) (β

×

⊢ 𝔫 — F(𝔫)
𝔫 — F(𝔫)
G(𝔫) (399

—•—

140 ⊢ m ⌢ (m ⌢ ∸ q)

(IIa) :: ————

⊢ 𝔢 — 𝔢 ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
𝔢 ⌢ (m ; m Ş q)
𝔢 ⌢ v
𝔫 — 𝔢 — 𝔢 ⌢ (m ; 𝔫 Ş (v ɔ q))
𝔢 ⌢ (m ; m Ş q)
𝔢 ⌢ v
𝔫 ⌢ (m ⌢ ∸ q) (α

×

⊢ 𝔫 — 𝔢 — 𝔢 ⌢ (m ; 𝔫 Ş (v ɔ q))
𝔢 ⌢ (m ; m Ş q)
𝔢 ⌢ v
𝔫 ⌢ (m ⌢ ∸ q)
𝔢 — 𝔢 ⌢ (m ; m Ş (v ɔ q))
𝔢 ⌢ (m ; m Ş q)
𝔢 ⌢ v (β

(398) :: - - - - - - - - -

⊢ 𝔫 — 𝔢 — 𝔢 ⌢ (m ; 𝔫 Ş (v ɔ q))
𝔢 ⌢ (m ; m Ş q)
𝔢 ⌢ v
𝔫 ⌢ (m ⌢ ∸ q)
m ⌢ (m ⌢ ⊥ q)
I q (γ

(390) : - - - - - - - - -

⊢ 𝔫 — 𝔢 — 𝔢 ⌢ (m ; 𝔫 Ş (v ɔ q))
𝔢 ⌢ (m ; c Ş q)
𝔢 ⌢ v
𝔫 ⌢ (c ⌢ ∸ q)
c ⌢ (c ⌢ ⊥ q)
I q
m ⌢ v
m ⌢ (c ⌢ ∸ q) (δ

(399) : - - - - - - - - - -

e ⌢(m; n∡(v∂q))
e ⌢(m; c∡q)
e ⌢v
c ⌢(c⌢∸q)
Iq
m⌢v
m⌢(c⌢∸q) (400

368 x⌢(m⌢(v≏∸q))
x⌢(m⌢(v∂q))

(188): – – – – – –

x⌢(m⌢∸q)
x⌢(m⌢(v∂q)) (401

368 x⌢(m⌢(v≏∸q))
x⌢(m⌢(v∂q))

(191): – – – – – –

m⌢v
x⌢(m⌢(v∂q)) (402

(400): – – – – – –

e ⌢(m; n∡(v∂q))
e ⌢(m; c∡q)
e ⌢v
c ⌢(c⌢∸q)
Iq
x ⌢(m⌢(v∂q))
m⌢(c⌢∸q) (403

§ 19. *Zerlegung.*

Um mit (403) den Satz (β) des § 7 abzuleiten, brauchen wir den Satz

m⌢(c⌢∸(v∂q))
c ⌢(m; c∡q)
c ⌢v
e ⌢(m; n∡(v∂q))
e ⌢(m; c∡q)
e ⌢v (α

Um das Unterglied

‚— m⌢(c⌢∸q)'

wegzuschaffen, bedürfen wir dann noch des Satzes

m⌢(c⌢∸q)
x ⌢(m⌢(v≏∸q ⌣ ∸q))
x ⌢(c⌢(v≏∸q))
x ⌢(c⌢∸q)
Iq
x ⌢(m⌢∸q) (β

der aus (243) folgt. Die Unterglieder

‚┬ x⌢(m⌢(v≏∸q ⌣ ∸q))'

‚— x⌢(m⌢∸q)'

sind durch ‚— x⌢(m⌢(v∂q))' zu ersetzen.

§ 20. *Aufbau.*

367 x⌢(m⌢(v≏∸q ⌣ ∸q))
x⌢(m⌢(v≏∸q))
x⌢(m⌢(v∂q))

(Ic): – – – – – – – –

x⌢(m⌢(v≏∸q ⌣ ∸q))
x⌢(m⌢(v∂q)) (404

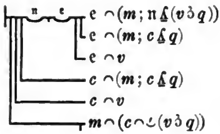
270 m⌢(c⌢∸(v∂q))
c ⌢(m; n∡(v∂q))

(IIa):: – – – – – –

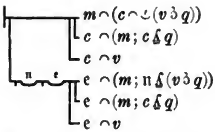
m⌢(c⌢∸(v∂q))
c ⌢(m; c∡q)
c ⌢v
e ⌢(m; n∡(v∂q))
e ⌢(m; c∡q)
e ⌢v (α

×

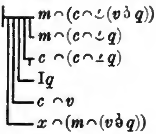
e ⌢(m; n∡(v∂q))
e ⌢(m; c∡q)
e ⌢v
c ⌢(m; c∡q)
c ⌢v
m⌢(c⌢∸(v∂q)) (β


(γ

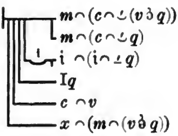
×


(δ

(403,344):: = = = = = = = =

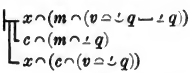

(405

(IIa):: - - - - - - -

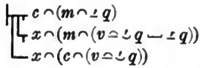

(406

———•———

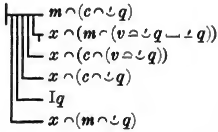
5



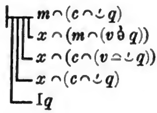
×


(α

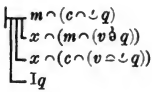
(243): - - - - - - - - - -


(β

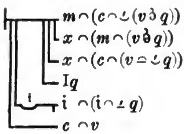
(401,404):: = = = = = = = =


(γ

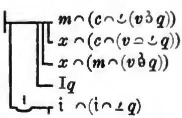
(188):: - - - - - - -


(407

(406): - - - - - - -


(α

(191):: - - - - - - - -


(β

(IVa): - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll}\vdash & [-x \frown (c \frown (v \asymp \smile q))] = [-m \frown (c \frown \smile (v \,\mathfrak{z}\, q))] \\ & x \frown (m \frown (v \,\dot{\vartheta}\, q)) \\ & \mathrm{I}q \\ & \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q) \\ & x \frown (c \frown (v \asymp \smile q)) \\ & m \frown (c \frown (v \,\mathfrak{z}\, q))\end{array} \qquad (\gamma$$

(369):: -

$$\begin{array}{ll}\vdash & [-x \frown (c \frown (v \asymp \smile q))] = [-m \frown (c \frown \smile (v \,\mathfrak{z}\, q))] \\ & x \frown (m \frown (v \,\dot{\vartheta}\, q)) \\ & \mathrm{I}q \\ & \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)\end{array} \qquad (\delta$$

(22): ————————————————————

$$\begin{array}{ll}\vdash & [-c \frown (x \frown \maltese (v \asymp \smile q))] = [-m \frown (c \frown \smile (v \,\mathfrak{z}\, q))] \\ & x \frown (m \frown (v \,\dot{\vartheta}\, q)) \\ & \mathrm{I}q \\ & \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)\end{array} \qquad (\varepsilon$$

(22): ————————————————————

$$\begin{array}{ll}\vdash & [-c \frown (x \frown \maltese (v \asymp \smile q))] = [-c \frown (m \frown \maltese \smile (v \,\mathfrak{z}\, q))] \\ & x \frown (m \frown (v \,\dot{\vartheta}\, q)) \\ & \mathrm{I}q \\ & \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)\end{array} \qquad (\zeta$$

$\smile$

$$\begin{array}{ll}\vdash & \smile^{\mathfrak{a}}\ [-\mathfrak{a} \frown (x \frown \maltese (v \asymp \smile q))] = [-\mathfrak{a} \frown (m \frown \maltese \smile (v \,\mathfrak{z}\, q))] \\ & x \frown (m \frown (v \,\dot{\vartheta}\, q)) \\ & \mathrm{I}q \\ & \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)\end{array} \qquad (\eta$$

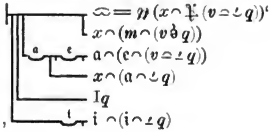
(96): -

$$\begin{array}{ll}\vdash & \mathfrak{P}(x \frown \maltese (v \asymp \smile q)) = \mathfrak{P}(m \frown \maltese \smile (v \,\mathfrak{z}\, q)) \\ & x \frown (m \frown (v \,\dot{\vartheta}\, q)) \\ & \mathrm{I}q \\ & \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)\end{array} \qquad (\vartheta$$

(IIIa): - - - - - - - - - - - - - - - - -

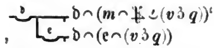
$$\begin{array}{ll}\vdash & \infty = \mathfrak{P}(x \frown \maltese (v \asymp \smile q)) \\ & \infty = \mathfrak{P}(m \frown \maltese \smile (v \,\mathfrak{z}\, q)) \\ & x \frown (m \frown (v \,\dot{\vartheta}\, q)) \\ & \mathrm{I}q \\ & \smile^{\mathfrak{i}}\ \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)\end{array} \qquad (408$$

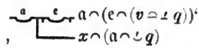
c) Beweis des Satzes



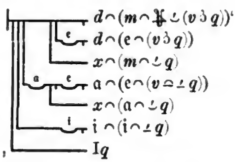
§ 21. *Zerlegung.*

Um nun von (408) aus zu dem Satze zu gelangen, dass bei unsern Voraussetzungen über q und m Endlos die Anzahl der Glieder der mit x anfangenden q-Reihe ist, die unter den v-Begriff fallen, wenn es zu jedem Gliede der mit x anfangenden q-Reihe ein darauf folgendes giebt, das unter den v-Begriff fällt, müssen wir (262) anwenden. Bevor wir dies thun, wollen wir diesen Satz für unsere Zwecke passender gestalten. Wir haben nämlich in (262) für ‚q' ‚$v ɔ q$' zu schreiben. In den dann auftretenden Untergliedern ‚$—\mathrm{I}(v ɔ q)$' und ‚$—\mathfrak{i}\frown(\mathfrak{i}\frown(v ɔ q))$' ist ‚$v ɔ q$' durch ‚$q$' zu ersetzen. Dann müssen wir für das Unterglied

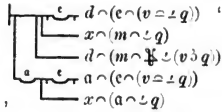


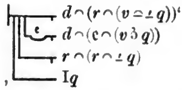


einführen. Den dazu nöthigen Satz

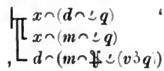
 (α

beweisen wir mit den Sätzen

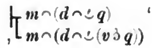
 (β

 (γ

Um (β) mit IIa zu beweisen brauchen wir den Satz

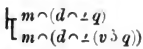
 (δ

der mit (322) aus

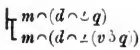
 (ε

folgt.

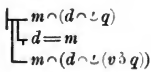
§ 22. *Aufbau.*

388 

(136): - - - - - - -

 (α

(200):: - - - - - -

 (β

(139): -·-·-·-·-·-·-

$$\begin{array}{l} \vdash m \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\ \quad m \frown (d \frown \dot{\smile} (v \eth q)) \end{array} \qquad (409$$

(23)::- - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash m \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\ \quad d \frown (m \frown \mathfrak{X}\, \dot{\smile} (v \eth q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(322): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash x \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\ \quad x \frown (m \frown \dot{\smile} q) \\ \quad d \frown (m \frown \mathfrak{X}\, \dot{\smile} (v \eth q)) \end{array} \qquad (\beta$$

(IIa): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ d \frown (\mathfrak{e} \frown (v \simeq \dot{\perp} q)) \\ \quad x \frown (m \frown \dot{\smile} q) \\ \quad d \frown (m \frown \mathfrak{X}\, \dot{\smile} (v \eth q)) \\ \quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\ \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{e} \frown (v \simeq \dot{\perp} q)) \\ \qquad x \frown (\mathfrak{a} \frown \dot{\smile} q) \end{array} \qquad (410$$

§ 23. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz (γ) des § 21. Dieser Satz sagt: wenn es keinen Gegenstand giebt, der zuerst unter den auf d in der q-Reihe folgenden unter den v-Begriff fällt, so giebt es überhaupt keinen Gegenstand, der unter den v-Begriff fällt und in der q-Reihe auf d folgt, sofern die q-Beziehung unsern Voraussetzungen entspricht. Er ist ähnlich dem Satze (358) und kann daraus abgeleitet werden. Wenn d zu keinem Gegenstande in der q-Beziehung steht, so giebt es keinen Gegenstand, der auf d in der q-Reihe folgt, und also auch keinen solchen, der unter den v-Begriff fällt. Wenn d aber zu einem Gegenstande a in der q-Beziehung steht, so können wir zeigen, dass ein Gegenstand n nicht zuerst in der mit a anfangenden q-Reihe unter den v-Begriff fällt, wenn n nicht unter den auf d in der q-Reihe folgenden zuerst unter den v-Begriff fällt:

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (n \frown (v \eth q))' \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad \mathrm{I} q \\ ,\ d \frown (n \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

Ferner haben wir den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (r \frown (v \simeq \dot{\smile} q))' \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad \mathrm{I} q \\ ,\ d \frown (r \frown (v \simeq \dot{\perp} q)) \end{array} \qquad (\beta$$

abzuleiten, was leicht mit (242) geschehen kann. Um (α) zu beweisen, gehen wir aus von dem Satze (384):

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (n \frown (v \eth q)) \\ \quad d \frown (n \frown (v \simeq \dot{\perp} q \smile \dot{\perp} q)) \\ \quad d \frown (n \frown (v \simeq \dot{\perp} q)) \end{array}$$

und haben nun die Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (n \frown (v \simeq \dot{\perp} q))' \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ ,\ a \frown (n \frown (v \simeq \dot{\smile} q)) \end{array} \qquad (\gamma$$

und

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (n \frown (v \simeq \dot{\perp} q \smile \dot{\perp} q))' \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad \mathrm{I} q \\ ,\ a \frown (n \frown (v \simeq \dot{\smile} q \smile \dot{\perp} q)) \end{array} \qquad (\delta$$

zu beweisen, von denen (γ) leicht aus (132) folgt. (δ) ist mit (15) abzuleiten:

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (n \frown (v \simeq \dot{\perp} q \smile \dot{\perp} q)) \\ \quad \overset{\mathfrak{r}}{\smile}\ d \frown (\mathfrak{r} \frown (v \simeq \dot{\perp} q)) \\ \qquad \mathfrak{r} \frown (n \frown \dot{\perp} q) \end{array}$$

Das geschieht mit (5):

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (n \frown (v \simeq \dot{\smile} q \smile \dot{\perp} q)) \\ \quad r \frown (n \frown \dot{\perp} q) \\ \quad a \frown (r \frown (v \simeq \dot{\smile} q)) \end{array}$$

und (β).

§ 24. *Aufbau.*

242 $\vdash a\frown(r\frown\dot{\smile}q)$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$d\frown(r\frown\dot{\bot}q)$

(197): - - - - -

$\vdash a\frown(r\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$d\frown(r\frown\dot{\bot}q)$
$r\frown v$ (α

(188, 191):: = = = = = =

$\vdash a\frown(r\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$d\frown(r\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q))$ (411

(5): - - - - - - -

$\vdash a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q\smile\dot{\bot}q))$
$r\frown(n\frown\dot{\bot}q)$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$d\frown(r\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q))$ (α

×

$\vdash d\frown(r\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q))$
$r\frown(n\frown\dot{\bot}q)$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q\smile\dot{\bot}q))$ (β

$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile} d\frown(\mathfrak{r}\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q))$
$\mathfrak{r}\frown(n\frown\dot{\bot}q)$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q\smile\dot{\bot}q))$ (γ

(15): - - - - - - - - - -

$\vdash d\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q\smile\dot{\bot}q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q\smile\dot{\bot}q))$ (δ

(384): - - - - - - - - -

$\vdash d\frown(n\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q\smile\dot{\bot}q))$
$d\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q))$ (ε

———•———

132 $\vdash d\frown(n\frown\dot{\bot}q)$
$d\frown(a\frown q)$
$a\frown(n\frown\dot{\smile}q)$

(197): - - - - -

$\vdash d\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q))$
$d\frown(a\frown q)$
$a\frown(n\frown\dot{\smile}q)$
$n\frown v$ (ζ

(188, 191):: = = = = = =

$\vdash d\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\bot}q))$
$d\frown(a\frown q)$
$a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q))$ (η

(ε): - - - - - - -

$\vdash d\frown(n\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q\smile\dot{\bot}q))$
$a\frown(n\frown(v\bumpeq\dot{\smile}q))$ (ϑ

(368, 404):: = = = = = = = =

$\vdash d\frown(n\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$a\frown(n\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$ (ι

×

$\vdash a\frown(n\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$d\frown(n\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$ (κ

(IIa):: - - - - - -

$\vdash a\frown(n\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$
$d\frown(a\frown q)$
$\mathrm{I}q$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile} d\frown(\mathfrak{e}\frown(v\,\grave{\eth}\,q))$ (λ

⊢ 𝔞⌣ a⌢(𝔞⌢(vɜq))
d⌢(a⌢q)
Iq
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq)) (μ

(358): - - - - - - -

⊢ a⌢(r⌢(v≏⌣q))
r⌢(r⌢⊥q)
d⌢(a⌢q)
Iq
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq)) (ν

×

⊢ 𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
r⌢(r⌢⊥q)
d⌢(a⌢q)
Iq
a⌢(r⌢(v≏⌣q)) (ξ

(411):: - - - - - - - -

⊢ 𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
r⌢(r⌢⊥q)
d⌢(a⌢q)
Iq
d⌢(r⌢(v≏⊥q)) (ο

×

⊢ d⌢(a⌢q)
r⌢(r⌢⊥q)
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
Iq
d⌢(r⌢(v⌢⊥q)) (π

⊢ 𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q)
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
Iq
r⌢(r⌢⊥q)
d⌢(r⌢(v≏⊥q)) (412

——•——

IIa ⊢ d⌢(a⌢q)
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q)

(22): ————————

⊢ a⌢(d⌢∤q)
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q) (α

⊢ 𝔢⌣ 𝔢⌢(d⌢∤q)
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢y) (β

(125): - - - - - -

⊢ r⌢(d⌢⊥∤q)
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q) (γ

×

⊢ 𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q)
r⌢(d⌢⊥∤q) (δ

(302):: - - - - - -

⊢ 𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q)
d⌢(r⌢⊥q) (413

(188):: - - - - - -

⊢ 𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q)
d⌢(r⌢(v≏⊥q)) (α

×

⊢ d⌢(r⌢(v≏⊥q))
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢q) (β

(412):: - - - - - - -

⊢ d⌢(r⌢(v≏⊥q))
d⌢(r⌢(v≏⊥q))
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
r⌢(r⌢⊥q)
Iq (γ

(Ig): - - - - - - - - -

⊢ d⌢(r⌢(v≏⊥q))
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
r⌢(r⌢⊥q)
Iq (δ

(IIa):: - - - - - - - -

⊢ d⌢(r⌢(v≏⊥q))
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
𝔦⌣ 𝔦⌢(𝔦⌢⊥q)
Iq (ε

⊢ 𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(v≏⊥q))
𝔢⌣ d⌢(𝔢⌢(vɜq))
𝔦⌣ 𝔦⌢(𝔦⌢⊥q)
Iq (ζ

×

d⌢(e⌢(v∂ q))
d⌢(e⌢(v≏⊥ q))
i⌢(i⌢⊥ q)
Iq (η

(410):: - - - - - - - - -

d⌢(e⌢(v∂ q))
x⌢(m⌢⊥ q)
d⌢(m⌢⌘⊥(v∂ q))
a⌢(e⌢(v≏⊥ q))
x⌢(a⌢⊥ q)
i⌢(i⌢⊥ q)
Iq (ϑ

×

d⌢(m⌢⌘⊥(v∂ q))
d⌢(e⌢(v∂ q))
x⌢(m⌢⊥ q)
a⌢(e⌢(v≏⊥ q))
x⌢(a⌢⊥ q)
i⌢(i⌢⊥ q)
Iq (ι

‿

b⌢(m⌢⌘⊥(v∂ q))
b⌢(e⌢(v∂ q))
x⌢(m⌢⊥ q)
a⌢(e⌢(v≏⊥ q))
x⌢(a⌢⊥ q)
i⌢(i⌢⊥ q)
Iq (414

———•———

389 a⌢(a⌢⊥(v∂ q))
a⌢(a⌢⊥ q)

(IIa):: - - - - - - - -

a⌢(a⌢⊥(v∂ q))
i⌢(i⌢⊥ q) (α

‿

i⌢(i⌢⊥(v∂ q))
i⌢(i⌢⊥ q) (415

(262): - - - - - - - -

ꝏ = ℌ(m⌢⌘⊥(v∂ q))
b⌢(m⌢⌘⊥(v∂ q))
b⌢(e⌢(v∂ q))
I(v∂ q)
i⌢(i⌢⊥ q) (α

(414, 397)::= = = = = = = =

ꝏ = ℌ(m⌢⌘⊥(v∂ q))
x⌢(m⌢⊥ q)
a⌢(e⌢(v≏⊥ q))
x⌢(a⌢⊥ q)
Iq
i⌢(i⌢⊥ q) (β

(401):: - - - - - - - - - -

ꝏ = ℌ(m⌢⌘⊥(v∂ q))
x⌢(m⌢(v∂ q))
a⌢(e⌢(v≏⊥ q))
x⌢(a⌢⊥ q)
Iq
i⌢(i⌢⊥ q) (γ

(408): - - - - - - - - - - -

ꝏ = ℌ(x⌢⌘(v≏⊥ q))
x⌢(m⌢(v∂ q))
a⌢(e⌢(v≏⊥ q))
x⌢(a⌢⊥ q)
Iq
i⌢(i⌢⊥ q) (416

d) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash\ \Theta\frown[\mathfrak{P}(x\frown \natural(v \mathbin{\underline{\frown}} \smile q))\frown\smile\mathfrak{f}] \\ \quad x\frown(m\frown(v\,\grave{\eth}\,q)) \\ \quad \mathrm{I}q \\ \quad c\frown(c\frown\perp q) \\ \quad \mathfrak{e}:\ c\frown(\mathfrak{e}\frown(v\mathbin{\underline{\frown}}\perp q)) \\ ,\quad x\frown(c\frown\smile q) \end{array}$$

und Ende des Abschnittes *M.*

§ 25. *Zerlegung.*

Es bleibt uns übrig zu zeigen, dass die Anzahl der Glieder der mit x anfangenden q-Reihe, die unter den v-Begriff fallen, endlich ist, wenn auf ein Glied (c) dieser Reihe kein unter den v-Begriff fallendes Glied folgt, falls unsere Voraussetzungen über q und m erfüllt sind. Dies geschieht mit dem Satze (326) in der Form

$$,\vdash\ \Theta\frown[\mathfrak{P}(m;n\,\underline{\S}\,(v\,\eth\,q))\frown\perp\mathfrak{f}]$$

Wir haben nachzuweisen, dass unter unsern Voraussetzungen die von m bis n laufende $(v\,\eth\,q)$-Reihe alle die Glieder und nur die enthält, die in der mit x anfangenden q-Reihe unter den v-Begriff fallen, wenn n ein solches Glied ist, dass alle Glieder der von m bis c laufenden q-Reihe, die unter den v-Begriff fallen, der von m bis n laufenden $(v\,\eth\,q)$-Reihe angehören:

$$\begin{array}{l} \vdash\ [-a\frown(x\frown\natural(v\mathbin{\underline{\frown}}\smile q))]=[-a\frown(m;n\,\underline{\S}\,(v\,\eth\,q))] \\ \quad x\frown(m\frown(v\,\grave{\eth}\,q)) \\ \quad \mathrm{I}q \\ \quad c\frown(c\frown\perp q) \\ \quad \mathfrak{e}:\ c\frown(\mathfrak{e}\frown(v\mathbin{\underline{\frown}}\perp q)) \\ \quad x\frown(c\frown\smile q) \\ \quad \mathfrak{e}:\ \mathfrak{e}\frown(m;n\,\underline{\S}\,(v\,\eth\,q)) \\ \qquad \mathfrak{e}\frown(m;c\,\underline{\S}\,q) \\ ,\qquad \mathfrak{e}\frown v \end{array} \qquad (\alpha$$

Aus (369) folgern wir leicht den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash\ x\frown(a\frown(v\mathbin{\underline{\frown}}\smile q)) \\ \quad a\frown(m;n\,\underline{\S}\,(v\,\eth\,q)) \\ ,\quad x\frown(m\frown(v\,\grave{\eth}\,q)) \end{array} \qquad (\beta$$

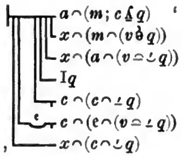
Um nun auch einen Satz mit

$$\begin{array}{l} a\frown(m;n\,\underline{\S}\,(v\,\eth\,q)) \\ ,\ x\frown(a\frown(v\mathbin{\underline{\frown}}\smile q)) \end{array}$$

als Obergliede zu erhalten, schreiben wir (IIa) in der Form

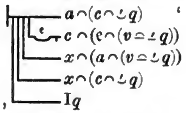
$$\begin{array}{l} \vdash\ a\frown(m;n\,\underline{\S}\,(v\,\eth\,q)) \\ \quad a\frown(m;c\,\underline{\S}\,q) \\ \quad a\frown v \\ \quad \mathfrak{e}:\ \mathfrak{e}\frown(m;n\,\underline{\S}\,(v\,\eth\,q)) \\ \qquad \mathfrak{e}\frown(m;c\,\underline{\S}\,q) \\ ,\qquad \mathfrak{e}\frown v \end{array}$$

und wenden hierauf den Satz



(γ

an, den wir aus (407) und

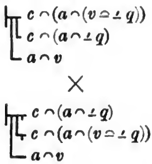


(δ

ableiten. Wir beweisen (δ) mit (243).

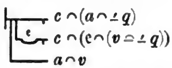
§ 26. *Aufbau.*

197



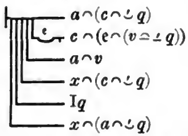
(α

(IIa).: - - - - - - - -



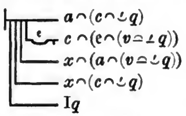
(δ

(243): - - - - - - - - -



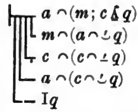
(γ

(188, 191):: = = = = = = =

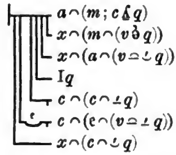


(417

274

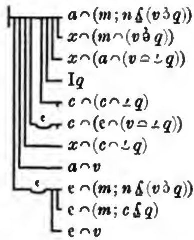


(407, 417):: = = = = =



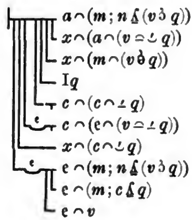
(418

(IIa): - - - - - - - - -



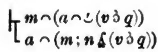
(α

(191):: - - - - - - - - -



(419

270



(369): - - - - - - -

$x \frown (a \frown (v \doteq \smile q))$
$a \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))$
$x \frown (m \frown (v \,\grave{\theta}\, q))$

(IVa): - - - - - - - - (α

$[\text{—} x \frown (a \frown (v \doteq \smile q))] = [\text{—} a \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))]$
$a \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))$
$x \frown (a \frown (v \doteq \smile q))$
$x \frown (m \frown (v \,\grave{\theta}\, q))$ (β

(22): ————————————————

$[\text{—} a \frown (x \frown \natural (v \doteq \smile q))] = [\text{—} a \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))]$
$a \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))$
$x \frown (a \frown (v \doteq \smile q))$
$x \frown (m \frown (v \,\grave{\theta}\, q))$ (γ

(419):: -

$[\text{—} a \frown (x \frown \natural (v \doteq \smile q))] = [\text{—} a \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))]$
$x \frown (m \frown (v \,\grave{\theta}\, q))$
$\mathrm{I} q$
$c \frown (c \frown \perp q)$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; c \frown (\mathfrak{e} \frown (v \doteq \perp q))$
$x \frown (c \frown \smile q)$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; \mathfrak{e} \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))$
$\mathfrak{e} \frown (m ; c \,\&\, q)$
$\mathfrak{e} \frown v$ (δ

$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; [\text{—} \mathfrak{a} \frown (x \frown \natural (v \doteq \smile q))] = [\text{—} \mathfrak{a} \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))]$
$x \frown (m \frown (v \,\grave{\theta}\, q))$
$\mathrm{I} q$
$c \frown (c \frown \perp q)$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; c \frown (\mathfrak{e} \frown (v \doteq \perp q))$
$x \frown (c \frown \smile q)$
$\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; \mathfrak{e} \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))$
$\mathfrak{e} \frown (m ; c \,\&\, q)$
$\mathfrak{e} \frown v$ (420

———•———

326 $\vdash \mathfrak{q} \frown [\mathfrak{P}(m : n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$

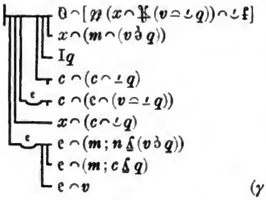
(IIIa): ————————————

$\mathfrak{q} \frown [\mathfrak{P}(x \frown \natural (v \doteq \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$
$\mathfrak{P}(x \frown \natural (v \doteq \smile q)) = \mathfrak{P}(m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))$ (α

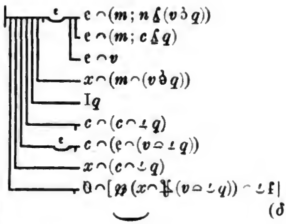
(96):: - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathfrak{q} \frown [\mathfrak{P}(x \frown \natural (v \doteq \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$
$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; [\text{—} \mathfrak{a} \frown (x \frown \natural (v \doteq \smile q))] = [\text{—} \mathfrak{a} \frown (m ; n \,\&\, (v \,\grave{\jmath}\, q))]$ (β

(420):: -

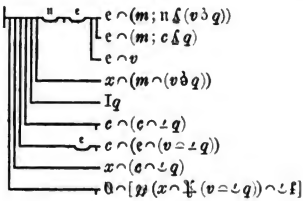


(γ



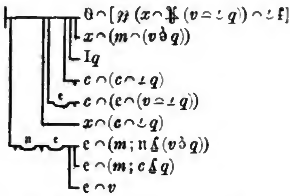
(δ

×



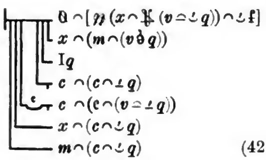
(ε

×



(ζ

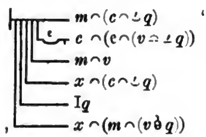
(403 :: - - - - - - - - - - - - - - -



(421

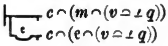
§ 27. *Zerlegung.*

Wir müssen aus dem letzten Satze das Unterglied ‚— $m \frown (c \frown \dot{-}\, q)$‘ wegschaffen. Dies geschieht mit dem Satze

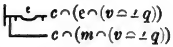


den wir mit (213) beweisen, indem wir zeigen, dass c nicht dem m in der q-Reihe vorhergehen kann, weil es dann ein auf c folgendes Glied, nämlich m, gäbe, das unter den v-Begriff fiele.

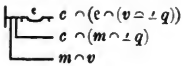
§ 28. *Aufbau.*

IIa 

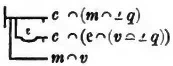
×

 (α

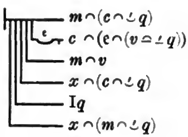
(197)::- - - - - - - - -

 (β

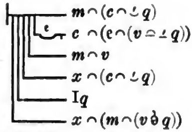
×

 (γ

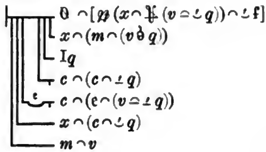
(243): - - - - - - - - -

 (δ

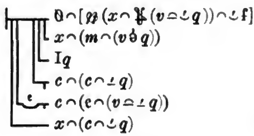
(401)::- - - - - - - - - -

 (ε

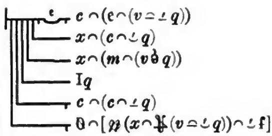
(421): - - - - - - - -

 (ζ

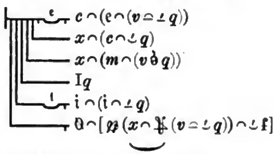
(402)::- - - - - - - - - - - -

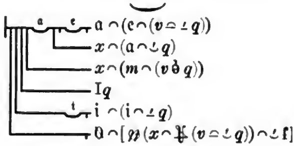
 (422

×



(IIa)::- - - - - - - - - - - - (α

 (β

 (γ

(416): - - - - - - - - - - - - - - - -

$\varpi = \wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$x \frown (m \frown (v \,\eth\, q))$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathfrak{Q} \frown [\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$ (δ

$\times$

$x \frown (m \frown (v \,\eth\, q))$
$\varpi = \wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathfrak{Q} \frown [\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$ (ε

$\mathfrak{a} \quad x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \,\eth\, q))$
$\varpi = \wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathfrak{Q} \frown [\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$ (ζ

(359): - - - - - - - - - - - - - -

$\mathfrak{e} \quad x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \smile q))$
$\varpi = \wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathfrak{Q} \frown [\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$ (η

$\times$

$\mathfrak{Q} \frown [\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$
$\varpi = \wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\mathfrak{e} \quad x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \smile q))$ (423

IIa
$x \frown (e \frown (v \asymp \smile q))$
$\mathfrak{e} \quad x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \smile q))$

(22): ————————

$e \frown (x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$\mathfrak{e} \quad x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \smile q))$ (α

$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{a} \frown (x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$\mathfrak{e} \quad x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \smile q))$ (β

(97): - - - - - - - - -

$\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) = \mathfrak{Q}$
$\mathfrak{e} \quad x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \smile q))$ (γ

(139): - - - - - - - - - - -

$\mathfrak{Q} \frown [\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$
$\mathfrak{e} \quad x \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \smile q))$ (δ

(423): -·-·-·-·-·-·-·-·-·-

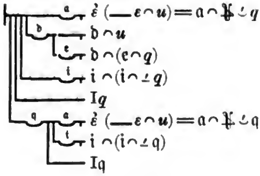
$\mathfrak{Q} \frown [\wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$
$\varpi = \wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$ (424

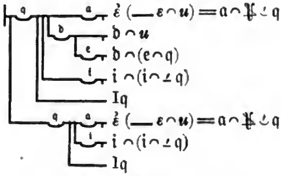
(IIIa): ————————

$\mathfrak{Q} \frown (\wp v \frown \smile \mathfrak{f})$
$\varpi = \wp v$
$\mathrm{I}q$
$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i} \frown (\mathfrak{i} \frown \perp q)$
$\wp v = \wp(x \frown \mathfrak{H}(v \asymp \smile q))$ (425

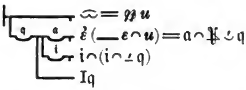
I
$\mathfrak{a} \quad \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{a} \frown \mathfrak{H} \smile q$
$\mathfrak{d} \quad \mathfrak{d} \frown u$
$\mathfrak{e} \quad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{e} \frown q)$
$\mathfrak{a} \quad \grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown u) = \mathfrak{a} \frown \mathfrak{H} \smile q$

(IIa):: - - - - - - - - - -

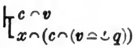

(α


(β

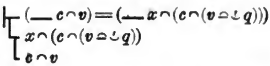
(206): - - - - - - - - - - - - -


(426

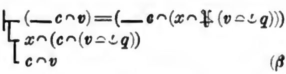
191



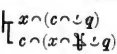
(IVa):


(α

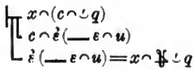
(22):


(β

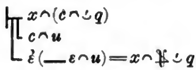
23



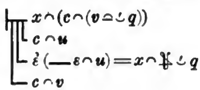
(IIIa):


(γ

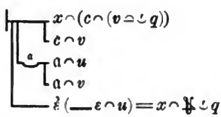
(77):: - - - - - - - - - -


(δ

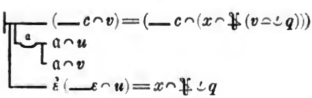
(197): - - - - - - - - - -

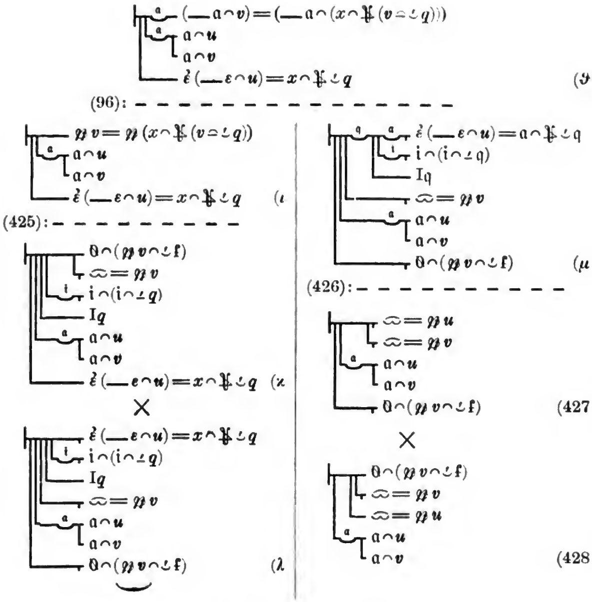

(ε

(IIa):: - - - - - - - - - - -

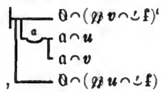

(ζ

(β): - - - - - - - - - - - -


(η



N. Beweis des Satzes



§ 29. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz, dass einem Begriffe eine endliche Anzahl zukommt, wenn einem ihm übergeordneten Begriffe eine endliche Anzahl zukommt.

Es sei der u-Begriff der übergeordnete, der v-Begriff der untergeordnete. Wir haben am Schlusse des I. Bandes gesehen, dass sich die unter den u-Begriff fallenden Gegenstände in eine Reihe ordnen lassen, die von einen bestimmten Gegenstande bis zu einem bestimmten Gegenstande läuft, wenn die Anzahl des u-Begriffes endlich ist. Wir setzen daher zunächst statt des u-Begriffes die von x bis c laufende

q-Reihe und fassen den Fall ins Auge, dass überhaupt Gegenstände unter den v-Begriff fallen. Dann sei in unserer Reihe m das Glied, das zuerst, und n das Glied, das zuletzt unter den v-Begriff fällt. Wir benutzen nun unsern Satz (422), aus dem wir zunächst ‚m' mit (357) wegschaffen. Wir ersetzen die Unterglieder

‚$—x \frown (c \frown \smile q)$', ‚$—x \frown (a \frown \smile q)$' und ‚$\overset{\mathfrak{e}}{\smile} c \frown (\mathfrak{e} \frown (v \doteq \smile q))$'

durch die Unterglieder

‚$—a \frown v$' und ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (x; c \oint q)$ / $\mathfrak{a} \frown v$'

So erhalten wir den Satz

$$
\begin{array}{l}
\vdash \Theta \frown [\mathfrak{p}(x \frown \Psi(v \doteq \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}] \\
\quad a \frown v \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (x; c \oint q) \\
\quad\quad \mathfrak{a} \frown v
\end{array}
\qquad (\alpha
$$

Für ‚$\mathfrak{p}(x \frown \Psi(v \doteq \smile q))$' ist dann ‚$\mathfrak{p}v$' einzuführen mit dem Satze

$$
\begin{array}{l}
\vdash \mathfrak{p}v = \mathfrak{p}(x \frown \Psi(v \doteq \smile q)) \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (x; c \oint q) \\
\quad\quad \mathfrak{a} \frown v
\end{array}
\qquad (\beta
$$

der mit (IVa) aus (191) und dem Satze

$$
\begin{array}{l}
\vdash x \frown (a \frown (v \doteq \smile q)) \\
\quad a \frown v \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (x; c \oint q) \\
\quad\quad \mathfrak{a} \frown v
\end{array}
\qquad (\gamma
$$

folgt.

§ 30. *Aufbau.*

$$
\begin{array}{l}
296 \quad \vdash c \frown (c \frown \smile q) \\
\quad a \frown (a \frown \smile q) \\
\quad \mathrm{I}q \\
\quad a \frown (c \frown \smile q)
\end{array}
$$

$\times$

$$
\begin{array}{l}
\vdash a \frown (a \frown \smile q) \\
\quad c \frown (c \frown \smile q) \\
\quad \mathrm{I}q \\
\quad a \frown (c \frown \smile q)
\end{array}
\qquad (429
$$

———•———

$$
\begin{array}{l}
269 \quad \vdash a \frown (c \frown \smile q) \\
\quad a \frown (x; c \oint q)
\end{array}
$$

(276): - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash c \frown (c \frown \smile q) \\
\quad c \frown (a \frown \smile q) \\
\quad a \frown (x; c \oint q)
\end{array}
\qquad (\alpha
$$

(272): - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash a \frown (x; c \oint q) \\
\quad a \frown (x; c \oint q) \\
\quad c \frown (a \frown \smile q)
\end{array}
\qquad (\beta
$$

(Ig): - - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash a \frown (x; c \oint q) \\
\quad c \frown (a \frown \smile q)
\end{array}
\qquad (430
$$

(188): - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash a \frown (x; c \oint q) \\
\quad c \frown (a \frown (v \doteq \smile q))
\end{array}
\qquad (\alpha
$$

$\times$

$$
\begin{array}{l}
\vdash c \frown (a \frown (v \doteq \smile q)) \\
\quad a \frown (x; c \oint q)
\end{array}
\qquad (\beta
$$

(IIa):: - - - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash c \frown (a \frown (v \doteq \smile q)) \\
\quad a \frown v \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (x; c \oint q) \\
\quad\quad \mathfrak{a} \frown v
\end{array}
\qquad (\gamma
$$

(192): -·-·-·-·-·-·-

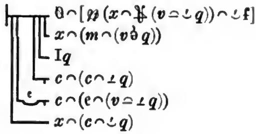
$$
\begin{array}{l}
\vdash c \frown (a \frown (v \doteq \smile q)) \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (x; c \oint q) \\
\quad\quad \mathfrak{a} \frown v
\end{array}
\qquad (431
$$

$\smile$

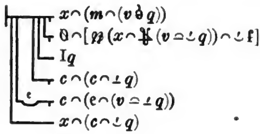
$$
\begin{array}{l}
\vdash \overset{\mathfrak{e}}{\smile} c \frown (\mathfrak{e} \frown (v \doteq \smile q)) \\
\quad \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \frown (x; c \oint q) \\
\quad\quad \mathfrak{a} \frown v
\end{array}
\qquad (432
$$

———•———

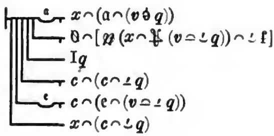
422



×

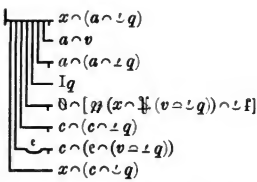


(α



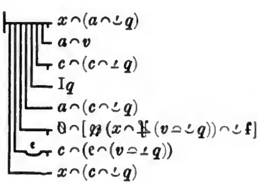
(β

(357): - - - - - - - - - - - - - -



(γ

(429):: - - - - - - - - - - - - - -



(δ

(271, 269):: = = = = = = = = = = = = =

$$x \frown (a \frown \smile q)$$
$$a \frown v$$
$$a \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$\mathrm{I}q$$
$$0 \frown [\wp (x \frown \natural (v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$$
$$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \perp q))$$
$$x \frown (c \frown \smile q) \qquad (\varepsilon$$

(265, 323):: = = = = = = = = = = = = =

$$x \frown (a \frown \smile q)$$
$$a \frown v$$
$$a \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$0 \frown [\wp (x \frown \natural (v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$$
$$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \perp q)) \qquad (\zeta$$

$\times$

$$0 \frown [\wp (x \frown \natural (v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$$
$$a \frown v$$
$$a \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$x \frown (a \frown \smile q)$$
$$\mathfrak{c} \frown (\mathfrak{e} \frown (v \asymp \perp q)) \qquad (\eta$$

(432, 270):: = = = = = = = = = = = = =

$$0 \frown [\wp (x \frown \natural (v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$$
$$a \frown v$$
$$a \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$\mathfrak{a} \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$\mathfrak{a} \frown v \qquad (\vartheta$$

(IIa):: - - - - - - - - - - -

$$0 \frown [\wp (x \frown \natural (v \asymp \smile q)) \frown \smile \mathfrak{f}]$$
$$a \frown v$$
$$\mathfrak{a} \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$\mathfrak{a} \frown v \qquad (\iota$$

(IIIa): ————————————

$$0 \frown [\wp v \frown \smile \mathfrak{f}]$$
$$a \frown v$$
$$\mathfrak{a} \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$\mathfrak{a} \frown v$$
$$\wp v = \wp (x \frown \natural (v \asymp \smile q)) \qquad (433$$

———•———

270
$$x \frown (a \frown \smile q)$$
$$a \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$

(197): - - - - -

$$x \frown (a \frown (v \asymp \smile q))$$
$$a \frown v$$
$$a \frown (x ; c \mathfrak{f} q) \qquad (\alpha$$

(IIa):: - - - - - - -

$$x \frown (a \frown (v \asymp \smile q))$$
$$a \frown v$$
$$\mathfrak{a} \frown (x ; c \mathfrak{f} q)$$
$$\mathfrak{a} \frown v \qquad (\beta$$

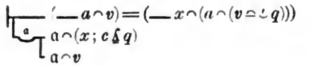
———•———

191
$$a \frown v$$
$$x \frown (a \frown (v \asymp \smile q))$$

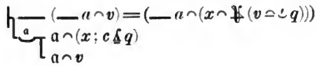
(IVa): ————————

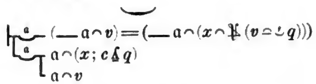
$$(— a \frown v) = (— x \frown (a \frown (v \asymp \smile q)))$$
$$x \frown (a \frown (v \asymp \smile q))$$
$$a \frown v \qquad (\gamma$$

(β):: - - - - - - - - - - - - -

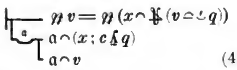
 (δ

(22): ________________

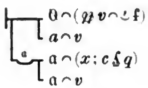
 (ε

 (ζ

(96): - - - - - - - - - - - - - - - - - -

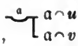
 (434

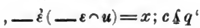
(433): - - - - - - - - - - - - -

 (435

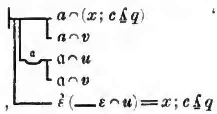
§ 31. *Zerlegung.*

Das untere Unterglied in (435) ersetzen wir durch

 und

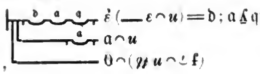


Dazu brauchen wir den Satz

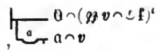
 (α

der aus (44) folgt.

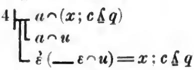
Es sind dann ‚*x*‘, ‚*c*‘ und ‚*q*‘ wegzuschaffen. Da (345) hierzu nicht ganz geeignet ist, leiten wir aus (345) den Satz

 (β

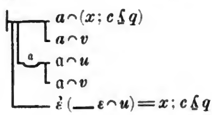
ab. Um endlich noch ‚*a*‘ wegzuschaffen, benutzen wir den aus (97) folgenden Satz

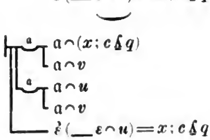
 (γ

§ 32. *Aufbau.*

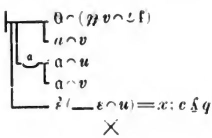
44 

(IIa):: - - - - - - - -

 (436

 (α

(435): - - - - - - - - - - -

 (β

ὲ(—ε⌢u) = x; c Ş q
a⌢v
𝔞 𝔞⌢u
𝔞⌢v
𝔡⌢(𝔶 v⌢⌣𝔣) (γ

𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮
a⌢v
𝔞 𝔞⌢u
𝔞⌢v
𝔡⌢(𝔶 v⌢⌣𝔣) (δ

×

a⌢v
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮
𝔞 𝔞⌢u
𝔞⌢v
𝔡⌢(𝔶 v⌢⌣𝔣) (437

———•———

314 n = 𝔶(1; n Ş 𝔣)
𝔡⌢(n⌢⌣𝔣)

(IIIf): - - - - - -

𝔶(1; n Ş 𝔣) = n
𝔡⌢(n⌢⌣𝔣) (438

———•———

IIa a⌢u
a⌢v
𝔞 𝔞⌢u
𝔞⌢v

×

a⌢v
a⌢u
𝔞 𝔞⌢u
𝔞⌢v (α

(IIa):: - - - -

a⌢v
𝔞 𝔞⌢u
𝔞 𝔞⌢u
𝔞⌢v (439

———•———

IIa ὲ(—ε⌢u) = m; n Ş q
𝔮 ὲ(—ε⌢u) = m; n Ş 𝔮

(IIa):: - - - - - - - - - -

ὲ(—ε⌢u) = m; n Ş q
𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = m; 𝔞 Ş 𝔮 (α

(IIa):: - - - - - - - - - - -

ὲ(—ε⌢u) = m; n Ş q
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮 (β

(IIId): - - - - - - - - - -

A = m; n
ὲ(—ε⌢u) = A Ş q
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮 (γ

(Ia): - - - - - - - - - - -

a⌢(n⌢⌣q)
m⌢(a⌢⌣q)
n⌢(n⌢⌣q)
A = m; n
ὲ(—ε⌢u) = A Ş q
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮 (δ

𝔫 𝔪 a⌢(𝔫⌢⌣q)
𝔪⌢(a⌢⌣q)
𝔫⌢(𝔫⌢⌣q)
A = 𝔪; 𝔫
ὲ(—ε⌢u) = A Ş q
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮 (ε

(266): - - - - - - - - - -

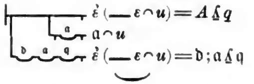
a⌢(A Ş q)
ὲ(—ε⌢u) = A Ş q
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮 (ζ

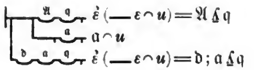
(46): - - - - - - - - - - -

a⌢u
ὲ(—ε⌢u) = A Ş q
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮 (η

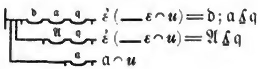
𝔞 𝔞⌢u
ὲ(—ε⌢u) = A Ş q
𝔡 𝔞 𝔮 ὲ(—ε⌢u) = 𝔡; 𝔞 Ş 𝔮 (ϑ

×

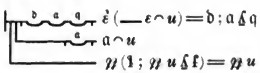

(ι


(κ

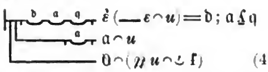
×


(λ

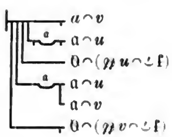
(345):: - - - - - - - - - - -


(μ

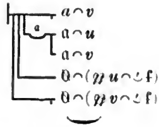
(438):: - - - - - - - - - -

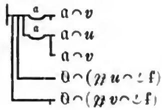

(440

(437): - - - - - - - - - -

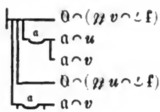

(α

(439): -·-·-·-·-·-·-

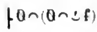

(β


(γ

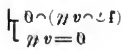
×


(441

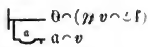
——•——

140 

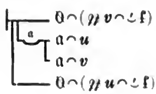
(IIIa): ————


(α

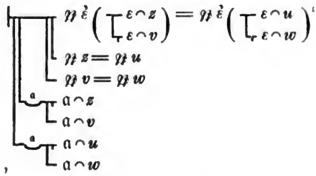
(97):: - - - - -


(442

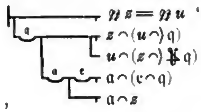
(441): -·-·-·-·-·-·-


(443

Ξ. Beweis des Satzes



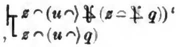
a) Beweis des Satzes

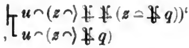


§ 33. *Zerlegung.*

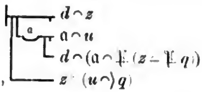
„Die Summe von zwei Anzahlen ist durch diese bestimmt", in diesem Ausdrucke ist der Gedanke des Satzes unserer Hauptüberschrift am leichtesten zu erkennen, und darum mag er angeführt sein, obwohl der bestimmte Artikel beim Subject die Aussage der Bestimmtheit eigentlich vorwegnimmt und obwohl das Wort „Summe" hier anders gebraucht ist, als wie wir es später bei den Zahlen gebrauchen werden. Wir nennen hier nämlich $\mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon\frown z\\ \vdash \varepsilon\frown v\end{array}\right)$ Summe von $\mathfrak{P}z$ und von $\mathfrak{P}v$, wenn kein Gegenstand zugleich unter den z- und unter den v-Begriff fällt. Auch unendliche Anzahlen kommen hierbei in Betracht. Wenn wir den Satz nur für endliche Anzahlen beweisen wollten, würde wohl ein anderer Weg zweckmässiger sein. Wir beweisen zunächst den Satz der Nebenüberschrift, der etwas mehr besagt, als wie (49). Durch Wendung geht nämlich aus ihm ein Satz hervor, den man so wiedergeben kann: „Wenn die Anzahl des z-Begriffes mit der des u-Begriffes zusammenfällt, so giebt es eine Beziehung, die den z-Begriff in den u-Begriff und deren Umkehrung diesen in jenen abbildet und in der ein Gegenstand, der nicht unter den z-Begriff fällt, zu keinem Gegenstande steht". Es sei die q-Beziehung eine solche und es sei die p-Beziehung von der entsprechenden Beschaffenheit in Bezug auf den v-Begriff und den w-Begriff; dann bildet die $\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \vdash \varepsilon\frown(\alpha\frown p)\end{array}\right)$-Beziehung den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon\frown z\\ \vdash \varepsilon\frown v\end{array}\right)$- in den $\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top \varepsilon\frown u\\ \vdash \varepsilon\frown w\end{array}\right)$-Begriff ab und ihre Umkehrung diesen in jenen. Damit diese Beziehung eindeutig sei sowie ihre Umkehrung, müssen wir von der q-Beziehung die Voraussetzung machen, dass ein Gegenstand, der nicht unter den z-Begriff falle, zu keinem Gegenstande in der q-Beziehung stehe, und das Entsprechende muss von der p-Beziehung gelten.

Um den Satz der Nebenüberschrift aus (49) abzuleiten, zeigen wir, dass die $\natural(z = \natural q)$-Beziehung die verlangten Eigenschaften hat, wenn die q-Beziehung den z-Begriff in den u-Begriff, und wenn ihre Umkehrung diesen in jenen abbildet. Wir beweisen danach die Sätze

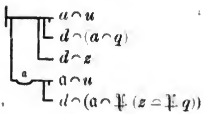

(α


(β

Um (α) abzuleiten, brauchen wir nach (11) den Satz

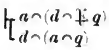

(γ

und dazu den Satz

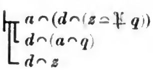

(δ

der aus (197) folgt.

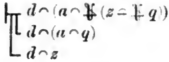
§ 34. *Aufbau.*

22 

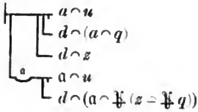
(197): – – – – –

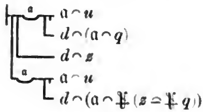

(α

(22): ————————

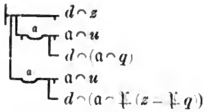

(444

(11a): – – – – – – – – –

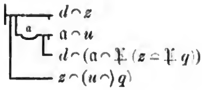

(α

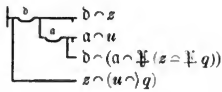

(β

×

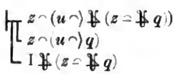

(γ

(8): –·–·–·–·–·–·–·– –·

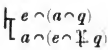

(δ


(ε

(11): – – – – – – – – – – – –


(445

———•———

23 

(188):: – – – – –

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown (a \frown q) \\ \quad a \frown (e \frown (z \frown \natural q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(22): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown (a \frown q) \\ \quad e \frown (a \frown \natural (z \frown \natural q)) \end{array} \qquad (446$$

(13): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad e \frown (d \frown q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\alpha$$

(446):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad e \frown (a \frown \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad e \frown (d \frown \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}} \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (\gamma$$

(16): - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I} \natural (z \frown \natural q) \\ \quad \mathrm{I}q \end{array} \qquad (447$$

(18):: - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \mathrm{I} \natural (z \frown \natural q) \\ \quad z \frown (u \frown) q) \end{array} \qquad (\alpha$$

(445): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash z \frown (u \frown) \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad z \frown (u \frown) q) \end{array} \qquad (448$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash z \frown (u \frown) q) \\ \quad z \frown (u \frown) \natural (z \frown \natural q)) \end{array} \qquad (449$$

§ 35. *Zerlegung.*

Um den Satz (β) des § 33 zu beweisen, bedürfen wir des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown u \\ \quad {}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown z \\ \quad\quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad u \frown (z \frown) \natural q) \end{array} \qquad (\alpha$$

der wieder auf

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown z \\ \quad d \frown (a \frown \natural q) \\ \quad {}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown z \\ \quad\quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \end{array} \qquad (\beta$$

zurückzuführen ist.

§ 36. *Aufbau.*

26 $$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad d \frown (a \frown (z \frown \natural q)) \end{array}$$

(197):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad d \frown (a \frown \natural q) \\ \quad a \frown z \end{array} \qquad (450$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown z \\ \quad d \frown (a \frown \natural q) \\ \quad d \frown (a \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(IIa): -.-.-.-.-.-.-.-.-

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown z \\ \quad d \frown (a \frown \natural q) \\ \quad {}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown z \\ \quad\quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} \frown z \\ \quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \natural q) \\ \quad {}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown z \\ \quad\quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \end{array} \qquad (\gamma$$

(8): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown u \\ \quad {}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown z \\ \quad\quad d \frown (\mathfrak{a} \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad u \frown (z \frown) \natural q) \end{array} \qquad (\delta$$

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{d}} \mathfrak{d} \frown u \\ \quad {}^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a} \frown z \\ \quad\quad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown \natural \natural (z \frown \natural q)) \\ \quad u \frown (z \frown) \natural q) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(11): - - - - - - - - - - - -

⊢ u⌢(z⌢)ꝭꝭ(z⌢ꝭq))
  u⌢(z⌢)ꝭq)
  Iꝭꝭ(z⌢ꝭq) (ζ

(29):: - - - - - - - - -

⊢ u⌢(z⌢)ꝭꝭ(z⌢ꝭq))
  u⌢(z⌢)ꝭq)
  I(z⌢ꝭq) (η

(189):: - - - - - - - -

⊢ u⌢(z⌢)ꝭꝭ(z⌢ꝭq))
  u⌢(z⌢)ꝭq)
  Iꝭq (ϑ

(18):: - - - - - - - - -

⊢ u⌢(z⌢)ꝭꝭ(z⌢ꝭq))
  u⌢(z⌢)ꝭq) (451

———•———

191 ⊢ a⌢z
  e⌢(a⌢(z⌢ꝭq))

(22): ————————

⊢ a⌢z
  a⌢(e⌢ꝭ(z⌢ꝭq)) (452

×

⊢ a⌢(e⌢ꝭ(z⌢ꝭq))
  a⌢z (α

‿

⊢ 𝔞 𝔢 𝔞⌢(𝔢⌢ꝭ(z⌢ꝭq))
  𝔞⌢z (β

(IIa): ————————

⊢ z⌢(u⌢)ꝭ(z⌢ꝭq))
  u⌢(z⌢)ꝭꝭ(z⌢ꝭq))
  𝔮 z⌢(u⌢)𝔮)
  u⌢(z⌢)ꝭ𝔮)
  𝔞 𝔢 𝔞⌢(𝔢⌢𝔮)
  𝔞⌢z (γ

(451):: - - - - - - - - - - -

⊢ z⌢(u⌢)ꝭ(z⌢ꝭq))
  u⌢(z⌢)ꝭq)
  𝔮 z⌢(u⌢)𝔮)
  u⌢(z⌢)ꝭ𝔮)
  𝔞 𝔢 𝔞⌢(𝔢⌢𝔮)
  𝔞⌢z (δ

(449): - - - - - - - - - -

⊢ z⌢(u⌢)q)
  u⌢(z⌢)ꝭq)
  𝔮 z⌢(u⌢)𝔮)
  u⌢(z⌢)ꝭ𝔮)
  𝔞 𝔢 𝔞⌢(𝔢⌢𝔮)
  𝔞⌢z (ε

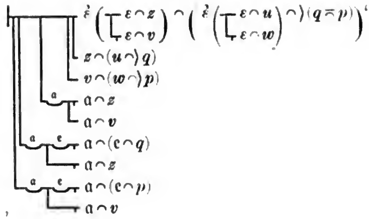
‿

⊢ 𝔮 z⌢(u⌢)𝔮)
  u⌢(z⌢)ꝭ𝔮)
  𝔮 z⌢(u⌢)𝔮)
  u⌢(z⌢)ꝭ𝔮)
  𝔞 𝔢 𝔞⌢(𝔢⌢𝔮)
  𝔞⌢z (ζ

(49): - - - - - - -

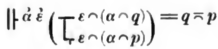
⊢ ℘z = ℘u
  𝔮 z⌢(u⌢)𝔮)
  u⌢(z⌢)ꝭ𝔮)
  𝔞 𝔢 𝔞⌢(𝔢⌢𝔮)
  𝔞⌢z (453

b) Beweis des Satzes



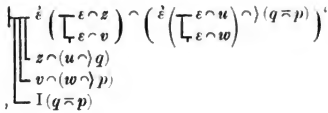
§ 37. *Zerlegung.*

Wir definiren nun:



(Γ

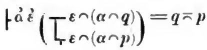
und beweisen den Satz



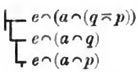
mit (8) und (11).

§ 38. *Aufbau.*

Γ

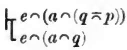


(10):



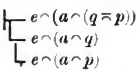
(454

(I)::

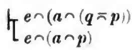


(455

454



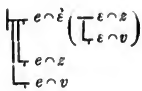
(Ia)::



(456

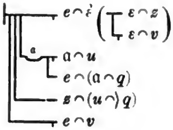
If

(77):



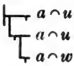
(α

(8)::

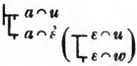


(457

Ic

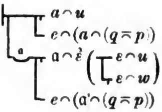


(77): ———



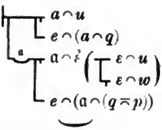
(α

(IIa):: - - - - - -

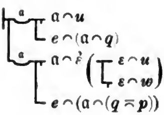


(β

(455):: - - - - - - -

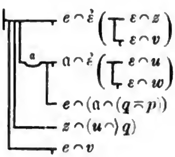


(γ



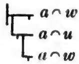
(δ

(457): - - - - - - -

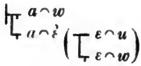


(458

Id

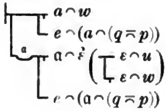


(77): ———



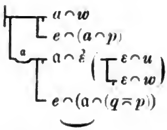
(α

(IIa):: - - - - - -

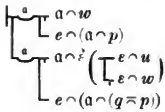


(β

(456):: - - - - - - -

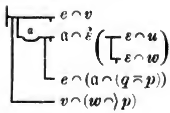


(γ



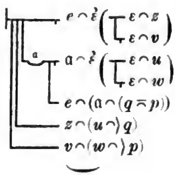
(δ

(8): - - - - - - - - -

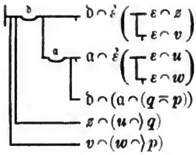


(ε

(458): - - - - - - -

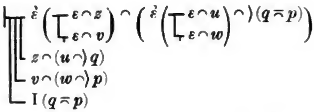


(ζ



(η

(11): - - - - - - - - - -



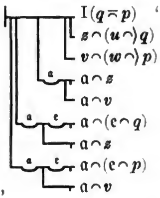
(459

§ 39. *Zerlegung.*

Wir schaffen das Unterglied

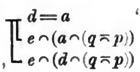
‚$\mathrm{I}(q \,\bar{\frown}\, p)$'

weg mit dem Satze



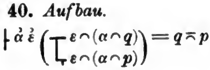
(α

zu dessen Beweise wir einen Satz mit dem Obergliede

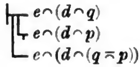


nöthig haben. Wir unterscheiden hier den Fall, dass e unter den v-Begriff fällt von dem entgegengesetzten.

§ 40. *Aufbau.*

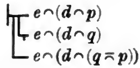
Γ 

(6): ————————————



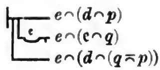
(460

×



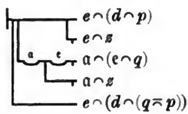
(461

(IIa):: - - - - - - -



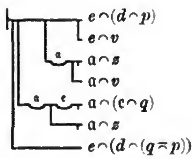
(α

(IIa):: - - - - - - - -



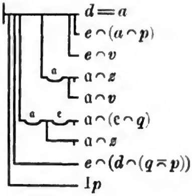
(β

(IIa):: - - - - - - - - -



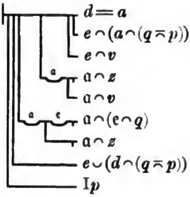
(γ

(13): - - - - - - - - - - -



(δ

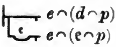
(γ) : : - - - - - - - - - -



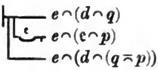
(ε

——•——

IIa

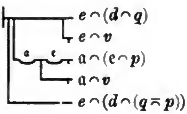


(460) : - - - - -



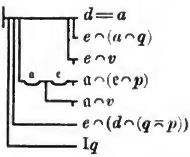
(ζ

(IIa) : : - - - - - - -



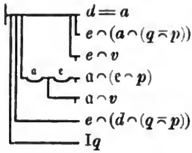
(η

(13) : - - - - - - - - - -



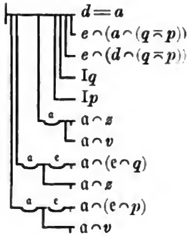
(ϑ

(η) : : - - - - - - - - - - -

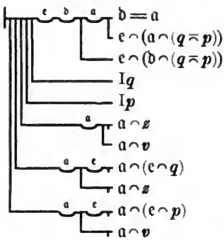


(ι

(ε) : -·-·-·-·-·-·-·-·-·-

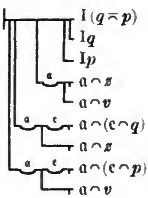


(κ



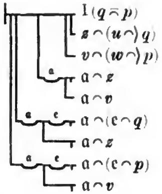
(λ

(16) : - - - - - - - - - - -



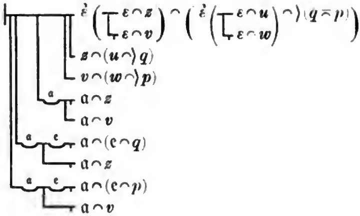
(μ

(18, 18) : : = = = = = =



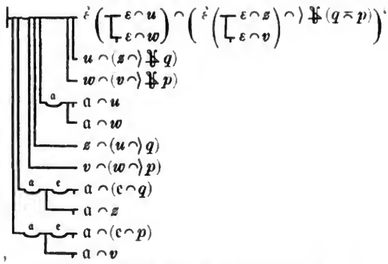
(462

(459): - - - - - - - -



(463

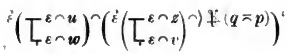
c) Beweis des Satzes



und Schluss des Abschnittes Ξ.

§ 41. *Zerlegung.*

Um einen Satz mit dem Obergliede



zu erhalten, setzen wir in (463) für ‚q' ‚Ұ q', für ‚p' ‚Ұ p' und vertauschen ‚z' mit ‚u' und ‚v' mit ‚w'. Wir brauchen dann den Satz

$$\vdash Ұ(q \frown p) = Ұ q \frown Ұ p \qquad (\alpha$$

§ 42. *Aufbau.*

21 $\vdash d\frown(e\frown q) = e\frown(d\frown \between q)$

(IIIh): $\overline{}$

$$\vdash \left(\begin{array}{l}\top\, d\frown(e\frown q)\\ \llcorner\, d\frown(e\frown p)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\, e\frown(d\frown \between q)\\ \llcorner\, d\frown(e\frown p)\end{array}\right) \qquad (\alpha$$

(IIIc): $\overline{}$

$$\vdash\begin{array}{l}\top \left(\begin{array}{l}\top\, d\frown(e\frown q)\\ \llcorner\, d\frown(e\frown p)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\, e\frown(d\frown \between q)\\ \llcorner\, e\frown(d\frown \between p)\end{array}\right)\\ \llcorner\, d\frown(e\frown p) = e\frown(d\frown \between p)\end{array} \qquad (\beta$$

(21):: $\overline{}$

$$\vdash \underbrace{\left(\begin{array}{l}\top\, d\frown(e\frown q)\\ \llcorner\, d\frown(e\frown p)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\, e\frown(d\frown \between q)\\ \llcorner\, e\frown(d\frown \between p)\end{array}\right)}\qquad (\gamma$$

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \left(\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q)\\ \llcorner\, \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown p)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\top\, \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{d}\frown \between q)\\ \llcorner\, \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{d}\frown \between p)\end{array}\right) \qquad (\delta$$

(20): $\overline{}$

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \alpha\frown(\varepsilon\frown q)\\ \llcorner\, \alpha\frown(\varepsilon\frown p)\end{array}\right) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon\frown(\alpha\frown \between q)\\ \llcorner\, \varepsilon\frown(\alpha\frown \between p)\end{array}\right) \qquad (\varepsilon$$

(IIIc): $\overline{}$

$$\vdash\begin{array}{l}\top\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \alpha\frown(\varepsilon\frown q)\\ \llcorner\, \alpha\frown(\varepsilon\frown p)\end{array}\right) = \between q \eqsim \between p\\ \llcorner\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon\frown(\alpha\frown \between q)\\ \llcorner\, \varepsilon\frown(\alpha\frown \between p)\end{array}\right) = \between q \eqsim \between p\end{array} \qquad (\zeta$$

(Γ):: $\overline{}$

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \alpha\frown(\varepsilon\frown q)\\ \llcorner\, \alpha\frown(\varepsilon\frown p)\end{array}\right) = \between q \eqsim \between p \qquad (\eta$$

(IIIc): $\overline{}$

$$\vdash\begin{array}{l}\top\, \between\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \llcorner\, \varepsilon\frown(\alpha\frown p)\end{array}\right) = \between q \eqsim \between p\\ \llcorner\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \alpha\frown(\varepsilon\frown q)\\ \llcorner\, \alpha\frown(\varepsilon\frown p)\end{array}\right) = \between\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \llcorner\, \varepsilon\frown(\alpha\frown p)\end{array}\right)\end{array} \qquad (\vartheta$$

(40):: $\overline{}$

$$\vdash \between\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \llcorner\, \varepsilon\frown(\alpha\frown p)\end{array}\right) = \between q \eqsim \between p \qquad (\iota$$

(IIIc): $\overline{}$

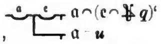
$$\vdash\begin{array}{l}\top\, \between(q \eqsim p) = \between q \eqsim \between p\\ \llcorner\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\, \varepsilon\frown(\alpha\frown q)\\ \llcorner\, \varepsilon\frown(\alpha\frown p)\end{array}\right) = q \eqsim p\end{array} \qquad (\varkappa$$

(Γ):: $\overline{}$

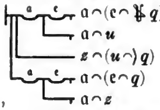
$$\vdash \between(q \eqsim p) = \between q \eqsim \between p \qquad (464$$

§ 43. *Zerlegung.*

Indem wir in (463) die Veränderungen machen, die im § 41 angegeben sind, erhalten wir ein Unterglied

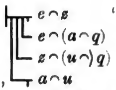


, das wir mit dem Satze



, (α

wegschaffen. Wir brauchen dazu den Satz

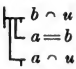


, (β

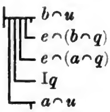
den wir mit (13) beweisen.

§ 44. *Aufbau.*

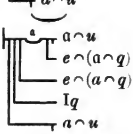
IIIc



(13):: - - - -

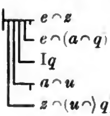


(α



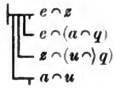
(β

(8): - - - - - - -



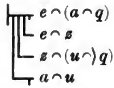
(γ

(18):: - - - - - -



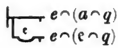
(465

×

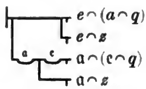


(466

IIa

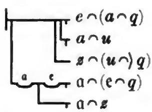


(IIa):: - - - - -



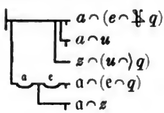
(α

(466): -·-·-·-·-·-

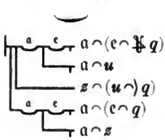


(β

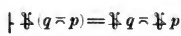
(22): ———————



(γ



(467

464 

(IIIa): ———————

$$\begin{array}{l}
\vdash \acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown u\\ \llcorner\varepsilon\frown w\end{array}\right)\frown\left(\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown z\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown\right)\mathfrak{U}(q \eqsim p)\Big)\\
\llcorner\ \acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown u\\ \llcorner\varepsilon\frown w\end{array}\right)\frown\left(\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown z\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown\right)(\mathfrak{U}q \eqsim \mathfrak{U}p)\Big)
\end{array}\qquad (\alpha$$

(463):: -

$$\begin{array}{l}
\vdash \acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown u\\ \llcorner\varepsilon\frown w\end{array}\right)\frown\left(\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown z\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown\right)\mathfrak{U}(q \eqsim p)\Big)\\
\quad u\frown(z\frown)\mathfrak{U}q)\\
\quad w\frown(v\frown)\mathfrak{U}p)\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a}\frown u\ ;\ \mathfrak{a}\frown w\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{e}}\ \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{e}\frown\mathfrak{U}q)\ ;\ \mathfrak{a}\frown u\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{e}}\ \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{e}\frown\mathfrak{U}p)\ ;\ \mathfrak{a}\frown w
\end{array}\qquad (\beta$$

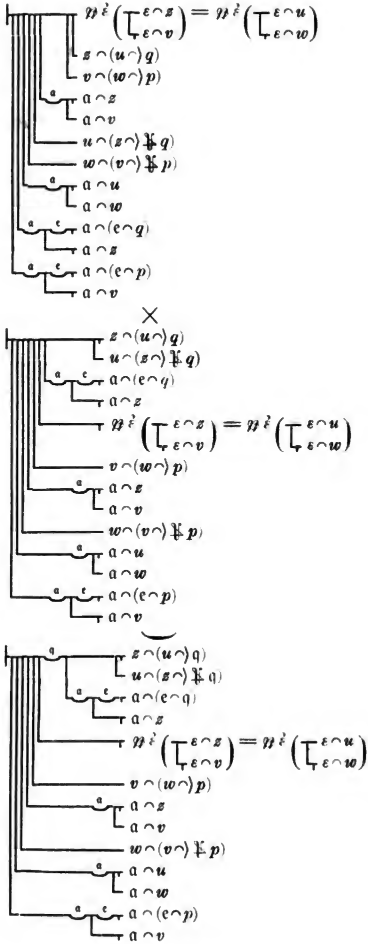
(467, 467):: =

$$\begin{array}{l}
\vdash \acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown u\\ \llcorner\varepsilon\frown w\end{array}\right)\frown\left(\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown z\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown\right)\mathfrak{U}(q \eqsim p)\Big)\\
\quad u\frown(z\frown)\mathfrak{U}q)\\
\quad w\frown(v\frown)\mathfrak{U}p)\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a}\frown u\ ;\ \mathfrak{a}\frown w\\
\quad z\frown(u\frown)q)\\
\quad v\frown(w\frown)p)\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{e}}\ \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{e}\frown q)\ ;\ \mathfrak{a}\frown z\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{e}}\ \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{e}\frown p)\ ;\ \mathfrak{a}\frown v
\end{array}\qquad (468$$

(32): -

$$\begin{array}{l}
\vdash \mathfrak{P}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown z\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right) = \mathfrak{P}\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown u\\ \llcorner\varepsilon\frown w\end{array}\right)\\
\quad \acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown z\\ \llcorner\varepsilon\frown v\end{array}\right)\frown\left(\acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\varepsilon\frown u\\ \llcorner\varepsilon\frown w\end{array}\right)\frown\right)(q \eqsim p)\Big)\\
\quad u\frown(z\frown)\mathfrak{U}q)\\
\quad w\frown(v\frown)\mathfrak{U}p)\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\ \mathfrak{a}\frown u\ ;\ \mathfrak{a}\frown w\\
\quad z\frown(u\frown)q)\\
\quad v\frown(w\frown)p)\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{e}}\ \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{e}\frown q)\ ;\ \mathfrak{a}\frown z\\
\quad \smile^{\mathfrak{a}}\smile^{\mathfrak{e}}\ \mathfrak{a}\frown(\mathfrak{e}\frown p)\ ;\ \mathfrak{a}\frown v
\end{array}\qquad (\alpha$$

(463:: -

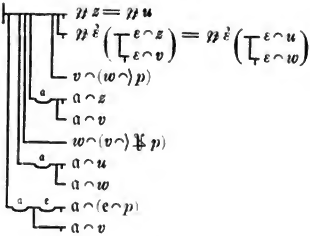


(β

(γ

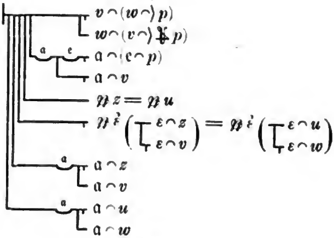
(δ

(453): -

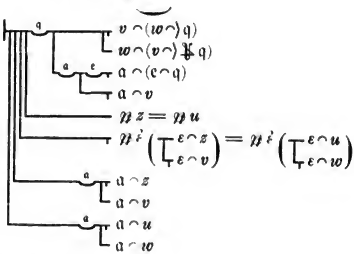


(ε

×

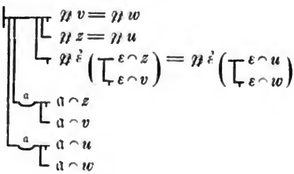


(ζ



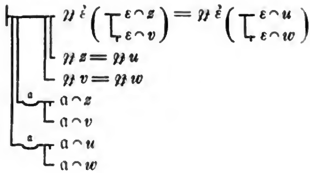
(η

(453): - - - - - - - - - - - - - - - - - -



(ϑ

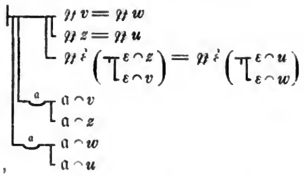
×



(469

O. Folgesätze.

a) Beweis des Satzes

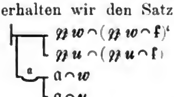


,

§ 45. *Zerlegung.*

Indem wir in (469) ‚z' und ‚u' unverändert lassen, für ‚v' aber ‚$\left(\top\begin{smallmatrix}\varepsilon\frown z\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)$' und für ‚$w$' ‚$\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{smallmatrix}\varepsilon\frown u\\ \varepsilon\frown w\end{smallmatrix}\right)$' einsetzen und die Unterglieder ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\begin{smallmatrix}\mathfrak{a}\frown v\\ \mathfrak{a}\frown z\end{smallmatrix}$' und ‚$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\begin{smallmatrix}\mathfrak{a}\frown w\\ \mathfrak{a}\frown u\end{smallmatrix}$' hinzufügen, gelangen wir leicht zu dem Satze in unserer Ueberschrift.

Wenn wir dann für ‚z' ‚$\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{smallmatrix}\varepsilon = c\\ \varepsilon\frown u\end{smallmatrix}\right)$' und für ‚$v$' ‚$\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{smallmatrix}\varepsilon = c\\ \varepsilon\frown w\end{smallmatrix}\right)$' einsetzen und die Bedingung hinzufügen, dass c unter den u-Begriff falle, erhalten wir den Satz



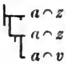
, (α

Wir können von ihm Gebrauch machen, um zu beweisen, dass jede Anzahl zu einer Anzahl in der $\mathfrak{f}$-Beziehung steht, was im 1. Bd. nur für endliche Anzahlen gezeigt ist. Nehmen wir an, dem w-Begriffe komme eine Anzahl n zu. Dann giebt es entweder einen Gegenstand c, der nicht unter ihn fällt, und dann steht $\text{ƞ}w$ zu $\text{ƞ}\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{smallmatrix}\varepsilon\frown w\\ \varepsilon = c\end{smallmatrix}\right)$ in der $\mathfrak{f}$-Beziehung; oder es giebt keinen solchen Gegenstand; dann ist der $(0\frown\natural\smile\mathfrak{f})$-Begriff dem w-Begriffe untergeordnet, und wir finden nach dem Satze (α), dass $\text{ƞ}w$ zu sich selber in der $\mathfrak{f}$-Beziehung steht.

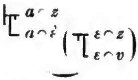
Um den Satz in unserer Ueberschrift zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $\text{ƞ}\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{smallmatrix}\varepsilon\frown z\\ \varepsilon\frown\grave{\varepsilon}\left(\top\begin{smallmatrix}\varepsilon\frown z\\ \varepsilon\frown v\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$ mit $\text{ƞ}v$ zusammenfällt, wenn der z-Begriff dem v-Begriffe untergeordnet ist.

