Abhandlungen über den mathematisc... Unterricht in Deutschland

International Commission on the Teaching of ...

International Commission on the Teaching of Mathematics.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN

BAND III HEFT 6

DIE
GESCHICHTE DER MATHEMATIK
IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHTE DER HÖHEREN SCHULEN DEUTSCHLANDS

DARGESTELLT

VOR ALLEM AUF GRUND ALTER UND NEUER LEHRBÜCHER
UND DER PROGRAMMABHANDLUNGEN
HÖHERER SCHULEN

VON

DR. MARTIN GEBHARDT
PROFESSOR AM VITZTHUMSCHEN GYMNASIUM ZU DRESDEN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

Vorwort.

Die mir von der IMUK gestellte Aufgabe ließ mehrere Lösungen zu und ich bin mir bewußt, nur eine davon gegeben zu haben. Ob es die dem Zwecke dieser Veröffentlichungen am meisten entsprechende ist, muß der Leser entscheiden.

Je mehr bei Vertiefung in die Vorarbeiten die zu berücksichtigende Literatur in nicht geahnter Weise an Umfang zunahm, um so mehr überzeugte ich mich, daß vieles von dem, was ich zu sagen vorhatte, schon anderwärts, wenn auch vielfach zerstreut und zeitlich auseinanderliegend, in Schriften aller Art niedergelegt worden war.

Nun soll nach meiner Auffassung durch die vorliegende Abhandlung weniger die vollständige Behandlung des Themas durch einen Einzelnen bezweckt werden; es soll vielmehr in erster Linie ein Zustand mit möglichster Treue geschildert, auch sein Entstehen durch Blicke in die Vergangenheit verfolgt werden. Dies ist der Grund, warum ich mir Selbstbeschränkung auferlegte und überall dort andere zu Worte kommen ließ, wo fremde Gedanken sich mit den eigenen deckten.

Dadurch habe ich mir meine Aufgabe nicht erleichtert. Es ließen sich Wiederholungen nicht immer vermeiden, ebensowenig wie ein Rückgreifen auf schon einmal Zitiertes zu umgehen war. Dafür hoffe ich aber ein einigermaßen zuverlässiges Gesamtbild gezeichnet zu haben, dem deutliche Umrisse und Unterscheidungslinien nicht fehlen.

Die beiden ersten Teile nahmen ganz den Charakter einer Literaturstudie an. Wenn sie auch vielleicht manchem Leser allzu ausführlich erscheinen, so mag doch beachtet werden, daß sie nur eine Auswahl aus der Fülle des Stoffes enthalten, allerdings eine solche, die wesentliche Lücken zu vermeiden sucht. Darauf kam es mir besonders an. Vollständigkeit erstrebte ich nicht, schon um den Umfang der Abhandlung in mäßigen Grenzen zu halten. Daß mir bei der unheimlich angeschwollenen Flut von Lehrbüchern und Programmen und bei der knappen mir zur Verfügung gestellten Zeit manches entgangen sein wird, befürchte ich; hoffe aber doch, daß die Entwicklung des geschichtlichen Gedankens im Lehrbuche in den hauptsächlichsten Zügen hervortritt.

Je weiter der Leser vorschreitet, um so mehr wird er ein Vorwiegen der persönlichen Ansichten des Verfassers feststellen; dies gilt insbesondere für den methodischen, vierten Teil, bei dem ich von der Erlaubnis der IMUK Gebrauch gemacht habe, bei aller Verständigung in den leitenden Grundsätzen in freier Meinungsäußerung eine „persönliche Note" anklingen zu lassen.

Aufrichtig dankbar bin ich den Herren und den Verlagsbuchhandlungen, die mir schwer zugängliche Bücher bereitwilligst zur Verfügung stellten. Insbesondere danke ich auch an dieser Stelle Herrn Direktor Dr. Schotten in Halle, der mir eine Durchsicht seiner wohl einzig dastehenden Sammlung von Schullehrbüchern der Geometrie an Ort und Stelle freundlichst gestattete.

Eine Lücke in der Darstellung könnte darin gefunden werden, daß die nichtdeutschen Veröffentlichungen, insbesondere die geschichtlich belehrenden Werke, wenig Beachtung fanden. Solche Beschränkung rechtfertigt sich dadurch, daß die IMUK in fast allen Kulturstaaten Unterabteilungen besitzt, denen die Bearbeitung ihrer Sondergebiete überlassen bleiben kann. —

Es ist meist nur kurz vom „Gymnasium" die Rede. Ich kann nicht leugnen, daß ich dieses, d. h. das „humanistische" Gymnasium vorwiegend im Auge habe. Das ist bis zu einem gewissen Grade natürlich, da sich meine Lehrerfahrung während der letzten dreizehn Jahre auf einer solchen Anstalt herausgebildet hat, nachdem ich zuvor fünf Jahre an einem Realgymnasium tätig gewesen war. Es erklärt sich aber auch dadurch, daß sich die ausführlich besprochenen Beziehungen zwischen Mathematik und klassischem Altertum auf dem humanistischen Gymnasium am besten pflegen lassen. Dennoch gelten meine Ausführungen mit aus der Sache selbst sich ergebenden Abänderungen auch für reale Anstalten. Wer sich für die Idee geschichtlicher Belehrung im mathematischen Unterricht erwärmt, der wird — daran zweifle ich nicht — für jedwede Gattung der höheren Schule aus der vorliegenden Abhandlung Anregung und Ansporn entnehmen können.

Es wäre mir ein schöner Lohn, wenn ein Teil der Begeisterung, die mich für die Sache erfüllt, auch auf andere überginge. Und diejenigen Fachgenossen, die ich nicht zu überzeugen vermochte — meist werden es wohl ältere Herren sein — bitte ich, meine Anregungen nicht kurzerhand zurückzuweisen, sondern vorurteilsfrei einmal einen Versuch im Sinne derselben zu machen. Ich lebe der festen Überzeugung, daß ihre Erfahrungen nicht enttäuschen werden. Denen aber, die eine Überfrachtung des mathematischen Schiffleins befürchten, empfehle ich, zuerst den dritten Abschnitt des vierten Teiles zu lesen.

Mit dem ausführlichen Literaturverzeichnisse hoffe ich manchem einen Gefallen zu erweisen. Möge es recht viele Lehrer der Mathematik zu eigenem Nachforschen anregen und sie auf manche treffliche, wenig bekannte Arbeit aufmerksam machen. Möge es ferner den Blick auf solche Lehrbücher lenken, die geschichtliche Anregung in den Unterricht zu verpflanzen, also einen Teil der Reformpläne zu verwirklichen bestrebt sind, die in den vielseitigen Publikationen der IMUK ihren lebendigen Ausdruck finden.

Zum Schlusse erfülle ich noch gern Pflichten der Dankbarkeit. In erster Linie danke ich ehrerbietigst dem Königlich Sächsischen Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts, das die Kosten für den mir aus Anlaß dieser Arbeit persönlich erwachsenen Aufwand übernahm; sodann danke ich den Herren Mitgliedern der IMUK, die mich bereitwilligst und unermüdlich bei der Korrektur unterstützten, ganz besonders Herrn Geheimrat F. Klein, der durch briefliche Mitteilungen und in wiederholten persönlichen Unterredungen diese Arbeit wesentlich gefördert hat; und endlich Herrn Gymnasiallehrer E. Sporbert und Fräulein stud. E. Tischer, die mich durch die zeitraubende Zusammenstellung des Literaturverzeichnisses, bezw. des alphabetischen Registers in arbeitsreicher Zeit freundlichst entlasteten.

Dresden, im Juni 1912.

Martin Gebhardt.

Inhaltsübersicht.

IV. Teil.

Methodisches.

V. Teil.

I. Teil.

Das Schulbuch und die Geschichte der Mathematik.

I. Das Geschichtliche im Lehrbuche früherer Zeit.

Vorbemerkung.

Da es auf direktem Wege kaum möglich ist, festzustellen, inwieweit an den einzelnen höheren Schulen des Deutschen Reiches die Geschichte der Mathematik im Unterricht früher Berücksichtigung fand und heutzutage findet, ist es wohl erlaubt, sich davon durch ein Studium der Schullehrbücher und solcher Werke, die in der Hand des Lehrers dem Unterrichte dienen sollen, ein Bild zu machen. Ein Durchblättern des referierenden Teiles der Schulprogramme ergab keine nennenswerte Ausbeute. Es ist zu bedauern, daß in ihnen die üblichen Jahresübersichten über den im Berichtsjahre erteilten Unterricht meist recht dürftig, zudem auch recht stereotyp ausfallen. Kommt es doch vor, daß zehn Jahre oder länger für eine Klasse dieselben zwei oder drei Zeilen auftreten, obgleich doch anzunehmen ist, daß während dieser Zeit zum mindesten in einigen Kapiteln Verschiebungen, Kürzungen oder Erweiterungen des Pensums eingetreten sind. Gerade die kleineren oder besser gesagt feineren Abänderungen gewähren nicht selten einen für den fernstehenden Beurteiler wertvollen Einblick in die Wandlungen der Methode und den Fortschritt des Unterrichtsbetriebes. Ihre Niederschrift in den Jahresberichten würde diesen mehr Leben und statistischen Wert verleihen und sie des nüchternen Gewandes einer bloßen Kopie der amtlichen Lehrordnung entkleiden. Die Mehrausgaben für den Druck dürften kaum in die Wagschale fallen. Es wäre mit Dank zu begrüßen, wenn die hier ausgesprochene Anregung auf fruchtbaren Boden fiele.[1])

Vom Ende des 18. Jahrhunderts bis um 1840. (Heis.)

(Die Zeit der einseitigen Herrschaft des klassischen Gymnasiums.)

Halten wir uns also an die Schulbücher und werfen wir zunächst einen Blick in die Vergangenheit.[2]) Wenn auch schon im 18. Jahr-

---

1) Anders steht es mit den wissenschaftlichen Abhandlungen und sonstigen literarischen Beigaben der Schulprogramme. Vergl. II. Teil.

2) Schon in einem mathematischen Lehrbuche Deutschlands aus dem 16. Jahrhundert ließ sich das Bestreben nachweisen, dem abgeschlossenen Lehrgange zum

hundert durch einen Schüler des Pietisten A. H. Francke, den Inspektor der Schule zu Bergen, J. F. Hähn[1]) (1749) für den höheren Unterricht „eine geschichtliche Übersicht über die Entwicklung der verschiedenen mathematischen Disziplinen und ein Eingehen auf die geschichtliche Wandlung wichtiger Probleme" gefordert wurde, so war es doch nicht möglich, in Lehrbüchern der Zeitgenossen die Befolgung dieser Anregung nachzuweisen.[2])

Vielleicht darf aber an Abraham Gotthelf Kästners: „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv" (1. Aufl. 1758, Göttingen)[3]) erinnert werden, die zusammenhängende geschichtliche Darstellungen im Texte enthalten, so z. B. [bei dem Kapitel über Zählen und Ziffern S. 30—33] über Fingerzählen, Sandrechnung, Rechenbrett und Steinchenrechnung. Auch der Entwicklung des Feldmessens (S. 280—282), der Geschichte des Proportionalzirkels (S. 344—345) und früherer Behandlung des Problems der Quadratur des Kreises geschieht Erwähnung. Kästner verleugnet also gelegentlich zwar nicht seinen Sinn für das Historische, wirkliche Geschichte der Mathematik aber bietet er nicht. Anders steht es mit den späteren Bänden des Kästnerschen Werkes, die der angewandten Mathematik (Mechanik, Optik, Astronomie, Geographie, Chronologie und Gnomik) gewidmet sind. Diese sind mit historischen und literarischen Mitteilungen reicher bedacht. In der Vorrede von II, 2 (S. V) sagt der Verfasser: „Der Zustand der Wissenschaft bis auf seine Zeit soll es (das Buch) wenigstens historisch darstellen." Dasselbe

Schlusse einige Originale aus früherer Zeit hinzuzufügen. Es betrifft dies die „Arithmeticae practicae methodus facilis" per Gemmam Frisium, Medicum ac Mathematicum, Lipsiae 1568. Der Anhang ist überschrieben: „Ad finem huius libelli eruditissimi visum est nobis adiungere venustissimum Problema Aristotelis, item alia quaedam amoena exempla, quae speramus studiosis et voluptatem et utilitatem allatura". Dann folgt im griechischen Urtext und in lateinischer Übersetzung das Problem des Aristoteles „in quo disputat, cur in numerando ad denarium usque progrediamur, et mox eundem numerum iteremus, quotiens oporteat". Schließlich kommen einige Textgleichungen in Versen, zuerst die bekannte Aufgabe von der „Eselin und der Eselin Mutter" in griechischen Hexametern und in 2 lateinischen Übersetzungen von Melanchthon (Hexameter) und Joachim Heller (Distichen). Vergl. Anm. 2 Seite 32.

1) Vergl. Franz Pahl: Die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen. Teil II. Progr. Charlottenburg 1899. S. 11, wo es heißt: „Hähn . . . verlangt, man solle den Schülern bei gewissen Problemen zeigen, wie in früheren Zeiten dieser oder jener die Lösung derselben angefaßt habe und wie man schließlich zur eigenen Lösung gekommen sei." „Hervorzuheben ist, daß Hähn auch für die mathesis applicata eine geschichtliche Übersicht über die Entwicklung der betreffenden Disziplin verlangt." Hähn sprach sich so in einer Programmschrift vom Jahre 1749 aus, die betitelt ist: „Gedanken, wie dem künftigen Verfall der Mathematik vorzubeugen." Vergl. auch Simon, Didaktik usw. 2. Aufl. S. IX, 6.

2) Der Elementarunterricht lag damals ohnehin an der Universität und kam erst 1810—1830 an die Gymnasien.

3) Die Zitate erfolgten nach der 5. Auflage, Göttingen, Vandenhoek und Ruprecht 1792.

gilt von Kästners geometrischen Abhandlungen vom Jahre 1790, die mit einem Auszuge aus Gerberts Geometrie beginnt. Köstlich zu lesen ist übrigens hier das Vorwort, in dem sich Kästner ebenso redegewandt, wie unverblümt mit literarischen Gegnern abfindet.

Für den folgenden Überblick ist eine lückenlose Wiedergabe der alten Lehrbuchliteratur weder beabsichtigt, noch für unseren Zweck erforderlich; es kam dem Verfasser nach eingehender Durchforschung des ihm zugänglich gewordenen Materials lediglich darauf an, an typischen Beispielen zu zeigen, in welchem Tempo und nach welchen Gesichtspunkten das Geschichtliche im Lehrbuche der höheren Schulen Eingang fand.

Um die Wende des 19. Jahrhunderts[1]) erschien (1805) die Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch („Privatlehrer der Mathematik"), der größerer Einfluß auf den Unterricht und eine lange Lebensdauer beschieden sein sollte. Heute ist sie, wie Lietzmann[2]) feststellt, kaum noch im Gebrauche, wenngleich sie 1880 noch an etwa 30 Preußischen Gymnasien eingeführt war. Wenn nun auch die erste Auflage nicht gerade Geschichte der Mathematik enthält, so ist doch das Bestreben des Verfassers bemerkenswert, einzelne Probleme in ihrer geschichtlichen Entwicklung zu besprechen; so macht er z. T. recht vollständige Angaben über die Schriften, die wichtige Probleme vergangener Zeit behandelten, beispielsweise für die Polygonometrie, die elementare Behandlung der Maximal- und Minimalrechnung, oder die Lösung der Aufgabe, einem Kreise ein Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

Immer wieder kehren alte Aufgaben, wie die vom Maulesel und der Eselin, vom springenden Hasen, vom Delischen Problem und ähnliche. Wir finden sie z. B. in der „Sammlung vermischter algebraischer Aufgaben zur Übung für Anfänger" von C. W. Brunner[3]) (Ans-

1) Ein Lehrbuch dieser Zeit, das zwar nicht Schulbuch gewesen ist, aber der Geschichte einen weiten Rahmen gewährt, ist C. F. Pfleiderers „Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben". (Tübingen 1802.) Es schließt, auf die einzelnen Abschnitte verteilt, eine genaue Geschichte der Trigonometrie in sich ein, insbesondere eine solche der „Chorden-Tafeln" und „Sinus-Tafeln". Besonders beachtenswert ist darin auch die nahezu 80 Seiten einnehmende „Geschichte der Auflösung der ebenen Dreiecke". Geht das Buch auch vielfach auf Kästner und Montucla zurück, so enthält es doch viel eigene Forschungsergebnisse und liefert einen wertvollen Beweis dafür, daß schon um 1800 ein mathematisches Lehrbuch in vertiefter und gründlicher Weise auf historischem Grunde aufgebaut werden konnte.

2) JMUK Abhandlungen I, 1 S. 8.

3) Die hier zusammengestellten Textgleichungen können großenteils den Anspruch auf Originalität erheben, nicht immer auch den auf pädagogischen Takt. Ob man wohl heute fünfzehnjährigen Gymnasiasten Aufgaben bieten möchte, die da handeln von einer Jungfrau, die so und so viele Liebhaber hat, von Liebeleien, bei denen die Anzahl der Küsse eine mathematische Rolle spielt; von einer „schwangeren Frau", die gegen die Erwartung des gestorbenen Gatten Zwillinge

bach 1802.) Schon mehr beachtenswert ist ein 1809 zur Ostermesse bei Richter in Altenburg und Leipzig erschienenes, bereits 1811 wieder aufgelegtes Schulbuch von L. Lüders: „Geschichte der Mathematik bey den alten Völkern für die höheren Klassen der Gymnasien....." oder: „Pythagoras und Hypatia". Es trägt eingangs das Motto aus Herder: „Philosoph, willst du den Stand deines Jahrhunderts ehren und nützen: das Buch der Vorgeschichte liegt vor dir, ein Wunderbuch voll Weissagungen! auf dich ist das Ende der Tage kommen! lies!" Nach einer schwülstigen „Kronos, Klio und Kalliope" überschriebenen Einleitung, die in philosophisch-theologisch-teleologischen Auseinandersetzungen den Wert geschichtlicher Betrachtungen im allgemeinen zu begründen sucht, folgt eine chronologisch-biographische Darstellung über „alle" Mathematiker vom Jahre 2837 vor Chr. bis 700 nach Chr. Es sind ihrer nicht weniger als 254, darunter finden sich ganz unbekannte Namen. Wenn auch der Verfasser in der Einleitung davor warnt, mit dem Einprägen von Namen und Daten eine „Gedächtnismarter" zu treiben, so dürfte doch seine Art der Darstellung wenig geeignet gewesen sein, dieser Warnung Nachdruck zu verleihen, sie bietet ein merkwürdiges Durcheinander von trockenem Schematismus und blumenreicher, vielfach dichterischem Schwunge nacheifernder Sprache, verliert sich nur zu oft in belanglosen Einzelheiten und versteht es nicht, die großen Hauptsachen in scharfen Umrissen in den Vordergrund zu stellen. Babylonier und Ägypter werden mit keinem Worte erwähnt; dagegen kommen zwei Chinesen vor, denen Erfindungen in der Erdmessung und der Mechanik nachgerühmt werden. Jedenfalls liefert das Buch einen beachtenswerten Aufschluß darüber, wie einzelne sich vor 100 Jahren geschichtliche Belehrung der Primaner etwa gedacht haben.

Daß man solchen Anregungen sehr bald schon in nennenswerter Weise nachkam, ist nicht anzunehmen. Die Lehrbücher aus den beiden ersten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts bieten nichts oder nur wenig Historisches, freilich mit bemerkenswerten Ausnahmen. So erschien 1817 in Dresden das Lehrbuch der Arithmetik für Gymnasien von Friedrich Schmeißer, das seiner ganzen Anlage und Methode nach besonders hervorgehoben zu werden verdient. Der Verfasser führt sich ein als „Doktor der Philosophie, Lehrer bei der Ritterakademie zu Dresden und Mitglied der Lateinischen Gesellschaft zu Jena" und beginnt mit einer Vorrede, welche die für moderne Begriffe ungewöhnliche, aber damaliger Gepflogenheit nicht widersprechende Länge von 140 Seiten hat. Diese Vorrede stellt eine Art neues Programm für die

gebärt und nun schwierige Erbteilung hat; von Stutzern, die hübsche Mädchen mit „zärtlich schmachtenden" Worten, wie: meine Huldgöttinen, anreden; ...? Wie man hier an ein „galantes" Zeitalter erinnert wird, so kann man auch in anderen Fällen hübsche Kulturstudien an solchen Textgleichungen machen, die im Laufe der Jahrzehnte in kennzeichnender Weise einander ablösen.

Behandlung der Mathematik im Unterrichte der Oberstufe auf. Der Verfasser stellt zunächst fest, daß er sich in den Kreisen der Gelehrten und Fachleute durch enge Fühlungnahme weitgehender Zustimmung versichert habe. Er wünscht erstens eine den ganzen Unterricht durchsetzende Würdigung der Mathematik unter andauernder Anlehnung an ihre geschichtliche Entwicklung, vornehmlich im Altertume und eine fortgesetzte „Nebeneinanderstellung der antiken und modernen Ansichten"; zweitens möchte er eine an die Platonische Methode anknüpfende „zwanglose synthetisch-heuristische" Lehrweise eingeführt haben, im Gegensatz zur Euklidischen, der er vorwirft, durch Voraufstellen des Folgesatzes und nachgebrachte Prämissen eine Art Überrumpelungsbeweis zu geben, der zum bloßen Anerkennen zwinge. Unwillkürlich wird man hier an Schopenhauers Wort vom Mausefallenbeweis erinnert; drittens schildert er nach einer langen Auslassung über den Bildungswert der Mathematik den Zweck und die Einrichtung seines Buches. Er wünscht „neben dem unermeßlichen Nutzen, welchen die Mathematik durch ihre Lehren für das praktische Leben gewährt, auch die ursprünglichen nicht minder wichtigen Vorteile derselben als Gymnastik des Geistes soweit als möglich zu erreichen". Er veranlaßt zu diesem Zwecke den reiferen Schüler „auf analytischem Wege zu dem Gebiete der Wissenschaft ein- und vorzudringen, dem Aufsuchen eines Grundes gleichend, auf welchem sich ein fester Bau erheben soll". Dazu erscheint ihm auch eine Einführung in die Geschichte der Wissenschaft ersprießlich. Er fügt daher „nach einigen, die Wissenschaft angehenden Lehren" einen Abschnitt über die Geschichte derselben ein, „welcher an keinem Orte einen schicklicheren Platz" finden könnte. Aber Schmeißer ist vorsichtig. Er möchte nicht den Anschein erwecken, als ob ihm geschichtliche Belehrung als conditio sine qua non gelte. Daher sagt er: „wenn § 18 (über den Nutzen der Mathematik) einer größeren Ausführung würdig ist, um das junge Gemüt den unermeßlichen Nutzen beherzigen zu lassen, welchen die Mathematik auf die Kultur des Menschengeschlechts in aller Hinsicht gehabt hat, und um möglichst größte Achtung in ihm zu erwecken, so kann dagegen der Entwurf der Geschichte derselben (§ 19—20) hier vielleicht ganz überschlagen oder bloß durchgelesen und am Ende des Lehrganges nach Maßgabe der noch übrigen Zeit erörtert werden". Sehen wir nun nach, inwieweit er im Lehrbuche selber das Historische pflegt. Da fällt zunächst schon bei flüchtigem Durchblättern auf, daß überall im Texte reichlich die griechischen und lateinischen Worte für mathematische Kunstausdrücke eingestreut sind, wobei selbst sprachlich-grammatikalische Erläuterungen nicht fehlen. Sodann aber ist das ganze Buch mit historischen Fußnoten reichlich durchwebt, „mit denen man den Schüler wohl bekannt mache". Diese Noten betreffen biographische, bibliographische und sachlich aufklärende Einflechtungen, die oft mehr dem gelehrten Kommentar eines Werkes gleichen, dem die Geschichte der Mathematik Selbstzweck ist. Der schon oben zitierte § 19 ist im Haupttext sehr knapp gehalten, verweilt länger bei dem Altertume und zählt für die letzten drei Jahrhunderte fast nur Namen auf, bei Regiomontanus, Petrus Ramus und Stifel beginnend bis zu Euler, d'Alembert, „de la Grange", Vega, Hindenburg, Carnot und Gaus (!) herab. Dafür nehmen die Fußnoten nahezu den zehnfachen Raum des Haupttextes ein. Besonders interessiert uns noch ein mit Bötticher (Dresden, 1. Oktober 1816) unterschriebenes, rein historisches Kapitel, das unter Beidruck eines Kupferstiches die „Abbildung einer alten Rechentafel" behandelt, die auf einem Sarkophag-Relief des Kapitolinischen Museums aufgefunden wurde. Die Darstellung ist reichlich wissenschaftlich-historisch sowie mit philologischer Weisheit gespickt und beruht, wie sich aus der zeitgenössischen Literatur nachweisen[1]) läßt, auf eigenem Quellenstudium des Verfassers; eine allgemeine Betrachtung über das antike ἀβάκιον (Rechenbrett) schließt sich noch an. So hat denn das Schmeißersche Lehrbuch mehr den Charakter eines Führers für die Hand des Lehrers, fordert aber durch seinen gediegenen Inhalt und die frische Begeisterung, die es durchweht, unsere Beachtung heraus, es konnte als wichtiges methodisches Dokument hier nicht mit wenigen Worten abgetan werden. Auch decken sich seine Vorschläge insofern mit modernen Anschauungen, als es die Mathematik durchaus als Selbstzweck, ihre Geschichte aber nur als Rankenwerk gelten läßt, das jene im Unterricht wie mit frischem Grün umkleiden und mit anderen Gebieten des Wissens organisch verbinden soll.

Aus demselben Jahre (1817) ist ferner das schon 1810 in erster Auflage erschienene Lehrbuch der reinen Mathematik von Friedr. Kries, Professor am Gymnasium zu Gotha, hervorzuheben. Es dient zwei Kursen, einem ersten für Prima und einem zweiten für Selecta. Dieser letztere enthält einen „kurzen Abriß der Geschichte der Mathematik", der zuerst genauer die Griechen, dann kürzer die Araber — die Inder überhaupt nicht — behandelt. Dann geht er, bei Roger Bacon beginnend, zur Mitte des 18. Jahrhunderts über und liefert kurze Charakteristiken der folgenden Zeitalter unter Aufzählung vieler Namen. Wertvoll ist es, daß Kries dem Lehrer Quellen für seine mathematische Belehrung zusammenstellt. In erster Linie hebt er Montucla (1758) hervor, dann Bossuts Essai sur l'histoire des Mathématiques (1802), Kästners Geschichte der Mathematik (1796—1800), Murhards Literatur der mathematischen Wissenschaften (1797—1805) und Scheibels Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis (1796—1798). — Nur wenig Historisches (über die Zahl π, die halbregelmäßigen Polyeder, Mascheronis Géométrie du compas und den Pythagoreischen Lehrsatz sowie das

1) A. Peters, Über das Studium der Mathematik auf Gymnasien (Dresden 1828) S. 5.

Parallelenproblem) findet sich in den Anfangsgründen der Geometrie in einer natürlichen Ordnung und „nach durchaus neuem Plane" von E. Develey, das C. F. Deyhle, Lehrer der Mathematik in Stuttgart (1818) übersetzte. „Der durchaus neue Plan" umschloß also nicht die Forderung, gründlichen Einblick in die Geschichte der Wissenschaft zu geben. —

In den zwanziger Jahren werden Lehrbücher mit geschichtlichen — allerdings meist nur auf das Griechentum zurückgreifenden — Betrachtungen häufiger. Es sei zunächst Matthias hervorgehoben, den Schmeißer wiederholt mit zustimmenden Worten erwähnt. Dieser „ebenso gelehrte Mathematiker, als geistvolle Schulmann" war Rektor der Domschule zu Magdeburg; er hat 1814 einen Leitfaden für den heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Größenlehre, Elementargeometrie, ebene Trigonometrie, gemeine Algebra und die Apollonischen Kegelschnitte geschrieben. Außerdem gab er drei Bände Erläuterungen zu diesem Leitfaden heraus, denen wieder nach damaligem Brauche eine sehr lange und ausführliche Vorrede vorausgeschickt wird. In dieser Vorrede[1]) rechtfertigt er u. a. die Zufügung geschichtlicher Notizen, die er am Schlusse jedes Abschnittes bietet, mit folgenden Ausführungen: „eigentlich zwar kann die Geschichte einer Wissenschaft nur für den Kenner derselben ein Interesse haben, ein desto größeres und innigeres, je mehr er ein gründlicher Kenner ist; aber auch den Schüler schon kann sie im einzelnen interessieren, wenn er seine wissenschaftlichen Kenntnisse mehr der eigenen Kraftanwendung, als dem akroamatischen Lehrvortrage verdankt. Denn das Eigentümliche, womit die Geschichte einer Wissenschaft, oder einzelner Teile und Lehren derselben, den Nachdenkenden anspricht, ist doch eigentlich der Gang, welchen die Erfinder und die Entdecker nahmen, um zu ihren Erfindungen und Entdeckungen zu gelangen; sind die ersten Ideen zu diesen; sind die Bemerkungen, wie sie nach und nach zu wissenschaftlichen Wahrheiten ausgebildet wurden. Für den guten Kopf, der auch selbsttätig in den Geist einer Wissenschaft eingedrungen, liegen in der Geschichte derselben neue Antriebe zur Tätigkeit; ihm gewährt die Kenntnis, wie sie von ihren ersten Ideen an allmählich zu ihrer Vollendung sich erhob, eben auch deswegen einen hohen Genuß, weil er dort im großen wiederfindet, was ihm die Erfahrung über sich selbst bei seinen eigenen Forschungen zeigte: „auch er ging aus der ungewissen Dämmerung nach und nach zum vollen, heiteren Lichte des Tages". „Die geschichtlichen Notizen . . . . mögen dem Schüler auch dazu dienen, wobei es allerdings auf den Vortrag des Lehrers mit ankommen wird, ihm dankbare Achtung für die Unsterblichen einzuflößen, deren Talenten und unermüdlichem Forschen auch er das Licht verdankt, das ihm auf seinen wissenschaftlichen Pfaden

1) 1. Abteilung. S. 47 und 48.

so milde und freundlich leuchtet." Diese schönen Worte möchten wir auch jetzt nach hundert Jahren uneingeschränkt zu den unsrigen machen, zumal sie sich durch Erfassung des Kernes der Sache und wohltuende Mäßigung auszeichnen. Übrigens bietet Matthias nicht nur die erwähnten zusammenhängenden Abschnitte, sondern durchsetzt auch den mathematischen Lehrstoff viel mit gelehrtem Beiwerk historischen Inhaltes und mit reichen Literaturnachweisen. Matthias kann jedem, der Literaturstudien für die Zeit um 1800 machen will, als lohnende Fundgrube empfohlen werden.

Daß Schmeißer und Matthias mit ihren Anregungen, wenn auch nicht überall, so doch an mancher Stelle fruchtbaren Boden fanden, darf man u. a. aus einem Büchlein: „Über das Studium der Mathematik auf Gymnasien" entnehmen, das Adolf Peters,[1]) Lehrer der Mathematik an der Blochmannschen Erziehungsanstalt in Dresden, 1828 verfaßte. Er rühmt deren feinsinnige Ideen, tritt auch für Platonisch-heuristische,[2]) nicht aber für Euklidische Methode ein und empfiehlt Einblicke in die Geschichte der Mathematik, wobei er die Frage in den Vordergrund stellt: „Mit welcher Bedeutung, mit welchem Gewicht und Erfolg trat die Mathematik in der Gesamtentwicklung des geistigen Lebens der Völker hervor?" Doch bleiben seine Vorschläge mehr bei allgemeinen Andeutungen stehen, während er sich sehr eingehend bemüht, die Mathematik mit philosophischen Ideen zu durchsetzen und ihre nahen Beziehungen zu der hoch über ihr stehenden Religion darzutun. Auch ein Zeichen jener Zeit![3])

Eine ähnlichem Zwecke dienende kleine Schrift von Martin Lauber, Gymnasialprofessor in Thorn (Berlin 1832) mit dem Titel: „Die Mathematik als Lehrobjekt auf Gymnasien" regt nicht zu historischen Betrachtungen an, wenngleich den Verfasser seine Ansicht, daß sich „der mathematische Unterricht, nach seiner eigenen Weise, mit dem in den übrigen wissenschaftlichen Lehrgegenständen zu vereinigen

1) Vergl. auch S. 56.

2) Ein Wort über den damals viel betonten Unterschied beider Methoden ist wohl hier am Platze. Die Euklidische Methode lehrt den Schüler lediglich Schluß für Schluß verfolgen und das Vorgetragene verstehen. Sie vermittelt also zwar gründliche mathematische Kenntnisse, erzeugt aber nicht diejenige Gewandtheit des Denkens, die zu selbständigem Fortschreiten in der Wissenschaft verhilft. Die heuristische Methode aber „soll den Schüler veranlassen, Erkenntnisse, Beweise und Auflösungen selber zu finden; soll ihn Wahrheit suchen und finden lehren, indem sie, die sämtlichen Geisteskräfte desselben dazu in Anspruch nehmend, sie mit ihm sucht und findet". (Matthias.)

3) Damit ich nicht mißverstanden werde, setze ich einen Ausspruch Schellbachs hierher, dem ich zustimme. „Es gibt Teile der Mathematik, die kaum dem Namen nach bekannt sind und doch so hohen Wert besitzen, daß sie selbst religiöse Vorstellungen begründen und stützen können. Einer dieser Teile ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung ..." (Progr. Berlin 1866). Auch sei auf die Worte Wernickes (S. 71) hingewiesen; ferner auf S. 55.

habe", unschwer zu der Verknüpfung von Geschichte und Mathematik hätte führen können.

Erwähnenswert ist ferner der Leitfaden in der Elementargeometrie und Trigonometrie für die oberen Klassen der Gymnasien von I. Hermsdorf (Meißen 1822), der einen besonderen Abschnitt mit einem Abriß der Geschichte der Geometrie bringt. Er beginnt mit Thales, behandelt ausführlicher die Alten bis Pappus und Diokles, während er die Verdienste der Araber um die Trigonometrie kaum erwähnt und die neuere Zeit nur in großen Zügen durchnimmt. Zuletzt begnügt er sich mit einer Aufführung von Namen, unter denen wir Maclaurin, die Bernoulli, Euler, „le Gendre" und Kästner finden. Einen ganz kurzen Abriß derselben Art stellt auch G. U. A. Vieth einem dem ersten Unterrichte in der Mathematik dienenden Lehrbuche (Leipzig 1821) voran. Sehr gründliche und wissenschaftlich vertiefte historische Kapitel hingegen zeichnen ein Lehrbuch der Trigonometrie aus, das um die gleiche Zeit entstand und einen Wiener Mathematiker, namens Adam Burg zum Verfasser hat (1826). Es war auch in mitteldeutschen Gymnasien im Gebrauch. Auch das Lehrbuch der Geometrie für höhere Bildungsanstalten von Förstemann (Danzig 1827) streut geschichtlich-biographische Bemerkungen ein; etwas ausführlicher wird es bei dem Apollonischen Berührungsproblem und dem Ptolemäischen Satze. Um durch den Unterricht „manchen fähigen Jüngling für das Studium der alten Geometrie zu gewinnen" gab A. Richter 1828 „des Apollonius von Perga zwei Bücher vom Raumschnitt" in deutscher Übersetzung heraus und zwar nach einer Wiederherstellung Halleys. — Schließlich sei noch ein für die Oberstufe der Volksschule bestimmtes Lehrbuch der Geometrie von Wilhelm Harnisch (Breslau 1822) hervorgehoben, das einen Abriß der Geschichte der Mathematik gibt, bei den Ägyptern beginnend und bei Euler abschließend. Der Verfasser warnt davor, die Mathematik als dürre Wissenschaft zu betreiben, und empfiehlt zu frischer Anregung geschichtliche Zusätze im Unterricht.

Gediegenere geschichtliche Belehrung enthält das „Lehrbuch der Trigonometrie" von Prudes (Breslau 1826), das an Schmeißer erinnert. Interessant ist es, daß im Vorwort die Stelle vorkommt: „Die etlichemals hinzugefügten historischen Notizen werden, darf ich hoffen, Manchem nicht unwillkommen sein; man sucht sie sonst vergebens".

Zu guter Letzt sei ein für den Lehrer bestimmtes Buch nicht vergessen. „Materialien für den Unterricht in der Elementargeometrie" von L. Thilo, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Frankfurt a. M. (1824). Ihm gilt als unübertroffenes Muster geometrischer Darstellung noch immer Euklid. Daher preist er in einem 17 Seiten langen Abschnitte „Euklides als Lehrer" und läßt dann die Übersetzung „einiger Stellen aus Proklus über die verschiedenen Sätze in der Geometrie" folgen, „um den Lehrer der Geometrie auf die Leistungen der Alten in diesem Fache aufmerksam zu machen". Er wünscht Vertiefung in die Werke der Griechen, damit deren Interesse an der Mathematik erkannt werde. Auch solle man sich darüber klar werden, daß die Alten sehr verschiedene Ansichten über einzelne Probleme hatten. Das Buch ist durchsetzt von umfangreichen Erklärungen schwierigerer Euklidstellen und bietet viel Zitate aus Werken der Alten im Urtexte, teilweise auch in deutscher Übersetzung. Hervorgehoben sei, daß Thilo sein Buch auch den Schülern „zur Erweiterung ihrer geometrischen Kenntnisse" ans Herz legt.

Aber, wie gesagt, zahlreicher sind die Schulbücher, die der Geschichte der Mathematik auch nicht einmal in kurzen Notizen und Zusätzen Erwähnung tun. Ich nenne als Beispiele die „Elemente der Form und Größe" von Schmidt (Bern 1809), ein sonst sehr originelles Buch, das Pestalozzi gewidmet ist und ganz in dessen Bahnen wandelt. Nur die Geschichte von Archimedes und der goldenen Krone des Königs Hiero wird hierin erzählt. Gar nichts bringen ferner die Formen-, Maß- und Körperlehre von Joh. Ramsauer (Stuttgart und Tübingen 1826), die geometrische Konstruktionslehre von J. F. Ladomus, Professor in Karlsruhe (Freyburg und Konstanz 1812), Pöhlmann, Geometrie in Dialogform (Erlangen 1815), Kröchers Körperliche Geometrie nebst sphärischer Trigonometrie (Breslau 1833), Lange, Die ebene Geometrie (Graudenz 1831) u. a. m. Einige andere begnügen sich mit bibliographischen Hinweisen (vor allem auf Euklids Elemente), griechischen und lateinischen Kunstausdrücken, kärglichen Erwähnungen einiger alter Mathematiker oder höchstens mit einer kurzen Geschichte des Pythagoreischen Lehrsatzes. Dazu gehören u. a. J. P. Brewer (Professor der Mathematik in Düsseldorf), Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten (1822); J. C. Gartz, Allgemeine Größenlehre nach Euklidischen und neueren Ansichten (1820); Leslie-Grüson, Geometrische Analysis (1822); W. Sause, Anfangsgründe der Größenlehre (1832); G. A. Fischer, Lehrbuch zum ersten Unterrichte in der Geometrie (Dresden 1818); J. F. Schaffer, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, der phoronomischen Geometrie und Trigonometrie (Oldenburg 1820).

Überblicken wir hiernach den Zeitraum von 1800 bis in die dreißiger Jahre, so fehlt es zwar nicht an einsichtsvollen Pädagogen, die auf die Geschichte der Mathematik als einer wertvollen Quelle der Belehrung hinweisen; es kann aber nicht die Behauptung aufgestellt werden, daß im großen und ganzen darnach gehandelt wurde. Eher tritt, wie schon gesagt, das für den Neuhumanismus, der auch zu Anfang des 19. Jahrhunderts noch die herrschende Geistesrichtung war, kennzeichnende Bestreben in den Vordergrund, die Welt der Antike neu aufleben zu lassen und ihre gesamte Kultur als vornehmste Bildungsgrundlage hinzustellen. Da man hier sehr weit ging, führte man auch den jungen Mathematikbeflissenen nach Hellas, und ließ keine Gelegenheit vorübergehen, ohne ihm zum Bewußtsein zu bringen, daß das Zeitalter eines Plato, Archimedes und Euklid auch mathematisch Großes geleistet hat. Man findet daher in den alten Lehrbüchern viel Worte und Sätze in griechischen Lettern. Die zu ihrer Zeit viel gebrauchte Aufgabensammlung von W. Tenner (Leipzig 1833), ein gediegenes Buch, bietet sogar im Anhang auf dreizehn Seiten Auszüge aus Euklids Elementen im Urtext und fügt auf sieben Seiten ein kleines Euklid-Lexikon, sowie eine Abhandlung über die griechischen Zahlen an. In der Einführung sagt der Verfasser: „Einer vorzüglichen Beachtung würdig für jeden Jüngling, der die Mathematik mit Lust und Eifer treibt, sind die griechischen Mathematiker. Nichts wird für seine Ausbildung gedeihlicher sein, als das Studium des Euklid und Archimedes. Wem es nicht bloß um die Erwerbung materieller Kenntnisse zu tun ist, sondern um Bündigkeit und Klarheit im Denken und im Ausdruck, der lese wenigstens einige Abschnitte ihrer Werke in der Ursprache, oder im Notfall in einer guten Übersetzung. So groß auch die Fortschritte der Mathematik seit der Abfassung jener Meisterwerke sind, so sind und bleiben sie doch noch immer unübertroffene Muster in der Form".[1]) Man trieb also etwas Geschichte der Mathematik um der Antike willen, nicht aber, oder weniger, weil man überhaupt den kulturgeschichtlichen Wert unserer Wissenschaft für pädagogisch wertvoll erachtete. „Klassisch" war die Losung und das ganze Menschentum mußte sich dem griechischen Geiste unterordnen, mußte von ihm durchdrungen werden. So kam es, daß damals (zur Zeit des Neuhumanismus) jene dem Altertume entlehnten Aufgaben in den Lehrbüchern ihren Einzug hielten, von denen noch die Rede sein wird, Aufgaben, die die Gegenwart als Erbe jener Tage übernommen hat.

Wer von der älteren Generation unserer auf dem Gymnasium vorgebildeten Zeitgenossen gedächte hier nicht gern eines guten Bekannten seiner Schülerjahre, des altberühmten Heis! Die Verdienste seiner 1837 in Köln zum ersten und — wenn auch sehr verändert — 1908 zum 112. Male erschienenen „Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra" sind zu bekannt, als daß sie hier neu hervorgehoben zu werden brauchten.[2]) Hier interessiert uns

1) Es ist interessant festzustellen, daß Tenner schon einige Jahre früher, 1829, als Lehrer der Mathematik am Domgymnasium zu Merseburg ähnliche Gedanken in einer Programmabhandlung ausgesprochen hat. Diese Abhandlung ist betitelt: „Einige Bemerkungen über die Verbindung der Wissenschaften überhaupt, mit besonderer Rücksicht auf die Schulen usw." Darin heißt es (S. 16): „Bei diesem (obersten mathematischen) Kursus könnte man zuweilen griechische Originale zu Hilfe nehmen, wenn eine Chrestomathie existierte, die nicht einzelne Lehrsätze und Aufgaben, sondern kleine Abschnitte enthielte, deren jeder ein Ganzes wäre, z. B. Archimedes Kreismessung u. d. m." In seinem Lehrbuche hat er den Versuch gemacht, Abhilfe zu schaffen.

2) Es sei erlaubt, hier einen hübschen Scherz der Vergessenheit zu entreißen, mit dem in den achtziger Jahren das Erscheinen anderer Lehrbücher begrüßt wurde. Man zitierte klassisch: „Οὐκ ἀγαθὸν πολυκοιρανίη, εἷς κοίρανος ἔστω, εἷς βασιλεύς!" [Ilias B. II, 204.]

Heis nur als Vertreter des geschichtlichen Elements. Nun, schon die ältesten Auflagen,[1]) um die es sich hier besonders handelt, spendeten reichlich geschichtliche Belehrung über alle Zeitalter, nicht nur mittelbar durch Wahl von Aufgaben aus Altertum und Mittelalter, sondern auch direkt durch Fußnoten und textliche Einflechtungen bei jeder nur gebotenen Gelegenheit. Was diese Zusätze vorteilhaft von solchen in anderen Büchern jener Zeit unterscheidet, ist das Bestreben des Verfassers, nicht gelehrten Aufputz, sondern dem Schüler in geschickter Anpassung an sein Verständnis frische Anregung zu geben. Heis war für die Zeit der dreißiger Jahre durchaus modern, ging seine eigenen Bahnen und stand nicht im Banne neuhumanistischer Einseitigkeit. Wir werden auf das Buch weiter unten noch zurückkommen.

Ein Autor, der, wie so viele seiner Zeit, in erster Linie Euklid zuliebe sich zu geschichtlichen Beigaben versteht, ist J. H. van Swinden, Professor in Amsterdam, dessen Elemente der Geometrie der Mathematiker der Landesschule Pforta C. F. A. Jacobi 1834 in deutscher Übersetzung herausgab. Jacobi ist nach seiner Vorrede „der festen Überzeugung, daß nur dünkelhafte Anmaßung und arge Selbstverblendung sich unterfangen können, den Wert dieses Buches (Euklid) und das Verdienst seines Verfassers schmälern zu wollen. Daher fordere schon die dem Euklides, als dem Vater der Geometrie, schuldige Dankbarkeit, daß wir ein gründliches Verständnis seiner Schriften unter uns zu erhalten suchen". Des weiteren bringt der Verfasser auch viel aus Legendre, „dem Euklides der neueren Zeit". Was aber dem Buche ein besonders eigenartiges Gepräge verleiht, ist ein „alphabetisches Verzeichnis der Männer, deren geometrische Entdeckungen in diesem Buche mitgeteilt oder deren Schriften wenigstens angeführt sind". Dieses interessante Verzeichnis bringt 127 Namen von Mathematikern mit kurzen Angaben über deren Leben und Wirken.

Von den vierziger bis zu den sechziger Jahren.

In den vierziger Jahren begann im geistigen Leben Deutschlands ein neuer Wind zu wehen. Die zur Übertreibung ausgeartete Ehrfurcht vor allem, was klassisch hieß, ließ nach; die „alten Heiden" verloren an Ansehen, zumal in Preußen während der Regierung Friedrich Wilhelms IV., des „Romantikers auf dem Throne". Neue Anschauungen bahnten sich an, auch im Erziehungsleben. Für die Lehrbuchschreiber fiel so der Ansporn weg, das Klassische stark hervorzuheben[2]); die zugunsten der Realanstalten einsetzende Bewegung blieb ebenfalls nicht ohne Einfluß, und so geben die Schulbücher um die Mitte des 19. Jahrhunderts die Fühlung mit den Alten mehr und mehr auf, ohne für

1) Ausführlich wird Heis (in seinen späteren Auflagen) auf S. 32 besprochen.

2) Euklid stirbt aber nie ganz aus in den Schulbüchern. Vergl. Lietzmann, IMUK-Abhandlg. I, 1. S. 18.

Ersatz zu sorgen.[1]) Sie bieten geschichtlich lieber nichts,[2]) als daß sie nun geschichtliche Belehrung gleichmäßig auf den Entwicklungsgang der Mathematik verteilen.[3])

Für keinen Zeitraum liefert die Durchforschung der geometrischen und arithmetischen Schullehrbücher nach geschichtlichen Einflechtungen eine so dürftige Ausbeute, wie für die Mitte des vergangenen Jahrhunderts. Zu den Gründen, die schon angeführt wurden, gesellt sich ein weiterer: Es gab nämlich um jene Zeit noch kaum eine wissenschaftliche Geschichtsschreibung für die Mathematik. Petrus Ramus (Paris 1569) lag zu weit zurück und behandelte nur das Altertum. Einige Italiener und die deutschen Forscher G. J. Voß (1650) und J. Chr. Heilbronner (1741) waren wenig bekannt und umfaßten auch nur einzelne Zeitabschnitte. Wertvolle, immer und immer wieder zitierte Quellenschriften[4]) für die von uns besprochenen Schullehrbücher[5])

---

1) Zu denen, die schon zu Anfang der vierziger Jahre vorausschauend der Geschichte der Mathematik große Bedeutung für einen gediegenen, allgemeinbildenden Unterricht beilegen, gehört H. B. Lübsen, der 1841 sein Lehrbuch der höheren Geometrie herausgab. Auf seine Vorrede kommen wir an anderer Stelle zurück. Dasselbe gilt von dem Lehrbuche der Geometrie von Kunze (1841), das nur deshalb nicht schon hier genauer besprochen wird, weil erst seine zweite Auflage 1851 dem Geschichtlichen weiteren Spielraum gewährt (vergl. S. 15). Wichtig für die Beurteilung der damaligen Zeit ist eine Stelle aus dem Vorwort zur ersten Auflage, die hier schon Platz finde: „Bei den hier und dort eingeflochtenen historischen und literarischen Notizen ist mir das Maßhalten schwerer geworden, da ich mit besonderer Neigung der älteren mathematischen Literatur zugetan bin. Sollte die Teilnahme an geschichtlich-mathematischen Untersuchungen, die, seit Kästner tot ist, unter den deutschen Mathematikern immer mehr abgenommen hat, wie es scheint, jetzt neu belebt werden, so dürfte ich bei einer zweiten Auflage dieses Lehrbuches mir wohl erlauben, in der Mitteilung jener Notizen etwas weniger sparsam zu sein.“ Daß dies erfreulicherweise geschehen konnte, ist aus S. 15 zu entnehmen.

2) wie beispielsweise C. A. Bretschneiders Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen (Jena 1844), ein sonst sehr gründlich geschriebenes Buch; oder Fr. Bartholomäis geradlinige Planimetrie (Jena 1851), die sich ein „neues Lehrbuch der Euklidischen Geometrie“ nennt.

3) Daß der mathematische Unterricht damals einen besonderen Grad von Tiefstand erreicht hatte, läßt sich aus einer Programmabhandlung des Gymnasiums zu Lauban von Wicher (1845) folgern, die das Thema behandelt: „Gründe, warum auf den Gymnasien bei dem Unterricht in der Mathematik weit geringere Resultate erzielt werden, als in den übrigen Lehrgegenständen.“

4) Bei Zitaten aus der mathematischen Literatur beruft man sich immer wieder auf F. W. Murhard und J. E. Scheibel. Vergl. S. 6.

5) Vgl. auch die von Brewer hervorgehobenen Quellenschriften. Auch die „Scholien zu Euklids Elementen“ von Ch. Fr. Pfleiderer (5 Teile), aus seinen Schriften und Nachlaß zusammengestellt und herausgegeben von C. F. Hauber (Stuttgart 1827) wurden gern benutzt. Das Buch ist ein sehr gelehrtes Werk mit allen nur möglichen Kommentaren, auch sprachlicher Art. Es lehnt sich an Kästner und Klügel an.

waren nach Angabe ihrer Verfasser Jean Etienne Montucla[1]) (Paris 1758), Abraham Gotthelf Kästner[1]) (Göttingen 1796—1800) und Ch. Bossut[1]) (Paris 1802—1810). Ersteren haben u. a. Kries, Matthias und Thilo gründlich studiert. Leider ist gerade Montucla ein nicht einwandfreier Ratgeber. Namentlich für die voreuklidische Geometrie ist die für seine Zeit wohl begreifliche und entschuldbare Unzuverlässigkeit vieler seiner Angaben zu beklagen. C. A. Bretschneider (Die Geometrie und die Geometer vor Euklides, Leipzig 1870) bedauert, daß fast alle späteren Schriftsteller Montuclas Angaben glatt wiederholen und daß sich kaum einer die Mühe genommen hat, selbständig in den Quellen zu forschen und nachzusehen, ob eine aufgestellte Behauptung richtig mitgeteilt, ja ob sie überhaupt nur wahr ist.

Dann kommt noch eine Fundgrube eigener Art hinzu. Das ist G. S. Klügels großzügig angelegtes mathematisches Wörterbuch, das von 1803 bis 1808 in drei Bänden aus der Hand des Begründers erschien, dann 1823 in einem vierten und 1831 in einem fünften Bande von Mollweide bzw. Grunert fortgesetzt und später von letzterem in zwei Supplementen 1833 bzw. 1836 abgeschlossen wurde. Das Werk enthält in der Mehrzahl seiner Artikel zahlreiche historische Angaben und Quellennachweise, wenn auch nicht ausschließlich geschichtliche Abhandlungen. So sucht man z. B. vergebens die Namen „Archimedes", „Euklid" usw. als Stichworte, wenngleich sie natürlich gelegentlich im Zusammenhang oft vorkommen. Der „Klügel" war viel in der Hand der Mathematiklehrer, was sich schon daraus schließen läßt, daß er in den Bibliotheken vieler älterer Gymnasien zu finden ist und dort wohl manchmal den wertvollsten Teil einer armseligen mathematischen Bücherei bildet.

Für einen größeren Leserkreis bestimmt und in zeitgenössischen Büchern auch gern angeführt war das Buch von A. Arneth: „Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes" (Stuttgart 1852). War also auch eine Orientierung auf dem fraglichen Gebiete nicht unmöglich, so wurde doch erst zu Beginn der 60er Jahre ein weitergehendes Interesse für geschichtlich-mathematische Forschung wachgerufen. Mit Recht sagt C. I. Gerhardt in seiner Geschichte der Mathematik in Deutschland (München 1877): „Erst seit wenigen Jahrzehnten hat man in Deutschland der historischen Entwicklung der Mathematik ein Interesse zugewandt."[2]) Und kein geringerer, als Cantor stellt (in seinem

1) Der genaue Titel ist aus dem Literaturverzeichnis am Schluß zu ersehen.

2) Ähnlich äußert sich F. Villicus in seinem Buche „Die Geschichte der Rechenkunst usw.", Wien (Gerold) 1891, oder C. Stephan (Progr. der Stádt. Realschule zu Wiesbaden 1883), indem er sagt: „Erst in den jüngsten Dezennien fängt man an, der geschichtlichen Entwicklung der Arithmetik und Geometrie auch in den Lehrbüchern und Schulen Eingang zu verschaffen, nachdem unter dem Einfluß von Cantor, Günther u. a. das Interesse an mathematisch-geschichtlichen Studien reger geworden ist."

Buche „Die römischen Agrimensoren“ [Leipzig 1875]) mit Genugtuung fest: „Daß seit der Mitte unseres Jahrhunderts die geschichtliche Behandlung der Mathematik sich einen umfangsreichen Kreis von Mitarbeitern, einen umfangreicheren von Freunden gewonnen habe, wer könnte diese unserer Meinung nach höchst erfreuliche Tatsache leugnen?“ Und weiter begrüßt er es, „daß von Schulen und Universitäten her neue Kräfte zum alten Baue in Wirksamkeit treten.“ Das bestätigt unverkennbar auch die Lehrbuchliteratur. Recht langsam ging es von der Tiefe zur Höhe. Nur hier und da erklingt die Stimme eines einsichtsvollen Schulmannes, der über seiner Zeit steht und den Bildungswert der Mathematik nicht allein in der formal-logischen Schulung erblickt, sich aber auch im Unterricht nicht damit begnügt, seine Wissenschaft nur im Lichte des klassischen Altertums zu zeigen.

Von diesen Wenigen seien zwei genannt. Zunächst der Verfasser eines ausgezeichneten Lehrbuches der Geometrie (2. Aufl. Jena 1851), das ist der Professor am Gymnasium zu Weimar C. L. A. Kunze.[1]) Im Vorwort heißt es von den geschichtlichen Bemerkungen des Buches: „ . . . sie könnten von Lesern, die mehr das unmittelbar Nützliche im Auge haben, wohl für überflüssig erachtet werden. Sie zeigen sich jedoch, wie die Erfahrung mich gelehrt hat, beim Unterricht im mindesten nicht störend, sie zeigen sich vielmehr als eine Würze desselben und sind für den jugendlichen Geist ‘lustig und holdselig zu wissen’ — um mit einem alten wackeren Mathematiker (W. Holtzmann, genannt Xylander, in seinen sechs ersten Büchern Euklidis, Basel 1562) zu reden. Daß die historischen und literarischen Notizen jetzt reichlich bedacht sind, brauche ich nach den Beurteilungen, welche die erste Auflage erfahren hat, nicht weiter zu rechtfertigen.“ In der Tat wird die Geschichte der Mathematik von Kunze in zahlreichen in den Text eingeschobenen Anmerkungen behandelt, die auch Erklärungen griechischer Worte und Fachausdrücke, Zitate aus historischen Werken und Literaturnachweise bringen. Der Verfasser zeigt sich gründlich unterrichtet. Er hat mit Fleiß und Liebe viel Einzelheiten zusammengetragen. Ganz besonders muß sein Bestreben hervorgehoben werden, der mittleren und neueren Geschichte gerecht zu werden. In dem lebendig und frisch geschriebenen Werke ist zudem allenthalben auf organische Verknüpfung des Sachlichen mit dem Historischen Bedacht genommen, und wir werden dem fein bearbeiteten, heute leider fast vergessenen Buche am besten dadurch gerecht, daß wir es als einen würdigen Vorläufer Baltzers bezeichnen, dem es zweifellos die Wege geebnet hat. Leider ist dem ersten Bande kein zweiter gefolgt.[2]) Ob das nicht doch vielleicht trotz der optimistischen Vorrede an dem mangelnden Verständnis der Zeitgenossen gelegen hat?

1) Vergl. Fußnote S. 13.

2) Nach Mitteilung des Herrn Treutlein, dem ich den Hinweis auf das Kunzesche Buch verdanke.

Der zweite einsichtsvolle Schulmann, den wir meinten, ist der Großherzoglich-Hessische Gymnasialdirektor Dr. Wilhelm Wiegand in Worms, dessen Programmabhandlung von 1853 unsere Aufmerksamkeit in besonderem Maße verdient. Er gibt darin den Schülern der obersten Gymnasialklassen und den angehenden Studierenden einen Wegweiser zur Würdigung der Mathematik.

Folgende Stellen aus dem Vorworte zeigen, ein wie warmer Freund geschichtlicher Einsicht er war. „Wenn der junge Mann in der von ihm gewählten Berufswissenschaft gesehen hat, in wie langer Zeit und mit welchen Mühen sie zu der Höhe gelangt ist, von welcher er nun sehr bequem Besitz ergreift; wenn er zugleich von den übrigen Wissenschaften einen solchen historischen Überblick gewonnen hat: so wird er vor jenem Übermute, jener Selbstüberschätzung und Impietät bewahrt bleiben, welche heutzutage besonders beklagt werden und welche zu allen Zeiten das wahre Gedeihen des Wissens für den Einzelnen wie für die menschliche Gesellschaft vereiteln." „Bei fortgesetztem Fleiße in der Mathematik lernt der Schüler heutzutage von selbst, wie die Lehren derselben in neuerer Zeit bereichert, berichtigt, angewandt usw. worden sind. Nicht so in der älteren Mathematik, in welcher selbst viele Mathematiker von Fach fremd bleiben. Mathematik und Philologie stehen nicht nur auf den Hoch- sondern auch in den Mittelschulen sich als sehr fremde Gegenstände in unseren Tagen gegenüber, so daß sogar die Meinung fast allgemein geworden ist, es schließe eine die andere aus. Die Geschichte, welche allein vor einem noch größeren Zerfallen des Wissens bewahren kann, zeigt uns, daß die Philologie (namentlich die griechische) und die Mathematik befreundeter sind, als man glaubt, obwohl schon ihre beiderseitigen griechischen Namen sie beständig daran erinnern sollten. Die große Bereicherung der Mathematik in neuerer Zeit einerseits und der Umstand, daß die Philologie in neuerer Zeit sich mehr der poetisch-rhetorischen Seite des klassischen Altertums und in dieser wieder vorzüglich der Kritik, Grammatik, Metrik usw. zugewandt hat, unter Hintansetzung der einflußreichsten und stolzesten Seite, der philosophisch-mathematischen, — hat dieses Schisma veranlaßt." „In den Mittelschulen, in welchen das Nebeneinanderbestehen vielfacher und verschiedener Lehrgegenstände nun einmal eine unabweisbare Notwendigkeit geworden ist, erscheint eine gegenseitige Kenntnisnahme und Achtung der verschiedenen Disziplinen als notwendige Bedingung zu einem gedeihlichen Zusammenwirken der Lehrenden, wie zur klaren Auffassung und harmonischen Bildung der Lernenden." Die Abhandlung selbst zerfällt in die folgenden Abschnitte: 1. Vom Verhältnisse der Mathematik zur Philosophie und von den jeweiligen Einflüssen der letzteren auf erstere. 2. Verhältnis der Mathematik zu den empirischen oder Erfahrungswissenschaften. 3. Systematischer Überblick der mathematischen Wissenschaften. 4. Geschichte der Mathematik. Dieser letztere

Abschnitt, der uns vor allem interessiert, ist bei weitem der längste. Auf 14 Großoktavseiten behandelt er die Geschichte der Mathematik in zwei Perioden, von Thales bis zum Ende des 16. Jahrhunderts und von da ab bis zur Neuzeit. Als Einleitung dient dem Verfasser das Wort Kästners: „Die Geschichte der Gelehrsamkeit ist großenteils Geschichte des menschlichen Wahns, der Mathematik ihre (!) nur im geringen Grade." Der von Wiegand gegebene Abriß ist frisch und anregend geschrieben und zeugt von der Begeisterung seines Verfassers für das Thema. Araber, Inder, die Meister des Mittelalters und die Neueren kommen gleichmäßig zu ihrem Rechte und wenn man die durch neuste Forschungen bedingten Abänderungen vornähme, könnte man Wiegands Abriß in jedes moderne Lehrbuch übernehmen. Schade nur, daß Wiegand selbst nach seinen Ideen kein Lehrbuch verfaßt hat. Daher war ihm wohl auch das Schicksal eines Predigers in der Wüste beschieden.

Aus den 50er Jahren bringt das „Lehrbuch der Geometrie" von J. F. Ley (1858) ein wenig Historisches, während es viel mit griechischen Worten aufwartet. Bis in den Anfang der 60er Jahre zurück reicht in seiner ersten Auflage das „Lehrbuch der ebenen Geometrie für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten" von J. A. Grunert (6. Aufl. 1870, Brandenburg a. H.), das kleingedruckt im Texte viel Geschichtliches enthält, und zwar nicht allein Antikes, sondern auch über Gauß, Monge, Carnot, d'Alembert, Pascal, die Zahl π. Macht es also auch in allen Richtungen einen bemerkenswerten Anfang, so blieb es doch anderen vorbehalten, bahnbrechend für die höhere Schule zu wirken.

Baltzer und Helmes (1862).

J. Helmes war Oberlehrer am Gymnasium zu Celle. Er wählte als Titel seines 1862 Th. Wittstein gewidmeten Buches:[1]) „Die Elementar-Mathematik nach den Bedürfnissen des Unterrichts streng wissenschaftlich dargestellt." Er sagt in der Vorrede: „Mit den bisherigen Exerzitien ist gleichsam eine Lektüre von Klassikern zu verbinden, von Klassikern, die in unserer Sprache, der der Mathematik, geschrieben sind." Zu solcher Lektüre gibt das vierbändige Lehrbuch reiche Anregung. Man gewinnt übrigens den Eindruck, als ob Helmes im Verlaufe der Ausarbeitung seines Buches sich in steigendem Maße für das Geschichtliche erwärmt hätte. Im zweiten Bande (Planimetrie 1862) betont er in der Vorrede die stärkere Hervorhebung des Geschichtlichen und in der Vorrede zum dritten Bande (Ebene Trigonometrie 1864) sagt er: „Eine noch größere Berücksichtigung als in den beiden

1) Verlegt durch Hahn in Hannover. Die vier Bände behandeln die Arithmetik und Algebra (1862), die Planimetrie (1862), die ebene Trigonometrie (1864), die Stereometrie und sphärische Trigonometrie (1870).

Fassungskraft des Anfängers hinabzusteigen." [1]) Drastischer drückt sich Helmes aus, wenn er davor warnt, den Schüler „an der Leimrute der Wissenschaft" unnötig lange aufzuhalten. Zur näheren Kennzeichnung der Art, wie Baltzer dauernd mit der Geschichte Fühlung behält, sei hier eine charakteristische Stelle seines Lehrbuches wiedergegeben: [2])

„... Die unbenannten Zahlen bilden die ohne Ende aufsteigende natürliche Zahlenreihe. Um die natürlichen Zahlen mit wenig Wörtern und Zeichen (Ziffern) mitteilen zu können, haben die gebildeten Völker das Dezimalsystem angenommen, nach welchem zehn Einer als ein Zehner, zehn Zehner als ein Hundert, ... usf. betrachtet werden.

„Die Griechen bezeichneten, wie die semitischen Völker, die Einer, Zehner, Hunderte durch je neun Buchstaben ihres Alphabets; die Tausende durch die Zeichen der Einer, denen Striche beigefügt wurden, die Zehntausende wiederum durch die Zeichen der Einer, Zehner usw., denen der Name Myriaden hinzugefügt wurde. Die Abteilung großer Zahlen nach Myriaden ist von anderen Völkern nicht nachgeahmt worden. Die Römer bezeichneten einen Einer, einen Zehner, ein Hundert, ein Tausend, ferner fünf Einer, fünf Zehner, fünf Hunderte durch Schriftzeichen, welche später von gewissen Buchstaben des gemeinen Alphabets nicht mehr unterschieden wurden; vier und neun Einer wurden durch eins vor fünf und zehn dargestellt usw.

„Diese Schreibarten sind seit dem 12. Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung durch die von den Arabern verbreitete indische Erfindung verdrängt, nach welcher die Einer durch besondere Zeichen, die Zehner durch ihren Ort zur Linken der Einer, die Hunderte, Tausende usw. durch ihren Ort zur Linken der Zehner, Hunderte usw. unter Einführung des zehnten Zahlzeichens 0 angegeben werden. Die Zahlwörter Million, Billion, ... Milliarde (tausend Millionen) sind neuere Bildungen. Das Wort Million bedeutete im 16. Jahrhundert in der vulgären Sprache eine Geldsumme; als abstraktes Zahlwort hat es erst im 18. Jahrhundert in die Rechenbücher allgemein Eingang gefunden. Milliarde und Billion kommen in französischen Büchern des 16. Jahrhunderts vor. Vergl. die Aufsätze des Verfassers in den Leipziger Berichten 1865 und im neuen Reich 1871 p. 617.

„Die Zahlen und ihre Verbindungen sind Gegenstand der Arithmetik. Eine Zahlenverbindung ausführen (operieren) heißt rechnen. Zur Bezeichnung der auszuführenden Zahlenverbindungen sind bestimmte Rechnungszeichen eingeführt. Zahlen im allgemeinen, d. h. von unbestimmt viel Einheiten, werden durch verschiedene Buchstaben (große, kleine, numerierte) bezeichnet, z. B.:

$$\begin{array}{lllll}
A & B & C & \ldots & \\
a & b & c & \ldots & \\
\alpha & \beta & \gamma & \ldots & \\
a' & a'' & a''' & \ldots & a^{(n)} \\
a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}
\end{array}$$

1) Vorrede zum Lehrbuch der Elementar-Mathematik I, 1. Hannover 1855.
2) Bd. I (6. Aufl. 1879), S. 61 bis 63.

„Daher nennt man die allgemeine Arithmetik auch Buchstabenrechnung (arithmetica speciosa, universalis), im Gegensatz zur gemeinen Rechenkunst (logistica, arithmetica numerosa), welche von jener eine Anwendung ist. Unter höherer Arithmetik (Zahlenlehre, théorie des nombres) versteht man die Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen und ganzzahligen Formen.

„Bei Euklides werden allgemeine Zahlen durch Strecken bezeichnet und Zahlenverbindungen durch Konstruktionen erläutert. Diophantus (in der zweiten Hälfte des 4. Jahrh. n. Chr.) gebraucht die Anfangsbuchstaben unbestimmter Größen als Zahlzeichen, welche gegen den Anfang des Mittelalters numeri cossici (cossa, cosa, chose), später species genannt wurden. Deutlichere Anfänge der Buchstabenrechnung finden sich nach Einführung des indischen Algorithmus (Gem. Arithm. § 14) bei Regiomontan 1460 (algorithmus demonstratus. Nürnberg 1534. Vergl. Chasles aperçu hist. p. 621 der deutschen Übers.), und Stifel (arithm. integra 1544 fol. 252), in größerer Ausdehnung bei Vieta in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts.

„Die Sätze der mathematischen Wissenschaften sind entweder Definitionen,[1]) oder Theoreme, oder Axiome. Die Definition (ὁρισμός, Erklärung) dient zur Verständigung über einen zusammengesetzten Begriff. Ein Theorem (θεώρημα, Lehrsatz, Satz, propositio) knüpft an eine Voraussetzung (ὑπόθεσις) eine Behauptung (θέσις). Axiom (ἀξίωμα, Grundsatz, Hypothese) ist eine Behauptung, deren Anerkennung durch die Summe der gemachten Wahrnehmungen (Erfahrung, ἐμπειρία) gefordert wird. Die gerühmte Richtigkeit der mathematischen Wissenschaften beruht darauf, daß sie eine äußerst geringe Zahl von Axiomen enthalten, und daß ihre Theoreme sich (logisch) beweisen und (empirisch) prüfen lassen. Der Beweis (ἀπόδειξις, demonstratio) wird direkt geführt, wenn man aus der Voraussetzung durch Schlüsse die Behauptung ableitet; indirekt (apagogisch, ἀπαγωγή, deductio ad absurdum), wenn man aus der Verneinung der Behauptung durch Schlüsse die Verneinung der Voraussetzung ableitet. Die mathematischen Schlüsse (συλλογισμός): wenn $A = B$ und $B = C$ (praemissae), so ist $A = C$ (conclusio); wenn $A > B$, $B > C$, so ist $A > C$; Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert gibt Gleiches, usf., entspringen aus dem Begriff der Gleichheit (I). Nach ihrem Muster hat man seit Aristoteles auch für andre Gebiete Schlüsse zu bilden versucht (Logik).

„Abgesehen von diesen aus dem Begriff der Gleichheit hervorgehenden Schlüssen bedarf der erste Teil der mathematischen Wissenschaften (Arithmetik, Algebra, Analysis) keiner Axiome, während die folgenden Teile (Geometrie und Mechanik) nicht ohne einige Axiome begründet werden können.

„In den älteren Darstellungen bedeutet corollarium ein Theorem, welches einem andern untergeordnet und aus demselben leicht ableitbar ist: Lemma (zu λαμβάνω) ein Theorem, welches einer andern Reihe angehörig, zur Begründung eines Theorems vorausgeschickt wird."

1) Die im folgenden und auch sonst bei Baltzer enthaltenen Definitionen wurden großenteils wörtlich auswendig gelernt und im Unterricht abgefragt.

Soweit Baltzer. — Schlagen wir nun die entsprechende Stelle bei Helmes nach, so werden wir durch große Ausführlichkeit bei Behandlung der Zahlensysteme überrascht. Sie nimmt nicht weniger als 12 Seiten in Anspruch. Wir finden da das dyadische, triadische, tetradische, ... bis hinauf zum dodekadischen Zahlensystem ausführlich besprochen; selbst das Verfahren der gegenseitigen Umrechnung ist an Zahlenbeispielen klar gemacht. Das Dezimalsystem wird in deutscher, lateinischer, griechischer und französischer Sprache geübt; für die römischen Zahlzeichen wird auch die rein formale Entwicklung gegeben und bei den griechischen Zahlen fehlen auch nicht die phönizischen Ergänzungszeichen für 6, 90 und 900. Sicher schießt Helmes mit solchen Details über das Ziel hinaus, und die Länge des Abschnitts verbietet hier seine Wiedergabe. Dagegen mag zum Beweise der Verwandtschaft zwischen Baltzer und Helmes aus des letzteren Buche das dem oben unter Punkt 4 zitierten Entsprechende, wenigstens zum Teil, hier Platz finden. Es heißt da in § 2:

„...... Erklärung (definitio) ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffs, z. B. des Addierens, eines Dreiecks usw.

Im weiteren Sinne des Wortes umfaßt die Erklärung die Angabe alles dessen, was bei einer folgenden Entwicklung als bekannt vorausgesetzt wird.

Grundsatz (axioma) ist ein Satz, dessen Wahrheit (als durch sich selbst klar) vorausgesetzt wird.

Lehrsatz (theorema), auch Satz schlichtweg, ist ein Satz, dessen Wahrheit nicht so offenbar ist, daß er nicht eines Beweises bedürfte. —"

Dieses kurze Zitat mag genügen. In ähnlicher Weise geht es fort. Hinter jedem Fachausdruck ist die antike Bezeichnung, wie hypothesis, corollarium, lemma usw. eingeschaltet. Eigentlich Geschichtliches aber wird erst später im Zusammenhange geboten.

Die Zeit nach Baltzer bis in die achtziger Jahre.

Baltzer und Helmes fanden zu ihrer Zeit nur vereinzelte Nachahmer; hier und da etwas Geschichtliches streut z. B. Spieker ein, dessen I. Auflage 1862 erschien. Desgleichen berücksichtigt Th. Wittstein schon in der ersten Ausgabe seiner Trigonometrie[1]) von 1858 die Geschichte. Nicht einmal in Dresden, wo Baltzer eine Zierde der altberühmten Kreuzschule war, eroberte er das Feld. So wurde auf dem Vitzthumschen Gymnasium, dessen erster Mathematiker Hermann Klein damals im begründeten Rufe eines sehr tüchtigen und anregenden Lehrers stand, die Geschichte der Mathematik ganz vernachlässigt. In seinem Ende der 60er Jahre verfaßten Leitfaden der Elemente der

1) Von den Wittsteinschen Büchern, die bis in die jüngste Zeit in neuen, verbesserten Auflagen immer wieder weite Verbreitung fanden, wird im nächsten Kapitel (S. 41—43) ausführlich die Rede sein.

Geometrie findet sich nicht eine Spur eines geschichtlichen Hinweises. Auch als Richard Heger etwa ein Jahrzehnt später als Mathematiker des Wettiner Gymnasiums einen Leitfaden schrieb, verzichtete er auf historische Zutat, obwohl er im Vorwort betont, daß er sich an das vortreffliche Handbuch von Baltzer angeschlossen habe. Selbst der Name Pythagoras tritt bei seinem Satze unvermittelt auf; nicht einmal eine knappe Klammernotiz führt hier die Gedanken des Schülers in klassisches Land.

Wenn uns auch jetzt eigentlich nur die Schulbücher interessieren, so können wir doch bei Besprechung der Dresdener Verhältnisse in den sechziger Jahren an einem Manne nicht achtlos vorübergehen, der als Pädagog, Sprachgelehrter und Förderer der Geschichte der Mathematik einen Namen von gutem Klange hat. Wir meinen Friedrich Hultsch[1]), der von 1868 an länger als zwei Jahrzehnte Rektor der Kreuzschule war. Hat er auch als klassischer Philolog nie mathematischen Unterricht erteilt, so war er doch als Forscher auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik bedeutend. Er veröffentlichte zunächst zahlreiche, auf Quellenstudien mühsam aufgebaute Arbeiten über die Längen- Flächen- und Hohlmaße, sowie über die Gewichte und Münzen bei den Griechen und Römern und gab später wertvolle Beiträge zu dem Zusammenhange dieser Maße mit denen Ägyptens und Babyloniens heraus. Für alle Zeiten aber hat er sich in den Annalen der mathematisch-historischen Wissenschaft einen Namen gemacht als Herausgeber des Heron und vor allem des Pappus. Da Hultsch auch über die Arithmetik und die Geometrie der Griechen ausgezeichnete Abhandlungen geschrieben hat, so ist es zu bedauern, daß er nicht Gelegenheit finden konnte, im mathematischen Unterrichte seine Kenntnisse fruchtbringend zu verwerten. Wahrscheinlich aber ist, daß seine Schriften mit dazu beigetragen haben, Sinn für geschichtlich-mathematische Studien bei einzelnen Gymnasialkollegen schon vom Ende der sechziger Jahre an zu erwecken.

An der Universität Leipzig begann um diese Zeit bei solchen Studenten der Mathematik, die bei Hermann Hankel hörten, einiges Interesse für die Geschichte ihrer Wissenschaft einzusetzen.[2]) Hankel las von 1863—1868. Einer seiner ersten begeisterten Hörer war Adelbert Gebhardt († 1900), der dann ein Menschenalter hindurch als erster Mathematiker der Nikolaischule in Leipzig eine anerkannt hervorragende und erfolgreiche Lehrtätigkeit entwickelte.[3]) Er hatte von

1) Vergl. die ausführliche Würdigung der mathematisch-geschichtlichen Arbeiten Hultschs durch F. Rudio in der „Bibliotheca mathematica“ 8. Band (1904 bis 1908) S. 325 u. f.

2) Auch F. Klein bestätigt aus seiner Studienzeit, daß man sich damals auf den Universitäten für Geschichte der Mathematik sonst nicht interessierte.

3) A. Gebhardts verdienstvoller Tätigkeit gedenkt auch Witting in der IMUK-Abhandlung II, Heft 2 auf S. V.

Hankel eine tiefe Vorliebe für Geschichte der Mathematik übernommen, Cantor und andere zeitgenössische Werke fleißig studiert, sich eine wertvolle Sammlung alter mathematischer Werke angelegt und sogar handschriftlich einen Abriß der Geschichte der Mathematik zusammengestellt. Trotzdem hat er im Unterrichte kaum jemals Geschichtliches vorgebracht, ein Beweis sowohl dafür, daß dieser Gedanke damals noch nicht zeitgemäß war, als auch dafür, daß aus dem ungeschichtlichen Charakter des Unterrichts nicht immer voreilig auch auf mangelndes Interesse der Lehrer für die Geschichte der Mathematik geschlossen werden darf.

Noch ein Dutzend anderer Lehrbücher aus den 60er und 70er Jahren könnte namhaft gemacht werden, deren Verfasser dem Geschichtlichen abhold sind, — ob aus Geringschätzung seines Bildungswertes oder weil ihnen selbst die Geschichte ihrer Wissenschaft eine terra incognita blieb oder wohl auch, weil sie glaubten, die geschichtliche Zutat sei Sache des Lehrers und gehöre nicht in das Lehrbuch oder überhaupt nicht in den Unterricht, mag dahingestellt sein.

Und doch wurde auch in diesen mageren Jahrzehnten die Überlieferung fortgeführt durch ein Buch, das schon an früherer Stelle rühmend hervorgehoben wurde, das ist der „Heis". Seinem inneren Werte verdankt es seine lange Lebensdauer. Mit Recht blieben ihm nicht nur viele Lehranstalten des Deutschen Reiches treu, sondern auch weit über die Grenzen Deutschlands hinaus wurde es zum Mentor des mathematischen Unterrichts. Auch nach dem Ableben seines Verfassers hat es einen liebevollen Pfleger und Förderer gefunden. Nach Heis' Tode übernahm nämlich die Herausgabe der folgenden Auflagen Ludwig Matthiessen, der mit Recht in seiner ersten Vorrede erklärt, daß er wesentliche Veränderungen in der von dem berühmten Verfasser so anerkannt meisterhaft gewählten Form und Anordnung des stofflichen wie didaktischen Inhalts nicht vorgenommen habe. So hat er denn auch das Geschichtliche nicht gekürzt, zumal er selbst ein warmer Freund geschichtlicher Belehrung war. Das hat er bewiesen, als er — damals noch Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Husum — 1870 einen Kommentar zum „Heis" für die Hand des Schülers herausgab, dessen geschichtlichen Inhalt am besten folgende Stelle des 1869 geschriebenen Vorworts kennzeichnet: „In einer Beziehung dürfte das vorliegende Buch auch dem Lehrer der Mathematik eine sehr willkommene Zugabe zur Aufgabensammlung sein, in der nämlich, daß hin und wieder darauf Bedacht genommen ist, die Teilnahme an geschichtlich-mathematischen Forschungen anzuregen, ein Interesse, welches seit einem halben Jahrhundert unter den deutschen Mathematikern fast ganz verschwunden war, in neuester Zeit aber durch die Forschungen von Wöpcke, Cantor, Steinschneider, Biernatzki, Friedlein, Chasles und Prinz Boncompagni wieder einen erfreulichen Aufschwung genommen hat, wozu auch die vielen historischen und literarischen Notizen, die den neuesten Auflagen des Originals beigefügt sind, einen Beleg liefern". In der Tat hatte eine neue Ära geschichtlich-mathematischer Forschung begonnen. Der Name Moritz Cantor steht neben dem von Hermann Hankel an der Schwelle und überragt lange die anderen an Bedeutung. Wenn ihn Matthiessen nicht an erster Stelle erwähnt, so liegt das daran, daß der erste Band des grossen Cantorschen Hauptwerkes: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" erst 1880 der Öffentlichkeit übergeben wurde. Matthiessen bedurfte aber nicht erst des Anstoßes zu historischen Studien und pädagogischen Ratschlägen. Sie entsprangen persönlicher Neigung und Veranlagung. Der Schülerkommentar fand schnell Anklang. Daher ließ Matthiessen 1872 seinen zweibändigen „Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Eduard Heis" als „Praktischen Leitfaden für Lehrer und Studierende" folgen. Ist dieser Schlüssel also auch kein eigentliches Schulbuch im Sinne der meisten bisher besprochenen, so verdient er doch darum unsere Beachtung, weil er in bewußter Weise ebenso der historischen Belehrung dient, wie der „Anregung zur Teilnahme an den geschichtlich-mathematischen Forschungen". Matthiessen versichert, daß seine teilweise neuartigen Angaben das Ergebnis vieljähriger Studien und fortgesetzten Briefwechsels mit Fachgenossen und Orientalisten seien, welche in der glücklichen Lage seien, in den Quellen reichhaltiger Bibliotheken forschen zu können. Er fordert die Lehrer zu ausgiebiger Benutzung des von ihm zusammengestellten Stoffes auf, indem er sagt: „Die historischen Durchblicke sind nach meinen Erfahrungen vorzüglich geeignet, das Interesse der reiferen Schüler zu beleben, selbst solcher, deren Neigung den mathematischen Studien nicht besonders zugewandt ist. Da der Unterricht auf unseren Bildungsanstalten der Jugend zumeist einen geschichtlichen Lehrstoff darbietet, so sollte man auch dem Lehrgebäude der Mathematik hier und da einige bescheidene, geschichtliche Ornamente verleihen. Die geschichtlich-mathematischen Kenntnisse der Schüler auf Gymnasien und Realschulen beschränken sich fast immer nur auf den Namen Pythagoras, höchstens versteigt man sich zu Euklides, Ptolemäus und Diophantos, wodurch immer wieder nur den Griechen der Löwenanteil zufällt, während der großen Verdienste der Inder und Araber um die mathematischen Wissenschaften mit keinem Worte Erwähnung geschieht. Es ist selbstverständlich, daß der Lehrer hier nicht über ein bescheidenes Maß hinausgehe, da es genügt, den Schülern zum Bewußtsein zu bringen, daß die Mathematik nicht sozusagen in der Luft schwebt, sondern als eine der ältesten Wissenschaften in kulturgeschichtlichem Boden wurzelt. In der Mathematik waren die Griechen Theoretiker, die Ägypter, Inder, Chaldäer, Chinesen, Araber und Römer Praktiker; nur unter diesen Völkern fand naturgemäß der Algorithmus Ursprung und Gedeihen, während die Griechen ihn weder erfanden, noch auch Gebrauch davon zu machen wußten." Man merkt es dem

Matthiessenschen „Schlüssel“ fast auf jeder Seite an, daß an ihm „mit Liebe und Hingebung gearbeitet“ worden ist. Liebe aber erweckt Gegenliebe. Das Werk fand großen Beifall und der schnelle Absatz, den die erste Auflage erfuhr, gab schon nach einigen Jahren Veranlassung zum Erscheinen einer vielfach verbesserten und vermehrten zweiten Auflage. Die treue Anlehnung an Heis' Lehrgang verhalf dazu viel. War doch der Heis bis 1877, wo der „Schlüssel“ in zweiter Auflage erschien, in nicht weniger als 150 000 Abzügen über Deutschland, Österreich, Ungarn, Böhmen, die Schweiz, die Niederlande und die russischen Ostseeprovinzen verbreitet. Matthiessen, der sich ja an den Lehrer wendet, geht in seinen historischen Einfügungen natürlich wesentlich weiter, als Heis. Er leitet die meisten Abschnitte durch historische Bemerkungen ein, die oft mehrere Seiten füllen. Literaturhinweise stehen zumeist in Fußnoten. Wichtig ist, daß er ganze Beispiele für Rechenverfahren und Lösungsmethoden aus alten Werken und Handschriften vorführt, so die Multiplikation nach verschiedenen indischen Methoden, die Division nach indischen und arabischen Methoden, ein arabisches Verfahren, die Teilbarkeit durch 7 zu ermitteln, die Berechnung der Briggsschen Logarithmen nach Longs Methode (1724), das „aldjebr w' almukabala“ genannte altarabische Verfahren der Gleichungslösung, ein Verfahren nach der Regula falsi, wörtlich nach Beha-Eddin zitiert, altchinesische Lösungen von Textaufgaben, mehrere in hübscher Weise gegenübergestellte indische, arabische und mittelalterliche Lösungsmethoden für die quadratische Gleichung, sowie für unbestimmte Gleichungen usw. Aryabhatta und Bhaskara kommen mehrfach zu Worte und auch Euler, Bramagupta, Legendre, Vieta, Cartesius und viele andere werden mit Proben aus ihren Werken angefürt.[1]) Den Abschluß des zweiten Bandes bildet eine chronologisch geordnete Zusammenstellung derjenigen „Mathematiker des Altertums und der Neuzeit, welche die elementare Mathematik durch ihre Entdeckungen besonders gefördert haben“. Da der Matthiessensche „Schlüssel“ noch in den 80er Jahren unter den Lehrern höherer Schulen weit verbreitet war, darf die von ihm ausgegangene historische Anregung nicht gering veranschlagt werden. Deshalb rechtfertigte sich auch eine ausführlichere Besprechung an dieser Stelle.

Nur noch zwei Bücher sind mir bekannt geworden, die aus den siebziger Jahren stammen und mit lobenswerter Gründlichkeit auf die Geschichte der Mathematik eingehen; das sind die Bücher von Oppel und Kruse.

1) Wie sehr solche Proben auch im Sinne Baltzers waren, mag aus dessen Vorrede zur „Theorie und Anwendung der Determinanten“ (1. Aufl., Leipzig 1857) entnommen werden, wo es heißt: „Zitate (aus Originalquellen) sind nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den früheren Offenbarungen des Genius schuldet, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist und in denen noch immer reiche Schätze ungehoben ruhen.“

Von dem „Leitfaden für den geometrischen Unterrricht" von J. J. Oppel (Frankfurt a. M.) lag mir die zweite Auflage von 1878 vor. Im Vorwort heißt es: „Die hier und dort eingestreuten oder angedeuteten historischen Bemerkungen, die der Lehrer je nach Bedürfnissen weiter ausführen mag, sollen dazu dienen, den mathematischen Unterricht von seiner Isoliertheit zu befreien, ihn an die übrigen Bildungsmittel der Jugend und namentlich an das Studium des klassischen Altertums anzuknüpfen, was mir zumal für Gymnasien, von großer Wichtigkeit erscheint. Der Gymnasiast soll erfahren, was die Kulturvölker des Altertums auch auf den Gebieten, die der philologische Lehrer nicht zu erwähnen pflegt, obgleich sie ihnen bereits „die Wissenschaft" κατ' ἐξοχήν waren, Großes und Bewundernswertes geleistet, welche Aufgaben sie sich gestellt, auf welche Schwierigkeiten sie gestoßen, welche Mittel sie zu deren Bewältigung versucht, worin die Einseitigkeit ihrer Auffassungen bestanden, wann und wie und durch welche Koryphäen der Wissenschaft diese Schranken erweitert werden oder gefallen: — dies alles wird zur Belehrung des Unterrichts beizutragen geeignet sein." Oppel schreibt frisch, in übersichtlicher Darstellung; alles andere, nur nicht langweilig. Er streut viel griechische und lateinische Brocken ein; selbst französische fehlen nicht. Nicht selten werden sogar ganze Sätze im griechischen Urtext hinzugefügt. Und doch wird er mit seiner geschichtlichen Belehrung nicht aufdringlich, sie bleibt geschickt verteiltes Beiwerk.

Das andere Buch ist die „Geometrie der Ebene" (Berlin 1875) von Fr. Kruse. Auf Schritt und Tritt begleiten auch hier den Leser kleingedruckte, in den Text eingefügte historische Mitteilungen, die von gründlicher Orientierung des Verfassers zeugen und insbesondere auch reich an literarischen Nachweisen sind. — Wenig, aber doch etwas finden wir noch bei F. X. Stoll: „Anfangsgründe der neueren Geometrie" (Bensheim 1872), bei Kober: „Leitfaden der ebenen Geometrie" (Leipzig 1874); bei Worpitzky: „Elemente der Mathematik für gelehrte Schulen" (Berlin 1874).

Die nach den 80er Jahren erschienenen Lehrbücher bahnen schon die neuere Zeit an, und es empfiehlt sich daher nicht, sie einem Kapitel einzufügen, das der Betrachtung der Vergangenheit gewidmet ist, zumal sie meist, wenn sie sich als lebensfähig erwiesen haben, mit neueren Auflagen bis in die Gegenwart hineinragen.

2. Das Geschichtliche im Lehrbuche der neueren und neuesten Zeit.

Allgemeines und Statistisches.

Es wird in den Abhandlungen der I. M. U. K.[1]) schon hervorgehoben, daß man neuerdings dem geschichtlichen Momente im mathe-

1) Band I, Heft 2 (Lietzmann) S. 80; bzw. Band I, Heft 1 (Lietzmann) S. 11.

matischen Unterrichte mehr Geltung zu verschaffen suche. Zum Beweise wird die Tatsache angeführt, daß eine große Anzahl von Lehrbüchern jetzt geschichtliche Notizen über Mathematiker, über einzelne Lehrsätze und dergleichen einstreuen oder am Ende in einem besonderen Artikel zusammenstellen. An anderer Stelle heißt es unter Hinweis auf Baltzer und Helmes, die älteren Lehrbücher hätten in dieser Hinsicht recht viel gebracht. Die letztere Behauptung hat das vorige Kapitel bestätigt und ergänzt.

Es soll jetzt unsere Aufgabe sein, die neueren Lehrbücher vor uns vorüberziehen zu lassen, um auch jene Andeutungen zu prüfen und näher auszuführen. Reich, fast überreich ist der Stoff, den der Büchermarkt bietet.

Wenn sich nun auch unsere Schlußfolgerungen nicht auf alle zurzeit überhaupt vorhandenen deutschen Schullehrbücher stützen, so wird doch zugestanden werden müssen, daß sich aus den insgesamt 333 von uns verarbeiteten Lehrbüchern ein einigermaßen zuverlässiges Bild ergeben wird. Von diesen Büchern gehören 155 dem schon behandelten Zeitraume von 1800—1880 an, während die übrigen 178 sich auf die neuere und neueste Zeit verteilen. Der Verfasser hofft, daß ihm Wichtiges nicht entgangen ist. Bei der Zuordnung der Bücher in die einzelnen Zeitabschnitte wurden, soweit sie sich beschaffen ließen, die frühesten Auflagen herbeigezogen. Kam es doch wesentlich darauf an festzustellen, wann zum ersten Male das Geschichtliche durch die Verfasser berücksichtigt worden ist. Kam erst in einer späteren Auflage Geschichtliches hinzu, so wurde diese natürlich benutzt.

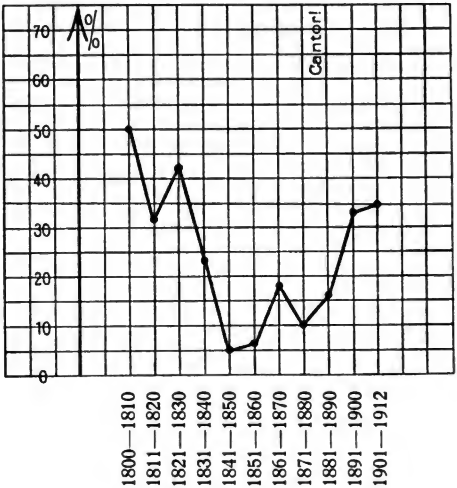
Und nun eine Bemerkung persönlicher Art. Der Verfasser befand sich bis zu einem gewissen Grade in ähnlicher Lage, wie Lietzmann bei Abfassung seiner Abhandlung (I. 1.): „Stoff und Methode usw.“, so oft nämlich bei der Besprechung von Lehrbüchern eine Kritik unvermeidlich war. Gleich Lietzmann (I. 1. Seite 11) hat ihn das Bestreben geleitet, so objektiv wie möglich zu sein, insbesondere nur im Falle der Zustimmung näheres auszuführen, andernfalls lieber zu schweigen. Natürlich ist deshalb nicht jedes unerwähnt gebliebene Buch als ungünstig beurteilt anzusehen. Auch wurde es vielfach dadurch möglich, mit eigener Kritik zurückzuhalten, daß dem Verfasser selbst das Wort erteilt wurde, und zwar dann, wenn er sich in der Vorrede oder sonstwo über seine Stellung zur Geschichte als Bestandteil des mathematischen Unterrichts ausspricht. Das hat den weiteren Vorteil, daß sich unsere späteren Ausführungen durch Bezugnahme auf diese Zitate kürzer fassen und übersichtlicher gestalten lassen.

Ferner mag nicht vergessen werden, daß ein im folgenden ausgesprochenes Urteil immer nur für den geschichtlich-mathematischen Inhalt, nicht aber für den sonstigen Stoff, seine Auswahl, Bearbeitung und Methode Geltung hat. Verfasser weiß sehr wohl, daß sich Vorzüge und Nachteile auf dem einen und dem anderen Gebiete keineswegs immer decken — leider, möchte er hinzufügen. Schließlich sei noch bemerkt, daß Verfasser sämtliche erwähnten Lehrbücher selbst eingesehen hat.

Vor Besprechung der neueren Literatur mag ein kurzer Zahlennachweis eingeschoben werden, der manches Lehrreiche enthält. Insgesamt bringen 25% aller Schulbücher aus der Zeit von 1800 bis 1912 Geschichtliches, wenn man auch kleinere und wenig inhaltreiche Notizen gelten läßt, sofern sie sich mit einer gewissen Absichtlichkeit und Folgerichtigkeit wiederholen. Bloße Erwähnung einiger Namen und Jahreszahlen wurde bei dieser Auszählung nicht beachtet. Natürlich ist die Grenze nicht immer leicht zu ziehen, aber eine Zusammenstellung in starren Zahlen oder genauen Kurven wird ja immer so etwas wie verkappte Persönlichkeit dessen, der sie gegeben, an sich tragen. Auch die Einteilung der Zeit in runde Jahrzehnte zwingt mitunter zur Zerreißung innerlich zusammengehöriger Abschnitte. Immerhin hofft der Verfasser, daß das Wesentliche hervortritt. In der folgenden Tabelle gibt die erste Spalte den Zeitraum an, in dem die Lehrbücher erschienen sind (möglichst erste Auflagen); die zweite die Anzahl der Lehrbücher (einschließlich Übungsbücher), die dem Geschichtlichen Beachtung schenken; die dritte gibt die Anzahl der überhaupt berücksichtigten Bücher und die letzte liefert die Prozentzahl der ersteren in bezug auf die letzteren.

Zeitraum	mit Geschichte	überhaupt	abgerundet %
1800—1810	4	8	50
1811—1820	4	13	31
1821—1830	9	21	43
1831—1840	3	13	23
1841—1850	1	21	5
1851—1860	1	16	6
1861—1870	5	27	18
1871—1880	4	36	10
1881—1890	8	50	16
1891—1900	11	33	33
1901—1912	33	95	35
1800—1880	31	155	20%
1881—1912	52	178	30%
1800—1912	*83*	*333*	25%

Prozentkurve (entsprechend vorstehender Tabelle).



Die Höchststellen der Prozentkurve im ersten Viertel des verflossenen Jahrhunderts dürfen nicht zu falschen Schlüssen verleiten. Sie kommen, wie im vorigen Kapitel dargetan wurde, auf Rechnung der im vierten Jahrzehnt allmählich verklingenden Vorliebe für Euklid und die Alten. Dann zeigt die Kurve in der Hauptsache Neigung zum Steigen, weil sich nach und nach die Erkenntnis Bahn bricht, daß historische Belehrung auf breiterer Grundlage zu bieten ist. Es steht zu hoffen, daß das Ansteigen nun auch weiterhin anhält, da in unseren Tagen ein frischerer Wind weht. Aber wir wollen nicht vorausschreiten. Setzen wir daher die mit Beginn des achten Jahrzehnts abgebrochenen Erörterungen fort.

Will man ein Lehrbuch der Mathematik auf geschichtlichen Inhalt prüfen, so schlage man den Pythagoreischen Lehrsatz und die Ableitung der Zahl π nach. Versagt dabei die Prüfung, so kann man es ruhig beiseite legen. Tatsächlich gibt es Lehrbücher, die sich hierbei in größter Bescheidenheit damit begnügen, einmal den Schleier von der Vergangenheit der mathematischen Forschung zu lüften. Soll ein wenig mehr getan werden, so treten wohl allenfalls einige Jahreszahlen und biographische oder sprachlich erläuternde Angaben beim Lehrsatz des

Ptolemäus, bei den Möndchen des Hippokrates, bei der Berührungsaufgabe des Apollonius, bei dem Begriffe des Logarithmus oder bei den Namen „Algebra“ und „Sinus“ auf. Was dabei geboten wird, ist jahrzehntelang sozusagen stereotyp, wie denn überhaupt für historisches Beiwerk das Gesetz von der Vererbung bei Generationen von Lehrbuchschreibern selbst dann eine nicht gerade erfreuliche Rolle spielt, wenn sie sich bemühen, methodisch oder stofflich neues zu bieten. Man erhält den Eindruck, daß in hervorragendem Maße Cantor und in jüngster Zeit vor allem Tropfke die Quelle für alle Neueren gewesen sind. So mancher „Tropfen“ aus Tropfke geht dann wieder aus zweiter in dritte Hand. Das läßt sich dort deutlich ersehen, wo Tropfke, von dessen „Geschichte der Elementar-Mathematik“ (Leipzig 1902, 1903) es leider noch immer keine 2. Aufl. gibt, ungenau ist. Wir wollen auf den Nachweis im einzelnen hier verzichten, möchten aber den Wunsch nicht unterdrücken, daß künftig von den Verfassern mathematischer Lehrbücher größere Zuverlässigkeit und Genauigkeit bei geschichtlichen Angaben erstrebt werden möge.[1]) Gerade an den gediegenen und gründlichen Vorarbeiten Tropfkes könnten sie sich ein Muster nehmen. Diese Mahnung ist nicht unnötig. Denn es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß sich die Verfasser von Schulbüchern jahrzehntelang von geschichtlichen Forschungen ferngehalten haben, daß sie oft in ihren Veröffentlichungen nur aus Mangel an Kenntnissen zurückhaltend blieben. Auch „der ethisch recht bedenkliche Fehler, ohne weitere Forschung denjenigen als erste Quelle anzugeben, bei dem man gerade etwas zuerst findet, ist unendlich häufig“.[2]) Das gilt für eine nicht geringe Zahl von ihnen noch heutzutage. Und wenn auch in Würdigung des Umstandes, daß in vergangenen Zeiten viele mit der antiken Geometrie wohl vertraut waren, mit der weitverbreiteten Meinung gebrochen werden muß, daß das Lehrbuch ehedem die Geschichte der Mathematik gänzlich ausschaltete, so gebührt doch für alle Zeiten das Verdienst, in zielbewußter, neugestaltender Arbeit und mit weitausschauendem Blicke die jetzt rüstig vorwärtsschreitende Besserung angebahnt zu haben, unzweifelhaft vier Männern, das sind die bereits ausführlich gewürdigten Heis, Matthiessen, Baltzer und Helmes.

---

1) Vor Tropfke war das natürlich noch schlimmer. Darum sagt Tropfke noch 1902 im Vorwort des genannten Werkes: „Ein Erfolg wäre es schon, wenn endlich einmal so viele falsche, leider nur zu fest eingewurzelte Bezeichnungen aus dem Unterricht verschwinden würden, wie ‚Diophantische Gleichungen, Cardanische Formel, Goldener Schnitt, Lunulae Hippocratis, Huddesche Methode, Gaußsche Zahlenebene‘ und viele andere, wenn die richtigen neueren Erklärungen für das x der Gleichung aus dem italienischen *cosa*, für das Pluszeichen aus *et*, den Wurzelhaken aus einem Punkt (nicht aus einem r), das Prozentzeichen $^0\!/\!_0$ aus *Cto.* (= *cento*) usw. die allbeliebten falschen Erzählungen verdrängten.“

2) Simon, Didaktik usw., S. IX. 130.

Lehrbücher und Aufgabensammlungen, die insbesondere die geschichtliche Aufgabe pflegen.

Die jahrzehntelang gepflegte Überlieferung in den achtziger Jahren und später noch fortzuführen, war in hervorragendem Maße der Aufgabensammlung von Heis beschieden. Dadurch rechtfertigt es sich, wenn wir dieses Buch jetzt nochmals und ausführlicher besprechen. Heis, dem schon früher ob seiner Gesamtleistung Lob gespendet wurde,[1]) benutzt jede sich nur bietende Gelegenheit, um in unaufdringlicher Weise den Schüler auf den Boden der Geschichte zu geleiten. Schon in einem Abschnitte über „Vorbegriffe“ läßt es den Gebrauch der Klammern an der Gaußischen Osterformel üben, wobei historische Bemerkungen hinzugefügt werden; ähnlich verfährt er bei den Begriffen Quotient und Verhältnis, wenn er auf den Nonius hinweist, oder bei der Teilbarkeit der Zahlen, wo der Neunerprobe und ihrer Geschichte gedacht wird. Regiomontanus, Recorde und Stevin treten bei Behandlung der Dezimalbrüche auf, Rechenaufgaben über „befreundete und vollkommene“ Zahlen bringen Heis auf Stifel, van Schooten, Euler und Euklid; Potenzübungen auf Kepler und sein drittes Gesetz, das Kubikwurzelziehen bringt ihn auf das Delische Problem und logarithmisches Zahlenrechnen auf das Gaußische arithmetisch-geometrische Mittel. In den Aufgaben über Textgleichungen fügt er mehrere der bekannten sich von Geschlecht zu Geschlecht weitererbenden alten griechischen Aufgaben [2])

---

1) Seite 11—12. 24.

2) Unter diesen Aufgaben mag als Probe eine immer wieder auftauchende im Urtext hier folgen:

> Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
> αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο·
> τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
> μῆτερ, τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ἠΰτε κούρη;
> εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
> εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις·
> εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπιΐστορ.

Dieser Urtext findet sich in den älteren Heisaufgaben als Fußnote. Später wurde er weggelassen. Die Aufgabe kommt schon in sehr alten Aufgabensammlungen vor, u. a. in der auf Seite 1, Anm. 2 erwähnten aus dem Jahre 1568. Dort steht auch eine lateinische Übertragung Philipp Melanchthons, welche den Wortlaut hat:

> Mulae Asinaeque duos imponit servulus utres
> Impletos vino, segnemque ut vidit Asellam
> Pondere defessam vestigia figere tarda,
> Mula rogat: Quid cara parens contare, gemisque?
> Unam ex utre tuo mensuram si mihi reddas,
> Duplum oneris tunc ipsa feram: sed si tibi tradam
> Unam mensuram, fient aequalia utrique
> Pondera. Mensuras dic docte Geometer istas.

Die zweite lateinische Übersetzung von Joachim Heller übergehen wir. Heis (auch Druxes) gibt folgenden deutschen Text:

bei, in deutsche Hexameter übertragen; der alte Ahmes muß ihm ebenso Aufgaben liefern, wie der Chinese Tsin Kiu Tshaou oder wohl auch eine ägyptische Hieroglypheninschrift. Die Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme lassen ihn Streiflichter auf die Geschichte der Determinanten werfen, ebenso wie die für quadratische Gleichungen seinen Blick auf die Araber und Inder lenken. Übungen über unbestimmte Gleichungen erinnern an deren Geschichte und führen zu Aufgaben über Kreisteilung, Kalenderberechnung vergangener Zeit und zu Problemen einer alten chinesischen Arithmetik. Bei den Reihen fehlen nicht die bekannten Aufgaben vom Schachbrett und den Weizenkörnern, sowie von Achilles und der Schildkröte, ganz wie auch anderswo; aber auch eine alte Nürnberger Chronik von 1541 und indische Bücher bieten Übungsbeispiele dar. Bei den Kettenbrüchen kommen eine ganze Reihe hervorragender Mathematiker zu Worte, und selbst der alte Horaz wird herbeigeholt, um Stoff zu einer Umwandlung in Teilbruchreihen darzureichen. Mit Fleiß sind hübsche geschichtliche Beispiele zur Kombinatorik zahlreich zusammengetragen. Ja sogar die alte Magie gibt eines ihrer dunklen Geheimnisse preis. Reiche historische Belehrung kann man weiterhin aus den Aufgaben über höhere Gleichungen schöpfen — kurz überall dringen nie störend oder unvermittelt, aber doch mit leisem Hall nachklingend Töne vergangener Zeit an das Ohr des lauschenden Schülers.

Die neue Heisbearbeitung von I. Druxes (1908) hat, was die historischen Aufgaben anlangt, mit der Überlieferung nicht gebrochen. Fast alle die guten alten Bekannten finden wir darin wieder. Wenn die geschichtlichen Fußnoten verschwunden sind und sich zu einem besonderen Anhange verdichtet haben, so kann das nur gut geheißen werden. Hübsch ist die Zusammenstellung von Proben, wie die Alten und die Mathematiker des Mittelalters Gleichungen geschrieben haben.

Bleiben wir zunächst bei den Freunden historischer Aufgaben. Da interessiert uns ein schon 1881 bei Teubner erschienenes Werkchen von besonderer Eigenart. Es ist betitelt: „Antike Rechenaufgaben. Ergänzungsheft zu jedem Rechenbuch für Gymnasien“ und hat zu Verfassern R. Menge und F. Werneburg. Einige Sätze aus dem Vorwort lassen die leitenden Gedanken der Verfasser erkennen. „Die Aufgaben der in unseren Gymnasien üblichen Rechenbücher sind oft wenig geeignet, das Interesse der Schüler und somit die Lust zur

---

Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchens Mutter;
Und die Eselin seufzete sehr; da sagte das Söhnlein:
Mutter, was klagst und stöhnst du doch, wie ein jammerndes Mägdlein?
Gib ein Pfund mir ab, so trag' ich doppelte Bürde;
Nimmst du es aber von mir, gleichviel dann haben wir beide.
Rechne mir aus, wenn du kannst, mein Bester, wieviel sie getragen.

Heilermann-Diekmann geben eine andere deutsche Übersetzung älteren Datums (I. § 31, No. 35).

Lösung der Aufgaben zu erregen, weil sie Gebieten entnommen sind, die den Gedankenkreisen unserer Gymnasiasten fern liegen." ... „Die so erreichte innige Verknüpfung zwischen den bis jetzt gänzlich getrennten Gebieten des sprachlichen und des Rechenunterrichts und die Erlösung des letzteren aus seiner isolierten Stellung dürfte von allen Pädagogen wohl als ein Mittel betrachtet werden, durch das die Lösung der Aufgabe des Gymnasialunterrichts nicht unwesentlich gefördert wird." Das Büchlein atmet von der ersten bis zur letzten Seite klassischen Geist und würde allzu einseitig genannt werden müssen, wenn ihm nicht ausdrücklich die Aufgabe eines Ergänzungsheftes zuerteilt worden wäre. Die zahlreichen Beispiele zerfallen in die Unterabteilungen: Verwendung antiker Verhältnisse und Tatsachen; Verwandlung antiker Größen unter sich; Verwandlung antiker Größen in moderne; Antike Zeitrechnung. Sie beziehen sich auf alle Gebiete des Rechnens bis zur Regeldetri, der Zinsrechnung und dem Kettensatz einschließlich. Im übrigen enthält das Buch nur wenig wirklich aus dem Altertume stammende Aufgaben, in der Hauptsache vielmehr solche, die antike Zeit und Geschichte zum Gegenstand haben, allerdings in erstaunlicher Vielseitigkeit. Es dient also nur mittelbar der Förderung geschichtlich-mathematischer Belehrung.

Anders steht es mit Heilermann und Diekmann, deren „Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra an den höheren Schulen" im I. Teil 1909 schon in 13. Auflage erscheinen konnte. (Neue Bearbeitung von K. Knops.) Da die erste Auflage 1878 erschien, reicht auch Heilermann-Diekmanns Buch mit seinem Einflusse schon ein drittel Jahrhundert zurück. Es enthält ebenfalls eine Reihe der von dem griechischen Mönche Maximus Planudes 1350 zusammengetragenen griechischen Epigramme in deutscher Übersetzung, ferner Textgleichungen von Adam Riese, Michael Stifel und anderen Cossisten, deren teils scherzhafte Form durch Stifels Ausspruch: „Solliche spöttliche Exempla wöllen oft mehr Wort haben, denn die nutzliche" in lustiger Weise gerechtfertigt wird. Manchen Schüler, der in die mittelhochdeutsche Sprache eingeführt wurde, wird nebenbei der in altertümlichen Lettern gedruckte, unveränderte Originaltext interessieren; er wird sich freuen, wenn die Einförmigkeit der Textgleichungen etwa durch folgende Aufgaben unterbrochen wird:

§ 28, No. 73 (von Adam Riese): „Item 3 gesellen haben gewunnen ein anzal geldes, der erste nimet $\frac{1}{7}$, der ander $\frac{1}{4}$ und der dritte nimet das vberig das ist 17 fl. Nun frage, wieuil des geldes ist das sie gewunnen habe."

oder auch durch die folgende, der Coß von Christoph Rudolff, herausgegeben von Michael Stifel entnommene:

§ 28, No. 83: „Ein Herr hat einen Diener dem soll er zu jarlon geben 10 fl. u. einen Rock. Der Knecht dienet 7 Monat, u. darnach werden sye miteinander zwytrechtig u. aufftössig, das sye miteinander abrechnen. Trifft die Rechnung den Herrn zu geben dem Knecht den Rock u. 2 fl. Was ist der Rock werdt?"

Von dem Inder Bhaskara stammt z. B. die Gleichung:

§ 44, No. 37: „Eine Lotosblume ragt mit der Spitze 4 cm[1]) aus einem Teiche hervor; vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 cm von ihrem früheren Standpunkte unter dem Wasser; wie tief der Teich?"

und aus dem altägyptischen Handbuche des Ahmes das Beispiel:

§ 28, No. 161: „Vorschrift, zu verteilen 700 Brote unter 4 Personen; $\frac{2}{3}$ (einer Anzahl) für einen, $\frac{1}{2}$ für den zweiten, $\frac{1}{3}$ für den dritten, $\frac{1}{4}$ für den vierten."

Muhammed ben Musa kommt mit folgender Aufgabe zu Worte:

§ 44, No. 11: „Ein Quadrat und 10 seiner Wurzeln (d. i. das Quadrat einer Zahl samt ihrem 10-fachen) sind gleich 39; d. h. wenn du zu einem Quadrate 10 Wurzeln addierst, so wird dieses zusammengenommen gleich 39. Wie heißt die Wurzel?"

Solche Aufgaben mögen zugleich als typisch für andere der hier besprochenen Aufgabensammlungen dienen. Von dem Heilermann-Diekmannschen Übungsbuche kann in bezug auf seinen Gehalt an historischen Aufgaben wohl behauptet werden, daß es neben Heis zu stellen ist. Aber nicht nur deshalb, sondern auch weil es sonst viel gute, gründliche und nicht über den Horizont des Schülers hinausgehende geschichtliche Belehrung bietet, ohne daß das Rankenwerk den fruchtbringenden Baum mathematischer Erkenntnis schadenbringend überwuchert.

Neben die vorigen zu stellen ist die ebenfalls aus dem Anfange der 80er Jahre stammende „Arithmetik für Gymnasien" von Schubert, unter Beihilfe von Schumpelick verfaßt, die zuletzt 1907 neu aufgelegt wurde. Im Vorwort zur 1. Auflage (1883) heißt es: „Gelegentlich habe ich nicht allein geometrische und physikalische, sondern auch sprachliche und historische Notizen und Fragen herangezogen, namentlich, wenn dieselben geeignet sind, arithmetische Begriffe und Wahrheiten heller zu beleuchten. Ebenso habe ich geglaubt, dem Buche auch 12 eingekleidete Gleichungen aus der griechischen Anthologie, einige Aufgaben aus dem antiken Leben, sowie eine Tabelle der griechischen und römischen Maße einverleiben zu dürfen." Das „Historische" zu den einzelnen Abschnitten ist übersichtlich angeordnet, aber ziemlich knapp gehalten. Die griechischen und römischen Längen-, Körper- und Münzmaße werden Teilnahme erwecken, zumal darüber Aufgaben, so-

1) Diese kleine Textfälschung wird dem Verfasser wohl niemand übelnehmen.

gar unter Benutzung der griechischen Zahlzeichen, angeschlossen sind. Hier einige Beispiele:

§ 23, No. 29: 700 aurei + 13 denarii — 2 sestertii unter Trajan.

No. 30: $\frac{1}{8}$ (1 παρασάγγης — 27 στάδια — 3 πλέθρα),

No. 36: η′ Arbeiter verdienen in ε′ Tagen ογ′ δραχμαί Silber. Wieviel ὀβολοί verdient 1 Arbeiter in 1 Tag?

No. 38: Ein agrimensor (Feldmesser) vermißt in 3 Tagen 7 jugera, wielviel Ar also in einem Tage?

No. 43: Herodot gibt (I, 178) an, daß ὁ βασιλήιος πῆχος (die persische Elle) um 3 δάκτυλοι größer sei, als ὁ μέτριος πῆχος (die gangbare Elle). Wieviel Meter betrug die persische Elle?

Hervorzuheben ist noch, daß der Inhalt der Distichen bei den griechischen Gleichungen kurz in Prosa wiederholt wird. Sollte indes nicht das Herausschälen des mathematischen Kernes aus der poetischen Schale auch zu dem vom Schüler billigerweise zu Fordernden gehören? Das zweite Heft für obere Klassen bringt im ganzen etwas weniger; geschichtliche Aufgaben fehlen mit verschwindenden Ausnahmen (z. B. Berechnung der Cheopspyramide nach Angabe Herodots, Delisches Problem, Schachspielaufgabe und Zenonische Trugschlüsse). Auf Fußnoten und Literaturangaben wird verzichtet.

Die historische Aufgabe pflegt ferner A. Schülke in seiner „Aufgabensammlung aus der Arithmetik" (I. Teil) für mittlere Klassen (1906). Er benutzt als Quellen u. a. Rudolffs Coß von 1525, ein altes Lehrbuch von 1710, Brahmagupta (600), Bhaskara (1100), Metrodorus (330 n. Chr.), Ahmes und Thucydides (163). Auch eine ansprechende, mit Geschichtlichem durchflochtene Einleitung für die Behandlung der Brüche, der negativen und relativen Zahlen usw. findet sich in der Sammlung, während der II. Teil (1. Aufl. 1902, 2. Aufl. 1910) außer einer „geschichtlichen Entwicklung" bei der Exponentialfunktion und den Logarithmen nicht viel bietet. Die geschichtlichen Bemerkungen entnahm der Verfasser, wie er im Vorwort sagt, meist dem Werke Cantors.

Der alte Wöckel (Beispiele und Aufgaben zur Algebra, 7. Aufl. 1874), ein seinerzeit viel an deutschen Gymnasien eingeführtes Schulbuch, bietet an Geschichtlichem nahezu nichts; auch die so beliebten altgriechischen Epigramme sucht man vergebens; nur ganze zwei historische Aufgaben kommen vor, eine indische „vom Bienenschwarm auf blühender Katamba" (nach Bhaskara) und dann die von König Hieros goldener Krone.

Sehr ergiebig sind hingegen die Bücher von Fr. Wallentin. Sind sie auch in erster Linie für österreichische Schulen geschrieben, so wurden sie doch — wenn wir nicht irren — auch von einigen süddeutschen Gymnasien des Reiches eingeführt, und dann sind sie als beliebte Aufgabenquellen auch viel in der Hand des Lehrers. Im „Lehrbuch der Mathematik für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen“ (2. Aufl. 1890) heißt es im Vorwort: „Die kurzen historischen Anmerkungen sind in der Absicht gebracht worden, den Schülern deutlich zu machen, daß die Arithmetik, gerade so wie die meisten anderen Wissenschaften, erst durch eine vielhundertjährige sorgfältige Pflege zu ihrer jetzigen Vollendung gelangt ist.“ Neben zahlreichen Fußnoten, die teilweise sehr lang und ausführlich werden (z. B. bei den Zahlzeichen und Zahlsystemen) werden Aufgaben der griechischen Anthologie, solche aus Christoph Rudolfs Coss, u. a. geboten, darunter sogar der lateinische Text der von Bhaskara gegebenen Auflösung quadratischer Gleichungen. Weit inhaltreicher in historischer Beziehung ist desselben Verfassers „methodisch geordnete Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Algebra und allgemeinen Arithmetik“ (5. Aufl. 1899), die Dutzende von Aufgaben aus alter Zeit bringt und zwar außer griechischen Epigrammen Beispiele aus dem „Liber abaci“ des Leonardo von Pisa, Cossaufgaben aller Art, chinesische Aufgaben, solche von Alcuin u. a. m. Die Wallentinschen Bücher sind, was geschichtliche Anregung der Gymnasiasten anlangt, zurzeit zu den anregendsten und vielseitigsten, sowie methodisch am geschicktesten verfaßten zu rechnen.

In seinen Aufgaben nicht gar viel, aber immerhin beachtliches bringt das mathematische Unterrichtswerk von Schwab-Lesser, dem neben den Epigrammen Bhaskara, Diophant, Ahmes, Euler, Huygens, Gutschoven, Zeno und Diokles Stoff lieferten. Was das Buch aber sonst noch an 70—80 Stellen (bei reichlich 700 Seiten) an Geschichtlichem bringt, ist so reichlich und wertvoll, daß es sich lohnt, noch etwas bei ihm zu verweilen. Es zerfällt in zwei Bände von je zwei Teilen (Unter- und Oberstufe). Der erste Band (1909 und 1910) ist der Arithmetik und Algebra, der zweite (1910 und 1911) der Geometrie gewidmet. Im Vorwort zu I, 1 heißt es: „. . . . . so werden auch Mitteilungen aus der Geschichte ähnlich wirken (d. h. das Interesse am Gegenstand um ein wesentliches erhöhen), indem sie ihrerseits durch den Einblick in den Werdegang unserer Wissenschaft den Unterricht anregen und beleben. Zudem aber begründen wir auf diesem Wege die wertvolle Vorstellung, daß das, was heute den Schülern geboten werden kann, keineswegs schon immer bekannt war oder etwa in rasch vollzogenem Gedankenprozeß leichthin gewonnen worden ist; daß es vielmehr einer Jahrhunderte (um nicht zu sagen: Jahrtausende) langen, gewaltigen Arbeit und Pflege bedurfte, um die Wissenschaft zu begründen und auf ihre heutige Höhe emporzuheben. Wo immer es angängig war, habe ich daher kurze, oft nur stichwortartige Hinweise geschichtlicher Art eingestreut und als Belege „klassische“ Aufgaben wiedergegeben. Mag man über den Wert der letzteren an sich denken, wie man will, als lebendige Zeugen zum Teil längstverblichener Zeiten wird sie der gerne willkommen heißen, der geneigt ist, auch im Unterrichte die Fäden in die Vergangenheit hinüberzuspinnen, deren Vermächtnis wir in Ehren halten wollen. Daß die gegebenen geschichtlichen Notizen wegen ihrer notwendigen Kürze für den Schüler bedeutungslos bleiben müssen, wenn nicht der Lehrer sie zum Ausgangspunkte näherer Mitteilungen machen will, bedarf keiner besonderen Erwähnung". Diesen ganz in unserem Sinne geschriebenen Ausführungen ist nichts hinzuzufügen, es sei denn der Ausdruck unserer Überzeugung, daß es den Verfassern, zu denen sich noch C. H. Müller gesellt, gelungen ist, zwischen zuviel und zuwenig den rechten Mittelweg zu wählen und daß ihr Buch in der Hand eines verständnisvollen Lehrers die in den zitierten Sätzen ausgesprochenen Zwecke recht wohl zu erfüllen geeignet ist.

Lehrbücher mit besonderen Kapiteln über Geschichte der Mathematik oder besonderem geschichtlichen Anhang.

Wir wenden uns nun zu den Büchern, die der geschichtlichen Aufgabe kein Feld einräumen, dies zum Teil schon darum nicht tun können, weil sie als reine Lehrbücher überhaupt keine Aufgaben stellen. Unter diesen mehren sich in neuerer Zeit solche, die Einstreuungen im Text unterlassen und dafür zum Schluß oder von Zeit zu Zeit nach größeren Abschnitten zusammenhängende geschichtliche Darstellungen vorziehen. Druxes-Heis nannten wir schon. Unter den älteren Büchern, die schon im vorigen Abschnitt vorkamen, sei hier nochmals auf die analytische Geometrie von Lübsen hingewiesen. Sie enthält eine zusammenhängende Geschichte der behandelten Disziplin, die überschrieben ist: „Dasein und Entdeckung der zu einer nach irgendeinem mechanischen Gesetze entstandenen Linie gehörenden Gleichung". Die Darstellung trägt den Stempel der breiten, nicht überall beliebten Lübsenschen Ausführlichkeit. Doch durchweht sie überall der frische Hauch freudiger Begeisterung. Folgende warmempfundenen Worte aus der Vorrede seien dem Leser nicht vorenthalten: „Die Geschichte der Wissenschaften ist die eigentliche Geschichte des menschlichen Geistes und ihre allmähliche Entwicklung vom Keime an zeigt uns die allmähliche Entwicklung des Geistes. Die Menschheit wächst mit den Erkenntnissen und wird vollkommener mit ihnen, und eben deshalb ist die Geschichte der Wissenschaften so lehrreich und erhebend. Sie läßt an keinen Stillstand, nur an steten Fortschritt denken. Ein Gedanke gebiert den anderen, sie erzeugen sich fort und fort, tragen hundert und tausendfältig; und solange noch immer neue Tage aufeinander folgen, werden auch immer noch neue Gedanken aufeinander folgen; ihre Quelle ist unerschöpflich wie die Zeit."

Von Neueren ist in erster Linie Heinrich Müller zu nennen, dessen mathematisches Unterrichtswerk sehr bekannt und weit verbreitet[1]) ist. In Betracht kommt hier nur die Oberstufe, die in der ersten Auflage nur einen Anhang mit alphabetisch nach den Namen geordnetem Verzeichnisse von 26 hervorragenden Mathematikern nebst kurzen Notizen über ihr Leben und ihre Werke enthielt. Die neueste dritte Auflage (1909) dagegen bietet außerordentlich viel mehr, indem sie das Verzeichnis auf 90 Namen erhöht, die biographischen Angaben zwar auf das äußerste beschränkt, dafür aber im Abschnitt VI einen ausführlichen 40 Seiten umfassenden „Überblick über die Geschichte der Schulmathematik" hinzufügt, dessen Aufbau sich eng an das Werk von Tropfke anschließt und den Tropfke im Manuskript einer Durchsicht unterworfen hat. Der Überblick zerfällt in folgende Abschnitte: Entwicklung der Geometrie; Erklärungen der Geraden, des Winkels und der Parallelen; Dreieck, Viereck und Kreis; Flächenberechnung und Flächenvergleichung; zur Lehre von der Ähnlichkeit; über die regelmäßigen Vielecke; über die Kreisberechnung; die Entwicklung der Stereometrie; über die Koordinatengeometrie; die Trigonometrie; zur Entwicklung der algebraischen Ausdrucksweise; von der Entwicklung der Gleichungslehre; über Maxima und Minima; die niederen Reihen; die Logarithmen. Auch in den einzelnen Abschnitten ist der Stoff übersichtlich gegliedert, und daß alles sachlich einwandfrei ist, kann schon aus Tropfkes Mitarbeit geschlossen werden. Müller hat wohl selbst weitgehenden Wünschen Rechnung getragen, und ein Mehr würde über den Rahmen eines Schulbuches entschieden hinausgehen. Die Grundgedanken des Verfassers entnimmt man am besten aus seinem Vorwort, wo es heißt: „Die Erkenntnis, daß der mathematische Unterricht mehr Fühlung mit der Geschichte zu nehmen habe, hat in der letzten Zeit beträchtlich an Boden gewonnen; man ist sich der Bedeutung wohl bewußt, welche die Ueberzeugung, daß auch die mathematische Wissenschaft das Ergebnis langwährender unausgesetzter Tätigkeit des menschlichen Geistes ist, für die Durchbildung des Schülers hat, und vielfach wird gewiß auch schon danach gehandelt; aber es wird noch manches kräftigen Anstoßes bedürfen, bis im mathematischen Unterricht allgemein der geschichtlichen Entwicklung die gebührende Beachtung geschenkt wird. Woran dies liegt, kann hier nicht untersucht werden; es wird der Hinweis genügen, daß vor dem Erscheinen des prachtvollen Werkes von Johannes Tropfke eine zusammenfassende Darstellung der Geschichte der Schulmathematik nicht vorhanden und deshalb der Lehrer gezwungen war, sich aus umfangreichen Werken, wie aus Cantors großem Meisterwerk oder aus den zahlreichen mathematisch-historischen Schriften der letzten Jahrzehnte das Material zusammen zu suchen." „Eine gleichmäßige Berücksichtigung aller Gebiete war aus Mangel an Raum nicht möglich; Verf. glaubte jedoch eine geeignete Auswahl getroffen zu haben. Will der

1) Vergl. IMUK-Abhandlungen I, 1 (Lietzmann) S. 7 und 8.

Lehrer auf entlegenere Gebiete, die bei den anderen nur gelegentlich gestreift worden sind, näher eingehen, so wird er gewiß die kleine Mühe nicht scheuen, aus dem Werke Tropfkes für die Schüler die zur gedächtnismäßigen Aneignung geeigneten Daten auszuziehen."

Denselben Abriß, unter der Überschrift: „Ausgewählte Abschnitte aus der Geschichte der Algebra und der Geometrie", finden wir wieder im II. Teile der für gymnasiale Kurse bestimmten Ausgabe des „Lehr- und Übungsbuches der Arithmetik und Algebra für Studienanstalten", den Heinrich Müller zusammen mit A. Mahlert 1910 bei Teubner erscheinen ließ.

Eine knappe, aber gut orientierende, zusammenhängende Darstellung der Geschichte der Trigonometrie (8 Seiten) bringt W. Lietzmann, der 1911 den zweiten Band, die Trigonometrie, aus M. Schusters „Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie" nach dem Tode des Verfassers neu herausgegeben hat. Übrigens brachten schon die früheren Ausgaben des Werkes im Anschluß an einzelne Sätze und Aufgaben eine Fülle geschichtlicher Bemerkungen.

Als eine dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechende Erneuerung und Weiterführung von Baltzers „Elementen der Mathematik" gedacht sind die „Grundlehren der Mathematik", bearbeitet von E. Netto und C. Färber. Zurzeit liegen der I. Band des ersten Teiles über Arithmetik (1911) von C. Färber, der leider der Wissenschaft so früh entrissen wurde, und der erste Band des II. Teiles über Geometrie (1909), verfaßt von H. Thieme, vor. Das zwar nicht unmittelbar für den Unterricht bestimmte, aber als „Beitrag zur Förderung des mathematischen Unterrichts gedachte" Werk hat von den vielgerühmten Vorzügen der Baltzerschen Elemente auch die historische Grundlage übernommen und belehrt den Leser gut und gründlich, teils in zusammenhängenden Abschnitten, teils in zahlreichen Fußnoten über die Geschichte der Sätze und Probleme, wobei es zum großen Teil aus Cantor und Tropfke schöpft. So stehen ausführliche historische Vorbemerkungen und Einleitungen vor den Kapiteln: Kettenbrüche; Logarithmen; Wahrscheinlichkeitsrechnung; Irrationale Zahlen; Komplexe Zahlen.

Ein sehr hübscher, frisch und lebendig geschriebener, selbst auf mathematische Details eingehender „Geschichtlicher Anhang" zeichnet ein Buch aus, das unter deutschem Gewande sein im besten Sinne französisches Naturell nicht verleugnet. Da es sich mit Recht einen Platz in der Bücherei deutscher Schulmathematiker erobert hat, gebührt ihm auch eine Würdigung an dieser Stelle. Wir meinen „Die Elemente in der Mathematik" von J. Tannery, Professor an der Universität Paris, durch dessen Übersetzung (1908) sich P. Klaess ein Verdienst erworben hat. Schon das Einführungswort von F. Klein ist ihm ein guter Geleitbrief. Der geschichtliche Anhang stammt aus der Feder P. Tannerys, des Bruders des Verfassers, dem Jules Tannery in der Vorrede nachrühmt: „Man wird finden, daß diese geschichtlichen Anmerkungen sehr wichtige Punkte in der Geschichte der Mathematik berühren und sich gewöhnlich auf Fragen beziehen, die im Lehrplan vorkommen. Bei einer geschichtlichen Darstellung aber, die nicht verstümmelt sein soll, ist ein gewisses Maß Freiheit in der Behandlung notwendig." Wir schließen uns dem Verfasser an, wenn er hinzufügt: „Der Leser wird vielleicht weiter nichts bedauern, als daß mein Bruder von dieser Freiheit in allzu maßvoller Weise Gebrauch gemacht hat."

Einen kurzen geschichtlichen Abriß, einige Worterklärungen und Anmerkungen geschichtlicher Art (z. B. über Regiomontan) finden wir auch in der 1909 von Thaer neu bearbeiteten Planimetrie von Kambly-Roeder.

Auf neun Seiten bringt einen zusammenfassenden „Historischen Anhang" auch der II. Teil einer soeben (Tübingen 1912) erschienenen „Analytischen Geometrie" von V. und K. Kommerell. Die Verfasser rechtfertigen ihren Anhang aus „der mit Recht aufgestellten Forderung nach einer stärkeren Betonung des Historischen im Unterricht". Als Quellen dienten neben Cantor und Tropfke und Günther auch das Buch Wieleitners über „spezielle ebene Kurven", sowie die einschlägigen Artikel der Enzyklopädie der Mathematik. Das Ziel der Verfasser, auf wenigen Seiten einen guten Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Kurvenlehre zu geben, ist durchaus erreicht.

Lehrbücher mit geschichtlichen Einzelnotizen, Fußnoten, Anmerkungen und dergleichen, sowie solche mit sprachlichen Erklärungen von Fachausdrücken, die aus dem Altertume stammen.

Wir wenden uns jetzt den Lehrbüchern zu, die nicht in einem oder in wenigen zusammenhängenden Kapiteln das Geschichtliche pflegen, sondern durch zahlreiche längere oder kürzere Einfügungen. Da nimmt einen hervorragenden Platz das dreibändige Werk von Th. Wittstein ein, dessen sechs Abteilungen 1858, in neuen Auflagen wieder seit 1880 bis 1908 verbreitet sind.

Wittstein geht von großen Gesichtspunkten aus. Da er in erster Linie das humanistische Gymnasium im Auge hat, so erstrebt er durch seine historischen Beigaben neben einer inneren Verbindung der verschiedenen Lehrfächer eine auf den Grundideen des Humanismus beruhende Würdigung des klassisch-mathematischen Griechentums. Und er schlägt die Brücke zwischen den geschichtlich belebten Lehrbüchern vor hundert Jahren und denen von heute insofern, als er auch die nach-klassischen Zeiten großer mathematischer Entdeckungen zu ihrem Rechte kommen läßt. Doch hören wir ihn selbst. Er sagt im Vorwort zu Band I, 2. Teil: „Nicht immer hat einerlei Ansicht darüber geherrscht, was unter klassischer Bildung verstanden werden soll. Der strenge Philolog, auf dem Boden seines Faches stehend, sah die klassische Bildung in einer gründlichen Erlernung der griechischen und der lateinischen Sprache, wozu die klassischen Schriften nur als Beispielsammlung zur Grammatik benutzt werden. Da indessen der Erfolg dieser klassischen Bildung wenig der Erwartung entsprach, indem das Gelernte in der Praxis des Lebens sehr bald aus Mangel an Verwendung beinahe spurlos wieder verschwand, so machte sich nach und nach eine andere Auffassung daneben geltend, nach welcher die klassische Bildung in einer gründlichen Erkenntnis der uns hinterbliebenen griechischen und lateinischen Schriften hinsichtlich des Inhalts derselben bestehen soll, zu welcher die betreffenden Sprachen nur als Hilfsmittel zu behandeln sind. Diese Auffassung fängt jetzt an, die herrschende zu werden, und damit machte sich naturgemäß zugleich eine Verschiebung des Unterrichts nötig, indem man jede dieser Schriften dem betreffenden Fachlehrer zuweisen mußte, dem als einem Gymnasiallehrer man immer die erforderliche Sprachkenntnis zutrauen durfte. Welche Erfolge diese geänderte Anschauung der Sache gehabt hat, davon ist mir, bei ihrer Neuheit, noch nichts bekannt geworden.

Wird dieser Sachlage gegenüber die Mathematik, wie sie in den Schulen aufzutreten pflegt, ins Auge gefaßt, so muß sofort klar sein, daß dieselbe in den Rahmen eines Gymnasiums gar nicht hineinpaßt; sie findet in ihrer einsamen Stellung nirgends eine Anknüpfung, erscheint wie vom Himmel hineingeschneit oder wie durch einen Machtspruch von oben hineindekretiert und auch von seiten der philologischen Kollegen findet der unterrichtende Mathematiker wenig Entgegenkommen, wie leicht erklärlich ist. Aber von anderer Seite kann nicht bestritten werden, daß die Wiege unserer Mathematik in die Blütezeit der griechischen Kultur fällt; aus den Platonischen Dialogen ist an den verschiedensten Stellen zu ersehen, daß zu jener Zeit jeder Gebildete nicht nur Mathematik verstand, sondern auch mit Interesse sich an mathematischen Untersuchungen beteiligte, und endlich haben uns die Griechen mathematische Schriften ersten Ranges hinterlassen, von denen hier nur die Namen Euklides, Archimedes und Apollonius genannt werden mögen. Warum werden diese Schriften bisher so beharrlich gemieden und nur von Mathematikern gelesen? Sollte nicht endlich an der Zeit sein, dieselben in den Gymnasialunterricht mit hineinzuziehen, um so unseren Gymnasien in allen ihren Unterrichtsfächern zu der jetzt fehlenden und doch so wünschenswerten vollendeten Einheit zu verhelfen? Denn daß diese Schriften nicht mit attischem Dialekt geschrieben sind, kann schwerlich ein Hindernis sein; man müßte ja sonst auch den Homer verbannen!" „. . . wenn man verfolgt, wie die Griechen der Schule Platons aus geringen, von Ägypten überkommenen Anfängen zuerst die mathematische Methode erfanden und ausbildeten; wie sie hinterher gleichfalls auf Platons Anregung bei der Krone ihrer Schöpfungen, nämlich der Theorie der Kegelschnitte anlangten, die außerdem zu keiner Zeit und bei keinem Volke der Erde selbständig dagewesen ist; und wie diese letztere, nachdem sie von Jahrhundert zu Jahrhundert von einem Kulturvolke zum anderen gewandert war, zuletzt noch die Astronomie zu deren jetziger staunenswerter Höhe emporgehoben hat: muß man da nicht mit Notwendigkeit zu der Folgerung geleitet werden, daß eine Verstandestätigkeit und Fähigkeit im Denken, die solches leistet, auch uns wieder errungen werden möge, und Gott danken, daß und soweit es noch möglich ist, sie schon in unseren Schulen aus den Quellen zu schöpfen?—" Wir haben größere Stücke aus Wittstein wiedergegeben, weil seine schon vor Jahrzehnten niedergelegten Gedanken wert sind, heute neu aufzuleben, und weil der Begeisterung atmende Ton, in dem ihnen Ausdruck verliehen wird, Begeisterung bei den vielen Lauen und Gleichgültigen unter den Gymnasialmathematikern zu erwecken geeignet ist. Wir werden in anderem Zusammenhang auf Wittsteins Worte zurückkommen. In der Vorrede zu Band III, 2 wird die Ansicht wiederholt, daß das Wesen der klassischen Bildung in der Kenntnis und Aneignung derjenigen geistigen Schätze besteht, die Griechenland und Rom in ihren Schriftwerken uns hinterlassen haben und daß zu einer wahren klassischen Bildung nicht zum mindesten auch die Durchforschung der antiken mathematischen Literatur gehört. Man kann Wittstein nicht den Vorwurf machen, daß er die geschichtliche Belehrung übertreibt. Bringt er auch in Text und Anmerkungen viel, so bleibt er doch maßvoll, knapp und gedrängt und versteht es, mit gutem pädagogischem Geschick immer wieder allgemein belehrend zu wirken. So schreibt er denn ein wirkliches Buch für den Schüler, nicht ein zitatengespicktes Nachschlagewerk für den Lehrer. Auffallend zurückhaltend bleibt er im zweiten Hefte des II. Bandes.

Auch das Lehrbuch der Elementar-Geometrie von Henrici und Treutlein (3. bzw. 2. Auflage 1897) gehört hierher. Bei Erwähnung des Meters und des Nonius gibt es geschichtliche Erklärungen, und es gedenkt auch bei dem harmonischen Mittel, bei dem Apollonischen Problem, dem Pythagoreischen Lehrsatz, den Möndchen des Hippokrates, der Kreismessung, den Winkelfunktionen, und an anderen Stellen der Geschichte, auch unter Bezugnahme auf die Inder, die Araber und die Neueren.

Einen eigenartigen Typus vertritt G. Holzmüller mit seiner „Planimetrie für das Gymnasium". Im I. Teil der zweiten Auflage von 1905 heißt es im Vorwort: „Für das humanistische Gymnasium, dem voraussichtlich das Griechische dauernd erhalten bleibt, habe ich es für zweckmäßig gehalten, über die berühmteren Mathematiker des griechischen Altertums einige biographische Randbemerkungen zu bringen und dabei einige Zitate in griechischer Sprache zu geben, damit den Mitteilungen der anekdotenhafte Charakter genommen und auf die eigentlichen Quellen hingewiesen werde. Die Übersetzung ist beigefügt. Gelegentliche Anregung des historischen Sinnes muß auch im mathematischen Unterrichte stattfinden, und die Beziehungen zur griechischen Sprache müssen schon der Nomenklatur wegen gepflegt werden. Gerade für die sprachlich begabten Schüler kann durch den Hinweis auf die Aussprüche der griechischen Philosophen über den Wert und die Unentbehrlichkeit der Mathematik dem Unterrichte eine besondere Weihe verliehen werden. In besonderem Anhange sind denn auch die aus dem Griechischen hervorgegangenen technischen Ausdrücke sprachlich erläutert worden. Ist es auch nur von geringerer Bedeutung, ein wenig wird doch auch dies zur Konzentration des gesamten Unterrichts beitragen. Ich kann mir sehr wohl denken, daß mancher Lehrer gelegentlich auch die Axiome und Postulate des Euklid in der Ursprache mitteilen und erläutern möchte. Die Ansichten darüber sind aber verschieden." Während von den zahlreichen Fußnoten die meisten methodische Winke und Ratschläge geben, sind vereinzelte auch sprachlichen Erklärungen (sowohl supplere, als auch complere, heißt erfüllen oder ergänzen usw.) und nicht wenige auch geschichtlichen Belehrungen gewidmet, z. B. über Pythagoras, Euklid, Pappus, Heron, die ägyptischen Harpedonapten, Diophant, Archimedes, Ptolemäus, Hipparch u. a. Einige dieser Fußnoten sind recht ausführlich und versuchen abgerundete Darstellungen zu geben. Der von Proklus überlieferte bekannte Ausspruch Euklids über die Geometrie, für die es keinen Königsweg gebe, ist im Urtext zitiert. Der nach Art eines Lexikons zusammengestellte mathematisch-griechische Anhang aber ist so originell, daß aus ihm eine Probe wiedergegeben sei. Wir wählen den Artikel „Mathematik". Dieser lautet:

„Mathematik: μανθάνω, lernen (μαθεῖν, inf. aor.); τὸ μάθημα, das Gelernte, die Lehre, Wissenschaft; Plural: τὰ μαθήματα, die Lehren, Lehrgegenstände. Erst bei den Schülern des Aristoteles, den sog. Peripatetikern (περί, herum; πατέω, gehen; beim Spaziergang disputierende Philosophen) erhielten die μαθήματα die Sonderbedeutung der mathematischen Lehren in unserem Sinne. Dazu gehörten damals Rechenkunst, Arithmetik, Planimetrie, Stereometrie, Musik und Astronomie; ἡ μάθησις, das Lernen, die Wissenschaft; μαθηματικός, zum Lernen (zur Mathematik) gehörig; ἡ μαθηματική (τέχνη), die Mathematik; ὁ μαθηματικός, der der Mathematik Kundige."

Es ist durchaus zu billigen, wenn unseren Humangymnasiasten zum Bewußtsein gebracht wird, daß ihre Wörterverzeichnisse lückenhaft sind, sofern sie die klassischen Worte für wichtige mathematische Begriffe vermissen lassen. Wenn einmal Griechisch getrieben wird, nun dann mag man dafür sorgen, daß auch viel gebrauchte Vokabeln der alten Mathematik dem Wortschatz des Schülers einverleibt werden. Es sind ihrer nicht so viele, daß sie das Gedächtnis überlasten. Die für Real- und Oberrealschulen bestimmte Ausgabe des Holzmüllerschen Lehrbuches vermindert den geschichtlichen Inhalt auf ein kaum bemerkbares Mindestmaß. Warum eigentlich? Oder ist der Verfasser der Meinung, daß reale Anstalten für historische Behandlung der Mathematik weniger geeignet seien?

In süddeutschen, insbesondere österreichischen Gymnasien viel verbreitet sind die Lehrbücher von Močnik. Sein Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Gymnasien, bearbeitet von Spielmann, erschien 1902 (Wien) schon in 23. Auflage. Während es im Text nichts Geschichtliches bringt, fügt es einen übersichtlich angeordneten Anhang an, der überschrieben ist „Geschichtliche Bemerkungen über die elementare Geometrie"; er zerfällt in die Abschnitte: Planimetrie; Stereometrie; Trigonometrie; Analytische Geometrie. Bücherkundliches wird vermieden. Einige griechische Brocken sind eingestreut. Desselben Verfassers Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung bearbeitet von Neumann (25. Aufl. 1898) enthält wesentlich weniger, nur im Texte eine Reihe kleingedruckter geschichtlicher Notizen.

Genaue Erklärung der aus dem Altertum stammenden technischen Ausdrücke fördert ja mittelbar auch Fühlungnahme mit der Vergangenheit. Dessen sind sich auch solche Lehrbücher bewußt, die die Kenntnis der alten Sprachen nicht voraussetzen. Wir nennen z. B. den Grundriß der geometrischen Formenlehre für Lehrerinnenbildungsanstalten von K. Kraus (Wien 1903), der nebenbei auch historische Fußnoten bringt. Da finden wir: „Centrum, lat. centrum, griechisch kentron = Spitze oder Stachel in der Mitte einer Scheibe. — kommensurabel, lateinisch con = zusammen, mensura = Messung; Hypotenuse: Spann-Schrägseite vom griechischen Hypo = darunter weg, teino = ich spanne; daher nicht Hypothenuse usw." Griechische und lateinische Kunstausdrücke (auch in griechischen Lettern), nach Baltzerscher Art bringen außer knappen historischen Mitteilungen beispielsweise auch E. Fischers systematischer Grundriß der Elementar-Mathematik (Berlin 1890); weiter H. Raydts Lehrbuch der Elementarmathematik (Leipzig 1899) (ohne Benutzung der griechischen Lettern) und noch mehr desselben Verfassers Arithmetik auf dem Gymnasium (Hannover-Linden 1890). Hier heißt es im Vorwort: „Die in den Anmerkungen gegebenen Worterklärungen und geschichtlichen Notizen sind hinzugefügt, um den Schüler fortwährend zu zwingen, auch in der Mathematik sich die Bedeutung der vorkommenden Fremdwörter klar zu machen, und den Lehrer zu veranlassen, den Schülern von der Entwicklung der arithmetischen Wissenschaft ein Bild zu geben."

Schließlich sei aus neuester Zeit ein Unterrichtswerk namhaft gemacht, das für höhere Mädchenschulen, Lyzeen und Studienanstalten geschrieben wurde (Bielefeld 1910 und 1911; teilweise schon zweite Auflage 1912) und auch viele derartige sprachliche Erklärungen von mathematischen Kunstausdrücken bringt. Es hat G. Noodt zum Verfasser bezw. Herausgeber und steht ganz auf dem Boden der Kleinschen Reform. Neben anderen Vorzügen hat es auch den guter geschichtlicher Belehrung. Wenn auch gelegentlich ein zusammenhängender

Abschnitt über Geschichte der Mathematik vorkommt, so bemüht es sich doch hauptsächlich durch kleinere Einfügungen und zahlreiche Anmerkungen in den Schülerinnen (vor allen auf der Oberstufe) den Sinn für das Geschichtliche zu wecken. Dazu kommt, daß es bei passenden Gelegenheiten auch Aufgaben vorchristlicher Mathematiker und der mittelalterlichen Cossisten wiedergibt, und zwar, was anzuerkennen ist, nicht nur solche, die man auch sonst häufig findet. Erfreulich ist es, daß viele geschichtliche Darbietungen eigenen Quellenstudien des Verfassers entsprungen sind.

Mit der Besprechung dieser besonders kennzeichnenden Lehrbücher aus dem letztvergangenen Vierteljahrhundert mag es sein Bewenden haben. Der Leser hat aus ihnen wohl den Überblick gewonnen, den wir geben wollten. Daß noch viel mehr hätten namhaft gemacht werden können, ersieht er schon aus der Tabelle (Seite 29), die für den behandelten Zeitraum 52 Werke angibt. Von ihnen sollen nur noch kurz die folgenden aufgezählt werden, die sich mit wenig, z. T. sehr wenig begnügen:

Reidt, Elemente der Mathematik (seit 1882 bis in die neueste Zeit); W. Laska, Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie (Stuttgart 1890); J. Lengauer, Die Grundlagen der ebenen Geometrie (Kempten 1893); Sellentin, Grundriß der Geometrie (Köln 1893); F. Bussler, Die Elementarmathematik für das Gymnasium (Dresden 1893); Iwan Alexandroff, Aufgaben aus der niederen Geometrie (Leipzig 1903); J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung (Leipzig 1904); C. Hecht und F. Kundt, Lehrbuch der elementaren Mathematik (Leipzig 1904); Bardey-Lengauer, Aufgabensammlung, Neue Ausgabe für bayrische Mittelschulen (Leipzig, 2. Aufl. 1909); Bardey-Hartenstein, Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik für Realschulen usw. (Leipzig, 7. Aufl. 1906); C. Lackemann-Kreuschner, Elemente der Geometrie (Breslau, 8. Aufl. 1906); Bork-Nath, Mathematische Hauptsätze (Leipzig 1907); H. Dressler, Die Lehre von der Funktion (Leipzig 1908); W. Reinhardt und N. Mannheimer, Lehrbuch für den mathematischen Unterricht (Frankfurt a. M. 1911).

Durch Dreiteilung dieses Kapitels wurde versucht, den besonders in die Augen fallenden Eigentümlichkeiten der Lehrbücher in bezug auf das geschichtliche Element gerecht zu werden. Das schließt nicht aus, daß das eine oder andere Buch auch auf Einreihung in einen anderen Abschnitt Anspruch erheben kann. Hierüber im einzelnen Falle die Entscheidung zu treffen, wird dem Leser meist schon nach den von uns gegebenen Besprechungen nicht schwer fallen.

Zum Schluß sei, wenn auch die geschichtslosen Bücher sonst nicht namhaft gemacht werden sollen, nur noch auf eine der bekanntesten und verbreitetsten Aufgabensammlungen hingewiesen, die dem historischen Elemente gänzlich abhold ist, das ist die Bardeysche, deren nicht mehr recht modernes Gewand von Pietzker und Presler zwar umgearbeitet, dabei aber nicht mit einigen leuchtenden Fäden vom Webstuhle der Vergangenheit durchzogen wurde.[1])

1) Eine gegenwärtig im Druck befindliche, den neueren Bestrebungen im mathematischen Unterrichte in verstärktem Maße Rechnung tragende „Reformausgabe" wird bei geeigneten Kapiteln, z. B. den eingekleideten Gleichungen, den Reihen usf. „Aufgaben aus alter Zeit" einschalten.

II. Teil.

Die Schulprogramme und die Geschichte der Mathematik.

1. Überblick, Lehrpläne, Statistisches.

In den Schulprogrammen liegt ein umfangreiches Archiv für die Erforschung des Schulbetriebes und aller Schulfragen vor. Und doch müssen wir wieder beklagen, daß gerade die seit nahezu einem Jahrhundert üblichen Übersichten über den durchgenommenen Lehrstoff fast ausnahmslos so dürftig[1]) sind, daß man aus ihnen nicht mehr entnehmen kann, als aus den amtlichen Lehrordnungen.[2]) Über hundert Stichproben aus Tausenden von Programmen haben das bewiesen. Ab und zu findet sich nun ein Programm, das aus irgendeinem besonderen Anlaß, meist bei Neuregelung der Stoffverteilung oder Einführung neuer gesetzlicher Vorschriften einmal einen ausführlichen, von den Fachlehrern gemeinsam ausgearbeiteten Lehrplan für eine einzelne Disziplin aufstellt. Für die Mathematik stellten wir in achtundzwanzig Fällen einen solchen fest. Der früheste stammt aus dem Jahre 1836, der jüngste aus dem Jahre 1908. Nur fünfmal fand sich in ihnen ein Hinweis auf die Pflege des historischen Elements, und zwar sagt das

1) Am Vitzthumschen Gymnasium zu Dresden wurde mit dieser Gepflogenheit 1908 gebrochen und wenigstens für die mathematisch-naturgeschichtliche Abteilung der Oberprima eine ausführlichere Inhaltsangabe gegeben, die vor allem die Abweichungen gegen das Vorjahr betont. Man findet in Prima und später auch in Obersekunda „Hinweise auf die Geschichte der Mathematik“ und 1910 außerdem „Euklids Elemente: Inhaltsangabe und Textproben“; 1912: in Oberprima: „Die Trigonometrie bei den Arabern und bei Regiomontan“, sowie in Unterprima: „Geschichtliches insbesondere über die Kreisausmessung und die Stereometrie“. — Noch ein Wort zu der Bemerkung Lietzmanns in der IMUK-Abhandlung I, 2. Auch dort wird hervorgehoben, daß sich in den Pensenaufstellungen der einzelnen Anstalten nur selten eine Bemerkung über die Berücksichtigung des Geschichtlichen findet. Dann wird als Beispiel einer Ausnahme die Oberrealschule in Freiburg in Schlesien erwähnt. Auf eine Anfrage daselbst kam die Auskunft, daß auch dort Geschichte der Mathematik systematisch nicht gepflegt werde, daß aber gelegentlich einzelne Kapitel historisch beleuchtet würden. Bei den Schulbesichtigungen und Prüfungen käme das Geschichtliche kaum zur Geltung. Nur einmal sei das Interesse des vorsitzenden Provinzial-Schulrates (eines Nichtmathematikers) durch historische Notizen über Vieta erweckt worden.

2) Vergl. S. 1.

Programm des Kgl. Realgymnasiums zu Conitz von 1878: „Die Mathematik . . . läßt sich auch durch ihren realen Inhalt mit den übrigen Disziplinen in fruchtbare Verbindung setzen, z. B. mit dem klassischen Unterrichte durch die gebotene Hinweisung auf die Geschichte der Mathematik im Altertume.“ Die Oberrealschule a. d. Waitzstraße in Kiel (1906) wünscht in Oberprima für die Arithmetik „gelegentlich historische und philosophische Ausführungen (z. B. über Zahlbegriff und Stetigkeit)“ und für die Geometrie „wie in der Arithmetik historische und philosophische Ausführungen“. In gleichem Jahre fordert das Gymnasium Augustum zu Görlitz ebenfalls für Oberprima „Rückblicke tunlichst unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte (z. B. Quadratur des Kreises, Verdoppelung des Würfels, Dreiteilung des Winkels usw.)“ und die Oberrealschule zu Raydt 1907 empfiehlt auch für die Oberstufe „geschichtliche Mitteilungen aus allen Gebieten der Mathematik“. In der Festschrift des Vitzthumschen Gymnasiums (Teubner 1911) endlich heißt es (S. 67): „Die universitas litterarum wird mehr wie bisher dadurch betont, daß in die Geschichte auch der Mathematik ein Einblick gewährt und damit dargetan wird, wie eng diese Wissenschaft mit der Entwicklungsgeschichte der menschlichen Kultur verknüpft ist. Dient solche gelegentliche geschichtliche Belehrung auch nicht als Selbstzweck, so ergänzt sie doch die wissenschaftliche Gesamtausbildung des Schülers, zumal auf der oberen Stufe, und wird von Lehrenden wie Lernenden immer mehr als ein Mittel frischer Anregung geschätzt.“

Man kann wohl nicht behaupten, daß damit für die Gesamtheit der höheren Schulen irgendein nennenswerter Trieb zur geschichtlichen Behandlung der Mathematik festgestellt ist. Wenn einige Schulen in den ersten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts Euklid stark betonen, so besagt das für geschichtliche Behandlung im eigentlichen Sinne nichts. Auch wenn etwa das Gymnasium zu Elberfeld 1836 in der Prima die „Lösung der geometrischen Aufgaben nach der Methode der Alten“ vorschreibt, so zeigt es nur, daß es mit dem Strome der Zeit schwimmt, wie wir im I. Teile ausführlich dargelegt haben.

Eine große Summe geistiger Arbeit und das Ergebnis mühsamer Forschertätigkeit ist in den wissenschaftlichen Abhandlungen niedergelegt, die als Beigaben bei den meisten Jahresberichten erscheinen; wenigstens vielfach; denn daß es auch an unbedeutenden und mittelmäßigen Erzeugnissen nicht fehlt, spürt man bald, wenn man eine größere Anzahl durchmustert. Es liegt nun nahe, aus dem mehr oder minder häufigen Auftreten geschichtlich-mathematischer Abhandlungen einen Rückschluß auf das Interesse der Gymnasialmathematiker an geschichtlichen Stoffen zu machen. Und in der Tat ist wohl eine solche Schlußfolgerung nicht von der Hand zu weisen, zumal man dabei auf die Namen fast aller derjenigen Gymnasiallehrer stößt, die als Förderer der Geschichtsforschung oder geschichtlicher Belehrung bekannt geworden sind. So unterzog sich denn Verfasser der mühsamen Arbeit, die reichlich 20000 Programme deutscher Schulen durchzusehen, die ihm in der Bibliothek des Vitzthumschen Gymnasiums zu Dresden jederzeit bequem zugänglich waren. Mit bloßen Programmverzeichnissen, die mehrfach existieren,[1]) war nicht viel anzufangen, da sich die geschichtliche Behandlung eines Stoffes nicht immer aus dem Titel ergibt. Die Programme der genannten Bibliothek sind nicht katalogisiert, auch nicht nach Stoffen, vielmehr durchgehend alphabetisch nach den Verfassern geordnet. Sie reichen zurück bis in die 30er Jahre, vereinzelt auch bis in das erste Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts. Es war nicht möglich, zu übersehen, inwieweit die Sammlung vollständig ist; sicher ist, daß vereinzelte Abhandlungen fehlen. Das hindert aber nicht, daß die folgende Übersicht im allgemeinen orientiert und einen lehrreichen Überblick gewährt. Mehr ist nicht beabsichtigt, zumal ja das folgende mit unserem Thema in nur mittelbarem Zusammenhange steht.

Rechnet man auch solche Arbeiten, die unter Titeln wie „Das Parallelenproblem" oder „Einführung in die allgemeine Arithmetik" viel Historisches bieten, ferner Abhandlungen mathematisch-geschichtlicher Art aus den Grenzgebieten der Astronomie, mathematischen Geographie und Physik hinzu, so ergibt sich als Gesamtsumme 215. Diese 215 verteilen sich auf die Jahrzehnte folgendermaßen:

1830—1840	13	Programme
1841—1850	18	„
1851—1860	23	„
1861—1870	26	„
1871—1880	36	„
1881—1890	34	„
1891—1900	37	„
1901—1911	28	„

1) Es gibt neben besonders erschienenen Zusammenstellungen auch Programme mit solchen Verzeichnissen. Ich fand die folgenden: Gymn. Breslau 1840: „Geordnetes Verzeichnis des Inhalts der seit 1825 bis 1840 erschienenen Programme der Preußischen Gymnasien und einiger Gymnasien anderer Deutscher Staaten, welche dem Programmaustausche beigetreten sind." Gymn. Salzwedel 1854: „Systematisch geordnetes Verzeichnis der Abhandlungen, Reden und Gedichte, die in den an den Preußischen Gymnasien und Progymnasien 1842—1850 erschienenen Programmen enthalten sind." Desgl. 1864: Fortsetzung für den Zeitraum 1851—1860. Studienanst. Landshut: „Verzeichnis aller Programme und Gelegenheitsschriften, welche an Kgl. Bayrischen Lyzeen, Gymnasien und lateinischen Schulen vom Schuljahre 1823/24 an erschienen sind". Teil I bis VII umfassend die Zeiträume: 1823—1860, 1861—1873, 1874—1884, 1885—1889, 1890—1895, 1896—1902, 1903—1908. Gymn. Altenburg 1893: „Die Altenburgischen Gymnasialprogramme des 17. Jahrhunderts." Gymn. Arnstadt 1895: „Beitrag zur Geschichte des Programms nebst einem Verzeichnis der seit 1839 in den Programmen des Arnstädter

Davon bieten 28 allgemeine, bzw. zusammenfassende Untersuchungen, 22 geben die Geschichte einzelner Teile der Mathematik oder einzelner Probleme, 8 behandeln die Geschichte des mathematischen Unterrichts, 4 beschäftigen sich mit den Ägyptern und Babyloniern, 69 mit den Griechen, 3 mit den Indern und Arabern, 16 mit dem Mittelalter, 50 mit der Zeit vom 15. Jahrhundert bis zur Neuzeit. Die übrigen 15 zersplittern sich auf die Germanen, Juden usw.

Auch über Wesen, Inhalt, Methode und Reform des mathematischen Unterrichts stellen eine Menge Programmabhandlungen Betrachtungen an. Von ihnen wird im übernächsten Abschnitte die Rede sein. Hier nur einige statistische Angaben. Seit 1820 fanden wir ihrer 78 heraus, und man sieht aus folgender Tabelle, daß es zu keiner Zeit an ihnen gefehlt hat.

1821—1830	4	Programme
1831—1840	10	„
1841—1850	10	„
1851—1860	6	„
1861—1870	10	„
1871—1880	9	„
1881—1890	7	„
1891—1900	10	„
1901—1911	12	„

Sie häufen sich, was die Tabelle nicht erkennen läßt, um das Jahr 1840 und um das Jahr 1870, neuerdings wieder um das Jahr 1900 herum. Vielleicht ist es kein Zufall, daß gerade um diese Zeiten aus den Kreisen der Schulmänner und von amtlicher Stelle wichtige neue Anregungen für die Schulbehandlung der Mathematik ausgingen oder kurz vorher ausgegangen waren. Wir erinnern nur an die Lehrplanzusätze für preußische Gymnasien von 1837 und an die einflußreiche Lehrtätigkeit Schellbachs und Baltzers, an die Berliner Schulkonferenz von 1873 und die denkwürdige Schulkonferenz von 1900.

2. Behandlung von Stoffen aus der Geschichte der Mathematik.

Werfen wir einen Blick auf den Inhalt dieser geschichtlich-mathematischen Programmabhandlungen. Daß die Alten stark im Vordergrund stehen, ergab schon die Statistik des vorigen Abschnitts. Der absoluten Anzahl nach überwiegen die sie behandelnden Arbeiten in den 60er Jahren. Sie spielen aber auch in den vorhergehenden Jahrzehnten die Hauptrolle. Der neueren Zeit der Mathematik wird anfangs

Gymnasiums erschienenen Abhandlungen" (von Kroschel). Friedrichs-Gymn. Frankfurt a. d. Oder 1898: „Die wissenschaftlichen Abhandlungen zu den Jahresberichten der Anstalt seit 1813". Gymn. Stendal 1904: „Verzeichnis der wissenschaftlichen Programmabhandlungen des Stendaler Gymnasiums 1606—1903."

wenig, von den 60er Jahren an mehr, am meisten zwischen 1870 und 1880, dann wieder neuerdings Beachtung geschenkt; das Mittelalter wird verhältnismäßig wenig, im ganzen aber ziemlich gleichmäßig berücksichtigt, während sich zusammenfassende oder vergleichende Abhandlungen allgemeinerer Art zwischen 1870 und 1900 besonders zahlreich einstellen. Alles in allem steigt die Kurve am höchsten in den 70er Jahren, sie fällt von da ab bis zur Gegenwart in auffallender Weise. Doch darf daraus nicht voreilig auf abnehmendes Interesse überhaupt geschlossen werden; denn die Veröffentlichungen der Gymnasial-Mathematiker in Fachzeitschriften, insbesondere in der Zeitschrift „Bibliotheca mathematica“ (von Eneström), sowie in besonderen Büchern sind gerade jetzt recht zahlreich geworden, wie sich überhaupt eine durchaus verständliche Abwanderung der Veröffentlichung rein wissenschaftlicher Forschungsergebnisse auch auf sprachlichem und anderem Gebiete aus den Programmen nach den Fachzeitschriften erkennen läßt. Dazu kommt, daß z. B. in den größeren Städten Sachsens zumeist wohl aus Sparsamkeitsrücksichten von seiten der Gemeindebehörden eine Einschränkung der wissenschaftlichen Beigaben Brauch geworden ist, sodaß das einzelne Gymnasium immer erst nach einigen Jahren wieder an die Reihe kommt.

Euklid spielt unter den Alten andauernd auch hier eine wichtige Rolle; er ist sicher der am meisten bekannte und durchforschte Schriftsteller. Auch Proclus' Kommentar wird gern behandelt, und das Parallelenproblem wird in Dutzenden von Abhandlungen unter die kritische Lupe genommen. Es lohnte sich allein hierüber ein Buch zu schreiben. Auch in den sehr zahlreichen Arbeiten über die nichteuklidische Geometrie wird Euklids 11. Axiom naturgemäß mit verarbeitet; kurz man darf schließen, daß Begriff und Definition der Parallelen dem praktischen Schulmanne zu allen Zeiten viel Kopfzerbrechen gemacht hat, aber ebenso, daß ihn Lobatschefskij und Bolyai keineswegs immer zu überzeugen vermochten. „Geistreiche Spielerei“ zu treiben, ist nicht der schärfste Vorwurf, der diesen hervorragenden Begründern neuer, freilich revolutionärer Ideen gemacht wird. Möchten recht viele Gymnasiallehrer die klaren und überzeugenden Ausführungen Kleins in seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ gründlich studieren! Neben Euklid beschäftigen sich die Programme ferner mit Plato, Aristoteles, Archimedes, Apollonius, Aristarch, Eutokius, Serenus v. Antissa, Nicomachos, Diophant, Eratosthenes, Diocles, Zeno, Hero, Pytheas v. Massilien. Oft werden Schriften dieser Mathematiker und Gelehrten im Urtext wiedergegeben, erklärt, übersetzt, mit anderen verglichen oder für den Schulgebrauch zurecht gemacht. Kurz man kann sagen, daß das Interesse für die antike Mathematik bei den Lehrern höherer Schulen immer rege gewesen ist, während das Mittelalter weniger Anziehungskraft ausübte. Aus ihm wird das griechisch geschriebene Rechenbuch des Mönches Maximus Planudes (um 1300) nach einer Pariser Handschrift, dann auch werden dessen in Verse eingekleideten Textgleichungen veröffentlicht. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme (um 1350) werden nach Zahl und Inhalt untersucht. Von den bedeutenden Mathematikern des 15. Jahrhunderts Peurbach, Regiomontan und Nicolaus von Cusa wird der Lebensgang geschildert; der liber mathematicalis des heiligen Bernward (um 1000), die libri matheseos des Julius Firmicus Maternus (11. Jahrh.), sowie Leben und Schriften Leonardos da Pisa (um 1200) werden behandelt. Aus der neueren Zeit findet man Biographien, bzw. Würdigung der mathematischen Leistungen Dürers (um 1500), Koppernikus (um 1500), Keplers (um 1600), Galileis (um 1600), Newtons (um 1700), Vegas (um 1800), C. Chr. Fr. Krauses (nach 1800). Leibniz (um 1700) und die Erfindung der Differentialrechnung interessiert natürlich lebhaft und wird oft besprochen; aber auch dessen Schrift „De quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae“, der Einfluß der Mathematik auf seine Metaphysik, sein Zahlbegriff, die Infinitesimalgedanken in seiner Metaphysik, weiterhin sein Streit mit Clarke über den Raum, oder sein Briefwechsel mit der Königin Sophie Charlotte wird herangezogen. Seines großen Zeitgenossen Newtons Werke liefern auch so manches Thema, zweimal z. B. dessen Konstruktionen der Kegelschnitte, seine Methode der Kegelschnittbüschel, oder seine Optik. Auch seiner Stellung zu seinen Gegnern tritt man näher. Die Cycloide des Pascal findet ebenso Beachtung, wie Huygens (um 1650) Schrift „De circuli magnitudine inventa“, oder die Sehnen- und Dreiecksberechnung des Koppernikus, oder dessen Begründung der Erdbewegung. Ein andermal nimmt man Keplers Schrift über die Sechseckform des Schnees (1610) vor, oder Maclaurins (um 1700) Geometrie; auch Joh. Faulhabers (um 1600) Arbeit über das irreguläre Siebeneck, Albrecht Dürers geometrische Näherungskonstruktionen, des Descartes (um 1630) mathematische Methode in seinem philosophischen System, Untersuchungen Leonhard Eulers (um 1750); dann wieder Mascheronis (um 1780) Zirkelgeometrie oder die Kegelschnittlehre von Maclaurin und Grassmann. Auffallend oft kehrt das Malfattische Problem wieder, natürlich auch meist in geschichtlicher Beleuchtung. Die Algebra des 16. Jahrhunderts wird mit der in unseren Tagen verglichen; ein anderes Mal wird ihre Geschichte geschrieben; eine Rechenanleitung von Huswirt aus demselben Jahrhundert wird reproduziert, desgleichen die Geschichte der Mathematik in Ulm bis zum 17. Jahrhundert sowie in Erfurt im 16. und 17. Jahrhundert. Zu Christoph Rudolffs Coss (1524) werden Scholien geschrieben, ein recht interessantes, wenig bekanntes Rechenbuch aus dem Jahre 1676 wird abgedruckt; dasselbe geschieht mit alten mathematischen Lehrplänen von 1579 und 1599, ferner einem älteren Verfahren der Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in „irreduktible Faktoren“. Die Gaußische Osterformel finden wir mehrere Male als Thema behandet, auch alte Methoden der Kalenderberechnung und

Zeitbestimmung. Nicht vergessen werden darf schließlich das Problem der Dreiteilung des Winkels, das oft auf historischer Grundlage aufgebaut und weitergebaut wird. Ja, auf bekannten Wegen wie auf abgelegenen Pfaden wandern wir, zumeist unter sicherer Führung durch das Land der Geschichte. Altes und neues erfahren wir über den Feuerbachschen Kreis, über den goldenen Schnitt, die Quadratur des Kreises, über die Variationsrechnung, das Zifferrechnen, die Zahlensysteme, die Geschichte unserer Zahlzeichen, über mathematische Axiome, über den Begriff des Unendlichen usw. Aus der Fülle sei noch eine recht ansprechende Arbeit Böttchers herausgegriffen, in der (1909) die Beweise für die Heronsformel aus zwei Jahrtausenden aneinandergereiht werden. Man möchte der originellen, frisch und leichtverständlich geschriebenen Abhandlung, die eine abgerundete möglichst lückenlose Darstellung eines einzelnen Problems erstrebt, recht viele Nachfolger wünschen.

Doch genug — wenn auch noch manches Thema übergangen wurde, zumal dann, wenn es in seiner umständlichen Fassung eine Wiedergabe im Stichwort schwer zuließ. Eins ist klar: auch die Programme erbringen den Beweis dafür, daß es an deutschen höheren Schulen zu keiner Zeit an Mathematikern gefehlt hat, die Sinn für die Geschichte ihrer Wissenschaft gehabt und ihn auch schriftstellerisch betätigt haben. Da sich nun ein guter und anregender Lehrer durch behördliche Vorschriften zwar gebunden, aber nicht eng gefesselt fühlt, so wird er gern auch gelegentlich von den Ergebnissen seiner Privatstudien den Schülern etwas mitteilen, was im Bereich ihres Verständnisses liegt. So wird man wohl keinen Fehlschluß tun, wenn man behauptet, daß vereinzelt hier und da im Lande schon von alters her mathematisch-geschichtliche Belehrung auf höheren Schulen eine Pflegestätte fand.

3. Vorschläge in den Schulprogrammen, die Geschichte der Mathematik zu berücksichtigen.

Noch eine andere Gruppe von Programmabhandlungen verdient unsere Beachtung. Das sind solche, die betitelt sind: „Wesen und Bedeutung der Mathematik für den höheren Unterricht", „Über die Stellung der Mathematik unter den übrigen Lehrgegenständen", „Die Mathematik als allgemeines Bildungsmittel" oder „Bemerkungen über die jetzigen Anforderungen an den mathematischen Unterricht", „Humanistische und reale Bildung", oder „Die Einheit der Schulstudien" usw.

Man muß Schotten recht geben, wenn er in anderm Zusammenhange sagt,[1]) daß ihre Zahl eine so große ist, daß ein Überblick über das Gesamtgebiet schwer ist, wenn auch bei gutem Willen nicht ge-

1) Progr. d. städt. Oberrealschule zu Halle a. S. 1899 (S. 3).

rade unmöglich und daß vieles bisher unbenutzt geblieben ist. Mögen die folgenden Mitteilungen ihren Teil zu einem solchen Überblicke beitragen.

Die erste Abhandlung der gekennzeichneten Art fand sich 1822 im Programme des Martineums zu Braunschweig. In ziemlich gleicher Verteilung über die einzelnen Zeiträume[1]) wiederholen sie sich in immer neuen Abwandlungen und ihr Studium ist nach verschiedenen Richtungen hin interessant, schon weil die insgesamt 78 berücksichtigten Arbeiten Schulen aus allen Teilen des Deutschen Reiches entstammen. Die älteren von ihnen stimmen auffallend oft ein Klagelied an über mangelhaftes Verständnis für den Bildungswert der Mathematik, über Mißachtung der Mathematik seitens der Schüler, Eltern, Behörden und vor allem auch der philologischen Kollegen, über unzweckmäßigen Unterrichtsbetrieb seitens ungeeigneter oder schlecht vorgebildeter Lehrer; oder sie grübeln wohl auch (1845) bekümmert über die Gründe nach, „warum auf den Gymnasien bei dem Unterrichte in der Mathematik weit geringere Resultate erzielt werden, als in den übrigen Lehrgegenständen". Nebenbei verdient es erwähnt zu werden, daß vielfach das Bemühen zutage tritt, die Mathematik nicht nur als vereinbar mit christlicher Frömmigkeit, sondern geradezu als Förderin der Religion hinzustellen.

Da werden nun natürlich alle nur denkbaren Reformvorschläge gemacht und es stand zu erwarten, daß gerade dort, wo der humanistische Charakter und die kulturelle Bedeutung der Mathematik betont wird, auch der Berücksichtigung ihrer Geschichte im Unterrichte das Wort geredet werden würde. In solchen Erwartungen aber wird der Leser getäuscht. Schon die oben erwähnte früheste Abhandlung[2]) von 1822 von L. Petri: „Über die Einheit der Schulstudien" läßt uns im Stiche. Zwar erkennt der Verfasser als klassischer Philologe einerseits die Mathematik als den wichtigsten[3]) Teil (?) des eigentlichen

---

1) Vgl. Übersicht auf S. 51.

2) Näheren Nachweis über die hier und im folgenden erwähnten Programme gibt das Literaturverzeichnis am Schluß.

3) Daß es schon vor einem halben Jahrhundert Philologen gab, die sich scharf ablehnend gegen die Mathematik im Unterricht des Gymnasiums verhielten, beweist so manche Auslassung in Programmen. Selten aber wird dabei jemand so auffällig, wie der Oberlehrer Silber (Kgl. Gymn. Kreuznach 1853), der „das Gymnasium und seine Stellung zur Gegenwart" behandelt und dabei folgendes von Sachkenntnis nicht getrübte Urteil abgibt: „Die Mathemathik hat es vorzugsweise mit der Entwicklung des niederen Verstandes zu tun und überliefert keinerlei Ideen". Nachdem er dann das gestiegene Ansehen der Mathematik bedauert hat, fährt er fort: „Man hat wohl gesehen, daß in der neueren Zeit der niedere, berechnende, kombinierende Verstand, der Vater des Skeptizismus, der Negation und der Selbstsucht, in einer Weise sich breitmacht, daß nicht nur von Harmonie der Bildung keine Rede sein konnte, sondern auch die Familie, der Staat und die Kirche in erhebliches Gedränge kamen gegenüber dieser selbstgenügsamen, verständigen, ideenfeindlichen Richtung. Hierfür war die Überschätzung der Mathematik ein nicht unwichtiges

wissenschaftlichen Unterrichts an, lobt anderseits die Geschichte und ihren Wert für jede einzelne Wissenschaft, empfiehlt aber nicht ausdrücklich geschichtliche Behandlung der Mathematik.

Von tieferer Einsicht für die Aufgabe, die der Mathematik im höheren Unterrichte zufällt, zeugt eine umfangreiche (96 Seiten) lesenswerte Abhandlung im Programme der Blochmannschen Erziehungsanstalt zu Dresden von 1826. Sie ist betitelt: „Über das Studium der Mathematik auf Gymnasien“ und hat A. Peters zum Verfasser. Dort wird der bisher übliche Betrieb des mathematischen Unterrichts scharf verurteilt, vor allem auch die sklavische Befangenheit in der Euklidschen Lehrmethode. „Euklid“, heißt es, „war bis neulich, zum Teil bis heute der Abgott der mathematischen Welt und durch die geringste Abweichung von seiner Weise hätte man sich eines Verrates an der Würde der Wissenschaft schuldig zu machen geglaubt.“ Peters fordert neue, freiere Bahnen, insbesondere auch, daß „der mathematische Unterricht Hand in Hand mit den übrigen Bildungsmitteln gehe, sich also nicht isoliere“. Seine Einzelvorschläge hierzu beziehen sich vor allem auf Vergleiche des mathematischen Stils mit dem sprachlichen, sowie auf gelegentliche Abschweifungen in das Gebiet der Logik und Philosophie. Selbst zur Religion stellt er „durch das Band der Werke Gottes in der Natur und durch das allgemeine Streben der Menschen nach Wahrheit und Vervollkommnung“ ein „freundschaftliches Verhältnis“ fest — aber fern bleibt ihm der Gedanke, daß auch Geschichte und Mathematik wichtige und lehrreiche Berührungspunkte haben.

Näher schon liegt dieser Gedanke dem uns bereits bekannten[1]) Mathematiker des Domgymnasiums zu Merseburg, Tenner. Man erkennt dies daraus, daß er 1829 bei Behandlung eines ähnlichen, die gegenseitige Verknüpfung der Wissenschaften fordernden Themas vorschlägt, zuweilen aus griechischen Urschriften zusammenhängende Abschnitte zu studieren und dadurch in die Geschichte der Mathematik einzuführen. Mutatis mutandis gilt für die Mathematik auch, was er von den Naturwissenschaften sagt. Er empfiehlt, „da die durch das Studium der klassischen Sprachen vorgebildeten Jünglinge an dem, was die Alten in bezug auf Naturkunde wußten, Interesse nehmen, nicht zu verabsäumen, hierauf Rücksicht zu nehmen und das, was bei Plinius, Aristoteles, Plato, Ptolemäus u. a. über einen eben behandelten Gegenstand vorkommt, mit den neueren Forschungen und Ansichten zu vergleichen“.

Moment.“ Eigenartig ist der Vorschlag, durch den Silber der bösen Mathematik beikommen möchte. Er wünscht nämlich, daß die Philologen den mathematischen Unterricht mit übernehmen möchten. „damit so endlich dem unglücklichen System der mathematischen Fachlehrer, wodurch schon viel unerfreuliches in das Schulleben gekommen ist, gründlich ein Ende gemacht werde.“ Da leben wir jetzt doch in besseren Zeiten!

1) Vgl. S. 11, Anm. 1, wo die hier nur angedeutete Stelle der Tennerschen Programmabhandlung dem Wortlaute nach zu finden ist.

1831 verficht Nagel das realistische Prinzip im klassischen Unterrichte und weist darauf hin, daß „die alten Sprachen nicht als Zweck, sondern als Mittel zu einem anderen Zwecke erscheinen, als Schlüssel, um uns den Zugang zu Schätzen zu öffnen, die uns sonst verborgen wären“, und daß auch die Mathematik ihre Klassiker habe.

Nicht viel besagt es, wenn Euklid in früherer Zeit (z. B. 1836 von Heussi) immer wieder als hervorragendster mathematischer Schulschriftsteller gepriesen wird; denn das war, wie wir wissen, für damals selbstverständlich. Wertvoller schon ist es, wenn Hincke (1840) ähnlich wie Nagel, die philologischen Kenntnisse ganz allgemein dazu nutzbar gemacht wissen möchte, die vielfachen Schätze, die das Altertum in bezug auf Mathematik enthält, auch in anderer, als sprachlicher Hinsicht zu durchforschen. Hincke hebt weiterhin den Wert des Studiums der Mathematik für die im Laufe der Geschichte allmählich eingetretene Befreiung des Menschengeistes von der Herrschaft der Autorität und dem Banne des Irrglaubens hervor. In demselben Jahre spricht Hohoff den Gedanken aus, daß der Wert der Mathematik im Unterrichte dann besonders hervorsteche, wenn durch einen Hinweis auf Euklid, Archimed, Apollonius u. a. die Unanfechtbarkeit mathematischer Wahrheiten für alle Zeiten dargetan werde. Wöckel (1839) hält ein Bekanntmachen des Schülers mit Schriften wie denen Euklids und Apollonius von Pergä zwar für wünschenswert, aber aus Mangel an Zeit nicht für durchführbar.

Es muß befremden, daß Helmes, der neben Baltzer so Hervorragendes für die Förderung geschichtlicher Belehrung im Unterrichte getan hat, in einer Programmabhandlung des Gymnasiums zu Celle vom Jahre 1844, in der er sich über Zweck und Methode des mathematischen Unterrichts auf Gymnasien ausspricht, und in der er die Gründe eines oftmals verfehlten mathematischen Unterrichts aufsucht, mit keinem Worte auf das historische Element hinweist. Dagegen verdient sehr unsere Beachtung, was Finger (1847) in seinen Ausführungen über die Stellung der Mathematik zu den übrigen Unterrichtsgegenständen des Gymnasiums hervorhebt. Er sagt in bezug auf die alten Sprachen, die Mathematik usw. folgendes: „Jedes Zeitalter ist das Produkt der vorhergehenden, hat in diesen seine Grundlage, kann nur mittelst derselben verstanden werden. Der Unterricht muß hiernach eine geschichtliche Seite haben. Auf dem Gymnasium wird dann auch dem zu bildenden Geiste die Vergangenheit eröffnet. Er wird vorzugsweise mit jenen Gebieten der Vergangenheit bekannt gemacht, in denen sich die höchste und freieste Entwicklung des Menschengeistes geoffenbart hat, mit dem klassischen Altertume. Er wird unmittelbar in dasselbe eingeführt, indem er die klassischen Sprachen erlernt; dadurch gewinnt er eine innerliche lebendige Anschauung des griechischen und römischen Geistes. Von jenen Blütenzeiten des Menschengeistes gehen nun unzählige Fäden aus und reichen bis auf die

Gegenwart, umschlingen unsere Institutionen, durchdringen unsere Lebensanschauungen und Ideen. Diese Fäden hat der höhere Unterricht auf den höheren Stufen aufzudecken. So führt er unmittelbar in das geistige Leben der Gegenwart, und nicht länger kann jenen Studien der Vorwurf gemacht werden, daß sie dem Interesse der Gegenwart entfremdeten." Daß ein Hinweis auf den Werdegang der Wissenschaft erzieherischen Wert hat, betont auch Kern (1853), wenn er es für wünschenswert erklärt, „schon den Gymnasiasten nicht nur mit dem Wesen einer fertigen Wissenschaft, sondern auch mit der Art ihrer Entstehung bekannt zu machen. Darum soll die Mathematik auf dem Gymnasium dem Schüler in streng wissenschaftlicher Form entgegentreten und ihm in der Entwicklung des ganzen wie des einzelnen ein Beispiel von der Entstehung einer Wissenschaft, von der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe und Wahrheiten geben".

Deutlicher und unter Hinzufügung neuer Gesichtspunkte spricht sich in demselben Jahre W. Wiegand aus, aus dessen Arbeit schon bei früherer[1]) Gelegenheit längere Stellen abgedruckt wurden.

Wie fern manchem, der über Verbesserungen des mathematischen Unterrichts nachgedacht hat, der Gedanke der Verknüpfung von Mathematik und Geschichte gelegen hat, beweisen auch aus der folgenden Zeit viele Programmarbeiten. Beispielsweise stellt Meyer (1861) drei Grundbedingungen allgemeiner Bildung auf; darunter als erste, daß jeder Gebildete „nicht unbekannt sein dürfe mit der allmählichen Entwicklung des Menschengeschlechts, sowie mit dem, was durch die ununterbrochene geistige Arbeit des Geschlechts von seinem Beginne bis auf unsere Tage errungen worden ist". Später stellt er fest, daß diese erste Forderung durch das Gymnasium zu befriedigen gesucht werde durch den Unterricht in der Naturbeschreibung, Geographie und Geschichte, sowie durch das durch die alten Sprachen vermittelte Studium des klassischen Altertums. Im Gegensatze dazu schreibt er der Mathematik wesentlich andere Bildungsziele zu.

Wie wenig zum Teil die Kenntnis der geschichtlichen Vergangenheit gewisser Aufgaben verbreitet ist, dafür läßt eine Programmabhandlung von Koppe (1866) einen Schluß zu. Er verspottet in einer kritischen Betrachtung des mathematischen Gymnasiallehrplanes Aufgaben wie die uralte Textgleichung vom Hasen,[2]) den ein Hund in so und so vielen Sprüngen verfolgt, als schnurrig und geschmacklos. Geschichtlichen Einblicken wird mit keiner Silbe das Wort geredet.

Um so wohltuender berührt eine noch heute sehr lesenswerte, im hohen Schwunge der Begeisterung geschriebene Abhandlung C. H. Schellbachs vom Jahre 1866,[3]) die durchdrungen ist von tiefer Wert-

1) Seite 16—17.

2) Siehe auch S. 3.

3) „Über den Inhalt und die Bedeutung des mathematischen und physikalischen Unterrichts auf unseren Gymnasien", Progr. Friedr.-Wilh.-Gymn. (Berlin 1866).

schätzung für die Anregung, die geschichtliche Belehrung auch für die exakten Wissenschaften zu gewähren vermag. Wir können uns nicht versagen, eine besonders bezeichnende Stelle wiederzugeben: „Der Glanz der Mathematik, dieser Wissenschaft vom Maße und der Zahl, von der Ordnung und Bewegung, durchdrang selbst in längst verflossenen Jahrhunderten bisweilen den finsteren Nebel des Aberglaubens. Aber ihr hoher Wert für Menschenbildung wurde später nur selten begriffen. In unseren Gymnasien zeigen wir jetzt den Schülern die Gestalten einer zweitausendjährigen Vorzeit in einem Spiegel, dessen Trübe von der Fülle ihrer Strahlen reichlich genug durchbrochen wird, um Vergangenheit und Gegenwart glänzend zu erhellen. Seit dem Wiedererwachen der Wissenschaften hat das höchste Streben und die Ehre aller gebildeten Völker mit Recht darin bestanden, diesem Spiegel größere Helligkeit und Klarheit zu verleihen, denn fast alle Schöpfungen späterer Geschlechter in Kunst und Wissenschaft fanden bisher stets im Altertume ihre Vorbilder, die nur selten erreicht, noch seltener übertroffen wurden. Aber der Lichtstrom hat endlich neue Keime geweckt und neue Saaten sprießen auf. Mathematik und Physik haben sich Hand in Hand zu einer Höhe emporgeschwungen, von der aus sie die Gegenwart zu gestalten und zu beherrschen beginnen. Einsichtsvollen Männern ist es bereits bedenklich erschienen, unseren Jünglingen bis zu ihrem zwanzigsten Jahre die Macht und den Einfluß eines Umwandlungsprozesses zu verschweigen, ohne dessen Kenntnis sie einst, gleich den armen Nachkommen der Ägypter, unter dem hohen Baue ewiger Pyramiden, als Fremdlinge im eigenen Hause wandeln werden.“

Nicht minder klar sieht G. Köhler, wenn er (1867) den Zweck und die Bedeutung des mathematischen Unterrichts auf den Gymnasien erörtert und dabei die Mathematik als eine Disziplin erklärt, die sich der folgenden allgemeinen Idee des Gymnasialunterrichts unterzuordnen hat: „Seit Jahrtausenden arbeitet der menschliche Geist und hat ein geistiges Eigentum geschaffen, das von Geschlecht zu Geschlecht forterbt. Eine jede Generation empfängt dieses Erbteil, nicht um es als einen toten Schatz im Acker vergraben liegen zu lassen, sondern um es selbst kennen und würdigen zu lernen, seine geistige Kraft daran zu üben und zu stärken. Diese Arbeit ist aber teils eine Erweiterung des Überkommenen, teils ein Ausscheiden dessen, was nur für eine bestimmte Stufe der Entwicklung von Wert war, jetzt aber als Ballast weggeworfen werden kann. Durch diese sich immer erneuernde geistige Tätigkeit entwickeln sich aus dem Überlieferten neue Aufgaben, die ein Geschlecht als solche aufstellt und deren Lösung dem kommenden Geschlechte überläßt. — Die Aufgabe des Unterrichts und speziell des der Gymnasien ist es nun, die Jugend mit der Geistesarbeit bekannt zu machen, welche die vergangenen Zeiten ihr teils in fertigen Resultaten, teils in noch zu lösenden Problemen hinterlassen hat. Indem nun der Unterricht der Anforderung, vermittelnd zwischen Erblasser und

Erben einzutreten, genügen will, muß er zuvor die Geisteskraft der Schüler fähig machen, das Produkt der Geistesarbeit der Vergangenheit, welches die Wissenschaften sind, in sich aufzunehmen."

Zu gleicher Zeit beantwortet J. C. V. Hoffmann, der Begründer der Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, die Frage: „Inwiefern bildet der Unterricht in den exakten Wissenschaften die notwendige Ergänzung des sprachlich-historischen Unterrichts auf dem Gymnasium?" Er erkennt darin die Alten nicht als Quellen für die modernen exakten Wissenschaften an, hält aber ihr Studium darum für nützlich und empfehlenswert, weil es für unsere ohnehin arg vernachlässigte Kulturgeschichte schätzbares Material liefert. Dann fährt er fort: „Kaum läßt sich etwas Treffenderes hierüber sagen, als was Helmes[1]) ausspricht: »Wo ist auch ein Boden der Kulturgeschichte fruchtbarer als hier; wo reiner von Unkraut menschlicher Entstellung? Hier, wo die Natur in der Unveränderlichkeit ihrer Erscheinungen heute noch ebenso vor uns liegt, wie sie vor Jahrtausenden schon vorlag, gibt uns ihr verschiedenes Abbild in dem Spiegel des menschlichen Geistes ein sicheres Urteil über die Beschaffenheit dieses Spiegels selbst. So gewinnen wir in den mancherlei Ansichten über Dinge, die immer so waren, wie sie heute noch sind, beachtenswerte Maßstäbe der Kultur von Zeiten und von Völkern, die wahrlich in einer einseitigen sogenannten Literaturgeschichte nicht gefunden werden können. Und soll ich hinzufügen, daß das Resultat der Messung, der Vergleichung hier ein so überaus tröstliches, so erfreuliches ist? Es ist die sichere Erkenntnis eines steten unaufgehaltenen Fortschrittes, wenn das Ziel auch unendlich fern liegt. ‚Keine ewige Grenze, wenn auch ewig eine Grenze'«."

Auffallen muß es, daß von den 18 Verfassern ähnliche Themata behandelnder Programmabhandlungen der folgenden anderthalb Jahrzehnte kein einziger, so verschieden auch der eingenommene Standpunkt sein mag, geschichtliche Behandlung der Mathematik empfiehlt. Diese Tatsache entspricht in bemerkenswerter Weise dem Tiefstand der Lehrbuchkurve auf Seite 30.

Wir müssen bis zum Jahre 1892 weiter gehen, um wieder eine Arbeit zu finden, die uns interessiert. Sie handelt vom „Naturalismus und Humanismus" und ihr Verfasser ist W. Enoch. Er stellt sich zwar mit Entschiedenheit auf die Seite des sprachlich-historischen Humanismus, ist aber den exakten Fächern nicht abhold, insofern er auch diesen einen hohen Bildungswert nicht abspricht. Was uns allein interessiert, ist seine konsequente Forderung, allen höheren Unterricht auf historischen Grund zu stellen. Er verallgemeinert den landläufigen Begriff der Geschichte im Sinne von Kulturgeschichte und fordert für alle Fächer Unterordnung unter das große Hauptfach „Kulturkunde".

1) „Die Physik auf dem Gymnasium", Hannover 1865. S. 33.

Wenn nun hierbei auch nicht ausdrückliche Vorschläge für die Mathematik gemacht werden, so kann doch nicht zweifelhaft sein, daß auch diese mit gemeint ist, wenn Enoch jede Wissenschaft auf dem Wege ihrer allmählichen Entstehung verfolgt wissen will, um so eine Art Einheit in den höheren Unterricht zu verpflanzen.

Solche Ideen kehren von nun ab immer wieder. 1902 tritt Heinen der Frage näher: „Wie läßt sich für die kulturhistorischen Unterweisungen im Geschichtsunterricht der nötige Raum gewinnen?" Er beklagt den Zustand der „Überfrachtung" des geschichtlichen Unterrichts, mahnt zur Einschränkung, Vereinfachung und Sichtung des politischen Materials und des Memorierstoffes, keinesfalls aber dessen, was die Kulturgeschichte im weiteren Sinne betrifft. Er meint, daß dabei „der Geschichte der geistigen Kultur vor der der materiellen Kultur der Vortritt gebühre", und wenn er wünscht, daß hierzu auch „die Geschichte der Philosophie, der wissenschaftlichen Weltanschauung usw." gehören soll, so zeigt er vom Standpunkte des Historikers ein Entgegenkommen, das wir Mathematiker für unsere Wissenschaft und in unseren Stunden gern auch dem befreundeten Fache der Geschichte gewähren möchten. Wir begrüßen jede solche nachweisbare Anbahnung gegenseitiger Verständigung mit Dank.

Weit wertvoller ist es natürlich, wenn derartige Gedanken der Verschmelzung und Annäherung offensichtlich auf die Mathematik gemünzt sind. Das ist in hervorragender Weise der Fall bei F. Pietzker, der als verdienstvoller Mitbegründer (1891) des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in weiteren Kreisen der Fachgenossen wohl bekannt ist. Pietzker beschäftigt sich in einer Nordhausener Programmabhandlung von 1894 mit dem humanistischen Elemente im exakten wissenschaftlichen Unterricht. Dort heißt es: „Überall kommt es bei dem exaktwissenschaftlichen Unterricht darauf an, den Schülern die geistigen Prozesse, durch welche die Menschheit zu dem gegenwärtigen Stande der einschlägigen Vorstellungen gelangt ist, in gewisser Art, sozusagen konzentriert, nacherleben zu lassen. Das geschieht gewissermaßen bei jedem einzelnen mathematischen Satz. . . .

„Die allmähliche Entstehung unseres Wissens kann ja gar nicht begriffen werden, ohne daß in dem Lernenden eine Spur des Interesses lebendig wird, das die Menschen von Anbeginn dazu angetrieben hat, über die Erscheinungen nachzudenken, bis sie eine ihrem Bedürfnis genügende Erklärung gefunden hatten. . . .

„Ein wesentliches Mittel aber zur Erfüllung solcher Aufgabe besteht in dem vorbildlichen Hinweise auf die Geistesarbeit, auf die ganze Persönlichkeit der Männer, denen wir die allmählich zum Gemeinbesitz der Menschheit gewordene Erkenntnis verdanken. Indem der Unterricht über die Sache selbst hinaus die Aufmerksamkeit auf die Menschen richtet, die ihr Leben an die selbstlose Ergründung der Wahrheit gesetzt haben, ist er imstande, eine direkt erhebende Wirkung auf das Gemüt auszuüben, eine Wirkung, die sich in gewisser Weise mit der aus den großen Dichterwerken auf das Gemüt des Lesers ausströmenden Wirkung in Parallele setzen läßt. Denn das persönliche Moment, der Umstand, daß diese Dichterwerke vor allem den Niederschlag der seelischen Prozesse vorstellen, die im Innern ihrer Verfasser sich vollzogen haben, ist doch in letzter Instanz der Hauptfaktor aller Wirkung, die von ihnen ausgeht. Insofern wirkt die geschichtliche Behandlung der exakten Lehrfächer ganz zweifellos humanistisch. . . . Schon die verschiedenen Gelegenheiten zur Besprechung der dekadischen Schreibweise unserer Zahlen bieten neben dem Hinweis auf die Bedeutung, die die Entwicklung unserer Zifferschrift an sich in Anspruch nehmen kann, zu kulturhistorischen Bemerkungen mannigfachen Stoff, ich will mich darauf beschränken, die Rivalität zu nennen, die bei der praktischen Einteilung der im Leben auftretenden Einheiten zwischen den Zahlen Zehn und Zwölf von jeher sich geltend gemacht hat und selbst heute noch, wo der Kampf zugunsten der Zehn entschieden zu sein scheint, nicht völlig verschwunden ist. Hier liegt eine Fülle kulturgeschichtlich interessanter Gesichtspunkte vor . . . .

„Die vorstehenden Momente glaube ich als Beispiele direkter Beziehungen des exaktwissenschaftlichen Unterrichts zu der humanistischen Erziehungsaufgabe unseres höheren Schulwesens hinstellen zu können, insofern man den eigentlichen und nächsten Zweck des genannten Unterrichts, den Schüler mit dem gegenwärtigen Stande unserer exakten Bildung (innerhalb der Schule selbstverständlich gezogenen Grenzen) bekannt zu machen, meines Erachtens ohne eine historische Behandlung des Stoffes von der im vorstehenden skizzierten Art nicht völlig erreichen kann. . . .

„Menschen von Fleisch und Blut sind es ja, an denen die Schule ihre Arbeit vollzieht, mit all den Interessen, den Regungen und Kräften, die jede Generation des menschlichen Geschlechtes der folgenden vererbt."

Auch ohne weitere Skizzierung des Zusammenhangs, die hier zu weit führen würde, entnimmt der Leser, unter wie mannigfachen Gesichtspunkten Pietzker geschichtliche Einblicke in die Entwicklung der Mathematik warm empfiehlt.

Ganz in Pietzkers Bahnen bewegt sich B. Biel (1895), während er den mathematischen Unterricht in seiner Beziehung zu anderen Unterrichtsgebieten beleuchtet. Seine Arbeit enthält in breiterer Darstellung soviele unser Thema behandelnde Gedanken, daß wir auf sie später[1]) ausführlicher zurückkommen werden und ihrer daher hier nur kurz gedenken.

Zu gleicher Zeit betont R. Most, daß der Bildungswert der Mathematik nicht zum wenigsten darin bestehe, daß dem Schüler in seiner

1) Seite 103.

eigenen Entwicklung auf einem abgeschlossenen Gebiete zu zeigen sei, wie Wissenschaft entsteht, sich entfaltet und zu erhabener Höhe steigt. Folgerichtig wird dann der Lehrer auch der geschichtlichen Wandlungen der Wissenschaft in großen Zügen gedenken.

Merkwürdig ist es, daß vielen Philologen dieser Gedanke fernliegt. P. Goldscheider, der 1902 bei Besprechung der Grundzüge der neuen Lehrpläne von 1901, die Haupterfordernisse für den modernen Unterricht in Leitsätze zusammenfaßt, fordert u. a. ausdrücklich „geschichtliches Denken als Ziel aller Geisteswissenschaft". Nun ist ja bekannt, daß man die Mathematik nicht zu den „Geisteswissenschaften" zählt. Warum — das ist wohl manchem nie recht klar geworden. Jedenfalls schließt Goldscheider die Mathematik bei seiner Forderung aus, wenngleich er ihren Wert nicht verkennt, indem er feststellt, daß sie als Schule des folgerichtig vorschreitenden Denkens auf den höheren Schulen das höchste Ansehen genießt. Wäre nicht aber der Gedanke naheliegend gewesen, geschichtliches Denken als einigendes Prinzip für alle Disziplinen des Gymnasiums, die Mathematik eingeschlossen, zu fordern?

Überhaupt scheint in vielen methodischen Abhandlungen dieser Gedanke in der Luft zu schweben, auch wenn er nicht greifbare Gestalt annimmt. Das gilt u. a. von den Abhandlungen, die für eine „organische Behandlung des mathematischen Lehrstoffs" eintreten. Als Beispiel sei diejenige von Könnemann (Posen 1904) erwähnt, aus deren erstem Kapitel man den unausgesprochenen Wunsch herauslesen möchte, das organische Wachsen und Sicherweitern der Probleme auch an der Hand ihrer Geschichte zu verfolgen.

Es muß wundernehmen, daß sich noch immer, auch in neuester Zeit, Stimmen erheben, die von historischer Behandlung der exakten Wissenschaften nichts wissen wollen, und auch solche, die den Gegensatz zwischen historisch-sprachlicher und naturwissenschaftlich-formaler Bildung mehr verschärfen als ausgleichen. Richtig ist, wenn Löwisch (1906) feststellt, daß „jede unserer Schulformen, Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule, eine Kombination historischer und aktueller Bildungsideale darstellt und daß der Unterschied der verschiedenen Schulformen einzig und allein in der Verschiedenheit der Mischung der Vergangenheits- und Gegenwartsbildung, des realen und idealen Gehalts liegt". Er erkennt für die historische Begriffsbildung an der alten, wie an der neuen Schulgattung, denselben Rahmen und denselben stofflichen Untergrund an. Und doch betont er unmittelbar darauf, daß der naturwissenschaftliche und technische Unterricht im wesentlichen unhistorisch sei, also wohl erst recht der mathematische. Wenn das auch zuzugeben ist, so läge doch die Anregung nahe, ein wenig Geschichte auch in diese Unterrichtsfächer hineinzumischen. Man sieht wieder, daß dieser Gedanke eben noch keineswegs überall Wurzel geschlagen hat.

Und so wird denn auch in anderen Programmen zwar manch guter und beachtenswerter Vorschlag zur Verbesserung des mathematischen Unterrichts gemacht, aber kaum einmal einer im Sinne historischer Einblicke. Es sei z. B. auf die Arbeit Hoefinghoffs (1909), Brockes (1909) u. a. hingewiesen.

Dagegen zeigt Riehm (1911) in einem recht frisch geschriebenen, manchen modernen Reformvorschlag nicht billigenden Beitrage zur Didaktik des mathematischen Unterrichts in den Mittelklassen des Gymnasiums, wie man gelegentlich schon auf früher Stufe durch historische Notizen lebendige Anregung bieten, sowie durch Worterklärungen Fühlung mit den klassischen Sprachen nehmen kann.