§ 46. *Aufbau.*

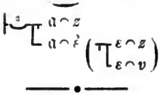
Ic



(77):



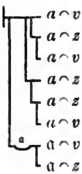
(α



(470

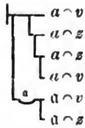
IIa

(I)::



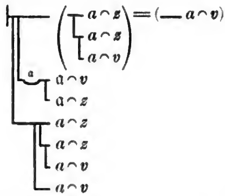
(α

Id):



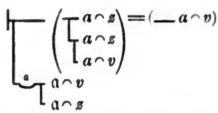
(β

(IVa):



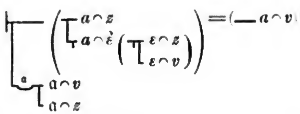
(γ

(I)::



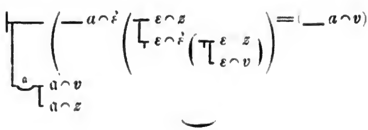
(δ

(58):

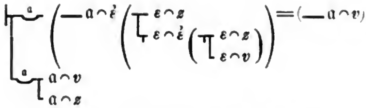


(ε

(77):

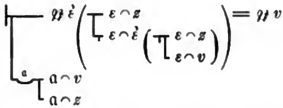


(ζ



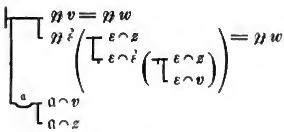
(η

(96): - - - - - - - - - - - - - - - - - -



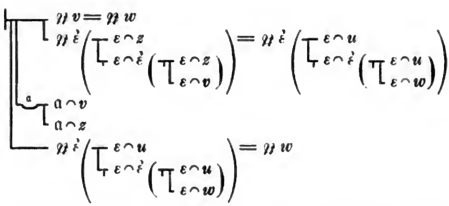
(471

(IIIc): - - - - - - - - - - - - - -



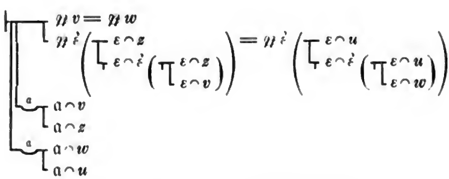
(α

(IIIa): ————————————



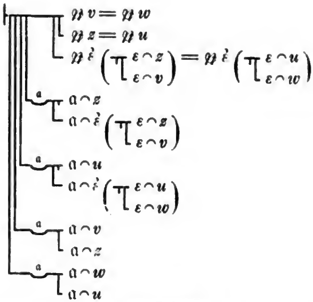
(β

(471):: -



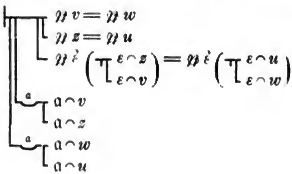
(γ

(469):: -



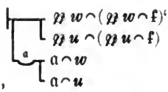
(δ

(470, 470)::



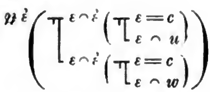
(472

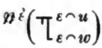
b) Beweis des Satzes



§ 47. *Zerlegung.*

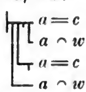
Um nun zu unserm Satze (α) des § 45 zu gelangen, müssen wir beweisen, dass



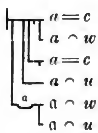
mit  zusammenfällt, wenn c unter den u-Begriff fällt.

§ 48. *Aufbau.*

If

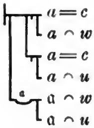


(IIa):: — — — —



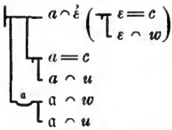
(α

(Ic, Id):: = = = =



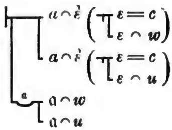
(β

(77):

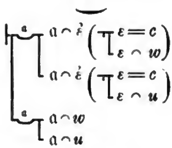


(γ

(77):

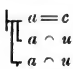


(δ

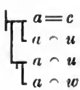


(473

Ia

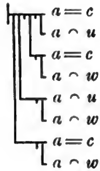


(Ic)::



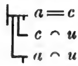
(α

(Ie):

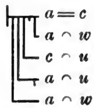


(β

IIIb

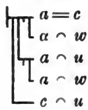


(If):



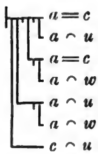
(γ

(Ic, Id)::



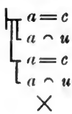
(δ

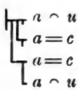
(β):



(ε

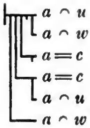
I



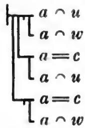


(ζ

(If):

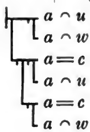


(η



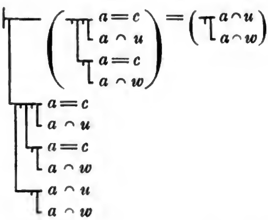
(ϑ

(Ic, Id):: = = = =   (Ib, Id):: = = = =



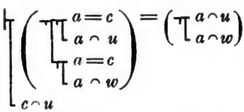
(ι

(IVa): ————



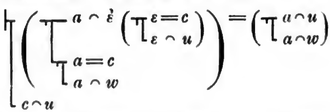
(κ

(ε):: - - - - - - - - - - - - - -



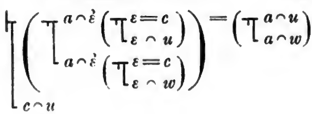
(λ

(77): ————

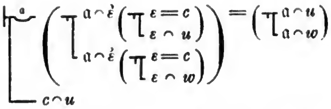


(μ

(77): ————

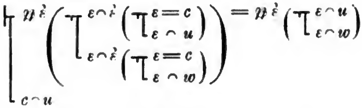


(ν



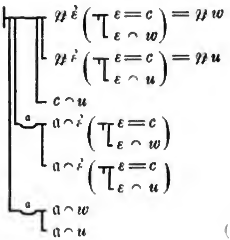
(ξ

(Va): - - - - - - - - - - - - - - - - -



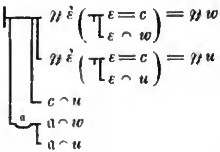
(ο

(472): - - - - - - - - - - - - - - - - -



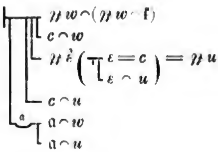
(π

(473):: - - - - - - - - - - - -



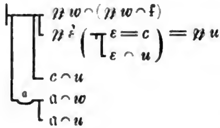
(ϱ

(102): - - - - - - - - - - - -



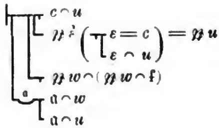
(σ

(IIa):: - - - - - - - - - - - -

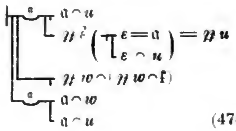


(τ

×



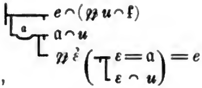
(υ



(474

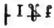
§ 49. *Zerlegung.*

Um nun einen Satz mit dem Obergliede ‚$\top\ \mathfrak{p}u \frown (\mathfrak{p}u \frown \mathfrak{f})$‘ zu erhalten, können wir hier von (68) keinen Gebrauch machen, sondern bedürfen des Satzes

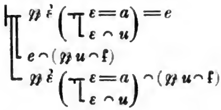


den wir zunächst ableiten.

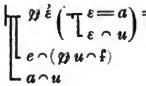
§ 50. *Aufbau.*

89 

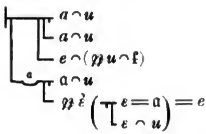
(79): ———


(α

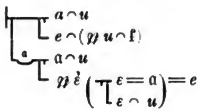
(103):: - - - - - - - - - -

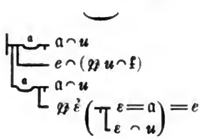

(β

(IIa): - - - - - - - -

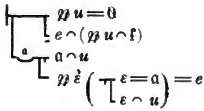

(γ

(Ig): - - - - - - - - - -

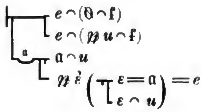

(δ


(ε

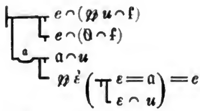
(97): - - - - - - - - -


(ζ

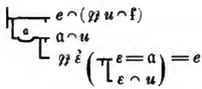
(IIIc): - - - - - - - - -


(η

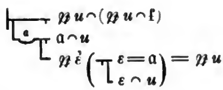
×


(ϑ

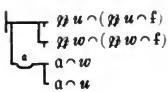
(108):: ———————————


(475

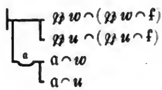
——•——

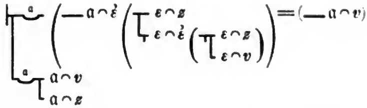
475 

(474):: - - - - - - - - - -


(α

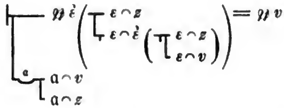
×


(476



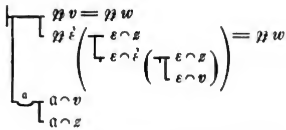
(η

(96): - - - - - - - - - - - - - - - - - -



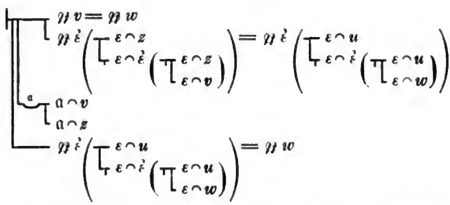
(471

(IIIc): - - - - - - - - - - - - - - -



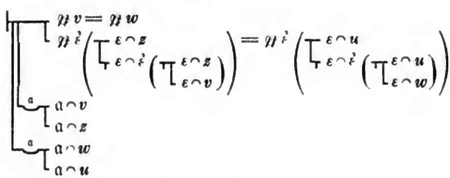
(α

(IIIa): ————————————————



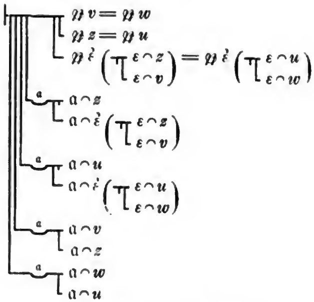
(β

(471):: -



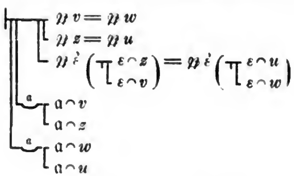
(γ

(469):: -



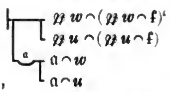
(δ

(470, 470)::



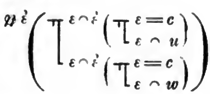
(472

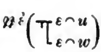
b) Beweis des Satzes



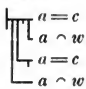
§ 47. *Zerlegung.*

Um nun zu unserm Satze (α) des § 45 zu gelangen, müssen wir beweisen, dass

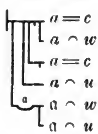


mit  zusammenfällt, wenn c unter den u-Begriff fällt.

§ 48. *Aufbau.*

If 

(IIa)::



(α

(Ic, Id)::

$a = c$
$a \frown w$
$a = c$
$a \frown u$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown w$
$\mathfrak{a} \frown u$ (β

(77): ————

$a \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown w\end{array}\right)$
$a = c$
$a \frown u$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown w$
$\mathfrak{a} \frown u$ (γ

(77): ————

$a \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown w\end{array}\right)$
$a \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown w$
$\mathfrak{a} \frown u$ (δ

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown w\end{array}\right)$
$\mathfrak{a} \frown \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = c\\ \varepsilon \frown u\end{array}\right)$
$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} \frown w$
$\mathfrak{a} \frown u$ (473

—— • ——

Ia
$a = c$
$a \frown u$
$a \frown u$

(Ic):: - - - -

$a = c$
$a \frown u$
$a \frown u$
$a \frown w$ (α

(Ie): - - - -

$a = c$
$a \frown u$
$a = c$
$a \frown w$
$a \frown u$
$a \frown w$
$a = c$
$a \frown w$ (β

—— • ——

IIIb
$a = c$
$c \frown u$
$a \frown u$

(If): - - - -

$a = c$
$a \frown w$
$c \frown u$
$a \frown u$
$a \frown w$ (γ

(Ic, Id):: = = = =

$a = c$
$a \frown w$
$a \frown u$
$a \frown w$
$c \frown u$ (δ

(β): - - - -

$a = c$
$a \frown u$
$a = c$
$a \frown w$
$a \frown u$
$a \frown w$
$c \frown u$ (ε

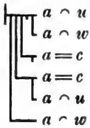
—— • ——

I
$a = c$
$a \frown u$
$a = c$
$a \frown u$

×

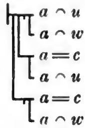
$a \frown u$
$a = c$
$a = c$
$a \frown u$ (ζ

(If): - - - -



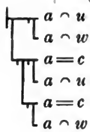
(η

(Ic, Id):: = = = =



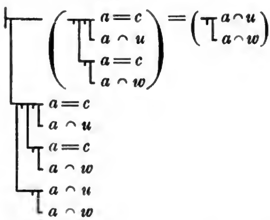
(ϑ

(Ib, Id):: = = = =



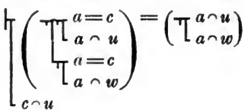
(ι

(IVa): ————



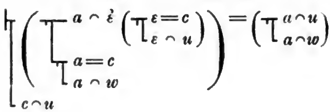
(κ

(ε):: - - - - - - - - - - - - - - -



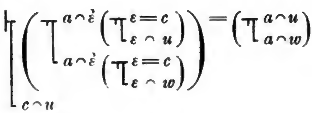
(λ

(77): ————

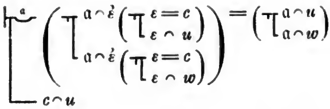


(μ

(77): ————

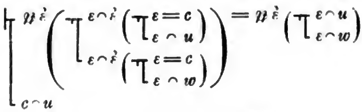


(ν



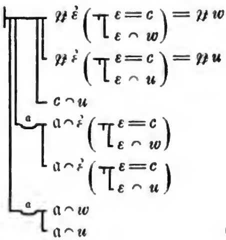
(ξ

(Va): - - - - - - - - - - - - - - - - -



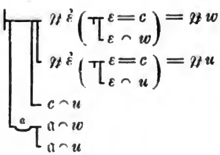
(ο

(472): - - - - - - - - - - - - - - - - -



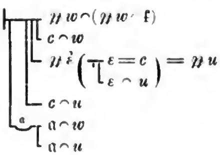
(π

(473):: - - - - - - - - - - -



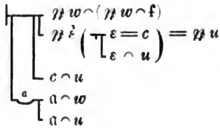
(ρ

(102): - - - - - - - - - - -



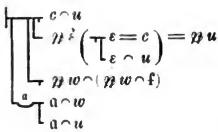
(σ

(IIa):: - - - - - - - - - - -

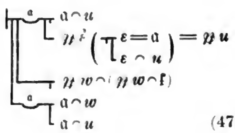


(τ

×



(υ



(474

§ 49. *Zerlegung.*

Um nun einen Satz mit dem Obergliede ‚— ⅌u⌒(⅌u⌒𝔣)‘ zu erhalten, können wir hier von (68) keinen Gebrauch machen, sondern bedürfen des Satzes

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array}$$

den wir zunächst ableiten.

§ 50. *Aufbau.*

89 $\vdash \mathrm{I} \not{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{f}$

(79): ———

$$\vdash \begin{array}{l} \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = a \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \\ e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = a \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \end{array} \qquad (\alpha$$

(103):: - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = a \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \\ e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ a \frown u \end{array} \qquad (\beta$$

(IIa): - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \frown u \\ a \frown u \\ e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array} \qquad (\gamma$$

(Ig): - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \frown u \\ e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array} \qquad (\delta$$

$$\vdash \begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(97): - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \wp u = \mathfrak{O} \\ e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array} \qquad (\zeta$$

(IIIc): - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (\mathfrak{O} \frown \mathfrak{f}) \\ e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array} \qquad (\eta$$

$\times$

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ e \frown (\mathfrak{O} \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array} \qquad (\vartheta$$

(108):: ————————————

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = e \end{array} \qquad (475$$

——•——

475 $$\vdash \begin{array}{l} \wp u \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown u \\ \wp \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon = \mathfrak{a} \\ \varepsilon \frown u\end{array}\right) = \wp u \end{array}$$

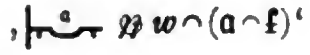
(474):: - - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} \wp u \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \wp w \frown (\wp w \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown w \\ \mathfrak{a} \frown u \end{array} \qquad (\alpha$$

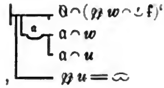
$\times$

$$\vdash \begin{array}{l} \wp w \frown (\wp w \frown \mathfrak{f}) \\ \wp u \frown (\wp u \frown \mathfrak{f}) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown w \\ \mathfrak{a} \frown u \end{array} \qquad (476$$

c) Beweis der Sätze

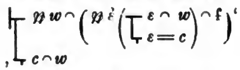


und



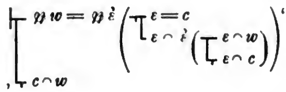
§ 51. *Zerlegung.*

Um (476) zu benutzen, wie in § 45 gesagt ist, brauchen wir den Satz



(α

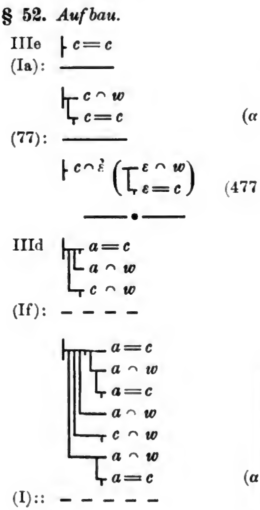
der aus (103) abzuleiten ist. Dazu haben wir den Satz

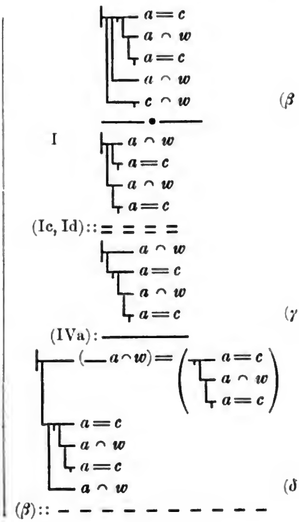


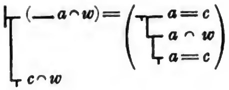
(β

nöthig.

§ 52. *Aufbau.*

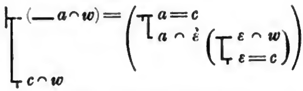






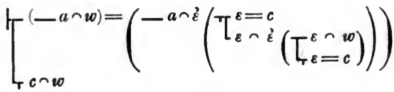
(ε

(77):

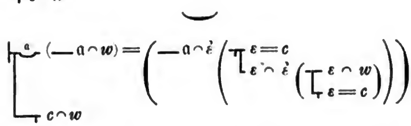


(ζ

(77):

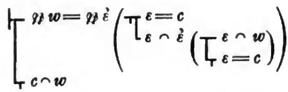


(η



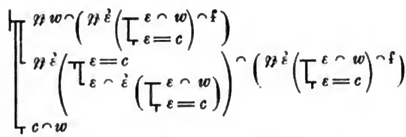
(ϑ

(96):



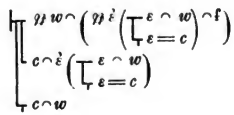
(478

(IIIa):



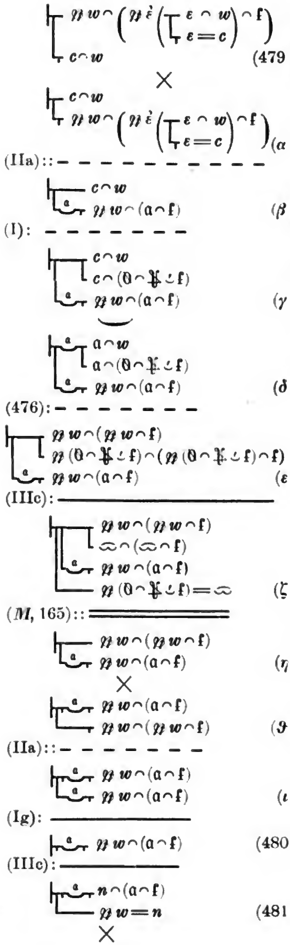
(α

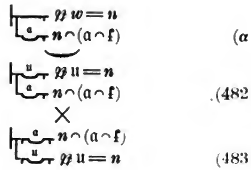
(103)::



(β

(477)::

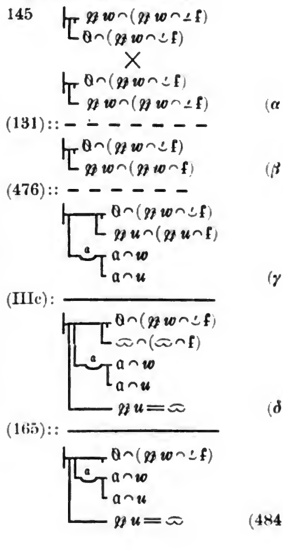




§ 53. *Zerlegung.*

Wir ziehen aus dem Satze (476) mit (145) und (165) noch die Folgerung, dass einem Begriffe keine endliche Anzahl zukommt, wenn einem ihm untergeordneten Begriffe die Anzahl Endlos zukommt.

§ 54. *Aufbau.*



III. Die reellen Zahlen.

1. Kritik der Lehren von den Irrationalzahlen.

a) Grundsätze des Definirens.

§ 55. Bevor wir prüfen, was hervorragende Mathematiker von den Zahlen, insbesondere den Irrationalzahlen gelehrt haben, wird es gut sein, vorweg einige Grundsätze für das Definiren aufzustellen und zu begründen, die fast von allen Schriftstellern auf diesem Gebiete ausser Acht gelassen werden, damit wir nicht nöthig haben, jedes einzelne Mal ausführlich darauf einzugehen. Wir haben solche Grundsätze schon im 1. Bd. für die Begriffsschrift aufgestellt; hier soll es sich hauptsächlich um Definitionen in den Wortsprachen handeln. Zwischen beiden Aufstellungen werden freilich nur solche Unterschiede hervortreten, welche in der verschiedenen Natur dieser Ausdrucksmittel begründet sind.

1. Grundsatz der Vollständigkeit.

§ 56. Eine Definition eines Begriffes (möglichen Prädikates) muss vollständig sein, sie muss für jeden Gegenstand unzweideutig bestimmen, ob er unter den Begriff falle (ob das Prädikat mit Wahrheit von ihm ausgesagt werden könne) oder nicht. Es darf also keinen Gegenstand geben, für den es nach der Definition zweifelhaft bliebe, ob er unter den Begriff fiele, wenn es auch für uns Menschen bei unserm mangelhaften Wissen nicht immer möglich sein mag, die Frage zu entscheiden. Man kann dies bildlich so ausdrücken: der Begriff muss scharf begrenzt sein. Wenn man sich Begriffe ihrem Umfange nach durch Bezirke in der Ebene versinnlicht, so ist das freilich ein Gleichnis, das nur mit Vorsicht gebraucht werden darf, hier aber gute Dienste leisten kann. Einem unscharf begrenzten Begriffe würde ein Bezirk entsprechen, der nicht überall eine scharfe Grenzlinie hätte, sondern stellenweise ganz verschwimmend in die Umgebung überginge. Das wäre eigentlich gar kein Bezirk; und so wird ein unscharf definirter Begriff mit Unrecht Begriff genannt. Solche begriffsartige Bildungen kann die Logik nicht als Begriffe anerkennen; es ist unmöglich, von ihnen genaue Gesetze aufzustellen. Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ist ja eigentlich nur in anderer Form die Forderung, dass der Begriff scharf begrenzt sei. Ein beliebiger Gegenstand $\varDelta$ fällt entweder unter den Begriff Φ, oder er fällt nicht unter ihn: *tertium non datur*. Hätte z. B. der Satz „jede Quadratwurzel aus 9 ist ungerade“ wohl überhaupt einen fassbaren Sinn, wenn *Quadratwurzel aus 9* nicht ein scharf begrenzter Begriff wäre? Hat die Frage „Sind wir noch Christen?“ eigentlich einen

Sinn, wenn nicht bestimmt ist, von wem das Prädikat *Christ* mit Wahrheit ausgesagt werden kann, und wem es abgesprochen werden muss?

§ 57. Hieraus folgt nun die Unzulässigkeit des in der Mathematik so beliebten stückweisen Definirens. Dies besteht darin, dass man die Definition für einen besondern Fall giebt — z. B. für den der positiven ganzen Zahlen — und von ihr Gebrauch macht, dann nach manchen Lehrsätzen eine zweite Erklärung folgen lässt für einen andern Fall — z. B. für den der negativen ganzen Zahlen und der Null — wobei dann oft noch der Fehler gemacht wird, für den schon erledigten Fall noch einmal Bestimmungen zu treffen. Wenn man nun auch thatsächlich Widersprüche vermeiden wird, so schliesst man sie doch durch die Methode nicht grundsätzlich aus. Meistens gelangt man auch nicht zu einem Abschlusse, sondern lässt Fälle übrig, für die man keine Bestimmung trifft; und Manche sind so naïv, auch in diesen Fällen das Wort oder Zeichen zu gebrauchen, als ob sie ihm eine Bedeutung beigelegt hätten. Ein solches stückweises Definiren ist zu vergleichen dem Verfahren, die Grenzlinie eines Flächenstückes in Absätzen zu ziehen, ohne sie vielleicht je in sich zurücklaufen zu lassen. Der Hauptfehler aber ist der, dass man das Zeichen (Wort) schon, bevor man es vollständig erklärt hat, benutzt zu Lehrsätzen, vielfach auch zur weitern Fortsetzung der Erklärung selbst. Ehe ein Wort oder Zeichen seiner Bedeutung nach nicht vollständig erklärt oder sonst bekannt ist, darf es in einer strengen Wissenschaft nicht gebraucht werden, am wenigsten aber dazu, seine eigene Erklärung weiter fortzuführen.

§ 58. Nun muss allerdings zugegeben werden, dass die Entwickelung der Wissenschaft, die sich in den Eroberungen immer weiterer Zahlgebiete vollzog, fast unausweichlich zu einem solchen Verfahren nöthigte; und diese Nöthigung könnte als Entschuldigung dienen [1]). Freilich wäre es möglich

1) So sagt G. Peano im VI. Thl. der Revue de mathematique, S. 60—61: „Il sig. Frege desidera per ogni segno una sola definizione. E tale è pure la mia opinione se si tratta d'un segno non continente lettere variabili (F_2 § 1 P 7). Ma se ciò che si definisce contiene lettere variabili, cioè è una funzione di queste lettere, allora io veggo in generale la necessità di dare di quella espressione delle definizioni condizionate, o definizioni con ipotesi (id. P 7'), e di dare tante definizioni quante sono le specie di enti su cui eseguiamo quella operazione. Così la formula $a+b$ si definirà una prima volta quando *a* e *b* sono intieri, poi una seconda quando sono fratti, poi quando sono irrazionali, o complessi. Si incontra lo stesso segno + fra numeri infiniti e transfiniti (F_1 VI), ed allora se ne deve dare una nuova definizione. Lo si incontra fra due vettori, e si definirà di nuovo, e così via. E col progredire della scienza si estende sempre più il significato della stessa formula. I varii significati della scrittura $a+b$ hanno proprietà communi; ma queste sono insufficienti a precisare tutti i valori che può avere quell' espressione.

Lo stesso avviene per la formula $a=b$; in alcuni casi il suo significato si può assumere come idea primitiva, in altri la si definisce, e precisamente in aritmetica data l'eguaglianza degli intieri, si definisce l'eguaglianza fra i razionali, fra gli irrazionali, fra i numeri immaginarii, ecc. Si suol definire in geometria l'eguaglianza di due aree, di due volumi, l'eguaglianza di due vettori, ecc. Col progredire della scienza si sente sempre più la necessità di estendere il significato della formula $a=b$. I varii significati gewesen, die alten Zeichen und Benennungen durch neue zu ersetzen, und die Logik verlangt dies eigentlich; aber dazu entschliesst man sich schwer. Und diese Scheu, neue Zeichen oder Wörter einzuführen, ist die Ursache vieler Unklarheiten in der Mathematik. Man hätte auch die alten Erklärungen als ungültig aufheben und die Wissenschaft mit den neuen von vorne anfangen können, aber zu einer solchen reinlichen Trennung kam es auch nicht, weil man die alten Definitionen für die Anfänge der Wissenschaft nicht glaubte entbehren zu können. Dabei mögen auch die Bedürfnisse des Unterrichts mitgesprochen haben. So hat man sich denn an das stückweise Definiren gewöhnt; und was ursprünglich ein misslicher Nothbehelf war, wurde üblich und unter die berechtigten Methoden der Wissenschaft aufgenommen, sodass jetzt noch kaum jemand daran Anstoss nimmt, wenn ein Zeichen erst für ein beschränktes Gebiet erklärt und dann gebraucht wird, um dasselbe Zeichen nochmals für ein weiteres Gebiet zu erklären; denn das allgemein Uebliche hat eine rechtfertigende Kraft, wie ja die Mode der hässlichsten Tracht den Stempel der Schönheit aufzudrücken vermag. Um so mehr muss betont werden: begriffsähnliche Bildungen, die noch im Flusse sind, die noch nicht endgültige und scharfe Grenzen erhalten haben, kann die Logik nicht als Begriffe anerkennen; und darum muss sie alles stückweise Definiren verwerfen. Wenn nämlich die erste

---

di essa hanno proprietà communi; ma io non veggo come bastino a precisare tutti i significati possibili dell'eguaglianza.

Del resto le opinioni dei varii Autori, sul concetto di eguaglianza, diversificano assai; ed uno studio di questa questione sarebbe assai utile, specialmente se fatto coll' ajuto di simboli, anzichè di parole".

Peano beruft sich hier auf eine praktische Nothwendigkeit; aber dadurch werden die in meinem Briefe an ihn angeführten Gründe nicht widerlegt. Es mag schwer sein, den Anforderungen der Logik beim Definiren immer zu genügen, möglich muss es sein.

Mehrere bedingte Definitionen desselben Zeichens kann man allenfalls dann gelten lassen, wenn aus ihrer Form klar hervorgeht, dass sie zusammen alle möglichen Fälle umfassen und für keinen mehrfache Bestimmungen treffen, und wenn keine dieser Theilerklärungen benutzt wird, bevor sie alle gegeben sind, also auch nicht bei einer andern Theilerklärung. Dann lassen sich diese auch der Form nach in eine einzige Erklärung zusammenziehen. Immerhin wird es besser sein, diese Form des Definirens zu vermeiden, wo es möglich ist.

Was das Gleichheitszeichen betrifft, so werden wir gut thun, bei unserer Festsetzung zu bleiben, wonach die Gleichheit völliges Zusammenfallen, Identität ist. Freilich sind Körper von gleichem Volumen nicht identisch, aber sie haben dasselbe Volumen. Die Zeichen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dürfen also in diesem Falle nicht als Zeichen für die Körper, sondern für deren Volumina genommen werden, oder auch für die Maasszahlen, die sich bei der Messung durch dieselbe Volumeinheit ergeben. Wir werden nicht von gleichen Vectoren sprechen, sondern von einer gewissen Bestimmung — nennen wir sie „Richtungslänge" — an diesen Vectoren, die bei verschiedenen dieselbe sein kann. Bei dieser Auffassung wird der Fortschritt der Wissenschaft nicht eine Ausdehnung der Bedeutung der Formel ‚$a = b$' erfordern, sondern es werden nur neue Bestimmungen (modi) an den Gegenständen der Betrachtung unterworfen werden.

In dem letzten Satze spricht Peano ein grosses Wort gelassen aus. Wenn die Meinungen der Mathematiker über die Gleichheit von einander abweichen, so heisst das nichts weniger, als dass die Mathematiker über den Inhalt ihrer Wissenschaft uneinig sind; und wenn man das Wesen der Wissenschaft in Gedanken, nicht in Worten und Zeichen sieht, so heisst es, dass es keine einheitliche mathematische Wissenschaft giebt, dass die Mathematiker einander in Wahrheit garnicht verstehen. Denn der Sinn fast aller arithmetischen Sätze und vieler geometrischer hängt unmittelbar oder mittelbar von dem Sinne des Wortes „gleich" ab.

Definition schon vollständig ist und scharfe Grenzen gezogen hat, so zieht die zweite Definition entweder dieselben Grenzen und ist dann zu verwerfen, weil ihr Inhalt als Lehrsatz zu beweisen wäre, oder sie zieht andere Grenzen und widerspricht damit der ersten. Man kann z. B. den Kegelschnitt definiren als Schnitt einer Ebene mit einer Rotationskegelfläche. Hat man dies einmal gethan, so darf man ihn nun nicht noch einmal definiren, z. B. als eine Curve, deren Gleichung in cartesischen Coordinaten vom zweiten Grade ist; denn das muss nun bewiesen werden. Man kann den Kegelschnitt nun auch nicht definiren als ebenes Gebilde, dessen Gleichung in Liniencoordinaten vom zweiten Grade ist; denn hierin wäre auch das Punktepaar enthalten, das nicht als Schnitt einer Ebene mit einer Kegelfläche aufgefasst werden kann. Die Begrenzung des Begriffes ist hier also nicht dieselbe, und es wäre ein Fehler, hier dieselbe Benennung „Kegelschnitt" zu gebrauchen. Wenn also die zweite Definition durch die erste in keiner dieser beiden Weisen unstatthaft gemacht ist, so ist das nur durch die Unvollständigkeit der ersten möglich, die den Begriff unfertig gelassen hat, in einem Zustande also, in dem er garnicht gebraucht werden darf, insbesondere auch nicht zu Definitionen.

§ 59. Es wird nicht unnütz sein, der Abstraktheit dieser Ueberlegungen ein Gegengewicht in einem Beispiele zu geben. E. Heine stellt folgende Definition auf[1]):

„Zahlzeichen heissen gleich oder sind vertauschbar, wenn sie zu gleichen, ungleich oder nicht vertauschbar, wenn sie zu ungleichen Zahlenreihen gehören (§ 1 Def. 3)".

Was würde man zu folgender Definition sagen:

„Zeichen heissen weiss, wenn sie zu weissen Gegenständen gehören"?

Es ist mir doch erlaubt, als Zeichen des vor mir liegenden weissen Papierblattes einen kreisrunden schwarzen Fleck zu nehmen, falls ich dies Zeichen nicht schon anders verwendet habe. Und ein solcher Fleck wäre nun nach der Definition weiss. Hiergegen ist zu sagen: Die Definition setzt durch den Ausdruck „wenn sie zu weissen Gegenständen gehören" die Bedeutung des Wortes „weiss" als bekannt voraus; denn wäre sie es nicht, so wäre garnicht bestimmt, welche Zeichen zu weissen Gegenständen gehörten. Nun gut! Ist das Wort „weiss" bekannt, so kann man es nicht noch erklären wollen. Man sollte es doch als ganz selbstverständlich ansehen, dass man ein Wort nicht durch sich selbst erklären darf, weil man es dann in einem Athem als bekannt und als unbekannt behandelt. Wenn es bekannt ist, so ist eine Erklärung mindestens überflüssig, wenn es aber nicht bekannt ist, kann es nicht zur Erklärung dienen. Dies ist so ein-

1) Die Elemente der Functionenlehre. Crelle, Bd. 74, § 2, 2. Def. Daraus, dass ich hier nur einen Einwand gegen diese Definition erhebe, möge man nicht folgern, dass ich sie im Uebrigen für einwandfrei halte.

leuchtend, und doch wird so oft dagegen gefehlt! Bei Heines Definition haben wir denselben Fall. Mit den Worten „wenn sie zu gleichen Zahlenreihen gehören" wird als bekannt vorausgesetzt, was das Wort „gleich" bedeute, und dieses selbe Wort soll erklärt werden.

§ 60. Heine würde dagegen wahrscheinlich bemerken, dass die Bedeutung des Wortes „gleich" nicht für alle Fälle als bekannt vorausgesetzt, sondern in seiner Def. 3 in § 1 nur für nicht eingeklammerte Zahlenreihen angegeben sei, während er hier von eingeklammerten Zahlenreihen und andern Zeichen spreche. Ausser den schon angeführten Gründen ist hiergegen zu sagen, dass eine zwiefache Erklärung eines Zeichens oder Wortes vom Uebel ist, weil dabei der Zweifel bleibt, ob diese Definitionen einander nicht widersprechen. Es müsste wenigstens ein Beweis verlangt werden, dass kein Widerspruch bestehe; aber dieser Verpflichtung entzieht man sich regelmäßig, wie denn auch bei Heine keine Spur eines solchen Beweises zu finden ist. Es ist überhaupt eine solche Weise des Definirens zu verwerfen, bei welcher die Rechtmässigkeit einer Definition von einem vorher zu führenden Beweise abhängig wird; denn dadurch wird es ausserordentlich erschwert, die Strenge der Beweisführung nachzuprüfen, weil dann bei jeder Definition eine Untersuchung nöthig ist, ob vor ihrer Aufstellung irgendwelche Sätze zu beweisen seien; eine Untersuchung, die dann doch fast immer unterbleibt. Eine solche Lücke wird eben fast nie gefühlt und ist dadurch für die Strenge besonders gefährlich. Es genügt eben in der Arithmetik nicht, irgendeine Behauptung aufzustellen ohne Beweis oder mit einem Scheinbeweise und nun abzuwarten, ob es jemandem gelingt, ihre Falschheit nachzuweisen, sondern umgekehrt muss verlangt werden, dass jede nicht ganz selbstverständliche Behauptung wirklich bewiesen werde, und dazu gehört, dass die dabei gebrauchten Ausdrücke oder Zeichen einwandfrei eingeführt seien, sofern sie nicht als allgemein bekannt angesehen werden dürfen.

Und es ist überdies so leicht, mehrfache Erklärungen desselben Zeichens zu vermeiden. Statt es zuerst für ein beschränkteres Gebiet zu erklären und es dann zu benutzen, um es selbst für ein weiteres Gebiet zu erklären, statt also zweimal das gleiche, braucht man ja nur verschiedene Zeichen zu wählen, indem man die Bedeutung des ersten endgültig auf das engere Gebiet einschränkt, sodass nun auch die erste Definition vollständig ist und scharfe Grenzen zieht. Dann ist die logische Beziehung zwischen den Bedeutungen der beiden Zeichen nicht irgendwie präjudicirt und mag untersucht werden, ohne dass durch den Ausfall dieser Untersuchung die Rechtmässigkeit der Definitionen in Frage gestellt werden kann.

Es ist doch wahrhaftig der Mühe werth, ein neues Zeichen zu erfinden, wenn dadurch nicht geringe logische Bedenken gehoben und die Strenge der Beweise gesichert werden kann. Aber der Sinn für die logische

Reinlichkeit und Genauigkeit scheint bei manchen Mathematikern so gering zu sein, dass sie lieber ein Wort in drei oder vier Bedeutungen gebrauchen, als den ungeheuren Entschluss fassen, ein neues Wort zu erfinden.

§ 61. Durch stückweises Definiren wird auch der Bestand der Lehrsätze in's Ungewisse gestellt. Wenn man z. B. in der Beschränkung auf das Gebiet der positiven ganzen Zahlen die Worte „Quadratwurzel aus 9" erklärt hat, so beweist man etwa den Satz, dass es nur eine einzige Quadratwurzel aus 9 gebe, der sofort umgestossen wird, wenn man die Betrachtung auf die negativen Zahlen ausdehnt und demgemäss die Definition ergänzt. Aber ob man nun zu einem endgültigen Satze gekommen sei, wer kann es wissen? Wer kann wissen, ob man sich nicht noch zur Anerkennung von vier Quadratwurzeln aus 9 gedrängt sehen werde. Woher will man eigentlich wissen, dass es nicht mehr als zwei Quadratwurzeln aus — 1 gebe? Solange man keine endgültige und vollständige Definition hat, ist es unmöglich. Es würden dann einige Sätze nicht mehr gelten, wendet man wohl ein. Derselbe Grund würde gegen die Zulassung einer zweiten Quadratwurzel aus 9 sprechen. So hat man nirgends ganz sichern Boden unter den Füssen. Ohne endgültige Definitionen hat man auch nicht endgültige Lehrsätze. Man kommt aus der Unfertigkeit, dem Schwanken nicht heraus.

§ 62. Bei der Beziehung steht die Sache ganz ähnlich wie beim Begriffe: sie kann von der Logik nur anerkannt werden, wenn von jedem ersten Gegenstande und jedem zweiten Gegenstande bestimmt ist, ob der erste zum zweiten in der Beziehung stehe, oder nicht. Auch hier haben wir ein *Tertium non datur*: der Fall der Unentschiedenheit ist ausgeschlossen. Wenn diese Forderung bei einer Beziehung nicht erfüllt wäre, so wären auch die Begriffe, die wir durch theilweise Sättigung (Bd. I § 30) aus ihr gewinnen können, nicht sämmtlich scharf begrenzt; also wären sie genau genommen gar keine Begriffe, sondern unzulässige Scheinbegriffe. Wenn z. B. die Beziehung des Grösserseins nicht vollständig definirt ist, so ist man auch nicht sicher, ob eine durch theilweise Sättigung daraus gewonnene begriffsartige Bildung, wie *grösser als Null* oder *positiv* ein eigentlicher Begriff sei. Dazu müsste z. B. auch bestimmt sein, ob der Mond grösser als Null sei. Man kann nun festsetzen, dass nur Zahlen in unserer Beziehung stehen können, und daraus folgern, dass der Mond, da er keine Zahl sei, auch nicht grösser als Null sei. Dazu gehört dann aber die vollständige Erklärung des Wortes „Zahl", und daran fehlt es meist.

Grade bei der Grösserbeziehung gehört das stückweise, also unvollständige Definiren so zu sagen zum guten Ton in der Mathematik. Man erklärt den Ausdruck „grösser als" zunächst im Gebiete der positiven ganzen Zahlen, also unvollständig. Die so gewonnene Scheinbeziehung, die gar nicht gebraucht werden darf, wird dann doch benutzt, um die erste Definition zu ergänzen, wobei wohl nicht immer erkennbar ist, wann die Definition der Grösserbeziehung als abgeschlossen gelten soll. Ganz ähnlich liegt der Fall bei der Gleichheitsbeziehung; auch hier gehört das stückweise Definiren durchaus zum guten Ton[1]). Nichtsdestoweniger müssen wir dabei bleiben: ohne vollständige und endgültige Definitionen hat man keinen festen Boden unter den Füssen, ist man der Geltung seiner Lehrsätze nicht sicher, kann man nicht zuversichtlich die logischen Gesetze anwenden, die ja die scharfe Begrenzung der Begriffe und also auch der Beziehungen zur Voraussetzung haben.

§ 63. Hier schliesst sich leicht eine Folgerung an, die solche Functionen betrifft, welche weder Begriffe noch Beziehungen sind. Als Beispiel nehmen wir den Ausdruck „die Hälfte von etwas", der sich als Name einer solchen Function darstellt. Das Wort „etwas" hält dabei die Stelle für den Argumentnamen offen entsprechend dem Buchstaben »ξ« in »$\frac{1}{2}\xi$«. Ein solcher Ausdruck kann nun Theil eines Begriffnamens werden, z. B. von „etwas, dessen Hälfte kleiner als Eins ist".

Wenn dieser nun wirklich einen scharf begrenzten Begriff bedeuten soll, dann muss z. B. auch für den Mond bestimmt sein, ob seine Hälfte kleiner als Eins ist. Damit dies aber stattfinde, muss der Ausdruck „die Hälfte des Mondes" eine Bedeutung haben; d. h. es muss einen Gegenstand und nur einen einzigen geben, der hierdurch bezeichnet wird. Das ist nun nach dem gemeinen Sprachgebrauche nicht der Fall, weil niemand weiss, welche Hälfte des Mondes gemeint sei. Hier ist also eine genauere Festsetzung zu treffen der Art, dass für jeden Gegenstand bestimmt wird, welcher Gegenstand die Hälfte von ihm sei; sonst darf man den Ausdruck „die Hälfte von x" mit dem bestimmten Artikel nicht gebrauchen. So muss also eine Function erster Stufe mit einem Argumente immer so beschaffen sein, dass sich ein Gegenstand als ihr Werth ergiebt, welchen Gegenstand man auch als ihr Argument nehmen — durch welchen Gegenstand man auch die Function sättigen — möge[2]).

§ 64. Das Entsprechende haben wir auch von den Functionen mit zwei Argumenten zu fordern. Der Ausdruck

---

1) In der Praxis ihrer Beweise behandeln wohl alle Mathematiker die Gleichheit als Identität, obwohl die meisten es in der Theorie nicht wahr haben wollen. Aber niemand wird z. B. sagen, die Gleichung »$4.x-3=3$« habe die Wurzeln $\frac{6}{4}$ und $\frac{9}{6}$, weil zwar $\frac{6}{4}=\frac{9}{6}$ sei, aber $\frac{6}{4}$ nicht mit $\frac{9}{6}$ zusammenfalle. Fallen sie nicht zusammen, so sind sie verschieden, und unsere Gleichung hat mindestens zwei verschiedene Wurzeln. Es ist merkwürdig zu sehen, welch' greller Widerstreit bei vielen Mathematikern zwischen ihrer ausgesprochenen Theorie und ihrer stillschweigend geübten Praxis besteht. Wenn aber die Gleichheit in der Mathematik Identität ist, so ist deren vielfache Definition vollends ein unsinniges Verfahren.

2) Man vergl. das im ersten Bd. über Function Gesagte, auch des Verfassers Schrift *Function und Begriff* (Jena, Pohle, 1891).

„die Summe eines ersten und eines zweiten Gegenstandes"
stellt sich als Name einer solchen Function dar. Es muss also auch hier für jeden ersten und für jeden zweiten Gegenstand bestimmt sein, welcher Gegenstand die Summe des ersten und zweiten sei, und einen solchen muss es immer geben. Ist das nicht der Fall, so ist auch nicht bestimmt, welcher Gegenstand zu sich selbst addirt Eins ergebe. Mithin bedeuten dann die Worte „etwas, was zu sich selbst addirt Eins ergiebt" keinen scharf begrenzten Begriff, also überhaupt nichts logisch Brauchbares. Und die Frage, wieviel Gegenstände es gebe, die zu sich selbst addirt Eins ergeben, ist unbeantwortbar.

Aber kann man nicht festsetzen, dass der Ausdruck „die Summe eines ersten und eines zweiten Gegenstandes" nur dann eine Bedeutung haben solle, wenn beide Gegenstände Zahlen seien? Dann sei doch, meint man wohl, *etwas, was zu sich selbst addirt Eins ergiebt* ein scharf begrenzter Begriff; denn man wisse nun, dass kein Gegenstand unter ihn falle, der keine Zahl sei. Es falle z. B. der Mond nicht darunter, da die Summe des Mondes und des Mondes nicht Eins sei. Dies ist falsch; denn der Satz „die Summe des Mondes und des Mondes ist Eins" ist nun weder wahr noch falsch; in beiden Fällen nämlich müssten die Worte „die Summe des Mondes und des Mondes" etwas bedeuten, was durch die vorgeschlagene Festsetzung ausdrücklich verneint wird. Unser Satz wäre etwa zu vergleichen dem Satze „die Skylla hatte sechs Drachenschlünde". Auch dieser Satz ist weder wahr noch falsch, sondern Dichtung, weil der Eigenname „Skylla" nichts bezeichnet. Solche Sätze können zwar Gegenstände einer wissenschaftlichen Betrachtung sein, z. B. einer mythologischen, aber es kann sich in ihnen keine wissenschaftliche Untersuchung vollziehen. Wenn unser Satz „die Summe des Mondes und des Mondes ist nicht Eins" ein wissenschaftlicher wäre, so besagte er, dass die Bedeutung der Worte „die Summe des Mondes und des Mondes" nicht zusammenfalle mit der Bedeutung des Wortes „Eins"; aber jene Bedeutung wäre bei der vorgeschlagenen Festsetzung nicht vorhanden. Folglich könnte man von ihr wahrheitsgemäss weder aussagen, dass sie mit der Bedeutung von „Eins" zusammenfalle, noch auch, dass sie nicht mit ihr zusammenfalle. Die Frage also, ob die Summe des Mondes und des Mondes Eins sei, oder ob der Mond unter den Begriff *etwas, was zu sich selbst addirt Eins ergiebt* falle, wäre unbeantwortbar; mit andern Worten: was wir eben Begriff genannt, wäre gar kein eigentlicher Begriff, weil die scharfe Begrenzung fehlte. Hat man aber einmal den Ausdruck „a zu b addirt ergiebt c" eingeführt, so kann man die Bildung eines Begriffnamens, wie „etwas, was zu sich selbst addirt Eins ergiebt" nicht mehr verhindern. Wollte man nun wirklich versuchen, durch eine Gesetzgebung die Bildung solcher unzulässigen, wiewohl sprachlich möglichen Begriffnamen sicher zu verhindern, so würde man das bald als übermässig schwierig und wahrscheinlich undurchführbar aufgeben. Der einzig gangbare Weg ist der, die Wörter „Summe“ und „addiren“ und andere, falls man sie überhaupt gebrauchen will, so zu erklären, dass die mit ihnen sprachlich richtig gebildeten Begriffnamen scharf begrenzte Begriffe bedeuten, und also zulässig sind.

So ist denn auch die hier von uns aufgestellte Forderung, dass jede Function erster Stufe mit zwei Argumenten für jeden ersten Gegenstand als erstes, und für jeden zweiten Gegenstand als zweites Argument einen Gegenstand als Werth habe, die Folge davon, dass die Begriffe scharf begrenzt sein müssen, dass keine Ausdrücke geduldet werden dürfen, die ihrem Baue nach einen Begriff zu bedeuten scheinen, aber einen solchen nur vortäuschen, wie auch Eigennamen unzulässig sind, die nicht wirklich einen Gegenstand bezeichnen.

§ 65. Was von den Ausdrücken in Worten gesagt ist, gilt auch von den arithmetischen Zeichen. Wenn das Additionszeichen vollständig erklärt ist, so haben wir in

$$»\xi + \xi = \zeta«$$

den Namen einer Beziehung, der des Einfachen zum Doppelten. Ist das nicht der Fall, so wird man nicht sagen können, ob die Gleichung

$$»x + x = 1«$$

eine einzige oder mehrere Lösungen habe. Nun wird jemand antworten: ich verbiete, dass etwas anderes als Zahlen überhaupt in Betracht gezogen werde. Einen ähnlichen Einwand haben wir oben behandelt; hier mag die Sache noch von andern Seiten beleuchtet werden. Wer alle Gegenstände von der Betrachtung ausschliessen will, die nicht Zahlen sind, der wird zunächst sagen müssen, was er unter „Zahl“ verstehe, und eine Erweiterung ist dann nicht mehr zulässig. Eine solche Beschränkung müsste in die Erklärung aufgenommen werden, sodass sie etwa die Form annähme: „Wenn a und b Zahlen sind, so bedeutet $a + b$“ u. s. w. Wir hätten eine bedingte Erklärung[1]). Aber das Additionszeichen ist nur erklärt, wenn die Bedeutung jeder möglichen Zeichenverbindung von der Form »$a + b$« bestimmt ist, welche bedeutungsvolle Eigennamen man auch für »a« und für »b« einsetzen möge. Wenn man aber solche Zeichenverbindungen z. B. nur für den Fall erklärt, dass für »a« und für »b« Zeichen reeller ganzer Zahlen genommen werden, so hat man eigentlich nur solche Verbindungen erklärt, nicht aber das Additionszeichen und hat dabei gegen den noch zu behandelnden zweiten Grundsatz des Definirens verstossen. Und doch bildet man sich nun unwillkürlich ein, die Bedeutung des Additionszeichens sei bekannt, und behandelt es demgemäss auch in solchen Fällen, für die keine Erklärung gegeben ist.

Sobald man Allgemeinheit in den Sätzen anstrebt, wird man in den

1) Man vergl. des Verfassers Brief an Herrn G. Peano, Revue de Mathématiques, Tome VI, S. 53 u. ff.

arithmetischen Formeln ausser den Zeichen bestimmter Gegenstände — den Eigennamen, z. B. »2« — auch Buchstaben brauchen, die nur andeuten [1]), nicht bezeichnen, und dadurch schon wird man ganz unmerklich über das Gebiet hinausgeführt, in dem man seine Zeichen erklärt hat. Man kann den hieraus entstehenden Gefahren zu begegnen suchen dadurch, dass man diese Buchstaben nicht Gegenstände überhaupt andeuten lässt, wie wir es gethan haben, sondern nur die eines fest begrenzten Gebietes. Nehmen wir einmal an, der Begriff *Zahl* sei scharf definirt, und es sei festgesetzt, dass die lateinischen Buchstaben nur Zahlen andeuten sollen, und nur für Zahlen sei das Additionszeichen erklärt. Dann haben wir in dem Satze

$$»a+b=b+a«$$

die Bedingungen hinzuzudenken, dass a und b Zahlen seien; und diese werden, weil nicht ausgesprochen, leicht in Vergessenheit gerathen [2]). Aber nehmen wir uns einmal vor, diese Bedingungen nicht zu vergessen! Nach einem bekannten Gesetze der Logik können wir den Satz

„wenn a eine Zahl ist, und wenn b eine Zahl ist, so ist $a+b=b+a$"

umwandeln in den Satz

„wenn $a+b$ nicht gleich $b+a$ ist, und wenn a eine Zahl ist, so ist b keine Zahl";

und hier ist es unmöglich, die Beschränkung auf's Gebiet der Zahlen aufrecht zu erhalten. Der Zwang der Sachlage arbeitet unwiderstehlich auf die Durchbrechung solcher Schranken hin. Dann aber hat unser Bedingungssatz

„wenn $a+b$ nicht gleich $b+a$ ist"

bei der unvollständigen Erklärung des Additionszeichens keinen Sinn.

Wir sehen auch hier wieder, dass die Gesetze der Logik scharf begrenzte Begriffe und damit auch vollständige Erklärungen der Functionsnamen — z. B. des Pluszeichens — voraussetzen [3]). Wir haben dies im ersten Bande so ausgedrückt: jeder Functionsname muss eine Bedeutung haben. Deshalb also sind alle bedingte Definitionen und alles stückweise Definiren zu verwerfen. Jedes Zeichen muss mit einem Schlage vollständig erklärt werden, sodass es, wie wir sagen, eine Bedeutung erhält.

Alles dies hängt auf's Engste mit einander zusammen und kann als Ausfluss des Grundsatzes der Vollständigkeit der Definitionen angesehen werden.

---

1) Vergl. Bd. I, S. 31 u. 32.

2) Denkt man z. B. bei der Erweiterung des Zahlengebietes wohl immer daran, dass damit jene Bedingungen dem Sinne nach geändert werden, dass alle bis dahin bewiesenen allgemeinen Sätze einen andern Gedankeninhalt gewinnen, dass auch die Beweise hinfällig werden?

3) Es versteht sich von selbst, dass gewisse Functionen wegen ihrer logischen Einfachheit nicht definirt werden können; aber auch diese müssen für alle Argumente Werthe haben.

2. Grundsatz der Einfachheit des erklärten Ausdrucks [1]).

§ 66. Dass durch die Bedeutung eines Ausdrucks und eines seiner Theile die Bedeutung des übrigen Theils nicht immer bestimmt ist, leuchtet ein. Man darf also ein Zeichen oder Wort nicht dadurch erklären, dass man einen Ausdruck erklärt, in dem es vorkommt, während die übrigen Theile bekannt sind. Denn es wäre erst eine Untersuchung nöthig, ob die Auflösung für die Unbekannte — ich bediene mich eines wohl verständlichen algebraischen Bildes — möglich sei, und ob die Unbekannte eindeutig bestimmt werde. Es ist aber, wie oben schon gesagt, unthunlich, die Rechtmässigkeit einer Definition von dem Ausfall einer solchen Untersuchung abhängig zu machen, die überdies vielleicht garnicht einmal durchführbar wäre. Vielmehr muss die Definition den Charakter einer für die Unbekannte aufgelösten Gleichung haben, auf deren anderer Seite nichts Unbekanntes mehr vorkommt.

Noch weniger geht es an, mit einer einzigen Definition zweierlei zu erklären, sondern jede Definition muss ein einziges Zeichen enthalten, dessen Bedeutung durch sie festgesetzt wird. Man kann ja auch nicht mit einer einzigen Gleichung zwei Unbekannte bestimmen.

Es kommt auch vor, dass man ein ganzes System von Definitionen aufstellt, deren jede mehrere zu erklärende Worte enthält, sodass jedes dieser Worte in mehren dieser Definitionen vorkommt. Dies gleicht einem System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, wobei dann wieder die Auflösbarkeit und die Eindeutigkeit der Bestimmung völlig fraglich bleibt.

Zwar kann man jedes Zeichen, jedes Wort als aus Theilen bestehend ansehen; aber nur dann sprechen wir ihm die Einfachheit ab, wenn nach den allgemeinen Regeln der Grammatik oder der Zeichengebung aus den Bedeutungen der Theile die Bedeutung des Ganzen folgen würde, und wenn diese Theile auch in andern Verbindungen vorkommen und als selbständige Zeichen mit eigener Bedeutung behandelt werden. In diesem Sinne also kann man sagen: der erklärte Ausdruck — das erklärte Zeichen — muss einfach sein. Sonst könnte es vorkommen, dass die Theile auch einzeln erklärt würden und dass diese Erklärungen der des Ganzen widersprächen.

Allerdings können Namen von Functionen wegen der ihnen eigenthümlichen Ungesättigtheit nicht auf der einen Seite der Definitionsgleichung allein erscheinen; sondern ihre Argumentstellen müssen immer irgendwie ausgefüllt sein. Dies geschieht in der Begriffsschrift, wie wir gesehen haben [2]), durch lateinische Buchstaben, die dann auch auf der andern Seite vorkommen müssen. In der Wortsprache treten unbestimmt andeutende Pronomina und Partikeln („etwas", „was", „es") dafür ein. Dies ist keine

1) Bd. I, § 33, 3.
2) Bd. I, § 33, 5.

Verletzung unsers Grundsatzes, weil diese Buchstaben, Pronomina, Partikeln nichts bedeuten, sondern nur andeuten.

§ 67. Oft wird gegen unsere beiden Grundsätze des Definirens zugleich gefehlt, indem z. B. das Gleichheitszeichen zusammen mit dem, was rechts und links davon steht, erklärt wird. Dabei ist dann das Gleichheitszeichen schon vorher, aber unvollständig erklärt worden. So entsteht ein eigenthümliches Zwielicht, indem das Gleichheitszeichen halb und halb als bekannt und doch wieder als unbekannt behandelt wird. Einerseits scheint es, daß man sich an jene frühere Definition erinnern und daraus etwas entnehmen solle zur Bestimmung dessen, was nun rechts und links erscheint. Andrerseits reicht doch jene frühere Erklärung für den vorliegenden Fall nicht hin. Aehnliches kommt auch bei andern Zeichen vor. Dieses Zwielicht brauchen manche Mathematiker zur Ausführung ihrer logischen Kunststücke. Zu den Zielen, die so erreicht werden sollen, führt uns in einwandfreier Weise unsere Umsetzung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit nach dem Grundgesetze V (Bd. I, § 3, § 9, § 20).

Ohne zu meinen, hiermit eine vollständige Uebersicht über Alles gegeben zu haben, was beim Definiren zu beachten ist, will ich mich mit der Darlegung dieser beiden Grundsätze begnügen, gegen die von den Mathematikern am meisten gefehlt wird.

b) Cantors Lehre von den Irrationalzahlen.

§ 68. G. Cantor definirt [1]) zunächst seine Fundamentalreihe:

„Jede derartige Menge [2]) (a_ν), welche durch die Forderung $\lim\limits_{\nu=\infty}(a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0$ (bei beliebig gelassenem μ) charakterisirt werden kann, nenne ich eine Fundamentalreihe und ordne ihr eine durch sie zu definirende Zahl b zu“.

Es ist ein großer Uebelstand, dass das Wort „Zahl“ von den Mathematikern schwankend gebraucht wird: bald nennt man die Zahlzeichen, bald ihre Bedeutungen Zahlen. Jeder mathematische Schriftsteller, der das Wort „Zahl“ gebraucht, sollte eigentlich angeben, wie er es meint [3]). So ist man auch hier im Zweifel über den Sinn des Cantorschen Satzes. Wenn das Wort „Zahl“ in der Bedeutung von „Zahlzeichen“ gemeint ist, wird man den Satz wohl so zu verstehen haben: ich gebe jeder Fundamentalreihe ein gewisses Zeichen »b«, sodass durch dieses die Reihe bezeichnet wird. Dann werden verschiedene Fundamentalreihen verschiedene Zeichen erhalten müssen. Verschieden sind Fundamentalreihen aber immer

1) Math. Annalen XXI, S. 567.
2) Menge von rationalen Zahlen.
3) Wir haben uns für das Zweite entschieden.

dann, wenn es auch nur eine Zahl giebt, die einer von beiden angehört, nicht aber der andern. Sachlich ist diese Zeichenverleihung ganz gleichgültig; denn ich muss eine Reihe schon irgendwie bezeichnet haben, um sagen zu können: dieser so bestimmten Fundamentalreihe gebe ich das Zeichen »b«. Ob ich nun, wenn ich von dieser Reihe sprechen will, das Zeichen »b« oder die ursprüngliche Bezeichnung anwende, kann in der Sache gar keinen Unterschied machen, sondern höchstens kann die neue Bezeichnung wegen ihrer grössern Einfachheit bequemer sein.

§ 69. Nun sagt Cantor weiter:

„Eine solche Fundamentalreihe bietet . . . drei Fälle dar; entweder es sind ihre Glieder (a_ν) für hinreichend grosse Werthe von ν kleiner ihrem absoluten Betrage nach als eine beliebig vorgegebene Zahl; oder es sind dieselben von einem gewissen ν an grösser als eine bestimmt angebbare rationale Zahl ϱ; oder sie sind von einem bestimmten ν an kleiner als eine bestimmt angebbare negative rationale Grösse $-\varrho$. In dem ersten Falle sage ich, dass b gleich Null, im zweiten, dass b grösser als Null oder positiv, im dritten, dass b kleiner als Null oder negativ sei."

Wenn unsere Vermuthung über den Sinn jenes ersten Satzes von Cantor richtig ist, so kann dies ohne Benutzung des »b« so ausgesprochen werden: „Von einer Fundamentalreihe, deren Glieder a_ν für hinreichend grosse Werthe von ν kleiner ihrem absoluten Betrage nach sind als eine beliebig vorgegebene rationale Zahl, sage ich, sie sei gleich Null; von einer Fundamentalreihe, deren Glieder von einem gewissen ν an grösser sind als eine bestimmt angebbare rationale Zahl ϱ, sage ich, sie sei grösser als Null oder positiv; von einer Fundamentalreihe, deren Glieder von einem bestimmten ν an kleiner sind als eine bestimmt angebbare negative rationale Zahl $-\varrho$, sage ich, sie sei kleiner als Null oder negativ." Nehmen wir nun diesen Wortlaut oder den ursprünglichen von Cantor an, in beiden Fällen haben wir drei Erklärungen der Ausdrücke „gleich Null", „grösser als Null", „kleiner als Null". Diese Definitionen sind fehlerhaft, weil die erklärten Ausdrücke nicht einfach sind, sondern die Wörter „grösser" und „kleiner" enthalten, die als bekannt vorausgesetzt werden müssen, da sie selbst zur Erklärung dienen — Verstoss gegen unsere beiden Grundsätze des Definirens. Aber auch die Wörter „Null" und „gleich" müssen wohl als bekannt vorausgesetzt werden; und dann sind die Ausdrücke „gleich Null", „grösser als Null", „kleiner als Null" vollständig bekannt und dürfen nicht noch einmal erklärt werden. Wären sie es nicht, so wären die früheren Definitionen unvollständig gewesen — Verstoss gegen unsern ersten Grundsatz des Definirens.

§ 70. Illigens fasst in seinem Aufsatze „Zur Weierstrass-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen" [1]) die Cantorsche Lehre so auf, dass unter

1) **Math. Annalen XXXIII, S. 155 u. ff.**

der Zahl *b* ein Zeichen verstanden werde dafür, dass durch irgendein Gesetz die Reihe gegeben sei. Hiernach kann es zunächst scheinen, dass die Zahl *b* einen Satz vertreten solle; aber der später vielfach gebrauchte Ausdruck „Zahlreihezeichen" macht es klar, dass Illigens die Cantorsche Lehre ebenso verstanden habe, wie wir es eben versucht haben. Er wendet dagegen ein, dass ein solches Zahlreihezeichen garnicht wie die rationalen Zahlen eine Quantität bezeichne, dass die Wörter „grösser" und „kleiner" hier einen ganz andern Sinn haben als bei den rationalen Zahlen; daraus folge dasselbe auch für das Wort „Grenze"; durch den blossen Gebrauch des Wortes „grösser" könne *b* nicht zu einem Quantitätszeichen werden, und die rationalen Zahlen gehören dadurch, dass sie als Zahlreihezeichen gebraucht werden, zwar zu den neuen Zahlen, aber nicht, sofern sie eine Quantität bezeichnen; der Zweck, die Rationalzahlen als besondere Art der Zahlreihezeichen erscheinen zu lassen, werde also verfehlt. In Illigensens Sinne können wir wohl hinzufügen, dass dann die Rationalzahlen — unser Schriftsteller versteht darunter offenbar Zahlzeichen — dann zweideutig wären, indem sie einerseits Quantitäten, andrerseits Zahlreihen (Fundamentalreihen) bezeichneten. Illigens sagt weiter: „Die aufgestellten Zahlreihezeichen vermögen trotz aller Benennungen, die ihnen durch verschiedene Definitionen zugelegt werden, keine Quantitätsbegriffe zu werden."

Gewiss! Ein Zeichen kann nie ein Begriff werden. Aber man braucht vielleicht nicht anzunehmen, dass Cantor so Zeichen und Bezeichnetes verwechselt habe. Dennoch liegt wohl etwas Wahres in diesem Einwande, wenn man ihn so formt, dass die Zahlreihen trotz aller Benennungen, die ihnen durch verschiedene Definitionen zugelegt werden, keine Quantitäten werden.

§ 71. Illigens meint ferner, wenn $\sqrt{2}$ als blosses Zahlreihezeichen (für die Reihe 1.4, 1.41, 1.414, . . .) gefasst würde, so hätten wir auf der linken Seite die Gleichung $(\sqrt{2})^2 = 2$ nur ein Zeichen für die Zahlreihe 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, . . . Ein solches Zeichen aber, als welches jedes beliebige Ding gewählt werden könne, der durch die Zahl 2 bezeichneten Quantität gleichzusetzen, könne wohl niemandem in den Sinn kommen. Dieser Einwand ist nur berechtigt, wenn Cantor das Zeichen mit dem Bezeichneten verwechselt, was erst nachzuweisen ist. Wenn man das Gleichheitszeichen zwischen andern Zeichen schreibt, so setzt man damit nicht das links stehende Zeichen »$(\sqrt{2})^2$« gleich der Bedeutung des rechts stehenden, sondern man setzt die Bedeutung des links stehenden gleich der Bedeutung des rechts stehenden Zeichens. Hier würde also etwa eine Zahlreihe der Bedeutung des Zahlzeichens »2«, d. h. der Zahl 2, gleichgesetzt. Die Berechtigung hierzu wäre zu untersuchen.

Man kann gegen Cantor allerdings den Vorwurf erheben, dass er diese Prüfung unterlassen hat und das, was eigentlich bewiesen werden sollte, durch eine Pseudodefinition festsetzen will. Die Fundamentalreihe 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, . . . muss bei Cantor als etwas Bekanntes vorausgesetzt werden, ebenso die Zahl 2 und die Bedeutung des Wortes „gleich". Ob also jene Fundamentalreihe gleich der Zahl 2 sei, kann nicht Gegenstand einer willkürlichen Festsetzung sein, sondern muss sich ergeben. Dieser Einwand gilt freilich nur unter der Voraussetzung, dass der hier angenommene Sinn von Cantors Lehre richtig ist. Später werden wir noch eine andere Auffassungsweise versuchen müssen.

Illigens meint ferner, dass man bei Cantors Theorie nicht sagen könne, was eine Linie von $\sqrt{2}$ Meter Länge sei.

Es liegt gewiss viel Wahres in diesen Einwänden; aber es würde deutlicher hervortreten, wenn Illigens das Wort „Zahl" nicht in der Bedeutung Zahlzeichen gebrauchte und wenn er überhaupt Zahl und Zahlzeichen schärfer unterschiede; denn wenn er von rationalen Zahlen spricht und eine Zahl grösser als eine andere nennt, so passt das nicht zu der Bedeutung Zahlzeichen. Die Gefahr einer solchen Ungenauigkeit liegt immer vor, wenn man unter „Zahl" nicht die Bedeutung eines Zahlzeichens, sondern dieses selbst versteht; denn es ist einmal feststehende Meinung, dass die Gegenstände der Arithmetik Zahlen seien. Dann liegt es immer nahe, die Zahlzeichen aus blossen Hülfsmitteln arithmetischer Forschung zu deren Gegenständen zu machen und dadurch eine bedenkliche Verwirrung anzurichten [1]).

Zweitens scheint es mir bedenklich, wenigstens Missverständnissen ausgesetzt, dass Illigens rationale Zahlen Quantitätszeichen nennt und von ihnen sagt, sie bezeichnen Quantitäten. Nach dem Sprachgebrauche nennt man wohl Längen, Flächen, Winkel, Zeiträume, Massen, Kräfte Quantitäten. Ist es wohl nun richtig zu sagen, die Zahl $\frac{3}{4}$ oder das Zahlzeichen »$\frac{3}{4}$« bezeichne eine gewisse Länge, oder einen gewissen Winkel oder gar beides?

§ 72. A. Pringsheim meint [2]), dass die rationalen Zahlen als Zeichen erscheinen, die wohl bestimmte Quantitäten vorstellen *können*, aber nicht *müssen*. Offenbar versteht auch dieser Schriftsteller unter rationalen Zahlen gewisse mit einem Schreibmittel auf einer Schreibfläche oder durch Buchdruck künstlich hergestellte Figuren. Nun: entweder sind diese Figuren für die Arithmetik nichts weiter als Figuren; dann ist es für diese Wissenschaft gleichgültig, welche Vorstellungen etwa jemand noch damit verbinden möge, wenn er nur, sofern er Arithmetik treibt, diese Vorstellungen aus dem Spiele lässt. Ebenso gleichgültig wäre dies für die Arithmetik, wie

1) Es besteht freilich auch eine Meinung, nach der die Zahlen weder Zeichen sind, die etwas bedeuten, noch auch unsinnliche Bedeutungen solcher Zeichen, sondern Figuren, die nach gewissen Regeln gehandhabt werden, etwa wie Schachfiguren. Danach sind die Zahlen weder Hülfsmittel der Forschung noch Gegenstände der Betrachtung, sondern Gegenstände der Handhabung. Das wird später zu prüfen sein.

2) Encyklopädie der math. Wissenschaften I A 3, S. 55.

es für die Geometrie gleichgültig wäre, ob etwa jemand mit einer Dreiecksfigur die Vorstellung eines Elephanten verbände, wenn er nur in der Geometrie gänzlich davon absähe. Man mag nun zwar sagen „ein Dreieck kann zwar einen Elephanten vorstellen, muss es aber nicht"; die Einsicht in das Wesen der Geometrie oder des Dreiecks würde dadurch aber kaum gefördert werden. Oder die von Pringsheim rationale Zahlen genannten Figuren sind Zeichen für etwas, die zum Ausdrucke arithmetischer Gedanken dienen sollen, wie etwa das Zeichen » ♃ « von den Astronomen gebraucht wird, um den Jupiter zu bezeichnen. Wie sonderbar wäre es nun zu sagen, jenes Zeichen könne den Jupiter bezeichnen, müsse es aber nicht! Der Astronom wird einfach sagen: „ich bezeichne mit dem Zeichen »♃« den Jupiter", und damit wird die Sache abgemacht sein; alles weitere Gerede über dies Zeichen ist dann überflüssig. Also: entweder ist es für die Arithmetik wesentlich, dass die Zahlzeichen etwas bedeuten; dann ist das, was sie bedeuten, die Hauptsache, der Gegenstand der Betrachtung und sie selbst nur Hülfsmittel, von denen nicht viele Worte zu machen sind; oder die Zahlzeichen sind selbst die Gegenstände der Arithmetik; dann ist es gleichgültig, ob dieser oder jener mit ihnen noch eine Bedeutung verbindet, und in der Arithmetik braucht davon nicht die Rede zu sein. Im ersten Falle bezeichnen die Zahlzeichen eben einfach etwas, nämlich Zahlen; im zweiten Falle bezeichnen sie wenigstens in der Arithmetik nichts. In keinem Falle kann aber in dem Satze, dass die Zahlzeichen Quantitäten vorstellen können, aber nicht müssen, irgendetwas Entscheidendes oder Aufklärendes gefunden werden.

§ 78. Was ist denn nun eigentlich an der Behauptung, dass die Zahlzeichen Quantitäten bezeichnen? Sehen wir auf die Anwendungen arithmetischer Gesetze in der Geometrie, Astronomie, Physik! In der That kommen hier die Zahlen in Verbindung mit Grössen, wie Längen, Massen, Lichtstärken, elektrischen Ladungen vor; und bei oberflächlicher Betrachtung könnte man meinen, dasselbe Zahlzeichen bedeute bald eine Länge, bald eine Masse, bald eine Lichtstärke, und das würde dann die Behauptung Pringsheims zu stützen scheinen, dass zwischen den Zahlzeichen und den Quantitäten zwar eine gewisse, aber nur lockere Verbindung bestehe. Prüfen wir das genauer! Was wenden wir denn eigentlich an, wenn wir von einem arithmetischen Satze Gebrauch machen? den Schall der Worte? Gruppen von sonderbaren Figuren, die aus Druckerschwärze bestehen? Oder wenden wir einen Gedankeninhalt an, den wir mit jenen Worten, jenen Zeichen verbinden? Was beweisen wir, wenn wir einen arithmetischen Satz beweisen? jenen Schall? jene Figuren? oder diesen Gedankeninhalt? Doch wohl diesen! Nun gut; dann müssen wir aber auch einen bestimmten Gedanken in dem Satze haben, und den hätten wir nicht, wenn die vorkommenden Zahlzeichen und Zahlwörter bald dies, bald jenes bedeuteten.

Sehen wir genauer zu, so bemerken wir, dass ein Zahlzeichen für sich allein keine Länge, keine Kraft u. s. w. bezeichnen kann, sondern nur in Verbindung mit der Bezeichnung eines Maasses, einer Einheit, wie Meter, Gramm u. s. w. Was bedeutet nun dabei das Zahlzeichen allein? Offenbar ein Grössenverhältnis. Und dies liegt so nahe, dass wir uns nicht wundern dürfen, dieser Erkenntnis schon früh zu begegnen[1]). Wenn wir nun unter „Zahl" die Bedeutung eines Zahlzeichens verstehen, so ist *reelle Zahl* dasselbe wie Grössenverhältnis. Was ist nun dadurch gewonnen, dass wir *reelle Zahl* als Grössenverhältnis definiren? Zunächst scheint nur ein Ausdruck durch einen andern ersetzt zu sein. Und doch ist das ein Schritt vorwärts. Erstens nämlich wird niemand ein Grössenverhältnis mit einem geschriebenen oder gedruckten Zeichen verwechseln; und damit ist eine Quelle unzähliger Missverständnisse und Irrthümer verstopft. Zweitens wird durch den Ausdruck „Grössenverhältnis" oder „Verhältnis einer Grösse zu einer Grösse" hingewiesen auf die Weise, wie reelle Zahlen mit Grössen verbunden sind. Die Hauptsache bleibt freilich noch zu thun. Wir haben zunächst nur Worte, die uns ungefähr die Richtung angeben, in der die Lösung zu suchen ist. Die Bedeutung dieser Worte ist noch genauer festzustellen. Wir werden aber jetzt schon nicht mehr sagen, dass eine Zahl oder ein Zahlzeichen bald eine Länge, bald eine Masse, bald eine Lichtstärke bezeichne, sondern wir werden sagen, dass eine Länge zu einer Länge dasselbe Verhältnis haben könne wie eine Masse zu einer Masse, wie eine Lichtstärke zu einer Lichtstärke[2]); und dieses selbe Verhältnis ist dieselbe Zahl und kann durch dasselbe Zahlzeichen bezeichnet werden.

Wenn Illigens unter seinem Worte „Quantitäten" Grössenverhältnisse oder, was wir nun als gleichbedeutend ansehen, reelle Zahlen versteht und meint, dass Zahlreihezeichen keine Grössenverhältnisse nach Cantor bezeichnen, so hat er recht. In Cantors Definition kommt nur die Fundamentalreihe und die Zahl b vor und diese ist das Zahlreihezeichen. Von einem Grössenverhältnisse ist dabei garnicht die Rede. Das Zahlreihezeichen bezeichnet eben die Fundamentalreihe und darf schon deshalb nicht auch ein Grössenverhältnis bezeichnen; dann wäre es ja zweideutig.

§ 74. Cantors Antwort[3]) auf Illigensens Einwürfe ist leider kurz und unklar ausgefallen. Wir erfahren nicht sicher, ob Illigens mit seiner Annahme recht habe, dass die Zahlen b, b' u. s. w. Zeichen seien, und ob sie Fundamentalreihen bezeichnen, was zu wissen doch am nöthigsten ist, um Klarheit in die Sache zu bringen. Statt dessen wird Zeichen und Bezeichnetes durcheinander geworfen. Cantor schreibt:

---

1) Vergl. Baumann, Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik I, S. 475.
2) Den Ausdruck „benannte Zahl" möchte ich verbannen, da er nur Verwirrung stiftet.
3) Math. Annalen XXXIII, S. 476.

„Es ist aber weder von mir noch von Andern jemals behauptet worden, dass die Zeichen $b, b', b'' \ldots$ *concrete* Grössen im eigentlichen Wortsinne seien. Als ***abstracte Gedankendinge*** sind sie nur Grössen im uneigentlichen oder übertragenen Sinne des Wortes."

Hier werden b, b' u. s. w. zwar Zeichen, zugleich aber abstracte Gedankendinge genannt. Es gehört wirklich ein starker Glaube dazu, Zeichen, die etwa mit Kreide auf eine Tafel oder mit Tinte auf Papier geschrieben werden, die man mit seinen leiblichen Augen sehen kann, für abstracte Gedankendinge zu halten, solcher Glaube, welcher Berge versetzen und Irrationalzahlen schaffen kann.

Wahrscheinlich meint Cantor, dass die Zeichen b, b' u. s. w. abstracte Gedankendinge bezeichnen sollen. Wir können zwischen physischen und logischen Gegenständen unterscheiden, womit freilich keine erschöpfende Eintheilung gegeben werden soll. Jene sind im eigentlichen Sinne wirklich; diese sind es nicht, aber darum nicht minder objectiv; sie können zwar nicht auf unsere Sinne wirken, aber durch unsere logischen Fähigkeiten erfasst werden. Solche logische Gegenstände sind unsere Anzahlen; und es ist wahrscheinlich, dass auch die übrigen Zahlen dazu gehören. Wenn nun Cantor unter dem Ausdruck „abstractes Gedankending" das versteht, was wir logischen Gegenstand nennen, so scheint in der Sache gute Uebereinstimmung zwischen uns zu bestehen. Nur schade, dass diese abstracten Gegenstände in Cantors Erklärungen gar nicht vorkommen! Wir haben Fundamentalreihen und Zeichen b, b' u. s. w. Diese können wir beim besten Willen nicht für abstracte Gedankendinge halten, und auch die Fundamentalreihen können nicht damit gemeint sein. Wenn also die abstracten Gedankendinge die Hauptsache sind, so fehlt eben die Hauptsache in Cantors Definitionen. Welches abstracte Gedankending soll etwa mit dem Zeichen »$\sqrt{2}$« bezeichnet werden? Wir erfahren es nicht. Wir tasten an unwesentlichen Aeusserlichkeiten herum und lassen uns den Kern entschlüpfen.

§ 75. Für entscheidend erklärt es dabei Cantor, dass man mit Hülfe dieser abstracten Grössen $b, b', b'' \ldots$ eigentliche concrete Grössen, z. B. geometrische Strecken quantitativ genau zu bestimmen im Stande sei. Also weit davon entfernt, blos eine angenehme Zugabe zu sein, ist die Anwendung auf Geometrie entscheidend. Aber, wenn sie entscheidend ist, so ist sie es gegen Cantors Theorie, weil dies Entscheidende in der Definition der Zahlgrösse garnicht vorkommt. Erst nachdem die $b, b', b'' \ldots$ eingeführt sind, wird die Bestimmung der Entfernungen durch Zahlengrössen gegeben[1]). Jene Einführung der Zahlgrössen ist rein arithmetisch, enthält aber das Entscheidende nicht; diese Angabe, wie Entfernungen

1) Math. Annalen V, S. 127.

durch Zahlgrössen bestimmt werden können, enthält das Entscheidende, ist aber nicht rein arithmetisch. Und damit wird doch wohl das Ziel verfehlt, das Cantor sich gesetzt hat. In jener Definition hat man die Fundamentalreihen einerseits und die Zeichen b, b', b'' . . . andrerseits, weiter nichts. Anders läge die Sache, wenn wir eine rein arithmetische oder logische Definition von *Verhältnis*[1]) hätten, aus der auch zu entnehmen wäre, dass es Verhältnisse und unter ihnen irrationale gäbe. Dann läge das Entscheidende in dieser Definition, und die Bestimmung einer Entfernung durch eine Einheit und ein Verhältnis (reelle Zahl) hätte nur den Rang eines erläuternden Beispiels, das auch wegfallen könnte.

Doch sehen wir uns die Weise näher an, wie diese quantitative Bestimmung concreter Grössen durch abstracte nach Cantor zu Stande kommen soll! Es wird als bekannt vorausgesetzt, wie eine Entfernung durch eine rationale Zahl bestimmt wird. Jedem Gliede einer Fundamentalreihe entspricht dann eine bestimmte Entfernung und damit ein bestimmter Punkt, welcher auf einer gegebenen geraden Linie von einem gegebenen Anfangspunkte nach einer gegebenen Seite diese Entfernung hat. Beim Fortschreiten in der Fundamentalreihe nähern sich diese Punkte unbegrenzt einem Punkte, der eben dadurch bestimmt wird. Dann heisst es:

„Dies drücken wir dadurch aus, dass wir sagen: *Die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von dem Punkte o ist gleich b,* wo b die der Reihe (1)[2]) entsprechende Zahlengrösse ist."