Ihrem ganzen Inhalt nach gehört hierher auch die Programmarbeit von M. Gebhardt (1908). Wenn sie trotzdem jetzt nur kurz erwähnt wird, so rechtfertigt sich das dadurch, daß der Verfasser seine Gedanken und Vorschläge in den nächsten Kapiteln wiederholt und erweitert.

Wir sind am Ende unseres Überblicks, der im Großen und Ganzen dem Gange der Zeit folgte. Von acht Jahrzehnten zogen die Programme an uns vorüber, bereit, uns ihre Gedanken zu offenbaren. Wir haben viel gesucht und wenig gefunden. Aber gerade das negative Ergebnis muß uns lehrreich sein. Es läßt uns von neuem erkennen, daß auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichtes mit den Jahren zwar vieles anders und manches besser geworden ist, daß wichtige Reformvorschläge sich allmählich, aber sicher Geltung verschafften, daß aber die Idee, der Geschichte der Mathematik im Unterrichte ein wenn auch nur bescheidenes Plätzchen zu sichern, bis zum heutigen Tage den Schulmännern, soweit sie in einschlägigen Programmabhandlungen ihre Stimme erheben, zumeist noch fernliegt.

III. Teil.

Zusammenfassendes und Allgemeines über den Wert geschichtlicher Behandlung der Mathematik im Unterrichte der höheren Schulen.

1. Vorkämpfer.

So hat denn schon das Studium der Lehrbücher und Schulprogramme unsere Aufmerksamkeit auf eine Reihe von Männern gelenkt, die dafür eintraten, der Geschichte der Mathematik im Unterrichte der höheren Schulen die ihr gebührende Beachtung zu schenken, wenn es auch im Verhältnis zur Gesamtheit deren nicht viele waren. Wir zählen hier noch einmal die wichtigsten Namen auf. Schon auf J. F. Hähn (1749) durfte zurückgegriffen werden. Dann folgen: F. Schmeißer (1817), J. A. Matthias (1827), E. Heis (1837), C. L. A. Kunze (1851), W. Wiegand (1853), Th. Wittstein (1858), J. Helmes (1862), R. Baltzer (1862), L. Matthießen (1869), Fr. Wallentin (1886), F. Pietzker (1894), G. Holzmüller (1905), H. Müller (1909).

Indes würde man irren, wollte man diese Reihe hiermit für abgeschlossen halten. Sie bedarf noch der Ergänzung, da sich auch außerhalb der gezogenen Grenzen noch andere Männer in hervorragendem Maße durch Schrift und Rede für dieselbe Sache begeistert haben.

Zunächst wird wohl zugestanden werden, daß Mathematiker höherer Schulen schon dann zu den Vorkämpfern zu rechnen sind, wenn sie neben ihrer Berufstätigkeit erfolgreich als Forscher oder Publizisten auf dem Gebiete der Geschichte ihrer Wissenschaft tätig waren. Auch wenn sie nicht ausdrücklich für geschichtliche Behandlung des Unterrichts das Wort ergriffen, ja wenn sie vielleicht, Vorurteilen ihrer Zeit folgend, in der Schule eine uns jetzt kaum noch verständliche Zurückhaltung an den Tag legten, eins ist sicher, daß sie Interesse für die Geschichte der Mathematik in ihre Berufskreise hineintrugen.

Zum Ruhme des deutschen Gymnasiallehrerstandes kann festgestellt werden, daß nicht nur vereinzelte Programmabhandlungen kleinere Sondergebiete der Geschichte der Mathematik durch selbständige Studien bereicherten, sondern daß die historisch-mathematische Forschung im neunzehnten Jahrhundert ganz wesentlich mit aus den Kreisen der praktischen Schulmänner hervorgegangen ist. Einige Beispiele. Schon der Rektor (1779—1797) des Pädagogiums im Kloster Bergen J. F. Lorenz verdient genannt zu werden, da er eine sehr gute Übersetzung des Euklid geschrieben hat. Dann denken wir an Kästners Schüler, G. S. Klügel, der zu Beginn des vorigen Jahrhunderts seinem gelehrten mathematischen Wörterbuche eine unverkennbar historische Grundlage gab. Er war länger als zwei Jahrzehnte Professor am Gymnasium zu Helmstedt, ehe er 1787 nach Halle kam. Auch J. C. Poggendorff, der Begründer des noch heute sehr wertvollen biographisch-literarischen Handwörterbuchs zur Geschichte der exakten Wissenschaften, dessen erste zwei Bände er 1858—1863 selbst herausgab, gehörte dem Gymnasiallehrerstande an. Weiterhin möchte ich C. J. Gerhardt[1]) nennen. Er war in den vierziger Jahren am Gymnasium zu Salzwedel angestellt, kam 1853 an das Französische Gymnasium nach Berlin, um 1856 einer Berufung an das Kgl. Gymnasium zu Eisleben Folge zu leisten. Als Lehrer hat er immer den humanistischen, idealen Gehalt der Mathematik hervorgehoben. Seinen wissenschaftlichen Ruhm aber hat er sich für alle Zeiten als bedeutender Leibnizforscher begründet. Weiterhin darf doch wohl auch an dieser Stelle der Dresdener Kreuzschulprofessor R. Baltzer, obgleich er außer einer Biographie über Möbius und seinen Freund Weiske eigentliche historische Schriften nicht herausgegeben hat, als gediegener Quellenforscher nicht vergessen werden. Im erhöhten Maße gilt dies von dem Kreuzschulrektor F. Hultsch,[2]) den wir als bedeutenden Forscher auf dem Gebiete der altklassischen Mathematik schon gewürdigt haben. Aus den sechziger und siebziger Jahren ist M. Curtze,[3]) Professor am Gymnasium zu Thorn, ein naher Freund M. Cantors, hervorzuheben. Er hat sich als Forscher über Lebensumstände und Entwicklungsgang seines großen Landsmannes Koppernikus und auch sonst als fruchtbarer Schriftsteller über Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter einen Namen gemacht. [S. Literaturverzeichnis.] Zeitgenosse von ihm war F. Rosenberger,[4]) Gymnasiallehrer in Hamburg und von 1877 am Realgymnasium in Frankfurt a. M., den wir nicht übergehen möchten, wenngleich seine Geschichtsforschungen mehr der Physik als der Mathematik angehören. Ähnliches gilt von dem Realschulprofessor A. Heller in Pesth, der 1902 starb. Sodann muß eines Mannes gedacht werden, der, wie Rudio ihm nachrief, „in den vordersten Reihen der mathematisch-historischen Forscher steht und einen Ruhmesschimmer auch zurückwarf auf die Schule, der er über zwölf

1) Biographie in Eneströms Bibl. Math. 3. Folge, Bd. 1 S. 205 ff. aus der Feder von F. Müller.

2) Biographie ebenda, Bd. 8 S. 325 ff. aus der Feder von F. Rudio.

3) Biographie ebenda, Bd. 4 S. 65 ff. aus der Feder von S. Günther.

4) Biographie ebenda, Bd. 1 S. 217 ff. aus der Feder von S. Günther.

Jahre lang treu gedient hatte". Es ist der 1905 im besten Mannesalter verstorbene ehemalige Oberlehrer am Gymnasium zu Helmstedt Wilhelm Schmidt,[1]) der als Heronforscher unvergessen bleiben wird. Ebenso darf der deutsche Gymnasiallehrerstand A. v. Braunmühl[2]) zu den Seinen zählen. War dieser doch von 1877 bis 1887 an verschiedenen Münchener höheren Schulen tätig gewesen, ehe er sich ausschließlich seinem akademischen Lehramte an der Technischen Hochschule zu München widmete.

Auch H. E. Wappler[3]) vom Gymnasium zu Zwickau († 1899), der seine Arbeiten der Algebra des 15. Jahrhunderts gewidmet hat, G. Wertheim,[4]) Realschullehrer in Frankfurt a. M., der als Diophantübersetzer und Erforscher der Mathematik der Juden im 17. Jahrhundert von Bedeutung ist und mancher andere könnten genannt werden. Man durchblättere nur die Programmschau in unserem Literaturverzeichnis. Erfreulicherweise mehrt sich mit Beginn unseres Jahrhunderts die Zahl historisch-mathematisch tätiger Lehrer an höheren Schulen Deutschlands. Es genüge hier an Männer wie H. Wieleitner (Professor am Gymnasium Pirmasens), J. Tropfke (Oberrealschuldirektor in Berlin), Felix Müller (früher Professor an einer Realschule in Berlin), Mitbegründer des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik (Berlin), C. Manitius zu erinnern. Von den zuerst Genannten ist an anderer Stelle noch die Rede. Letzterer war bis vor einigen Jahren Professor an der Kreuzschule zu Dresden und gehört wie F. Hultsch und W. Schmidt zu den klassischen Philologen, die zugleich mathematisch durchgebildet sich der Durchforschung hervorragender Werke antiker Mathematiker gewidmet haben. Er gab soeben als Ergebnis langjähriger Studien eine deutsche Übersetzung des Almagest von Ptolemäus heraus.

Fassen wir den Begriff „Vorkämpfer" nun enger, indem wir uns nach solchen Männern umsehen, die — ob sie nun der Hochschule oder der höheren Schule angehören, ob sie selbst Geschichtsforscher sind oder nicht — die Idee historisch-mathematischen Unterrichtsbetriebes an den höheren Schulen durch Wort oder Schrift verfochten haben, so finden wir wieder, daß sich ihre Zahl in neuerer Zeit mehrt.

Wir möchten mit Max Simon (M. S.)[5]) beginnen, der in seiner sehr bekannten „Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik" in A. Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen (1. Aufl., München 1895, 2. Aufl. 1908) zu Beginn des I. Kapitels mit Befriedigung feststellt, daß der Sinn für das

---

1) Biographie in Eneströms Bibl. Math. 3. Folge, Bd. 6 S. 354 ff. aus der Feder von F. Rudio.

2) Biographie ebenda, Bd. 11 S. 316 ff. aus der Feder von H. Wieleitner.

3) Biographische Notiz ebenda, Bd. 1 S. 225 aus der Feder von G. Eneström.

4) Biographie ebenda, Bd. 3 S. 395 ff. aus der Feder von G. Eneström.

5) Diese in Klammer gesetzten Buchstaben dienen später zur Kennzeichnung von Zitaten.

Geschichtliche erfreulich im Wachsen begriffen sei; werde doch durch den Einblick in das historische Werden der Erkenntnis zugleich auch das beste Verständnis für die gewordene vermittelt, wie andernseits auf den Zusammenhang aller Kulturarbeit, d. h. kurz auf die Einheit des menschlichen Geistes nicht entschieden genug hingewiesen werden könne. Simon beruft sich auf zustimmende Äußerungen anderer und nennt zuerst Siegmund Günther (S. G.), der schon im Jahre 1883 im „Gymnasium" auf stärkere Betonung des geschichtlichen Elementes im Unterrichte hingewiesen hat. Simon verweist ferner auf F. Lindemann; mit dessen Rektoratsrede[1]) wir uns noch zu beschäftigen haben werden, desgleichen auf „den als selbständigen Forscher auf diesem Gebiete bewährten Professor Treutlein" (P. T.). Und in der Tat steht wohl Treutlein in der vordersten Reihe der Vorkämpfer für unsere Idee. Sein auf der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Heidelberg (1889) mit großem Beifall aufgenommener Vortrag „über das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten" ist so in unserem Sinne geschrieben, daß er uns mit als Grundlage für die Ausführungen der folgenden Abschnitte dienen soll.

Daß eine geschichtliche Behandlung der Elementar-Mathematik in ganz besonderer Weise des Volkes gedenken muß, das diese Wissenschaft als solche begründet hat, leuchtet ein. Man muß daher zu den Vorkämpfern auch die Verfasser von solchen Chrestomathien rechnen, die ausgewählte Stücke aus mathematischen Werken der Vergangenheit im griechischen, bzw. lateinischen Urtext, mit Kommentar versehen, dem Unterrichte unmittelbar zugänglich machen. Hier wären vor allem v. Wilamowitz-Moellendorff und Max C. P. Schmidt zu nennen. Im übrigen begnügen wir uns jetzt mit diesem Hinweis, da wir im letzten Abschnitte des IV. Teiles[2]) ausführlicher auf die Sache zurückkommen.

Des weiteren finden wir Vorkämpfer, wenn wir solche Schriften durchmustern, die entweder vorwiegend den „humanistischen" Gehalt der Mathematik im engeren Sinne hervorheben, oder ihren allgemeinbildenden Wert, ihren Zusammenhang mit allem dem aufdecken, was die Gesamtheit der geistigen Interessen des Menschen ausmacht. Wir nennen zuerst A. Wernicke, der vor allem in zwei Arbeiten, die von schöner Begeisterung getragen sind, dafür eintritt, daß die Mathematik auch als Kulturmacht in ihrer geschichtlichen Entwicklung auf den Schulen gelehrt werde. Sie sind betitelt: „Die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung in ihrer Stellung zum modernen Humanismus" (Berlin 1898) (A. W. 1) und „Kultur und Schule" (Osterwieck 1896) (A. W. 2). Ähnlichen Gedanken wie hier, verleiht er in der Abhandlung: „Die kulturelle Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung" (1903, Päd. Arch. XLV, Heft 12) (A. W. 3) und in

1) F. Lindemann, „Lehren und Lernen in der Mathematik". Rede beim Antritt des Rektorats. (München, 1904.)

2) Siehe S. 129. 130.

dem Vorworte zu seiner Mechanik von 1883 und seiner Goniometrie (1888) Ausdruck.

Ferner gehören hierher die schon besprochene Arbeit von F. Pietzker (F. P.): „Das humanistische Element im exakten wissenschaftlichen Unterrichte" (Programm Nordhausen 1894), sowie eine akademische Rede von E. Lampe (Berlin 1893) (E. L.): „Die Entwicklung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur"[1]) und einige andere mehr vom höheren Standpunkte und nicht unmittelbar für die Anforderungen der Schule geschriebene Werke, auch solche, die sich an den Lehrer wenden. An der Spitze der letzteren steht F. Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" (2 Bde. 1908, 1909), in deren Vorrede es heißt: „Ich will viel mehr als es sonst geschieht, auf die historische Entwicklung der Wissenschaft, auf die Leistungen ihrer großen Pfadfinder, hinweisen. Durch Erörterungen dieser Art will ich Ihre, wie ich gerne sage, mathematische Allgemeinbildung fördern: neben die Kenntnis der Details, wie sie die Spezialvorlesungen liefern, soll die Erfassung des sachlichen und historischen Zusammenhanges treten." Dementsprechend wird der Hörer in dieser Vorlesung immer und immer wieder auf geschichtlichen Boden geführt.

Mehr von der allgemeinen Geschichte ausgehend und dabei den Versuch machend, die Kluft zwischen dieser Wissenschaft und der Mathematik zu überbrücken, reicht uns die Hand zum Bunde A. Riehl (A. R.) in einem Vortrage aus neuester Zeit (Berlin 1909), der sich zum Gegenstand setzt: „Humanistische Ziele des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts." Auch Riehl hat in erster Linie das humanistische Gymnasium im Auge. Dasselbe gilt von einem Beitrage zur Festschrift der 49. Philologenversammlung zu Basel (1907): „Die Mathematik auf dem Gymnasium" von Otto Spieß. (O. S.)

Endlich nennen wir noch die schon erwähnte Programmarbeit von B. Biel von 1895 (B. B.) über „den mathematischen Unterricht in seiner Beziehung zu den anderen Unterrichtsgegenständen".

Alle diese Schriften sind reich an wertvollen Gedanken und beherzigenswerten methodischen Vorschlägen. Sie bilden zusammen mit schon früher besprochenen und einer Arbeit des Verfassers die Grundlage, auf der sich die folgenden Ausführungen aufbauen. Der Kürze wegen sei künftig die Herkunft von Zitaten aus ihnen dadurch angedeutet, daß die hinter dem Namen des Verfassers in Klammer beigefügten Buchstaben wiederholt werden.

2. Mathematik und Kulturgeschichte.

Mit Recht bezeichnet H. Hankel die Geschichte der Mathematik als einen Teil der allgemeinen Kulturgeschichte. Mit Recht legt

1) Leider ist diese vortreffliche Rede im Buchhandel vergriffen. Ein Neuabdruck würde vielen willkommen sein.

L. Matthießen Wert auf die Erkenntnis, daß die Mathematik nicht sozusagen in der Luft schwebt, sondern als eine der ältesten Wissenschaften in kulturgeschichtlichem Boden wurzelt. Mit Recht sagt F. Lindemann:[1]) „Die Mathematik ist stets ein großer Faktor im Kulturleben der Menschheit gewesen; als solcher ist sie dem Schüler in historischem Zusammenhange vorzuführen." Mit Recht sagt B. Schwalbe, daß es ohne Mathematik unmöglich sei, sich allgemeine Bildung anzueignen, insofern allgemeine Bildung die Fähigkeit ist, unsere Kulturentwicklung zu verstehen. Ergänzend fügen wir hinzu, daß dies auch ohne einen Einblick in die Geschichte der Mathematik unmöglich ist.

Noch allgemeiner sagt Conrad H. Müller:[2]) „Alle (mathematische) Geschichtsforschung zielt auf Beantwortung der einen zentralen Frage hin: Was bedeutet und was hat zu den verschiedenen Zeiten die Mathematik für die Kultur bedeutet?" Pietzker ist der Überzeugung, daß „unser exaktwissenschaftliches Wissen ein wesentliches Element in dem ganzen Kulturzustande der Menschheit im allgemeinen und der der einzelnen Nationen im besonderen bildet; und E. Lampe[3]) nimmt in seiner Rektoratsrede von 1893 mit Freuden die Gelegenheit wahr, „zur Erhebung der Gemüter" den äußeren Entwicklungsgang der Mathematik als Maßstab für den kulturellen Aufschwung vorzuführen, indem er zeigt, daß ihre Ausbreitung mit dem Zuwachs der Kultur unmittelbar zusammenhängt. „Zwar könnte jemand einwenden, eine Wissenschaft wie die Mathematik, welche bloß von Einzelnen gepflegt werde, der Mehrzahl der Menschen aber fremd bleibe, könne nicht dazu dienen, einen Fortschritt der Kultur der Menschheit zu verdeutlichen. Diesem Einwande gegenüber sei zunächst nur das Zeugnis der Geschichte entgegengestellt; bei allen Kulturvölkern ist die Blütezeit der Kunst auch immer zeitlich eng verbunden mit einer Blütezeit der reinen Wissenschaften, insbesondere der ältesten unter ihnen, der Mathematik."

F. Schmeißer hält es von großem Werte, „das junge Gemüt den unermeßlichen Nutzen beherzigen zu lassen, welchen die Mathematik auf die Kultur des Menschengeschlechts in aller Hinsicht gehabt hat".[4]) J. Helmes hebt weiter hervor, daß gerade in dem auf die Mathematik bezüglichen Teile der Kulturgeschichte die Bildung aller Völker und aller Zeiten mit einem und demselben Maße gemessen und so ganz untrüglich miteinander verglichen werden kann;[5]) und J. C. V. Hoff-

1) Rektoratsrede, S. 10.

2) „Abhdlgn. z. Gesch. d. math. Wiss." 18. Heft: „Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert", S. 63.

3) (E. L.), S. 4.

4) Vgl. früher, S. 5.

5) Vgl. früher, S. 18.

mann ergänzt diesen Gedanken, wenn er fragt: „Wo ist auch ein Boden der Kulturgeschichte fruchtbarer als hier; wo reiner vom Unkraut menschlicher Entstellung?“[1])

A. Riehl erklärt es für eine zukunftsreiche, höchst entwicklungsfähige Aufgabe des humanistischen Gymnasiums, den geschichtlichen Zusammenhang der alten mit der modernen exakten Wissenschaft unter Hinweis auf die Kulturgeschichte lebendig zu erhalten,[2]) und Wernicke geht noch weiter, wenn er zur Lösung derselben Aufgabe aus folgendem Grunde auffordert: „Um den Geisteskampf der Gegenwart zu verstehen, muß man sich auch klar darüber sein, welche Rolle die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung, die ihren ersten Abschluß durch Newton gefunden hat, in der ganzen kulturellen Entwicklung spielt, die zu diesem Kampfe geführt hat.“ [3]) Dabei werde man erkennen, daß „das Werden der exakten Wissenschaft einerseits in enger Beziehung zu der Entwicklung der kulturellen Bedürfnisse auf dem Gebiete des gemeinen Lebens steht und andererseits von der jeweiligen Weltanschauung abhängt, aus welcher heraus die führenden Geister zu ihren Schöpfungen gelangten“. Wernicke folgert aus dieser Tatsache weiter: „indem sie (die exakte Forschung) die Sinnenwelt als ein in sich geschlossenes, durch Gesetze bestimmtes Ganze ansehen lehrte, zwang sie zugleich den Menschen, in seinem Innern die ewig sprudelnde Quelle seines religiös-ethischen Glaubens zu suchen, durch welche auch die Sinnenwelt ihre letzte Deutung erhält“.[4]) Daher müssen sich „fremdsprachliche und mathematisch-naturwissenschaftliche Bildungselemente auf kulturgeschichtlicher Grundlage in einer religiös-ethischen Weltanschauung vereinen“.

In überzeugender Weise spinnt solche und ähnliche Gedanken Treutlein weiter, wobei er an historischen Beispielen den Nachweis für ihre Richtigkeit erbringt. „Der Menschengeist ist ein einiger,“ sagt er, „dem Wechsel seiner Äußerungen und dem Beharrenden im Wechsel nachzuspüren gewährt hohes Interesse und lenkt den Blick auch des Zöglings auf das Allgemeine, auf das Ideale.“ Und an anderer Stelle verlangt er deshalb „. . . daß das kulturgeschichtliche Element eine recht kräftige Bedeutung erhalten möge im höheren Unterrichte, auch im mathematischen“.

---

1) Vgl. früher, S. 60.

2) (A. R.) S. 26.

3) (A. W. 3), S. 744. — Anders steht es natürlich mit der Frage, ob eine streng wissenschaftliche Behandlung der Geschichte der Mathematik auf kulturhistorischer Grundlage aufzubauen ist. Daß diese Frage nicht ohne weiteres zu bejahen, vielleicht von manchem Gesichtspunkte aus zu verneinen ist, führt G. Eneström (Bibl. Math. 3. Folge, 1903, B. A. 4, S. 1 ff.) näher aus. Doch hat Eneström gegen die kulturhistorische Behandlung „volkstümlicher Mathematik“ nichts einzuwenden. Meine Vorschläge gehen ja auch nur dahin, den Zusammenhang zwischen Entwicklung der Mathematik und Fortschreiten der Kultur gelegentlich aufzudecken.

4) (A. W. 3), S. 744.

Ganz ähnlich drückt sich O. Spieß aus, der geschichtliche Behandlung der Mathematik „nicht nur der Mathematik zulieb anrät, sondern auch um der kulturgeschichtlichen Bildung willen“. Dasselbe tut M. Simon in seinem Werke: „Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte“.[1]) Dort wird verlangt, daß überhaupt „der Zusammenhaug aller Kulturarbeit, das ist kurz die Einheit des menschlichen Geistes“ zu betonen sei. „Logarithmen und Wahrscheinlichkeitsrechnung haben die Statistik und die Sozialgesetzgebung geschaffen“, fügt Simon hinzu.

Lassen wir uns an diesen Zitaten genügen. Der aufmerksame Leser wird aus dem, was wir aus Vorreden und Programmen in den vorigen Kapiteln hervorgehoben haben, manche Ergänzung und manche Zustimmung herauslesen.

Es würde für uns eine dankbare Aufgabe sein, den engen Zusammenhang nun wirklich nachzuweisen,[2]) der im Wandel der Zeiten zwischen Mathematik und kultureller Entwicklung der Menschheit von jeher bestanden hat. Aber auch wenn dies nur in großen Zügen geschehen sollte, würde ein breiter Raum dafür in Anspruch genommen werden müssen. Und der steht uns hier leider nicht zur Verfügung, ganz abgesehen davon, daß uns unser Thema nur den Hinweis auf diesen Zusammenhang nahelegt. Es fehlt nicht an Schriften, die diesen Nachweis führen. Ganz besonders möchte ich schon jetzt das Augenmerk auf eine Abhandlung lenken, die noch nicht erschienen ist, aber in nicht zu ferner Zeit bei Teubner erscheinen wird. Sie gehört dem großen Werke „Kultur der Gegenwart“ an, ist von A. Voss verfaßt und führt den Titel: „Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur“. Sie berührt ausführlich viele Punkte, die hier nur gestreift werden konnten und sei dem Studium aller derer empfohlen, die für das behandelte Thema Interesse haben.

Denselben Nachweis erbringt in großen Zügen und in schwungvoller Darstellung E. Lampe am angeführten Orte; auch habe ich ihn im einzelnen in meiner Programmarbeit von 1908 zu geben versucht.

Ich schließe diese Betrachtungen mit einigen Sätzen dieser Arbeit:

„Der Schüler soll aus der Geschichte lernen, daß die Entwicklung der Mathematik mit dem Fortschreiten menschlicher Kultur eng verknüpft ist. Und er soll weiter lernen, daß es der Mathematik nicht beschieden war, in stetigem Siegeszuge durch die Jahrhunderte zu

1) Vergl. auch S. 124, wo das Simonsche Werk besprochen wird.

2) Auch in Einzeldarstellungen wird dieser Nachweis öfters erbracht. So zeigt E. Löffler im Band 1 der Mathem. Bibl. (herausgeg. 1911 bei Teubner von Lietzmann und Witting), daß „Ziffern und Ziffernsysteme im engsten Zusammenhang stehen mit den Kulturverhältnissen eines Volkes, und daß sie häufig eines der mannigfachsten Bindeglieder zwischen den verschiedenen Völkern und Zeitaltern bilden“.

schreiten, daß sie vielmehr den Weg über Höhen und Tiefen gemeinsam mit der Menschheit gegangen ist. Dabei wird er erkennen, daß sie immer ein Gradmesser für die Kultur war. Er soll nicht die banale Meinung in sich aufkommen lassen, als ob sie von Anbeginn nur ein Tummelfeld für weltfremde Grübler, eine zwecklose Schöpfung abstrakten Denkens gewesen sei. Er wird mit Verwunderung sehen, wie sie sich im Wandel der Zeiten oft genug bewußt in den Dienst des praktischen Lebens gestellt hat, wie sie nicht nur der Astronomie, Physik, dem Maschinen- und Brückenbau, sondern auch dem Handel, der Baukunst, der Kriegswissenschaft,[1]) der Schiffahrt, der Kunst, der Philosophie, ja selbst der Kirche[2]) gedient hat. Aber er wird sich auch wieder zu der tieferen Einsicht hindurchringen, daß ihre Entwicklung in ihren Hauptzügen von Anfang an mit innerer Notwendigkeit frei aus sich heraus erfolgt ist und zwar mit einer Freiheit, die nie zügellos war, sondern die sich aus der Natur der Wissenschaft heraus und mit ihr in Übereinstimmung selbst determinierte.[3]) Und er wird weiter sehen, daß sie auch dann, wenn sie rein um ihrer selbst willen schuf, mächtige Fortschritte auf den verschiedensten Gebieten, auch solche, die sie nicht vorausahnen konnte, nach sich zog. Es wird im zwanzigsten Jahrhundert nachgerade Zeit daß alle wahrhaft Gebildeten darüber nicht mehr in Zweifel bleiben, daß alle Kulturvölker unbewußt und mittelbar tagtäglich aus den Gesetzen der Mathematik reichen Nutzen ziehen. Und sollte einer ungläubig den Kopf schütteln, so könnte man ihn an das Wort Napoleons erinnern: „Die Wohlfahrt der Nationen ist an die Fortschritte der Mathematik gebunden."[4]) Vielleicht gilt ihm dieses Wort darum um so mehr, als es nicht von einem Mathematiker ausgesprochen wurde."

---

1) Siegmund Günther stellt in seinem mathematischen Anhange zu Windelbands Geschichte der alten Philosophie (München 1894) S. 234 fest, daß die Kriegswissenschaften von der spätgriechischen Zeit an bis zum Beginn des neunzehnten Jahrhunderts als ein Bestandteil der angewandten Mathematik gegolten haben. Das betrifft nicht nur die Artilleriekunst und die Lehre von den Belagerungswerkzeugen, sondern galt (seit Polybios) lange Zeit hindurch auch von der Taktik.

2) In den Klosterschulen, die in England, Irland, Schottland und auf dem Kontinente im zehnten Jahrhundert aufblühten, galt die Mathematik in der Hauptsache nur als Hilfslehrfach, das zum Verständnis der für die Kirche so wichtigen Kalenderberechnung führen sollte. — Daß Regiomontan als der berühmteste Mathematiker seiner Zeit vom Papste Sixtus IV. zum Bischof von Regensburg ernannt wurde, um eine Reform des Kalenders durchzuführen, mag bei dieser Gelegenheit mit erwähnt werden. Leider starb aber Regiomontan 1476 auf einer Reise zum Papste von Nürnberg nach Rom, ehe er sein Bistum übernehmen konnte. — Barrow, der Lehrer Newtons, sagte einmal: „Um ein guter Theologe zu sein, muß man ein guter Astronom sein. Um aber ein guter Astronom zu sein, muß man ein guter Mathematiker sein."

3) Vgl. Hermann Hankel, Akadem. Rede vom 29. April 1869, S. 20.

4) L'avancement et la perfection des mathématiques sont intimement liés à la prospérité de l'Etat. Napoléon I. à Laplace. 1. 8. 1812.

3. Mathematik, klassisches Altertum und Humanismus.

„In dem Ganzen einer großen Kulturentwicklung, wo immer der eine dem anderen die goldenen Eimer reicht, wird man den genialen Entwurf stets höher schätzen, als die fleißige Regsamkeit der folgenden Geschlechter und wird schon in dem ersten Geschenke dankbar den weiteren Besitz erblicken. In diesem Sinne dürfen und müssen wir bekennen, daß fast alle unsere Wissenschaft griechisches Erbe ist. In dieser Wissenschaft der Griechen nimmt aber die Mathematik und deren Gefolgschaft die erste Stelle ein, nicht wegen des praktischen Wertes ihrer glänzenden Ergebnisse, sondern wegen der hohen Bedeutung ihrer wissenschaftlichen Eigenart für alle jene Kulturerscheinungen, welche durch den Geist von Demokritos und Plato geweiht sind."

Wir stellen diese Worte Wernickes[1]) voran, weil sie klar auf einen zweiten Gesichtspunkt hindeuten, unter dem wir auch für den mathematischen Unterricht Anlehnung an die Geschichte befürworten.

Zuweilen schon in früherer, öfters in neuerer Zeit ist es beklagt worden, daß das klassische Altertum auf unseren höheren Schulen vielfach zwar sehr weitgehend, hingegen mit einer gewissen Einseitigkeit behandelt wird. Die Folge davon ist, daß der Schüler in dem irrigen Glauben heranwächst, unsere moderne Kultur habe nur auf philosophischem, künstlerischem und politischem Gebiete ihre Wurzeln im Boden der Antike. Allenfalls lassen in ihm der Pythagoreische Lehrsatz und einige andere mit griechischen Worten verknüpfte Sätze eine Ahnung davon aufkommen, daß auch die Alten nicht ohne mathematische Kenntnisse waren. Diese Ahnung ist aber häufig — um nicht zu sagen meist — sehr dunkel. Versicherte mir doch ein klassischer Philolog, der Anfang der neunziger Jahre seine Reifeprüfung auf einem preußischen humanistischen Gymnasium abgelegt hatte, daß er den Namen Euklid im Unterrichte nie zu hören bekommen habe. Er staunte, als er auf seinen Wunsch einiges über die wichtige Stellung erfuhr, die die Mathematik in dem vor ihm so „genau" durchforschten klassischen Altertume einnahm. Solches Staunen würden außerordentlich viele akademisch Gebildete teilen, wenn sie ähnlicher Aufklärung teilhaftig würden; wenigstens in Deutschland. Bei den Romanen und Engländern ist es ganz anders, da bei ihnen die Nachwirkungen des Neuhumanismus nicht verspürt werden. Heute ist aber auch bei uns der Anfang zu einer allmählichen Besserung gemacht. Man wendet sich bei der Einführung in die klassische Welt von jener Einseitigkeit ab, wobei man etwa im Sinne Riehls fordert: zwar „soll die alte Kultur im Mittelpunkte der allgemeinen Bildung verbleiben und dennoch soll der realistische Unterricht bei intensiv gesteigertem Betriebe mit dem Unterricht in der alten

1) (A. W. 2), S. 104.

Kultur zu völliger Vereinigung und innerer Harmonie gebracht werden.“[1]) Diese Forderung schließt den Hinweis auf den griechischen Ursprung der wissenschaftlichen Mathematik in sich ein. Ich unterschreibe jedes Wort, wenn F. Lindemann[2]) sagt: „. . . als ob die Ideale der Menschheit in den künstlerischen und politischen Leistungen und in der sprachlichen Ausdrucksweise des Altertums so gut wie erschöpft wären! Die rein wissenschaftlichen Errungenschaften des Altertums stehen allerdings zurück gegen jene anderen Gaben, die uns dasselbe so reichlich darbietet; aber in einer Wissenschaft, in der Mathematik und besonders der Geometrie haben die Griechen für alle Zeiten Unvergängliches geleistet, diese eine ist ein unzerreißbares Band, das unser modernes Denken direkt mit dem antiken verknüpft, nicht verwittert durch die Stürme der Zeiten, nicht ausgegraben aus dem Schutte der Ruinen, sondern in unzerstörbarer Frische noch heute brauchbar, wie vor zweitausend Jahren.“

Die Folge der Beschäftigung mit der antiken Mathematik wird eine weitere Erkenntnis sein. „Wenn es“, sagt O. Spieß,[3]) „als ein Hauptmittel der Veredlung gilt, sich in die Werke jenes hochsinnigen Volkes zu versenken, so möge man nicht vergessen, daß der Mann, in dem man gern die Blüte des Griechentums verkörpert sieht, keinen Nichtmathematiker ins Allerheiligste seiner Gedanken zulassen wollte. Überhaupt scheint das Verständnis für Mathematik im Altertume weit mehr als notwendiger Bestandteil der Bildung angesehen worden zu sein, als in unseren Zeiten. Sicher ist, daß die Feinheit des griechischen Geistes nirgends in glänzenderem Lichte erscheint, als bei der Entdeckung des Irrationalen durch Pythagoras oder bei der Kreismessung Archimeds.“ Es ist sehr notwendig, daß man heutzutage, wo die Mathematik noch oft genug bei der höheren Bildung als notwendiges Übel aufgefaßt wird, auf diese altgriechische Ansicht über höhere Bildung nachdrücklich hinweist.[4])

Auch die wichtige Rolle, die der Mathematik bei der Durchbildung der großen griechischen Philosophen zufiel, muß den Schülern zur klaren Erkenntnis gebracht werden, wenn anders sie diese Philosophie, insbesondere diejenige Demokrits und Platos, verstehen lernen sollen. „Die Hoffnung“, sagt Wernicke,[5]) „aus dem Meere des zeitgenössischen Irrtums auftauchen zu können, schöpften beide Männer aus dem Gebiete menschlichen Wissens, welches allein etwas Gesetzliches darzubieten schien, aus der Mathematik, im besonderen

1) (A. R.), S. 12.
2) Rektoratsrede; S. 11.
3) (O. S.), S. 242.
4) Vgl. auch: W. Lorey: „Mathematik und klassisches Altertum“ in der Zeitschrift für Gymnasialwesen 1904. Ferner den Vortrag von F. Poske auf der Posener Hauptversammlung des „Vereins z. Förd. d. math. u. naturw. Unterrichts“ Pfingsten 1900.
5) (A. W. 3), S. 738.

aus der Geometrie, und aus den spärlichen Anfängen eines durch die Mathematik getragenen Wissens von der Natur, im besonderen der Astronomie."

Dann ein weiteres. Wie oft wird heutzutage jemand, der als Lehrling in die Werkstätten der Wissenschaft eintritt, den Wert dessen, was dort geschaffen wird, nur nach dem nüchternen Gesichtspunkte der praktischen Verwendbarkeit beurteilen. Da ist es gut, wenn jeder Gebildete erfährt, daß schon die Griechen anders dachten. Zwar ist kein Zweifel, daß sich die alleräItesten mathematischen Begriffe und Kenntnisse durch die praktischen Bedürfnisse des Lebens allmählich entwickelt haben. Mit zunehmender Kultur trat aber der idealistische Gesichtspunkt bewußt geistiger Forschungsarbeit mehr und mehr in den Vordergrund. So bestand die griechische Mathematik aus zwei Strömen, die sich zeitweise in Archimedes vereinigten — nämlich dem Strome, der von den griechischen Philosophen zu Euklid führt, und dem anderen, der von der Logistik beginnend sich bis zu Diophant und Ptolemäus' Almagest erstreckt. Jedenfalls entquoll keiner von ihnen nur praktischen Forderungen. In der griechischen Wissenschaft spiegelt sich auch hier der Geist des Aristoteles wieder, der den Ausspruch getan hat: „Überall nur auf das Vorteilhafte zu sehen, ist des Freien und Edelsinnigen unwürdig." Die Wahrheit dieses Wortes recht oft durch einen Blick auf die Geschichte zu erweisen, hat in unserer Zeit des alles durchsetzenden Materialismus unzweifelhaft ethischen Wert. —

Wir haben aus dem Munde vieler Schulmänner genug Worte des Lobes und Preises für Euklid vernommen. Wir haben gesehen, daß seine „Elemente" noch vor Jahrzehnten in überschwenglicher Weise als geradezu ideales Unterrichtswerk verherrlicht wurden. Und doch mußten wir solche zur Zeit des Neuhumanismus herrschende übertriebene Wertschätzung verurteilen; denn da Euklids „Elemente" ja ursprünglich als eine Art Hochschulbuch für ältere Jünglinge geschrieben worden sind, können sie heute ebensowenig als Lehrbuch für den Elementarunterricht dienen, wie damals. Auch in England hat man das jetzt einzusehen begonnen.

Dennoch soll der Schüler erfahren, daß die eigentliche literarische Geschichte der Mathematik mit den „Elementen" des Euklid einen ersten Höhepunkt erreicht. Euklid gibt den Abschluß der von Plato und Eudoxus herrührenden Entwicklung und ist eben darum immer wieder abgeschrieben und dadurch uns erhalten worden. Wie groß Euklids persönliches Verdienst ist, ist nicht zu erkennen. Er vermittelte der Nachwelt das Ideal der logischen Schärfe, dem aber z. B. neuere italienische Lehrbücher oder D. Hilbert wesentlich näher kommen. So geht denn unsere Meinung dahin, daß Euklid in unseren Tagen zwar nicht mehr dem mathematischen Unterrichte zugrunde gelegt werden soll, daß er aber wegen seiner hervorragenden Bedeutung für die ganze Entwicklung mathematischen Denkens geschichtlich zu würdigen ist.

Wir hatten früher darzutun gesucht, daß die Geschichte der Mathematik die hohe kulturelle Bedeutung des klassischen Altertums in neuem Lichte zeigt. Im Anschluß hieran möchten wir an einer Frage nicht achtlos vorübergehen, die seit Anfang dieses Jahrhunderts wieder recht modern geworden ist. Das ist die Frage: Darf unsere höhere Schule noch immer klassischen Bildungsidealen nachstreben? Ist es nicht gerade die wachsende Bedeutung der realistischen Fächer, die zur Verneinung dieser Frage drängt? Ja, leider wird diese Frage auch heutzutage von einseitigen Vertretern der verschiedenen Formen des realistischen Gymnasiums entschieden verneint. Und doch mit Unrecht.

Wir sind trotz vieler Ausgleichsversuche eben noch immer von einem Schulfrieden recht weit entfernt. Das liegt wesentlich mit an solchen Kämpfern, die sich um einzelne stark ausgeprägte Persönlichkeiten scharen und Fanatikern gleich alles niederringen wollen, was nicht zu ihrer Fahne schwört. In Fragen des höheren Schulwesens kommt man aber nicht durch Revolution, sondern durch Reform vorwärts, und es ist zu begrüßen, wenn angesehene Organe und Vereinigungen, an historischer Kontinuität festhaltend, jede berechtigte Eigenart anerkennen, sich dem Interesse des Ganzen unterordnen und nur allmähliche Anpassung an die Forderungen der Zeit erstreben. Zu diesen Vereinigungen gehört der aus der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte hervorgegangene Deutsche Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.[1]) Er hat mit seinen Vorschlägen nie einen einseitigen Standpunkt vertreten, hat im Gegenteil den Begriff der „spezifischen Allgemeinbildung", d. h. einer auf besonderen, aber eben deshalb ihrer Bedingtheit sich bewußten Allgemeinbildung sich zu eigen gemacht, einen Begriff, den schon die Naturforscherkommission geprägt hatte. Solcher Allgemeinbildung muß die Zukunft gehören. Darum wollen wir das klassische Ideal auch heute noch hochhalten. Es leuchte auch im zwanzigsten Jahrhundert denen voran, die es sich in freiwilliger Wahl zum Leitstern erkoren haben. Nur soll es sie nicht auf Irrwege führen, sie nicht der modernen Zeit und ihren Aufgaben entfremden. Und vor allem soll keine undurchsichtige Scheidewand errichtet werden zwischen klassischer und moderner Seite! Mag auch der Einzelne diesseits oder jenseits der Grenze bleiben, die wir nicht verwischen wollen, so soll er doch dem Nachbar gern die Hand reichen und ihm Achtung zollen, weil er ihn schätzen gelernt hat.

Zutreffend sagt A. Riehl: „Wir haben aufgehört, dem Altertume

1) „Schriften" bei B. G. Teubner. Bis jetzt 14 Hefte. Vgl. auch A. Gutzmer „Die Tätigkeit der Unterrichskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte" Gesamtbericht (Leipzig 1907).

gegenüber vorzugsweise, geschweige denn ausschließlich einen literarisch-ästhetischen Standpunkt einzunehmen. Wir stehen heute dem Altertume als Historiker gegenüber.[1]) Und eben darum ist das humanistische Studium heute realistisch geworden, weil es historisch geworden ist, — wie aus dem gleichen Grunde das realistische in dem Maße, als es historisch geworden ist, humanistisch geworden ist. Humanismus und Realismus bilden heute keine Gegensätze mehr; sie haben sich wiedergefunden auf dem Boden der alten Kultur, aus dem sie wie alle die anderen wesentlichen Besitztümer unseres geistigen Erbes erwachsen sind."[2]) Die höhere Schule soll nun und nimmer Fachbildung geben, es soll zu einer Allgemeinbildung erziehen. Und es gibt, um mit Riehl zu reden, nur eine Allgemeinbildung: „das Aufgeschlossensein der Fähigkeiten unseres Geistes und Gemütes für alles, was groß ist in der Natur und im Wesen des Menschen, und sie äußert sich auch, gleichviel von welcher Grundlage aus sie erreicht worden ist, überall in der nämlichen Weise, als miterlebendes Verständnis für alle geistigen Interessen der Menschheit in der Vergangenheit und in der Gegenwart, um die Zukunft darnach vorzubilden, vorzubereiten."

Solches Verständnis zu erwecken und zu entwickeln ist das Ziel des Unterrichts an den höheren Schulen. Und dieses Ziel wird eben nicht bloß durch Vertiefung in die fertig vorliegenden Ergebnisse der einzelnen Wissenschaften erreicht, sondern wesentlich auch durch die das Gemüt erhebende, liebevolle Vertiefung in die Arbeit von solchen „Menschen", die ihr Leben an die selbstlose Ergründung der Wahrheit gesetzt haben. „Insofern wirkt die geschichtliche Behandlung der exakten Lehrfächer ganz zweifellos humanistisch"' sagt Pietzker.[3]) Ähnlichen Gedanken gibt O. Spieß Raum; daher fordert er mit Entschiedenheit humanistischen Betrieb jedes Unterrichtsfaches, insbesondere auch der Mathematik, dabei immer betonend, daß ihm die Frage, was gelehrt werde, weniger wichtig zurzeit scheine, als wie gelehrt werde. So warnt er davor, den Lehrstoff um des praktischen Gebrauches willen oder im Sinne des Spezialisten zu behandeln, vielmehr immer im Rückblicke auf die Entwicklung der Gesamtwissenschaft, immer so, daß der tiefere Sinn, der in ihr ruht, klar erfaßt werde. Die Mathematik ist ihm eine humanistische und darum idealistische Wissenschaft, die „mit den Abstraktionen, aus denen

1) (A. R.), S. 30.

2) Dieser Gedanke ist auch das Leitmotiv der Arbeit eines Historikers im Jahresberichte des Kgl. Gymnasiums zu Dresden-Neustadt (1904). Dort sagt E. Ulbricht: „Den reiferen Schülern muß das Altertum vorzugsweise historisch dargestellt werden, im Geiste Niebuhrs; die ästhetisch-literarische Behandlung kann daneben auch zu ihrem Rechte kommen."

3) Siehe S. 62.

sie ihr Netz spinnt, die großen Probleme der Welt auf ihre einfachste Form bringt, indem sie alles Unwesentliche abstreift und dadurch jene dem Angriff zugänglicher macht". Dieser tiefere Sinn der Mathematik lasse sich nun recht klar erkennen durch das Studium ihrer Geschichte. „Aus zarten Wurzeln sehen wir den heute gewaltigen Baum heranwachsen, an dessen Gedeihen der bohrende Erkenntnisdrang, die künstlerisch spielende Phantasie und das praktische Bedürfnis in gleicher Weise Anteil haben. Da sieht man, wie die schärfsten Geister einer Epoche gegen eine hartnäckige Schwierigkeit Sturm laufen, bis diese überstiegen oder wenigstens umgangen ist. Da verfolgt man, wie der mathematische Gedanke um Ausdruck ringt, wie er sich langsam eine Sprache schafft und wie mit der Vervollkommnung der Form wieder der Inhalt wächst. Und wer die Blicke etwas weiter schweifen läßt, erkennt, wie in der Spezialgeschichte sich der Zeitgeist spiegelt. Die Zeiten metaphysischen Hochflugs, der kritische Rückschlag, der Realismus, die scholastische Unfreiheit, sie alle drücken auch der Mathematik ihren Stempel auf. Ja, gelegentlich steigt die Wissenschaft auch von ihrer Höhe herab in die Arena der Öffentlichkeit, um im Streit der Prinzipien das entscheidende Gewicht in die Wagschale zu werfen. Immer wenn das reine Denken seine Triumphe erkämpft, da tritt die Mathematik auf den Plan und zeigt die Macht ihrer Waffen."[1])

So hoffen wir mit Spieß eindringlich die Überzeugung geweckt zu haben, daß Mathematik und Humanismus keine Gegensätze sind,[2]) daß sich vielmehr die Mathematik sehr zum eigenen Vorteil dann humanistisch betreiben läßt, wenn man sie nicht ganz loslöst von ihrer Geschichte.

4. Allmähliches Wachsen formaler und exakter Wahrheiten.

Für den Schüler nimmt die Mathematik unter allen seinen Unterrichtsfächern eine Ausnahmestellung ein, die wir jetzt besprechen müssen. Um es kurz zu sagen, liegt das daran, daß sie ihm bei ungeeigneter Behandlung nicht so menschlich näher tritt, daß sie ihm so leicht als ein starres Gebilde ohne Leben und Seele erscheint. Wer dieses Gebilde geformt hat, das er im günstigen Falle bestaunt und bewundert, erfährt er nicht. Es ist eben da, so wie es ihm sein Lehrbuch beschreibt, wie es ihm der Lehrer erläutert. Strenge Ordnung herrscht in ihm. Ein Satz reiht sich da wohl folgerichtig an den anderen, zwingt den Schüler in

1) (O. S.), S. 241—242.

2) Sehr empfehle ich, die Ausführungen über „das humanistische Gymnasium und die Mathematik" von E. Tischer zu lesen, die a. a. O. Seite 212 ff. zu finden sind. Auch auf die Vorrede zu H. E. Timerding in „Die Erziehung der Anschauung" (Leipzig 1912) sei verwiesen.

den Bann logischen Denkens und nötigt ihm Achtung ab vor all den formalen Wahrheiten, die er als solche erkennen mußte. So lebt er sich wohl zuletzt in den Gedanken hinein, daß diese Wahrheiten bis zu einem gewissen Grade selbstverständlich seien, daß jeder bei scharfem Nachdenken von selbst auf sie hätte kommen müssen. Sein Geist klettert an einer langen, wohlgefügten Kette stetig empor — ohne eine Ahnung davon zu haben, daß es manchmal der heißen Arbeit von Jahrhunderten bedurfte, um ein Glied mit dem folgenden sicher und dauerhaft zu verbinden. Während er in jedem anderen Lehrfache, selbst in der Physik und Chemie, nachdrücklich darauf hingewiesen wird, daß der Mensch seine Erkenntnis erst nach langem Ringen sich erwarb, daß es oft des Lebenswerkes eines Genies bedurfte, um auch nur einen Schritt vorwärts zu kommen, wähnt er die Mathematik als eine Wissenschaft, die hierin eine Ausnahme macht. Daß sie irgendwer irgendwann einmal erfunden haben müsse, ist ihm ja wohl klar, aber welche Summe von Geist und Mühe erforderlich war, auch nur das zu ersinnen, was er später als leichte und einfache Tertianerweisheit belächelt — das ahnt er nicht.

Und doch scheint mir gerade darin ein wertvolles Bildungsmittel zu liegen, daß man den Schüler auf das allmähliche Wachsen auch aller formalen und exakten Wahrheiten hinweist, also darauf, daß die Frucht der Erkenntnis in keiner Wissenschaft dem Menschen mühelos in den Schoß fällt, daß immer erst geackert und gesät werden muß, wenn später, oft erst nach vielen Menschenaltern, geerntet werden soll.

Ist es aber möglich, das zu erkennen, ohne dann und wann einmal einen Blick auf die Geschichte der Mathematik zu werfen? Ist es möglich, ohne zuweilen die rein mathematischen Entwicklungen und Rechnungen zu unterbrechen, um zu zeigen, welche Kluft so manches Mal jahrhundertelang klaffte zwischen einfachen Sätzen, die heute so selbstverständlich eng zueinander zu gehören scheinen?[1]) Beispiele hierfür ließen sich genug anführen. Wir finden solche unter anderem bei Treutlein, der daran erinnert, „daß Menelaus und Ceva um volle anderthalb Jahrtausende, Pascal und Brianchon immer noch um fast zwei Jahrhunderte in ihrer Lebenszeit von einander entfernt sind, während doch der Gehalt ihrer Sätze diese so außerordentlich nahe aneinanderrückt, ja unter einen Augpunkt rücken läßt". Auch auf die Lehre von den Kegelschnitten weist Treutlein hin und empfiehlt „Würdigung ihres durch lange Zeiträume getrennten wiederholten geschichtlichen Auftretens, erstmals in der Schule des Plato und bei Apollonius, und wiedererweckt vom langen Schlafe durch Kepler und Newton, diese zwei Männer, durch deren Leistungen jene schönen

1) Vergl. auch P. Biedermann (Progr. Dresden 1894): „Es verdeckt sich gerade beim Unterricht in der Mathematik sehr leicht, wie ihre Gesetze gefunden worden sind."

Schöpfungen des menschlichen Geistes eine weit über das Gebiet der reinen Geometrie hinausgreifende kosmische Bedeutung erhielten".

Ganz ähnlich steht es mit den Winkelfunktionen, die in jedem Lehrbuch so eng beieinander stehen, während sie doch, wenn man ihre Geschichte verfolgt, keineswegs ihre Nachbarschaft rechtfertigen können. Ja, allein vom Sinus behauptet Treutlein, daß sein Wesen nur durch geschichtliche Erklärung vollauf verstanden und gewürdigt werden kann, daß sein Name dasteht „als zusammenhaltendes Element für nicht weniger als fünf Kulturgebiete, ein deutlicher Denkstein des inneren Zusammenhanges langhundertjähriger Entwicklung".

Wie schnell setzt der Unterricht neben den Begriff der positiven Zahl den der negativen. Was ist natürlicher, als daß der Schüler glaubt, beide Begriffe seien ebenso schnell und selbstverständlich von jeher beieinander gewesen. Aber er würde auch irren, wenn er etwa die negativen Zahlen als die ausschließliche Erfindung eines klugen Mannes ansehen wollte. Vielmehr hat sich in einer lang andauernden Entwicklung die Benutzung der negativen Zahlen den Mathematikern gleichsam von selbst aufgedrängt, und erst als man schon lange mit ihnen operierte, im 19. Jahrhundert, traten die Betrachtungen über ihre Widerspruchslosigkeit hinzu.[1]) Und wenn man dem Schüler auseinandersetzt, daß die Zeichenregel $(-a) \cdot (-b) = +ab$ nicht eigentlich beweisbar ist, so tut man gut, solche geschichtliche Betrachtungen mit einzuflechten. —

Und welche Fülle von Belehrung bietet eine historische Behandlung der Zahlensysteme! Jedes Kind ist heute schon eingeweiht in die indische Stellenbewertung und lernt mit Leichtigkeit Zahlen aussprechen und schreiben, von deren Größe es kaum eine Ahnung hat. Gerade die Zahlensysteme müßten unbedingt geschichtlich behandelt werden, spätestens auf der Oberstufe, um dem Schüler zum Bewußtsein zu bringen, daß gerade in der exakten Wissenschaft das scheinbar Einfachste und Natürlichste „gar nicht so selbstverständlich ist, sondern in langjährigem Mühen errungen, erarbeitet sein will —, daß stetes Streben aber endlich doch auch seine Krönung findet!"[2]) Wer sähe nicht und fühlte nicht — fügt Treutlein hinzu — daß hier pädagogischer Gewinn bar gemünzt auf flacher Hand liegt? —

Daß wir viel zu wenig den Werdegang der mathematischen Wissenschaft betonen, darauf weist auch F. Lindemann hin. „Wir lernen zwar", sagt er, „heute ein Stück antiker Geometrie, aber ohne uns

1) F. Klein, Elementarmathematik von höherem Standpunkte aus. (Leipzig 1908) I, S. 63 ff.

2) (P. T.), S. 18. Ganz ähnlich drückt sich H. Hankel aus (Gesch. d. Math. Lpz. 1874, S. 190): „. . . die Geschichte gibt uns die Lehre, daß nur unter besonders günstigen Verhältnissen die einfachsten und natürlichsten Methoden auch die frühesten sind." Auch auf die Vorworte im Lehrbuche von Schwab-Lesser und dem von Wallentin sei verwiesen. [Hier angeführt auf S. 37.]

dessen bewußt zu werden; wir lernen auch ein Stück etwas modernerer Trigonometrie und Algebra, aber wo bleibt der Zusammenhang mit der Vergangenheit, wo der Ausblick auf die großartige Entwicklung unserer heutigen wissenschaftlichen Mathematik, wo die Beziehung zu jenen anderen Kulturelementen, die an unserer Schule so sorgsame Pflege finden?"

5. Die Mathematik ist nicht abgeschlossen. Sie wächst fortdauernd in die Höhe, Tiefe und Breite und beseitigt in ihr bestehende Unklarheiten.

Vielverbreitet ist unter den Schülern ein weiterer Irrtum, von dem man sich durch Befragen einer Klasse leicht überzeugen kann. Sie halten die Mathematik, wie sie auch entstanden sein mag, als etwas Abgeschlossenes, als einen Bau, dem längst der Schlußstein eingefügt wurde. Daß ihre Anwendungen zahlreich sind und daß vielleicht durch Probleme der Gegenwart und Zukunft noch weitere Anwendungen möglich werden, liegt ihnen gewiß im Bereiche der Wahrscheinlichkeit. Daß sie aber noch heute im Wachsen begriffen ist, und es ewig bleiben wird, wie könnte ihnen das anders beigebracht werden, als durch Schlußfolgerungen, die aus geschichtlichen Vergleichen erwachsen? Wächst doch die Mathematik überhaupt nur durch „historische Kontinuität, indem man alte Probleme mit neuen Methoden durchdenkt".[1]) Gewiß kann der Schüler in die Mehrzahl der Probleme, die heute nach Neugestaltung ringen, die in den Werkstätten der Wissenschaft ihrer Vervollkommnung harren, nicht eingeführt werden, aber er soll wenigstens erfahren, daß es schon „hinsichtlich der prinzipiellen Untersuchungen in der Mathematik keinen letzten Abschluß gibt."[2]) Er soll wissen, daß sich die Mathematik entwickelt, „so wie ein Baum, der nicht von den feinsten Verästelungen der Wurzeln beginnend, lediglich nach oben wächst, sondern der erst während er nach oben hin seine Zweige und Blätter immer mehr ausbreitet, auch nach unten zu seine Wurzeln tiefer und tiefer treibt."[3]) Natürlich ist solche Erkenntnis der Oberstufe vorzubehalten, sie darf aber aus dem Kreise des zu Lehrenden nicht ausgeschaltet bleiben. Freilich ist es bequemer, auf solche Belehrung zu verzichten und den Zweifel dort nicht zu wecken, wo er zuvor keine Stätte hatte. Aber eine Wissenschaft, die Anspruch auf absolute Glaubwürdigkeit erhebt, muß mit absoluter Ehrlichkeit gelehrt werden und sie wird bei keinem verständigen Schüler deshalb an Ansehen einbüßen, weil auch für sie, die Königin unter den Wissenschaften, zugestanden werden muß, daß unser Wissen von ihr Stückwerk ist.

1) F. Klein, „Riemann", Vortrag auf der Naturforscherversammlung Wien 1894.
2) F. Klein, „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" I, S. 38.
3) F. Klein, ebenda. Vergl. auch (E. L.), S. 24.

Noch mehr wird der Schüler staunen, wenn ihm zum Bewußtsein gebracht wird, daß „die Mathematik noch eine junge Wissenschaft ist, mit all den Fehlern und Vorzügen, die jungen Wissenschaften eigen sind". „Mit dem Nachweis, dem historischen Nachweis, daß auch in der Mathematik der Irrtum und die Kontroverse ihre Rolle und ihre Bedeutung haben", da schwindet jene Kluft zum großen Teile, die sie von anderen Wissenschaften, insbesondere auch von den Naturwissenschaften trennt. „Wenn hierbei von Irrtümern gesprochen wird, so sind nicht jene gemeint, die bei einem jeden, der sich mit Mathematik beschäftigt, mitunterlaufen können und als solche sofort zu erkennen sind, es sind auch nicht jene Verirrungen gemeint, die zu allen Zeiten stattgefunden haben und einen breiten Raum in der Geschichte der Mathematik einnehmen, jene Verirrungen, die sich etwa auf die Quadratur des Kreises ... beziehen —, es sind vielmehr hier unter mathematischen Irrtümern jene zu verstehen, die einem ganzen Zeitalter eigentümlich sind, ihm ein eigenes Gepräge geben. So gering die Anzahl derselben zunächst zu sein scheint, so bedeutend vermehrt sie sich bei einem tieferen Eindringen." [1]) Inwieweit der Schüler von diesen etwas erfahren soll, kann zweifelhaft erscheinen; immer erscheint ein gelegentlicher Hinweis nützlich.

Bei Behandlung der Reihenlehre kann z. B. der vielumstrittenen unendlichen Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$ gedacht werden, die die Mathematiker des vorletzten Jahrhunderts soviel beschäftigte. Daß ihr Guido Grandi im Jahre 1710 in Unkenntnis des Wesens der Konvergenz den Wert $\frac{1}{2}$ zuerteilte und daß kein geringerer als Leibniz im Jahre 1713 auf metaphysischem Wege zu demselben Ergebnisse kam, daß dieses Ergebnis selbst von Euler gutgeheißen und daß von ihm die Leibnizsche Beweisform als „satis ferma" anerkannt werden konnte, ist doch ein sehr lehrreicher Beleg für das Vorkommen von Irrtümern, die als solche zu erkennen, der logischen Bildung des reiferen Schülers sehr zugute kommt. Man versäume auch nicht, den interessanten Scheinbeweis als nichtig abzulehnen, der aus der Potenzentwicklung $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots$ durch die Substitution $x = 1$ den Wert $\frac{1}{2}$ für $1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ folgern will.

Wird dem Schüler auch die Erkenntnis, daß diese Reihe überhaupt keine bestimmte Grenze hat, ohne Nachhilfe kaum zuteil werden, so wird er wieder an anderen Beispielen sich wundern, daß ein Fehler nicht schon sehr bald, nachdem er gemacht wurde, aufgedeckt wurde. Das trifft beispielsweise zu für einen Fehler der alten Ägypter, die den Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks durch das halbe Produkt aus Basis und Schenkel berechneten. Und warum wurde dieser Irrtum erst

1) Martin Krause, Rektoratsrede „Über die Entwicklung der höheren Analysis" (Dresden 1894); S. 20. 21.

viel später durch die Griechen entdeckt? Weil die ägyptischen Feldmesser, vielleicht instinktiv, bei ihren Vermessungen möglichst spitze Dreiecke wählten, wo der Unterschied des wahren und des falschen Ansatzes nicht groß ist. Es bedarf also oft nur einer geschickten Abänderung oder Spezialisierung eines Problems, um bisher gültige Anschauungen ad absurdum zu führen, und so muß schließlich zugestanden werden, „daß Widersprüche immer die Schuld der Mathematiker selbst sind; und daß sie immer nur aus einem Mangel an Konsequenz in der Feststellung der Begriffe entstehen.“[1]) So darf denn Hankel mit Recht behaupten, daß zwar in anderen Wissenschaften eine Generation das niederzureißen pflegt, was die andere gebaut hat, und daß diese aufhebt, was jene gesetzt hat, in der Mathematik allein aber jede Generation ein neues Stockwerk auf den alten Unterbau[2]) setzt.

Ich halte es für überaus wertvoll, dem Schüler klar zu machen, daß dieser Satz Hankels nicht im Widerspruche steht mit dem Zugeständnisse vereinzelter Irrtümer, die uns die Geschichte lehrt, und die auch heute in den Bereich der Möglichkeit gehören. Man verweise zu diesem Zwecke den Schüler des Vergleiches wegen am besten zuerst einmal auf die Heil- und Rechtswissenschaft. Was könnten da schon wenige Jahrzehnte der jüngsten Zeit lehren! Bei aller Anerkennung des Fortschrittes im großen und ganzen muß man zugeben, daß sich Ansichten über das Wesen von Krankheiten oft schnell und gründlich umwandeln, daß sich Grundanschauungen in Rechtsfragen nicht selten in das Gegenteil umkehren, ganz abgesehen davon, daß bedeutende Vertreter dieser Wissenschaften oft zu gleicher Zeit zu entgegengesetzten Schlußfolgerungen kommen. Auf die Wandlung religiöser Lehren und kirchlicher Dogmen wird am besten nicht eingegangen; hingegen darf von der Philosophie nicht verschwiegen werden, daß sie trotz der gegenteiligen Ansicht Hegels nur durch Irrtümer und deren Erkenntnis und Bekämpfung lebt. „Überall hat sie die nächstliegenden, entweder durch alltägliche Beobachtung oder durch ein dringendes geistiges Bedürfnis gegebenen Probleme lebhaft angegriffen, oft schon für bewältigt gehalten, um nach kurzer Freude mit Enttäuschung zu sehen, daß jene Probleme gleich Felsenburgen noch immer in unerreichbarer Ferne stehen.“[3]) Hat sie es je verhindern können, daß der Schüler umstürzte, was der Meister durch die Arbeit eines Menschenlebens aufbaute? Waren die Siege, die sie im unermüdlichen Ringen nach Wahrheit erfocht, von längerer Dauer? Immer war die Revolution ihr Schicksal und nur im Kampfe konnte sie ihr Reich verteidigen, bis ein neuer Eroberer mit neuen Waffen kam, um es in vergänglicher Überlegenheit zu zerstören.

---

1) Bessel, Brief an Gauß. Königsberg 12. 1. 1812.
2) H. Hankel, Akademischer Vortrag. Tübingen 1869, S. 34.
3) Ebenda S. 20, 21.

Kämpfend sind auch Physik und Chemie durch die Jahrhunderte geschritten. Auch ihnen war es nur auf dem Umwege über Irrtümer beschieden, zur Wahrheit vorzudringen. Ihr theoretisches Lehrgebäude baut sich auch heute noch auf Hypothesen auf, die unausgesetzt nachgeprüft und verbessert, ja nicht selten durch wesentlich neue ersetzt werden. Es genüge, an die neuesten Theorien der Elektrizitätslehre zu erinnern, die sich gerade in unseren Tagen in einem Zustande der Entwicklung und Umwertung befinden. Ja, aus vorausgegangenen Irrtümern sind physikalische Forschungen und Entdeckungen oft erst ganz zu verstehen und voll zu würdigen. Immer muß im Auge behalten werden, daß dort, wo die Beobachtung und Erfahrung den Ausgangspunkt bilden, auch bei unseren jetzt so verfeinerten Methoden und Hilfsmitteln der Irrtum der stete Begleiter des Forschers bleiben wird. „Was vor fünfzig Jahren galt, hat heute nur noch historischen Wert und was heute gilt, dürfte zum großen Teile in ebensoviel Jahren vergessen und veraltet sein."[1])

Ganz anders steht es in der Mathematik, die zwar in der Anschauung ein wichtiges Hilfsmittel, nicht aber in der Beobachtung von Ereignissen die Quelle ihrer Erkenntnis hat. Mag der Schüler, ehe er das Gymnasium verläßt, eine Ahnung davon mit hinaus nehmen, daß, um noch einmal mit Kästner zu reden, die Geschichte der Gelehrsamkeit großenteils Geschichte des menschlichen Wahns ist, die der Mathematik hingegen nur in geringem Grade!

Die Mathematik steht aber auch darin einzig da, daß in ihr die Beseitigung von Mängeln und Unrichtigkeiten ohne Ausbruch von Schärfe und Leidenschaftlichkeit vorgenommen wird. „Man vergleiche" nur, sagt Wernicke,[2]) „die ruhige Sachlichkeit der wissenschaftlichen Erörterungen auf unserem Gebiete mit dem oft so lebhaftem Austausche der Meinungen bei den Vertretern der sogenannten Geisteswissenschaften, wo es doch angeblich der Geist nur mit sich selbst zu tun hat. Gerade die Erkenntnis der Gesetzmäßigkeit in der Natur führt zu jener ‚Windstille des Gemütes', die schon Demokrit empfunden." Ganz in diesem Sinne sagt F. Klein[3]): „Wir haben den Vorzug, das einfachste Fach zu sein, bei dem die Erkenntnis der Wahrheit am wenigsten durch die Leidenschaften der Menschen getrübt wird, wo vielmehr eine objektive Verständigung über die jeweiligen Erträgnisse der Wissenschaft so gut wie vollständig erreicht werden kann. Wir stehen oberhalb aller menschlichen Parteien." Wenn der Unterricht irgendwo ungezwungen derartige ethische Belehrung einfügen kann, mag er es ja nicht unterlassen.

---

1) Martin Krause, Rektoratsrede (Dresden 1894) S. 20.

2) (A. W. 1), S. 15.

3) Vortrag auf der Brüsseler Weltausstellung 1910 = Einführungswort zum dritten Bande der IMUK-Abhandlungen, S. VI.

Wenn ich also der Überzeugung bin, daß dem Schüler die Irrgänge der Mathematik nicht verschwiegen werden sollen, so bin ich doch weit entfernt, dies schon für die untere Stufe anzuraten. Ich halte es mit Ferd. Rosenberger,[1]) wenn er ausführt: „Es ist richtig, daß jeder Schüler zuerst die Wissenschaften autoritativ und dogmatisch aufnehmen, daß er von sicheren oder wenigstens von sicher gehaltenen Fundamenten aus geführt werden muß, wenn er überhaupt Sicherheit und Klarheit in seinen Anschauungen erlangen soll. Jedenfalls darf der Schüler in der ersten Aufnahme des wissenschaftlichen Materials nicht dadurch gestört werden, daß er die theoretischen Vorstellungen gleich von vornherein in allen den Lichtern sehen lernt, in denen sie jemals seit ihrer Entwicklung geschillert, und daß ihm gleich von vornherein klar gemacht wird, wie viel und wie stark sich auch die exakten Wissenschaften im Laufe der Zeit geirrt haben. Aber einerseits besteht doch die Geschichte nicht bloß aus Kritik und kann sich derselben, wo sie nicht angebracht erscheint, wohl enthalten; und andernseits darf auch die Begrenzung des Schülers auf eine bloß dogmatische Aufnahme der theoretischen Wissenschaft nicht zu weit ausgedehnt werden, wenn der Schüler nicht zeitlebens nur Schüler bleiben und immer nur als Handwerksgeselle, nie als Meister arbeiten soll."

Wir schließen, indem wir uns die folgenden schönen Worte Schellbachs zu eigen machen: „Die unendliche Arbeit, die der Mathematiker übernimmt, ist die, daß er immer mehr und mehr den Irrtum ausschließt und sich so dem letzten Kern der Wahrheit nähert. Dies ist der langsame aber sichere Weg, auf dem der Mathematiker zur Wahrheit fortschreitet. Uns ist es jedoch wahrscheinlich, ja wir müssen es wünschen und hoffen, dieser Weg führe zu einem unerreichbaren, aber immer heller strahlenden Ziele. Ähnlich dachte auch Lessing, wenn er von sich selbst sagt: Wenn Gott in seiner Rechten alle Wahrheit und in seiner Linken den einzigen immer regen Trieb nach Wahrheit verschlossen hielte und spräche zu mir: wähle! Ich fiele ihm in Demut in seine Linke und sagte: Vater gib! die reine Wahrheit ist ja doch nur für Dich allein!"

Nun gibt es aber in der Mathematik noch in ganz anderem Sinne einen „Irrtum", den wir nicht mit Stillschweigen übergehen möchten, da gerade die höhere Schule an seiner Bekämpfung ein gut Teil mitwirken kann.

Zu allen Zeiten wird es nämlich an solchen nicht fehlen, die aus Mangel an Einsicht oder mathematischem Verständnis

1) Ferd. Rosenberger, „Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums", Abhdlgn. d. Gesch. d. Math. IX, Leipzig 1899.

erwiesene Wahrheiten für Irrlehren erklären. Auch heute noch leugnen viele die Existenz einer innerlich einwandfreien nichteuklidischen Geometrie; auch heute noch plagen sich viele ab mit dem Grübeln nach Lösungen des Trisektionsproblems, wie ja auch die „Entdecker" des perpetuum mobile nicht aussterben. Wie erheiternd wirken die Mitteilungen Göttinger Gelehrter über die Zuschriften solcher „Mathematiker", die durch „Beweise" des Fermatschen Satzes den Wolfskehlschen Preis zu erringen wähnten! Nicht weniger erheiternd wirkt so manches, was H. Schubert in seiner hübschen kulturhistorischen Studie: „Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen" erzählt; daß beispielsweise ein „Zirkelquadrierer" von 1840 in seinem Buche Gott fortwährend dankt, daß er gerade ihn ausgewählt habe, die „langgesuchte, mit Inbrunst begehrte, von Millionen betastete Lösung des mathematischen Phänomen-Problems" zu finden. Ob wohl das Geschlecht der Zirkelquadrierer je aussterben wird? Nun der schon 1775 von der französischen Akademie veröffentlichte Beschluß, keine eingereichte „Lösung" mehr prüfen zu wollen, hat bis zum heutigen Tage nicht abgeschreckt und wird es auch künftig nicht tun. Man verschweige diese für die Intelligenz breiter Laienschichten nicht gerade schmeichelhafte Gewißheit seinen Schülern nicht!

Was auch sonst für „mathematischer Schund" in Lehrbüchern geboten wird, hält man kaum für möglich. Beim Studium alter Bücher fand ich so manche Probe. So verblüffte mich geradezu der zwanzig Seiten lange Anhang zu einem Buche, betitelt: „Die Arithmetik der Griechen" von Friedrich v. Drieberg (Leipzig 1819). Dieser Anhang bespricht „Fehler der Neueren" und bestreitet nahezu jede Errungenschaft der Mathematik, die in der nachklassischen Zeit gemacht wurde. Folgende Ausführungen, die ich herausgreife, sind zugleich ein lehrreicher Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Über die negativen Größen heißt es: „Wie ist es möglich, daß etwas kleiner ist als nichts, und doch eine Größe sein kann? Es lehren zwar einige: ein solches Nichts sei nicht nichts, sondern eine gewisse Art Etwas. Aber diese Erklärung von Nichts taugt nichts, denn aus nichts wird nichts." Die Regeln $(-)\cdot(-) = (+)$ und $(-)\cdot(+) = (-)$ werden durch folgende „Logik" für falsch erklärt: „Man müßte dann, ohne zu lügen, sagen können: Schulden mit Schulden multipliziert gibt Vermögen, und Schulden mit Vermögen multipliziert gibt Schulden. Denn ein Satz, der theoretisch wahr ist, muß es auch praktisch sein" (!) Seinem tiefen Groll gegen die sinnlosen Dezimalbrüche verleiht der Verfasser mit folgenden Worten Ausdruck: „Mein Gott! ist denn das Rechnen bei unserem so äußerst vollkommenen Ziffernsystem noch nicht bequem genug? und muß man einer solchen lächerlichen Bequemlichkeit so schamlos die mathematische Gewißheit opfern?" Ich will den Leser mit dem verschonen, was v. Drieberg über die Logarithmen, „denen man nie recht trauen darf", über die Irrationalzahlen, „die auch zur edlen Sippschaft der unmöglichen Zahlen gehören", u. a. m. für Weisheit auftischt.

Man wird den Schüler darüber aufklären, daß törichte Ansichten dieser Art durchaus kein überwundener Standpunkt sind, daß sie vielmehr alle Jahre wiederkommen können. Immer und immer wieder leiden vereinzelte, sonst vielleicht ganz vernünftige Menschen an mathematischen Wahnvorstellungen, die unheilbar sind, und die noch dazu nicht selten den Charakter ansteckender Krankheiten haben. Man kann daraus den unerfreulichen Schluß ziehen, daß der mathematische Unterricht für die Aufklärung der breiten Volksmassen noch recht wenig geleistet hat, daß hier für die Zukunft noch manches zu erhoffen steht. Und wenn der Schüler bei der Besprechung verständlicher geschichtlicher Irrtümer darauf hingewiesen wird, daß es eben auch einen Irrtum gibt, der wie eine finstere Gewalt unheilstiftend dahinschreitet, so hilft er vielleicht später im Leben ein wenig mit dazu, mathematischer Dummheit, die übrigens meist mit grober Anmaßung gepaart ist, gewisse Hemmungen entgegenzustellen.

Irrtümer dieser Art knüpfen sich nun nicht selten an die Geschichte solcher Probleme, die wegen ihrer Schwierigkeit und Eigenart eine gewisse Berühmtheit erlangt haben. Ihre Geschichte bringe man daher nicht nur so nebenbei und in Stichworten, sondern ausführlicher und vor allem im Zusammenhange. Ebenso wie es physikalisch lehrreich und bildend ist, wenn über das Perpetuum mobile oder über die Jahrtausende alten Bemühungen der Menschen, sich telegraphisch zu verständigen oder die Zeit zu messen, ein geschichtlicher Überblick gegeben wird, ist es nicht minder für die mathematische Durchbildung des Denkens wertvoll, wenn etwa für die Dreiteilung des Winkels, die „Quadratur des Zirkels", die Auflösung quadratischer Gleichungen oder das Ziffernrechnen usw. dasselbe geschieht, wenn dabei gezeigt wird, wie gewisse Irrtümer sich jahrhundertelang festsetzen konnten, um zum Teil erst in neuester Zeit endgültig zu verschwinden, wenn gezeigt wird, wie oft einfache Sätze, von deren Richtigkeit man schon längst überzeugt war, erst sehr spät einwandfrei bewiesen worden sind. „Es dürfte kaum ein zweites Problem geben", sagt Rudio,[1]) „welches sich gerade zur Einführung in das Studium der Geschichte der Mathematik so vortrefflich eignete, wie das Problem von der Quadratur des Zirkels, welches aus unscheinbaren Anfängen hervorgegangen, im Laufe der Jahrhunderte mit fast allen Disziplinen sich derart verkettete, daß schließlich zu seiner Lösung der gesamte Apparat moderner Wissenschaft aufgeboten und entfaltet werden mußte."

Es schadet auch nichts, wenn etwa bei der so wünschenswerten Prüfung stereometrischer Formeln auf ihre Dimension hin die Irrtümer aufgedeckt werden, die sich auf die Verbindung der vierten Dimension

1) F. Rudio, „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre" (Leipzig 1892) S. IV.

mit dem Spiritismus beziehen. Der mathematische Unterricht hat vielleicht um so mehr eine Verpflichtung hierbei, zwischen folgerichtiger Weiterführung formaler Bezeichnungen und unerlaubter Übertragung derselben auf Raumvorstellung oder Übersinnlichkeit scharf die Grenze zu ziehen, als noch in unseren Tagen nicht selten verirrende Behauptungen und Darstellungen an das Ohr des Schülers dringen.

6. Die mathematische Zeichensprache und ihre Entwicklung.

Mir scheint, daß der vielfach betonte Gegensatz zwischen Sprachwissenschaft und Mathematik schon darum nicht so groß ist, weil auch die Mathematik eine wunderbare, geistvoll ersonnene Sprache besitzt, deren Bedeutung für unsere Wissenschaft nur durch geschichtliche Einsicht klar erkannt werden kann. Wird diese „Sprache" auch mehr geschrieben, als „gesprochen", so besitzt sie doch, wie O. Spieß sagt, auch „ihre Grammatik und Syntax wie jede andere und es wäre für einen linguistisch geschulten Mathematiker eine Aufgabe, die Regeln der Algebra einmal vom sprachwissenschaftlichen Gesichtspunkte aus zu betrachten. Ihre ersten Anfänge finden wir in den Hieroglyphen der Ägypter, heute besitzt man in ihr ein wunderbares Instrument, das die kompliziertesten Vorstellungsreihen in wenigen Zeichen darzustellen erlaubt. Dabei ist diese Sprache lebendiger als man denkt, auch der Analyst sieht auf schönen Stil[1]) und strebt nach Eleganz[2]) seiner Formeln. Diese ganze Seite der Mathematik wird übrigens nach meiner Ansicht viel zu wenig hervorgehoben. Der Schüler bekommt die Algebra wie eine Schreibmaschine, deren Handhabung ihm gezeigt wird, ohne daß er über ihren Wert und ihr Wesen ins Klare käme. Man dürfte ihm aber an Beispielen nachweisen, daß die Gleichungen, die er ansetzt, nichts sind als gewöhnliche Sätze, geschrieben in einer höchst knappen Stenographie, die nach und nach durch immer weitergehende Abkürzung aus dem ursprünglich vollständig ausgeschriebenen Text herausgewachsen ist. Diese Einsicht wird ihm diese Symbolik weniger abstrus erscheinen lassen und ihn dazu bringen, in der Mathematik den Inhalt vom Ausdrucksmittel zu unterscheiden."[3])

Ähnlich regt auch Schellbach[4]) zur geschichtlichen Behandlung der mathematischen Zeichensprache an. „In der reinen Mathematik

1) Vergl. auch den Vorschlag von A. Peters (1826), mathematischen und sprachlichen Stil miteinander zu vergleichen (S. 56).

2) Sehr empfehlen möchte ich hierzu die Lektüre der Antrittsverlesung von F. Engel: „Der Geschmack in der neueren Mathematik" (Leipzig 1890). Auf S. 6 heißt es dort: „. . . der Stoff, den die Mathematik bearbeitet, bietet dem ästhetischen Gefühl äußerst wenig Angriffspunkte. Aber dieser Stoff ist ja auch nicht die Mathematik. Mathematik ist nur die Behandlung dieses Stoffes und bei der Art und Weise, wie er seinen Stoff behandelt, kann der Mathematiker allerdings sich von Grundsätzen des Geschmacks leiten lassen."

3) (C. S.). S. 236.

4) C. H. Schellbach, Progr. Berlin, Friedr.-Wilh.-Gymn. 1866, S. 16, 17.

hat sich der Gedanke eine Welt erschaffen, ebenso reich und mannigfaltig an Formen und Gestalten, als sich die Fülle der Natur uns offenbart. Der ätherische Leib dieser Gedankenwelt ist die Formel, in ihr hat sich der mathematische Gedanke verkörpert, wie in der Farbe und dem Marmor der Gedanke des bildenden Künstlers. Darum ist es unmöglich, in Worten von Formeln zu sprechen, Formeln der Mathematik durch Worte zu ersetzen, denn gerade das ist der Wert und das Wesen der Formel, daß sie Tausende von Worten in ein einziges Zeichen, in ein Symbol zusammenfaßt. Ihre Stimme ist nur dem Auge vernehmlich. Anfangs bezeichnete man durch Buchstaben bestimmte Zahlenwerte und drückte Rechnungsoperationen durch Buchstabenverbindungen aus. In der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts erweiterte Descartes das Reich der Formeln durch einen der kühnsten Gedanken. Er zeigte, daß der Buchstabe in der Formel nicht mehr einen einzelnen, fest bestimmten Wert zu vertreten braucht, sondern in einer und derselben Formel alle Werte der Größe durchlaufen kann. Durch ihn war die Formel flüssig geworden, sie stellte Raum- und Zeitgebilde dar, umfaßte die Geometrie und die Mechanik. Durch sie wurden die schwierigsten Aufgaben der Geometrie gelöst . . . In der zweiten Hälfte desselben Jahrhunderts wurde endlich durch Newton und Leibniz die Formel zu dem erhoben, was sie noch heute ist. Sie lehrten einsehen, daß der Buchstabe in der Formel nicht mehr einen bloßen Zahlenwert zu bedeuten braucht, sondern einen ganzen Begriff darstellen kann, und es gibt kein größeres Wunder als dieses: mit diesen Begriffsformeln läßt sich rechnen, wie mit Zahlengrößen! . . . Die Formeln der Mathematik sind also die wahren Zauberformeln, für welche das Wort und die Sache eins ist." Welches innere Glücksgefühl aber die Schönheit in der Mathematik auszulösen vermag, darüber hat sich einmal Leibniz folgendermaßen ausgesprochen: „Quanta autem voluptate afficiat theorema pulchrum, illi demum judicant, qui harmoniam illam interiorem purgata mente capere possunt."

Auch Wernicke[1]) möchte für den Unterricht ein Eingehen auf die Entwicklung der Sprache der mathematischen Forschung haben. Gegenüber einer landläufigen Meinung scheint es ihm „von Bedeutung darauf hinzuweisen, daß hier (bei den Formeln) der Inhalt niemals i der Formel erstickt wird.[2]) Hier bleibt die ‚forma' im guten a- scholastischen Sinne wirklich das Prinzip der Dinge — aus der Formel Newtons entwickeln wir die Gesetze Keplers, in denen der Lauf der

1) (A. W. 1), S. 18.

2) Auch H. Hankel (Akademische Rede von 1869) mahnt, nie zu vergessen, „daß Formeln, und wären sie noch so elegant, nicht der Zweck sind, sondern nur das Mittel, durch welches die Analysis die Größenrelationen zu beherrschen sucht". — Zu dem ganzen Abschnitte vgl. auch O. Hölder: „Anschauung und Denken in der Geometrie", Akademische Antrittsverlesung (Leipzig 1900).

Planeten seinen anschaulich-begrifflichen Ausdruck findet. Ist es gelungen, die Fülle der Erscheinungen ‚uno fasciculo colligare', so läßt diese Fülle sich auch wieder aus der Formel hervorzaubern. Darum erinnert uns aber eine solche Formel auch an ‚jene Regionen, wo die reinen Formen wohnen', sowohl in dem, was sie gibt, als in dem, was sie versagt. Überall bleibt ja ein Rest, den die Formel nicht fassen kann, und so steht sie zwischen der Sinnenwelt und der Welt der Ideen (ἀσώματα εἴδη), von der einen Seite betrachtet ein ‚Naturgesetz', von der anderen Seite betrachtet als ‚ein Teil der göttlichen Offenbarung'."

In diesen Sätzen Spieß', Schellbachs und Wernickes sind eine Fülle beherzigenswerter Winke gegeben, wie geschichtliche Erörterungen über die Sprache der Mathematik der Ausbildung des jugendlichen Geistes zugute kommen können. Man mache nur den Versuch und beachte sie im Unterrichte. Man zeige dem Schüler, wie einfach und übersichtlich ihm heute dank der emsigen Arbeit der Jahrhunderte das vorgetragen werden kann, was ehedem eine Umständlichkeit erforderte, von der er keine Ahnung hat. Sehr zu danken ist es Tropfke, daß er im Anhange des ersten Bandes seiner „Geschichte der Elementarmathematik" eine Reihe geschickt ausgewählter Beispiele dafür bringt, wie ehedem Gleichungen geschrieben und gelöst wurden. Besonders lehrreich ist das Beispiel aus einer alten lateinischen Übersetzung der Algebra des Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, das man schon in Sekunda vortragen sollte. Wie wundert sich allein schon der Schüler, wenn er daraus entnimmt, daß damals für die erste Potenz der Unbekannten und für das Quadrat derselben besondere Worte üblich waren (radix und census), da die bequeme Darstellung durch Exponenten noch unbekannt war. Es macht ihm Freude, wenn er dazu angehalten wird, während des Vorlesens der weitschweifig gefaßten Sätze die Entwicklung der Lösung mit den ihm geläufigen Zeichen und Symbolen aufzuschreiben und er beginnt dabei langsam einzusehen, daß ihm schon in der Zeichensprache seines Elementar-Lehrbuchs eine bewundernswerte Errungenschaft in die Hand gegeben wird, daß er selbst aus dieser Errungenschaft größten Vorteil zieht.

Es wird heutzutage wieder soviel Wesens von einer Weltsprache gemacht, die von klugen Köpfen schnell erfunden wurde und die nun der Menschheit als allerneuester Kulturfortschritt angepriesen wird. Man mag über den Wert und die Daseinsberechtigung des Esperanto denken, wie man will — viel zu wenig merkt man, daß die Mathematik schon längst eine Weltsprache[1]) erdacht hat, die schon seit Jahrhunderten alle Kulturvölker diesseits und jenseits des Ozeans verbindet, eine Weltsprache aber, die — wenn sie auch nur für ein begrenztes Gebiet

1) Darauf weist auch A. Witting in einem Vortrage hin, den er über das Thema: „Über einige Zusammenhänge der höheren Mathematik mit der elementaren" in der naturw. Gesellschaft „Isis" in Dresden 1908 gehalten hat. (Vergl. Isisberichte 1908, Heft II, S. 42.)

menschlicher Geistestätigkeit eine Ausdrucksform darstellt — doch schon längst die große Aufgabe gelöst hat, eine allgemein anerkannte internationale Verständigung (durch die Schrift) zu bieten.[1]) Man weise z. B. darauf hin, daß ein aus einem russischen oder schweizer Gymnasium neu eingetretener Mitschüler sich schnell in sein neues Lehrbuch, vor allem in seine neue algebraische Aufgabensammlung hineinfindet. Damit erweckt man bei guten Schülern leicht den Wunsch, mehr über die Entstehung dieser auch ohne große Kongresse und Resolutionen allgemein anerkannten und durch das friedliche Zusammenarbeiten vieler großer Männer aller Völker und Zeiten geschaffenen Sprache zu erfahren.

Darauf, daß ein wenig Geschichte der mathematischen Zeichensprache auch vielverbreitete Irrtümer, wie die Herleitung des Wurzelzeichens aus einem r, beseitigen hilft, war in Anschluß an ein Zitat aus Tropfke[2]) bereits hingewiesen worden.

Daß die älteste Form eines mathematischen Zeichens, nämlich die Ziffer, erst dann als gewaltige Errungenschaft menschlichen Denkens erscheint, wenn sie historisch erfaßt wird, sei im Zusammenhang mit dem Vorigen nochmals hervorgehoben. Hier kann schon gelegentlich auf der Unterstufe Belehrung im Unterrichte einfließen, wenn auch natürlich erst in den Oberklassen die Reife für weitergehendes Verständnis vorausgesetzt werden kann. Wie trefflich sich die Entwicklung des Zahlbegriffs für anregende Unterweisung im Gymnasium eignet, erkennt man durch Studium des zweiten Heftes der „Mathematischen Bibliothek“, die bei B. G. Teubner von Lietzmann und Witting herausgegeben wird. Wie kann der Unterricht vertieft und verschönt werden, wenn die hier von H. Wieleitner gebotenen geschichtlichen Mitteilungen recht weitgehende Beachtung der Fachkollegen finden!

7. Würdigung der Bedeutung großer Mathematiker.

Fragt man einmal in einer Sekunda oder auch Prima nach einem großen Mathematiker, so kann man sonderbare Dinge zu hören bekommen. Die meisten Schüler werden überhaupt in Verlegenheit geraten und vergebens in ihrem Gedächtnis herumkramen.[3]) Dann kommt vielleicht Adam Riese oder Gauß oder Archimedes zum Vorschein; letzterer wohl nur, weil die Geschichte von seinem Tode im Sprachunterrichte als Übungsstück zum Übersetzen eine Rolle spielt. Pythagoras wird auch selten vergessen und allmählich stellen sich bei

1) Ähnliches darf auch von der Notenschrift der Musik behauptet werden.

2) Vergl. S. 31, Anm. 1.

3) Ein Kollege erzählte mir, daß ihm in den neunziger Jahren beim Einkaufe von Eulers Introductio (Reclam) der Buchhändler versicherte, daß der Verfasser noch am Leben sei. Ein anderes Mal bezeichnete ihm ein Engländer Euklid als einen englischen Zeitgenossen (!!).

einiger Nachhilfe vielleicht noch die Urheber einiger Sätze ein, die mit ihrem Namen verknüpft sind. Von ihrem Leben und Wirken aber hat man kaum eine Ahnung. Das sind keine Phantasiegebilde oder Scherze. Es ist wirklich so oder ist zum mindesten vor nicht langer Zeit noch so gewesen.

Wie ganz anders steht es mit anderen Wissensgebieten. Wieviel besser ist man schon in Physik, Chemie oder Technik orientiert. Und nun gar auf religiösem Gebiete, in Dichtkunst, Literatur, Philosophie, bildender Kunst, Musik oder Politik![1]) Selbst großen Mimen der Vergangenheit flicht man Kränze. Personen der Mythologie und Sage werden in großer Menge dem Gedächtnis einverleibt; es scheint fast, als ob man neuerdings eher zuviel Personenkultus triebe — und doch, die großen Geister, die am Webstuhle der mathematischen Wissenschaft gesessen haben, die in stiller und emsiger Arbeit glänzende und ewig dauerhafte Fäden zu einem Gewande zusammenfügten, das die Kulturmenschheit ziert, wie sonst eins, diese großen Geister sind dem modernen Gebildeten völlig unbekannt oder zu nebelhaften Schemen zerronnen, von denen jede Spur von Persönlichkeit geschwunden ist.

Nun läßt sich nicht leugnen, daß in der Lebensarbeit von Künstlern oder Feldherrn das rein Menschliche viel unmittelbarer hervortritt. Wahre Kunstwerke sollen immer Bruchstücke einer großen Konfession sein und ein Held auf dem Schlachtfelde wirkt zumeist durch die Wucht seiner Persönlichkeit und der damit verbundenen Ereignisse. Niemand wird nun für den Unterricht die Berechtigung bestreiten wollen, all diese Großen dem Schüler näherzubringen, ihm nicht nur zu zeigen, was sie geschaffen haben, sondern wie ihr Werk entstanden, wie es aus den Verhältnissen und Forderungen der Zeit heraus zu verstehen ist.

Aber nicht nur eine Quelle der Nacheiferung soll aus der geschichtlichen Würdigung großer Persönlichkeiten fließen; vielmehr soll der heranwachsende Gebildete auch auf die Pflicht der Dankbarkeit hingewiesen werden, die jedem Erben einer Kulturerrungenschaft dem Entdecker und Erblasser gegenüber ziemt. Schon Matthias forderte, dem Schüler „dankbare Achtung für die Unsterblichen einzuflößen, deren Talenten und unermüdlichem Forschen auch er das Licht verdankt, das ihm auf seinen wissenschaftlichen Pfaden so milde und freundlich leuchtet.“[2])

Solche Dankespflicht hat nicht danach zu fragen, auf welchem Sondergebiete des Kulturschaffens die großen Leistungen eines bedeutenden Mannes liegen. Wenn daher die hervorragende Mitwirkung der Mathematik an vielen Aufgaben der Kultur, wenn ihr hoher Wert

1) H. v. Treitschke trifft eine noch engere Auswahl, indem er sagt: „Schrankenlose Bewunderung und Verehrung brachte das Volk von jeher nur den Helden der Religion und den Helden des Schwertes dar. Die einzige Ausnahme, die aber nur die Regel bestätigt, ist Bismarck.“

2) Siehe S. 7.

für die Ausbildung und Weiterbildung des Menschengeistes anerkannt wird, so muß auch gefordert werden, daß die großen Meister dieser Wissenschaft im Gedächtnisse eines jeden Gebildeten fortleben. Hoffentlich ist die Zeit nicht mehr ferne, wo es jedem als Bildungsmangel angerechnet wird, wenn er nichts weiß von den wissenschaftlichen Großtaten eines Euklid, Archimedes und Ptolemäus, eines Muhammed ibn Mûsâ, eines Leonardo von Pisa, eines Regiomontan und Michael Stifel, eines Koppernikus, Kepler und Galilei, eines Descartes, eines Euler, Leibniz, Newton, Lagrange und Gauß. — — Doch wozu hier weiter Namen nennen? Wir griffen beliebig einige der glänzendsten heraus und überlassen es dem Leser, sie zu ergänzen.

Kennzeichnend für die Vernachlässigung, deren man sich bisher im höheren Unterrichte gerade den großen Mathematikern gegenüber schuldig gemacht hat, ist die Tatsache, daß einige von ihnen dem Schüler nur als Meister auf anderem Gebiete entgegentreten. Pascal ist jedem eher bekannt als Verfasser der „lettres provençales", wie als Geometer und großer Meister im Integrieren; Descartes wohl als Philosoph, nicht aber als Gründer der analytischen Geometrie. Leonardo da Vinci wird als Maler und Dichter gepriesen; warum wird aber nicht erwähnt, daß er ein Bahnbrecher auf dem Gebiete der angewandten Mathematik ist? Albrecht Dürer hat mit Recht vor allem einen Ehrenplatz in der Geschichte der Malerei; aber er sollte auch als hervorragender geometrischer Schriftsteller gefeiert werden, dessen „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt usw." im 16. Jahrhundert zu den besten Büchern über Perspektive gehörte.[1]) Ja selbst Leibniz gilt in erster Linie als großer Philosoph, obgleich es wohl zu allen Zeiten die Mathematik sein wird, die ihm die schönste Palme reicht.

Der Hinweis auf die nicht seltene Verknüpfung mathematischer Veranlagung mit hoher Begabung auf anderem Gebiete hat noch einen weiteren pädagogischen Wert. Der Schüler lernt daraus, daß die Mathematik ebensowenig wie die exakte Wissenschaft in ihren anderen Zweigen einseitige Begabung voraussetzt, daß die Geschichte zahlreiche Beispiele für das Gegenteil erbringt.[2]) Lord Brounker war Kanzler Karls II. von England und daneben nicht bloß repräsentierender, sondern wirklicher Präsident der Akademie der Wissenschaften zu London, der für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser einen neuen Ausdruck suchte und fand. Otto v. Guericke

1) Das Buch ist in einer Neuausgabe leicht zugänglich: „Albrecht Dürers Unterweisung der Messung. Herausgegeben auf Veranlassung von Hans Thoma von A. Peltzer, München (Süddeutsche Monatshefte) 1909."

2) Auch Pietzker wünscht gerade bei Vinci und Dürer darauf hinzuweisen, „daß eine ausgesprochene mathematische Geistesrichtung mit der hervorragendsten künstlerischen Begabung in derselben Person zu einer harmonischen Einheit verschmolzen sein kann".

verband seine kommunalen Amtsgeschäfte mit der unter Überwindung großer Mühen betriebenen Erforschung von Naturgesetzen. Johann Hudde bereicherte die Mathematik auf dem Gebiete der Gleichungen und der Höchstwerte — und war doch Jurist und neunzehnmal Bürgermeister von Amsterdam. Viëta, der Erfinder der Buchstabenrechnung und dadurch Schöpfer einer neuen Sprache, war Arzt. Benjamin Franklin, der Erfinder des Blitzableiters, war Staatsmann, und auch bei Leibniz soll nicht vergessen werden, daß er Jurist und mit staatsmännischen Aufgaben betrauter Gesandtschaftssekretär war.[1])

Damit ist natürlich nicht gesagt, daß zu mathematischem Neuschaffen keine besondere Befähigung nötig sei. Im Gegenteil: jede Wissenschaft verlangt „zu ihrer gründlichen Entwicklung eine spezifische Fähigkeit und, wo diese nicht vorhanden ist, da führt aller Fleiß und alle Anstrengung nur zu Spekulationen, die unfruchtbar sind, weil sie dem inneren Wesen der Wissenschaft nicht entsprechen. Das ist das Geheimnis, welches uns die Geschichte der Wissenschaft lehrt.“ [2])

Zuletzt möchte ich aber nicht vergessen, anheimzugeben, ob sich nicht doch manchmal auch die Lebensschicksale großer Mathematiker zu kurzen Mitteilungen im Unterrichte eignen, insofern wenigstens, als sie Einfluß auf die wissenschaftliche Arbeit des Forschers gehabt haben. Alois Höfler[3]) sagt einmal in einer akademischen Rede, die er 1904 in Prag gehalten hat: „Mit ehrfürchtigem Schauder spreche ich den Namen Johannes Keplers an der Stätte aus, an welcher dieser wunderbare deutsche Mann selbst gewirkt hat ... Jahr für Jahr lernen Hunderttausende von Gymnasiasten den Wortlaut seiner drei Gesetze, ebenso wie sie hundert und tausend andere Gesetze und Regeln lernen. Die zwei kurzen Formeln: „Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht“, und „Die von der Sonne zu den Planeten gezogenen Leitstrahlen durchstreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume“ — würden sie nicht größeren Eindruck auf die Schüler machen, wenn man dazu erzählen wollte, daß Kepler schon 14 Jahre vor seinen beiden ersten Gesetzen eine uns heute höchst absonderlich, ja absurd dünkende Beziehung zwischen den Planetenbahnen und den regulären Polyedern gefunden zu haben meinte; daß er dann noch jahrelang mit dem Vorurteile des Hipparch, die Planetenbahnen müßten reine Kreise sein, gerungen habe; daß er dann nach und nach an Stelle der Kreise alle möglichen und fast unmöglichen Kurven durchprobierte, daß er es hierbei bis zu einer Übereinstimmung auf acht Winkelminuten zwischen der Beobachtung und der Berechnung gebracht hat, eine Übereinstimmung, mit der sich jeder minderwertige Intellekt zufrieden gegeben hätte, wogegen Kepler sogar angesichts

1) Diese Beispiele stellt E. Tischer a. a. O. zusammen.

2) H. Hankel, „Zur Geschichte der Mathematik usw.“ S. 359.

3) „Die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichts“ (Braunschweig 1904), S. 9. 10.

dieses scheinbaren Triumphes doch seine jahrelangen mühseligen Rechnungen zum so und so vielten Male sogleich wieder verwarf und nun endlich erst auf das Ellipsen- und Flächengesetz kommen konnte... Zu dieser Schilderung des sozusagen intellektuellen Charakters unseres Helden käme dann die Erzählung, wie Kepler nur zu oft mit hungrigem Magen arbeitete, weil er um Abschlagzahlungen auf seine fälligen Besoldungen erst den Kaisern auf die Reichstage nachreisen mußte; daß er über ein Jahr seines Lebens dazu verbrauchte, seine Mutter gegen die Anklage der Hexerei zu verteidigen und sie nur so vor dem Flammentode retten konnte." Auch Höfler ist der Ansicht, daß man bei solchen Gelegenheiten einmal über die Behandlung der reinen Wissenschaft hinausgehen und eine große „intellektuelle und moralische Persönlichkeit" zu einem „wertvollen Ausgangs- und Zielpunkt des Gesinnungsunterrichts, der Konzentration in der hochsinnigsten Bedeutung dieses leider vieldeutigen Wortes der Pädagogen" machen könne. „Lassen wir doch", fährt Höfler fort, „die Persönlichkeit Keplers als hellsten Stern in die Nacht der Verworrenheit des XVII. Jahrhunderts, der trübsten Zeit deutscher Geschichte, auch für das Auge unserer Schüler hineinleuchten! Aber nur dem kann Keplers Leben leuchten, dem das Wesentliche seines Lebenswerkes, seine wissenschaftliche Kulturtat, eingeleuchtet hat."

Auch wird der Schüler durch Eindringen in die Persönlichkeit großer Mathematiker von den Fesseln der törichten Meinung befreit, daß nur nüchterne Verstandesmenschen gute exakte Forscher sein können. Er wird eine Ahnung davon bekommen, daß im Gegenteil, wie Helmholtz 1886 beim Jubelfeste der Heidelberger Universität hervorhob, keine große Entdeckung auch auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften zustande kommt, ohne einen dichterischen Zug[1]) im Gemüte des Entdeckers, eine starke Beteiligung der schaffenden Phantasie, d. h. ein im Ungewissen, im Nebelhaften sich bewegendes geheimnisvolles Ahnen, das nun freilich des klaren und kühlen Verstandes als Beraters bedarf, damit der in ihm schlummernde Kern von Wahrheit herausgearbeitet und in reiner, von allen Schlacken befreiter Form zur dauernd wertvollen Erkenntnis gestaltet werde.

Gedanken, wie sie Höfler an ein bestimmtes Beispiel anknüpft, sind es, die auch mich zu meinem oben gemachten Vorschlage bewogen. Ich könnte noch manchen Bundesgenossen herbeirufen. Sehr richtig sagt u. a. A. Riehl[2]): „Nicht als ein Geschenk vom Himmel ist dem Menschen die wissenschaftliche Wahrheit zugefallen; der Mensch hat sie erringen müssen unter schweren inneren und äußeren Kämpfen

1) Herr W. Lietzmann teilt mir mit, daß Kronecker dem mathematischen Vereine zu Berlin einmal die sinnigen Verse gewidmet hat:

„Nonne mathematici veri natique poetae?
Sunt; sed quod fingunt, hosce probare decet."

2) (A. R.), S. 30, 31.

und mit persönlicher Hingabe. Und so vergegenwärtige man der Jugend die Persönlichkeiten der großen Forscher, der großen Entdecker im Reiche des Wissens, man erzähle aus dem Leben dieser Heroen des Geistes, und welche Widerstände sie zu überwinden, welche Entsagungen und Leiden auf sich zu nehmen hatten, um der Wahrheit ans Licht und zum Siege zu verhelfen." Auch an Wiegands Worte möchten wir noch einmal erinnern: „Wenn der junge Mann gesehen hat, in wie langer Zeit und mit welchen Mühen die Mathematik zu ihrer Höhe gelangt ist, . . . so wird er vor jenem Übermute, jener Selbstüberschätzung und Impietät bewahrt bleiben, welche heutzutage besonders beklagt werden und welche zu allen Zeiten das wahre Gedeihen des Wissens für den Einzelnen wie für die menschliche Gesellschaft vereiteln."

Zuletzt soll noch ein Gedanke wiedergegeben werden, den Baltzer aussprach, daß nämlich die Geschichte mathematischer Sätze ohne die Geschichte der mathematischen Meister nicht genügend gegeben werden kann.

Mag es bei diesen Zitaten sein Bewenden haben. Mögen sie an ihrem Teile dazu beitragen, meiner Anregung, im mathematischen Unterrichte auch die großen Meister und Denker dieser Wissenschaft geschichtlich zu würdigen, einen festen Untergrund zu geben.

8. Die Mathematik und die anderen Wissenschaften an der Schule. Pflege gegenseitiger Beziehungen durch Vermittlung der Geschichte.

Es ist eine vielbeklagte Tatsache, daß auf unseren höheren Schulen die einzelnen Unterrichtsfächer nicht selten nebeneinander herlaufen, ohne in Wechselbeziehungen zueinander zu treten.

Zwar genossen alle Lehrer eine ähnliche Vorbildung, solange sie die Schule besuchten; sie bringen also aus ihrer Jugendzeit her Erinnerungen an alle die Disziplinen mit, die ihnen zur Grundlage ihrer Bildung wurden. Aber schon während der Studienzeit verloren sie die Fühlung mit den meisten, um sich fast ausschließlich ihrem Sonderstudium zu widmen. Das kann zwar bei der heutigen Spezialisierung der Wissenschaften und den hohen Anforderungen, die durch die Prüfungsordnung für jedes Fach gestellt werden, nicht wundernehmen, hat aber meist zur Folge, daß der junge Gymnasiallehrer als ausgesprochener Spezialist in den Schuldienst tritt, um sich vom Probejahr an zumeist eben nur mit seinem Fachgebiet, seiner Methode und der notwendigen wissenschaftlichen Fortbildung in ihm zu befassen.

Nun gibt es zwar Fächer, bei denen eine gegenseitige Befreundung von vorneherein naheliegt. Der Altphilologe wird zu dem Neuphilologen hinneigen, beide werden Fühlung nehmen mit dem Historiker und Germanisten und auch Geographie und Religion erscheinen ihnen nicht als abgelegene Gebiete. Dann aber kommt — und das ist in

Deutschland die Nachwirkung des Neuhumanismus — die große Scheidewand, die das Gebiet des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen scharf abtrennt. Und wenn auch im amtlichen und geselligen Verkehr wohl kaum noch das Wort gilt: mathematicus non est collega, so erstrebt doch die Unterrichtsführung nur selten ein bewußtes Ineinandergreifen. Der alte Wahn ist eben noch heute nicht ausgestorben, daß „Geisteswissenschaften" und „Naturwissenschaften" Gegensätze seien.

Und doch sollte über der Pforte jedes Gymnasiums, ob es nun auf humanistischer oder realistischer Grundlage ruht, das Wort in goldenen Lettern stehen: Verschiedene Wege, ein Ziel. Und welches Ziel? „Die harmonische Ausbildung aller dem Menschen gewordenen Anlagen und Kräfte", wie 1836 schon Niemeyer gesagt hat. Der Begriff Harmonie aber schließt den der Dissonanz aus. Er fordert, daß jeder Ton zwar für sich bestehen, aber erst im Zusammenklang mit anderen seinen Wert erhalten soll.

Es ist hier nicht der Ort, näher auf die allgemeinen Bildungsziele des Gymnasiums, Realgymnasiums oder der Oberrealschule einzugehen. Heutzutage, wo alle drei Anstalten die gleichen Berechtigungen sich erobert haben, hat man ohnedies viel über ihre Bildungsziele gehört und gelesen und man darf es trotz mancher noch immer nicht überwundener Gegnerschaft wohl aussprechen, daß die Gleichwertigkeit der neunklassigen höheren Schulen mehr und mehr auch in weiteren Kreisen erkannt und anerkannt wird. Und doch klingt es durch all die vielen Debatten hindurch immer wieder wie ein Seufzer der Beklemmung darüber, daß unsere armen Jungen so sehr durch das Zuviel und das Durcheinander der Lehrgegenstände geplagt werden, daß ihnen so wenig ein Licht darüber aufgesteckt wird, daß es im letzten Grunde nur eine Wissenschaft gibt. Solche Klagen, in die zumeist gerade von dem urteilsfähigsten Teile der Elternschaft lebhaft eingestimmt wird, ist für alle die Schulen nicht unberechtigt, an denen die Vertreter der verschiedenen Unterrichtsfächer in Abgeschlossenheit voneinander ihre Wege gehen. Daß auch heute noch hier und da offene oder versteckte Gegnerschaft zwischen Mathematikern und Philologen oder Theologen und Naturwissenschaftlern besteht, wird jeder zugeben müssen, der mit offenem Auge in eine größere Reihe von Schulgemeinden hineingeschaut hat.

Der Schüler ist aber gerade in solchen Dingen ein guter Beobachter seiner Lehrer und der geschilderte Zustand färbt nur zu leicht vom Lehrer auf den Schüler ab. Dann aber tragen den Schaden die einseitig begabten Knaben, die entweder für die Sprachen usw. oder für die Mathematik nicht viel Verständnis mitbringen. Sie leben sich dann leicht in den Wahn ein, als ob Geringschätzung der ihnen nicht sympathischen Disziplin etwas Normales oder doch Entschuldbares ja gelegentlich wohl sogar etwas Verdienstliches sei.

Wie ist nun am besten hier Abhilfe zu schaffen?

Man könnte vorerst an eine engere Fühlungnahme zwischen den Lehrern der verschiedenen Fächer denken, die durch verschiedene Mittel angebahnt werden könnte. Gemeinsame Aussprachen über das Einende oder gemeinsam Interessierende könnten amtlich angeordnet werden. Es könnte erstrebt werden, daß sich die Amtsgenossen verschiedener Disziplinen gegenseitig im Unterricht besuchen, zumal dann, wenn Stoffe behandelt werden, die in das Fach des anderen hinüberspielen. Es könnte dahin gewirkt werden, daß der Philolog gelegentlich auf den Unterricht des Mathematikers verweist und umgekehrt. Aber die zumeist wohl in der Persönlichkeit beruhenden Schwierigkeiten bei der Verwirklichung solcher an sich beachtenswerter Vorschläge sollen nicht verkannt werden.

Da erscheint mir nun ein anderes Mittel weit mehr Aussicht auf Erfolg zu versprechen. Das ist die bewußte Durchdringung jedes Unterrichtsfaches mit einer gemeinsamen Wissenschaft, die sich willig und ungesucht in den Dienst eines jeden stellt. Man könnte, wie das schon mehrfach vorgeschlagen worden ist, die Philosophie[1]) dazu erwählen und manches würde hierfür sprechen.[2]) Nur liegt die Gefahr nicht fern, daß man die einzelnen Disziplinen in ein Abhängigkeitsverhältnis zu ihr bringt, vor dem sie bewahrt werden müssen; denn ihnen allen muß volle Selbständigkeit gewahrt bleiben. Wird aber diese Klippe mit Geschick vermieden, so liegt immer noch die Gefahr nahe, daß diese subjektivste Wissenschaft den Schwerpunkt in sich selbst zu sehr verschiebt, je nach der Richtung, der die Vertreter der einzelnen Disziplinen zuneigen. Es muß Sorge getragen werden, daß wir nicht in eine zu individuelle oder zu einseitige Betrachtung der Dinge verfallen, und wir dürfen nie vergessen, daß es mathematische Probleme gibt, für deren philosophische Behandlung ein sehr hoher Standpunkt Vorbedingung ist.

Kapitel, wie etwa die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung,[3]) sind gewiß geeignet, schon auf der Schule philosophischen Ideen einen gerade wegen seiner Exaktheit wertvollen formalen Ausdruck zu verleihen. So ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts

1) Vgl. hierzu die Programmabhandlung des Gymnasiums zu Gera Ostern 1906: „Der Idealismus der Hellenen und seine Bedeutung für den gymnasialen Unterricht" von Gustav Schneider. S. 34 ff.

2) Vgl. hierzu ferner Alois Höfler (Prag): Philosophische Elemente in allen Unterrichtsfächern, philosophische Propädeutik als eigenes Fach. Vortrag, abgedruckt in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaft. XI. Nr. 5. S. 97 ff.

3) Im dritten Bande der „Encyklopädie der Elementarmathematik" (Leipzig, Teubner 1907) sind in den §§ 56 bis 60 Betrachtungen allgemeiner Art über die Prinzipien der Wahrscheinlichkeit eingeschaltet, die ihrem Inhalte nach sehr wohl zur Mitteilung an die Oberprimaner geeignet sind, am besten wohl erst dann, wenn schon einige Kenntnis in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausgesetzt werden kann. Vgl. auch O. Meißner „Wahrscheinlichkeitsrechnung", Mathem. Bibl. v. Lietzmann & Witting, Heft 4.

anderes, als der in Rechnung gesetzte gesunde Menschenverstand, wie schon Laplace sagt. Daß die Mathematik für das philosophische Denken eine Schule ersten Ranges und von der Logik nicht zu trennen ist, kann nicht bestritten werden. „Wir sehen in der Mathematik die bewußte logische Tätigkeit unseres Geistes in ihrer reinsten und vollendetsten Form; wir können hier die ganze Mühe derselben kennen lernen, die große Vorsicht, mit der sie vorschreiten muß, die Genauigkeit, welche nötig ist, um den Umfang der gewonnenen allgemeinen Sätze genau zu bestimmen, die Schwierigkeit, abstrakte Begriffe zu bilden und zu verstehen; aber ebenso Vertrauen fassen lernen in die Sicherheit, Tragweite und Fruchtbarkeit solcher Gedankenarbeit."[1]) Ja, die bekannte russische Mathematikerin Kowalewski hat einmal gesagt: „Während meines ganzen Lebens hat mich die Mathematik mehr durch ihre philosophische Seite angezogen."[2]) Da aber die Philosophie von jeher der Tummelplatz verschiedener Meinungen gewesen ist und immer bleiben wird,[3]) und da die geistige Reife des Durchschnittsprimaners einer vollständigen Kritik im allgemeinen noch nicht fähig ist, so kann die Philosophie auf höheren Schulen nur mit Vorsicht und unter besonders günstigen Vorbedingungen bei Lehrenden und Lernenden zum Leitstern auf dem Pfade der mathematischen Wanderung gemacht werden, so nahe auch die Verwandtschaft zwischen Mathematik und Philosophie sein mag.

Mir scheint, daß es einer anderen Wissenschaft vorbehalten bleiben sollte, zur Verbindung der verschiedenen Schulfächer ein lebendiges Band zu weben. Und das ist die Geschichte.

Nicht die Geschichte im politischen Sinne, sondern in dem nicht minder wichtigen Sinne, wie ihn die Lehr- und Prüfungsordnung für die sächsischen Gymnasien vom 28. Januar 1893 in § 33 kennzeichnet, wenn sie fordert, daß die Geschichte auch Bekanntschaft vermitteln soll „mit den bedeutenderen Vorgängen auf dem Gebiete des Kultur- und Geisteslebens in ihren Beziehungen zueinander und im Zusammenhange mit der Gesamtentwicklung". Bei der geringen Anzahl von Stunden, die dem Geschichtsunterrichte auf dem Gymnasium zugewiesen sind, bleibt natürlich wenig Raum für eine Geschichte der Wissenschaften, selbst wenn ihr Bild nur in groben Umrissen gezeichnet werden sollte. Dazu kommt die vielfach mangelnde Reife des Schülers in den Klassen, auf welche programmgemäß die Zeitepochen verteilt werden. Soll also im Sinne des angeführten Paragraphen Ersprießliches geleistet werden, so bleibt nichts anderes

1) Helmholtz, Über das Verhältnis der Naturwissenschaften zur Gesamtheit der Wissenschaft, Prorektoratsrede, Heidelberg 1862.

2) Nach W. Ahrens, „Scherz und Ernst in der Mathematik". Teubner 1904. S. 362.

3) F. Schur, Die Parallelenfrage im Lichte der modernen Geometrie, Pädag. Archiv 34 (1892), S. 546.

übrig, als einen Teil der Geschichtsbelehrung in die einzelnen Unterrichtsfächer selbst zu verlegen. Solches geschieht in Übereinstimmung mit den bestehenden Sonderverordnungen auch längst für die fremdsprachlichen Fächer, für Religion und Deutsch. Ebenso ergeben sich in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik, bei der schulmäßigen Behandlung ganz von selbst regelmäßige Hinweise auf die geschichtliche Entwicklung dieser Wissenschaften. Das einzige Fach, in dem zurzeit das historische Element vielfach noch ausgeschaltet ist oder doch sehr in den Hintergrund tritt, ist eben die Mathematik, deren vielseitige Beziehungen zur Geschichte wir ausführlich erwiesen haben.

Man deute also einerseits im Geschichtsunterrichte am geeigneten Orte auf die großen Errungenschaften der Einzelwissenschaften kurz hin und behandle andrerseits die Mathematik wie jedes andere Fach nebenbei auch geschichtlich. Schon mancher einsichtsvolle Schulmann hat diese Forderung gebracht. Ich erinnere an P. Treutlein, der sagt[1]): „Der mathematische Unterricht kann in der Tat dem übrigen Unterrichtsbetriebe die Hand reichen, er braucht nicht vereinzelt zur Seite zu stehen, wo alles, wenn richtig geordnet, dem gemeinsamen Ziele zustrebt.

„Wir verlangen ja doch wohl mit Recht vom Lehrer der Geschichte, wenn er — um nur ein oder zwei Beispiele herauszugreifen, — wenn er an die Schilderung der Stürme des 16. und 17. Jahrhunderts gekommen, daß er auch der ruhigen Größe eines Kopernikus, eines Kepler gedenke und ihre Bedeutung würdige, wenn er die Wirren der französischen Revolution schildert und die vielen ihrer Neuerungen, die, kaum gebildet, schon wieder zerrannen, daß er da auch ein Auge habe und eröffne für die hohe dauernde Wichtigkeit, welche lag in der Schaffung der polytechnischen Schule. Dafür haben wir aber auch vom Physiker, vom Mathematiker der Schule zu verlangen, wenn er einerseits zur Darlegung der kopernikanischen Lehre und zum Beweise der Keplerschen Gesetze gekommen, daß er fragend, wiederholend in kurzem Überblick vor dem geistigen Auge des Schülers die Ereignisse und Tatsachen vorüberziehen lasse, welche die neue Zeit einleiten und herbeibringen, die Einführung des Schießpulvers und den dadurch bedingten Umsturz des Kriegs- und Lehenswesens, den Bücherdruck und seine Folgen, die großen Weltreisen und ihre Entdeckungen, die Reformation und ihre sittliche Bedeutung, und daß er im Anschluß hieran zeige, wie Kopernikus nun gar auch noch die äußere Welt des sinnlichen Scheines auf den Kopf stellt, und wie jetzt in der Tat eine neue Zeit ihr Leben begonnen hat.

„Und wenn der Mathematiker die Ähnlichkeitspunkte der Kreise und Kugeln aufgewiesen und den bezüglichen Satz von Monge abge-

1) (P. T.), S. 12.

leitet, so möchte ich wünschen, daß nicht toter Schall dieser Name sei und bleibe, vielmehr soll der Schüler jetzt in aller Kürze hören, wie Monge die polytechnische Schule und ihren Hauptgegenstand, die darstellende Geometrie, geschaffen, Muster und Vorbild unserer deutschen technischen Hochschulen und des technischen Unterrichts, dieser Grundbedingung der hohen technischen Leistungen."

Und wie wahr ist es, wenn Treutlein fortfährt: „So greife eins ins andere! Der Geist des Zöglings ist nur einer, wo, so hoffen wir, ein Tritt tausend Fäden regt, ein Schlag tausend Verbindungen schlägt; er muß befähigt werden, Beziehungen zu erkennen, Gemeinsames aufzufinden, immer feiner und feiner Unterschiede zu merken und muß verstehen lernen, seine Wahrnehmungen auszusprechen. Hierin besteht ja, was wir Bildung nennen. Daher müssen wir Lehrer aber auch dafür Sorge tragen, daß nicht bloß Lehrfach um Lehrfach, Abschnitt um Abschnitt abgehandelt werde, jedes einzelne lose für sich, den Gepäckstücken vergleichbar, die man ein- und auslädt, wir müssen für das Ineinandergreifen der die Seele bewegenden Gedanken Sorge tragen."

Ein anderer Mathematiker und Schulmann, Ernst Tischer,[1]) hegt ähnliche Wünsche: „Als ob es nicht den Unterricht beleben und seine Stetigkeit festigen würde, wenn die Schüler gewahr würden, daß sie Menschen, nicht in ein enges Sondergehege von Anschauungen eingeschränkte Fachleute als Lehrer vor sich haben, wenn der Mathematiker nebenher einmal eine geschichtliche, auch religiöse, sprachvergleichende oder selbst — horribile dictu — philosophische Parallele und Perspektive gibt, und der Historiker und Philologe mit Wärme und Überzeugung an Beispielen, die ihm tausendfach zufallen bei seinem schönen Stoffe, sofern er das Auge darauf einzustellen nicht ablehnt, zeigte, daß auch Naturwissenschaft und Mathematik und viele andere Dinge zum Kultur- und Geistesleben der Menschheit gehören, als die sind, die ihm natürlich pflichtmäßig ganz besonders zu pflegen obliegen. Als ob es für die Erziehung nicht von höchster Bedeutung wäre: daß der Schüler von Anfang an und beständig aus der Art und Weise, wie ihm die einzelnen ‚Fächer' dargeboten werden, lerne, daß kein Fach um seiner selbst willen etwas ist, sondern nur als Glied einer höheren Einheit Bedeutung hat und notwendig wird, und daß eine ‚höhere Bildung' in der Fähigkeit besteht, diese Einheit, das Totum zu übersehen und sich der Bedeutung der vom abstrahierenden und sondernden Geiste geschaffenen Einzelgebiete innerhalb des Ganzen für das Ganze bewußt zu werden."

Es lohnte sich schon, den Fäden nachzuspüren, die hundertfältig

1) E. Tischer: „Leibniz und die Gymnasialmathematik" in: „Xenia Nicolaitana", Festschrift zur Vierjahrhundertfeier der Nikolaischule (Leipzig 1912), S. 227.

alle Schuldisziplinen verbinden und deren zarteste nicht immer auf den ersten Blick offen zutage treten. Doch führte uns solche Betrachtung zu weit vom Thema ab. Auch kann erfreulicherweise auf Literatur hingewiesen werden, die diese Aufgabe abnimmt. Ich erinnere, um hier nur eine Schrift zu nennen, an B. Biel: „Der mathematische Unterricht in seiner Beziehung zu anderen Unterrichtsgebieten". Vor allem aber sollte jeder die glänzende Rede gelesen haben, die W. Spottiswoode auf einer wissenschaftlichen Versammlung in Dublin 1878 gehalten hat und die in deutscher Übersetzung von H. Gretschel 1879 (Leipzig) veröffentlicht wurde. Sie trägt den Titel: „Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften". Wie geistvoll sind in dieser Rede Gedanken über Mathematik und Geschichte miteinander verwoben! Auch die Arbeiten A. Wernickes enthalten hiervon viel schöne und wertvolle Ideen. Es sei mir erlaubt, noch einigen Stimmen hier ein Echo zu geben, die gleich uns die Verknüpfung aller Unterrichtszweige durch geschichtliche Einflechtungen wünschen. Vorahnend ruft vor mehr als 50 Jahren schon Schellbach[1]) aus: „Auf unseren Gymnasien ... wird einst eine innigere Verbindung des Studiums der Sprache und der exakten Wissenschaften eintreten müssen." Willmann,[2]) der Verfasser des Aufsatzes: „Der goldene Schnitt als ein Thema des mathematischen Unterrichts", sagt darin: „Man sollte weit mehr, als es geschieht, solche mathematische Probleme und Aufgaben bearbeiten, welche . . . Einblick in die Geschichte der Mathematik gestatten, wodurch der historische und insbesondere der klassische Unterricht mit dem mathematischen Verbindung erhielte." B. Biel[3]) gibt der Überzeugung Ausdruck, daß das Gymnasium die allseitige allgemeine Vorbildung fürs Leben nur dann in vollem Umfange gewähren könne, „wenn die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer den sprachlich-historischen die Hand reichen zur gegenseitigen Unterstützung und Ergänzung bei der gemeinsamen Arbeit, zu einem wahrhaft vereinten Streben nach dem gesteckten Ziele". F. Klein fordert, indem er zugleich vor Einseitigkeit und Übertreibung warnt: „Das mathematische Denken ist auf der Schule nach seiner vollen Selbständigkeit zu pflegen; inhaltlich aber dabei mit den sonstigen Aufgaben der Schule, d. h. mit den verschiedenen Bestandteilen der von der einzelnen Schulart anzustrebenden allgemeinen[4]) Bildung möglichst in lebendige Beziehung zu setzen." An anderer Stelle sagt er ergänzend, daß das einzelne Fach nicht isoliert für sich betrieben werden solle, sondern im Hinblick auf die durch die Schule zu ver-

1) Programmschrift von 1866, S. 21.

2) Lehrproben von Fries & Menge, Heft 33.

3) (B. B.), S. 12.

4) Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen, gesammelt von F. Klein und R. Riecke, Leipzig, Teubner 1904, S. 15.

mittelnde Gesamtbildung.[1]) Pietzker, Höfler und andere, zu denen sich auch viele der in Teil I zitierten Verfasser von Lehrbüchern gesellen, geben ähnlichen Ideen Raum, kurz es ist eine von vielen maßgebenden und führenden Mathematikern auf Universität und höherer Schule anerkannte Forderung, daß uns eine weit innigere Verknüpfung der verschiedenen Unterrichtsfächer heute mehr wie je not tut und daß die Geschichte, insbesondere die Kulturgeschichte neben anderen Wissenschaften trefflich geeignet ist, eine Brücke mit tragfähigen Jochen herüber und hinüber zu schlagen, eine Brücke, die beim Überschreiten Arbeitsfreudigkeit und Wanderlust steigert, die nach allen Seiten hin einen schönen, erhebenden Blick in das große Land der Wissenschaft gewährt und die uns von höherem Standpunkte aus erkennen läßt, daß Berge und Täler, fruchtbare Auen und einförmige Steppen in ihrem bunten Wechsel doch organisch zusammengehören, nicht durch schroffe Grenzlinien voneinander getrennt sind und alle nur gedeihen können unter den lebenspendenden Strahlen derselben Sonne.

1) Ebenda. S. 28.

IV. Teil.

Methodisches.

1. Weckung des Interesses bei mathematisch wenig begabten Schülern.

Daß die Mathematik heute noch die unpopulärste Wissenschaft ist, wird niemand bestreiten wollen, der die Verhältnisse kennt, obwohl gegen früher schon einige Besserung zu verspüren ist. Sie ist es im Kreise der Gebildeten ebenso, wie im Kreise der Gymnasiasten, die sich teils aus eigenem Antriebe, meist dem Zwange der Familie folgend bemühen, „gebildet" zu werden. Den Ursachen dieser sehr zu beklagenden Tatsache ist man schon oft nachgegangen. Schon unsere Zitate aus Lehrbüchern und Programmen geben hier und da Erklärungsversuche. Ganz besonders möchte ich aber auf die bereits mehrfach erwähnte Abhandlung von Spieß[1]) hinweisen, die zuerst einmal feststellt, daß „die weitaus größte Mehrzahl der Gebildeten, die nicht gerade durch Beruf oder Neigung der Mathematik nahestehen, von deren Inhalt und Bedeutung kaum eine Ahnung besitzt. Intelligente und auf verschiedenen Gebieten wohlunterrichtete Leute sehen in ihr nichts als eine geistlose Spezialität, der sie eine kräftige Abneigung entgegenbringen".[2]) Des weiteren findet Spieß einen dreifachen Grund hierfür. Erstens gilt die Mathematik als überaus langweilig, trocken und geisttötend, als eine Anhäufung von Formelkram, unter dem man sich nichts denken kann. Zweitens glaubt man, daß sie einem nichts nütze und nur zu einer Plackerei werde, die man möglichst rasch vergessen muß, sowie man sie beim Abgang von der Schule los ist. Drittens sei die Mathematik ja doch nur für wenig Auserwählte verständlich und ein Genuß, für die meisten Sterblichen aber zu abstrakt, zu hoch.

Es ist hier nicht unsere Aufgabe, diese landläufigen, übrigens vielfach gedankenlos nachgeredeten Vorurteile zu entkräften. Man lese die trefflichen Ausführungen bei Spieß und anderen nach.

So leicht es nun einerseits ist, diese und ähnliche Vorurteile sachlich zu widerlegen, so schwer dürfte es doch andrerseits fallen, den

---

1) (O. S.), S. 238.

2) Andernseits fehlt es auch nicht an solchen Gebildeten, bei denen der Respekt vor der Mathematik umsomehr steigt, je weniger sie von ihr verstehen. Diese sind aber in der Minderzahl.

Unterricht immer von aller Schuld freizusprechen, diesen Vorurteilen ungewollt Vorschub zu leisten. Ja, wir Schulmänner müssen bei ehrlicher Selbstprüfung gestehen, daß wir noch nicht alle und noch nicht immer die Klippen zu vermeiden verstehen, die nur Kunst, Erfahrung und Liebe zu Lehrfach und Beruf vermeiden lehrt. Wir müssen zugeben, daß oft die Schüler die Mathematik nur darum als langweilig, nutzlos und unverständlich verabscheuen, weil wir langweilig und unverständlich unterrichten, weil wir den unschätzbaren Wert, den die Mathematik für Geist und Bildung hat, nicht klar genug aufzudecken wissen.[1]) Wir müssen uns immer vor Augen halten, daß wir an den höheren Schulen nicht Mathematiker auszubilden haben, sondern junge Leute, die des in der Mathematik ruhenden Bildungselementes als Bestandteil zu einer harmonischen Gesamtbildung bedürfen. Die Erziehung durch die Mathematik soll auch dann noch segensreich nachwirken, wenn im späteren Leben alle mathematischen Formeln längst dem Gedächtnis entschwunden sind. Nun kann aber nicht geleugnet werden, daß der Durchschnittsschüler Begeisterung für die Mathematik nur selten mit in die Schule bringt, zumal er ja in bezug auf die genannten Vorurteile von Haus aus — sagen wir einmal: erblich belastet ist. Lust und Liebe sind aber so gewaltige Triebfedern, daß kein guter Unterricht auf sie verzichten sollte. Für mich ist es nun eine Erfahrungstatsache, daß bei mathematisch Unbegabten und vor allem auch bei der nicht geringen Anzahl von mathematisch Böswilligen Lust und Liebe bis zu einem gewissen Grade geweckt werden können, wenn man die Mathematik nebenbei auch geschichtlich behandelt, und zwar im Sinne der Ausführungen des vorigen Kapitels.

Man komme nicht mit dem Einwande, daß es unsrer Wissenschaft unwürdig sei, sie mit Lockmitteln erst schmackhaft zu machen. Ganz gewiß ist die Mathematik um ihrer selbst willen da und ihre Stärke liegt in der logischen Durchbildung, mehr noch in der Erziehung zu schöpferischer Tätigkeit des Verstandes, wenn dieses stolze Wort auf die kleinen Verhältnisse der Schule übertragen werden darf. Was nützt aber diese Erkenntnis, wenn bei vielen, leider vielzuvielen eine

---

1) Im Feuilleton einer viel gelesenen Zeitung schrieb einmal ein Dr. H. M.: „Man braucht nur einmal unter den Schülern einer Klasse Umfrage zu halten, was sie von ihr (der Mathematik) denken, und man wird da recht sonderbare Dinge zu hören bekommen. Die meisten der Gefragten werden rundweg ihrer Mißachtung und ihrem Groll gegen diese Disziplin Ausdruck geben; sie werden darüber klagen, daß sie trotz der Mühe, die sie sich gegeben, niemals auch nur einen Schatten von Verständnis für die Lehren der Mathematik gewinnen konnten." Dann wird behauptet, daß nur eine ganz bestimmte Schädelbildung(!) Sinn für Mathematik (hier also die elementare Schulmathematik) verursachen könne. Solche in den Tageszeitungen immer wieder auftauchenden Irreführungen der öffentlichen Meinung sind höchst schädlich. Wir Mathematiker sollten es nicht unter unserer Würde halten, gegebenenfalls aufklärende Aufsätze zu veröffentlichen.

mitgebrachte Abneigung gar nicht erlaubt, den Hebel anzusetzen? Was nützt die schönste Theorie, wenn die rauhe Praxis ihre Verwirklichung verhindert? Darum scheue man sich nicht, der Schülerseele mittelbar nahezukommen, ihr die nicht schon bei der ersten Einnahme wohlschmeckende geistige Nahrung durch Zusatz von Würze schmackhaft zu machen.

Wenn hier die Ansicht vertreten wird, daß der mathematische Unterricht gegebenenfalls Werbemittel nicht zu verachten braucht, so soll doch nicht behauptet werden, daß es nun gerade die Geschichte sein müsse, die sie zu liefern hat. Auch besonders interessante Beispiele für Anwendung der Mathematik können demselben Zwecke dienen; vielleicht auch nur der Hinweis darauf. Welch gewaltigen Eindruck hat es von jeher auf mathematische Köpfe gemacht, daß die Astronomen durch mühsame Berechnungen mit Hilfe „unheimlicher" Formeln eine Sonnenfinsternis bis auf Sekunden genau für viele Jahre vorauszuberechnen vermögen! Wie machtvoll wirkt immer und immer wieder die Geschichte der Neptunentdeckung auf Verstand und Gemüt! Oder wie bewundert der Laie die Sicherheit, mit welcher der mathematisch gebildete Ingenieur die Tragfähigkeit weitgespannter Brücken im voraus berechnet?

Es wird auf die Eigenart und Neigung des Lehrers ankommen, ob er jenen oder diesen Weg wählt, wenn er nur zu demselben Ziele führt, dem Ziele nämlich, den harten Boden dort zu lockern, wo die mathematische Saat nicht aufzugehen oder nach kümmerlichem Keimen zu verdorren droht.

2. Förderung der Lebendigkeit und Anregung im Unterrichte.

Was ich hier zu sagen habe, hängt mit dem Vorigen zusammen und doch steht es unter einem anderen Gesichtspunkte. Während vorhin nur an die Schüler gedacht war, die für mathematisches Denken schwer zugänglich sind, habe ich jetzt die Gesamtheit der Klasse im Auge.

Es läßt sich nicht leugnen, daß der Unterricht in der Mathematik genau so wie der in anderen Fächern, über einförmige Flächen hinwegführt, auf denen sich hier und da wohl gar die Langeweile als Wandergenossin einstellt. Wenn die Formeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet werden, oder wenn eine mehrere Stunden überdauernde numerische Rechnung nötig wird, um ein durch seinen Zahlenwert wichtiges Resultat zu erhalten, oder auch wenn die so notwendigen Gesamtwiederholungen von Formeln und Lehrsätzen den Schwung der Begeisterung selbst bei den besten Mathematikern der Klasse erlahmen lassen, ja wenn vielleicht der Lehrer selbst zuweilen so etwas wie das Unbehagen der Langeweile verspürt — dann tut eine eingeschobene Geschichtsstunde oft Wunder. Eine solche braucht nie gewaltsam herbeigezogen zu werden. Jedwedes Thema der Schulmathematik bietet historische Anknüpfungspunkte die Fülle; man muß sie nur zu finden wissen.

Daß mir hier nicht jeder Fachkollege beipflichten wird, weiß ich im voraus. Kuchen und Konfekt wird man einwenden, sind keine herzhafte Nahrung und verderben den Appetit zur Hauptkost. So ist es nicht gemeint. Denn erstlich gilt, daß die Geschichte der Mathematik schon an sich eine ebenso gehaltvolle wie schmackhafte Ergänzung der geistigen Nahrung ist und dann — wem mag immer nur Brot und Salz munden? Um wieder ohne Bild zu reden: Es ist unbedingt erforderlich, daß der Unterricht bis hinauf zur obersten Klasse anregend und dadurch mittelbar das Verlangen nach Wissen steigernd wirkt. Niemals darf ein Fach nach Art gelehrter Spezialvorlesungen vorgetragen werden. Noch weniger darf der Lehrer den vorgeschriebenen Stoff in öder Gleichförmigkeit und Trockenheit — man gestatte den Ausdruck — herunterpauken. Die Pädagogik ist eben keine Wissenschaft, aber auch kein Handwerk, sie ist vielmehr eine Kunst. Ein wesentliches Hilfsmittel des schaffenden Künstlers aber ist der Kontrast, der bewußt hervorgerufene Gegensatz in Farben, Lichtern, Tönen, Versmaß und Tonfall. So soll auch der allgemein bildende höhere Unterricht als Kunstform im Kontrast ein Mittel suchen, um das Grün durch das Rot, das Forte durch das Piano, die Prosa durch den Vers wirksam zu machen und so schön erscheinen zu lassen.

Man wende nicht ein, daß schon der Wechsel arithmetischer und geometrischer Stunden solche wirksamen und heilsamen Kontraste in die Arbeit hineintrüge. Erstens ist die Art mathematischen Denkens selbst auf verschiedenen Gebieten bis zu einem gewissen Grade eine einheitliche und dann gibt es Lehrer, die es zumal auf der Oberstufe zweckmäßig finden, eine Reihe von Wochen hindurch die Gedanken des Primaners auf dasselbe Kapitel zu konzentrieren, Lehrvortrag, häusliche Vertiefung und Aufgabengruppen nicht durch fortwährenden Wechsel zu unterbrechen.[1]) Ich gehöre zu diesen Lehrern und meine Erfahrungen veranlassen mich, bei diesem Brauche zu bleiben.

Mehr beachtlich ist schon ein Hinweis auf die Abwechslung, die doch auch interessante Beispiele aus der angewandten Mathematik zu bieten vermögen und die auch bei ununterbrochener Erledigung eines in sich geschlossenen Kapitels jederzeit möglich ist. Nun, ich bin weit entfernt, die Geschichte als Allheilmittel anzupreisen, und stimme denen ohne weiteres zu, die durch Fühlungnahme mit Physik, Astronomie, Technik, Versicherungswesen oder anderen Wissenschaften für Erfrischung und geistige Erholung sorgen. Und dennoch möchte ich behaupten, daß der Geschichte diese Aufgabe in noch weitergehen-

1) Ich halte es aus diesem Grunde für falsch, den mathematischen Unterricht, wie es auch heute noch vorkommt, in derselben Klasse auf zwei Lehrer zu verteilen.

dem Maße zufällt, nicht minder die Verbindung der Geschichte der Mathematik mit deren Anwendungen. Mag der Turner auch noch soviel Abwechslung im Geräteturnen ersinnen und dabei die Durchbildung der verschiedensten Muskeln sorgsam erwägen, immer und immer wird ihm das Turnspiel als eine Abwechslung und Erholung viel gründlicherer Art erscheinen, da es ihn hinwegführt von Reck und Barren und Hantel und ihm erlaubt, auf grünem Rasen und weitem Gelände in freier Bewegung seinen Körper zu tummeln. Trotzdem wird er bald wieder seine schön ersonnenen Geräte vermissen und gern zu strengerer Muskelübung nach strengeren Regeln zurückkehren.

Mit meiner Auffassung stehe ich nicht allein da. Die beiden ersten Teile dieser Abhandlung mit ihren vielen Zitaten brauchen nur einmal auch auf diesen Gedanken hin durchgelesen zu werden. Ich möchte jetzt noch einige Meinungsgenossen hier reden lassen. So sagt O. Spieß[1]): „Unser Streben sei ... dahin gerichtet, möglichst alle Seiten der Wissenschaft den Schülern vorzuführen, aber so, daß jeder Zweig als natürlicher Ausfluß ihres innersten Wesens erscheint. Man gebe bloß das Prinzip auf, in der verfügbaren Zeit nur möglichst viel Wissensstoff in die Köpfe hineinzupumpen, beschränke vielmehr sein Programm, ohne etwas Wesentliches abzuschneiden, so daß man Zeit hat, durch philosophische Betrachtungen und historische Exkurse den Stoff zu vertiefen. So allein ist zu hoffen, daß mit der Zeit das Vorurteil gegen die ‚öde' Mathematik gebrochen, daß ein bleibender Gewinn des mathematischen Unterrichts und damit eine gleichmäßigere Bildung erzielt werde." Und H. Hankel begründet zu Beginn seiner schon oft herbeigezogenen akademischen Rede die Wahl seines geschichtlichen Themas unter anderem mit folgenden Sätzen: „Freilich, wie unsere Wissenschaft auf den meisten Schulen unseres Vaterlandes getrieben wird, da ist sie trocken — unglaublich trocken — fast so trocken, als die Deklinationen unserer lateinischen Grammatik. Aber ist das Philologie? und sind jene Elemente mathematische Wissenschaft? . . . Wie die Sachen heute liegen, ist jedoch der Kreis derer, die so weit in das Innere dieser Wissenschaft eindringen, zu klein, als daß er die öffentliche Meinung unserer Zeit, welche die Anwendungen der Mathematik in der Astronomie, Physik und der Technik wohl zu schätzen weiß, zu bestimmen vermöchte; und Mathematik gilt in weiteren Kreisen noch immer als die Wissenschaft von rein formalem Werte und trockenstem Inhalt. . . . Ich benutze mit Freuden diese mir gebotene Gelegenheit zu einer oratio pro domo und wünschte Ihnen ein Bild von dem inneren Wesen und Leben meiner Wissenschaft geben zu können." Dann sagt Hankel, daß er diesen Zweck dadurch am besten zu erreichen hoffe, daß er die Geschichte dieser Wissenschaft vorführe; denn dadurch werde sie

1) (O. S.), S. 243.

am leichtesten für allgemeinere Kreise ihres scheinbar trockenen und langweiligen Gewandes entkleidet.

Wenn auch Hankel hier die Gebildeten überhaupt im Auge hat und wenn seine Rede auch schon im Jahre 1869 gehalten wurde, so gilt doch das von ihm Gesagte insbesondere, vielleicht in erhöhtem Maße auch für unsere höheren Schüler und — leider, möchte ich hinzufügen — auch noch für den Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts.

3. Keine Überbürdung. Maßhalten bei geschichtlichen Belehrungen, die nicht Selbstzweck des mathematischen Unterrichts werden sollen. Auswahl und nicht Vollständigkeit. Weitere Ideen und Winke methodischer Art.

Mir ist, als ob mir der schwer verhaltene Groll der Kollegen und Eltern nun vernehmlich in den Ohren klänge, der Groll ob all der unerfüllbaren Forderungen, die ich gestellt habe. Welche neue Belastung des Unterrichts und Lehrstoffes! Wie kann man heute, wo sowieso schon alle Welt über Überbürdung unserer höheren Schüler klagt, wo jede „Erleichterung" mühsam erkämpft werden muß, — wie kann man heute, wo Bürgerkunde, Esperanto und sonst etwas neu verlangt wird, nun gar die Mathematik mit neuen Stunden, zum mindesten mit neuem Lernstoff belasten?

Ich gebe zu, daß man mich mißverstehen könnte, wenn ich hier kein weiteres Wort hinzufügte. Darum möchte ich mit aller Entschiedenheit erklären, daß mir bei meinen Vorschlägen grundsätzliche Umwälzungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts ebenso fern liegen, wie die Herbeiführung einer Überbürdung. Nun zur Begründung.

Daß heutzutage durch den „Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" und die damit zusammenhängende „Internationale mathematische Unterrichtskommission" wichtige und tiefgehende Reformen des mathematischen Unterrichtsstoffes angebahnt werden, ist bekannt. Meine Vorschläge lassen jene unberührt. Wie die Stoffverteilung auch sein mag, ob nach norddeutschen oder süddeutschen Plänen unterrichtet wird, ob es sich um realistische oder humanistische Anstalten handelt — immer wird es möglich sein, den mathematischen Unterricht ohne große Opfer an Zeit mit geschichtlichen Belehrungen zu durchflechten.

Schon auf der Unterstufe wird man Gelegenheit dazu haben. Treutlein[1]) findet schon bei Darstellung der Zahlen ein geeignetes Feld, insbesondere bei der Einübung der römischen; später wieder, wenn das Gymnasium ein humanistisches ist, der griechischen Zahlzeichen. Es interessiert den Quartaner oder Tertianer lebhaft, wenn er etwas von der im Mittelalter verbreiteten Zahlendarstellung durch

1) (P. T.), S. 16 ff.

die Finger, oder von dem Abacus-Rechnen im Altertum und späteren Mittelalter erfährt; desgleichen, wenn ihm das „Rechnen auf den Linien" vorgeführt wird. Ich pflege dabei einiges aus den einleitenden Abschnitten des altberühmten Adam Rieseschen Buches „Rechnung nach der Lenge auff den Linien und Feder u. s. w." mitzuteilen und den Einblick in das Original[1]) zu gewähren. Auch geben die französischen Zahlworte wie quatre-vingt, quatre-vingt-dix usw. „Anlaß und Pflicht, mitzuteilen und durch Beispiele zu belegen, wie verschiedenartig das dem Zahlendenken schon zugrunde liegende System des Zahlenaufbaus sich gestaltet hat".[2]) Natürlich wird man das indische Stellenwertsystem und die Bedeutung der Erfindung der Null ebenfalls historisch würdigen. Beim Bruchrechnen wird man die durch das alte Rechenbuch des Ahmes bekannt gewordene eigentümliche Rechnung der Ägypter mit Stammbrüchen wenigstens kurz streifen. Man wird den beachtenswerten Kulturfortschritt betonen, der durch Einführung und Gebrauch der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen gemacht wurde, wird schon auf der ersten Stufe geometrischen Denkens nicht vergessen, dem Tertianer von Euklid zu erzählen — kurz überall wird man ganz von selbst ins Land der Vergangenheit hinüberwandern können.

In höheren Klassen reiht sich ein Anknüpfungspunkt immer enger an den anderen. Wie die mathematische Aufgabe viel Gelegenheit bietet, die Geschichte zu berücksichtigen, ersieht der Leser aus den früheren Kapiteln dieser Abhandlung. Benennungen, wie „harmonisches Mittel", „goldener Schnitt", „Pascalsches Dreieck", „Satz des Ceva", „Diophantische Gleichung", „Sinus", „Ludolphsche Zahl" usw. fordern geradezu geschichtliche Erläuterungen heraus und wie man auf Schritt und Tritt im mathematischen Unterrichte kulturgeschichtliche Belehrungen geben kann, das war ja auch schon ausführlich dargetan worden. In Treutleins Rede kann man nähere Ausführungen darüber nachlesen. Im Rahmen dieser Abhandlung konnte es nur liegen, Hinweise zu geben, wie und wo ungefähr der Hebel anzusetzen ist. Es ist ganz gleichgültig, ob man es nun gerade an den vorgeschlagenen Stellen tut, oder ob man sich nach eigenem Ermessen andere, vielleicht bessere Punkte wählt. Wünschenswert ist nur, daß das Geschichtliche einerseits nicht ausgeschaltet bleibt, andrerseits aber auch nicht zur Hauptsache gemacht wird. Ein Zuviel muß der gründlichen mathematischen Durchbildung der Schüler schaden. Maßhalten ist dringend erforderlich. Wie ist das zu machen?

Zunächst braucht im Laufe der Schulzeit kein zusammenhängen-

1) Urausgaben von Adam Riese (1550) sind nicht selten und auch nicht besonders hoch im Preise, zumal wenn die Exemplare nicht ganz vollständig sind. Mein Exemplar ist die zweite Ausgabe von 1611, die „Carolus Riese, Adami Nepos" besorgte, und die denselben Zweck erfüllt, wie die erste.

2) (P. T.), S. 17.

der Kursus in Geschichte der Mathematik geboten zu werden. Gelegenheiten zu historischen Exkursen sollen nie gesucht, die sich von selbst darbietenden aber nicht unbenutzt vorübergelassen werden. Aber auch das letztere befürworte ich nur nach Maßgabe der zur Verfügung stehenden Zeit. Wie verschieden die einzelnen Schülerjahrgänge nach durchschnittlicher Begabung und geistiger Regsamkeit sind, das weiß jeder Lehrer. Ist also einmal ein in dieser Hinsicht minderwertiger Jahrgang zu unterrichten, so lasse man sich an der Durchnahme des rein mathematischen Pensums genügen. Ich selbst habe mehr wie einmal kaum hier und da ein wenig Geschichtliches besprochen. Der in der Lehrordnung vorgeschriebene mathematische Stoff muß in erster Linie verarbeitet und dem Schüler zum geistigen Eigentume gemacht werden. Noch immer bleibe die logische Schulung Grund- und Eckpfeiler des mathematischen Unterrichts. Eine Verschiebung des Schwerpunktes nach der kulturhistorischen Seite hin würde diese Pfeiler ebenso erschüttern, wie gewisse spielerische Lernmethoden, die neuerdings wieder auftauchen und als Übertreibungen einzelner Fanatiker beklagt werden müssen. Welcher Mißbrauch ist nicht allein schon mit dem Schlagwort: „funktionales Denken" getrieben worden! Reformen sollten immer nur große Gesichtspunkte festlegen und Hauptrichtungslinien geben, nie aber bestimmt umgrenzte Methoden dem Lehrer aufzwingen. —

Glücklicherweise hat man sich nur selten mit einem sehr schlechten Jahrgange zu plagen. Meist läßt sich immer einmal eine Viertelstunde erübrigen, die geschichtlicher Anregung zugute kommt. Dann erzähle man frisch und ohne Weitschweifigkeit und vermeide genaue Jahreszahlen und allzuviel Namen. Auf den Kern der Sache kommt es an. Auch mache man das Geschichtliche nicht zum Gegenstande des Einpaukens, der peinlichen Wiederholung oder zur Quelle von Schulstrafen. Man lasse zum Beginn der nächsten Stunde Freiwillige sich melden, die aus der Erinnerung das Vorgetragene in gutem Deutsch und ohne wesentliche Irrtümer wiederholen. Es hat mir noch nie an solchen Freiwilligen gefehlt. Im Gegenteil sind Meldungen guter Schüler selten so unmittelbar und ehrlich gemeint, wie hier. Ein freundliches Lob spornt andere an und die ganze Klasse pflegt sich schon darauf zu freuen, wenn zur Belohnung für gute Leistungen nach Wochen wieder einmal zu einer kleinen Abwanderung in das Land der Geschichte aufgefordert wird.

Sodann kommt es vor, daß etwa die fünfte Vormittagsstunde oder eine Nachmittagsstunde während der heißen Jahreszeit eine intensive Inanspruchnahme des Geistes der Schülerschaft billigerweise nicht zuläßt. In solchen Fällen erledige man kurz die laufenden Aufgaben und werfe dann einen Blick auf die Geschichte.

Auch plötzlich notwendig werdende Vertretungsstunden in der eigenen oder vor allem in einer noch nicht bekannten Klasse sind so recht wie geschaffen für historische Mitteilungen. Man kann es allemal so einrichten, daß sich diese an den gerade in Behandlung stehenden Stoff anschließen. So stört man nicht den Lehrgang des Kollegen und ist doch einer Förderung der Schüler auf einem — ich möchte sagen: neutralen Gebiete der Mathematik sicher. Freieste Auswahl ist auch hier möglich und kann aus dem Gebiete erfolgen, das dem vertretenden Lehrer gerade vertraut ist.

Diese Freiheit und Ungebundenheit, dieses Losgelöstsein von einengenden Vorschriften ist es überhaupt, was dem Lehrer die geschichtliche Belehrung in dem Maße lieber und wertvoller macht, als er sich häufiger mit ihr befaßt. Wir alle sind Menschen, sind Stimmungen unterworfen und geben trotz aller Übung und trotz ausgeprägten Pflichtgefühls nicht immer unser Bestes. Nutzt man nun gerade die Momente wirklicher Begeisterung weise aus, dann werden die Stunden oder Viertelstunden, in denen wir, innerem Drange folgend, von der Entwicklung und dem Kulturwerte der Mathematik reden, in erhöhtem Maße auch Begeisterung erwecken und ihren Zweck, Bildung zu vermitteln, erfüllen.

Weiterhin möchte ich auf die Fachaufsätze[1]) hinweisen, soweit sie z. B. im Königreich Sachsen auch der Mathematik zugeteilt sind. Das Thema macht auch dem erfahrenen Lehrer oft nicht geringe Schwierigkeiten. Formeln entwickeln oder Konstruktionen beschreiben zu lassen, hat nicht viel Sinn und langweilt die Schüler, verführt nebenbei zu Abschreibereien. Gibt man aber ein geschichtliches Thema einfachster Art, so kann man einen wirklichen deutschen Aufsatz fordern und darf größerer Arbeitsfreudigkeit und Selbständigkeit der Schüler sicher sein.

Bei begabten Zöglingen darf man unbesorgt einen Schritt weiter gehen. Man gebe einem solchen irgendein zweckmäßig ausgewähltes Stück einer Originalarbeit von geschichtlichem Werte in die Hand,[2]) gestatte außer der Schulzeit Fragen und kurze Besprechungen und veranlasse nach Gewährung einer nicht zu knapp bemessenen Frist einen Vortrag vor der Klasse, der durchaus nicht lang zu sein braucht, aber hinterher Gelegenheit zu freier Aussprache geben soll. Daß dabei etwas herauskommt, was mehr als vorübergehenden Wert hat, wird jeder zugeben, der einmal einen Versuch gemacht hat. —

An jeden Mathematiker auf höheren Schulen kommt einmal die

1) Vgl. Lietzmann, IMUK Abhdlg. I, 2. S. 80.

2) Siehe auch die Bemerkung über mathematische Schülerbibliotheken auf S. 116. Vgl. ferner: W. Lorey: „Freiere Gestaltung und Privatstudien im mathematischen Unterricht der oberen Klassen". Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 39 (1908) S. 73ff. Darin sind eine ganze Anzahl geeigneter Themata geschichtlichen Inhalts namhaft gemacht, die zu Schülervorträgen wirklich Verwendung fanden. — Auch Lietzmann am soeben angeführten Orte gibt Beispiele dazu.

Reihe, die Festrede[1]) bei einem Aktus zu halten. Mathematische Themata von allgemeinem Verständnis sind schwer ausfindig zu machen und Mißgriffe kommen nicht selten vor. Den Ausweg, etwas nicht zum Fache Gehöriges zu wählen, empfehle ich nicht. Viele werden dann nur in dem Verdachte bestärkt, daß die Mathematik für weitere Kreise doch nichts tauge. Trägt man aber etwas Biographisches oder Kulturgeschichtliches aus seiner Wissenschaft vor, so hilft man mit Brücken schlagen, die manchen verlocken können, das Wunderland der Königin Mathematik wieder einmal aufzusuchen, um dort nach Schönheiten und Werten zu suchen, von denen sie vorher eine Kluft trennte. —

Ferner noch ein Vorschlag. Unsere Zeit strebt mit Recht darnach, den Schulräumen ein ästhetisches Gewand zu geben, sie des öden „Kastenmäßigen" zu entkleiden. Bilder, wie die Teubnerschen, hängen jetzt in so vielen Klassenzimmern. Es ist nun bei gutem Willen nicht schwer, Bildnisse bedeutender Mathematiker[2]) und Physiker aufzutreiben oder von geschickten Schülern auf photographischem Wege, vielleicht auch durch Handzeichnung herstellen zu lassen. Übrigens gibt es auch im Handel verschiedene Porträtsammlungen, die sich verwenden lassen. Als besonders gut empfehle ich das „Corpus imaginum" der Photographischen Gesellschaft zu Berlin. Hier findet man etwa 600 bedeutende Männer in künstlerisch nach besten Grundlagen ausgeführten Heliogravüren im Bilde dargestellt. Darunter sind einige fünfzig Vertreter der exakten Wissenschaften. Und wieviel Mathematiker? Ich zählte, wenn die Astronomen außer acht bleiben, in dem neuesten Kataloge ganze drei! Es sind Gauß, Weierstraß und Leibniz. Letzterer dürfte aber wohl mehr als Philosoph aufgenommen worden sein. Wird hierdurch nicht wieder bestätigt, was wir über die Popularität der Mathematik gesagt haben?

1) Hier und da werden Schulreden geschichtlich-mathematischen Inhalts schon gehalten worden sein. Man veröffentliche sie in den Programmen oder anderswo, wie es tatsächlich schon geschehen ist. Vgl. das Programm des Gymnasiums zu Görlitz 1905 mit der Rede von W. Lorey: „Über die Wohltat und das Werden der Zahl", auch desselben Verfassers Kaiserrede an demselben Gymnasium: „Archimedes und unsere Zeit" (Zeitschrift für lateinlose Schulen 1908); — endlich desselben Verfassers Vortrag über Leonhard Euler (Leipzig 1907). Nicht selten haben auch Hochschulprofessoren bei Festlichkeiten und aus anderen Anlässen Gelegenheit genommen, weiteren Kreisen Einblicke in die Geschichte der Mathematik zu gewähren. Das begrüße ich ganz besonders mit Freude. Solche Reden sollten immer publiziert werden, da sie meist mehr wie vergänglichen Wert haben. Im Vorhergehenden z. T. genannt sind folgende Reden, wegen deren ich im übrigen auf das Literaturverzeichnis verweise: H. Hankel (Tübingen 1869); C. Neumann (Leipzig 1870); W. Spottiswoode (Dublin 1878); M. Krause (Dresden 1893); E. Lampe (Berlin 1893); H. v. Mangoldt (Aachen 1900); F. Lindemann (München 1904); A. Pringsheim (München 1904).

2) Auch bei Teubner sind einige Bildnisse einzeln käuflich zu haben; so z. B. Abel, Clebsch, Euler, Hamilton, Jacobi, Lobatschefskij.

Hängt man solche Bilder in schlichter Rahmung etwa im Physikzimmer oder in den für geometrisches Zeichnen oder für physikalische Schülerübungen bestimmten Räumen auf, bringt man ferner darunter eine Tafel mit Namen, Lebensdauer und Angabe der wichtigsten Forschungsergebnisse an, so fördert man in unaufdringlicher Weise wiederum geschichtliches Interesse und geschichtliche Kenntnisse. Nicht wenige Schulen haben in diesem Sinne schon vorbildlich gewirkt, unter anderen die städtische Oberrealschule in Halle a. S., deren physikalisches Lehrzimmer dem Interesse und Sammeleifer des Verwalters eine hübsche Galerie dieser Art verdankt. Auch Physikzimmer und Praktikantenraum des Vitzthumschen Gymnasiums in Dresden sind mit achtzehn, dem „Corpus imaginum" entnommenen Bildnissen geschmückt. Einige Bilder großer Mathematiker finden sich auch in der Kreuzschule daselbst.

Man sieht, daß die Geschichte sogar zwischen Mathematik und Kunst eine Brücke zu schlagen vermag.

Am Vitzthumschen Gymnasium existiert eine Sammlung meist durch dazu beauftragte Schüler hergestellter Diapositive mit solchen Porträts, die bei Gelegenheit mit Hilfe des Projektionsapparates vorgeführt werden. Wenn so auch nicht der Vorteil täglichen Anschauens geboten werden kann, so ist doch dafür der geringeren Kosten wegen die Möglichkeit gegeben, eine weit größere Anzahl von Bildnissen zu erwerben und der geschichtlichen Belehrung dienstbar zu machen. Ich pflege jedes Porträt, das mir in einem Buche aufstößt, zu photographieren und das Negativ zu einem Projektionsbilde umzuwandeln, oder auch einem photographiebeflissenen Schüler zu gleichem Zwecke zu übergeben.

Wer noch auf andere Weise nach würdigem Schmucke seiner Lehrräume sucht, der kann auch dadurch der Geschichte seiner Wissenschaft dienen, daß er berühmte Aussprüche mathematischer Meister aufhängt. In einer Prima des Görlitzer Gymnasiums prangte der allbekannte Spruch Platos: „Μηδεῖς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω!" Ich will sonst hier keine Vorschläge[1]) machen. Wähle jeder nach seinem Geschmacke, Das hübsche Buch von Ahrens: „Scherz und Ernst in der Mathematik" (Leipzig 1904) bietet eine überreiche Auswahl dar.

Auch Bücherprämien sollten nicht immer nur nach patriotischen, literarischen, allgemein geschichtlichen oder ähnlichen Grundsätzen ausgewählt werden. Ist ein Schüler auszuzeichnen, der besonderes Interesse für die exakten Wissenschaften hat, so spende man ihm einmal eine Helmholtz-Biographie oder ein anderes geeignetes mathematisch-geschichtliches Werk.[2]) Freilich ist zurzeit die Auswahl gerade keine große.

---

1) Auch Newtons Grabdenkmal mit seiner bekannten Inschrift gehört hierher. W. Lorey hat es in der „Zeitschrift für math. u. naturw. Unt." (1903) veröffentlicht.

2) Am Görlitzer Gymnasium hat 1906 ein Abiturient Eulers: „Introductio ..." als Schulprämie erhalten. Wie die Dinge heute liegen, wird wohl der Mathematiker der Schule mit ähnlichen Vorschlägen nicht immer durchdringen.

Hier möchte ich einen recht beachtenswerten Vorschlag W. Lietzmanns einschalten, den er in dem von J. Ruska herausgegebenen Pädagogischen Archiv (Bd. 52, 1910, S. 690ff.) gemacht hat. Er tritt da für die Schaffung mathematisch-naturwissenschaftlicher Schülerbibliotheken ein und fordert für diese ganz besonders Werke geschichtlichen Inhalts, nicht nur solche über Geschichte der Mathematik, sondern auch solche, die Originalarbeiten enthalten, vielleicht sogar alte, auf antiquarischem Wege aufgestöberte Bücher. Meine Erfahrungen decken sich mit den seinen, daß man nicht selten auf Messen, Jahrmärkten und beim Trödler für wenige Groschen einen guten Fund machen kann.

Und nun zum Schluß noch ein Ruf an alle Fachkollegen, von dem ich besonders erhoffe, daß er vernommen wird und Beachtung findet. Wir Deutsche sind so glücklich, eine Stätte zu besitzen, die in schier unübersehbarer Fülle und in köstlichem Reichtum Schätze birgt, über denen der Geist der Geschichte der exakten Wissenschaften schwebt. Das ist unser großartiges Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik,[1]) dem jetzt in München ein neuer prachtvoller Tempel errichtet wird. Wer auch nur einmal wenige Stunden in diesem Museum geweilt hat, den ergriff Ehrfurcht und Bewunderung für das, was Ritter des Geistes mit selbstgeschmiedeten Waffen, zu denen die Mathematik das beste Erz lieferte, geleistet haben; geleistet haben im Kampfe mit Vorurteil, Aberglauben, widrigen Verhältnissen aller Art, mit Schwierigkeiten, die heute kaum mehr geahnt werden. Selbst solche Besucher, die der Mathematik gänzlich abhold waren, sind dort umgestimmt worden, haben dieser Wissenschaft in stiller Beschämung den Tribut gezollt, den sie als Nutznießer moderner Kultur ihren Vorkämpfern schuldig sind.

Aber wie viele reisen jährlich durch Bayerns Hauptstadt, um in den Bergen Erholung und Naturgenuß zu suchen, ohne auch nur zu wissen, daß ein „Deutsches Museum“ dort vorhanden ist. Ich habe es mir seit Jahren zur Aufgabe gemacht, meine Schüler vor Beginn der großen Ferien auf dieses Museum mit warmen Worten aufmerksam zu machen. Mancher hat daraufhin seine Eltern mit Erfolg gebeten, einen Tag länger in München zu bleiben, um einen Vormittag dem Museum widmen zu können. Ich habe dann nach den Ferien Umfrage in der Klasse gehalten und mir von dem einen oder andern Bericht erstatten lassen über das, was er gesehen und was besonders sein Interesse erregt hat. So kann man den Sinn für die Geschichte der exakten Wissenschaften wecken und fördern, ohne den

1) Vergl. auch H. Wieleitner, IMUK-Abhdlgn. II, 1., S. 83—85. Daselbst auch Notizen über die Geschichte des Deutschen Museums.

Unterricht irgendwie zu belasten. Vorbildlich ist die Einrichtung des Museums insofern, als unter jedem Apparate ein Schild angebracht ist, der in sehr geschickt abgefaßter Form Auskunft über Idee, Zweck und Geschichte des Apparates gibt. Das Deutsche Museum, das auch einen eigenen Saal für Geschichte der Mathematik enthält, ist also in hervorragendem Maße geeignet, nicht sowohl der müßigen Schaulust zu dienen, als vielmehr wertvolle Belehrung auf historischer Basis zu geben; d. h. also einen pädagogisch-wertvollen Anschauungsunterricht zu erteilen.

Leider gestattet es mir der Raum nicht, mehr auszuführen, was ich so gerne täte. Nur des großartigen Stipendienfonds muß ich noch gedenken, der nun schon mehrere Hunderttausend Mark beträgt und den Zweck hat, Reisestipendien zum Besuche des Deutschen Museums zu gewähren. Unter den Stiftern stehen an der Spitze der Deutsche Kaiser und der Prinzregent von Bayern und viele hochherzige Männer jeden Berufes und Standes. Möchten noch viele nachfolgen zum Segen unserer Volksbildung! Hocherfreulich ist es, wenn, wie erst jüngst beim 400jährigen Jubiläum des Nikolaigymnasiums zu Leipzig, bei festlichen Anlässen solche Stipendien an Schulen gegründet werden. Was vermag den Eifer der Schüler mehr anzuspornen, als die Aussicht, durch dieses Stipendium vor Abschluß ihrer Gymnasialzeit Gelegenheit zu bekommen, für einige Tage ohne jeden Aufwand von Mitteln nach München zu reisen, um dort bei freier Verpflegung das Deutsche Museum unter sachkundiger Anweisung studieren zu können!

Möchte die Zeit nicht mehr fern sein, wo jede höhere Schule in stand gesetzt wird, über ein solches Stipendium zu verfügen! Mögen alle Kollegen im Lande das Deutsche Museum in München erst einmal selbst kennen lernen und dann in die Reihe seiner Förderer und Werber eintreten! Dann kommt vielleicht auch einmal die Zeit, wo es einem jeden Gebildeten Bedürfnis ist, nicht nur zu klassischen Museen der Kunst, sondern auch zu dem klassischen Museum der Naturwissenschaften, Technik und Mathematik zu pilgern, in dessen Ehrensaal die Standbilder eines Kepler und eines Gauß mit demselben Rechte stehen wie anderwärts die eines Raffael und Michelangelo.

4. Wo findet der Lehrer für sich und den mathematischen Unterricht geschichtliche Belehrung und Anregung?

Ursprünglich hatte ich beabsichtigt, durch ein Rundschreiben bei einer größeren Anzahl von höheren Schulen anzufragen, ob und inwieweit sie die Geschichte beim Unterricht in der Mathematik berücksichtigen. Solche Rundfragen sind ja schon mehrfach durch die IMUK veranstaltet worden.

Jedoch aus vielen Privatbriefen sowohl als auch aus zahlreichen persönlichen Anfragen gelegentlich der Jahresversammlungen des

„Förderungsvereins“ 1910 in Posen, 1911 in Münster i. W. und jüngst wieder in Halle a. S., konnte ich leider mit ziemlicher Sicherheit entnehmen, daß durch derartige Rundschreiben nur ein negatives Ergebnis zu erzielen gewesen wäre.

Brieflich fragte ich bei solchen Fachkollegen an, die mir als Förderer des geschichtlichen Gedankens bekannt waren. Ich bat, mir mitzuteilen, ob sie Gymnasien usw. namhaft machen könnten, die unserer Sache geneigt seien. Alle Antworten fielen mehr oder weniger pessimistisch aus. Ich führe im Auszug einige Stellen aus diesen Briefen an, wobei ich mir die Wiedergabe besonders kräftiger und temperamentvoller Äußerungen versage. „Beim mathematischen Schulunterricht wird die Geschichte der Mathematik zu wenig oder auch gar nicht berücksichtigt.“ „Hier sieht es sehr traurig aus.“ „Ob etwas geschieht, hängt zu sehr von der Eigenart des Einzelnen ab.“ „Was ich vernahm, war recht betrübend.“ „Dem Gros der jüngsten Lehrer ist Geschichte der Mathematik Hekuba.“ „Ich sehe schwarz.“ „Viele vermeiden direkt das Geschichtliche und haben gar kein Interesse dafür.“ „Im allgemeinen denke auch ich pessimistisch, weil viele Kollegen zu wenig Originalwerke studiert haben. Erst dann wächst das Interesse für geschichtliche Auffassung.“ „Systematische Geschichte der Mathematik und Physik ist hier nicht gepflegt worden.“ „Leider denken viele Fachkollegen nicht so, wie wir.“

Es lag mir daran, an anderen einen Rückhalt zu haben, wenn ich behaupte, daß trotz der nachgewiesenen Zunahme geschichtlicher Beifügungen in den Lehrbüchern und trotz der nachgewiesenen Vorschläge und Aufforderungen aus allen Zeiten zu geschichtlicher Färbung des mathematischen Unterrichts heute noch vieles im argen liegt.

Welche Gründe mögen dazu vorhanden sein? Nahezu alle Anregungen wissenschaftlicher Art für seine Betätigungen im Amte schöpft der junge Lehrer aus den Vorlesungen, die er während seiner Studienzeit hörte. Auch das Studium gelehrter Werke seiner Fachliteratur pflegte er zumeist nur nach Maßgabe der Empfehlungen akademischer Lehrer vorzunehmen, und es ist folglich zumeist ihr Geist, der sich darin wiederspiegelt. Fragte man nun noch vor wenigen Jahren irgendeinen Kandidaten des höheren Schulamtes, was er während seiner Universitätsjahre von der Geschichte der Mathematik gehört habe, so konnte man nur selten einmal eine günstige Antwort vernehmen.

Hat es nun an Zeit gefehlt oder am guten Willen oder vielleicht am Interesse für die Sache? An letzterem jedenfalls nicht, wie mir auf Befragen des öfteren bekundet wurde. Von den zahlreichen Empfängern von Sonderabzügen meiner Programmarbeit von 1908 und meiner Posener Rede von 1910 sind mir ausnahmslos zustimmende Urteile zugegangen, ganz besonders aus der Reihe der jüngeren Kollegen.

Wir suchen also weiter nach dem Grunde und greifen nach den

Vorlesungsverzeichnissen der deutschen Universitäten und Hochschulen. Wie selten[1]) taucht in ihnen einmal die Anzeige eines historisch-mathematischen Kollegs auf! Viele Verzeichnisse muß man völlig enttäuscht wieder beiseite legen.

Da in den Abhandlungen der IMUK (Band III, Heft 8) noch ausführlich über das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten zu sprechen sein wird, darf ich mich hier mit Andeutungen begnügen.

Zunächst ist anzunehmen, daß viele Dozenten auch solche Vorlesungen, die mit rein mathematischem Titel angekündigt werden, einleitungsweise kurz historisch behandeln. Das korrigiert schon etwas unsere vorläufige Feststellung. Indes, mag man hier auch weitgehende Hoffnungen hegen, für ein Studium der Gesamtgeschichte der Mathematik ist hiermit dem künftigen Schulamtskandidaten nicht gedient. Er wird sich bei seiner wahrlich reichlich mit Pflichtvorlesungen besetzten Zeit selbst bei gutem Willen allein durch Privatarbeit kaum einen Überblick über das ganze große Gebiet verschaffen können; er bleibt eben auf Vorlesungen angewiesen.

Daß es an solchen Vorlesungen aber fehlt, muß zugegeben werden. Und die Gründe? Ich vermag mich den Befürchtungen K. Reinhardts nicht anzuschließen,[2]) daß nur an wenigen Hochschulen geeignete Kräfte zu finden seien. Gar vieles und wertvolles birgt der Wissensschatz deutscher Hochschulmathematiker, was nie vom Katheder aus fruchtbar gemacht und daher leicht als nicht vorhanden angesehen wird. Ich möchte hier einen Ausspruch G. Eneströms[3]) einschalten. „Jetzt dürfte eine solche Auffassung (daß geschichtliche Untersuchungen unnütze Zeitverschwendung, ja sogar verwerflich seien), eher als eine Kuriosität betrachtet werden, und die meisten Fachgenossen sind wohl darüber einig, daß die Geschichte der Mathematik nicht nur an und für sich von Belang ist, sondern auch für das Studium der Mathematik großen pädagogischen Wert hat, und daß die Einsicht darin sogar für die Fortbildung der Wissenschaft nicht selten von Nutzen sein kann." Diese Worte eines so namhaften Gelehrten, wie G. Eneströms (in Stockholm) beweisen von neuem, daß in der Sache selbst beruhende Hemmungen auf den Universitäten nicht vorhanden sind.

1) Ich durchblätterte nach dem Auszuge der „Physikalischen Zeitschrift" für das laufende Semester (S. S. 1912) die Vorlesungsverzeichnisse der 47 Hochschulen deutscher Zunge und fand kein einziges Kolleg mit geschichtlich-mathematischem Titel angezeigt! Nur über Geschichte der Astronomie liest Förster an der Universität Berlin.

2) Unterrichtsblätter f. Math. u. Phys. XIII. Heft 4, S. 73. Um so mehr stimme ich ihm zu, wenn er sagt: „Ich meine, es müsse für jeden Forscher, welcher Spezialrichtung er auch angehören mag, eine dankbare Aufgabe sein, seine Zuhörer einen Blick in die geistige Werkstatt seines Forschungsgebietes tun zu lassen."

3) Bibliotheca Mathematica, III. Folge, Bd. 1 (1900), S. 4.

Die Zurückhaltung, die ich beklage, hat viel mehr andere Ursachen, mehr äußerlicher, wie grundsätzlicher Art. Von sehr maßgebender Seite wurde mir bedeutet, daß regelmäßige Vorlesungen über Geschichte der Mathematik darum nicht eingeführt werden könnten, „weil die Zahl der Gebiete, die ohnehin mit regelmäßigen Vorlesungen bedacht sein wollen, übergroß sei". Gleichzeitig wurde es aber als wünschenswert[1]) bezeichnet, daß allen Dozenten Berücksichtigung des geschichtlichen Elementes nebenbei zu empfehlen sei und daß von Zeit zu Zeit auch Spezialvorlesungen eingeschoben werden mögen. Letzteres geschah z. B. vor einigen Jahren in Göttingen, wo Conrad H. Müller, der unterdessen nach Hannover berufen worden ist, solche geschichtliche Spezialvorlesungen abhielt, wie auch schon früher in Straßburg durch M. Simon.[2])

Daß wenigstens im Sinne der hier ausgesprochenen Wünsche in Zukunft verfahren werden möge, ist eine sehr aufrichtige Bitte, die an dieser Stelle auszusprechen mir Bedürfnis ist.

Weiter möchte ich eine Anregung geben, mit der ich ebenfalls nicht allein dastehe. Sie betrifft die Abhaltung historischer Seminarübungen an den Universitäten und technischen Hochschulen.

Zu den Universitäten, die auch hier vorangegangen sind, gehört u. a. Göttingen, wo z. B. F. Klein im Wintersemester 1911 die verschiedenen Formen, in denen die Infinitesimalrechnung vom Altertume her aufgetreten ist, nach den Originalen studieren ließ. Dieses Seminar hat für alle Beteiligten einen sehr anregenden Verlauf genommen. Klein hat solche Seminarübungen schon öfters gehalten, bald über diesen, bald über jenen Gegenstand. Ihre beste Unterstützung fanden sie in den Göttinger Bibliotheksverhältnissen. Die allgemeine Universitätsbibliothek ist reich an alten Beständen und für die neuere Zeit wird sie unterstützt durch das Lesezimmer des mathematisch-physikalischen Seminars.

Ebenso hat der 1908 leider verstorbene A. v. Braunmühl schon seit 1897 an der Technischen Hochschule in München mathematisch-historische Vorlesungen gehalten, von 1899 an sogar Zyklen solcher Vorträge. Die Themata waren: Geschichte der Quadratur des Kreises (14 Vorträge), Geschichte der Entstehung der Infinitesimalrechnung und

1) Derartige Wünsche wurden in letzter Zeit mehrfach öffentlich vertreten; so zu Pfingsten 1907 in Dresden auf der Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (vgl. Unterrichtsblätter [Berlin, Salle] XIII, Heft 4, S. 76 ff.) und am 25. Sept. 1907 in Basel auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner (vgl. „Universität und Schule", Vorträge, gehalten usw. [Teubner, 1907], S. 54). Desgl. 1904 auf einer Versammlung Schweizer Mittelschullehrer. Vgl. auch M. Gebhardt, Programmarbeit, Dresden 1908. S. 6. Siehe auch auf S. 127, Anm. 1 die Angabe über Vorlesungen von F. Klein.

2) Simons Vorlesung ist in erweiterter Gestalt in Buchform erschienen. Sie wird später (S. 124) noch zu besprechen sein.

Geschichte der Geometrie im 16. und 17. Jahrhundert. Das Verfahren war nach Angabe v. Braunmühls[1]): Erst kurze Übersicht über den zu besprechenden Stoff; dann Einteilung in Abschnitte, deren Behandlung dann den einzelnen Studierenden zugewiesen wurde unter gleichzeitiger Angabe der hauptsächlichsten Quellen, wobei stets das Studium der Originalarbeiten verlangt wurde. Einzelne Vorträge wurden schriftlich ausgearbeitet und mit Disposition versehen. Bei der zuletzt vorgenommenen Aussprache wurden sie nach Inhalt und Form kritisiert und eine lebhafte Diskussion bewies das große Interesse der Teilnehmer.

Man sieht also, an guten Vorbildern fehlt es nicht, ebensowenig an dem Nachweise, daß Erfolg in Aussicht steht.

Sehr förderlich für geschichtlich-mathematisches Interesse wäre es ohne Zweifel auch, wenn öfters geschichtlich-mathematische Themata für Doktordissertationen[2]) gestellt würden. Die gründliche Vertiefung in Originalarbeiten aus vergangener Zeit wäre eine sehr zu begrüßende Folge davon. Denn daran fehlt es zurzeit bei den Gymnasialmathematikern am meisten. Viele von ihnen, die nicht ganz spezielle Anlagen für irgendein Gebiet der höheren Mathematik haben, würden für ihr zukünftiges Lehramt weit mehr Gewinn aus gründlichem Eindringen in den Geist eines mathematischen Klassikers entnehmen, als aus einer Forschungsarbeit anderer Art, die nur selten später zu Fortsetzungen führt und wohl meistenteils nur der Erwerbung der ersehnten Doktorwürde galt.

Auch auf eine andere Stelle möchte ich wiederholt[3]) hinweisen, an welcher der Student sich selbst eine Quelle historischer Belehrung erschließen kann. Die wissenschaftlichen Vereine an deutschen Hochschulen haben es stets als eine ihrer vornehmsten Aufgaben betrachtet, ihrem Namen durch die Pflege gegenseitiger wissenschaftlicher Anregung Ehre zu machen. Die Vorträge, die in den mathematischen Vereinen dieser Art gehalten werden, bieten nun oft Ergebnisse von Spezialforschungen, die in der kurzen zur Verfügung stehenden Zeit nicht immer allen Kommilitonen zum klaren Verständnis gebracht werden können. Ich glaube, daß für solche Vorträge ein Thema aus der Geschichte der Wissenschaft ganz besonders geeignet ist. Das Interesse hierfür wird ein allgemeines sein, und ein solcher Stoff, der verhältnismäßig nicht zu schwere Kost bietet, spricht nach der Tages Last und Mühe leichter an. Auch wird dadurch erreicht, daß die Vereinsmitglieder sich der Sache mehr zuwenden. Sie lassen

1) Bibliotheca Mathematica (v. Eneström) III. Folge, Bd. 3 (1902), S. 403.

2) Beispielsweise ist die schon genannte Arbeit von Conrad H. Müller über die Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert (vgl. Literaturverzeichnis) eine Doktordissertation.

3) M. Gebhardt, Programmarbeit, Dresden 1908, S. 7; ferner M. Gebhardt, Vortrag auf der Posener Hauptvers. des „Ver. z. Förd. d. math. u. nat. Unt.“, abgedruckt in Ruskas Pädag. Archiv 1910, S. 494.

sich vielleicht selbst zum Studium eines geschichtlichen Werkes anspornen und bringen — soweit sie sich später dem höheren Lehrfache zuwenden — aus dem Verein eine Anregung mehr mit, die für ihre Arbeit im Amte fruchtbringend werden kann.

Tritt nun der junge Kandidat in die Vorbereitung zum Lehramt ein, so wird ihm an einem Seminar einer höheren Schule die erste Anleitung für den Beruf gegeben. Ich bin der Meinung, daß hier nicht nur eine technisch-pädagogische Einführung, sondern auch eine wissenschaftliche Weiterbildung am Platze wäre. Während in den Königreichen Bayern und Sachsen die Mathematiker zusammengenommen und fachmännischer Leitung unterstellt werden, ist dies in Preußen nicht überall der Fall. Das müßte bis zu einem gewissen Grade gefordert werden. Wenigstens in größeren Städten sollten die Seminaristen nach Fächern zusammengefaßt und ihnen neben der bisher üblichen pädagogisch-praktischen Ausbildung auch eine wissenschaftlich-historische Fortbildung geboten werden. Das letztere müßte durch einen dazu geeigneten älteren Schulmathematiker in zusammenhängenden Vortragskursen geschehen. Ich gebe dieser Anregung, die mir J. Tropfke zuerst aussprach, hier unter freudiger Zustimmung Raum. Natürlich soll damit nicht eine vollständige Trennung zwischen Mathematikern und Lehrern anderer Fächer befürwortet werden. Ein Verkehr zwischen beiden ist notwendig und kann dem späteren Zusammenarbeiten nur dienlich sein.

Leider vermißt man zurzeit in vielen Lehr- und Prüfungsordnungen der deutschen Bundesstaaten eine Berücksichtigung des Geschichtlichen bei Festlegung des mathematischen Stoffes. Da hat es wohl bei ihrer Ausarbeitung an geeigneter Anregung gefehlt. In Dänemark stehen die Dinge viel günstiger. Dort wird von den Lehramtskandidaten eine nicht geringe Menge historischer Kenntnisse in der Mathematik verlangt. Den Anstoß dazu gab H. G. Zeuthen, der als Professor an der Universität Kopenhagen zugleich einer der hervorragendsten lebenden Forscher auf mathematisch-geschichtlichem Gebiete ist. In Österreich wird schon in der „Instruktion für den Unterricht an den Realschulen" vom Jahre 1899 (Wien, 5. Aufl.) auf S. 117 vorgeschrieben: „Nach der theoretischen Seite hin werden an passenden Stellen eingestreute historische Daten geeignet sein, das Interesse der Schüler wachzurufen, und die wertvolle Vorstellung in ihnen erzeugen, daß die Wissenschaft das Resultat langwährender unausgesetzter Tätigkeit des menschlichen Geistes ist." Im Großherzogtum Baden wird in § 16 der Prüfungsordnung für Kandidaten des höheren Schulamts von 1903 für Mathematik als Hauptfach „Bekanntschaft mit den Haupttatsachen der Geschichte der Mathematik" gefordert. Soviel ich unterrichtet bin, wird auch in die in Vorbereitung befindlichen neuen bayrischen Examensvorschriften die Forderung geschichtlicher Kenntnisse mit aufgenommen werden. Im Königreich Sachsen ist zunächst in bezug auf die Lehrordnungen ein Anfang gemacht. In wohlwollender Erfüllung meiner Bitte wurde in dem neuen „Gesetz über das höhere Mädchenschulwesen vom 16. Juni 1910" für die sechsklassigen Studienanstalten in § 38 der Satz aufgenommen: „An geeigneten Stellen in knapper und sorgsam abgewogener Weise Tatsachen aus der Entwicklungsgeschichte der Mathematik einzuflechten, wird wesentlich zur Belebung des Unterrichts beitragen." Vielleicht findet dieser Vorgang bald in anderen Staaten Nachahmung. Dann wird ein wichtiger Ansporn da sein, der den Studenten und jungen Gymnasiallehrer viel erfolgreicher auf geschichtliche Studien hinweist, als es die wohlmeinendsten Ratschläge von nichtamtlicher Seite aus vermögen. In dem von der Unterrichtskommission der Deutschen Naturforschergesellschaft für die Meraner Versammlung 1905 ausgearbeiteten Reform-Lehrplane werden für Oberprima „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte" gefordert. Es würde mit Dank zu begrüßen sein, wenn wie in Sachsen bei Neuaufstellung amtlicher Lehrordnungen diese Forderung, vielleicht in noch etwas erweiterter, immerhin aber dem Lehrer hinreichenden Spielraum lassender Form Erfüllung fände.[1]) Ich bin überzeugt, daß es auch in Deutschland nur eines Anstoßes aus Schul- und Hochschulkreisen bedarf, um etwas zu erreichen. Die Neigung dazu ist schon vielfach vorhanden. Eine im Auftrage der IMUK im Großherzogtum Oldenburg veranlaßte Rundfrage hatte zustimmende Erklärungen der Lehrerschaft zur Folge.[2]) Antworten auf eine ebensolche Rundfrage bei den höheren Schulen der Hansestädte[3]) beweisen ebenfalls, daß eine maßvolle Herbeiziehung der Geschichte der Mathematik dem Unterrichte nur zum Vorteil gereichen kann.

Viel bleibt also noch von der Zukunft zu erhoffen. Wie die Dinge heute liegen, kann der Schulmathematiker, der den guten Willen hat, in die Geschichte seiner Wissenschaft einzudringen, nur auf geeignete

1) Vergl. H. Wieleitner, IMUK-Abhdlgn. II, 1. S. 63. Dort wird festgestellt, daß die bayrischen Kollegen ganz allgemein der Ansicht seien, daß nur ja nichts darüber vorgeschrieben werden solle, „sonst hätten wir bald denselben Gedächtnis- und Zahlenkram wie vielfach noch in der Weltgeschichte". Für gelegentliche Bemerkungen in allen Klassen aber stimme eine große Mehrheit. Meine Meinung geht dahin, daß ein allgemeiner Hinweis auf geschichtliche Behandlung allerdings für die Lehrordnungen wünschenswert ist, daß aber den Wünschen der bayrischen Gymnasiallehrer insofern Rechnung zu tragen ist, als jede Festlegung eines genau verteilten Lehrplanes vom Übel sein würde.

2) Vergl. A. Böttger, IMUK-Abhdlgn. I, 4; S. 83.

3) Vergl. A. Thaer, IMUK-Abhdlgn. I, 4; S. 38.

Literatur hingewiesen werden. Es sei mir zu diesem Zwecke gestattet, zum Schluß einige Werke ohne jede Vollständigkeit namhaft zu machen, von denen die meisten in den früheren Kapiteln gelegentlich schon vorkamen.

Da kommen zunächst Quellenwerke zum eigenen Studium in Betracht. Voranstellen möchte ich unseren Altmeister M. Cantor. Es müßte jeder zum mindesten einige Abschnitte aus dessen großem, in seltenem Grade vollständigen vierbändigen Werke: „Vorlesungen über Geschichte der Elementarmathematik" im Zusammenhange studiert haben. Berichtigungen, die sich aus neueren Forschungen ergeben, werden regelmäßig in Eneströms Bibliotheca mathematica veröffentlicht.

Dasselbe gilt von dem Werke: „Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter" von H. Hankel, das nach dem frühen Tode des Verfassers von seinem Vater 1874 herausgegeben wurde. Ist es auch heute in manchen Punkten überholt, so gehört es doch zu den klassischen Werken mathematischer Geschichtsforschung in Deutschland und wird ebenso durch die Gründlichkeit seiner Darstellung wie durch die Ursprünglichkeit seiner Form den Leser fesseln.

Diesem älteren Werke möchte ich eines aus neuester Zeit zur Seite stellen, wenn es auch einen ganz anderen Charakter trägt. Es ist die „Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte" von M. Simon (1909). Diese sehr ansprechende Schrift ist im wesentlichen die Drucklegung der Vorlesung, welche der Verfasser 1903 in Straßburg gehalten hat, berücksichtigt aber im Abschnitt „Babylon" auch die neuesten Grabungen. Hieroglyphen und Keilschrift sind ausführlich behandelt, zahlreiche gute Abbildungen antiker Bildwerke mit Inschriften sind beigegeben und viele mathematisch wertvolle Werke der Alten werden nach Form und Inhalt ausführlich besprochen. Mir scheint Simons Werk gerade für den Gymnasiallehrer ganz besonders geeignet. Man schaffe es für die Schulbibliothek an und weise auch die altphilologischen Kollegen auf seinen archäologischen Inhalt hin.

An vierter Stelle nenne ich das ausgezeichnete Werk von H. G. Zeuthen: „Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert", das „mehr für Mathematiker und Mathematiklehrer als für Historiker bestimmt ist", wie es im Vorwort heißt; ferner desselben Verfassers: „Lehre von den Kegelschnitten im Altertum". Sodann denke ich an v. Braunmühls: „Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie" in zwei Teilen, die 1900 und 1903 erschienen sind, weiterhin an die historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik von O. Schlömilch, die seit dem zwanzigsten Jahrgange 1875 dem Hauptwerke angegliedert wurde; dann aber vor allem an die Bibliotheca mathematica, herausgegeben von G. Eneström mit dem Nebentitel: „Zeitschrift für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften". Sie machte mehrere Umgestaltungen durch und erscheint mit neuer Numerierung der Bände seit 1900 bei B. G. Teubner als III. Folge.

Ähnlichen Zwecken dienen die „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften", die 1877 Moritz Cantor begründete und die in zwanglosen Heften erscheinen.

Alle diese Zeitschriften sind reiche Fundgruben für den wißbegierigen Leser. Sie sind ebenso durch große Vielseitigkeit wie durch wissenschaftliche Gründlichkeit ausgezeichnet.

Wer sich genauer über die einschlägige Literatur orientieren will, der greife zu Felix Müllers: „Führer durch die mathematische Literatur", der in besonderer Weise gerade die historische Seite berücksichtigt.

Dann kommen Werke,[1]) welche die gesamte Geschichte der Mathematik in mehr oder weniger gedrängter Darstellung umfassen und die beim Gebrauch im Unterrichte gute Dienste leisten. Ich greife nur die folgenden heraus:

„Geschichte der Mathematik, I. Teil von den ältesten Zeiten bis Cartesius; II. Teil von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts, (1. Hälfte Arithmetik, Algebra, Analysis)." Der erste Teil hat S. Günther, der zweite H. Wieleitner zum Verfasser. Dieser verarbeitete dabei den Nachlaß A. v. Braunmühls. Das Werk ist in der bekannten Sammlung Schubert 1908 bezw. 1911 erschienen und, wie es in der Vorrede zum erste Teile heißt, für alle diejenigen gedacht, „welche im eigenen Studiengange zu einer auch historischen Ausbildung keine Gelegenheit fanden, im Verlaufe ihrer späteren Tätigkeit aber die Notwendigkeit einsahen, ihr Wissen auch nach dieser Seite hin abzurunden und umzugestalten". Die Verfasser möchten ihre Leser vor allem auch unter den Lehrern der höheren Schulen suchen. Angegliedert ist in übersichtlicher Zusammenstellung ein Verzeichnis von Werken über die Geschichte der Mathematik, aus dem sich jeder das ihn besonders Interessierende herauszusuchen vermag.

Leider ist eine Orientierung über die Geschichte der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert heute nicht leicht, da hier zuviel in die jüngste Zeit hineinspielt und der rechte Überblick von höherem Standpunkte aus noch fehlt. Für den Unterricht ist wohl auch nicht viel Bedarf dazu vorhanden. Wer indes den Wunsch hat, der sei auf die Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften hingewiesen, die noch im Erscheinen begriffen ist, eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalte an gesicherten Resultaten zu geben bezweckt und durchaus auf historischer Basis steht. Hier wird er erschöpfende Quellenangaben finden und

1) Eine eigentliche Kritik der folgenden Werke ist entsprechend den an früherer Stelle (siehe S. 28) ausgesprochenen Grundsätzen vermieden worden. Nur soweit es der Zweck erfordert, wurde ihres Inhaltes gedacht.

kann ermitteln, wer zuerst ein Problem behandelt und wie er es bearbeitet hat. Mit besonderem Interesse wird man dem VII. Bande entgegensehen, der Geschichte, Philosophie und Didaktik enthalten soll.

In einiger Zeit wird der mathematische Band der großen Teubnerschen Unternehmung: „Die Kultur der Gegenwart" unter Redaktion von F. Klein heftweise herauskommen. Die Darlegung der verschiedenen Einzelgebiete wird hier ebenfalls durchaus historisch orientiert sein, weil es nur so möglich erschien, eine den weiteren Kreisen der Gebildeten nicht völlig unzugängliche Darstellung zu geben. Es enthält das zunächst erscheinende Heft: Zeuthen, „Die Mathematik im Altertum und Mittelalter".

Wer nur kurze und knappe, aber umfassende Orientierung haben möchte, der greife zu dem Heftchen 226 der Sammlung Göschen, das unter dem Titel „Geschichte der Mathematik" von A. Sturm geschrieben wurde und soeben in zweiter Auflage herauskam. Ich empfehle dieses Bändchen gern solchen Primanern, die sich für die Geschichte der Mathematik interessieren.

Einen ganz besonderen Rang aber nimmt ein verdienstvolles Werk ein, das recht eigentlich dazu wie geschaffen ist, dem Lehrer der Mathematik als Nachschlagebuch zu dienen und das in keiner Schulbibliothek fehlen sollte. Es ist die schon oft namhaft gemachte zweibändige „Geschichte der Elementar-Mathematik" von J. Tropfke. Nach meinen Erfahrungen darf behauptet werden, daß seit Erscheinen dieses Werkes im Jahre 1902 eine neue Belebung des geschichtlichen Interesses unter den Gymnasiallehrern einsetzt. Ich möchte daher Tropfkes einleitende Worte, daß der große Wert geschichtlicher Mitteilungen beim mathematischen Unterrichte allgemein anerkannt sei, für die Zeit der Herausgabe des Buches nicht so recht glauben, vielmehr dem Verfasser das Verdienst zusprechen, diese Worte vorausahnend erst wahr gemacht zu haben. Es gibt wohl heutzutage kein Lehrbuch mit historischen Einstreuungen, das nicht aus Tropfke geschöpft hat[1]) und der Leser braucht nur den I. Teil meiner Abhandlung zu studieren, um die Wahrheit dieser Behauptung selbst nachzuprüfen. Tropfke baut auf eigenen, sorgfältigen Quellenstudien auf und gibt seinem Werke durch Übersichtlichkeit, Klarheit und Vollständigkeit den Charakter eines Handbuchs von hervorragendem Werte. Es ist nach Stoffen geordnet und enthält viele Originaltextproben, kann also vielfach im Unterrichte unmittelbar in der Hand des Lehrers Verwendung finden. So pflege ich seit Jahren einige der im Anhange des ersten Bandes zusammengestellten Beispiele aus Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, Lionardo von Pisa, aus mittelalterlichen Cossisten usw. meinen Schülern mitzuteilen. Wir übersetzen gemeinsam die Satz für Satz von mir vorgelesenen lateinischen Texte, während gleich-

1) Vgl. S. 31.

zeitig ein Schüler an der Wandtafel einen Auszug in moderner Formelsprache machen muß. Wie viele lehrreiche Zusätze und Wiederholungen lassen sich dabei über quadratische Gleichungen usw. anschließen! Ich bedaure, daß es mir der Raum nicht erlaubt, die Fachkollegen ausführlicher mit der Art und Weise bekannt zu machen, wie ich beispielsweise hier die Geschichte der Mathematik mit mathematischer Unterweisung selbst organisch zu verknüpfen suche.

Noch ganze Seiten ließen sich ohne Mühe mit der Aufzählung weiterer Schriften anfüllen, die im Sinne der Überschrift dieses Abschnittes wohl empfohlen werden könnten.[1]) Ich beabsichtige aber keineswegs eine Bibliographie zu geben. Wo eine solche zu finden ist, wurde angedeutet. Ich nannte in persönlich bedingter Auswahl, was mir besonders geeignet erscheint und gebe gern zu, daß ein anderer diese Auswahl anders getroffen haben würde. Man wird mir also keinen Vorwurf aus der Lückenhaftigkeit dieser Skizze machen dürfen. Anregung zu geben, war meine Absicht, die mir persönlich vertrauten Werke zu nennen, mein Ziel. Nicht verfehlen möchte ich aber, die Lektüre geeigneter Programmschriften, von denen schon im II. Teile die Rede war, nahezulegen, und ich habe aus diesem Grunde dem zum Schluß folgenden Literaturverzeichnis eine größere Anzahl von Programmtiteln angereiht, die zum Studium verlocken mögen. Das eine oder andere findet sich sicher in den Schulbibliotheken. —

Ich vermag aber nicht zu schließen, ohne noch einmal mit warmen Worten auf die „Elementarmathematik von höherem Standpunkte aus" hinzuweisen. F. Klein hat sich mit Veröffentlichung dieser Vorlesung[2]) ein großes Verdienst um die höhere Lehrerschaft erworben und unser Dank müßte darin bestehen, daß wir alle uns in dieses einzigartige Buch vertieften, um reiche Belehrung daraus zu schöpfen und neues Leben unserer alten Unterrichtsführung einzuflößen. Ist es auch kein Geschichtswerk nach Art der vorher angeführten, so ist es doch reich an Geschichtlichem. Es ist ja alles andere,

1) Ich mache z. B. auf „Inhalt und Methode des geometrischen Unterrichts" von H. Schotten aufmerksam. Dieses originelle Buch bietet Gelegenheit, die Entwicklung der Planimetrie nach Inhalt und Methode durch Studium einer reichen Fülle von Lehrbüchern geschichtlich zu verfolgen. Zumal der junge Lehrer kann viel für seinen Unterricht daraus lernen.

2) Veröffentlicht 1908—09 vorläufig in autographierter Form in der Bearbeitung von C. Hellinger. — K. Kommerell an der Technischen Hochschule Stuttgart hat für das laufende Sommersemester (1912) eine Vorlesung mit dem Titel des Kleinschen Buches angezeigt. Offenbar besteht zwischen beiden ein innerer Zusammenhang. — Übrigens sind verschiedene andere autographierte Hefte Kleinscher Vorlesungen in ähnlicher Weise historisch durchsetzt; z. B. die Vorlesungen über höhere Geometrie; nur wenden sie sich nicht so direkt an den Gymnasiallehrer.

nur kein Schulbuch; aber ein Lehrbuch ist es für den Lehrer, und zwar nicht nur für den Anfänger. Es zeigt uns, wie wir Geschichte im Unterricht treiben können, ohne Unterricht in der Geschichte zu geben. Und darauf kommt es an, wie man wohl aus allen meinen Ausführungen entnehmen wird. Es zeigt uns aber auch in unübertrefflicher Weise, wie man in den Lehrvortrag seine Persönlichkeit hineinlegen soll und wie man nur dann nachhaltigen Eindruck auf seine Schüler machen wird, wenn man frei von der Schablone und frei von der Fessel „vorschriftsmäßiger" Methode alte Dinge in neuem Lichte darzustellen lernt. Ich bin überzeugt, daß nicht jeder Lehrer jeden Vorschlag Kleins annehmen wird; aber ich glaube, daß wir alle unseren Unterricht verbessern und im Sinne einer gesunden Reform auf höhere Stufe stellen können, wenn wir uns entschließen, zu dem Verfasser zu treten, um mit ihm von höherem Standpunkte aus Umschau zu halten. Dann wird sich unser Blick erweitern und mit Freude werden wir erkennen, daß auch noch jenseits des bisher bestellten Ackers fruchtbares Land die Fülle liegt.

5. Gedanken über ein mathematisches Lesebuch.

Wenn es mir gelungen sein sollte, den einen oder anderen Fachkollegen zu überzeugen, so könnte eine Frage an mich herantreten, auf die ich noch eingehen möchte. Wo kann man im Buchhandel geeignete Zusammenstellungen aus klassischen Werken der mathematischen Wissenschaften finden? Gibt es schon Bücher, die eine Auswahl aus den doch meist schwer zu erhaltenden und oft so umfangreichen Originalen bieten? Oder bleibt man auf die Mitteilungen in großen Werken, wie im „Cantor" oder im Anhange bei „Tropfke" usw. allein angewiesen?

Für die jenseits der Schule liegende Mathematik haben wir in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften eine Sammlung hervorragender Werke mathematischer Meister der Vergangenheit, die der Lehrer zu seiner Fortbildung gern studieren wird. Für Schulzwecke kommen aber nur ganz wenig Hefte in Frage, wie etwa die über Galileis Unterredungen (Nr. 11, Nr. 24, Nr. 25), oder Stücke aus Euler (Nr. 73) und Leibniz (Nr. 162).