Hier ist zunächst der Fehler zu bemerken, dass die Einheit in dem erklärten Ausdrucke garnicht erwähnt wird, obwohl sie nothwendig zur Bestimmung ist. Hieraus kann der trügerische Schein entstehen, als ob b, b', b'' . . . Entfernungen wären, während es sich doch nur um Verhältnisse handeln kann, die ebenso gut bei Stromstärken, mechanischen Arbeiten u. s. w. vorkommen können. Doch das liesse sich wohl verbessern. Aber welcher Ausdruck soll eigentlich erklärt werden? Was die Entfernung eines Punktes von einem Punkte ist, muss als bekannt vorausgesetzt werden, die sogenannten Zahlengrössen (b) sind eben eingeführt worden, und das Wort „gleich" wird doch auch schon bekannt sein. Damit ist Alles in dem erklärten Ausdrucke bekannt, und wenn die Sache in Ordnung wäre, so müsste der Sinn des Satzes „Die Entfernung des zu bestimmenden Punktes vom Punkte o ist gleich b" ebenfalls bekannt sein, sodass eine Erklärung mindestens überflüssig und darum fehlerhaft wäre.

Wenn das, was b ist, unbekannt ist, was vielleicht der Wahrheit, aber nicht Cantors Absicht entsprechen wird, so haben wir zwar etwas der Erklärung Fähiges; aber die Erklärung ist nicht rein arithmetisch. Etwas annehmbarer wäre der Satz, wenn Cantor statt „Entfernung" gesagt hätte „Verhältnis der Entfernung zur Längeneinheit". Was ein Verhältnis von

1) Die nichtsnutzigen arithmetischen Verhältnisse sind natürlich nicht gemeint.
2) der Fundamentalreihe.

Entfernungen sei, ist hier ja als unbekannt, also der Erklärung fähig anzusehen — und darin steckt gerade der Kern der Sache —; aber auch dies würde auf Schwierigkeiten stossen.

§ 76. Doch gehen wir zur Hauptsache über! Offenbar sind die Cantorschen Zahlgrössen b, b' . . ., mögen sie nun Zeichen oder abstracte Gedankendinge oder beides zugleich sein, für die Bestimmung der Entfernungen völlig überflüssig. In der That macht ihre Einmischung die Sache nur verwickelter, ohne irgendetwas zu nützen. Man lasse die Zahlgrösse ganz aus dem Spiele, und man wird finden, dass die Fundamentalreihe zu dem Zwecke vollkommen genügt, einerlei ob ihr ein Zeichen b zugeordnet ist oder nicht.

Ohne die angegebene Bestimmung von Entfernungen haben wir nur Fundamentalreihen einerseits und Zeichen andrerseits, die Hauptsache aber fehlt. Da die Zeichen b, b' . . . unwesentlich sind, haben wir in der That nur die Fundamentalreihen. Diese Reihen können zur Bestimmung von Verhältnissen dienen, aber erst, nachdem wir gelernt haben, was ein Grössenverhältnis ist, und gerade das fehlt uns.

Nehmen wir einmal an, wir kännten einige Linienspectren, aber keine Metalle! Nützte es uns nun wohl etwas, dass wir einem dieser Spectren das Zeichen »*K*«, einem andern »*Na*«, einem dritten »*Fe*« zuordneten? Sehr wenig! Nützte es etwas, diese Zeichen Metalle zu nennen? Es nützte uns vielleicht, uns über unsere Unwissenheit hinwegzutäuschen; die eigentlichen Metalle kännten wir dadurch um nichts mehr. Erst müssen wir die Metalle kennen; dann können wir entdecken, wie wir mit den Spectren die Metalle bestimmen können. Dann haben wir die Gegenstände, auf die es uns ankommt, und jenes Zuordnen der Zeichen trägt nichts dazu bei. Bevor wir nicht die Metalle selbst haben, sind jene Zeichen nur unnütze leere Hülsen, und wir hoffen vergeblich, dass sie sich von selbst mit einem neuen Inhalte füllen möchten.

So auch hier. Erst müssen wir die Grössenverhältnisse, die reellen Zahlen kennen; dann können wir entdecken, wie wir mit den Fundamentalreihen die Verhältnisse bestimmen können. Seltsam ist es, dem Zuordnen der Zeichen b, b', b'' . . . irgendeine schöpferische Kraft zuzutrauen [1]). Das Hereinziehen der Geometrie ist also dadurch entscheidend, dass man sich damit des Inhaltes bemächtigt, auf den hier alle Anstrengungen gerichtet sind. Dann aber liegt das Entscheidende in der Geometrie, und Cantors Theorie ist keineswegs eine rein arithmetische.

§ 77. Aber ist denn wirklich die Auffassung richtig, dass die sogenannten Zahlen, die Cantor seinen Fundamentalreihen zuordnet, Zeichen

1) Für die sonderbare Auffassung der Zeichen und dessen, was sie zu leisten haben, bei vielen neueren Mathematikern ist die grundlegende Wichtigkeit kennzeichnend, die dieser Handlung beigelegt wird; man sollte sie mit besondern Caerimonien umgeben!

seien? Obwohl Cantor selbst sie sich gefallen lässt, liegt es wegen der grossen Schwierigkeiten, die mit ihr verbunden sind, nahe, eine andere vorzuziehen. Ich vermuthe ungefähr Folgendes: Mit jeder Fundamentalreihe steht eine gewisse Zahl in Verbindung, die keine rationale zu sein braucht. Diese Zahlen sind also zum Theil neue, bisher noch nicht betrachtete, und sie sollen eben durch die Fundamentalreihen bestimmt werden, mit denen sie in Verbindung stehen. Das Zeichen »*b*« bezeichnet dann nicht die Fundamentalreihe, sondern die mit ihr verbundene Zahl. Diese ist dann also selbst kein Zeichen, sondern wohl das, was Cantor ein abstractes Gedankending nennt[1]).

Man erkennt nun wohl die Klippe, an der dieser Versuch scheitern muss. Wir wissen garnichts über die Art der Verbindung, in der die Zahl mit der Fundamentalreihe stehen soll. Durch eine ganz unbekannte Beziehung kann aber ein unbekanntes Etwas nicht bestimmt werden. Der Fehler ist, dass die Zuordnung zur Fundamentalreihe und die Definition der neuen Zahlen in eine Handlung zusammengezogen werden. Wir können zwar eine definirte Zahl einer Fundamentalreihe zuordnen, nicht aber eine erst zu definirende, die wir also noch garnicht haben[2]). Nehmen wir unser Gleichnis wieder auf! Versetzen wir uns wieder auf den Standpunkt, wo wir keine Metalle kennen, aber Linienspectren! Nun sagen wir: wir ordnen diesem Spectrum ein dadurch zu definirendes Metall Natrium zu. Aber woher erhalten wir das Metall? Jedenfalls nicht durch diese Zuordnung, die uns nichts verschaffen kann, was wir nicht schon haben. Wir kennen ja nur einige Spectren, wissen aber noch nichts von Spectralanalyse, haben noch gar keine Ahnung von der besonderen Beziehung, in der die Spectren zu den Metallen stehen, die uns selbst noch unbekannt sind. Der Name „Natrium" schwebt noch in der Luft. Und so schwebt denn auch das Zeichen »*b*« bei Cantor zunächst noch in der Luft; wir haben noch nichts, was wir damit bezeichnen könnten. Wenn es nun an der angeführten Stelle heisst

> „in dem ersten Falle sage ich, dass *b* gleich Null, im zweiten, dass *b* grösser als Null oder positiv, im dritten, dass *b* kleiner als Null oder negativ sei",

so wird das Zeichen »*b*« hier ohne Weiteres so gebraucht, als bezeichne es etwas, während noch garnicht feststeht, dass etwas gefunden werden könne, was der Absicht gemäss der Fundamentalreihe zuzuordnen wäre. Denn zunächst ist doch nur eine Absicht ausgesprochen worden; ob sie erreichbar sei, steht noch dahin.

---

1) Dann wäre der oben angeführte Ausdruck Cantors, nach dem das Zeichen »*b*« selbst ein abstractes Gedankending sein sollte, ungenau und wäre so zu verstehen, dass »*b*« ein solches Gedankending bezeichne. Solche Ungenauigkeiten scheinen sich grosser Beliebtheit zu erfreuen, sind uns dadurch aber nicht annehmbarer.

2) Ebenso könnte man sagen: „Sie hängen den zu ergreifenden Dieb."

§ 78. Wir betrachten nun die oben angeführten Sätze, in denen angegeben wird, wann die einer Zahlenreihe zugeordnete (oder zuzuordnende?) Zahl gleich Null, grösser als Null oder kleiner als Null sei. Wir fragen: wird hierdurch etwas definirt? oder wird etwas zugeordnet? oder was ist sonst der Zweck dieser Sätze? Cantor schreibt:

„Im ersten Falle sage ich, dass b gleich Null sei."

Wir fragen zunächst: ist „gleich" hier im Sinne von „zusammenfallend mit" zu verstehen? Das ist wahrscheinlich, weil sonst Zahlen anzunehmen wären, die zwar sämmtlich gleich Null, aber von einander verschieden wären. Dann wäre nicht bestimmt, welche dieser Zahlen der Fundamentalreihe im ersten Falle zuzuordnen wäre. Wenn aber „a ist gleich b" besagt „a fällt zusammen mit b", so giebt es nur eine Zahl, welche gleich Null ist, nämlich die Zahl Null selbst, und der Sinn ist dann: ich ordne der Fundamentalreihe, wenn der erste Fall vorliegt, die Zahl Null zu. Hier haben wir dann offenbar keine Definition, sondern eine Zuordnung einer schon bekannten Zahl. Hiergegen ist nichts zu sagen; wir gewinnen dadurch aber auch keine neue Zahl.

Nun sagt Cantor weiter, dass im zweiten Falle b grösser als Null oder positiv sei. Hierbei muss eigentlich sowohl die Grösserbeziehung, als auch die Null und ebenso, was positiv ist, als vollständig definirt und bekannt vorausgesetzt werden. Obwohl es unwahrscheinlich ist, dass Cantor solche Definitionen gehabt habe, welche ohne Weiteres auf die neuen Zahlen Anwendung finden können, so wollen wir dies doch zunächst einmal annehmen. Wäre nun b ebenfalls schon definirt, so wäre garnichts mehr festzusetzen; sondern es wäre einfach zu untersuchen, ob b grösser als Null wäre. Offenbar ist hier b also noch nicht definirt; wir kennen es noch nicht. Dann kann hierin nur ein Wink für die Zuordnung liegen: man ordne einer Fundamentalreihe, wenn der zweite Fall vorliegt, eine Zahl zu, die grösser als Null ist. Welche von allen positiven Zahlen man nehmen solle, bleibt freilich ganz unentschieden. Wenn Cantor sagt, im dritten Falle sei b kleiner als Null oder negativ, so wird dann auch dies nur ein Wink für die Zuordnung sein.

Wir haben also bisher eine schon bekannte Zahl gewissen Fundamentalreihen zugeordnet und Winke für weitere Zuordnungen gegeben; definirt worden aber ist noch nichts.

§ 79. Cantor fährt fort:

„Nun kommen die Elementaroperationen. Sind (a_ν) und (a'_ν) zwei *Fundamentalreihen*, durch welche die Zahlen b und b' determinirt seien, so zeigt sich, dass auch $(a_\nu \pm a'_\nu)$ und $(a_\nu . a'_\nu)$ Fundamentalreihen sind, die also drei neue Zahlen bestimmen, welche mir als Definitionen für die Summe und Differenz $b \pm b'$ und für das Product $b . b'$ dienen."

Dieser Satz ist sehr fehlerhaft. Bisher kann man nur von der Null allenfalls sagen, dass sie durch gewisse Fundamentalreihen determinirt sei. Wir müssen also für b ebenso wie für b' die Null nehmen. Dann aber ist es ein Lehrsatz, dass $(a_\nu + a'_\nu)$ die Null determinire, folglich keine Definition. Der Satz kann bewiesen werden, also muss Alles darin bekannt sein. Demnach ist für eine Definition hier keine Statt. Nun trifft es sich sehr glücklich, dass das, was bewiesen werden kann, mit dem übereinstimmt, was die scheinbare Definition sagt. Aber bei den von Cantor befolgten Grundsätzen des Definirens, oder vielmehr bei dem hier zu Tage tretenden Mangel aller gesunden Grundsätze des Definirens wäre es ebenso möglich, dass etwas durch die Definition bestimmt würde, dessen Falschheit bewiesen werden könnte.

Wenn hier vorausgesetzt wird, dass jede Fundamentalreihe eine Zahl bestimme, so ist die Absicht für die That genommen. Ausser dem Falle, wo die Null zugeordnet wird, ist bisher nur eine Absicht zuzuordnen kundgethan und sind einige Winke für die Ausführung gegeben worden, weiter nichts.

Ferner werden die Wörter „Summe“, „Differenz“, „Product“ durch sich selbst erklärt; sie sind also bisher nur unvollständig erklärt gewesen, ein Verstoss gegen unsern ersten Grundsatz.

In Wirklichkeit ist also hiermit garnichts geleistet, sondern fälschlicherweise etwas als Definition hingestellt worden, was als Lehrsatz hätte bewiesen werden müssen.

§ 80. Mit Uebergehung des vom Quotienten Gesagten fahre ich in der Betrachtung der Cantorschen Darlegung fort. Es heisst da:

„Die Elementaroperationen zwischen einer durch eine Fundamentalreihe (a_ν) gegebenen Zahl b und einer direct gegebenen rationalen Zahl a sind in den soeben festgesetzten eingeschlossen, indem man $a'_\nu = a$, $b' = a$ sein lässt.“

Hierin ist ein Widerspruch, Der Ausdruck „eine durch eine Fundamentalreihe (a_ν) gegebene Zahl b“ setzt in diesem Zusammenhange voraus, dass durch jede Fundamentalreihe eine Zahl gegeben werde. Wenn das der Fall wäre, so wäre auch eine Zahl durch die Fundamentalreihe gegeben, deren Glieder sämmtlich a sind, und es wäre nun keine Statt mehr für die Festsetzung, dass diese Zahl a sei; sondern es müsste eben untersucht werden, welche Zahl durch jene Fundamentalreihe gegeben wäre, eine Untersuchung, die freilich zu keinem Ziele führen kann, weil in der That nur die Absicht kundgegeben ist, unter Beachtung gewisser Regeln jeder Fundamentalreihe eine Zahl zuzuordnen. Durch die letzte Festsetzung ist dieser Plan freilich etwas weiter ausgeführt worden, aber ohne dass dadurch neue Zahlen zu Tage gefördert wären. Wir haben uns also im Grunde unserm Ziele noch garnicht genähert.

§ 81. Wir machen noch einen Schritt weiter. Cantor schreibt: „Jetzt erst kommen die Definitionen des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins zweier Zahlen b und b' (von denen b' auch $= a$ sein kann), und zwar sagt man, dass $b = b'$ oder $b > b'$ oder $b < b'$ ist, jenachdem $b - b'$ gleich Null oder grösser oder kleiner als Null ist.“

Was das Gleichheitszeichen betrifft, so haben wir oben angenommen, dass es völliges Zusammenfallen bedeuten solle. Nehmen wir das auch hier, allerdings nicht ganz im Einklange mit dem Wortlaute an, so haben wir hier keine Definition der Gleichheit; sondern diese ist bekannt. Der Zweck kann dann nur sein, die Zahlen noch etwas näher zu bestimmen, die den Fundamentalreihen zugeordnet werden sollen. Es wird dann nämlich die Absicht bekundet, denjenigen Reihen dieselbe Zahl zuzuordnen, für welche $\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} (a_\nu - a'_\nu) = 0$ ist. Falls nun der einen der beiden Reihen schon eine Zahl zugeordnet ist, so wird die der andern zuzuordnende Zahl hierdurch bestimmt. Da aber bisher nur rationale Zahlen zugeordnet sind, so kommen wir auch hierdurch nicht weiter.

Aber unsere Vermuthung, das Gleichheitszeichen werde von Cantor als Identitätszeichen gebraucht, scheint hier doch hinfällig zu werden. Es wird ausdrücklich gesagt „Definition des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins“, woraus zu entnehmen sein dürfte, dass die Bedeutungen der Zeichen »$=$« »$>$« »$<$« hier nicht als vollständig bekannt vorausgesetzt werden. Als zum Theil bekannt sind sie doch freilich anzunehmen, sodass ein Verstoss gegen unsern ersten Grundsatz des Definirens vorliegen dürfte. Dieser Fehler bewirkt hier eine eigenthümliche Täuschung. Unser geistiges Gesichtsfeld befindet sich in einem ähnlichen Zustande wie unser leibliches beim Wettstreite der Farben: in einem Augenblicke erscheinen die Wörter „gleich“, „grösser“, „kleiner“, „Summe“, „Product“ als bekannt, gleich darauf als unbekannt und dann wieder als bekannt. Wenn z. B. die Worte „grösser als“ durch sich selbst erklärt werden, erscheinen sie in demselben Satze theils als bekannt — da, wo sie zur Erklärung dienen — theils als unbekannt — da, wo sie erklärt werden.

§ 82. Diese Definitionen der Summe, der Differenz, des Products, des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins scheinen nun die neuen Zahlen selbst erst eigentlich zu schaffen, scheinen den Zeichen »b« erst einen Inhalt zu geben. Man schliesst unwillkürlich aus der als bekannt vorschwebenden Bedeutung des Wortes „grösser“, dass das Grössere eine Grösse sei, möge sie nun abstract oder concret sein. Da die Worte „Summe“, „Differenz“, „gleich“, „grösser“ u. s. w. schon erklärt oder doch als erklärt vorauszusetzen sind, erhält man den Eindruck, man wisse bereits, was eine Summe, eine Differenz, was gleich und was grösser sei, und durch dieses schon Bekannte verleihe man nun in einer gewissen, freilich unklaren Weise den Zeichen »b« »b'« u. s. w. einen Inhalt, indem man diese in Sätzen, wie »$b > b'$« »$b + b' < b''$« gebrauche. Was sich zunächst als Erklärung der Zeichen »$+$« »$>$« u. s. w. darstellt, macht im nächsten Augenblicke den Anspruch, dasjenige näher zu bestimmen, was den Fundamentalreihen nach

Cantor zugeordnet werden soll. Diese Täuschung ist aber nur dadurch möglich, dass jene Zeichen nun doch wieder als bekannt angesehen werden. So schillern jene Definitionen in zwei Farben, indem sie bald die Summe, das Product, das Grössersein u. s. w. definiren, bald die neuen Zahlen bestimmen sollen. Aber das ist unvereinbar.

Ein Gleichnis mag die Verständigung erleichtern. Wenn man definirt „ein Urtheil ist hart, wenn darin die Eigenschaft *hart* einem Dinge zuerkannt wird," so macht man den Fehler, das Wort „hart“ durch sich selbst zu erklären, es in einem Athem seiner Bedeutung nach als bekannt und als unbekannt anzusehen. Nun könnte man aus der als bekannt vorschwebenden Bedeutung von „hart“ entnehmen, dass alles Harte ein physischer Körper wäre, und nun weiter schliessen: also sind die Urtheile, in denen die Eigenschaft *hart* einem Dinge zuerkannt wird, physische Körper. Hier liegt die Sache ganz ähnlich; auch hier sind Wörter „grösser“ „Summe“ u. s. w. durch sich selbst erklärt, auch hier schliesst man aus den als bekannt vorschwebenden Bedeutungen dieser Wörter, dass die neuen Gegenstände Zahlen seien wie die rationalen Zahlen und denselben Zwecken dienen können wie diese. Der Unterschied ist nur der, dass wir diese neuen Zahlen noch garnicht haben, dass sie hierdurch eigentlich erst geschaffen werden sollen, während wir jene Urtheile immerhin schon haben.

Man kann nicht mit einer Definition zweierlei definiren: das Grössersein und die irrationalen Zahlen — Verstoss gegen unsern zweiten Grundsatz.

§ 83. Das stückweise Definiren erzeugt hier das Zwielicht, das zum Gelingen der Täuschung nöthig ist. Diese verschwindet sofort, wenn man an Stelle der Wörter und Zeichen da, wo sie als unbekannt behandelt werden, ganz neu geschaffene Wörter und Zeichen setzt, mit denen nicht schon ein Sinn oder der Schein eines Sinnes verbunden ist. Ersetzen wir so

„positiv“	durch	„albig“,
„negativ“	„	„bebig“,
„gleich“	„	„azig“,
„grösser als“	„	„bezig“,
„kleiner als“	„	„zezig“,
„Null“	„	„Poll“,
„Summe“	„	„Arung“,
„Differenz“	„	„Berung“,
„Product“	„	„Asal“,
die Zeichen »$>$«	„	»$\rotatebox{90}{2}$«,
»$<$«	„	»$\rotatebox{-90}{2}$«,
»$=$«	„	»$\rotatebox{-90}{3}$«,
»$+$«	„	»$\rotatebox{90}{B}$«,
»$-$«	„	»$\rotatebox{-90}{B}$«,
». «	„	»$\rotatebox{90}{C}$«,

so gehen die Cantorschen Erklärungen über in:

„Eine Fundamentalreihe bietet drei Fälle dar; entweder es sind ihre Glieder a_ν für hinreichend grosse Werthe von ν kleiner ihrem absoluten Betrage nach als eine beliebig vorgegebene Zahl; oder es sind dieselben von einem gewissen ν an grösser als eine bestimmt angebbare rationale Zahl ϱ; oder sie sind von einem bestimmten ν an kleiner als eine bestimmt angebbare negative rationale Grösse $-\varrho$. In dem ersten Falle sage ich, dass b azig Poll, im zweiten, dass b bezig Poll oder albig, im dritten, dass b zezig Poll oder bebig sei“ [1]).

„Sind (a_ν) und (a'_ν) zwei Fundamentalreihen, durch welche die Zahlen b und b' determinirt seien, so zeigt sich, dass auch $(a_\nu + a'_\nu)$, $(a_\nu - a'_\nu)$, $(a_\nu \, . \, a'_\nu)$ Fundamentalreihen sind, die also drei neue Zahlen bestimmen, welche mir als Definitionen für die Arung $b \Cap b'$, für die Berung $b \Cup b'$ und für das Asal $b \cup b'$ dienen.“

„Jetzt erst kommen die Definitionen des Azig-, Bezig- und Zezigseins zweier Zahlen b und b', und zwar sagt man, dass $b \smallfrown b'$ oder $b \approx b'$ oder $b \backsim b'$ ist, jenachdem $b \Cup b'$ azig Poll oder bezig Poll oder zezig Poll ist“ [2]).

Durch diese Definitionen können die Bedeutungen der neuen Wörter und Zeichen mindestens mit demselben Rechte festgesetzt werden, wie durch die Cantorschen die früheren unvollständigen ergänzt werden können Aber, wie man sieht, langt der diesen neuen Wörtern und Zeichen so verliehene Sinn nicht für den hier verfolgten Zweck. So verschwindet jeder Schein, alsob durch diese Definitionen die neuen Zahlen irgendwie näher bestimmt würden. Bei den Cantorschen Definitionen kann dieser Schein also nur dadurch erzeugt werden, dass gegen unsern ersten Grundsatz gefehlt ist, wodurch jene Wörter „gleich“, „grösser“ u. s. w. in ein beständiges Schwanken zwischen Bekanntsein und Unbekanntsein versetzt werden. Jene früheren Erklärungen lassen scheinbar etwas einfliessen in die neuen Zahlen, obwohl sie für diesen erweiterten Gebrauch nicht bestimmt sein können. Sobald man das Schwanken aufhebt, verschwindet die Täuschung. Wenn Illigens dies mit den Worten „Die aufgestellten Zahlreihezeichen vermögen trotz aller Benennungen, die ihnen durch verschiedene Definitionen zugelegt werden, keine Quantitätsbegriffe zu werden“ gemeint hat, so stimmen wir ihm bei, müssen aber die Ausdruckweise als ungenau beanstanden.

§ 84. Werfen wir noch einen zusammenfassenden Blick auf die Ergebnisse unserer Prüfung der Cantorschen Theorie! Wir unterscheiden zwei Auffassungsweisen: nach der ersten sind die Zahlen, die Cantor seinen

1) Die Ausdrücke „azig Poll“, „bezig Poll“ und „zezig Poll“ müssen als untrennbare Ganze betrachtet werden, gemäss unserm zweiten Grundsatze.

2) Wie man sieht, hätten wir für „gleich“, „grösser“ und „kleiner“ eigentlich noch eine dritte Garnitur von Ausdrücken schaffen müssen.

Fundamentalreihen zuordnen will, Zeichen, nach der zweiten sind sie abstracte Gedankendinge.

Im ersten Falle werden wir die Reihen als die Bedeutungen der sogenannten Zahlen anzusehen haben. Die Zuordnung dieser Zahlen ist unwesentlich; wir haben im Grunde nur die Fundamentalreihen, während die Hauptsache fehlt, nämlich die eigentlichen Zahlen, die Grössenverhältnisse. Diesem Mangel sucht Cantor dadurch abzuhelfen, dass er zeigt, wie seine Zahlen zur quantitativen Bestimmung von Entfernnngen dienen können. Aber erstens sind seine Zahlen dabei ganz überflüssig, und zweitens wird damit das Entscheidende in die Geometrie verlegt, womit die Theorie aufhört eine rein arithmetische zu sein.

Im zweiten Falle bleibt es bei der Absicht, den Fundamentalreihen neue Zahlen zuzuordnen. Es gelingt nicht, diese abstracten Ideen zu fassen, und bevor wir sie haben, können wir sie auch nicht zuordnen. Cantor meint zuweilen, dass seine Fundamentalreihen Zahlen bestimmen, widerspricht dem aber selbst. Alles, was erreicht wird, ist dies, dass einigen Fundamentalreihen rationale Zahlen zugeordnet werden; aber es gelingt nicht einmal, der Fundamentalreihe

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \dots\ \tfrac{\nu}{\nu+1},\ \dots$$

mit Sicherheit die Zahl Eins zuzuordnen; sondern man erkennt nur die Absicht, ihr eine der Eins gleiche Zahl zuzuordnen, und „gleich" ist hier wohl nicht im Sinne von „zusammenfallend mit" gebraucht. Welche von allen der Eins gleichen Zahlen der Reihe zugeordnet werden solle, bleibt zweifelhaft. Dadurch, dass *Summe, Differenz, Product, gleich, grösser, kleiner* stückweise, also gegen unsern ersten Grundsatz definirt werden, entsteht der falsche Schein, alsob so den Zahlzeichen eine Bedeutung gegeben werde. Cantors Theorie erreicht also in keiner Weise ihr Ziel.

§ 85. Ich schliesse hieran die Betrachtung der etwas abweichenden Darstellung, die Cantor früher[1]) gegeben hat. Er geht auch hier von den Reihen aus, die er später Fundamentalreihen genannt hat, und sagt:

„Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: »Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze *b*«."

Diese Definition ist fehlerhaft, weil der Buchstabe »*b*« darin vorkommt, der bei andern Reihen derselben Beschaffenheit durch andere Zeichen, z. B. »*b'*«, ersetzt wird. Dadurch kommt eine Verschiedenheit in die erklärten Ausdrücke, der nichts in dem erklärenden entspricht; vielmehr handelt es sich immer um dieselbe Beschaffenheit. Wenn Cantor gesagt hätte: „Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: »die Reihe (1) ist eine Fundamentalreihe«", so wäre dieser Einwand hinfällig; aber es wäre auch Alles abgeschnitten, was grade an dies *b* geknüpft

1) Math. Annalen V, S. 123.

wird. Die nun folgenden Bestimmungen über Gleichheit, Grössersein, Summe, Product solcher b fielen hinweg und damit Alles, worauf es ankommt. Das ist wohl der Grund, weshalb Cantor später eine andere Darstellung vorgezogen hat.

c) Die Theorien des Irrationalen von E. Heine und J. Thomae.

§ 86. Die Theorien von E. Heine[1]) und J. Thomae[2]) scheinen auf den ersten Blick mit der Cantorschen fast zusammenzufallen. Wir haben hier Zahlenreihen, Zahlenfolgen ähnlich den Fundamentalreihen Cantors. Auch hier werden diesen Reihen Zeichen zugeordnet und dieser That eine besondere Wichtigkeit beigelegt. Ueberhaupt ist die Weise des Vorgehens, äusserlich betrachtet, der Cantorschen sehr ähnlich. Doch dürfte in Wirklichkeit die Aehnlichkeit weit geringer sein, als man zunächst annehmen möchte, sodass eine besondere eingehende Prüfung dieser Theorien geboten scheint. Von einander werden sie nicht wesentlich verschieden sein. Heines Grundgedanke ist von Thomae wohl nur schärfer herausgearbeitet. Und dieser Grundgedanke dürfte von Cantors Auffassung erheblich abweichen. Mir scheint nämlich dieser Schriftsteller die Zahlzeichen nicht als leer anzusehen, obwohl seine Schreibweise Zweifel vielleicht nicht ausschliesst, und er selbst sich die Sache wohl nicht klar zum Bewusstsein gebracht hat. Das Wesentliche ist ihm doch wohl etwas, was durch die Zeichen bezeichnet wird, dessen er sich freilich durch die Zeichen bemächtigen will, aber nicht die Zeichen selbst.

Das Eigenthümliche der Heineschen Theorie ist nun grade, dass für sie die Zeichen Alles sind, und das ist von Thomae noch deutlicher ausgesprochen worden. Beide Schriftsteller stimmen auch darin überein, dass sie diesen Grundgedanken nicht bis zu Ende durchführen, sondern zuletzt ihre Zeichen doch etwas bezeichnen lassen, nämlich jene Zahlenreihen oder Zahlenfolgen, die den Cantorschen Fundamentalreihen entsprechen. Während man aber wohl annehmen darf, dass diese Fundamentalreihen aus *abstracten Gedankendingen* bestehen, um mit Cantor zu reden, wird man jene Zahlenreihen und Zahlenfolgen aus Zeichen, aus geschriebenen oder gedruckten, sichtbaren, stofflichen Figuren zusammengesetzt denken müssen. Diese Reihen werden also wahrscheinlich Gruppen solcher Figuren sein, die durch ihre räumliche Anordnung sich als Reihen dem Auge darstellen. Wir haben hier dann die eigenthümliche Sachlage, dass gewisse Zeichen Reihen oder Folgen bezeichnen, deren Glieder wieder solche Reihen bezeichnen u. s. w. ins Unendliche.

§ 87. Ich lasse nun die hierauf bezüglichen Aeusserungen von Heine

1) Crelles J., Bd. 74, S. 172.
2) Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen, 2. Aufl. Halle a. S. 1898, §§ 1 bis 11.

und Thomae folgen und frage nach dem Beweggrunde zur Aufstellung dieser Theorien.

Heine schreibt:

„Die Frage, was eine Zahl sei, beantworte ich, wenn ich nicht bei den rationalen positiven Zahlen stehen bleiben will, nicht dadurch, dass ich die Zahl begrifflich definire, die irrationalen etwa gar als Grenze einführe, deren *Existenz* eine Voraussetzung wäre. Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt, *indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne*, sodass die Existenz dieser Zahlen nicht in Frage steht."

Heine betont hier zweimal die Existenz, und mit Recht; denn wir haben gesehen, wie ungenügend gerade die Frage nach der Existenz von Cantor beantwortet ist. Deshalb also nennt Heine gewisse Zeichen Zahlen, um damit die Existenz dieser Zahlen sicher zu stellen, allerdings auf empirischem, nicht rein logischem oder arithmetischem Wege. Nun ist der eigentliche Zweck, dem alle diese Theorien des Irrationalen dienen sollen, doch wohl der, die Arithmetik rein von allen fremden, auch geometrischen Beimischungen hinzustellen, sie auf Logik allein zu gründen. Dieses Ziel ist gewiss zu billigen; aber hier wird es verfehlt. Wenn man es nicht verschmäht, sich auf die Greifbarkeit der Zeichen zu stützen, so kann man sich auch auf die Raumanschauung berufen und die irrationalen Zahlen als Verhältnisse von Längen bestimmen.

Wir sehen, dass die Zahlzeichen hier eine ganz andere Wichtigkeit haben, als man ihnen vor dem Aufkommen der formalen Theorien zuerkannt hat. Sie sind nicht mehr äussere Hülfsmittel wie Tafel und Kreide; sondern sie bilden einen wesentlichen Bestandtheil der Theorie selbst.

Hier drängt sich uns die Frage auf: haben denn diese Zeichen dadurch, dass man sie Zahlen nennt, die Eigenschaften der eigentlichen Zahlen, die wir vorläufig als Grössenverhältnisse gefasst haben?

§ 88. Thomae schreibt:

„Die formale Auffassung der Zahlen zieht sich bescheidenere Grenzen als die logische. Sie fragt nicht, was sind und was wollen die Zahlen, sondern sie fragt, was braucht man von den Zahlen in der Arithmetik. Die Arithmetik ist nun für die formale Auffassung ein Spiel mit Zeichen, die man wohl leere nennt, womit man sagen will, dass ihnen (im Rechenspiel) kein anderer Inhalt zukommt, als der, der ihnen in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber gewissen Verknüpfungsregeln (Spielregeln) beigelegt wird. Aehnlich bedient sich der Schachspieler seiner Figuren, er legt ihnen gewisse Eigenschaften bei, die ihr Verhalten im Spiel bedingen, und die Figuren sind nur das äussere Zeichen für dies Verhalten. Zwischen dem Schachspiel und der Arithmetik findet freilich ein bedeutsamer Unterschied statt. Die Schachspielregeln sind willkürliche, das System der Regeln der Arithmetik ist ein solches, dass die Zahlen mittels einfacher

Axiome auf anschauliche Mannichfaltigkeiten bezogen werden können und uns in Folge dessen wesentliche Dienste in der Erkenntnis der Natur leisten."

Mit andern Worten:

Für die Arithmetik kommen nur die Regeln in Betracht, nach denen die arithmetischen Zeichen zu behandeln sind, nicht aber, was diese bedeuten. Als Unterschied von dem Heineschen Standpunkte könnte man bemerken, dass Thomae die Frage nach dem Wesen der Zahlen als für die Arithmetik unerheblich ablehnt, während Heine sie dahin beantwortet, dass die Zahlen Zeichen seien. Da aber Beide darin übereinkommen, dass die Arithmetik sich mit Zeichen zu beschäftigen habe, so ist dieser Unterschied unwesentlich. Heine nennt diese Zeichen Zahlen; Thomae dagegen scheint unter „Zahl" etwas zu verstehen, dessen Wesen für die Arithmetik nicht in Betracht komme, das also wohl kein Zeichen ist, sondern etwa die Bedeutung eines Zeichens. Da er aber auch von der Bedeutung der Zahlen spricht, so stempelt er sie doch wieder zu Zeichen, sodass eine folgerechte Redeweise hier wohl vermisst wird. Diese Bedeutungen der Zahlzeichen, die von Thomae zwar angenommen, aber als ausserhalb des Rahmens der Arithmetik liegend angesehen werden, haben wir immer Zahlen genannt. Wir sehen also, dass diese eigentlichen Zahlen oder Grössenverhältnisse nach diesem Mathematiker von der Arithmetik auszuschliessen sind. So haben wir denn hier eine eigenthümliche Arithmetik, gänzlich verschieden von derjenigen, die als ihre Gegenstände die eigentlichen Zahlen betrachtet, und die wir zum Unterschiede von der formalen inhaltliche Arithmetik nennen wollen. Wir werden demnach wohl annehmen dürfen, dass Cantor auf dem Boden der inhaltlichen, Heine und Thomae dagegen auf dem der formalen Arithmetik stehen. Der Unterschied ist tief einschneidend. Freilich wird ein künftiger Geschichtsschreiber vielleicht feststellen können, dass es auf beiden Seiten an der folgerechten Durchführung fehlt, wodurch der Gegensatz doch wieder etwas von seiner Schärfe verliert.

§ 89. Was mag nun der Grund sein, das Formale dem Inhaltlichen vorzuziehen? Thomae antwortet:

„Der formale Standpunkt hebt uns über alle metaphysischen Schwierigkeiten hinweg, das ist der Gewinn, den er uns bietet."

Die Schwierigkeiten, von denen hier die Rede ist, mögen wohl die sein, die wir bei der Betrachtung von Cantors Theorie kennen gelernt haben, nämlich die eigentlichen Zahlen zu fassen und ihr Vorhandensein nachzuweisen. In der formalen Arithmetik brauchen wir die Spielregeln nicht zu begründen; wir stellen sie eben einfach auf. Wir brauchen nicht nachzuweisen, dass es Zahlen von gewissen Eigenschaften gebe; wir führen eben Figuren ein, für deren Behandlung wir Regeln geben. Diese Regeln betrachten wir dann als Eigenschaften der Figuren und können so Dinge von gewünschten Eigenschaften — scheinbar wenigstens — willkürlich schaffen. Dass wir damit zunächst wenigstens geistige Arbeit sparen, liegt auf der Hand. Thomae bringt zwar die willkürlichen Regeln des Schachspiels in Gegensatz zu den Regeln der Arithmetik, welche bewirken, dass die Zahlen in der Erkenntnis der Natur wesentliche Dienste leisten können; aber dieser Gegensatz tritt erst hervor, wenn es sich um Anwendungen handelt, wenn wir den Boden der formalen Arithmetik verlassen. Blicken wir über deren Grenzen nicht hinaus, so erscheinen uns ihre Regeln so willkürlich wie die des Schachspiels. Allerdings kann jene Anwendbarkeit kein Zufall sein; aber wir entbinden uns in der formalen Arithmetik davon, Rechenschaft zu geben, warum wir die Regeln grade so und nicht anders aufstellen.

§ 90. Suchen wir uns das Wesen der formalen Arithmetik noch klarer zu machen! Die Frage liegt ja nahe: wie unterscheidet sie sich von einem blossen Spiele? Thomae weist als Antwort auf die Dienste hin, die sie für die Naturerklärung leisten könne. Dies kann nur darauf beruhen, dass die Zahlzeichen etwas bedeuten, die Schachfiguren dagegen nichts. Wenn man der Arithmetik eine höhere Würde als dem Schachspiele zuschreibt, so kann das nur darin begründet sein. Aber das, was diesen Unterschied macht, liegt nach Thomae ausserhalb der Arithmetik, sodass diese an und für sich von demselben Range ist wie das Schachspiel und eher eine Kunst oder ein Spiel als eine Wissenschaft zu nennen ist. Obwohl die Zahlzeichen etwas bezeichnen, so kann man doch nach Thomae davon absehen und sie lediglich als Figuren betrachten, die man nach gewissen Regeln handhabt. Wenn man auf die Bedeutungen zurückgehen wollte, so fänden die Regeln in eben diesen Bedeutungen ihre Begründung; aber das geschieht hier, so zu sagen, hinter den Kulissen; auf der Bühne der formalen Arithmetik ist nichts davon zu bemerken.

Nun ist es ja ganz richtig, dass wir unsere Regeln des Schliessens und die andern Gesetze der Begriffsschrift auch hätten einführen können als willkürliche Festsetzungen, ohne irgend von der Bedeutung und dem Sinne der Zeichen zu sprechen. Die Zeichen würden dann eben als Figuren behandelt. Was uns als äussere Darstellung eines Schlusses galt, wäre dann einem Zuge des Schachspiels vergleichbar, nur der Uebergang von einer Figurenstellung zu einer andern, ohne dass dem ein Uebergang von einem Gedanken zu einem andern entspräche. Man könnte jemandem unsere Formeln I bis VI und die Definitionen $\mathfrak{A}$ bis H des ersten Bandes als Ausgangspunkte geben — vergleichbar der Grundstellung der Schachfiguren —, ihm die Regeln sagen, nach denen er Umformungen vornehmen dürfte, und nun die Aufgabe stellen, unsern Satz (71) des ersten Bandes von jenen Ausgangspunkten aus zu erreichen; alles dies, ohne dass er eine

Ahnung von Sinn und Bedeutung dieser Zeichen hätte, noch von den Gedanken, deren Ausdruck die Formeln sind. Es wäre sogar denkbar, dass diese Aufgabe ebenso gelöst würde, wie wir es gethan haben. Dass dabei geistige Arbeit geleistet werden müsste, versteht sich von selbst, ebenso wie bei einer ähnlichen Aufgabe des Schachspiels, von einer Grundstellung aus zu einer gegebenen Endstellung gemäss den Regeln des Spiels zu gelangen, wobei von Gedanken, die durch die verschiedenen Stellungen ausgedrückt würden, keine Rede wäre, und kein Zug als Schluss gedeutet werden könnte. Obwohl also geistige Arbeit geleistet würde, fehlte doch ganz der Gedankengang, der bei uns die Sache begleitet und ihr eigentlich erst Interesse verliehen hat. Möglich mag es sein, aber kaum vortheilhaft; dürfte die Aufgabe doch durch Abwehr der Gedankenbegleitung nicht leichter, sondern bedeutend schwerer geworden sein.

§ 91. Während in der inhaltlichen Arithmetik die Gleichungen und Ungleichungen Sätze sind, die Gedanken ausdrücken, sind sie in der formalen zu vergleichen den Stellungen von Schachfiguren, die nach gewissen Regeln verändert werden ohne Rücksicht auf einen Sinn. Denn, wäre ein Sinn zu beachten, so könnten die Regeln nicht willkürlich aufgestellt werden; sondern sie müssten so eingerichtet werden, dass aus Formeln, welche wahre Gedanken ausdrückten, immer nur solche Formeln abgeleitet werden könnten, welche ebenfalls wahre Gedanken ausdrückten. Damit wäre der Standpunkt der formalen Arithmetik verlassen. Auf diesem werden hingegen die Regeln für die Handhabung der Zeichen ganz willkürlich aufgestellt. Erst nachträglich kann man fragen, ob den Zeichen ein mit den vorher aufgestellten Regeln verträglicher Sinn gegeben werden könne; aber das liegt schon ausserhalb der formalen Arithmetik und wird erst in Frage kommen, wenn Anwendungen gemacht werden sollen. Dann aber wird es auch in Betracht kommen müssen; denn ohne einen Gedankeninhalt wird auch keine Anwendung möglich sein. Warum kann man von einer Stellung von Schachfiguren keine Anwendung machen? Offenbar, weil sie keinen Gedanken ausdrückt. Wenn sie das thäte, und wenn einem den Regeln gemässen Schachzuge der Uebergang von einem Gedanken zu einem andern aus jenem folgenden entspräche, dann wären auch Anwendungen des Schachspiels denkbar. Warum kann man von arithmetischen Gleichungen Anwendungen machen? Nur weil sie Gedanken ausdrücken. Wie könnten wir eine Gleichung anwenden, die nichts ausdrückte, nichts wäre als eine Figurengruppe, die nach gewissen Regeln in eine andere Figurengruppe umgewandelt werden könnte! Nun ist es die Anwendbarkeit allein, was die Arithmetik über das Spiel empor zum Range einer Wissenschaft erhebt. Die Anwendbarkeit gehört also nothwendig dazu. Ist es da nun wohlgethan, das von ihr auszuschliessen, was die Arithmetik erst zu einer Wissenschaft macht?

§ 92. Was wird denn eigentlich dadurch gewonnen? Freilich: die Arithmetik wird von einer Arbeit entlastet; aber wird die Aufgabe dadurch aus der Welt geschafft? Der Formal-Arithmetiker sucht sie auf die Schultern seiner Collegen des Geometers, des Physikers und des Astronomen abzuwälzen; aber diese lehnen es dankend ab, sich mit ihr zu befassen; und so fällt sie denn zwischen diese Wissenschaften ins Leere. Eine reinliche Scheidung der Wissensgebiete mag gut sein; aber sie darf nicht so geschehen, dass ein Gebiet übrig bleibt, für das niemand die Verantwortung übernehmen will. Wir wissen, dass dasselbe Grössenverhältnis (dieselbe Zahl) stattfinden kann bei Längen, Zeiträumen, Massen, Trägheitsmomenten u. s. w., und dadurch wird es wahrscheinlich, dass die Aufgabe der Nutzbarmachung der Arithmetik zum Theil wenigstens unabhängig von jenen Wissenschaften zu lösen ist, in denen die Anwendung geschehen soll. Darum ist es billig, vom Arithmetiker diese Arbeit soweit zu fordern, als er sie leisten kann, ohne in jene besondern Wissensgebiete überzugreifen. Dazu gehört vor allen Dingen, dass er mit seinen Formeln einen Sinn verbindet; und dieser wird dann so allgemein sein, dass er mit Hülfe der geometrischen Axiome, der physikalischen und astronomischen Beobachtungen und Hypothesen mannichfache Anwendungen in diesen Wissenschaften finden kann.

Das kann man, scheint mir, von der Arithmetik verlangen. Sonst könnte es sich ja ereignen, dass diese Wissenschaft ihre Formeln lediglich als Figurengruppen ohne Sinn behandelte; dass dann aber ein Physiker, der von ihnen eine Anwendung machen wollte, ohne Weiteres ganz ohne Berechtigung einen als wahr bewiesenen Gedanken voraussetzte. Es wäre dann höchstens der Schein einer Erkenntnis erzeugt. Die Kluft zwischen den arithmetischen Formeln und ihren Anwendungen wäre nicht überbrückt. Dazu ist es nöthig, dass die Formeln einen Sinn ausdrücken, und dass die Regeln in den Bedeutungen der Zeichen ihre Begründung finden. Als Ziel muss die Erkenntnis dastehen, und dadurch muss alles bestimmt werden, was geschieht.

§ 93. Dem entzieht sich die formale Arithmetik. Wenn sie ein Spiel mit Figuren ist, so giebt es in ihr ebensowenig Lehrsätze und Beweise wie im Schachspiele. Zwar kann es Lehrsätze in einer Theorie des Schachspiels geben, aber nicht im Schachspiele selbst. Die formale Arithmetik kennt nur Regeln. Aber es ist auch eine Theorie der formalen Arithmetik denkbar; und in ihr wird es Lehrsätze geben, die z. B. besagen, dass man von einer gewissen Figurengruppe aus gemäss den Spielregeln zu einer andern Figurengruppe gelangen könne.

Sind in der formalen Arithmetik Definitionen möglich? Jedenfalls nicht solche, welche für arithmetische Zeichen Bedeutungen festsetzen; denn diese sollen hier ganz ausser Betracht bleiben. Statt der Definitionen wird es hier Einführungen neuer Figuren geben mit Hinzufügung der Regeln für ihre Handhabung. Wenn also bei Thomae der Ausdruck „formale Definition" vorkommt, so soll wohl nur dies darunter verstanden werden. In einer Theorie der formalen Arithmetik sind auch eigentliche Definitionen möglich; aber in diesen werden nicht Figuren Bedeutungen beigelegt, die ja ausser Betracht bleiben sollen; sondern es werden in ihnen etwa Ausdrücke erklärt, mit denen man die Lehrsätze dieser Theorie kürzer fassen kann.

Der Unterschied zwischen dem Spiele selbst und seiner Theorie wird von Thomae nicht gemacht, trägt aber wesentlich zur Einsicht in die Sache bei. Wenn wir in der Thomaeschen Darstellung Lehrsätzen begegnen, so ist zu vermuthen, dass sie der Theorie des Spieles angehören. Diese Sätze werden nur scheinbar von den Figuren etwas sagen, da deren Eigenschaften fast völlig gleichgültig sind und nur soweit in Betracht kommen, als sie zur Unterscheidung dienen. Vielmehr sind es die Regeln des Spiels, deren Eigenschaften durch diese Sätze ins Licht gestellt werden. So werden in der Theorie des Schachspiels nicht eigentlich die Schachfiguren untersucht; sondern auf die Regeln kommt es an und auf das, was aus ihnen folgt.

Diese formale Arithmetik unterscheidet sich freilich vom Schachspiele dadurch, dass sie immer neue Figuren einführen kann mit neuen Regeln, während im Schachspiele Alles unveränderlich feststeht. Dadurch wird die Möglichkeit einer Theorie des Rechenspiels wieder zweifelhaft. Man kann nämlich argwöhnen, dass es hier gar keine endgültige Sätze gebe. Durch die Einführung neuer Figuren kann ja sowohl manches früher Unmögliche möglich werden, als auch umgekehrt manches früher Mögliche unmöglich. Beim Schachspiele wenigstens würde die Anwesenheit neuer Figuren manche Züge hindern können. Dass dergleichen in der Arithmetik nicht vorkomme, muss erst bewiesen werden, ehe man die Möglichkeit einer Theorie dieses Rechenspieles als sicher annehmen darf.

§ 94. Die Frage „was braucht man von den Zahlen in der Arithmetik?" ist nach Thomae wohl so zu beantworten: man braucht von den Zahlen in der Arithmetik nur ihre Zeichen, die aber nicht als solche behandelt werden, sondern als Figuren; und man braucht die Regeln, nach denen man diese Figuren handhabt. Diese Regeln entnehmen wir hier nicht den Bedeutungen der Zeichen, sondern stellen sie aus eigener Machtvollkommenheit auf, indem wir uns dabei grundsätzlich volle Freiheit wahren und keine Nothwendigkeit anerkennen, diese Regeln zu rechtfertigen, während wir allerdings bei der Ausübung dieser Freiheit nach den möglichen Anwendungen hinschielen, weil ohne diese die Arithmetik ein Spiel wäre und nichts weiter.

Hiernach kann man jene Thomaesche Frage wohl auch so beantworten: man braucht von den Zahlen im Rechenspiele garnichts; denn die Zahlzeichen sind hier ja von ihren Bedeutungen, den Zahlen selbst, ganz losgelöst und könnten durch beliebige andere Figuren ersetzt werden.

§ 95. Vielleicht können einige Worte Thomaes der hier versuchten Darlegung seiner Auffassung zu widersprechen scheinen, wonach die Zahlzeichen in der formalen Arithmetik so behandelt werden, alsob sie nichts bezeichneten. Wenn Thomae z. B. sagt „Die Arithmetik ist für die formale Auffassung ein Spiel mit Zeichen, die man wohl leere nennt, womit man sagen will, dass ihnen (im Rechenspiel) kein anderer Inhalt zukommt, als der, der ihnen in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber gewissen Verknüpfungsregeln (Spielregeln) beigelegt wird“, so scheint es, alsob die Zeichen doch nicht als ganz leere behandelt werden sollen, sondern alsob ihnen ein gewisser Inhalt zugeschrieben werde, der auch in der Arithmetik in Betracht komme. Aber dieser Schein entsteht nur aus der nicht ganz sachgemässen Ausdrucksweise, die freilich wohl von einer Scheu vor der Leerheit der Zeichen eingegeben ist. Kann man sagen, dass den Schachfiguren in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber den Regeln des Schachspieles ein Inhalt beigelegt werde? Dass die Schachfiguren da sind, erkenne ich an, ebenso auch, dass Regeln für ihre Handhabung aufgestellt sind; aber von einem Inhalte weiss ich nichts. Man kann doch nicht sagen, dass der schwarze König infolge dieser Regeln etwas bezeichne, etwa wie der Name „Sirius“ einen gewissen Fixstern bezeichnet. Sondern die sachgemässe Ausdrucksweise ist doch wohl die, dass die Regeln des Schachspieles auch vom schwarzen Könige handeln.

Auch dass von einem Verhalten der Zeichen gegenüber den Regeln gesprochen wird, scheint mir nicht glücklich. Blos dadurch, dass ich den Staatsgesetzen unterworfen bin, verhalte ich mich doch eigentlich nicht irgendwie gegenüber den Staatsgesetzen, sondern dadurch, dass ich sie befolge oder nicht befolge. Da nun weder die Schachfiguren noch die Zahlfiguren eigenen Willen haben, so wird der Spielende oder Rechnende der sein, der durch Befolgen oder Nichtbefolgen der Regeln ein Verhalten diesen gegenüber zeigt, nicht aber die Figuren. Von dem allen bleibt nichts übrig als das ganze Einfache, dass gewisse Regeln von den arithmetischen Figuren handeln.

§ 96. Wenn nun weiter gesagt wird: „Aehnlich bedient sich der Schachspieler seiner Figuren, er legt ihnen gewisse Eigenschaften bei, die ihr Verhalten im Spiel bedingen, und die Figuren sind nur äussere Zeichen für dies Verhalten“, so dürfte auch dies nicht genau sein; denn im Grunde erhalten die Schachfiguren durch die Aufstellung der Regeln wohl keine neue Eigenschaften; sie können nach wie vor in der mannichfachsten Weise bewegt werden; nur sind einige dieser Bewegungen den Spielregeln gemäss, andere nicht. Selbst diese Gemässheit ist eigentlich nicht erst aus der

Aufstellung der Regeln entsprungen; nur beurtheilen können wir sie erst, nachdem die Regeln uns bekannt sind. Auch kann ich nicht finden, dass ein Bauer im Schachspiele ein äusseres Zeichen seines Verhaltens sei; sondern ich kehre immer wieder zu dem einfachen Ausdrucke zurück: die Regeln des Schachspiels handeln von der Handhabung der Schachfiguren. Wäre es nicht eine wunderliche Ausdrucksweise, wenn man statt zu sagen „die preussische Staatsverfassung ertheilt dem Könige gewisse Rechte und Pflichten" sagen wollte „der König von Preussen ist ein äusseres Zeichen seines verfassungsmässigen Verhaltens"? Ich muss dabei bleiben, dass der Gebrauch von Ausdrücken wie „äusseres Zeichen sein für etwas", „sich verhalten gegenüber den Regeln" den ganz einfachen Sachverhalt nur verdunkelt, aber nichts dem hinzufügt, was der Satz sagt „die Regeln des Schachspiels handeln von der Handhabung der Schachfiguren".

Schon weil eine Regel nicht selten von mehreren Figuren handelt [1]), und weil mehrere Regeln dieselbe Figur betreffen, ist die Beziehung einer Figur zu einer Regel garnicht zu vergleichen mit der eines Zeichens zu einem Sinne oder einer Bedeutung. Jedenfalls wird durch die Spielregeln nicht bewirkt, dass eine Stellung von Schachfiguren einen Gedanken ausdrückt, und das Entsprechende gilt von den Formeln des arithmetischen Spieles.

§ 97. Etwas weiterhin schreibt Thomae:

„Allerdings giebt es Fälle, in denen auch in der Arithmetik den Zahlen [2]) nicht blos eine formale Bedeutung zukommt, z. B. in dem Satze ›diese Gleichung ist vom Grade 3‹ u. s. w.

Hiernach scheint es, dass den Zahlzeichen neben ihrer eigentlichen Bedeutung, die für die Arithmetik nur ausnahmsweise in Betracht komme, noch eine formale Bedeutung zuerkannt werde, was, wenn es wahr wäre, wegen der Zweideutigkeit bedenklich wäre; aber hier giebt wohl nur ein nicht glücklich gewählter Ausdruck Anstoss. Es soll wohl nur gesagt werden, dass in einigen Fällen die Zahlzeichen nicht nur als Figuren behandelt werden können, sondern dass zuweilen auf ihre Bedeutung zurückgegriffen werden muss. Freilich ist es auffallend, dass in der formalen Arithmetik oder in deren Theorie noch etwas Anderes als die Spielregeln in Betracht kommen kann. Wie wäre es denkbar, dass in der Theorie des Schachspiels Bedeutungen der Schachfiguren wichtig sein könnten, die für das Spiel gleichgültig sind?

---

1) Die Felder des Schachbretts müssen hier eigentlich auch zu den Figuren gerechnet werden.

2) Das Wort „Zahlen" steht hier offenbar statt „Zahlzeichen"; denn nur so kann von einer Bedeutung gesprochen werden, während oben, wo die Frage „was sind und was wollen die Zahlen?" bei Seite geschoben wurde, offenbar die Bedeutung der Zahlzeichen gemeint war. Im Folgenden gebraucht jedoch Thomae das Wort „Zahl" regelmässig in der Bedeutung *Zahlzeichen* oder besser *Zahlfigur*. Wo es anders ist, soll besonders darauf hingewiesen werden.

Das Zugeständnis, dass die Zahlzeichen auch in der formalen Arithmetik nicht immer blos als Figuren gebraucht werden, ist für die Thomaesche Lehre bedenklich; es wird damit zugegeben, dass der formale Standpunkt sich nicht immer wird behaupten lassen. Es ist klar, dass im Rechenspiele selbst eine Bedeutung der Zeichen nicht in Betracht kommen kann. Nach Bedeutungen kann nur gefragt werden, wo die Zeichen Bestandtheile von Sätzen sind, die Gedanken ausdrücken. Solche Sätze können nun wohl in der Theorie des Spiels vorkommen; aber es muss im höchsten Grade verwirrend wirken, wenn man die Figuren des Spiels bei der Darstellung von dessen Theorie zugleich als Zeichen dienen lässt, die eine Bedeutung haben. Denn dabei wird sich die Behandlung dieser Zeichen nach deren Bedeutung richten, während im Spiele selbst ganz willkürlich aufgestellte Regeln gelten. Dass beide Behandlungsweisen übereinstimmen, darf nicht ohne Weiteres angenommen werden. Um der aus dieser doppelten Rolle der Zahlzeichen entspringenden Verwirrung zu entgehen, muss man den in der Darstellung der Theorie des Spiels gebrauchten Zahlzeichen, sofern ihnen eine Bedeutung beigelegt wird, eine von den blossen Zahlfiguren abweichende Gestalt geben.

§ 98. Hier mag es nützlich sein, über die Zeichen etwas ausführlicher zu handeln, da sie durch die von Heine und Andern aufgestellte Behauptung, die Zahlen seien Zeichen, zu Gegenständen der Mathematik gestempelt worden sind und so eine Wichtigkeit erlangt haben, die sie als blosse Hülfsmittel des Denkens und der Mittheilung nicht haben würden. Der schwankende Sprachgebrauch lässt dabei Missverständnisse so leicht entstehen, dass wir nicht vorsichtig genug vorgehen können und uns nicht scheuen dürfen, auch Selbstverständliches auszusprechen, um sicher einen gemeinsamen Ausgangspunkt zu haben.

Was sind Zeichen? Ich will die Betrachtung auf Gebilde einschränken, welche durch Schreiben oder Drucken auf der Oberfläche eines physischen Körpers (Tafel, Papier) erzeugt werden; denn nur solche sind offenbar gemeint, wenn die Zahlen Zeichen genannt werden. Aber nicht jedes solche Gebilde werden wir ein Zeichen nennen — einen Klex z. B. werden wir im Allgemeinen dieser Ehre nicht für würdig halten —, sondern nur, wenn es uns dazu dient, irgendetwas zu bezeichnen, auszudrücken oder zu behaupten. Dabei wollen wir nicht von dem Zeichen etwas sagen, wenn wir es gebrauchen, sondern seine Bedeutung ist uns in der Regel die Hauptsache. So meint z. B. der Astronom den Planeten Jupiter, wenn er dessen Zeichen »♃« gebraucht; dieses selbst ist ihm dabei eigentlich gleichgültig, ist nur ein willkürlich gewähltes Mittel des Gedankenausdrucks, das ganz ausserhalb der Betrachtung bleibt. In dieser Stellvertretung liegt der Nutzen der Zeichen. Freilich kommt es ausnahmsweise vor, dass man von dem Zeichen selbst reden will, und dieser Fall wird in der Auseinandersetzung mit den Formalarithmetikern vorkommen. Um nun keine Zweifel eintreten zu lassen, müssen wir diese Fälle auch äusserlich unterscheiden. Am zweckmässigsten ist es, die Zeichen im letzten Falle in Anführungszeichen zu setzen. Zur grössern Deutlichkeit kann man auch die Worte „das Zeichen" vorherschicken. Das mag pedantisch scheinen, ist aber durchaus nicht überflüssig. Wenn man diesen Unterschied immer scharf im Auge behalten hätte, wäre vielleicht eine Darstellung wie die Heinesche nie möglich gewesen, zu deren Wesen eben das Schillern in beiden Farben zu gehören scheint. Bei den Mathematikern sind Ausdrucksweisen üblich geworden, durch die man sich an dieses Schillern so gewöhnt hat, dass man es nicht mehr bemerkt. So findet man Redensarten wie

„Es bezeichne a die kleinste Wurzel der Gleichung (1)",

und wenn nun im Folgenden der Buchstabe »a« vorkommt, meint man damit die kleinste Wurzel jener Gleichung. Hier haben wir das Schillern. In jenem ersten Satze meint man das Zeichen, späterhin dessen Bedeutung. Man sollte also entweder schreiben

„Es bezeichne »a« die kleinste Wurzel der Gleichung (1)"

oder

„Es sei a die kleinste Wurzel der Gleichung (1)".

Wenn man sich darauf legte, könnte man vielleicht Bände mit solchen Beispielen aus den Schriften neuerer Mathematiker füllen [1]). Das sieht wie eine unbedeutende Kleinigkeit aus; und doch sind solche Nachlässigkeiten allem Anscheine nach die Quelle grosser Verwirrungen geworden. Und wenn sich zeigen sollte, dass grade daraus die formalen Theorien der Arithmetik ihre Nahrung gezogen haben, so ist die Sache gewiss nicht leicht zu nehmen.

§ 99. Die Zeichen würden kaum einen Nutzen haben, wenn sie nicht dazu dienen könnten, dasselbe wiederholt und in verschiedenen Zusammenhängen zu bezeichnen und dabei leicht ersichtlich zu machen, dass dasselbe gemeint sei. Das geschieht dadurch, dass man zu diesen verschiedenen Malen möglichst ähnliche Zeichen gebraucht. Zwar wird es fast nie gelingen, genau dieselbe Gestalt wieder zu treffen, und selbst wenn es einmal gelungen wäre, so würde die Schärfe unserer Augen nicht hinreichen, das mit Sicherheit zu erkennen. Aber das ist auch nicht nöthig. Wenn nämlich die Zeichen nur den Zweck haben, der Verständigung der Menschen untereinander, sowie eines Menschen mit sich selbst — dem Nachdenken — zu dienen, braucht beim Schreibenden nur die Absicht vorhanden zu sein, ein dem früher gemachten ähnliches Zeichen herzustellen, und das braucht nur soweit zu gelingen, dass der Lesende die Absicht

1) Mir fällt grade noch Folgendes in die Augen:
„Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener *Buchstaben* durch Vertauschung derselben erlangen kann." Math. Annalen XXXIII, S. 584.

richtig erkennt. Wir wollen im Folgenden unter „gleichgestalteten Zeichen" solche verstehen, welche nach der Absicht des Schreibenden gleichgestaltet sein sollen, um dasselbe zu bezeichnen. Man drückt sich nun gewöhnlich nicht genau aus, indem man von gleichgestalteten Zeichen als von einem und demselben Zeichen spricht, obwohl ich doch jedes Mal, wenn ich ein Gleichheitszeichen hinschreibe, einen andern Gegenstand erzeuge. Diese Gebilde unterscheiden sich durch ihre Oerter, Entstehungszeiten und wahrscheinlich auch in der Gestalt. Man sagt nun vielleicht, dass man von den Verschiedenheiten abstrahire und diese Figuren deshalb als dasselbe Zeichen betrachten könne. Was doch das Abstrahiren Alles möglich machen soll! Was verschieden ist, kann durch kein Abstrahiren zum Zusammenfallen gebracht werden, und wenn man es doch als dasselbe ansieht, macht man einfach einen Fehler. Wenn ich von der Verschiedenheit meines Hauses von dem meines Nachbarn abstrahirend beide als dasselbe betrachten und daraufhin im fremden Hause wie im eignen schalten wollte, würde man mir die Fehlerhaftigkeit meiner Abstraction bald klar machen. Was man durch Abstrahiren vielleicht erreichen kann, ist ein Begriff, und wenn wir den Umfang eines Begriffes kurz „Klasse" nennen, so können wir alle gleichgestalteten Zeichen zu derselben Klasse rechnen. Aber diese Klasse ist nicht das Zeichen; ich kann sie nicht durch Schreiben erzeugen, sondern ich kann immer nur einzelne Gegenstände herstellen, die ihr angehören. Wenn man von diesen trotzdem als von demselben Zeichen spricht, so überträgt man das Zusammenfallen der Bedeutung auf das Zeichen.

§ 100. Dies Alles gilt von dem gewöhnlichen und regelrechten Gebrauche der Zeichen. In der formalen Arithmetik ist deren Rolle eine andere: sie sollen garnichts Anderes bezeichnen; sondern sie sind selbst das, womit man sich beschäftigt. Gelegentlich, wie bei Heine, kehren sie ihre eigene Beschaffenheit — die Greifbarkeit — hervor und werfen sie als Beweisgrund in die Wagschale. Deshalb nennen wir sie hier lieber Figuren, weil der Zweck, etwas zu bezeichnen, garnicht in Betracht kommt. Gleichgestaltet werden Figuren zu nennen sein, deren etwa bemerkbare Gestaltverschiedenheiten auf die Handhabung nach den Spielregeln ohne Einfluss sein sollen. Im regelmässigen Gebrauche sollen gleichgestaltete Zeichen dasselbe bedeuten und werden darum in vieler Hinsicht so behandelt, als wären sie dasselbe, weil sie nur als Zeichen ihrer Bedeutung in Betracht kommen. Dieser Grund fällt bei gleichgestalteten Figuren weg. Wir dürfen nicht die weissen Bauernfiguren auf dem Schachbrette als eine einzige Figur behandeln. Wir dürfen bei der Aufstellung der Regeln des Schachspiels und in der Theorie das Wort „Bauer" nicht mit dem bestimmten Artikel im Singular als Eigennamen gebrauchen; denn es giebt mehre. Während in der inhaltlichen Arithmetik Ausdrücke wie „die Zahl Eins" oder „die Eins" oder auch einfach „Eins" als Eigennamen erlaubt sind, sind solche in der Theorie der formalen Arithmetik zu verwerfen; denn es giebt sehr viele Einsfiguren. Immer werden neue gebildet und alte zerstört. Man wird hier wohl sagen dürfen „eine Einsfigur", „einige Einsfiguren", „alle Einsfiguren", aber nicht „die Einsfigur", es sei denn, dass man solche Bestimmungen hinzufügt, welche auf eine einzige Einsfigur unzweideutig hinweisen.

Noch folgender Unterschied der formalen von der inhaltlichen Arithmetik mag bemerkt werden. In dieser bedeuten das Wort „Eins" und das Zeichen »1« dasselbe, nämlich die eigentliche, unsinnliche Zahl Eins, während in der Theorie der formalen Arithmetik das Wort „Einsfigur" oder das fälschlich dafür gebrauchte „Eins" den Begriff bedeutet, unter den das Zeichen »1« mit allen ihm gleichgestalteten fällt.

§ 101. Gehen wir jetzt etwas näher auf die Thomaesche Theorie ein! Wir lesen im § 2:

„Ist der Begriff der ganzen Zahl und des Zählens erworben, so lassen sich zwei Rechnungsarten als besondere Arten des Zählens auf einfache und natürliche Weise einführen, die

Addition und Multiplication.

Diese sind ihrer Natur nach innerhalb des Gebietes ganzer Zahlen immer ausführbar. Geht man aber dazu über, diese Rechnungsarten umzukehren, führt man die neuen Rechnungsarten

Subtraction und Division

ein, so sind dieselben im Gebiete der ganzen Zahlen nicht immer ausführbar."

Wir knüpfen hier, wie es scheint, an das von den ganzen Zahlen Bekannte, an Zusammenhänge an, die in deren Wesen begründet sind. Wir haben also wohl den formalen Standpunkt vorläufig verlassen, um Rechnungsarten kennen zu lernen, die wir dann in die formale Arithmetik hinübernehmen wollen. Demnach werden hier unter den ganzen Zahlen die Bedeutungen der Zahlzeichen gemeint sein, nicht diese selbst. Freilich Addiren und Multipliciren als etwas, was die Zahlen selbst angeht, können wir auf dem formalen Standpunkte nicht brauchen; aber wenn wir einmal die Zahlen mit Zahlzeichen bezeichnet haben, so spiegelt sich das die Zahlen selbst Betreffende in den Zeichen wieder, und wir erhalten Verfahrungsweisen im Gebiete der Zeichen, die dazu dienen, Aufgaben zu lösen, die im Gebiete der Zahlen selbst gestellt werden. Solches Handhaben der Zeichen ist hier wohl Rechnen genannt. Die Regeln dieses Rechnens finden ihre Begründung im Wesen der Zahlen selbst und ihrer Beziehungen zueinander. Wir können nun aber von den Bedeutungen der Zahlzeichen ganz absehen, diese als Figuren behandeln und die Regeln, ohne nach einer Begründung zu fragen, als willkürlich aufgestellte Spielregeln ansehen. Und das Rechnen nach ihnen können wir nun auch vornehmen mit Figuren, von denen wir garnicht wissen, ob sie auch Zeichen sind, und ob die Rechnungsregeln etwa irgendwie mit den Bedeutungen dieser Zeichen zusammenhangen.

§ 102. Alles dies ergiebt sich aus dem Plane einer formalen Arithmetik in Thomaes Sinne so unmittelbar, dass ein Zweifel an der Richtigkeit dieser Erläuterung wohl nicht möglich ist. Nun scheint mir hier aber etwas zu fehlen, nämlich die Angabe dessen, was im arithmetischen Spiele Addiren, Multipliciren, Subtrahiren und Dividiren ist. Beim Schachspiele müssen wir die Figuren zunächst kennen lernen, um dann die Regeln verstehen zu können. Etwas Aehnliches erwarten wir hier. Mit welchen Figuren werden denn jene Handlungen vorgenommen? Wie ist die Sachlage vor der Addition und wie ist sie nachher? Das Entsprechende müssen wir auch von der Subtraction wissen; erst dann können wir beurtheilen, in welchen Fällen das Subtrahiren möglich ist. Wir müssen uns nämlich immer gegenwärtig halten, dass das Subtrahiren hier keine Denkhandlung, sondern ein äusseres Thun, ein Umgehen mit Figuren ist.

Wenn nun das Subtrahiren einer ersten Figur von einer zweiten darin besteht, dass wir diese — oder eine ihr gleichgestaltete — links, jene rechts von demselben Minuszeichen hinschreiben, so hindert mich nichts, eine Dreifigur von einer Zweifigur zu subtrahiren. Ich kann aber ebenso gut ein Kalenderzeichen des Mondes von einem Kalenderzeichen der Sonne subtrahiren, indem ich diese Zeichen als blosse Figuren behandle. Einer Einführung neuer Figuren, um die Subtraction möglich zu machen, bedarf es alsdann nicht.

Wir müssen uns nur immer ganz klar vor Augen halten, dass es auf eine Bedeutung hier im arithmetischen Spiele garnicht ankommt. Also: wann ein Subtrahiren möglich sei, lässt sich garnicht beurtheilen, ehe wir wissen, welche Figuren dabei in Betracht kommen können, und was mit ihnen vorzunehmen sei. Das muss uns so genau beschrieben werden, wie das Rochiren im Schachspiele.

Wie etwa das Subtrahiren als Umkehrung des Addirens aufzufassen wäre, wollen wir später ins Auge fassen, nachdem wir einige Regeln der formalen Arithmetik kennen gelernt haben.

Zunächst wissen wir garnicht, was im Rechenspiele Addiren und Multipliciren sei. Jedenfalls ist das Addiren der Zahlzeichen ganz verschieden vom Addiren der Zahlen. Wenn ein Eroberer eine Stadt verbrennt, verbrennt er damit noch nicht den Namen der Stadt; was mit der Sache geschieht, braucht damit noch nicht mit ihrem Namen oder Zeichen zu geschehn. Nun kann man vermuthen, zwei Zahlzeichen addiren solle heissen ein drittes Zahlzeichen hinschreiben der Art, dass die Zahl die in der inhaltlichen Arithmetik die Bedeutung dieses Zeichens ist, die Summe sei der Zahlen, die durch die beiden ersten Zahlzeichen bezeichnet werden. Indessen würde dann die inhaltliche Arithmetik für alle Zahlen vorausgesetzt, während sie hier nur für positive ganze Zahlen als bekannt angenommen wird. Sonst wäre ja auch die formale Arithmetik überflüssig. Man wüsste hiernach nicht, was die Addition bei solchen Zahlfiguren wäre, welche nicht beide in der inhaltlichen Arithmetik positive ganze Zahlen bezeichnen. Man könnte auch daran denken, ein Verfahren des Vorwärts- oder Rückwärtsschreitens in einer Reihe von Zahlfiguren Addition zu nennen; aber auch dies würde nicht allgemein genug anwendbar sein. So bleibt vielleicht nur folgende Vermuthung übrig: man addirt zwei Zahlfiguren, indem man ihnen gleichgestaltete durch das Additionskreuz getrennt nebeneinander schreibt. Das Entsprechende kann man vom Multipliciren sagen, indem man für das Additionskreuz den Multiplicationspunkt eintreten lässt. Nach diesen Erklärungen kann man wohl alle schreibbaren Figuren addiren und multipliciren, ob sie nun in irgendeinem Zusammenhange eine Bedeutung haben oder nicht.

§ 103. Thomae schreibt weiter:

„Stellt man aber die Forderung, dass diese Operationen immer ausführbar sein sollen, so gelangt man zu neuen Zahlgebilden, der Null, den negativen und gebrochenen Zahlen. Diese lassen sich als rein formale Gebilde auffassen, d. h. als Begriffe, deren Inhalt durch ihr Verhalten gegen die Rechenoperationen erschöpft ist."

Das Verständnis wird hier durch die Ausdrucksweise erschwert. Das Wort „Begriff" wird hier offenbar nicht in unserm Sinne gebraucht, auch wohl nicht im Sinne der Logiker; denn dass etwa Gegenstände unter diese Begriffe fallen könnten, davon ist garkeine Rede. Was verhält sich, um mit Thomae zu sprechen, zu den Rechenoperationen? oder wovon handeln, wie wir lieber sagen, die Rechnungsregeln? Von Figuren, die etwa mit Kreide auf eine schwarze Tafel geschrieben werden können. Diese sind aber ebensowenig wie die Schachfiguren Begriffe, sondern gehören ins Gebiet der physischen Körper. So gelangen wir zu der Ansicht, dass diese neuen Zahlgebilde als Figuren hingestellt werden sollen, die durch Schreiben oder Drucken erzeugt werden, die nichts bedeuten, oder deren Bedeutung uns wenigstens nichts angeht; über deren Handhabung aber Regeln aufgestellt sind. Es ist also wohl nicht daran zu zweifeln, dass die ***Null***, die ***negativen*** und ***gebrochenen Zahlen***, von denen Thomae spricht, nicht eigentlich Zahlen in unserm Sinne sein sollen, sondern Zahlfiguren.

Wie wir schon gesehen haben, ist auf dem Standpunkte der formalen Arithmetik die Einführung dieser neuen Zahlfiguren garnicht nöthig, um die Subtraction und Division immer ausführbar zu machen; aber möglich wird sie immerhin sein.

§ 104. Sehen wir jetzt erst einmal die Weise an, wie Heine die Zahlen behandelt! Er schreibt:

„Ein Hauptgewicht ist auf die Rechenoperationen zu legen, und das Zahlzeichen muss so gewählt werden oder mit einem solchen Apparate ausgerüstet werden, dass es einen Anhalt zur Definition der Operationen gewährt.“

Ein räthselhafter Ausspruch! Wenn ich statt des Dreizeichens ein grosses lateinisches »*U*« wählte, würde dies vielleicht einen geringeren Anhalt zur Definition der Operationen gewähren? und woran erkennt man, dass ein Zeichen einen solchen Anhalt gewährt? Vollends, was ist unter dem Apparate zu verstehen, mit dem ein Zahlzeichen ausgerüstet sein soll? Wo hat beispielsweise das Zeichen »3« seinen Apparat? Man sollte denken, dass er sichtbar oder sogar greifbar wäre, da die Zahl selbst nach Heine greifbar ist.

Wir bemerken hier einen Unterschied der Heineschen von der Thomaeschen Auffassung. Nach dieser nämlich sind die Rechnungsoperationen schon da, und die neuen Figuren verhalten sich dann, so zu sagen, zu ihnen, während bei Heine die Figuren zuerst gebildet werden, und dann erst die Rechenoperationen, so zu sagen, definirt werden. Das Letzte scheint angemessener zu sein; denn wie kann ich Regeln aufstellen, ohne die Figuren zu nennen, von denen sie handeln?

Heine schreibt weiter:

„Rechenoperationen heissen Regeln, nach welchen zwei Zahlen, die durch das Operationszeichen verbunden sind, gegen eine einzige umgetauscht werden können.“

Das ist offenbar schief ausgedrückt. Ebenso könnte man sagen: „Strumpfstricken heisst eine Regel, nach der man aus einem Faden mittels Stricknadeln einen Strumpf verfertigt.“ Heine will sagen:

„Rechenoperationen sind nach gewissen Regeln geschehende Umtauschungen einer Gruppe, bestehend aus zwei Zahlen und einem sie trennenden Operationszeichen, gegen eine einzige Zahl.“

Man kann hinzufügen, dass dabei das Operationszeichen auf die anzuwendende Regel hinweist. Heine denkt hier etwa an den Fall, wo die Gruppe »$3+5$« gegen das Zeichen »8« umgetauscht wird. Wenn in einem Satze der inhaltlichen Arithmetik die Gruppe »$3+5$« gebraucht wird, so können wir unbeschadet der Wahrheit dafür auch das Zeichen »8« setzen, weil beide denselben Gegenstand, dieselbe eigentliche Zahl bezeichnen und folglich Alles, was von dem mit »$3+5$« bezeichneten Gegenstande gilt, auch von dem mit »8« bezeichneten Gegenstande gelten muss. Und mit einer solchen Ersetzung wird in vielen Fällen ein Fortschritt der Erkenntnis gemacht werden, indem der Sinn der Zeichen von gleicher Bedeutung verschieden sein wird, und mithin auch die in den beiden Sätzen ausgedrückten Gedanken verschieden sein werden. Der Zweck der Erkenntnis ist es also, was die Regel bestimmt, dass die Gruppe »$3+5$« durch das Zeichen »8« ersetzt werden dürfe. Dieser Zweck fordert eine solche Beschaffenheit der Regeln, dass, wenn ihnen gemäss aus wahren Sätzen [1]) ein neuer Satz abgeleitet wird, auch dieser wahr sei. Ob die Regeln derart sind, kann man natürlich erst beurtheilen, nachdem den Zeichen Bedeutungen gegeben sind; denn vorher kann man aus ihnen nicht Sätze bilden, welche einen wahren Gedanken ausdrücken. Dies gilt für die inhaltliche Arithmetik; hier in der formalen haben wir die Regeln unabhängig von einem Sinne. Der Erkenntniszweck bestimmt nicht ihren Inhalt, sondern sie werden willkürlich aufgestellt.

§ 105. Heine fährt fort:

„Diese Regeln werden zunächst so festgesetzt, dass sie das Resultat der gewöhnlichen Rechnung geben, wenn die eingeführten Zahlen allein 0, 1, 2, 3, . . . etc. waren."

Das ist eigentlich ungenau; denn das Resultat der gewöhnlichen Rechnung — d. h. doch wohl in der inhaltlichen Arithmetik — ist eine eigentliche Zahl, kein Zahlzeichen, also keine Zahl nach Heines Sprachgebrauche. Heine macht hier Anleihe bei einer fremden Theorie. Weiter sagt er:

„Die Unmöglichkeit der Subtraction in vielen Fällen veranlasst zur Einführung neuer Zeichen oder Zahlen: für jedes schon vorhandene Zeichen a führt man noch ein Zeichen $neg(a)$ ein und erweitert die Definition der Operationen in geeigneter Art, sodass sie für die neuen Zahlen noch ein Resultat liefern, an frühern angebracht dasselbe wie früher."

Hierbei ist mancherlei zu fragen; zunächst: wie ist „die Unmöglichkeit der Subtraction" zu verstehen? Es soll wohl heissen, dass die Regel nicht immer anwendbar ist, die Regel nämlich, nach der als Ergebnis der Subtraction das Zahlzeichen zu nehmen ist, das in der auf die nicht negativen ganzen Zahlen beschränkten inhaltlichen Arithmetik die Differenz bezeichnet. Diese Regel sagt nichts darüber, gegen welche Zahl »$3 - 5$« umgetauscht werden dürfe. Das braucht eigentlich nicht zur Einführung neuer Zeichen zu veranlassen. Man könnte ja festsetzen, dass »$3 - 5$« ebenso wie »$5 - 3$« gegen »2« umgetauscht werden dürfte. Da der Zweck dieser Regeln hier ausserhalb unseres Gesichtskreises liegt, so ist auf unserm formalen Standpunkte jede Regel mit jeder andern gleichwerthig, sofern nur ein Widerstreit der Regeln vermieden wird.

Nun ist weiter davon die Rede, dass die Definitionen der Operationen erweitert werden sollen. Das soll wohl heissen, dass die Regeln ergänzt werden sollen.

Heine fährt fort:

„Dann zeigt sich, nach zweckmässiger Definition der Subtraction, dass $neg(a) = 0 - a$ sein muss."

Statt „zweckmässiger Definition der Subtraction" muss es wohl etwa

[1]) Genauer: aus Sätzen, die wahre Gedanken ausdrücken.

heissen „zweckmässige Aufstellung von Regeln für die Umtauschung von Figurengruppen der Form »$a-b$« gegen andere Figuren". Was aber zweckmässig sei, können wir garnicht beurtheilen, da der Zweck uns unbekannt ist. Wir wissen ja nicht einmal, ob eine solche Umtauschung überhaupt nöthig sei, ob wir uns nicht einfach mit »$3-5$« begnügen können. Wie nun die ergänzte Regel lauten solle, erfahren wir nicht; und damit bleibt ein Hauptpunkt ganz im Dunkeln. Wie können wir das Spiel kennen lernen, wie dessen Theorie verstehen, wenn uns garnicht einmal die Regeln vollständig mitgetheilt werden! Wir werden, wie es scheint, stillschweigend auf unsere Kenntnis der inhaltlichen Arithmetik verwiesen. Aber wenn wir diese haben, brauchen wir die formale nicht.

Nun kommt die Behauptung, es müsse $neg(a) = 0 - a$ sein. Das ist unverständlich. Wir haben hier eine Gruppe von Zeichen, mit der wir keinen Gedanken verbinden; folglich kann auch nichts behauptet werden. »*nega*« ist für uns eine blosse Figur, ebenso das Gleichheitszeichen, das Minuszeichen und das Nullzeichen. Da Heine hier eine Behauptung ausspricht, meint er einen Gedanken auszudrücken, weiss aber wahrscheinlich selbst nicht, welchen. Das ist das Verhängnis der Formalarithmetik, dass sie nicht umhin kann, Sätze auszusprechen, welche Gedanken ausdrücken sollen, von denen sich doch niemand genaue Rechenschaft geben kann.

Wir selbst drücken ja mit dem Gleichheitszeichen aus, dass die Bedeutung der links stehenden Zeichengruppe zusammenfalle mit der Bedeutung der rechts stehenden. Das ist hier unbrauchbar, da wir keine Bedeutungen haben. Was aber sonst das Gleichheitszeichen ausdrücken solle, wissen wir nicht. Jedenfalls muss dann auch das rechts und das links Stehende etwas bedeuten, und es ist zu vermuthen, dass wir einen Satz aus der Theorie des Spiels haben, da ja im Spiele selbst keine Bedeutungen der Figuren und keine Behauptungen vorkommen können.

§ 106. Aehnliches finden wir bei Thomae. Wir lesen dort:

»Diese Regeln sind in den Formeln enthalten

$$a + a' = a' + a, \quad a + (a' + a'') = (a + a') + a'' = a + a' + a'', \quad (a' - a) + a = a'$$
$$aa' = a'a \qquad a(a'a'') = (aa')a'' = aa'a'', \qquad (a' : a)\, a = a'$$
$$a\,(a' + a'') = aa' + aa''.«$$

Das ist eine Ueberraschung. Was würde jemand sagen, der nach den Regeln des Schachspiels gefragt hätte, und dem statt aller Antwort eine Gruppe von Schachfiguren auf dem Schachbrette gezeigt würde? Wahrscheinlich, dass er keine Regel darin finden könnte, weil er gar keinen Sinn mit diesen Figuren und mit ihrer Zusammenstellung verbände. Nur scheinbar liegt der Fall hier anders, weil wir das Pluszeichen, das Gleichheitszeichen, den Gebrauch der Buchstaben aus der inhaltlichen Arithmetik schon kennen; denn hier wollen wir formale Arithmetik treiben, und daraus entsteht die Frage, ob jene Zeichen hier überhaupt als Zeichen oder nur als Figuren zu behandeln seien. In diesem Falle wäre nicht abzusehen, wie eine Regel dadurch gegeben werden könnte. Wenn sie aber als Zeichen zu behandeln sind, können sie keinesfalls dieselbe Bedeutung wie in der inhaltlichen Arithmetik haben; denn dann hätten wir einen Satz der inhaltlichen und keine Regel der formalen Arithmetik.

§ 107. Obwohl uns hier die Darstellung im Stiche lässt, können wir doch versuchen, den Sinn zu ermitteln, den diese Formeln hier haben sollen, indem wir fragen, was für die Behandlung der Zeichen aus dem Sinne folge, den diese Zeichen in der inhaltlichen Arithmetik haben. Sehen wir zunächst von den Buchstaben ab, die offenbar der Regel Allgemeinheit verleihen sollen, und betrachten die Formel

»$2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2$«!

Diese besagt in der inhaltlichen Arithmetik, dass die Summe von 2 und $\frac{1}{2}$ zusammenfällt mit der Summe von $\frac{1}{2}$ und 2, oder dass $2 + \frac{1}{2}$ dieselbe Zahl ist wie $\frac{1}{2} + 2$. Was folgt daraus für die Zeichen? Offenbar, dass eine wie »$2 + \frac{1}{2}$« gestaltete Zeichengruppe überall ersetzt werden darf durch eine wie »$\frac{1}{2} + 2$« gestaltete und umgekehrt. Dabei ist selbstverständliche Voraussetzung, dass gleichgestaltete Zeichen oder Zeichengruppen dasselbe bedeuten. Wir haben so die Regel der formalen Arithmetik aufgestellt, die unserm Satze der inhaltlichen Arithmetik entspricht, und dürfen vermuthen, dass Thomae diese mit der Formel

»$2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2$«

ausdrücken würde. Die Formel

»$a + a' = a' + a$«

wird demnach bei Thomae besagen: eine Figurengruppe, die aus zwei Zahlfiguren links und rechts von einer Plusfigur besteht, darf ersetzt werden durch eine Figurengruppe derselben Art, in der die Zahlfiguren ihre Stellen gegenüber der Plusfigur vertauscht haben. Vorher hätte gesagt werden müssen, welche Figuren Zahlfiguren wären.

Erinnern wir uns nun, dass die Theorie des Spiels vom Spiele selbst zu unterscheiden ist! Die Spielhandlungen geschehen zwar nach den Regeln; aber die Regeln sind nicht Gegenstände des Spiels, sondern Grundlage der Theorie des Spiels. Die Züge des Schachspiels geschehen zwar nach Regeln; aber keine Stellung der Schachfiguren und kein Zug drückt eine Regel aus; denn die Aufgabe der Figuren im Schachspiele ist überhaupt nicht, etwas auszudrücken, sondern nach Regeln bewegt zu werden. Wenn man also die formale Arithmetik als Spiel betrachtet, so ist die Formel »$a + a' = a' + a$« als Ausdruck einer Regel dieses Spiels eine der Grundlagen von dessen Theorie, auf der in dieser Schlüsse aufgebaut werden können; aber sie ist nicht etwas, mit dem im Spiele Veränderungen vorgenommen werden, kein Gegenstand des Spiels, nicht einer Stellung von Schachfiguren zu vergleichen, sondern dem Wortausdrucke einer Regel des Schachspiels.

§ 108. Fragen wir nun, was einem Schachzuge entspricht, welche Handlungen durch die Regeln der formalen Arithmetik beherrscht werden. Wenn man den Sinn der oben angeführten Thomaeschen Formeln in derselben Weise ermittelt, wie wir es bei der ersten gethan haben, so ergiebt sich, dass jede von ihnen erlaubt, eine Figurengruppe durch eine andere oder eine einzelne Figur zu ersetzen. Wir können es uns am besten so denken, dass die Figuren mit Kreide auf eine schwarze Tafel geschrieben werden. Wir löschen dann z. B. eine wie »$2+\frac{1}{2}$« gestaltete Figurengruppe aus und schreiben dafür eine Gruppe wie »$\frac{1}{2}+2$« hin. Diese Handlung entspricht einem Zuge des Schachspiels und geschieht nach einer Regel der formalen Arithmetik. Vom Standpunkte der inhaltlichen Arithmetik mag es läppisch scheinen, die Kreide, das Auslöschen, kurz dies ganze äusserliche Thun auch nur zu erwähnen; vergessen wir aber nicht, dass eben in solchem äusserlichen Thun das Rechenspiel besteht.

Die ausgelöschte Figurengruppe wird Theil einer grössern Gruppe gewesen sein; und die Erinnerung an die inhaltliche Arithmetik lässt uns vermuthen, dass diese Figurengruppe etwas sein wird, was wir eine Gleichung oder Ungleichung nennen. So wird etwa aus einer Gruppe wie »$(2+\frac{1}{2}).5=12+\frac{1}{2}$« eine wie »$(\frac{1}{2}+2).5=12+\frac{1}{2}$« gestaltete entstehen. Jede von diesen wird einer Stellung von Schachfiguren entsprechen. Nun haben wir aber Gleichungen schon kennen gelernt als Ausdrücke der Regeln. Wir bemerken also, dass Gleichungen hier eine doppelte Rolle spielen: erstens im Spiele selbst, wo sie ebenso wenig wie die Stellungen der Schachfiguren etwas ausdrücken, und zweitens in der Theorie des Spiels, wo sie zunächst die Regeln, dann aber auch, wie wir vermuthen dürfen, Folgerungen aus den Regeln auszudrücken haben. Nun denke man sich einmal das Entsprechende beim Schachspiele! Dann würden die Spielregeln durch Gruppen von Schachfiguren ausgedrückt, die auch im Spiele selbst vorkommen könnten. Es müssten dann allgemeine Sätze aufgestellt sein, die besagten, wie man die Gruppen von Schachfiguren als Regeln oder als Lehrsätze der Theorie zu verstehen habe. Mit andern Worten: es müsste eine Sprache gegeben sein, deren Ausdrucksmittel die Schachfiguren und ihre Stellungen auf dem Schachbrette wären. Es könnte dann vorkommen, dass eine Figurengruppe in doppelter Weise zu betrachten wäre: erstens im Spiele selbst, wo sie gar nichts ausdrückte, sondern einfach aus einer andern Gruppe durch einen Zug entstanden wäre, wie sie denn auch durch einen weitern Zug in eine andere verwandelt werden könnte; zweitens in der Theorie des Spiels, wo sie ein Lehrsatz wäre, also einen Sinn hätte. Eine Schlussfolgerung stellte sich dann dar als Uebergang zu einer neuen Stellung, und die Regeln, nach denen solche Uebergänge geschehen müssten, würden sich ergeben aus den logischen Gesetzen und aus der Weise, wie die Schachfiguren durch ihre Stellung einen Sinn ausdrückten. Diese Regeln könnten also nicht willkührlich aufgestellt werden, und es wäre nicht zu erwarten, dass sie mit den Regeln des Schachspiels übereinstimmten. Durch diese zwiefache Rolle der Figuren und die daraus folgende Zwiefachheit von Regeln im Spiele selbst und in dessen Theorie würde der Einblick in die Sache so erschwert, dass man denken könnte, diese doppelte Rolle wäre geradezu ersonnen worden, um eine möglichst grosse Verwirrung anzurichten.

§ 109. Solche doppelte Rolle der Figuren haben wir nun hier in der formalen Arithmetik. Auch hier müssen wir erstens Regeln über die Handhabung der Figuren im Spiele selbst haben, und diese können ganz willkührlich ohne Rücksicht auf irgendeinen Sinn aufgestellt werden. Wir müssen dann zweitens Regeln haben, nach denen wir in der Theorie des Spiels diese selben Figuren als Zeichen zu behandeln haben; und diese können nicht willkührlich sein, sondern müssen sich nach dem Sinne richten, den diese Zeichen in der Theorie des Spiels durch ihre Zusammenstellungen ausdrücken. Nun ist es ein grosser Fehler, dass zwischen diesen beiden Systemen von Regeln garnicht unterschieden wird, sondern dass ohne Versuch eines Beweises ihre Uebereinstimmung vorausgesetzt wird. Es muss vielmehr zunächst angenommen werden, dass die Spielregeln ihre Geltung verlieren, sobald die Gleichungen nicht mehr als sinnlose Zusammenstellungen von Figuren, sondern als Lehrsätze der Theorie des Spiels aufgefasst werden. Das einzig durchschlagende Mittel, dies Dickicht zu lichten, ist dies, dass man die Zahlfiguren und die Rechenfiguren (wie »$+$«, »$=$«) nicht mehr in zwiefacher Weise gebraucht, sondern nur im Spiele selbst verwendet, hingegen die Regeln und die Lehrsätze der Theorie des Spiels in Worten der gewöhnlichen Sprache ausspricht. Eine Gleichung soll also für uns bei der weitern Betrachtung der formalen Arithmetik nichts besagen, keinen Sinn haben, sondern ist für uns nur eine Gruppe von Figuren, die nach den Spielregeln zu behandeln ist. Was in der inhaltlichen Arithmetik Gleichheitszeichen genannt wird, ist hier nur eine Figur, die keine Beziehung bedeutet.

Wir haben gesehen, dass die Regeln des Thomaeschen Verzeichnisses erlauben, eine Figur oder Figurengruppe durch eine andere zu ersetzen. Man wird sie so, wie wir es bei der ersten gethan haben, in Worte fassen können. Angemessener scheint es noch, die Thomaeschen Gleichungen stehen zu lassen als Figurengruppen, von denen das Spiel ausgeht, ähnlich der Grundstellung der Schachfiguren. Dann drücken sie keine Regeln aus, haben überhaupt keinen Sinn. Als Regel stellt man dann Folgendes auf: Wenn eine Gleichung gegeben ist und eine Formel, welche einen der einen Seite jener gleichgestalteten Bestandtheil enthält, so ist es erlaubt, diesen durch einen der andern Seite der Gleichung gleichgestalteten Bestandtheil zu ersetzen.

§ 110. Auch diese Regel ertheilt eine Erlaubnis wie die Regeln des Schachspiels, wobei nichts geschehen darf, was nicht durch eine Regel erlaubt ist. Man kann noch Regeln hinzufügen über die Ersetzbarkeit der Buchstaben durch andere oder durch Zahlfiguren. Auch diese Regeln werden etwas erlauben. In Wahrheit kann ja niemandem hierdurch eine Freiheit gegeben werden, die er nicht schon hat; diese Regeln werden nicht im Namen der Vernunft oder der Natur aufgestellt; nur werden durch sie einige Handlungen als zulässig im Rechenspiele anerkannt. Es handelt sich hier nicht um Wahrheit wie in der inhaltlichen Arithmetik; was der arithmetische Gesetzgeber als regelrecht anerkennen will, liegt in seinem Belieben, und dabei ist er durch keine Rücksicht auf Bedeutungen der Figuren beschränkt, die für ihn amtlich nicht vorhanden sind. Die Regeln der formalen Arithmetik sind als Richtschnuren für das Handeln den Sittengesetzen näher verwandt als den Gesetzen der inhaltlichen Arithmetik, die zwar verkannt, aber nicht übertreten werden können.

§ 111. Wenn wir die Thomaeschen Regeln oder die von uns dafür aufgestellte Regel mit denen des Schachspiels vergleichen, so fällt uns auf, dass sie von allen Zahlfiguren ohne Unterschied handeln, während im Schach von den Bauern andere Regeln gelten als von den Springern. Gäbe es keine andere Regeln in der formalen Arithmetik, so hätte es keinen Zweck, verschieden gestaltete Zahlfiguren zu gebrauchen. Wenn alle Regeln, die von den Zweifiguren handeln, ebenso von den Dreifiguren gelten sollten und umgekehrt, so hätte die Unterscheidung dieser Gestalten keinen Zweck. Wenn im Schach alle Figuren wie Bauern gehandhabt werden sollten, so könnten sie auch alle wie Bauern gestaltet sein.

Werfen wir nun einen Blick auf die inhaltliche Arithmetik zurück, so bemerken wir, dass es da zwar Gesetze giebt, die von allen Zahlen gelten, dass aber keineswegs Alles, was von einer Zahl gilt, auch von einer andern gilt. Im Gegentheil: jede Zahl ist wesentlich verschieden von jeder andern und muss daher auch ihr besonderes Zeichen haben. Soll nun die formale Arithmetik nicht jeden Zusammenhang mit der inhaltlichen verlieren, sollen nicht die mannichfachen Gestalten der Zahlfiguren ein lästiger Ueberfluss sein, so müssen den von Thomae angeführten Regeln solche hinzugefügt werden, welche nicht von allen Zahlfiguren gelten sollen, sodass jeder Verschiedenheit der Gestalt auch eine Verschiedenheit der Regeln entspreche. Solche Regeln werden z. B. sein, dass eine wie »$1 + 1$« gestaltete Figurengruppe durch eine Zweifigur, dass eine wie »$2 + 1$« gestaltete Figurengruppe durch eine Dreifigur ersetzt werden dürfe, dass man ferner eine Figurengruppe von der Gestalt »$1 - 1$« durch eine Nullfigur, eine Figurengruppe wie »$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$« durch eine Einsfigur ersetzen dürfe u. s. w. Da es nun keine feste Begrenzung des Gebietes der Zahlfiguren giebt, wird auch das Regelverzeichnis, wie es scheint, nicht endgültig abzuschliessen sein. Jedenfalls dürfen wir eine starke Unvollständigkeit des Thomaeschen feststellen.

§ 112. Wir haben uns oben bei der Frage nach dem Wesen der formalen Subtraction vorgenommen, diese Operation auch einmal als Umkehrung der Addition aufzufassen. Dazu wird hier der Ort sein. Eine erste Zahlfigur von einer zweiten subtrahiren wird dann heissen, eine dritte Zahlfigur oder eine Gruppe von Figuren hinschreiben der Art, dass jede durch Addition dieser und der ersten entstehende Figurengruppe nach den Regeln der formalen Arithmetik durch eine der zweiten gleichgestaltete Figur ersetzt werden dürfe. Hierbei ist das Addiren die oben beschriebene Handlung. Wenn z. B. eine Zweifigur von einer Dreifigur zu subtrahiren ist, so kann man eine Thomaesche Regel benutzen, nach der eine wie »$(3-2)+2$« gestaltete Figurengruppe durch eine Dreifigur ersetzbar ist. Wir sehen daraus, dass jede Figurengruppe wie »$3-2$« eine Lösung der Aufgabe ist. Aber nicht nur Lösungen von dieser Gestalt sind anzuerkennen, sondern auch solche von den Gestalten wie »$2-1$« und »1« und sehr viele andere. Zwar geht das aus den Thomaeschen Regeln nicht hervor; aber wir haben schon gesehen, dass sie unvollständig sind. Wir werden Regeln voraussetzen dürfen, nach denen auch die Figurengruppen wie »$(2-1)+2$« und »$1+2$« durch eine Dreifigur ersetzbar sind. Danach wäre also die formale Subtraction nach der Redeweise der Mathematiker eine vieldeutige Operation, weil die Aufgabe der Subtraction verschiedene Lösungen zuliesse. Hierin bestände ein wesentlicher Unterschied von der inhaltlichen Arithmetik, wo die Subtraction[1]) eindeutig ist. Wenn man in der inhaltlichen Arithmetik $3-2$ oder $2-1$ oder 1 als Lösung der Subtractionsaufgabe hinstellt, so meint man die Bedeutung, welche dieselbe ist. Wenn man an verschiedene Stellen der Tafel Einszeichen oder wie »$2-1$« gestaltete Gruppen schreibt, so haben alle diese dieselbe Bedeutung, und man hat trotz der Verschiedenheit des Ortes und der Gestalt der für die Lösung hingeschriebenen Zeichen in der inhaltlichen Arithmetik doch nur eine einzige Lösung. Hier im Rechenspiele sind die Figuren und Figurengruppen selber Lösungen, und da sie sich nach Ort und Gestalt unterscheiden, so haben wir viele Lösungen.

Man könnte dieser Folgerung auszuweichen suchen mit Berufung auf die Thomaesche formale Bedeutung der Zahlfiguren. Man würde etwa sagen: weil alle diese Figuren und Gruppen, die als Lösungen hingestellt werden, nach denselben Regeln zu handhaben sind, so haben sie dieselbe formale Bedeutung, und diese ist die eigentliche Lösung. Dagegen ist einzuwenden:

1) Selbstverständlich stimmt diese formale Subtraction eigentlich nur im Namen mit der Subtraction in der inhaltlichen Arithmetik überein; und die Sachlage wäre klarer zu erkennen, wenn auch diese scheinbare Uebereinstimmung durch Wahl eines anderen Wortes vermieden würde.

erstens, dass diese formale Bedeutung, wie oben dargelegt, garnicht anzuerkennen ist;

zweitens, dass diese formale Bedeutung, wenn zulässig, für alle Zahlfiguren dieselbe wäre, wenigstens solange man nur die Thomaeschen Regeln annimmt, die für alle Zahlfiguren gleichmässig gelten sollen;

drittens, dass dann kein weiteres Rechnen mit dem Ergebnisse der Subtraction möglich wäre, weil die Rechnungsregeln von den Zahlfiguren handeln, nicht von deren fragwürdigen formalen Bedeutungen. Man zieht ja auch im Schachspiele mit den Figuren selbst, nicht mit einem gewissen Etwas, das allen schwarzen Bauernfiguren etwa gemeinsam wäre.

Was von der Subtraction gesagt ist, kann im Wesentlichen auf die Division übertragen werden.

§ 113. Nun sagt Thomae am Ende des § 2 von der niedern Arithmetik:

„Sie weist die Eindeutigkeit (Widerspruchslosigkeit) der vier Grundoperationen mit allen Zahlen nach, mit Ausnahme der Null, mit welcher nur die Addition und Subtraktion und Multiplication eindeutig ausführbar ist, mit der aber die Division nicht eindeutig, also nicht widerspruchsfrei vollzogen werden kann. Ein Quotient, dessen Nenner 0 ist, hat keine Bedeutung, und es nimmt die Null unter den Zahlen eine singuläre Stellung ein.“

Die niedere Arithmetik, die dies nachweist, kann nur eine inhaltliche sein, und also ist damit für die formale nichts gewonnen; denn Addiren, Multipliciren, Subtrahiren, Dividiren sind eben in der inhaltlichen Arithmetik ganz verschieden von den gleichnamigen Operationen im Rechenspiele. Jene Eindeutigkeit findet hier nicht statt. Hier ist auch kein Grund anzuerkennen, weshalb den Nullfiguren eine besondere Stellung einzuräumen sei. Wenigstens in dem Thomaeschen Regelverzeichnisse ist von den Nullfiguren nicht besonders die Rede, sondern alle Zahlfiguren werden darin ganz gleich behandelt. Es ist nicht einzusehen, warum die Figurengruppe »$2:0$« oder »$\frac{2}{0}$« nicht ebenso gut als Lösung einer Divisionsaufgabe könne betrachtet werden, wie etwa »$2:3$« oder »$\frac{2}{3}$«.

In dem Satze

„Ein Quotient, dessen Nenner Null ist, hat keine Bedeutung“

sind Figurengruppen wie die oben aufgeführten offenbar Quotienten genannt[1]. Das Fehlen der Bedeutung ist nun für die formale Arithmetik kein Grund, solche Gruppen nicht zu verwenden; denn sie fragt überhaupt nicht nach der Bedeutung, und dass sie es nicht nöthig hat, ist ja der eigentliche Grund, weshalb sie der inhaltlichen vorgezogen wird. Für sie

1) Wenn der Quotient selber eine Bedeutung wäre, könnte von seiner Bedeutung schwerlich die Rede sein.

hat »$\frac{4}{3}$« ebensowenig eine Bedeutung wie »$\frac{2}{0}$«, und nach den Regeln behandelt werden kann diese Gruppe so gut wie jene [1]).

Was will nun Thomae eigentlich damit sagen, dass er einem Quotienten mit dem Nenner Null jede Bedeutung abspricht? Doch wohl, dass eine Figurengruppe, in der eine Nullfigur rechts von einem Doppelpunkte oder unter einem Bruchstriche steht, unzulässig sei. Soll damit nun gesagt sein, dass die Regeln des Rechenspiels die Erlaubnis dazu nicht geben? oder dass sie es gradezu verbieten? Im ersten Falle hätten wir einen Satz aus der Theorie des Spiels, etwa vergleichbar dem Satze beim Schach, dass ein Läufer, der auf einem weissen Felde steht, nicht auf ein schwarzes gelangen kann. Dem steht kein Verbot entgegen, aber die Erlaubnis, die für seine Bewegungen gegeben ist, reicht nicht hin, es möglich zu machen. Nun haben wir aber eine Thomaesche Regel, die das Auftreten einer solchen Figurengruppe zulässt, welche hier als unzulässig hingestellt wird. Nach dieser Regel ist es nämlich erlaubt, eine Zweifigur zu ersetzen durch die Gruppe »(2 : 0) . 0«. Wenn es also überhaupt erlaubt ist, eine Zweifigur hinzuschreiben, wäre es hiernach auch gestattet, eine wie »2 : 0« gestaltete Gruppe hinzuschreiben. Wenn dies dennoch unzulässig sein soll, so folgt das nicht aus den bisher angeführten Regeln, sondern es bedarf dazu eines Verbotes; und unser Satz

„Ein Quotient, dessen Nenner Null ist, hat keine Bedeutung“

muss dann als verbietende Regel aufgefasst werden, oder als ein Satz der Theorie des Spiels. Ist er dies, so ist er eine Folge der Spielregeln. Unter diesen muss dann aber mindestens eine verbietende sein, weil aus lauter erlaubenden Regeln kein Verbot folgen kann, welches eine erlaubende Regel einzuschränken vermöchte. In jedem Falle muss es neben erlaubenden Regeln mindestens eine verbietende geben. Als Grund für ein solches Verbot ist auf dem Boden der formalen Theorie natürlich ebenso wie für alle andern Regeln nur das Belieben des Gesetzgebers zu erkennen.

§ 114. Noch eine Frage erhebt sich hier: sind Figurengruppen wie »2 : (1 — 1)«, »2 : (2 — 2)«, »2 : (6 — 2 . 3)« zulässig? Offenbar würde Thomae das verneinen. Aber — höre ich einwenden — das ist ja selbstverständlich; 1 — 1 ist ja Null, ebenso 2 — 2 und 6 — 2 . 3. Gewiss bedeuten in der inhaltlichen Arithmetik »1 — 1«, »2 — 2« und »6 — 2 . 3« dasselbe wie das Zeichen »0«; vergessen wir aber nicht, dass wir uns hier in der formalen befinden! Hier handelt es sich um jene Figurengruppen selbst, nicht um das, was sie bedeuten; und da ist nicht zu leugnen, dass sie sich von einander und von der Nullfigur nicht nur unter-

1) Die formale Arithmetik fällt hier wohl aus der Rolle. Ueberhaupt scheint es manchmal, als ob die formale Arithmetik eigentlich die inhaltliche sei, die nur, um unbequemen Fragen zu entgehen, die Rolle der formalen zu spielen versuche, was ihr aber nicht recht gelingen wolle.

scheiden wie zwei Bauern gleicher Farbe im Schachspiele, sondern wie Figuren verschiedener Art, etwa Springer und Läufer. Nun werden Figurengruppen, die etwa wie »1—1«, »2—2« u. s. w. gestaltet sind, durch Nullfiguren ersetzbar sein. Das kommt zwar unter den Thomaeschen Regeln nicht vor; aber diese sind, wie wir gesehen haben, unvollständig. Das ist nun noch kein Grund, Figurengruppen wie »2:(1—1)« als unzulässig zu betrachten. Es läge dann allerdings ein Widerstreit der Regeln vor, indem man eine verbotene Gruppe erhielte, wenn man die wie »1—1« gestaltete Gruppe durch eine Nullfigur ersetzen wollte. Man könnte hier eine Einschränkung der die Ersetzung erlaubenden Regel durch die verbietende annehmen. Aber offenbar wird Thomae auch Figurengruppen verbieten, welche wie »2:(1—1)« gebildet sind[1]).

Wir werden den Sinn des Thomaeschen Satzes „Ein Quotient, dessen Nenner Null ist, hat keine Bedeutung“, als verbietende Regel verstanden, besser so ausdrücken:

„Es ist verboten, Figurengruppen zu bilden, in denen auf der rechten Seite eines Divisionsdoppelpunkts, eine Nullfigur oder eine Figurengruppe steht, die nach irgendeiner Regel der formalen Arithmetik durch eine Nullfigur ersetzbar ist.“

§ 115. Bei der Anwendung dieser Regel (oder dieses Lehrsatzes aus der Theorie des Rechenspiels) ergiebt sich eine Unsicherheit; denn man muss wissen, welche Figurengruppen durch eine Nullfigur unmittelbar oder mittelbar ersetzbar seien; und diese Frage ist nicht sicher zu beantworten, bevor nicht alle Regeln des Spiels aufgestellt sind. Und nun ist die Frage, ob ein vollständiges Regelverzeichnis überhaupt gegeben werden könne. Vorher müssen doch wohl alle überhaupt zulässigen Figurenklassen eingeführt sein. Wenn nach einem unvollständigen Regelverzeichnisse eine Ersetzung durch eine Nullfigur nicht möglich zu sein scheint, so kann eine später hinzukommende Regel es möglich machen und damit eine Figurengruppe, die vorher zulässig schien, unzulässig machen; und andrerseits, wenn einige Regeln die Ersetzung erlauben, kann ein später folgendes Verbot diese Erlaubnis wieder aufheben.

Um sicher zu gehen, müsste man den Grundsatz aufstellen, dass alle verbietenden Regeln grössere Kraft als die erlaubenden haben sollten, und man müsste wenigstens alle Regeln, die verbieten, eine Figur oder eine Figurengruppe durch die Null zu ersetzen, vollständig zusammenstellen, sodass jede solche Ersetzung erlaubt wäre, die nicht ausdrücklich verboten wäre; oder man müsste umgekehrt alle Regeln, die eine solche Ersetzung erlauben, vollständig zusammenstellen. Beides würde aber wegen der unübersehbaren Mannichfaltigkeit der Figuren und Figurengruppen schwer durchzuführen

1) Eine singuläre Stellung nehmen also die Nullfiguren in der formalen Arithmetik nicht ein.

sein. Bis das geschehen, ist unsere Regel unvollständig und folglich unanwendbar.

§ 116. Die Unzulänglichkeit des Thomaeschen Regelverzeichnisses macht sich noch in andrer Hinsicht bemerkbar. Nirgends ist nämlich gesagt, wie man eine Figurengruppe, die aus zwei Zahlfiguren besteht, getrennt durch einen Minusstrich, durch etwas Anderes ersetzen könne. Folglich kann man nach diesen Regeln die Figurengruppe »$(3+2)-2$« durch eine Dreifigur weder unmittelbar noch mittelbar ersetzen. Erinnern wir uns einmal daran, wie der entsprechende Satz der inhaltlichen Arithmetik bewiesen wird! Da heisst es etwa:

Nach der Definition ist $(3+2)-2$ die Zahl, welche, um 2 vermehrt, $3+2$ ergiebt. Diese Zahl ist 3; folglich fällt $(3+2)-2$ mit 3 zusammen.

Hierbei ist die Eindeutigkeit der Subtraction wesentlich, die, wie gesehen, in der formalen Arithmetik nicht gilt. Weiter ist wesentlich, dass die Zeichengruppe »$(3+2)-2$« eine Bedeutung hat, auf die man mit dem bestimmten Artikel („*die* Zahl, welche") und mit dem Demonstrativpronomen („*Diese* Zahl") hinweisen kann. Auch dies fällt im Rechenspiele weg. Von einer Definition kann hier nicht gesprochen werden; denn der Minusstrich ist hier kein Subtractionszeichen, er bedeutet überhaupt nichts; statt einer Definition giebt es hier nur Regeln für die Handhabung dieses Striches; aber grade eine Regel fehlt, welche für unsern Zweck brauchbar wäre. Daher fehlt uns nach den Thomaeschen Regeln auch die Möglichkeit, die Figurengruppe »$((3+2)-2)-3$« umzuformen in eine wie »$3-3$« gestaltete. Danach würden wir also die Gruppe »$2:[((3+2)-2)-3]$« als erlaubt ansehen können.

Nach den Thomaeschen Regeln können wir auch die Figurengruppe »$(3.2):2$« nicht durch eine Dreifigur ersetzen; denn eine Regel, nach welcher eine Figurengruppe, bestehend aus zwei durch einen Doppelpunkt getrennten Zahlfiguren, durch etwas Anderes ersetzt werden könnte, findet sich nicht vor.

Wir wollen diesem Mangel abzuhelfen suchen nicht durch Aufstellung einer neuen Regel, sondern indem wir die am Ende des § 109 angegebene Regel benutzen und den Thomaeschen Formeln folgende beiden hinzufügen »$(a+a')-a'=a$« und »$(a.a'):a'=a$«. Diese sind nun gleichfalls Figurengruppen, von denen das Spiel ausgeht. Vorausgesetzt wird dabei wie auch sonst eine Regel, die angiebt, wie man Buchstaben durch Zahlfiguren ersetzen kann.

§ 117. Wenn wir hierbei das oben (§ 114) aufgestellte Verbot nicht beachteten, könnten wir aus der Figurengruppe »$3.0=0$« und der aus unserer zweiten neuen Formel durch Ersetzung der Buchstaben durch Zahlfiguren gewonnenen »$(3.0):0=3$« die Gruppe »$0:0=3$« herstellen und ebenso auch die Gruppe »0:0=4«. Aus diesen beiden könnten wir dann weiter die Gruppe »3=4« gewinnen. Und hierin liegt vielleicht der Grund für Thomaes Ausspruch, dass die Division nicht immer eindeutig, also nicht widerspruchsfrei vollzogen werden könne [1]). Aber hier in der formalen Arithmetik liegt zunächst gar kein Widerspruch vor. Warum sollte nicht eine Gruppe wie »3=4« erlaubt sein? In der inhaltlichen Arithmetik darf sie freilich mit dem Anspruch auf Geltung nicht vorkommen, weil es da auf die Bedeutungen der Zahlzeichen ankommt, die verschieden sind. Dieser Grund fällt hier weg. Eine Figurengruppe wie »3=4« hinzuschreiben, ist bisher wenigstens nicht verboten worden. Erst wenn man ein solches Verbot erlässt, entsteht ein Widerspruch, oder besser Widerstreit der Regeln, die theils verbieten, theils erlauben.

§ 118. Nun sagt Thomae in § 2 unmittelbar nach seinem Regelverzeichnisse:

„Subtraction und Division wird durch Einführung der neuen Zahlen zur Addition und Multiplication. Da die gesammte Arithmetik andre als diese *vier*, oder, wenn man will *zwei* Rechnungsoperationen nicht kennt, so sind neue Gebilde in der ganzen Arithmetik widerspruchsfreie, wenn sie den vier (oder zwei) Grundoperationen gegenüber widerspruchsfrei sind."

Dieser Ausspruch ist schwer verständlich. Zunächst kann man bezweifeln, ob die gesammte Arithmetik andere Operationen als die genannten nicht kenne. Die Grenzübergänge wenigstens scheinen sich nicht auf jene Operationen zurückführen zu lassen. Uebrigens müsste man, um einen solchen Ausspruch thun zu können, eigentlich die gesammte Arithmetik kennen, was unmöglich ist, da diese Wissenschaft nicht abgeschlossen ist und wohl nie abgeschlossen werden wird.

Ferner muss es auffallen, dass von einer Figur die Widerspruchsfreiheit ausgesagt wird. Es würde seltsam berühren, wenn hinsichtlich einer Schachfigur der Argwohn laut würde, sie könnte einen Widerspruch enthalten. Erinnern wir uns aber an die Thomaesche Ausdrucksweise, wonach der Umstand, dass Regeln unter Anderem von einer gewissen Figur handeln, als Verhalten dieser Figur gegenüber den Regeln erscheint, und wonach nun wieder dies Verhalten als Inhalt der Figur bezeichnet wird, so sehen wir, dass ein Widerstreit, der etwa zwischen den Regeln des Schachspiels obwaltete, in das Innere einer Schachfigur verlegt erschiene. Um also zu einem Verständnisse zu gelangen, werden wir den Widerspruch wieder zurück in die Regeln verlegen müssen.

§ 119. Nun ist ferner zu fragen, was unter einem Widerspruche den Grundoperationen gegenüber zu verstehen sei. Hier ist wohl der oben

1) Hierbei fällt das „also" auf, da ja das Ausziehen einer Quadratwurzel im Allgemeinen nicht eindeutig vollzogen werden kann, ohne dass dadurch ein Widerspruch entstände.

berührte Thomaesche Satz [1]) heranzuziehen, dass mit der Null die Division nicht widerspruchsfrei vollzogen werden könne. Danach ist zu vermuthen, dass nach Thomae eine Figur einen Widerspruch einer Operation gegenüber enthalte, wenn diese Operation nicht widerspruchsfrei mit der Figur vollzogen werden könne. Demnach wären die Nullfiguren nicht widerspruchsfrei der Division gegenüber, also überhaupt nicht widerspruchsfrei in der Arithmetik.

Ein solcher Widerspruch kann nur dadurch zu Stande kommen, dass die besonderen von einer Figurenklasse geltenden Regeln den allgemeinen von allen Zahlfiguren geltenden widerstreiten. Da diese nun nach dem Thomaeschen Verzeichnisse sämmtlich erlaubender Art sind, so ist ein Widerspruch nur zu befürchten, wenn unter den besondern Regeln, die von einer Figurenklasse handeln, auch verbietende vorkommen. Dies findet bei den Nullfiguren in der That statt. Aber auch sonst kommt es vor. Denn immer bei der Einführung einer neuen Figurenklasse wird es nöthig sein, zu bestimmen, dass diese Figuren nicht die linke Seite einer Gleichung bilden dürfen, deren rechte Seite eine Nullfigur ist. Es werde z. B. die Klasse der wie »$\sqrt{2}$« gestalteten Figuren eingeführt. Wenn wir nun nicht wissen, ob eine Gleichung wie »$0 = \sqrt{2}$« erlaubt sei, so wissen wir auch nicht, ob wir die Gruppe »$2:\sqrt{2}$« bilden dürfen; also wissen wir auch nicht, ob wir eine Zweifigur durch eine Gruppe wie »$(2:\sqrt{2}).\sqrt{2}$« ersetzen dürfen. Es nützte uns auch nichts, wenn uns viele Versuche misslungen wären, nach den allgemeinen und den besondern Regeln für die wie »$\sqrt{2}$« gestalteten Figuren eine Gleichung wie »$0 = \sqrt{2}$« herzustellen; denn viele misslungene Versuche sind noch kein Beweis der Unmöglichkeit, und besonders dann nicht, wenn man den Versuchen kein abgeschlossenes Regelverzeichnis zu Grunde legen kann. Ebenso müssten Figurengruppen wie »$0 = 1 - \sqrt{2}$« und unzählige andere verboten werden.

Ob nun alle diese verbietenden Regeln etwa in eine einzige oder in wenige zusammengefasst werden können, mag uns hier nicht weiter kümmern. Jedenfalls kommen unter den besondern von den wie »$\sqrt{2}$« gestalteten Figuren geltenden Regeln auch verbietende vor, und dass sie mit den allgemeinen nicht in Widerstreit gerathen können, kann daraus nicht gefolgert werden, dass diese allgemeinen Regeln untereinander im Einklange sind. Jede neu einzuführende Figurenklasse wird besondere Regeln nöthig machen, unter denen auch verbietende sein werden. Denn wenn von den neuen Figuren genau dieselben Regeln gelten sollten, wie von denen einer alten Klasse, so wäre für die Wahl einer besondern Gestalt kein Grund vorhanden. Wenn z. B. von den wie »i« gestalteten Figuren genau dieselben Regeln gelten sollten, wie von den Einsfiguren, so brauchte man jene Figuren nicht. Wenn aber die Regeln zum Theil verschieden sind, so verbürgt das Zusammenstimmen der von den Einsfiguren handelnden Regeln nicht dasselbe hinsichtlich der wie »i« gestalteten Figuren.

1) A. a. O. Ende des § 2.

Der Satz, dass die formale Arithmetik eine vollkommen widerspruchsfreie Begründung zulasse, entbehrt demnach des Beweises, und seine Wahrheit unterliegt im Gegentheile grossen Zweifeln. Thomaes entgegengesetzte Meinung beruht auf dem Irrthume, dass die in seinem § 2 aufgeführten Regeln ein vollständiges Verzeichnis bilden, und besonders darauf, dass er ganz die verbietenden Regeln übersieht, die jede neue Figurenklasse nothwendig mit sich führt.

§ 120. Thomae fährt fort:

„Da für die Weiterbildung des Zahlenbegriffes doch an einer gewissen Stelle einmal die formale von Beziehungen auf Sinnesobjecte freie Auffassung eintreten muss, so entscheiden wir uns für dieselbe schon bei den negativen und gebrochenen Zahlen."

Hierbei ist vorausgesetzt, dass jede Auffassung der Zahlen, wodurch diese nicht zu Sinnesobjecten in Beziehung gesetzt werden, eine formale im Thomaeschen Sinne sei, oder umgekehrt ausgedrückt, dass jede inhaltliche Arithmetik die Zahlen zu Sinnesobjecten in Beziehung setze. Das ist ein Irrtum. In unserm ersten Bande hat uns offenbar nichts ferner gelegen, als die Zahlzeichen als Figuren zu behandeln und diese Figuren Zahlen zu nennen; es hat uns aber auch nichts ferner gelegen, als die Arithmetik auf sinnliche Wahrnehmung zu gründen und Haufen von sinnlichen Dingen Zahlen zu nennen. Unter der Anzahl Null verstehen wir nicht eine gewisse rundliche Figur; sondern diese ist uns nur ein Zeichen für das, was mir meinen, und was wir als vorhanden anerkennen, obwohl es weder ein physischer Körper, noch eine Eigenschaft eines solchen ist. Also, wie sehr wir auch damit einverstanden sind, dass die Arithmetik sich vor jeder Bezugnahme auf sinnliche Dinge zu hüten habe, dass demnach die Zahlzeichen nichts Sinnliches bedeuten, so sehr betonen wir andrerseits, dass diese Zeichen deshalb nicht bedeutungslos sind, und lehnen es ab, sie selbst Zahlen zu nennen.

§ 121. Wir wenden uns nun zum § 3 der Thomaeschen Darlegung. Wir lesen dort:

„Die gemeinen Zahlen lassen sich in Reihe ordnen oder sie lassen sich dem Begriffe der Grösse unterordnen. Es ist $3 > 2$ und $3 > -4$ und $9:10 > 8:9$, weil in $9:10 = 81:90$ der Zähler grösser ist als der Zähler 80 in $80:90 = 8:9$, während die Nenner gleich sind."

Es fällt hier auf, dass das Ordnen in Reihe und das Unterordnen unter den Begriff Grösse als dasselbe behandelt wird. Ist ein Buch darum eine Grösse, weil es mit andern Büchern in Reihe geordnet werden kann? Ist es dabei ganz einerlei, wie die Ordnung geschieht? Dann wäre ja eigentlich Alles Grösse, z. B. die Schläge einer Uhr, die Buchstaben des Wortes „Grösse". Wir können auch Schachfiguren in Reihe ordnen; sind sie darum

Grössen? Eher könnte man denken, dass die Anerkennung von Dingen als Grössen der Anordnung vorherginge und das Princip dazu lieferte.

Wenn sonst Dinge in Reihe geordnet sind, hat jedes Ding mindestens ein benachbartes. Das scheint hier nicht der Fall zu sein. Diese ganze Stelle ist nur zu verstehen, wenn die inhaltliche Arithmetik bekannt ist; und dann ist die formale überflüssig. Stellen wir uns auf den Thomaeschen formalen Standpunkt, so fehlt uns jede Angabe, wie die Zahlfiguren geordnet werden sollen. Dazu scheint freilich das Zeichen »$>$« dienen zu sollen; aber wir kennen dessen Bedeutung nicht. Nach der Idee der formalen Arithmetik müssten wir es als Figur auffassen, die — wenigstens im Rechenspiele — keine Bedeutung hätte; über deren Handhabung aber Regeln gegeben wären. Indessen fehlen hier solche Regeln vollständig; und diese Auffassung verbietet sich dadurch, dass »$3 > 2$« als Bestandtheil des Behauptungssatzes „Es ist $3 > 2$“ auftritt, woraus zu entnehmen ist, dass ein Gedanke damit verbunden werden soll. »$3 > 2$« ist also nicht etwas, womit im Rechenspiele Veränderungen vorgenommen werden — vergleichbar einer Stellung von Schachfiguren —; sondern es wird ein Satz aus der Theorie des Spiels sein. Aus den früher (§ 109) entwickelten Gründen verwerfen wir hier den Gebrauch der Zahlfiguren und suchen den Inhalt in Worten auszusprechen, etwa so:

„Jede Dreifigur ist grösser als irgendeine Zweifigur“,

wobei die Wörter „jede“ und „irgendeine“ freilich auf gut Glück gewählt sind. Die Bedeutung der Worte „grösser als“ ist dabei noch zu bestimmen. Jedenfalls sind sie weder im geometrischen Sinne noch in dem der inhaltlichen Arithmetik zu nehmen; denn in dieser haben wir eine Beziehung zwischen den Zahlen selbst, den Bedeutungen der Zahlzeichen, Bedeutungen, die für das Rechenspiel nicht vorhanden sind. Was der Sinn des Satzes

„Die Zahlfigur a ist grösser als die Zahlfigur b“

sei, erfahren wir nicht. Wir können nur vermuthen, dass es sich um eine Beziehung handle, durch welche die Zahlfiguren in Reihe geordnet werden. Das Wesen dieser Beziehung und ihr Zusammenhang mit den Spielregeln bleibt uns dunkel.

§ 122. Unverständlich ist auf dem Boden der formalen Arithmetik der Satz von Thomae, dass die Null die Schranke für das Kleiner und Kleinerwerden einer positiven Zahl bildet. Also eine Zahlfigur ändert sich während des Spiels? von selbst? in einer für ihre Behandlung im Spiele wesentlichen Eigenschaft? Unverständlich sind auch die Sätze, dass es unter den positiven Zahlen keine kleinste giebt, dass eine gemeine Zahl, die nicht negativ, aber kleiner ist als jede angebbare positive Zahl, nothwendig Null ist. Welche Null? Es giebt viele Nullfiguren. Ist »$1 - 1$« eine Nullfigur? Gleich darauf wird gesagt:

„In diesem wichtigen Satze wird eine Zahl, die Zahl Null, durch ein negatives Kriterium erkannt.“

Die Zahl Null? Welche? „Null“ wird hier als Eigenname behandelt. Das ist richtig in der inhaltlichen, falsch in der formalen Arithmetik. Was ist in dieser eine gemeine Zahlfigur? was eine positive? was eine negative Zahlfigur? Die angeführten Sätze werden der Theorie des Spiels angehören und aus den Spielregeln folgen. Wie und aus welchen, bleibt dunkel. Die Wörter „gemein“, „positiv“ und „negativ“ werden Eigenschaften der Zahlfiguren bezeichnen, die bei der Anwendung der Regeln in Betracht kommen, wie etwa „schwarz“ und „weiss“ beim Schachspiel. Zufällige kleine Verschiedenheiten der Gestalt oder der Farbe der Figuren, von denen die Regeln nicht handeln, können auch für die Theorie des Spiels nicht in Betracht kommen. Nun fragen wir: wie lauten die Regeln, die auf die eben genannten Eigenschaften der Figuren Bezug nehmen? Welche Regel macht einen Unterschied zwischen positiven und negativen, gemeinen und nicht gemeinen Zahlfiguren? Keine Antwort! Wir sehen wohl: der Formalarithmetiker fällt hier wieder einmal aus der Rolle. Die formale Auffassung ist ein Schild, den man vorhält, so lange Fragen nach der Bedeutung der Zeichen drohen. Wenn diese Gefahr vorüber, lässt man ihn sinken; denn lästig ist er im Grunde doch.

§ 123. Thomae meint, man könne von einer Zahl zu immer grössern und grössern fortschreiten, weil der Neubildung mittels Addition durch nichts eine Schranke gesetzt sei. Gewiss ist der Neubildung eine Schranke gesetzt, ebenso wie dem Wachsthume einer Stadt. Wir haben weder eine unendliche Tafelfläche, noch unendlich viel Kreide zur Verfügung. Zahlfiguren sind eben Gebilde, welche durch Schreiben erzeugt werden. Eine unstoffliche, unräumliche Zahlfigur ist zu vergleichen mit einem Luftschlosse; aber auch den Luftschlössern sind Schranken gesetzt. Die Phantasie verleiht Flügel; aber auch diese werden zuletzt matt.

Ob eine Neubildung von Zahlfiguren mittels Addition stattfinde, mag bezweifelt werden. So entstehen Gruppen von Zahlfiguren und Additionskreuzen. Ob solche Gruppen als Zahlfiguren anzusehen seien, bleibt zweifelhaft, da nirgends gesagt ist, was eine Zahlfigur sei.

Wir bemerken, dass Thomae wie bei der Null auch beim Unendlichen die Gefahr von Widersprüchen sieht. Die von ihm selbst angeführten Regeln sind sämmtlich erlaubende, können also nicht in Widerstreit mit einander gerathen, mag man nun nach ihnen Figuren behandeln, welche man wolle, und ob eine Achtfigur liegt oder steht, kann keinen Unterschied machen, wenn nicht noch besondere Regeln von den liegenden Achtfiguren gelten. Von solchen ist aber hier noch keine aufgeführt worden.

Das Unendliche wird hier ausdrücklich Begriff genannt ohne Angabe eines Grundes. Warum ist es nicht einfach eine Figur? Das actuelle Unendliche, für das G. Cantor mit Recht eintritt, ist allerdings keine Figur und dürfte in der formalen Arithmetik überhaupt keine Stelle haben.

§ 124. Wie wird nun das Irrationale in die formale Arithmetik eingeführt? Auf den ersten Anblick ganz wie bei Cantor, dessen Fundamentalreihen den Zahlreihen Heines und den Zahlenfolgen Thomaes entsprechen. Aber die Glieder der Cantorschen Fundamentalreihen sind nicht sichtbare, greifbare Figuren, sondern unsinnlicher Art, wie es scheint, wohingegen die Zahlreihen Heines und die Zahlenfolgen Thomaes offenbar aus sinnlichen Figuren bestehen sollen. Wenn diese Auffassung richtig ist, so ist jene Aehnlichkeit der Theorien nur äusserlich und unwesentlich. Obwohl klare Aussprüche dieser Schriftsteller, wie es scheint, darüber fehlen, dürfen wir wohl vermuthen, dass die reihende Beziehung bei Heine und Thomae räumlich ist. Wir nehmen an, dass eine Heinesche Zahlenreihe ebenso wie eine Thomaesche Folge von Zahlen eine Gruppe von Zahlfiguren sei, die von links nach rechts in nicht zu grossen Abständen nebeneinander geschrieben sind, und dass jede dieser Figuren ein Term dieser Folge genannt werde. Man wird noch hinzufügen müssen, dass zwischen den einzelnen Termen nur leere Tafelfläche sichtbar sein dürfe.

Nun ist der Heineschen Darstellung zu entnehmen, dass eine solche Reihe ins Unendliche fortlaufen solle. Um sie herzustellen, brauchten wir aber eine unendlich lange Tafel, unendlich viel Kreide und unendlich lange Zeit. Man mag es als unerhört grausam schelten, einen so hohen Geistesflug durch einen so hausbackenen Einwand niederschlagen zu wollen; aber damit wird dieser nicht widerlegt. Wenn man die Zahlen zu greifbaren Figuren macht und sich auf diese ihre Greifbarkeit stützt, um ihrer Existenz sicher zu sein, nun dann muss man sie auch allen Bedingungen eines solchen stofflichen Daseins unterwerfen. Hier erkennen wir ein sonderbares Verhängnis, dass bei Heine grade durch die Greifbarkeit der Zahlen die Existenz der Zahlenreihen und damit zugleich die der irrationalen Zahlen vernichtet wird, die doch durch eben diese Greifbarkeit gewährleistet werden sollte.

Heine stellt nun die Forderung auf, einer jeden Zahlenreihe ein Zeichen hinzuzufügen, und sagt:

„Man führt als Zeichen die Reihe selbst ein, diese in eckige Parenthesen gesetzt, sodass z. B. das zur Reihe a, b, c etc. gehörende Zeichen [a, b, c etc.] ist."

Um hiervon Gebrauch machen zu können, müsste man erst die Kunst erfinden, eine ins Unendliche fortlaufende Reihe in Parenthesen zu setzen.

Heine definirt weiter:

„Allgemeinere Zahl oder Zahlzeichen heisst das zu einer Zahlreihe gehörende Zeichen."

Demnach wäre eine in eckige Parenthesen gesetzte Zahlenreihe, falls es eine solche gäbe, eine allgemeinere Zahl. Wir erkennen hieraus, dass die Zahlenreihen nicht in ihrer ursprünglichen Nacktheit, sondern in ihrer

Bekleidung mit eckigen Klammern den eigentlichen Gegenstand der Heineschen Betrachtung bilden sollen [1]).

§ 125. Thomae sucht die Schwierigkeit, die das Fortlaufen einer Reihe ins Unendliche für die formale Arithmetik hat, durch eine Definition der unendlichen Folge zu umgehen. Er sagt im § 5:

„Eine Folge von (zunächst gemeinen) Zahlen (a_1 a_2 a_3 . . a_n . .) heisst eine unendliche Folge, wenn kein Term in ihr ein letzter ist, sondern wenn nach einer zu gebenden Vorschrift immer wieder neue und neue Terme gebildet werden können."

Wenn wir nicht wüssten, wohinaus Thomae wollte, könnten wir an eine in sich zurücklaufende Anordnung von Zahlfiguren denken. Da dies offenbar nicht gemeint ist, so muss eine Folge von Zahlfiguren immer zwei Enden haben, und ein Term wird immer der letzte sein. Wegen des letzten mit „sondern" anfangenden Satzes ist jedoch anzunehmen, dass „letzter" hier nicht im gewöhnlichen Sinne zu nehmen ist. Ich setze hier unten eine Zahlenfolge [2]) hin

2 3 5

und frage: ist sie nach Thomae eine unendliche? Wenn die Zweifigur erster Term genannt wird, so wird nach dem Sprachgebrauche die Fünffigur letzter Term zu nennen sein. Danach hätten wir keine unendliche Folge. Aber der Nachdruck liegt in der Thomaeschen Erklärung auf dem Können. Die Fünffigur ist nach Thomae nicht letzter Term, wenn nach einer zu gebenden Vorschrift immer neue und neue Terme gebildet werden können. Es ist aber dazu nicht nöthig, dass immer neue und neue Terme wirklich gebildet werden; die Möglichkeit genügt; die Folge braucht, solange sie besteht, nie mehr als jene drei Terme zu enthalten und wäre doch eine unendliche, wenn jene Möglichkeit bestände. Besteht sie? Für einen allmächtigen Gott, ja; für einen Menschen, nein. Wir stossen hier auf den schwierigen Begriff des Möglichen, sehen aber, dass es für die Entscheidung unserer Frage ganz gleichgültig ist, aus welchen Termen unsere Folge besteht. Die Folgen werden hierdurch nicht eingetheilt in endliche und unendliche, sondern entweder werden sie sämmtlich endlich, oder sämmtlich unendlich sein, je nach dem Sinne, den wir mit dem Worte „können" verbinden. Wir haben einen ähnlichen Fall bei einer Häuserreihe, die sich von einer Stadt aus allmählich ins Feld verlängert. Wir können definiren: „Eine Reihe von Häusern heisst eine unendliche Reihe, wenn kein Haus in ihr ein letztes ist, sondern wenn nach einer zu gebenden Vorschrift immer neue und neue Häuser gebaut werden können." Setzen wir dabei

1) Uebrigens ist der bestimmte Artikel vor „zu einer Zahlenreihe gehörende Zeichen" auffallend, da man ja verschiedene Zeichen derselben Zahlenreihe zuordnen kann, von welcher Möglichkeit Heine auch Gebrauch macht.

2) Im Folgenden mag sie die Folge F heissen. Sie soll in den folgenden Betrachtungen als Beispiel zu Grunde gelegt werden.

menschliches Können voraus und verstehen wir das Wort „immer“ im strengsten Sinne, so wird hiernach keine Häuserreihe eine unendliche sein. Unter denselben Voraussetzungen und aus demselben Grunde ist keine Folge von Zahlfiguren eine unendliche; denn wir sehen voraus, dass die Möglichkeit der Fortsetzung einmal aufhören wird.

Wir erkennen wohl, wie vergeblich es ist, uns durch eine Definition über die Beschränktheit unseres Könnens täuschen zu wollen.

§ 126. Aber zu welchem Zwecke brauchen wir denn unendliche Zahlenfolgen? Aus der Beantwortung dieser Frage wird sich vielleicht deutlicher erkennen lassen, was wir unter diesem Ausdrucke zu verstehen haben. Thomae schreibt:

„Eine Folge $(\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ .\ .\ \delta_n\ .\ .)$ heisst eine Nullfolge, es wird ihr die Zahl Null durch das Gleichheitszeichen zugeordnet

$$0 = (\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ .\ .\ \delta_n\ .\ .),$$

wenn die Zahlen $\delta_1\ \delta_2\ .\ .\ \delta_n\ .\ .$ mit wachsendem Index beliebig klein werden, sodass für jede noch so kleine Zahl σ ein n so gefunden werden kann, dass alle Terme $\delta_n\ \delta_{n+1}\ \delta_{n+2}\ .\ .\ .$ absolut genommen kleiner als σ sind.“

Hier stören die Bezeichnungen. Wir wissen z. B. noch nicht, was ein Index bei einer Zahlenfolge ist. In dem Gebilde »$(\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ .\ .\ \delta_n\ .\ .)$« sieht man zwar Indices; aber diese Vereinigung von Buchstaben, Ziffern, Pünktchen und Klammern ist keine Zahlenfolge.

Wir werden wohl nicht fehlgehen, wenn wir unter dem Index eines Terms einer Folge eine Ordnungszahl verstehen, die angiebt, der wievielste dieser Term in der Folge ist. Das n, von dem in der Thomaeschen Erklärung die Rede ist, wird also nicht eine Zahlfigur, sondern eine Zahl sein. Nehmen wir an, wir hätten als solches n in einem Falle gefunden $9^{(9^9)}$! Dürfen wir nun die Worte „der $9^{(9^9)}$te Term der Folge F“ gebrauchen? Nicht eher, als wir wissen, dass die Folge $9^{(9^9)}$ Terme enthalte. Sonst ist „der $9^{(9^9)}$te Term der Folge F“ ein Eigenname ohne Bedeutung, weil ein $9^{(9^9)}$ter Term einen $(9^{(9^9)} - 1)$ten voraussetzt. Dabei ist zu beachten, dass Terme, die nicht hingeschrieben sind, nicht vorhanden sind; denn die Terme sind Zahlfiguren, und Zahlfiguren sind durch Schreiben erzeugte Gebilde. Könnten wir aber nicht vom $9^{(9^9)}$ten Terme der Folge F sprechen mit dem Zusatze „falls er vorhanden wäre“? Ja, ebenso wie vom ältesten Manne, der auf dem hundertsten Grade nördlicher Breite wohnt, falls er vorhanden wäre. Man mag von solchem interessant fabuliren; aber in die Wissenschaft gehört es nicht hinein.

Wenn also Thomae unter »δ_n« den $n$ten Term einer Folge versteht, so begiebt er sich ins Reich der Dichtung, sobald die Zahl n so gross ist, dass nicht mehr mit Sicherheit das Vorhandensein sovieler Terme angenommen werden kann.

Wenn von einer noch so kleinen Zahl σ die Rede ist, müssen wir uns erinnern, dass „Zahl" hier soviel wie „Zahlfigur" bedeutet, dass auf der ganzen Erde nur eine endliche Menge von Zahlfiguren vorhanden ist und dass wir daran durch Hinschreiben neuer Zahlfiguren nichts ändern können. Man weise nicht auf unendlich viele mögliche Zahlfiguren hin; denn nur die wirklichen sind Zahlfiguren. Eine blos mögliche ist gar keine Zahlfigur. Vielleicht haben wir eine Vorstellung einer Zahlfigur und halten es auch für möglich, eine solche hinzuschreiben; aber dann haben wir eben nur eine Vorstellung, keine Zahlfigur. Ferner ist es sehr zweifelhaft, ob es möglich sei, unendlich viele Zahlfiguren zu bilden. Von einer unbegrenzten Annäherung an die Nullfiguren kann hier also garnicht die Rede sein, selbst wenn wir eine Beziehung zwischen Zahlfiguren zugeben wollten, die durch die Worte „absolut kleiner als" bezeichnet würde.

§ 127. Beim Worte „alle" macht Thomae folgende Anmerkung:

„Da alle Terme nicht angeschrieben werden können, so ist unter „„alle"" hier wie in ähnlichen Fällen zu verstehen, soviel man auch Terme bilden mag, oder, um negativ zu reden, von einem bestimmten Index ab ist kein Term $> \sigma$."

Hierbei ist einiges zu erinnern. Die Nullfolgen sollen ohne Zweifel unendlich sein; d. h. es soll möglich sein, immer neue und neue Terme zu bilden, d. h. hinzuschreiben. Nun wird hier gesagt, dass alle Terme nicht angeschrieben werden können. Daraus ist zu entnehmen, dass eine Nullfolge nach Thomae besteht erstens aus Termen, die angeschrieben sind, zweitens aus Termen, die nicht angeschrieben sind, aber angeschrieben werden können, und, wie es scheint, drittens aus Termen, die nicht angeschrieben werden können. Dem entsprechend würde etwa eine unendliche Häuserreihe bestehen erstens aus Häusern, die gebaut sind, zweitens aus solchen, die nicht gebaut sind, aber gebaut werden können, und drittens aus Häusern, die weder gebaut sind, noch gebaut werden können. Eine solche Häuserreihe würde also, im Wirklichen anfangend, sich durch das Reich des blos Möglichen bis ins Unmögliche erstrecken. Eine merkwürdige Häuserreihe!

§ 128. Sollte nicht der Formalarithmetiker hier wieder seinem Plane untreu geworden sein? Wir wissen, wie nahe das liegt, weil wir nun einmal gewohnt sind, die Zahlfiguren als Zahlzeichen zu betrachten, nämlich als Eigennamen, die etwas bezeichnen. Daher wirkt das Häuserbeispiel so befreiend, weil die Erinnerung an die inhaltliche Arithmetik hier wegfällt, während kein Unterschied besteht, der für unsere Frage in Betracht käme; denn sowohl Häuser, als auch Zahlfiguren sind Erzeugnisse zweckbewusster menschlicher Thätigkeit, und darauf allein kommt es an. Könnte man doch die Häuser selbst statt der Zahlfiguren verwenden. Das Bauen entspräche dem Hinschreiben, das Niederreissen dem Auslöschen. Hinschreiben und Auslöschen sind ja die Spielhandlungen im Rechenspiele. Man könnte also leicht alle Spielregeln diesem Falle anpassen.

In der inhaltlichen Arithmetik hat es ja nichts Befremdliches, zu sagen, dass alle Terme einer Folge nicht hingeschrieben werden können; denn was da hingeschrieben wird, sind Zeichen der Terme. Hierdurch werden die Terme selbst nicht geschaffen, und deren Bestand wird durch das Hinschreiben oder Nichthinschreiben garnicht berührt. Ganz anders im Rechenspiele! Hier sind die Zahlfiguren selbst die Terme. Nicht hingeschriebene Zahlfiguren sind so wenig vorhanden wie nicht gebaute Häuser. Wenn nur drei Terme angeschrieben sind, so besteht die Folge auch nur aus drei Termen. Wie könnte man hier noch sagen, dass alle Terme der Folge nicht angeschrieben werden können! Was kann im Rechenspiele eine Zahlenfolge anderes sein als ein Ganzes, eine Gruppe, bestehend aus geschriebenen Figuren? Wenn eine solche Gruppe nicht angeschrieben werden kann, so kann sie nicht entstehen. Und da es solche Zahlenfolgen nicht von Ewigkeit her giebt, so giebt es dann überhaupt keine und wird es keine geben. Wenn aber eine Zahlenfolge hingeschrieben wird, so werden alle ihre Terme hingeschrieben; denn nur in ihnen hat sie ihren Bestand.

Thomae gebraucht in seiner Anmerkung den Ausdruck „soviele man auch Terme bilden mag“; wenn hier statt „bilden mag“ stände „gebildet hat und bilden wird“, so wäre nichts dagegen zu sagen. Aber Terme, welche nur möglich sind, aber nie hingeschrieben werden, sind in der formalen Arithmetik keine Terme.

Ebensowenig wie zu befürchten steht, dass die Bäume in den Himmel wachsen, können die Zahlenfolgen ohne Ende fortgesetzt werden. Jede wird einmal ihre grösste Länge erreicht haben. Betrachten wir unsere Folge F in diesem Augenblicke! Die Anzahl ihrer Terme sei dann n; der $(n-1)$te Term sei eine Zweifigur, der $n$te eine Einsfigur. Wir werden dann vielleicht sagen können: alle auf den $(n-2)$ten folgenden Terme sind kleiner als eine Dreifigur; ebenso auch: alle auf den $(n-1)$ten folgenden Terme sind kleiner als eine Zweifigur, und endlich: alle auf den $n$ten folgenden Terme sind kleiner als eine Einsfigur; da nämlich auf den $n$ten kein Term folgt noch folgen wird. Negativ können wir auch sagen: Kein auf den n-Term folgender ist grösser als eine Einsfigur. Danach wäre also unsere Folge eine Nullfolge. Mit demselben Rechte freilich könnten wir behaupten: kein auf den $n$ten Term folgender ist kleiner als eine Neunfigur. Denn da es überhaupt keinen auf den $n$ten Term folgenden giebt, giebt es auch keinen solchen, der kleiner wäre als eine Neunfigur.

Das ist die Weise, wie Thomaes Worte streng genommen verstanden werden müssen; aber offenbar sollen sie nicht so verstanden werden.

§ 129. Denken wir an folgenden Fall! Uns sei eine Vorschrift *V* gegeben zur Fortsetzung unserer Folge *F*. Wir können nun, nehmen wir an, ohne etwas über die zukünftige Länge unserer Folge zu wissen, aus der Beschaffenheit der Vorschrift den Satz folgern, dass alle Terme, wenn es einmal solche geben sollte, welche nach unserer Vorschrift hingeschrieben und durch einen Index grösser als hundert zu kennzeichnen wären, kleiner sein werden als eine Einsfigur. Wenn nun ein solcher Satz zu folgern ist für jede positive Zahlfigur σ statt der Einsfigur, wobei nur statt der Zahl hundert eine andere zu nehmen wäre, so wird Thomae die Folge wohl für eine Nullfolge erklären.

Hierbei muss jedoch immer im Auge behalten werden, dass die Menge der positiven Zahlfiguren eine endliche ist und stets bleiben wird.

Ferner bemerken wir, dass die Möglichkeit solcher Folgerungen von der Vorschrift hauptsächlich abhängt, diese aber durch die Folge *F*, wie sie uns vor Augen steht, garnicht bestimmt ist. Das würde eher zur Definition einer Nullvorschrift als zu der einer Nullfolge berechtigen.

§ 130. Aber auch eine Nullvorschrift würde sich so nicht definiren lassen. Dass der Satz „alle nach der Vorschrift *V* gebildeten Terme, deren Index grösser als hundert ist, sind kleiner als eine Einsfigur“ aus dem Wesen der Vorschrift *V* folge, kann nicht als Merkmal gebraucht werden. Es ginge noch, wenn er ganz formal folgte, etwa wie aus dem Satze „*A* ist ein *B*“ folgt „es giebt ein *B*“ ganz unabhängig von den Bedeutungen von »*A*« und »*B*«, nur vorausgesetzt, dass diese Zeichen etwas bedeuten. Aber das ist hier offenbar nicht der Fall. Wir kennen zwar nicht die Bedeutung der Worte „kleiner sein als“ in der Theorie des Rechenspiels, aber jedenfalls wird sie hier in Betracht kommen, und Sätze werden heranzuziehen sein, welche die Beschaffenheit dieser Beziehung ins Licht setzen, Sätze, die wir hier freilich nicht kennen, deren Geltung wir aber annehmen müssen. Man muss vielleicht noch Sätze hinzunehmen, die über die in der Vorschrift etwa erwähnten Gegenstände, Begriffe, Beziehungen nähere Auskunft geben. Und diese Sätze werden vielleicht von andern Gegenständen, Begriffen, Beziehungen handeln, die ihrerseits andere Sätze heranzuziehen nöthigen. Vielleicht befindet sich unter ihnen der zu beweisende Satz selber.

Da also die Vorschrift allein nicht hinreicht, und da nicht genau anzugeben ist, welche Sätze noch heranzuziehen wären, hat es eigentlich keinen Sinn, zu sagen, aus der Vorschrift folge das und das. Wir müssen es daher aufgeben, den Umstand, dass ein Satz aus der Vorschrift *V* folge, zur Definition zu gebrauchen. Wir können nur den Satz selbst so verwenden, den Satz etwa, dass es für jede positive Zahlfigur σ einen Index n giebt der Art, dass ein Term einer Folge kleiner ist als σ, wenn er nach der Vorschrift *V* gebildet ist und wenn sein Index grösser als n ist.

Aber ein hypothetischer Gedanke ist immer wahr, wenn die Bedingung nie erfüllt ist. So kann man immer mit Wahrheit behaupten: wenn ein

Mann ohne Nahrung tausend Jahre alt geworden ist, bekommt er grüne Haare. Es kann uns hier also zur Definition der Nullfolge nichts nützen, dass wir angeben, was unter Bedingungen stattfinden würde, die nicht erfüllt sind und nie erfüllt sein werden.

§ 131. Wir erkennen hier das unheilbare Missverhältnis zwischen dem, was die Einführung des Irrationalen erfordert, und dem, was die formale Arithmetik bieten kann. Um das Irrationale einzuführen, brauchen wir unendlich viele Zahlen, und die formale Arithmetik hat von Zahlfiguren nur eine endliche Menge. Daran können alle Definitionen, kann alles Drehen und Wenden nichts ändern. In der That setzt ja auch Thomae unendlich viele Terme seiner Folgen voraus, indem er Zeichen wie »δ_n« ohne obere Grenze für n als Vertreter bedeutungsvoller Eigennamen gebraucht, obwohl es in unendlich vielen Fällen nichts giebt, was durch ein solches Zeichen bezeichnet werden könnte.

Wenn eine unendliche Zahlenfolge aus Zahlfiguren und weiter nichts besteht, wenn Zahlfiguren durch Schreiben erzeugte Gebilde sind, so kann auch eine solche Zahlenfolge hingeschrieben werden. Man thue es! Was wird man erhalten? Eine Reihe, die mit einer Figur anfängt und mit einer Figur endet. Nun kann man ja eine Definition geben, nach der diese so hingeschriebene Folge dennoch eine unendliche ist; aber was nützt es? Die Unendlichkeit, welche wir zur Einführung des Irrationalen brauchen, erhalten wir so doch nicht. Was nützt uns das Wort „unendlich", wenn uns die Sache fehlt, auf die es ankommt!

Da die Wirklichkeit nicht hinreicht, soll die Möglichkeit oder gar die Unmöglichkeit aushelfen, wie wir gesehen haben, vergebens. Wenn blos mögliche Figuren ein Ersatz für wirkliche sein könnten, brauchten wir die wirklichen nicht.

Dieser Sachverhalt wird dadurch verhüllt, dass die inhaltliche Arithmetik immer unwillkürlich zur Ergänzung herangezogen wird. Sie schimmert in der That überall so deutlich durch die Hülle der formalen, dass wir sie manchmal allein zu sehen glauben. Man bedenkt aber dabei nicht, dass Vieles, was in der inhaltlichen Arithmetik seinen guten Grund hat, in der formalen unberechtigt ist. Man vergisst immer wieder die tief greifenden Unterschiede. Mancher Leser hat vielleicht unsere Einmischung der Zeit als ganz unmathematisch verdammt, dass wir z. B. von einer Folge angenommen haben, ihre Länge ändre sich in der Zeit. Dieser Tadel wäre auf dem Standpunkte der eigentlichen oder inhaltlichen Arithmetik ganz berechtigt; in der formalen aber wird durch die Sache selbst die Zeit eingeführt; denn während die eigentlichen Zahlen zeitlos sind, entstehen und vergehen die Zahlfiguren in der Zeit, in ihr geschehen auch die Spielhandlungen.

§ 132. Thomae schreibt:

„Die einfachste Nullfolge ist natürlich (0 0 0 . . 0 . .).“

Wir fragen nun: bezeichnet diese Figurengruppe eine Zahlenfolge, oder ist sie eine? Nach dem sonst gewohnten Zeichengebrauche müssten wir jenes annehmen; da aber die Nullfiguren hier keine Zeichen sind, sondern eben Figuren, so müssen wir uns wohl dafür entscheiden, dass jene Figurengruppe nach Thomaes Absicht eine Zahlenfolge sei. Ist sie das aber wirklich? Wir haben angenommen, dass die Zahlenfolgen aus Zahlfiguren und weiter nichts bestehen; hier aber sehen wir noch Pünktchen und Klammern. Die Letzten mögen wir vielleicht als blosse Bekleidung abrechnen dürfen. Was haben aber die Pünktchen mit der Zahlenfolge zu thun? Sollen sie Nullfiguren vertreten? Aber warum stehen dann die vertretenen Nullfiguren nicht selber da? Das wäre einfacher. Wir hätten dann eine Folge bestehend aus acht Nullfiguren. Ob wir dann freilich eine Nullfolge im Thomaeschen Sinne hätten, mag bezweifelt werden. So haben wir nicht einmal eine Folge von Zahlfiguren, sondern eine Reihe, die theils aus Zahlfiguren, theils aus Pünktchen besteht. Nur die Gruppe der ersten drei Nullfiguren können wir als Folge von Zahlfiguren fassen; die vierte Nullfigur wird schon, weil durch Pünktchen von jenen getrennt, nicht mehr hinzugerechnet werden können. Sollen die Pünktchen dazu auffordern, sich noch unbestimmt viele Nullfiguren vorzustellen? Vorstellungen von Nullfiguren sind keine Nullfiguren, und eine Vorstellung von unbestimmt vielen Nullfiguren ist jedenfalls sehr verschwommen. Dann stände jene ganze Figurengruppe nicht für sich selber da wie eine Gruppe von Schachfiguren, sondern die durch sie erweckten Vorstellungen wären die Hauptsache. Wir hätten dann doch wieder etwas wie ein Zeichen. Wäre nun die damit verknüpfte Vorstellung eine Nullfolge? Bestände sie aus Zahlfiguren? Schwerlich! Wie wir uns auch drehen und wenden mögen, wir gelangen nicht zu einer Auffassung unserer Figurengruppe, die mit dem Grundgedanken der formalen Arithmetik verträglich wäre.

§ 133. Die Sache wird noch schwieriger, wenn wir statt der Zahlfiguren Buchstaben mit Indices haben. Ueber den Gebrauch der Buchstaben in der formalen Arithmetik ist nichts gesagt, obwohl er von dem in der inhaltlichen abweichen wird. Wie ist z. B. eine Gruppe von Buchstaben mit Indices aufzufassen, welche wir in dem Satze

„Eine Folge von zunächst gemeinen Zahlen $(a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ a_n\ .\ .)$ heisst eine unendliche Folge“

haben? Das erinnert an Wendungen wie „ein Feldherr Caesar“. Hier ist „Caesar“ Eigenname und man könnte auch »$(a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ a_n\ .\ .)$« als Eigennamen einer Zahlenfolge auffassen. Aber offenbar soll hier keine bestimmte Folge bezeichnet werden. Ebenso wenig ist diese Gruppe selbst eine Zahlenfolge. Man kann nun vermuthen, sie deute eine Folge nur an, wie man etwa sagt „eine Primzahl p“. Hier ist der Buchstabe zwar kein Eigenname, vertritt aber einen solchen. Man schreibt Buchstaben statt der Eigennamen, um der Betrachtung Allgemeinheit zu verleihen. Es ist aber immer möglich, auf einen bestimmten Fall zu kommen, indem man die Buchstaben durch Eigennamen ersetzt, z. B. statt des Buchstaben »p« den Eigennamen »7« schreibt. Man beachte wohl: den Eigennamen, nicht die Figur! Wenn man dem entsprechend in unserm Falle »a_1« »a_2« u. s. w. als Vertreter von Eigennamen und zwar von Zahlzeichen annähme, so erhielte man beim Uebergange zu einem besondern Falle etwa »(3 7 1 . . 2 . .)«, und hierin bezeichnete jedes Zahlzeichen eine Zahl. Was freilich das Ganze bezeichnen sollte, bliebe unklar, weil darüber, was eine solche Verbindungsweise von Zeichen bedeute, keine Erklärung vorliegt. Jedenfalls befänden wir uns auf dem Boden der inhaltlichen Arithmetik. Aber selbst, wenn wir fehlerhafterweise die Zahlzeichen als Figuren betrachten wollten, bezeichnete die ganze Figurengruppe weder eine Zahlenfolge, noch wäre sie eine solche, wie wir oben gesehen haben.

Wir gelangen demnach zu keiner befriedigenden Auffassung von »$(a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ a_n\ .\ .)$«, wenn wir es in seine Bestandteile auflösen. Wir werden es also ohne Rücksicht auf seine Zusammensetzung annehmen müssen. Dann aber wird ein einzelner Buchstabe dieselben Dienste leisten, und wir werden sagen können „eine Zahlenfolge F“, wie wir etwa sagen „eine Primzahl p“.

§ 134. Nun fährt Thomae im § 5 fort:

„Einer solchen Folge ordnen wir ein Zeichen zu und drücken die Zuordnung durch das Gleichheitszeichen aus,

$$a = (a_1\ a_2\ a_3\ .\ .\ a_n\ .\ .).“$$

Diese Zuordnung eines Zeichens als besonders bedeutsame Handlung haben wir schon bei G. Cantor gesehen; sie findet sich auch bei Heine. Der links stehende Buchstabe »a« vertritt hier offenbar einen Eigennamen. Dasselbe thut aber die rechte Seite. Wir können dafür wie oben einen einzelnen Buchstaben »F« schreiben

$$»a = F«.$$

Wenn wir nun auf einen besondern Fall kommen wollen, so müssen wir sowohl für »F« als auch für »a« einen Eigennamen einsetzen. Dann haben wir aber schon einen Eigennamen der betrachteten Folge, nämlich den für »F« eingesetzten, und brauchen ihr nicht erst einen zuzuordnen.

Nehmen wir einen besondern Fall! Wir schreiben mit Kreide auf eine Tafel von links nach rechts aufeinanderfolgend eine Zweifigur, eine Dreifigur und eine Fünffigur. Nehmen wir an, das so Erzeugte sei eine unendliche Zahlenfolge nach Thomae. Um von ihr etwas aussagen zu können, geben wir ihr als Zeichen oder Eigennamen ein umgekehrtes lateinisches A »∀« und können nun z. B. schreiben: Die Folge ∀ besteht aus einer

Zweifigur, einer Dreifigur und einer Fünffigur". Wenn wir zu irgendeinem Zwecke dieser Folge noch ein anderes Zeichen geben wollen, so steht dem nichts im Wege, und wir können z. B. schreiben

»ꓤ = V«

worin das Gleichheitszeichen die Bedeutung des Zusammenfallens, der Identität, also dessen hat, was wir Gleichheit nennen. Diese Gleichung ergiebt sich aus der Thomaeschen

$$»a = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ . \ . \ a_n \ . \ .)«$$

dadurch, dass wir links und rechts statt der blos andeutenden Zeichen Eigennamen setzen. Nun ist es freilich unwahrscheinlich, dass hiermit Thomaes Meinung getroffen sei. Wahrscheinlicher ist es, dass er uns anweisen würde, links von unserer Folge ein Gleichheitszeichen und davon wieder links unser Zeichen »V« zu schreiben, sodass eine Zeichen- und Figurengruppe von der Form

»V = 2 3 5«

entstände. Und hierdurch, würde er etwa sagen, werde das Zeichen »V« unserer Folge zugeordnet. Das wäre freilich unhaltbar. Zunächst nämlich wäre die linke Seite der Gleichung $»a = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ . \ . \ a_n \ . \ .)«$ ganz anders behandelt als die rechte. Links wäre für »a« ein Eigenname »V« eingesetzt, rechts aber der Gegenstand (die Folge) selbst. Das wäre gegen alle Grundsätze des Buchstabengebrauchs in der Mathematik. Und so wäre denn ein seltsames Gemisch von Zeichen und Figuren entstanden. Das Gleichheitszeichen wäre weder als blosse Figur wie im Spiele, noch auch so gebraucht, wie Thomae es in der Theorie des Spiels verwendet, noch auch so, wie es in der inhaltlichen Arithmetik gebraucht wird, sondern es sollte besagen, dass das links stehende Zeichen »V« die rechts stehende Folge bezeichnen solle. Die Vertauschbarkeit der linken und der rechten Seite der Gleichung gälte hierbei nicht; denn stände die Folge links, »V« aber rechts, so wäre die Folge damit als Zeichen für die Figur »V« hingestellt, was etwas ganz anderes ist.

Ob wir nun hiermit Thomaes Meinung getroffen haben oder nicht, jedenfalls ist es nicht erlaubt, so willkürlich mit dem Gleichheitszeichen umzuspringen, alsob es noch garnicht vorgekommen wäre.

§ 135. Die folgenden Sätze scheinen es zu bestätigen, dass wir Thomaes Meinung richtig getroffen haben. Sie lauten:

„Für dieses Zeichen a nehmen wir unter Umständen eine gemeine Zahl. Wenn nämlich von einem bestimmten Term ab dieselbe Zahl immer wiederkehrt, sodass

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \ . \ . = a$$

ist, so wählen wir die Zahl a als Zeichen für die Folge. Aber auch dann, wenn in $(a_1 \ a_2 \ a_3 \ . \ . \ a_n \ . \ .)$ die Terme sich von der Folge $(a \ a \ a \ . \ . \ a \ . \ .)$ nur bez. um die Terme einer *Nullfolge* unterscheiden die wir sogleich definiren, ordnen wir die Zahl a als Zeichen der Folge $(a_1\ a_2\ .\ .\ a_n\ .\ .)$ durch das Gleichheitszeichen zu [1]).