In nächster Zeit werden der Mathematischen Bibliothek von W. Lietzmann und A. Witting einige Hefte „Quellenschriften" angegliedert werden, die vorwiegend die Interessen des Unterrichts auf höheren Schulen im Auge haben sollen.

Obgleich nicht dringend genug immer wieder das Studium der Originalwerke selbst anempfohlen werden kann, muß doch zurzeit noch das Fehlen eines „mathematischen Lesebuches" beklagt werden, eines bequemen Buches, das dem vielleicht mit anderen Studien und Arbeiten vielbeschäftigten Lehrer die Mühe des Aussuchens abnimmt, das zugleich preiswert ist und sich unmittelbar den Bedürfnissen des Unterrichts anpaßt.[1])

Über die Art eines solchen Lesebuches mögen die Ansichten geteilt sein. Zunächst kann es die Ursprache berücksichtigen, insbesondere die griechische und lateinische. Das ist mehrfach bereits geschehen. Vielleicht ist hier mit seinem großen Ansehen U. v. Wilamowitz-Moellendorff bahnbrechend vorangegangen. Er gab 1902 ein „Griechisches Lesebuch" heraus, das sich in zwei Halbbände und zwei dazu gehörige Erläuterungshefte gliedert.[2]) „Dieses Buch ist bestimmt, in die Hände der Schüler zu kommen, sobald sie von der Sprache soviel gelernt haben, daß sie ein Buch um deswillen lesen können, was darin steht." Diese Worte eröffnen die Vorrede. Mir scheint aus ihnen eine feine Satyre herauszuklingen; aber ich kann mich auch täuschen. Eins ist sicher: solange das humanistische Gymnasium noch die griechische Sprache lehrt, soll sie tieferes Eindringen in die Werke großer Schriftsteller zum Hauptziel haben, auf welchem Gebiete sie auch Unsterbliches geleistet haben mögen. Gewiß ist „Griechisch das Organ des Geistes einer ganzen Weltperiode", wie v. Wilamowitz-Moellendorff sagt. Erfreulich ist das, was dieser hervorragende Philologe weiter ausführt: „Die Mathematik nimmt auf dem Gymnasium eine so hohe Stelle ein und erscheint nicht nur dem Knaben so oft zu der Beschäftigung mit der Sprache und Geschichte im Gegensatze, daß es angezeigt war, ihre hellenische Wurzel aufzuzeigen und zugleich ihre unvergleichliche logische Bedeutung." Das Lesebuch bringt daher Bruchstücke aus Euklid, aus des Archimedes Buch von der Sandzahl und mehrere Stücke aus Heron von Alexandrien, die mehr Physik und Technik betreffen. Die Erläuterungen beschränken sich nicht auf sprachliche Erklärungen. Im Hauptbande gehen allgemeingeschichtliche Mitteilungen über die Verfasser und ihre wissenschaftlichen Leistungen den einzelnen Abschnitten voran und im Erläuterungsbande geht der Kommentar auch auf Sachliches ein.

Wesentlich mehr Mathematisches enthält eine wie mir scheint leider nicht so bekannte „Realistische Chrestomathie aus der

---

1) Vgl. A. Böttger, IMUK-Abhndlgn. I, 4; S. 83, wo derselbe Wunsch zum Ausdruck kommt; ebenso meine Programmarbeit von 1908, S. 9. Vergl. auch aus jüngster Zeit einen Aufsatz von R. Hunger: „Gedanken zum Aufbau des mathematischen Unterrichts", in den „Neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum usw.", herausgegeben von J. Ilberg und P. Cauer, XV. Jahrgang. 1912, 29. u. 30. Bandes 5. Heft, S. 217 ff. Dieser Aufsatz wiederholt, soweit er geschichtliche Behandlung der Mathematik empfiehlt, manche der auch anderwärts ausgesprochenen Gedanken, deren erfreuliche Weiterverbreitung dadurch bestätigend. Auf S. 224 schließt sich Hunger denen an, die ein mathematisches Lesebuch der von uns gekennzeichneten Art wünschen. — Vgl. auch A. Wernicke, „Kultur u. Schule" S. 195.

2) Die Zweiteilung wurde dem schönen Buche zum Verhängnis. Brauche ich erst zu begründen, warum die Abteilung „ohne Mathematik" mehr Anklang und zahlreichere Käufer fand?

Literatur des klassischen Altertums von M. C. P. Schmidt,[1]) die in drei Bücher zerfällt und 1900 bzw. 1901 erschienen ist. Als „Publikum für seine Chrestomathie denkt sich der Verfasser: a) Lehrer, insbesondere Mathematiker, Physiker, Philologen; b) Studenten, insbesondere solche der klassischen Sprachen; c) Gebildete, die ein Gymnasium besucht und den Humanismus liebbehalten haben. Vor allem aber weihte er das Werk: d) Gymnasiasten, die es zu dauerndem Besitze als Prämien der Schule oder Geschenke des Hauses, zu gelegentlicher Lektüre einzelner Abschnitte in Vertretungsstunden, in Schlußwochen, bei geeigneten Gelegenheiten aus der Schülerbibliothek in die Hände bekommen mögen". Schmidt bringt zuerst eine ausführliche Einleitung von 31, 57, bzw. 100 Seiten, in der auch der alten Mathematiker eingehender gedacht wird. Dann folgen die Texte, die im ersten Buche folgende mathematische Stücke enthalten: aus Euklids Elementen: Definitionen, Postulate, Axiome, Kongruenz der Dreiecke, Parallele Linien und Parallelogramme, Pythagoreischer Lehrsatz, Rechtecke, Winkel im Kreise, Satz des Thales, Lehre von den Proportionen, Ähnlichkeit. Weiter kommt aus dem Almagest des Ptolemäus der Ptolemäische Lehrsatz, aus des Nikomachos Arithmetik das Sieb des Eratosthenes und aus des Diophant Arithmetik die Auflösung von Gleichungen; alles im griechischen Urtext. Figuren und Fußnoten gewähren ausreichende Hilfe zur Übersetzung und zum Verständnis. Im dritten Buche ist noch aus Vitruv ein lateinischer Abschnitt über die Kronenrechnung des Archimedes aufgenommen, ebenso aus Cicero (Tusc.) die Erzählung vom Grabmal des Archimedes. Zahlreich sind auch die der Physik und Technik gewidmeten Texte.

Man sieht, daß Schmidt viel mehr bringt als v. Wilamowitz-Moellendorff. Hoffentlich kommt die Zeit, wo sein fleißiges Buch, wie der Verfasser wünscht, in jeder Schulbibliothek in mindestens einem, in jeder Schülerbibliothek in mindestens zehn Exemplaren vorhanden ist.

Weit häufiger wird man jedenfalls in den Büchereien der Gymnasien die Heftchen des „Florilegium graecum" vorfinden. Ob aber auch Seite 13 des „fasciculus XIII" oft aufgeschlagen und in der Stunde gelesen werden wird, auf der das „theorema Pythagoreum" steht?

So erfreulich es auch ist, daß praktische Hilfsbücher existieren, die die altgriechische Mathematik den humanistischen Gymnasien zugänglich machen, so bedauerlich ist es andererseits, daß die Mathematik späterer geschichtlicher Zeitabschnitte noch kaum in ähnlicher Weise bearbeitet wurde. Vor allem bedaure ich die einseitige Berücksichtigung der griechischen, nebenbei auch der lateinischen Sprache darum, weil dadurch der Anschein erweckt werden könnte, als ob die

1) Von G. Eneström lobend besprochen in der „Bibl. Math.", III. Folge, Bd. 2, S. 362.

französische und die englische und schließlich die deutsche Sprache nicht ebensogut die Hand zum Verständnis bedeutender mathematischer Werke reichen könnten. Ich habe schon öfters betont, daß mir eine einseitige Bezugnahme auf den Lehrplan der humanistischen Gymnasien fernliegt.

Freilich ist zuzugeben, daß die Verwendbarkeit eines solchen mathematischen Lesebuches zunehmen würde, wenn man sich entschlösse, neben den Urtext die deutsche Übertragung (vgl. Tropfke im Anhang seines I. Bandes) zu stellen oder, was die Kosten verringern würde, ausschließlich Übersetzungen brächte. Vorläufer eines Hilfsbuches dieser Art sind schon vorhanden. Insbesondere könnte man mit G. Eneström als solche die ausgezeichneten Schriften von F. Rudio über die Quadratur des Kreises (1892) und von P. Stäckel und F. Engel über die Theorie der Parallellinien (1895) betrachten. Beide Werke tragen einen durchaus elementaren Charakter und können sehr gut dem Unterrichte in den Oberklassen unmittelbar dienstbar gemacht werden. Ich habe aus Rudio meinen Schülern schon manchmal Mitteilungen gemacht und freue mich jedesmal von neuem über die schöne abgerundete Darstellung. Die vier Abhandlungen von Archimedes, Huygens, Lambert und Legendre sind, wie gesagt, in deutscher Übersetzung wiedergegeben. Rudio bietet zugleich ein Beispiel, wie man Altklassisches mit Geschichtlichem aus späteren Jahrhunderten organisch zu historischer Belehrung verknüpfen kann. Die historische Einleitung über das Problem der Zahl π sollte jeder Gymnasiallehrer gelesen haben.

Auch das Buch von Stäckel-Engel beginnt beim griechischen Altertume und läßt dann Wallis, Saccheri, Lambert und Gauß reden. Ein verbindender Text stellt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Autoren dar und bringt, wo es nötig ist, Erläuterungen und sonstige Bemerkungen. Hier sind ebenfalls die fremdsprachlichen Arbeiten ins Deutsche übersetzt.

Zuletzt sei die Aufmerksamkeit in diesem Zusammenhange noch einmal auf ein neues Unternehmen der Firma B. G. Teubner gelenkt. Es ist die aus kleinen billigen Heften bestehende „Mathematische Bibliothek“, der ich recht weite Verbreitung wünsche. Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, steht unter Redaktion von W. Lietzmann und A. Witting. Sie will in elementarer Weise und in „angenehmer Form“ weitere Kreise mathematisch anregen und gedenkt diesem Zwecke unter anderem dadurch zu dienen, daß sie historische Gebiete berücksichtigt. Von den erschienenen Heften gehören hierher die folgenden: E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme bei den wichtigsten Kulturvölkern der Erde; H. Wieleitner, Begriff der Zahl; H. Wieleitner, Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen; W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz; A. Witting, Infinitesimalrechnung; M. Zacharias, Einführung in die projektive Geometrie; H. E. Timerding, Die Fallgesetze. Noch im Laufe dieses Jahres soll ein weiteres Heft erscheinen, das im Sinne meiner Vorschläge Beispiele zur Geschichte der Mathematik enthält, und zwar in solchen deutschen Übersetzungen, die unmittelbar auf die Originale zurückgehen. Daß auch „Quellenschriften“ über geschlossene Gebiete, verteilt auf mehrere Hefte, vorbereitet sind, war in anderem Zusammenhange schon erwähnt worden (S. 128). Es wäre erfreulich, wenn durch die „Mathematische Bibliothek“ der Geschichte der Mathematik unter unseren Primanern neue Freunde gewonnen würden, wenn vielleicht sogar hier und da eine Einführung des einen oder anderen Heftes in den mathematischen Abteilungen der Prima erfolgen würde, dort also, wo das Prinzip der Gabelung eine freiwillige Auswahl mathematisch besonders interessierter Schüler zur Folge hat.

* * *

Einen Königsweg zum Tempel der Mathematik wird es auch in Zukunft nie geben. Selbst unsere Jungen, die wir ja nur bis zur Schwelle seines Vorhofes geleiten, sollen das erfahren. Rüstig müssen sie im Hochgefühl wachsender Kraft ausschreiten. Wir sollen und wollen ihnen den mühsamen Aufstieg auf steiler Bahn nicht ersparen. Daß sie aber ihr Ziel mit Freuden erreichen, und nicht mit Seufzen, dafür sollen wir als gute Wandergenossen sorgen. Und darum wollen wir sie nicht hindern, zuweilen auszuruhen, Umschau zu halten und Blumen am Wegrand zu pflücken. Mögen dabei solche nicht unbeachtet bleiben, die im ewig fruchtbaren Lande der Geschichte wurzeln.

V. Teil.

Literaturverzeichnis.

Vorbemerkung.

Eine vollständige Aufzählung von Werken zur Geschichte der Mathematik ist nicht beabsichtigt. Nur aufgenommen sind vielmehr einerseits solche Schriften, die in den Kreisen der Lehrer an höheren Schulen Deutschlands allgemein verbreitet sind; andrerseits solche, die in vorstehender Abhandlung entweder genannt sind oder zu ihr benutzt wurden. Weggelassen wurden dabei diejenigen, die nur ihres unhistorischen Inhalts wegen Erwähnung fanden. Das ○ bedeutet Schulprogramm, das ✦ Schulbuch. Lange Titel sind zuweilen etwas gekürzt. Wo der Anfangsbuchstabe des Vornamens fehlt, war er nicht zu ermitteln. Wenn Namen (wie Leibniz, Kopernikus) an verschiedenen Stellen verschieden geschrieben sind, so liegt das an den Originaltiteln der in Betracht kommenden Bücher. Von Auflagen sind diejenigen namhaft gemacht, die mir zugänglich waren; mitunter auch je nach dem Zwecke die ältesten, bzw. die neuesten.

A.

○**Achsel, R.,** Über den Zahlbegriff bei Leibniz. Bismarck-Gymn. Wilmersdorf-Berlin 1905.

○**Adler,** Beschreibung eines uralten, angeblich von Pythagoras erfundenen mathematischen Spieles, in welchem die geraden und ungeraden Zahlen, gezeichnet auf mathematische Körper, in 128 Marsfeldern, mittelst der verschiedenen Rechnungs-Operationen Krieg führen. Gymn. zu Sorau 1852.

Ahrens, W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Leipzig 1904.

✦ **Alexandroff, I.,** Aufgaben aus der niederen Geometrie. Leipzig 1903.

Arneth, A., Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes. Stuttgart 1852.

B.

○**Bach, J.,** Die Zeit- und Festrechnung der Juden unter besonderer Berücksichtigung der Gaußschen Osterformel. Bischöfl. Gymn. Straßburg i. E. 1908.

○**Baldauf, G.,** Keplers Neue Astronomie im Auszuge und in Übersetzung der wichtigsten Abschnitte. I. Teil Gymn. Albertinum Freiberg i. Sa. 1905. II. Teil ebenda 1906.

○**Balsam, P. H.,** Die Konstruktion der Kegelschnitte aus gegebenen Bestimmungsstücken nach Newton princ. phil. nat. I. Sect IV u. V. Gymn. Stettin 1853.

✤ **Baltzer, R.,** Elemente der Mathematik. 1. Aufl. Leipzig 1862.

——— Theorie und Anwendung der Determinanten. 1. Aufl. Leipzig 1857.

——— Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. Ber. d. Ges. d. Wiss. Leipzig 1895.

✤ **Bardey-Hartenstein,** Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik für Realschulen usw. 7. Aufl. Leipzig 1906.

✤ **Bardey-Lengauer,** Aufgabensammlung. Neue Ausgabe für bayrische Mittelschulen. 2. Aufl. Leipzig 1909.

✤ **Bardey-Lietzmann,** Reformausgabe. [In Vorbereitung.]

✤ **Bartholomäis, Fr.,** Neues Lehrbuch der Euklidischen Geometrie. Jena 1851.

○**Becker, H.,** Die geometrische Entwicklung des Infinitesimalbegriffes im Exhaustionsbeweise bei Archimedes und ihre Bedeutung für die Differentialgeometrie und die Schule. Kgl. Gymn. Insterburg 1894.

○——— Lorenzo Mascheronis Zirkelgeometrie im Dienste des mathematischen Unterrichts. Kgl. Gymn. Insterburg 1905.

○**Beez, R.,** Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. Gymn. Plauen i. V. 1888.

○**Beler,** Die Mathematik im Unterricht der höheren Schulen von der Reformation bis zur Mitte des 18. Jhrhdts. Realsch. II. O. Crimmitschau 1879.

✤ **Bertram, H.,** siehe Hirsch, M.

○**Biel, B.,** Der mathematische Unterricht in seiner Beziehung zu anderen Unterrichtsgebieten. Großherzogl. Gymn. Bensheim 1895.

○**Biedermann, P.,** Die wissenschaftliche Bedeutung der Hypothese. Annenschule Dresden 1894.

○**Bilfinger, G.,** Die Sterntafeln von Biban-el-Moluk. Eberh.-Ludw.-Gymn. Stuttgart 1891.

○——— Antike Stundenzählung. Ebenda 1883.

○**Binder,** Das Malfattische Problem. Seminar Schönthal 1868.

○**Blasendorff, M.,** Über die Teilung des Kreisbogens. 8. Realsch. Berlin 1896.

○**Böttcher, E. J.,** Beweise für die Heronsformel aus 2 Jahrtausenden. Petrischule Leipzig 1909.

Bolyai, J., siehe Stäckel, P. und Engel, F.

✤ **Bork, H.,** Mathematische Hauptsätze. Herausgegeben von M. Nath, Leipzig 1907.

Bossut, Ch., Essai sur l'histoire générale des mathématiques. Paris 1802.

——— Siehe auch Reimer.

○**Braasch, J.,** Historisches über die Simpsonsche Regel und deren Anwendung. Realsch. vor dem Lübecker Tore zu Hamburg 1908.

v. **Braunmühl, A.,** Nicolaus Kopernikus; Biogr. Blätter. Herausgegeben von A. Bettelheim, Berlin 2 (1896), S. 267—279.

——— Nassir Eddin Tûsi und Regiomontan; Abh. Leop. Ak. 71 (1897), S. 31—68.

——— Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. I u. II. Leipzig 1900 u. 1903.

——— Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule in München 1896—1902. Bibl. math. III. Folge, Bd. 3. Leipzig 1902.

v. Braunmühl, A., Siehe auch Wieleitner, H.

—— Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes. Bibl. math. (Eneström). 3. Folge, 5 (1904), S. 355—365.

+ **Bretschneider, C. A.,** Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen. Jena 1844.

○—— Beiträge zur Geschichte der Griechischen Geometrie. Gymn. Ernestinum Gotha 1869.

—— Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870.

+ **Brewer, J. P.,** Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten. Düsseldorf 1822.

○ **Brocke, E.,** Über die Benutzungen der Beziehungen zwischen Mengen und Zahlen im arithmetisch-algebraischen Unterricht. Gymn. Zabern 1909.

○ **Bröckerhoff,** Das Taktionsproblem des Apollonius. Gymn. Beuthen O.-S. 1870.

○—— Geschichtlicher Entwicklungsgang der mathematischen Wissenschaften. Ebenda 1879.

+ **Brunner, C. W.,** Sammlung vermischter algebraischer Aufgaben zur Übung für Anfänger. Ansbach 1802.

○ **Bunte,** Über Archimedes, mit besonderer Berücksichtigung der Lebens- und Zeitverhältnisse. Realschule Leer 1877.

+ **Burg, Adam,** Lehrbuch der Trigonometrie. Wien 1826.

+ **Bussler, F.,** Die Elementarmathematik für das Gymnasium. Dresden 1893.

C.

Cantor, M., Euklid und sein Jahrhundert. Leipzig 1869.

—— Die römischen Agrimensoren. Leipzig 1875.

—— Als Supplement zur Schlömilch'schen Zeitschrift erscheinen: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von M. Cantor, Leipzig 1877 usw.

—— Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1. Aufl. I. Band. Leipzig 1880 usw. Jetzt vierbändiges Werk in z. T. dritter Aufl.

○ **Curtze, M.,** Der „Algorithmus proportionum" des Nicole Oresme, zum ersten Male nach der Lesart R. 4°—2 der k. Gymnasialbibliothek zu Thorn. Jubiläumsschrift. Berlin 1868.

○—— Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme. Gymn. mit Realsch. I. O. Thorn 1870.

—— Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. 2 Teile. Leipzig 1902.

—— Nicolai Copernici Thorunensis de revolutionibus orbium coelestium libri VI. Ex autoris autographo recudi curavit Societas Copernicana Thorunensis. Accedit Joannis Rhetici de libris revolutionum narratio prima. Thorn 1873.

D.

+ **Develey, E.,** Anfangsgründe der Geometrie in einer natürlichen Ordnung und nach durchaus neuem Plane. Übersetzt von C. F. Deyhle, Stuttgart 1818.

+ **Dickmann, J.,** siehe Heilermann.

○**Dielmann**, Die Einführung in die allgemeine Arithmetik. K. K. Studienanstalt Schweinfurt 1883.

○**Drechsler, A.**, Scholien zu Christoph Rudolph's Coss. Vitzth. Gymn. Dresden 1851.

✦**Dreßler, H.**, Die Lehre von der Funktion. Leipzig 1908.

v. **Drieberg, Fr.**, Die Arithmetik der Griechen. Leipzig 1819.

✦**Druxes**, siehe Heis, E.

○**Düker, H.**, Der liber mathematicalis des heiligen Bernward im Domschatze zu Hildesheim. Gymn. Josephinum Hildesheim 1875.

Dürer, Albrecht, Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen und gantzen Corporen. Nürnberg 1525.

——— Neudruck, auf Veranlassung von H. Thoma herausgegeben von A. Peltzer. München 1909.

E.

○**Ebeling, R.**, Mathematik und Physik bei Plato. Gymn. Hann. Münden, Munden 1909.

○**Elster**, Einige Bemerkungen zu Platons Ansicht über die Mathematik als allgemeines Bildungsmittel. Gymn. zu Clausthal 1843.

Eneström, G., Bibliotheca mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. III. Folge. Leipzig 1900 usw.

——— Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung usw. Bibl. math. III. Folge, Bd. 1. Leipzig 1900.

Engel, F., Der Geschmack in der neueren Mathematik. Antrittsvorlesung. Leipzig 1890.

——— Siehe auch Stäckel, P.

○**Enoch, W.**, Naturalismus und Humanismus. Gymn. zu Diedenhofen 1891.

Enriques, F., Fragen der Elementargeometrie. I. Teil: Die Grundlagen der Geometrie. Deutsch von H. Thieme. Leipzig 1911. II. Teil: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und ihre Lösbarkeit. Deutsch von H. Fleischer. Leipzig 1907.

Euler, L., Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge über sphärische Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie (1753 u. 1779). Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Leipzig. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. No. 73.

F.

Färber, C., Arithmetik. Grundlehren der Mathematik. I. Teil 1. Band. Leipzig 1911.

○**Fasbender, E.**, Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreiecksberechnungen. Gymn. mit Realsch. Thorn 1872.

Feddersen, B. W., siehe Poggendorff, J. C.

○**Fiedler**, Zur geometrischen Analysis der Griechen. Kathol. Gymn. zu Leobschütz 1862.

○——— Peurbach und Regiomontanus. Ebenda 1870.

○**Finger**, Über die Stellung der Mathematik unter den übrigen Unterrichtsgegenständen des Gymnasiums. Kgl. Kath. Gymn. Glatz 1847.

Fink, K., Kurzer Abriß einer Geschichte der Elementar-Mathematik usw. Tübingen 1890.

✦**Fischer, E.**, Systematischer Grundriß der Elementarmathematik. Berlin 1890.

○**Fischer, F.,** Johann Keplers Leben und Entdeckungen. Realsch. II. Ord. Leipzig 1884.

+ **Fischer, G. A.,** Lehrbuch zum ersten Unterricht in der Geometrie. Dresden 1818.

v. Fischer-Benzon, R., siehe Zeuthen, H. G.

Fleischer, H., siehe Enriques, F.

○**Flemming, G.,** Ein Beitrag zur Geschichte des Kalenders. Friedr.-Gymn. Altenburg 1869.

Florilegium Graecum in usum primi gymnasiorum ordinis collectum a philologis Afranis. Fasc. XIII. Leipzig.

+ **Förstemann, W. A.,** Lehrbuch der Geometrie für höhere Bildungsanstalten. Danzig 1827.

○**Frenzel, C.,** Genaue und vollständige Lösung des Problems der Dreiteilung eines Winkels. Progymn. Lauenburg i. Pommern 1901.

Frisius, siehe Gemma-Frisius.

○**Fritsch, H.,** Die gegenseitige Massenanziehung bei Newton und seinen Nachfolgern. Realg. Königsberg i. Pr. 1909.

G.

Galilei, G., Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige usw. (1638). 1. und 2. Tag. Aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von A. v. Öttingen. Leipzig. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. No. 11.

——— Desgl. 3. und 4. Tag. Ebenda. No. 24.

+ **Gartz, J. C.,** Allgemeine Größenlehre nach Euklidischen und neueren Ansichten 1820.

○**Gebhardt, M.,** Das Geschichtliche im mathematischen Unterrichte. Vitzth. Gymn. Dresden 1908.

——— Vortrag (Posen) über dasselbe Thema. Päd. Arch. Bd. 52. Leipzig 1910.

○——— Der mathematische Unterricht auf dem Vitzthumschen Gymnasium zu Dresden während des Zeitraums von 1861—1911. Aus der Festschrift des Vitzth. Gymn. Dresden 1911.

○**Geck, E.,** Geschichte des mathematischen Unterrichts in Württemberg. Oberrealsch. zu Reutlingen 1911.

Gemma-Frisius, Arithmeticae practicae methodus facilis. Lipsiae 1568.

○**Gent, C.,** Notata quaedam de geometris Graecorum. Kgl. Ritter-Akademie Liegnitz 1864.

○**Gerhardt, C. J.,** Historische Entwicklung des Prinzips der Differentialrechnung bis auf Leibniz. Gymn. zu Salzwedel 1840.

○——— Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz. Ebenda 1848.

○——— Über die Entstehung und Ausbreitung des dekadischen Zahlensystems. Ebenda 1853.

○——— Etudes historiques sur l'Arithmétique de position. Französ. Gymn. Berlin 1856.

○——— De Quadratura Arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae. Autore G. W. Leibnitzio. N. d. Handschr. d. Kgl. Bibl. Hannover. Kgl. Gymn. Eisleben 1858.

○——— Das Rechenbuch des Maximus Planudes. Nach einer Handschrift der kaiserl. Bibl. zu Paris. Kgl. Gymn. Eisleben 1865.

——— Der Sammlung des Pappus siebentes und achtes Buch. Griechisch und deutsch. Halle 1871.

——— Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877.

○**Germann, A.**, Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Joh. Faulhaber. Kgl. Gymn. Ulm 1876.

○**Giesel, F.**, Geschichte der Variationsrechnung I. Teil. Gymn. Torgau 1857.

○**Giesing, J.**, Leben und Schriften Leonardos da Pisa. Realg. Döbeln 1886.

○**Goebel, C.**, De coelestibus apud Platonem motibus. Gymn. Wernigerode 1869.

○**Goldscheider, F.**, Über die Gaußsche Osterformel. Luisenstädt. Realg. Berlin 1. Teil 1896. 2. Teil 1899.

○**Goldscheider, P.**, Die Grundzüge der neuen Lehrpläne dargestellt für den Kreis der allgemeinen Bildung. Gymn. Mülheim a. Rh. 1902.

○**Graf, E.**, Die Theorie der Akustik im griechischen Altertum. Kgl. Friedr.-Gymn. Gumbinnen 1894.

Gretschel, H., siehe Spottiswoode.

Grüson, siehe Leslie.

✚ **Grunert, J. A.**, Lehrbuch der ebenen Geometrie für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten. Brandenburg a. H. 6. Aufl. 1870.

○**Günther, S.**, Der Thibaut'sche Beweis für das 11. Axiom, historisch und kritisch erörtert. Studienanstalt Ansbach 1877.

○——— Beiträge zur Geschichte der neueren Mathematik. Ebenda 1881.

○——— Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürers. R.-Gymn. Ansbach 1886.

——— Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis 1525. Monum. Germ. Paed. 3. Berlin 1887.

——— Geschichte der Mathematik. I. Teil von den ältesten Zeiten bis Cartesius. II. Teil siehe H. Wieleitner. Sammlung Schubert Leipzig 1908.

Gutzmer, A., Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht. Leipzig und Berlin 1908.

H.

○**Häbler, Th.**, Über 2 Stellen in Platons Timaeus und im Hauptwerke von Kopernikus. Fürstenschule Grimma 1898.

○**Hähn, J. F.**, Gedanken, wie dem künftigen Verfall der Mathematik vorzubeugen. Schule zu Bergen 1749.

○**Hahn**, Die Entwickelung der Leibnizschen Methaphysik und der Einfluß der Mathematik auf dieselbe bis 1686. Gymn. Torgau 1899.

○**Hall**, Die älteren rein geometrischen Beweise zu Steiners Konstruktionen der Malfattischen Aufgabe. Progymn. Wattenscheid 1898.

Hammer, E., siehe Euler, L.

Hankel, H., Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig 18[illegible]

——— Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1885.

✚ **Harnisch, W.**, Die Raumlehre oder die Meßkunst, gewöhnliche Geometrie genannt. Für Lehrer und Lerner. Breslau 1822.

✚ **Hartenstein**, siehe Bardey.

✚ **Hecht, C.** und **Kundt, F.**, Lehrbuch der elementaren Mathematik. Leipzig 1904.

Heiberg, J. L., Literaturgeschichtliche Studien über Euklid. Leipzig 1882.

Heiberg, J. L., Philologische Studien zu griechischen Mathematikern. I bis IV. Leipzig 1881—1886.

——— Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. Leipzig 1898—1903.

——— Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertume. Leipzig 1912. [„Natur und Geisteswelt" No. 370.]

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes. Leipzig 1907.

Heilbronner, J. Chr., Versuch einer mathematischen Historie. Frankfurt 1739.

——— Historia matheseos universae, a mundo condito ad saeculum post Chr. Nat. XVI. Leipzig 1741.

✦ **Heilermann und Diekmann,** Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra an den höheren Schulen. 2 Bände. 1. Aufl. 1878. Neu bearbeitet von K. Knops.

○ **Heinen,** Wie läßt sich für die kulturhistorischen Unterweisungen im Geschichtsunterricht der nötige Raum gewinnen? Gymn. Saarlouis 1902.

✦ **Heis, Ed.,** Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Köln 1837. 112. Aufl. v. Druxes 1908.

Heller, A., Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit. 2 Bände. Stuttgart 1882. 1884.

Hellinger, E., siehe Klein, F.

○ **Hellmann, W.,** Über die Anfänge des mathematischen Unterrichts an den Erfurter evangelischen Schulen im 16. u. 17. Jahrhundert. Städt. Realsch. Erfurt. I. Teil 1895. II. Teil 1896.

✦ **Helmes, J.,** Die Elementarmathematik nach den Bedürfnissen des Unterrichts streng wissenschaftlich dargestellt. Celle 1862.

——— Die Physik auf dem Gymnasium. Hannover 1865.

v. Helmholtz, H., Über das Verhältnis der Naturwissenschaften zur Gesamtheit der Wissenschaft. Prorektoratsrede Heidelberg 1862.

——— Siehe auch Königsberger, L.

✦ **Henrici, J.,** Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Leipzig 1897.

✦ **Hermsdorf, J.,** Leitfaden beim Unterrichtein der Elementargeometrie und Trigonometrie. Meißen 1822.

Hero v. Alexandrien, siehe Schmidt, W. und Schöne, H.

○ **Heussi, J.,** Die Mathematik als Bildungsmittel. Kgl. Realschule Berlin 1836.

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig 1908.

○ **Hinke,** Beweis der Möglichkeit und Notwendigkeit des Studiums der Mathematik für die Schüler der Gymnasien. Gymn. Nordhausen 1840.

○ **Hirsch, K.,** Urkunden zur Geschichte der Mechanik. Kgl. Gymn. Schwäb. Hall 1898.

✦ **Hirsch, Meier,** Sammlung geometrischer Aufgaben. 1805. 20. Aufl. von H. Bertram 1890.

...he, R., Νικομάχου Γερασήνου εἰσαγωγὴ ἀριθμητική. Kgl. Gymn. Wetzlar 1862.

— Problemata Arithmetica. Ebenda 1863.

...heim, A., Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhamed Ben Alhusein Alkarkhî. Höhere Gewerbeschule Magdeburg 1878. II. Teil 1879. III. Teil 1880.

...inghoff, Über die neueren Bestrebungen zur Umgestaltung des mathem. Unterrichts. Kgl. Gymn. Wittstock 1909.

Höfler, A., Philosophische Elemente in allen Unterrichtsfächern, philosophische Propädeutik als eigenes Fach. Vortrag, abgedruckt in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaft. XI Nr. 5.

——— Die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichts. Braunschweig 1904.

——— Drei Vorschläge zur Mittelschulreform. Wien 1908.

——— Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig u. Berlin 1910.

Hölder, O., Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung. Leipzig 1900.

Hoffmann, J. C. V., Inwiefern bildet der Unterricht in den exakten Wissenschaften die notwendige Ergänzung des sprachlich-historischen Unterrichts auf dem Gymnasium? Zeitschr. für math. u. naturw. Unterr. Leipzig.

Hoffmann, J. J. I., Über die Arithmetik der Griechen. Aus dem Französischen des Herrn Delambre übersetzt. Mainz 1817.

○**Hoh, Th.**, Entwicklungsgeschichte der Gleichungen. Kgl. Gymn. Bamberg 1859.

○**Hohoff**, Eine Abhandlung über die Bildung durch Mathematik und Physik. Gymn. Recklinghausen 1840.

Holtzmann, W., genannt Xylander. Die sechs ersten Bücher Euklidis. Basel 1562.

✦ **Holzmüller, G.**, Planimetrie für das Gymnasium. Leipzig 1905.

○**Hoppe, E.**, Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien. Wilhelms-Gymn. Hamburg 1902.

——— Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum. Bibl. der klass. Altertumswissenschaft herausgegeben von J. Geffken. Heidelberg 1911.

○**Hülsen**, Korrespondenz zwischen Leibniz und der Königin Sophie Charlotte. Kaiserin-Augusta-Gymn. Charlottenburg 1885.

○**Hüniger, H.**, Der Philosoph Karl Christian Friedrich Krause als Mathematiker. Christians-Gymn. Eisenberg 1894.

○**Hüpper, P.**, Einfachste konstruktive Lösung des Trisektionsproblems. Kgl. Gymn. Heiligenstadt 1895.

○**Hüßener, H.**, Des Kopernikus Gründe für die Bewegung der Erde. Wilhelms-Gymn. Berlin 1874.

Hultsch, Fr., Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquias. Berlin 1864.

——— Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit. Berlin 1876—1878.

——— Griechische und römische Metrologie. Zweite Bearbeitung. Berlin 1882.

○**Hunger, G.**, Die arithmetische Terminologie der Griechen als Kriterium für das System griechischer Arithmetik. Herzogl. Gymn. Hildburghausen 1874.

○——— Mitteilung über eine handschriftliche Coss und die damit verbundene Aufgabensammlung. Ebenda 1887.

Hunger, R., Zum Aufbau des mathematischen Unterrichts. Neue Jahrbücher f. d. klass. Altertum usw. Herausg. von Ilberg u. Cauer, Leipzig 1912. II. Abt. Heft 5 S. 217.

○**Hunrath, K.**, Über das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern. Gymn. Hadersleben 1883.

I. J.

○John, F., Über die Einführung der allgemeinen Zahlzeichen in die Mathematik. Realsch. Tetschen 1886.

○Isenkrahe, C., Isaak Newton und die Gegner seiner Gravitationstheorie unter den modernen Naturphilosophen. Gymn. Crefeld 1878.

○Junge, F., Aphorismen aus der Geschichte der griechischen Astronomie vor Aristarchus aus Samos. Stiftsgymn. Zeitz 1830.

K.

Kästner, A. G., Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv. 1. Aufl. Göttingen 1758.

—— Geometrische Abhandlungen. Der mathematische Anfangsgr. I. Teils III. Abt. Göttingen 1790.

—— Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis ans Ende des 18. Jahrhunderts. 4 Bde. Göttingen 1796—1800.

+Kambly-Roeder, Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 32. Aufl. bearbeitet von A. Thaer. Breslau 1909.

○Kelber, Chr., Zu Julius Firmicus Maternus, dem Astrologen. Kgl. bayr. Stud.-Anst. Erlangen 1883.

○—— Wörterverzeichnis zu den libri matheseos des Julius Firmicus Maternus. Ebenda 1884.

○Kiesel, C., De ratione, quam Plato arti mathematicae cum dialectica intercedere voluerit, commentatio. Kathol. Gymn. Köln 1840.

○Kießling, H., Chr. Huygens „De circuli magnitudine inventa". Gelehrtenschule zu Flensburg 1868.

+Klaeß, P., siehe Tannery, J.

Klein, F., Riemann. Vortrag auf der Naturforscherversammlung Wien 1894.

—— Nichteuklidische Geometrie. Autographierte Vorlesung. 2 Hefte. Leipzig 1889. 1890. Vergriffen.

—— Höhere Geometrie. Autographierte Vorlesung. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. 2 Bände (1892. 1893). Neudruck Leipzig 1907.

—— Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Autographierte Vorlesung. Ausgearbeitet von E. Hellinger. 2 Hefte. Leipzig 1908. 1909.

—— Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tägert. Festschrift. Leipzig 1895. Vergriffen.

—— Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. I. Teil: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Bearbeitet von R. Schimmack. Leipzig 1907.

—— Siehe auch Voß, A.

Klein, F. und Riecke, E., Neue Beiträge zur Frage des Unterrichts in der Mathematik, Physik und Astronomie an den höheren Schulen. I. u. II. Leipzig 1904.

Klügel, G. S., Mathematisches Wörterbuch 1803—1808. Fortgesetzt von Mollweide bzw. Grunert 1823—1836. Insgesamt 5 Bde. und 4 Supplementbde. Leipzig.

○Klug, Des kaiserlichen Mathematikers Johannes Kepler Neujahrsgeschenk oder: Über die Sechseckform des Schnees 1611. Staatsgymn. Linz 1907.

○**Knoche, J. H.**, Untersuchungen über des Proclus Diadochus Commentar zu Euklids Elementen. Friedrichs-Gymn. Herford 1862.

○**Knochius, J. H. und Maerkerus, F. J.**, Ex Procli Successoris in Euklidis elementa commentariis definitionis quartae expositionem, quae de recta est linea et rectionibus spiricis. Ebenda 1856.

○——— ——— Archimedis circuli dimensio cum Eutochii Ascalonitae commentariis, emendata. Ebenda 1854.

✦ **Knops, K.**, siehe Heilermann und Diekmann.

Koenigsberger, L., Hermann von Helmholtz. Gekürzte Volksausgabe in einem Bande. Braunschweig 1911.

○**Koenitzer, J. S.**, Vorstellung der Griechen über die Ordnung und Bewegung der Himmelskörper bis auf die Zeit des Aristoteles. Friedr.-Wilh.-Gymn. Neu-Ruppin 1839.

○——— Über Verhältnis, Form und Wesen der Elementarkörper nach Platons Timaios. Ebenda 1846.

✦ **Kober**, Leitfaden der ebenen Geometrie. Leipzig 1874.

○**Kößler, P.**, Über die Erzeugung der Kegelschnitte nach der Methode von Newton. Kgl. Kath. Gymn. Neiße 1874.

○——— Über die Entstehung eines Kegelschnittbüschels aus einem Strahlenbüschel nach der Methode von Newton. Kgl. Kathol. St. Matthias-Gymn. Breslau 1881.

✦ **Kommerell, V. und K.**, Analytische Geometrie. II. Teil. Tübingen 1912.

○**Kossak, E.**, Die Elemente der Arithmetik mit historischer Übersicht über die Entwicklung der Arithmetik. Friedr. Werdersches Gymn. Berlin 1872.

Kowalewski, G., siehe Leibniz, G. W.

✦ **Kraus, K.**, Grundriß der geometrischen Formenlehre für Lehrerinnenbildungsanstalten. Wien 1903.

Krause, M., Über die Entwicklung der höheren Analysis. Rektoratsrede Dresden 1894.

✦ **Kreuschmer**, siehe Lackemann.

✦ **Kries, F.**, Lehrbuch der reinen Mathematik. Gotha 1810.

✦ **Kruse, Fr.**, Geometrie der Ebene. Berlin 1875.

○**Kubicki**, Das Schaltjahr in der großen Rechnungsurkunde Corp. Inscr. Attic. i. Nr. 273. Kgl. Gymn. Ratibor 1885.

✦ **Kundt, F.**, siehe Hecht, C.

✦ **Kunze, C. L. A.**, Lehrbuch der Geometrie (2. Aufl.). Jena 1851.

○**Kysäus**, Der 31. Satz im VI. Buche der Elemente des Euklid. Gymn. Arnoldini Burgsteinfurt 1864.

L.

✦ **Lackemann, C.**, Die Elemente der Geometrie. Bearbeitet von Kreuschmer. 1. Teil 9. Aufl. Breslau 1910. 2. Teil 6. Aufl. Ebenda 1911.

Lambert, J. H., Beyträge zum Gebrauche der Mathematik. Berlin 1765.

Lampe, E., Die Entwicklung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur. Akademische Rede. Berlin 1893.

○**Lanner, A.**, Entwicklung der Grundbegriffe des geometrischen Calculs von G. Peano. K. K. Staats-Gymn. Salzburg 1898.

○**Lange**, J., Geschichte des Feurbachschen Kreises. Fr. Werder-Oberrealschule. Berlin 1894.

+ **Laska**, W., Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1890.

Lauber, M., Die Mathematik als Lehrobjekt auf Gymnasien. Berlin 1832.

○**Lehmann**, Die Archimedische Spirale mit Rücksicht auf ihre Geschichte. Lyzeum Freiburg 1862.

Leibniz, G. W., Über die Analysis des Unendlichen (1684—1703). Herausgegeben von G. Kowalewski. Leipzig. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. No. 162.

+ **Lengauer**, J., Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Kempten 1893.

+ —— Siehe auch Bardey.

Leslie-Grüson, Geometrische Analysis. 1822.

○**Ley**, J. F., Über die Auflösung der Aufgaben des Apollonius von dem bestimmten Schnitte. Kath. Gymn. zu Köln a. Rh. 1845.

+ —— Lehrbuch der Geometrie. 1858.

+ **Liermann**, O., Henricus Petreus Herdesianus und die Frankfurter Lehrpläne nebst Schulordnungen von 1579 u. 1599. Eine kulturhist. Studie. Goethe-Gymn. Frankfurt a. M. 1901.

Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht. IMUK-Abhdlg. I, 1. Leipzig u. Berlin 1909.

+ —— Siehe auch Schuster, M.

—— Der Pythagoreische Lehrsatz. Math. Bibl., herausgegeben von W. Lietzmann u. A. Witting, Heft 3. Leipzig 1912.

—— Mathematisch-naturwissenschaftliche Schülerbibliotheken. Päd. Arch. Bd. 52. Leipzig 1910.

+ —— Siehe auch Bardey, E.

Lindemann, F., Lehren und Lernen in der Mathematik. Rektoratsrede. München 1904.

Lobatschefskij, N. J., siehe Stäckel, P. und Engel, F.

Löffler, E., Ziffern und Ziffernsysteme bei den Kulturvölkern in alter und neuer Zeit. Math. Bibl., herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Heft 1. Leipzig 1911.

Lorenz, J. F., Euclids Elemente. 15 Bücher. Aus dem Griechischen übersetzt. Halle 1781.

○**Lotz**, Über die Theorie der Parallelen. Kurfürstl. Gymn. Fulda 1862.

○**Lorey**, W., Über die Wohltat und das Werden der Zahl. Gymn. Augustum Görlitz 1905.

—— Leonhard Euler. Vortrag. Sonderabdruck aus d. Abhdlgn. d. naturforschenden Gesellschaft zu Görlitz, Bd. 25, Heft 2. Leipzig 1907.

—— Mathematik und klassisches Altertum. Zeitschr. f. Gymnasialwesen 1904.

—— Freiere Gestaltung und Privatstudien im mathematischen Unterricht der oberen Klassen. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 39. Leipzig 1908.

—— Archimedes und unsere Zeit. Kaisergeburtstagsrede (Görlitz). Zeitschr. f. lateinlose höh. Schulen. Leipzig 1908.

Lübsen, H. B., Lehrbuch der höheren Geometrie. Hamburg 1841.

—— Einleitung in die Infinitesimalrechnung zum Selbstunterricht. 7. Aufl. Leipzig 1889.

○**Lückenhof**, Von der Ausmessung des Kreises. Kgl. Gymn. Münster 1836.

✤ **Lüders, L.**, Geschichte der Mathematik bey den alten Völkern für die höheren Klassen der Gymnasien . . . oder: Pythagoras und Hypatia. Altenburg und Leipzig 1809.

○**v. Lühmann, Fr.**, Die sectio rationis, sectio spatii und sectio determinata des Apollonius. Friedr.-Wilh.-Gymn. Königsberg i. d. N. 1882.

○**Lüttich, S.**, Über bedeutungsvolle Zahlen, eine kulturgeschichtliche Betrachtung. Domgymn. Naumburg a. S. 1891.

M.

○**Maerker, F. S.**, Archimedis circuli dimensio cum Eutocii Ascalonitae commentariis emendata. Friedrichs-Gymn. Herford 1854.

○**Majer, Ludw.**, Proklos über die Definitionen bei Euklid. Kgl. Gymn. Stuttgart 1881.

v. Mangoldt, H., Bilder aus der Entwicklung der reinen und angewandten Mathematik während des neunzehnten Jahrhunderts. Festrede. Aachen 1900.

Manitius, K., Gemini elementa astronomiae. Leipzig 1898.

——— Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Aus dem Griechischen übersetzt. 2 Bde. Leipzig 1912.

✤ **Mannheimer, N.**, siehe auch Reinhardt.

○**Marx**, De locis in Platonis Menone mathematicis. Kgl. Gymn. Coesfeld 1836.

✤ **Matthias**, Leitfaden für den heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Größenlehre, Elementargeometrie, ebene Trigonometrie, gemeine Algebra und die Apollonischen Kegelschnitte. Magdeburg 1814.

✤ **Matthießen, L.**, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Eduard Heis. Praktischer Leitfaden für Lehrer und Studierende. 2 Bde. 1. Aufl. Köln 1870.

✤ ——— Commentar zur Sammlung usw. von Dr. Eduard Heis. Für die Schüler von Gymnasien usw. Köln 1870.

——— Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen. Leipzig 1878.

○**Mauritius, R.**, Über den goldenen Schnitt in der Geschichte. Gymn. Casimirianum Koburg 1894.

Meißner, O., Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Math. Bibl., herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Heft 4. Leipzig und Berlin 1912.

○**Menge, H.**, Des Archimedes Kreismessung nebst des Eutokius Kommentar. Kgl. Gymn. Koblenz 1874.

✤ **Menge, R.** und **Werneburg, F.**, Antike Rechenaufgaben. Ein Ergänzungsheft zu jedem Rechenbuch für Gymnasien. Leipzig 1881.

○**Meth, B.**, Über ein älteres Verfahren der Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in irreduktible Faktoren. Kgl. Kaiser-Wilhelm-Realgymn. Berlin 1902.

○**Meyer, P. Armand**, Beiträge zu den Beweisen des Pythagoreischen Lehrsatzes. Studienanstalt Metten 1877.

○——— Der Pythagoreische Lehrsatz bewiesen durch reguläre Dreiecke. Studienanstalt Metten 1878.

○**Meyer, Carl Ferd.**, Ein Diophantisches Problem (mit griechischem Text). Gymn. Potsdam 1867.

Meyer, Raphael, siehe Zeuthen, H. G.

○**Miething, E.,** Leonhard Eulers Lehre vom Äther. Königstädt. Gymn. Berlin 1894.

✦**Močnik,** Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Gymnasien. Bearb. von Spielmann. 23. Aufl. Wien 1902.

✦——— Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung. Bearb. von Neumann. 25. Aufl. Wien 1898.

Montucla, J. E., Histoire des mathématiques, etc. Paris 1758. 2. Aufl. in 4 Bänden. Ebenda 1799—1802.

○**Müller, Carl,** Über barytrope und tautobaryde Kurven. Eine historische Studie aus der analyt. Mechanik. Kgl. Gymn. Hadamar 1880.

Müller, Conrad H., Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Abhdlg. zur Gesch. der mathem. Wissensch. 18. Heft. Leipzig 1904.

○**Müller, Felix,** Studien über Mac Laurins geometrische Darstellung elliptischer Integrale. Kgl. Realschule, Vorschule und Elisabethschule Berlin 1875.

——— Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellenliteratur. Leipzig 1892.

——— Führer durch die mathematische Literatur. Leipzig u. Berlin 1909.

✦**Müller, Heinrich,** Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. 2. Teil: Die Oberstufe. 3. Aufl. Leipzig 1909.

○**Mülhöfer, J.,** Theorie der Parallelen. Kgl. Gymn. Essen 1840.

Murhard, F. W. A., Literatur der mathematischen Wissenschaften. Bibliotheca mathematica. 5 Bde. Leipzig 1797—1805.

N.

✦**Nath, M.,** siehe auch Bork, H.

Neumann, C., Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Antrittsvorlesung. Leipzig 1870.

✦**Neumann,** siehe Močnik.

Niemeyer,

Nix, L., siehe Schmidt, W.

○**Nizze, E.,** Ἀριστάρχου Σαμίου βιβλίον περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης. Grat. Schrift d. Gymn. Stralsund 1856.

○——— Serenus von Antissa über den Schnitt des Zylinders. (Aus dem Griech.) Stralsund 1860.

○——— Serenus von Antissa über den Schnitt des Kegels. Grat. Schrift des Gymn. Stralsund 1861.

○**Nobbe, C. F. A.,** Poesis latinae studiorum specimen. Dabei ein: Aenigma arithmeticum incerti auctores. Nicolai-Gymn. Leipzig 1833.

○**Nokk, A.,** Über die Sphärik des Theodosius. Gymn. Bruchsal 1847.

○——— Euklids Phaenomene. Lyzeum Freiburg 1850.

○——— Aristarchas über die Größen und Entfernungen der Sonne und des Mondes. Ebenda 1854.

✦**Noodt, G.,** Mathematische Unterrichtsbücher für höhere Mädchenschulen. Bielefeld 1909.

O.

v. Öttingen, A., siehe Galilei, G.; Poggendorff, J. C.

○**Ofterdinger, L. F.**, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts. Kgl. Gymn. Ulm 1867.

——— Ein Manuskript Keplers. Ebenda 1872.

Ohm, M., Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik. 2 Teile. Berlin 1828. 1829.

○——— Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides über die Teilung der Figuren. Kgl. Gymn. Ulm 1853.

○**Ohrtmann, H.**, Das Problem der Tautochronen. Ein hist. Versuch. Kgl. Realschule, Vorschule und Elisabethschule Berlin 1872.

✤ **Oppel, J. J.**, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 2. Aufl. Frankfurt a. M. 1878.

○**Ott**, Wie lassen sich die Anregungen, die Newton in seiner Optik gibt, für den Unterricht verwerten? Großh. Realgymn. Weimar 1901.

P.

○**Pahl, F.**, Die Entwicklung des math. Unterrichts an unseren höheren Schulen. 2 Teile. Städt. Realg. Charlottenburg 1898, 1899.

○**Pampuch, A.**, Das verallgemeinerte Malfattische Problem. Bischöfl. Gymn. Straßburg i. E. 1900.

○——— Das Malfatti-Steinersche Problem. Ebenda 1902.

Pauly-Wissowa's Realenzyklopädie des klassischen Altertums. Darin Artikel über antike Mathematik von verschiedenen Verfassern [z. B. Hultsch].

Peltzer, A., siehe Dürer, A.

○**Peters, A.**, Über das Studium der Mathematik auf Gymnasien. Blochmannsche Erziehungsanstalt Dresden 1828.

○**Petri, L.**, Über die Einheit der Schulstudien Martineum. Braunschweig 1822.

✤ **Pfleiderer, Ch. Fr.**, Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beyträgen zur Geschichte derselben. Tübingen 1802.

——— Scholien zu Euklids Elementen. Herausgegeben v. C. F. Hauber. Stuttgart 1827.

○**Pietzker, F.**, Das humanistische Element im exakten wissenschaftlichen Unterrichte. Nordhausen 1894.

——— Siehe auch Schwalbe, B.

Poggendorff, J. C., Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen usw. aller Völker und Zeiten. 4 Bände. Leipzig 1863 bis 1905; der dritte 1898, herausgegeben von B. W. Feddersen und A. v. Öttingen; der vierte 1902—1905 von A. v. Öttingen.

○**Poschen, M.**, Über die sogenannte Quadratur des Kreises. Neiße 1877.

Pringsheim, A., Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Akademische Festrede. München 1904.

○**Prowe, L.**, Nicolaus Kopernikus auf der Universität zu Krakau. Gymn. m. Realsch. I. Ordn. Thorn 1874.

✦ **Prudes,** Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Breslau 1826.

○ **Puning, E.,** Über die Stellung der Wissenschaften und ihrer Träger zum Leben im Altertume. Gymn. Recklinghausen 1864.

○ **Purner, Chr.,** Über die Entwicklung des Zahlbegriffs unter Berücksichtigung der Hamiltonschen Quaternionen. K. K. Staatsgymn. Salzburg 1884.

Q.

○ **Quidde, A.,** Das Malfattische Problem. Beweis der Steinerschen Auflösung. Gymn. Herford 1849.

R.

○ **Raab, E.,** Die Zenonischen Beweise. Kgl. bayr. Stud.-Anst. Schweinfurt 1880.

Ramus, Petrus, Scholae mathematicae. Paris 1569.

✦ **Raydt, H.,** Lehrbuch der Elementarmathematik. Leipzig 1899.

—— Arithmetik auf dem Gymnasium. Hannover-Linden 1890.

Regiomontanus, J., De triangulis omnimodis libri quinque. Ed. Schonerus. Nürnberg 1533.

✦ **Reidt, F.,** Elemente der Mathematik. 4 Teile. Berlin 1882.

Reimer, N. Th., Übersetzung von C. Bossut, Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik. I u. II. Hamburg 1804.

✦ **Reinhardt, W.** und **Mannheimer, N.,** Lehrbuch für den mathematischen Unterricht. Frankfurt a. M. 1911.

✦ **Reusch, J.,** Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Leipzig 1904.

○ **Reuschle, C. G.,** Kepler, der Württemberger. Kgl. Gymn. Stuttgart 1841.

Richter, A., Des Apollonius von Perga zwei Bücher vom Raumschnitt. Halberstadt 1828.

Riecke, R., siehe Klein, F.

Riehl, A., Humanistische Ziele des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Berlin 1909.

Riese, Adam, Rechnung nach der Lenge auff den Linien und Feder. Dazu Fortheil unnd Behendigkeit durch die Proportiones, Practica genannt. Mit gründlichem Unterricht des Visierens. 1550. Neue Auflage Wittenberg 1611, besorgt von Carolus Riese (Adams Neffe).

○ **Rießen,** Ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676. I. u. II. Kgl. Gymn. Glückstadt 1893 u. 1894.

✦ **Roeder, H.,** siehe Kambly.

○ **Rogg, J.,** Geometrische Analysis nach der Methode der Griechen. K. Württemb. Gymn. Ehingen 1847.

○ —— Supplement zu den Elementen des Euklides. Ebenda 1853.

Rosenberger, F., Die Geschichte der Physik in ihren Grundzügen, mit synchronistischen Tafeln der Mathematik, der Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der allgemeinen Geschichte. 3 Teile. Braunschweig 1882 bis 1890

—— Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums. Abhandlungen d. Gesch. d. Math. Leipzig 1899.

Rudio, F., Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Leipzig 1892.

——— Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates. Leipzig 1907 in „Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume", Bd. 1.

○**Rüthnick, O.**, Darstellung der Entwicklung der Gesetze des Stoßes von Cartesius an. Ritter-Akad. Brandenburg a. H. 1890.

S.

○**Sachs, J.**, Über die Aufgabe des Malfatti, ihre Erweiterungen und Lösungen. Großherzogl.-Badisches Pro- und Realgymn. Durbach 1885.

○**Sachs, L.**, Rechenunterricht und Rechenbuch. Eine historisch-kritische Studie mit besonderer Beziehung auf dem Gymnasium. Gymn. Carola-Alexandrinum Jena 1884.

○**Sadowski, A.**, Die österreichische Rechenmethode in pädagogischer und historischer Beleuchtung. Altstädt. Gymn. Königsberg i. Pr. 1892.

✤ **Sause, W.**, Anfangsgründe der Größenlehre. 1832.

○**Schäfer, H. W.**, Die astronomische Geographie der Griechen bis auf Eratosthenes. Kgl. Gymn. u. Realsch. I. O. Flensburg 1873.

○——— Entwicklung der Ansichten des Altertums über Gestalt und Größe der Erde. Gymn. mit Realklassen Insterburg 1868.

✤ **Schaffer, J. F.**, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, der phoronomischen Geometrie und Trigonometrie. Oldenburg 1820.

○**Schanz**, Der Kardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker. Kgl. Gymn. Rottweil 1872.

○——— Die astronomischen Anschauungen des Nicolaus von Cusa und seiner Zeit. Kgl. Gymn. Rottweil 1873.

Scheibel, J. E., Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis. 3 Bde. Breslau 1769—1789.

○**Schellbach, C. H.**, Über den Inhalt und die Bedeutung des mathematischen und physikalischen Unterricht auf unseren Gymnasien. Friedr.-Wilh.-Gymn. Berlin 1866.

○**Schick, H. A.**, Die Himmelsgloben des Archimedes. Ein Beitrag zur Aufhellung des Altertums. II. Kurfürstl. Gymn. Hanau 1846.

○——— Über die Himmelgloben des Anaximander und Archimedes. Ein Beitrag zur Aufhellung des Altertums. I. 1843.

Schilling, Fr., siehe Klein, F.

Schimmack, R., siehe Klein, F.

○**Schlamp**, Die Entstehung der Kegelschnitte nach Maclaurin und Graßmann. Neues Gymn. zu Darmstadt 1908.

Schlömilch, O., Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

✤ **Schmeißer, F.**, Lehrbuch der Arithmetik für Gymnasien. Dresden 1817.

○——— Bemerkungen zu einer wissenschaftlichen Behandlung der Lehre der Geometrie. Friedr.-Gymn. Frankfurt a. O. 1855.

✤ **Schmidt, M. C. P.**, Realistische Chrestomathie aus der Literatur des klassischen Altertums. In 3 Büchern. Leipzig 1900. 1901.

+ **Schmidt**, Elemente der Form und Größe. Bern 1809.

○ **Schmidt, W.**, Das Proömium der Pneumatik des Heron von Alexandrien in lateinischer Übersetzung. Herzogl. Realg. Braunschweig 1894.

—— Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. I: Herons von Alexandria Druckwerke und Automatentheater, griechisch und deutsch. Im Anhang Herons Fragment über Wasseruhren, Philons Druckwerke, Vitruvs Kapitel zur Pneumatik. Leipzig 1899.

—— Vol. II: Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik. Herausgegeben und übersetzt von L. Nix und W. Schmidt. Ebenda 1900.

○ **Schmitz, A.**, Aus dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie. Neuburg a. a. D. 1884.

○ **Schneider, G.**, Der Idealismus der Hellenen und seine Bedeutung für den gymnasialen Unterricht. Gymn. zu Gera 1906.

Schöne, H., Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia Vol. III. Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, griechisch und deutsch von Hermann Schöne. Leipzig 1903.

Schotten, H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. I. u. II. Leipzig 1890 u. 1893.

○ **Schrader**, Über den Ursprung und die Bedeutung der Zahlwörter in den indoeuropäischen Sprachen. Gymn. Stendal 1854.

Schubert, H., Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Hamburg 1889.

+ **Schubert** und **Schumpelick**, Arithmetik für Gymnasien. Leipzig, 1. Aufl. 1883. I. Teil 5. Aufl. 1907. II. Teil 5. Aufl. 1908.

+ **Schülke, A.**, Aufgabensammlung aus der Arithmetik. Leipzig, I. Teil 1906. II. Teil 1902.

+ **Schumpelick**, siehe Schubert.

Schur, F., Die Parallelenfrage im Lichte der modernen Geometrie. Pädag. Archiv XXXIV. 1892.

+ **Schuster, M.**, Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Neu herausgegeben von W. Lietzmann. 2. Teil Trigonometrie. 2. Aufl. Leipzig 1911.

+ **Schwab-Lesser**, Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Im Sinne der Meraner Lehrpläne bearbeitet. Wien u. Leipzig 1909.

Schwalbe, B. und **Pietzker, H.**, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Berlin, von 1897 an.

+ **Sellentin**, Grundriß der Geometrie. Köln 1893.

○ **Silber**, Das Gymnasium und seine Stellung zur Gegenwart. Kgl. Gymn. Kreuznach 1853.

○ **Simon, M.**, Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. Lyzeum Straßburg i. E. 1891.

—— Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Leipzig 1901. Abhandlung zur Geschichte der Mathematik. H. 11.

—— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig 1906.

—— Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhd. Leipzig 1906. Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver. Erg. Bd. 1.

—— Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik in A. Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen. 2. Aufl. München 1908.

Simon, M., Geschichte der Mathematik im Altertum, in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte. Berlin 1909.

○**Sonnenburg**, Der goldene Schnitt. Beitrag zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendung. Gymn. Bonn 1881.

✤ **Spieker, Th.**, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Potsdam 1862.

✤ **Spielmann**, siehe Močnik.

Spieß, O., Die Mathematik auf dem Gymnasium. Festschrift der 49. Philologenversammlung zu Basel 1907.

Spottiswoode, W., Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Aus dem Englischen übersetzt von H. Gretschel. Leipzig 1879.

Stäckel, P. und **Engel, F.**, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig 1895.

——— ——— Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. In 2 Bänden. I. Bd. N. S. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen. Übersetzt von F. Engel. Leipzig 1899. — II. Bd. W. und J. Bolyai, geometrische Untersuchungen. Herausgegeben von P. Stäckel. Leipzig 1910.

○**Staigmüller, H.**, Dürer als Mathematiker. Kgl. Realg. Stuttgart 1891.

○**Starke, R.**, Die Geschichte des mathematischen Unterrichts in den höheren Lehranstalten Sachsens von 1700 bis in den Anfang des 19. Jahrhunderts. Realschule Chemnitz 1898.

○**Stephan, C.**, Zur Geschichte der algebraischen Auflösung der quadratischen kubischen Gleichungen, sowie der Lehre von den Logarithmen. Realschule Wiesbaden 1883.

○——— Programm der Städtischen Realschule zu Wiesbaden 1883.

✤ **Stoll, F. H.**, Anfangsgründe der neueren Geometrie. Bensheim 1872.

○**Sturm, J.**, Die Infinitesimalgedanken in Leibnizens Metaphysik. Realprogymn. Briesen Westpr. 1907.

——— Geschichte der Mathematik. Leipzig 1906. Sammlung Göschen Bd. 226.

Suter, H., Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 2 Teile. Zürich 1872. 1875.

✤ **van Swinden, J. H.**, Elemente der Geometrie. Übersetzt von C. F. A. Jacobi. Amsterdam 1834.

T.

Tägert, F., siehe Klein, F.

✤ **Tannery, J.**, Die Elemente der Mathematik. Übersetzt von P. Klaeß. Leipzig 1908.

✤ **Tenner, G. W.**, Sammlung von Aufgaben aus der Elementarmathematik. Leipzig 1833.

○——— Einige Bemerkungen über die Verbindung der Wissenschaften überhaupt, mit besonderer Rücksicht auf die Schulen. Merseburg 1829.

Thaer, A., Der mathematische Unterricht in den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte. IMUK-Abhandlungen I, 4. Leipzig und Berlin 1911.

✤ ——— Siehe auch Kambly.

○**Thamm, M.**, Bruchstücke einer alten Kellereirechnung nebst Faksimile. Kaiser-Wilhelms-Gymn. in Montabaur 1908.

○**Thieme, H.**, Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie. Berger-Gymn. und Oberrealschule Posen 1900.

Thieme, H., Die Elemente der Geometrie. Grundlehren der Mathematik. II. Teil. 1. Bd. Leipzig 1909.

—— Siehe auch Enriques, F.

+ **Thilo, L.**, Materialien für den Unterricht in der Elementargeometrie. Frankfurt a. M. 1824.

Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. IMUK-Abhandlung III, 2. Leipzig und Berlin 1910.

—— Die Fallgesetze. Math. Bibl. von W. Lietzmann und A. Witting. Heft 5. Leipzig 1912.

—— Die Erziehung der Anschauung. Leipzig 1912.

O **Tischer, E.**, Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton u. Leibniz. Nicolai-Gymn. Leipzig 1896.

—— Leibniz und die Gymnasialmathematik. In: „Xenia Nicolaitana". Festschrift zur Feier des vierhundertjährigen Bestehens der Nikolaischule. S. 197 bis 246. Leipzig 1912.

O **Tobisch, J. K.**, Beiträge zur Vergleichung der Algebra im 16. Jahrhundert mit der in unseren Tagen. Kgl. Friedrichs-Gymn. Breslau 1846.

O **Trávniček, J.**, Das Problem der Kreisausmessung. I. Teil: Die Zeit vor Archimedes. K. K. Gymn. Brünn 1889.

v. Treitschke, H., Die Zukunft des deutschen Gymnasiums. Leipzig 1890.

Treutlein, P., siehe auch Henrici.

—— Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag. Braunschweig 1890.

O —— Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwicklung der Ansichten über dieselbe. Gymn. Karlsruhe 1875.

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik. Leipzig 1902/03.

O —— Erstmaliges Auftreten der einzelnen Bestandteile unserer Schulmathematik. I. Teil. Friedrichs-Realgymn. Berlin 1899.

U.

O **Uhlich, E.**, Altes und Neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten im Dreieck. Fürstenschule Grimma 1886.

O **Ullrich, E.**, Das Rechnen mit Duodezimalzahlen. Realschule Heidelberg 1891.

V.

+ **Vieth, G. U. A.**, Anfangsgründe der Mathematik. Leipzig 1796.

Villicus, F., Die Geschichte der Rechenkunst usw. Wien 1883.

O **Vogt, H.**, Die Quadraturen des Archimedes. Teil I. Quadratur des Kreises. Höhere Bürgerschule Langensalza 1882.

Voß, A., Über das Wesen der Mathematik. Rede. Leipzig und Berlin 1908.

—— Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur. Wird erscheinen in „Kultur der Gegenwart". III. Teil. 1. Abt. Redigiert von F. Klein. Leipzig und Berlin.

W.

✤ **Wallentin, Fr.**, Lehrbuch der Mathematik für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen (2. Aufl.). Wien 1890.

✤ ——— Methodisch geordnete Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Algebra und allgemeinen Arithmetik (5. Aufl. 1899).

○ **Wappler, E.**, Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Gymn. Zwickau 1887.

Weber, H. und **Wellstein, J.**, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. 3 Bände. Leipzig 1907—1912.

○ **Weinborn, H.**, Die Entwicklung des Zifferrechnens. Realg. Eisenach 1877.

○ **Wellmann, E.**, Zenos Beweise gegen die Bewegung und ihre Widerlegungen. Friedrichs-Gymn. Frankfurt a. O. 1870.

Wellstein, J., siehe Weber, H.

✤ **Werneburg, F.**, siehe Menge, R.

Wernicke, A., Die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung in ihrer Stellung zum modernen Humanismus. Berlin 1908.

——— Die kulturelle Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung 1903 im Päd. Arch. XLV, Heft 12.

——— Kultur und Schule. Osterwieck 1896.

Wertheim, G., Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Leipzig 1890.

○ ——— Die Arithmetik des Elia Misnachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Realsch. Frankfurt a. M. 1874. 2. Aufl. Braunschweig 1896.

○ **Wex, J.**, Die Metra der alten Griechen und Römer in die des deutschen Reiches übersichtlich dargestellt. Studienanstalt Straubing 1881.

○ **Weyl, A.**, Die wichtigsten Mathematiker und Physiker des Altertums. Gymn. Kreuzburg O.-S. 1902.

○ **Wicher**, Gründe, warum auf den Gymnasien bei dem Unterrichte in der Mathematik weit geringere Resultate erzielt werden, als in den übrigen Lehrgegenständen. Gymn. zu Lauban 1845.

○ **Wiegand, W.**, Weitere Bruchstücke zur Wissenschaft und zum Studium der Hochschule. Über die Mathematik. Gymn. zu Worms 1853.

Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten usw. im Königreich Bayern. IMUK-Abhundlung II, 1. Leipzig u. Berlin 1910.

——— Der Begriff der Zahl. Math. Bibl., herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Heft 2. Leipzig u. Berlin 1911.

——— Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Math. Bibl. herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Heft 7. Leipzig u. Berlin 1912.

——— Geschichte der Mathematik, II. Teil von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrh. (1. Hälfte Arithmetik, Algebra, Analysis). I. Teil siehe S. Günther. Sammlung Schubert. Leipzig 1911.

✤ **v. Wilamowitz-Moellendorff, U.**, Griechisches Lesebuch, I und II. Berlin 1902.

○ **Wilberg**, Die ebene Trigonometrie der Griechen. Gymn. Essen 1838.

○ ——— Zur sphärischen Trigonometrie der Griechen. Ebenda 1839.

○ **Wilde, E.**, Eine Abhandlung über die Optik der Griechen. Gymn. zum grauen Kloster. Berlin 1832.

○**Wildemuth,** Anleitung zum Rechnen aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts von Huswirt. Kgl. Gymn. Tübingen 1865.

Willmann, Der goldene Schnitt als ein Thema des mathematischen Unterrichts. Lehrproben von Fries und Menge. Heft 33.

Wissowa, siehe Pauly.

Witting, A., Über einige Zusammenhänge der höheren Mathematik mit der elementaren. Berichte der „Isis". Dresden 1908.

—— Der mathematische Unterricht im Königreich Sachsen. IMUK-Abhandlung II, 2. Leipzig 1910.

+ **Wittstein, Th.,** Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Aufl. Hannover und Leipzig 1855.

+ **Wöckel,** Beispiele und Aufgaben zur Algebra. 7. Aufl. 1874.

+ **Worpitzky,** Elemente der Mathematik für gelehrte Schulen. Berlin 1874.

○**Wretschko, A.,** Georg Freiherr v. Vega. Sein Leben und Wirken. K. K. Gymn. Brünn 1885.

X.

Xylander, siehe Holtzmann.

Z.

Zacharias, Einführung in die projektive Geometrie. Math. Bibl. von W. Lietzmann und A. Witting. Heft 6. Leipzig 1912.

Zeuthen, H. G., Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Aus dem Dänischen übersetzt von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1886.

—— Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1896.

—— Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe von Raphael Meyer. Leipzig 1903.

—— Die Mathematik im Altertum und Mittelalter. Wird demnächst erscheinen in „Kultur der Gegenwart" III. Teil. I. Abt. Redigiert von F. Klein. Leipzig und Berlin.

—— Siehe auch Heiberg, J. L.

○**Zirkel, J.,** Eine lateinische Abhandlung über Euklidische und neue Geometrie. Kgl. Gymn. Bonn 1843.

○—— Die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie. Ebenda 1853.

Alphabetisches Namenverzeichnis.

Ein *L* besagt, daß der betreffende Name nur im Literaturverzeichnis vorkommt. Eine eingeklammerte Seitenzahl verweist auf eine Fußnote.

International Commission on the Teaching of Mathematics.

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND III HEFT 7

MATHEMATIK
UND
PHILOSOPHISCHE PROPÄDEUTIK

VON

SCHULRAT DR. ALEXander WERNICKE
DIREKTOR DER STÄDTISCHEN OBERREALSCHULE UND
PROFESSOR AN DER HERZOGLICHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

MIT 5 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT

Die Umgestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes, welche sich in Deutschland als Parallelerscheinung zu der französischen Unterrichtsreform von 1902 gemäß den Meraner Vorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (1905) gegenwärtig mehr und mehr durchsetzt, habe ich mit besonderer Freude und Genugtuung begrüßt, weil ich mit zu denen gehöre, welche bereits in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts in ihrem bescheidenen Kreise für eine derartige Umgestaltung zu wirken suchten[1]).

Die Reform stellt für die Schulmathematik hauptsächlich folgende Forderungen auf:

1. Volle Bewertung der Anschauung,
2. Betonung des funktionalen Anschauens und Denkens,
3. Behandlung sachgemäßer Anwendungen,
4. Belebung und Förderung des Unterrichts durch geschichtliche Mitteilungen und Rückblicke,
5. Propädeutischer Aufbau aller Gebiete, aber im Hinblick auf einen systematischen Abschluß, wobei u. a. auch eine Fusion von Planimetrie und Stereometrie anzustreben ist,
6. Philosophische Vertiefung des abschließenden Unterrichts.

---

1) Vgl. den Göttinger Habilitationsvortrag von Herrn R. Schimmack (S. 581 in Nr. 125b des Literatur-Verzeichnisses) und außerdem Bd. III, 1 dieser Imuk-Abhandlungen. Als ich neben meinen Vorlesungen an der Herzogl. Techn. Hochschule zu Ostern 1882 auch Unterricht am Herzogl. Gymnasium zu Braunschweig übernahm, schwebte mir die Idee vor, die damalige Gymnasial-Mathematik und die damalige Gewerbeschul-Mathematik unter philosophischer Vertiefung zu einer höheren Einheit zu verschmelzen. War es doch der Zeitpunkt, an dem in Preußen die ursprünglich vom Handelsministerium geschaffenen Gewerbeschulen unter dem Namen „Oberrealschulen" durch Bonitz neben das altsprachliche Gymnasium und das Realgymnasium gestellt wurden, und hatte ich doch selbst als Gymnasial-Abiturient noch ein Jahr lang die Oberstufe der von meinem Vater geleiteten Gewerbeschule zu Gleiwitz besucht, um mich namentlich in Mathematik und Naturwissenschaften und im Zeichnen weiter zu bilden, und auch zugleich mich in der Oberschlesischen Technik umgesehen! Für meine Idee fand ich volles Verständnis bei dem Direktor des Gymnasiums, Herrn Schulrat Eberhard, einem geschätzten Altphilologen, der ursprünglich auch Mathematik und Naturwissenschaften studiert und sich für diese Gegenstände dauernd ein großes Interesse bewahrt hatte. Als dann von dem alten Gymnasium im Herbste 1885 ein neues abgezweigt wurde, konnte ich an diesem in Verein mit meinem Kollegen Schlie einen modernen Lehrplan für Mathematik und Physik aufstellen und durchführen helfen, an dem auch meine Studienfreunde Geitel und Elster in Wolfenbüttel,

Von diesen Forderungen bietet die letzte, welche das Thema der folgenden Abhandlung bildet, besondere Schwierigkeiten dar, und zwar, weil in der Gegenwart die Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie von den führenden Geistern äußerst verschieden aufgefaßt und beurteilt werden.

Die „Grenzfragen der Mathematik und Philosophie" spielen zurzeit bei den wissenschaftlichen Erörterungen eine hervorragende Rolle, und der lebhafte Wunsch nach einer gegenseitigen Verständigung ist sowohl von hervorragenden Philosophen, wie auch von bedeutenden Mathematikern bereits oft genug ausgesprochen worden, ohne daß doch bisher eine solche erzielt worden wäre.

So sagt z. B. Herr A. Voß gelegentlich seiner kritischen Bemerkungen zu dem Mathematischen in Wundts Logik (vgl. Nr. 161 a S. 81): „Der Mathematiker wird es stets dankbar anerkennen, wenn ihm von anderer Seite Aufklärung über die Vorstellungen und Begriffe seiner Wissenschaft zuteil wird. Was soll man aber mit den Darlegungen Wundts über den Raum anfangen?" Selbst ein so hervorragender Forscher der exakten Richtung, wie Herr Wundt, ist tatsächlich nicht völlig frei von dem fast allgemeinen Vorurteile der Philosophen, die Beurteilung der Grundlagen der Mathematik für leichter zu halten, als sie in Wirklichkeit ist[1]). Sie setzt ein sehr eingehendes Studium bestimmter Gebiete mathematischer Einzelarbeit voraus, nicht bloß eine summarische Kenntnisnahme davon. Es gibt eben in der Mathematik keinen Königsweg, auch nicht für Philosophen.

Andererseits beklagt z. B. Herr A. Höfler[2]), der ja selbst jahrelang auch Lehrer der Mathematik und Physik war, in seiner Didaktik (S. 468), „daß mancher Mathematiker ... vom bescheidenen Schulmann bis hinauf zum großen, fruchtbaren mathematischen Forscher ... den logischen Apparat handhabt, wie ein Nicht-Physiker einen physikalischen Apparat" und fügt hinzu: „Wenn letzterer unter ungeschulten Händen in der Regel früher oder später mehr oder weniger leidet, wundert sich niemand darüber ..., wenigstens kein Physiker. Nun, was dem Naturforscher recht ist, gesteht man bekanntlich noch lange nicht dem Philosophen als billig zu." Ebenso heißt es bei Höfler kurz vorher (S. 467), daß sonst hochge-

---

die bekannten Physiker, mitwirkten. Die Einführung der preußischen Lehrpläne von 1891, welche zu Ostern 1893 im Herzogtum Braunschweig erfolgte, machte hier der freien Gestaltung ein Ende ... bis dahin hatten wir auch an den Gymnasien in den Tertien die vielbegehrte vierte Mathematikstunde. Weiteres hierzu findet man in der Vorrede zu Nr. 167f. Für die Primaner war damals Nr. 167b von der Anstalt in der erforderlichen Anzahl von Exemplaren angeschafft, und ebenso wurde Nr. 167d benutzt, während Nr. 167f als Schulbuch eingeführt war. Auf Veranlassung meines Kollegen Schlie wurde außerdem in der Geometrie H. Seegers (Güstrow) Lehrbuch benutzt, das wohl mit zuerst die Theorie der Verwandtschaften für die Schule nutzbar gemacht hat.

1) Vgl. dazu auch Nr. 162 Bd. II, S. 132 Anmerkung (erste Aufl.).

2) Vgl. ferner dessen Bemerkungen in Nr. 12 der Österr. IMUK-Hefte zu den Abhandlungen von Schoenflies und Korselt im 20. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

schätzte mathematische Schulmänner mangels einer auch nur halbwegs systematischen Beschäftigung mit der wissenschaftlichen Logik als solcher nur allzubald kopfscheu werden, wenn sie bei Erörterung mathematischer und mathematisch-didaktischer Fragen auch nur den einen oder anderen Kunstausdruck der wirklichen Logik hören, dessen sich der Logiker natürlich ebenso unbefangen bedient wie der Mathematiker irgendeiner seiner vielen tausend technischen Ausdrücke, ohne daß ihm jemand zu sagen wagt, er bediene sich unverständlicher oder gar inhaltsleerer Wörter und Phrasen."

Daß der Logiker und überhaupt der Philosoph ebenso wie der Mathematiker sozusagen ein besonderes terminologisches Recht hat, ist natürlich zuzugeben, doch wird dabei zu bemerken sein, daß sich die Mathematiker in Bezug auf ihre technischen Ausdrücke untereinander vollkommen verstehen, die Philosophen aber nicht. Infolgedessen ist es für den Mathematiker selbst bei bestem Willen äußerst schwierig, mit der Philosophie Fühlung zu gewinnen. So wird man z. B. die Terminologie, welche Herr Höfler und Herr Meinong im Anschluße an ihre eigenen Untersuchungen eingeführt haben, für sehr sachgemäß halten können, zugleich aber bedauern müssen, daß sie bei den Philosophen durchaus nicht allgemein anerkannt ist.

Bedenklicher ist noch, daß sich hinter den terminologischen Schwierigkeiten der Philosophie meist auch Unterschiede grundlegender Auffassungen der Philosophen selbst verstecken, welche durch bestimmte erkenntnistheoretische Richtungen bedingt sind. Diesen entspricht eine Vieldeutigkeit der ersten Ansätze und damit auch eine Vieldeutigkeit der letzten Abschlüsse, auf welche die Geschichte der Philosophie nur allzudeutlich hinweist.

Wie soll man da weiterkommen?

Gelegentlich einiger Bemerkungen über die Grundlagen der Mechanik fordert Herr Voß (Nr. 161 a S. 71) u. a. auch „geeignete erkenntnis-theoretische Konventionen", und dies scheint mir überhaupt eine durchaus notwendige Bedingung für eine Verständigung zwischen Philosophen und Mathematikern zu sein.

Für solche Konventionen ist m. E. gegenwärtig die Grundfrage, wie die Einseitigkeit des reinen Denkens und die Einseitigkeit der bloßen Empirie in einem, Kants reiner Anschauung entsprechenden, aber nicht mit ihr übereinstimmenden Dritten so überwunden werden kann, daß damit die Grundlage für Urteile von innerer Notwendigkeit und darum von allgemeiner Gültigkeit gegeben wird.[1])

Um eine Antwort auf diese Grundfrage sollten Philosophen und Mathematiker sich gemeinsam bemühen und im übrigen dabei beherzigen, was Herr F. Klein am Schlusse einer Verhandlung (1905) über „Grenzfragen der Mathematik und Philosophie" in der Philosophischen Gesellschaft an

1) Vgl. dazu auch die Auseinandersetzungen Höflers in Nr. 69e S. 21.

der Universität Wien (vgl. Nr. 781 S. 10) ausgesprochen hat. Da heißt es: „Wenn so wie heute Philosoph und Mathematiker zusammenkommen, pflegt es immer zu geschehen, daß man zunächst sich gegenseitig nicht versteht und infolgedessen auch nicht so würdigt, wie man möchte. Jeder hat für sich jahrzehntelang gewisse Gedankenreihen ausgesponnen, und es ist ganz unmöglich, das man dieselben dem anderen in wenigen Minuten klar legt und geläufig macht. Der Wert einer solchen Debatte scheint mir vielmehr darin zu liegen, daß man in lebendigere Fühlung kommt und daß man sich daraufhin vornimmt, den Argumenten der Gegenseite im eigenen stillen Nachdenken nachzugehen." „Die heutige Debatte möchte ich mit dem Wunsche schließen, daß der hergestellte Kontakt von beiden Seiten im Auge behalten werde, damit sich von ihm aus nach beiden Seiten Anregendes zur wissenschaftlichen Behandlung gemeinsamer Probleme auch weiterhin ergebe."

Im Hinblick auf die ganze Sachlage ist es nur natürlich, daß Mathematiker und Philosophen bei der ersten Herstellung eines solchen Kontaktes aneinander gegenseitig viele Mängel, oft vielleicht nur Mängel finden, aber die Überzeugung von der Wichtigkeit der gemeinsamen Probleme wird schon bei weiterer Arbeit und bei gegenseitigem guten Willen das erforderliche Vertrauen entstehen lassen.

Ich würde mich freuen, wenn auch die folgende Abhandlung dazu beitragen könnte, das gegenseitige Vertrauen etwas zu stärken. Nur bitte ich bei der Beurteilung meiner Ausführungen, die natürlich nichts abschließendes geben können, freundlichst zu berücksichtigen, daß mein Thema nicht „Philosophie und Mathematik" lautet, sondern „Mathematik und philosophische Propädeutik", und daß also die Bedürfnisse der Schule überall die Begrenzung der Erörterungen feststellen, was ja auch schon durch den verfügbaren Raum bedingt wird.

Schließlich möchte ich noch der Redaktion meinen besonderen Dank aussprechen für ihre vielfachen Anregungen behufs weiterer Klärung der behandelten Fragen.

Herzlichen Dank schulde ich auch meinem Kollegen an der Hochschule, Herrn Prof. Dr. Timerding, für diesen oder jenen Hinweis in bezug auf die Vervollständigung des angefügten Literaturverzeichnisses.

Die Nummern im Texte und in den Anmerkungen beziehen sich auf dieses Literaturverzeichnis (Abschnitt V).

Braunschweig, im Mai 1912.

A. W.

INHALT

Erster Abschnitt.

Die gegenwärtige Lage.

1. Geschichtlicher Rückblick.

Die Philosophie hat an den höheren Schulen Deutschlands, seitdem sich diese nach dem Muster der alten Artistenfakultät der Universität weiter ausgestaltet hatten, bis gegen das Ende des XVIII. Jahrhunderts hin eine ständige Berücksichtigung erfahren, zum Teil in propädeutischer Behandlung, zum Teil in weitergehender Ausgestaltung[1]).

Neben älteren Richtungen herrschte um die Mitte des XVIII. Jahrhunderts auch auf den Schulen namentlich die Philosophie von Leibniz, und zwar in der systematischen Form, die ihr Chr. Wolff gegeben hatte.

In diesen Frieden brachen die Arbeiten Kants hinein, zunächst im Jahre 1781 die Kritik der reinen Vernunft, und infolgedessen wurde die sichere Stellung der Philosophie an den höheren Schulen langsam erschüttert. Je mehr man einsah, daß sich diesen Kritiken gegenüber alle ältere Philosophie nicht ohne weiteres halten ließ, während doch die Kantische Geistesarbeit außerhalb des Horizontes der Schule zu liegen schien, umsomehr war man bereit, die Philosophie als besonderes Unterrichtsfach der Universität zu überlassen.

Die ganze geistige Lage wird bezeichnet durch die Preisaufgabe, welche die Berliner Akademie für das Jahr 1791 ausschrieb; sie lautete: „Welches sind die wirklichen Fortschritte, die die Metaphysik seit Leibniz's und Wolff's Zeiten in Deutschland gemacht hat?" Wenn auch die Antwort von Schwab-Stuttgart gekrönt wurde, welche jeden tatsächlichen Fortschritt und auch das Bedürfnis nach einem solchen in Abrede stellte, so eroberte doch die Kantische Philosophie immer weitere Kreise, und unter den Universitäten wurde ihre Hochburg Jena, das damals mit Weimar zusammen die Führung des kulturellen Deutschlands hatte, bis zu der großen Zeitenwende des Jahres 1806.

Als der Wiener Kongreß den armen deutschen Landen endlich den Frieden wieder gab und man sich überall anschickte, auch das Schulwesen neu zu gestalten, war die Lage für die Philosophie nicht günstiger geworden. Ihren Romantikern, welche Kant in sich über-

---

1) Vgl. Nr. 166 u. Nr. 173.

stürzender Eile gefolgt waren, konnte auf der Schule noch weniger eine Stelle gegeben werden als dem Systeme Kants.

Darum verhielten sich sowohl die Gymnasien, welche meist jetzt erst durch Aufnahme von verbindlichem Unterrichte im Griechischen aus den alten Lateinschulen entstanden, als auch die Realschulen und Gewerbeschulen, welche langsam vom Standpunkt der Nützlichkeit zu den Höhen einer allgemeinen Bildung emporklommen, der Philosophie gegenüber ziemlich ablehnend. Dort bemühte man sich, den Humanismus der Antike wieder zu beleben, ohne sich aber dabei in Platons genialer Schöpfung wirklich heimisch zu machen, hier suchte man nach einem neuen Ideale, ohne zunächst das einzelne zum Ganzen gestalten zu können.

Für Preußen zeigen die Lehrpläne von 1816 an bis hinein in unsere Tage so ziemlich dasselbe Bild: die prinzipielle Anerkennung der Philosophie in der Form einer Philosophischen Propädeutik ringt, mag sie nun freudig oder gezwungen ausgesprochen werden, stets mit der Ratlosigkeit in bezug auf eine praktische Durchführung. Man beschränkt das Ziel auf Bruchstücke der formalen Logik und der empirischen Psychologie, gelegentlich auch auf erstere allein, weist diesem Gebiete aber keine besonderen Stunden an, sondern fordert auf, im Deutschen oder in der Mathematik die erforderliche Zeit dafür zu gewinnen, gelegentlich auch im Lateinischen oder Griechischen, je nach der Befähigung der Lehrer.

Hervorgehoben werden darf vielleicht, daß die Unterrichts- und Prüfungsordnung für die Realschulen von 1859 diesen in der obersten Klasse die Behandlung der formalen Logik vorschreibt und daß eine etwas spätere Verfügung (13. Dez. 1862) auch den Gymnasien unter Hinweis auf die Elementa Logices Aristoteleae von Trendelenburg die Pflege der Logik empfiehlt, obwohl „ein rationeller Sprachunterricht und alle mathematische Wissenschaft" auch an sich eine „Philosophische Propädeutik" enthalte.

Selbst Bonitz, der mit dem berühmten Organisations-Entwurf von 1849 in Österreich der Philosophischen Propädeutik wenigstens an den Gymnasien eine sichere Stellung geschaffen hatte, konnte in Preußen nicht entsprechendes erreichen. Seine Lehrpläne von 1882, mit denen für Preußen das altsprachliche Gymnasium, das Realgymnasium und die Oberrealschule zum ersten Male als die drei anerkannten Formen der höheren Schule eingeführt werden, lassen es in bezug auf die Philosophische Propädeutik beim Alten, und zwar hauptsächlich, weil es an den geeigneten Lehrern fehle.

Den größten Tiefstand in der theoretischen und praktischen Bewertung der Philosophischen Propädeutik zeigen die Lehrpläne von 1891, in denen es heißt: „Die auf allen Stufen neben der Dichtung zu pflegende Prosalektüre hat den Gedanken- und Gesichtskreis des Schülers zu erweitern und zumal auf der Oberstufe den Stoff für Erörterungen wichtiger allgemeiner Begriffe und Ideen zu bieten. Zweckmäßig geleitet kann diese Lektüre in der Prima die oft recht unfruchtbar betriebene und als besondere Lehraufgabe hier ausgeschiedene Philosophische Propädeutik ersetzen."

Die allgemeine Belebung des Interesses für Philosophie, die dem Rückgange zu Kant[1]) langsam folgte, wirkte aber bald auch auf die höheren Schulen zurück. In den Lehrplänen von 1901, welche jetzt noch in Geltung sind, heißt es bei Behandlung der Oberstufe im Deutschen: „Wünschenswert erscheint eine in engen Grenzen zu haltende Behandlung der Hauptpunkte der Logik und der empirischen Psychologie".

Die dazu gehörigen „Methodischen Bemerkungen" führen dann weiter folgendes aus: Durch eine zweckmäßig geleitete Lektüre „wird die Philosophische Propädeutik, deren Aufnahme in den Lehrplan der Prima an sich wünschenswert ist, wirksam unterstützt, da aber, wo die Verhältnisse ihre Aufnahme nicht ermöglichen, wenigstens einigermaßen ersetzt werden können. Aufgabe einer solchen Unterweisung ist es, die Befähigung für logische Behandlung und spekulative Auffassung der Dinge zu stärken und dem Bedürfnisse der Zeit, die Ergebnisse der verschiedensten Wissenszweige zu einer Gesamtauffassung zu verbinden, in einer der Fassungskraft der Schüler entsprechenden Form entgegenzukommen. Zu wünschen ist, daß zur Förderung dieser Aufgabe auch die Vertreter der übrigen wissenschaftlichen Lehrfächer beitragen."

Der hier wieder auftretende Gedanke an die Philosophie als Einheit alles Wissens ist auch sonst noch an einzelnen Stellen der Lehrpläne lebendig geworden. So heißt es bei den Methodischen Bemerkungen für die Naturwissenschaften u. a.: Der Schüler „soll einen Einblick gewinnen in den gesetzmäßigen Zusammenhang der Naturerscheinungen und in die Bedeutung der Naturgesetze für das Leben; er soll auch, soweit dies auf der Schule möglich ist, die Wege verstehen lernen, auf denen man zur Erkenntnis dieser Gesetze gelangt ist und gelangen kann."

Die preußischen Lehrpläne von 1901 beherrschen zurzeit auch außerhalb Preußens im großen und ganzen das nördliche und mittlere Deutschland. Im Süden, der ja überhaupt diese und jene Eigenart zeigt, hat sich auch die Philosophische Propädeutik einen Rest von Selbständigkeit im Lehrplane der höheren Schulen bewahrt, doch ist darüber im allgemeinen kaum etwas Besonderes zu berichten[2]), was natürlich nicht ausschließt, daß hier und da ein hervorragender Lehrer auch über

1) Für weitere Kreise wurde dies sichtbar durch Langes viel gelesene Geschichte des Materialismus, deren erste Auflage 1866 erschien, und durch die berühmte Rede „Über die Grenzen des Naturerkennens" von Du Bois-Reymond auf der Naturforscher-Versammlung von 1872 (vgl. Nr. 29).

2) Vgl. Nr. 166.

die üblichen Bruchstücke der formalen Logik und empirischen Psychologie hinausgekommen ist und hinauskommt, wie es auch im Gebiete der preußischen Lehrpläne der Fall war und ist.[1])

Zur Zeit sind in Baden, Bayern und Württemberg neue Lehrpläne in Bearbeitung, welche, wie es heißt, auch der Philosophischen Propädeutik wieder eine größere Bedeutung zumessen werden; bei Abschluß dieser Abhandlung waren sie leider noch nicht zugänglich.

Dagegen hat in Preußen die Mädchenschulreform von 1908 für die Studienanstalten (Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule) des weiblichen Geschlechts zu einer neuen Bearbeitung der Lehrpläne von 1901 geführt, und diese Neubearbeitung wird auch sicher über kurz oder lang zu einer Durchsicht der Bestimmungen für die Knabenschulen führen. Bei der Mädchenschulreform folgten dem grundlegenden Erlasse über die Neuordnung vom 18. August 1908 unter dem 12. Dezember 1908 die erforderlichen Ausführungsbestimmungen. Für die Studienanstalten wird dabei ein besonderer Unterricht in der Philosophischen Propädeutik vorgesehen, und es heißt dazu[2]): „Der Philosophischen Propädeutik wird durch den gesamten deutschen Unterricht der oberen Klassen in mannigfacher Weise vorgearbeitet, indem die vertiefte Behandlung größerer literarischer Werke, die Betrachtung der geistigen Grundlagen literargeschichtlicher Epochen, die Erklärung sprachlicher Wandlungen ganz von selbst in die Erörterung psychologischer und philosophischer Fragen ausmünden werden und bei der Grammatik oder bei dem Entwerfen von Dispositionen Gelegenheit zur Erläuterung logischer Gesetze sich bieten wird.

Außerdem aber sind in den beiden oberen Klassen bestimmte Stunden für Philosophische Propädeutik anzusetzen. Diesen Stunden, die je nachdem in den Rahmen des deutschen oder auch naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts fallen können, sind folgende Aufgaben zu stellen:

1. Logik als Analyse des Denkprozesses. Lehre vom Begriff, Urteil und Schluß.

2. Anleitung zu psychologischer Betrachtungsweise und zu einer hierauf sich gründenden Beurteilung ethischer Probleme an der Hand ausgewählter Lektüre.

Die Anordnung und Verknüpfung dieser Gebiete muß den einzelnen Anstalten überlassen bleiben.

Der Unterricht in der philosophischen Propädeutik hat das Ziel, das bei heranwachsenden Menschen sehr lebhafte Interesse an den Vorgängen des Innenlebens zu befriedigen und zu leiten, die intellektuellen Bedürfnisse anzuregen, den Schülerinnen Prüfungsmerkmale der Urteils- und Begriffsbildung und damit die Mittel intellektueller Selbstzucht zu

1) Es mag nur an P. Cauer, E. Latrille, R. Lehmann, B. Schmid, A. Schulte-Tigges usw. erinnert werden.

2) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen. 1908, S.916.

geben und das Verständnis für philosophische Fragen und Aufgaben anzubahnen. Durch ihren Anschluß an die Naturwissenschaften einerseits, die Geisteswissenschaften andererseits ist die Philosophische Propädeutik geeignet, diese beiden Seiten der den Schülerinnen vermittelten Bildung in einer höheren Einheit zusammenzufassen."

Diese Lehrpläne von 1908 stellen in ihren „Methodischen Bemerkungen" einen bedeutenden Fortschritt dar gegenüber den Lehrplänen von 1901, und im besonderen hat man den Eindruck, daß auch überall die Philosophie als Einheit alles Wissens wirklich hinter den Sonderbestimmungen für die einzelnen Fächer steht.

Statt der farblosen Bestimmungen über die Lektüre im Griechischen von 1901 heißt es z. B. hier: „Von Plato sind außer der Apologie 2 bis 4 Dialoge zu lesen, darunter mindestens ein größerer, Gorgias, Protagoras, Phädon oder eine Auswahl aus der Republik. Die Anfangs- und Schlußkapitel des Phädon sind jedenfalls zu lesen." Ferner heißt es: „Das Lesebuch von Wilamowitz ist geeignet, das Verständnis für die Entwicklung und die weltgeschichtliche Bedeutung der griechischen Literatur zu fördern." Und endlich: „Zum Verständnis des griechischen Geisteswesens ist Bekanntschaft mit den Werken der bildenden Kunst nicht zu entbehren."

Besonders gut ist auch das Methodische für das mathematisch-naturwissenschaftliche Gebiet durchgearbeitet, und zwar haben dabei die Reformvorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte eine weitgehende Berücksichtigung gefunden. Für die Oberprima fordern diese im mathematischen Unterrichte zum Schluße: „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte", und auch diese Forderung ist wörtlich in die Lehrpläne der Studienanstalten übergegangen.

Berücksichtigt man außerdem die einschlägige Literatur, für welche hier auf die vortreffliche Abhandlung[1]) von Ziertmann (1906) verwiesen werden mag, so darf man wohl schließen, daß die Philosophie etwa seit der Jahrhundertwende auch für die Schule wieder höher bewertet wird als vordem.

Für die Prüfung dieses Schlusses ist es von Bedeutung, daß im Jahre 1911 die beiden großen Versammlungen, in welchen ein beträchtlicher Teil des deutschen geistigen Lebens zum Ausdruck kommt, sich mit der Philosophischen Propädeutik beschäftigt haben, die 83. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Karlsruhe und die 51. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Posen.[2])

In Karlsruhe hielt zunächst Herr Eugen Müller (Konstanz) einen

1) Vgl. Nr. 173.

2) Vgl., abgesehen von den Sonderberichten, im Pädag. Archiv 1911, Nr. 12 und 1912 Nr. 1.

Vortrag über das Thema „Philosophischer Unterricht an höheren Schulen mit besonderer Beziehung auf deren mathematischen und naturkundlichen Unterricht". Im Anschlusse an die Jenenser Verhandlungen[1]) des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts von 1905, bei denen Herr Bastian Schmid (Zwickau) und Herr Alois Höfler (Prag, jetzt Wien) über den philosophischen Unterricht sprachen, und unter Berücksichtigung der einschlägigen Literatur stellte Herr Müller als ziemlich übereinstimmende Ansichten fest, „daß alle Lehrfächer, zumal die mathematischen und naturwissenschaftlichen oder die realistischen[2]), philosophische Elemente enthalten, die den Schülern nach und nach zum Bewußtsein zu bringen sind". Ferner wies er darauf hin, daß die Meraner Reformvorschläge zum realistischen Unterrichte[3]) durchweg in der Richtung nach philosophischer Vertiefung des Fachunterrichtes liegen, und zwar unter sorgfältiger Begründung im einzelnen. Dann wandte er sich der Frage zu, ob es besonderer Philosophiestunden an den Schulen bedürfe, um alle die schon ausgestreuten Keime zu fruchtbringender Entfaltung zu bringen. Unter Hinweis auf die Verhältnisse in Österreich und unter Anerkennung der Forderungen von Ziertmann kam Müller dabei dazu, „für die höheren Schulen aller Gattungen gesonderte Philosophiestunden in den beiden Oberklassen zu verlangen neben gelegentlichen philosophischen Erläuterungen in womöglich allen einzelnen Lehrfächern." „Wie die humanistischen, so können und sollen auch die realistischen Fächer eine natürliche didaktische Einheit bilden durch die innere Verwandtschaft ihres Stoffes, wie durch das gemeinsame ihrer spezifischen Bildungswerte".[3])

Auch der zweite Redner, Herr Seith (Freiburg i. B.), kam zu der Forderung besonderer Stunden für Philosophie, in denen das humanistische, dem Menscheninnern zugewandte und das realistische, dem Kosmos zugewandte Ideal zu einem neuen umfassenden Ideale verschmolzen werden sollen.

In der Erörterung wurde das Bedürfnis nach philosophischer Durchbildung der Schüler und deren Empfänglichkeit dafür allgemein anerkannt, während Herr Schmid (Zwickau) und Herr Treutlein (Karlsruhe) u. a. sich gegen besondere Stunden in Philosophie aussprachen, weil im Lehrplane kein ausreichender Platz dafür zu schaffen sei und weil die geeigneten Lehrer fehlen. Im besonderen wies Herr Ruska (Heidelberg) auf die von ihm mit Erfolg angebahnte Einführung der Philoso-

1) Vgl. Unterrichtsblätter usw. 1905, Nr. 4 und Nr. 5.