Hiergegen ist zu erinnern, dass dabei verschiedene Dinge dasselbe Zeichen bekommen, was gegen alle Grundsätze der Bezeichnung verstösst. Das wird durch die Erinnerung an die inhaltliche Arithmetik freilich verhüllt. Der Gedanke schimmert hier wohl durch, dass alle diese Folgen eine und dieselbe Zahl in unserm Sinne, ein und dasselbe Grössenverhältnis bestimmen in einer Weise, die hier freilich nicht angebbar ist, weil dazu erst die Frage „was ist ein Grössenverhältnis?" beantwortet sein müsste. Wenn Thomae nun der Folge ein Zeichen a zuordnet, so will er im Grunde wohl, ohne sich dessen ganz bewusst zu werden, jenem Grössenverhältnisse das Zeichen zuordnen, und dann ist die Eindeutigkeit des Zeichens in der That gewahrt. Diese feierliche Zeichenzuordnung soll ein Ersatz sein für das, was eigentlich geleistet werden sollte, nämlich die Erklärung des Grössenverhältnisses und den Nachweis, dass es solche giebt. Da man die Frucht nicht hat, bietet man wenigstens die leeren Fruchtschalen dar.

§ 136. Am meisten aber werden wir dadurch überrascht, dass der Plan der formalen Arithmetik hier vollständig scheitert, indem die Zahlfiguren nun doch als Zeichen gebraucht werden. Wenn man Verwirrung stiften wollte, könnte man eigentlich nichts Besseres thun. Beruhte doch in der formalen Arithmetik Alles darauf, dass die Zahlfiguren eben nur Figuren und nicht Zeichen waren. Für Figuren konnten willkürliche Regeln aufgestellt werden, bei den Zeichen folgen die Regeln aus den Bedeutungen.

Nun erhebt sich die Frage, ob die Zahlfiguren, die als Terme einer Folge auftreten, als Zeichen anzusehen seien, die selbst wieder Folgen bedeuten. Dann müsste auch die Folge, deren Terme sie sind, etwas bedeuten; aber was denn? Man käme zu einem Rückschreiten ins Unendliche, wenn man die Terme einer Folge immer wieder als Zeichen für andere Folgen ansehen wollte. Danach ist wohl anzunehmen, dass die Zahlfiguren, wenn sie Terme sind, nicht als Zeichen aufzufassen sind. Aber es ist fraglich, ob eine solche Scheidung durchführbar sei. Jedenfalls wäre diese doppelte Verwendungsweise gleichgestalteter Gebilde bedenklich.

§ 137. Es wird unnöthig sein, Thomaes Darstellung weiter durchzunehmen. Dieser Versuch einer formalen Arithmetik ist als gescheitert anzusehen schon darum, weil er nicht folgerecht durchgeführt werden kann. Die Zahlfiguren werden zuletzt doch wieder als Zeichen verwendet. Das von Thomae selbst aufgestellte Verzeichnis der Spielregeln ist unvollständig,

1) Was bedeutet das Gleichheitszeichen in
»$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3}\ .\ .\ = a$«?

und wir mussten vermuthen, dass ein solches überhaupt nie abgeschlossen werden könnte, dass ausser den erlaubenden auch verbietende Regeln aufzustellen wären, woraus dann eine Unsicherheit über das entstände, was erlaubt wäre, eine Unsicherheit, die auch wohl nie ganz gehoben werden könnte. Die Unklarheit, die aus der mangelnden Unterscheidung des Spieles selbst von seiner Theorie entstand, suchten wir möglichst zu heben. Aber es schien nicht wohl möglich, eine Theorie des Spiels zu geben, bevor nicht alle Regeln vorlägen. Wir sahen, dass unbesehens und ohne weitere Erklärung Bezeichnungen und Ausdrücke aus der inhaltlichen Arithmetik übernommen wurden, z. B. „grösser“ und „kleiner“, deren Rolle im Rechenspiele dunkel blieb, obwohl sie höchst bedeutsam zu sein schien. Die formale Arithmetik erwies sich als unfähig, das Irrationale zu definiren, weil ihr nur eine endliche Menge von Zahlfiguren zur Verfügung steht.

Ueber die Tragweite des Grundgedankens der formalen Arithmetik sind wohl viele Mathematiker im Unklaren. Man fasst die formale Arithmetik, wie es scheint, im Wesentlichen auf als die inhaltliche vermindert um die Verpflichtung, die Bedeutungen der Zeichen anzugeben. In der That kommt die Auffassung der Zahlen als Figuren eigentlich nur im Anfange zur Geltung, wo jene Verpflichtung drückend ist. Später gleitet man, ohne es selbst zu merken, in die inhaltliche Arithmetik zurück. Und doch hat jene Auffassung auch Folgen, die lästig werden können; sie bewirkt eine so völlige Veränderung der Arithmetik von Grund aus, dass es kaum zulässig scheint, den Namen „Arithmetik“ für die formale ebenso wie für die inhaltliche zu gebrauchen. Nur dadurch kann sich die formale Arithmetik am Leben erhalten, dass sie sich selbst untreu wird [1]). Erleichtert wird ihr dies Scheinleben durch die Eile, mit der die Mathematiker meistens über die ersten Grundlagen ihrer Wissenschaft, wenn sie sich überhaupt damit befassen, hinweggehen, um zu bedeutenderen Gegenständen zu gelangen. Vieles wird ganz übergangen, Anderes nur im Fluge berührt, nichts im Einzelnen durchgeführt. So kann eine Theorie den Schein der Festigkeit annehmen, die bei jedem ernsten Versuche einer wirklichen Durchführung sogleich ihre Schwäche offenbaren würde. Und hiermit ist der Weg der Widerlegung gewiesen. Man muss die nur eben betretenen Gedankenpfade weiter verfolgen, um zu sehen, wohin sie führen. Ernst machen mit der formalen Arithmetik, das ist sie überwinden; und so haben wir es gemacht [2]).

---

1) Wer Freude am Paradoxen hat, könnte vielleicht sagen: die richtige Auffassung der formalen Theorie besteht darin, dass man sie falsch auffasst.

2) H. v. Helmholtz scheint in seinem Aufsatze *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet* (Philosoph. Aufsätze, Ed. Zeller zu seinem 50-jähr. Doctorjub. gewidmet) einer formalen Theorie anzuhangen, wenn er z. B. sagt: „Ich betrachte die Arithmetik oder die Lehre von den reinen Zahlen als eine auf rein psychologische Thatsachen aufgebaute Methode, durch die die folgerechte Anwendung eines Zeichensystems (nämlich der Zahlen) von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung

d) Das Schaffen neuer Gegenstände nach R. Dedekind, H. Hankel, O. Stolz.

§ 138. Wir wenden uns nun zu der Darlegung, die R. Dedekind in seiner Schrift über Stetigkeit und irrationale Zahlen [1]) gegeben hat. Er sagt dort im § 1, S. 6:

„Soll ausgedrückt werden, dass die Zeichen a und b eine und dieselbe rationale Zahl bedeuten, so setzt man sowohl $a=b$ wie $b=a$."

Hier ist die Schärfe der Unterscheidung zwischen dem Zeichen und dem, was es bedeutet, erfreulich und bemerkenswerth, ebenso die Auffassung des Gleichheitszeichens, die genau mit unserer übereinstimmt. Thomae bemerkt dagegen [2]):

„Denn wenn Gleichheit oder das Gleichheitszeichen $=$ nur die Identität bedeuten sollte, so würden wir bei der trivialen Erkenntnis, oder, wenn man lieber will, Denknothwendigkeit a ist a $(a=a)$ stehen bleiben."

Dies ist ein Irrthum. Die Erkenntnis, dass der Abendstern derselbe ist wie der Morgenstern, ist viel werthvoller als eine blosse Anwendung des Satzes »$a=a$«, ist kein blosser Ausfluss einer Denknothwendigkeit. Die Erklärung liegt darin, dass bei derselben Bedeutung der Sinn der Zeichen oder Wörter (Abendstern, Morgenstern) verschieden sein kann, und dass grade der Sinn des Satzes — neben seiner Bedeutung, dem Wahrheitswerthe — dessen Werth für unsere Erkenntnis bestimmt.

Aus dem angeführten Satze von Dedekind geht hervor, dass für ihn die Zahlen nicht Zeichen, sondern Bedeutungen der Zeichen sind.

Diese drei Punkte:

1) die scharfe Unterscheidung des Zeichens von dessen Bedeutung;
2) die Erklärung des Gleichheitszeichens als Identitätszeichen;
3) die Auffassung der Zahlen als Bedeutungen der Zahlzeichen, nicht als diese selbst

hangen aufs Engste zusammen und lassen Dedekinds Ansicht im schroffsten Gegensatze zu jeder formalen Theorie erscheinen, welche die Zeichen oder

---

gelehrt wird. Die Arithmetik untersucht namentlich, welche verschiedene Verbindungsweisen dieser Zeichen (Rechnungoperationen) zu demselben Endergebnis führen."

Auch hier erhalten die Zeichen eine magische Kraft, weil ihre Bedeutungen dem Blicke entschwunden sind. Dazu kommt die Heranziehung von Psychologie und Empirie, wodurch die Unklarheit nur vermehrt wird. Helmholtz will die Arithmetik empirisch begründen, mag es biegen oder brechen. Demgemäss fragt er nicht: wie weit kann man kommen, ohne Erfahrungsthatsachen heranzuziehen? sondern er fragt: wie kann ich am schnellsten irgendwelche Thatsachen der sinnlichen Erfahrung hereinziehen? Allen, die dies Bestreben haben, gelingt es in derselben Weise sehr leicht dadurch, dass sie die Anwendungen der arithmetischen Sätze mit diesen selbst vermischen. Alsob nicht die Fragen nach der Wahrheit eines Gedankens und nach seiner Anwendbarkeit ganz verschieden wären! Ich kann sehr wohl die Wahrheit eines Satzes anerkennen, ohne zu wissen, ob ich je eine Anwendung von ihm werde machen können. Aber nur hübsch Alles durcheinander gemengt! nur ja nicht unterschieden, was verschieden ist! dann wird sich die Klarheit schon einfinden. Kaum ist mir je etwas unphilosophischer vorgekommen, als dieser philosophische Aufsatz, und kaum ist je der Sinn der erkenntnistheoretischen Frage mehr verkannt worden, als hier.

1) Braunschweig, bei Vieweg & Sohn, 1892.

2) A. a. O., S. 2.

Figuren als die eigentlichen Gegenstände der Arithmetik betrachtet. Um so auffallender ist die Billigung, die Dedekind der Heineschen Auffassung widmet, indem er in Bezug auf den oben von uns besprochenen Aufsatz sagt:

„Dem Wesen nach stimme ich zwar vollständig mit dem Inhalte dieser Schrift überein, wie es ja nicht anders sein kann."

Diese Uebereinstimmung ist in Wirklichkeit garnicht vorhanden. Dagegen möchte Dedekinds Ansicht der Cantors näher stehen.

§ 139. Nachdem Dedekind eine solche Eintheilung des Systems der rationalen Zahlen in zwei Klassen, bei welcher jede Zahl der ersten Klasse kleiner ist als jede Zahl der zweiten, einen Schnitt genannt hat, nachdem er dann gezeigt hat, dass jede rationale Zahl einen Schnitt oder eigentlich zwei Schnitte hervorbringt, dass es aber Schnitte giebt, die durch keine rationale Zahl hervorgebracht werden, sagt er im § 4, S. 14:

„Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir uns eine neue, eine irrationale Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt vollständig definirt ansehen; wir werden sagen, dass die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder dass sie diesen Schnitt hervorbringt."

In diesem Schaffen liegt der Kern der Sache. Zunächst ist zu bemerken, dass es ganz verschieden ist von dem, was man in der formalen Arithmetik thut, wenn man eine neue Art von Figuren einführt und besondere Regeln für deren Handhabung. Dort liegt die Schwierigkeit darin, zu erkennen, ob diese neuen Regeln mit den früher aufgestellten in Widerstreit gerathen können, und solchen Widerstreit etwa auszugleichen. Hier handelt es sich um die Frage, ob ein Schaffen überhaupt möglich sei; ob es, wenn möglich, schrankenlos möglich sei; oder ob gewisse Gesetze beim Schaffen beachtet werden müssen. Im letzten Falle wäre erst zu beweisen, dass jenen Gesetzen gemäss die Berechtignng zum Schaffen bestände, bevor man die Schöpfung vollziehen dürfte. Diese Untersuchungen fehlen hier vollständig und damit fehlt die Hauptsache; es fehlt das, wovon die Bündigkeit der Beweise abhängt, die mit irrationalen Zahlen geführt werden.

Dass die Schaffensmacht jedenfalls, wenn sie besteht, nicht schrankenlos sein kann, sieht man daraus, dass offenbar kein Gegenstand geschaffen werden kann, der widersprechende Eigenschaften in sich vereinigt.

§ 140. Zu demselben Ergebnisse führt folgende Betrachtung. In der Mathematik ist der Fall nicht selten, dass man zum Beweise eines Satzes einen Hülfsgegenstand braucht; das ist ein Gegenstand, von dem im Satze selbst nicht die Rede ist. In der Geometrie hat man Hülfslinien, Hülfspunkte. In der Arithmetik kommen ebenso Hülfszahlen vor. Es wird z. B. eine Quadratwurzel aus -1 gebraucht, um Sätze zu beweisen, die nur von reellen Zahlen handeln. Wenn wir in der Zahlentheorie mittels der Indices beweisen, dass die Congruenzen »$x^n \equiv 1$« und »$x^\delta \equiv 1$« beim Primzahlmodul p die selben Wurzeln haben, sofern δ der grösste gemeinsame Theil von n und $p-1$ ist, so brauchen wir eine primitive Wurzel, nämlich die Basis der Indices, als Hülfszahl. Auch in unsern Beweisen sind schon Hülfsgegenstände vorgekommen; man vergl. z. B. Bd. 1, § 94. Dort haben wir auch gesehen, wie wir uns eines solchen Gegenstandes wieder entledigen; denn in dem zu beweisenden Satze soll ja von ihm keine Rede sein, obwohl wir einige seiner Eigenschaften zum Beweise brauchen. So brauchen wir in dem oben erwähnten zahlentheoretischen Satze die Eigenschaft, primitive Wurzel bei der Primzahl p zu sein. Wir haben dann zunächst Bedingungssätze mitzuführen, die ausdrücken, dass ein Gegenstand jene Eigenschaften habe. Kennen wir einen solchen Gegenstand, so können wir die Bedingungen zum Verschwinden bringen. Wenn wir keinen solchen Gegenstand angeben können, wie es in unserm Beispiele der Fall ist, wo nicht von dieser oder jener bestimmten Primzahl, sondern von einer Primzahl im Allgemeinen die Rede ist, so müssen wir wenigstens beweisen, dass es einen solchen Gegenstand — eine primitive Wurzel bei der Primzahl p — immer gebe. Wie sehr würde dies erleichtert, wenn man sich die erforderlichen Gegenstände ohne Weiteres schaffen könnte! Wenn man nicht weiss, ob es eine Zahl gebe, deren Quadrat -1 ist, nun so schafft man sich eine. Wenn man nicht weiss, ob es zu einer Primzahl eine primitive Wurzel gebe, nun so schafft man sich eine. Wenn man nicht weiss, ob es eine Gerade gebe, welche durch gewisse Punkte hindurchgehe, nun so schafft man sich eine. Dies ist leider zu bequem, als dass es richtig sein könnte. Es werden gewisse Schranken für das Schaffen anzuerkennen sein. Das Wichtigste für einen Arithmetiker, der die Möglichkeit des Schaffens im Allgemeinen anerkennt, wird sein, die Gesetze in einleuchtender Weise zu entwickeln, die dabei zu beachten sind, um dann vor jeder einzelnen Schöpfungsthat zu beweisen, dass sie jenen Gesetzen gemäss erlaubt sei. Sonst wird Alles ungenau, und die Beweise sinken zu einem blossen Scheine, zu einer wohlthuenden Selbsttäuschung herab.

§ 141. *Hankel* sagt im Anfange des 7. Abschnittes seiner Theorie der complexen Zahlensysteme:

„Wir betrachten in diesem Abschnitte Zahlen α, β, . . ., welche linear aus Einheiten $\iota_1, \ldots \iota_n$ zusammengesetzt sind, deren Multiplicationsregeln in den Relationen

$$\iota_1 \iota_1 = 0, \ \iota_2 \iota_2 = 0, \ \ldots \ \iota_n \iota_n = 0, \ \iota_k \iota_m = -\iota_m \iota_k$$

ausgesprochen sind.“

Mit diesen sogenannten Einheiten beweist er dann z. B. den Multiplicationssatz der Determinanten, oder vielmehr er bildet sich ein, ihn zu beweisen. Eigentlich ist es nur ein verblüffendes Taschenspielerstück; denn nirgends ist bewiesen, dass es solche Einheiten gebe, nirgends ist bewiesen, dass man das Recht habe, sie zu schaffen. Nicht einmal das ist bewiesen, dass die Eigenschaften, die diesen Einheiten beigelegt werden, einander nicht widersprechen. Ja, was diese Eigenschaften eigentlich sind, bleibt dunkel; denn nirgends ist gesagt, was in diesem Falle unter einem Producte zu verstehen sei. Eigentlich müssen die oben angeführten Sätze »$\iota_1 \iota_1 = 0$« u. s. w. als Bedingungen mitgeführt werden, und von diesen Bedingungen muss auch das Multiplicationsgesetz der Determinanten abhängig erscheinen. Es von diesen zu befreien, bleibt eine bei dieser Art der Beweisführung ungelöste Aufgabe. Es wäre möglich, wenn »ι_1«, »ι_2« u. s. w. Eigennamen von Gegenständen wären, die jenen Bedingungen genügten. Wir wissen nicht, was ein Product und was eine Summe bei Zahlen dieser Art ist. Nehmen wir aber einmal an, wir wüssten es, so kännten wir von ι_1 die Eigenschaft, dass $\iota_1 \iota_1 = 0$ wäre, eine Eigenschaft, die es mit ι_2, ι_3 u. s. w. theilte. Ferner kännten wir gewisse Beziehungen, in denen ι_1 zu den ebenso unbekannten ι_2, ι_3 u. s. w. stehen sollte. Es ist klar, dass hierdurch ι_1 nicht bestimmt ist. Wir wissen nicht, wieviele solche Gegenstände und ob es überhaupt deren giebt. Nicht einmal die Klasse ist bestimmt, der diese Gegensände etwa angehören. Nehmen wir an, eine solche Klasse enthalte die Gegenstände

$$\iota_1, \iota_2, \ldots \iota_9.$$

Dann hat die Klasse, die nur die Gegenstände

$$\iota_1 \iota_2 \iota_3,\ \iota_4 \iota_5 \iota_6,\ \iota_7 \iota_8 \iota_9$$

enthält, dieselbe allgemeine Beschaffenheit, desgleichen auch die Klasse, die nur die Gegenstände

$$\iota_1 \iota_4 \iota_7,\ \iota_2 \iota_5 \iota_8,\ \iota_3 \iota_6 \iota_9$$

enthält und viele andere. Da demnach nicht einmal die Klasse bestimmt ist, der diese Gegenstände angehören, so sind es um so weniger diese selbst, und es ist unmöglich, »ι_1«, »ι_2« u. s. w. als bedeutungsvolle Eigennamen aufzufassen, ähnlich wie »2« und »3«. Es bleibt nur übrig, sie wie »a«, »b«, »c« als Gegenstände andeutend, nicht als Gegenstände bedeutend oder bezeichnend aufzufassen. Dann aber kommt es darauf an, ob es solche giebt, welche den oben angeführten Bedingungen genügen. Diese sind nicht einmal vollständig; denn es fehlt die Bedingung, dass das Product aus einer gewöhnlichen Zahl und einem Producte aus einigen der ι verschieden ist, von einem Producte aus einer andern gewöhnlichen Zahl und demselben Producte der ι. Sonst könnte man von

$$a . \iota_1 \iota_2 \iota_3 = b . \iota_1 \iota_2 \iota_3$$

nicht auf $a = b$ schliessen.

Nun der Beweis, dass es solche Gegenstände ι gebe, fehlt. Vielleicht hat Hankel geglaubt, sie mit den oben angeführten Worten zu schaffen;

aber auch den Beweis, dass er zu solchem Schaffen berechtigt gewesen sei, ist er schuldig geblieben.

§ 142. Wenn wir versucht hätten, mit unserer Begriffsschrift den Beweis jenes Determinantensatzes nach Hankel zu führen, so wären wir so zu sagen mit der Nase auf dies Hindernis gestossen. Dass man es bei der Hankelschen Beweisführung so leicht übersieht, liegt darin, dass man nicht in der Weise Euklids die Voraussetzungen hinschreibt und genau darauf achtet, dass von keinen andern Gebrauch gemacht werde. Thäte man es, so wäre es nicht so leicht, Voraussetzungen durch einen Taschenspielerkunstgriff verschwinden zu lassen.

Uebrigens stehen manche Beweise, die man mit der imaginären Einheit führt, nicht auf festeren Füssen, als der eben erwähnte Hankels. Wenn der Fehler bei diesem mehr in die Augen fällt, so liegt das nicht an einem wesentlichen logischen Unterschiede, sondern daran, dass man sich an die imaginäre Einheit schon mehr gewöhnt hat, als an die alternirenden Zahlen. Man braucht ein Wort oder Zeichen als Eigennamen nur recht oft zu gebrauchen, und es wird der Eindruck entstehen, dass dieser Eigenname etwas bezeichne, und dieser Eindruck wird sich mit der Zeit so verstärken, dass zuletzt fast niemand daran zweifelt.

§ 143. Die schöpferischen Definitionen sind eine Erfindung ersten Ranges. Otto Stolz schreibt [1]):

„6. Definition. In dem Falle, wo lim $(f:g)$ eine positive Zahl oder $+\infty$ ist, soll ein von den Momenten verschiedenes Ding, mit $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ bezeichnet, existiren, welches der Gleichung

$$\mathfrak{u}(g).\{\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)\}=\mathfrak{u}(f)$$

genügt."

Vergleichen wir damit Folgendes:

„Definition. Wenn die Punkte A, B, C, D, E, F so liegen, dass die Verbindungslinien AD, BE, CF durch denselben Punkt gehen, so soll ein Ding existiren, welches eine Gerade ist und durch die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AB und DE, BC und EF, CA und FD hindurchgeht."

Man wird die Fälle für ganz verschieden erklären, doch wird die genauere Untersuchung keinen wesentlichen logischen Unterschied ergeben. Die letzte Definition braucht man nicht; man stellt dafür einen Lehrsatz auf, den man beweist. Das aber ist der unbezahlbare Vortheil einer schöpferischen Definition, dass sie einen Beweis erspart. Und dieser Vortheil ist spielend zu erreichen: man braucht nur das Wort „Definition" statt

1) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Erster Theil. S. 211. Leipzig, Teubner, 1885.

des Wortes „Lehrsatz“ als Ueberschrift zu wählen. Dies ist allerdings dringend nöthig, da man sonst leicht die Natur des Satzes verkennen könnte.

Ein anderes Beispiel einer schöpferischen Definition finden wir auf S. 34 des angeführten Werkes. Wir lesen da:

»1. Definition. „Wenn im Falle D_1) der Gleichung $b \circ x = a$ keine Grösse des Systemes (I) genügt, so soll sie durch ein und nur ein neues, in (I) nicht vorhandenes Ding befriedigt werden, das mit $a \smile b$ bezeichnet werden kann, weil dieses Symbol noch nicht vergriffen ist. Man hat also

$$b \circ (a \smile b) = (a \smile b) \circ b = a$$ [1].“

Da die neuen Objecte keine weiteren Eigenschaften besitzen, so kann man ihnen solche nach Belieben beilegen, wenn sie sich nur unter einander nicht widersprechen.«

Die Schöpfung vollzieht sich also in verschiedenen Schritten. Nach dem ersten ist das Ding allerdings da, aber, so zu sagen, splitternackt, der nothwendigsten Eigenschaften entbehrend, die ihm erst durch weitere Schöpfungsthaten beigelegt werden müssen, worauf es dann als glücklicher Besitzer dieser Eigenschaften zu begrüssen sein wird. Freilich wird hier die schöpferische Macht durch den Zusatz eingeschränkt, dass jene Eigenschaften einander nicht widersprechen dürfen; eine selbstverständliche, aber sehr folgenschwere Einschränkung. Woran erkennt man, dass Eigenschaften einander nicht widersprechen? Kein anderes Kennzeichen scheint es dafür zu geben, als dass sich die fraglichen Eigenschaften an demselben Gegenstande vorfinden. Dadurch wird aber die Schöpfungsmacht, die viele Mathematiker sich zuerkennen, so gut wie werthlos. Denn sie müssen ja nun, bevor sie eine Schöpfungsthat vollziehen, beweisen, dass die Eigenschaften einander nicht widersprechen, die sie dem zu schaffenden oder schon geschaffenen Gegenstande beilegen wollen; und das können sie wohl nur dadurch, dass sie beweisen, es gebe einen Gegenstand, welcher diese Eigenschaften sämmtlich habe. Können sie aber das, so brauchen sie nicht erst einen solchen zu schaffen.

§ 144. Oder giebt es vielleicht noch eine andere Art, die Widerspruchsfreiheit zu beweisen? Wenn es eine gäbe, so wäre das von der höchsten Bedeutung für alle Mathematiker, die sich eine Schöpfungsmacht zuschreiben. Und dennoch scheint sich kaum jemand zu bemühen, eine solche Beweisart ausfindig zu machen. Warum nicht? Wahrscheinlich in der Meinung, es sei überflüssig, die Widerspruchsfreiheit zu beweisen, da

1) Von $\circ$ wird auf S. 26 gesagt: „Die Verknüpfung $\circ$ wird als Thesis bezeichnet.“ Man könnte aus dem bestimmten Artikel schliessen, dass das Zeichen »$\circ$« eine bestimmte Bedeutung habe. Das ist jedoch nicht der Fall: es soll eine Verknüpfung nur andeuten. Was aber unter „Verknüpfung“ zu verstehen sei und unter „Resultat einer Verknüpfung“, wird nicht gesagt.

ja jeder Widerspruch sofort bemerkt werden würde. Wie schön, wenn es so wäre! Wie einfach gestalteten sich dann alle Beweise! Der des pythagoräischen Lehrsatzes würde etwa lauten:

„Angenommen, das Hypotenusenquadrat sei nicht flächengleich den Kathetenquadraten zusammengenommen, so ergäbe sich ein Widerspruch zwischen dieser Annahme und den bekannten Axiomen der Geometrie. Folglich ist unsere Annahme falsch, und das Hypotenusenquadrat ist genau flächengleich den Kathetenquadraten zusammengenommen."

Ebenso leicht wäre das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste zu beweisen:

„Es seien p und q Primzahlen, von denen wenigstens eine der 1 beim Modul 4 congruent sei, und es sei p quadratischer Rest von q. Nehmen wir nun an, q wäre nicht quadratischer Rest von p, so wäre darin offenbar ein Widerspruch gegen unsere Voraussetzungen und die bekannten Grundgesetze der Arithmetik enthalten — wer es nicht sieht, zählt eben nicht mit —. Folglich ist unsere Annahme falsch, und q muss quadratischer Rest von p sein."

Nach diesen Mustern wäre einfach jeder Beweis zu führen. Leider ist diese Weise zu einfach, um annehmbar zu sein. Wir sehen wohl, dass nicht jeder Widerspruch ganz offen zu Tage liegt. Es fehlt uns auch ein sicheres Kennzeichen für die Fälle, in denen man etwa aus dem Nichtoffenbarsein eines Widerspruchs auf sein Nichtbestehen schliessen könnte. Unter diesen Umständen muss wohl jene angebliche Schöpfermacht der Mathematiker als werthlos betrachtet werden, weil ihre Ausübung grade in den Fällen, wo sie werthvoll wäre, an Bedingungen geknüpft ist, die, wie es scheint, nicht erfüllbar sind. Uebrigens, woher weiss man, dass die Vermeidung eines Widerspruchs das einzige ist, was beim Schaffen beachtet werden muss?

§ 145. Stolz nennt wie Thomae seine Auffassung formal. Es mag daher nicht überflüssig sein, auf den grossen Unterschied aufmerksam zu machen, der dennoch zwischen beiden Theorien besteht. Wo Stolz ein neues — jedenfalls unsinnliches — Ding schafft, das er mit einem Zeichen versieht, führt Thomae eine neue Art von Figuren ein mit den dazu gehörenden Regeln. So spricht Stolz von einem Dinge, mit $\mathfrak{u}(f):\mathfrak{u}(g)$ bezeichnet, ebenso von einem Dinge, das mit $a \smile b$ bezeichnet werden könne. Wir hätten diese Zeichen in Anführungszeichen eingeschlossen, um kenntlich zu machen, dass wir eben von den Zeichen, nicht von deren Bedeutung sprächen. Im Uebrigen unterscheidet Stolz zwischen Zeichen und Bezeichnetem so scharf wie wir; und es fällt ihm garnicht ein, die Zeichen selbst als die eigentlichen Gegenstände der Arithmetik hinzustellen. Stolzes Arithmetik ist eine inhaltliche trotz des von ihm gebrauchten Wortes „formal", Man übersieht leicht über der Aehnlichkeit der Form die Verschiedenheit der Sache. In der That ist Thomaes Theorie eines arithmetischen Spieles eine ganz andere Wissenschaft als die Arithmetik Stolzes. Kein Satz, und wenn er genau denselben Wortlaut hätte, hat denselben Sinn bei Thomae und bei Stolz; denn bei jenem handelt er von physischen Gegenständen, den Figuren und willkürlich aufgestellten Regeln für deren Handhabung; bei diesem soll er von unsinnlichen Gegenständen handeln. Offenbar sind es grundverschiedene Sachen, ob die Zahlen Figuren sind, über deren Handhabung Regeln aufgestellt werden; oder ob die Zahlen Bedeutungen von Zahlzeichen sind und geschaffen werden können. In beiden Fällen stossen wir auf Schwierigkeiten, die unüberwindlich scheinen. Bei Thomae bestehen sie darin, zu erkennen, ob die neuen Regeln mit den alten in Widerstreit gerathen können, und solchen Widerstreit zu schlichten, bei Stolz, zu beweisen, dass kein Widerspruch zwischen den Eigenschaften des zu schaffenden Dinges obwalte, wobei auch die Eigenschaften der schon vorhandenen Dinge meist in Betracht kommen werden. Dazu kommt noch der Zweifel, ob ein Schaffen überhaupt möglich sei.

Dedekind stimmt in seiner Auffassung des Schaffens mit Stolz überein; auch ihm sind die Zahlen nicht Zeichen, sondern Bedeutungen der Zahlzeichen. Auch G. Cantor ist wohl dieser Gruppe zuzuzählen, obwohl seine Meinung weniger scharf ausgeprägt ist [1]).

§ 146. Es ist uns hierbei wahrscheinlich geworden, dass ein eigentliches Schaffen dem Mathematiker versagt ist, oder dass es wenigstens an Bedingungen geknüpft ist, die es werthlos machen. Demgegenüber könnte man darauf hinweisen, dass wir doch selbst im 1. Bande (§ 3, § 9, § 10) neue Gegenstände, nämlich die Werthverläufe geschaffen hätten. Was haben wir denn dort gethan? oder zunächst: was haben wir nicht gethan? Wir haben nicht Eigenschaften aufgezählt und nun gesagt: wir schaffen ein Ding, das diese Eigenschaften habe. Wir haben vielmehr gesagt: wenn eine Function (erster Stufe mit einem Argumente) und eine zweite Function so beschaffen sind, dass beide für dasselbe Argument immer denselben Werth haben, so kann man dafür sagen: der Werthverlauf der ersten Function ist derselbe wie der der zweiten. Wir erkennen dann etwas Gemeinsames beider Functionen an, und dieses nennen wir sowohl den Werthverlauf der ersten Function, als auch den Werthverlauf der zweiten Function. Dass wir das Recht zu dieser Anerkennung des Gemeinsamen haben, und dass wir demgemäss die Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Gleichheit (Identität) umsetzen dürfen, müssen wir als logisches Grundgesetz ansehen. Diese Umsetzung ist nicht als Definition zu betrachten; weder wird dadurch das Wort „derselbe“ oder das Gleichheitszeichen, noch

1) Auf welchem Standpunkte H. Hankel in seiner Theorie der complexen Zahlsysteme (Leipzig, 1867) steht, ist schwer zu sagen, da bei ihm entgegengesetzte Aussprüche vorkommen. Wahrscheinlich hat er Zeichen und Bezeichnetes nicht genau unterschieden.

das Wort „Werthverlauf“ oder eine Zeichenverbindung wie »$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$«, noch beides gleichzeitig erklärt. Denn der Satz

„Der Werthverlauf der ersten Function ist derselbe wie der der zweiten“

ist zusammengesetzt und enthält als Bestandtheil das Wort „derselbe“, das als vollkommen bekannt anzusehen ist. Ebenso ist das Zeichen »$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$« zusammengesetzt und enthält als Bestandtheil das schon bekannte Gleichheitszeichen. Wenn wir also unsere Festsetzung in I, § 3 als Definition auffassen wollten, so wäre darin allerdings gegen unsern zweiten Grundsatz des Definirens gefehlt worden [1]).

§ 147. Dass man von der erwähnten Möglichkeit der Umsetzung eigentlich schon immer Gebrauch gemacht hat, ist ja klar; nur hat man das Zusammenfallen von den Functionen selbst statt von den Werthverläufen ausgesagt. Wenn eine erste Function für dasselbe Argument allgemein denselben Werth hat wie eine zweite, pflegt man wohl zu sagen: „die erste Function ist dieselbe wie die zweite“ oder „beide Functionen fallen zusammen“. Wiewohl der Ausdruck von unserm abweicht, so ist doch auch hier die Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Gleichheit (Identität) umgesetzt [2]).

Wenn die Logiker längst vom Umfange eines Begriffes gesprochen haben und die Mathematiker von Menge, Klasse, Vielheit, so liegt auch dem eine solche Umsetzung zu Grunde; denn man kann wohl annehmen, dass das, was die Mathematiker Menge u. s. w. nennen, nichts anderes ist als Begriffsumfang, wenn sie sich dessen auch nicht immer klar bewusst sind.

So thun wir also mit dieser Umsetzung eigentlich nichts Neues; aber wir thun es mit vollem Bewusstsein und mit Berufung auf ein logisches Grundgesetz. Und was wir so thun, ist von dem regellosen, willkürlichen Zahlenschaffen vieler Mathematiker ganz verschieden.

---

1) Ueberhaupt dürfen wir die Festsetzungen über die Urzeichen im 1. Bande nicht als Definitionen ansehen. Nur das logisch Zusammengesetzte lässt sich definiren; auf das Einfache kann man nur hinweisen.

2) Ebenso werden sich die wenigsten Mathematiker besinnen, den Umstand, dass $f(\xi)$ für dasselbe Argument immer denselben Werth hat wie die Function $g(\xi)$, auszudrücken durch »$f = g$«. Der hierin allerdings enthaltene Fehler entspringt aus einer mangelhaften Auffassung des Wesens der Function. Ein isolirter Functionsbuchstabe ohne Argumentstelle ist ja ein Unding, ebenso wie ein isolirtes Functionszeichen wie »*sin*« ein Unding ist. Denn das Kennzeichnende der Function im Vergleich mit dem Gegenstande ist ja eben die Ungesättigtheit, dass sie der Ergänzung durch ein Argument bedarf, und dies muss auch in der Bezeichnung hervortreten. Die Unzulässigkeit einer solchen Bezeichnung wie »$f = g$« geht daraus hervor, dass sie in besondern Fällen sofort versagt. Setzen wir für $f(\xi)$ z. B. $\xi^2 - 1$ und für $g(\xi)$ z. B. $(\xi - 1) . (\xi + 1)$, so fällt in die Augen, dass man nichts der Gleichung »$f = g$« Entsprechendes hinschreiben kann. Wenn aber die Bezeichnungsweise in Ordnung ist, muss es immer möglich sein, einen solchen Uebergang vom Allgemeinen zum Besondern in den Zeichen zu vollziehen. Wenn demnach die Bezeichnung »$f = g$« auch nicht als richtig anerkannt werden kann, so zeigt sie doch, dass die Mathematiker von der Möglichkeit unserer Umsetzung schon Gebrauch gemacht haben.

Wenn es überhaupt logische Gegenstände giebt — und die Gegenstände der Arithmetik sind solche — so muss es auch ein Mittel geben, sie zu fassen, zu erkennen. Und dazu dient uns jenes logische Grundgesetz, das die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Gleichheit erlaubt. Ohne ein solches Mittel wäre eine wissenschaftliche Begründung der Arithmetik unmöglich. Es dient uns zu den Zwecken, die durch das Schaffen neuer Zahlen bei andern Mathematikern erreicht werden sollen. So hoffen wir, den ganzen Reichthum von Gegenständen und Functionen, von denen die Mathematik handelt, aus den acht Functionen, deren Namen in I, § 31 aufgezählt sind, wie aus einem Keime entwickeln zu können. Kann unser Verfahren ein Schaffen genannt werden? Die Erörterung dieser Frage kann leicht in einen Wortstreit ausarten. Jedenfalls ist unser Schaffen, wenn man es so nennen will, kein schrankenloses, willkürliches, sondern die Weise des Vorgehens und ihre Zulässigkeit ist ein für alle Male festgestellt. Und so fallen hier alle die Schwierigkeiten und Bedenken hinweg, die sonst die logische Möglichkeit des Schaffens in Frage stellen; und wir können hoffen, mit unsern Werthverläufen Alles das zu erreichen, was auf jenen andern Wegen verfehlt worden ist.

e) Weierstrassens Lehre.

§ 148. Man kann erwarten, dass wir auch die Ansicht eines so hervorragenden Mathematikers wie Weierstrass einer eingehenderen Prüfung unterwerfen werden, zumal da dieser — ungleich vielen Andern — die Grundlegung der Arithmetik einer besondern Aufmerksamkeit werth hält, und weil seine Aeusserungen hierüber wohl von Vielen wegen ihrer Klarheit bewundert werden. Aber dem stehen eigenthümliche Schwierigkeiten entgegen. Wir sind meist auf abgeleitete Quellen [1]) angewiesen, die in den Ausdrücken von einander abweichen. Vielleicht hat Weierstrass nicht immer genau dieselbe Meinung gehabt; vielleicht ist Manches von seinen Schülern ungenau aufgefasst worden. Unter diesen Umständen müssen wir versuchen, aus verschiedenen Darstellungen dieser Lehre das eigentlich Weierstrassische zu erkennen, wobei freilich Irrthümer leicht vorkommen können.

§ 149. Zuerst ist anerkennend hervorzuheben, dass Weierstrass den Grund tiefer legen will, als die meisten Mathematiker. Er beginnt wie

1) Kossak, Die Elemente der Arithmetik (Programm des Friedrichs-Werderschen Gymnasiums, Berlin, 1872);
Biermann, Theorie der analytischen Functionen (Leipzig, 1887);
Handschriftliche Collegienhefte. Was G. Cantor in den Math. Annalen XXI, S. 565 als Weierstrassische Definitionsform der irrationalen Zahlen umschrieben hat, scheint stark im Cantorschen Sinne gefärbt zu sein und wird wohl im Wesentlichen von denselben Schwierigkeiten gedrückt wie Cantors eigene Lehre. Auch hier wird z. B. von *zu definirenden* Zahlen gesprochen.

wir mit den Anzahlen. Aber gleich müssen wir uns wundern, dass er nichts von dem der Beachtung werth gefunden hat, was Andere vor ihm über diese Sache gedacht haben, dass er keine der Klippen gesehen hat, die hier drohen.

Wenn wir die angeführten Schriften vergleichen, können wir kaum im Zweifel darüber sein, dass Weierstrass auf dem kindlichen Pfeffernussstandpunkte stand, oder wenigstens zu stehen meinte; denn dass er durch die Natur der Sache immer wieder davon abgedrängt werden musste, ist vorauszusehen. Auf die Frage nach dem Wesen der Anzahl erhalten wir Antworten, wie „Reihe gleichartiger Dinge", „Gegenstand, bestehend aus Elementen gleicher Art"; kurz: ein Haufe von Pfeffernüssen ist nach Weierstrass eine Zahl [1]). Wenn man einen Mann, der nie über die Sache nachgedacht hätte, mit der Frage „was ist die Zahl?" aus dem Schlafe weckte, so brächte er in der ersten Verwirrung wohl ähnliche Ausdrücke hervor wie Weierstrass: „Menge", „Haufe", „Reihe von Dingen", „Gegenstand, bestehend aus gleichartigen Theilen" u. s. w.; und ob er dabei das Wort „gleichartig" hinzufügte oder wegliesse, wäre unwesentlich, weil dadurch ja doch nichts näher bestimmt würde.

§ 150. Die beiden möglichen Hauptfehler sind hier begangen worden. Der erste besteht in der Verwechselung der Zahl mit ihrem Träger oder Substrate, ähnlich der Verwechselung von *color* ~~oder~~ mit *pigmentum*. Der zweite besteht darin, dass als Träger der Zahl nicht der Begriff oder Begriffsumfang, sondern das genommen wird, was mit den Worten „Aggregat", „Reihe von Dingen", „Gegenstand, der aus gleichartigen Theilen besteht", bezeichnet werden soll. Der Unterschied liegt darin, dass das Aggregat aus Gegenständen besteht, die durch Beziehungen zusammengehalten werden und Theile des Aggregats genannt werden können. Mit der Vernichtung der Theile wird auch das Ganze vernichtet. Dagegen sind das, was den Bestand des Begriffes — oder seines Umfangs — ausmacht, nicht die Gegenstände, die unter ihn fallen, sondern seine Merkmale; das sind die Eigenschaften, die ein Gegenstand haben muss, um unter den Begriff zu fallen. Leere Begriffe sind möglich, leere Aggregate sind Undinge. Durch den Begriff ist bestimmt, welche Gegenstände unter ihn fallen; durch das Aggregat ist nicht bestimmt, was als seine Theile gelten sollen, z. B. bei einem Regimente, ob die einzelnen Soldaten, die Compagnien oder die Bataillone; bei einem Stuhle, ob die Atome, die Molecüle oder die künstlich gefügten Holzstücke.

Es ist vorauszusehen, dass diese Theorie gleich bei der Multiplication scheitern muss, und dass die eigentliche Zahl, da sie das nicht ist, was

1) Kossak und Biermann spielen die Sache durch Ausdrücke, wie „Vorstellung", „abstrahiren", „fixiren" ins Psychologische hinüber, nicht zum Vortheile der Theorie und auch wohl nicht im Sinne von Weierstrass; wenigstens finde ich in dem mir bekannten Collegienhefte nichts der Art.

Weierstrass als Zahlengrösse erklärt, irgendwie eingeschmuggelt werden muss; und das geschieht dann auch ganz naïv durch Ausdrücke, wie „es kommt auf die Menge an", „wie oft", „in gleicher Anzahl" [1]). Es kommen Ausdrücke vor, wie „*a*-mal", was ganz unsinnig ist, wenn man unter »*a*« eine Weierstrassische Zahlengrösse — einen Eisenbahnzug z. B. — versteht.

§ 151. Es geht überhaupt ein Zwiespalt durch die Weierstrassische Lehre, ein Kampf zwischen den ausdrücklich gegebenen Erklärungen und dem, was die Natur der Sache verlangt. Dieser Zwiespalt zeigt sich in der Auffassung und im Gebrauch des Wortes „Einheit", des Gleichheitszeichens und des Pluszeichens. Nach den Erklärungen muss die Zahl aus Einheiten bestehen, während die Natur der Sache auf eine einzige Einheit hindrängt, wenigstens wenn die Zahl nicht complex ist. So sehen wir denn einen Kampf zwischen Singular und Plural beim Worte „Einheit" und einen Wechsel des Standpunkts. Bald wird „Einheit" als Begriffswort (nomen appellativum) gleichbedeutend etwa mit „Element", bald als Eigenname (nomen proprium) und gleichbedeutend mit „Eins" gebraucht. Es ist klar, dass die Arithmetik verschiedene Einse nicht brauchen kann, sondern nur d i e Zahl Eins. Die sprachliche Scheusslichkeit des Plurals ist hier ein passendes Gewand für die sachliche Unmöglichkeit. Nach Weierstrass ist Gleichheit nicht Identität, während die Natur der Sache Identität verlangt.

Der Werth oder die Geltung eines Aggregates oder einer Zahl wird vom Aggregate selbst unterschieden und damit offenbar die eigentliche Zahl gemeint. Das ist auch eine Weise, wie diese eingeschmuggelt wird; nirgends ist gesagt, was der Werth oder die Geltung sei. Es kommen Stellen vor, nach denen der Werth einer Zahlengrösse bei gewissen Veränderungen unverändert bleibt, in einer Weise, dass wir schliessen können, gleiche Zahlen (Zahlengrössen) haben denselben Werth. Nun fragen wir: was bedeutet denn nun eigentlich ein Zahlzeichen, wie »2« nach Weierstrass? eine Weierstrassische Zahlengrösse, z. B. das aus Erde und Mond bestehende System? oder den Werth, die Geltung eines solchen Aggregates? Im letzten Falle, wäre das Gleichheitszeichen in »$1 + 1 = 2$« als Identitätszeichen aufzufassen im Widerspruch mit der Weierstrassischen Erklärung.

§ 152. Auch das Pluszeichen muss verschiedene Bedeutungen haben, jenachdem es steht zwischen Zeichen Weierstrassischer Zahlengrössen (von Eisenbahnzügen, Bücherreihen), oder zwischen Zeichen von Werthen solcher Zahlengrössen. Die Erklärung passt nur auf den ersten Fall, der aber für die Arithmetik nicht in Betracht kommen kann. Nach der Erklärung müsste

---

1) „*Zwei Zahlengrössen der neuen Art sind gleich*, wenn sie so umgeformt werden können, dass beide dieselben Elemente und jedes in gleicher Anzahl enthalten." Biermann a. a. O. § 4, ähnlich Kossak a. a. O. S. 21. Also *Zahlengrössen* enthalten Elemente in gleicher *Anzahl*. Warum nicht in gleicher Zahlengrösse?

»♁ + ☾«

das aus Erde und Mond bestehende System oder Aggregat bezeichnen, während

»☾ + ☾«

wenn es überhaupt eine Bedeutung hätte, nur den Mond bezeichnen könnte; und ebenso könnte dann »1 + 1« nur 1 bedeuten. Das ist offenbar für die Arithmetik unbrauchbar.

Dieser Kampf zwischen den Anforderungen der Arithmetik und der Weierstrassischen Lehre erzeugt auch das Wunder der wiederholt vorkommenden Gegenstände, das übrigens auch bei andern mathematischen Schriftstellern beobachtet werden kann. Wenn doch diese Herren erst einmal selber versuchen wollten, wiederholt vorzukommen! Hat schon jemand von ihnen ein wiederholt vorkommendes Sandkorn gesehen? Ist das nicht vielleicht nur eine ungenaue Ausdrucksweise? Doch nicht eine ganz unschuldige! Man versuche, sie durch eine genaue zu ersetzen, und man wird der Weierstrassischen Lehre eine Hauptstütze entziehen.

§ 153. Neben dieser — freilich wohl niemals klar ausgesprochenen — Auffassung, wonach ein Zahlzeichen den Werth einer Zahlengrösse bezeichnet, findet sich noch eine andere. Danach bezeichnet es eine Zahlengrösse selbst, aber eine solche, die nicht aus concreten, sondern aus abstracten Einheiten, oder sogar aus einer einzigen, nämlich der allein vorhandenen abstracten Einheit oder Eins zusammengesetzt sei. Wie also eine Bücherreihe aus Büchern, so besteht dann die Zahl 3 aus abstracten Einheiten, oder besser noch aus der — natürlich wiederholt vorkommenden — Eins. Was diese freilich sei, erfahren wir nicht. Wahrscheinlich ist sie so abstract, dass man, um sie zu denken, überhaupt nichts denken darf. Etwas weniger schwierig ist schon die abstracte Kuh, aus der sich wohl eine Kuhherde wird bilden lassen[1]). Sie ist als Kuh freilich noch nicht abstract genug, um für eine aus ihr bestehende Herde das Zeichen »50« passend erscheinen zu lassen. Dazu wäre noch eine grössere Abstraction erforderlich.

Nun wir erkennen schon die Quellen aller dieser Wirrnisse in den beiden oben genannten Hauptfehlern.

Drei Auffassungen der Zahl (Anzahl) sind also bei Weierstrass zu unterscheiden:

1) die Zahl ist ein Aggregat von concreten Dingen (Pfeffernüssen, Eisenbahnwagen, Büchern);
2) die Zahl ist eine Eigenschaft (Werth, Geltung) eines solchen Aggregates;
3) die Zahl ist ein Aggregat von abstracten Dingen oder eines einzigen wiederholt vorkommenden abstracten Dinges.

---

1) Die von dieser zu gewinnende Milch wird an Abstractheit nichts zu wünschen übrig lassen. Man vergleiche hierzu des Verfassers *Grundlagen der Arithmetik* (Breslau, Koebner, 1884) und *Die Zahlen des Herrn Schubert* (Jena, Pohle, 1899).

Die Schüler Weierstrassens sind in der angenehmen Lage, unter diesen drei Standpunkten jedesmal den wählen zu können, der den Anforderungen des Augenblicks am besten zu genügen scheint. Wenn der zweite allein vorkäme, wäre die Verwechselung der Anzahl mit ihrem Träger vermieden; aber grade diese Auffassung ist am wenigsten deutlich ausgesprochen, und die hierher gehörenden Aeusserungen sind offenbar nur durch den Zwang der Sachlage abgenöthigt.

§ 154. Dies ist die Grundlage, auf der Weierstrass die Lehre von den höhern Zahlen aufbauen will. Dass sie schwankend ist, leuchtet ein. Und so weist denn auch sein Lehrgebäude von der Null, den negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen die bedenklichsten Risse auf. Gleich bei der Einführung der Null werden das Gleichheitszeichen und das Pluszeichen in einem Falle gebraucht, auf den die Erklärungen nicht passen, sodass streng genommen die Gleichung »$(a-a)+b=b$« nach Weierstrass keinen Sinn hat. Ebensowenig hat der Ausdruck „eine Zahl, die zu a addirt, Null ergiebt" nach Weierstrass einen Sinn, weil die Erklärung des Addirens auf diesen Fall nicht passt.

Es ist von Umformungen einer Zahlengrösse die Rede, bei denen entweder mehre Elemente durch ein einziges ersetzt werden oder umgekehrt ein Element durch mehre vertreten werden können; aber nirgend ist gesagt, woran man die Möglichkeit einer solchen Ersetzung erkenne, noch in welcher Hinsicht die Vertretung geschehen könne. Es wird auch wohl gesagt, dass ein Element äquivalent sei mehren andern; aber woran die Aequivalenz erkannt werde, bleibt dunkel.

§ 155. Worauf beruht denn nun eigentlich die Anerkennung der negativen, gebrochenen, irrationalen Zahlen bei Weierstrass? Sie werden, wie es scheint, einfach geschaffen, ohne dass die Möglichkeit des Schaffens untersucht wird. Die Berechtigung der negativen Zahlen beruht nach Kossak [1]) nur auf ihrer Definition. Das soll wohl heissen, man brauche nur einen Begriff aufzustellen, um sicher zu sein, dass etwas unter ihn falle [2]). Nun haben wir längst erkannt, dass die Zahlen keine physischen Gegenstände sein können, sondern nur logische. Aber auch diese müssen nachgewiesen werden, und dazu genügt es nicht, einen Begriff anzugeben, unter den sie fallen. Darin ist kein Unterschied zwischen physischen und logischen Gegenständen. In den Vorlesungen hat Weierstrass zwar Beispiele gegeben (eingenommenes und ausgegebenes Geld, Strecken), aber, wie es scheint, nur zur Erläuterung, nicht zur Begründung.

1) A. a. O., S. 17.
2) Man vergl. hierzu Kants Kritik des ontologischen Beweises vom Dasein Gottes. Kritik d. r. Vernunft, ed. Hartenstein, S. 405.

Eine Summe von unendlich vielen positiven Summanden fasst Weierstrass nicht als Grenzwerth einer Summe, sondern als Summe. Ihr Vorhandensein scheint ihm ebenso sicher wie bei endlich vielen Summanden; und doch stimmt dies nicht mit seiner Erklärung der Addition. Nur hält er es für nöthig, die Gleichheit in diesem Falle besonders zu erklären (Verstoss gegen unsern ersten Grundsatz des Definirens) und kommt dadurch auf die Endlichkeit. Das hängt damit zusammen, dass das Wort „Summe“ und das Pluszeichen sowie das Gleichheitszeichen, wie wir oben gesehen haben, keine feste Bedeutungen haben.

Eine eingehendere Kritik von Weierstrassens Begründung der irrationalen Zahlen ist, nachdem die Grundlagen als ganz unsicher nachgewiesen sind, nicht nöthig.

f) Rückblick und Ausschau.

§ 156. Werfen wir nun einen zusammenfassenden Rückblick auf die Versuche, die höhern Zahlen einzuführen, und fragen wir, welchen Nutzen wir daraus für unsere eigenen Bemühungen ziehen können.

Wir unterscheiden zwei Hauptrichtungen, in denen sich diese Versuche bewegen: die formale und die inhaltliche. Jene nennt Zahlen gewisse durch Schreiben erzeugte Figuren, die nach willkürlichen Regeln behandelt werden. Diese Figuren können zwar in einem andern Zusammenhange auch Zeichen sein, die etwas bedeuten; aber davon sieht der Formalarithmetiker gänzlich ab. Für die inhaltliche Arithmetik sind jene Figuren nur Zeichen ihrer eigentlichen Gegenstände, Zahlzeichen, äussere Hülfsmittel. Die formale scheint wie durch ein unabwendbares Verhängnis immer wieder in das Bett der inhaltlichen Arithmetik einzumünden und stösst unter andern auf folgende Schwierigkeit. Bei der Einführung einer neuen Art von Figuren muss sie zugleich neue Regeln für deren Handhabung aufstellen, und zwar sowohl verbietende, als auch erlaubende. Es wäre nun eigentlich zu zeigen, dass diese neuen Regeln weder unter sich, noch mit den alten in Widerstreit gerathen könnten. Diese Aufgabe ist wohl nicht einmal ernstlich in Angriff genommen, geschweige denn gelöst worden.

Für uns kann nur eine inhaltliche Arithmetik in Betracht kommen. Aber auch die auf diesem Boden angestellten Versuche sind, wie wir gesehen haben, erfolglos geblieben, wenigstens sofern sie rein arithmetisch sein wollen.

Entweder man unterscheidet nicht zwischen Begriff und Gegenstand und glaubt dann, indem man einen Begriff aufzeigt, damit zugleich den Gegenstand von den gewünschten Eigenschaften zu haben; oder man sieht ein, dass ein Begriff auch leer sein kann, und verlangt von ihm, dass er widerspruchsfrei sei. So einleuchtend die Nothwendigkeit dieser Bedingung ist, so fraglich ist es, ob sie hinreiche. Dass kein Widerspruch bestehe — meinen nun wohl Manche — leuchte unmittelbar ein, da ein solcher, wenn vorhanden, sofort bemerkt werden müsste. Das ist leicht durch den Hinweis auf die indirecten Beweise zu widerlegen. Dass kein Widerspruch bestehe, muss also bewiesen werden. Nun haben wir zwar den Satz, dass ein Begriff widerspruchsfrei ist, wenn ein Gegenstand unter ihn fällt; aber dieser Satz ist grade in unserm Falle unbrauchbar. Bevor also nicht ein ganz neues Prinzip gefunden ist, mit dem wir die Freiheit von Widersprüchen beweisen können, kommen wir auf diesem Wege nicht weiter[1]).

§ 157. Doch ist diese Betrachtung der vergeblichen Versuche nicht ganz unfruchtbar geblieben. Wir haben uns an unsere Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit erinnert, die uns das zu leisten verspricht, was die schöpferischen Definitionen anderer Mathematiker nicht vermögen. Wir haben die reelle Zahl als Grössenverhältnis aufgefasst und so die formale Arithmetik im oben angegebenen Sinne ausgeschlossen. Damit haben wir auf die Grössen hingewiesen als auf die Gegenstände, zwischen denen ein solches Verhältnis stattfindet[2]).

Da die Anzahlen nicht Verhältnisse sind, müssen wir sie von den positiven ganzen Zahlen unterscheiden. Darum ist es nicht möglich, das Gebiet der Anzahlen zu dem der reellen Zahlen zu erweitern; es sind eben ganz getrennte Gebiete. Die Anzahlen antworten auf die Frage: „wieviele Gegenstände einer gewissen Art giebt es?“ während die reellen Zahlen als Maasszahlen betrachtet werden können, die angeben, wie gross eine Grösse verglichen mit einer Einheitsgrösse ist. Manche Leser haben sich

---

1) L. Kronecker scheint gleich uns die bisher gemachten Versuche, das Irrationale arithmetisch zu begründen für fehlerhaft gehalten zu haben; ihm sind die irrationalen algebraischen Grössen der eigentlichen Arithmetik fremd; er will sie demgemäss ausscheiden und von den Zahlen nur die positiven ganzen als Gegenstände der Arithmetik anerkennen. Jeder Versuch, die Lehre von den reellen Zahlen rein arithmetisch zu begründen, wird wohl darauf hinauslaufen, Alles schliesslich auf die Anzahlen zurückzuführen, sodass jeder arithmetische Satz der Lehre von den Anzahlen zugerechnet werden kann. In demselben Sinne kann man wohl auch jeden Satz der Lehre von den algebraischen Flächen und Curven, der Lehre von den Punkten, Geraden und Ebenen zuweisen. Aber es ist ein Unterschied, ob man den Ausdruck „Curve vierter Ordnung“ nur für entbehrlich hält, oder ob man ihn aus der Geometrie ganz verbannen will, weil der damit bezeichnete Begriff nicht in die Geometrie gehöre. Und Kronecker scheint die Irrationalzahlen nicht nur für entbehrlich, sondern für geradezu unarithmetisch zu halten, sodass die mit ihnen geführten Beweise sich auf etwas stützen, was die Reinheit der Arithmetik trübt. Wir können den Grundsatz wohl billigen, dass die Arithmetik, wenn irgend möglich, von keinen Beweisgründen Gebrauch machen dürfe, die der Geometrie oder sonst einer fremden Wissenschaft entlehnt sind. Aber es fragt sich, ob es nicht doch noch gelingen könne, die irrationalen Zahlen rein arithmetisch zu definiren; und wir werden einen solchen Weg zu eröffnen versuchen.

Uebrigens ist Kroneckers Theorie der Anzahlen, auf die er Alles gründet, unhaltbar. Eine Anzahl ist nach ihm eine Gesammtheit von Zahlzeichen. Das führt zu der absurden Folgerung, dass ein Volk, das andere Zahlzeichen benutzt, auch andere Anzahlen hätte, dass also dessen Arithmetik von ganz andern Gegenständen handelte als unsere und also eine ganz andere Wissenschaft wäre. Ferner gäbe es nur endlich viele Anzahlen, da offenbar nur endlich viele Zahlzeichen bis jetzt hingeschrieben sind, und aus diesen nur endlich viele Gesammtheiten bestehen können. (Vergl. Ueber den Zahlbegriff von Leopold Kronecker, Philosoph. Aufsätze, Ed. Zeller zu seinem 50-jährigen Doctorjubiläum gewidmet.)

2) Hier befinden wir uns in Uebereinstimmung mit Newton.

vielleicht über unsere Formel »$a \frown (b \frown \mathfrak{f})$« gewundert und dafür »$a + 1 = b$« erwartet; aber die $\mathfrak{f}$-Beziehung einer Anzahl zur nächstfolgenden ist verschieden von der Beziehung $\xi + 1 = \zeta$. Jene findet nur bei Anzahlen statt, diese auch bei andern als positiven ganzen Zahlen, sodass wir durch ihre Umkehrung geleitet von den positiven ganzen Zahlen über die Null zurück zu den negativen gelangen können, während ein Rückgang über die Anzahl $\mathfrak{0}$ hinaus nicht möglich ist[1]). Deshalb unterscheiden wir auch die Anzahlen $\mathfrak{0}$ und $\mathfrak{1}$ von den Zahlen 0 und 1.

§ 158. Zunächst könnte es nun scheinen, dass wir uns auf die Geometrie stützen müssten; aber indem wir die reelle Zahl als Grössenverhältnis gefasst, haben wir die Meinung abgelehnt, dass die reelle Zahl etwa eine Strecke sei, dass ein Zahlzeichen eine Strecke bedeute. Man unterscheidet nicht immer genau zwischen einer Strecke und der Maasszahl, die ihr im Verhältnisse zu einer Einheitsstrecke zukommt. So spricht man wohl von der Strecke a und versteht dann im weiteren Verlaufe unter »a« die Maasszahl. Die so entstandene Verwirrung hat dann wohl die Meinung aufkommen lassen, ein Zahlzeichen bedeute — oder könne wenigstens bedeuten — eine Strecke. Gewiss bedeutet es etwas, aber nichts Geometrisches. Sondern genau dasselbe Grössenverhältnis, das bei Strecken stattfindet, haben wir auch bei Zeiträumen, Massen, Lichtstärken u. s. w. Dadurch löst sich die reelle Zahl von diesen besondern Grössenarten ab und schwebt gleichsam über ihnen. Und darum scheint es nicht angemessen, die Betrachtung zu fest an geometrischen Gebilden haften zu lassen. Man kann solche wohl benutzen, um das Verständnis zu erleichtern, muss sich aber hüten, etwas darauf zu gründen. Denn wenn arithmetische Sätze unabhängig von geometrischen Axiomen bewiesen werden können, so müssen sie es auch. Sonst verläugnete man ohne Noth die Selbständigkeit der Arithmetik und ihre logische Natur.

Man kann diese Behandlung der Arithmetik vielleicht auch formal nennen, gebraucht dann aber dieses Wort nicht in dem oben dargelegten Sinne. Dann kennzeichnet es die rein logische Natur der Arithmetik, will aber nicht besagen, dass die Zahlzeichen inhaltlose Figuren seien, die nach willkührlichen Regeln behandelt werden. Die Regeln folgen hier vielmehr nothwendig aus den Bedeutungen der Zeichen und diese Bedeutungen sind die eigentlichen Gegenstände der Arithmetik; willkührlich ist nur die Bezeichnung.

§ 159. Der hier zu betretende Weg liegt also zwischen der alten noch von H. Hankel vorgezogenen geometrischen Begründungsweise der Lehre von den Irrationalzahlen und den in neuerer Zeit eingeschlagenen

1) Wir haben das Pluszeichen an so früher Stelle überhaupt nicht einführen können, ohne es unvollständig und stückweise zu erklären und so gegen unsern ersten Grundsatz des Definirens zu verstossen.

Wegen. Von jener behalten wir bei die Auffassung der reellen Zahl als Grössenverhältnis oder Maasszahl, lösen sie jedoch von den geometrischen wie von allen besondern Grössenarten ab und nähern uns dadurch diesen neueren Bestrebungen. Aber wir vermeiden zugleich den bei diesen hervortretenden Mangel, dass das Messen entweder garnicht vorkommt, oder ohne innern, im Wesen der Zahl selbst begründeten Zusammenhang rein äusserlich angeflickt wird, woraus dann folgt, dass eigentlich für jede Grössenart besonders angegeben werden müsste, wie sie zu messen wäre, und wie man dadurch eine Zahl erhielte. Es fehlt dabei ganz an allgemeinen Kennzeichen dafür, wo die Zahlen als Maasszahlen gebraucht werden können und wie sich dann diese Anwendung gestaltet.

So können wir hoffen, uns einerseits die Handhaben der Anwendung in besonderen Wissensgebieten nicht entschlüpfen zu lassen, ohne andrerseits die Arithmetik mit den aus jenen Wissenschaften entlehnten Gegenständen, Begriffen und Beziehungen zu verunreinigen und ihr eigenthümliches Wesen und ihre Selbständigkeit zu gefährden. Die Darbietung solcher Handhaben kann man doch wohl von der Arithmetik erwarten, wenn auch die Anwendung selbst nicht ihre Sache ist.

Ob unser Plan ausführbar sei, muss der Versuch lehren. Dabei kann dieses Bedenken aufstossen. Wenn die positive Quadratwurzel aus 2 ein Grössenverhältnis ist, so scheint es, um sie zu definiren, nothwendig, Grössen anzugeben, die dies Verhältnis zueinander haben. Aber woher diese nehmen, wenn der Hinweis auf geometrische und physikalische Grössen verboten ist? Und doch bedürfen wir eines solchen Grössenverhältnisses durchaus, weil sonst nicht einmal das Zeichen »$\sqrt{2}$« gebraucht werden dürfte.

Bevor wir dieses Bedenken zu beseitigen versuchen, müssen wir uns über die Bedeutung des Wortes „Grösse“ verständigen.

g) Grösse.

§ 160. Das Wort „Grösse“ („Quantität“) bedeutet bei manchen Mathematikern soviel wie „reelle Zahl“ oder „Zahl“ schlechtweg. Diese Gebrauchsweise hängt wohl damit zusammen, dass die Maasszahl und die durch sie hinsichtlich einer Einheit (eines Maasses) bestimmte Grösse nicht immer auseinander gehalten werden; sie kann für uns hier nicht in Betracht kommen.

Was Grösse sei, ist wohl noch niemals befriedigend gesagt worden. Wenn wir die Erklärungsversuche durchgehen, stossen wir oft auf das Wort „gleichartig“ oder ein ähnliches. Man verlangt von den Grössen, dass man die gleichartigen unter ihnen vergleichen, addiren, subtrahiren, auch eine Grösse in ihr gleichartige Theile zerlegen könne [1]). Mit dem Worte „gleichartig“ ist offenbar gar nichts gesagt; denn in einer Hinsicht

1) Otto Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik (Leipzig, Teubner, 1885) Einleitung.

können Dinge gleichartig sein, die in einer andern ungleichartig sind. Die Frage also, ob ein Gegenstand einem andern gleichartig sei, lässt sich nicht mit „ja“ oder „nein“ beantworten; es fehlt an dem ersten logischen Erfordernis, der scharfen Begrenzung.

Andere definiren Grösse mit den Wörtern „grösser“ und „kleiner“, oder „vergrössern“ und „verkleinern“ wodurch aber nichts gewonnen ist; denn worin die Beziehung des Grösserseins oder die Thätigkeit des Vergrösserns bestehe, bleibt unerklärt. Es nützt auch nichts, die Wörter „Addition“, „Summe“, „Vervielfältigen“ zu gebrauchen, wenn man sie nicht genügend erklärt hat.

Wenn H. Hankel sagt[1])

„Unter der Summe zweier Grössen *a* und *b* versteht man eine neue Grösse, die aus ihrer Synthesis als Resultat hervorgeht“

so gebraucht er das ebenso unerklärte Wort „Synthesis“, und es bleibt zweifelhaft, ob es bei zwei gegebenen Objecten nicht verschiedene Synthesen geben könne.

Wenn man Wörter in einem besondern Zusammenhange erklärt hat, darf man sich nicht einbilden, nun auch in andern Zusammenhängen einen Sinn mit ihnen zu verbinden. Man dreht sich, wie es scheint, hier nur im Kreise, indem man immer ein Wort durch ein anderes ebenso erklärungsbedürftiges erklärt, ohne dadurch dem Kerne der Sache näher zu kommen.

§ 161. Der Grund dieser Misserfolge liegt in der falschen Fragestellung. Es giebt sehr verschiedene Grössenarten: Längen, Winkel-, Zeitgrössen, Massen, Temperaturen u. s. w., und es wird kaum möglich sein, anzugeben, wodurch die Angehörigen dieser Grössenarten sich von Gegenständen unterscheiden, die nicht einer Grössenart angehören. Auch wäre wenig damit gewonnen; denn es fehlte noch an jedem Mittel, zu erkennen, welche von diesen Grössen demselben Grössengebiete angehörten.

Statt zu fragen: welche Eigenschaften muss ein Gegenstand haben, um eine Grösse zu sein? muss man fragen: wie beschaffen muss ein Begriff sein, damit sein Umfang ein Grössengebiet sei?[2]) Wir wollen nun statt

1) Theorie der complexen Zahlensysteme (Leipzig, Voss, 1867) § 14.

2) Einen Anlauf in dieser Richtung nimmt O. Stolz, indem er a. a. O. schreibt: „. . . so wird ein Grössenbegriff ein Begriff von der Art sein, dass je zwei der darunter enthaltenen Dinge entweder als geich oder als ungleich erklärt sind.“ Hier ist in der That der Versuch gemacht, die oben gewünschte Beschaffenheit eines Begriffes anzugeben; aber in dem nächstfolgenden Satze

»Mit andern Worten: „Grösse heisst jedes Ding, welches einem andern gleich oder ungleich gesetzt werden soll“«

wird dieser Versuch wieder fallen gelassen. Wenn es von dem Erklärtsein abhinge, so wäre ein Begriff von einem gewissen Augenblicke an ein Grössenbegriff, vorher nicht. Um die Frage zu entscheiden, ob zu einer gewissen Zeit ein Begriff ein Grössenbegriff wäre, müssten unter Umständen schwierige geschichtliche Forschungen angestellt werden. Dazu kommt noch Folgendes. Entweder sind die Wörter „gleich“ und „ungleich“ schon vorher ihrer Bedeutung nach bekannt; dann kann es nicht mehr Sache der Erklärung sein, ob irgendwelche Dinge gleich oder ungleich sind; oder diese Wörter sind vorher

„Begriffsumfang“ der Kürze wegen „*Klasse*“ sagen. Dann kann man die Frage auch so stellen: welche Eigenschaften muss eine Klasse haben, um ein Grössengebiet zu sein? Etwas ist eine Grösse nicht für sich allein, sondern nur, sofern es mit andern Gegenständen einer Klasse angehört, die ein Grössengebiet ist.

§ 162. Da es uns zunächst nur darum zu thun ist, eine Grundlage für die Lehre von den reellen Zahlen zu gewinnen, wollen wir uns die Sache dadurch erleichtern, dass wir die absoluten Grössen ausser Betracht lassen und nur diejenigen Grössengebiete ins Auge fassen, in denen ein Gegensatz stattfindet, dem bei den Maasszahlen der des Positiven und Negativen entspricht. Und hierbei mag uns die Bemerkung von Gauss (Werke, Bd. II, S. 176) zu Hülfe kommen:

„Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind, z. B. A, B, C . . . und dass die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter als der Umtausch der Glieder der Relation, sodass wenn die Relation (oder der Uebergang) von A zu B als $+1$ gilt, die Relation von B zu A als -1 dargestellt werden muss. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.“

Im Wesentlichen können wir diesen Gedanken zustimmen, lassen jedoch die Beschränkung auf ganze Zahlen fallen und sagen statt „das Gezählte“ lieber „das Gemessene“. Gauss scheint die Relationen durch die Gegenstände bestimmt zu denken, zwischen denen sie stattfinden, und bedarf

nicht bekannt: dann kann man für sie irgend beliebig gebildete Wörter, z. B. „azig“, „bezig“ nehmen, und wir haben gesehen, dass dadurch nichts näher bestimmt werden kann. Vielleicht hält man noch einen dritten Fall für möglich, dass nämlich bis dahin die Wörter „gleich“ und „ungleich“ weder vollkommen bekannt, noch ganz unbekannt seien, insofern man gewisse Eigenschaften ihrer Bedeutungen kenne. Aber ehe überhaupt von den Bedeutungen dieser Wörter die Rede sein darf, müssen sie vollkommen bestimmt sein, und erst dann kann gefragt werden, ob diese Bedeutungen die gewünschten Eigenschaften haben. Aber solche Erklärungen können überhaupt nicht dafür entscheidend sein, ob irgend ein Begriff ein Grössenbegriff sei. Entweder ist ein Begriff ein Grössenbegriff; dann ist er es unabhängig von jeder Erklärung von „gleich“ oder „ungleich“; oder er ist kein Grössenbegriff, so ist er auch dies unabhängig von solcher Erklärung. Diese setzt nur einen Zusammenhang zwischen jenen Wörtern und den Bedeutungen fest, die sie haben sollen; darüber hinaus geht ihre Wirkung nicht. Wir müssen uns nur darüber ganz klar sein, dass eine Erklärung nie etwas an der Sache selbst ändern kann, dass sie lediglich unsere Benennung oder Bezeichnung betreffen kann.

eines Postulates über die Gleichheit der Relationen. Wir dagegen betrachten die Beziehung als definirbar ohne Hinsicht auf bestimmte Gegenstände, die in ihr stehen, sodass mit der Anerkennung einer Beziehung im Allgemeinen noch gar nicht gesagt ist, dass es Gegenstände gebe, die in ihr stehen. Wenn nun eine Beziehung gegeben ist, in der A zu B steht, so ist damit zugleich entschieden, ob B zu C und C zu D in dieser selben Beziehung stehen, und eine Anordnung von Gegenständen in eine Reihe ist damit von selbst gegeben. Freilich wird nicht jede Beziehung eine in's Unendliche fortlaufende Reihe ergeben; nicht jede Beziehung ist also für unsere Zwecke brauchbar. Welche Beschränkungen nothwendig sind, muss die weitere Untersuchung lehren.

Sagen wir der Kürze halber „Relation“ statt „Umfang einer Beziehung“, so können wir sagen: die von uns zu betrachtenden Grössen sind Relationen. Die Grössenverhältnisse oder reellen Zahlen werden wir demnach als Relationen von Relationen ansehen. Unsere Grössengebiete sind Klassen von Relationen, nämlich Umfänge von Begriffen, die dem Begriffe *Relation* untergeordnet sind. Der Umkehrung des Vorzeichens wird die Umkehrung der Beziehung entsprechen (K und $\mathfrak{X}K$). Der Addition der Maasszahlen wird entsprechen die Zusammensetzung der Relationen ($K \smile \Pi$). Demnach wird das Zeichen »$\mathfrak{X}$« dem Minuszeichen und das Zeichen »$\smile$« dem Additionszeichen vergleichbar sein; die Formel »$A \smile \mathfrak{X}B$« wird dem »$a - b$« und »$A \smile \mathfrak{X}A$« dem Nullzeichen entsprechen.

§ 163. Nehmen wir beispielsweise als Gegenstände die Punkte auf einer geraden Linie. Zwischen diesen finden Abstandsbeziehungen statt. Der Punkt B ist etwa von A um eine gewisse Strecke nach einer gewissen Seite (etwa nach rechts) entfernt. Wenn der Punkt D ebenso weit von C nach derselben Seite entfernt ist, so steht C zu D in derselben Abstandsbeziehung wie A zu B. Offenbar ist die Abstandsrelation von B zu A die Umkehrung jener von A zu B. Mithin entspricht die Umkehrung einer Abstandsrelation der Umkehrung der Richtung. Es ist ferner unmittelbar ersichtlich, dass die Zusammensetzung solcher Abstandsrelationen mit der geometrischen Addition der Strecken übereinkommt.

§ 164. Wir können jetzt der vorhin (§ 159) aufgeworfenen Frage näher treten, woher wir die Grössen nehmen, deren Verhältnisse irrationale Zahlen sind. Sie werden Relationen sein; und diese dürfen nicht leer sein, d. h., sie dürfen nicht Umfänge solcher Beziehungen sein, in denen keine Gegenstände zu einander stehen. Denn solche Beziehungen haben denselben Umfang; es giebt nur eine einzige leere Relation. Damit könnten wir keine reelle Zahl definiren. Wenn q die leere Relation ist, so ist $\mathfrak{X}q$ dieselbe, ebenso auch $q \smile \mathfrak{X}q$. Auch die Zusammensetzung der Relationen unseres Grössengebietes darf nicht die leere Relation ergeben; das thäte sie aber, wenn es keinen Gegenstand gäbe, zu dem ein Gegenstand in der ersten und der zu einem Gegenstande in der zweiten Relation stände.

Wir bedürfen also einer Klasse von Gegenständen, die in den Relationen unseres Grössengebietes zu einander stehen, und zwar muss diese Klasse unendlich viele Gegenstände umfassen. Nun kommt ja dem Begriffe *endliche Anzahl* eine unendliche Anzahl zu, die wir Endlos genannt haben; aber diese Unendlichkeit genügt noch nicht. Nennen wir den Umfang eines Begriffes, der dem Begriffe *endliche Anzahl* untergeordnet ist, eine Klasse endlicher Anzahlen, so kommt dem Begriffe *Klasse endlicher Anzahlen* eine unendliche Anzahl zu, die grösser als Endlos ist; d. h. es lässt sich der Begriff *endliche Anzahl* abbilden in den Begriff *Klasse endlicher Anzahlen*, aber nicht umgekehrt dieser in jenen.

Nun wären etwa zwischen den Klassen endlicher Anzahlen Relationen nachzuweisen, welche als Angehörige eines Grössengebietes aufgefasst werden könnten. Etwas anders wird sich die Sache freilich noch gestalten, wie wir gleich sehen werden.

Setzen wir für den Augenblick die Kenntnis der irrationalen Zahlen voraus! Jede positive Zahl a kann in der Form

$$»r + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{\frac{1}{2^{n_k}}\right\}«$$

bezeichnet werden, worin unter »r« eine positive ganze Zahl oder 0, unter »n_1«, »n_2« u. s. w. positive ganze Zahlen zu verstehen sind, deren Anzahl wir als unendlich annehmen können. Es gehört in dieser Weise zu jeder positiven rationalen oder irrationalen Zahl a ein Paar, dessen erstes Glied (r) eine positive ganze Zahl oder 0 ist und dessen zweites Glied eine Klasse von positiven ganzen Zahlen ist (Klasse der n_k). Statt der ganzen Zahlen können wir auch Anzahlen nehmen, sodass nun zu jeder positiven reellen Zahl ein Paar gehört, dessen erstes Glied eine Anzahl und dessen zweites Glied eine Klasse von Anzahlen ist, die 0 nicht enthält. Sind nun a, b und c positive Zahlen und ist $a+b=c$, so besteht für jedes b eine Beziehung zwischen den Paaren, die zu a und zu c gehören. Und diese Beziehung kann man definiren, ohne auf die reellen Zahlen a, b, c zurückzugehen, also ohne die Kenntnis der reellen Zahlen vorauszusetzen. So haben wir Beziehungen, deren jede wieder durch ein Paar (das zu b gehörende) gekennzeichnet ist. Hierzu kommen noch die Umkehrungen. Die Umfänge dieser Beziehungen (diese Relationen) entsprechen den positiven und negativen reellen Zahlen eindeutig. Der Addition der Zahlen b und b' entspricht die Zusammensetzung der zugehörigen Relationen. Die Klasse dieser Relationen ist nun ein Gebiet, das für unsern Plan hinreicht. Diese Andeutungen mögen vorläufig genügen, die Zweifel an der Durchführbarkeit des Planes zu zerstreuen. Es soll damit nicht gesagt sein, dass wir uns genau an diesen Weg halten werden. Auf zwei Punkte möchte ich nur noch besonders hinweisen. Erstens: weder die Klassen endlicher Anzahlen, noch die erwähnten Paare, noch die Relationen zwischen diesen Paaren sind Irrationalzahlen. Ebensowenig sind sie Zeichen von Irrationalzahlen; sie sind nicht durch Schreiben oder Buchdruck erzeugte Gebilde; sondern sie sind einfach Klassen, Paare, Relationen. Zweitens: die erwähnten Beziehungen zwischen den Paaren lassen sich definiren, ohne den Zusammenhang mit den Irrationalzahlen als bekannt vorauszusetzen, von dem wir der grösseren Verständlichkeit halber ausgegangen sind. Bei der Ausführung wird also von Irrationalzahlen zunächst garnicht die Rede sein dürfen; sondern wir werden ausgehen von Klassen endlicher Anzahlen, zwischen denen wir gewisse Beziehungen definiren werden, ohne dabei einen Zusammenhang mit der Addition der reellen Zahlen auch nur zu erwähnen. So wird es uns gelingen, die reelle Zahl rein arithmetisch oder logisch zu definiren als Verhältnis von nachweisbar vorhandenen Grössen, sodass kein Zweifel mehr bleiben kann, dass es irrationale Zahlen giebt.

Zunächst aber werden wir die Frage beantworten müssen: Welche Eigenschaften muss eine Klasse von Relationen haben, um ein Grössengebiet zu sein?

2. Die Grössenlehre.

A. Sätze über die Zusammensetzung und Umkehrung von Relationen im Allgemeinen.

§ 165. *Zerlegung.*

Die Abgrenzung des Grössengebietes ergiebt sich aus der Forderung, dass die für die Addition wesentlichen Gesetze gelten, die unter den Namen des commutativen und des associativen Princips bekannt sind. Die Frage ist nun so zu stellen: welche Eigenschaften muss eine Klasse von Relationen haben, damit in ihr für die Zusammensetzung der Relationen das commutative und das associative Gesetz gelten? Was dieses anbetrifft, so zeigt sich, dass es allgemein gilt, also keine nähere Bestimmung bewirkt. Um es zu beweisen, brauchen wir einige Sätze über die Gleichheit von Relationen, die wir vorweg ableiten. Dabei sei Folgendes bemerkt. Die Bedingung, dass p eine Relation sei, können wir durch das Unterglied

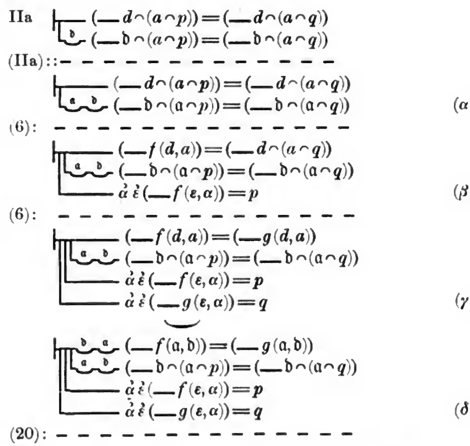
$$„\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(—f(\varepsilon,\alpha))=p“$$

oder auch durch das Unterglied

$$„\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(—\varepsilon\frown(\alpha\frown p))=p“$$

wiedergeben.

§ 166. *Aufbau.*



$$\vdash \; \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon,\alpha)) = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-g(\varepsilon,\alpha))$$
$$\smile^{\mathfrak{a}\;\mathfrak{d}}\; (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown p)) = (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q))$$
$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon,\alpha)) = p$$
$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-g(\varepsilon,\alpha)) = q \qquad (\varepsilon$$

(IIIc): ———————————

$$\vdash \; p = \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-g(\varepsilon,\alpha))$$
$$\smile^{\mathfrak{a}\;\mathfrak{d}}\; (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown p)) = (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q))$$
$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon,\alpha)) = p$$
$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-g(\varepsilon,\alpha)) = q \qquad (\zeta$$

(IIIc): ———————————

$$\vdash \; p = q$$
$$\smile^{\mathfrak{a}\;\mathfrak{d}}\; (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown p)) = (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q))$$
$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon,\alpha)) = p$$
$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-g(\varepsilon,\alpha)) = q \qquad (485$$

—— • ——

$$B \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\smile^{\mathfrak{r}} \begin{array}{l} \varepsilon\frown(\mathfrak{r}\frown p) \\ \mathfrak{r}\frown(\alpha\frown r) \end{array}\right) = p \smile r$$

(485): ———————————

$$\vdash \; p \smile r = q$$
$$\smile^{\mathfrak{a}\;\mathfrak{d}}\; (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(p\smile r))) = (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q))$$
$$\grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-g(\varepsilon,\alpha)) = q \qquad (486$$

—— • ——

$$B \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}\left(\smile^{\mathfrak{r}} \begin{array}{l} \varepsilon\frown(\mathfrak{r}\frown s) \\ \mathfrak{r}\frown(\alpha\frown t) \end{array}\right) = s \smile t$$

(486): ———————————

$$\vdash \; p \smile r = s \smile t$$
$$\smile^{\mathfrak{a}\;\mathfrak{d}}\; (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(p\smile r))) = (-\mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(s\smile t))) \qquad (487$$

—— • ——

5 $$\vdash \; e\frown(a\frown(q\smile t))$$
$$r\frown(a\frown t)$$
$$e\frown(r\frown q)$$

(5): - - - - - -

$$\vdash \; d\frown(a\frown(p\smile(q\smile t)))$$
$$r\frown(a\frown t)$$
$$e\frown(r\frown q)$$
$$d\frown(e\frown p) \qquad (\alpha$$

×

$$\vdash \; d\frown(e\frown p)$$
$$e\frown(r\frown q)$$
$$r\frown(a\frown t)$$
$$d\frown(a\frown(p\smile(q\smile t))) \qquad (\beta$$

$$\vdash \; \smile^{\mathfrak{r}}\; d\frown(\mathfrak{r}\frown p)$$
$$\mathfrak{r}\frown(r\frown q)$$
$$r\frown(a\frown t)$$
$$d\frown(a\frown(p\smile(q\smile t))) \qquad (\gamma$$

(15): - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (r \frown (p \smile q)) \\ r \frown (a \frown t) \\ d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t))) \end{array}$$ (δ

$$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile} \begin{array}{l} d \frown (\mathfrak{r} \frown (p \smile q)) \\ \mathfrak{r} \frown (a \frown t) \\ d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t))) \end{array}$$ (ε

(15): - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \\ d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t))) \end{array}$$ (ζ

×

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t))) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \end{array}$$ (488

—•—

5 $$\vdash \begin{array}{l} d \frown (r \frown (p \smile q)) \\ e \frown (r \frown q) \\ d \frown (e \frown p) \end{array}$$

(5): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \\ r \frown (a \frown t) \\ e \frown (r \frown q) \\ d \frown (e \frown p) \end{array}$$ (α

×

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (r \frown q) \\ r \frown (a \frown t) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \\ d \frown (e \frown p) \end{array}$$ (β

$$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile} \begin{array}{l} e \frown (\mathfrak{r} \frown q) \\ \mathfrak{r} \frown (a \frown t) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \\ d \frown (e \frown p) \end{array}$$ (γ

(15): - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (a \frown (q \smile t)) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \\ d \frown (e \frown p) \end{array}$$ (δ

×

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (e \frown p) \\ e \frown (a \frown (q \smile t)) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \end{array}$$ (ε

$$\vdash \overset{\mathfrak{r}}{\smile} \begin{array}{l} d \frown (\mathfrak{r} \frown p) \\ \mathfrak{r} \frown (a \frown (q \smile t)) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \end{array}$$ (ζ

(15): - - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t))) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \end{array}$$ (η

×

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \\ d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t))) \end{array}$$ (ϑ

(IVa): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} [— d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t)))] = [— d \frown (a \frown (p \smile q \smile t))] \\ d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t))) \\ d \frown (a \frown (p \smile q \smile t)) \end{array}$$ (ι

(488): ————————————————————

$$\vdash [— d \frown (a \frown (p \smile (q \smile t)))] = [— d \frown (a \frown (p \smile q \smile t))]$$ (κ

$$\vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \overset{\mathfrak{d}}{\smile} [— \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile (q \smile t)))] = [— \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile q \smile t))]$$ (λ

(487): ————————————————————

$$\vdash p \smile (q \smile t) = p \smile q \smile t$$ (489

(IIIa): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} F(p \smile (q \smile t)) \\ F(p \smile q \smile t) \end{array}$$ (490

—•—

489 $$\vdash p \smile (q \smile t) = p \smile q \smile t$$

(IIIc): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} F(p \smile q \smile t) \\ F(p \smile (q \smile t)) \end{array}$$ (491

§ 167. *Zerlegung.*

In dem eben bewiesenen Satze haben wir das associative Gesetz für die Zusammensetzung der Relationen. Das commutative Gesetz gilt hier nicht ohne Einschränkung. Wir beweisen es zunächst für Glieder einer Reihe wie

$$K,\ K \smile K,\ K \smile (K \smile K),\ K \smile (K \smile (K \smile K))\ \ldots$$

Es wird wünschenswerth, für die reihende Relation in einer solchen Reihe eine kurze Bezeichnung zu haben. Wir definiren deshalb:

$$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(t \smile \varepsilon = \alpha) = {}_{*}t \qquad (\Phi$$

und ziehen hieraus die nächsten Folgerungen.

§ 168. *Aufbau.*

$$\Phi \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(t \smile \varepsilon = \alpha) = {}_{*}t$$

(6): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash F(t \smile d = a) \\ \quad \llcorner F(d \frown (a \frown {}_{*}t)) \end{array} \qquad (492$$

——•——

$$492 \quad \begin{array}{l} \vdash t \smile d = a \\ \quad \llcorner d \frown (a \frown {}_{*}t) \end{array}$$

(IIIc): – – – –

$$\begin{array}{l} \vdash F(a) \\ \quad \llcorner F(t \smile d) \\ \quad \llcorner d \frown (a \frown {}_{*}t) \end{array} \qquad (493$$

——•——

$$492 \quad \begin{array}{l} \vdash t \smile d = a \\ \quad \llcorner d \frown (a \frown {}_{*}t) \end{array}$$

(IIIa): – – – –

$$\begin{array}{l} \vdash F(t \smile d) \\ \quad \llcorner F(a) \\ \quad \llcorner d \frown (a \frown {}_{*}t) \end{array} \qquad (494$$

——•——

$$\Phi \quad \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(t \smile \varepsilon = \alpha) = {}_{*}t$$

(10): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash F(d \frown (a \frown {}_{*}t)) \\ \quad \llcorner F(t \smile d = a) \end{array} \qquad (495$$

——•——

$$\text{IIIe} \quad \vdash t \smile d = t \smile d$$

(495): ———————

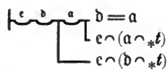
$$\vdash d \frown (t \smile d \frown {}_{*}t) \qquad (496$$

——•——

$$\text{IIIc} \quad \begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad \llcorner t \smile e = a \\ \quad \llcorner t \smile e = d \end{array}$$

(492,492):: = = = =

$$\begin{array}{l} \vdash d = a \\ \quad \llcorner e \frown (a \frown {}_{*}t) \\ \quad \llcorner e \frown (d \frown {}_{*}t) \end{array} \qquad (\alpha$$



$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{e}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{a}\quad \mathfrak{d} = \mathfrak{a} \\ \quad \llcorner \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{a} \frown {}_{*}t) \\ \quad \llcorner \mathfrak{e} \frown (\mathfrak{d} \frown {}_{*}t) \end{array} \qquad (\beta$$

(16): ———————

$$\vdash \mathrm{I}\,{}_{*}t \qquad (497$$

§ 169. *Zerlegung.*

Um nun den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile q = q \smile p \\ \quad \llcorner t \frown (p \frown \acute{\smile}\,{}_{*}t) \\ \quad \llcorner t \frown (q \frown \acute{\smile}\,{}_{*}t) \end{array} \text{‘,} \qquad (\alpha$$

mit (144) zu beweisen, brauchen wir den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile a = a \smile p \\ \quad \llcorner d \frown (a \frown {}_{*}t) \\ \quad \llcorner p \smile d = d \smile p \\ \quad \llcorner t \frown (p \frown \acute{\smile}\,{}_{*}t) \end{array} \text{‘,} \qquad (\beta$$

oder den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile (t \smile d) = t \smile d \smile p \\ \quad \llcorner p \smile d = d \smile p \\ \quad \llcorner t \frown (p \frown \acute{\smile}\,{}_{*}t) \end{array} \text{‘,}$$

den wir mit dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile t = t \smile p \\ \quad \llcorner t \frown (p \frown \acute{\smile}\,{}_{*}t) \end{array} \text{‘,} \qquad (\delta$$

beweisen. Dieser ist mit (144) abzuleiten.

§ 170. *Aufbau.*

IIIh
$$\begin{array}{l}\vdash t \smile (d \smile t) = t \smile (t \smile d)\\ \quad d \smile t = t \smile d\end{array}$$

(491): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash t \smile d \smile t = t \smile (t \smile d)\\ \quad d \smile t = t \smile d\end{array} \qquad (\alpha$$

(493): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash a \smile t = t \smile a\\ \quad d \frown (a \frown {}_{*}t)\\ \quad d \smile t = t \smile d\end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l}\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} \smile t = t \smile \mathfrak{a}\\ \quad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown {}_{*}t)\\ \quad \mathfrak{d} \smile t = t \smile \mathfrak{d}\end{array} \qquad (\gamma$$

(144): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash p \smile t = t \smile p\\ \quad t \smile t = t \smile t\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (\delta$$

(IIIe):: ————————

$$\begin{array}{l}\vdash p \smile t = t \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (498$$

(IIIa): - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash F(p \smile t)\\ \quad F(t \smile p)\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (499$$

———•———

498
$$\begin{array}{l}\vdash p \smile t = t \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array}$$

(IIIc): - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash F(t \smile p)\\ \quad F(p \smile t)\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (500$$

———•———

IIIh
$$\begin{array}{l}\vdash t \smile (p \smile d) = t \smile (d \smile p)\\ \quad p \smile d = d \smile p\end{array}$$

(491): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash t \smile p \smile d = t \smile (d \smile p)\\ \quad p \smile d = d \smile p\end{array} \qquad (\alpha$$

(491): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash t \smile p \smile d = t \smile d \smile p\\ \quad p \smile d = d \smile p\end{array} \qquad (\beta$$

(499): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash p \smile t \smile d = t \smile d \smile p\\ \quad p \smile d = d \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (\gamma$$

(490): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash p \smile (t \smile d) = t \smile d \smile p\\ \quad p \smile d = d \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (\delta$$

(493): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash p \smile a = a \smile p\\ \quad d \frown (a \frown {}_{*}t)\\ \quad p \smile d = d \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (\varepsilon$$

$$\begin{array}{l}\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ p \smile \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \smile p\\ \quad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown {}_{*}t)\\ \quad p \smile \mathfrak{d} = \mathfrak{d} \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (\zeta$$

(144): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash p \smile q = q \smile p\\ \quad p \smile t = t \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\\ \quad t \frown (q \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (\eta$$

(498):: - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash p \smile q = q \smile p\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\\ \quad t \frown (q \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (501$$

(IIIc): - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash f(q \smile p)\\ \quad f(p \smile q)\\ \quad t \frown (p \frown \dot{\smile}_{*}t)\\ \quad t \frown (q \frown \dot{\smile}_{*}t)\end{array} \qquad (502$$

Sätze, in denen die Aehnlichkeit der Umkehrung der Relationen mit der Umkehrung des Vorzeichens hervortritt.

§ 171. *Zerlegung.*

Wir beweisen zunächst einen Satz, der besagt, dass die doppelte Umkehrung einen Doppelwerthverlauf — mithin auch eine Relation — ungeändert lässt. Sodann benutzen wir (24), um einige Sätze abzuleiten, die solchen arithmetischen Sätzen entsprechen, bei denen es sich um die Auflösung einer Klammer mit davorstehendem Minuszeichen handelt.

§ 172. *Aufbau.*

$$40 \vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\alpha,\varepsilon) = \yen\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha)$$

(IIIh): ————————

$$\vdash \yen\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\alpha,\varepsilon) = \yen\yen\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) \qquad (\alpha$$

(IIIa): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) = \yen\yen\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) = \yen\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\alpha,\varepsilon) \end{array} \qquad (\beta$$

(40):: ————————

$$\vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) = \yen\yen\, \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) \qquad (503$$

(IIIc): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} q = \yen\yen q \\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon} f(\varepsilon,\alpha) = q \end{array} \qquad (504$$

———•———

$$24 \vdash \yen(p \smile q) = \yen q \smile \yen p$$

(IIIc): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} f(\yen q \smile \yen p) \\ f(\yen(p \smile q)) \end{array} \qquad (505$$

———•———

$$505 \vdash \begin{array}{l} F(t \smile (\yen q \smile \yen p)) \\ F(t \smile \yen(p \smile q)) \end{array}$$

(491): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} F(t \smile \yen q \smile \yen p) \\ F(t \smile \yen(p \smile q)) \end{array} \qquad (506$$

———•———

$$24 \vdash \yen(p \smile q) = \yen q \smile \yen p$$

(IIIa): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} f(\yen(p \smile q)) \\ f(\yen q \smile \yen p) \end{array} \qquad (507$$

———•———

$$507 \vdash \begin{array}{l} F(t \smile \yen(p \smile q)) \\ F(t \smile (\yen q \smile \yen p)) \end{array}$$

(491): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} F(t \smile \yen(p \smile q)) \\ F(t \smile \yen q \smile \yen p) \end{array} \qquad (508$$

B. **Die Positivalklasse.**

a) Definitionen der Functionen $\eth\xi$ und $\mathfrak{f}\xi$ und Folgerungen.

§ 173. *Zerlegung.*

Der Satz (501) enthält das commutative Gesetz für die Zusammensetzung von Relationen, die einer Reihe wie

$$K,\ K \smile K,\ K \smile (K \smile K)\ \ldots$$

angehören. Wir können mithin die Klasse der Glieder dieser Reihe als Grössengebiet ansehn und alle positiven rationalen Zahlen als Verhältnisse von je zwei Grössen eines solchen Grössengebiets definiren. Das Negative wäre leicht einzuführen, indem man die Reihe rückwärts über das Anfangsglied verlängerte. Die Hauptschwierigkeit liegt jedoch im Irrationalen. Dieses können wir nur als Grenze erreichen; und um die Grenze zu definiren, brauchen wir die Beziehung des Kleinern zum Grössern. Nun bietet sich hier eine solche Beziehung von selbst dar, nämlich die des Folgens in unserer Reihe. Diese nützt uns aber nichts für Relationen, die der Reihe nicht angehören. Es wird also nöthig sein, gewisse Anforderungen an eine Beziehung zu stellen, die erfüllt sein müssen, damit man sie als eine solche des Kleinern zum Grössern auffassen könne, und das Folgen in unserer Reihe muss als besonderer Fall dieser Beziehung erscheinen. Man kann eine solche Beziehung dann zur Abgrenzung des Grössengebietes verwenden, indem man sagt: alle Relationen gehören dem Grössengebiete an, die zu einer und derselben in dieser Beziehung stehen. Es ist jedoch wohl zweckmässiger, die Beziehung des Kleinern zum Grössern auf das Positive zurückzuführen. Entweder nämlich kann man das Positive erklären als das, was grösser als die Nullgrösse ist, oder man kann sagen: a wird grösser als b genannt, wenn die Relation positiv ist, die aus a und der Umkehrung von b zusammengesetzt ist. Wir können nicht von der Klasse des Positiven schlechthin mit dem bestimmten Artikel reden, da es in jedem Grössengebiete eine solche Klasse geben wird. Das Wort „*Positivklasse*" wird uns vielmehr ein Begriffsname sein, und wir stellen die Frage so: welche Eigenschaften muss eine Klasse haben, um als Positivklasse gelten zu können? Wenn wir nun eine Positivklasse haben, so können wir das zugehörige Grössengebiet abgrenzen. Zu ihm gehört jede Relation, die entweder der Positivklasse angehört, oder die die Umkehrung einer Relation ist, die der Positivklasse angehört, oder die zusammengesetzt ist aus einer Relation, die der Positivklasse angehört, und deren Umkehrung (Nullgrösse). Wenn demnach Σ eine Positivklasse ist, so gehört $\boldsymbol{\Pi}$ dem zugehörigen Grössengebiete an, wenn

$$
\begin{array}{l}
\longrightarrow\; \Pi \frown \Sigma \\
\quad \mathfrak{q}\;\; \Pi = \mathfrak{q} \smile \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \Pi = \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \mathfrak{q} \frown \Sigma
\end{array}
$$

das Wahre ist. Wir gelangen hierdurch zu folgender Definition:

$$
\Vdash \acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}
\longrightarrow\; \varepsilon \frown s \\
\quad \mathfrak{q}\;\; \varepsilon = \mathfrak{q} \smile \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \varepsilon = \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \mathfrak{q} \frown s
\end{array}\right) = \eth s \qquad (X
$$

Wenn demnach Σ eine Positivklasse ist, so ist $\eth\,\Sigma$ das zugehörige Grössengebiet und $\Pi \frown \eth\,\Sigma$ ist der Wahrheitswerth davon, dass $\boldsymbol{\Pi}$ diesem Grössengebiete angehört. Wir lesen „$\Pi \frown \eth\,\Sigma$" einfacher: „$\boldsymbol{\Pi}$ gehört dem Σ-Gebiete an". Ziehen wir zunächst die einfachsten Folgerungen aus dieser Definition!

§ 174. *Aufbau.*

$$
X \vdash \acute{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}
\longrightarrow\; \varepsilon \frown s \\
\quad \mathfrak{q}\;\; \varepsilon = \mathfrak{q} \smile \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \varepsilon = \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \mathfrak{q} \frown s
\end{array}\right) = \eth s
$$

(44): ————————————————

$$
\begin{array}{l}
\vdash\; p \frown \eth s \\
\quad p \frown s \\
\quad \mathfrak{q}\;\; p = \mathfrak{q} \smile \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad p = \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \mathfrak{q} = s
\end{array} \qquad (509
$$

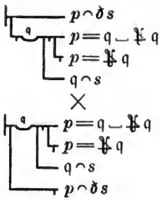
(I):: - - - - - - - - -

$$
\begin{array}{l}
\vdash\; p \frown \eth s \\
\quad p \frown s
\end{array} \qquad (510
$$

———•———

$$
509 \quad \begin{array}{l}
\vdash\; p \frown \eth s \\
\quad p \frown s \\
\quad \mathfrak{q}\;\; p = \mathfrak{q} \smile \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad p = \mathfrak{U}\mathfrak{q} \\
\qquad \mathfrak{q} = s
\end{array}
$$

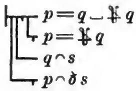
(Ia):: - - - - - - - -



(α

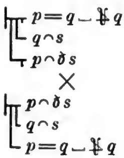
(β

(IIa): - - - - - - - -



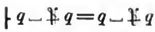
(511

(Ic): - - - - - - - -

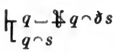


(α

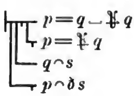
(512

IIIe 

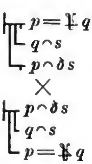
(512):



(513

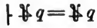
511 

(Id): - - - - - - - -

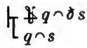


(α

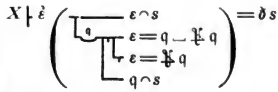
(514

IIIe 

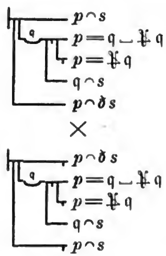
(514):



(515



(46):



(516

(517

§ 175. *Zerlegung.*

Wann ist nun eine Klasse eine Positivklasse? Wenn das zugehörige Grössengebiet stetig sein soll, so muss Folgendes stattfinden. Wenn eine Grösse dieses Gebietes eine Eigenschaft Φ hat, die auch allen kleinern Grössen zukommt, während es in diesem Gebiete auch eine Grösse giebt, die die Eigenschaft Φ nicht hat, so muss es eine obere Grenze aller Grössen von der Eigenschaft Φ in diesem Gebiete geben; d. h. es muss hier eine Grösse der Art geben, dass alle kleinern die Eigenschaft Φ haben, dass aber jede grössere grösser ist als mindestens eine Grösse, die die Eigenschaft Φ nicht hat. Doch dies nur vorläufig! Wie man sieht, brauchen wir zur Definition der

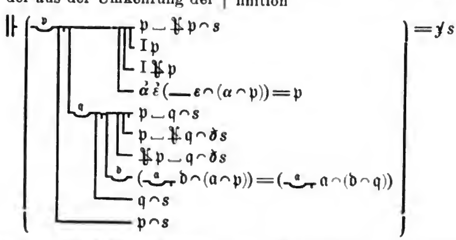
Grenze eine Beziehung des Kleinern zum Grösseren, die wir mit der Potitivklasse erklären wollten. Wir werden also nicht mit einem Schritte ans Ziel gelangen. Bevor wir den Begriff der Positivklasse definiren, stellen wir einen weitern Begriff auf — wir wollen ihn ***Positivalklasse*** nennen — mit dem wir die obere Grenze definiren können. Mit dieser gelangen wir dann zur Positivklasse.

Die Bestimmungen, auf die es uns zunächst ankommt, sind folgende:

Was zu einer Positivalklasse gehört, muss eine Relation sein, die selbst sowie auch ihre Umkehrung eindeutig ist. Die aus einer solchen Relation und ihrer Umkehrung zusammengesetzte Relation darf als Nullgrösse der Positivalklasse nicht angehören. Wenn ferner zwei Relationen derselben Positivalklasse angehören, so muss auch die aus ihnen zusammengesetzte Relation (als Summe jener) dieser Positivalklasse angehören, und die aus der einen und der Umkehrung der andern zusammengesetzte Relation muss (als Differenz) dem Grössengebiete der Positivalklasse angehören. Dasselbe muss auch von der aus der Umkehrung der einen und aus der andern zusammengesetzten Relation gelten.

Wenn Γ zu irgendeinem Gegenstande in der Relation Π steht, so wollen wir sagen, ***Γ trete als erstes Glied der Relation Π auf***; und wenn irgendein Gegenstand zu Δ in der Relation Π steht, so sagen wir, ***Δ trete als zweites Glied der Relation Π auf.*** Zu jeder Relation giebt es eine erste Klasse von Gegenständen, die als erste Glieder der Relation auftreten können und eine zweite Klasse von Gegenständen, die als zweite Glieder der Relation auftreten können. Wir verlangen nun, dass die erste zu einer Relation Π gehörende Klasse zusammenfalle mit der zweiten zu einer Relation K gehörenden Klasse, wenn Π und K derselben Positivalklasse angehören. Damit ist auch gesagt, dass die erste zu Π gehörende Klasse mit der zweiten zusammenfalle. Es giebt dann also zu jeder Positivalklasse Σ eine einzige Klasse von Gegenständen, die sowohl als erste, wie auch als zweite Glieder jeder Relation auftreten können, die zu Σ gehört.

Dies führt uns zu folgender Definition

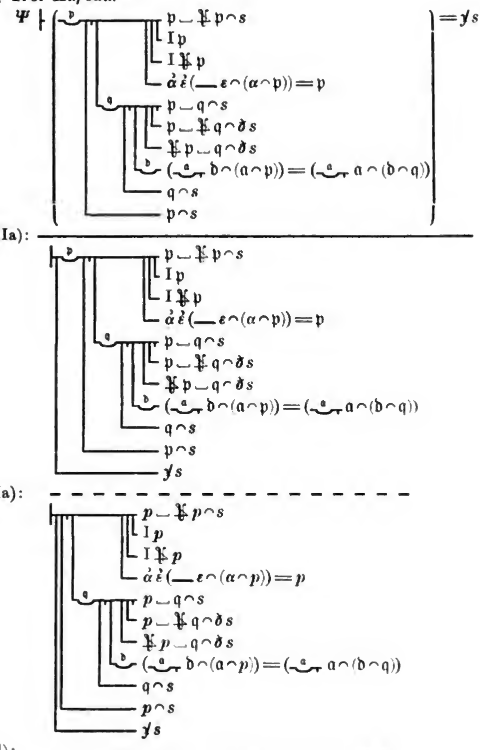


(Ψ

Danach ist $\mathfrak{f}\Sigma$ der Wahrheitswerth davon, dass Σ eine *Positivalklasse* ist.

Bei der Aufstellung dieser Definition habe ich mich bemüht, nur die nothwendigen Bestimmungen aufzunehmen und nur solche, die von einander unabhängig sind. Dass dies gelungen sei, kann freilich nicht bewiesen werden, wird aber wahrscheinlich, wenn mehrfach Versuche misslingen, einige dieser Bestimmungen auf andere zurückzuführen. Insbesondere scheint es nicht möglich zu sein, die Zeile „$\mathfrak{F}$ p ⌣ q ⌒ $\eth$ s" zu entbehren. Sollte ein solcher Versuch später doch gelingen, so würde damit zwar kein logischer Fehler in unserer Definition nachgewiesen, aber immerhin ein Schönheitsfehler entdeckt sein. Wir ziehen nun die nächsten Folgerungen aus unserer Definition.

§ 176. *Aufbau.*



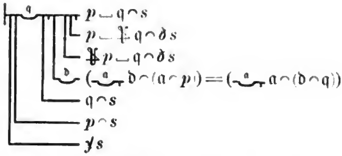
(IIIa):

(α

(IIa):

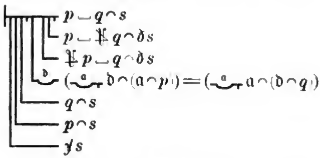
(518

(Id):



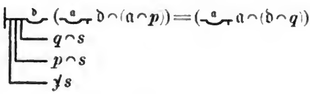
(α

(IIa): - - - - - - - - - - - - - - - - -



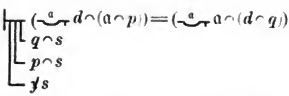
(519

(Id): - - - - - - - - - - - - - - - - -



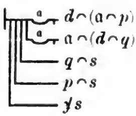
(α

(IIa): - - - - - - - - - - - - - - - - -

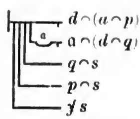


(520

(IIIa): - - - - - - - - - - - - - - - -



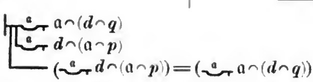
(521



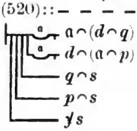
(522

(IIa): - - - - - -

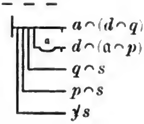
IIIc



(520):: - - - - - - - - - - - - - - - - -

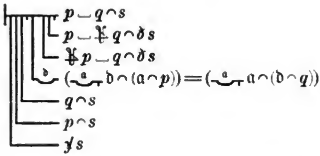


(523

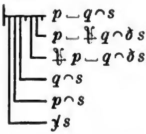


(524

(IIa): - - - - - -

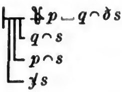
519 

(Ic): - - - - - - - - - - - - - - - -

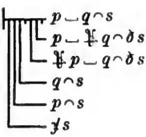


(525

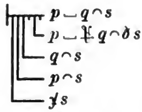
(Id): - - - - - - - -



(526

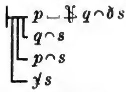
525 

(Ic): - - - - - - - -

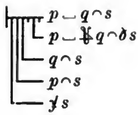


(527

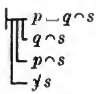
(Id): - - - - - -



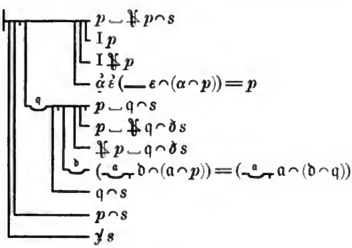
(528

527 

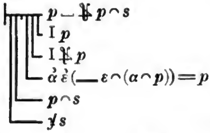
(Ib): - - - - - -



(529

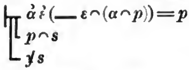
518 

(Ic): - - - - - - - - - - - - - - - - - -



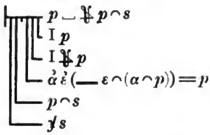
(530

(Id): - - - - - - - - - -

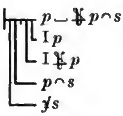


(531

—•—

530 

(Ic): - - - - - - - - - -

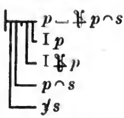


(532

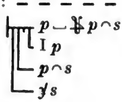
(Id): - - - - -

(533

—•—

532 

(Ic): - - - - -

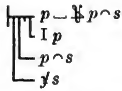


(534

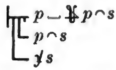
(Id): - - - - -

(535

—•—

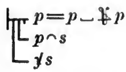
534 

(Ic): - - - - - -



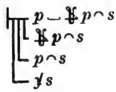
(536

IIId): - - - - - -

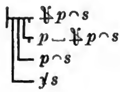


(537

—•—

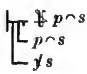
529 

×



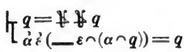
(α

(536):: - - - - -

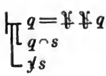


(538

—•—

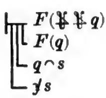
504 

(531):: - - - - - - - -



(539

(IIIc): - - - - -



(540

—•—

$$\begin{array}{ll} 539 & \vdash q = \breve{\breve{q}} \\ & \quad q \frown s \\ & \quad \not{y}\, s \end{array}$$

(IIIa): - - - - -

$$\begin{array}{ll} & \vdash F(q) \\ & \quad F(\breve{\breve{q}}) \\ & \quad q \frown s \\ & \quad \not{y}\, s \end{array} \qquad (541$$

$$\begin{array}{ll} 505 & \vdash f(\breve{\breve{q}} \smile \breve{p}) \\ & \quad f(\breve{(p \smile \breve{q})}) \end{array}$$

(541): - - - - - -

$$\begin{array}{ll} & \vdash f(q \smile \breve{p}) \\ & \quad f(\breve{(p \smile \breve{q})}) \\ & \quad q \frown s \\ & \quad \not{y}\, s \end{array} \qquad (542$$

$$\begin{array}{ll} 507 & \vdash f(\breve{(p \smile \breve{q})}) \\ & \quad f(\breve{\breve{q}} \smile \breve{p}) \end{array}$$

(540):: - - - - - -

$$\begin{array}{ll} & \vdash f(\breve{(p \smile \breve{q})}) \\ & \quad f(q \smile \breve{p}) \\ & \quad q \frown s \\ & \quad \not{y}\, s \end{array} \qquad (543$$

$$\begin{array}{ll} 505 & \vdash f(\breve{q} \smile \breve{\breve{p}}) \\ & \quad f(\breve{(\breve{p} \smile q)}) \end{array}$$

(541): - - - - - -

$$\begin{array}{ll} & \vdash f(\breve{q} \smile p) \\ & \quad f(\breve{(\breve{p} \smile q)}) \\ & \quad p \frown s \\ & \quad \not{y}\, s \end{array} \qquad (544$$

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash q \smile \breve{q} = \breve{p} \smile p\text{‘} \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ ,\quad \not{y}\, s \end{array}$$

§ 177. *Zerlegung.*

Wenn die Relation Π der Positivalklasse Σ angehört, so nennen wir $\Pi \smile \breve{\Pi}$ eine Nullrelation des Σ-Gebietes. Ebenso nennen wir auch $\breve{\Pi} \smile \Pi$. Wir beweisen nun den in der Ueberschrift genannten Satz mit (487). Aus ihm folgt, dass es in dem Gebiete einer Positivalklasse immer nur eine Nullrelation giebt. Zum Beweise brauchen wir die Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (\breve{p} \smile p))\text{‘} \\ \quad d \frown (a \frown (q \smile \breve{q})) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ ,\quad \not{y}\, s \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (q \smile \breve{q}))\text{‘} \\ \quad d \frown (a \frown (\breve{p} \smile p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ ,\quad \not{y}\, s \end{array} \qquad (\beta$$

Zum Beweise von (α) sind erforderlich die Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} \frown (d \frown p)\text{‘} \\ ,\quad d \frown (d \frown (\breve{p} \smile p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\begin{array}{l} \vdash a = d\text{‘} \\ \quad d \frown (a \frown (q \smile \breve{q})) \\ \quad q \frown s \\ ,\quad \not{y}\, s \end{array} \qquad (\delta$$

Zum Beweise von (β) bedürfen wir der Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, a \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ ,\quad a \frown (a \frown (q \smile \breve{q})) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$$\begin{array}{l} \vdash a = d \\ \quad d \frown (a \frown (\not\S p \smile p)) \\ \quad p \frown s \\ ,\quad \not{y}\, s \end{array}$$ (ζ

§ 178. *Aufbau.*

78 $$\begin{array}{l} \vdash a = d \\ \quad d \frown (e \frown q) \\ \quad e \frown (a \frown \not\S q) \\ \quad \mathrm{I} \not\S q \end{array}$$

×

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (e \frown q) \\ \quad e \frown (a \frown \not\S q) \\ \quad \neg\, a = d \\ \quad \mathrm{I} \not\S q \end{array}$$ (α

$\smile$

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, \mathfrak{r}\; \neg\, d \frown (\mathfrak{r} \frown q) \\ \qquad \mathfrak{r} \frown (a \frown \not\S q) \\ \quad \neg\, a = d \\ \quad \mathrm{I} \not\S q \end{array}$$ (β

(15): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (q \smile \not\S q)) \\ \quad \neg\, a = d \\ \quad \mathrm{I} \not\S q \end{array}$$ (γ

×

$$\begin{array}{l} \vdash a = d \\ \quad d \frown (a \frown (q \smile \not\S q)) \\ \quad \mathrm{I} \not\S q \end{array}$$ (545

(533):: - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash a = d \\ \quad d \frown (a \frown (q \smile \not\S q)) \\ \quad q \frown s \\ \quad \not{y}\, s \end{array}$$ (546

(IIIa): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash f(a) \\ \quad f(d) \\ \quad d \frown (a \frown (q \smile \not\S q)) \\ \quad q \frown s \\ \quad \not{y}\, s \end{array}$$ (547

———•———

22 $$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown \not\S p) \\ \quad a \frown (d \frown p) \end{array}$$

(5): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (d \frown (\not\S p \smile p)) \\ \quad a \frown (d \frown p) \end{array}$$ (α

×

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (d \frown p) \\ \quad \neg\, d \frown (d \frown (\not\S p \smile p)) \end{array}$$ (β

$\smile$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{a}\; \neg\, \mathfrak{a} \frown (d \frown p) \\ \quad \neg\, d \frown (d \frown (\not\S p \smile p)) \end{array}$$ (548

(521): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{a}\; \neg\, d \frown (\mathfrak{a} \frown q) \\ \quad \neg\, d \frown (d \frown (\not\S p \smile p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \not{y}\, s \end{array}$$ (α

———•———

IIa $$\begin{array}{l} \vdash \neg\, d \frown (r \frown q) \\ \quad \mathfrak{a}\; \neg\, d \frown (\mathfrak{a} \frown q) \end{array}$$

(I): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, d \frown (r \frown q) \\ \qquad r \frown (a \frown \not\S q) \\ \quad \mathfrak{a}\; \neg\, d \frown (\mathfrak{a} \frown q) \end{array}$$ (β

$\smile$

$$\begin{array}{l} \vdash \mathfrak{r}\; \neg\, d \frown (\mathfrak{r} \frown q) \\ \qquad \mathfrak{r} \frown (a \frown \not\S q) \\ \quad \mathfrak{a}\; \neg\, d \frown (\mathfrak{a} \frown q) \end{array}$$ (γ

(15): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, d \frown (a \frown (q \smile \not\S q)) \\ \quad \mathfrak{a}\; \neg\, d \frown (\mathfrak{a} \frown q) \end{array}$$ (δ

(α):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (q \smile \not\S q)) \\ \quad \neg\, d \frown (d \frown (\not\S p \smile p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \not{y}\, s \end{array}$$ (ε

×

$\vdash d \frown (d \frown (\nmid p \smile p))$
$d \frown (a \frown (q \smile \nmid q))$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\not{}\, s$ (ζ

(547): — — — — — — — — —

$\vdash d \frown (a \frown (\nmid p \smile p))$
$d \frown (a \frown (q \smile \nmid q))$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\not{}\, s$ (549

(IVa): — — — — — — — —

$\vdash (—d \frown (a \frown (q \smile \nmid q))) = (—d \frown (a \frown (\nmid p \smile p)))$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\not{}\, s$
$d \frown (a \frown (q \smile \nmid q))$
$d \frown (a \frown (\nmid p \smile p))$ (550

——•——

23 $\vdash e \frown (d \frown p)$
$d \frown (e \frown \nmid p)$

(13): — — — — —

$\vdash a = d$
$d \frown (e \frown \nmid p)$
$e \frown (a \frown p)$
$\mathrm{I}\, p$ (α

×

$\vdash d \frown (e \frown \nmid p)$
$e \frown (a \frown p)$
$a = d$
$\mathrm{I}\, p$ (β

⌣

$\vdash^{\mathfrak{r}} d \frown (\mathfrak{r} \frown \nmid p)$
$\mathfrak{r} \frown (a \frown p)$
$a = d$
$\mathrm{I}\, p$ (γ

(15): — — — — — — —

$\vdash d \frown (a \frown (\nmid p \smile p))$
$a = d$
$\mathrm{I}\, p$ (δ

×

$\vdash a = d$
$d \frown (a \frown (\nmid p \smile p))$
$\mathrm{I}\, p$ (ε

(535):: — — — — — — —

$\vdash a = d$
$d \frown (a \frown (\nmid p \smile p))$
$p \frown s$
$\not{}\, s$ (551

(IIIc): — — — — — — — —

$\vdash F(d)$
$F(a)$
$d \frown (a \frown (\nmid p \smile p))$
$p \frown s$
$\not{}\, s$ (552

——•——

22 $\vdash d \frown (a \frown \nmid q)$
$a \frown (d \frown q)$

(5): — — — — — —

$\vdash a \frown (a \frown (q \smile \nmid q))$
$a \frown (d \frown q)$ (553

×

$\vdash a \frown (d \frown q)$
$a \frown (a \frown (q \smile \nmid q))$ (554

⌣

$\vdash^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{a} \frown q)$
$a \frown (a \frown (q \smile \nmid q))$ (555

(523): — — — — — — — — —

$\vdash^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} \frown (\mathfrak{a} \frown p)$
$a \frown (a \frown (q \smile \nmid q))$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\not{}\, s$ (α

——•——

IIa $$\begin{array}{l}\vdash r \frown (a \frown p) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown (a \frown p)\end{array}$$

(Ia): - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (r \frown \between p) \\ \quad r \frown (a \frown p) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown (a \frown p)\end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l}\vdash \smile^{\mathfrak{r}}\; d \frown (\mathfrak{r} \frown \between p) \\ \quad \mathfrak{r} \frown (a \frown p) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown (a \frown p)\end{array} \qquad (\gamma$$

(15): - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (a \frown (\between p \smile p)) \\ \quad \smile^{\mathfrak{a}}\; \mathfrak{a} \frown (a \frown p)\end{array} \qquad (\delta$$

(α):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (a \frown (\between p \smile p)) \\ \quad a \frown (a \frown (q \smile \between q)) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (\varepsilon$$

$\times$

$$\begin{array}{l}\vdash a \frown (a \frown (q \smile \between q)) \\ \quad d \frown (a \frown (\between p \smile p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (\zeta$$

(552): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash d \frown (a \frown (q \smile \between q)) \\ \quad d \frown (a \frown (\between p \smile p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (\eta$$

(550): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash (\text{—} d \frown (a \frown (q \smile \between q))) = (\text{—} d \frown (a \frown (\between p \smile p))) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (\vartheta$$

$$\begin{array}{l}\vdash \smile^{\mathfrak{a}} \smile^{\mathfrak{d}}\; (\text{—} \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown (q \smile \between q))) = (\text{—} \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown (\between p \smile p))) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (\iota$$

(487): -

$$\begin{array}{l}\vdash q \smile \between q = \between p \smile p \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (556$$

(IIIa): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash f(q \smile \between q) \\ \quad f(\between p \smile p) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (557$$

———•———

IIIc $$\begin{array}{l}\vdash f(\between p \smile p) \\ \quad f(q \smile \between q) \\ \quad q \smile \between q = \between p \smile p\end{array}$$

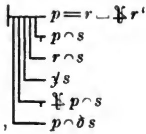
(556):: - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash f(\between p \smile p) \\ \quad f(q \smile \between q) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (558$$

(557): - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash f(p \smile \between p) \\ \quad f(q \smile \between q) \\ \quad p \frown s \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{I} s\end{array} \qquad (559$$

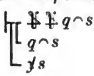
c) Beweis des Satzes



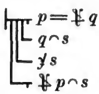
§ 179. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz, dass eine Relation, die dem Gebiete einer Positivalklasse angehört, eine Nullrelation ist, wenn weder sie selbst noch ihre Umkehrung der Positivalklasse selbst angehört. Wir benutzen hierzu (516).

§ 180. *Aufbau.*

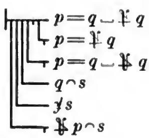
540 

(IIIb): — — — —



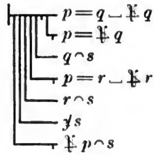
(α

(If): — — — —

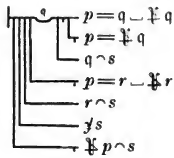


(β

(559):: — — — — — —

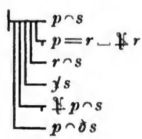


(γ

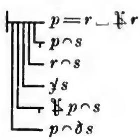


(δ

(516): — — — — — — — — —



(560



(561

d) Beweise der Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash q \smile (p \smile \nmid p) = q \\ \quad p \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \\ ,\quad q \frown s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile \nmid p \smile q = q \\ \quad q \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \\ ,\quad p \frown s \end{array}$$

und Folgerungen.

§ 181. *Zerlegung.*

Die in der Ueberschrift genannten Sätze besagen, dass eine Relation, die einer Positivalklasse angehört, unverändert bleibt, wenn sie mit der Nullrelation des Gebietes ihrer Positivalklasse zusammengesetzt wird. Um den ersten Satz zu beweisen, gebrauchen wir (486) und haben dazu die Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (q \smile (p \smile \nmid p))) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad q \frown s \\ \quad p \frown s \\ ,\quad \mathfrak{J} s \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown q) \\ \quad d \frown (a \frown (q \smile (p \smile \nmid p))) \\ \quad p \frown s \\ ,\quad \mathfrak{J} s \end{array} \qquad (\beta$$

nöthig.

§ 182. *Aufbau.*

$$555 \quad \begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{a}} a \frown (\mathfrak{a} \frown p) \\ \quad a \frown (\mathfrak{a} \frown (p \smile \nmid p)) \end{array}$$

(524): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown q) \\ \quad a \frown (a \frown (p \smile \nmid p)) \\ \quad q \frown s \\ \quad p \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \end{array} \qquad (\alpha$$

×

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (a \frown (p \smile \nmid p)) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad q \frown s \\ \quad p \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \end{array} \qquad (\beta$$

(5): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (q \smile (p \smile \nmid p))) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad q \frown s \\ \quad p \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \end{array} \qquad (\gamma$$

——•——

$$\text{IIIc} \quad \begin{array}{l} \vdash d \frown (e \frown q) \\ \quad d \frown (a \frown q) \\ \quad a = e \end{array}$$

(546):: - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (e \frown q) \\ \quad e \frown (a \frown (p \smile \nmid p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \\ \quad d \frown (a \frown q) \end{array} \qquad (\delta$$

$$\begin{array}{l} \vdash^{\mathfrak{r}} d \frown (\mathfrak{r} \frown q) \\ \quad \mathfrak{r} \frown (a \frown (p \smile \nmid p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \\ \quad d \frown (a \frown q) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(15): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (a \frown (q \smile (p \smile \nmid p))) \\ \quad p \frown s \\ \quad \mathfrak{J} s \\ \quad d \frown (a \frown q) \end{array} \qquad (\zeta$$

×

$$\begin{array}{l} \vdash d\frown(a\frown q) \\ \quad d\frown(a\frown(q\smile(p\smile \text{¥} p))) \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \end{array} \qquad (\eta$$

(IVa): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash [\text{—} d\frown(a\frown(q\smile(p\smile \text{¥} p)))]=(\text{—} d\frown(a\frown q)) \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad d\frown(a\frown(q\smile(p\smile \text{¥} p))) \\ \quad d\frown(a\frown q) \end{array} \qquad (\vartheta$$

(γ):: -

$$\begin{array}{l} \vdash [\text{—} d\frown(a\frown(q\smile(p\smile \text{¥} p)))]=(\text{—} d\frown(a\frown q)) \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array} \qquad (\iota$$

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\overset{\mathfrak{d}}{\smile} [\text{—} \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown(q\smile(p\smile \text{¥} p)))]=(\text{—} \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{a}\frown q)) \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array} \qquad (\varkappa$$

(486): -

$$\begin{array}{l} \vdash q\smile(p\smile \text{¥} p)=q \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \\ \quad \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(\text{—} \varepsilon\frown(\alpha\frown q))=q \end{array} \qquad (\lambda$$

(531):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash q\smile(p\smile \text{¥} p)=q \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array} \qquad (562$$

(IIIa): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash f(q\smile(p\smile \text{¥} p)) \\ \quad f(q) \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array} \qquad (563$$

———•———

$$\text{IIIc} \quad \begin{array}{l} \vdash f(q) \\ \quad f(q\smile(p\smile \text{¥} p)) \\ \quad q\smile(p\smile \text{¥} p)=q \end{array}$$

(562):: - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash f(q) \\ \quad f(q\smile(p\smile \text{¥} p)) \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array} \qquad (564$$

———•———

$$562 \quad \begin{array}{l} \vdash q\smile(p\smile \text{¥} p)=q \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array}$$

(558): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash q\smile(\text{¥} p\smile p)=q \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array} \qquad (565$$

(491): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash q\smile \text{¥} p\smile p=q \\ \quad p\frown s \\ \quad \not{f}s \\ \quad q\frown s \end{array} \qquad (566$$

(IIIc): - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(q \smile \mathfrak{U} p \smile p) \\ p \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ q \smile s \end{array}$$ (567

———•———

$$491 \quad \vdash \begin{array}{l} q \smile p \smile \mathfrak{U} p = q \\ q \smile (p \smile \mathfrak{U} p) = q \end{array}$$

(562):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} q \smile p \smile \mathfrak{U} p = q \\ p \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ q \frown s \end{array}$$ (568

(IIIa): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} f(q \smile p \smile \mathfrak{U} p) \\ f(q) \\ p \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ q \frown s \end{array}$$ (569

———•———

$$\text{IIIc} \quad \vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(q \smile p \smile \mathfrak{U} p) \\ q \smile p \smile \mathfrak{U} p = q \end{array}$$

(568):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(q \smile p \smile \mathfrak{U} p) \\ p \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ q \frown s \end{array}$$ (570

§ 183. *Zerlegung.*

Den zweiten Satz unserer Ueberschrift können wir nun mit (559) auf (566) zurückführen, indem wir in (566) statt ‚p' ‚q' schreiben. Aus dem so gewonnenen Satze lassen sich dann ähnlich wie aus (562) weitere Folgerungen ziehn.

§ 184. *Aufbau.*

$$566 \quad \vdash \begin{array}{l} q \smile \mathfrak{U} q \smile q = q \\ q \frown s \\ \mathfrak{I} s \end{array}$$

(559): - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile \mathfrak{U} p \smile q = q \\ q \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ p \frown s \end{array}$$ (571

(IIIa): - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} f(p \smile \mathfrak{U} p \smile q) \\ f(q) \\ q \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ p \frown s \end{array}$$ (572

———•———

$$\text{IIIc} \quad \vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(p \smile \mathfrak{U} p \smile q) \\ p \smile \mathfrak{U} p \smile q = q \end{array}$$

(571):: - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(p \smile \mathfrak{U} p \smile q) \\ q \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ p \frown s \end{array}$$ (573

———•———

$$490 \quad \vdash \begin{array}{l} p \smile (\mathfrak{U} p \smile q) = q \\ p \smile \mathfrak{U} p \smile q = q \end{array}$$

(571):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile (\mathfrak{U} p \smile q) = q \\ q \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ p \frown s \end{array}$$ (574

(IIIc): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(p \smile (\mathfrak{U} p \smile q)) \\ q \frown s \\ \mathfrak{I} s \\ p \frown s \end{array}$$ (575

———•———

IIIh $\vdash \begin{array}{l} \S(p \smile \S p \smile q) = \S q \\ p \smile \S p \smile q = q \end{array}$

(505): ————————

$\vdash \begin{array}{l} \S q \smile \S(p \smile \S p) = \S q \\ p \smile \S p \smile q = q \end{array}$ (α

(542): ————————

$\vdash \begin{array}{l} \S q \smile (p \smile \S p) = \S q \\ p \smile \S p \smile q = q \\ p \frown s \\ \not{y}\, s \end{array}$ (β

(571):: - - - - - - - - -

$\vdash \begin{array}{l} \S q \smile (p \smile \S p) = \S q \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (576

(IIIa): - - - - - - - - -

$\vdash \begin{array}{l} f(\S q \smile (p \smile \S p)) \\ f(\S q) \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (577

—•—

571 $\vdash \begin{array}{l} p \smile \S p \smile q = q \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$

(558): ————————

$\vdash \begin{array}{l} \S p \smile p \smile q = q \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (578

(490): - - - - - - -

$\vdash \begin{array}{l} \S p \smile (p \smile q) = q \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (579

(IIIc): - - - - - - - -

$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(\S p \smile (p \smile q)) \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (580

—•—

578 $\vdash \begin{array}{l} \S p \smile p \smile q = q \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$

(IIIc): - - - - - -

$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(\S p \smile p \smile q) \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (581

—•—

IIIh $\vdash \begin{array}{l} \S(\S p \smile (p \smile q)) = \S q \\ \S p \smile (p \smile q) = q \end{array}$

(544): ————————

$\vdash \begin{array}{l} \S(p \smile q) \smile p = \S q \\ \S p \smile (p \smile q) = q \\ p \frown s \\ \not{y}\, s \end{array}$ (α

(505): ————————

$\vdash \begin{array}{l} \S q \smile \S p \smile p = \S q \\ \S p \smile (p \smile q) = q \\ p \frown s \\ \not{y}\, s \end{array}$ (β

(579):: - - - - - - - -

$\vdash \begin{array}{l} \S q \smile \S p \smile p = \S q \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (582

(IIIc): - - - - - - - -

$\vdash \begin{array}{l} f(\S q) \\ f(\S q \smile \S p \smile p) \\ q \frown s \\ \not{y}\, s \\ p \frown s \end{array}$ (583

§ 185. *Zerlegung.*

Wir können aus (580) noch den Satz ableiten: „Wenn eine Relation, die aus einer zweiten und einer dritten Relation zusammengesetzt ist, mit der zweiten zusammenfällt, so gehört die dritte nicht derselben Positivalklasse an wie die zweite."

Zu diesem Zwecke zeigen wir, dass die dritte Relation eine Nullrelation wäre, wenn sie derselben Positivalklasse wie die zweite angehörte, das ist aber nach (537) unmöglich.

§ 186. *Aufbau.*

IIIh
$$\begin{array}{l} \vdash \ddagger c \smile (c \smile p) = \ddagger c \smile c \\ \quad c \smile p = c \end{array}$$

(580): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash p = \ddagger c \smile c \\ \quad c \smile p = c \\ \quad p \frown s \\ \quad y\, s \\ \quad c \frown s \end{array} \qquad (\alpha$$

(557): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash p = p \smile \ddagger p \\ \quad c \smile p = c \\ \quad p \frown s \\ \quad y\, s \\ \quad c \frown s \end{array} \qquad (\beta$$

$\times$

$$\begin{array}{l} \vdash c \smile p = c \\ \quad p = p \smile \ddagger p \\ \quad p \frown s \\ \quad y\, s \\ \quad c \frown s \end{array} \qquad (\gamma$$

(537):: — — — — — —

$$\begin{array}{l} \vdash c \smile p = c \\ \quad p \frown s \\ \quad y\, s \\ \quad c \frown s \end{array} \qquad (584$$

$\times$

$$\begin{array}{l} \vdash p \frown s \\ \quad c \smile p = c \\ \quad y\, s \\ \quad c \frown s \end{array} \qquad (585$$

e) Sätze über das Grössere und Kleinere in einer Positivalklasse.

§ 187. *Zerlegung.*

Wenn Σ eine Positivalklasse ist und Π und K ihrem Gebiete angehören, so können wir

$$,\Pi \smile \ddagger K \frown \Sigma'$$

lesen: „Π ist grösser als K im Σ-Gebiete".

Wir beweisen nun den Satz:

„Wenn von Relationen, die derselben Positivalklasse angehören, die erste (q) grösser als die zweite (r) ist, so gehört die aus der ersten und einer dritten (t) zusammengesetzten Relation der Positivalklasse (s) an, wenn die aus der zweiten (r) und der dritten (t) zusammengesetzte es thut."

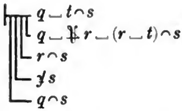
Wenn die dritte Relation als Umkehrung einer Relation (p) aufgefasst wird, so erhalten wir als besondern Fall den Satz:

„Wenn eine Relation (q) grösser als eine zweite (r) ist, die selbst grösser als eine dritte (p) ist, so ist die erste (q) grösser als die dritte (p), wenn die Relationen derselben Positivalklasse angehören."

§ 188. *Aufbau.*

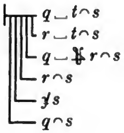
491
$$\begin{array}{l} \vdash q \smile \ddagger r \smile r \smile t \frown s \\ \quad q \smile \ddagger r \smile (r \smile t) \frown s \end{array}$$

(567): ————————



(α

(529)::- - - - - - - -



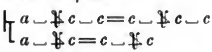
(586

§ 189. *Zerlegung.*

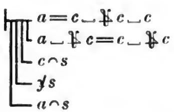
Wir beweisen nun den Satz, dass eine Relation mit einer zweiten zusammenfällt, wenn die erste weder grösser noch kleiner als die zweite ist, während sie derselben Positivalklasse angehören. Wir führen diesen Satz auf (561) zurück.

§ 190. *Aufbau.*

IIIh

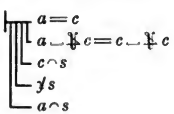


(567): ————————



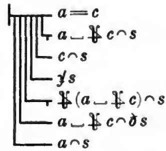
(α

(567): ————————



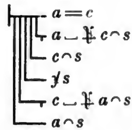
(β

(561)::- - - - - - - -



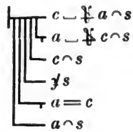
(γ

(543, 528)::= = = = =



(587

×



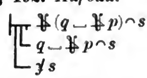
(588

§ 191. *Zerlegung.*

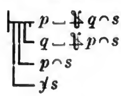
Wir beweisen nun noch, dass eine Relation, die einer Positivalklasse angehört, nicht grösser ist als eine zweite Relation, wenn diese grösser als die erste ist. Dies folgt aus (538).

§ 192. *Aufbau.*

538



(542): ————————



(589

Γ. Die Grenze.

Definitionen der Functionen $\xi_{\varDelta}\zeta$ und $\xi\wr\zeta$

§ 193. *Zerlegung.*

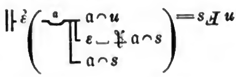
Wir wollen nun, wie im § 175 angedeutet ist, die obere Grenze in einer Positivalklasse definiren. Wir sagen statt „obere Grenze derjenigen Relationen in einer Positivalklasse Σ, die einer Klasse Φ angehören" kürzer:

„*Σ-Grenze von Φ*".

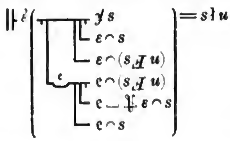
Wann sagen wir nun, $\varDelta$ sei Σ-Grenze von Φ? Dazu gehört

1. dass Σ eine Positivalklasse sei;
2. dass $\varDelta$ der Σ-Klasse angehöre;
3. dass jede der Klasse Σ angehörende Relation kleiner als $\varDelta$ der Klasse Φ angehöre;
4. dass alle Relationen in Σ, die grösser als $\varDelta$ sind, grösser seien als mindestens eine Relation in Σ, die nicht der Klasse Φ angehört.

Bevor wir die Grenze definiren, wollen wir der Abkürzung halber Folgendes festsetzen:


(Ω

Diese Bezeichnung gebrauchen wir nun zur Definition der Grenze:


(AA

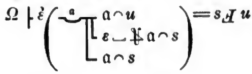
Danach lesen wir

„$\varDelta\frown(\Sigma\wr\Phi)$"

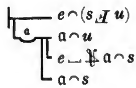
„$\varDelta$ ist Σ-Grenze von Φ".

Wir ziehen dann die nächsten Folgerungen aus unsern Definitionen.

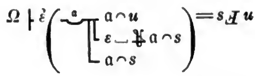
§ 194. *Aufbau.*



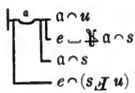
(44): ―――――


(590

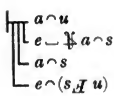
――•――



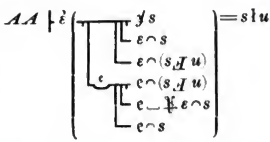
(46): ―――――


(α

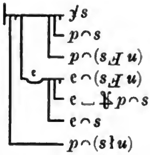
(IIa): - - - - - -


(591

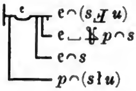
――•――



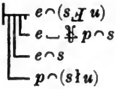
(46): ―――――

 (592

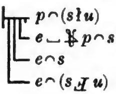
(Id): - - - - - - - -

 (α

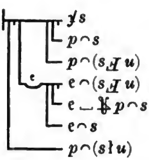
(IIa): - - - - - - -

 (593

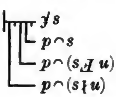
×

 (594

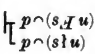
———•———

592 

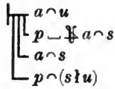
(Ic): - - - - - - - -

 (595

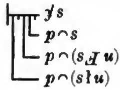
(Id): - - - - - - -

 (596

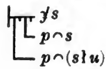
(591): - - - -

 (597

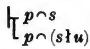
———•———

595 

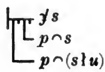
(Ic): - - - - - - -

 (598

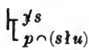
(Id): - - - - - -

 (599

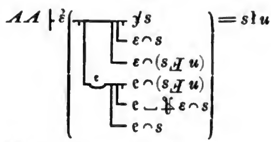
———•———

598 

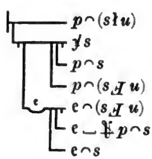
(Ib): - - - - - -

 (600

———•———



(44): ————————

 (α

×

$$\begin{array}{l} \not{z}\, s \\ p \frown s \\ p \frown (s \mathbin{\rotatebox[origin=c]{180}{$\mathcal{I}$}} u) \\ \mathfrak{e} \frown (s \mathbin{\rotatebox[origin=c]{180}{$\mathcal{I}$}} u) \\ \mathfrak{e} \smile \mathfrak{H}\, p \frown s \\ \mathfrak{e} \frown s \\ p \frown (s \text{ł} u) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} p \frown (s \text{ł} u) \\ p \frown s \\ p \frown (s \mathbin{\rotatebox[origin=c]{180}{$\mathcal{I}$}} u) \\ \mathfrak{e} \frown (s \mathbin{\rotatebox[origin=c]{180}{$\mathcal{I}$}} u) \\ \mathfrak{e} \smile \mathfrak{H}\, p \frown s \\ \mathfrak{e} \frown s \\ \not{z}\, s \end{array} \qquad (601$$

———•———

§ 195. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun, dass es nicht mehr als eine Σ-Grenze einer Klasse giebt; in Zeichen:

$$\begin{array}{l} p = q \\ q \frown (s \text{ł} u) \\ p \frown (s \text{ł} u) \end{array},$$

Wir benutzen dazu (587), indem wir zeigen, dass von solchen Grenzen die erste weder grösser noch kleiner ist als die zweite.

§ 196. *Aufbau.*

$$594 \quad \begin{array}{l} q \frown (s \text{ł} u) \\ p \smile \mathfrak{H}\, q \frown s \\ p \frown s \\ p \frown (s \mathbin{\rotatebox[origin=c]{180}{$\mathcal{I}$}} u) \end{array}$$

(599, 596) :: = = = =

$$\begin{array}{l} q \frown (s \text{ł} u) \\ p \smile \mathfrak{H}\, q \frown s \\ p \frown (s \text{ł} u) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} p \smile \mathfrak{H}\, q \frown s \\ q \frown (s \text{ł} u) \\ p \frown (s \text{ł} u) \end{array} \qquad (\beta$$

(587) : — — — — —

$$\begin{array}{l} p = q \\ q \frown (s \text{ł} u) \\ p \frown (s \text{ł} u) \\ q \frown s \\ \not{z}\, s \\ q \smile \mathfrak{H}\, p \frown s \\ p \frown s \end{array} \qquad (\gamma$$

(β, 600) :: = = = = = =

$$\begin{array}{l} p = q \\ q \frown (s \text{ł} u) \\ p \frown (s \text{ł} u) \\ q \frown s \\ p \frown s \end{array} \qquad (\delta$$

(599, 599) :: = = = =

$$\begin{array}{l} p = q \\ q \frown (s \text{ł} u) \\ p \frown (s \text{ł} u) \end{array} \qquad (602$$

Δ. Die Positivklasse.

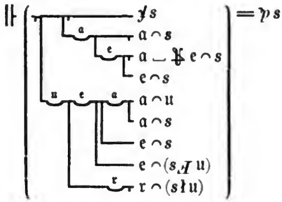
a) Definition der Function $\mathfrak{P}\xi$ und Folgerungen.

§ 197. *Zerlegung.*

Wir haben im § 175 die Frage gestellt: Wann ist eine Klasse eine Positivklasse? Diese Frage ist noch nicht beantwortet worden. Wir haben uns damals genöthigt gesehn, zunächst den weitern Begriff der Positivalklasse zu definiren. Nachdem wir damit die Σ-Grenze einer Klasse definirt haben, können wir nun jene Frage beantworten. Damit eine Klasse Σ eine ***Positivklasse*** sei, muss sie folgende Eigenschaften haben:

1. sie muss eine Positivalklasse sein;
2. zu jeder ihr angehörenden Relation muss es eine andere geben, die ihr gleichfalls angehört und kleiner ist;
3. wenn es eine Relation der Klasse Σ giebt der Art, dass in Σ alle kleineren Relationen einer Klasse Φ angehören, während es in Σ eine Relation giebt, die der Klasse Φ nicht angehört, so muss es eine Σ-Grenze der Φ geben.

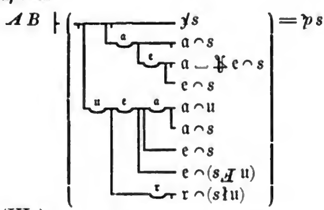
Wir stellen demnach die Definition auf:



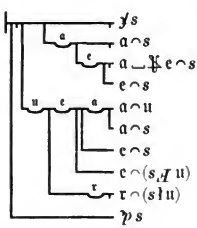
(*AB*

Wir lesen ‚$\mathfrak{p}\,\Sigma$': ‚Σ ist eine Positivklasse'. Ziehen wir aus (*AB*) jetzt die nächsten Folgerungen!

§ 198. *Aufbau.*

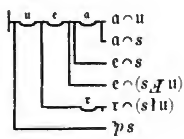


(IIIa):



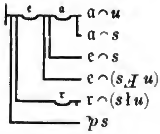
(603

(Id): - - - - - - - - -



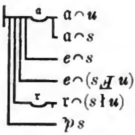
(α

(IIa): - - - - - - - - -



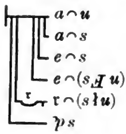
(β

(IIa): - - - - - - - -



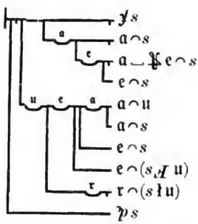
(γ

(IIa): - - - - - - -

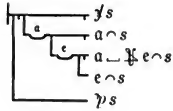


(604

603

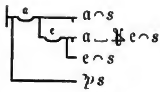


(Ic): - - - - - - - - - - -

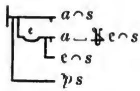


(605

(Id): - - - - - - - - - -

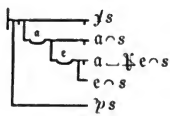


(IIa): - - - - - - - -



(606

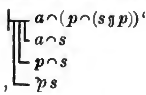
605



(Ib): - - - - - - - - - -

(607

b) Beweis des Satzes



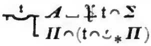
§ 199. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun den Satz:

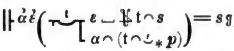
„Wenn zwei Relationen derselben Positivklasse angehören, so giebt es ein Vielfaches der einen, das nicht kleiner als die andere ist."

(Archimedisches Axiom.)

Den Gedanken, dass es ein Vielfaches von Π giebt, das nicht kleiner als Δ ist, können wir so ausdrücken:



sofern Σ die Positivklasse ist. Zur Abkürzung führen wir eine besondere Bezeichnung ein, indem wir definiren:



($\Delta\Gamma$

Danach lesen wir, falls Σ eine Positivklasse ist und Δ und Π ihr angehören:

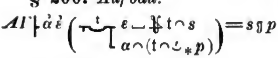
$$,\Delta \frown (\Pi \frown (\Sigma \mathfrak{g} \Pi))\text{':}$$

„es giebt ein Vielfaches von Π, das nicht kleiner ist als Δ".

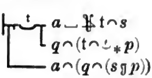
Mit dieser Bezeichnung haben wir in der Ueberschrift den oben in Worten angeführten Satz.

Ziehen wir zunächst aus ($\Delta\Gamma$) einige Folgerungen!

§ 200. *Aufbau.*

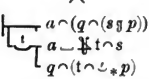


(6): ————————



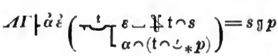
(α

×

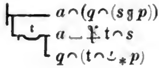


(608

——•——

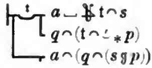


(10): ————————



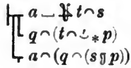
(α

×



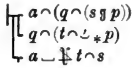
(β

(IIa): - - - - - - - -



(609

×



(610

§ 201. *Zerlegung.*

Um nun den Satz des § 199 zu beweisen, stellen wir folgende Betrachtung an. Wir nehmen an, q und p gehören der Positivklasse s an. Wenn nun jedes Glied der mit q anfangenden $_{*}p$-Reihe kleiner als a wäre, so gäbe es nach (604) eine s-Grenze von $q \frown (s \mathfrak{g} p)$; denn es giebt in der Klasse s auch Relationen — z. B. q —, die von Gliedern jener Reihe mindestens erreicht werden, und das gilt dann auch von allen kleineren. Diese s-Grenze m von $q \frown (s \mathfrak{g} p)$ ist offenbar abhängig von q. Wir werden zeigen, dass $c \smile p$ die s-Grenze von $p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)$ ist, wenn c die s-Grenze von $p \frown (s \mathfrak{g} p)$ ist. Nun fallen aber diese beiden s-Grenzen offenbar zusammen, sodass $c \smile p$ mit c zusammenfallen müsste. Dann könnte nach (585) p nicht der Klasse s angehören. Hieraus ergiebt sich die Falschheit der Annahme, dass jedes Glied der mit p anfangenden p-Reihe — d. h. jedes Vielfache von p — kleiner als a sei.

Unsere erste Aufgabe wird sein, den Satz

$$\vdash \begin{array}{l} c \smile p \frown (s \wr (p \smile p \frown (s\,\mathfrak{g}\,p)))` \\ p \frown s \\ c \frown (s \wr (p \frown (s\,\mathfrak{g}\,p))) \end{array} \qquad (\alpha$$

zu beweisen. Dazu brauchen wir nach (601) den Satz

$$\vdash \begin{array}{l} c \smile p \frown (s \mathfrak{I} (p \smile p \frown (s\,\mathfrak{g}\,p)))` \\ p \frown s \\ \mathfrak{f}\, s \\ c \frown (s \wr (p \frown (s\,\mathfrak{g}\,p))) \end{array} \qquad (\beta$$

Wir haben nach (597)

$$\vdash \begin{array}{l} r \frown (q \frown (s\,\mathfrak{g}\,p)) \\ c \smile \ddagger\, r \frown s \\ r \frown s \\ c \frown (s \wr (q \frown (s\,\mathfrak{g}\,p))) \end{array}$$

worin dann für ‚r' ‚$a \smile \ddagger\, p$' zu setzen ist, nachdem statt ‚$r \frown s$' ‚$r \frown \mathfrak{d}\, s$' eingeführt ist. Den Uebergang zu (β) vermittelt dann der Satz

$$\vdash \begin{array}{l} a \frown (q \smile b \frown (s\,\mathfrak{g}\,p))` \\ a \smile \ddagger\, b \frown (q \frown (s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

der aus

$$\vdash \begin{array}{l} q \smile b \frown (t \smile b \frown \dot{\smile}_* p)` \\ q \frown (t \frown \dot{\smile}_* p) \end{array} \qquad (\delta$$

abzuleiten ist. Diesen beweisen wir mit (144).

§ 202. *Aufbau.*

$$490 \quad \vdash \begin{array}{l} p \smile (d \smile b) = a \smile b \\ p \smile d \smile b = a \smile b \end{array}$$

(IIIh):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile (d \smile b) = a \smile b \\ p \smile d = a \end{array} \qquad (\alpha$$

(492):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile (d \smile b) = a \smile b \\ d \frown (a \frown_* p) \end{array} \qquad (\beta$$

(495): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} d \smile b \frown (a \smile b \frown_* p) \\ d \frown (a \frown_* p) \end{array} \qquad (611$$

(137): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} r \frown (a \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \\ d \frown (a \frown_* p) \\ r \frown (d \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\vdash^{\mathfrak{b}\;\mathfrak{a}} \begin{array}{l} r \frown (\mathfrak{a} \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \\ \mathfrak{b} \frown (\mathfrak{a} \frown_* p) \\ r \frown (\mathfrak{b} \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \end{array} \qquad (\beta$$

(144): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} r \frown (t \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \\ r \frown (q \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \\ q \frown (t \frown \dot{\smile}_* p) \end{array} \qquad (612$$

———•———

$$140 \quad \vdash q \smile b \frown (q \smile b \frown \dot{\smile}_* p)$$

(612): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} q \smile b \frown (t \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \\ q \frown (t \frown \dot{\smile}_* p) \end{array} \qquad (613$$

———•———

$$506 \quad \vdash \begin{array}{l} a \smile \ddagger\, b \smile \ddagger\, t \frown s \\ a \smile \ddagger\, (t \smile b) \frown s \end{array}$$

(609):: - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile \ddagger\, b \smile \ddagger\, t \frown s \\ q \smile b \frown (t \smile b \frown \dot{\smile}_* p) \\ a \frown (q \smile b \frown (s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(613):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile \ddagger\, b \smile \ddagger\, t \frown s \\ q \frown (t \frown \dot{\smile}_* p) \\ a \frown (q \smile b \frown (s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\vdash^{\mathfrak{t}} \begin{array}{l} a \smile \ddagger\, b \smile \ddagger\, \mathfrak{t} \frown s \\ q \frown (\mathfrak{t} \frown \dot{\smile}_* p) \\ a \frown (q \smile b \frown (s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

(608): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}\vdash a\smile\ddagger b\frown(q\frown(s\mathfrak{g}p))\\ \quad a\frown(q\smile b\frown(s\mathfrak{g}p))\end{array}\qquad(\delta$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l}\vdash a\frown(q\smile b\frown(s\mathfrak{g}p))\\ \quad a\smile\ddagger b\frown(q\frown(s\mathfrak{g}p))\end{array}\qquad(614$$

§ 203. *Zerlegung.*

Um, wie im § 201 angedeutet worden, ‚$r\frown s$' durch ‚$r\frown\eth s$' zu ersetzen, beweisen wir den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash r\frown s\\ \quad r\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad \not{y}\,s\\ \quad r\frown\eth s\end{array}$$

d. h. „eine Grösse ist positiv, wenn sie grösser ist als eine positive Grösse ihres Gebietes."

§ 204. *Aufbau.*

$$505\quad\begin{array}{l}\vdash \ddagger v\smile\ddagger q\frown s\\ \quad \ddagger(q\smile v)\frown s\end{array}$$

(538):: – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash \ddagger v\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\smile v\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\alpha$$

(529):: – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash \ddagger v\smile\ddagger q\frown s\\ \quad v\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\beta$$

(IIId): – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash r=\ddagger v\\ \quad r\smile\ddagger q\frown s\\ \quad v\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\gamma$$

——•——

$$505\quad\begin{array}{l}\vdash \ddagger(v\smile\ddagger v)\smile\ddagger q\frown s\\ \quad \ddagger(q\smile(v\smile\ddagger v))\frown s\end{array}$$

(542): ————————

$$\begin{array}{l}\vdash v\smile\ddagger v\smile\ddagger q\frown s\\ \quad \ddagger(q\smile(v\smile\ddagger v))\frown s\\ \quad v\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\delta$$

(538):: – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash v\smile\ddagger v\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\smile(v\smile\ddagger v)\frown s\\ \quad v\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\varepsilon$$

(563):: – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash v\smile\ddagger v\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad v\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\zeta$$

(IIId): – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash r=v\smile\ddagger v\\ \quad r\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad v\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\eta$$

(If): – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash r=v\smile\ddagger v\\ \quad \neg\, r=\ddagger v\\ \quad r\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad v\frown s\\ \quad \not{y}\,s\\ \quad \neg\, r=\ddagger v\end{array}\qquad(\vartheta$$

(γ):: – – – – – – – –

$$\begin{array}{l}\vdash r=v\smile\ddagger v\\ \quad \neg\, r=\ddagger v\\ \quad v\frown s\\ \quad r\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\iota$$

$$\begin{array}{l}\vdash \smile^{\mathfrak{q}}\ r=\mathfrak{q}\smile\ddagger\mathfrak{q}\\ \quad \neg\, r=\ddagger\mathfrak{q}\\ \quad \mathfrak{q}\frown s\\ \quad r\smile\ddagger q\frown s\\ \quad q\frown s\\ \quad \not{y}\,s\end{array}\qquad(\varkappa$$

(516): – – – – – – – –

$r \frown s$
$r \smile ⅋ q \frown s$
$q \frown s$
$ɟ s$
$r \frown ð s$ (615

(609) :: - - - - - -

$r \frown s$
$q \frown (q \frown ⌣ \ast p)$
$r \frown (q \frown (s\, g\, p))$
$q \frown s$
$ɟ s$
$r \frown ð s$ (α

(140) :: ———————

$r \frown s$
$r \frown (q \frown (s\, g\, p))$
$q \frown s$
$ɟ s$
$r \frown ð s$ (β

×

$r \frown (q \frown (s\, g\, p))$
$r \frown s$
$q \frown s$
$ɟ s$
$r \frown ð s$ (γ

(597) : -·-·-·-·-·-·-

$r \frown (q \frown (s\, g\, p))$
$q \frown s$
$ɟ s$
$r \frown ð s$
$c \smile ⅋ r \frown s$
$c \frown (s\, ł\, (q \frown (s\, g\, p)))$ (616

———•———

490 $F(c \smile (p \smile ⅋ a))$
$F(c \smile p \smile ⅋ a)$

(543) : ———————

$F(c \smile ⅋ (a \smile ⅋ p))$
$F(c \smile p \smile ⅋ a)$
$p \frown s$
$ɟ s$ (617

(607) :: - - - - - - - - -

$F(c \smile ⅋ (a \smile ⅋ p))$
$F(c \smile p \smile ⅋ a)$
$p \frown s$
γs (618

———•———

614 $a \frown (p \smile p \frown (s\, g\, p))$
$a \smile ⅋ p \frown (p \frown (s\, g\, p))$

(616) :: - - - - - - - -

$a \frown (p \smile p \frown (s\, g\, p))$
$p \frown s$
$ɟ s$
$a \smile ⅋ p \frown ð s$
$c \smile ⅋ (a \smile ⅋ p) \frown s$
$c \frown (s\, ł\, (p \frown (s\, g\, p)))$ (α

(617,528) :: = = = = = =

$a \frown (p \smile p \frown (s\, g\, p))$
$c \smile p \smile ⅋ a \frown s$
$a \frown s$
$p \frown s$
$ɟ s$
$c \frown (s\, ł\, (p \frown (s\, g\, p)))$ (β

‿

$\overset{a}{\smile}$ $a \frown (p \smile p \frown (s\, g\, p))$
$c \smile p \smile ⅋ a \frown s$
$a \frown s$
$p \frown s$
$ɟ s$
$c \frown (s\, ł\, (p \frown (s\, g\, p)))$ (γ

(590) : - - - - - - - - - -

$c \smile p \frown (s\, \mathfrak{A}\, (p \smile p \frown (s\, g\, p)))$
$p \frown s$
$ɟ s$
$c \frown (s\, ł\, (p \frown (s\, g\, p)))$ (619

§ 205. *Zerlegung.*

Um den Satz (α) des § 201 zu beweisen, brauchen wir ausser dem soeben bewiesenen nach (601) noch den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash\; e\frown(s\,\mathfrak{I}\,(p\smile p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p)))' \\ \quad e\smile\maltese(c\smile p)\frown s \\ \quad e\frown s \\ \quad p\frown s \\ \quad c\smile p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ ,\quad c\frown(s\,\mathfrak{l}\,(p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\alpha$$

der besagt, dass es unter unsern Voraussetzungen für jede Relation e grösser als $c\smile p$ eine Relation giebt, die kleiner ist als e und positiv und von keinem Gliede der mit $p\smile p$ anfangenden p-Reihe erreicht wird, falls c s-Grenze von $(p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p))$ ist. Wir zeigen, dass $c\smile p$ selbst nicht erreicht wird. Daraus nämlich, dass c s-Grenze von $p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p)$ ist, folgt, dass c von Gliedern der mit p anfangenden $_*p$-Reihe nicht übertroffen und also nicht erreicht wird. Daraus folgt dann weiter, dass $c\smile p$ von Gliedern der mit $p\smile p$ anfangenden $_*p$-Reihe nicht erreicht wird.

Wir beweisen zunächst den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash\; c\smile p\frown(p\smile p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p))' \\ \quad p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ ,\quad c\frown(p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\beta$$

der zurückzuführen ist auf den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash\; p\frown(t\smile\maltese\,p\frown\dot{\smile}_*p)' \\ \quad p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ ,\quad p\smile p\frown(t\frown\dot{\smile}_*p) \end{array} \qquad (\gamma$$

Dieser folgt aus (612).