2) Die Bezeichnung „humanistische" und „realistische" Fächer können wir von unserem Standpunkte aus nicht anerkennen, wie aus dem später Folgenden hervorgehen dürfte, jedenfalls ist die Mathematik kein „realistischer" Unterrichtsgegenstand.

3) Vgl. dazu Höflers Vortrag auf der Salzburger Naturforscherversammlung (1909) und seine Didaktik des mathematischen Unterrichts (Nr. 69b).

phie in die neusprachliche Lektüre hin[1]), durch welche auch innerhalb der geltenden Lehrpläne den aufgestellten Forderungen zum Teil wenigstens entsprochen werden könne.

In Posen sprachen Herr Jerusalem (Wien) und Herr Lehmann (Posen) über Philosophische Propädeutik. Während der erste Redner über die gesicherte Überlieferung und weitere Entwicklung dieses Faches in den österreichischen Gymnasien berichten konnte, führte der zweite Redner unter Zustimmung der Versammlung für Deutschland aus, daß es besonderer Stunden für das Fach nicht bedürfe, es handele sich nicht um „Unterricht in der Philosophie" sondern um „Philosophie im Unterricht".

In der Erörterung wurde wiederum das Bedürfnis nach Durchbildung der Schüler in der Philosophie und deren Empfänglichkeit durchaus anerkannt, besondere Stunden für Philosophie aber abgelehnt. Man war der Ansicht, „daß kein Schulfach, durchaus auch nicht die mathematisch-naturwissenschaftlichen, von dem Durchdringen mit philosophischem Geiste ausgeschlossen bleiben dürfe, daß u. a. auch die Religionsstunden sich dazu eigneten".

Besonders hervorzuheben ist noch die in Posen gestellte, freilich zur Zeit wohl schwer erfüllbare Forderung einer philosophischen Einleitungs- oder Übergangsvorlesung auf der Hochschule in einer „auf Kenntnis des von den Schulen Mitgebrachten gegründeten Behandlung".

Ziehen wir aus alledem[2]) das Ergebnis für die augenblickliche Lage, so ist festzustellen, daß in bezug auf die Berechtigung der Forderung „Philosophie im Unterrichte" bei allen beteiligten Faktoren, einschließlich der Behörden, völlige Übereinstimmung herrscht, während die Forderung „Unterricht in der Philosophie" teils freudig anerkannt und teils prinzipiell oder doch mit Rücksicht auf die ihrer Verwirklichung entgegenstehenden Schwierigkeiten abgelehnt wird.

Daß bei Durchführung der Forderung „Philosophie im Unterrichte" schließlich das eine Ideal herauswachsen solle, auf das Herr Seith auf der Karlsruher Versammlung hingewiesen hat, dürfte wohl auch als unumstritten gelten.

Für dieses Ideal ist schon früher u. a. Herr Max Simon (Straßburg) eingetreten. Bereits in der ersten Auflage der Didaktik (1895) heißt es: „In den philosophischen Unterricht der obersten Klassen haben sich die Lehrer des Deutschen und der Mathematik zu teilen; fällt jenen die Ästhetik Schillers, die Ethik Kants und seine Lehre von der Urteilskraft zu, so diesen die erkenntniskritische Behandlung des Zahlbegriffs, den er in allen seinen Verzweigungen von seinem Ursprunge aus der logischen Funktion des Vergleichens an verfolgen muß.... Und

1) Vgl. die Sammlung Englischer und Französischer Schriftsteller aus dem Gebiete der Philosophie, Kulturgeschichte und Naturwissenschaft (Heidelberg bei Winter), von denen bereits Locke, Hume u. a. erschienen sind.

2) Vgl. dazu auch Paulsens Pädagogik. Stuttgart und Berlin, 1911, S. 323f.

der Unterricht in der Stereometrie und Mechanik zwingt uns, auf Kants Anschauungen von Raum und Zeit einzugehen und den Gegensatz zwischen ihm und Gauß klarzulegen. Die Verbindung der Facultas in Deutsch und Mathematik wird in ganz naher Zukunft eine durchaus gewöhnliche werden, und sie wird auch für die Leiter der Gymnasien zweckmäßig sein." Daß der physikalische Unterricht auf der Oberstufe mit dem mathematischen im allgemeinen in einer Hand liegen soll, hat Simon schon vorher ausgeführt, so daß also die Verbindung von „Deutsch, Mathematik und Physik", zunächst für die Gymnasien, in philosophischer Hinsicht als besonders günstig gilt.[1])

1) In bezug auf die „Zusammenstellung der verschiedenen Lehrbefähigungen" (Vgl. W. Lorey in Bd. I, Heft 3, S. 56 dieser Imuk-Abhandlungen) stimmen die an der Universität herrschenden Ansichten leider mit den Bedürfnissen der Schule nicht immer überein, so auch nicht in bezug auf die Verbindung von Deutsch mit Mathematik und Physik, wobei natürlich Philosophische Propädeutik in Verbindung mit Deutsch für die Mittelstufe Deutsch für die Oberstufe ergeben soll. Ebenso wünschen die Universitätslehrer meist, daß Deutsch und Englisch einerseits und Lateinisch und Französisch andrerseits zusammengestellt werden, während für die Schule u. a. Französisch und Englisch für die Oberstufe in Verbindung mit Deutsch für die Mittelstufe eine sehr günstige Verbindung ist.

Das Problem der Oberlehrerbildung hat, soweit Mathematik und Naturwissenschaften in Frage kommen, auf der 79. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Dresden (1907) einen vorläufigen Abschluß erhalten. Die Unterrichtskommission der Versammlung kam, was die Zusammenstellung der Lehrbefähigungen anlangt, zu dem Schlusse (vgl. Nr. 56b S. 267): Nach reiflicher Überlegung müssen wir als Norm eine Trennung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Studien in zwei „Gruppen" empfehlen, eine „mathematisch-physikalische" und eine „chemisch-biologische", wobei die Abtrennung zwischen diesen beiden Gruppen je nachdem verschieden gewählt werden mag." Zur Erweiterung der Studiengebiete empfiehlt die Kommission u. a. (vgl. Nr. 56b S. 293) die Philosophische Propädeutik. Die Lehrbefähigung für diese, so wichtig sie an und für sich ist, erhöht, wenigstens im Gebiete der preußischen Bestimmungen, die Verwendbarkeit des Kandidaten zunächst nicht, während dieser, falls er außerdem noch die Lehrbefähigung im Deutschen für die zweite Stufe erwirbt, mit dem Unterrichte im Deutschen unbeschränkt betraut werden darf. Die Anforderungen für diese Lehrbefähigung im Deutschen sind nicht erheblich, und da alle Kandidaten in den Seminaren der höheren Schulen für den Unterricht im Deutschen bis Untersekunda einschließlich ausgebildet werden, so läßt sie sich auch noch nachträglich leicht erwerben. Vorausgesetzt ist dabei allerdings ein größeres Entgegenkommen der Professoren der Germanistik, die zurzeit freilich zum Teil in Widerspruch mit den Bestimmungen nicht geneigt sind, überhaupt eine Lehrbefähigung im Deutschen zu erteilen, falls der Kandidat nicht umfassende historische Studien dazu gemacht hat. Auch hierin spricht sich die bekannte Überschätzung des Sprachlich-Historischen gegenüber dem Mathematissh-Naturwissenschaftlichen aus, unter der im Gegensatze zum Auslande die deutsche Bildung nun einmal leidet. Über diese hat Herr Timerding auf dem Kongresse zu Mailand (vgl. Commission internationale de l'Enseignement mathématique, circulaire Nr. 5) einige interessante Bemerkungen gemacht, aus denen wir hervorheben (vgl. S. 50): „Nous sommes en Allemagne profondement spécialistes et ce qu'il y a de plus, nous le sommes dès que nous commençons nos études." Gegen dieses Spezialistentum ist auch u. a. Simons Forderung gerichtet, die Lehrbefähigung in Mathematik und

Ich kann dem nur beipflichten, da ich selbst Jahre lang jene drei Fächer auf der Oberstufe des Gymnasiums zu vertreten hatte und mich dabei stets bemüht habe, das e i n e Ideal herauszuarbeiten, von dem jüngst Herr Seith sprach. Nur möchte ich dabei in Ergänzung Simons noch Goethe neben Schiller stellen, der, ganz abgesehen von seiner Bedeutung für die Naturwissenschaft und Naturauffassung[1]), auch in erkenntnistheoretischer Hinsicht gelegentlich überraschend tiefe Aufschlüsse gibt.

Natürlich können auch andere Zusammenstellungen von Fächern günstig wirken, aber ich glaube, daß die Unterrichtsverwaltungen mit Recht von den Lehrern des Deutschen und von denen der Mathematik, die allerdings stets zugleich Physiker sein müssen, am meisten philosophische Förderung erwartet haben und auch fernerhin zu erwarten berechtigt sind.

Die Vertreter der Forderung „Unterricht in der Philosophie", denen meist übrigens auch das Ideal von Seith vorschwebt, wünschen, wie es in Österreich ist, in den beiden obersten Klassen je zwei Wochenstunden für die philosophische Propädeutik, über deren Abgrenzung im einzelnen noch keine Einigkeit herrscht. Gegen Ziertmann möchte ich mit Wendt u. a. auch für die Geschichte der Philosophie eintreten, während ich sonst den Ausführungen von Ziertmann nur beipflichten kann.[2]) Faßt man in der Geschichte immer zugleich Persönlichkeit, Problem und kulturelle Lage ins Auge, so kann man auch der Philosophie der Gegenwart damit dienen, besonders, wenn man immer alles, was sich für die Folgezeit als unfruchtbar erwiesen hat, übergeht oder höchstens andeutet.

Daß übrigens auch der allgemein anerkannten Forderung „Philosophie im Unterricht" nicht so ohne weiteres genügt werden kann, hat Herr Ziertmann unter voller Anerkennung der Bemühungen und Versuche von Cauer, Lehmann, Schulte-Tigges u. a. ziemlich erschöpfend dargelegt.

Dabei spielt natürlich die Frage der Oberlehrerbildung eine besondere Rolle. Für den „Unterricht in der Philosophie" bietet sie selbstverständlich geringere Schwierigkeiten, als für die „Philosophie im Unterrichte", obwohl ja in der Staatsprüfung der Oberlehrer auch philosophische

---

Physik mit einer solchen im Deutschen zu verbinden. Daß seine Prophezeihung in bezug auf diese Verbindung bisher nicht eingetroffen ist, gibt Simon in der zweiten Auflage der Didaktik (1908) natürlich zu, an seinem Standpunkte hält er aber, unseres Erachtens mit vollem Rechte, durchaus fest.

1) Vgl. hierzu auch M. Geitel „Entlegene Spuren Goethes, München und Berlin, 1911" in bezug auf Goethes Stellung zur Industrie und Technik.

2) Daß die Oberrealschule der Philosophie in höherem Maße bedürfe, als das Gymnasium, kann ich allerdings nicht zugeben (vgl. hier den folgenden Abschnitt).

Kenntnisse verlangt werden.[1]) Herr Ziertmann[2]) weist besonders auf Lehmanns Vorschläge für die Hebung der philosophischen Bildung des Oberlehrerstandes hin, bemerkte aber dazu: „Daß wir aber jemals, auch wenn von seinen Vorschlägen das Mögliche verwirklicht wird, auf einen durchgängig philosophisch gebildeten Oberlehrerstand werden hoffen können, glaube ich nicht. Abgesehen von solchen, denen tieferes Interesse für den Gegenstand, den sie vor sich haben, für seine Grundfragen und Beziehungen zu anderen überhaupt abgeht und deren philosophische Bildung sich daher auf oberflächlich zum Examen eingepaukte und möglichst rasch wieder vergessene, dürftige Kenntnisse beschränkt; abgesehen von diesen wird es stets Naturen geben, die fast ausschließlich auf das Tatsächliche, das Exakte, gerichtet sind, fachwissenschaftliche Köpfe, und unter ihnen besonders wieder Lehrer des Deutschen, die die Dinge nur künstlerisch konkret aufzufassen imstande sind. Beides können treffliche Lehrer sein, doch wird man von ihnen nicht verlangen können, sie sollten ihren Unterricht philosophisch erteilen."

Jedenfalls müssen aber auch die Vertreter der philologisch-historischen Fächer und die Vertreter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer irgendwie in Fühlung gebracht werden, wenn die „Philosophie im Unterrichte" einem einheitlichen Ziele zustreben soll. Dazu scheinen mir, abgesehen von geeigneten Hochschulvorlesungen, wie ich schon früher hervorgehoben habe (vgl. Nr. 167k), die Seminare der höheren

1) Über die in den einzelnen Staaten Deutschlands hierfür geltenden gesetzlichen Bestimmungen und deren Beurteilung vergleiche Bd. II dieser IMUK-Abhandlungen, sowie in Bd. I die Arbeit von Herrn W. Lorey. In letzterer ist für unsere Frage besonders beachtenswert (S. 60 u. f.) die Besprechung der „Allgemeinen Anforderungen" der Oberlehrer-Prüfung (in Religion, Pädagogik, Philosophie und deutsche Literatur), welche an das bekannte Gutachten von Herrn E. Study (vgl. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 7) anknüpft.

Über die entsprechenden Verhältnisse in Österreich, die ja gern zum Vergleiche herangezogen werden, gibt Auskunft die IMUK-Arbeit (Heft 12) von Herrn A. Höfler: „Die neuesten Einrichtungen in Österreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik." Für die Kandidaten, welche keine Lehrbefähigung in Philosophie erlangen wollen, wurde bis zum Jahre 1897 nur eine pädagogisch-didaktische Hausarbeit verlangt, später traten an Stelle dieser schriftlichen Prüfung zwei Kolloquien, je eines in Philosophie und in Pädagogik. Die neue Prüfungsordnung von 1911 ersetzt diese durch ein mündliches philosophisch-pädagogisches Examen, das vor der Staatsprüfung abgelegt werden kann, doch dürfen die Meldungen nicht vor dem Ende des 5. Semesters erfolgen.

Hervorzuheben ist vielleicht noch, daß für die volle Lehrbefähigung in Mathematik u. a. gefordert wird „Bekanntschaft mit den Hauptergebnissen der Forschungen über die Grundlagen der Mathematik".

Auf den einleitenden Aufsatz Höflers in dieser IMUK-Abhandlung „Mathematik und Lehrerbildung" mag noch besonders hingewiesen werden.

Der Sachlage in Österreich entsprechend tritt Höfler natürlich für die beiden Forderungen „Unterricht in der Philosophie" und „Philosophie im Unterrichte" ein (vgl. dazu Nr. 69f.).

2) Vgl. Nr. 173 S. 25.

Schulen[1]) eine geeignete Stätte zu sein. In diesen werden jetzt auch die Vertreter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer über das Philologisch-Historische einigermaßen orientiert, während das Umgekehrte meist nicht der Fall ist. In diesem Mangel an Gegenseitigkeit tritt (vgl. hier S. 8 Anm. 1) ein Grundfehler der deutschen Bildung zutage!

Über andere Mittel, der Forderung, daß die Schule ein Organismus sein solle, zu genügen, habe ich mich auch bereits öfters ausgesprochen (vgl. Nr. 167 p), dazu gehört z. B. das gegenseitige Hospitieren im Unterrichte, namentlich bei abschließenden Wiederholungen, und das würde auch für die hier vorliegende Frage von Bedeutung sein.

Merkwürdigerweise aber ist eine Schwierigkeit, die jede Art des Philosophie-Unterrichts auf der Schule trifft, in letzter Zeit meines Wissens nicht oder doch nicht genügend hervorgehoben worden, obwohl sie nachweislich für die deutschen Schulverwaltungen seit den Reorganisationen von 1816 mit vollem Rechte oft genug bedrückend gewesen ist. Man spricht immer von der Philosophie, als wenn es zur Zeit eine bestimmte herrschende Philosophie gäbe, während doch sogar die Logik, das Wort selbst im engsten Sinne genommen, augenblicklich im Streite der Parteien schwankt, geschweige denn alles weitere. Philosophie soll allem einzelnen, was die Schule bietet, Einheit geben! Nun denke man sich den idealen Fall, daß alle Lehrer wirklich philosophisch durchgebildet sind, aber leider aus lauter verschiedenen philosophischen Schulen stammen. Der Religionslehrer folge Drews, der Lehrer für Deutsch und Geschichte sei Pragmatist, die Fremdsprachler mögen bei Eucken, Riehl, Rickert und Wundt gehört haben, der Mathematiker stamme aus der Marburger Schule usw. Was sollte daraus werden, zumal wenn der Direktor philosophisch ungeschult ist oder ein Parteimann von einer der obigen Richtungen?

So berechtigt dieser Einwand auch zu sein scheint, so dürfte doch der Hinweis auf benachbarte Kulturstaaten, in denen die Philosophische Propädeutik im Lehrplane der höheren Schulen eine feste Stelle hat, zeigen, daß diese und alle anderen Schwierigkeiten nicht unüberwindlich sind. Wir wollen hier nur Österreich und Frankreich berücksichtigen, aber für Italien, Rußland u. a. gilt dasselbe.

In Österreich sind, wie schon erwähnt, in den beiden obersten Klassen der Gymnasien je 2 Wochenstunden für Philosophische Propädeutik angesetzt, und es ist vor allem der unausgesetzten und zielbewußten Arbeit von Höfler (und Meinong) zu verdanken, daß dort auch für die Philosophische Propädeutik vortreffliche Instruktionen (1900) erschienen sind, mit denen man wohl arbeiten kann. Höflers Grundlehren der Logik und Psychologie, ein ausgezeichnetes Buch[2]), sind mit ihnen natürlich in voller

1) Vgl. dazu W. Lorey in Bd. I, Heft 3 der deutschen IMUK-Abhandlungen, S. 106 f.
2) Vgl. Nr. 69a. Das Werk umfaßt 400 Seiten.

Übereinstimmung. Als Anhang sind 10 Lesestücke aus philosophischen Klassikern beigegeben, die eine weitere Behandlung der letzten Fragen ermöglichen.[1])

In Frankreich sind im letzten Schuljahre in der „Classe de Mathématiques" 3 Wochenstunden, in der „Classe de Philosophie" 8 bis 9 Wochenstunden für Philosophie angesetzt, und die „Programmes du 31. Mai 1902" geben dafür eine gute Einteilung des Stoffes. Ein bestimmtes Lehrbuch ist nicht vorgesehen, doch wird in Paris jedenfalls vielfach benutzt Boirac's „Cours élémentaire de philosophie"[2]), der auch allen billigen Anforderungen genügt; er enthält nach einer Einführung in die Philosophie der Reihe nach Psychologie nebst etwas Ästhetik, Logik, Moral und Metaphysik und außerdem einen Anhang, der neben der Behandlung besonderer philosophischer Fragen auch einen Abriß der Geschichte der Philosophie gibt.

In seiner ganzen Ausdehnung ist dieser Cours bestimmt für die Classe de Philosophie, während die Classe de Mathématiques nur Unterricht in Logik und Moral hat, aber gewissermaßen in einer psychologischen Umrahmung. Für diesen abgekürzten Plan gilt folgende Einteilung:

I. Eléments de Philosophie scientifique.

Introduction, la Science, Méthode des Sciences mathématiques, Méthode des Sciences de la Nature, Méthode des Sciences morales et sociales.

II. Eléments de Philosophie morale.

Nach einer Einleitung über die ethische Grundlegung wird behandelt: Morale personnelle, Morale domestique, Morale civique et politique.

Bei Höfler sind Ethik und Ästhetik in die Psychologie hineingearbeitet, und ebenso die metaphysischen Grundfragen. Einer allgemeinen Einleitung in die Psychologie folgt die Psychologie des Geisteslebens, welche sich mit den Vorstellungen und Urteilen beschäftigt, und dann die Psychologie des Gemütslebens. Letztere umfaßt die Gefühle und die Begehrungen, und unterscheidet im ersten Abschnitte ästhetische, logische und ethische Gefühle, während sie im zweiten Abschnitte die Wirkungen des Wollens und die Ursachen des Wollens vorführt, wobei u. a. auch das Problem der Willensfreiheit und die Entwicklung eines sittlichen Charakters behandelt wird.

Was in Österreich und Frankreich möglich ist, muß auch in Deutschland durchführbar sein. Mit Rücksicht auf die oben aufgeworfene Frage nach der *einen* Philosophie würde es gut sein, sich dabei an die alte Kantische Mahnung zu erinnern, daß man nicht „Philosophie" lehren und lernen soll, sondern „Philosophieren", d. h. den Blick auf das Ganze menschlichen Wissens richten.

---

1) Vgl. außerdem Höflers IMUK-Abhandlung, hier S. 10 Anm. 1.

2) Mir liegt die 24. Auflage von 1911 vor (Paris bei Felix Alcan), die etwa 550 Seiten umfaßt.

Es gibt nicht eine Philosophie, denn die Antwort auf die Frage nach der Einheit alles Wissens ist ihrer Natur nach vieldeutig. Diese Vieldeutigkeit wird auch der Lehrer, selbst wenn er sich dogmatisch auf eine philosophische Schule festgelegt haben sollte, den Primanern zum Bewußtsein bringen müssen, und dazu ist gerade die Geschichte der Philosophie sehr geeignet. Nicht Skeptizismus oder Agnostizismus oder bloßer Pragmatismus hat hier das letzte Wort zu sprechen, sondern in Übereinstimmung mit einem bekannten Lessing-Worte das ewige Streben nach der Wahrheit, die für uns Menschen nun einmal nur asymptotisch erreichbar ist, und zwar auf verschiedenen Wegen.

Wie aber auch für die höheren Schulen Deutschlands die endgültige Lösung der nächsten Zukunft in bezug auf die Philosophische Propädeutik sich gestalten mag, unter allen Umständen erwächst gemäß der allgemein anerkannten Forderung „Philosophie im Unterrichte" für die Vertreter einzelner Fächer oder didaktischer Gruppen von Fächern die Aufgabe, von diesen aus den Blick auf das Ganze des Wissens zu richten und in diesem Sinne Fühlung mit der Philosophie zu suchen.

Darum ist es gerechtfertigt, daß die deutsche Abteilung der „Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission" auch den Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophischer Propädeutik eine Abhandlung widmet.

Der Darlegung dieser Beziehungen gelten die folgenden Blätter, welche natürlich bei der geschilderten Sachlage nur Anregungen geben können und wollen.

Mögen sich weitere Mitarbeiter für die Lösung unsrer Aufgabe finden!

2. Die Aufgabe.

Unsere Aufgabe besteht darin, die gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und Philosophischer Propädeutik für unsere deutschen höheren Schulen darzulegen.

Dazu wird es zweckmäßig sein, die drei Begriffe, um die es sich dabei handelt, von vornherein wenigstens vorläufig abzugrenzen.

A. Mathematik.

Unter Mathematik verstehen wir, der üblichen Schulbezeichnung entsprechend, die Gesamtheit der folgenden Einzelwissenschaften:

1. Arithmetik (Algebra, Analysis usw.)
2. Geometrie
3. Phoronomie } Mechanik.
4. Dynamik (Statik und Kinetik) }

Einen Unterschied zwischen reiner und angewandter Mathematik im Sinne der zum Teil üblichen Koordination können wir nicht anerkennen, es gibt nur eine Mathematik, aber sie hat, um mit Kant zu reden, einen reinen (freien oder immanenten) und einen empirischen (gebundenen oder transienten) Gebrauch.[1])

Diese eine Mathematik hat einen dreifachen Wert und zwar

1. als selbständige Wissenschaft,
2. als Mittel der Naturerkenntnis (Physik usw.),
3. als Mittel der Naturbeherrschung (Technik usw.).

Dabei ist das Wort „Natur" in weitester Bedeutung zu nehmen, auch die Statistik gehört zur Naturerkenntnis, ebenso wie das Versicherungswesen schließlich der Naturbeherrschung dient.

Aufgaben der Naturerkenntnis und der Naturbeherrschung haben die geschichtlichen Anfänge der Mathematik bestimmt und sie bei ihrer Entwicklung zur Wissenschaft fortwährend als Anregungen begleitet und werden dies auch stets tun.

Diese Beziehungen hat Herr Klein gelegentlich[2]) in einer Mitteilung „Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite" genauer dargelegt, indem er zunächst darauf hinwies, daß die angewandte Mathematik als solche keine geschlossene Disziplin ist. Dann sagt er weiter: „Vergleicht man die Gesamtwissen-

1) Vgl. hierzu zunächst Klein-Riecke „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen", Leipzig, 1900 und „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen", Leipzig, 1904. Die einschlägigen Fragen wurden weiter 1907 geklärt durch eine Besprechung von Vertretern der angewandten Mathematik in Göttingen (vgl. die Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 16). In dem einleitenden Vortrage kommt Herr Runge zu dem Ergebnisse: „Die Probleme in den Erfahrungswissenschaften, die mit mathematischen Methoden arbeiten, verlangen eine Durchführung bis zu quantitativen Resultaten." „Dazu sind Methoden notwendig, die, sei es graphisch, sei es numerisch, die gesuchten Resultate liefern. Solche Methoden auszudenken und auszubilden, darin sehe ich den eigentlichen Inhalt der angewandten Mathematik. Sie ist der reinen Mathematik nicht nebengeordnet, sondern sie ist ein Teil der reinen Mathematik." Die äußerst vielseitige Besprechung schloß mit einstimmig angenommenen Thesen, betreffend den Umfang und den Lehrbetrieb der angewandten Mathematik sowie die für sie erforderlichen Einrichtungen. Für letztere ist, wie allgemein anerkannt wurde, die Universität Göttingen mustergültig, und ihr kann sich dank den Bemühungen von Herrn Gutzmer wohl zunächst die Universität Jena an die Seite stellen. (Vgl. dazu ferner „Das mathematische Institut der Universität Jena" in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 20.)

Für die Oberlehrerprüfung in angewandter Mathematik gilt in Göttingen jetzt als Grundsatz, daß alle Kandidaten in den graphischen und numerischen Methoden gleichmäßig durchgebildet sein müssen, während außerdem jeder Kandidat in einem frei zu wählenden Sondergebiete (technische Mechanik, Geodäsie, Astronomie und Versicherungswesen) gründliche Kenntnisse darzulegen hat. Vgl. dazu auch „Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen", Leipzig (letzte Ausgabe 1911).

Auf die ausführliche Behandlung der angewandten Mathematik in der Weber-Wellsteinschen Enzyklopädie, namentlich in deren neuester Auflage, mag auch noch besonders hingewiesen werden.

2) Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1904, S. 396 u. f., Leipzig bei B. G. Teubner.

schaft der Mathematik mit einer Festung, so repräsentieren die verschiedenen Teile der angewandten Mathematik die Außenforts, welche die Innenwerke nach allen Richtungen umgeben, und über welche die Verbindung mit dem Vorgelände hinüberführt. Gemeinsam allen Teilen der angewandten Mathematik ist dementsprechend nur dies, daß der mathematische Gedanke bei ihnen in notwendige und untrennbare Verbindung zu einem Gebiete anderweiter wissenschaftlicher Fragestellungen tritt. Die angewandte Mathematik steht dadurch in ausgesprochenem Gegensatz zu demjenigen Zweige unserer Wissenschaft, den man als Zitadelle der Festung ansehen mag, zur formalen Mathematik (im Leibnizschen Sinne), d. h. zu derjenigen Behandlung mathematischer Fragen, welche nach Möglichkeit von jeder konkreten Bedeutung der vorkommenden Größen oder Symbole absieht und nur nach den äußerlichen Gesetzen fragt, nach denen dieselben kombiniert werden sollen."

„Zum Gedeihen der Wissenschaft ist ohne Zweifel die freie Entwicklung aller ihrer Teile erforderlich. Die angewandte Mathematik übernimmt dabei die doppelte Aufgabe, den zentralen Teilen immer wieder von außen neue Anregungen zuzuführen und umgekehrt die Erträgnisse der zentralen Forschung nach außen zur Wirkung zu bringen. Die Geltung der Mathematik innerhalb des weiten Bereiches sonstiger menschlicher Interessen erscheint daher in erster Linie an die erfolgreiche Betätigung der Vertreter der angewandten Mathematik gebunden."

Betrachtet man die Reihe Arithmetik, Geometrie, Phoronomie, Dynamik, so zeigt sich, daß einerseits von jedem ihrer Glieder reichlich Wege zu den Anwendungen führen, während sie andererseits als Ganzes gewissermaßen eine stufenweise fortschreitende Eroberung der räumlich-zeitlichen Außenwelt darstellt.

Obwohl in der Arithmetik das Logische dem Anschaulichen gegenüber sozusagen die Führung übernimmt, so wurzeln die Grundbegriffe der Arithmetik doch ebenso in der Anschauung wie die der Dynamik, und man darf mit Fug und Recht die ganze Mathematik als ein anschaulich-logisches System bezeichnen, in dessen verschiedenen Gebieten dieselben beiden Grundprinzipien herrschen, für deren Bezeichnung man u. a. die Worte Ordnung (Lage) und Maß verwenden kann.

Die Arithmetik umfaßt die Lehre von der Zahl in ihrer weitesten Bedeutung, wobei methodisch die Arithmetik der Lage (Ordinalzahlen) von der Arithmetik des Maßes (Kardinalzahlen, multiplicantia und distributiva) zu scheiden ist, obwohl beides bei dem Aufbau der Wissenschaft von der Zahl meist bald in eins zusammenfließt.

Bei der Geometrie ist die Scheidung der Geometrie der Lage (im Sinne von Poncelet, v. Staudt, Reye u. a.) und der Geometrie des Maßes gang und gäbe. Erstere benutzt, wie alle Wissenschaften, gelegentlich Anzahlen (1, 2, 3...), und dringt von da zur Idee des Maßes vor, während letztere Zahl und Strecke (und zunächst auch noch Winkel) von

Anfang an als Maße benutzt, aus denen sie ihre anderen Maße aufbaut, um endlich als analytische Geometrie auch Lagenbeziehungen zu behandeln.

Schließt man die Bewegung aus der Geometrie aus, was in prinzipieller Hinsicht ja gelegentlich gefordert wird, so hat auch die Phoronomie zunächst als Phoronomie der Lage (Kinematik) von den Bewegungen als Lagenänderungen zu handeln, wobei die Zeit keine Rolle spielt, während sie als Phoronomie des Maßes neben Zahl und Strecke auch die Dauer als Maß benutzt, um daraus ihre anderen Maße aufzubauen.

In der Dynamik, welche ihren Namen von dem in geschichtlicher Hinsicht jedenfalls grundlegenden Kraftbegriff (δυναμις) hat, tritt die Maßzahl der Masse neben Zahl und Strecke und Dauer. Obwohl die Ruhe als Sonderfall der Bewegung aufzufassen ist, so werden doch jedenfalls für die Schule Aufgaben der Ruhe unter dem Einflusse von Kräften (Statik) von Aufgaben der Bewegung unter dem Einflusse von Kräften (Kinetik) zu scheiden sein.

Daß Phoronomie und Dynamik, für welche der umfassende Name Mechanik üblich ist, zur Mathematik gerechnet werden müssen, falls man diese, abgesehen von ihrem selbständigen Werte, als Mittel der Naturerkenntnis und der Naturbeherrschung ansieht, ist selbstverständlich.

Auch im „Cours de Philosophie" für die höheren Schulen Frankreichs heißt es[1]) bei „Méthode des Sciences Mathématiques" in bezug auf „Nature et Objets des Sciences Mathématiques" nach Erwähnung von Arithmetik und Geometrie „On peut y rattacher la mécanique rationnelle".

Daß bei der hier vertretenen Ansicht von der einen Mathematik die Frage nach deren Anwendbarkeit von Fall zu Fall eine besondere Untersuchung fordert, mag noch ausdrücklich erwähnt werden. Diese Frage tritt aber nicht etwa erst bei den Problemen der Mechanik auf, sondern schon bei der ersten Verwendung des Rechnens im gemeinen Leben, geschweige denn bei der Verwendung der Arithmetik im Gebiete der sozialen Wissenschaften (Versicherungsmathematik usw.).

Herr Poincaré sagt dazu gelegentlich[2]): In der Mathematik „kann unser Verstand behaupten, weil er befiehlt; aber verstehen wir uns recht: diese Befehle beziehen sich auf unsere Wissenschaft, welche ohne dieselbe unmöglich wäre, sie beziehen sich nicht auf die Natur." Bei jeder Aufgabe in der sogenannten angewandten Mathematik besteht[3]) „die Behauptung, um deren Begründung es sich handelt, in Wirklichkeit aus zwei verschiedenen Wahrheiten. Die erste ist eine mathematische Wahrheit, die sich streng beweisen läßt. Die zweite ist eine experimentelle Wahrheit. Die Erfahrung nur kann uns lehren, ob dieses reale und konkrete Objekt

1) Vgl. Nr. 8 S. 235.
2) Vgl. Nr. 113a S. XII.
3) Vgl. Nr. 113b S. 17.

dieser abstrakten Definition entspricht oder nicht. Diese zweite Wahrheit ist nicht mathematisch bewiesen, aber sie kann es auch nicht sein."

Die Mathematik muß sich im empirischen Gebrauche mit Annäherungen begnügen, und zwar in doppelter Hinsicht. Die Wirklichkeit entspricht überhaupt nur angenähert ihrer mathematischen Darstellung, und die Messungen des Empirischen liefern für dieses nur Zahlen von angenäherter Genauigkeit; bekanntlich ist z. B. noch nie eine Irrationalzahl für die Wirklichkeit verwendet worden, und dies wird auch nie geschehen.

B. Philosophische Propädeutik.

Unter philosophischer Propädeutik verstehen wir nicht eine mehr oder minder gut ausgewählte Sammlung von Bruchstücken aus der empirischen Psychologie und formalen Logik, sie ist uns vielmehr eine Propädeutik zur Philosophie oder besser zum Philosophieren.

Was ist aber damit gemeint?

Den Hellenen, die uns das Wort Philosophie geprägt haben, war in ihrer Blütezeit Philosophie dasselbe, was uns Wissenschaft ist, und zwar in dem Glauben, daß es eine Einheit alles Wissens gibt. Nur die notwendig gewordene Arbeitsteilung führte dazu, die eine Philosophie in einzelne Philosophien, d. h. Einzelwissenschaften, zu zerlegen, und daraus wiederum ergab sich das Bedürfnis nach einer grundlegenden Philosophie (πρωτη φιλοσοφια) als Wissenschaft der Einzelwissenschaften. Für diese ist die Gesamtheit der Einzelwissenschaften das Objekt, während jede einzelne Wissenschaft ihren besonderen Gegenstand hat.

Hierzu kommt aber noch ein zweites. Die Hellenen glaubten, daß die Tugend lehrbar sei, d. h. sie waren der Überzeugung, daß der richtigen Einsicht auch das richtige Handeln folgen müsse. Infolgedessen steht bei ihnen neben der theoretischen Philosophie von Anfang an eine praktische Philosophie, für deren Verbindung dann Sokrates wirkt.

Wenn wir nun auch nicht mehr die Tugend für lehrbar halten, sondern dem Willen und dessen Erziehung, unter Berücksichtigung der Gefühle, neben oder sogar vor dem Intellekte und dessen Bildung seine besondere Stellung geben, so ändert dies wohl die Begründung der praktischen Philosophie, aber nicht ihre allgemeine Bedeutung.

Unter Philosophie verstehen auch wir noch eine wissenschaftlich gestützte Weltanschauung, in welcher der einzelne seine Stellung suchen und finden kann. Nicht wie ein blasser Schemen der Abstraktion soll sie über dem Innersten des Menschen schweben, sondern mit seinem Fühlen und Wollen in engster Verbindung stehen und so auch sein Handeln bestimmen.

Dem damit geschichtlich gegebenen Schlagworte „Philosophie als Weltanschauung" hat man mit besonderem Nachdrucke in unserer Zeit das Schlagwort „Philosophie als Wissenschaft" entgegen gestellt, gelegentlich sogar in der Hoffnung, eine wissenschaftlich begründete Weltanschauung als Wissenschaft im strengsten Sinne des Wortes erzeugen zu können. Unserer Ansicht nach ist die Forderung einer Philosophie als Wissenschaft, deren Ideal die Einheit alles Wissens ist, durchaus berechtigt, aber sie wird nur einen Teil im Ganzen der Philosophie als Weltanschauung bilden können.

Jede Einzelwissenschaft gleicht einem Felspfade im Sonnenscheine, dessen Anfang und dessen Ende sich in Nebel verlieren. Auch die Mathematik macht hier keine Ausnahme, man denke nur einerseits an die Kämpfe um ihre erkenntnistheoretische Grundlage und andererseits an die Paradoxien der Mengenlehre.[1]) Nur, wenn man Surrogate der Erkenntnis für echtes Wissen hält, wie es in dogmatischen Epochen der Fall ist, scheinen Anfang und Ende so klar und bestimmt zu sein, wie die Mitte.

Wie sollte die Philosophie, deren Ideal die Einheit alles Wissens ist, Anfang und Ende enthüllen können, wenn diese für jede Einzelwissenschaft im Dunkel liegen? Das Leben als Anwalt des Praktischen verlangt, nicht von den Einzelwissenschaften, wohl aber von der Philosophie immer von neuem einen vorläufigen Abschluß. Wollte die Rechtsprechung darauf warten, bis eine allgemein anerkannte Ethik die Rechtsbildung bis ins einzelne hinein gestützt hätte, so wäre sie nie realisiert worden.

Aus dem Begriffe der Philosophie als Einheit alles Wissens folgt deren Gliederung.

Da in jeder Einzelwissenschaft das Beweisen schließlich einmal aufhören muß, weil Beweisen bedeutet, aus gegebenen Voraussetzungen Folgerungen ziehen, so hat die Philosophie zunächst die Aufgabe, die letzten Voraussetzungen der Einzelwissenschaften in einheitliche Verbindung zu bringen. Dieser Aufgabe dient die Erkenntnistheorie, in welche man die für alle Wissenschaften erforderliche Formal-Logik einbeziehen kann, wenn man es nicht vorzieht, sie ihr vorangehen zu lassen.

Von der Erkenntnistheorie aus müßte das Wissen, das in den Einzelwissenschaften vorliegt, zum Ganzen gestaltet werden, wenigstens in seinen Grundzügen. Was das bedeutet, zeigt vorbehaltlich aller Kritik im Einzelnen etwa Wundts Logik und Metaphysik.

Einheit alles Wissens wird nur erreicht, wenn man sich das tatsächlich immer unvollendete Wissen, an dessen weiterer Ausgestaltung unablässig zu arbeiten die Bestimmung des Menschengeschlechtes zu sein scheint, vollendet denkt, und auf dem Wege der Dichtung den Abschluß erstrebt, der auf dem Wege des Wissens ewig unerreichbar ist.

Die Philosophie beginnt als Wissenschaft und endet als Kunst, das Wort in jenem Sinne genommen, wie es Goethe und Schiller faßten, ihnen war die Kunst ja die höchste Lebensmacht.

So unsympathisch einem großen Teile der Mathematiker die Idee einer solchen Schlußdichtung auch sein mag, namentlich in einer Zeit,

1) Vgl. dazu weiter „Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik“ von O. Perron (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 20).

in der das reine Denken auf vielen Gebieten des Wissens, z. B. auch in der Volkswirtschaftslehre, wohl wieder einmal überschätzt wird, so unrichtig wäre es doch, mit Rücksicht auf das geschichtlich Gegebene von ihr abzusehen. Gerade die großen Philosophen, die ja zum Teil auch die großen Mathematiker sind, haben stets vermöge ihrer ganzen Persönlichkeit unbewußt eine solche abschließende Dichtung vollzogen, und in ihr hat oft gerade die stärkste Wirkung auf Mitwelt und Nachwelt beruht, wenn sie auch schließlich kritisch zersetzt wurde.

Es wiederholt sich immer, was der Dichter[1]) für die Geometrie gesprochen:

Eh' vor des Denkers Geist der kühne
Begriff des ewigen Raumes stand,
Wer sah empor zur Sternenbühne,
Der ihn nicht ahnend schon empfand?

An diese Schlußdichtungen, welche übrigens oft auch die erkenntnistheoretische Grundlegung beeinflussen, hat man nur die eine Forderung zu stellen, daß sie nicht gesicherten Ergebnissen der Wissenschaft widersprechen, sonst sind sie völlig frei.

Natürlich kann es nur Zeit-Philosophien geben, da für jede bestimmte Gestaltung einer Weltanschauung Persönlichkeit und kulturelle Lage neben den Problemen bestimmend sind.

Weiter ist noch darauf hinzuweisen, daß alles, was wir wissen, zunächst in einem psychischen Erlebnisse gegeben ist, und daß also die Psychologie als ein besonderer Teil der Philosophie eingeführt werden muß, aus dem erst Logik und Erkenntnistheorie hervorwachsen, wobei diese allerdings von der psychologischen Grundlage unabhängig werden.

Endlich bleibt noch übrig die Weltanschauung, welche der Forderung einer Einheit des Wissens entspricht, zu dem ganzen Menschen, dem denkenden, fühlenden und wollenden Menschen, wie er wirklich ist, in Beziehung zu setzen, und ebenso zu den sozialen Gruppen, welche tatsächlich in Familie, Sippe, Stamm, Gemeinde, Staat und Kirche usw. gegeben sind. So entstehen die Wert-Wissenschaften (Ästhetik, Ethik und Religionsphilosophie), welche man unter dem Namen Praktische Philosophie zusammenzufassen pflegt. Das Tatsächliche ihrer Gebiete, was geschichtlich vorliegt, gehört natürlich den Einzelwissenschaften an (Völkerpsychologie usw.) und hat auch bei deren Zusammenfassung zur Einheit alles Wissens bereits mitzuwirken, aber es bleibt noch übrig, aus der damit gewonnenen Weltanschauung für den Einzelnen an und für sich und als Glied eines Ganzen die notwendigen zielgebenden Folgerungen zu ziehen.

So etwa läßt sich der Umfang dessen abgrenzen, was man mit dem Namen Philosophie bezeichnet.

---

1) Schiller in den Künstlern (1789). Interessant ist die Anmerkung dazu in einem Briefe an Körner (22. Jan. 1789): Ewiger Raum kann der Dichter insofern sagen, weil man die Ewigkeit braucht, um die Unendlichkeit zu durchlaufen.

Ob ein einzelner in unserer Zeit noch der Aufgabe gewachsen ist, das damit umgrenzte Gebiet zu beherrschen, ist eine Frage für sich. Von der Größe der Forderung erschreckt, wandelten schon die Hellenen den Titel des „Weisen" in den Namen eines „Liebhabers der Weisheit" um, und es galt als Ruhmredigkeit, sich anders zu nennen.[1]) Dafür schufen sie aber auch schon frühe „Genossenschaften" (θυασοι), in denen eine Gesamtheit zu leisten versuchte, was dem Einzelnen versagt war. In unserer Zeit der sozialen Arbeit und der Truste, in der auch die wissenschaftlichen Vereinigungen nationalen und internationalen Gepräges an der Tagesordnung sind, sollte auch für die Philosophie etwas ähnliches geschaffen werden.[2])

Es müßte etwa die Arbeit, welche Wundt als einzelner zu bewältigen versucht hat, von einer Genossenschaft von neuem aufgenommen werden, und zwar unter Anerkennung der Vieldeutigkeit aller „letzten" Bestimmungen.

Im Sinne dieser Darlegung bedeutet uns die Forderung philosophischer Propädeutik die Gewöhnung, den Blick auf das Ganze zu richten. Sie steht also im Gegensatze zu jedem Spezialistentume innerhalb einer Wissenschaft oder innerhalb einer Gruppe zusammengehöriger Wissenschaften oder innerhalb der Einheit alles Wissens.[3])

C. Das höhere Schulwesen Deutschlands.

Das höhere Schulwesen Deutschlands zeigt in der Gegenwart eine scharf gegliederte Dreigestaltung.[4]) Neben das altsprachliche Gymnasium sind Realgymnasium und Oberrealschule getreten. Für alle drei Anstalten bilden „Religion, Deutsch und Geschichte" das humanistische Kernstück, welches zugleich auch das humanistische Kernstück der deutschen Volksschule ist. Auf die damit bezeichnete didaktische Einheit weisen namentlich die preußischen Lehrpläne von 1908, welche den Studienanstalten für Mädchen gelten, sachgemäß und ausführlich hin. Aus dem Unterrichte in diesen Fächern vornehmlich soll ein national

1) Die sieben Weisen hießen noch: „οἱ ἑπτα σοφισται" oder auch „οἱ ἑπτα σοφοι".

2) Geneigtheit für eine derartige Vereinigung scheint in der Gegenwart an vielen Stellen vorhanden zu sein. Neben der Zeitschrift „Logos" ist dafür auch ein günstiges Zeichen die in Aussicht stehende „Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften" von W. Windelband und A. Ruge. Deren erster Band „Logik" ist in gegemeinsamer Arbeit von W. Windelband, J. Royce, L. Couturat, B. Croce, F. Enriques und N. Losskij entstanden (1912). – Ferner ist noch hinzuweisen auf die eben begründete „Gesellschaft für positivistische Philosophie", innerhalb welcher auf Grundlage exakter Wissenschaft für die Ausgestaltung einer umfassenderen Weltanschauung gewirkt werden soll. Hervorragende Vertreter der exakten Wissenschaften und der Philosophie haben ihren Beitritt erklärt. Die Geschäfte führen die Herren J. Petzoldt in Spandau und M. H. Baege in Berlin-Friedrichshagen.

3) Bei Mangel an Zeit würden für die Schule also Darstellungen, wie sie Schulte-Tigges gibt, Bruchstücken aus der formalen Logik und empirischen Psychologie bei weitem vorzuziehen sein. Vgl. ferner vor allem die Einleitung von Enriques in Nr. 36b.

4) Vgl. Nr. 167i, k, l, o, p.

gefärbter Humanismus erwachsen, getragen von einer religiös-ethischen Gesinnung und bestimmt durch geschichtliche Einsicht.

An dieses humanistische Kernstück schließen sich auf allen höheren Anstalten als Flügelstücke das fremdsprachliche und das mathematisch-naturwissenschaftliche Gebiet, von denen jedes wiederum eine didaktische Einheit bilden soll.

Im fremdsprachlichen Gebiete liegt die Variante der drei Anstalten, durch welche die Färbung der Allgemeinbildung für jede von ihnen bedingt wird. Das altsprachliche Gymnasium treibt vor allem Griechisch und Lateinisch und etwas Französisch oder[1]) Englisch, das Realgymnasium Lateinisch, Französisch und Englisch, die Oberrealschule nur Französisch und Englisch, und demgemäß kann letztere unter den drei Anstalten dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Gebiete (und dem Zeichnen) den größten Raum gewähren.

Zwischen den beiden Flügelstücken steht die Erdkunde, welche „Land und Leute" in Beziehung setzt und ebenso wie das Zeichnen, neben der Musik die **Kunst** der Schule, von einem Flügelstücke zum anderen und von diesen zu dem Kernstücke hin mannigfache Fäden schlingt.

Soll „Unterricht in der Philosophie" hinzukommen, wie es ja vielfach gewünscht wird, so würde dieser das humanistische Kernstück verstärken und zu den Flügelstücken in Beziehung treten müssen, was sicher von großem Vorteile wäre. Freilich kann ich nicht Herrn Ziertmann beipflichten, der dies in erster Linie bei der Oberrealschule für wünschenswert erklärt, denn für die „Philosophie im Unterrichte" kann jetzt schon der Beitrag bei allen drei Anstalten etwa derselbe sein.

Was Cicero an wirklicher Philosophie bietet, ist herzlich wenig, und was am Gymnasium aus Platon erarbeitet werden könnte, kommt nicht in Frage, da es tatsächlich, von dieser oder jener Ausnahme abgesehen, nicht erarbeitet wird. Für das Philosophische, welches der altsprachliche Unterricht zu geben pflegt, bieten Descartes, Locke und Hume an der Oberrealschule einen hinreichenden Ersatz, zumal diese auf der Oberstufe im Deutschen eine Stunde mehr hat als die Schwesteranstalten und also bei einem geeigneten Lesebuche, das auch Übersetzungen aus Platons Werken oder besser Darstellungen nach Platon enthalten könnte, hier der philosophischen Propädeutik besser dienen kann.

In den beiden Flügelstücken stehen sich Grammatik und Mathematik ergänzend gegenüber, der formalen Bildung dienend, falls man dieses Wort nur richtig erfaßt, seiner ursprünglichen Bedeutung gemäß, denn forma ist geschichtlich die Platonische Idee, welche überall die „Einheit im Vielen" bezeichnet.

Wie die Grammatik gewissermaßen das Skelett im lebendigen Leibe der Sprache ist, so ist die Mathematik das tragende Fachwerk für die Er-

1) In Braunschweig und in der preußischen Provinz Hannover Französisch **und** Englisch.

2) Vgl. Nr. 173.

forschung der Naturerscheinungen. Und wie die Sprache hineinführt in das vielgestaltige Leben der Völker, so berühren auch Botanik und Zoologie, vor allem in ihrer biologischen Ausgestaltung, das flutende Leben, und ebenso die Mathematik selbst in ihren weit verzweigten Anwendungen (z. B. Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch als Grundlage der sozialen Gesetzgebung).

Welche Aufgaben die einzelnen Lehrfächer unserer Schulen einer „Philosophie im Unterrichte" stellen, hat Herr Ziertmann[2]) ausführlich dargelegt, nur die Mathematik kommt bei ihm zu kurz. Für diese hat aber Herr Simon[1]) schon in der ersten Auflage seiner Didaktik wohl das erforderliche gesagt, auch über ihre Beziehung zu den anderen Fächern.[2]) Wir kommen darauf zurück, soweit dies im Rahmen unsrer Abhandlung liegt.

Trotz seiner Dreigestaltung hat unser höheres Schulwesen ein einheitliches Ziel: es ist ihm die Aufgabe gestellt, fremdsprachliche und mathematisch-naturwissenschaftliche Bildungselemente auf der Grundlage kulturgeschichtlicher Einsicht zu dem Ganzen einer im Volkstum wurzelnden religiös-ethischen Weltanschauung zu einen.[3])

Das Übergewicht des Gymnasiums liegt nicht in diesem oder jenem, was man gelegentlich hervorgehoben hat, sondern im Historischen, wie das der Oberrealschule im Naturwissenschaftlichen, und das Realgymnasium steht in der Mitte.

Aber diese Unterschiede bestimmen nur eine Färbung in der Allgemeinbildung der drei Anstalten, und jeder von ihnen würde die Einführung von philosophischer Propädeutik oder die Betonung der „Philosophie im Unterrichte" von großem Nutzen sein bei der Erfüllung ihrer gemeinsamen Aufgabe.

3. Schwierigkeiten der Lösung.

Der natürliche Weg, unsere Aufgaben zu lösen, bestände darin, das Ganze der gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und Philosophie vom Standpunkte unserer höheren Schulen aus zu betrachten und in diesem Ganzen das Gebiet oder die Gebiete abzugrenzen, welche für die Schule in Frage kommen können.

Diese Abgrenzung würde sich dadurch ergeben, daß man die Mathematik auf die Schulmathematik und die Philosophie auf die der Schule entsprechende philosophische Propädeutik einschränkte und untersuchte, was dann von jenen Beziehungen bestehen bliebe und verwendbar wäre.

Dieser Weg ist leider nicht gangbar, wenigstens zurzeit nicht, weil über das Ganze der gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und

---

1) Vgl. Nr. 137a. Vgl. dazu auch die Didaktiken von Reidt-Schotten und Höfler und namentlich Pietzkers einschlägige Arbeiten.

2) Vgl. auch Nr. 7.

3) Vgl. Nr. 167i, k, l, o, p.

Philosophie augenblicklich bei den führenden Geistern keine auch nur einigermaßen übereinstimmenden Ansichten vorhanden sind, geschweige denn sichere Festlegungen, von denen ausgegangen werden könnte.

Auf dem Gebiete der Philosophie sind der Wiederbelebung Kants, die um die Mitte des vorigen (19.) Jahrhunderts einsetzt, neben der historischen Arbeit immer umfassendere und immer tiefer greifende systematische Untersuchungen gefolgt, durch welche alles fest Erscheinende wieder einmal in Fluß geraten ist.

Auf dem Gebiete der Mathematik hat man zum Teil selbständig und zum Teil in Anlehnung[1]) an die Arbeit der Philosophen, den Grundlagen und der Methode mehr und mehr Aufmerksamkeit zugewandt, ohne aber dabei zu einem allseitig anerkannten Abschlusse zu kommen. So sagt Herr Wellstein[2]) mit vollem Rechte: „Wenn man den Streit um die Grundlagen unserer Wissenschaft, der von tiefdenkenden Gelehrten mit großer Erbitterung geführt wird, leidenschaftslos verfolgt und sich dabei von dem Gedanken leiten läßt, daß jeder von seinem Standpunkte aus etwas Vernünftiges gedacht haben müsse, dann kommt man zu der Überzeugung, nicht, daß die Wahrheit zwischen ihnen in der Mitte, sondern daß sie über ihnen liege."

Das gilt von der Wissenschaft, und für die Schule im besonderen sagt Herr Höfler[3]) in bezug auf die „Fragen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie", daß sie als noch durchaus umstritten gelten und daß er sie nur berühre, „um dem Lehrer der Mathematik einige besonders kritische Stellen zu bezeichnen, an denen er nicht etwa gerade die Antworten dieser oder jener Partei seinen Schülern dogmatisch aufnötigen oder suggerieren sollte."

So weitschichtig auch das hiermit bezeichnete Gewebe von Meinungsverschiedenheiten ist, im Grunde handelt es sich doch um zwei alte Streitobjekte, nämlich um Gegensatz und Bedeutung von Denken und Anschauen einerseits, von Apriorischem (Reinem, Erfahrungsfreiem) und Empirischem andererseits.

Die Reformbewegung auf dem Gebiete des mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulunterrichts, welche in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts hier und da einsetzt und nun unter der zielbewußten[4]) Führung und kraftvollen Leitung von Herrn F. Klein[5]) etwa seit dem Jahre

---

1) So unterscheidet z. B. Herr Hilbert für die Bestimmung der gemeinsamen Grundlage von Logik und Arithmetik die Klassen der Seienden und Nichtseienden (Nr. 67 S. 267), während Herr Dedekind (Nr. 24b S. 17) in einer gewissen Übereinstimmung mit Bolzano für die Nachweisung unendlicher Systeme das eigene Ich benutzt, weshalb Herr Hilbert wiederum Dedekinds Methode als transzendental bezeichnet (Nr. 67 S. 265) usw.

2) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II S. 145. 3) Vgl. Nr. 69b S. 432.

4) Vgl. dazu in diesen IMUK-Abhandlungen III Heft 1 „Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland" von R. Schimmack.

5) Dabei mag daran erinnert werden, daß die organisatorische Tätigkeit von Herrn Klein bereits 1894/95 einsetzt. Damals bestand an den technischen Hoch-

1904 mehr und mehr an Boden gewinnt, fordert mit vollem Rechte u. a. eine hohe Bewertung und Verwendung der Anschauung, und die jüngst erschienene Didaktik von Herrn Höfler, die in voller Würdigung der ganzen Sachlage Herrn Gutzmer gewidmet ist, entspricht dieser und den anderen Forderungen der Reform in vollem Maße.[1])

Damit scheint aber in starkem Widerspruche zu stehen die Entwicklung, welche die Mathematik als Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten durchgemacht hat.

Zunächst hat sich die Arithmetik im Gegensatze zu dem Euklidischen Erbgute ihre volle Selbständigkeit gegenüber den anderen Zweigen der Mathematik erkämpft und ist dabei unabhängig von der Anschauung der Zeit (im Gegensatze zu Kant) und der Anschauung des Raumes (im Gegensatze zu F. A. Lange u. a.) begründet worden, eine Notwendigkeit, auf die wohl zuerst der Philosoph Krause, selbst ein durchgebildeter Mathematiker, mit vollem Nachdrucke aufmerksam gemacht hat.

So unbedingt diese Selbständigkeit der Arithmetik anerkannt werden muß, so sehr sind auch die Folgerungen der Erörterung bedürftig, die

---

schulen eine Bewegung, die an diesen die für die Technik erforderliche Ausbildung in der Mathematik womöglich den Technikern selbst überweisen wollte. Sie war berechtigt, insofern sie sich gegen die Mathematiker der technischen Hochschulen wandte, welche keine Fühlung mit der Technik zu gewinnen wußten, sie war durchaus unberechtigt, insofern sie die Mathematik als besonderes Lehrfach an den technischen Hochschulen beanstandete. Für den durchaus richtigen Grundgedanken dieser Bewegung, die Mathematik mit der Technik in Verbindung zu bringen, war damals zugleich Herr Klein von sich aus eingetreten, indem er an der Göttinger Universität einen Kontakt mit der Technik herzustellen strebte. Der Kampf gegen die Isolierung der Mathematik, den Herr Klein damit aufgenommen hatte, ist auch bei seinen immer umfassenderen und immer vielseitigeren organisatorischen Arbeiten stets das leitende Prinzip geblieben. Die Erfolge in diesem Kampfe beruhen aber hauptsächlich auf der starken Betonung der Anschauung innerhalb der Mathematik. Von ihr aus führen einerseits die Brücken zu den Anwendungen, während sich anderseits in ihr die Interessen der Schulen aller Grade und Gattungen, die überhaupt Mathematik treiben, sozusagen berühren. Im Gegensatze dazu wirken die Vertreter des reinen Denkes bewußt oder unbewußt für eine Isolierung der Mathematik, während doch andererseits deren Sonderstellung fast allgemein beklagt wird. So bezeichnet z. B. Herr Voß die Mathematik als „die unpopulärste aller Wissenschaften", obgleich ihr „die Mehrzahl der Gebildeten, eine fast an Überschätzung grenzende Verehrung entgegenbringt" (Vgl. Nr. 161 a, S. 4). Wer die vergeblichen Versuche kennt, die hier und da in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts, und auch schon früher, in Deutschland gemacht wurden, um die tatsächliche Isolierung der Mathematik zu überwinden, welche z. B. in Frankreich niemals in gleichem Maße bestanden hat, der wird auch die so erfolgreiche Tätigkeit Kleins und seiner Mitarbeiter nur in höchstem Maße anerkennen können. Es ist Kultur-Arbeit, und zwar in besonderem auch nationale Kultur-Arbeit. Alle Anzeichen weisen darauf hin, daß diese Arbeit diesmal von Erfolg gekrönt sein wird. Jedenfalls haben beispielsweise die Techniker bereits seit geraumer Zeit den Grundgedanken Kleins von 1894/95 durchaus anerkannt.

1) Vgl. dazu auch die Didaktik von Reidt-Schotten (1886 bzw. 1906) und die von M. Simon (1895 bzw. 1908).

sich an diese Tatsache angeknüpft haben; man pflegt sie mit dem Schlagworte „Arithmetisierung der Mathematik“ zusammenzufassen.[1])

Eine Gruppe von Mathematikern, als deren Vertreter hier Herr Voß[2]) genannt werden mag, läßt einem oft angeführten Gauß-Worte (Brief an Bessel von 1829) entsprechend, nach dem Vorgange der Brüder H. und R. Graßmann u. a. nur die Arithmetik als reine oder freie Mathematik (mit apriorischem Charakter) gelten und rechnet schon die Geometrie zu der angewandten Mathematik, welche durch Erfahrung bedingt ist. Es handelt sich dann darum[3]), „den Begriff der Zahl und der Operationen mit derselben als das ausschließliche Fundament aller mathematischen Erkenntnis nachzuweisen“.

Mit dieser Überzeugung verbindet sich nun meist die Ansicht, daß die Arithmetik zu ihrem Aufbau und zu ihrer Begründung nur der Logik (und nicht auch irgendeiner Art der Anschauung) bedürfe.

Dabei ergeben sich große Schwierigkeiten in bezug auf die Abgrenzung von Logik und Arithmetik, die vielen völlig ineinander zu fließen scheinen, während andererseits Herr Hilbert[4]) gefordert hat, daß die Grundlagen der Logik und Arithmetik gemeinschaftlich entwickelt werden müssen und daß erst später eine Trennung der beiden Gebiete erfolgen solle.

Während einzelne die Logik in die Arithmetik aufnehmen möchten, bezeichnen andere wie Herr Dedekind die Arithmetik als einen Teil der Logik. Dieser sagt[5]): „Indem ich die Arithmetik nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte.“ „Die Zahlen sind freie Schöpfungen[6]) des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen.“

---

1) Vgl. F. Klein, Göttinger Nachrichten 1895. Diese Arithmetisierung der gesamten Mathematik ist nicht zu verwechseln mit Kroneckers Arithmetisierung, durch welche innerhalb der Arithmetik die Zurückführung aller Zahlen auf die natürlichen Zahlen (Anzahlen) gefordert wurde.

2) Vgl. Nr. 161a. 3) Vgl. Nr. 161a S. 29. 4) Vgl. Nr. 67 S. 263 u. f.

5) Vgl. Nr. 24b S. VII.

6) Hierzu findet sich später (S. 21) die Bemerkung: „Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen usw.. In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen.“

Im Gegensatze zu solchen Auffassungen sagt Herr Höfler[1]): „Zahl und Raum nehmen **keine** Sonderstellung gegenüber allen übrigen Erkenntnisgegenständen ein. Die ihnen zugewandten Denkformen genießen den Vorzug der mathematischen Evidenz und mathematischen Gewißheit **nicht** als ein ausschließliches Vorrecht. Die Mathematik nimmt im Systeme der Wissenschaften **nicht** eine isolierte, in keiner Einteilung der anderen Wissenschaften unterzubringende Stellung ein."

Diesem Standpunkte nähert sich auch Herr Wellstein. Bei Erörterung des oben erwähnten Gauß-Wortes[2]) sagt er: „Ob die höhere Einschätzung der Arithmetik noch aufrecht zu halten ist, mag dahingestellt bleiben."

Zwischen den Auffassungen von Dedekind und Höfler liegt eine vielgliedrige Kette verschiedener Standpunkte.[3]) Im allgemeinen sucht man zur Zeit aus der, hauptsächlich von G. Cantor geschaffenen „**Mengenlehre**", deren Anfänge sich allerdings mindestens schon bei Bolzano finden, die Grundlage der Artihmetik zu gewinnen. Anderseits ist diese Mengenlehre selbst wieder von H. Poincaré u. a. beanstandet worden wegen der Paradoxien, die sie bei Russell u. a. zeigt. Die gegenwärtige Lage scheint mir etwa Herr A. Schoenflies[4]) sachgemäß zu beleuchten, der zu dem Schluß kommt, daß nicht der „Cantorismus" zu bekämpfen sei, wohl aber der „Russellismus".[5])

Auch die **Geometrie** versucht man, nachdem die räumliche Anschauung einerseits durch die nichteuklidische Geometrie und andererseits durch die Entdeckung der tangentenlosen Kurven und die ganze sich daran anschließende Entwicklung der Funktionentheorie diskreditiert worden ist, zu einem Teile der Logik zu machen, u. a. unter Berufung auf die Arbeiten der italienischen Schule, gelegentlich auch auf die von Herrn Hilbert. Gegen diese Versuche richtet sich die Abhandlung von Herrn Höfler „Räumliche und raumlose Geometrie", die er in seiner Didaktik in Aussicht stellt und dort auszugsweise erwähnt; leider ist sie noch nicht im Drucke erschienen. Für Herrn Hilbert[6]) selbst ist „die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges" eine Aufgabe, welche „auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung" hinausläuft. Ersetzt man das Wort „Analyse"

---

1) Vgl. Nr. 69b S. 451.

2) „Wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können."

3) Vgl. dazu in den letzten Jahrgängen der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung die Arbeiten von Frege, Korselt, Schoenflies, Thomae u. a., außerdem Zermelos Abhandlung in den Mathem. Annalen, Bd. 65.

4) Vgl. in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vom 1911 den Aufsatz „Die Stellung der Definition in der Axiomatik".

5) Eine kurze, von G. Hessenberg gegebene Darstellung der Mengenlehre, bei der auch bereits die Korrekturen von Zermelo berücksichtigt sind, findet man in Nr. 146.

6) Vgl. Nr. 67 S. 1.

durch das Wort „Bearbeitung", so dürfte die Bestimmung Hilberts auch auf dem Standpunkte Höflers annehmbar erscheinen.

Für die Anschauung in der Geometrie tritt auch Herr Wellstein[1]) ein, wobei er zu dem Schlusse kommt: „Indem wir die Übergriffe der Anschauung in den Machtbereich des reinen Denkens entschieden zurückweisen, lassen wir sie als anregende Stütze und Begleiterin unseres Denkens um so unbedenklicher herrschen."

Als bezeichnend für die ganze Sachlage mag noch folgendes hervorgehoben werden. In der Weber-Wellsteinschen „Enzyklopädie der Elementarmathematik" (erste Auflage) sagt Herr Wellstein gelegentlich[2]): „Anschauungsnotwendigkeiten gibt es nicht; Notwendigkeit kann nur im Denken liegen." Dazu macht Herr Weber die Anmerkung: „Hier besteht zwischen den beiden Herausgebern eine Meinungsverschiedenheit", und dieser widmet er dann einen besonderen Anhang.[3])

Noch bedenklicher als bei der Arithmetik und Geometrie steht es um die erkenntnistheoretische Grundlegung bei der Mechanik, doch ist hier der Mangel an Übereinstimmung unter den Forschern eher erklärlich. Der Versuch einer Verbindung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen mit dem alten System der klassischen Mechanik hat zu einer Reihe von Fragen geführt, die sich um das sogenannte „Relativitätsprinzip" gruppieren, und man ist zum Teil der Ansicht, daß die endgültigen Antworten das bisherige System der Mechanik einer starken Umbildung unterwerfen werden, falls sie es nicht überhaupt durch eine Neubildung ersetzen.

Während für die Arithmetik und für die Geometrie die gegebenen Voraussetzungen (Axiome), mag auch um ihre erkenntnistheoretische Bedeutung noch so viel Streit sein, wohl festgelegt sind, befindet sich die entsprechende Arbeit für die Mechanik erst ganz in ihren Anfängen.[4])

Auch für die Mechanik hat man sich bemüht, die Anschauung möglichst zu beseitigen[5]), und infolgedessen konnte die Ansicht entstehen, daß schließlich die ganze Mathematik nur eine eigentümlich entwickelte Logik sei. Indem man die Logik dabei auf das Gebiet der formalen Logik eingeschränkt dachte und diese allein auf dem Prinzipe der Identität be-

1) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II S. 146.

2) Vgl. Nr. 165 II S. 144.

3) In bezug auf die Fragen nach den Grundlagen der Geometrie, einschließlich der Wertung der Axiome gibt Herr Enriques in seinem Enzyklopädie-Artikel (III, Heft 1) eine gute Übersicht (Nr. 37 und 36c).

4) Vgl. in Nr. 37 den allerdings schon 1901 abgeschlossenen Artikel von Voß in Bd. IV 1 Heft 1.

5) Im Gegensatze zu den Versuchen einer Axiomatisierung der Mechanik, entsprechend der für die Geometrie bereits durchgeführten, vergleiche den Standpunkt F. Kleins in der Vorrede zu Bd. IV der Enzyklopädie (Nr. 37), in der auch neben allem anschaulichen und experimentellen auf die Bedeutung des Muskelgefühls für Kraftanstrengungen hingewiesen wird. Vgl. ferner auch H. E. Timerdings Vortrag „Die historische Entwicklung des Kraftbegriffes" in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17 (1908).

ruhen ließ, konnte man zu der Ansicht kommen, daß die ganze Mathematik nur eine große „Tautologie" sei.

Dieser Ansicht widmet z. B. Herr Poincaré[1]) eine längere Betrachtung, bei der er zu dem Ergebnisse kommt, daß der Schluß von n auf $n+1$ zu dem Formal-Logischen dazu kommen müsse, um die Mathematik nicht als tautologisch erscheinen zu lassen.

Für Herrn Poincaré liegt in jenem Schlusse das eigentlich Schöpferische, wodurch in der Mathematik das Neue zustande kommt.[2])

Einen tief durchdachten und umfassenden Versuch, die ganze Mathematik einschließlich der Mechanik durch reines Denken zu gewinnen, bieten „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaft" von Herrn Natorp.[3]) Für ihn liegt das Schöpferische in einer „synthetischen Logik", welche im Prinzipe mit der transzendentalen Logik Kants übereinstimmt, während die formale Logik nach ihm nur der Analyse der Gebilde dient, welche die synthetische Logik erzeugt hat. Während aber für Kant im Gebiete des Wirklichen die empirische Anschauung und im Gebiete des Apriorischen die reine Anschauung dem Denken die Bausteine für seine Synthesen bietet, ist für Natorp in der Mathematik jede Anschauung als Helferin des Denkens ausgeschlossen. Im Namen der Marburger Schule, welche Herr Cohen und er gebildet haben, sagt er darüber[4]): „Die nachfolgende, von Kant ausgegangene Philosophie ... hat an dem Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken mehr und mehr Anstoß genommen und endlich entschlossen mit ihm gebrochen. Vielleicht schon etwas zu entschlossen; denn daß in Kants Begriff der Anschauung sich ein keinesfalls zu vernachlässigendes Problem barg, davon werden wir uns bald überzeugen. Aber vorerst war es durch das eigene Prinzip der kantischen Transzendental-Philosophie gefordert, daß man, was bei Kant zum wenigsten mißverständlich in die zwei Faktoren: reine Anschauung und reines Denken zerlegt wird, in strenger Einheit wieder zusammennahm und als ein einziges, für das man den Namen des ‚reinen Denkens' unbedenklich festhalten kann, zu verstehen suchte." Ferner heißt es in bezug auf das erwähnte Problem[5]): „Im Terminus ‚Anschauung' wird im Grunde nichts als jene letzte wechselseitige Durchdringung aller reinen Denkleistungen oder die allseitige Kontinuität der Denkprozesse in dem einen Prozeß des Denkens, d. h. die Unendlichkeit und Einheit des Ursprungs, antezipiert. In diesem Sinne der Antezipation ist schließlich auch in der Wissenschaft der Mathematik die Berufung auf Anschauung nicht schlechthin zu verwerfen, sondern nur, wenn sie die Umgehung der Rechenschaft aus dem reinen Denken bedeuten will."

1) Vgl. Nr. 113a S. 1 u. f.

2) Vgl. dazu auch Fr. Meyer „Kant und das Neue in der Mathematik", Archiv für Mathematik und Physik 1905.

3) Vgl. Nr. 105e.

4) Vgl. Nr. 105e S. 2.

5) Vgl. Nr. 105e S. 277.

Die Ablehnung jeder empirischen Anschauung und die Beseitigung der reinen Anschauung Kants als selbständigen Faktors im Gebiete der Erkenntnistheorie durch die Marburger Schule, bzw. durch deren Führer Cohen und Natorp ist darum so interessant, weil sie der Diskreditierung der Anschauung im Gebiete der Mathematik, wie sich diese bei neueren mathematischen Untersuchungen ergeben hat, durchaus parallel läuft. Besonders lehrreich ist dafür die Auseinandersetzung von Natorp und Wellstein.[1]) Herr Wellstein lehnt gleichfalls die reine Anschauung Kants ab, in deren Zwangläufigkeit er einen Rest von Sensualismus sieht, betont aber andererseits die Bedeutung der empirischen Anschauung als Anregerin der mathematischen Begriffsbildung. Herr Natorp sieht hierin einen Widerspruch, wie ich glaube, mit Unrecht. Sehr deutlich entwickelt Herr Wellstein[2]) seine Ansicht, indem er sagt: Durch Erfahrungen „ergibt sich für den denkenden Geist die Notwendigkeit, versuchsweise einige Ordnungen vollzogen anzunehmen, um andere daraus ableiten zu können. Das geschieht durch Begriffe und Axiome. So beginnt die exakte Wissenschaft zwar mit der Erfahrung und ihre Grundbegriffe mögen in geschichtlich weit zurückliegenden Zeiten wohl in dem Glauben gebildet worden sein, den empirischen Objekten genau adäquat zu sein; im Grunde sind sie aber nicht Nachbildungen des Empirischen, sondern in Anlehnung an die Empirie erfaßte reine Ideen, die ungeheuer viel einfacher sind als der sinnliche Gegenstand." „Die Axiome der Geometrie und der Mechanik[3]) sind empirischen Ursprungs. Wir leugnen damit durchaus nicht ihre freie Schöpfung durch unser Denken, das nur geleitet ist durch die Absicht, den Inhalt unserer Erfahrung durch Gesetze zu ordnen; wir treten aber damit andererseits den Ansprüchen eines die Erfahrung mißachtenden Idealismus entgegen, als hätte man durch bloßes Nachdenken auf Grund unserer Denkgesetze allein zu unserer Geometrie und Mechanik kommen müssen." Herr Natorp würde dagegen wieder die Bedeutung der synthetischen Logik hervorheben können im Gegensatz zur analytischen (formalen), aber im Grunde hat Herr Wellstein doch wohl Recht.

Die Arbeiten von Cohen und Natorp und von ihrer ganzen Schule werden in den Kreisen der Mathematiker, und zwar selbst von denen, für welche das reine Denken alles ist, meist ungünstig beurteilt. Das ist durchaus erklärlich, weil der Mathematiker gewöhnt ist, falls er diesen oder jenen fundamentalen Fehler in einer Arbeit findet, diese ganz zu verwerfen, aber dies ist in Beziehung auf philosophische Betrachtungen nicht richtig, weil hier der Wert schließlich immer im Ganzen liegt.[4]) Was

1) Vgl. Nr. 105e S. 274, 310, 316 und namentlich 318 u. f. und ebenso Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 131 u. f.

2) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 144 u. f.

3) Für die Arithmetik vgl. Wellsteins Bemerkung, hier S. 26.

4) So scheint auch Herr Voß infolge seiner berechtigten Ausstellungen an den Arbeiten von Herrn G. Fr. Lipps zu übersehen, daß diese als Ganzes doch recht wertvoll sind. Vgl. Nr. 161a S. 46.

Herrn Natorp anlangt, so fließen seine meist anerkannten sozial-pädagogischen Arbeiten aus derselben Quelle, wie seine vielfach beanstandeten, der Mathematik zugewandten erkenntnistheoretischen Versuche, nämlich aus seiner Persönlichkeit. Er hat von seinem philologisch-historischen Ausgangspunkte aus sich redlich bemüht, in die Fragen der Mathematik einzudringen, und fordert in der Vorrede seines Buches zu „planmäßiger Zusammenarbeit von Philosophie und exakter Forschung“ auf, dabei betonend, daß es durchaus der Absicht seines „Versuches“ entspräche, wenn dieser durch solche gemeinsame Arbeit „in einigem vielleicht schon bald überholt würde“. Diese Zusammenarbeit wird auch auf mathematischer Seite vielfach gewünscht. So sagt u. a. Herr Voß[1]), und zwar bei einer kritischen Würdigung der Arbeiten Wundts, daß „eine gemeinsame Verständigung über die Grundbegriffe der Mathematik gerade in der Gegenwart von dem größten Interesse sein würde“. Von diesem Standpunkte aus wird man auch, unter Ausdehnung auf die ganze Arbeit der Marburger Schule, das Urteil verstehen, das Herr Simon über Cohens Logik ausspricht. Er, der selbst gelegentlich[2]) die Euklidische Geometrie als „chemische“ Verbindung von Logik und Anschauung bezeichnet, sagt[3]): „Ohne mich mit den Resultaten des Cohenschen Buches zu identifizieren, stelle ich es schon deshalb außerordentlich hoch, weil es mit eiserner Konsequenz die reine Erkenntnis möglichst von aller Psychologie und damit von allen sinnlichen, anschaulichen Bestandteilen säubert. Freilich ist für die Schüler die Psychologie der Zahl- und Raumbegriffe, ihre Erarbeitung aus der inneren und äußeren Erfahrung des einzelnen fast wichtiger als die logische Seite.“ Es ist auch ein Verdienst, mit „eiserner Konsequenz“ zu zeigen, daß gewisse Prämissen nicht ausreichen, um zu einem bestimmten Ziel zu gelangen, mag man nun die Tragweite der Prämissen selbst übersehen oder sie verkennen. Das zeigt die Marburger Schule deutlich in bezug auf die Mathematik: das alogische Moment eilt, unter den Worten oder Zeichen versteckt, überall zu Hilfe, wenn das reine Denken versagt.[4])

Wir verdanken Cohen und Natorp namentlich wichtige Beiträge zur Erschließung der Geistesarbeit von Platon, Descartes und Kant, und dabei, wie auch in den anschließenden eigenen Arbeiten, zeigen sie die Fruchtbarkeit ihrer stets zunehmenden Einseitigkeit, die in der immer fortschreitenden Verkennung des alogischen Momentes besteht, mag man es nun Anschauung oder anders nennen. Es ist ihnen gegangen wie der Taube, von der Kant gelegentlich spricht[5]): „Die leichte Taube, indem sie in freiem Fluge die Luft teilt, deren Widerstand sie fühlt, könnte die Vor-

1) Nr. 161a S. 84. 2) Nr. 137f S. 29. 3) Nr. 137f S. 4.

4) Bei Natorp besonders beim Übergange vom Reellen zum Imaginären und Komplexen, dann wieder bei der Frage nach der Anzahl der Dimensionen des Raumes usw.

5) Vgl. Kritik der reinen Vernunft in der Ausgabe von Kehrbach (Leipzig bei Reclam) S. 37.

stellung fassen, daß es ihr im luftleeren Raum noch viel besser gelingen werde."

Eine umfassende und eingehende, durchaus würdige Kritik dieses logischen Idealismus, auf die wir hier verweisen können, bietet das eben erschienene Buch „Wissenschaft und Wirklichkeit" von Herrn Frischeisen-Köhler, in welchem namentlich die Geistesarbeit von R. Avenarius, Dilthey, Husserl, Mach, Rickert, A. Riehl, Windelband und Wundt voll zur Geltung kommt.

Außerdem hat in den letzten Jahren eine junge Schule von Kantianern, von vornherein in enger Fühlung mit der Mathematik und mit den Naturwissenschaften, den Kampf gegen die Marburger aufgenommen, besonders gegen ihre „transzendentale Methode", dabei die Bahnen von Fries und Apelt weiter verfolgend.[1]) Von ihr sind namentlich die Arbeiten von Herrn Hessenberg und Herrn Nelson hervorzuheben. Hier wird die Anschauung im Sinne Kants voll gewertet, aber abschließende Ergebnisse in Beziehung auf die Grundlage der Mathematik sind auch bei ihnen nicht zu finden.

Dies ist auch nicht bei Wundt der Fall, welcher gleichfalls die Bedeutung der Auschauung durchaus anerkennt. Sein umfassendes System der Logik und Metaphysik bringt sicher für alle Wissenschaften die reichste Belehrung, aber die Kritik, welche Herr H. Burkhardt an der zweiten Auflage der Logik von seiten der Mathematik geübt hat[2]), ist leider für deren dritte Auflage nicht verwendet worden. Infolgedessen erhält man auch bei Wundt in Beziehung auf die Grundbegriffe und das Axiomatische der Mathematik keine genügende Auskunft, dagegen ist bei ihm allerdings das Methodische, das er bringt, äußerst wertvoll.

Während die Vertreter des reinen Denkens[3]), mögen sie nun Philosophen oder Mathematiker sein, der Schule, falls sie sich überhaupt um diese kümmern, die Anschauung wohl oder übel als eine Art Surrogat der Erkenntnis zubilligen, aber für die Wissenschaft ihre Beseitigung fordern, ist, abgesehen von bedeutenden Philosophen, auch eine gewichtige Gruppe von Mathematikern durchaus anderer Ansicht. Sie, an deren Spitze Herr F. Klein steht, hat aus der Diskreditierung der Anschauung, welche durch die mathematische Wissenschaft selbst bedingt ist, nicht den Schluß gezogen, daß die Anschauung zu beseitigen sei, sondern, daß unsere Auffassung von allem Anschaulichen in der Mathematik einer Änderung unterzogen werden müsse. Wir werden später darauf zurückkommen.

Hier sollte nur, ohne grade bei der Charakteristik der Gegenwart Voll-

---

1) Vgl. die von ihnen herausgegebenen Abhandlungen Nr. 49.

2) Vgl. die Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie Bd. 9. Auch Herr Voß (vgl. Nr. 161a S. 80) hat wiederum auf die Unzulänglichkeit der erkenntnistheoretischen Grundlegungen Wundts, soweit diese die Mathematik betreffen, hingewiesen.

3) Vgl. hier die Anmerkung 5 auf S. 23.

ständigkeit anzustreben, auf die erheblichen Schwierigkeiten hingewiesen werden, welche für unsere Aufgabe vorliegen. Es bestätigt sich durchaus, was Herr Klein gelegentlich[1]) ausgesprochen hat: „Es ist ein gemeinsamer Charakter aller Wissenschaft der neuesten Zeit, daß alles in Zweifel gezogen wird, was bis dahin als ganz feststehend gegolten. Alles ist in Gährung, so auch in der Mathematik.“ Hoffen wir, daß auch der Wunsch in Erfüllung geht, mit dem Herr Klein diese Betrachtung schließt, daß nämlich „diese Periode nicht enden möge mit einem allgemeinen Skeptizismus, sondern mit einem neuen Aufbau“.

Zweiter Abschnitt.

Grundlegende Betrachtungen.

1. Die Kantische Lösung und ihre Mängel.

Infolge der geschilderten Sachlage muß wohl oder übel zunächst der Versuch gemacht werden, die gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und Philosophie festzulegen, ehe die eigentliche Aufgabe, welche sich auf die Schule bezieht, in Angriff genommen werden kann.

Dieser Versuch mag in folgendem gewagt werden, doch soll dabei die eigentliche, auf die Schule (Lehrende und Lernende!) eingeschränkte Aufgabe stets die Begrenzung der Überlegungen bestimmen.

Nun ist es eine ständige Behauptung der einschlägigen Literatur, daß die Schulmathematiker, welche sich in der Gegenwart für Philosophie interessieren, fast alle Kantianer sind. Tatsächlich hat einst die Mathematik der Zeitgenossen im Kantischen Systeme eine sichere Stellung gefunden, und es frägt sich vor allem, ob die weitere Entwicklung der Mathematik selbst diese Sicherheit erschüttert hat. Da überdies die Philosophie unserer Zeit meist eingestandenermaßen auf das System von Kant zurückgeht, um es entweder unter größeren oder geringeren Umbildungen anzunehmen oder um es abzulehnen, und da die Mathematiker (Enriques, Poincaré, Weber, Wellstein u. a.) bei der Begründung ihrer Wissenschaft auch vielfach an Gedanken von Kant anknüpfen, so dürfte es zweckmäßig sein, bei unseren grundlegenden Betrachtungen mit einer Erörterung dieses Systems[2]) zu beginnen, soweit es hier in Frage kommt.

Kant schrieb die Kritik der reinen Vernunft, auf der sein ganzes System beruht, um das vermeintliche Wissen vom Übersinnlichen auf seine Richtigkeit hin zu prüfen, d. h. die Metaphysik, welche als Ontologie und als rationale Psychologie, Kosmologie und Theologie versprach, den

1) Vgl. Nr. 781 S. 7. 2) Vgl. Nr. 167q, r, s, t.

Menschen der Rätsel letzte zu lösen. Diese vermeintliche Wissenschaft wollte ihre Aufgabe allein durch reines, d. h. erfahrungsfreies Denken bewältigen, und darum warf Kant die Frage auf: Was und wieviel vermag der Mensch gemäß seiner Anlage a priori (d. h. unabhängig von Erfahrung) zu wissen?

Dazu mußte das menschliche Vermögen des reinen Denkens, welches als reine Vernunft (bzw. Verstand) bezeichnet wurde, kritisiert, d. h. auf seine Leistungsfähigkeit hin geprüft werden.

Kants Antwort lautete: Dieses Vermögen reicht nicht aus, um auch nur das geringste vom Übersinnlichen zu wissen, weil alles menschliche Wissen, abgesehen von Formallogik, anschaulich-logisch ist, und weil dem Menschen nun einmal übersinnliche Anschauung versagt ist. Macht sich das Denken frei von der Sinnlichkeit, so hat es nur ein Feld, nämlich die Formallogik, vermag aber nicht, wie Vorgänger und Zeitgenossen wähnten, das Übersinnliche zu erfassen.

In der verachteten Sinnlichkeit, durch welche alle Denkergebnisse „verworren" werden sollten, glaubte Kant auch eine apriorische Erkenntnisquelle entdeckt zu haben, die reine Anschauung, als deren Formen er Zeit und Raum einführte. Dafür schien zu sprechen, daß Arithmetik, Geometrie und Mechanik, welche sich auf diese Formen beziehen, klare und deutliche Erkenntnisse sind, während die Metaphysik, welche nur im reinen Denken wurzeln will, höchst verworren ist.

Jene Formen sind zunächst lediglich „Möglichkeiten des Beisammenseins" für ein Nacheinander und für ein Nebeneinander, welches erst der Verstand verbindet. Sie sind aber für ihn ein Zwang, eine bestimmte Ordnung des Nacheinander und eine bestimmte Ordnung des Nebeneinander zu bilden. Der Verstand baut die räumlich-zeitliche Sinnenwelt unter dem Zwange der Anschauungsformen aus Empfindungen ebenso auf, wie er die Welt des Mathematikers aus entsprechenden Elementen der reinen Anschauung aufbaut. Die Empfindung ist für Kant der Index des Wirklichen, aber es ist „vom empirischen Bewußtsein zum reinen eine stufenartige Veränderung möglich, da das Reale desselben ganz verschwindet und ein bloß formales Bewußtsein (a priori) des Mannigfaltigen in Raum und Zeit übrig bleibt: also auch eine Synthesis der Größenerzeugung einer Empfindung von ihrem Anfange, der reinen Anschauung = 0 an, bis zu einer beliebigen Größe derselben."[1])

Elemente der reinen Anschauung werden durch den Verstand nach dessen Gesetzen zu den Gebilden geformt, mit denen sich die Mathematik beschäftigt, und ebenso entsteht die räumlich-zeitliche Sinnenwelt, falls für die Synthesen des Verstandes Empfindungen vorliegen. Darum gibt es nur eine Mathematik, aber einen doppelten Gebrauch derselben, nämlich im Gebiete der reinen Anschauung und im Gebiete der empiri-

1) Vgl. Kritik der reinen Vernunft in der Ausgabe von Kehrbach (Leipzig, bei Reclam) S. 163. Daß Herr Cohen schon frühe gerade diese Stelle beanstandet hat, ist bezeichnend für den weiteren Weg seiner Entwicklung.

schen Anschauung, und darum stimmen die sog. „reine“ und die sog. „angewandte“ Mathematik überein. So gilt im besonderen für die Geometrie: „Ob wir daher gleich vom Raume überhaupt oder den Gestalten, welche die produktive Einbildungskraft in ihm verzeichnet, so vieles a priori in synthetischen Urteilen erkennen, so, daß wir wirklich hierzu gar keiner Erfahrung bedürfen, so würde doch diese Erkenntnis gar nichts, sondern die Beschäftigung mit einem bloßen Hirngespinst sein, wäre der Raum nicht, als Bedingung der Erscheinungen, welche den Stoff zur äußeren Erfahrung ausmachen, anzusehen: daher sich jene reinen synthetischen Urteile, obzwar nur mittelbar, auf mögliche Erfahrung ... beziehen.“ [1])

Die Synthesen des Verstandes, mögen sie nun an Elementen der reinen Anschauung oder an Empfindungen vollzogen werden, sind bei Kant bestimmt durch

a) intuitive Begriffe oder Anschauungsformen für das Beisammensein (Zeit und Raum),
b) diskursive Begriffe (Kategorien) oder Denkformen für die Einzelverknüpfung (Ding und Eigenschaft, Bedingung und Bedingtes usw.),
c) systematische Begriffe (Ideen) oder Denkformen für die Verknüpfung zum Ganzen (Seele, Welt, Gott).

Mit ihnen werden sowohl die synthetischen Urteile a priori der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung gebildet, als die synthetischen Beurteilungen der Erfahrungen, welche unser tägliches Brot sind, wenn wir unsere gewöhnliche Erkenntnis erweitern. Dabei sind jene die Bedingungen für diese, sie selbst aber ruhen trotz ihrer großen Mannigfaltigkeit auf einem eng und genau begrenzten Systeme von „Grundsätzen“ des reinen Verstandes, welche als Axiome der Anschauung, Antezipationen der Wahrnehmung, Analogien der Erfahrung und Postulate des empirischen Denkens überhaupt unterschieden werden. Dies gilt in subjektiver Hinsicht, während sie in objektiver zugleich die allgemeinsten Naturgesetze darstellen. Diese Grundsätze können bewiesen werden, insofern man untersucht, wie unter Verwendung der oben aufgezählten Begriffe in einem Bewußtsein Erfahrung entstehen kann. Denkt man sich die mathematisch-naturwissenschaftliche Erkenntnis des Menschen in jeder Beziehung vollendet, so stellt sie ein Ideal der Erfahrung dar, welches seinem Begriffe nach Einheit gesetzlicher Verbindungen von gegebenen Empfindungen in Zeit und Raum ist. Diesem Ideale der „Möglichen Erfahrung“ entspricht als Träger nicht das individuelle Bewußtsein dieses oder jenes Menschen, sondern ein ideales „Bewußtsein überhaupt“. Soll das Ideal der Erfahrung in einem Bewußtsein überhaupt entstehen, so müssen dafür bestimmte grundlegende Urteile a priori vorausgesetzt werden, und diese „Bedingungen der möglichen Erfahrung“ sind die Grundsätze des reinen Verstandes.

1) Vgl. bei Kehrbach S. 155.

Für diese Betrachtung ist, namentlich mit Rücksicht auf die Darstellung Kants in der Marburger Schule, ein Wort von Kant charakteristisch. Er sagt[1]): „Allein von einem Stücke konnte ich in obigem Beweise doch nicht abstrahieren, nämlich davon, daß das Mannigfaltige für die Anschauung noch vor der Synthesis des Verstandes und **unabhängig** von ihr gegeben sein müsse."

Bei Kant ist der Menschengeist stets Baumeister seiner Sinnenwelt, nicht aber deren Schöpfer, aber dieses Bauens ist er sich nicht bewußt[2]), und darum muß er die Fülle der Erscheinungen auf empirischem Wege studieren. Nur das gesetzliche Skelett der Sinnenwelt (Grundsätze des reinen Verstandes) kann er a priori erkennen, weil diese Gesetzlichkeit seine eigene ist. Darum vergleicht Kant seine „Synthetische Logik", welche die alte Ontologie ersetzen soll, mit der Grammatik einer Sprache, sie entspricht unter Einschränkung auf die zeitlich-räumliche Sinnenwelt dem alten „Usus realis" des Verstandes, der in ihm das Übersinnliche fassen wollte. Daneben steht, dem alten „Usus logicus" des Verstandes entsprechend, die Analytische Logik, welche aus irgendwie gegebenen Voraussetzungen formal ihre Darlegungen zieht und also die Erkenntnis nicht erweitert, sondern nur erläutert. Sie arbeitet natürlich stets a priori. Ihre reflexiven Kategorien (Gleichheit, Ähnlichkeit, Ganzes und Teile usw.) stehen den konstitutiven Kategorien (Ding und Eigenschaft, Bedingung und Bedingtes usw.) der synthetischen Logik gegenüber.[3])

Scheidet man Verstand und Vernunft, so ist die Tätigkeit des Verstandes in diesem Usus logicus und in diesem Usus realis erschöpft, während die systematischen Begriffe (Ideen) schon dem Gebiete der Vernunft angehören, deren eigentliches Reich die Gesetzlichkeit des Sein-Sollenden mit ihrer Freiheit ist.

Es ist aber dieselbe in ihrer Autonomie wirkende „Spontaneität", die als praktische Vernunft durchaus Herrscherin ist, und die als theoretische Vernunft für ihre Synthesen ein Mannigfaltiges als Baustoff haben muß, wenn sie die Sinnenwelt unbewußt erbauen und bewußt erkennen soll. Für das Individuum stellt diese Autonomie das Allgemein-Menschliche im einzelnen dar. Stimmt das Individuelle mit diesem überein[4]), so erreicht es die Ideale des Wahren, Guten und Schönen, soweit diese dem Menschen überhaupt erreichbar sind; jeder Abweichung entspricht Irrtum, Böses und Häßliches. Das Allgemein-Menschliche ist für

1) Vgl. bei Kehrbach S. 668. Vgl. dazu die Voraussetzung bei Dedekind, Nr. 24b und im Gegensatz dazu bei Natorp Nr. 105e.

2) Vgl. dazu Nr. 105e S. 9: „Die voraus gegebenen Dinge, soweit von solchen zu reden überhaupt Sinn hat, sind vielmehr voraus vollzogene, aber entfernt nicht immer rein und daher nicht immer richtig vollzogene Synthesen eines primitiven Verstandes."

3) Vgl. dazu Windelband „Vom System der Kategorien" in den philosophischen Abhandlungen für Siegwart 1900.

4) Vgl. Kants Theorie der Epigenesis bei Kehrbach S. 682 und Nr. 167t S. 75.

Kant ebenso wie für Goethe und Schiller überall das Ziel des einzelnen Menschen.[1])

Aus der fast unübersehbaren kritischen Literatur, welche durch das System Kants hervorgerufen worden ist, wollen wir im allgemeinen hier nur hervorheben, daß die moderne Entwicklungslehre seine Grundlagen nicht beeinflußt. Wie der gegenwärtige Gattungs-Charakter des Menschen auch geschichtlich entstanden sein mag, berührt bei seiner Stabilität in historischer Zeit die erkenntnis-theoretischen Fragen überhaupt nicht.[2]) Selbst H. Spencer erkennt das Kantische Apriori für das Individuum als Gattungs-Charakter an, wenn er es auch für die Rasse ablehnt. Was im besonderen den Raumbegriff anlangt, so sagt dazu Herr M. Simon[3]): „Aus welchen Wahrnehmungen auch immer dieser Gedankenkomplex sich im Laufe ungezählter Aeonen, etwa aus den dunkelsten Reaktionen der Aktinien auf Licht und Hautreiz bis zu unserer dreidimensionalen Anschauung psychologisch entwickelt haben möge, erkenntnis-theoretisch bildet er eine Konstituente unseres Intellekts".

Was nun im besonderen die Mathematik betrifft, so ordnet Kant die Arithmetik der Anschauungsform Zeit, die Geometrie der Anschauungsform Raum zu, während er die Mechanik unter Berücksichtigung des Empirischen auf die Vereinigung der beiden Anschauungsformen stützt. Alle Gebilde der Mathematik sind durch den Verstand, oder genauer, durch die Einbildungskraft gemäß den Gesetzen des Verstandes aus Elementen der reinen Anschauung geformt, während deren Ersatz durch Empfindungen zu Gebilden der räumlich-zeitlichen Sinnenwelt führt.

Die grundlegende Stelle für die Zahl lautet bei Kant[4]): „Das reine Bild aller Größen (quantorum) vor dem äußeren Sinne, ist der Raum, aller Gegenstände der Sinne aber überhaupt, die Zeit. Das reine Schema der Größe aber (quantitatis) als eines Begriffs des Verstandes, ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die sukzessive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammen befaßt. Also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch, daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge."

Für die extensive Größe (Strecke usw.) und für die protensive Größe (Dauer) bringt der erste Grundsatz des reinen Verstandes das Erforderliche, für die intensive Größe (Grad des Einflusses auf den Sinn bei der Empfindung) ebenso der zweite. Es heißt: „Alle Erscheinungen enthalten, der Form nach, eine Anschauung in Raum und Zeit, welche ihnen insgesamt a priori zum Grunde liegt. Sie können also nicht anders apprehendiert, d. h. ins empirische Bewußtsein aufgenommen werden, als durch die Synthesis des Mannigfaltigen, wodurch die Vorstellungen eines bestimmten Raumes oder Zeit erzeugt werden, d. i. durch Zusammen-

---

1) Vgl. Nr. 167s. 2) Vgl. dazu in Nr. 20c S. 200 u. f.
3) Vgl. Nr. 137f S. 5. 4) Vgl. bei Kehrbach S. 145.

setzung des Gleichartigen und das Bewußtsein der synthetischen Einheit dieses Mannigfaltigen (Gleichartigen). Nun ist das Bewußtsein des mannigfaltigen Gleichartigen in der Anschauung überhaupt, sofern dadurch die Vorstellung eines Objektes zuerst möglich wird, der Begriff einer Größe (quanti). Also ist selbst die Wahrnehmung eines Objektes, als Erscheinung, nur durch dieselbe synthetische Einheit des Mannigfaltigen der gegebenen sinnlichen Anschauung möglich, wodurch die Einheit der Zusammensetzung des mannigfaltigen Gleichartigen im Begriffe einer Größe gedacht wird, d. i. die Erscheinungen sind insgesamt Größen, und zwar extensive Größen, weil sie als Anschauungen im Raume oder der Zeit durch dieselbe Synthesis dargestellt werden müssen, als wodurch Raum und Zeit überhaupt bestimmt werden." „Auf diese sukzessive Synthesis der produktiven Einbildungskraft in der Erzeugung der Gestalten gründet sich die Mathematik der Ausdehnung (Geometrie) mit ihren Axiomen" usw. „Die empirische Anschauung ist nur durch die reine (des Raumes und der Zeit) möglich; was also die Geometrie von dieser sagt, gilt auch ohne Widerrede von jener, und die Ausflucht, als wenn Gegenstände der Sinne nicht den Regeln der Konstruktion im Raume ... gemäß sein dürfen, müsse wegfallen." „Die Synthesis der Räume und Zeiten, als der wesentlichen Form aller Anschauung, ist das, was zugleich die Apprehension der Erscheinung, mithin jede äußere Erfahrung, folglich auch alle Erkenntnis der Gegenstände derselben, möglich macht, und was die Mathematik im reinen Gebrauch von jener beweiset, das gilt auch notwendig von dieser." Nach Kant ist die reine Mathematik sogar „in ihrer ganzen Präzision auf Gegenstände der Erfahrung" anwendbar.[1])

Nachdem auch noch die intensive Größe, welche nur als Einheit apprehendiert wird, eingeführt worden ist, heißt es: „Die Eigenschaft der Größen, nach welcher an ihnen kein Teil der kleinstmöglichste (kein Teil einfach) ist, heißt die Kontinuität derselben. Raum und Zeit sind quanta continua." „Alle Erscheinungen überhaupt sind demnach kontinuierliche Größen, sowohl ihrer Anschauung nach, als extensive, oder der bloßen Wahrnehmung (Empfindung und mithin Realität) nach als intensive Größen."[2])

Gegen die Zuordnung von Zahl und Zeit wird man einmal einwenden, daß die Arithmetik von der Zeit unabhängig ist, aber das hat Kant auch gewußt, und er hat seine im Zählen erzeugten Zahlen (Einheiten der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt) und deren Gesetze sicher nicht vom Wechsel der Zeit abhängig gedacht. Ferner wird man einwenden, daß der Fluß der Zeit nur eine Richtung hat, von der Vergangenheit über die Gegenwart zur Zukunft, während die Zahlenreihe vorwärts und rückwärts durchlaufen werden kann. Dieser Einwurf erledigt sich aber, wenn die Zurückweisung des

1) Vgl. bei Kehrbach S. 159 bis 162.
2) Vgl. bei Kehrbach S. 65.

ersten richtig ist, denn die in der Zeit erzeugte, aber von der Zeit unabhängig gewordene Zahlenreihe hat mit dem Flusse der Zeit überhaupt nichts mehr zu tun. Endlich wird man einwenden, daß zu Kants Zeit nur das Reelle allgemein bekannt war und daß für dieses die Beziehung zur eindimensionalen Zeit vielleicht verständlich ist, nicht aber für das zweifach ausgedehnte Gebiet unserer gemeinen Komplexzahlen. Auch dieser Einwurf läßt sich entkräften, man braucht nur an Kroneckers Auffassung der Zahlen zu denken, die auch Herr Dedekind prinzipiell anerkennt. Auch nach Dedekind[1]) „erscheint es als etwas selbstverständliches und durchaus nichts neues, daß jeder, auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt", was auch schon Dirichlet wiederholt betont hat. Daß es nicht praktisch wäre, jedesmal „diese mühselige Umschreibung wirklich vornehmen und keine anderen, als die natürlichen Zahlen benutzen und anerkennen zu wollen", ist selbstverständlich, aber die Kroneckersche Auffassung ist an und für sich durchaus einwandfrei. So sagt auch Poincaré[2]): „Heute bleiben in der Analysis nur noch ganze Zahlen oder endliche oder unendliche Systeme ganzer Zahlen, die untereinander durch ein Netz von Gleichheits- oder Ungleichheitsverhältnissen verbunden werden."