§ 206. *Aufbau.*

491 $$\begin{array}{l} \vdash\; F(c\smile b\smile\maltese\,t) \\ \quad F(c\smile(b\smile\maltese\,t)) \end{array}$$

(542):: - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\; F(c\smile b\smile\maltese\,t) \\ \quad F(c\smile\maltese\,(t\smile\maltese\,b)) \\ \quad b\frown s \\ \quad \jmath\, s \end{array} \qquad (620$$

---

612 $$\begin{array}{l} \vdash\; p\frown(t\smile\maltese\,p\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad p\frown(p\smile p\smile\maltese\,p\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad p\smile p\frown(t\frown\dot{\smile}_*p) \end{array}$$

(569):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\; p\frown(t\smile\maltese\,p\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad p\frown(p\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ \quad p\smile p\frown(t\frown\dot{\smile}_*p) \end{array} \qquad (\alpha$$

(140):: ————————

$$\begin{array}{l} \vdash\; p\frown(t\smile\maltese\,p\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ \quad p\smile p\frown(t\frown\dot{\smile}_*p) \end{array} \qquad (621$$

(609): - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash\; c\smile\maltese\,(t\smile\maltese\,p)\frown s \\ \quad p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ \quad p\smile p\frown(t\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad c\frown(p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\alpha$$

(620): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash\; c\smile p\smile\maltese\,t\frown s \\ \quad p\smile p\frown(t\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ \quad c\frown(p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l} \vdash\!\overset{t}{\smile}\; c\smile p\smile\maltese\,t\frown s \\ \quad p\smile p\frown(t\frown\dot{\smile}_*p) \\ \quad p\frown s \\ \quad \jmath\, s \\ \quad c\frown(p\frown(s\,\mathfrak{g}\,p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

(608): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash c \smile p \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\
\quad p \frown s \\
\quad \Im s \\
\quad c \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p))
\end{array} \qquad (622$$

§ 207. *Zerlegung.*

In Ausführung unseres Planes im § 205 beweisen wir, dass unter unsern Voraussetzungen, wenn c s-Grenze von $p \frown (s \mathfrak{g} p)$ ist, c von Gliedern der mit p anfangenden ${}_{*}p$-Reihe nicht erreicht werden kann, nämlich den Satz

$$\begin{array}{l}
\vdash c \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\
\quad c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\
\quad \Im s \\
,\ p \frown s
\end{array} \qquad (\alpha$$

Wenn c vom Gliede t der mit p anfangenden ${}_{*}p$-Reihe grade erreicht würde, sodass $t = c$ wäre, so würde c von dem nächstfolgenden Gliede dieser Reihe $p \smile t$ übertroffen. In jedem Falle also, wo c von Gliedern unserer Reihe erreicht wird, giebt es auch eins, von dem es übertroffen wird. Wenn aber t ein Glied unserer Reihe ist und wenn a kleiner als t ist, so wird a von einem Gliede unserer Reihe übertroffen, was, falls t grösser als c ist, nach (594) dem widerspricht, dass c s-Grenze von $p \frown (s \mathfrak{g} p)$ sein soll. Wir beweisen so den Satz

$$\begin{array}{l}
\vdash t \smile \mathfrak{X}\, c \frown s \\
\quad c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\
\quad t \frown s \\
\quad p \frown (t \frown \dot{\smile}\, {}_{*}p) \\
,\ \Im s
\end{array} \qquad (\beta$$

Mit (588) folgern wir hieraus, dass unter unseren Voraussetzungen t kleiner als c ist, da auch der Fall, wo $t = c$ ist, wie oben gesehen, ausgeschlossen ist. Es ist dann noch das Unterglied ‚$t \frown s$' wegzuschaffen. Das geschieht mit dem zunächst zu beweisenden Satze

$$\begin{array}{l}
\vdash t \frown s \\
\quad q \frown s \\
\quad p \frown s \\
\quad \Im s \\
,\ q \frown (t \frown \dot{\smile}\, {}_{*}p)
\end{array} \qquad (\gamma$$

§ 208. *Aufbau.*

$$\begin{array}{l}
529 \quad \vdash p \smile d \frown s \\
\quad d \frown s \\
\quad p \frown s \\
\quad \Im s
\end{array}$$

(493): ———————

$$\begin{array}{l}
\vdash a \frown s \\
\quad d \frown (a \frown {}_{*}p) \\
\quad d \frown s \\
\quad p \frown s \\
\quad \Im s
\end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} \frown s \\
\quad \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown {}_{*}p) \\
\quad \mathfrak{d} \frown s \\
\quad p \frown s \\
\quad \Im s
\end{array} \qquad (\beta$$

(144): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash t \frown s \\
\quad q \frown s \\
\quad p \frown s \\
\quad \Im s \\
\quad q \frown (t \frown \dot{\smile}\, {}_{*}p)
\end{array} \qquad (623$$

(607):: - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash t \frown s \\
\quad q \frown s \\
\quad p \frown s \\
\quad \Im s \\
\quad q \frown (t \frown \dot{\smile}\, {}_{*}p)
\end{array} \qquad (624$$

496 $\vdash t \frown (p \smile t \frown_{*} p)$

(137): ———————

$\vdash q \frown (p \smile t \frown \smile_{*} p)$
$\quad q \frown (t \frown \smile_{*} p)$ (625

——•——

529 $\vdash c \smile p \frown s$
$\quad p \frown s$
$\quad c \frown s$
$\quad \mathfrak{f} s$

(600, 599):: = = =

$\vdash c \smile p \frown s$
$\quad p \frown s$
$\quad c \frown (s \mathfrak{l} u)$ (626

——•——

610 $\vdash a \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p))$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad a \smile \nmid t \frown s$

(589):: - - - - - -

$\vdash a \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p))$
$\quad t \smile \nmid a \frown s$
$\quad a \frown s$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad \mathfrak{f} s$ (α

$\vdash^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p))$
$\quad t \smile \nmid \mathfrak{a} \frown s$
$\quad \mathfrak{a} \frown s$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad \mathfrak{f} s$ (β

(590): - - - - - - - -

$\vdash t \frown (s \mathfrak{I} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad \mathfrak{f} s$ (γ

(594): - - - - - - - -

$\vdash c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\quad t \smile \nmid c \frown s$
$\quad t \frown s$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad \mathfrak{f} s$ (δ

×

$\vdash t \smile \nmid c \frown s$
$\quad c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\quad t \frown s$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad \mathfrak{f} s$ (ε

——•——

IIId $\vdash t = c$
$\quad p \smile t \smile \nmid t \frown s$
$\quad p \smile t \smile \nmid c \frown s$

(569):: - - - - - -

$\vdash t = c$
$\quad p \frown s$
$\quad t \frown s$
$\quad \mathfrak{f} s$
$\quad p \smile t \smile \nmid c \frown s$ (ζ

(588): - - - - - - -

$\vdash c \smile \nmid t \frown s$
$\quad t \smile \nmid c \frown s$
$\quad c \frown s$
$\quad \mathfrak{f} s$
$\quad p \frown s$
$\quad t \frown s$
$\quad p \smile t \smile \nmid c \frown s$ (η

(ε, ε):: = = = = = = = =

$\vdash c \smile \nmid t \frown s$
$\quad c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\quad t \frown s$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad \mathfrak{f} s$
$\quad c \frown s$
$\quad p \frown s$
$\quad p \smile t \frown s$
$\quad p \frown (p \smile t \frown \smile_{*} p)$ (ϑ

(529, 625):: = = = = = = = =

$\vdash c \smile \nmid t \frown s$
$\quad c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\quad t \frown s$
$\quad p \frown (t \frown \smile_{*} p)$
$\quad \mathfrak{f} s$
$\quad c \frown s$
$\quad p \frown s$ (ι

(623, 599):: = = = = = = = =

$c \smile \mathfrak{¥}\, t \frown s$
$p \frown (t \frown \dot{\smile}_* p)$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\mathfrak{f}\, s$
$p \frown s$ (κ

$\mathfrak{t}$: $c \smile \mathfrak{¥}\, \mathfrak{t} \frown s$
$p \frown (\mathfrak{t} \frown \dot{\smile}_* p)$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\mathfrak{f}\, s$
$p \frown s$ (λ

(608): - - - - - - - - -

$c \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p))$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\mathfrak{f}\, s$
$p \frown s$ (μ

(622): - - - - - - -

$c \smile p \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p))$
$p \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (ν

×

$p \frown s$
$c \smile p \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p))$
$\mathfrak{f}\, s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (ξ

(591):: - - - - - - - - -

$p \frown s$
$e \smile \mathfrak{¥} (c \smile p) \frown s$
$c \smile p \frown s$
$e \frown (s \mathfrak{J} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\mathfrak{f}\, s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (ο

×

$e \frown (s \mathfrak{J} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$e \smile \mathfrak{¥} (c \smile p) \frown s$
$p \frown s$
$c \smile p \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (π

(I): ————————

$e \frown (s \mathfrak{J} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$e \smile \mathfrak{¥} (c \smile p) \frown s$
$e \frown s$
$p \frown s$
$c \smile p \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (ϱ

$\mathfrak{e}$: $\mathfrak{e} \frown (s \mathfrak{J} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\mathfrak{e} \smile \mathfrak{¥} (c \smile p) \frown s$
$\mathfrak{e} \frown s$
$p \frown s$
$c \smile p \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (σ

(601): - - - - - - - - - - -

$c \smile p \frown (s \mathfrak{l} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$c \smile p \frown s$
$c \smile p \frown (s \mathfrak{J} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$p \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (τ

(619, 626):: = = = = = = = = =

$c \smile p \frown (s \mathfrak{l} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$p \frown s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$\mathfrak{f}\, s$ (υ

(600):: - - - - - - - - -

$c \smile p \frown (s \mathfrak{l} (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)))$
$p \frown s$
$c \frown (s \mathfrak{l} (p \frown (s \mathfrak{g} p)))$ (627

§ 209. *Zerlegung.*

In Ausführung unseres Planes des § 201 beweisen wir nun, dass die s-Grenzen von $p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)$ und von $p \frown (s \mathfrak{g} p)$ zusammenfallen. Es wird dazu (602) zu gebrauchen sein. Wir müssen noch zeigen, dass jede s-Grenze von $p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)$ auch s-Grenze von $p \frown (s \mathfrak{g} p)$ ist:

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (s \mathfrak{l}(p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad d \frown (s \mathfrak{l}(p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad p \frown s \end{array} \qquad (\alpha$$

Wir haben dazu nach (601) den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (s \mathcal{J}(q \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad d \frown (s \mathfrak{l}(p \smile q \frown (s \mathfrak{g} p))) \end{array} \qquad (\beta$$

nöthig. Wir beweisen ihn mit dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash q \frown (t \frown \mathcal{L}_{*} p) \\ \quad p \smile q \frown (t \frown \mathcal{L}_{*} p) \end{array} \qquad (\gamma$$

der leicht aus (285) folgt.

§ 210. *Aufbau.*

$$496 \vdash q \frown (p \smile q \frown_{*} p)$$

(285): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash q \frown (t \frown \mathcal{L}_{*} p) \\ \quad p \smile q \frown (t \frown \mathcal{L}_{*} p) \end{array} \qquad (628$$

(609): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash a \smile \mathfrak{F}\, t \frown s \\ \quad p \smile q \frown (t \frown \mathcal{L}_{*} p) \\ \quad a \frown (q \frown (s \mathfrak{g} p)) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash^{t} a \smile \mathfrak{F}\, t \frown s \\ \quad p \smile q \frown (t \frown \mathcal{L}_{*} p) \\ \quad a \frown (q \frown (s \mathfrak{g} p)) \end{array} \qquad (\beta$$

(608): - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (p \smile q \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \quad a \frown (q \frown (s \mathfrak{g} p)) \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (q \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \quad a \frown (p \smile q \frown (s \mathfrak{g} p)) \end{array} \qquad (629$$

(597):: - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (q \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \quad d \smile \mathfrak{F}\, a \frown s \\ \quad a \frown s \\ \quad d \frown (s \mathfrak{l}(p \smile q \frown (s \mathfrak{g} p))) \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash^{a} a \frown (q \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \quad d \smile \mathfrak{F}\, a \frown s \\ \quad a \frown s \\ \quad d \frown (s \mathfrak{l}(p \smile q \frown (s \mathfrak{g} p))) \end{array} \qquad (\beta$$

(590): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash d \frown (s \mathcal{J}(q \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad d \frown (s \mathfrak{l}(p \smile q \frown (s \mathfrak{g} p))) \end{array} \qquad (630$$

§ 211. *Zerlegung.*

Zum Beweise des Satzes (α) des § 209 haben wir nach (601) ausser dem eben bewiesenen noch den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown (s \mathcal{J}(p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad e \smile \mathfrak{F}\, d \frown s \\ \quad e \frown s \\ \quad p \frown s \\ \quad d \frown (s \mathfrak{l}(p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad \not{f} s \end{array} \qquad (\alpha$$

nöthig. Um ihn zu beweisen, bedürfen wir nach (594) des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash e \frown (s \mathcal{J}(p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad p \frown s \\ \quad e \frown (s \mathcal{J}(p \frown (s \mathfrak{g} p))) \\ \quad \not{f} s \end{array} \qquad (\beta$$

der mit (590) und (591) zurückzuführen ist auf

$$\begin{array}{l} \vdash a \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \quad p \frown s \\ \quad a \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \quad \not{f} s \end{array} \qquad (\gamma$$

Dieser ist mit (608) aus

$$\begin{array}{l} \vdash a \smile \mathfrak{F}\, t \frown s \\ \quad p \frown (t \frown \mathcal{L}_{*} p) \\ \quad p \frown s \\ \quad a \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \quad \not{f} s \end{array} \qquad (\delta$$

abzuleiten. Um (δ) zu beweisen, brauchen wir die Sätze

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile q \frown (p \smile t \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ q \frown (t \frown \dot{\smile}_{*} p) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

und

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile \natural t \frown s \\ p \frown s \\ a \smile \natural (p \smile t) \frown s \\ \not{y} s \\ t \frown s \end{array} \qquad (\zeta$$

(ε) beweisen wir mit (144).

§ 212. *Aufbau.*

IIIh $$\vdash \begin{array}{l} p \smile (p \smile d) = p \smile a \\ p \smile d = a \end{array}$$

(495): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile (p \smile d) = p \smile a \\ d \frown (a \frown_{*} p) \end{array} \qquad (\alpha$$

(495): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile d \frown (p \smile a \frown_{*} p) \\ d \frown (a \frown_{*} p) \end{array} \qquad (\beta$$

(137): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile q \frown (p \smile a \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ d \frown (a \frown_{*} p) \\ p \smile q \frown (p \smile d \frown \dot{\smile}_{*} p) \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \begin{array}{l} p \smile q \frown (p \smile \mathfrak{a} \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ \mathfrak{d} \frown (\mathfrak{a} \frown_{*} p) \\ p \smile q \frown (p \smile \mathfrak{d} \frown \dot{\smile}_{*} p) \end{array} \qquad (\delta$$

(144): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile q \frown (p \smile t \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ p \smile q \frown (p \smile q \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ q \frown (t \frown \dot{\smile}_{*} p) \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(140):: ————————

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile q \frown (p \smile t \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ q \frown (t \frown \dot{\smile}_{*} p) \end{array} \qquad (631$$

———•———

505 $$\vdash \begin{array}{l} a \smile (\natural t \smile \natural p) \frown s \\ a \smile \natural (p \smile t) \frown s \end{array}$$

(529): - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile (\natural t \smile \natural p) \smile p \frown s \\ p \frown s \\ a \smile \natural (p \smile t) \frown s \\ \not{y} s \end{array} \qquad (\alpha$$

(490): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile (\natural t \smile \natural p \smile p) \frown s \\ p \frown s \\ a \smile \natural (p \smile t) \frown s \\ \not{y} s \end{array} \qquad (\beta$$

(583): ————————

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile \natural t \frown s \\ p \frown s \\ a \smile \natural (p \smile t) \frown s \\ \not{y} s \\ t \frown s \end{array} \qquad (632$$

(609):: - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile \natural t \frown s \\ p \frown s \\ p \smile p \frown (p \smile t \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ a \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \not{y} s \\ t \frown s \end{array} \qquad (\alpha$$

(623, 631):: = = = = = = = =

$$\vdash \begin{array}{l} a \smile \natural t \frown s \\ p \frown (t \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ p \frown s \\ a \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \not{y} s \end{array} \qquad (\beta$$

$$\vdash \overset{\mathfrak{t}}{\smile} \begin{array}{l} a \smile \natural \mathfrak{t} \frown s \\ p \frown (\mathfrak{t} \frown \dot{\smile}_{*} p) \\ p \frown s \\ a \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \not{y} s \end{array} \qquad (\gamma$$

(608): - - - - - - - - - -

$$\vdash \begin{array}{l} a \frown (p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ p \frown s \\ a \frown (p \smile p \frown (s \mathfrak{g} p)) \\ \not{y} s \end{array} \qquad (\delta$$

×

⊢ a⌢(p ⌣ p⌢(s𝔤p))
  p⌢s
  a⌢(p⌢(s𝔤p))
  ɟs (ε

(591):: - - - - - - - -

⊢ a⌢(p ⌣ p⌢(s𝔤p))
  e ⌣ ‡ a⌢s
  a⌢s
  p⌢s
  e⌢(sℐ(p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (ζ

⊢ 𝔞 ⌣ 𝔞⌢(p ⌣ p⌢(s𝔤p))
  e ⌣ ‡ 𝔞⌢s
  𝔞⌢s
  p⌢s
  e⌢(sℐ(p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (η

(590): - - - - - - - - - - -

⊢ e⌢(sℐ(p ⌣ p⌢(s𝔤p)))
  p⌢s
  e⌢(sℐ(p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (ϑ

(594): - - - - - - - - - - -

⊢ d⌢(sł(p ⌣ p⌢(s𝔤p)))
  e ⌣ ‡ d⌢s
  e⌢s
  p⌢s
  e⌢(sℐ(p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (ι

×

⊢ e⌢(sℐ(p⌢(s𝔤p)))
  e ⌣ ‡ d⌢s
  e⌢s
  p⌢s
  d⌢(sł(p ⌣ p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (κ

⊢ 𝔢 ⌣ 𝔢⌢(sℐ(p⌢(s𝔤p)))
  𝔢 ⌣ ‡ d⌢s
  𝔢⌢s
  p⌢s
  d⌢(sł(p ⌣ p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (λ

(601): - - - - - - - - - - -

⊢ d⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
  d⌢s
  d⌢(sℐ(p⌢(s𝔤p)))
  p⌢s
  d⌢(sł(p ⌣ p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (μ

(600, 630):: = = = = = = = =

⊢ d⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
  d⌢s
  d⌢(sł(p ⌣ p⌢(s𝔤p)))
  p⌢s (ν

(599):: - - - - - - - - -

⊢ d⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
  d⌢(sł(p ⌣ p⌢(s𝔤p)))
  p⌢s (633

§ 213. *Zerlegung.*

Mit den Sätzen (627) und (633) können wir nun den Plan des § 201 zu Ende führen und den in der Ueberschrift unseres Abschnittes *b*) angeführten Satz beweisen.

214. *Aufbau.*

585 ⊢ p⌢s
  c ⌣ p = c
  ɟs
  c⌢s

(599, 602):: = = =

⊢ p⌢s
  c⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
  c ⌣ p⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
  ɟs (α

(633, 600):: = = = = = = = =

⊢ p⌢s
c⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
c⌣p⌢(sł(p⌣p⌢(s𝔤p))) (β

(627):: - - - - - - - - - -

⊢ p⌢s
c⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
p⌢s (γ

×

⊢ c⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
p⌢s (δ

‿

⊢ 𝔯 𝔯⌢(sł(p⌢(s𝔤p)))
p⌢s (ε

(604): - - - - - - - - -

⊢ a⌢(p⌢(s𝔤p))
a⌢s
p⌢s
p⌢(sℑ(p⌢(s𝔤p)))
𝔭s (634

——•——

140 ⊢ p⌢(p⌢∸*p)

(609): ————————

⊢ a⌣∦p⌢s
a⌢(p⌢(s𝔤p)) (α

(589): - - - - - -

⊢ p⌣∦a⌢s
a⌢(p⌢(s𝔤p))
p⌢s
∤s (β

×

⊢ a⌢(p⌢(s𝔤p))
p⌣∦a⌢s
p⌢s
∤s (γ

(I): ————————

⊢ a⌢(p⌢(s𝔤p))
p⌣∦a⌢s
a⌢s
p⌢s
∤s (δ

‿

⊢ 𝔞 𝔞⌢(p⌢(s𝔤p))
p⌣∦𝔞⌢s
𝔞⌢s
p⌢s
∤s (ε

(590): - - - - - - -

⊢ p⌢(sℑ(p⌢(s𝔤p)))
p⌢s
∤s (ζ

(634): - - - - - -

⊢ a⌢(p⌢(s𝔤p))
a⌢s
p⌢s
∤s
𝔭s (η

(607)::- - - - - -

⊢ a⌢(p⌢(s𝔤p))
a⌢s
p⌢s
𝔭s (635

×

⊢ a⌢s
a⌢(p⌢(s𝔤p))
p⌢s
𝔭s (636

E. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l}\vdash q\smile p = p\smile q\text{‘}\\ \quad \mathfrak{p}\,s\\ \quad q\frown s\\ ,\quad p\frown s\end{array}$$

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l}\vdash p\smile \Finv q\frown s\text{‘}\\ \quad q\frown s\\ \quad \mathfrak{p}\,s\\ \quad p\frown s\\ ,\quad \Finv q\smile p\frown s\end{array}$$

§ 215. *Zerlegung.*

Wir fassen nun als Ziel das commutative Princip, zunächst innerhalb einer Positivklasse, ins Auge. Als Vorbereitung dazu beweisen wir den Satz, der in der Ueberschrift dieses Abschnittes *a* angeführt ist. Wir brauchen dazu den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash q\smile p\smile \Finv q\frown s\text{‘}\\ \quad q\frown s\\ \quad \mathfrak{p}\,s\\ ,\quad p\frown s\end{array} \qquad (\alpha$$

indem wir dann ‚p' durch ‚$\Finv q\smile p$' ersetzen. Zum Beweise unterscheiden wir die Fälle $p\smile \Finv q\frown s$, $p = q$, $q\smile \Finv p\frown s$, von denen die ersten beiden keine Schwierigkeiten bieten. Beim letzten Falle benutzen wir (635), indem wir zunächst den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash q\smile \Finv t\frown s\text{‘}\\ \quad p\frown(t\frown\dot{\smile}_{*}p)\\ \quad q\smile \Finv p\frown s\\ \quad q\smile \Finv(q\smile \Finv p)\frown s\\ \quad \mathfrak{y}\,s\\ ,\quad q\frown s\end{array} \qquad (\beta$$

mit (152) beweisen. Dazu brauchen wir den Satz

$$\begin{array}{l}\vdash q\smile \Finv a\frown s\text{‘}\\ \quad d\frown(a\frown_{*}p)\\ \quad p\frown(d\frown\dot{\smile}_{*}p)\\ \quad q\smile \Finv d\frown s\\ \quad q\smile \Finv(q\smile \Finv p)\frown s\\ \quad q\smile \Finv p\frown s\\ \quad \mathfrak{y}\,s\\ ,\quad q\frown s\end{array} \qquad (\gamma$$

der aus

$$\begin{array}{l}\vdash q\smile \Finv p\smile \Finv d\frown s\text{‘}\\ \quad q\smile \Finv d\frown s\\ \quad q\smile \Finv(q\smile \Finv p)\frown s\\ \quad q\smile \Finv p\frown s\\ \quad \mathfrak{y}\,s\\ ,\quad q\frown s\end{array} \qquad (\delta$$

mit Hülfe von (500) folgt. (δ) folgt seinerseits aus

$$\begin{array}{l}\vdash q\smile \Finv p\smile \Finv d\frown s\text{‘}\\ \quad q\smile \Finv d\frown s\\ \quad q\smile \Finv p\smile \Finv q\frown s\\ \quad \mathfrak{y}\,s\\ \quad q\frown s\\ ,\quad q\smile \Finv p\frown s\end{array} \qquad (\varepsilon$$

§ 216. *Aufbau.*

$$508 \quad \begin{array}{l}\vdash f(q\smile \Finv(d\smile p))\\ \quad f(q\smile \Finv p\smile \Finv d)\end{array}$$

(500): ――――――――

⊢ f(q ⌣ ¥ (p ⌣ d))
  f(q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ d)
  p ⌢ (d ⌢ ⌣̇ ∗ p)   (α

(493): ————————

⊢ f(q ⌣ ¥ a)
  f(q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ d)
  p ⌢ (d ⌢ ⌣̇ ∗ p)
  d ⌢ (a ⌢ ∗ p)   (β

———•———

491 ⊢ q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ q ⌣ q ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ q ⌣ (q ⌣ ¥ d) ⌢ s

(567): ————————

⊢ q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ q ⌣ (q ⌣ ¥ d) ⌢ s
  q ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌣ ¥ p ⌢ s   (γ

(529):: - - - - - - - - - -

⊢ q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ q ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌢ s   (δ

(588):: - - - - - - - -

⊢ q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ (q ⌣ ¥ p) ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌢ s
  ⨍ s
  q = q ⌣ ¥ p
  q ⌢ s   (ε

(IIIc): -·-·-·-·-·-·-·-·-

⊢ q ⌣ ¥ p ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ (q ⌣ ¥ p) ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌢ s   (ζ

(β): ————————

⊢ q ⌣ ¥ a ⌢ s
  d ⌢ (a ⌢ ∗ p)
  p ⌢ (d ⌢ ⌣̇ ∗ p)
  q ⌣ ¥ d ⌢ s
  q ⌣ ¥ (q ⌣ ¥ p) ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌢ s   (η

‿

⊢ 𝔡 𝔞 q ⌣ ¥ 𝔞 ⌢ s
  𝔡 ⌢ (𝔞 ⌢ ∗ p)
  p ⌢ (𝔡 ⌢ ⌣̇ ∗ p)
  q ⌣ ¥ 𝔡 ⌢ s
  q ⌣ ¥ (q ⌣ ¥ p) ⌢ s
  q ⌣ ¥ p ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌢ s   (ϑ

(152): - - - - - - - - - -

⊢ q ⌣ ¥ t ⌢ s
  p ⌢ (t ⌢ ⌣̇ ∗ p)
  q ⌣ ¥ p ⌢ s
  q ⌣ ¥ (q ⌣ ¥ p) ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌢ s   (ι

‿

⊢ 𝔱 q ⌣ ¥ 𝔱 ⌢ s
  p ⌢ (𝔱 ⌢ ⌣̇ ∗ p)
  q ⌣ ¥ p ⌢ s
  q ⌣ ¥ (q ⌣ ¥ p) ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌢ s   (κ

(608): - - - - - - - - - -

⊢ q ⌢ (p ⌢ (s ℨ p))
  q ⌣ ¥ p ⌢ s
  q ⌣ ¥ (q ⌣ ¥ p) ⌢ s
  ⨍ s
  q ⌢ s   (λ

×

⊢ q ⌣ 𝔓(q ⌣ 𝔓 p) ⌢ s
  q ⌣ 𝔓 p ⌢ s
  q ⌢ (p ⌢ (s ꞡ p))
  ɉ s
  q ⌢ s (μ

(635):: - - - - - - - -

⊢ q ⌣ 𝔓(q ⌣ 𝔓 p) ⌢ s
  q ⌣ 𝔓 p ⌢ s
  q ⌢ s
  p ⌢ s
  ꝑ s
  ɉ s (ν

(542): ————————

⊢ q ⌣ (p ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  q ⌣ 𝔓 p ⌢ s
  q ⌢ s
  p ⌢ s
  ꝑ s
  ɉ s (ξ

(588):: - - - - - - - -

⊢ q ⌣ (p ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  p ⌣ 𝔓 q ⌢ s
  q ⌢ s
  ɉ s
  p = q
  p ⌢ s
  ꝑ s (ο

——•——

IIIa ⊢ q ⌣ (p ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  q ⌣ (q ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  p = q

(564): ————————

⊢ q ⌣ (p ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  q ⌢ s
  p = q
  ɉ s (π

(ο): -·-·-·-·-·-·-

⊢ q ⌣ (p ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  p ⌣ 𝔓 q ⌢ s
  q ⌢ s
  ɉ s
  p ⌢ s
  ꝑ s (ρ

(529): -·-·-·-·-·-·-

⊢ q ⌣ (p ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  q ⌢ s
  ɉ s
  p ⌢ s
  ꝑ s (σ

(607):: - - - - - - - -

⊢ q ⌣ (p ⌣ 𝔓 q) ⌢ s
  q ⌢ s
  ꝑ s
  p ⌢ s (τ

(491): ————————

⊢ q ⌣ p ⌣ 𝔓 q ⌢ s
  q ⌢ s
  ꝑ s
  p ⌢ s (637

——•——

575 ⊢ p ⌣ 𝔓 q ⌢ s
  q ⌣ (𝔓 q ⌣ p) ⌣ 𝔓 q ⌢ s
  p ⌢ s
  ɉ s
  q ⌢ s

(637, 607):: = = = = = = =

⊢ p ⌣ 𝔓 q ⌢ s
  q ⌢ s
  ꝑ s
  p ⌢ s
  𝔓 q ⌣ p ⌢ s (638

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ \maltese p \smile q \frown s\text{'} \\ \quad\ \llcorner\ q \frown s \\ \quad\ \llcorner\ \mathfrak{P} s \\ \quad\ \llcorner\ p \frown s \\ ,\ \ \llcorner\ q \smile \maltese p \frown s \end{array}$$

§ 217. *Zerlegung.*

Als weitere Vorbereitung zur Begründung des commutativen Princips beweisen wir den Satz unserer Ueberschrift. Wir könnten es leicht mittels eines dem Satze (637) ähnlichen Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\ \maltese q \smile p \smile q \frown s\text{'} \\ \quad\ \llcorner\ q \frown s \\ \quad\ \llcorner\ \mathfrak{P} s \\ ,\ \ \llcorner\ p \frown s \end{array}$$

Wenn wir diesen ähnlich wie (637) beweisen wollten, müssten wir auch einen ähnlichen Uebergang wie von (δ) zu (ε) (§ 216) machen und dazu bedürften wir eines Satzes wie

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ \maltese p \smile q \frown s\text{'} & \\ \quad\ \llcorner\!\top\ \maltese q \smile p \frown s & \\ \quad\ \llcorner\ q \frown s & \\ \quad\ \llcorner\ \mathfrak{P} s & \\ \quad\ \llcorner\!\top\ p = q & \\ ,\ \ \llcorner\ p \frown s & (\alpha \end{array}$$

der mit (526) ähnlich abzuleiten wäre wie (588) mit (528). Bisher haben wir von (526) keinen Gebrauch gemacht, um zu versuchen, ob ohne ihn auszukommen sei. Wäre dies durchführbar, so könnten wir die siebente Zeile auf der linken Seite der Definitionsgleichung (Ψ) streichen. Aber hier ist die Stelle, wo sich ihre Unentbehrlichkeit zeigt. Wenigstens sind alle Versuche, ohne den Satz (526) fertig zu werden, immer an demselben Hindernisse gescheitert, dass wir nämlich von ,$\top \maltese A \smile B \frown \Sigma$' nicht zu ,$\maltese B \smile A \frown \Sigma$' gelangen können, wenn das Zusammenfallen von A und B ausgeschlossen ist.

Nachdem wir uns einmal zur Anwendung von (526) entschlossen haben, können wir unsern Beweis kürzer mit (638) führen, indem wir zeigen, dass weder ,$\maltese q \smile p \frown s$' noch ,$p = q$' verträglich mit ,$q \smile \maltese p \frown s$' ist. Daraus folgt dann mit (α) unser Satz. Die Unverträglichkeit von ,$p = q$' mit ,$q \smile \maltese p \frown s$' ergiebt sich aus (536). Die Unverträglichkeit von ,$\maltese q \smile p \frown s$' mit ,$q \smile \maltese p \frown s$' folgt aus (589) und (638). Wir beweisen zunächst (α) ähnlich wie (588).

§ 218. *Aufbau.*

$$\begin{array}{ll} \text{IIIh} & \vdash\!\!\top\ q \smile (\maltese q \smile p) = q \smile (q \smile \maltese q) \\ & \quad\ \llcorner\ \maltese q \smile p = q \smile \maltese q \end{array}$$

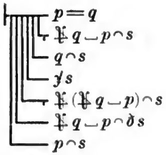
(575):: ——————————

$$\begin{array}{ll} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ p = q \smile (q \smile \maltese q) & \\ \quad\ \llcorner\ \maltese q \smile p = q \smile \maltese q & \\ \quad\ \llcorner\ p \frown s & \\ \quad\ \llcorner\ \mathfrak{P} s & \\ \quad\ \llcorner\ q \frown s & (\alpha \end{array}$$

(564): ——————————

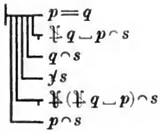
$$\begin{array}{ll} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!\top\ p = q & \\ \quad\ \llcorner\ \maltese q \smile p = q \smile \maltese q & \\ \quad\ \llcorner\ p \frown s & \\ \quad\ \llcorner\ \mathfrak{P} s & \\ \quad\ \llcorner\ q \frown s & (\beta \end{array}$$

(561):: – – – – – – – –



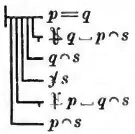
(γ

(526):: - - - - - - - -



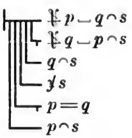
(δ

(544): ————————



(639

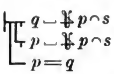
×



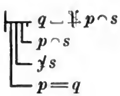
(640

———•———

IIIc

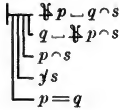


(536):: - - - - -



(α

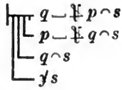
(Ia): - - - - -



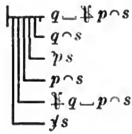
(β

———•———

589

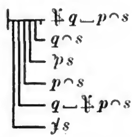


(638):: - - - - -



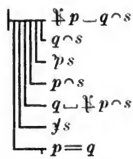
(γ

×



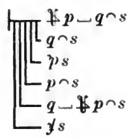
(δ

(640): - - - - - -



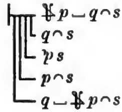
(ε

(β): -·-·-·-·-



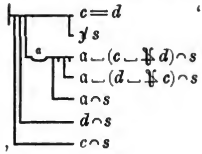
(ζ

(607):: - - - - -



(641

c) Beweis des Satzes

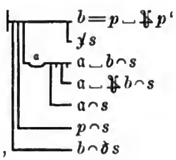


§ 219. *Zerlegung.*

Zum Beweise des commutativen Princips brauchen wir den in der Ueberschrift angeführten Satz, der in Worten genau nur schwerfällig wiederzugeben ist. Zur Erleichterung des Verständnisses mag folgende freie Uebersetzung erlaubt sein:

„Wenn in einem Grössengebiete die beiden Differenzen ($d \smile \mathfrak{F}\, c$) und ($c \smile \mathfrak{F}\, d$) der positiven Grössen c und d kleiner sind als jede positive Grösse, so fallen die Grössen c und d zusammen."

Wir führen diesen Satz auf folgenden zurück:

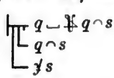


den wir in Worten ebenfalls frei so wiedergeben:

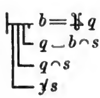
„Eine Grösse b ist eine Nullgrösse, wenn sowohl sie selbst als auch ihre Umkehrung $\mathfrak{F}\, b$ mit jeder positiven Grösse desselben Gebietes zusammengesetzt eine positive Grösse ergiebt."

Ich nenne hierbei zur Abkürzung *positive Grösse* eine Relation, die der Positivalklasse (s) angehört. Der Beweis ist mit (516) zu führen. Man zeigt, dass b weder positiv noch die Umkehrung einer Relation (q) sein kann, die positiv ist. Im ersten Falle ist $b \smile \mathfrak{F}\, b$, im zweiten $q \smile b$ nicht positiv.

§ 220. *Aufbau.*

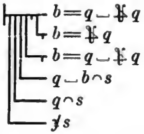
536 

(IIId): — — — — —



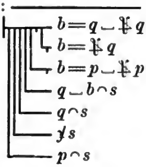
(α

(If): — — — — —



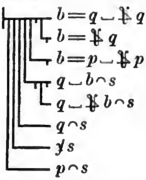
(β

(559): ————————



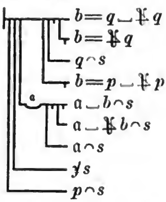
(γ

(Ib):: - - - - - - - -

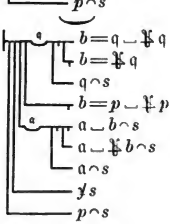


(δ

(IIa):: - - - - - - - - -

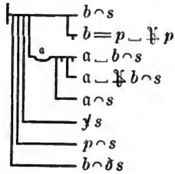


(ε



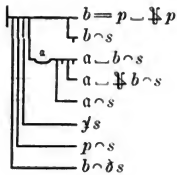
(ζ

(516): - - - - - - - -



(η

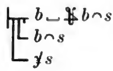
×



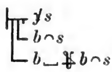
(ϑ

———•———

536

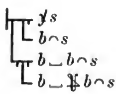


×



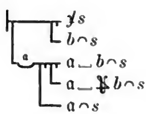
(ι

(Id):: - - - - - -



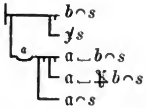
(κ

(IIa):: - - - - -



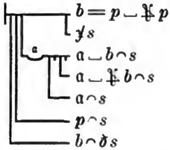
(λ

×



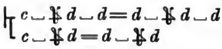
(μ

(ϑ): - - - - - - - -

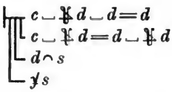


(642

IIIh

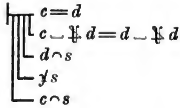


(567): ————————



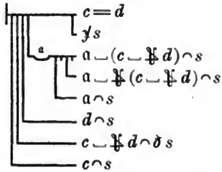
(α

(567): ————————



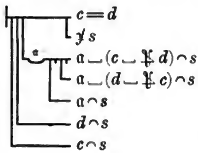
(643

(642):: - - - - - - - -



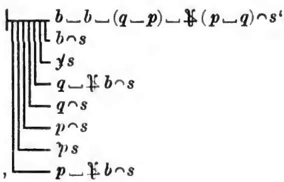
(α

(543,528):: = = = = = = = =



(644

d) Beweis des Satzes



§ 221. *Zerlegung.*

Mit (644) beweisen wir nun das commutative Gesetz, indem wir für „*d*" „*p* ⌣ *q*" und für „*c*" „*q* ⌣ *p*" setzen. Wir schließen *p* ⌣ *q* und *q* ⌣ *p* zwischen denselben Grenzen ein, die wir dann beliebig einander nähern.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine positive Grösse *b* an, (vergl. § 219), die kleiner als *p* und kleiner als *q* ist. Es giebt nun nach (635) ein Vielfaches von *b*, das nicht kleiner ist als *p*. Folglich giebt es auch nach (357) eines *o*, das zuerst nicht kleiner ist als *p* und das diesem unmittelbar vorhergehende *c* ist kleiner als *p*. So kann man *p* zwischen zwei Grössen *c* und *o* einschliessen, die um b verschieden sind. Ebenso kann man q zwischen den Grössen d und a einschliessen, die um b verschieden sind. Es wird also c kleiner als p und o nicht kleiner sein als p. Ebenso wird d kleiner und a nicht kleiner sein als q. Es fällt dabei $b \smile c$ mit o und $b \smile d$ mit a zusammen. Wir bedürfen dazu des Satzes

$$
\begin{array}{l}
\vdash \mathfrak{F}(d \smile c) \smile (q \smile p) \frown s' \\
\quad p \frown s \\
\quad q \frown s \\
\quad \mathfrak{y}\, s \\
\quad \mathfrak{p}\, s \\
\quad c \frown s \\
\quad p \smile \mathfrak{F}\, c \frown s \\
\quad d \frown s \\
,\quad q \smile \mathfrak{F}\, d \frown s
\end{array}
\qquad (\alpha
$$

Denselben Inhalt schreiben wir mit andern Buchstaben so, dass das Oberglied wird

$$,\!\!-\!\!\!-\, \mathfrak{F}(p \smile q) \smile (o \smile a) \frown s'$$

Aus beiden Formen erhalten wir nach (529) einen Satz mit dem Obergliede

$$,\!\!-\!\!\!-\, \mathfrak{F}(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\mathfrak{F}\, c \smile \mathfrak{F}\, d \smile (q \smile p)) \frown s'$$

Dieses verwandeln wir dann mit dem schon bewiesenen commutativen Gesetze (502) für Vielfache derselben Grösse in

$$,\!\!-\!\!\!-\, \mathfrak{F}(p \smile q) \smile (b \smile b \smile (q \smile p)) \frown s'$$

das dann mit (638) weiter in

$$,\!\!-\!\!\!-\, b \smile b \smile (q \smile p) \smile \mathfrak{F}(p \smile q) \frown s'$$

umgesetzt werden kann. In dem so gewonnenen Satze vertauschen wir ‚p' mit ‚q'. Es bleibt dann noch zu zeigen, dass b so gewählt werden kann, dass $b \smile b$ nicht grösser als eine beliebige kleine positive Grösse ist. Dann können wir (644) anwenden.

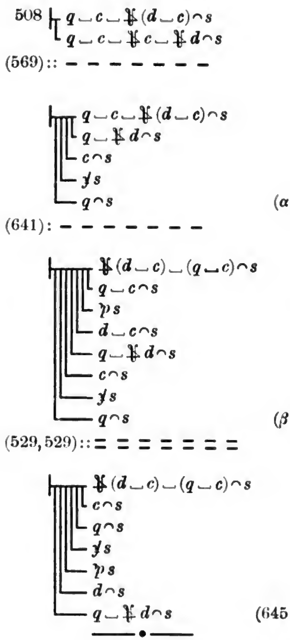
Wir leiten zunächst (α) aus den beiden Sätzen

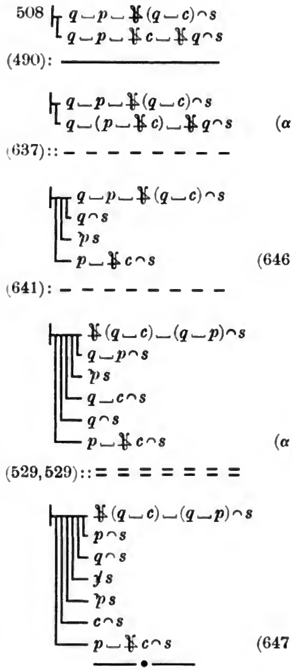
$$
\begin{array}{l}
\vdash \mathfrak{F}(d \smile c) \smile (q \smile c) \frown s' \\
\quad c \frown s \\
\quad q \frown s \\
\quad \mathfrak{y}\, s \\
\quad \mathfrak{p}\, s \\
\quad d \frown s \\
,\quad q \smile \mathfrak{F}\, d \frown s
\end{array}
\qquad (\beta
$$

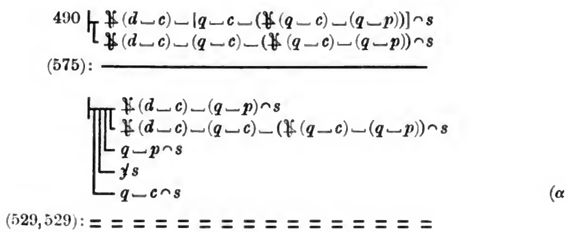
$$
\begin{array}{l}
\vdash \mathfrak{F}(q \smile c) \smile (q \smile p) \frown s' \\
\quad p \frown s \\
\quad q \frown s \\
\quad \mathfrak{y}\, s \\
\quad \mathfrak{p}\, s \\
\quad c \frown s \\
,\quad p \smile \mathfrak{F}\, c \frown s
\end{array}
\qquad (\gamma
$$

ab, die mit (641) zu beweisen sind.

§ 222. *Aufbau.*







$$\begin{array}{l}\vdash \ddagger(d\smile c)\smile(q\smile p)\frown s \\ \quad \ddagger(d\smile c)\smile(q\smile c)\smile(\ddagger(q\smile c)\smile(q\smile p))\frown s \\ \quad p\frown s \\ \quad q\frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad c\frown s \end{array} \qquad (\beta$$

(529) :: -

$$\begin{array}{l}\vdash \ddagger(d\smile c)\smile(q\smile p)\frown s \\ \quad \ddagger(q\smile c)\smile(q\smile p)\frown s \\ \quad \ddagger(d\smile c)\smile(q\smile c)\frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad p\frown s \\ \quad q\frown s \\ \quad c\frown s \end{array} \qquad (\gamma$$

(645, 647) :: = = = = = = = =

$$\begin{array}{l}\vdash \ddagger(d\smile c)\smile(q\smile p)\frown s \\ \quad p\frown s \\ \quad q\frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad \not{p}\, s \\ \quad c\frown s \\ \quad p\smile\ddagger c\frown s \\ \quad d\frown s \\ \quad q\smile\ddagger d\frown s \end{array} \qquad (648$$

(505): ——————————

$$\begin{array}{l}\vdash \ddagger c\smile\ddagger d\smile(q\smile p)\frown s \\ \quad p\frown s \\ \quad q\frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad \not{p}\, s \\ \quad c\frown s \\ \quad p\smile\ddagger c\frown s \\ \quad d\frown s \\ \quad q\smile\ddagger d\frown s \end{array} \qquad (649$$

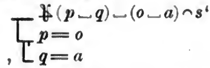
§ 223. *Zerlegung.*

Wie wir uns im § 221 vorgenommen haben, setzen wir nun in (648) für ‚d' ‚p', für ‚c' ‚q', für ‚q' ‚o' und für ‚p' ‚a' ein. Wir erhalten dann darin die Unterglieder ‚$—o\smile\ddagger p\frown s$' und ‚$—a\smile\ddagger q\frown s$'. Für diese sind ‚$\top p\smile\ddagger o\frown s$', ‚$\top p=o$', ‚$\top q\smile\ddagger a\frown s$', ‚$\top q=a$' einzuführen, weil o das erste Vielfache von b sein soll, das nicht kleiner als p ist, und a das erste, das nicht kleiner als q ist. Statt ‚$\top p=o$' und ‚$\top q=a$' wird man das Unterglied ‚$\begin{array}{l}\top p=o \\ \;\; q=a\end{array}$' hineinbringen können.

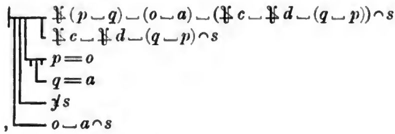
Nach (529) haben wir

$$\begin{array}{l}\vdash \ddagger(p\smile q)\smile(o\smile a)\smile(\ddagger c\smile\ddagger d\smile(q\smile p))\frown s \\ \quad \ddagger c\smile\ddagger d\smile(q\smile p)\frown s \\ \quad \ddagger(p\smile q)\smile(o\smile a)\frown s \\ \quad \not{y}\, s \end{array}$$

Hier wird für das vorletzte Unterglied



einzuführen sein. Um, wie oben gesagt, das Unterglied ‚$\top p = o$, $q = a$' statt ‚$\top p = o$' und ‚$\top q = a$' in den Satz mit dem Obergliede ‚— (p ⌣ q) ⌣ (o ⌣ a)' hineinzubringen, brauchen wir Sätze mit diesem Obergliede und theils mit den Untergliedern ‚$\top p = o$' und ‚— $q = a$', theils mit den Untergliedern ‚$\top q = a$' und ‚— $p = o$', von denen der erste aus (645), der zweite aus (647) folgt. Zur oben angegebenen Umformung von (529) brauchen wir den Satz

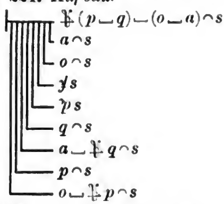


(α

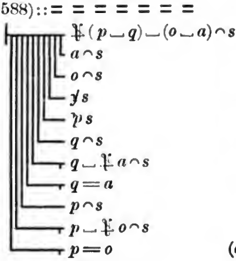
der mit (581) zu beweisen ist.

§ 224. *Aufbau.*

648

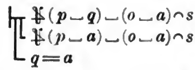


(588, 588):: = = = = = = = =

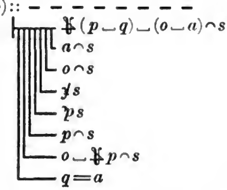


(α

IIIa

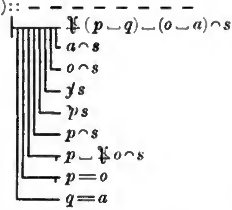


(645):: - - - - - - - - -



(β

(588):: - - - - - - - - -



(γ

(I):: - - - - - - - - - -

Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
a ⌢ s
o ⌢ s
ɟs
ɼs
p ⌢ s
p ‿ Ɏ o ⌢ s
q = a
p = o
q = a (ι

———•———

IIIa
Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
Ɏ(o ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
p = o

(647) :: - - - - - - - -

Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
a ⌢ s
o ⌢ s
ɟs
ɼs
q ⌢ s
a ‿ Ɏ q ⌢ s
p = o (ε

(588) :: - - - - - - - - - - -

Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
a ⌢ s
o ⌢ s
ɟs
ɼs
q ⌢ s
q ‿ Ɏ a ⌢ s
q = a
p = o (ζ

(α): -·-·-·-·-·-·-·-·-·-

Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
a ⌢ s
o ⌢ s
ɟs
ɼs
q ⌢ s
q ‿ Ɏ a ⌢ s
q = a
p ⌢ s
p ‿ Ɏ o ⌢ s (η

(δ): -·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-

Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
p = o
q = a
a ⌢ s
o ⌢ s
ɟs
ɼs
q ⌢ s
q ‿ Ɏ a ⌢ s
p ⌢ s
p ‿ Ɏ o ⌢ s (650

———•———

529
Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ‿ (Ɏ c ‿ Ɏ d ‿ (q ‿ p)) ⌢ s
Ɏ c ‿ Ɏ d ‿ (q ‿ p) ⌢ s
Ɏ(p ‿ q) ‿ (o ‿ a) ⌢ s
ɟs

(I) :: - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad \yen c \smile \yen d \smile (q \smile p) \frown s \\ \quad p = o \\ \quad q = a \\ \quad \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \frown s \\ \quad p = o \\ \quad q = a \\ \quad \rlap{/}\jmath\, s \end{array} \qquad (\alpha$$

——•——

$$\text{IIIa} \quad \begin{array}{l} \vdash \yen(p \smile a) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad \yen(o \smile a) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad p = o \end{array}$$

(IIIa): ————————————————————

$$\begin{array}{l} \vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad \yen(o \smile a) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad p = o \\ \quad q = a \end{array} \qquad (\beta$$

(Ib, Id):: = = = = = = = = = = = = = = = = =

$$\begin{array}{l} \vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad \yen(o \smile a) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad p = o \\ \quad q = a \end{array} \qquad (\gamma$$

(581): ————————————————————

$$\begin{array}{l} \vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad \yen c \smile \yen d \smile (q \smile p) \frown s \\ \quad p = o \\ \quad q = a \\ \quad \rlap{/}\jmath\, s \\ \quad o \smile a \frown s \end{array} \qquad (\delta$$

(529):: - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s \\ \quad \yen c \smile \yen d \smile (q \smile p) \frown s \\ \quad p = o \\ \quad q = a \\ \quad \rlap{/}\jmath\, s \\ \quad a \frown s \\ \quad o \frown s \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(α): -·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-·-

$\vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s$
$\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p) \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$a \frown s$
$o \frown s$
$\yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \frown s$
$p = o$
$q = a$ (ζ

(649, 650) :: = = = = = = = = = = = = = = = =

$\vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$\mathfrak{p}\, s$
$c \frown s$
$p \smile \yen c \frown s$
$d \frown s$
$q \smile \yen d \frown s$
$a \frown s$
$o \frown s$
$q \smile \yen a \frown s$
$p \smile \yen o \frown s$ (η

(623, 623) :: = = = = = = = = = = = = = = = = =

$\vdash \yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen c \smile \yen d \smile (q \smile p)) \frown s$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\mathfrak{f}\, s$
$\mathfrak{p}\, s$
$c \frown s$
$p \smile \yen c \frown s$
$d \frown s$
$q \smile \yen d \frown s$
$b \frown s$
$b \frown (a \frown \grave{\iota}_{*} b)$
$b \frown (o \frown \grave{\iota}_{*} b)$
$q \smile \yen a \frown s$
$p \smile \yen o \frown s$ (651

§ 225. *Zerlegung.*

Gemäss unseres Planes, des § 221, beweisen wir nun den Satz

$$\begin{array}{l} \vdash b \smile b = o \smile a \smile (\ddagger c \smile \ddagger d) \\ \quad c \frown (o \frown_* b) \\ \quad c \frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad b \frown s \\ \quad b \frown (a \frown \dot{\smile}_* b) \\ \quad d \frown (a \frown_* b) \\ \quad d \frown s \\ \quad b \frown (o \frown \dot{\smile}_* b) \end{array} \qquad (\alpha$$

den wir aus dem Satze

$$\begin{array}{l} \vdash b = o \smile \ddagger c \\ \quad b \smile c = o \\ \quad c \frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad b \frown s \end{array} \qquad (\beta$$

und (502) ableiten. (β) folgt aus (570).

§ 226. *Aufbau.*

$$\text{IIIh} \quad \begin{array}{l} \vdash b \smile c \smile \ddagger c = o \smile \ddagger c \\ \quad b \smile c = o \end{array}$$

(570): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash b = o \smile \ddagger c \\ \quad b \smile c = o \\ \quad c \frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad b \frown s \end{array} \qquad (652$$

(492):: - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash b = o \smile \ddagger c \\ \quad c \frown (o \frown_* b) \\ \quad c \frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad b \frown s \end{array} \qquad (653$$

(IIIa): - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash f(b) \\ \quad f(o \smile \ddagger c) \\ \quad c \frown (o \frown_* b) \\ \quad c \frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad b \frown s \end{array} \qquad (654$$

———•———

$$489 \quad \vdash a \smile (o \smile \ddagger c) = a \smile o \smile \ddagger c$$

(IIIh): ———————

$$\vdash a \smile (o \smile \ddagger c) \smile \ddagger d = a \smile o \smile \ddagger c \smile \ddagger d \qquad (\alpha$$

(490): ———————

$$\vdash a \smile (o \smile \ddagger c) \smile \ddagger d = a \smile o \smile (\ddagger c \smile \ddagger d) \qquad (\beta$$

(654): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash a \smile b \smile \ddagger d = a \smile o \smile (\ddagger c \smile \ddagger d) \\ \quad c \frown (o \frown_* b) \\ \quad c \frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad b \frown s \end{array} \qquad (\gamma$$

(500): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash b \smile a \smile \ddagger d = a \smile o \smile (\ddagger c \smile \ddagger d) \\ \quad c \frown (o \frown_* b) \\ \quad c \frown s \\ \quad \not{y}\, s \\ \quad b \frown s \\ \quad b \frown (a \frown \dot{\smile}_* b) \end{array} \qquad (\delta$$

(490): ———————

$\vdash b \smile (a \smile \yen\, d) = a \smile o \smile (\yen\, c \smile \yen\, d)$
$c \frown (o \frown_{*} b)$
$c \frown s$
$\not{I}\, s$
$b \frown s$
$b \frown (a \frown \dot{\smile}_{*} b)$ (ε

(654): ———————————————

$\vdash b \smile b = a \smile o \smile (\yen\, c \smile \yen\, d)$
$c \frown (o \frown_{*} b)$
$c \frown s$
$\not{I}\, s$
$b \frown s$
$b \frown (a \frown \dot{\smile}_{*} b)$
$d \frown (a \frown_{*} b)$
$d \frown s$ (ζ

(502):: ———————————————

$\vdash b \smile b = o \smile a \smile (\yen\, c \smile \yen\, d)$
$c \frown (o \frown_{*} b)$
$c \frown s$
$\not{I}\, s$
$b \frown s$
$b \frown (a \frown \dot{\smile}_{*} b)$
$d \frown (a \frown_{*} b)$
$d \frown s$
$b \frown (o \frown \dot{\smile}_{*} b)$ (η

(IIIa): - - - - - - - - - - - -

$\vdash \yen(p \smile q) \smile (b \smile b \smile (q \smile p)) \frown s$
$\yen(p \smile q) \smile (o \smile a \smile (\yen\, c \smile \yen\, d) \smile (q \smile p)) \frown s$
$c \frown (o \frown_{*} b)$
$c \frown s$
$\not{I}\, s$
$b \frown s$
$b \frown (a \frown \dot{\smile}_{*} b)$
$d \frown (a \frown_{*} b)$
$d \frown s$
$b \frown (o \frown \dot{\smile}_{*} b)$ (ϑ

———•———

490 $\vdash \yen(p \smile q) \smile [o \smile a \smile (\yen\, c \smile \yen\, d \smile (q \smile p))] \frown s$
$\yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen\, c \smile \yen\, d \smile (q \smile p)) \frown s$

(491): ———————————————

$\vdash \yen(p \smile q) \smile [o \smile a \smile (\yen\, c \smile \yen\, d) \smile (q \smile p)] \frown s$
$\yen(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\yen\, c \smile \yen\, d \smile (q \smile p)) \frown s$ (ι

(ϑ): - - - - - - - - - - - - - - -

$\vdash$ $\nmid(p \smile q) \smile (b \smile b \smile (q \smile p)) \frown s$
$\nmid(p \smile q) \smile (o \smile a) \smile (\nmid c \smile \nmid d \smile (q \smile p)) \frown s$
$c \frown (o \frown_* b)$
$c \frown s$
$\nmid s$
$b \frown s$
$b \frown (a \frown \breve{\smile}_* b)$
$d \frown (a \frown_* b)$
$d \frown s$
$b \frown (o \frown \breve{\smile}_* b)$ (κ

(651) :: - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\vdash$ $\nmid(p \smile q) \smile (b \smile b \smile (q \smile p)) \frown s$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\nmid s$
γs
$c \frown s$
$p \smile \nmid c \frown s$
$d \frown s$
$q \smile \nmid d \frown s$
$b \frown s$
$b \frown (a \frown \breve{\smile}_* b)$
$b \frown (o \frown \breve{\smile}_* b)$
$q \smile \nmid a \frown s$
$p \smile \nmid o \frown s$
$c \frown (o \frown_* b)$
$d \frown (a \frown_* b)$ (λ

(623, 623) :: = = = = = = = = = = = = = = = =

$\vdash$ $\nmid(p \smile q) \smile (b \smile b \smile (q \smile p)) \frown s$
$p \frown s$
$q \frown s$
$\nmid s$
γs
$b \frown s$
$b \frown (c \frown \breve{\smile}_* b)$
$p \smile \nmid c \frown s$
$b \frown (d \frown \breve{\smile}_* b)$
$q \smile \nmid d \frown s$
$b \frown (a \frown \breve{\smile}_* b)$
$b \frown (o \frown \breve{\smile}_* b)$
$q \smile \nmid a \frown s$
$p \smile \nmid o \frown s$
$c \frown (o \frown_* b)$
$d \frown (a \frown_* b)$ (μ

529 ⊢ $b \smile b \smile (q \smile p) \frown s$
$q \smile p \frown s$
$b \smile b \frown s$
ɏ s

(529, 529) :: = = = = = =

⊢ $b \smile b \smile (q \smile p) \frown s$
$p \frown s$
$q \frown s$
ɏ s
$b \frown s$ (ν

⊢ $b \smile b \smile (q \smile p) \smile$ ¥ $(p \smile q) \frown s$
$p \smile q \frown s$
ꝓ s
$p \frown s$
$q \frown s$
ɏ s
$b \frown s$
¥ $(p \smile q) \smile (b \smile b \smile (q \smile p)) \frown s$

(μ, 529) :: = = = = = = = = = = (ξ

(638) : – – – – – – – –

⊢ $b \smile b \smile (q \smile p) \smile$ ¥ $(p \smile q) \frown s$
$q \frown s$
$p \frown s$
ɏ s
ꝓ s
$b \frown s$
$b \frown (c \frown \smile_{*} b)$
$p \smile$ ¥ $c \frown s$
$b \frown (d \frown \smile_{*} b)$
$q \smile$ ¥ $d \frown s$
$b \frown (a \frown \smile_{*} b)$
$b \frown (o \frown \smile_{*} b)$
$q \smile$ ¥ $a \frown s$
$p \smile$ ¥ $o \frown s$
$c \frown (o \frown_{*} b)$
$d \frown (a \frown_{*} b)$ (ο

×

⊢ $p \smile$ ¥ $c \frown s$
$b \frown (c \frown \smile_{*} b)$
$c \frown (o \frown_{*} b)$
$q \frown s$
$p \frown s$
ɏ s
ꝓ s
$b \frown s$
$b \smile b \smile (q \smile p) \smile$ ¥ $(p \smile q) \frown s$
$b \frown (d \frown \smile_{*} b)$
$q \smile$ ¥ $d \frown s$
$b \frown (a \frown \smile_{*} b)$
$b \frown (o \frown \smile_{*} b)$
$q \smile$ ¥ $a \frown s$
$p \smile$ ¥ $o \frown s$
$d \frown (a \frown_{*} b)$ (π

$$p \smile \mathfrak{P}\,\mathfrak{r} \frown s$$
$$b \frown (\mathfrak{r} \frown \grave{\smile}_{*} b)$$
$$\mathfrak{r} \frown (o \frown_{*} b)$$
$$q \frown s$$
$$p \frown s$$
$$\mathfrak{J}\, s$$
$$\mathfrak{p}\, s$$
$$b \frown s$$
$$b \smile b \smile (q \smile p) \smile \mathfrak{P}\,(p \smile q) \frown s$$
$$b \frown (d \frown \grave{\smile}_{*} b)$$
$$q \smile \mathfrak{P}\, d \frown s$$
$$b \frown (a \frown \grave{\smile}_{*} b)$$
$$b \frown (o \frown \grave{\smile}_{*} b)$$
$$q \smile \mathfrak{P}\, a \frown s$$
$$p \smile \mathfrak{P}\, o \frown s$$
$$d \frown (a \frown_{*} b) \qquad (655$$

§ 227. *Zerlegung.*

Die letzten Umformungen dienen zur Wegschaffung des „c". Ebenso muss dann auch „d" entfernt werden. Wir brauchen dazu den Satz

$$p \smile \mathfrak{P}\, b \frown s$$
$$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(_{\top} p \smile \mathfrak{P}\, \varepsilon \frown s) \grave{\vartheta}_{*} b))$$
$$p \smile \mathfrak{P}\, \mathfrak{r} \frown s$$
$$b \frown (\mathfrak{r} \frown \grave{\smile}_{*} b)$$
$$\mathfrak{r} \frown (o \frown_{*} b) \qquad (\alpha$$

der auf den Satz

$$o = b$$
$$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\vartheta} q))$$
$$f(\mathfrak{r})$$
$$b \frown (\mathfrak{r} \frown \grave{\smile} q)$$
$$\mathfrak{r} \frown (o \frown q) \qquad (\beta$$

zurückzuführen ist. Zum Beweise von (β) bedürfen wir des Satzes

$$b \frown (o \frown (v \grave{\vartheta} q))$$
$$r \frown (o \frown q)$$
$$b \frown (r \frown \grave{\smile} q)$$
$$r \frown v \qquad (\gamma$$

der aus (404) mit (5) und (197) folgt. Für „v" setzen wir dann „$\grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$" und wenden (142) an.

§ 228. *Aufbau.*

404
$$b \frown (o \frown (v \doteq \grave{\smile} q \smile \grave{\perp} q))$$
$$b \frown (o \frown (v \grave{\vartheta} q))$$

$$\times$$

$$b \frown (o \frown (v \grave{\vartheta} q))$$
$$b \frown (o \frown (v \doteq \grave{\smile} q \smile \grave{\perp} q)) \qquad (\alpha$$

(5) :: - - - - - - - - -

$$b \frown (o \frown (v \grave{\vartheta} q))$$
$$r \frown (o \frown \grave{\perp} q)$$
$$b \frown (r \frown (v \doteq \grave{\smile} q)) \qquad (\beta$$

(197) :: - - - - - -

$$b \frown (o \frown (v \grave{\vartheta} q))$$
$$r \frown (o \frown \grave{\perp} q)$$
$$b \frown (r \frown \grave{\smile} q)$$
$$r \frown v \qquad (656$$

(131) :: - - - - - -

$$b \frown (o \frown (v \grave{\vartheta} q))$$
$$r \frown (o \frown q)$$
$$b \frown (r \frown \grave{\smile} q)$$
$$r \frown v \qquad (657$$

77 $\vdash r \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$
$f(r)$

(657): – – – –

$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$
$r \frown (o \frown q)$
$b \frown (r \frown \dot{\smile} q)$
$f(r)$ (658

(IIa):: – – – – – – – –

$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$
$r \frown (o \frown q)$
$b \frown (r \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{r}$
$f(\mathfrak{r})$
$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{r} \frown (o \frown q)$ (α

×

$b \frown (r \frown \dot{\smile} q)$
$r \frown (o \frown q)$
$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$
$\mathfrak{r}$
$f(\mathfrak{r})$
$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{r} \frown (o \frown q)$ (β

‿

$\mathfrak{e}$
$b \frown (\mathfrak{e} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{e} \frown (o \frown q)$
$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$
$\mathfrak{r}$
$f(\mathfrak{r})$
$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{r} \frown (o \frown q)$ (γ

(142): – – – – – – – – –

$b \frown (o \frown \dot{\smile} q)$
$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$
$\mathfrak{r}$
$f(\mathfrak{r})$
$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{r} \frown (o \frown q)$ (δ

(130): – – – – – – – – – –

$o = b$
$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$
$\mathfrak{r}$
$f(\mathfrak{r})$
$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{r} \frown (o \frown q)$
$b \frown (o \frown \dot{\smile} q)$ (ε

(401):: – – – – – – – – – –

$o = b$
$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$
$\mathfrak{r}$
$f(\mathfrak{r})$
$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile} q)$
$\mathfrak{r} \frown (o \frown q)$ (659

———•———

82 $\vdash f(o)$
$o \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$

(402):: – – –

$\vdash f(o)$
$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \grave{\alpha} q))$ (660

———•———

IIIc $\vdash p \smile \rangle b \frown s$
$p \smile \rangle o \frown s$
$o = b$

(659, 660):: = = =

$p \smile \rangle b \frown s$
$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(\top p \smile \rangle \varepsilon \frown s) \grave{\alpha}\, {}_{*} b))$
$\mathfrak{r}$
$p \smile \rangle \mathfrak{r} \frown s$
$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile}_{*} b)$
$\mathfrak{r} \frown (o \frown_{*} b)$ (661

(655):: – – – – – – – – – – – – –

$$
\begin{array}{ll}
\vdash & p \smile \ddagger\, b \frown s \\
& b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(\,_{\top} p \smile \ddagger\, \varepsilon \frown s)\,\grave{\mathfrak{d}}_{*}\, b)) \\
& q \frown s \\
& p \frown s \\
& \mathfrak{f}\, s \\
& \mathfrak{p}\, s \\
& b \frown s \\
& b \smile b \smile (q \smile p) \smile \ddagger\, (p \smile q) \frown s \\
& b \frown (d \frown \grave{\smile}_{*}\, b) \\
& q \smile \ddagger\, d \frown s \\
& b \frown (a \frown \grave{\smile}_{*}\, b) \\
& b \frown (o \frown \grave{\smile}_{*}\, b) \\
& q \smile \ddagger\, a \frown s \\
& p \smile \ddagger\, o \frown s \\
& d \frown (a \frown_{*}\, b)
\end{array}
\qquad (\alpha
$$

(660, 401) :: = = = = = = = = = = = = = = = =

$$
\begin{array}{ll}
\vdash & p \smile \ddagger\, b \frown s \\
& b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(\,_{\top} p \smile \ddagger\, \varepsilon \frown s)\,\grave{\mathfrak{d}}_{*}\, b)) \\
& q \frown s \\
& p \frown s \\
& \mathfrak{f}\, s \\
& \mathfrak{p}\, s \\
& b \frown s \\
& b \smile b \smile (q \smile p) \smile \ddagger\, (p \smile q) \frown s \\
& b \frown (d \frown \grave{\smile}_{*}\, b) \\
& q \smile \ddagger\, d \frown s \\
& b \frown (a \frown \grave{\smile}_{*}\, b) \\
& q \smile \ddagger\, a \frown s \\
& d \frown (a \frown_{*}\, b)
\end{array}
\qquad (\beta
$$

$$\times$$

$$
\begin{array}{ll}
\vdash & q \smile \ddagger\, d \frown s \\
& b \frown (d \frown \grave{\smile}_{*}\, b) \\
& d \frown (a \frown_{*}\, b) \\
& b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(\,_{\top} p \smile \ddagger\, \varepsilon \frown s)\,\grave{\mathfrak{d}}_{*}\, b)) \\
& q \frown s \\
& p \frown s \\
& \mathfrak{f}\, s \\
& \mathfrak{p}\, s \\
& b \frown s \\
& b \smile b \smile (q \smile p) \smile \ddagger\, (p \smile q) \frown s \\
& p \smile \ddagger\, b \frown s \\
& b \frown (a \frown \grave{\smile}_{*}\, b) \\
& q \smile \ddagger\, \underbrace{a \frown s}
\end{array}
\qquad (\gamma
$$

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{r}}\; q \smile \nparallel \mathfrak{r} \frown s$$
$$b \frown (\mathfrak{r} \frown \dot{\smile}_{*}\, b)$$
$$\mathfrak{r} \frown (a \frown_{*} b)$$
$$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(\top p \smile \nparallel \varepsilon \frown s) \eth_{*}\, b))$$
$$q \frown s$$
$$p \frown s$$
$$\mathfrak{q}\, s$$
$$\mathfrak{p}\, s$$
$$b \frown s$$
$$b \smile b \smile (q \smile p) \smile \nparallel (p \smile q) \frown s$$
$$p \smile \nparallel b \frown s$$
$$b \frown (a \frown \dot{\smile}_{*}\, b)$$
$$q \smile \nparallel a \frown s \qquad (\delta$$

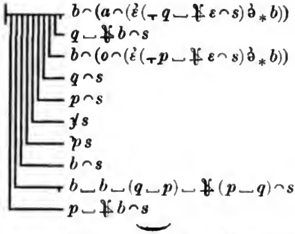
(661): - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\vdash q \smile \nparallel b \frown s$$
$$b \frown (a \frown (\grave{\varepsilon}(\top q \smile \nparallel \varepsilon \frown s) \eth_{*}\, b))$$
$$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(\top p \smile \nparallel \varepsilon \frown s) \eth_{*}\, b))$$
$$q \frown s$$
$$p \frown s$$
$$\mathfrak{q}\, s$$
$$\mathfrak{p}\, s$$
$$b \frown s$$
$$b \smile b \smile (q \smile p) \smile \nparallel (p \smile q) \frown s$$
$$p \smile \nparallel b \frown s$$
$$b \frown (a \frown \dot{\smile}_{*}\, b)$$
$$q \smile \nparallel a \frown s \qquad (\varepsilon$$

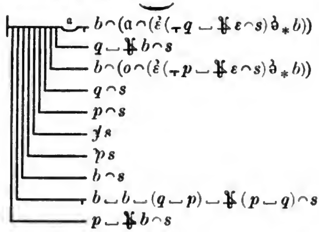
(660, 401):: = = = = = = = = = = = = = = =

$$\vdash q \smile \nparallel b \frown s$$
$$b \frown (a \frown (\grave{\varepsilon}(\top q \smile \nparallel \varepsilon \frown s) \eth_{*}\, b))$$
$$b \frown (o \frown (\grave{\varepsilon}(\top p \smile \nparallel \varepsilon \frown s) \eth_{*}\, b))$$
$$q \frown s$$
$$p \frown s$$
$$\mathfrak{q}\, s$$
$$\mathfrak{p}\, s$$
$$b \frown s$$
$$b \smile b \smile (q \smile p) \smile \nparallel (p \smile q) \frown s$$
$$p \smile \nparallel b \frown s \qquad (\zeta$$

×



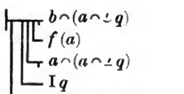
(η



(662

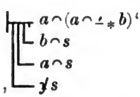
§ 229. *Zerlegung.*

Wir ersetzen nun das Oberglied in (662) durch $_{\mathsf{T}}q \frown (b \frown (s \,\mathfrak{g}\, b))$', das dann seinerseits mit (636) wegzuschaffen sein wird. Wir brauchen dazu den Satz



(α

den wir mit (357) beweisen. Bei der Anwendung auf unsern Fall, wo statt ‚q' ‚$_{*}b$' zu setzen ist, haben wir dann ausser (497) noch den Satz

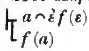


(β

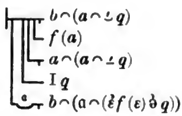
nöthig, den wir mit (123) beweisen.

§ 230. *Aufbau.*

77

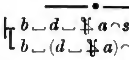


(357): — — — —

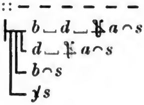


(663

491

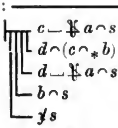


(529):: — — — — — —



(α

(493): ————————



(β

𝔡 𝔞 a ⌣ ∤ a⌢s
𝔡⌢(𝔞⌢$_*$b)
𝔡 ⌣ ∤ a⌢s
b⌢s
∤s (γ

(123): - - - - - - - -

a ⌣ ∤ a⌢s
𝔞 𝔞 ⌣ ∤ a⌢s
a⌢(𝔞⌢$_*$b)
b⌢s
∤s
a⌢(a⌢⊥$_*$b) (δ

———•———

493 c ⌣ ∤ a⌢s
b ⌣ a ⌣ ∤ a⌢s
a⌢(c⌢$_*$b)

(570): ————————

c ⌣ ∤ a⌢s
a⌢(c⌢$_*$b)
b⌢s
a⌢s
∤s (ε

𝔞 𝔞 ⌣ ∤ a⌢s
a⌢(𝔞⌢$_*$b)
b⌢s
a⌢s
∤s (ζ

(δ): - - - - - -

a ⌣ ∤ a⌢s
b⌢s
a⌢s
∤s
a⌢(a⌢⊥$_*$b) (η

×

a⌢(a⌢⊥$_*$b)
b⌢s
a⌢s
∤s
a ⌣ ∤ a⌢s (ϑ

(536): - - - - - -

a⌢(a⌢⊥$_*$b)
b⌢s
a⌢s
∤s (664

(663): - - - - - -

b⌢(a⌢⊥$_*$b)
q ⌣ ∤ a⌢s
b⌢s
a⌢s
∤s
I$_*$b
𝔞 b⌢(𝔞⌢(ἐ(⊤q ⌣ ∤ ε⌢s)ɘ$_*$b)) (α

×

q ⌣ ∤ a⌢s
b⌢(a⌢⊥$_*$b)
b⌢s
a⌢s
∤s
I$_*$b
𝔞 b⌢(𝔞⌢(ἐ(⊤q ⌣ ∤ ε⌢s)ɘ$_*$b)) (β

(623, 497):: ========

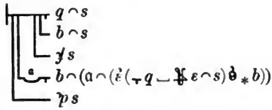
q ⌣ ∤ a⌢s
b⌢(a⌢⊥$_*$b)
b⌢s
∤s
𝔞 b⌢(𝔞⌢(ἐ(⊤q ⌣ ∤ ε⌢s)ɘ$_*$b)) (γ

𝔱 q ⌣ ∤ 𝔱⌢s
b⌢(𝔱⌢⊥$_*$b)
b⌢s
∤s
𝔞 b⌢(𝔞⌢(ἐ(⊤q ⌣ ∤ ε⌢s)ɘ$_*$b))

(608): - - - - - - - - - - (δ

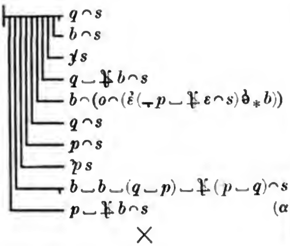
q⌢(b⌢(s𝔤b))
b⌢s
∤s
𝔞 b⌢(𝔞⌢(ἐ(⊤q ⌣ ∤ ε⌢s)ɘ$_*$b)) (ε

(636): - - - - - - - - - -

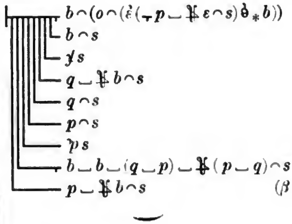


(665

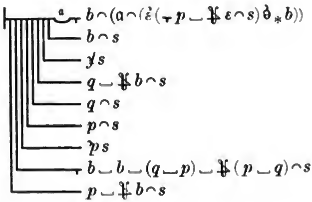
(662):: - - - - - - - - - - - - - -



(α

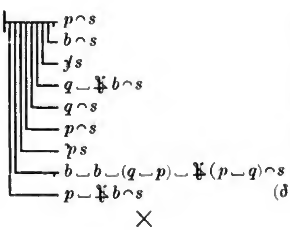


(β

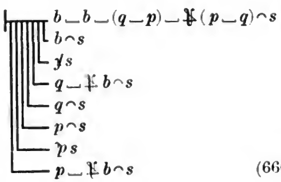


(γ

(665): - - - - - - - - - - - - - - - -

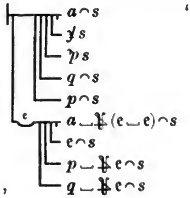


(δ



(666

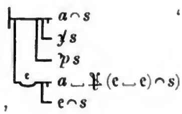
e) Beweis des Satzes



und Ende des Abschnittes *E*.

§ 231. *Zerlegung.*

Es wird nun noch unsere Aufgabe sein, zu beweisen, dass es in der Positivklasse *s* immer ein *b* giebt, sodass *b*⌣*b* kleiner ist als *a*, falls *a* der Positivklasse *s* angehört. Danach wird dann auch zu beweisen sein, dass es ein solches *b* giebt, welches zugleich kleiner als *p* und als *q* ist. Wir leiten demnach zunächst den Satz

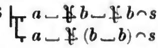


ab. Hierzu dient uns der Satz (606), der besagt, dass es in einer Positivklasse immer eine Relation *b* giebt, die kleiner ist als eine gegebene Relation in dieser Positivklasse. Wir unterscheiden die Fälle:

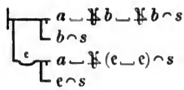
1. *b* ist kleiner als *a*⌣♄*b*,
2. *a*⌣♄*b* ist kleiner als *b*,
3. *a*⌣♄*b* fällt mit *b* zusammen.

Im ersten Falle ist *b* selbst von der gesuchten Art, im zweiten Falle ist es *a*⌣♄*b*, im letzten Falle genügt jede Relation, die in unserer Positivklasse kleiner als *b* ist, unserer Anforderung, und eine solche giebt es immer nach (606).

§ 232. *Aufbau.*

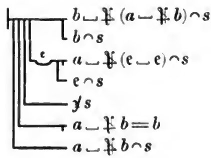
506 

(IIa):: - - - - - - -



(α

(588): - - - - - - - - -



(β

(646): - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash a \smile ¥ b \smile b \smile ¥ (a \smile ¥ b \smile (a \smile ¥ b)) \frown s \\
\quad a \smile ¥ b \frown s \\
\quad \not{p}\, s \\
\quad b \frown s \\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; a \smile ¥ (\mathfrak{e} \smile \mathfrak{e}) \frown s \\
\qquad \mathfrak{e} \frown s \\
\quad \not{\jmath}\, s \\
\quad \neg\; a \smile ¥ b = b
\end{array} \qquad (\gamma$$

(567): ———————————————

$$\begin{array}{l}
\vdash a \smile ¥ (a \smile ¥ b \smile (a \smile ¥ b)) \frown s \\
\quad a \smile ¥ b \frown s \\
\quad \not{p}\, s \\
\quad b \frown s \\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; a \smile ¥ (\mathfrak{e} \smile \mathfrak{e}) \frown s \\
\qquad \mathfrak{e} \frown s \\
\quad \not{\jmath}\, s \\
\quad \neg\; a \smile ¥ b = b \\
\quad a \frown s
\end{array} \qquad (\delta$$

×

$$\begin{array}{l}
\vdash a \smile ¥ b = b \\
\quad a \smile ¥ b \frown s \\
\quad \not{p}\, s \\
\quad b \frown s \\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; a \smile ¥ (\mathfrak{e} \smile \mathfrak{e}) \frown s \\
\qquad \mathfrak{e} \frown s \\
\quad \not{\jmath}\, s \\
\quad \neg\; a \smile ¥ (a \smile ¥ b \smile (a \smile ¥ b)) \frown s \\
\quad a \frown s
\end{array} \qquad \varepsilon$$

(IIa):: - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l}
\vdash a \smile ¥ b = b \\
\quad a \smile ¥ b \frown s \\
\quad \not{p}\, s \\
\quad b \frown s \\
\quad \overset{\mathfrak{e}}{\smile}\; a \smile ¥ (\mathfrak{e} \smile \mathfrak{e}) \frown s \\
\qquad \mathfrak{e} \frown s \\
\quad \not{\jmath}\, s \\
\quad a \frown s
\end{array} \qquad (667$$

——•——

IIh $\vdash a \smile ¥ b \smile b = b \smile b$
$\quad a \smile ¥ b = b$

(567): ———————————

$$\begin{array}{l}
\vdash a = b \smile b \\
\quad a \smile ¥ b = b \\
\quad b \frown s \\
\quad \not{\jmath}\, s \\
\quad a \frown s
\end{array} \qquad (668$$

——•——

$$\begin{array}{l}
638 \quad \vdash q \smile p \smile ¥ (d \smile c) \frown s \\
\quad d \smile c \frown s \\
\quad \not{p}\, s \\
\quad q \smile p \frown s \\
\quad ¥ (d \smile c) \smile (q \smile p) \frown s
\end{array}$$

(529, 529):: = = = = = = = =

q ‿ p ‿ ∦ (d ‿ c) ⌢ s
c ⌢ s
d ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
p ⌢ s
q ⌢ s
∦ (d ‿ c) ‿ (q ‿ p) ⌢ s (α

(648) :: – – – – – – – – – –

q ‿ p ‿ ∦ (d ‿ c) ⌢ s
c ⌢ s
d ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
p ⌢ s
q ⌢ s
p ‿ ∦ c ⌢ s
q ‿ ∦ d ⌢ s (669

—•—

IIIa
a ‿ ∦ (c ‿ c) ⌢ s
b ‿ b ‿ ∦ (c ‿ c) ⌢ s
a = b ‿ b

(668, 669) :: = = = = = =

a ‿ ∦ (c ‿ c) ⌢ s
c ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
b ⌢ s
b ‿ ∦ c ⌢ s
a ‿ ∦ b = b
a ⌢ s (α

×

b ‿ ∦ c ⌢ s
c ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
b ⌢ s
a ‿ ∦ (c ‿ c) ⌢ s
a ‿ ∦ b = b
a ⌢ s (β

(667, IIa) :: = = = = = =

b ‿ ∦ c ⌢ s
c ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
b ⌢ s
𝔢: a ‿ ∦ (𝔢 ‿ 𝔢) ⌢ s
𝔢 ⌢ s
a ‿ ∦ b ⌢ s
a ⌢ s (γ

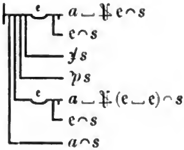
𝔢: b ‿ ∦ 𝔢 ⌢ s
𝔢 ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
b ⌢ s
𝔢: a ‿ ∦ (𝔢 ‿ 𝔢) ⌢ s
𝔢 ⌢ s
a ‿ ∦ b ⌢ s
a ⌢ s (δ

(606) : – – – – – – – – –

b ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
b ⌢ s
𝔢: a ‿ ∦ (𝔢 ‿ 𝔢) ⌢ s
𝔢 ⌢ s
a ‿ ∦ b ⌢ s
a ⌢ s (ε

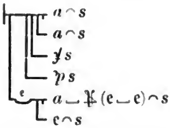
×

a ‿ ∦ b ⌢ s
b ⌢ s
ℨ s
𝔭 s
𝔢: a ‿ ∦ (𝔢 ‿ 𝔢) ⌢ s
𝔢 ⌢ s
a ⌢ s (ζ



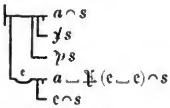
(η

(606): - - - - - - - - -



(ϑ

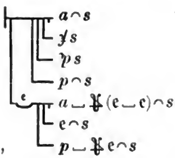
(Ig): - - - - - - - - -



(670

§ 233. *Zerlegung.*

Mit (670) beweisen wir nun den Satz

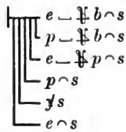


der im Wesentlichen — nach einer Wendung — besagt, dass es in einer Positivklasse (*s*) eine Relation (*e*) giebt, die kleiner ist als eine gegebene Relation (*p*), und deren Doppeltes (*e*‿*e*) kleiner ist als eine gegebene Relation (*a*), falls *p* und *a* derselben Positivklasse (*s*) angehören. Wir nehmen dazu an, es sei uns in unserer Positivklasse eine Relation *e* bekannt der Art, dass *e*‿*e* kleiner sei als *a*. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

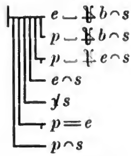
1. *e* ist kleiner als *p*,
2. *e* ist nicht kleiner als *p*.