Daß sich die Kantische Auffassung trotz alledem nicht aufrecht erhalten läßt, scheint mir dagegen aus anderem hervorzugehen, auf das schon die Praxis der Volksschullehrer hinweist. In ihr herrschte bekanntlich ein langwieriger Streit zwischen Zählern und Anschauern, der sich darum drehe, ob für die Zahlen das Sukzessive oder das Simultane das psychologisch primäre Moment ist.[3]) Die Praxis hat längst entschieden, daß beides sich verteidigen läßt, aber erst in dessen Synthese das Ganze liegt. Bezeichnen wir den Oberbegriff für Nacheinander und Nebeneinander durch Außer-einander, so ist die Zahl das Mittel, das bewegliche Außer-einander (Menge ohne feste Ordnung) zu fesseln, und darum ist sie auch wieder für die festen Formen des Nacheinander und Nebeneinander, die wir als Zeit und Raum bezeichnen, verwendbar. Deshalb haben sowohl die Zähler wie die Anschauer recht.

Nach Kant kann es nur e i n e bestimmte Geometrie geben, denn durch seine reine Anschauung wird das Denken zwangläufig. Diese eine Geometrie war für Kant, der Zeitlage entsprechend, selbstverständlich die Euklidische Geometrie. Nun hat die Folgezeit dargetan, daß zunächst in mathematischer Hinsicht mindestens drei Formen der Geometrie, unter denen sich auch die Euklidische befindet, möglich und zugleich mit der Anschauung verträglich sind, und damit taucht die weitere Frage auf, welche von ihnen bei allen Anwendungen die geeignetste ist. Man muß also, um dem Stande der mathematischen

1) Vgl. Nr. 24b S. XI. 2) Vgl. Nr. 113b S. 14.
3) Vgl. Lietzmann in Nr. 1 Bd. V Heft 1 S. 28.

Wissenschaft gerecht zu werden, zum mindesten die Zwangläufigkeit aus Kants reiner Anschauung entfernen, d. h. den Gedanken aufgeben, daß die Anschauung dem Denken nur die Bildung einer bestimmten Geometrie gestattet. Dies hat schon vom Standpunkte der Empirie aus v. Helmholtz getan, ihm ist der Raum a priori gegeben, die Axiome dagegen durch Erfahrung bestimmt. Man kann diesem Gedanken auch die Form geben, daß die Möglichkeit des Beisammenseins (das Außer-einander) den Synthesen des Verstandes eine bestimmte Freiheit läßt, die sich in der Bildung des Riemann-Kleinschen Raumes, des Raumes von Euklid und des Bolyai-Lobatschefskijschen Raumes zeigt, und daß dazu die weitere Frage kommt, welche dieser Formen für die Erfahrung am geeignetsten ist. In diesem Sinne scheint mir auch Herr Weber gegen Herrn Wellstein die Anschauungsnotwendigkeit zu verteidigen, nicht im Sinne der Notwendigkeit im Urteilen, sondern im Sinne eines notwendig für die Formung gegebenen Anschaulichen. Herr Wellstein selbst ist nicht abgeneigt, den Ausdruck „reine Anschauung" festzuhalten, und zwar im folgenden Sinne. Nehmen wir an, die Axiomatik, die zurzeit für die Geometrie durchgeführt ist, sei auch für die Arithmetik und namentlich für die Mechanik einwandfrei erledigt, so tritt für das Ganze der Erfahrung wieder die Kantische Frage auf nach dessen Bedingungen. „Solche Untersuchungen über die Vorzüge und Nachteile dieser oder jener Hypothese werden jetzt in steigendem Maße angestellt. Diese Betrachtungen aber bewegen sich wahrhaft im Reiche der reinen Anschauung a priori in dem vertieften Sinne, daß sie Überlegungen über die Voraussetzungen der Möglichkeit unserer Erfahrung enthalten. Nur wäre statt des a priori ein unzweideutiger Kunstausdruck zu wählen."[1])

Für die Mechanik nimmt Kant, wie schon erwähnt, empirische Elemente auf, da ihm schon die Bewegung nur durch Erfahrung zugänglich erscheint.[2]) Natürlich häufen sich hier die Schwierigkeiten der Auffassung, welche für Zahl und Raum dargelegt wurden.

Zu diesen, sich auf Kants Geistesarbeit beziehenden Überlegungen kommt nun hinzu, daß die Entwicklung der Mathematik selbst bei vielen das Vertrauen zu jeder Art der Anschauung erschüttert hat. Freilich die Hinweise auf die Unanschaulichkeit des Tausendecks (Poincaré), das schon zu Kants Zeiten und vorher als Chilogon in dieser Hinsicht eine Rolle spielte, u. a. sind kaum zutreffend. Unmittelbar veranschaulichen lassen sich nur die ersten Anzahlen bis 5 oder 6, wenn man von besonderer Anlage und Ausbildung absieht, wie sie bei Rechengenies wie Dahse vorhanden waren. Die anderen macht erst, wie u. a. Herr Husserl scharf betont hat, das Positionssystem anschaulich. Geistige Konstruktion und Zeichen führen hier weiter. In diesem Sinne ist auch das Tausend-

1) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 146.
2) Vgl. Kant, Metyphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Einleitung.

eck anschaulich, nicht nur das Dreieck, Viereck usw. Übrigens könnte man ja auch im Gelände einen Kreis von etwa 80 m Halbmesser abstecken und ihm ein Tausendeck einschreiben, es wäre etwa in fünf Minuten abzuschreiten, den Schritt von Ecke zu Ecke etwa $\frac{1}{2}$ m gerechnet. Dagegen sind brauchbare Beispiele für die Diskreditierung der Anschauung die ursprünglich von Weierstraß entdeckten Kurven, die trotz ihrer (arithmetischen) Stetigkeit in keinem Punkte eine Tangente haben. Man könnte hier noch versuchen, Abhilfe zu schaffen, indem man neben dem Worte Linie (Gerade und Kurve) die Bezeichnung „Lineares Punktgebilde" einführte und den Namen Linie nur verwendete, falls Tangenten nur in einer endlichen Anzahl von Punkten (Spitzen usw.) unbestimmt werden. Die unmittelbar sich anschließende Frage nach der Beschaffenheit der höheren Ableitungen würde aber diesen Versuch doch wieder ziemlich illusorisch machen. Weiter noch reicht der Einfluß der modernen Mengenlehre mit ihrer Zersetzung der Anschauung. Schon die Ausscheidung eines Punktes aus einer gewöhnlichen Linie ist nicht anschaulich faßbar, wohl aber begrifflich der Fortfall einer Stelle in einer linearen perfekten zusammenhängenden Menge. Nun haben zwar die Paradoxien der Mengenlehre wiederum das Vertrauen zu dieser erschüttert, und Poincaré u. a. haben die ganze Mengenlehre als eine unberechtigte Erweiterung des Zahlenbegriffes abgewiesen. Äußerst bezeichnend für die gegenwärtige Lage ist, daß Herr Weber im ersten Bande der Enzyklopädie (erste Auflage) die Arithmetik auf der allgemeinen Mengenlehre aufbaut, am Schlusse des dritten Bandes statt dessen aber eine neue Ausführung gibt, die nur Endliches benutzt und wieder ruhig mit in Reihe gelegten Kartoffeln u. a. arbeitet, in Übereinstimmung mit dem Worte von Poincaré: „L'important c'est de ne jamais introduire que des êtres que l'on puisse définir complètement en un nombre fini de mots." Dazu bemerkt Herr Voß[1]): „Trotzdem ist es nicht wahrscheinlich, daß man demnächst, wie Poincaré glaubt, in der Mengenlehre nur noch einen interessanten pathologischen Fall erblicken wird. Die Begriffe des Häufungspunktes oder der Grenzstellen einer unendlichen Menge, die Äquivalenz und die Abzählbarkeit, das sind fundamentale Bildungen unseres Verstandes, welche zu tief in das ganze Gebäude der Mathematik eingreifen, um sich überhaupt je wieder beseitigen zu lassen."

Das ist sicher richtig, aber andererseits betont Herr Voß gelegentlich in Übereinstimmung mit Herrn Klein u. a., daß er bei seinen geometrischen Arbeiten die Figuren doch nicht entbehren kann, daß also jedenfalls irgend eine Art von Anschauung erforderlich ist und gerechtfertigt werden kann. Das ist hier noch nicht weiter zu verfolgen, wo es sich nur darum handelt, darauf hinzuweisen, daß Kants reine Anschauung jedenfalls nicht ausreicht, um die auftretenden Fragen zu entscheiden,

1) Vgl. Nr. 161a S. 63.

und daß sie auch nicht ohne weiteres durch empirische Anschauung ersetzt werden kann.

Gerade von diesem Standpunkte aus ist aber auch die philosophische Arbeit der Marburger Schule, welche für die Mathematik mit ihrem reinen Denken auszukommen glaubt, trotz aller Kritik, die man an ihr üben mag, doch sehr zu beachten.

Für Kant ist die Sinnenwelt etwa eine, durch den Verstand vollzogene Integration von Empfindungen, die, abgesehen von ihrer Qualität, in einem Zeitelemente und in einem Raumelemente mit einem bestimmten „Intensitätsdifferentiale" gegeben sind, die Welt der Mathematik ebenso eine entsprechende Integration, bei der die Empfindungen durch Elemente der reinen Anschauung ersetzt sind. Die Marburger Schule will, jedenfalls innerhalb der Mathematik, auch die Elemente selbst durch reines Denken erzeugen.

Daß es nur Denknotwendigkeit gibt, wie auch Herr Wellstein hervorhebt, ist für Kant und alle seine Anhänger grundlegende Voraussetzung, also ist alle Notwendigkeit der Sinnenwelt in diese durch das Denken hineingetragen. Erfahrung gibt nur Assoziationen von komparativer Gültigkeit, wie Hume richtig bemerkt hat. Darum entsteht der „Gegenstand" durch Synthesen des Denkens, die ihn zum Denkenden in Beziehung setzen, während in ihnen selbst Beziehungen bestimmter Elemente vollzogen werden. Hinter dem Denkenden und hinter seiner Sinnenwelt steht vielleicht ein unfaßbares „Ding an sich", die uns zugänglichen Dinge lösen sich aber auf in lauter Beziehungen, und über einen Teil dieser Beziehungen, und zwar über einen äußerst wichtigen, gibt uns die Mathematik die erforderliche Auskunft.

Diese Auflösung der Dinge in Beziehungen müssen wir, namentlich wegen der jetzt in der Mathematik überall geforderten Axiomatik[1]) mit ihren indirekten Begriffsbestimmungen, bei denen alles Individuelle zurücktritt, etwas genauer betrachten, ehe wir uns den in Vorstehendem angeregten Fragen zuwenden können, welche durch die Schlagworte „Denken und Anschauung" und „Apriorisches und Empirisches" charakterisiert werden.

2. Ding und Beziehungen.[2])

Von seiner irdischen Entstehung an wächst der Mensch zunächst in eine Weltanschauung hinein, die man als Naiven Realismus zu bezeichnen pflegt.

Sein Gepräge besteht hauptsächlich darin, daß sich der einzelne Mensch als ein Ding von gewisser Selbständigkeit anderen Dingen von einer ge-

1) Vgl. dazu Nr. 125a, namentlich die Einleitung.

2) Wir haben versucht, auch dieser hier an und für sich notwendigen Betrachtung eine Form zu geben, welche den schließlichen Darlegungen für die Schule von Nutzen ist.

wissen Selbständigkeit gegenüber findet, mit denen er selbst in Verkehr steht und die auch untereinander in Wechselwirkung verbunden sind.

Ursprünglich belebte die Menschheit instinktiv Sonne und Mond und Busch und Quelle, wie heute noch jedes Kind in allen Gliedern der Außenwelt seinesgleichen sieht, und namentlich galt ihr alles Bewegte als lebendig und alles Lebendige als beseelt. Weitere Erfahrungen berichtigten diese nach Analogie des eigenen Innern geschaffene Auffassung der Außenwelt, während sich zugleich eine Fülle von Dichtungen bildete, um dem philosophischen Triebe nach einer Einheit alles Wissens zu dienen, bald auf diese, bald auf jene Weise. So ist das Gerüst des Naiven Realismus (Welt der Dinge) mannigfach umrankt, und das Wort selbst äußerst vieldeutig.[1])

Dabei hat die kulturelle Entwicklung im allgemeinen zu folgendem Standpunkte geführt:

An sich unterscheidet der einzelne ein Inneres und ein Äußeres, für deren Bezeichnung Worte wie Geist und Körper, Seele und Leib usw. dienen, während die anderen Dinge für ihn zunächst nur ein Äußeres sind. Alles Äußere bildet für ihn ein Ganzes, seine Außenwelt, der auch der eigene Körper angehört. In diesem Ganzen, welches vom Raum umfaßt wird und in der Zeit veränderlich ist, zeigen sich ihm bestimmte Teile, vor allem die Körper der Mitmenschen, denen er auch ein Inneres zuschreibt, dieses nach Analogie seines eigenen Inneren auffassend. Vom eigenen Innern zum fremden Innern führen aber keine psychischen Fäden, es gilt vielmehr das Prinzip der materiellen Verknüpfung, wonach der eigene Körper und der fremde Körper durch ihre Beziehungen den Verkehr des eigenen Innern mit dem fremden Innern vermitteln.

Dem Prinzipe der materiellen Verknüpfung entspricht die Notwendigkeit eines Zeichensystems, durch welches ein Inneres mit einem fremden Innern in Verkehr treten kann. Dieses Zeichensystem, dessen auch der einzelne für sich allein bedarf, liegt in der Wort- und Schriftsprache des gemeinen Lebens vor und zeigt wenigstens zum Teil noch die Spuren seiner geschichtlichen Entwicklung. So deutet z. B. noch das Geschlecht der Substantiva hin auf die ursprünglich allgemein instinktiv ausgeübte Erfassung der Außenwelt ex analogia hominis.

Darum spiegelt auch jede Sprache in ihren Grundzügen die Weltanschauung des Naiven Realismus wieder, und zwar deren Gliederung in den Arten der Aussage (Kategorien). Der erste Versuch, diese Gliederung vollständig darzustellen, ist die Kategorientafel des Aristoteles, welche bei gehöriger Anordnung folgendes Bild zeigt:

1. Selbständige Dinge (οὐσια).
2. Relativ dauernde Eigenschaften von Dingen
   a) in quantitativer Hinsicht (ποιον),
   b) in qualitativer Hinsicht (ποσον)

1) Vgl. Nr. 50, Kapitel 2.

3. Relativ wechselnde Zustände von Dingen
   a) in aktiver Hinsicht (πραττειν),
   b) in passiver Hinsicht (πασχειν),
   c) in indifferenter Hinsicht (κεισθαι und ἐχειν).
4. Beziehungen (Relationen) von Dingen
   a) für das äußere Beisammensein
      α) in zeitlicher Hinsicht (ποτε),
      β) in räumlicher Hinsicht (που),
   b) für innerliche Verbindung (προς τι).

Dieselben vier Gruppen finden wir auch noch bei den Logikern unserer Zeit im wesentlichen anerkannt, so bei Lotze, Sigwart, Wundt u. a.

Die geschichtliche Entwicklung hat nun seit den Tagen des Aristoteles dazu geführt[1]), bei der wissenschaftlichen Arbeit die Gruppe 4, d. h. die Beziehungen, unter Entwicklung ihrer überreichen Fülle, überall in den Vordergrund zu rücken und ihr gegenüber das Ding mit Eigenschaften und Zuständen zurücktreten zu lassen. So ist z. B. auch in der Mathematik die sogenannte direkte Definition, welche durch die Kategorie des Dinges bestimmt ist, durch die sogenannte indirekte Definition ersetzt worden, welche in einem System von Beziehungen besteht, wie es für die Geometrie die moderne Axiomatik deutlich zeigt.

Auf diesem Wege vom Dinge zu den Beziehungen wurde der Naive Realismus mit allen dogmatischen Ansätzen, die ihn von Fall zu Fall auszugestalten suchen, nicht etwa beseitigt, wohl aber kritisch gereinigt.

Der Anfang dieses Weges liegt schon vor der Aristotelischen Geistesarbeit. Als den Hellenen inmitten der politischen, sozialen und wirtschaftlichen Veränderungen, die im Zeitalter der sieben Weisen deutlich einsetzen und deren Sendung bestimmen, die Veränderung selbst zum Probleme wurde, tauchten zwei vorläufige Lösungen auf, die bis in unsere Zeit hineinwirken. Parmenides richtete, alle Veränderungen für Schein erklärend, den Blick auf das ewig sich gleichbleibende Sein, Heraklit auf das veränderliche Werden und dessen Gesetz. Im Anschluß an letzteren machte Protagoras den Menschen zum Maße aller Dinge, der seienden, wie[2]) sie sind, der nichtseienden, wie sie nicht sind.[3]) Damit führte er das Prinzip des Subjektivismus und des Relativismus in die Geschichte der abendländischen Kultur ein. Wenn er auch für das Handeln als Vorschriften gemeinsame Gaben der Götter an das Menschengeschlecht (αἰδως und δικη) anerkannte, so war ihm doch für das Wissen der einzelne Mensch in seiner individuellen Zufälligkeit das Maß der Dinge. Dieses veränderliche Maß erwies sich aber als unzureichend. Damit war ein neues Problem gegeben, in dessen Dienst sich das große Denker-

1) Vgl. u. a. Cassierer, Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Berlin, 1910.
2) Nicht „daß", wie oft zitiert wird, denn im Texte steht ὡς.
3) Vgl. hierzu Nr. 67 S. 267, die Klasse der Seienden und die Klasse der Nichtseienden.

4*

paar Demokrit und Platon stellte. Nach ihnen steht der Welt der flüchtigen, in der Wahrnehmung gegebenen Erscheinungen, für welche das Maß des Protagoras in gewissem Sinne gilt, eine Welt des wahren Seins gegenüber: Demokrit fand sie im leeren Raume mit seinen Atomen und deren Bewegungsgesetzen, Platon im Reiche der Ideen, den Einheiten des Vielen, und deren Beziehungen. Beide Welten verhalten sich zueinander, wenn man die Schlagworte des Tages (θεσει oder νομῳ und φυσει) braucht, wie Satzung und Natur. Gemäß Satzung sehen wir in den subjektiv bedingten Sinnesempfindungen, welche nur Relationen zwischen uns und den Dingen darstellen, deren Eigenschaften[1]), der Natur entspricht nur die Welt der Atome oder das Reich der Ideen.

Die philosophische Arbeit, die nach Platon und Demokrit mit Aristoteles einsetzt und über Augustin und die Scholastik, einschließlich der Mystik, hin schließlich zu Descartes führt, hatte ihre besonderen äußerst wichtigen Aufgaben, aber für den Gang vom Dinge zu den Beziehungen bietet sie nichts besonderes.

Im Zeitalter des Descartes ist es wieder Gemeingut aller Forscher, den subjektiven und relativen Charakter der Sinnesempfindung anzuerkennen, und Locke führt infolgedessen, gemäß der damit gegebenen Spaltung der Eigenschaften der Dinge, den Unterschied der sekundären (relativen) und primären (absoluten) Qualitäten ein. Zu diesen gehören Zahl, Gestalt, Lage, Größe, Bewegung, aber auch Undurchdringlichkeit (solidity) ..., letztere würde Descartes zu den sekundären Eigenschaften (Tastsinn) gerechnet haben. Das Gebiet der primären Eigenschaften ist das Reich der Mathematik.

Nachdem Hume den Begriff des substantiellen Dinges selbst und der Wirkung der Dinge aufeinander (Kausalität) kritisch zersetzt hatte, vollendete Kant den Prozeß der Eigenschaftsentkleidung der Dinge: auch die primären Eigenschaften Lockes wurden für ihn zu relativen.

Dabei blieb von dem Dinge nur ein fragliches Y übrig, und folgerichtig wurde auch der Beobachter des Dinges, abgesehen von allen in ihm mündenden Relationen, zu einem fraglichen X. Für diese fraglichen Restbestände X und Y ist das Wort „Ding an sich" geprägt worden. An dem entsprechenden Schema

$$\underbrace{X - \text{Beziehungen} - Y}$$

kann man alle Schlußdichtungen, die in der Geschichte der Philosophie aufgetreten sind, sozusagen a priori bestimmen. Schließt man X und Y zu einer Einheit zusammen, so erhält man die verschiedenen Formen des Monismus, tilgt man Y, so gelangt man zum Solipsismus, tilgt man X und Y, so erhält man den Abschluß des Positivismus usw. Dabei kommt es im einzelnen natürlich darauf an, was man aus dem Reiche der bekannten

1) Vgl. bei Demokrit: νομῳ γλυκυ, νομῳ πικρον, νομῳ θερμον, νομῳ ψυχρον, νομῳ χροιη. ἐτεη δε ἀτομα και κενον (nach Satzung gibt es Süßes, Bitteres, Warmes, Kaltes und Farbiges, in Wahrheit aber nur Atome und leeren Raum).

Beziehungen in die Unbekannten *X* und *Y* hineinlegt, ob man die Tätigkeit betont oder das Affiziertwerden, das Sein oder das Werden usw.

Daß diese Schlußdichtungen oft auch die erkenntnistheoretischen Grundlagen mitbestimmen, bedarf kaum eines ausdrücklichen Hinweises.

Auf dem Wege vom Dinge zu den Beziehungen war es von großer Bedeutung, daß Descartes, den Spuren Augustins folgend, sein „Cogito" aussprach, das genauer „Cogito aliquid" lautet, wobei Descartes selbst ausdrücklich cogitare nicht in dem engen Sinne logischen Denkens faßt. Schon Plato sagt übrigens „in der Wahrnehmung entsteht erst ein Wahrnehmender und ein Wahrgenommenes", und die damit bezeichnete Korrelation von Subjekt (Ich) und Objekt (Nicht-Ich) beherrscht tatsächlich auch den Prozeß der Eigenschafts-Entkleidung des Dinges.[1]) Alles, wovon wir wissen, ist uns nur in unserem Bewußtsein gegeben, in dessen Vorgängen sich stets sozusagen ein subjektiver und ein objektiver Pol scheidet. Alle Erscheinungen des Bewußtseins sind einerseits an unser Ich geknüpft und andererseits untereinander zu Einheiten verbunden, die wir Dinge nennen und denen wir zum Teil (z. B. den Mitmenschen) dieselbe Konstitution zuschreiben, wie der Einheit, die sich räumlich in unserem Körper abtrennt. Sie sind wie wir selbst gewissermaßen Knotenpunkte in dem Netze dieser Beziehungen. Zeit und Raum sind nur Formen dieses Bewußtseins, d. h. Ordnungen seiner Elemente, die Zeit für alle Vorgänge, der Raum nur für einen bestimmten Teil davon.

Dabei ist der flüchtige Augenblick für uns nichts, wenn er nicht die Vergangenheit[2]) weckt, aber diese Vergangenheit besteht für uns nur aus der Kette solcher flüchtigen Augenblicke, welche Beziehung auf Beziehung häufen. Aus allen diesen Beziehungen heraus erwächst uns aber das Bild einer Welt, die uns wiederum in sich aufnimmt, in der wir geboren wurden und leben und sterben werden. „So ist denn in der Tat der Mensch einerseits ein Bestandteil der Welt und ein Produkt der Weltentwicklung, während er andererseits die Welt doch nur als Inhalt seines Bewußtseins ... kennt".[3])

Wie ist dies möglich?

In dem Ganzen der Beziehungen, das zwischen den unbekannten Polen *X* und *Y* flutet, ist für jeden zunächst nur sein individuelles Ich der feste Punkt, an den alles Objektive geknüpft erscheint. Es wird freilich in seinen

1) Natürlich ist uns das Reich der Beziehungen zwischen Subjekt und Objekt nur vom Ich aus zugänglich. Könnten wir gewissermaßen an das jenseitige Ufer (Objekt) gelangen, so gälte auch das Umgekehrte. Für ersteres hat Kant den Ausdruck geprägt. „Die Vernunft (Verstand) macht die Natur erst möglich", d. h. durch unsere Vernunft (Verstand) wird unsere Naturerkenntnis durchaus bedingt. In Beziehung auf letzteres findet sich gelegentlich (bei Kehrbach S. 491) ein Hinweis auf „die freiwirkende Natur, die ... vielleicht selbst sogar die Vernunft zuerst möglich macht". Vgl. dazu Chamberlains Kant, Kap. 6, S. 626f. Vgl. Nr. 19.

2) In Bezug auf die „Inhärenz der Vergangenheit in der Gegenwart". Vgl. Nr. 90b S. 295ff.

3) Vgl. Nr. 90b S. 2.

Erlebnissen stets ein anderes, aber es bleibt dabei doch im Grunde dasselbe, und so stellt es in seiner Tatsächlichkeit gewissermaßen eine Lösung dar für das Rätsel der Veränderung, durch das die Geschichte der Philosophie von Anfang an bestimmt wird. Mit dieser täglich neu erlebten Lösung tritt es erst unbewußt und dann immer bewußter an den Wechsel der Erscheinungen heran, der es umgibt, und stellt ihm die Forderung „dasselbe" zu bleiben, wie es selbst. Die Logiker haben diese Forderung als „Prinzip der Identität" bezeichnet; auf ihm beruht alles Denken. Diese Forderung erhält ihre Berechtigung, wenn man das individuelle Ich in seiner ganzen Fülle betrachtet, es ist ja nicht nur theoretisch veranlagt, es fühlt auch und will und handelt. Der Widerstand, den es dabei erfährt, und der Einfluß, den es dabei ausübt, überzeugt es unmittelbar davon, daß Anderes neben ihm vorhanden ist in gleicher Existenz wie es selbst.[1]) Diese Überzeugung ist dem Menschen ebenso angeboren wie sein Anschauen und sein Denken, auch sie ist, erkenntnistheoretisch ausgedrückt, eine Konstituente seines Bewußtseins.

Wie von hier aus alles Geschichtliche zu werten ist, liegt außerhalb des Rahmens unserer Betrachtung. Wir wollten nur darauf hinweisen, daß der Gang vom Dinge zu den Beziehungen für das theoretische Gebiet durchaus berechtigt ist, daß aber die Praxis des Lebens immer wieder zu dem Naiven Realismus zurückführt. So entsteht ein Antagonismus, indem Einheiten von Beziehungen doch wieder als relativ selbständige Dinge aufgefaßt werden.

Der ursprüngliche Hang zur Personifikation des Äußeren ex analogia hominis bleibt wenigstens als Hang zur Verdinglichung bestehen trotz aller kritischen Arbeit, und infolgedessen zeigen die Kategorien, mit denen wir das Gegebene fassen, die bekannte Verschiebungstendenz zum Dinge hin. So wird selbst uns noch die Zahl π zum Dinge, obwohl sie doch durch ein ziemlich verwickeltes System von Relationen gegeben wird. Und den Pythagoräern war die Zahl durchaus Substanz!

Wir sprechen auch trotz Kopernikus vom Aufgange der Sonne und von ihrem Untergange, und dem unmittelbar gegebenen Phänomen gegenüber ist dies auch durchaus berechtigt.

Zur Beleuchtung jenes Antagonismes zwischen der erkenntnistheoretischen Verflüchtigung der Dinge und deren Würdigung durch die Praxis des Lebens stellen wir noch zwei Aussprüche einander gegenüber, einen von H. Poincaré und einen von Goethe. Ersterer sagt[2]): „Alles, was nicht Gedanke ist, ist das reine Nichts, weil wir nur den Gedanken denken können, und weil alle Worte, über die wir verfügen, um von Dingen zu sprechen, nur Gedanken ausdrücken können; zu sagen, daß es etwas anderes gibt, als den Gedanken, ist also eine Behauptung, die gar keinen Sinn hat.

1) Vgl. Nr. 50 S. 277. Diesem Gedanken dient auch die gesamte Geistesarbeit von H. Rickert und A. Riehl.

2) Vgl. Nr. 113b S. 208.

Und doch . . . seltsamer Widerspruch für die, welche an die Zeit glauben ... zeigt uns die geologische Geschichte, daß das Leben nur eine kurze Episode zwischen zwei Ewigkeiten des Todes ist, und daß in dieser Episode selbst der bewußte Gedanke nur einen Augenblick gedauert hat und dauern wird. Der Gedanke ist nur ein Blitz inmitten einer langen Nacht. Aber dieser Blitz ist alles."

Dagegen lesen wir bei Goethe[1]): „Der Mensch ist also wirklich in die Mitte einer wirklichen Welt gesetzt und mit solchen Organen begabt, daß er das Wirkliche und nebenbei das Mögliche erkennen und hervorbringen kann. Alle gesunden Menschen haben die Überzeugung ihres Daseins und eines Daseienden um sie her."

Alles menschliche Wissen ist subjektiv und relativ, insofern es jedem einzelnen nur in seinem Bewußtsein gegeben ist, das freilich Wahres und Falsches im bunten Wechsel enthält. In jedem Augenblicke, den der einzelne erlebt, ist ein Teil seiner Vergangenheit „inhärent", und in dieser wiederum ein Teil der Kulturarbeit des Menschengeschlechtes, allein schon mit und in der Sprache übermittelt.

Auch hier gilt das Dichterwort:[2])

Nichts ist verloren und verschwunden,
Was die geheimnisvoll waltenden Stunden
In den dunkel schaffenden Schoß aufnahmen . . .
Und alles ist Frucht, und alles ist Samen!

Aller Fortschritt der Erkenntnis kann aber die Formen des Individual-Bewußtseins nicht überschreiten, mag man es auch zu einem „Bewußtsein überhaupt" idealisieren[3]), und in diesem Sinne hat Protagoras Recht wenn er den Menschen zum Maße der Dinge macht.

Mit Bewußtseinsanalysen muß jede Erkenntnistheorie beginnen, sie stößt aber bei der Feststellung ihrer „Beziehungen" stets auf einen unerklärten Rest, der dem Denken und Anschauen entflieht und gerade damit seine echte Wirklichkeit ankündigt. Darin liegt das ewige Recht des Naiven Realismus mit seiner Wertung der „Dinge".

3. Denken und Anschauen.

Insofern die Mathematik, abgesehen von ihrer selbständigen Bedeutung, der Naturerkenntnis und Naturbeherrschung dienen soll, ist es für unsere Frage von besonderem Werte, daß auch die moderne Naturwissenschaft den Standpunkt der Beziehungen bis zu einem gewissen Grade anerkennt. Vertreter der Sinnesphysiologie waren es ja gerade, die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts mit zu der Wiederbelebung des Kantischen Systems beigetragen haben, weil sie in dessen theoretischem Teile eine Rechtfertigung ihrer eigenen Ansichten sahen. Daß ein bestimmter

1) Vgl. Sprüche in Prosa, IV.
2) Vgl. Schiller, Braut von Messina III, 5.
3) Vgl. im Gegensatze dazu Nr. 137f S. 13.

Ton, auch wenn er eine Zeitlang dauert, ein Vorgang ist, der u. a. durch einen tönenden Gegenstand und ein aufnehmendes Ohr bedingt ist, gilt als selbstverständlich, und dabei erscheinen die Gesetze der Schwingung als das Bleibende im Wechsel, soweit es sich um das Objekt handelt. Entsprechendes gilt für das Gebiet der Farben, und auch für die übrigen Sinne sucht man diese Auffassung durchzuführen. Den Widerstand (im Sinne von Lockes solidity) glaubt man, was das Objekt betrifft, erklären zu können, indem man die Körper als Gruppen bewegter Moleküle und Atome oder als Systeme energiebegabter Bewegungen ansieht, und gibt im ersten Falle zu, wenigstens meist, daß Moleküle und Atome nur Hilfsvorstellungen sind für die Bezeichnung eines dahinterliegenden Unbekannten. Auch die Versuche einer Verbindung des alten Bildes der klassischen Mechanik mit den Gesetzen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, mit denen die Wissenschaft augenblicklich beschäftigt ist, streben überall dem Standpunkte der Beziehungen zu.

So scheint Heraklits Auffassung des Wirklichen als eines gesetzlich bestimmten Werdens zu siegen. So lesen wir auch bei Goethe[1]):

> Getrost! Das Unvergängliche,
> Es ist das ewige Gesetz.

Und Schiller[2]) sagt uns: Der Weise ...

> Sucht das vertraute Gesetz in des Zufalls grausenden Wundern,
> Sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht.

Im Unterschiede des Gesetzlichen vom Regellosen klärt sich der Unterschied von Zusammengehörigem und Zusammengeratenem, auf den die Erfahrung den einzelnen schon frühe hinweist, ihn auffordernd, den Rechtsgrund für die Zusammengehörigkeit zu suchen, wie Lotze sagt. Nach diesem Rechtsgrunde hatte auch Kant gefragt und er fand ihn in der inneren Notwendigkeit der Urteile, d. h. in der durch ihren Inhalt bestimmten, im Denken gesetzten Notwendigkeit, die im Gegensatze steht zu jedem äußeren Zwange, mag er nun durch Erfahrung oder durch Eingebung bewirkt werden. Darum müssen bei ihm die Synthesen des unbewußt wirkenden Verstandes die Sinnenwelt erbauen, damit aus dieser die hineingelegte Notwendigkeit in bewußter Arbeit als Gesetz wieder herausgelesen werden kann. Darum sind ihm die Grundsätze des Verstandes zugleich die höchsten Naturgesetze. Erfahrung kann ja nur lehren, was war und was ist, sie reicht nicht über den Augenblick hinaus in die Zukunft, sie verwirft gelegentlich, was sie bestätigt zu haben schien, und umgekehrt.

Gibt man mit Kant u. a. zu, daß die Notwendigkeit nur im Denken liegen kann, so ist dabei doch noch eine andere Auffassung möglich, nämlich, daß wir versuchsweise in die Erscheinungen Notwendigkeit hineindenken und uns von ihnen belehren lassen, ob unser Versuch ge-

1) Vgl. Chinesisch-deutsche Jahres- und Tageszeiten Nr. XI.

2) Vgl. Der Spaziergang.

lungen ist oder nicht, und in letzterem Falle wieder und wieder von neuem versuchen. Es ist einmal Menschenschicksal, die Erkenntnis nur in einem asymptotischen Prozesse zu erringen. In Natorps „Grundlagen" finden wir dieses Versuchen äußerst klar geschildert. Er sagt[1]): „Es war Platos tiefste Entdeckung: daß die Erkenntnis der Wissenschaft in einem unendlichen Prozeß der „Begrenzung des Unbegrenzten" bestehe; daß es in ihr also keine absoluten Anfangs- noch Endpunkte gäbe, sondern ... diesseits jedes (relativen) Anfangs ein früherer Anfang, jenseits jedes (relativen) Abschlusses ein fernerer Abschluß, und auch innerhalb jedes Zentrums, in dem der Gedanke sich feststellen möchte, ein wiederum zentraleres zu suchen und sicher auch zu finden sei." „Um in dem Unendlichen ... der Gegenstandsbestimmung in der Erfahrung überhaupt irgendwie Fuß zu fassen, um zu irgendeiner Begrenzung dieses Unbegrenzten zu gelangen, „setzt" man notwendig irgendetwas zum einstweiligen Anfang und geht von da weiter, soweit als eben von diesem Anfang an sich sicher gehen läßt, stets aber mit dem Vorbehalte, hinter diesen Anfang zurückzugehen, sobald Anlaß und Möglichkeit dazu sich bietet; ebendamit aber auch über jeden scheinbaren Abschluß, bei dem das Denken sonst zum Stillstand kommen würde, wieder hinauszudringen."

Ob der Platonische Ausdruck „Begrenzung des Unbegrenzten" sich halten läßt, mag dahingestellt bleiben. Auch Goethe antwortet auf die Klage[2]):

> Die Welt, sie ist so groß und breit,
> Der Himmel auch so hehr und weit,
> Ich muß das alles mit Augen fassen,
> Will sich aber nicht recht denken lassen.

mit den Worten:

> Dich im Unendlichen zu finden,
> Mußt unterscheiden und dann verbinden.

Damit weist er auf die beiden Hauptfunktionen des Denkens hin und sagt uns dazu ein andersmal[3]) noch, daß der Mensch das Unmögliche vermag, denn

> Er kann dem Augenblick
> Dauer verleihen.

Das ist es! In das Flüchtige hinein denkt der Mensch seine Invarianten, und versucht damit weiterzukommen.

Gerade die Naturwissenschaft zeigt uns, auch wenn man in ihr von allem Geschichtlichen und Biologischen absieht, daß dem Werden dessen Gesetze nur abgerungen werden können, indem man in seinen Fluß etwas Bleibendes hineindenkt, um alle Beziehungen daran zu heften.[4])

---

1) Vgl. Nr. 105e S. 13 u. 15. 2) Vgl. „Gott und Welt" (Atmosphäre).

3) Vgl. das Göttliche.

4) Die Gestaltung im einzelnen ist bis zu einem gewissen Grade frei. Atomistische Ansichten können ebensowohl fördernd wirken, wie Theorien kontinuierlicher Raumerfüllung, in der Optik ist Newtons Anschauung ebenso fruchtbar gewesen, wie die von Huygens usw. Wer sich setzen will und dazu etwa *n* verschiedene Stühle

So behält auch Parmenides Recht mit dem Hinweise auf das ewig in sich ruhende unveränderliche Sein, das nur im Denken gesetzt wird, namentlich wenn man ihn von Plato aus betrachtet, dessen Idee die Einheit ist, die Einheit des Elementes und die Einheit im Vielen, und von letzterer ist ja auch das Naturgesetz nur ein wichtiger Sonderfall.

Die Tatsache, daß wir uns gemäß dem Erlebnisse, „in unseren Veränderungen selbst immer dasselbe zu bleiben (Ich = Ich)", auch im Getriebe des uns umflutenden Geschehens ein Beständiges suchen und in dessen Wechsel Invarianten hineindenken, hat im Prinzip der Identität ihre genaue Fassung erhalten. Kein Eindruck könnte festgehalten und mit einem Zeichen (Namen) versehen werden, wenn man ihn nicht der Zeit zum Trotze als mit sich selbst identisch festhielte, ihn also unterschiede und doch wiedererkennbar machte. Mit Rücksicht auf die Arbeiten von A. Spir sagt F. A. Lange gelegentlich[1]): „Der Satz $A = A$ ist zwar die Grundlage aller Erkenntnis, aber selbst keine Erkenntnis, sondern eine Tat des Geistes, ein Akt ursprünglicher Synthesis, durch welchen als notwendiger Anfang alles Denkens eine Gleichheit oder ein Beharren gesetzt werden, die sich in der Natur nur vergleichsweise und annähernd, niemals aber absolut und vollkommen vorfinden. Der Satz $A = A$ zeigt also gleich auf der Schwelle der Logik die Relativität und Idealität alles unseres Erkennens an."

Dabei wäre nur gegenüber den Vertretern der reinen Logik darauf hinzuweisen, daß uns die wohltätige Stumpfheit unserer Sinne (vgl. die Theorie der Schwelle) oder, wie man es sonst nennen will, diesen notwendigen Anfang sehr erleichtert. Wir empfinden tatsächlich als dasselbe, was kritische Überlegung später als verschiedenes nachweist. Herr Poincaré hat z. B. bei seiner Betrachtung über das physikalische Kontinuum[2]) auf die Weber-Fechnerschen Versuche hingewiesen. Drei Gewichte von 10, 11 und 12 g rufen z. B. drei Empfindungen hervor, von denen die ersten beiden unter sich und die letzten beiden unter sich übereinstimmen, wohingegen die erste und die dritte verschieden sind. Während für die Gewichte a, b, c die Beziehung $a < b < c$ gilt, stellen die entsprechenden Empfindungen, welche etwa durch $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ bezeichnet werden mögen, die Beziehungen dar $f(a) = f(b)$, $f(b) = f(c)$ und $f(a) < f(c)$, während aus den ersten beiden Gleichungen $f(a) = f(c)$ folgen müßte.

zur Verfügung hat, braucht sich auf keinen bestimmten Stuhl zu setzen, muß aber doch schließlich einen wählen. Es besteht also in Beziehung auf das „Sich-setzen" keine „notwendige" Verbindung zwischen ihm und dem einzelnen Stuhle, wohl aber zwischen ihm und der ganzen Gruppe, und letzteres darf natürlich nicht übersehen werden.

In gewissen Perioden einer wissenschaftlichen Entwicklung scheint es zweckmäßig zu sein, sich im naiven Glauben an konkrete Bilder (vgl. Lorentz u. a. in Holland) mit den Problemen zu beschäftigen, in anderen lediglich schon festgestellte Beziehungen weiter zu verfolgen.

Im elektromagnetischen Weltbilde der Gegenwart siegt wieder einmal der Atomismus, und zwar gestützt durch bestimmte Beobachtungen.

1) Vgl. Nr. 84a II S. 569. 2) Vgl. Nr. 113a S. 22 u. 23.

Das ist alles richtig, aber an der Tatsache, daß wir wirklich dasselbe empfinden, mag dies auch später kritisch berichtigt werden, ändert das nichts.[1])

Es handelt sich nur um Versuche, aber immer um ganz bestimmte Versuche. Wir glauben zunächst absolut gleiches usw. vor uns zu haben, und erst weitere Erfahrungen zeigen uns, daß die Annahme nur relativ berechtigt war, und nun wieder und wieder verbessert werden muß.

Die erste grundlegende Funktion des Denkens hat man in aktiver Fassung als „Unterschiede setzen" und „Identifizieren" und in passiver Fassung als „Unterschiede sehen" und „Wiedererkennen" bezeichnet, wobei aber der sprachliche Ausdruck auf dem Standpunkte der Beziehungen ziemlich gleichgültig ist.

Die weiteren Funktionen des Denkens werden durch die reflexiven Kategorien (gleich, ähnlich, Ganzes und Teil usw.) und die konstitutiven Kategorien (Ding und Eigenschaft, Bedingung und Bedingtes usw.) beschrieben, über deren Aufzählung und Gliederung die Ansichten noch nicht völlig geklärt sind. In aktiver Fassung spricht man hier von „Handlungen des Denkens", in passiver von „Aufnehmen und Schauen".[2])

Mit dem Prinzipe der Identität pflegt man das Prinzip des Widerspruchs und das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten zu verbinden. Damit sind in der Tat die Denkgesetze bezeichnet, welche die Kapitel Begriff und Urteil beherrschen. In psychologischer Hinsicht ist kein Zweifel, daß sich Begriff und Urteil gegenseitig bedingen, d. h. daß primitive Begriffsbildungen, welche auf primitiven Urteilen beruhen, durch weitere Urteile berichtigt und entwickelt werden usw. In der Logik scheint es zweckmäßig, das Urteil zum Ausgange zu nehmen, weil in ihm die Funktion des Denkens ganz klar zu Tage tritt, es trennt und verbindet doch zugleich Begriffe, in einfachstem Falle deren zwei.

Für die Bildung von Schlüssen tritt dazu der Satz vom Grunde, er ist das Substitutions- und Eliminationsprinzip der Logik. Der bekannte Schluß

Alle Menschen sind sterblich,
Caius ist ein Mensch,
Also ist Cajus sterblich

zeigt schon alles Erforderliche. Das erste Urteil enthält die Begriffe Mensch und sterblich, das zweite die Begriffe Cajus und Mensch, das dritte bildet unter Beseitigung des Begriffes Mensch aus den beiden ersten ein neues Urteil, das die Begriffe Cajus und sterblich enthält. In diesem Sinne gibt Wundt in seiner Logik dem Satze vom Grunde die Form: „Wenn ver-

1) Auch dies gehört zu dem Gebiete des Phänomenalismus, den augenblicklich Herr Husserl u. a. herauszuarbeiten suchen. Seine Aufgabe ist die „Analyse des tatsächlich Gegebenen". Vgl. dazu Nr. 50, namentlich S. 86f., und auch Nr. 167a.

2) Dieser Unterschied der Fassung zieht sich durch alle Gebiete der Erkenntnis. Sind neue Wahrheiten in der Mathematik Entdeckungen (G. Cantor u. a.) oder Erfindungen (R. Dedekind u. a.)? Wie steht es mit Sätzen, deren Beweis noch nicht erbracht ist, z. B. in der Zahlentheorie?

schiedene Urteile durch Begriffe, die ihnen gemeinsam angehören, in ein Verhältnis zueinander gesetzt sind, so stehen auch die nicht gemeinsamen Begriffe solcher Urteile in einem Verhältnisse, welches in einem neuen Urteile seinen Ausdruck findet." Vielleicht wäre nur das Wort „Verhältnis" durch „Beziehung" zu ersetzen, da uns dieses Wort deutlicher die mannigfachen Verbindungen der Begriffe und Urteile hervorzuheben scheint, die ja in der an Aristoteles anschließenden Logik nur zum geringen Teile ihren Ausdruck gefunden haben.

Aller Fortschritt der Erkenntnis beruht nun nicht auf der tautologischen Formel $a = a$, sondern auf der Formel $b = c$ oder besser auf der Formel

$$(a \text{ in } b) = (a \text{ in } c)$$

d. h. die Ersetzbarkeit, welche uns das Zeichen = angibt, beruht stets darauf, daß wir in verschiedenem dasselbe zu erkennen glauben oder erkennen und es demgemäß als ersetzbar bezeichnen. Diese Ersetzbarkeit muß natürlich von Fall zu Fall genau bestimmt werden. So bedeutet z. B. die Formel

$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2,$$

eine Ersetzbarkeit gemäß den festgestellten Regeln der Arithmetik.

Die Denkgesetze beherrschen die sog. „Formal-Logik". Viel Streit um deren Daseinsberechtigung und um deren Wert wäre vermieden worden, wenn man sie etwa als Hypothetische Logik bezeichnet hätte, denn in ihr handelt es sich stets darum, aus Urteilen, die als gegeben vorausgesetzt werden, andere Urteile abzuleiten. Man hat gelegentlich gesagt, es könne keine Formal-Logik geben, da das Denken nur mit dem Inhalte zu tun habe. Andererseits hat man behauptet, daß noch niemals ein Schluß gezogen worden sei, der formal-logisch zu beanstanden sei. Wo dies scheinbar der Fall wäre, da lägen Täuschungen durch Zeichen (Worte) vor, oder es handelte sich um mechanische Wortverbindungen, bei denen überhaupt nicht gedacht worden wäre. Man findet jetzt eine sehr ausführliche und umsichtige Rechtfertigung der Formal-Logik bei Herrn Enriques[1]), auf die wir hier verweisen können.

Es fragt sich nun, ob der Bereich des Denkens mit der Abgrenzung der Formal-Logik vollständig umschrieben ist, vorausgesetzt, daß alle reflexiven und konstitutiven Kategorien bei der Bildung der Begriffe und Urteile verwendet werden dürfen, nicht nur die Klassenbegriffe usw. der alten Logik.

Sieht man die philosophische und mathematische Literatur durch, um festzustellen, was das Wort Denken besagen soll, das ja im gemeinen Leben für alles Mögliche und Unmögliche benutzt wird, so findet man, daß es auch hier keine feste Bedeutung hat. Wer denken, fühlen und wollen für eine vollständige Einteilung des psychischen Geschehens ansieht, dehnt den Umfang des Begriffes Denken sehr weit aus. Zwischen dieser An-

1) Vgl. Nr. 36b Bd. 1. S. 153 u. f.

sicht und der, welche das Denken auf die Formal-Logik einschränkt, liegen die verschiedensten Auffassungen, es gibt aber, wobei man sich an Descartes's Erklärung der cogitatio[1]) erinnern mag, noch weiter gefaßte Bestimmungen, wie u. a. das bereits angeführte Wort Poincarés zeigt: „Alles, was nicht Gedanke ist, ist das reine Nichts." Aber auch nach Wundt gibt es kein Bewußtsein ohne innere Willenstätigkeit, und diese selbst ist ihm Denken, d. h. das Denken reicht soweit, wie das Bewußtsein reicht. Dieses Denken ist natürlich nicht das logische Denken, welches durch die „Denkgesetze" beherrscht wird.

Noch schlimmer steht es um die Bedeutung des Wortes Anschauung. Nur in bezug auf die empirische Anschauung der räumlich-zeitlichen Sinnenwelt und deren Nachbilder scheint Übereinstimmung zu herrschen. So erklärt Herr Höfler[2]): „Anschauungen sind Wahrnehmungsvorstellungen von zusammengesetzten physischen Inhalten, deren Zusammensetzung dasjenige Maß von Innigkeit besitzt, welches wir eben als Anschaulichkeit bezeichnen." Der Zirkel ist natürlich beabsichtigt, es handelt sich um einen Hinweis auf das Tatsächliche. Manchmal sieht es so aus, als ob alles, was nicht formal-logisch faßbar ist, durch das Wort Anschauung bezeichnet würde, so daß dieses für jeden alogischen Rest gebraucht würde. Andererseits schreibt man wieder den Denkgesetzen „Evidenz" zu, und in seiner ursprünglichen Bedeutung sollte ja das Axiomatische im Gegensatze zu Definitionen und Postulaten das Anschaulich-Gewisse sein. Herr Poincaré unterscheidet gelegentlich[3]) vier Arten der Anschauung und gibt dazu folgende Beispiele:

1. wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich;

2. wenn ein Satz für die Zahl 1 wahr ist, und man beweist, daß er für $n + 1$ wahr ist, vorausgesetzt, daß er es für n ist, so ist er für alle ganzen Zahlen wahr;

3. wenn auf einer Geraden der Punkt C zwischen A und B liegt und der Punkt D zwischen A und C, so liegt der Punkt D zwischen A und B;

4. durch einen Punkt kann man nur e i n e Parallele zu einer Geraden ziehen.

Dazu bemerkt er: Alle vier Axiome „müssen der Anschauung zugeschrieben werden, und doch ist das erste der Ausdruck eines Gesetzes der formalen Logik, das zweite ist in Wahrheit ein synthetisches Urteil a priori, der Grundstein der strengen mathematischen Induktion; das dritte ist eine Berufung auf die Einbildungskraft, das vierte eine verhüllte Definition." An einer anderen Stelle beklagt Herr Poincaré, daß man nur das Wort „Intuition" habe, um so verschiedenes zu bezeichnen. Andererseits sagt uns Kant „Begriffe ohne Anschauungen sind leer" und „Anschauungen

1) cogitationis nomine complector omne id, quod in nobis est, et cujus i m m e - diate conscii sumus.

2) Vgl. Nr. 69a S. 229.

3) Vgl. Nr. 113b S. 15.

ohne Begriffe" sind blind, und weist damit auf den logisch-anschaulichen Charakter alles menschlichen Wissens hin.

Vielleicht reicht wirklich die Anschauung ebensoweit wie das Denken, d. h. vom Ich aus bis an die Grenze des Bewußtseins, nur daß sie an der Peripherie klarer erscheint, das Denken deutlicher in der Mitte, weil dort das Außer-Einander und hier die Einheit steht? Dann wäre auch das stumme Anschauungsurteil der Logiker durch Denken bedingt, aber selbst die höchste Abstraktion bedürfte der Anschauung.

Dies scheint tatsächlich richtig zu sein, nur daß auf dem immer höher klimmenden Wege der Abstraktion die Anschauung im allgemeinen mehr und mehr durch das Zeichen ersetzt wird. In diesem Sinne behält Aristoteles Recht: Οὐδεποτε νοει ἀνευ φαντασματος ἡ ψυχη, d. h. unser Denken bedarf stets eines Bildes (Zeichens).

Worte wie Zuordnung, Vertauschung, Ganzes und Teil usw. sind in der Tat ursprünglich nur in empirischer Anschauung klar zu machen. Will man von einer Menge etwas beweisen, so führt man greifbar ihre Elemente $a, b, c \dots$ ein oder setzt voraus, daß diese Einführung von dem Hörer oder Leser von selbst vollzogen oder vollzogen gedacht wird. Dabei spielt auch die Mechanisierung der Vorstellungen eine große Rolle, welche der Ökonomie unseres ganzen geistigen Lebens entspricht; sie tritt z. B. beim Schreiben und Lesen usw. klar zu Tage, in bezug auf die Bildung der Zahlen hat Herr Dedekind wohl alles erforderliche gesagt.[1])

Man darf also dem Worte Denken den weitesten Spielraum geben, nachdem man das Formal-Logische und die reflexiven und konstitutiven Kategorien für die Bildung der Begriffe und Urteile erst einmal scharf abgegrenzt hat, andererseits muß man aber auch der Anschauung, der tatsächlichen und ihrem im Zeichen gegebenen Surrogate, denselben Spielraum geben.

Kant behält Recht damit, daß Begriffe ohne Anschauung leer sind, ebenso wie Anschauungen ohne Begriffe jeder Bestimmtheit ermangeln, nur wird man, wie schon oben auseinandergesetzt, seiner reinen Anschauung ihre Zwangläufigkeit nehmen bzw. sie durch die mit einer gewissen Freiheit begabte Logisierung (Abstraktion, Determination und Idealisierung) der empirischen Anschauung ersetzen müssen.

Das ist etwa der Standpunkt jener Gruppe von Mathematikern, deren wir am Schlusse von Abschnitt I, 3 gedachten. Besonders klar ist er von Herrn F. Klein in einem Wiener Vortrage[2]) dargestellt worden, in dem er von der Entdeckung der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten ausgeht. Diese Tatsache und die weitere Diskreditierung der Anschauung durch die Mengenlehre kann offenbar in der Mathematik zu drei verschiedenen Standpunkten führen, nämlich

1. zur Verwerfung jeder Anschauung,

---

1) Vgl. Nr. 24b S. IX u. f.
2) Vgl. Nr. 781.

2. zur Annahme, daß die Anschauung für gewisse mathematische Gebilde ausreicht, für andere nicht,

3. zu der Annahme, daß die Anschauung der Logisierung, deren Quelle sie ist, überhaupt nicht oder doch nur in sehr beschränktem Maße folgen kann.

Während Nr. 1 zum Standpunkte des reinen Denkens führt, wird Nr. 2 z. B. dadurch charakterisiert, daß man glaubt, die analytischen Funktionen in ihren Darstellungen als Kurven anschaulich verfolgen zu können, während die Anschauung bei nichtanalytischen Funktionen versagt. Im Gegensatz zu dieser, vormals wohl landläufigen Ansicht Nr. 2 hat Herr F. Klein sich schon früh zu dem dritten Standpunkt bekannt.[1]) Für ihn ist die Entdeckung der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten lediglich die Veranlassung zu der Einsicht, daß die Anschauung ihrer Logisierung überhaupt nicht folgen kann. „Das, was wir vor Augen haben, wenn wir von einer Kurve sprechen, ist ein Streifen von allenfalls vielleicht geringer, jedenfalls nicht verschwindender Querdimension". „Solange man sich nur mit analytischen Kurven beschäftigte, merkte man nicht, daß man garnicht in der Lage sei, die Dinge so, wie die Infinitesimalrechnung sie darstellt, auch wirklich anschaulich vorzustellen; weil nämlich die mathematischen Eigenschaften der analytischen Kurven mit den anschaulichen Eigenschaften der Streifen einigermaßen parallel gehen".[2])

Ferner führt auch die „Ansicht von der Ungenauigkeit der Raumvorstellungen uns sowohl bei den Axiomen wie bei den ersten Definitionen der Geometrie zu neuen Auffassungsmöglichkeiten", und so rechtfertigt sich neben der Geometrie Euklids auch jede ihrer anderen Formen.

Auf diesem Standpunkte wird auch eine „Erziehung der Anschauung" eine berechtigte Forderung. Zuerst hat wohl v. Helmholtz in Beziehung auf die Geometrie der nichteuklidischen Räume von einer besonderen Ausbildung oder Gewöhnung der Anschauung gesprochen, eine Forderung, die sonst auf allen Gebieten des Anschaulichen, z. B. für die Künstler, durchaus selbstverständlich ist. Herr Voß sagt dazu[3]): „Unter Anschaulichkeit in geometrischem Sinne wird man wohl die Möglichkeit verstehen, gewisse begriffliche Aussagen an den Gegenständen unserer Sinneswahrnehmung resp. Vorstellung zu verfolgen. Daß diese geometrische Anschauung nur eine recht dürftige ist, sich zunächst nur auf die bekanntesten und einfachen Figuren bezieht, ist wohl eine nicht zu bestreitende Tatsache. Sie ist aber entwicklungsfähig. Jeder kennt die eigentümlichen Schwierigkeiten, die das Verständnis stereometrischer Sätze dem Anfänger bereitet. Sie treten in verstärktem Maße auf, wenn wir die nach dem Prinzip der Dualität erzeugten Gebilde, oder die Natur der Singularitäten algebraischer Flächen verfolgen wollen, wenn wir das

1) Vgl. Berichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen 1873.
2) Vgl. Nr. 781 S. 4. 3) Vgl. Nr. 161a S. 80.

Verhalten Riemannscher Flächen mit mehrfachem Zusammenhang untersuchen. Hieraus dürfte folgen, daß über die Anschaulichkeit nur der urteilen kann, der sich mit der Ausbildung der Anschauung beschäftigt hat. In Rücksicht hierauf aber erscheinen die Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie ebenso anschaulich wie die der euklidischen". Für alles dies und weiteres können wir hier auf das eben erschienene schöne und überaus reichhaltige Buch von Herrn Timerding verweisen.[1])

Für Kant war die Anschauung außerdem das Passive (Gegebene), welches sich stets mit dem Aktiven, dem Denken, einen muß, wenn Erkenntnis entstehen soll. Das läßt sich nicht halten, denn gerade die geniale Lösung tritt oft auf wie ein Geschenk von oben.

Will man die Anschauung definieren, so ist sie Kants „Mannigfaltiges überhaupt", dessen bewegliche Form das Außer-Einander (Menge ohne Ordnung) ist, während es u. a. in den festen Formen des Nacheinander (Zeit) und Nebeneinander (Raum) gebunden werden kann.

In diesen festen Formen erscheint uns das flüchtige Werden, in das wir versuchsweise unsere Invarianten hineindenken, gemäß den Denkgesetzen und unter Verwendung der reflexiven und konstitutiven Kategorien, schließlich in Ideen einen systematischen Abschluß suchend.

Dabei erhält auch Natorps synthetisches Denken sein Recht, nur ist es immer auf Anschauung bezogen bzw. auf deren Surrogat, das Zeichen.

Wir wollen nun die Ergebnisse dieses Abschnittes prüfen, indem wir uns der Arbeitsart der Mathematiker zuwenden.

4. Die Arbeitsart der Mathematiker.

Im Gegensatz zu der gegenwärtig unter den Mathematikern meist herrschenden Stimmung hatte E. E. Kummer eine große Vorliebe für die Philosophie, abgesehen von der Formal-Logik. Das bekannte Schulbeispiel vom Cajus verspottet er mit den Worten: „Da tue ich nun erst alle Menschen, von denen ich schon weiß, daß sie sterblich sind, in einen Topf und ziehe dann den lumpigen Cajus wieder heraus". Ist dieser Spott, der sich auch in der erkenntnistheoretischen Literatur schon seit alten Zeiten in mannigfachen Wendungen vorfindet, berechtigt? Wir wollen statt des uns unbekannten Cajus den bekannten Robinson Crusoe einsetzen, und zwar dabei die ganze Lage ins Auge fassen, als die Wilden ihn wegen seiner Überlegenheit für einen Gott oder Teufel hielten. In dieser Lage konnten sie jenen Schluß nicht machen. Wenn sie aber durch Beobachtung des weiteren an Robinson menschliche Eigenschaften entdeckten (Bedürfnis nach Essen, Trinken, Schlafen usw.), so dämmerte ihnen zunächst unbestimmt und dann immer bestimmter die Überzeugung auf „Robinson ist ein Mensch", und nun konnten sie, was sie vorher nicht

1) Erziehung der Anschauung, B. G. Teubner, Leipzig 1912.

gewagt hatten, auf ihn, „den Sterblichen", das todbringende Geschoß schleudern.

Was soll dieses Beispiel? Darauf hinweisen, daß immer zwischen den einzelnen Urteilen der Schlüsse unausgesprochene geistige Arbeit liegt.

Mit den Beweisen der Mathematik steht es nicht anders und darum ist es eine anerkannte Regel der Didaktik, für die u. a. auch W. Krumme eingetreten ist, daß der Schüler nicht die Beweise der Sätze lernen soll, sondern das Beweisen. Von diesem Gesichtspunkte aus gab er namentlich für die Geometrie bestimmte Beweismittel an, um den Schüler möglichst selbständig zu machen[1]).

In der Geometrie pflegt man, so oft man sie vom formal-logischen Standpunkte aus betrachtet, die Hilfskonstruktionen als etwas Gegebenes hinzunehmen, während gerade in ihnen etwas ursprünglich zu Findendes liegt. Man nimmt ja zu der zunächst gegebenen Figur bestimmte Raumgebilde hinzu, welche noch nicht vorhanden oder noch nicht aus dem Raume ausgeschieden waren, wie jedes Beispiel zeigt. Aber auch da, wo Hilfskonstruktionen nicht erforderlich sind, liegt zwischen den Urteilen der Beweise oft geistige Arbeit, die nicht formal-logisch ist. Nehmen wir den Euklidischen Beweis für die Gleichheit von Scheitelwinkeln als Beispiel, so muß jeder der beiden Winkel mit demselben, in der Figur bereits vorhandenen Winkel zu einem Paare von Nebenwinkeln verbunden werden, ehe unter Erinnerung an den Satz über die Winkelsumme zweier Nebenwinkel der formal-logische Gang des Beweises einsetzen kann. Entsprechendes gilt, wenn man z. B. die Fläche eines Vierecks doppelt ansetzt, das einmal nach der einen und einmal nach der anderen Diagonale geteilt ist, usw.

Ebenso steht es in der Arithmetik, in der auch die Hilfskonstruktion eine große Rolle spielt. Nehmen wir als Beispiel die übliche Lösung der quadratischen Gleichung. Man beginnt die Lösung für

$$x^2 + px + q = 0,$$

nachdem die Analogie mit der Formel $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ unter der Sonderbestimmung $2a = p$ gefunden worden ist, mit der Hilfskonstruktion der Einschaltung von $\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}$ und erhält so

$$x^2 + px + \left(\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}\right) + q = 0.$$

So steht es überall im ganzen Gebiete der Mathematik: das eigentlich Produktive liegt meist, allerdings nicht immer, zwischen den Urteilen der Schlüsse, während andererseits in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft natürlich auch formal-logische Arbeit zu leisten ist.

Für die Arithmetik hat auch Herr M. Simon gelegentlich[2]) auf die Bedeutung der Konstruktion hingewiesen. Er sagt: „Der spezifische Unter-

1) Vgl. hierzu W. Lietzmann in Bd. I Heft 1 S. 26f. von Nr. 1.
2) Vgl. Nr. 137f S. 12.

schied zwischen Geometrie und Arithmetik besteht nicht ... in der Konstruktion, denn auch die Arithmetik hat Konstruktionsmethoden, mittels deren sie indirekt gegebene Begriffe hervorbringt". Freilich beschränkt sich die Konstruktion nicht auf das indirekt Gegebene, sie ist auch unmittelbar schöpferisch.

Will man die zwischen den Urteilen der Beweise liegende geistige Arbeit kennen lernen, so bieten für die Schule das beste Material dazu die Kladden der mathematischen Abiturientenarbeiten. Es ist mir in psychologischer Hinsicht immer besonders wertvoll, dieses Material sorgfältig durchzumustern, um die oben hervorgehobene Vorarbeit und Zwischenarbeit kennen zu lernen. Das Ergebnis ist, daß diese Arbeit durch Phantasie und durch die Methoden der induktiv-deduktiven Logik, die man meist ungenau als induktive Logik bezeichnet, bestimmt ist neben allem Formal-Logischen. Es geht in der Mathematik hier ebenso zu, wie in der Physik und wie in anderen Wissenschaften, d. h. Beobachtung und Versuch usw. spielen eine hervorragende Rolle, nur sind die Gegenstände der Untersuchung hier, nachdem einmal die Grundbegriffe gewonnen worden sind, psychische Gebilde. Genau so geht es aber nicht bloß bei der mathematischen Arbeit der Schule zu, sondern bei aller mathematischen Arbeit.[1]) In der erkenntnistheoretischen Literatur habe ich einen Hinweis auf diese Tatsache nur bei Herrn Hölder[2]) gefunden, der in bezug auf die Arbeit des Geometers sagt: „Wir sind dabei genötigt, zu suchen und umher zu tasten, wir machen eine Art von Experiment, auf Grund dessen wir schließlich vorhersagen, wie die Messung ausfallen müßte, die wir an einer genau ausgeführten Zeichnung oder an einem Modell vornehmen könnten. Wir haben also ein Gedanken-Experiment anstelle eines Real-Experimentes gesetzt und darin besteht die Deduktion." Freilich wird man sich dabei an die Kritik erinnern müssen, die Justus v. Liebig an den Arbeiten Bacons vornahm und welche er abschloß mit den Worten: „Ein Experiment, dem nicht eine Theorie, d. h. eine Idee vorhergeht, verhält sich zur Naturforschung wie das Rasseln mit einer Kinderklapper zur Musik."

Man pflegt in jeder Wissenschaft unter den Namen Untersuchung und Darstellung die eigentliche Arbeit zu scheiden von der Form, die man ihr für die Mitteilung an andere gibt. Als drittes Moment hat man die Prüfung durch die formale Logik hervorzuheben, sie spielt etwa die Rolle der Polizei. Natürlich handelt der, welcher die Polizeivorschriften genau kennt und anerkennt, anders als der, dem sie unbekannt sind oder der sie nicht achten will. Darum wirkt die Formal-Logik stark auf die Darstellung und auch schon auf die Untersuchung zurück, sie zügelt die Phantasie und bestimmt das induktiv-deduktive Verfahren, aber ohne es zu fesseln.

Die Mathematiker und Philosophen, welche für die Mathematik neben

1) Vgl. Nr. 41.
2) Vgl. Nr. 70 S. 10. Vgl. dazu auch ferner Nr. 174.

der Formal-Logik das Schöpferische und Künstlerische oder die synthetischen Funktionen des Denkens betonen, sind durchaus im Rechte, nur ist dabei nicht das Denken oder gar das reine Denken ein und alles.

Daß auch im Schlußverfahren selbst etwas Schöpferisches liegt, soll damit durchaus nicht geleugnet werden. Jeder Lehrer weiß, daß die zu einem Schlusse erforderlichen Urteile im Geiste des Schülers oft friedlich nebeneinander lagern, ohne in Verbindung zu treten, und es ist ja gerade eine Aufgabe der Didaktik, hier die erforderliche Beweglichkeit zu erzielen.

Herr Poincaré sieht bekanntlich in dem Schlusse von n auf $n+1$ das eigentlich Schöpferische in der Mathematik.[1]) Er sagt darüber u. a.: „Die Haupteigenschaft des rekurrierenden Verfahrens besteht darin, daß es, sozusagen in einer einzigen Formel zusammengedrängt, eine unendliche Anzahl von Syllogismen enthält." Herr Voß bemerkt dazu: „Man wird sich wohl nicht leicht entschließen, dieser Ansicht beizustimmen. Denn wir sehen nicht, wie uns die Anwendung dieses Satzes jemals in das aktual Unendliche hineinführen könne, während Poincaré ausdrücklich hervorhebt, daß der bloße Satz des Widerspruches uns zwar gestatten würde, für beliebig viele Fälle einen Satz als richtig darzutun; im Gegensatz dazu soll aber das Prinzip der vollständigen Induktion auch vor dem Unendlichen nicht Halt machen. Indessen mag dies auf einen Wortstreit hinauskommen; eine Ausführung, inwiefern man mittels der angegebenen Methode die Mathematik über die Grenzen dessen, was er selbst eine ungeheure Tautologie nennt, erhebt, hat Poincaré jedenfalls nicht gegeben".[2])

Unseres Erachtens steckt in der Bemerkung Poincarés doch ein richtiger Kern, insofern sie tatsächlich eine bestimmte Art des Schöpferischen trifft, nur muß man die rekurrierende Definition und den Schluß von n auf $n+1$ streng voneinander scheiden. Bekanntlich steht das Wort „rekurrierend" bei den Mathematikern im Gegensatze zu „independent" und könnte ebenso gut durch das Wort „präkurrierend" ersetzt werden. Es wird gebraucht, wenn es sich um eine schrittweise entstehende Reihung handelt, während das Wort independent verwendet wird, wenn ein Glied der Reihung deren ganzes Gesetz darstellt. Für die geometrische Reihe z. B. liefert

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_1 \cdot q, \quad u_3 = u_2 \cdot q, \cdots$$

1) Diese Behauptung Poincarés, wonach alles Alogische für die Bildung des Neuen in der Mathematik ausgeschlossen erscheint, kann sich vernünftiger Weise wohl nur auf die Verifizierung des bereits Geschaffenen beziehen. Sollte damit auch die Tätigkeit des Forschers getroffen werden, so würde dies im Widerspruch stehen zu dem, was Poincarés eigene Arbeiten zeigen und was er auch von diesen gelegentlich selbst erzählt. Vgl. dazu u. a. H. Poincaré „L'invention mathématique" im Enseignement mathématique von 1908, S. 357f.

2) Vgl. Nr. 161a S. 89.

die rekurrierende Definition, während die independente in der Formel

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

enthalten ist.

Diese rekurrierende oder präkurrierende Definition ist wirklich schöpferisch, indem sie für drei Glieder a, b, c die Vorschrift gibt, daß c aus b so gebildet werden soll, wie b aus a, und daß nach diesem Verfahren über c hinaus beliebig weiter fortgeschritten werden kann (und ebenso über a hinaus rückwärts), falls man dabei nicht auf Widersprüche stößt. Letzteres ist natürlich nur von Fall zu Fall zu entscheiden.

Der Schluß von n auf $n+1$ gehört dagegen in die Formal-Logik, wie u. a. schon Herr Frege und Herr Dedekind gezeigt haben.[1]) Man kann diesem Schlusse folgende Gestalt geben: Sollte das Gesetz der Reihung eine bestimmte Eigenschaft E von jedem Gliede auf das folgende übertragen, so hat jedes auf m folgende Glied diese Eigenschaft E, falls sie m zukommt. Zum Beweise betrachten wir die Reihe

$$\cdots m, n, o, p \cdots$$

die einen Teil der vorgelegten Reihe darstellen mag, für die unsere Voraussetzung erfüllt sein sollen. Ist p das erste Glied der Reihe, welches die Eigenschaft E nicht hat, so kommt diese Eigenschaft auch o nicht zu, weil sie sonst auch p zukommen müßte, also auch nicht n und also auch nicht m, und dies ist gegen die Voraussetzung.

Das Unbegrenzte liegt nicht in dem Schlusse, sondern in der Definition, für welche diese Schlußkette wie gemacht ist.

Daß diese Schlußweise gelegentlich dazu dienen kann, eine unvollständige Induktion zu einer vollständigen zu machen, ist richtig, aber zunächst in logischer Hinsicht Nebensache.

Daß der Schluß von n auf $n+1$, den Herr Wundt als Analogieschluß bezeichnet, verhältnismäßig spät in seiner hohen Bedeutung erkannt worden ist, dürfte sich geschichtlich erklären lassen. Mit der zunehmenden Arithmetisierung der Mathematik mußte auch dieser, der Reihung durchaus angepaßte R e i h u n g s - S c h l u ß immer mehr in den Vordergrund treten.

Das Schöpferische liegt aber nicht in ihm, sondern in dem „Iterierbaren", durch welches die präkurrierende oder rekurrierende Definition d. h. die Reihung bedingt ist. Auf das „Iterierbare" als Grundlage des Schöpferischen in der Mathematik hat auch Herr G. Fr. Lipps hingewiesen.[2])

Freilich ist das Schöpferische nicht auf diese Iterierbarkeit beschränkt. Unter Hinweis auf Maupertuis' Antrittsrede an der Pariser Akademie (1742) sagt Herr Voß[3]) „Die Anschauung, eine gewisse Divinationsgabe unser

---

1) Vgl. dazu auch Nr. 162 (erste Auflage), Bd. I, Einleitung u. f.

2) Vgl. Nr. 90b S. 126.

3) Vgl. Nr. 161a S. 92. Vgl. dazu auch in Nr. 137a (erste Auflage) Abschn. 2 entsprechendes in Beziehung auf Förster, Hauck, Keppler, Lampe, Maupertius, Steiner, und besonders Kroneckers Ausspruch „Auch wir sind Dichter" (Berliner Naturfor-

schaffenden Phantasie, die dem eigentlichen künstlerischen Schaffen, dem ποιειν, der Poetik zu vergleichen ist, bildet in letzter Instanz den Keim, aus dem alle großen Fortschritte der Mathematik entspringen, während die Verwandlung in die arithmetische oder Zahlensymbolik das Geschäft der reinen Wissenschaft ausmacht". Dabei ist nur wieder auf die Vieldeutigkeit des Wortes Anschauung hinzuweisen.

Die großen Mathematiker geben uns nur selten Gelegenheit, sie bei der Untersuchung kennen zu lernen, deren Eigenart die Darstellung meist verwischt. Wo sie es aber tun, da tritt auch stets die Rolle des Alogischen im Schöpferischen zu Tage. Gerade das Geniale erscheint oft als ein Geschenk, das sich freilich ohne die experimentelle und formal-logische Vorarbeit nicht einstellen würde.

Nicht bloß Giordano Bruno, sondern auch der geniale Leibniz u. a. haben sich zwar ihr ganzes Leben hindurch um eine „ars inveniendi" bemüht, d. h. um eine Methode, in den Wissenschaften die Genialität durch logische Technik zu ersetzen, natürlich aber vergeblich.[1])

Herr Poincaré widmet gelegentlich[2]) der „Anschauung und Logik in der Mathematik" ein besonderes Kapitel, indem er u. a. den Unterschied des analytischen und synthetischen Genies in der Mathematik kennzeichnet. In meiner Studienzeit war es gang und gäbe, diesen Unterschied in Weierstraß und Riemann personifiziert zu sehen, auf die auch Poincaré hinweist, weitere Paare wie Méray und F. Klein, Hermite und Bertrand, S. Kowalewska und Lie hinzufügend. Dabei kommt Poincaré zu dem Schlusse, daß auch bei den Analytikern die Intuition eine Rolle spielt, wobei nur wiederum daran zu denken ist, daß dieses Wort so oft der Formal-Logik gegenüber alles Alogische bezeichnet. Dabei heißt es u. a.: „Der Logiker zerlegt sozusagen jeden Beweis in eine sehr große Zahl Elementar-Operationen. Wenn man alle diese Operationen, eine nach der anderen, prüft und gefunden hat, daß jede von ihnen fehlerlos ist, wird man dann glauben, den wahren Sinn des Beweises verstanzu haben?" „Offenbar nicht"... „Das gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, würde uns ganz entgangen sein." Zu diesem Etwas gehört aber auch die geistige Arbeit zwischen den Urteilen! Sonst behält Mephisto Recht, wenn er dem Schüler versichert:

> Wer will was Lebendiges erkennen und beschreiben,
> Sucht erst den Geist herauszutreiben,
> Dann hat er die Teile in seiner Hand,
> Fehlt, leider! nur das geistige Band.

---

scherversammlung 1886). Dem mathematischen Verein an der Universität Berlin schrieb Kronecker zu dessen 30. Stiftungsfeste:

> Nonne mathematici veri natique poetae?
> Sunt, sed quod fingunt, hosce probare decet.

1) Dagegen findet sich bei Chasles in seinem „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géometrie" (Bruxelles 1837), deutsch von A. Sohnke (Halle a. S. 1839), gelegentlich (S. 267 der deutschen Ausgabe) die Bemerkung, daß bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft in der Geometrie das Genie nicht mehr unbedingt erforderlich sei, um einen neuen Stein zu dem Gebäude hinzuzufügen. 2) Vgl. Nr. 113b S. 19.

Freilich selbst die volle Einheit des Beweises spiegelt nur einen Teil der genialen Leistung wieder, die für ihn erforderlich war, denn auch mit des Mathematikers Gedanken-Fabrik ist es

„Wie mit einem Weber-Meisterstück,
Wo ein Tritt tausend Fäden regt,
Die Schifflein herüber hinüber schießen,
Die Fäden ungesehen fließen,
Ein Schlag tausend Verbindungen schlägt."

Es würde vergebliche Mühe sein, die Gewebe der Meister völlig entwirren zu wollen, denn die Arbeitsweise des einzelnen hängt schließlich von seiner ganzen Persönlichkeit ab und bis zu einem gewissen Grade auch von seinem Lebensmilieu, durch das natürlich auch die Probleme mit bestimmt werden, welchen sich die Arbeit zuwendet. Für Gauß gibt der Briefwechsel und vor allem sein eigenes „Notizenjournal" gute Auskunft, bei dessen Herausgabe[1]) Herr Klein u. a. sagt: „Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genies: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen".

Von der Eigenart S. Lies hat Herr F. Klein in seinem Göttinger Seminar gelegentlich (1909/10) eine genaue Analyse gegeben[2]), aus der hervorgeht, daß Lies mathematische Produktion durchaus nicht auf formallogischen Bahnen wandelte und daß sie, ursprünglich jedenfalls bei nicht allzureichem Wissen und bei wenig ausgebildeter begrifflicher Schärfe, stark durch zufällige äußere Anregungen (milieu) bestimmt war (Vereinigung der französischen Metrik und der deutschen Liniengeometrie). Lie selbst pflegte zu sagen, er schließe durch die Luft, nicht an der Erde entlang, und betonte in bezug auf seine „Linien-Kugel-Transformation" daß er lange Zeit in den beiden, hier vereinigten Räumen nebeneinander gelebt habe, deren Vereinigung für ihn wie ein überraschender Blitz zustande kam.

Eine entsprechende Bedeutung hat bekanntlich für einen Teil der grundlegenden Arbeiten von Herrn Klein die Verbindung der Cayleyschen projektiven Maßbestimmung mit der nicht-euklidischen Geometrie. Auch

1) Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 57 „Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796 bis 1814, mit Anmerkungen herausgegeben von F. Klein". Abdruck aus der „Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", Berlin 1901.

2) Herr Klein war so liebenswürdig, mir während des Druckes dieser Abhandlung das Protokollbuch des Seminars zur Einsicht zu überlassen. Der Arbeit im Winterhalbjahre 1909/10 lag folgende Disposition zu grunde: 1. Die Arbeitsweise der schaffenden Mathematiker. 2. Zustandekommen der mathematischen Grundanschauungen in hervorragenden Individuen. 3. Entstehung und erkenntnistheoretischer Wert der mathematischen Axiome. 4. Irrtümer der Mathematiker. 5. Folgerungen für den mathematischen Unterricht. 6. Von der Stellung der Mathematik im Systeme der Wissenschaften. Außerdem wurden noch die Themen „Mathematik und Sprache", „Die Bezeichnungen der Mathematik" und „Mathematik und Spiel" in die Erörterung hineingezogen.

hierüber hat sich Herr Klein in seinem Seminare (1909/10) ausgesprochen. Durch Plücker und Clebsch war er als Student in die projektive Geometrie eingeführt worden, während ihn das Lehrbuch von Salmon-Fiedler auf Cayleys Arbeiten hinwies. Ein Kommilitone (Herr Stolz) erzählt ihm (Berlin 1869/70) von der damals allgemein erst wenig bekannten nicht-euklidischen Geometrie, und nun taucht in ihm plötzlich die Idee einer Verbindung der beiden Gebiete auf, geleitet durch die Analogien ihrer Gebilde. Am Schluß eines Seminarvortrages (Februar 1870) über Cayleys Maßbestimmung wirft Klein die Frage auf, ob jene Idee wohl richtig sei, aber Weierstraß, der Leiter des Seminars, erklärt, es seien getrennte Gebiete. Der Zufall führt Klein im nächsten Semester in Göttingen nochmals mit Stolz zusammen, der wieder auf die nicht-euklidische Geometrie zurückkommt, und dabei bildet sich bei Klein trotz Lotzes Polemik gegen alles Nicht-Euklidische die Überzeugung, daß seine Idee doch richtig sei. Er verfolgt sie weiter, und es entstehen nun nach einer vorläufigen Notiz (1871) die Abhandlungen in den Mathematischen Annalen (Bd. 4 und Bd. 6), deren letztere (1872) das Widerstreben der zeitgenössischen Mathematiker gegen die neue Idee deutlich dartut. Dieses Beispiel zeigt uns für die Geschichte des Problems die dreifache Gliederung, die bei Entdeckungen und Erfindungen auf anderen Gebieten längst anerkannt ist: 1. Präformation der Idee in einem bestimmten Individuum, 2. Widerstand der Umwelt, der auch das Neue als solches kennzeichnet, 3. Aufnahme des Neuen und schließlich dessen Anerkennung als etwas Selbstverständlichen.

Es zeigt aber auch, ebenso wie die Entdeckungen Lies, welche Rolle auch auf dem Gebiete mathematischer Erkenntnis das Erfassen der Analogie[1]) spielt, die meist zunächst in unbestimmten Umrissen erscheint, um dann klarer und immer klarer herausgearbeitet zu werden.

Aus alledem geht hervor, welche Bedeutung das Alogische für die schöpferische Arbeit der Mathematiker hat.[2]) Sieht man ganz ab von der Sphäre des Fühlens und Wollens, so umfaßt es neben der produktiven und reproduktiven Phantasie immer die Anschauung, während wir das Logische, wie bereits öfter hervorgehoben, auf die Formal-Logik unter Verwendung der reflexiven und konstitutiven Kategorien eingeschränkt denken.

1) In bezug auf die Bedeutung der Analogie bei der Geistesarbeit von Charles Darwin vgl. in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie (1882) meinen Aufsatz „Den Manen Darwins".

2) Vgl. auch die eben erschienene Abhandlung von P. Stäckel in der Internationalen Monatsschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik 1912, Nr. 10 „Hermann Graßmann, ein Beitrag zur Psychologie des Mathematikers".

5. Der Gegenstand der Mathematik.

Seit die Herbartschen Gedanken über Reihenbildung und Verflechtung von Reihen[1]), ganz abgesehen von H. Graßmanns Arbeiten, durch Riemanns Habilitationschrift im Begriffe der (geordneten) Mannigfaltigkeit für die Mathematik ihre feste Gestaltung gefunden haben, sollte eigentlich kein Zweifel mehr darüber bestehen, daß Logik und Mathematik getrennte Wissenschaften sind. Die Logik hat niemals ein Konstruktionsgebiet zur Verfügung, wie es eine Mannigfaltigkeit für die Mathematik darstellt.

Für die Schule scheint es mir zweckmäßig, bei der Bestimmung des Gegenstandes der Mathematik (in der Prima) davon auszugehen, daß Reihung und Paarung (oder Zuordnung) als sukzessive und simultane Assoziationen beim Sprechen und Hören, Schreiben und Lesen tagtäglich von uns ausgeübt werden, aber auch bei der Wiedergabe und bei der Aufnahme eines Tonstückes usw. Greifen wir das Sprechen eines Satzes als Beispiel heraus, so werden akustische Zeichen (zu Worten verbundene Laute) aneinander gereiht, deren Folge durch den Inhalt des Satzes bestimmt ist. Dabei findet im Sprecher eine Paarung zwischen Vorstellung und Zeichen statt und im Hörer, der gelegentlich natürlich auch mit dem Sprecher identisch sein kann, eine Paarung zwischen Zeichen und Vorstellung. Die psychologische Bedeutung dieser Überlegungen wird um so klarer, je mehr man dabei die Mechanisierung durch Übung und Gewöhnung auszuscheiden vermag.[2]) Das psychische Geflecht, das der einzelne in sich vorfindet, wenn er bewußt zu denken beginnt, läßt sich nach seiner geschichtlichen Entwicklung kaum entwirren, aber Erinnerungen und Hinweise auf das Erlernen des Schreibens oder des Spielens eines bestimmten Instrumentes klären die Sachlage. Wer etwa gelernt hat, mit dem Morseapparat zu arbeiten, übersieht meist noch die einzelnen Stufen seiner Ausbildung, die gegenseitige Zuordnung der Laute des Alphabets und der Morsezeichen usw., während er schließlich ja die Depesche aus dem rhythmischen Geräusche des Apparates heraushört.

Für die äußerliche Paarung von Reihen sind z. B. die Bibelübersetzungen in alle möglichen Sprachen heranzuziehen, oder besser noch die Vorstellungsreihen verschiedener Zuhörer einer Rede.

Für die innere Paarung von Reihen bietet zunächst die Grammatik gute Beispiele. In dem Schema:

amo	amavi	amabam	....
amas	amavisti	amabas	....
amat	amavit	amabat	....
....	....	....	....

wird die Horizontale durch die Folge Präsenz, Perfektum usw. beherrscht, die Vertikale durch die übliche Reihenfolge der Abwandlung.

1) Vgl. dessen Psychologie (1824), namentlich I § 100ff. und II § 109 oder in Volkmanns Lehrbuch II, 5 usw.

2) In Bezug auf die Bildung und erste Verwendung der Zahlen vgl. dazu Nr. 24b S. IX.

Unser Beispiel gibt eine Reihenverbindung, bei welcher jede Vorstellung in zwei Reihen liegt. Man kann sie als Vorstellungsnetz bezeichnen oder als eine unstetige zweifache Vorstellungsmannigfaltigkeit. Die räumliche Darstellung ist dabei nur eine Veranschaulichung, der Zusammenhang liegt in den Gesetzen der Reihungen selbst. Denkt man sich das Schema, welches dem Aktivum entspricht, auch für das Passivum durchgeführt und beide Schemata übereinandergelagert, so entsteht eine allerdings sehr beschränkte dreifache Vorstellungsmannigfaltigkeit. In beliebiger Ausdehnung erhält man eine solche, falls man das oben gegebene Schema für weitere Zeitwörter, etwa laudo, opto usw. durchführt. Sobald die Reihe amo, laudo, opto ... für die Anordnung festgestellt ist, ist die Mannigfaltigkeit wieder bestimmt, und zwar dient auch hier das räumliche Schema nur zur Veranschaulichung.

Man gelangt so zu dem Begriffe einer (unstetigen) n-fachen Vorstellungsmannigfaltigkeit, bei der jede Vorstellung in n Reihen liegt.

Neben Reihung und Paarung bietet uns Sprechen, Lesen usw. noch einen anderen wichtigen Hinweis. Die Worte der Sprache weisen meist auf Klassenvorstellungen zurück, nicht auf Individualvorstellungen. Wie die Sprache mit Hilfe ihrer Worte doch das Individuelle auszudrücken weiß, sollte namentlich im fremdsprachlichen Unterrichte der Oberstufe neben vielem anderen als „Philosophie im Unterrichte" herausgearbeitet werden. Hier ist nur hervorzuheben, daß die Worte der Sprache ein System der primitiven Klassenbildung wiederspiegeln, und deshalb ist die alte Logik, die an Aristoteles anknüpft, auch wesentlich Subsumptionslogik.

Sind so die Begriffe Reihung und Paarung an Beispielen außerhalb der Mathematik klar gelegt und ist ferner darauf hingewiesen, daß auch in der Klassenbildung etwas „Iterierbares" vorliegt, da vermöge Abstraktion und Determination Klassen von Klassen und Schnitte (Durchdringungen) von Klassen (z. B. Gesamtheit der gemeinsamen Elemente zweier Klassen) gebildet werden können[1]), so rückt die Mathematik aus ihrer Weltenferne sofort in greifbare Nähe, wenn man darauf hinweist, daß auch in ihr Reihung, Paarung und Klassenbildung eine ganz hervorragende Rolle spielen.

Die Ordnung einer (endlichen) Menge durch Reihung führt auf den Unterschied der offenen (linearen) und der geschlossenen (zyklischen) Reihung. Das übliche Militärkommando „Zum Kreise rechts und links schwenkt, marsch!" bezweckt den Übergang von einer offenen Reihe zu einer geschlossenen, das Kommando zur Wiederherstellung der alten Front das umgekehrte. Der Schüler findet bei einiger Nachhülfe leicht, daß bei der offenen Reihung aus „A steht vor B" und „B steht vor C" auch folgt „A steht vor C" während dies bei der geschlossenen Reihung nicht der Fall ist.

---

1) Vgl. Nr. 36b, I S. 183. Unter Erinnerung an genus proximum und differentia specifica kann man dies z. B. an Systemen der Botanik und Zoologie gut erläutern.

Beispiele aus der Mathematik für offene und geschlossene Reihungen und für deren Verwebung zu höheren Mannigfaltigkeiten geben die Schüler leicht an, ebenso für Paarungen und Klassenbildungen. So z. B., daß bei der Verbindung einer Geraden (Punktreihe) und eines Strahlenbüschels in der Ebene eine offene Reihung mit einer geschlossenen gepaart wird, oder, daß alle Konstruktionen (mit Lineal und Zirkel) sehr einfache offene Reihungen (Gerade) und sehr einfache geschlossene (Kreis) zum Durchschnitt bringen, d. h. dabei aus zwei Klassen die gemeinsamen Elemente aussondern.

Die übliche Schulauffassung, wonach die Linie durch Bewegung eines Punktes, die Fläche durch Bewegung einer Linie usw. entsteht, gibt die Anschauung von stetigen Reihungen im Gegensatz zu den unstetigen Reihungen, welche beim Sprechen, Lesen usw. verwendet werden, aber auch in den Anzahlen vorliegen und in dem Körper der rationalen Zahlen.

Den Übergang von der unstetigen Reihung zur stetigen zeigt die Theorie der Irrationalzahlen, mag man sie nun nach Cantor oder Dedekind oder Weierstraß geben, während die Verwebung zweier stetigen Reihen zu einer zweifachen Mannigfaltigkeit durch das Gebiet der gemeinen Komplexzahlen dargestellt wird. Bei graphischer Darstellung in der Ebene zeigt das Netz der Gitterpunkte (für die ganzen Zahlen) im Vergleich mit der Ebene selbst anschaulich den Unterschied der stetigen und unstetigen zweifachen Mannigfaltigkeit.

Das Verständnis der Verwebung stetiger Reihen zu höheren Mannigfaltigkeiten macht den Schülern keine Schwierigkeiten, diese liegen für sie allein in der Theorie des Irrationalen, d. h. in der Bildung der ersten stetigen Reihe.

Allerdings spielt meiner Ansicht nach bei dem Übergange von der unstetigen Mannigfaltigkeit zur stetigen auch die Logisierung der Anschauung eine Rolle, und zwar im besonderen die der Bewegung. Ob man den Raum der Sinnenwelt lückenlos auffassen muß oder nicht, falls er als Ganzes und in seinen Teilen ruhend vor uns liegt, mag dahingestellt bleiben, mit oder in der Bewegung ist jedenfalls die Kontinuität gegeben. Innenwelt und Außenwelt des einzelnen werden in gleichem Maße durch die Bewegung beherrscht. Man spricht ja deshalb auch von „Denkbewegung" und sieht in ihr die Kontinuität gegeben, falls man diese anschaulich nicht anerkennen will. Es scheint mir nicht unmöglich, daß Kronecker mit der Unterscheidung der arithmetischen und der geometrischen Stetigkeit doch Recht behält, die er bei dem ersten Auftreten der tangentenlosen Kurven betonte, d. h. es will mir scheinen, als wenn die zusammenhängende perfekte Menge doch eine andere Art des Kontinuums darstellte, als sie in der Bewegung erzeugt wird. Die Kontinuität in der Bewegung ist nicht bloß durch Lückenlosigkeit bestimmt, sondern auch durch einen Zusammenhang, der logisch nicht weiter festgelegt werden kann und gewissermaßen in der Anschauung erlebt werden muß. So sagt auch

Herr Simon[1]): „Auch nach der Elimination des Größenbegriffs bleibt die lückenlose Kontinuität der Raumstrecke noch von der der perfekten stetigen Menge verschieden."

Es ist gewissermaßen die Tragik des Denkens, welches bei seinem diskursiven Charakter nur im Diskreten und mit Diskretem arbeiten kann, die in der Bewegung gegebene Anschauungskontinuität erreichen zu wollen. Es erreicht sie, so weit es für den Aufbau der mathematischen Schlüsse nötig ist, aber nicht in einer Weise, die unseren Geist restlos befriedigt.

Hat man den Begriff der Mannigfaltigkeit geklärt, so ist darauf hinzuweisen, daß die Elemente einer Mannigfaltigkeit als verschieden angesehen werden, insofern man von ihrer Ordnung spricht, d. h. sie sind verschieden als Stellen eines Ordnungssystems. Will man dann messen, so muß man die Elemente oder doch gewisse Gruppen von Elementen (z. B. Strecken) als gegenseitig ersetzbar ansehen.

Die geschichtliche Entwicklung der Mathematik hat zuerst das Maß bevorzugt und die Ordnung weniger beachtet. Das zeigt u. a. die früher übliche Definition der Mathematik, wonach sie „Lehre von den Größen" oder besser „Lehre von den Größen und den Gesetzen ihrer Verbindung" sein sollte. Bekanntlich ist diese Definition mit Rücksicht auf Mengenlehre, Logikkalkül, Topologie, Kombinatorik, Geometrie der Lage usw. aufgegeben worden. Wollte man sie aufrecht erhalten, so müßte das Wort Größe (quantum) zunächst ohne Rücksicht auf Größenvergleichung (quantitas) definiert werden, etwa als Vorstellung, gebildet aus Teilvorstellungen von gegenseitiger Ersetzbarkeit, wobei aber schließlich auch an die Unendlich-Kleinen Veroneses gedacht werden müßte, in denen ja nur Schöpfungen von Leibniz (dx, d^2x, usw.) wieder auferstehen. Trotzdem würde diese Definition von den beiden Prinzipien der Mathematik, „Ordnung" und „Maß" das erste wohl nicht voll zum Ausdrucke bringen.

Von den Definitionen der Mathematik, welche neuerdings Herr Simon[2]) und Herr Voß[3]) zusammengestellt haben, lassen die meisten den Unterschied zwischen Logik und Mathematik nicht oder nicht scharf hervortreten. Dies gilt auch von der oft angeführten Erklärung Russells.[4]) Nur die Definition von Papperitz[5]) scheint uns die Sache zu treffen, sie ist auch in Auerbach-Rothes Taschenbuch (1911) aufgenommen worden und lautet: „Den Gegenstand der reinen Mathematik bilden die Beziehungen, welche zwischen irgend welchen gedachten Elementen begrifflich herstellbar sind, indem wir sie als in einer geordneten Mannigfaltigkeit enthalten ansehen. Das Ordnungsgesetz dieser Mannigfaltigkeit muß unserer Wahl unterliegen."

---

1) Vgl. Nr. 137 f., S. 6.
2) Vgl. Nr. 137 f S. 64 f. 3) Vgl. Nr. 161 a S. 24–25.
4) The principles of mathematiques, Cambridge 1903.
5) Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. I, 1892, S. 36.

Im Hinblick auf diese Erklärung sagt Herr Voß[1]): „Nach meiner Ansicht wird jeder Mathematiker, der in seiner Wissenschaft einen mit dem Formalismus der Logik nicht schlechthin zusammenfallenden Gegenstand finden will, geneigt sein, noch einen weiteren Unterschied zu betonen. Die Objekte der Mathematik sind Zeichen, welche der ordnenden Tätigkeit des Verstandes ihre durch rein logische Definitionen ausgedrückten Verknüpfungsgesetze verdanken. Solche Zeichen nennen wir aber allgemein Zahlen. Und daher sehe ich das unterscheidende Merkmal der Mathematik darin, daß sie die Wissenschaft von der Zahl ist." So gehört auch der Logikkalkül in die Mathematik hinein, und diese ist eben „die Wissenschaft von den Zahlen", wobei „Zahlen" alle „von uns geschaffene Zeichen für ordnende Tätigkeiten unseres Verstandes sind, die sich nach bestimmten allgemeinen Regeln miteinander verknüpfen lassen". Die „Darlegung, wie alle anderen Vorstellungen, die dem Größenbegriff anhaften, dem Zahlbegriff untergeordnet werden können", führt innerhalb der reinen Mathematik zu den Anwendungsgebieten, zunächst zur Geometrie.

Herr Simon[2]) hat im Anschluß an J. G. Graßmann, den Vater von Hermann und Robert Graßmann, die Mathematik definiert als die Wissenschaft der freien (ungehemmten) Verknüpfung und Trennung; dabei sind ihm Synthesis und Analysis Gegenseitigkeitsbegriffe. Man kann dem völlig zustimmen, wird aber dabei fordern müssen, daß die Art der Synthesis und Analysis näher bestimmt wird. Es handelt sich in der Mathematik nicht um kausale und teleologische Synthesen, sondern eben um Reihungen.

Darum ist auch Itelsons Erklärung der Mathematik als der „Wissenschaft von den geordneten Gegenständen" zu unbestimmt.[3])

Im Hinblick auf Hilberts axiomatische Arbeiten erklärt Herr Rothe[4]): „Gegenstand der mathematischen Forschung bilden irgend welche denkbaren zu einer Menge (Klasse, System) zusammenfaßbaren und durch Zeichen zu benennende Dinge, von unserem Verstande willkürlich festzusetzende und durch Zeichen zu benennende Beziehungen zwischen den Dingen der Menge, und solche Aussagen (Folgerungen, Tatsachen, Sätze), die sich aus jenen mittels einer endlichen Anzahl denknotwendiger Schlüsse herleiten lassen."

Unseres Erachtens kann man die Mathematik, jedenfalls für die Schule, in Anlehnung an die Definition von Herrn Papperitz als die „Lehre von den Mannigfaltigkeiten" bezeichnen, falls man gegenüber dem Begriffe Menge (Klasse, System) das Geordnete in den Begriff „Mannigfaltigkeit" mit hineinlegt. Will man dies nicht tun, so muß man die Mathematik als die „Lehre von den geordneten Mannigfaltigkeiten" einführen.

---

1) Vgl. Nr. 161a S. 25ff. 2) Vgl. Nr. 137 f S. 18.
3) Vgl. Revue de métaphysique et de morale, 1904. 4) Vgl. Nr. 146, S. 65.

Bezeichnet man als Anschauungsform des Bewußtseins das vielgestaltige Außer-Einander, welches sich, abgesehen von dem psychischen Inhalt des individuellen Ichs, erfahrungsgemäß zu den festen Formen des Nach-Einander (Zeit) und Neben-Einander (Raum) zusammenschließt, so kann man die Mathematik auch die Anwendung der Logik auf die Anschauungsformen nennen.

Der jetzt so beliebte Vergleich der Mathematik mit dem Schachspiele muß bei jeder Definition der Mathematik als unberechtigt erscheinen.

Die Formallogik gehört nicht in die Mathematik, ebensowenig diese in jene. Auch der Logikkalkül ist nicht ein Teil der Mathematik. Hätte er seine Sprache nicht in Anlehnung an die Sprache der Arithmetik gebildet, so würde man kaum auf den Gedanken gekommen sein, ihn der Mathematik zuzurechnen. Das wesentliche liegt niemals im Zeichen, sondern stets in dessen Bedeutung.

Daß man immer ein Konstruktionsgebiet zur Verfügung hat, wie es eine (geordnete) Mannigfaltigkeit darstellt, ist in der Mathematik das wesentliche.

Keine andere Wissenschaft bietet etwas ähnliches dar, und wo das Gegenteil der Fall zu sein scheint, da weist dieser Schein stets auf zugrundeliegende Mathematik hin.