Im ersten Falle haben wir in *e* schon eine Relation der verlangten Art. Im zweiten Falle giebt es in unserer Positivklasse eine Relation (*b*) kleiner als *p*, die dann auch kleiner als *e* ist, von der also gilt, dass *b*‿*b* kleiner als *e*‿*e* und mithin auch kleiner als *a* ist.

§ 234. *Aufbau.*

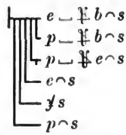
586 

(588):: - - - - -



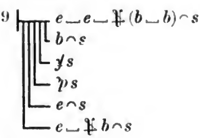
(α

(IIIc): -·-·-·-·-

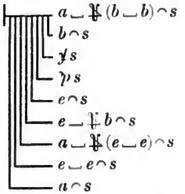


(671

———•———

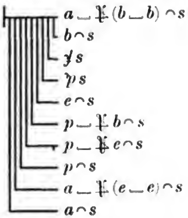
669 

(586): - - - - - - - - -



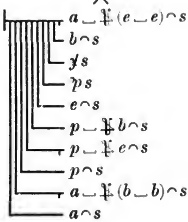
(α

(671,529):: = = = = = =



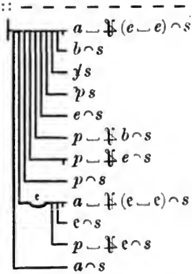
(β

×



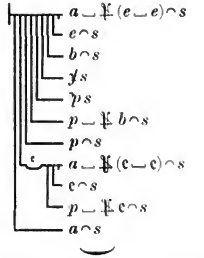
(γ

(IIa):: - - - - - - - - -

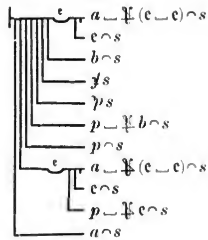


(δ

(IIa): -·-·-·-·-·-·-·-

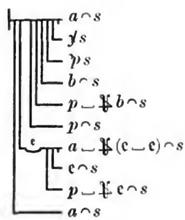


(ε



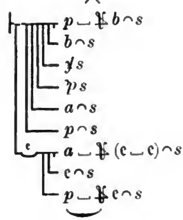
(ζ

(670): - - - - - - - - - - -

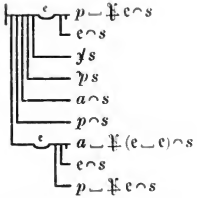


(η

×

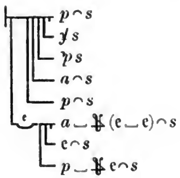


(ϑ



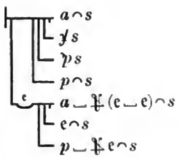
(ι

(606): - - - - - - - - -



(κ

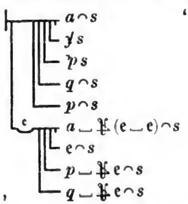
×



(672

§ 235. *Zerlegung.*

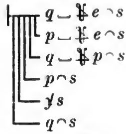
Um nun endlich den Satz



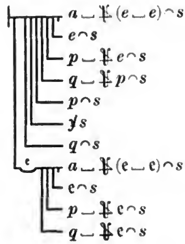
zu beweisen, verfahren wir im Wesentlichen wie oben, indem wir die Fälle unterscheiden, dass p kleiner ist als q, und dass p nicht kleiner ist als q.

§ 236. *Aufbau.*

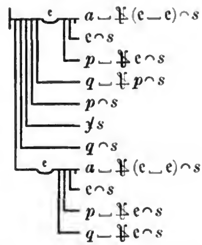
586



(IIa): - - - - - -

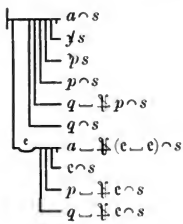


(α



(β

(672): - - - - - - - - - -



(γ

671 ⊢ p ‿ ⅄ e⌢s
q ‿ ⅄ e⌢s
q ‿ ⅄ p⌢s
p⌢s
ɟs
q⌢s

(IIa): - - - - - -

⊢ a ‿ ⅄ (e ‿ e)⌢s
e⌢s
q ‿ ⅄ e⌢s
q ‿ ⅄ p⌢s
p⌢s
ɟs
q⌢s
𝔢 a ‿ ⅄ (𝔢 ‿ 𝔢)⌢s
𝔢⌢s
p ‿ ⅄ 𝔢⌢s
q ‿ ⅄ 𝔢⌢s (δ

⊢ 𝔢 a ‿ ⅄ (𝔢 ‿ 𝔢)⌢s
𝔢⌢s
q ‿ ⅄ 𝔢⌢s
q ‿ ⅄ p⌢s
p⌢s
ɟs
q⌢s
𝔢 a ‿ ⅄ (𝔢 ‿ 𝔢)⌢s
𝔢⌢s
p ‿ ⅄ 𝔢⌢s
q ‿ ⅄ 𝔢⌢s (ε

(672): - - - - - - - -

⊢ a⌢s
ɟs
ℸps
q⌢s
q ‿ ⅄ p⌢s
p⌢s
𝔢 a ‿ ⅄ (𝔢 ‿ 𝔢)⌢s
𝔢⌢s
p ‿ ⅄ 𝔢⌢s
q ‿ ⅄ 𝔢⌢s (ζ

(γ): -·-·-·-·-·-·-·-

⊢ a⌢s
ɟs
ℸps
q⌢s
p⌢s
𝔢 a ‿ ⅄ (𝔢 ‿ 𝔢)⌢s
𝔢⌢s
p ‿ ⅄ 𝔢⌢s
q ‿ ⅄ 𝔢⌢s (673

§ 237. *Zerlegung.*

Wir wenden (673) auf (666) an, um den Satz

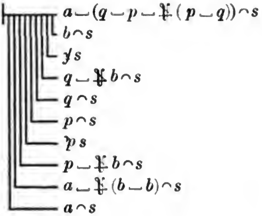
⊢ a ‿ (q ‿ p ‿ ⅄ (p ‿ q))⌢s,
ɟs
ℸps
q⌢s
p⌢s
, a⌢s

zu erhalten. Mit Hülfe von (644) gelangen wir dann ans Ziel unseres Abschnittes.

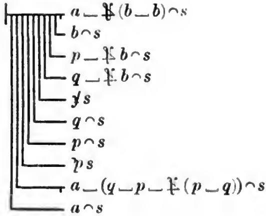
§ 238. *Aufbau.*

586 ⊢ a ‿ (q ‿ p ‿ ⅄ (p ‿ q))⌢s
b ‿ b ‿ (q ‿ p ‿ ⅄ (p ‿ q))⌢s
a ‿ ⅄ (b ‿ b)⌢s
b ‿ b⌢s
ɟs
a⌢s

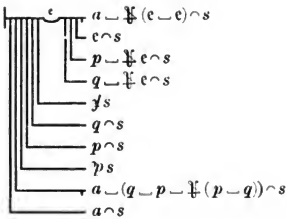
(666, 529)::= = = = = = = = = = = = =



(α

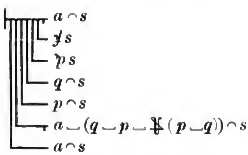


(β

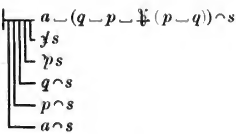


(γ

(673): - - - - - - - - - - - - - - -

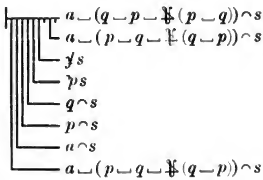


(δ



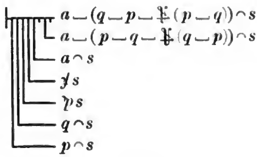
(ε

(Ie): - - - - - - - - - - - -



(ζ

(ε):: - - - - - - - - - - - -



(η

⊢ a ⌣ (q ⌣ p ⌣ ¥(p ⌣ q)) ⌢ s
 a ⌣ (p ⌣ q ⌣ ¥(q ⌣ p)) ⌢ s
 a ⌢ s
 ɏ s
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s (ϑ

(644): — — — — — — — — — —

⊢ q ⌣ p = p ⌣ q
 ɏ s
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s
 p ⌣ q ⌢ s
 q ⌣ p ⌢ s (ι

(529, 529):: = = = = =

⊢ q ⌣ p = p ⌣ q
 ɏ s
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s (κ

(607):: — — — — — —

⊢ q ⌣ p = p ⌣ q
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s (674

(IIIh): — — — — — —

⊢ q ⌣ p ⌣ ¥ q = p ⌣ q ⌣ ¥ q
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s (α

(570): ————————————

⊢ q ⌣ p ⌣ ¥ q = p
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s
 ɏ s (β

(IIIh): — — — — — — —

⊢ ¥ q ⌣ (q ⌣ p ⌣ ¥ q) = ¥ q ⌣ p
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s
 ɏ s (γ

(491): ————————————

⊢ ¥ q ⌣ (q ⌣ p) ⌣ ¥ q = ¥ q ⌣ p
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s
 ɏ s (δ

(580): ————————————

⊢ p ⌣ ¥ q = ¥ q ⌣ p
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s
 ɏ s (ε

(607):: — — — — — — —

⊢ p ⌣ ¥ q = ¥ q ⌣ p
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s (675

(IIIa): — — — — — — —

⊢ f(p ⌣ ¥ q)
 f(¥ q ⌣ p)
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s (676

IIc ⊢ f(¥ q ⌣ p)
 f(p ⌣ ¥ q)
 p ⌣ ¥ q = ¥ q ⌣ p

(675):: — — — — — — —

⊢ f(¥ q ⌣ p)
 f(p ⌣ ¥ q)
 𝔭 s
 q ⌢ s
 p ⌢ s (677

$$\text{IIIa}\quad \begin{array}{l} \vdash f(q \smile p) \\ \quad f(p \smile q) \\ \quad q \smile p = p \smile q \end{array}$$

(674) :: — — — — —

$$\begin{array}{l} \vdash f(q \smile p) \\ \quad f(p \smile q) \\ \quad \wp s \\ \quad q \frown s \\ \quad p \frown s \end{array} \qquad (678$$

Z. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile q = q \smile p \text{ ‘} \\ \quad \wp s \\ \quad p \frown \eth s \\ , \quad q \frown \eth s \end{array}$$

§ 239. *Zerlegung.*

Wir gehen nun daran, das commutative Gesetz für das ganze Grössengebiet einer Positivklasse zu beweisen.

Als Zwischenstufe dienen uns die Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile q = q \smile p \text{ ‘} \\ \quad \wp s \\ \quad q \frown s \\ , \quad p \frown \eth s \end{array} \qquad (\alpha$$

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile \maltese b = \maltese b \smile p \text{ ‘} \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ , \quad p \frown \eth s \end{array} \qquad (\beta$$

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \text{ ‘} \\ \quad b \frown s \\ \quad \wp s \\ , \quad p \frown \eth s \end{array} \qquad (\gamma$$

von denen wir zunächst (α) beweisen.

§ 240. *Aufbau.*

$$\text{IIIa}\quad \begin{array}{l} \vdash a \smile \maltese a \smile q = q \smile (a \smile \maltese a) \\ \quad a \smile \maltese a \smile q = q \\ \quad q \smile (a \smile \maltese a) = q \end{array}$$

(562, 571) :: = = = = = = = =

$$\begin{array}{l} \vdash a \smile \maltese a \smile q = q \smile (a \smile \maltese a \\ \quad q \frown s \\ \quad \jmath s \\ \quad a \frown s \end{array} \qquad (\alpha$$

(607) :: — — — — — — — — — — —

$$\begin{array}{l} \vdash a \smile \maltese a \smile q = q \smile (a \smile \maltese a) \\ \quad q \frown s \\ \quad \wp s \\ \quad a \frown s \end{array} \qquad (679$$

(IIIb) : — — — — — — — — — — —

$$\begin{array}{l} \vdash p = a \smile \maltese a \\ \quad q \frown s \\ \quad \wp s \\ \quad a \frown s \\ \quad p \smile q = q \smile p \end{array} \qquad (\alpha$$

———•———

$$\text{IIIf}\quad \begin{array}{l} \vdash \maltese a \smile q = q \smile \maltese a \\ \quad q \smile \maltese a = \maltese a \smile q \end{array}$$

(675) :: — — — — — — —

$$\begin{array}{l} \vdash \maltese a \smile q = q \smile \maltese a \\ \quad \wp s \\ \quad a \frown s \\ \quad q \frown s \end{array} \qquad (\beta$$

IIIb) : — — — — — — — —

$p = ǂa$
$ƴs$
$a \frown s$
$q \frown s$
$p \smile q = q \smile p$ (γ

(If): - - - - - - -

$p = a \smile ǂa$
$p = ǂa$
$p = a \smile ǂa$
$ƴs$
$a \frown s$
$q \frown s$
$p \smile q = q \smile p$ (δ

(α):: - - - - - - - -

$p = a \smile ǂa$
$p = ǂa$
$a \frown s$
$ƴs$
$q \frown s$
$p \smile q = q \smile p$ (ε

$p = \mathfrak{q} \smile ǂ\mathfrak{q}$
$p = ǂ\mathfrak{q}$
$\mathfrak{q} \frown s$
$ƴs$
$q \frown s$
$p \smile q = q \smile p$ (ζ

(516): - - - - - - - - -

$p \frown s$
$ƴs$
$q \frown s$
$p \smile q = q \smile p$
$p \frown \eth s$ (η

×

$p \smile q = q \smile p$
$ƴs$
$q \frown s$
$p \frown s$
$p \frown \eth s$ (ϑ

(674): -·-·-·-·-·-

$p \smile q = q \smile p$
$ƴs$
$q \frown s$
$p \frown \eth s$ (680

§ 241. *Zerlegung.*

Wir beweisen nun in ähnlicher Weise den Satz (β) des § 239, indem wir für »p« erst »$a \smile ǂa$«, dann »$ǂa$« nehmen und zuletzt (675) anwenden.

§ 242. *Aufbau.*

489 $\vdash a \smile (ǂb \smile ǂa) = a \smile ǂb \smile ǂa$

(507): ————————————

$\vdash a \smile ǂ(a \smile b) = a \smile ǂb \smile ǂa$ (α

(678): ————————————

$a \smile ǂ(b \smile a) = a \smile ǂb \smile ǂa$
$ƴs$
$b \frown s$
$a \frown s$ (β

(506): ————————————

$a \smile ǂa \smile ǂb = a \smile ǂb \smile ǂa$
$ƴs$
$b \frown s$
$a \frown s$ (γ

(677): ————————————

$a \smile ǂa \smile ǂb = ǂb \smile a \smile ǂa$
$ƴs$
$b \frown s$
$a \frown s$ (δ

(490): ————————————

$a \smile ǂa \smile ǂb = ǂb \smile (a \smile ǂa)$
$ƴs$
$b \frown s$
$a \frown s$ (681

(IIIb): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, p = a \smile \natural a \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad a \frown s \\ \quad \neg\, p \smile \natural b = \natural b \smile p \end{array} \qquad (\alpha$$

——•——

IIIh
$$\begin{array}{l} \vdash \natural(b \smile a) = \natural(a \smile b) \\ \quad b \smile a = a \smile b \end{array}$$

(505): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash \natural a \smile \natural b = \natural(a \smile b) \\ \quad b \smile a = a \smile b \end{array} \qquad (\beta$$

(505): ————————

$$\begin{array}{l} \vdash \natural a \smile \natural b = \natural b \smile \natural a \\ \quad b \smile a = a \smile b \end{array} \qquad (\gamma$$

(674): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \natural a \smile \natural b = \natural b \smile \natural a \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad a \frown s \end{array} \qquad (\delta$$

(IIIb): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, p = \natural a \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad a \frown s \\ \quad \neg\, p \smile \natural b = \natural b \smile p \end{array} \qquad (\varepsilon$$

(If): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, p = a \smile \natural a \\ \quad \neg\, p = \natural a \\ \quad \neg\, p = a \smile \natural a \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad a \frown s \\ \quad \neg\, p \smile \natural b = \natural b \smile p \end{array} \qquad (\zeta$$

(α):: - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, p = a \smile \natural a \\ \quad \neg\, p = \natural a \\ \quad a \frown s \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad \neg\, p \smile \natural b = \natural b \smile p \end{array} \qquad (\eta$$

$$\begin{array}{l} \vdash \overset{\mathfrak{q}}{\smile} \neg\, p = \mathfrak{q} \smile \natural \mathfrak{q} \\ \quad \neg\, p = \natural \mathfrak{q} \\ \quad \mathfrak{q} \frown s \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad \neg\, p \smile \natural b = \natural b \smile p \end{array} \qquad (\vartheta$$

(516): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash p \frown s \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad \neg\, p \smile \natural b = \natural b \smile p \\ \quad p \frown \delta s \end{array} \qquad (\iota$$

×

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, p \smile \natural b = \natural b \smile p \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad \neg\, p \frown s \\ \quad p \frown \delta s \end{array} \qquad (\varkappa$$

(675): -·-·-·-·-·-·-·-

$$\begin{array}{l} \vdash p \smile \natural b = \natural b \smile p \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad p \frown \delta s \end{array} \qquad (682$$

(IIIb): - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \vdash \neg\, q = \natural b \\ \quad \wp s \\ \quad b \frown s \\ \quad p \frown \delta s \\ \quad \neg\, p \smile q = q \smile p \end{array} \qquad (683$$

§ 243. *Zerlegung.*

Nun ist noch der Satz (γ) des § 239 in ähnlicher Weise zu beweisen. Wir können dazu (679) und (681) wieder benutzen. Mit diesem Satze und (683) und (680) gelangen wir an's Ziel unseres Abschnittes *Z.*

§ 244. *Aufbau.*

IIIf
$$\begin{array}{l} \vdash p \smile (b \smile \natural b) = b \smile \natural b \smile p \\ \quad b \smile \natural b \smile p = p \smile (b \smile \natural b) \end{array}$$

(679):: - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \\ p \frown s \\ \wp s \\ b \frown s \end{array} \qquad (684$$

$$\begin{array}{l} \text{IIIf} \;\; \maltese a \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile \maltese a \\ \qquad b \smile \maltese b \smile \maltese a = \maltese a \smile (b \smile \maltese b) \end{array}$$

(681)::- - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} \maltese a \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile \maltese a \\ \wp s \\ a \frown s \\ b \frown s \end{array} \qquad (685$$

(IIIb): - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} p = \maltese a \\ \wp s \\ a \frown s \\ b \frown s \\ p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \end{array} \qquad (686$$

$$\text{IIIe} \;\; a \smile \maltese a \smile (a \smile \maltese a) = a \smile \maltese a \smile (a \smile \maltese a)$$

(559): ———————————————

$$\begin{array}{l} a \smile \maltese a \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile (a \smile \maltese a) \\ b \frown s \\ a \frown s \\ \not\jmath s \end{array} \qquad (\alpha$$

(607):: - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} a \smile \maltese a \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile (a \smile \maltese a) \\ b \frown s \\ a \frown s \\ \wp s \end{array} \qquad (687$$

(IIIb): - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} p = a \smile \maltese a \\ b \frown s \\ a \frown s \\ \wp s \\ p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \end{array} \qquad (\alpha$$

(If): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} p = a \smile \maltese a \\ p = \maltese a \\ b \frown s \\ a \frown s \\ \wp s \\ p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \\ p = \maltese a \end{array} \qquad (\beta$$

(686):: - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} p = a \smile \maltese a \\ p = \maltese a \\ a \frown s \\ b \frown s \\ \wp s \\ p \smile \underbrace{(b \smile \maltese b)} = b \smile \maltese b \smile p \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{q} \;\; p = \mathfrak{q} \smile \maltese \mathfrak{q} \\ p = \maltese \mathfrak{q} \\ \mathfrak{q} \frown s \\ b \frown s \\ \wp s \\ p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \end{array}$$

(516): - - - - - - - - - - - (δ

$$\begin{array}{l} p \frown s \\ b \frown s \\ \wp s \\ p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \\ p \frown \mathfrak{d} s \end{array} \qquad (\varepsilon$$

×

$$\begin{array}{l} p \smile (b \smile \maltese b) = b \smile \maltese b \smile p \\ b \frown s \\ \wp s \\ p \frown s \\ p \frown \mathfrak{d} s \end{array} \qquad (\zeta$$

(684): - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} p \smile (b \smile \text{Ұ}\, b) = b \smile \text{Ұ}\, b \smile p \\ b \frown s \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \end{array} \qquad (688$$

(IIIb): - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} q = b \smile \text{Ұ}\, b \\ b \frown s \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \\ p \smile q = q \smile p \end{array} \qquad (\alpha$$

(If): - - - - - - -

$$\begin{array}{l} q = b \smile \text{Ұ}\, b \\ q = \text{Ұ}\, b \\ b \frown s \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \\ p \smile q = q \smile p \\ q = \text{Ұ}\, b \end{array} \qquad (\beta$$

(683):: - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} q = b \smile \text{Ұ}\, b \\ q = \text{Ұ}\, b \\ b \frown s \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \\ p \smile q = q \smile p \end{array} \qquad (\gamma$$

$$\begin{array}{l} q = \mathfrak{q} \smile \text{Ұ}\, \mathfrak{q} \\ q = \text{Ұ}\, \mathfrak{q} \\ \mathfrak{q} \frown s \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \\ p \smile q = q \smile p \end{array} \qquad (\delta$$

(516): - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{l} q \frown s \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \\ p \smile q = q \smile p \\ q \frown \mathfrak{d}s \end{array} \qquad (\varepsilon$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} p \smile q = q \smile p \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \\ q \frown s \\ q \frown \mathfrak{d}s \end{array} \qquad (\zeta$$

(680): -·-·-·-·-·-

$$\begin{array}{l} p \smile q = q \smile p \\ \mathfrak{p}s \\ p \frown \mathfrak{d}s \\ q \frown \mathfrak{d}s \end{array} \qquad (689$$

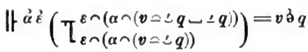
§ 245. Hiermit ist das commutative Gesetz im Gebiete einer Positivklasse bewiesen. Die nächste Aufgabe wird nun sein, zu zeigen, dass es eine Positivklasse giebt, wie im § 164 angedeutet worden ist. Damit wird die Möglichkeit eröffnet sein, die reelle Zahl als Verhältnis von Grössen eines Gebietes zu definiren, das zu einer Positivklasse gehört. Und wir werden dann auch beweisen können, dass die reellen Zahlen selbst als Grössen dem Gebiete einer Positivklasse angehören.

Anmerkung zu § 175, S. 172, erste Spalte.

Dass die Unabhängigkeit der angeführten Bestimmungen von einander nicht bewiesen werden könne, soll nicht unbedingt hingestellt werden. Denkbar ist es ja, dass man Klassen von Relationen auffinden könnte, für welche immer alle Bestimmungen bis auf eine zuträfen, sodass jede von diesen in einem der Beispiele nicht zuträfe. Aber ob es an dieser Stelle der Untersuchung ohne Voraussetzung der Geometrie oder der gebrochenen, negativen und irrationalen Zahlen oder von Erfahrungsthatsachen möglich sei, solche Beispiele zu geben, ist zu bezweifeln.

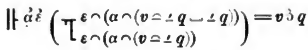
Anhänge.

1. Tafel der Definitionen.



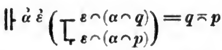
(Σ

(Relation, dass ein Gegenstand in einer mit einem Gegenstande anfangenden Reihe zuerst zu einer Klasse gehört. § 1, S. 2.)



(T

(Relation, dass ein Gegenstand in einer Reihe zuerst nach einem Gegenstande zu einer Klasse gehört. § 7, S. 7.)

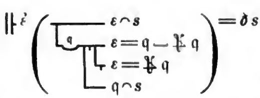


(Υ

(Verbindung von Relationen. § 37, S. 48.)

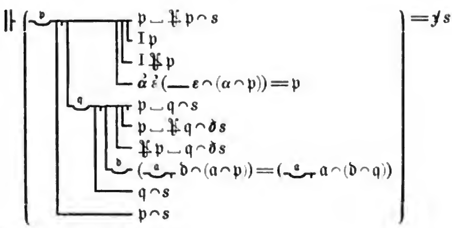
$\Vdash \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(t \smile \varepsilon = \alpha) =_{*} t$ (Φ

(§ 167, S. 166.)



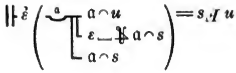
(X

(§ 173, S. 169.)

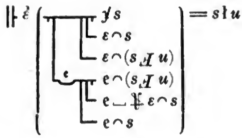


(Ψ

(Positivalklasse. § 175, S. 171.)

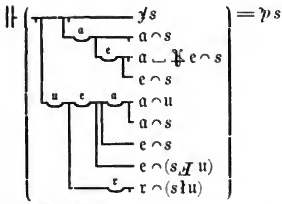


(Ω
(§ 193, S. 187.)



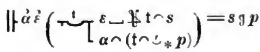
(AA

(Grenze. § 193, S. 187.)



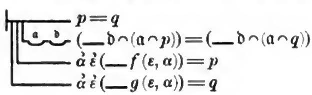
(AB

(Positivklasse. § 197, S. 190.)

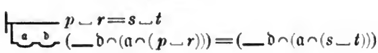


(AΓ
(§ 199 S. 192.)

2. Tafel der wichtigeren Lehrsätze.



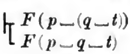
(485

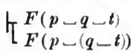


(487

$\vdash p \smile (q \smile t) = p \smile q \smile t$ (489

(Das associative Gesetz für die Zusammensetzung von Relationen.)

 (490

 (491

$$\vdash \begin{array}{l} f(\curlyvee q \smile \curlyvee p) \\ f(\curlyvee(p \smile q)) \end{array} \qquad (505$$

$$\vdash \begin{array}{l} F(t \smile \curlyvee q \smile \curlyvee p) \\ F(t \smile \curlyvee(p \smile q)) \end{array} \qquad (506$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(\curlyvee(p \smile q)) \\ f(\curlyvee q \smile \curlyvee p) \end{array} \qquad (507$$

$$\vdash \begin{array}{l} F(t \smile \curlyvee(p \smile q)) \\ F(t \smile \curlyvee q \smile \curlyvee p) \end{array} \qquad (508$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{e}\ \ d \frown (\mathfrak{e} \frown q) \\ d \frown (r \frown \dot{\perp} q) \end{array} \qquad (413$$

$$\vdash \begin{array}{l} n \frown (a \frown \dot{\smile} q) \\ n \frown (r \frown \dot{\perp} q) \\ r \frown (a \frown \dot{\perp} q) \end{array} \qquad (377$$

$$\vdash \begin{array}{l} m \frown (r \frown \dot{\smile} q) \\ m \frown (n \frown \dot{\smile} q) \\ n \frown (r \frown \dot{\perp} q) \end{array} \qquad (382$$

$$\vdash \begin{array}{l} d \frown (a \frown \curlyvee(z \simeq \curlyvee q)) \\ d \frown (a \frown q) \\ d \frown z \end{array} \qquad (444$$

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (a \frown q) \\ e \frown (a \frown \curlyvee(z \simeq \curlyvee q)) \end{array} \qquad (446$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathrm{I}\curlyvee(z \simeq \curlyvee q) \\ \mathrm{I}\, q \end{array} \qquad (447$$

$$\vdash \begin{array}{l} m \frown (m ; d \,\S\, q) \\ d \frown (d \frown \dot{\perp} q) \\ m \frown (d \frown \dot{\smile} q) \\ \mathrm{I}\, q \end{array} \qquad (371$$

$$\vdash \begin{array}{l} e \frown (m ; a \,\S\, p) \\ e \frown (m ; n \,\S\, p) \\ a \frown (a \frown \dot{\perp} p) \\ n \frown (a \frown p) \end{array} \qquad (375$$

$$\vdash \begin{array}{l} m \frown (m ; m \,\S\, p) \\ m \frown (m \frown \dot{\perp} p) \\ \mathrm{I}\, p \end{array} \qquad (391$$

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (a \frown (v \eth q)) \\ \mathfrak{r}\ \ x \frown (\mathfrak{r} \frown (v \simeq \dot{\smile} q)) \\ \mathfrak{r} \frown (a \frown \dot{\perp} q) \\ x \frown (a \frown \dot{\smile} q) \\ a \frown v \end{array} \qquad (350$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{e}\ \ \mathfrak{e} \frown (x ; y \,\S\, q) \\ \mathfrak{e} \frown v \\ \mathfrak{a}\ \ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q)) \\ x \frown (y \frown \dot{\smile} q) \end{array} \qquad (354$$

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (y \frown \dot{\smile} q) \\ y \frown v \\ y \frown (y \frown \dot{\perp} q) \\ \mathrm{I}\, q \\ \mathfrak{a}\ \ x \frown (\mathfrak{a} \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (357$$

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (m \frown (v \simeq \dot{\smile} q)) \\ x \frown (m \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (368$$

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (m \frown \dot{\smile} q) \\ x \frown (m \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (401$$

$$\vdash \begin{array}{l} m \frown v \\ x \frown (m \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (402$$

$$\vdash \begin{array}{l} x \frown (m \frown (v \simeq \dot{\smile} q \smile \dot{\perp} q)) \\ x \frown (m \frown (v \eth q)) \end{array} \qquad (404$$

$$\vdash \begin{array}{l} m \frown (c \frown \dot{\smile} q) \\ x \frown (m \frown (v \eth q)) \\ x \frown (c \frown (v \simeq \dot{\smile} q)) \\ \mathrm{I}\, q \end{array} \qquad (407$$

$$\vdash \begin{array}{l} b \frown (o \frown (v \eth q)) \\ r \frown (o \frown \dot{\perp} q) \\ b \frown (r \frown \dot{\smile} q) \\ r \frown v \end{array} \qquad (656$$

$$\vdash \begin{array}{l} d\frown(a\frown(v \circeq \perp q)) \\ d\frown(a\frown(v\,\grave{\supset}\,q)) \end{array} \qquad (361$$

$$\vdash \begin{array}{l} d\frown(a\frown\perp q) \\ d\frown(a\frown(v\,\grave{\supset}\,q)) \end{array} \qquad (362$$

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown v \\ d\frown(a\frown(v\,\grave{\supset}\,q)) \end{array} \qquad (365$$

$$\vdash \begin{array}{l} r\frown(n\frown\dot{\smile}q) \\ r\frown(m;n\,\S(v\,\grave{\supset}\,q)) \end{array} \qquad (380$$

$$\vdash \begin{array}{l} n\frown(a\frown(v\,\grave{\supset}\,q)) \\ n\frown(a\frown(v\circeq\perp q \smile \perp q)) \\ n\frown(a\frown(v\circeq\perp q)) \end{array} \qquad (384$$

$$\vdash \begin{array}{l} n\frown(a\frown(v\,\grave{\supset}\,q)) \\ \quad \mathfrak{r}:\; n\frown(\mathfrak{r}\frown(v\circeq\perp q)) \\ \quad\quad \mathfrak{r}\frown(a\frown\perp q) \\ n\frown(a\frown\perp q) \\ a\frown v \end{array} \qquad (385$$

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(y\frown(v\circeq\perp q)) \\ x\frown(y\frown\perp(v\,\grave{\supset}\,q)) \end{array} \qquad (387$$

$$\vdash \begin{array}{l} x\frown(y\frown\perp q) \\ x\frown(y\frown\perp(v\,\grave{\supset}\,q)) \end{array} \qquad (388$$

$$\vdash \begin{array}{l} a\frown(a\frown\perp(v\,\grave{\supset}\,q)) \\ a\frown(a\frown\perp q) \end{array} \qquad (389$$

$$\vdash \begin{array}{l} d\frown(a\frown\perp q) \\ e\frown(a\frown(v\,\grave{\supset}\,q)) \\ e\frown(d\frown(v\circeq\perp q)) \end{array} \qquad (395$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{I}(v\,\grave{\supset}\,q) \\ \mathfrak{I}\,q \end{array} \qquad (397$$

$$\vdash \begin{array}{l} m\frown(d\frown\dot{\smile}q) \\ m\frown(d\frown\dot{\smile}(v\,\grave{\supset}\,q)) \end{array} \qquad (409$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{P}v\frown\dot{\smile}\mathfrak{f}) \\ \backsim = \mathfrak{P}v \\ \backsim = \mathfrak{P}u \\ \mathfrak{a}:\; \mathfrak{a}\frown u \\ \quad \mathfrak{a}\frown v \end{array} \qquad (428$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{P}v\frown\dot{\smile}\mathfrak{f}) \\ \mathfrak{a}:\; \mathfrak{a}\frown u \\ \quad \mathfrak{a}\frown v \\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{P}u\frown\dot{\smile}\mathfrak{f}) \end{array} \qquad (443$$

$$\vdash \begin{array}{l} e\frown(a\frown(q\,\bar{\frown}\,p)) \\ e\frown(a\frown q) \end{array} \qquad (455$$

$$\vdash \begin{array}{l} e\frown(a\frown(q\,\bar{\frown}\,p)) \\ e\frown(a\frown p) \end{array} \qquad (456$$

$$\vdash \begin{array}{l} e\frown(d\frown q) \\ e\frown(d\frown p) \\ e\frown(d\frown(q\,\bar{\frown}\,p)) \end{array} \qquad (460$$

$$\vdash \mathfrak{F}(q\,\bar{\frown}\,p) = \mathfrak{F}q\,\bar{\frown}\,\mathfrak{F}p \qquad (464$$

$$\vdash \begin{array}{l} \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon\frown z\\ \varepsilon\frown v\end{array}\right) = \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\varepsilon\frown u\\ \varepsilon\frown w\end{array}\right) \\ \mathfrak{P}z = \mathfrak{P}u \\ \mathfrak{P}v = \mathfrak{P}w \\ \mathfrak{a}:\; \mathfrak{a}\frown z \\ \quad \mathfrak{a}\frown v \\ \mathfrak{a}:\; \mathfrak{a}\frown u \\ \quad \mathfrak{a}\frown w \end{array} \qquad (469$$

$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\ \mathfrak{n}w\frown(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{f})$ (480

—— • ——

$\vdash\!\top\!-\ \mathfrak{d}\frown(\mathfrak{n}w\frown\dot{\smile}\,\mathfrak{f})$
$\quad\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}\frown w$
$\qquad\llcorner\ \mathfrak{a}\frown u$
$\quad\llcorner\ \mathfrak{n}u=\infty$ (484

—— • ——

$\vdash\!\top\ F(t\smile d=a)$
$\quad\llcorner\ F(d\frown(a\frown_{*}t))$ (492

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ F(a)$
$\quad\llcorner\ F(t\smile d)$
$\quad\llcorner\ d\frown(a\frown_{*}t)$ (493

—— • ——

$\vdash\!\top\ F(d\frown(a\frown_{*}t))$
$\quad\llcorner\ F(t\smile d=a)$ (495

—— • ——

$\vdash d\frown(t\smile d\frown_{*}t)$ (496

—— • ——

$\vdash \mathrm{I}_{*}t$ (497

—— • ——

$\vdash\!\top\ p\smile t=t\smile p$
$\quad\llcorner\ t\frown(p\frown\dot{\smile}_{*}t)$ (498

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ p\smile q=q\smile p$
$\quad\llcorner\ t\frown(p\frown\dot{\smile}_{*}t)$
$\quad\llcorner\ t\frown(q\frown\dot{\smile}_{*}t)$ (501

—— • ——

$\vdash\!\top\ d\smile b\frown(a\smile b\frown_{*}p)$
$\quad\llcorner\ d\frown(a\frown_{*}p)$ (611

—— • ——

$\vdash\!\top\!-\ p\frown s$
$\quad\overset{\mathfrak{q}}{\smile}\!\top\!\top\ p=\mathfrak{q}\smile\,\not{\S}\,\mathfrak{q}$
$\qquad\llcorner\!\top\ p=\not{\S}\,\mathfrak{q}$
$\qquad\llcorner\ \mathfrak{q}\frown s$
$\quad\llcorner\ p\frown\eth s$ (516

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\!\top\ \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ d\frown(\mathfrak{a}\frown p)$
$\quad\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a}\frown(d\frown q)$
$\quad\llcorner\ q\frown s$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (521

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\!\top\ \not{\S}\,p\smile q\frown\eth s$
$\quad\llcorner\ q\frown s$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (526

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\!\top\ p\smile\not{\S}\,q\frown\eth s$
$\quad\llcorner\ q\frown s$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (528

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\!\top\ p\smile q\frown s$
$\quad\llcorner\ q\frown s$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (529

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ \grave{\alpha}\grave{\varepsilon}(-\varepsilon\frown(\alpha\frown p))=p$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (531

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ \mathrm{I}\not{\S}\,p$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (533

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ \mathrm{I}p$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (535

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ p\smile\not{\S}\,p\frown s$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (536

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ \not{\S}\,p\frown s$
$\quad\llcorner\ p\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (538

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\ q=\not{\S}\not{\S}\,q$
$\quad\llcorner\ q\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (539

—— • ——

$\vdash\!\top\!\top\!\top\ f(q\smile\not{\S}\,p)$
$\quad\llcorner\ f(\not{\S}(p\smile\not{\S}\,q))$
$\quad\llcorner\ q\frown s$
$\quad\llcorner\ \not{y}s$ (542

—— • ——

$$\vdash \begin{array}{l} f(\text{⅌}(p \smile \text{⅌} q)) \\ f(q \smile \text{⅌} p) \\ q \frown s \\ \text{ɟ} s \end{array} \qquad (543$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(\text{⅌} q \smile p) \\ f(\text{⅌}(\text{⅌} p \smile q)) \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \end{array} \qquad (544$$

$$\vdash \begin{array}{l} a = d \\ d \frown (a \frown (q \smile \text{⅌} q)) \\ q \frown s \\ \text{ɟ} s \end{array} \qquad (546$$

$$\vdash \begin{array}{l} a = d \\ d \frown (a \frown (\text{⅌} p \smile p)) \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \end{array} \qquad (551$$

$$\vdash \begin{array}{l} q \smile \text{⅌} q = \text{⅌} p \smile p \\ p \frown s \\ q \frown s \\ \text{ɟ} s \end{array} \qquad (556$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(p \smile \text{⅌} p) \\ f(q \smile \text{⅌} q) \\ p \frown s \\ q \frown s \\ \text{ɟ} s \end{array} \qquad (559$$

$$\vdash \begin{array}{l} p = r \smile \text{⅌} r \\ \neg\, p \frown s \\ r \frown s \\ \text{ɟ} s \\ \neg\, \text{⅌} p \frown s \\ p \frown \eth s \end{array} \qquad (561$$

$$\vdash \begin{array}{l} q \smile (p \smile \text{⅌} p) = q \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \\ q \frown s \end{array} \qquad (562$$

$$\vdash \begin{array}{l} q \smile \text{⅌} p \smile p = q \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \\ q \frown s \end{array} \qquad (566$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(q \smile \text{⅌} p \smile p) \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \\ q \frown s \end{array} \qquad (567$$

$$\vdash \begin{array}{l} q \smile p \smile \text{⅌} p = q \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \\ q \frown s \end{array} \qquad (568$$

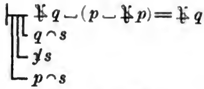
$$\vdash \begin{array}{l} f(q \smile p \smile \text{⅌} p) \\ f(q) \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \\ q \frown s \end{array} \qquad (569$$

$$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(q \smile p \smile \text{⅌} p) \\ p \frown s \\ \text{ɟ} s \\ q \frown s \end{array} \qquad (570$$

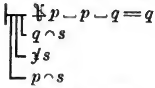
$$\vdash \begin{array}{l} p \smile \text{⅌} p \quad q = q \\ q \frown s \\ \text{ɟ} s \\ p \frown s \end{array} \qquad (571$$

$$\vdash \begin{array}{l} p \smile (\text{⅌} p \smile q) = q \\ q \frown s \\ \text{ɟ} s \\ p \frown s \end{array} \qquad (574$$

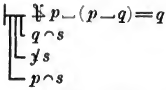
$$\vdash \begin{array}{l} f(q) \\ f(p \smile (\text{⅌} p \smile q)) \\ q \frown s \\ \text{ɟ} s \\ p \frown s \end{array} \qquad (575$$



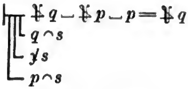
(576



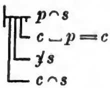
(578



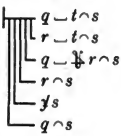
(579



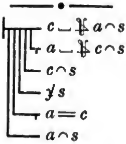
(582



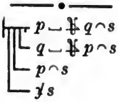
(585



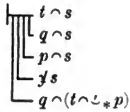
(586



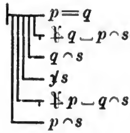
(588



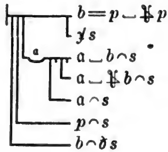
(589



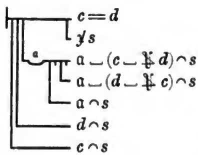
(623



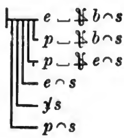
(639



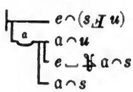
(642



(644



(671



(590

a⌢u
e⌣ǂa⌢s
a⌢s
e⌢(s⅃u) (591

p⌢(słu)
e⌣ǂp⌢s
e⌢s
e⌢(s⅃u) (594

a⌢u
p⌣ǂa⌢s
a⌢s
p⌢(słu) (597

p⌢s
p⌢(słu) (599

ɣs
p⌢(słu) (600

p⌢(słu)
p⌢s
p⌢(s⅃u)
e⌢(s⅃u)
e⌢ǂp⌢s
e⌢s
ɣs (601

p = q
q⌢(słu)
p⌢(słu) (602

a⌢u
a⌢s
e⌢s
e⌢(s⅃u)
r⌢(słu)
ƿs (604

a⌢s
a⌣ǂe⌢s
e⌢s
ƿs (606

ɣs
ƿs (607

a⌢(q⌢(sȝp))
a⌣ǂt⌢s
q⌢(t⌢⌣*p) (608

a⌣ǂt⌢s
q⌢(t⌢⌣*p)
a⌢(q⌢(sȝp)) (609

a⌢(q⌣b⌢(sȝp))
a⌣ǂb⌢(q⌢(sȝp)) (614

c⌣p⌢(p⌣p⌢(sȝp))
p⌢s
ɣs
c⌢(p⌢(sȝp)) (622

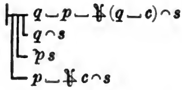
a⌢(p⌢(sȝp))
a⌢s
p⌢s
ƿs (635

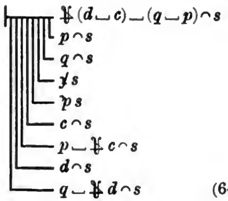
(Archimedisches Axiom.)

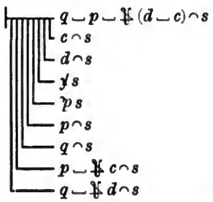
q⌣p⌣ǂq⌢s
q⌢s
ƿs
p⌢s (637

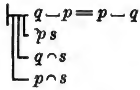
p⌣ǂq⌢s
q⌢s
ƿs
p⌢s
ǂq⌣p⌢s (638

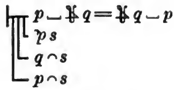
ǂp⌣q⌢s
q⌢s
ƿs
p⌢s
q⌣ǂp⌢s (641

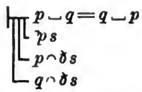

(646


(648


(669


(674


(675


(689

(Das commutative Gesetz im Gebiete einer Positivklasse.)

Nachwort.

Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird.

In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte. Es handelt sich um mein Grundgesetz (V). Ich habe mir nie verhehlt, dass es nicht so einleuchtend ist, wie die andern, und wie es eigentlich von einem logischen Gesetze verlangt werden muss. Und so habe ich denn auch im Vorworte zum ersten Bande S. VII auf diese Schwäche hingewiesen. Ich hätte gerne auf diese Grundlage verzichtet, wenn ich irgendeinen Ersatz dafür gekannt hätte. Und noch jetzt sehe ich nicht ein, wie die Arithmetik wissenschaftlich begründet werden könne, wie die Zahlen als logische Gegenstände gefasst und in die Betrachtung eingeführt werden können, wenn es nicht — bedingungsweise wenigstens — erlaubt ist, von einem Begriffe zu seinem Umfange überzugehn. Darf ich immer von dem Umfange eines Begriffes, von einer Klasse sprechen? Und wenn nicht, woran erkennt man die Ausnahmefälle? Kann man daraus, dass der Umfang eines Begriffes mit dem eines zweiten zusammenfällt, immer schliessen, dass jeder unter den ersten Begriff fallende Gegenstand auch unter den zweiten falle? Diese Fragen werden durch die Mittheilung des Herrn Russell angeregt.

Solatium miseris, socios habuisse malorum. Dieser Trost, wenn es einer ist, steht auch mir zur Seite; denn Alle, die von Begriffsumfängen, Klassen, Mengen [1]) in ihren Beweisen Gebrauch gemacht haben, sind in derselben Lage. Es handelt sich hierbei nicht um meine Begründungsweise im Besonderen, sondern um die Möglichkeit einer logischen Begründung der Arithmetik überhaupt.

Doch zur Sache selbst! Herr Russell hat einen Widerspruch aufgefunden, der nun dargelegt werden mag.

Von der Klasse der Menschen wird niemand behaupten wollen, dass sie ein Mensch sei. Wir haben hier eine Klasse, die sich selbst nicht an-

1) Auch die Systeme des Herrn R. Dedekind gehören hierher.

gehört. Ich sage nämlich, etwas gehöre einer Klasse an, wenn es unter den Begriff fällt, dessen Umfang eben die Klasse ist. Fassen wir nun den Begriff ins Auge *Klasse, die sich selbst nicht angehört!* Der Umfang dieses Begriffes, falls man von ihm reden darf, ist demnach die Klasse der sich selbst nicht angehörenden Klassen. Wir wollen sie kurz die Klasse K nennen. Fragen wir nun, ob diese Klasse K sich selbst angehöre! Nehmen wir zuerst an, sie thue es! Wenn etwas einer Klasse angehört, so fällt es unter den Begriff, dessen Umfang die Klasse ist. Wenn demnach unsere Klasse sich selbst angehört, so ist sie eine Klasse, die sich selbst nicht angehört. Unsere erste Annahme führt also auf einen Widerspruch mit sich. Nehmen wir zweitens an, unsere Klasse K gehöre sich selbst nicht an, so fällt sie unter den Begriff, dessen Umfang sie selbst ist, gehört also sich selbst an. Auch hier wieder ein Widerspruch!

Wie sollen wir uns hierzu stellen? Sollen wir annehmen, das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten gelte von den Klassen nicht? Oder sollen wir annehmen, es gebe Fälle, wo einem unanfechtbaren Begriffe keine Klasse entspreche, die sein Umfang wäre? Im ersten Falle sähen wir uns genöthigt, den Klassen die volle Gegenständlichkeit abzusprechen. Denn wären die Klassen eigentliche Gegenstände, so müsste das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten von ihnen gelten. Andrerseits haben sie nichts Ungesättigtes, Prädikatives, wodurch sie etwa als Functionen, Begriffe, Beziehungen gekennzeichnet wären. Das, was wir gewohnt sind, als Namen einer Klasse zu betrachten, z. B. „die Klasse der Primzahlen", hat vielmehr das Wesen eines Eigennamens, kann nicht prädikativ, wohl aber als grammatisches Subjekt eines singulären Satzes auftreten, z. B. „die Klasse der Primzahlen umfasst unendlich viele Gegenstände". Wenn wir das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten für die Klassen ausser Kraft setzen wollten, könnten wir daran denken, die Klassen — und wohl die Werthverläufe überhaupt — als uneigentliche Gegenstände aufzufassen. Diese würden dann nicht für alle Functionen erster Stufe als Argumente auftreten dürfen. Es gäbe aber auch Functionen, die als Argumente sowohl eigentliche, als auch uneigentliche Gegenstände haben könnten. Wenigstens die Beziehung der Gleichheit (Identität) würde von dieser Art sein. Man könnte dem zu entgehen suchen, indem man für uneigentliche Gegenstände eine besondere Art von Gleichheit annähme. Aber das ist wohl ausgeschlossen. Die Identität ist eine so bestimmt gegebene Beziehung, dass nicht abzusehen ist, wie bei ihr verschiedene Arten vorkommen können. Nun ergäbe sich aber eine grosse Mannigfaltigkeit von Functionen erster Stufe, nämlich erstens solche, welche als Argumente nur eigentliche Gegenstände haben dürften, zweitens solche, welche als Argumente sowohl eigentliche, als auch uneigentliche Gegenstände haben könnten, endlich wohl auch solche, welche nur uneigentliche Gegenstände als Argumente haben könnten. Eine andere Eintheilung ergäbe sich aus den Werthen der Functionen.

Danach wären Functionen zu unterscheiden, welche als Werthe nur eigentliche Gegenstände hätten, zweitens solche, welche als Werthe sowohl eigentliche, als auch uneigentliche Gegenstände hätten, endlich solche, welche nur uneigentliche Gegenstände als Werthe hätten. Beide Eintheilungen der Functionen erster Stufe beständen gleichzeitig, sodass man neun Arten erhielte. Diesen entsprächen wieder neun Arten von Werthverläufen, uneigentlichen Gegenständen, die logisch zu unterscheiden wären. Die Klassen eigentlicher Gegenstände müssten von den Klassen von Klassen eigentlicher Gegenstände unterschieden werden, die Relationen zwischen eigentlichen Gegenständen von den Klassen eigentlicher Gegenstände, von den Klassen von Relationen zwischen eigentlichen Gegenständen u. s. w. So erhielten wir eine unabsehbare Mannigfaltigkeit von Arten; und im Allgemeinen könnten Gegenstände, die verschiedenen dieser Arten angehörten, nicht als Argumente derselben Functionen auftreten. Es scheint aber ausserordentlich schwierig zu sein, eine vollständige Gesetzgebung aufzustellen, durch die allgemein entschieden würde, welche Gegenstände als Argumente welcher Functionen zulässig wären. Ueberdies kann die Berechtigung uneigentlicher Gegenstände bezweifelt werden.

Wenn uns diese Schwierigkeiten davon abschrecken, die Klassen und damit die Zahlen als uneigentliche Gegenstände aufzufassen, wenn wir sie aber auch nicht als eigentliche Gegenstände anerkennen wollen, nämlich als solche, welche als Argumente jeder Function erster Stufe auftreten können, so bleibt wohl nur übrig, die Klassennamen als Scheineigennamen zu betrachten, die also in Wahrheit keine Bedeutung hätten. Sie wären dann anzusehen als Theile von Zeichen, die nur als Ganze eine Bedeutung hätten[1]). Man kann es ja für irgendeinen Zweck vortheilhaft erachten, verschiedene Zeichen in einem Theile übereinstimmend zu gestalten, ohne sie dadurch zu zusammengesetzten zu machen. Die Einfachheit eines Zeichens erfordert ja nur, dass die Theile, die man in ihnen etwa unterscheiden kann, nicht selbständig eine Bedeutung haben. Auch das, was wir als Zahlzeichen aufzufassen gewohnt sind, wäre dann eigentlich kein Zeichen, sondern der unselbständige Theil eines Zeichens. Eine Erklärung des Zeichens »2« wäre unmöglich; man hätte statt dessen viele Zeichen zu erklären, die als unselbständigen Bestandtheil »2« enthielten, aber logisch nicht aus »2« und einem andern Theile zusammengesetzt zu denken wären. Es wäre dann unzulässig, einen solchen unselbständigen Theil durch einen Buchstaben vertreten zu lassen; denn hinsichtlich des Inhalts bestände ja gar keine Zusammensetzung. Die Allgemeinheit der arithmetischen Sätze ginge damit verloren. Auch wäre nicht zu verstehen, wie dabei von einer Anzahl von Klassen, von einer Anzahl von Anzahlen die Rede sein könnte.

Ich denke: dies genügt, um auch diesen Weg als ungangbar erscheinen zu lassen. Es bleibt also wohl nichts anderes übrig, als die Begriffsum-

1) Man vergl. hierzu Bd. I, § 29.

fänge oder Klassen als Gegenstände im eigentlichen und vollen Sinne dieses Wortes anzuerkennen, zugleich aber einzuräumen, dass die bisherige Auffassung der Worte „Umfang eines Begriffes“ einer Berichtigung bedarf.

Bevor wir hierauf näher eingehen, wird es nützlich sein, dem Auftreten jenes Widerspruches mit unsern Zeichen nachzuspüren. Dass $\varDelta$ eine Klasse ist, die sich selbst nicht angehört, können wir so ausdrücken:

$$\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varDelta)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\varDelta\end{array}$$

Und die Klasse der sich selbst nicht angehörenden Klassen wird so zu bezeichnen sein:

$$\grave{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\varepsilon\end{array}\right)^{1)}$$

Ich will zur Abkürzung dafür in der folgenden Ableitung das Zeichen »$\forall$« gebrauchen und dabei wegen der zweifelhaften Wahrheit den Urtheilsstrich weglassen. Demnach werde ich mit

$$»\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}«$$

ausdrücken, dass die Klasse $\forall$ sich selbst angehöre.

Nach (Vb) haben wir nun

$$\top\!\begin{array}{l}(-f(\forall))=\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\\ \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon))=\grave{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\varepsilon\end{array}\right)\end{array}$$

oder, wenn wir die Abkürzung benutzen und (IIIa) anwenden

$$\begin{array}{l}\top\!\begin{array}{l}f(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon))=\forall\end{array}\\ \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\end{array}\qquad(\alpha$$

Nun führen wir für »f« das deutsche »$\mathfrak{g}$« ein:

$$\begin{array}{l}\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\\ \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\end{array}\qquad(\beta$$

d. h.: Wenn $\forall$ sich angehört, gehört es sich nicht an. Das ist die eine Seite.

Andrerseits haben wir nach (IIb)

$$\begin{array}{l}\top\!\begin{array}{l}f(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-f(\varepsilon))=\forall\end{array}\\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\end{array}\qquad(\gamma$$

und wenn wir für »$f(\xi)$« nehmen »$\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\xi)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\xi\end{array}$«:

$$\begin{array}{l}\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\\ \quad\grave{\varepsilon}\left(\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\varepsilon\end{array}\right)=\forall\\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\end{array}\qquad(\delta$$

und mit Berücksichtigung unserer Abkürzung:

$$\begin{array}{l}\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\\ \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\forall)\\ \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\forall\end{array}\end{array}\qquad(\varepsilon$$

d. h.: Wenn $\forall$ sich nicht angehört, so gehört es sich an. Aus (ε) folgt nach (Ig)

1) Wegen des Gebrauchs der griechischen Buchstaben vergl. man Bd. I, § 9.

$$\begin{array}{l}\top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\forall)\\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall\end{array} \qquad (\zeta$$

und hieraus mit (β)

$$\begin{array}{l}-\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\forall)\\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \forall\end{array} \qquad (\eta$$

Die Sätze (ζ) und (η) widersprechen einander. Der Fehler kann allein in unserm Gesetze (Vb) liegen, das also falsch sein muss.

Wir wollen nun sehen, wie sich die Sache gestaltet, wenn wir unser Zeichen »$\frown$« benutzen. An die Stelle von »$\forall$« wird »$\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)$« treten. Indem wir in (82) für »$f(\xi)$« »$\top\xi\frown\xi$«, für »$F(\xi)$« »$-\xi$« und für »a« »$\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)$« nehmen, erhalten wir

$$\begin{array}{l}\top\!\!\top\, \grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\\ \quad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\end{array} \qquad (\vartheta$$

woraus nach (Ig) folgt

$$\top\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon) \qquad (\iota$$

Durch dieselben Einsetzungen erhalten wir aus (77):

$$\begin{array}{l}-\!\!\top\, \grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\\ \quad\llcorner\!\top\, \grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\end{array} \qquad (\varkappa$$

Hieraus folgt mit (ι)

$$-\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon)\frown\grave{\varepsilon}(\top\varepsilon\frown\varepsilon) \qquad (\lambda$$

was dem (ι) widerspricht. Es wird also mindestens einer der beiden Sätze (77) und (82) falsch sein, und also auch (1), aus dem sie folgen. Bei der Betrachtung der Ableitung von (1) im § 55 des ersten Bandes ergiebt sich, dass auch dabei von (Vb) Gebrauch gemacht ist. Auf diesen Satz wird also auch hier der Verdacht gelenkt. Mit (Vb) ist auch (V) selbst gefallen, nicht aber (Va). Der Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit steht nichts im Wege; nur die umgekehrte Umwandlung ist als nicht immer erlaubt nachgewiesen. Damit ist freilich erkannt, dass meine Einführung der Werthverläufe im § 3 des ersten Bandes nicht immer zulässig ist. Wir können nicht allgemein die Worte

„die Function $\Phi(\xi)$ hat denselben Werthverlauf wie die Function $\Psi(\xi)$"
als gleichbedeutend mit den Worten

„die Functionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Werth"

gebrauchen, und wir müssen die Möglichkeit in Betracht ziehen, dass es Begriffe gebe, die — im gewöhnlichen Wortsinne wenigstens — keinen Umfang haben. Die Berechtigung unserer Function zweiter Stufe $\grave{\varepsilon}\,\varphi(\varepsilon)$ wird dadurch erschüttert. Und doch ist eine solche für die Begründung der Arithmetik unentbehrlich.

Wir wollen unsere Untersuchung nun noch dadurch ergänzen, dass wir, statt von (Vb) auszugehen und so auf einen Widerspruch zu stossen, die Falschheit von (Vb) als Endergebnis gewinnen. Um dabei von den immerhin verdächtigen Werthverlaufzeichen unabhängig zu sein, wollen wir die Ableitung ganz allgemein für eine Function zweiter Stufe mit einem Argument zweiter Art [1]) durchführen, indem wir die Bezeichnungsweise in Bd. I, § 25 benutzen. Unsere Zeichenverbindung

$$»\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{g}(\varepsilon)\\ \qquad\llcorner\, \grave{\varepsilon}(-\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon\end{array}\right)«$$

1) Bd. I, § 23, S. 40.

wird demgemäss ersetzt werden durch

$$»\, M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)\,«$$

und auf diesen Fall sind die Bestimmungen, die wir bei den Werthverlaufzeichen in I, § 9 über das Gebiet eines griechischen Buchstabens aufgestellt haben, sinngemäss zu übertragen. Wir haben in unserer Formel zweimal ein » M «, erstens im Anfange, zweitens im Innern. An der Argumentstelle des ersten steht die Functionsmarke

$$»\, \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\xi)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\xi\end{array}\,«$$

an der des zweiten steht » $-\mathfrak{g}(\xi)$ «. Zunächst ergiebt sich Folgendes:

$$\text{IIb}\quad \vdash\begin{array}{l}\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\\ \lfloor\, M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ \lfloor\, \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\end{array}$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l}\neg\, M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\ \lfloor\, \overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\end{array}\qquad(\mu$$

$$\times$$

$$\vdash\begin{array}{l}\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a\end{array}\\ \lfloor\, M_\beta\left(\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\end{array}\qquad(\nu$$

Setzen wir hierin zur Abkürzung

$$»\, \Phi(\xi)\,« \text{ für } »\, \neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\xi)\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\xi\end{array}\,«$$

und setzen wir für » a « » $M_\beta(\Phi(\beta))$ «, so erhalten wir aus (ν)

$$\Phi(M_\beta(\Phi(\beta)))$$

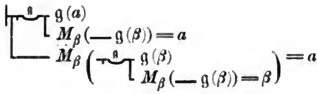
d. h. der Werth unserer Function zweiter Stufe für den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt unter eben diesen Begriff. Andrerseits haben wir aber auch aus (ν)

$$\neg\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\begin{array}{l}\mathfrak{g}(M_\beta(\Phi(\beta)))\\ \lfloor\, M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=M_\beta(\Phi(\beta))\end{array}$$

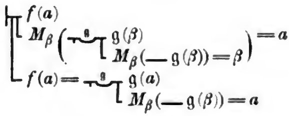
d. h.: Es giebt einen Begriff, für welchen als Argument unsere Function zweiter Stufe denselben Werth erhält wie für $\Phi(\xi)$, unter welchen dieser Werth aber nicht fällt. Mit andern Worten: Für jede Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art giebt es zwei Begriffe der Art, dass sie, als Argumente dieser Function genommen, denselben Werth ergeben, und dass dieser Werth zwar unter den ersten dieser

Begriffe fällt, nicht aber unter den zweiten.

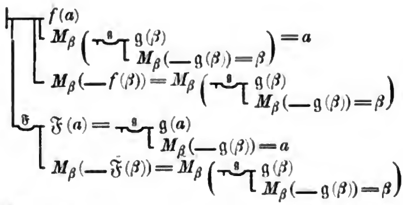
Begriffsschriftlich können wir das so ableiten:

ν 

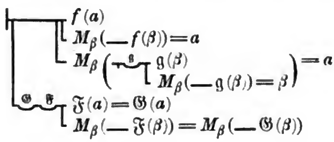
(IIIa): ————————————————

 (ξ

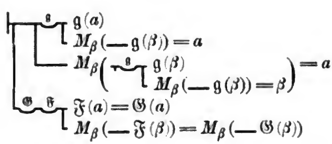
(IIb):: - - - - - - - - - - - - - - -

 (ο

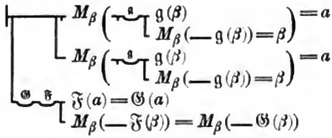
(IIb, IIIa):: = = = = = = = = = = = = = = = = = =

 (π

⌣

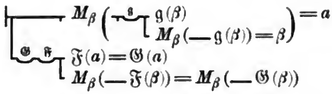
 (ϱ

(μ): - - - - - - - - - - - - - - - - - -



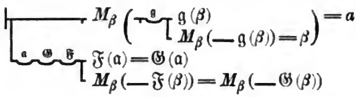
(σ

(Ig): - - - - - - - - - - - - - - - - - -



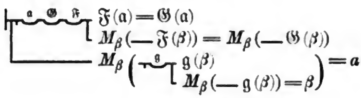
(τ

(IIa):: - - - - - - - - - - - - - - - - -

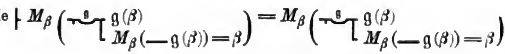


(υ

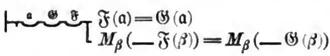
×



(φ

IIIe 

(φ):



(χ

d. h.: Für jede Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art giebt es Begriffe, welche, als deren Argumente genommen, denselben Werth ergeben, obwohl nicht alle Gegenstände, die unter den einen dieser Begriffe fallen, auch unter den andern fallen.

Unser Beweis ist geführt worden ohne Benutzung von Sätzen oder Bezeichnungen, deren Berechtigung irgendwie zweifelhaft wäre. Unser Satz gilt also auch für die Function zweiter Stufe $\dot{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, falls diese zulässig ist, oder in Worten:

Falls allgemein bei jedem Begriffe erster Stufe von dessen Umfange gesprochen werden darf, so kommt der Fall vor, dass Begriffe denselben Umfang haben, obwohl nicht alle Gegenstände, die unter den einen dieser Begriffe fallen, auch unter den andern fallen.

Damit ist aber der Begriffsumfang im hergebrachten Sinne des Wortes eigentlich aufgehoben. Man darf nicht sagen, dass allgemein der Ausdruck „der Umfang eines ersten Begriffes fällt zusammen mit dem eines zweiten" gleichbedeutend sei mit dem Ausdrucke „alle unter den ersten Begriff fallenden Gegenstände fallen auch unter den zweiten und umgekehrt". Wir sehen aus dem Ergebnisse unserer Ableitung, dass es gar nicht möglich ist, mit den Worten „der Umfang des Begriffes $\Phi(\xi)$" einen solchen Sinn zu verbinden, dass allgemein aus der Gleichheit des Umfanges von Begriffen geschlossen werden könne, dass jeder unter den einen von ihnen fallende Gegenstand auch unter den andern falle.

Zu unserm Satze können wir noch auf einem andern Wege gelangen, nämlich so:

$$
\text{IIb}\quad
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \mathfrak{g}(a)\\
\qquad\llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = a\\
\ \ \llcorner\ M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ \llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\
\ \ \llcorner\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \mathfrak{g}(a)\\
\qquad\llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a
\end{array}
$$

$$\times$$

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!-\ M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ \llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a\\
\ \ \llcorner\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \mathfrak{g}(a)\\
\qquad\llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=a
\end{array}
\qquad(\psi
$$

$$\times$$

$$
\begin{array}{l}
\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \mathfrak{g}(a)\\
\qquad\llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta)) = a\\
\ \ \llcorner\ M_\beta\left(\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\beta)\\ \llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\beta\end{array}\right)=a
\end{array}
\qquad(\omega
$$

Setzen wir hier zur Abkürzung »$\Psi(\xi)$« für

$$
»\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \begin{array}{l}\mathfrak{g}(\xi)\\ \llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=\xi\end{array}«
$$

und setzen wir für »a« »$M_\beta(\Psi(\beta))$«, so erhalten wir aus (ω)

$$\top\ \Psi(M_\beta(\Psi(\beta)))$$

d. h. der Werth unserer Function zweiter Stufe für das Argument $\Psi(\xi)$ fällt nicht unter den Begriff $\Psi(\xi)$. Andrerseits haben wir aber auch aus (ω)

$$
-\!\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\top\ \begin{array}{l}\mathfrak{g}(M_\beta(\Psi(\beta)))\\ \llcorner\ M_\beta(-\mathfrak{g}(\beta))=M_\beta(\Psi(\beta))\end{array}
$$

d. h.: es giebt einen Begriff, für den als Argument unsere Function zweiter Stufe denselben Werth erhält wie für $\Psi(\xi)$ und unter den dieser Werth fällt. Auch hier haben wir also zwei Begriffe der Art, dass sie, als Argumente der Function zweiter Stufe genommen, denselben Werth ergeben, der nun unter den zweiten dieser Begriffe fällt, nicht aber unter den ersten. Aus dem Satze (ω) können wir in ähnlicher Weise wie aus (ν) den Satz (χ) ableiten.

Versuchen wir nun, die Function $\grave{\varepsilon}(\!-\!\!-\varphi(\varepsilon))$ als Function zweiter Stufe unserer Sätze zu nehmen! Wir haben dann in

$$\neg\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\xi)\\ \grave{\varepsilon}(\!-\!\!-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\xi\end{array}$$

einen Begriff, unter welchen sein eigner Umfang fällt. Es giebt dann aber nach (ν) einen Begriff, dessen Umfang mit dem eben genannten zusammenfällt, unter welchen dieser Umfang aber nicht fällt. Wir möchten gerne ein Beispiel hierzu haben. Wie ist ein solcher Begriff zu finden? Dies ist nicht möglich ohne genauere Bestimmung unserer Function $\grave{\varepsilon}(\!-\!\!-\varphi(\varepsilon))$ oder des Begriffsumfanges; denn unser bisheriges Kriterium des Zusammenfallens von Begriffsumfängen lässt uns hier im Stiche.

Wir haben andrerseits in

$$\neg\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\xi)\\ \grave{\varepsilon}(\!-\!\!-\mathfrak{g}(\varepsilon))=\xi\end{array}$$

einen Begriff, unter welchen sein eigner Umfang nicht fällt. Nach (ω) giebt es aber dann einen Begriff, dessen Umfang mit dem des eben genannten zusammenfällt, unter welchen dieser Umfang fällt. Alles dies natürlich unter der Voraussetzung, dass der Functionsname »$\grave{\varepsilon}(\!-\!\!-\varphi(\varepsilon))$« logisch berechtigt ist.

In beiden Fällen sehen wir, dass der Begriffsumfang selbst den Ausnahmefall bewirkt, indem er nur unter den einen von zwei Begriffen fällt, die ihn als Umfang haben; und wir sehen, dass sich das Auftreten dieser Ausnahme in keiner Weise vermeiden lässt. Demnach liegt es nahe, das Kriterium der Umfangsgleichheit so zu fassen: der Umfang eines ersten Begriffes fällt zusammen mit dem eines zweiten, wenn jeder Gegenstand mit Ausnahme des Umfanges des ersten Begriffes, der unter den ersten Begriff fällt, auch unter den zweiten Begriff fällt, und wenn umgekehrt jeder Gegenstand mit Ausnahme des Umfanges des zweiten Begriffes, der unter den zweiten Begriff fällt, auch unter den ersten fällt.

Selbstverständlich kann dies nicht als Definition etwa des Begriffsumfanges angesehen werden, sondern nur als Angabe der kennzeichnenden Beschaffenheit dieser Function zweiter Stufe.

Indem wir das, was wir von den Begriffsumfängen gesagt haben, auf Werthverläufe im Allgemeinen übertragen, gelangen wir zu dem Grundgesetze

$$\vdash(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha))=\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\begin{array}{l}f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a})\\ \neg\,\mathfrak{a}=\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)\\ \neg\,\mathfrak{a}=\grave{\alpha}g(\alpha)\end{array}\qquad(\mathrm{V}'$$

das an die Stelle von (V) (I, § 20, S. 36) zu treten hat. Aus diesem Gesetze folgt (Va). Dagegen muss (Vb) folgenden Sätzen weichen:

$$\vdash\!\!\top\begin{array}{l}f(a)=g(a)\\ \neg\,a=\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)\\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha)\end{array}\qquad(\mathrm{V}'\mathrm{b}$$

oder

$$\vdash\!\!\top\begin{array}{l}f(a)=g(a)\\ \neg\,a=\grave{\alpha}g(\alpha)\\ \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)=\grave{\alpha}g(\alpha)\end{array}\qquad(\mathrm{V}'\mathrm{c}$$

Ueberzeugen wir uns nun, dass der früher zwischen den Sätzen (β) und (ε) auftretende Widerspruch jetzt vermieden wird. Wir verfahren wie bei der Ableitung von (β), indem wir statt (Vb) (V'c) benutzen. »v« sei wieder Abkürzung für

$$\text{»}\; \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\top\!\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad\llcorner\; \grave{\varepsilon}(—\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) \text{«}$$

Wir haben nach (V'c)

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\; (—f(\mathrm{v})) = \overset{\mathfrak{g}}{\top\!\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\mathrm{v}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \llcorner\; \grave{\varepsilon}(—\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \mathrm{v} \\
\;\;\llcorner\!\top\; \mathrm{v} = \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\top\!\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad\llcorner\; \grave{\varepsilon}(—\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right) \\
\;\;\llcorner\; \grave{\varepsilon}(—f(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\top\!\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad\llcorner\; \grave{\varepsilon}(—\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)
\end{array}$$

Die Benutzung der Abkürzung ergiebt

$$\begin{array}{l}
\vdash\!\!\top\; (—f(\mathrm{v})) = \overset{\mathfrak{g}}{\top\!\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\mathrm{v}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \llcorner\; \grave{\varepsilon}(—\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \mathrm{v} \\
\;\;\llcorner\!\top\; \mathrm{v} = \mathrm{v} \\
\;\;\llcorner\; \grave{\varepsilon}(—f(\varepsilon)) = \grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\top\!\smile}\!\!\top\; \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \qquad\llcorner\; \grave{\varepsilon}(—\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \varepsilon \end{array}\right)
\end{array}$$

was selbstverständlich ist wegen des Untergliedes »$\top\, \mathrm{v} = \mathrm{v}$« und eben deswegen nie auf einen Widerspruch führen kann.

Wir hatten (I, S. 17) festgesetzt, dass der Umfang eines Begriffes, unter den nur das Wahre fällt, das Wahre sein solle, und dass der Umfang eines Begriffes, unter den nur das Falsche fällt, das Falsche sein solle. Diese Bestimmungen erleiden durch die neue Fassung des Begriffsumfanges keine Aenderung.

Welchen Einfluss hat nun diese neue Fassung auf die Werthe unser Function $\backslash\xi$, wenn wir die Bestimmungen in I, § 11 festhalten? Nehmen wir an, es sei $\Phi(\xi)$ ein leerer Begriff! Dann fiel nach der früheren Fassung des Begriffsumfanges $\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ mit $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ zusammen, weil es keinen solchen Gegenstand $\varDelta$ gab, dass $\grave{\varepsilon}(\varDelta = \varepsilon)$ mit $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ zusammenfiel. Nach der neuen Fassung des Begriffsumfanges giebt es einen solchen Gegenstand, nämlich $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ selbst. Das Ergebnis ist aber wieder dasselbe, nämlich dass $\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ mit $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ zusammenfällt. Dasselbe wird sich ergeben, wenn $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ als einziger Gegenstand unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt. Nehmen wir an, unter den Begriff $\Phi(\xi)$ falle als einziger Gegenstand $\varDelta$, so fällt $\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ mit $\varDelta$ zusammen. Dasselbe geschieht auch noch, wenn ausser $\varDelta$ nur noch $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt; und hier findet ein Unterschied von dem Frühern statt; denn in diesem Falle wäre früher $\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ nicht mit $\varDelta$, sondern mit $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ zusammengefallen. In allen andern Fällen besteht kein Unterschied hinsichtlich der Werthe der Function $\backslash\xi$ bei der alten und der neuen Fassung des Begriffsumfanges, und unser Grundgesetz (VI) gilt jetzt wie früher.

Wir müssen nun noch fragen, wie durch die neue Fassung des Werthverlaufs die Werthe unserer

Function $\xi \frown \zeta$ beeinflusst werden. In dem Falle, dass Γ ein Werthverlauf ist, ist nun nicht mehr in jedem Falle bestimmt, welchen Werth eine Function, deren Werthverlauf Γ ist, für das Argument Θ hat[1]), nämlich dann nicht, wenn Θ mit Γ zusammenfällt. Es kann dann Functionen geben, die denselben Werthverlauf Γ haben, die aber für das Argument Γ verschiedene Werthe haben. Der Umfang des Begriffes

$$\mathrel{\top}\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \xi \\ \llcorner\, \Gamma = \grave{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}$$

kann nun nicht mehr mit dem Umfange eines Begriffes wie $\varDelta = \xi$ zusammenfallen, weil unter diesen $\varDelta$ als einziger Gegenstand, unter jenen aber alle Gegenstände fallen. Denn, wenn Γ ein Werthverlauf und E ein Gegenstand ist, wird es immer möglich sein, eine Function $X(\xi)$ so anzugeben, dass $\grave{\varepsilon}X(\varepsilon) = \Gamma$ und $X(\Gamma) = E$ ist. Nach der Festsetzung in I, § 11 fällt demnach

$$\backslash\grave{\alpha}\left(\mathrel{\top}\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \alpha \\ \llcorner\, \Gamma = \grave{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right)$$

mit $\grave{\alpha}\left(\mathrel{\top}\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \alpha \\ \llcorner\, \Gamma = \grave{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right)$

zusammen. Wenn demnach Γ ein Werthverlauf ist, so ist

$$\Gamma \frown \Gamma = \grave{\alpha}\left(\mathrel{\top}\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \top\, \mathfrak{g}(\Gamma) = \alpha \\ \llcorner\, \Gamma = \grave{\varepsilon}\,\mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}\right)$$

d. h. $\Gamma \frown \Gamma$ ist der Umfang eines allumfassenden Begriffes. Wenn Γ kein Werthverlauf ist, so ist $\Gamma \frown \Gamma$ der Umfang eines leeren Begriffes. Im ersten Falle ist $—\Gamma \frown \Gamma$ das Falsche:

$$\vdash\!\top\, \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \qquad (\alpha'$$

Dies ist wichtig für die Function $\mathfrak{P}\,\xi$. Man könnte zunächst befürchten, dass Begriffe von demselben Umfange nach unsern Festsetzungen dieselbe Anzahl erhalten müssten, obwohl unter den einen ein Gegenstand mehr, als unter den andern, nämlich der Begriffsumfang selbst fiele, sodass man schliesslich nur eine einzige endliche Anzahl erhielte. Indessen kommt bei $\mathfrak{P}\,\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ nicht der Begriff $\Phi(\xi)$, sondern $—\xi \frown \grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ in Betracht, und unter diesen fällt der Begriffsumfang $\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$ nicht, wenn er auch unter den Begriff $\Phi(\xi)$ fällt.

Wiederholt man die Ableitung von (1) (I, § 55) mit (V'b) statt mit (Vb), so erhält man statt (1) den Satz (1'):

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \quad\llcorner\!\top\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array} \qquad (1'$$

aus dem statt (77) und (82) die Sätze (77') und (82') abzuleiten sind:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \\ \quad\llcorner\, F(f(a)) \\ \quad\llcorner\!\top\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \quad (77' \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdash\!\top\, F(f(a)) \\ \quad\llcorner\, F(a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)) \\ \quad\llcorner\!\top\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \quad (82' \end{array}$$

Wir ziehen noch einige Folgerungen.

$$\alpha' \quad \vdash\!\top\, \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$$

(IIIa): ———————

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \quad\llcorner\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array} \qquad (\beta'$$

(Ia): — — — — —

$$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, f(a) \\ \quad\llcorner\, a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \\ \quad\llcorner\, a = \grave{\varepsilon}f(\varepsilon) \end{array}$$

(82'): —·—·—·—·—

1) Vergl. I, S. 53.

$$\vdash\!\begin{array}{l} f(a) \\ a \frown \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \end{array} \qquad (82''$$

———•———

$$82'' \vdash\!\begin{array}{l} \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \\ \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \end{array}$$

(Ig): ————————

$$\vdash \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \qquad (\gamma'$$

Dies folgt ganz so, wie oben (ι). Jedoch entsteht hier kein Widerspruch, wie wir gleich sehen werden. (γ') ist nur ein besonderer Fall von (α').

$$77' \vdash\!\begin{array}{l} \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \\ \top\, \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \\ \top\, \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \end{array}$$

$\times$

$$\vdash\!\begin{array}{l} \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \\ \top\, \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \frown \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \end{array} \qquad (\delta'$$

(γ'):: ————————

$$\vdash \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\top \varepsilon \frown \varepsilon) \qquad (\varepsilon'$$

(ε') ist ein besonderer Fall von (IIIe). Ein Widerspruch ist nicht aufgetreten.

Es würde hier zu weit führen, den Folgen der Ersetzung von (V) durch (V′) weiter nachzugehen. Es ist ja nicht zu verkennen, dass vielen Sätzen Unterglieder hinzugefügt werden müssen; aber es ist wohl nicht zu besorgen, dass hieraus wesentliche Hindernisse für die Beweisführung entstehen werden. Immerhin wird eine Durchprüfung aller bisher gefundenen Sätze nöthig sein.

Als Urproblem der Arithmetik kann man die Frage ansehen: wie fassen wir logische Gegenstände, insbesondere die Zahlen? Wodurch sind wir berechtigt, die Zahlen als Gegenstände anzuerkennen? Wenn dies Problem auch noch nicht so weit gelöst ist, als ich bei der Abfassung dieses Bandes dachte, so zweifle ich doch nicht daran, dass der Weg zur Lösung gefunden ist.

Jena, im Oktober 1902.

Wörterverzeichnis.

Die Ziffern geben die Seiten an.

Gebiet (Σ-Gebiet) 169.
Glied (als erstes, zweites Glied einer Relation auftretend) 171.
Grenze (Σ-Grenze von Φ) 187.
Grössengebiet 158, 160.
grösser 185.
Klasse 159.
Klasse endlicher Anzahlen 161.
Logischer Gegenstand 86, 149.
Nullrelation 176.
Positivalklasse 171.
Positivklasse 189.
Relation 160.
Zuerst 2

Frommannsche Buchdruckerei (Hermann Pohle) in Jena. — 2276

Due
Date ~~Loaned~~

SEP 12	1962		
14 Ja 66			
MR 19 '79			
SE 12 '80	→oct. 10		
OC 14 '81			

Demco 292-5