6. Die Begriffsbildung der Mathematik und ihr Charakter.

Mit den Herren Höfler, Klein, Schoenflies, Voß, Wellstein u. a. vertreten wir die Ansicht, daß die Grundbegriffe der Mathematik, wie man zu sagen pflegt, durch Abstraktion (und Determination) und Idealisierung aus dem gewöhnlichen Vorstellungsmateriale (im Sinne des Naiven Realismus) entstehen. Wir wollen, da der Ausdruck Idealisierung zum mindesten Mißdeutungen ausgesetzt ist, dies alles unter dem bereits gebrauchten Namen Logisierung zusammenfassen und darunter den Prozeß verstehen, durch den eine Vorstellung für den formal-logischen Gebrauch verwendbar wird, falls sie es noch nicht ist. Dazu gehört Eindeutigkeit und Einheit, und zwar kann Einheit die Einheit eines Elementes oder die Einheit eines Vielen (in qualitativer und in quantitativer Hinsicht) bedeuten, wobei in letzterem Falle natürlich die innere Widerspruchslosigkeit vorausgesetzt wird.

Solange der Punkt für uns ein kleiner Körper ist, bei dem keine Dimension der anderen gegenüber relativ entwickelt ist, liefert uns die Bewegung des Punktes einen stabförmigen Körper, dessen Bewegung wiederum einen plattenförmigen Körper usw. Bei Aussagen über diese Gebilde befinden wir uns in der „natürlichen Geometrie", wie sie von Herrn Pasch (1882) entwickelt worden ist.[1]) Herr Wellstein[2]) hat ihr eine ausführliche Darstellung gewidmet, auf die auch Herr Höfler[3]) in seiner

1) Vgl. Nr. 108 b. 2) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage, II, S. 22ff.
3) Vgl. Nr. 69 b S. 444.

Didaktik lobend hinweist, vorbehaltlich einer Kritik der dabei von Herrn Wellstein geäußerten erkenntnistheoretischen Ansichten.

Jedes Modell oder jede Zeichnung ist selbstverständlich die Darstellung eines Gebildes der natürlichen Geometrie, insofern die Punkte hier Ausdehnung haben, die Linien hier Stangen oder Fäden sind usw. Dasselbe gilt von den magnetischen Kraftlinien, die der Physiker durch Eisenfeilspäne darstellt, den Hyperbeln und Lemniskaten seiner optischen Bilder usw. Es handelt sich dabei zum Teil etwa um Funktionsstreifen im Sinne Kleins[1]), d. h. eigentlich um Körper, deren Schnitte solche Streifen sind, wobei aber auch das Wort Schnitt wieder nur approximativ ist.

Worin besteht nun die Logisierung dieser Gebilde? Herr Höfler[2]) hat sie ein „Unterfahren der Wirklichkeit" genannt und sagt dazu gelegentlich: „Wie aber der Übergang von der experimentellen zur theoretischen Physik nichts ist als ein Unterfahren der uns gegebenen physischen Gegenstände mit selbstgeschaffenen Begriffen und Annahmen, so löst sich auch die Antinomie zwischen der anschaulichen und der unanschaulichen Geometrie einfach so: wir unterfahren unsere räumlichen Anschauungen und Erfahrungen durch die Begriffe Punkt, Abstand, Richtung usw., aus denen sich die geometrischen Definitionen zusammensetzen."

Bei Schoenflies[3]) heißt es: Die Axiome füllen „die aus der Anschauung stammenden geometrischen Grundbegriffe mit einem eindeutigen, zum Teil völlig neuen Inhalt", so daß sie nun „logisch-vollkommen" werden, wodurch sie „erst zu mathematischen Objekten" erhoben werden. Sehen wir von dem Ausdrucke im einzelnen ab, so haben wir bei Schoenflies etwa die Kette Anschauung, Grundbegriff, umgeformter Grundbegriff, so daß man schließen darf, daß die Logisierung mehrere Stufen umfaßt.

Tatsächlich arbeitet auch die natürliche Geometrie mit Begriffen, an die sie logische Operationen knüpft. Daß zwei gerade Stangen nur eine Durchdringungsstelle haben, daß ein kreisförmiger Draht und ein gerader Draht nur deren zwei zeigen können usw., wird doch weiter benutzt. Freilich lauten die Sätze in dieser natürlichen Geometrie etwa so: „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, wenn sie nicht zu nahe beieinanderliegen", d. h. die Bestimmung wird hier um so unsicherer, je mehr die Punkte aneinander rücken. Aber auch außerhalb der Wissenschaft wird logisch gearbeitet, und oft, ohne daß dabei irgendwelche Begriffsbestimmungen im Sinne der Logik vollzogen werden. Ein moderner Großkaufmann, der sein Geschäft versteht, denkt äußerst logisch und kommt bei der Überlegung in jedem bestimmten Falle auch zu einem eindeutigen Ergebnisse, das sein Handeln bestimmt, ohne etwas von dem Probleme der Logisierung zu wissen.

1) Vgl. auch Nr. 37 Bd. 3 Heft 1 den Artikel von v. Mangoldt.

2) Vgl. Grenzfragen der Mathematik und Philosophie, Nr. 69e S. 22.

3) Vgl. „Über die Stellung der Definition in der Axiomatik", Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1911, S. 22ff.

Diese ist tatsächlich nicht ein bestimmter Akt, sondern ein Prozeß von fortschreitender Vollkommenheit, der aber wohl nur innerhalb der Mathematik sein Ziel wirklich erreicht. Es ist eine alte Bemerkung, daß für Cuvier das Wort Hund eine ganz andere Bedeutung hatte, als für seinen Bedienten, daß es also für beide Zeichen für verschiedene Begriffe war.

Die psychologische Bildung der Begriffe aus den simultanen und sukzessiven Assoziationen unter Mitwirkung der Apperzeption findet man bei Wundt trefflich geschildert. Immer ist es eine herrschende Vorstellung, die für den Begriff die Bezeichnung liefert. Die meisten Worte unserer Sprache zeigen uns nicht mehr die innere Beziehung zwischen Zeichen und Begriff. So wird das Wort Hund für uns mit dem oder besser einem Begriffe Hund äußerlich gepaart, während es, wenn die Etymologen hier im Rechte sind, für den Jäger in germanischer Urzeit noch die Bedeutung des Fängers hatte.

Die Definition eines Begriffes bezweckt meist, wie schon der Name sagt, nur seine deutliche Abgrenzung gegen andere Begriffe, so daß er verwendbar wird. Dies ist die erste Stufe der Logisierung; von der Summe(!) der wesentlichen Merkmale, wie sie immer noch gelegentlich von Logikern gefordert wird, ist dabei natürlich keine Rede. Herr Poincaré sagt gelegentlich: einem Kinde definiert man nicht die Katze, sondern man zeigt sie ihm. Das ist aber überall der Anfang der begrifflichen Bestimmung, auch für den Erwachsenen, und oft auch das Ende.

Stets richtet sich die Definition nach dem Zwecke, den man vorhat. So gilt es in der Zoologie für völlig ausreichend und einwandfrei, den Menschen nach seiner leiblichen Seite durch die Merkmale „aufrechter Gang" und „Besitz von 4 Schneidezähnen in jedem Kiefer" zu bestimmen, und niemand wird behaupten, daß damit wesentliche oder besser konstitutive Merkmale getroffen sind, im Gegensatz zu konsekutiven.

Soll diese Definition etwas besagen, so muß bekannt sein, was „aufrechter Gang" usw. bedeuten. Und bei den Begriffsbestimmungen der Merkmale kommt man schließlich doch immer wieder auf die Anschauung zurück.

Dabei erlaubt das Zeichen stets vom Begriffe zur Anschauung überzugehen und umgekehrt[1]), und infolgedessen verbindet man mit dem Begriffe stets durch Vermittlung des Zeichens Gruppen von Vorstellungen, welche von der Definition nicht umfaßt werden. Dieses ist im gemeinen

1) Darauf beruht m. E. auch die Verwendung der Figuren in der Geometrie und Mechanik trotz aller Logik. Vgl. dazu hier S. 40.

Damit stimmt überein, wenn Herr F. Klein gelegentlich (Vgl. Nr. 78 I S. 4) sagt: „Demgegenüber behaupte ich, daß man überhaupt nicht die Fähigkeit habe, sich auch einfachere Beispiele der Funktionentheorie und Infinitesimalrechnung genau und zugleich anschaulich zu denken, daß die Raumanschauung sogar schon versagt, wenn es sich um die genauen Einzelheiten derjenigen Kurven handelt, welche durch ganze Funktionen dargestellt werden." Man geht eben durch Vermittlung des Zeichens, das natürlich auch ein Wort sein kann, nach Bedürfnis blitzschnell vom Begriffe zur Figur über, und umgekehrt. bzw. paart beides durch das Zeichen.

Leben und zum Teil auch in der Wissenschaft durchaus erforderlich und schadet auch durchaus nicht, solange die, welche mit dem Begriffe arbeiten, gewohnt sind, im allgemeinen dieselben Gruppen von Vorstellungen mit ihm zu verbinden. Wo dies nicht der Fall ist, treten immer Unstimmigkeiten auf, wie z. B. bei den äußerlich getreuen Berichten über Naturvölker, wo die psychische Verschiedenheit des Beobachters und der Beobachteten die Aussagen fälscht.

Das Ziel der Logisierung sehe ich nun in dem schlichten Gedanken, daß die Definition nicht mehr dazu zwingt, durch Vermittlung des Zeichens behufs Verständigung andere, von ihr nicht umfaßte Vorstellungsgruppen zu wecken, und daß man deren Ausschluß auch logisch nachweisen kann. Dadurch erhält man erst logische „Invarianten".

Dieses Ziel ist nur in der Mathematik erreichbar und vielleicht in gewissen Gebieten der Sozialwissenschaft (Rechtslehre u. a.), und darauf beruht der Unterschied der deduktiven und der induktiv-deduktiven Wissenschaften. Bei ersteren setzt an die Begriffe, welche durch Logisierung der anschaulichen Vorstellungen entstanden sind, eine reiche Begriffsbildung an, welche nur das bereits logisierte Material verwendet, bei letzteren hat man immer und immer wieder auf neue anschauliche Vorstellungen zurückzugreifen.

In psychologischer Hinsicht hat man den Übergang vom Punkte als kleinem Körper zum Punkte im strengen Sinne als einen Grenzprozeß geschildert, meines Erachtens mit Recht, man muß nur hervorheben, daß hier die asymptotische Funktion[1]) des Bewußtseins ins Spiel tritt, welche unter Verwendung eines Zeichens uns als vollzogen annehmen läßt, was tatsächlich nicht vollziehbar ist. Für den Begriff Punkt gibt schon Euklids Definition (οὐ μερος οὐθεν) das Ziel richtig an, mag man es auch heute deutlicher bezeichnen, etwa mit Höfler als „ausdehnungsloser Ort", natürlich im Ganzen eines Ordnungssystems von Örtern (Stellen).

Herr Wellstein u. a. haben diesen Grenzprozess ausführlich behandelt, wobei sie zum Teil dazu kommen, jene Idealisierung zu verwerfen[2]), wie ich glaube, mit Unrecht. Deshalb möchte ich darauf hinweisen, daß auch in dieser Hinsicht wieder die Stumpfheit unserer Sinne in Erinnerung zu bringen ist, welche den Prozeß erleichtert, man denke z. B. etwa an einen in den Lüften für das Auge langsam entschwindenden Ballon. Wenn Herr Wellstein in bezug auf die Verwendung des Lichtstrahles für die Bildung des Begriffes der Geraden bemerkt, daß der Lichtstrahl als Schwingungsgebilde dazu nicht geeignet sei, so ist doch wohl darauf hinzuweisen, daß von diesen Schwingungen nur der Gelehrte etwas weiß und daß gerade diese Schwingungen sicher zu dem gehören, was über die unmittelbare Beobachtung des unbefangenen Zuschauers hinaus in

1) Vgl. dazu Nr. 167c. Das Wort Funktion ist hier natürlich in psychologischer oder erkenntnistheoretischer Bedeutung zu nehmen, nicht im Sinne der Mathematiker.

2) Vgl. Nr. 165, II, S. 9 u. f., vgl. dazu auch den Nachtrag von Herrn Weber (erste Auflage).

die Erscheinung hinein gedacht wird und an dessen Stelle später vielleicht einmal etwas anderes hineingelegt wird[1]).

Bei der vollkommenen Logisierung, durch welche die Begriffe der Mathematik entstehen, hat sich nun eine Eigentümlichkeit gezeigt, die man hätte a priori bestimmen können, sie entspricht dem kulturellen Gange vom Dinge zu den Beziehungen.

Jeder, der einmal den Versuch gemacht hat, die Grundbegriffe eines wissenschaftlichen Gebietes zu erklären, hat dabei wohl erfahren, daß er schließlich in Zirkeldefinitionen gerät, falls er einen einzigen Grundbegriff definieren will. Für die Grundbegriffe der Rechtslehre gilt immer noch der Satz „omnis definitio in jure civili periculosa est"[2]), und auf den Gebieten der Volkswirtschaftslehre usw. steht es ebenso. Das ist natürlich, weil solche Grundbegriffe eine Art von Geflecht bilden und infolgedessen nur durch gegenseitige Beziehungen definiert werden können. Für das System der logischen Grundfunktionen haben Herr Cohen und Herr Natorp darauf hingewiesen. Ersterer scheint zwar wieder mit seinem Prinzipe des Ursprungs zu einem Grundgedanken zurückkehren zu wollen, während Natorp das letzte Prinzip, welches über der Identität und Verneinung, Einheit und Mehrheit usw. steht, so kennzeichnet:[3]) „Aber es ist eben die Einheit von diesem allen, die Einheit durch Korrelation. Diese ist in der Tat, als das Prinzip der Prinzipien in bestimmter Überordnung gegen die ganze Reihe der einzelnen, zueinander korrelativen Grundmomente des Logischen zu denken." So sagt auch Herr Simon[4]) in bezug auf die Frage: Was ist Mathematik?: „Die Frage gehört in die große Gruppe derer, die leichter gestellt als beantwortet sind; sie bilden wirklich eine Gruppe im gruppentheoretischen Sinne insofern, als gewöhnlich eine Antwort auf eine von ihnen immer wieder zu einer Frage der Gruppe führt, und schließlich die Gruppe in sich selbst transformiert wird."

Daß die Definitionen von Punkt, Gerade, Ebene, die Euklid vorausschickt, und nach ihm viele andere, keine Definitionen sind, mit denen sich arbeiten läßt, hat man schon geraume Zeit bemerkt. Sie sind lediglich Hinweise auf die erforderliche Logisierung des Anschaulichen.

Für die Geometrie gibt u. a. Hilberts Axiomatik ein Beziehungssystem für das Geflecht der Grundbegriffe, für die Arithmetik ist die Axiomatik noch nicht vollkommen erledigt, für die Mechanik (und Physik) beginnt man erst sich mit ihr zu beschäftigen.

Dabei ist es vielleicht gut, sich daran zu erinnern, daß in der geschichtlichen Entwicklung das Wort „Axiom" verschiedene Bedeutungen angenommen hat.[5]) Es bedeuten Axiome

1. unmittelbar Anschaulich-Gewisses (Euklid u. a.) im Gegensatz zu Definitionen und Postulaten (Existentialsätzen),

1) Dieses Hineinlegen ist sehr gut geschildert in Nr. 19 S. 125 u. f.
2) Vgl. Nr. 36b, I, S. 171. 3) Vgl. Nr. 105e S. 26.
4) Vgl. Nr. 137 f S. 3. 5) Vgl. auch Nr. 36 c.

2. empirisch Gegebenes (v. Helmholtz u. a.),

3. notwendige Voraussetzungen, ohne die man nicht arbeiten kann, unter Verzicht auf ihre erkenntnistheoretische Wertung,

4. willkürliche Vereinbarungen der Gelehrten (Poincaré u. a.).

Da die Grundbegriffe der Mathematik durch Logisierung gewöhnlicher Vorstellungen und deren Beziehungen entstehen und da dieser Logisierung ein gewisser Spielraum gegeben ist (vgl. z. B. die verschiedenen Arten der Geometrie), so ist ein Geflecht solcher Grundbegriffe in gewisser Einschränkung in jeder dieser vier Bedeutungen axiomatisch.

Das System der Beziehungen für das Geflecht der Grundbegriffe, welches in einer solchen Axiomatik vorliegt, sollte drei Bedingungen genügen. Die einzelnen Axiome sollten

1. ohne Widerspruch zusammen bestehen,[1])

2. voneinander unabhängig sein,[1])

3. ein vollständiges Ganzes bilden, d. h. für den Aufbau eines Gebietes hinreichen.[1])

Die Urteile über die bisher erschienenen axiomatischen Arbeiten lauten noch recht verschieden. So führte Herr Veronese auf dem Kongresse in Mailand (1911) aus[2]), daß die Unabhängigkeit der Axiome bisher noch für kein System nachgewiesen sei, und entsprechende Urteile sind auch in bezug auf die Frage der Widerspruchslosigkeit gefällt. Bei seiner Untersuchung der Grundlagen der Geometrie geht Herr Hilbert bekanntlich auf die Arithmetik zurück, so daß die Vollkommenheit der Axiomatik für die Geometrie hier schließlich von der Vollkommenheit der Axiomatik für die Arithmetik abhängt. Bei dem Versuche, die Axiomatik für die Arithmetik einwandsfrei zu gestalten, sah sich Herr Hilbert veranlaßt, eine gemeinsame Grundlegung von Logik und Arithmetik zu fordern, wie bereits früher erwähnt wurde, insofern ihm die logische Begründung der Arithmetik allein unmöglich erschien, wie auch seine kritischen Einwände gegen Kronecker, Christoffel u. a., G. Frege, R. Dedekind und G. Cantor bestätigen. Diese gemeinsame Grundlegung der Logik und Arithmetik ist indessen bisher weder von Hilbert noch von anderen gegeben worden und sie wird sich ohne Verwendung logisierter Anschauung vermutlich ebensowenig geben lassen, wie die alleinige Grundlegung der Arithmetik, deren Kern ja schließlich immer die Begründung der Lehre von den ganzen Zahlen ist. Für diese selbst ist bisher immer bewußt oder unbewußt in irgend einer Form auf die Anschauung konkreter Objekte zurückgegriffen worden, die außerdem erforderlichen Logisierungen sollen später etwas ausführlicher betrachtet werden.[3])

Ist das System der Beziehungen für die Grundlage einer bestimmten

---

1) Vgl. Nr. 67 S. 25 u. f. und außerdem noch besonders Nr. 125a.

2) Vgl. das Referat von Herrn Lietzmann in den Berichten und Mitteilungen der Deutschen IMUK, Nr. VII, S. 102.

3) Vgl. auch K. Boehm „Axiome der Arithmetik" in den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie 1911.

Wissenschaft festgestellt, so unterliegt jedes Urteil dieser Wissenschaft der formal-logischen Prüfung im Hinblick auf jenes System. Wie das Urteil bei der Untersuchung und Darstellung entstanden ist, bleibt für diese Prüfung völlig gleichgültig.

Diese „indirekte" Definition durch Beziehungen steht der „direkten" Definition der Dinge gegenüber, sie hat in den Bestimmungsgleichungen der Algebra und in den Konstruktionsaufgaben der Geometrie eine Art von Analogon, ebenso im gemeinen Leben in gewissen Klassen von Rätseln.

Daß ein bestimmtes Beziehungssystem, bei dem das Individuelle (dem Dinge entsprechende) der einzelnen Begriffe ganz verloren zu gehen scheint, auch auf ein anderes Geflecht von Grundbegriffen passen kann, als das ist, für welche es aufgestellt wurde, ist a priori begreiflich. Daraus folgt aber nicht, daß für die Bildung des Systems alles Individuelle auch unnütz gewesen ist, wie man wohl behauptet hat. Wir verdanken dazu Herrn Poincaré ein nettes Gleichnis[1]: „Allgemein bekannt sind die feinen Gefüge von Kieselnadeln, die das Skelett gewisser Schwämme bilden. Wenn die organische Materie vergangen ist, bleibt nichts wie ein zerbrechliches und zierliches Spitzengewebe. Es ist in Wirklichkeit nichts als Kieselsäure; aber was interessant ist, das ist die Form, die diese Kieselsäure angenommen hat, und wir können sie nicht verstehen, wenn wir nicht den lebenden Schwamm kennen, der ja gerade d i e s e Form ausgeprägt hat. So ist es auch bei den alten intuitiven Begriffen unserer Väter, die, selbst wenn wir sie aufgegeben haben,[2]) ihre Form noch dem logischen Gerüst aufdrücken, das wir an ihre Stelle gesetzt haben."

Das ist sicher richtig, nur werden wir die „alten intuitiven Begriffe unserer Väter" niemals entbehren können, denn empirische Anschauung und logisierte Anschauung werden, durch das Z e i c h e n verbunden, stets zusammenwirken müssen, wenn die Wissenschaft nicht zum leeren Formalismus werden soll. Trotz des Prinzipes der Dualität wird der Satz von Pascal nicht zum Satze von Brianchon, und die steten von der Anschauung des Individuellen getragenen Bemühungen, aus denen auch die Axiomatik erwachsen ist, werden sich immer von neuem bewähren.

Jene Übertragbarkeit von Beziehungssystemen, für welche Herr Wellstein auch für die Schule brauchbare Beispiele gibt, ist im Grunde durchaus nichts neues. Herr Wellstein erinnert[3]) selbst an die Bilder der Mechanik und Statistik, an Christoffels Nachweis der Übertragbarkeit der Differentialgleichungen der Wärmeleitungstheorie auf die Theorie des Welthandels usw. Trotz dieser Übertragbarkeit wird aber die Wärmeleitung nicht zum Welthandel, in beiden Fällen kehrt man schließlich doch zum Individuellen zurück.

Als Schulbeispiel für diese Übertragbarkeit benutze ich selbst seit Jahren die Gleichung $f''(t) = -k^2 \cdot f(t)$ und deren Integral

$$f(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt).$$

1) Vgl. Nr. 113b S. 21. 2) Vgl. hier die Bemerkung auf S. 59 Anm. 1.
3) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage), II, S. 114.

Sie wird ursprünglich abgeleitet für die Schwingungstheorie durch Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung auf zwei einander senkrecht schneidende Achsen durch das Zentrum. Später wird gezeigt, daß das Problem der Knickung der Form nach auf dieselbe Gleichung führt.

Ist die Mathematik nun eine Wissenschaft a priori?

Mit a priori sollte ursprünglich der Eigenbesitz des Geistes bezeichnet werden gegenüber allem von außen an ihn Herantretenden, sei es nun durch Erfahrung oder durch Eingebung bestimmt. Auf dem Standpunkt der Beziehungen (vgl. S. 44 u. f.) ist dieser Unterschied fließend.

Läßt man dem Worte a priori die Bedeutung erfahrungsfrei, so gilt, wie Herr Höfler[1]) gelegentlich sagt: „Es gibt apriorische Urteile, wiewohl es keine apriorische Vorstellungen gibt". Es gibt in diesem Sinne keine andere Apriorität, falls Notwendigkeit und damit Allgemeingültigkeit ihre Kennzeichen sein sollen, als die Apriorität der formalen Logik, und da liegt eben alles Apriorische in den Urteilen, nicht in den Begriffen, die niemals völlig erfahrungsfrei sind. Darum mußte ja auch die Axiomatik die Dingbegriffe durch Beziehungsbegriffe ersetzen! Unter Anerkennung eines axiomatischen Systems als Ausgangspunktes ist die Mathematik sicher eine Wissenschaft a priori.[2])

Will man mit a priori die Bedingungen der wissenschaftlichen Erfahrung bezeichnen, so gehört die Mathematik auch sicher zu diesen Bedingungen, denn sie ist ja, abgesehen von ihrer Selbständigkeit, ein notwendiges Mittel der Naturerkenntnis und Naturbeherrschung. Stadler hat sie gelegentlich als formale Naturbeschreibung bezeichnet.[3])

In Beziehung auf Zeit und Raum sagt Herr Natorp dazu gelegentlich[4]): „Sie sind ... nicht selbst existent, aber Bedingung des Existierens; und wieder deshalb nicht Erfahrungen, aber gesetzgebend für Erfahrung, für alles, was im Erfahrungssinne existent heißen kann. Ihre Herleitung aus fertigen Erfahrungen (im Sinne gegebener Existenzen) wäre derselbe Zirkel, wie wenn man die Gesetze der Zahl von Hausnummern ablernen wollte. Das ist in der Tat in gewissem Maße möglich, aber nur, nachdem man vorher die Häuser numeriert hat. So kann man gewiß Zeit und Raum von den zeit-räumlichen Gegenständen abstrahieren, aber nur, nachdem diese zuvor als zeit-räumliche im Denkprozeß der Erfahrung konstituiert worden sind."

Demgegenüber beschränken wir uns bescheiden auf das Studium der Hausnummern, oder, wie man es wohl auch mit Klopstock ausgedrückt hat, auf die Versuche, den großen Gedanken der Schöpfung noch einmal zu denken, wobei man sich aber zunächst in die Schöpfung mit Hingebung versenken muß.

1) Vgl. Nr. 69b S. 457.

2) Vgl. dazu auch das Referat von Lietzmann in den Berichten und Mitteilungen der Deutschen IMUK, Nr. VII, S. 100 u. f. „Die Strenge im mathematischen Unterricht der höheren Schulen".

3) Vgl. bei Simon Nr. 137f S. 4. 4) Vgl. Nr. 105e S. 280.

Daß die Gegenstände eines Gebiets, auf welches Mathematik angewandt werden soll, den axiomatischen Grundlagen der Mathematik entsprechen müssen, soweit diese zu Folgerungen benutzt werden sollen, ist selbstverständlich. Bezeichnet man die Polygon-Bildung der Vektoren als geometrische Addition, so ist zu zeigen, daß auch für Vektoren gilt

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

und

$$a+b=b+a.$$

Auf derartige Forderungen hat wohl zunächst von Helmholtz ausführlicher hingewiesen, jetzt gibt auch Herr Weber in der Weber-Wellsteinschen Encyklopädie die erforderlichen Anweisungen. Herr Hölder legt die Beziehungen der Zahlen zur Größenlehre (unter Beschränkung auf das positive Reelle) folgendermaßen axiomatisch fest[1]):

1. Je zwei Größen a, b stehen in einer der Beziehungen $a \gtreqless b$.
2. Zu jeder Größe gibt es eine kleinere.
3. Die Summe $a+b$ ist bei gegebener Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt.
4. $a+b$ ist sowohl $> a$ als $> b$.
5. Ist $a<b$, so gibt es Größen x und y, welche der Bedingung $a+x=b$ und $y+a=b$ genügen.
6. Es ist $a+(b+c)=(a+b)+c$.
7. Wenn alle Größen in zwei Klassen so eingeteilt sind, daß jede Größe einer und nur eine Klasse zugewiesen ist, daß jede Klasse Größen enthält, und jede Größe der ersten Klasse kleiner ist als jede der zweiten, so existiert eine Größe ξ derart, daß jedes $\xi' < \xi$ zur ersten, und jedes $\xi'' > \xi$ zur zweiten Klasse gehört.[2])

Aus diesen Axiomen läßt sich herleiten:

1. Das Axiom des Eudoxus (oft fälschlich nach Archimedes benannt).
2. $a+b=b+a$.
3. Zu je zwei Größen, die in einer bestimmten Ordnung gegeben werden, gehört eine bestimmte Zahl als Maß ihres Verhältnisses.
4. Es gibt eine Größe ξ, welche in bezug auf eine beliebig gegebene Einheit eine beliebige gegebene Zahl zur Maßzahl hat.

Sieht man die Mathematik als eine Bedingung der wissenschaftlich gestalteten Erfahrung an, so tritt schließlich noch ein besonderes Problem von großer Wichtigkeit auf. Wir erwähnten schon, daß für Kant die reine Mathematik „in ihrer ganzen Präzision auf Gegenstände der Erfahrung" anwendbar ist (Vgl. S. 37). Dies kann für uns nur bedeuten, daß die Sicherheit der Mathematik auch im empirischen Gebrauche erhalten bleibt, nicht aber, daß ihr reiner und ihr empirischer Gebrauch völlig übereinstimmen.

1) Vgl. „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß" in den Berichten der Kgl. Sächs. Akademie der Wissenschaften, 1901.

2) Vgl. den Dedekindschen Schnitt.

Daß die Invarianten, welche wir in das Geschehen hineindenken, dieses nur angenähert darstellen und darum wieder und wieder verbessert werden müssen, ist bereits betont worden. Man denke etwa an die Umgestaltung der Formel für das Boyle-Mariottesche Gesetz infolge der ausgedehnten Versuche von Régnault! Außerdem wurde auch wiederholt auf die Stumpfheit unserer Sinne (Theorie der Schwelle) hingewiesen, der zufolge alle empirische Anschauung ihrer Logisierung gegenüber ungenau erscheint, eine Tatsache, die für die Bildung der wissenschaftlichen Erfahrung zunächst durchaus förderlich ist. Diesen Annäherungen und Ungenauigkeiten gegenüber tritt nun die gewichtige Frage auf, mit welchem Rechte wir überhaupt die auf der logisierten Anschauung axiomatisch aufgebaute Mathematik im Gebiete empirischer Anschauung verwenden. Wie kann der Mathematiker mit gutem Gewissen auch Physiker und Techniker sein? Dazu muß die bisher betrachtete Mathematik, der „Theorie der Schwelle" entsprechend, durch eine „Theorie des Spielraums" ergänzt worden. Bezeichnet ϵ für zwei Größen U und I desselben Gebietes eine bestimmte Genauigkeitsgrenze, so tritt z. B. bei Anwendungen gelegentlich an die Stelle der Gleichung $U-I=0$ die Ungleichung $U-I<\epsilon$, und es handelt sich nun darum, von Fall zu Fall zu zeigen, daß die Ersetzung von $U-I=0$ durch $U-I<\epsilon$ nur zu solchen Fehlern führt, die wieder unter einer bestimmten Genauigkeitsgrenze liegen. Nach dem Vorgange der Herren Burkhardt[1]) und Heun[2]) hat Herr F. Klein die Worte „Präzisions-Mathematik" und „Approximations-Mathematik" gewählt, um die strenge Mathematik im reinen und empirischen Gebrauche voneinander zu unterscheiden. Es tritt also der Mathematik der absoluten Genauigkeit eine, durch die „Theorie des Spielraums" ergänzte Mathematik zur Seite, welche dem empirischen Gebrauch dient und für ihn die unvermeidlichen Fehler abschätzt. Man begnügt sich also bei einer gründlichen Behandlung nicht damit, instinktiv darauf zu vertrauen, daß die Fehler unbedeutend ausfallen werden, sondern bestimmt genau ihren Spielraum.

Für alles Weitere können wir auf die schöne und reichhaltige Vorlesung von Herrn F. Klein „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien", verweisen (Vgl. Nr. 78i, und dazu ferner auch Nr. 78m). Es handelt sich in ihr natürlich nicht um eine Revision der Prinzipien in bezug auf den Aufbau der Infinitesemal-Rechnung, sondern in bezug auf deren Verwendung, im besondern innerhalb der Geometrie. Zur Erläuterung greifen wir ein Beispiel heraus. Neben ältern Philosophen hat namentlich J. St. Mill immer wieder darauf hingewiesen, daß Linien ohne Breite nicht anschaulich vorstellbar sind. Innerhalb der Mathematik hat diese Tatsache in dem Begriffe des Kleinschen Funktionsstreifens ihre Ausgestaltung erhalten. Die Approximations-Mathematik frägt nun, mit welchem Recht und in wel-

1) Vgl. Jahres-Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11.

2) Vgl. ebenda Bd. 9.

cher Ausdehnung wir Eigenschaften von Idealkurven und Streifen aufeinander übertragen — jede Linie auf dem Reißbrette ist natürlich ein Streifen, und zwar mit schwimmenden, verwaschenen Grenzen, wie die Betrachtung im Mikroskope zeigt.

Daß jede Messung und jede zeichnerische Darstellung oder Modellierung und überhaupt alles, was im Gebiete empirischer Anschauung liegt, bei mathematischer Behandlung zu Fragen der Approximations-Mathematik führt, ist selbstverständlich.

Aber auch für Zahlen, die nicht durch Messung gewonnen werden, gilt unter Umständen Entsprechendes, z. B. bei der Interpolation von Tafeln. Die übliche lineare Einschaltung für Logarithmen setzt bei drei Zahlen $a, a + b_1, a + b_2$ voraus, daß in einer gewissen Annäherung gilt:

$$\frac{\log(a + b_1) - \log a}{\log(a + b_2) - \log a} = \frac{(a + b_1) - a}{(a + b_2) - a}$$

Dabei ist z. B. für die Bestimmung von $\log(a + b_1)$ zunächst zu beachten, daß $\log a$ und $\log(a + b_2)$ in beschränkter Genauigkeit, vielleicht auf fünf Dezimalen, gegeben sind, und ferner, daß die Entwicklung der linken Seite der Gleichung der rechten gegenüber eine bestimmte Abweichung darstellt.[1]) Daraus sind von Fall zu Fall die erforderlichen Schlüsse zu ziehen.

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, daß auch dieser Teil der Approximations-Mathematik zum Teil durch die Unvollkommenheit der Anschauung, und zwar der sogenannten inneren Anschauung bedingt ist. Könnten wir die Irrationalzahl anschaulich erfassen, so bedürften wir hier keiner Approximation.

Herr Klein hat die Approximations-Mathematik gelegentlich als „Lehre von den durch strenges mathematisches Denken folgenden Ungleichungen" definiert, um hervorzuheben, daß auch sie die Sicherheit der Präzisions-Mathematik hat, sofern eben eine genaue Abschätzung des Spielraums erfolgt. Ein typischer Satz der so verstandenen Approximations-Mathematik ist z. B. der Taylorsche Satz mit endlicher Gliederzahl und Restglied.

Da man aber bei Anwendungen sehr oft die Fehlergrenzen tatsächlich nicht beherrscht, so muß man in solchen Fällen das sichere Gebiet der „Approximations-Mathematik" verlassen, um sich dafür in das unsichere Gebiet einer „approximativen Mathematik" zu begeben, in dem eine instinktive Abschätzung der Fehler das Surrogat für deren genaue Bestimmung ist.

In bezug auf das Methodische der Mathematik, nicht aber in bezug auf ihre Grundlegung, findet man in Wundts Logik, auf die auch Herr Voß[2]) in diesem Sinne hinweist, wohl alles sonst noch Erforderliche, falls man es kritisch aufnimmt.

Außerdem mag noch auf die drei bereits mehrfach erwähnten Didaktiken von Reidt-Schotten, Simon und Höfler verwiesen werden.

1) Vgl. Nr. 167 f. 2) Vgl. Nr. 161 a S. 84.

In bezug auf die in ihrer Weise recht vollkommenen propädeutischen Methoden der Volksschule mit ihrer naiven Anschaulichkeit findet man in den entsprechenden Abhandlungen von Herrn Lietzmann gute Auskunft.[1])

Dritter Abschnitt.

Folgerungen für die Schule.

1. Allgemeine Gesichtspunkte.

Wir haben uns bemüht, unsere grundlegenden Betrachtungen überall durch das Bedürfnis der Schule zu begrenzen, und es erhebt sich nun die Frage, was von ihnen in der Schule selbst verwendet werden soll. Unsere Antwort darauf lautet: Alles wesentliche, aber natürlich in geeigneter Form.

Gelegentliche Bemerkungen und kleinere Ausführungen haben von Anfang an auf die „Philosophie im Unterricht" vorzubereiten, wofür dann in der Prima weiter zu wirken ist.

Bewußt und unbewußt ist in dieser Hinsicht schon reichlich in unsern Schulen gearbeitet worden, denn alles, was dem Ideale der Einheit des Wissens dient, zielt eben auf Philosophie.

Dabei handelt es sich lediglich darum, Anregungen zu geben und dem philosophischen Bedürfnisse der Schüler in angemessener Weise entgegenzukommen, bzw. dieses zu wecken und zu leiten, was freilich schließlich immer Sache der Persönlichkeit ist. Es soll Samen ausgestreut werden, von dem hoffentlich hier und da ein Korn aufgeht!

In diesem Sinne[2]) mag man auch das folgende aufnehmen, das wir der Sachlage entsprechend an die Lehrpläne der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte anknüpfen, denn diese sollen und wollen ja der weiteren Reform dienen. Diese Lehrpläne bezeichnen als abschließendes Ziel des mathematischen Schulunterrichts:

1. einen wissenschaftlichen Überblick über die Gliederung des auf der Schule behandelten mathematischen Lehrstoffes,

2. eine gewisse Fähigkeit der mathematischen Auffassung und ihrer Verwendung für die Durchführung von Einzelaufgaben,

3. endlich und vor allem die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

---

1) Vgl. Nr. 1, Bd. V, Heft 1 und 2 und dazu auch Nr. 151 a.

2) Prof. von Brockdorff (Kiel) sagt in einer Besprechung meines letzten Kantbuches: „Bei W. wird auf Ausbildung in den Grundbegriffen der Geschichte der Philosophie Wert gelegt. Er entläßt keine Abiturienten, die nicht von Descartes, Locke, Leibniz usw. bei ihm gehört hätten. So haben die jungen Leute aufs neue Gelegenheit erhalten, was sie auf der Schule gelernt haben, zu erweitern und zu klären. An Apperzeptionshilfen fehlt es ihnen nicht". Das trifft in der Tat die Sache, was meine Absichten anlangt.

Während Nr. 2 dem selbstverständlich stets in erste Linie zu stellenden „Können" gilt, fordert Nr. 1 die Darstellung der Schulmathematik als System und Nr. 3 ihre Bewertung, wobei man unterscheiden kann

a) den selbständigen Wert der Mathematik als Wissenschaft,

b) ihren Wert als Mittel der Naturerkenntnis (Physik, Chemie, Statistik usw.).

c) ihren Wert als Mittel für die Naturbeherrschung (Technik, Versicherungswesen usw.).

Zu Nr. 1 und 3 ist außerdem die für Oberprima gemachte Bemerkung hervorzuheben: „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte".

Was den selbständigen Wert der Mathematik anbelangt, so wird für die Schule immer Schillers Epigramm „Archimedes und der Schüler" maßgebend sein: Die Mathematik war eine göttliche Kunst, ehe sie die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützte, und so wird es immer bleiben. Zur Erläuterung ist dazu u. a. vielleicht heranzuziehen die Rede[1]) von Herrn Pringsheim „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik", wo es z. B. heißt: „Wir sehen in dem tiefgreifenden Einflusse, welchen die Errungenschaften der Mathematik auf die Fortschritte der Naturwissenschaften und die Vervollkommnung der Lebensbedingungen ausüben, lediglich das charakteristische Sympton einer dem menschlichen Geiste zukommenden höheren Verpflichtung, die Gesetze und wechselseitigen Beziehungen der Zahl und Raumgebilde in ihrem weitesten Umfange zu begründen. Die mathematischen Erkenntnisse erscheinen uns daher als an sich wertvoll." Diese Auffassung bestätigt auch Herr Voß[2]), der dabei u. a. auf Jacobi hinweist. Gegenüber Fourier, welcher die Nützlichkeit der Mathematik in den Vordergrund gestellt hatte, betont dieser, „que le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain". Mit Recht, aber zu dieser Ehre gehört auch die Naturerkenntnis und die Naturbeherrschung, und zwar in dem Sinne, daß wir in den Riesenwerken unserer modernen Technik gewissermaßen überall den erkennenden und beherrschenden Menschengeist leibhaftig vor uns sehen, in seiner genialen Intuition und in seiner strengen wissenschaftlichen Arbeit. Demgemäß sind auch auf der Schule die Anwendungen zu charakterisieren, und ich möchte in deren Betonung nicht mit Herrn Lietzmann[3]) nur ein „utilitaristisches" Prinzip sehen. Daß übrigens oft mehr Geist dazu gehört, das Empirische zu bewältigen, als das Reine, was eigentlich a priori klar ist, kann auch den Schülern an Beispielen deutlich gezeigt werden.

Dabei ist zur Erkenntnis zu bringen, daß die Reihenfolge Arithmetik (Zahl), Geometrie (Raum), Phoronomie (Zeit) und Dynamik (Masse) eine fortschreitende Eroberung der Wirklichkeit bedeutet, deren Ziel es ist,

1) Vgl. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13 S. 357.

2) Vgl. Nr. 161a S. 93.

3) Vgl. Nr. 146 S. 248.

eine eindeutige Ordnung des Geschehens zu erkennen und darzustellen.

Man denke sich alles Mathematische fort aus der menschlichen Kultur, namentlich auch schon die Zahlen, und frage: Was bleibt dann? Gewiß noch vieles, aber das dem Kosmos zugewandte Ideal, von dem Herr Seith (vgl. S. 6) spricht, wäre sicher dahin.

Daß die Grundbegriffe der Mathematik durch Logisierung entstehen und daß die Systeme ihrer Beziehungen auf den verschiedenen Gebieten die feste Grundlage bilden für weitere deduktive Arbeit, die durch Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit gekennzeichnet ist, muß zur Einsicht gebracht werden, aber auch, daß die Anwendbarkeit der Mathematik damit zu einem besonderen Probleme wird. Wie hier durch Beobachtung, Versuch usw. in physischer und in psychischer Hinsicht auf induktiv-deduktivem Wege der Welt der Erscheinungen von Fall zu Fall die Prämissen abgerungen werden, welche die Anknüpfung mathematischer Arbeit bedingen, nicht bloß auf dem Gebiete der Physik, sondern auch auf dem der Sozialwissenschaften (Wahrscheinlichkeit usw.), ist auch vom Mathematiker wenigstens im allgemeinen zu charakterisieren, ebenso, wie solchen Prämissen die Aufstellung zweckmäßiger Axiome anzupassen ist behufs mathematischer Behandlung eines bestimmten Gebietes von Erscheinungen.

Dem Schüler muß schließlich zum Bewußtsein kommen, daß die Schulmathematik ein wissenschaftliches, auf Axiomen ruhendes System darstellt, und daß er ein solches nur in der Mathematik und in den auf ihr beruhenden Anwendungsgebieten kennen lernen kann. Dabei wird aber auch darauf hinzuweisen sein, daß die Wissenschaft selbst viel weiter reicht, als die Mathematik, daß sich aber andere Disziplinen auf der Schule nicht in strenger Wissenschaftlichkeit behandeln lassen und daß ihre Werte zum Teil auf anderen Gebieten liegen. Erst die Einheit von allem bringt das wahre Ideal.

Den Gegenstand der Mathematik bilden stets Mannigfaltigkeiten, und die hauptsächlichen Arbeitsmittel der Mathematik sind Reihung, Paarung und Klassenbildung. Während der Übergang von der unstetigen zur stetigen Mannigfaltigkeit in der Arithmetik durch die Theorie des Irrationalen bewirkt werden muß, gibt die logisierte Anschauung der Bewegung uns ein bestimmtes inneres Bild von dieser Stetigkeit, und durch die Verschmelzung dieser beiden Stetigkeitsarten wird uns erst das Geschehen, das durch die Zahl im Maße gefesselt wird, verständlich.

Die Übertragungs- oder Verbindungsprinzipien für die einzelnen Zweige der Mathematik, so die graphische Darstellung der gemeinen Komplexzahlen in der Ebene und die analytische Geometrie von Descartes zeigen, daß es sich im Grunde überall um denselben Gegenstand handelt, nämlich um Mannigfaltigkeiten, deren Gebilde schließlich nicht bloß in „idealfunktionalen“, sondern auch in „realfunktionalen“ (Dynamik) Zusammenhang gebracht werden.

Dabei spielt das Infinitesimal-Prinzip eine hervorragende Rolle, weil die gesetzlichen Beziehungen der räumlich-zeitlichen Welt zunächst oft nur für „Elemente" ausgesprochen werden können, so daß erst aus den Elementargesetzen die Integralgesetze für das „Gegebene" erwachsen, und dazu ist Grenzbegriff und Grenzmethode erforderlich.

Auf alles dieses wird man zusammenfassend in der Prima von Fall zu Fall hinweisen können, aber natürlich nur, wenn Beispiele vorgearbeitet haben oder neu dazu herangezogen werden. Neben anderen halte ich dazu auch einfache Beispiele aus der technischen Mechanik für sehr geeignet.

Hat man etwa festgestellt, daß die Schüler in der Nachbarschaft und auf Reisen beobachtet haben, daß bestimmte Konstruktionen (Parabelträger) bei Eisenbahnbrücken immer wiederkehren, so wird man zunächst die Vorstellung des Parabelträgers durch Zeichnung usw. mit wenigen Strichen klären. Daran knüpft sich die Bemerkung, daß die Parabel die Seilkurve oder Stützlinie für gleichmäßige Belastung der Horizontalen ($\curlyvee$) ist. Die weitere Behandlung gibt eine einfache Aufgabe (vgl. Fig. 1). Die drei Gleichgewichtsbedingungen liefern für das Seilstück zwischen O und P, falls 0 als Drehpunkt gewählt wird:

1) $H_1 = H_2,$

2) $V = x\curlyvee,$

3) $+H_1 y - Vx + (x\curlyvee)\frac{x}{2} = 0.$

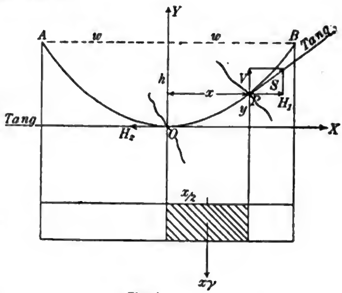


Fig. 1.

Gleichung 3) liefert in Verbindung mit Gleichung 1) und Gleichung 2) ohne weiteres die Parabel

$$x^2 = \frac{2H}{\curlyvee} \cdot y.$$

Für $x = w$ und $y = h$ ergibt sich noch

$$\frac{2H}{\curlyvee} = \frac{w^2}{h},$$

so daß die „mechanischen" Größen hier „geometrisch" ersetzbar sind. Eine Ausführung in Zahlen, am besten in Anlehnung an eine ausgeführte Konstruktion, kann die Übung abschließen.

An solchen Beispielen läßt sich die Logisierung der Vorstellungen der räumlich-zeitlichen Welt, der Unterschied der natürlichen Geometrie und der strengen Geometrie usw. klar machen, ebenso die Stufenfolge „reine Mathematik, Naturerkenntnis, Naturbeherrschung".

Als zweites Beispiel greife ich die Behandlung des Erddrucks heraus. Hier hat man Gelegenheit, darauf hinzuweisen, welche Überlegungen notwendig waren, um das so vielgestaltige und veränderliche Ding, das wir Sand oder Erde nennen, überhaupt dem Kalkül zu unterwerfen. Man betrachtet (vgl. Fig. 2 u. 3) alle möglichen ebenen Bruchflächen durch

B, um die gefährliche (ω) zu bestimmen, und konstruiert tatsächlich für diese, dem Prisma *ABC* vom größten Drucke entsprechend. Bei horizontal abgeglichener Erde (vgl. Fig. 2) ist die Maximalbestimmung für die Schule etwas schwierig, bei natürlicher Böschung (vgl. Fig. 3) aber sogar ohne jede Differentiation möglich. Der künstliche Eingriff, der in der horizontalen Abgleichung liegt, rächt sich durch die Schwierigkeit des Kalküls.

Die Behandlung bestimmter optischer Erscheinungen gemäß dem Prinzipe der schnellsten Ankunft gibt Veranlassung zu zwei einfachen Aufgaben aus dem Gebiete der Maxima und Minima. Man findet so Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz. Dies gibt Gelegenheit, die teleologische Naturauffassung des 18. Jahrhunderts zu berühren und sie zu werten.

Die arithmetische Darstellung der Zahl π mit Hilfe der Reihe von Leibniz zeigt eine bestimmte, sehr begründete Arithmetisierung des ursprünglich geometrisch Erfaßten, wobei man auch auf die alle Versuche einer Kreisquadratur abschließende Arbeit von Lindemann (1882) hinweisen kann. Ebenso ist die Tatsache hervorzuheben, daß Sinus und Kosinus in der Darstellung durch Reihen in die Arithmetik eintreten. Die Behandlung der Kreisteilung, bei der man sich in Braunschweig, der Geburtsstadt von Gauß, wenigstens sicher das Siebzehneck[1]) nicht entgehen lassen wird, gibt weiter Gelegenheit zu einer Fülle von Bemerkungen im Sinne unserer Darlegungen.

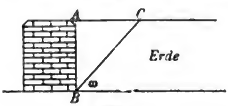


Fig. 2.

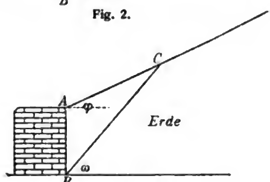


Fig. 3.

Sind dem Schüler die Beziehungen zwischen Stammfunktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ an einfachen Beispielen geläufig geworden, so gibt die Zusammenfassung der drei ursprünglich experimentell abgeleiteten Gleichungen des freien Falles oder des vertikalen Wurfes Gelegenheit, auf den Unterschied der induktiv-deduktiven und der rein deduktiven Methode hinzuweisen. Dabei wird man auch die geistige Arbeit Galileis würdigen können. Er legte dem Experimente für die Herleitung der Gleichung $s = f(t)$ ursprünglich die „Idee" (vgl. S. 58) $v = f'(t) = k \cdot s$ statt der sich als richtig erweisenden $v = f'(t) = k \cdot t$ zu Grunde. Auch er hatte ebensowenig wie die griechischen Mathematiker und Physiker brauchbare Apparate. Er benutzte aber die Hebelwage, welche sich schon infolge des

1) Eine direkte Zerlegung der Gleichung des Siebzehnecks in eine Gleichung ersten Grades und in ein System von quadratischen Gleichungen findet man in Nr. 167 f S. 92.

Geldverkehrs der Kreuzzüge außerordentlich verfeinert hatte, zum Messen der Zeit, indem er den Zeiten entsprechende Flüssigkeitsmengen bei gleichförmigem Ausflusse mit der Wage feststellte. So ergibt sich sogleich ein kleines Kulturbild. Nannte doch Galilei seine wichtigste Streitschrift auch „Il saggiatore" d. h. die Goldwage![1])

Hat man in der analytischen Geometrie als Beispiele für geometrische Orte, den vier Spezies entsprechend, für zwei feste Punkte P_1 und P_2 und für einen beweglichen Punkt P die Aufgaben aufgestellt

$$P_1P + PP_2 = 2a \text{ (Ellipse)}$$

$$P_1P - PP_2 = 2a \text{ (Hyperbel)}$$

$$P_1P \cdot PP_2 = m^2 \text{ (Cassinische Kurven mit Lemniskate)}$$

$$P_1P : PP_2 = \epsilon \text{ (Kreis des Apollonius),}$$

so geben die auftretenden Kurven Gelegenheit zu vielseitigen Bemerkungen. U. a. kann daran erinnert werden, daß Cassini in Paris gewissermaßen eine Professur für die Erforschung des Jupiter-Systems erhielt (Olaf Römer wird dort sein Assistent). Dieses System war bekanntlich damals sozusagen das Modell, an dem die Weltanschauung des Kopernikus veranschaulicht wurde, im Gegensatze zu dem Theorem des Aristoteles „ein Zentrum von Bewegungen kann nicht selbst in Bewegung sein". Dieser Satz gab eine falsche Invariante.

Natürlich wird sich kein Mathematiker den methodischen Zusammenhang zwischen den Gesetzen Keplers und der abschließenden Formel Newtons entgehen lassen.

In didaktischer Hinsicht möchte ich noch bemerken, daß ein Wechsel der Aufgaben von Jahr zu Jahr ratsam ist, daß aber doch in allgemeinbildender Hinsicht stets gewisse Standard-Aufgaben wiederkehren müssen, so z. B. auch die drei berühmten Probleme des Altertums.[2])

2. Die Philosophie im Geschichtlichen der Mathematikstunde.[3])

Wer in der Mathematik das geschichtliche Moment nicht vernachlässigt, wird auch darauf aufmerksam machen können, daß die großen Philosophen meist auch der Mathematik ein wirkliches Verständnis entgegen gebracht haben, ja zum Teil sogar zu ihren Großen gehören. Die Geschichte der Philosophie hat in den letzten Jahrzehnten in gerechter

1) Vgl. hierzu das eben erscheinende Bändchen 6 von Nr. 95, H. E. Timerding „Die Fallgesetze".

2) Vgl. hierzu F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert, Leipzig 1895, und außerdem F. Rudios Schrift: „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung", Leipzig 1892. Außerdem noch besonders Nr. 36 d und auch Nr. 167 f.

3) Vgl. für Weiteres u. a. in diesen IMUK-Abhandlungen (Bd. III Heft 6) die Arbeit von Herrn M. Gebhardt.

Würdigung der mathematischen und naturwissenschaftlichen Forschung Probleme und Persönlichkeiten aufgenommen, die früher in ihren Darstellungen nicht vorhanden waren. So dürfte jetzt kaum noch irgendwo Galilei fehlen oder Newton, aber auch Descartes wird nicht mehr bloß nach seinem Cogito und nach seiner Metaphysik gewürdigt, sondern auch als Begründer einer freilich mehr und mehr zu berichtigenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Weltanschauung. In diesem Sinne sagt Herr A. Riehl[1]): „Die Wissenschaft und Philosophie der Gegenwart ist nur zu geringerem Teile in den Arbeiten der Fachphilosophen enthalten, in ihren Schriften niedergelegt. Wir haben sie vornehmlich auch in den allgemein-wissenschaftlichen Anschauungen der großen Naturforscher unserer Zeit zu suchen: Diese, die wahren Nachfolger der Naturphilosophen, sind unsere Philosophen. Und wer der Gegenwart eine maßgebende Bedeutung in der Geschichte der Philosophie abspricht, hat die Bäume gesehen, aber nicht den Wald, er hat nicht gesehen, wo gegenwärtig die Philosophie lebt. Sie lebt in den Werken von Robert Mayer, von Helmholtz, von Heinrich Hertz."

Der Glaube an die Wissenschaft selbst hat sich an der Tatsache der mathematischen Wissenschaft oft belebt, dafür sind Plato, Descartes und Kant bezeichnende Beispiele. Auf sie kann auf jeder Anstalt in der Lektüre, einschließlich des deutschen Lesebuches, eingegangen werden. Aber auch die Mathematikstunden bieten Anknüpfung. Für Plato gibt sie z. B. das Delische Problem oder die Erörterung der Konstruktion in ihrer Beschränkung auf Zirkel und Lineal. Bei Descartes, der aus dem Augustinismus seiner Zeit hervorgeht, gibt hauptsächlich die analytische Geometrie Gelegenheit dazu. An Kants System, das andererseits zum Verständnis von Schiller und auch von Goethe durchaus erforderlich ist, wird man bei Besprechung der Grundlagen der Mathematik nicht vorübergehen können. Bei der Frage der „Zeit" wird man auch Augustins Schmerzensschrei nach Verständnis erwähnen können, den Herr Höfler in den Anhang zu seinem Grundriß der Logik und Psychologie mit Recht aufgenommen hat.

Neben Thales steht natürlich Pythagoras an der Spitze, dessen religiös-ethische Reform die musische Erziehung in ihren Dienst stellte, aus dem heraus seine Schule dann für die Mathematik so fruchtbar gewirkt hat. Von hier aus läßt sich bis in die Gegenwart hinein das Philosophische in der Geschichte der Mathematik verfolgen, wobei natürlich Leibniz[2]) und Newton Höhepunkte bilden. Namentlich bieten auch bei Gauß die Voranzeigen seiner Schriften gutes Material, von dem sich auch dies und das für die Schule verwenden läßt. Außerdem mag auch auf unser Kapitel „Die Arbeitsart der Mathematiker" verwiesen werden.

1) Vgl. Nr. 120b S. 256.

2) Vgl. dazu u. a. „Leibniz und die Gymnasialmathematik" von E. Tischer in den „Xenia Nicolaitana, Festschrift zur Feier des 400jährigen Bestehens der Nikolaischule in Leipzig", Leipzig 1912.

3. Psychologisches und Formal-Logisches im Unterrichte der Mathematik.

Bei dem propädeutischen Unterrichte steht das Psychologische durchaus im Vordergrunde, das aber auch für den abschließenden Unterricht, in welchem das Formal-Logische voll zur Geltung kommen soll, seine hohe Bedeutung behält. In bezug auf die Wertung des Psychologischen können wir vor allem auf Höflers Didaktik verweisen, in welcher, wie schon früher erörtert, im besonderen auch die Anschauung wirklich zu ihrem Rechte kommt.[1])

In Beziehung auf die Verstandesbildung durch Mathematik bekennt Herr Höfler[2]): „Zu diesem Gegenstande ist hier fast nichts mehr zu sagen, man müßte dann den Mut haben, das unzähligemal gut gesagte wirklich noch einmal zu sagen“. Gegenüber dem immer noch vorhandenen „Unfug des Auswendiglernens“ begnügt sich daher Herr Höfler hervorzuheben „Nicht auf das richtige Urteil allein kommt es an, sondern auf richtig urteilen mit Einsicht in die Richtigkeit“. Ob der Unfug wirklich noch so groß ist, mag dahingestellt bleiben, jedenfalls ist das Kapitel „formal-logische Schulung durch die Mathematik“ so oft behandelt, daß kaum etwas hinzuzufügen ist. Höchstens ist vielleicht zu bemerken, daß die Forderungen der Logik in der Mathematik meist restlos verwirklicht werden können, und dazu mag im Hinblick auf hier und da noch vorkommende Ungenauigkeiten besonders hervorgehoben werden, daß auch die „Einteilungen“ stets vollständig durchzuführen sind.

So hat man z. B. an Parallelen vier Gruppen von Winkelpaaren zu unterscheiden, nicht drei. Nennt man die Winkel zwischen den Parallelen innere, die anderen äußere, und ein Paar gleichartig, wenn es nur innere oder nur äußere Winkel zusammenfaßt, sonst ungleichartig, so ergibt sich das Schema:

I. Ohne Überschreitung der Schneidenden
   1) gleichartige Paare
   2) ungleichartige Paare
II. Mit Überschreitung der Schneidenden (Wechselwinkel)
   1) gleichartige Paare
   2) ungleichartige Paare.

Ebenso ist die Anzahl der Grundkonstruktionen, welche sich in den Kongruenzsätzen spiegeln, in logischer Hinsicht nicht vier, sondern sechs, wie es auch die Sphärik zeigt. Für die Ebene fällt infolge der Konstanz der Winkelsumme ein Fall fort, aus dem sich die Ähnlichkeit entwickelt, während zwei andere verschmelzen, so daß die Vierzahl herauskommt.

---

1) Vgl. ferner die Arbeiten von Lietzmann (Nr. 1, Bd. V, Heft 1 u. 2) und außerdem Nr. 151 a.

2) Vgl. Nr. 69 b S. 488.

Auch die Betonung alles Speziellen und Singulären gehört hierher. Es dürfen bei Konstruktionsaufgaben und bei Gleichungen keine Sonderlösungen übersehen werden, sie können gerade überaus wichtig sein. So darf schon die Gleichung $x^2 - ax = 0$ nicht etwa durch x dividiert werden, sie führt vielmehr in der Form $x(x-a) = 0$ zu $x = 0$ und $x = a$.

Dagegen ist es vielleicht nicht unnütz, kurz darauf hinzuweisen, wie die Formal-Logik selbst aus dem mathematischen Unterrichte Vorteil zieht, als Elementarlehre und als Methodenlehre. Dabei hat man m. E. davon auszugehen, daß jeder Lehrsatz in logischer Hinsicht ein Urteil darstellt, dessen Elemente Begriffe sind, und daß diese im Urteil ebensowohl getrennt als verbunden werden.

Auf die verschiedenen Arten von Urteilen, welche den reflexiven und konstitutiven Kategorien entsprechen, wird man von Fall zu Fall hinweisen können, ohne jedoch Vollständigkeit anzustreben. Jedenfalls wird man aber neben den Urteilen der alten Logik das Abhängigkeitsurteil besonders hervorheben, weil es zur funktionalen Beziehung der Mathematik führt. Schon die ersten Aufgaben der Regel-de-tri zeigen diese Abhängigkeit, z. B. der Arbeit von der Anzahl der Arbeiter und der Leistungsfähigkeit des einzelnen. Von dem einfachen Urteile „die Schwingungsdauer eines Pendels hängt von dessen Länge ab" bis zu der funktionalen Formulierung $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist allerdings ein weiter Weg.

Daß sich alle Urteile in Identitätsurteile (vgl. Logikkalkül) umformen lassen, nicht aber in Subsumptionsurteile, ist vielleicht auch gelegentlich zu berühren.

Bei den Begriffen wird das Psychologische ihrer Bildung zum Bewußtsein zu bringen sein, und man wird hinzuweisen haben auf den Unterschied der vollkommen logisierten Begriffe der Mathematik und der ihnen entsprechenden Begriffsbeziehungen, im Gegensatz zu den unvollkommen logisierten Begriffen anderer Wissenschaften. Botanik und Zoologie sind ein anderer wissenschaftlicher Typus als die Mathematik. Für die Darstellung eines Begriffes kann wieder rückwärts die mathematische Funktion gute Dienste leisten. Es handelt sich dabei nicht um die Summe der konstitutiven (wesentlichen) Merkmale, sondern um deren Beziehungen. Sind diese Merkmale $a, b, c, \ldots$, so wäre $f(a, b, c \ldots)$ eine Darstellung des Begriffs, wie schon Lotze hervorgehoben hat.

Bei der Bildung der abgeleiteten Begriffe aus den Grundbegriffen ist darauf hinzuweisen, daß letztere dabei als gegeben anzusehen sind, mögen sie vielleicht auch nur durch Beziehungen definiert sein. Ist z. B. der Begriff „Strecke" bekannt und ebenso der Begriff „Streckenzug" und bezeichnet man einen solchen durch $S(a, b, c, d \ldots)$ und, falls er sich schließt durch $S_0(a, b, c, d \ldots)$ so stellt $S_0(a, b, c)$ deutlich das Dreieck dar.

Ferner hat man zu unterscheiden die direkte Definition und die indirekte Definition, welch letztere zunächst bei Bestimmungsgleichungen und Konstruktionsaufgaben auftritt, und schließlich zu den Beziehungen der Axiomatik führt.

Bei der Bedeutung der Reihung ist natürlich die rekurrierende Definition (Reihungsdefinition) besonders hervorzuheben, und in Gegensatz zu ihr die independente zu charakterisieren.

Ebenso wird bei den Schlüssen der Reihungsschluß (von n auf $n + 1$) besonders hervorzuheben sein. Daß er gelegentlich dazu dient, eine unvollständige Induktion vollständig zu machen, wird an Beispielen gezeigt. Ist z. B. für einzelne Potenzen die Ableitung hergestellt und daraus die Formel $f'(x) = nx^{n-1}$ für $f(x) = x^n$ vermutungsweise bestimmt, so führt die Ableitung von $x^{n+1} = x \cdot x^n$ nach der Produktformel zum Beweise.

Dieses Beispiel weist außerdem neben vielen anderen darauf hin, daß auch Wahrscheinlichkeits-Urteile und Wahrscheinlichkeits-Schlüsse besonders hervorzuheben sind.

In der Methodenlehre ist zu zeigen, daß Analysis (Trennung) und Synthesis (Verbindung) alles beherrschen, schon die Abstraktion und Determination bei der Begriffsbildung, aber auch alle Systematik.[1])

Die der Mathematik eigentümliche Analysis und Synthesis, welche man als Differential- und Integralrechnung zu bezeichnen pflegt, beruht auf dem Infinitesimal-Prinzip. Man gibt ihm zunächst etwa die vorläufige Form „ein Ganzes (Ding oder Vorgang) kann in beliebig viele beliebig kleine Teile (Elemente) zerlegt und aus solchen wieder aufgebaut werden". In dieser Form hat es auch die Arbeiten von Lyell (Geologie) und von Darwin (Botanik und Zoologie) geleitet. Dieses Prinzip würde ziemlich unfruchtbar sein, wenn sich nicht oft für die Elemente gesetzliche Bestimmungen angeben ließen, welche beim Aufbau des Ganzen (integrum) auch zu neuen oder bisher nicht erklärten gesetzlichen Bestimmungen für dieses führten.[2]) Die Aneinanderreihung nicht genügend beachteter aber in ihrem Wesen bekannter oder erkennbarer Vorgänge führten Lyell und Darwin zur Beseitigung der Kataklysmen-Theorie und der Starrheit des Arten-Begriffs, und durch solche Aneinanderreihungen von Elementen sucht man jetzt auch auf anderen Gebieten Aufschluß über das Ganze zu geben, und zwar überall da, wo der Begriff „Entwicklung" die Führung übernimmt.[3]) So wird Hegels energischer Hinweis auf die Bedeutung der Entwicklung in möglichst exakter Form wirklich fruchtbar gemacht.

Für die Verwendung des Infinitesimal-Prinzipes mußte sich die Mathematik ihre besonderen Methoden schaffen, die man zusammenfassend als Grenzmethoden bezeichnen kann. Die Zerlegung in Elemente ist zunächst fast immer mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet. Die Ele-

1) Dabei ist die jedesmalige Bedeutung der vieldeutigen Worte Analysis und Synthesis besonders festzustellen. Vgl. hier S. 94.

2) Vgl. die Bedeutung der Differentialgleichungen.

3) Vgl. Vierkandt, die Stetigkeit im Kulturwandel, Leipzig, 1908.

mente sind Hülfskonstruktionen, welche man, meist zunächst durch die empirische Anschauung geleitet, in das Gegebene hineindenkt, ohne aber damit dasselbe adaequat darzustellen, so bei der Ersetzung des Bogens durch einen Streckenzug, bei Auflösung einer beliebigen Bewegung in eine Kette von gleichförmigen Bewegungen oder gleichmäßig geänderten Bewegungen usw.

Die Stumpfheit unserer Sinne erleichtert uns den ersten Ansatz, da für das Auge bei materieller Ausführung (etwa auf dem Reißbrett) z. B. Bogen und Streckenzug bei einer gewissen Annäherung zusammenzufallen scheinen. Man pflegt zu sagen, daß erst unendlich viele unendlich kleine Elemente eine exakte Darstellung geben und gerade diese Redensart muß methodisch geklärt werden. Tatsächlich handelt es sich dabei in psychologischer Hinsicht um eine fortgesetzte Annäherung, welche ihr Ziel nie erreichen kann, d. h. um einen asymptotischen Prozeß. Es ist eine Grundtatsache unseres Bewußtseins, daß wir Vorstellungsreihen, welche eine solche Annäherung darstellen, in Grenzvorstellungen abgeschlossen denken, welche überall da, wo uns nicht die Bewegungsvorstellung hilft, von der Reihe aus nur durch einen Sprung zu erreichen sind. Diese Tatsache weist hin auf eine bestimmte Funktion des Bewußtseins, welche der Bewältigung asymptotischer Prozesse dient, und die man kurz als die „asymptotische Funktion des Bewußtseins" bezeichnen kann.[1]) So gehört z. B. zu der Vorstellungsreihe, welche durch

$$0{,}33\cdots = {}^3/_{10} + {}^3/_{100} + \cdots$$

bezeichnet wird, die Grenze 1/3, und die asymptotische Funktion läßt uns diese Grenze beim Durchlaufen der Reihe als erreichbar ansehen. Löst man Bewegung in eine asymptotische Reihe auf, so treten sofort Schwierigkeiten auf (Achilles und die Schildkröte). Eine solche Auflösung ist aber fast immer, dem diskursiven Charakter unseres Denkens entsprechend, erforderlich, falls die Arithmetik auf die Probleme angewandt werden soll, und damit erwächst für die Mathematik die Aufgabe, diese Beziehungen vollständig zu klären.

Dies geschieht durch Einführung des Grenzwertes und des sog. Konvergenzprinzipes[2]), woran sich dann weitere Methoden schließen, unter denen besonders der Übergang von der Stammfunktion zur Ableitung, und umgekehrt, zunächst in dem einfachen Falle

$$y = f(x)$$

hervorzuheben ist.

Geschichtlich ist das bestimmte Integral der zunächst auftretende Grenzbegriff, den die Frage der Flächenbestimmung fordert.

Eine Methode für die Klärung dieser Beziehungen lernt der Schüler zunächst in der Kreislehre kennen. Bezeichnet man die Fläche eines

1) Vgl. S. 72 Anm. 1.
2) Vgl. z. B. Burkhardt, Algebraische Analysis, Leipzig, 1903, S. 73.

regelmäßigen umschriebenenen Vieleckes von beliebiger Seitenzahl (n) mit U und die Fläche für ein entsprechendes eingeschriebenes Vieleck mit I, die Kreisfläche dagegen mit K, so ist anschaulich klar, daß besteht:

$$U > K > I.$$

Bei rechnerischer Ausführung ist K mindestens soweit gegeben, als U und I in ihren Dezimalen übereinstimmen. Die erforderliche Schärfe des Abschlusses bringt dann die Gleichung

$$\lim (U - I) = 0 \text{ für } \lim n = \infty.$$

Ein weiterer geschichtlich schon früh vollzogener Grenzübergang liefert, falls der Radius des Kreises mit r und der Umfang mit u bezeichnet wird, noch die Gleichung

$$K = \frac{1}{2} r \cdot u$$

und damit ist auch u bestimmt.

Das Verfahren, welches zunächst bei der Kreisfläche durch $U > K > I$ und

$$\lim (U - I) = 0 \text{ für } \lim n = \infty$$

charakterisiert ist, begegnet dem Schüler später noch recht häufig, z. B. bei der Bestimmung von Volumen und Oberfläche der Kugel, bei Schwerpunktsaufgaben usw.

Auf der Schule muß der Übergang zur Grenze jedenfalls zunächst auf anschaulichem Wege geläufig gemacht werden, und dazu dient vor allem die Bewegungsvorstellung. Daß sie selbst gewisse Schwierigkeiten enthält, bleibt dabei außer Betracht; so ist z. B. das (scheinbare) Entstehen einer Bewegung und das (scheinbare) Vergehen einer Bewegung und ebenso jede Änderung innerhalb der Bewegung nur mit Hilfe der asymptotischen Funktion erfaßbar.

Sieht man keine Schwierigkeiten darin, daß ein Punkt bei der Bewegung auf seiner Bahn durch einen festen Punkt dieser Bahn hindurchgeht, so bietet auch die übliche Behandlung des Übergangs von der Sekante zur Tangente keine Schwierigkeiten. Will man die Bewegung „eliminieren", so kann man durch den festen Punkt ein Strahlenbüschel legen, in welchem in Beziehung auf die Durchschnitte der Kurve die Tangente einen ausgezeichneten Strahl darstellt. Für einfache Fälle bietet die arithmetische Behandlung keine Schwierigkeiten. Hat der feste Punkt die Abszisse x und der bewegliche Punkt die Abszisse $x \pm d$, so ist für die Linie, deren Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist, der Winkel σ zwischen Sekante und X-Achse gegeben durch

$$\operatorname{tang} \sigma = a(2x \pm d) + b$$

und für den Tangentenwinkel gilt dann ($\pm d = 0$) ohne weiteres

$$\operatorname{tang} \tau = 2ax + b.$$

In anderen Fällen muß untersucht werden, ob tang σ für $\pm d = 0$ einen bestimmten Grenzwert hat, eine Notwendigkeit, auf welche die tangentenlosen Kurven noch ganz besonders hingewiesen haben.

Die Darstellung durch Elemente ist immer zunächst ein anschaulich eingeleiteter approximativer Ansatz, der durch Grenzbegriff und Grenzmethode exakt gemacht wird, aber der damit gegebenen Logisierung kann die Anschauung nicht folgen. Ob z. B. im tiefsten Punkte einer Seilkurve ein Element horizontal liegt oder ob von ihm nach beiden Seiten zwei geneigte Elemente ausgehen, ist eine Frage, auf die es keine Antwort gibt. Als Annäherung ist natürlich beides zulässig, und der Praktiker benutzt ja auch, z. B. bei der Darstellung der Kettenlinie, diese doppelte Auffassung.

Erst, wenn man diese Logisierung anschaulich verfolgen will, treten die bekannten Schwierigkeiten des Grenzüberganges auf, wobei zu betonen ist, daß die Anschauung der Logisierung auch in einfachen Fällen nicht folgen kann. Beachtet man dies nicht, so kommt man zu den vielen Widersprüchen zwischen Anschaulichem und Logisiertem. Dann kommt man auch zu der Frage, ob die Elemente (Differentiale) die „Geister verschwundener Größen" (Berkeley) oder die „Keime entstehender Größen" (Cohen[1]), Simon u. a.) sind usw.

Zu bemerken ist vielleicht noch, daß sich an einen, einmal vollzogenen Grenzübergang natürlich weitere Grenzübergänge knüpfen können, sowohl im Sinne des Übergangs von der Stammfunktion zur Ableitung, als auch umgekehrt, und daß der Begriff des Elementes selbst (dx, dx^2, usw.) durchaus relativ ist, wie zunächst schon Linien-Element, Flächen-Element und Raum-Element zeigen.

In sprachlicher Hinsicht mag hervorgehoben werden, daß man entweder die Worte „Differential und Summal" oder „Element und Integral" benutzen müßte, wobei noch zu bemerken ist, daß die Differentialquotienten oft, aber nicht immer, als Differenzenquotienten entstehen und die Integrale auch nicht immer als Grenzen von Summen auftreten, sondern auch durch Umkehrung von Differentiationen usw. entstehen.[2])

Für die Schule möchte ich persönlich die Zeichen dy/dx und $\int f(x)dx$ gern vermieden wissen, letzteres natürlich nur wegen des in ihm auftretenden dx. Man bezeichnet hier anfangs die Elemente von x und y, die ja zunächst nur beliebig klein sind, wohl besser durch ξ und η, und benutzt ferner gewöhnliche Summenzeichen, um die erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten zu vermeiden, die in der allerdings technisch sehr schmiegsamen Bezeichnung von Leibniz liegen.

Andererseits läßt sich für die Verwendung jener Zeichen mit gutem Rechte sagen, daß die Einführung in die Anfänge der Infinitesimal-

1) Einer jetzt oft auftretenden Behauptung gegenüber mag noch bemerkt werden, daß dx an und für sich kein Erzeugungsgesetz für x darstellt, wohl aber gibt $f'(x) \cdot dx$ für y ein solches an im Hinblick auf $y = f(x)$.

2) Vgl. bei Leibniz „calculus differentialis" und „calculus summatorius".

Rechnung, auch oder vielleicht sogar besonders denen dienen soll, welche später Mathematik nicht weiter treiben, aber doch gelegentlich auf Mathematisches angewiesen sind, wie z. B. Mediziner und Chemiker. Diese finden jene Zeichen in der Literatur vor und, wenn sie auch erfahrungsmäßig für deren Verständnis meist einer Auffrischung ihrer Schulkenntnisse bedürfen, so ist es doch zweckmäßig, daß ihnen dabei die Formelsprache nicht noch besondere Schwierigkeiten macht.

Jedenfalls sind die Ansichten in bezug auf die Verwendung jener Zeichen im Schulunterrichte immer noch geteilt.[1])

Die Fragen des Aktual-Unendlichen und des Potenziell-Unendlichen bleiben der Schule wohl besser fern, sie weisen hin auf den alten Gegensatz zwischen Parmenides (Sein) und Heraklit (Werden)[2]). Es genügt, wenn der Schüler das Infinitesimal-Prinzip einigermaßen kennen gelernt hat: die Bestimmung des Ganzen aus Elementen ist immer das treibende Moment dabei.[3])

Gegenüber dem weitmaschigen Netze der Begriffsbestimmungen anderer Wissenschaften ist bei der Verwendung des Infinitesimal-Prinzipes gewissermaßen Filigran-Arbeit zu leisten, und für diese ist der Begriff der (geordneten) Mannigfaltigkeit stets sozusagen die Unterlage.

Mit Rücksicht auf einen ständigen Gegenstand der einschlägigen Literatur mag noch das Bedenken kurz berührt werden, daß sich in der Frage ausspricht: „Warum gilt der Beweis, der an diesem bestimmten Dreieck geführt worden ist, für jedes beliebige Dreieck?“ Die Antwort lautet: Der Beweis wird gar nicht an diesem bestimmten Dreieck geführt, er benutzt vielmehr nur die Begriffskonstruktion „geschlossener Streckenzug von dreifacher Brechung“, die durch ein beliebiges gezeichnetes oder gezeichnet-gedachtes Dreieck veranschaulicht werden kann, wobei aber dessen besondere Eigenschaften für den Beweis nicht verwendet werden. So steht es bei allen Begriffskonstruktionen der Mathematik (Arithmetik usw.) im Hinblick auf ihre Veranschaulichung; die blitzschnelle Vergleichung aller möglichen Fälle, die man zur Erklärung herangezogen hat, besteht tatsächlich nur in der Phantasie.

Der Unterschied des induktiv-deduktiven (reine Induktion gibt es nicht!) und des deduktiven Verfahrens ist zu klären. Dabei erinnert man daran, daß in der Geschichte der Mathematik, und auch dementsprechend auf der unteren und mittleren Stufe der Schule die Mathematik nach induktiv-deduktiven Verfahren entstanden ist, während ihr Abschluß deduk-

1) Zu der ganzen Frage der Infinitesimalrechnung vgl. noch „Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus in Göttingen 1912“, herausgegeben von Weinreich, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 43, 1912. 2) Vgl. dazu namentlich Nr. 3o.

3) Das zeigte sich auch bei den modernen Arbeiten, welche in erneuter und verschärfter Form die Fragen nach der Länge einer Linie, dem Areal einer Fläche, dem Volumen eines Körpers usw. behandeln, auf die schon Bolzano so energisch hingewiesen hat, und u. a. den Begriff der Kurve (Jordan-Kurve usw.) erst zu klären versuchen. Vgl. dazu bei F. Klein besonders Nr. 78i und 78m.

tiv ist auf Grundlage der Axiomatik. Es ist äußerst zweckmäßig, auch auf der Oberstufe noch induktiv-deduktiv zu arbeiten, z. B. bei der Vorbereitung der Ableitung des Eulerschen Satzes für Polyeder.

Selbstverständlich sind auch gelegentlich die Denkgesetze zu formulieren, wobei den Satz vom Grunde wiederum die Elimination und Substitution der Mathematik erläutert.

Natürlich wird man auch auf die Sprache der Mathematik und auf ihr besonderes Zeichensystem hinweisen, im Gegensatz zur Sprache des gemeinen Lebens. Was sagt uns nicht alles eine Formel, z. B. aus der mathematischen Physik?[1]) Die Schöpfung der mathematischen Formelsprache war notwendig, um die erforderliche Schärfe der begrifflichen Darstellungen zu erzielen, sie hat aber, obwohl sie ein ziemlich vollendetes Kunstwerk darstellt, doch ihre Mängel[2]), die sich zum Teil daraus erklären, daß die geschichtliche Entwicklung über die ursprünglichen Bestimmungen hinausgewachsen ist. Auch die Sprache der Mathematik hat ihre Äquivokationen und ihre Synonyme. Daß die Operationszeichen (+ –) und die Größensignaturen (+ –) zusammenfallen, macht gerade den Anfängern große Schwierigkeiten; man vermeidet sie, wenn man nach dem Vorgange von Weierstraß zunächst -7 durch $7'$ bezeichnet.[3]) Sehr vieldeutig sind die Worte Synthesis und Analysis, so daß sie von Fall zu Fall ausführliche Erläuterungen notwendig machen. An die Vieldeutigkeit des Wortes „Wurzel" braucht nur erinnert zu werden. Ebenso hat z. B. das Gleichheitszeichen mindestens drei Bedeutungen, gelegentlich vermittelt es eine Definition, sonst zeigt es die Ersetzbarkeit an, und zwar entweder eine vorhandene (analytische Gleichung) oder eine zu vollziehende (Bestimmungsgleichung). An die Vieldeutigkeit der Null, auf die besonders Herr Simon öfter hingewiesen hat, mag auch noch erinnert werden.

Auf die modernen Entwickelungen der mathematischen Zeichensprache bei Peano u. a., welche diese möglichst vollkommen gestalten wollen, kann auch auf der Schule gelegentlich hingewiesen werden, ein Analogon für die Grammatik findet man in der „Algebra der Grammatik" von Herrn Stöhr (Nr. 141).

Im übrigen geben für das Logische die gebräuchlichen Kompendien genügend Beispiele, namentlich die von Drobisch und Wundt, auch das von Lotze, ebenso findet man in Höflers Grundrisse gute Auskunft.[4])

---

1) Vgl. Nr. 124 b.

2) Hierher gehört auch Fr. Försters Hinweis auf gewisse Verkehrtheiten beim Aussprechen und beim räumlichen Hinschreiben der Zahlenausdrücke. Vgl. dessen Abhandlung „Das neue Jahrhundert und die Reform unseres Zählungswesens" in den Mitteilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik Jahrg. 11 Heft 1.

3) Es ist dies eigentlich ein Rückgang zur ursprünglichen geschichtlichen Bezeichnung.

4) Vgl. auch Nr. 47.

4. Die Systematik des mathematischen Unterrichts.

A) Allgemeines.

Der Abschluß des Unterrichts, der auf induktiv-deduktivem Wege unter reichlicher Verwendung der Anschauung begonnen hat, muß die Mathematik als System erkennen lassen. Dazu ist in positiver Hinsicht erforderlich, daß alle Zusammenhänge, welche schließlich zu Tage treten sollen, von vornherein vorbereitet werden, in negativer Hinsicht, daß der endliche Zusammenschluß nicht gehindert wird.

Was den letzteren Punkt anlangt, so handelt es sich dabei auch um den Ausschluß der Kunstgriffe, die früher die geometrischen Konstruktionen und die Lösungen der Gleichungen oft beherrschten. Aus der Untersuchung einer Figur soll für den Schüler folgen, was zu ihrer indirekten Bestimmung durch eine Konstruktion nötig ist, und welche Beziehungen die einzelnen Stücke zeigen. Geht man in der Theorie der kubischen Gleichungen, was durchaus praktisch ist, zunächst den historischen Weg, indem man die Formel von Cardano und die goniometrische Formel für den Casus irreducibilis gibt, so hat man doch schließlich die Lösung mit Hilfe der Beziehungen von Wurzeln und Koeffizienten vorzunehmen, die der Schüler unter Leitung selbst zu finden vermag. Ebenso ist darauf hinzuweisen, daß die meisten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz eine Reihe von Kunststücken darstellen. Seine natürliche Stelle findet er in der Lehre von der Ähnlichkeit. Bezeichnet man (vgl. Fig. 4) die Teildreiecke des rechtwinkligen Dreiecks durch I und II und dieses selbst durch III, so ergibt sich die Tabelle für die Proportionen

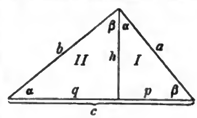


Fig. 4.

	α	β	$90°$
I	p	h	a
II	h	q	b
III	a	b	c

In diesen finden sich neben $h^2 = pq$ auch die Gleichungen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$, die bei der Addition den Lehrsatz geben. Schließlich liefert der Satz, daß sich die Flächen ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, ohne weiteres für einen Proportionalitätsfaktor m die Ansätze

$$I = m \cdot a^2$$
$$II = m \cdot b^2$$
$$III = m \cdot c^2$$

Da $I + II = III$ ist, so folgt unmittelbar der Pythagoräische Lehrsatz.[1])

1) Vgl. Nr. 167h und ferner W. Lietzmann „Der pythagoräische Lehrsatz" in Nr. 95, Bändchen 3.

Die in der Wissenschaft heute zum Teil übliche Berufung auf „willkürliche“ Vereinbarungen und die Verbindung von Worten ohne Bedeutung mit bestimmten Zeichen, wie sie einzelne Darstellungen der Axiomatik geben, sind für die Schule nicht zu gebrauchen.

Im Systeme der Schulmathematik darf schließlich keine Lücke bleiben. Natürlich ist es aber zulässig, eine solche durch historische Aufnahme zu schließen, wenn ihre wirkliche Ausfüllung für die Schule nicht gut durchführbar ist. So wird man z. B. den grundlegenden Satz für die Gleichungstheorie „Jede algebraische Gleichung vom Grade n hat genau n Wurzeln“ (Gauß), nur mit einer guten Generation beweisen, sonst wird man ihn mindestens zum Teil historisch aufnehmen müssen. Man setzt also etwa voraus „Jede algebraische Gleichung hat mindestens eine Wurzel“ und geht von hier aus weiter, im übrigen auf die Werke von Gauß verweisend.

Jede „Erschleichung“ ist natürlich streng zu vermeiden, ebenso alle Arten von Scheinbeweisen.

Wir wollen nun noch die einzelnen Gebiete der Mathematik in ihrer Stufenordnung betrachten, wie sie durch die Folge Arithmetik, Geometrie, Phoronomie, Dynamik bestimmt wird, an und für sich und als Mittel, eine eindeutige Ordnung des Geschehens zu erkennen und darzustellen und dadurch die Natur zu beherrschen. Das absolute Maßsystem, welches außer Zahlen (Arithmetik) der Reihe nach die Einheiten Strecke (Geometrie), Dauer (Phoronomie) und Masse (Dynamik) für die Bildung seiner Größen verwendet, gibt dabei den Zielpunkt an.

Während die Arithmetik zum Begriffe einer n-fachen Mannigfaltigkeit führt, untersucht die Geometrie die bestimmte Mannigfaltigkeit, welche wir als „Raum“ bezeichnen. Die Phoronomie setzt die Bewegungen der Gebilde im Raum zur Zeit in Beziehung, während die Dynamik im Hinblick auf das Tatsächliche der Sinnenwelt die gegenseitige Beeinflussung dieser Gebilde darstellt.

Ob die Bewegung, lediglich als Lagenänderung gefaßt, in der Geometrie verwendet werden soll, ist bekanntlich eine Frage, die von verschiedenen Standpunkten aus verschieden beurteilt wird, und darum kann die Phoronomie der Lage (Kinematik) auch der Geometrie zugerechnet werden.

Für unsere Zwecke genügt es, die Grundlage der Arithmetik etwas ausführlicher zu behandeln, weil für die Geometrie bereits alles Erforderliche in guten Darstellungen vorliegt und weil über die Mechanik bei dem augenblicklichen Stande der Probleme für die Schule doch kaum etwas Abschließendes gesagt werden kann, was den Rahmen der „klassischen Mechanik“ überschritte.

Statt dessen soll noch für die einzelnen Gebiete der Mathematik kurz angedeutet werden, wie ich in meinem Unterrichte in Prima den systematischen Abschluß zu geben suche, womit natürlich nur gezeigt werden soll, wie man es machen kann, und nicht etwa, wie man es machen muß. Dabei bemerke ich ausdrücklich, daß ich diesen systematischen Abschluß auch als Lehrer am Gymnasium (bis Herbst 1894) durchgeführt habe, natürlich unter Beschränkung des Aufgabenmateriales. Dem Gymnasium gegenüber liegt das Übergewicht der Oberrealschule nicht im Mathematischen, sondern im Naturwissenschaftlichen.

B) Arithmetik (Algebra, Analysis usw.).

a) Grundlegende Betrachtung.

Die beiden Zwecke, welchen die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,... dient, haben sprachlich ihren Ausdruck in den Worten „Ordinalia" und „Cardinalia" erhalten. Wenn wir Häuser in einer Straße oder Blätter eines Buches usw. durch Paarung mit der Reihe 1, 2, 3, ... bezeichnen, so kommt es uns nur auf die Ordnung in der Folge an, während drei Menschen oder fünf Bäume auf ein Quantum hinweisen. Die selbständigen Bildungen von Ordinalien sind gemäß der Ökonomie der Sprachentwicklung meist von den Bildungen der Kardinalien aufgesaugt worden, doch zeigen Anfänge, wie unus, duo, tres, ... und primus (prae, prior), secundus (sequi), tertius, ... noch deutlich den gedanklichen Unterschied an. Leider sind die Zahlennamen der Kulturvölker fast alle in etymologischer Beziehung nicht zu deuten, ein Zeichen dafür, welche lange Kulturarbeit in ihnen erstarrt vorliegt. Eine Ausnahme macht z. B. die hebräische Bezeichnung für 5, in der noch deutlich die Anschauung der Hand mit ihren fünf Fingern nachwirkt. Hält man das Wort Zahl als Oberbegriff fest, so weisen uns Ordnungszahl und Anzahl (Kardinalzahl) auf eine „Arithmetik der Lage" und eine „Arithmetik des Maßes" hin, wenn man gangbare Bezeichnungen der Geometrie auf die Arithmetik überträgt.

In psychologischer Hinsicht liegt der Ursprung der Ordnungszahl in dem Umstande, daß wir alle Erscheinungen in der Zeit ordnen, während in jedem Augenblicke ein Außereinander von psychischem und physischem Inhalte gegeben ist, dessen quantitativer Charakter schließlich durch das Wort „Anzahl" bezeichnet wird, womit die Kardinalzahl ihr Recht erhält.

Auch in der Arithmetik ist, den Bedürfnissen des Lebens entsprechend, die „Arithmetik des Maßes" früher entwickelt worden, als die „Arithmetik der Lage", für welche erst Herr Dedekind eine einwandfreie Entwicklung gegeben hat, während sich Anfänge davon u. a. bei den Brüdern Graßmann, bei v. Helmholtz u. a. finden.

In logischer Hinsicht baut sich die Arithmetik der Lage auf durch „Reihung" und „Paarung", die Arithmetik des Maßes durch „Klassenbildung" und „Paarung" unter sekundärer Verwendung der „Reihung".

α) Die Arithmetik der Lage.

In psychologischer Hinsicht sind Reihungen mannigfacher Art etwas ganz Gewöhnliches, und es handelt sich zunächst darum, dieses Gebiet zu logisieren, d. h. einen Oberbegriff „Reihung“ als Invariante zu bilden, welche die logische Grundlage für alles Weitere bildet.

Wenn a ein Ding, d. h. irgend etwas mit sich selbst Identisches bezeichnet und $\varphi(a) = b$ den Gedanken an dieses Ding, $\varphi(b) = c$ wiederum den Gedanken an b usw., so gibt die Reihe

$$a,\ b = \varphi(a),\ c = \varphi(b),\ d = \varphi(c), \ldots$$

ein Beispiel, an das die Logisierung anknüpfen kann. In ihr soll nur das Gemeinsame aller Reihungen zum Ausdruck kommen, und dieses besteht in der Tatsache „a steht vor b, b steht vor c, c steht vor d, usw.“

Für diese Beziehung von Glied zu Glied kann man die Bezeichnung $a < b$, $b < c$, $c < d, \ldots$ einführen, falls man nur die Begriffe „größer“ und „kleiner“ in keiner Weise daran haften läßt.

Nachdem die Reihung durch Einführung der Zeichen $a, b, c, d, \ldots$ der Zeit entzogen ist, kann man sie auch umgekehrt durchlaufen denken und die Bezeichnung $\ldots d > c$, $c > b$, $b > a$ einführen, welche aber nur bedeutet „d steht hinter c“ usw. Die Reihe ist als eine offene Reihe zu betrachten, die zunächst im Sinn $a, b, c, d, \ldots$ und dann auch im Sinn d, c, b, a beliebig fortsetzbar ist. Sie hat also die Gestalt:

$$\ldots a,\ b,\ c,\ d, \ldots.$$

Daß die Bestimmungen $a < b$ und $b < c$ die Bestimmung $a < c$ nach sich ziehen, bedingt den Charakter des Offenen.

Von zeitgenössischen Erkenntnistheoretikern gehen u. a. G. F. Lipps und Natorp von der „Urreihe“ aus, von Mathematikern vor allem Veronese und Enriques[1]) und auch Pringsheim. Herr Dedekind scheidet die Urreihe durch eine ordnende Abbildung aus einer unendlichen ungeordneten Menge aus, aber sein Beweis für die Existenz unendlicher Mengen (unter Benutzung des eigenen Ich) ist angefochten worden, und ebenso mit Rücksicht auf die Paradoxien der Mengenlehre sein Begriff des Systems (Menge). Es scheint also zweckmäßig, seine Entwicklung erst von der Stelle an zu benutzen, in der die „Reihung“ festgelegt ist.

Daß mit dieser Reihung $a, b, c, d, \ldots$, so einfach sie auch zu sein scheint, eine Fülle von Gesetzmäßigem mit gegeben ist, zeigt die Paarung von Gliedern der Reihe nach einer bestimmten Vorschrift, wie sie Herr Dedekind ausführt. Wir bezeichnen dazu mit m' das Glied, welches auf m folgt, mit $(m')'$ oder kürzer mit m'' das Glied, welches auf m' folgt, usw. und ersetzen die Reihe $a, b, c, d, \ldots$ lediglich aus mnemotechnischen Gründen durch die geläufige Reihe $1, 2, 3, 4, \ldots$. Wir bilden nun durch Paarung aus der gegebenen Reihe eine neue Reihe und bezeichnen die Art der Paarung durch φ_m, wobei m eine feste Stelle der alten Reihe bezeichnen mag. Bezeichnet n eine beliebige Stelle der alten Reihe, so soll die besondere Art der Paarung φ_m bestimmt sein durch die Vorschriften:

1) In Anlehnung an Peano und Dedekind.

$$\text{I } \varphi_m(1) = m' \qquad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes),}$$
$$\text{II } \varphi_m(n') = [\varphi_m(n)]' \qquad \text{(Rekurrierende Definition).}$$

Nr. I bedeutet nur, daß den Anfang der neuen Reihe das Glied bilden soll, welches in der alten Reihe auf m folgt, während Nr. II besagt, daß mit dem beliebigen Gliede n' der alten Reihe, das in dieser auf n folgt, immer das Glied der neuen Reihe gepaart werden soll, welches dem mit n bereits gepaarten Gliede folgt. In Verbindung mit Nr. I gibt für $n = 1$ Nr. II die Bestimmung

$$\varphi_m(2) = [\varphi_m(1)]' = [m']' = m''$$

und für $n = 2$ gibt II weiter die Bestimmung

$$\varphi_m(3) = [\varphi_m(2)]' = [m'']' = m''' \text{ usw.}$$

Für $m = 7$ hat man z. B. $m' = 8$, $m'' = 9$ usw. und demgemäß die Paarung

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\ 8, & 9, & 10, & 11, & \ldots. \end{matrix}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe aus der ersten durch gliederweise vorgenommene Addition von 7 entstanden ist, und man zeigt leicht durch den Schluß von n auf $n + 1$, daß die grundlegenden Sätze der Addition tatsächlich in unserer Paarung φ_m gegeben sind. Benutzen wir der Einfachheit wegen die geläufige Sprache der Arithmetik des Maßes, so lauten diese Sätze bekanntlich

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(Verschmelzungsgesetz),}$$
$$a + b = b + a \quad \text{(Vertauschungsgesetz).}$$

Wir betrachten nun die Vorschrift für eine neue Paarung ψ_m, welche bestimmt ist durch

$$\text{I } \psi_m(1) = m \quad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes),}$$
$$\text{II } \psi_m(n') = \psi_m(n) + m \quad \text{(Rekurrierende Definition).}$$

In Verbindung mit Nr. I gibt Nr. II für $n = 1$

$$\psi_m(2) = \psi_m(1) + m = m + m$$

und für $n = 2$ gibt Nr. II weiter

$$\psi_m(3) = \psi_m(2) + m = m + m + m$$

usw. Für $m = 7$ hat man z. B. zu paaren $7, 7 + 7, 7 + 7 + 7, \ldots$ und es entsteht die Paarung

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\ 7, & 14, & 21, & 28, & \ldots. \end{matrix}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe aus der ersten durch gliederweise vorgenommene Multiplikation mit 7 entstanden ist, und man zeigt leicht durch den Schluß von n auf $n + 1$, daß die grundlegenden Sätze der Multiplikation tatsächlich in unserer Paarung ψ_m liegen. Benutzen wir der Einfachheit wegen wieder die geläufige Sprache der Arithmetik des Maßes, so lauten diese Sätze bekanntlich:

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{(Verschmelzungsgesetz)},$$
$$ab = ba \quad \text{(Vertauschungsgesetz)},$$
$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{(Verteilungsgesetz)}.$$

Wir betrachten nun ferner die Vorschrift für eine dritte Paarung θ_m, welche bestimmt ist durch

$$\text{I} \quad \theta_m(1) = m \quad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes)},$$
$$\text{II} \quad \theta_m(n') = m\theta_m(n) \quad \text{(Rekurrierende Definition)}.$$

In Verbindung mit Nr. I gibt Nr. II für $n = 1$

$$\theta_m(2) = m\theta_m(1) = m \cdot m$$

und für $n = 2$ gibt Nr. II weiter

$$\theta_m(3) = m\theta_m(2) = m \cdot m \cdot m \quad \text{usw.}$$

Für $m = 7$ erhält man also hier die Paarung

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\ 7, & 49, & 343, & 2401, & \ldots. \end{array}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe die Potenzen der Zahl (Basis) 7 enthält, für welche die erste Reihe die zugehörigen Exponenten liefert. Durch den Schluß von n auf $n + 1$ zeigt man wieder, daß die grundlegenden Sätze des Potenzierens in der Abbildung θ_m liegen.

Nennt man die durch Paarung aus der ersten Reihe entstandene zweite Reihe eine Abbildung der ersten, so entstehen durch Umkehrung der betrachteten Abbildungen die Beziehungen, welche in der Arithmetik des Maßes durch Subtraktion, Division, Radizierung bzw. Logarithmierung bezeichnet werden.

Dabei reicht die ursprüngliche Reihe

$$\ldots a, b, c, d, \ldots$$

aus, um die Abbildung, welche der Subtraktion entspricht, darzustellen, während sie für die anderen Abbildungen durch Einschaltung neuer Glieder erweitert werden muß.

Da nur die Beziehungen $a < b$, $b < c$, $c < d, \ldots$ für die Bildung der ursprünglichen Reihe erforderlich sind, so werden die Einschaltungen auch nur durch die Beziehung $<$ bestimmt, d. h. ein neues Glied ist immer völlig gegeben, wenn man angeben kann, welche alten Glieder vor ihm stehen und welche alten Glieder hinter ihm stehen. Solange man neben der Reihe 1, 2, 3, ... nur die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, ... betrachtet, genügt die Angabe $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{2}{2} = 1$, $1 < \frac{3}{2} < 2$ für deren Einschaltung.

Innerhalb dieser ganzen Auffassung bildet die Dedekindsche Theorie des Schnittes[1]) und nur diese den Abschluß für die Bildung des reellen Zahlengebietes. Sucht man Stellen für die Zahlen, deren Quadrate die Reihe 1, 2, 3, ... bilden, so ist schon für $x^2 = 2$ eine neue Stelle zu bestimmen, und diese ist vollständig bestimmt, wenn man angibt, welche von den bereits definierten Stellen vor ihr und hinter ihr liegen.

Der hiergegen gemachte Einwurf, daß man mit noch so dicht gestellten Netzen in einem Karpfenteiche keinen Karpfen fangen kann, wenn keiner darin ist, würde die Dedekindsche Theorie des Schnittes nur treffen, wenn man sie vom Standpunkte der Arithmetik des Maßes aus betrachtete, was aber bei unserer Auffassung unzulässig ist. Innerhalb der „Arithmetik der Lage" sind die Zahlen nur Zeichen für eine bestimmte Stelle innerhalb eines gegebenen oder zu schaffenden Stellensystems, dessen Gesetz allein in der Bezeichnung $<$ oder $>$ liegt.

Damit erledigt sich auch ein Einwurf von Herrn Höfler[2]) der Sache nach, wenn er auch in bezug auf den Wortlaut mancher Angaben im Rechte ist. Er sagt: „So hält z. B. jede Definition, die die Zahl nur als Zeichen erklärt, schon nicht stand vor der einfachen (auch einem geschickten Schüler zuzutrauenden) Gegenfrage: Muß denn nicht jedes Zeichen doch etwas bezeichnen? Ein Zeichen ohne Bezeichnetes ist ja doch ebenso unmöglich wie ein Gatte ohne Gattin, ein Großes ohne Kleines, eine Ursache ohne Wirkung." Herr Höfler knüpft dabei an den bekannten Meinungsaustausch der Herren F. Klein und A. Pringsheim an (vgl. Nr. 78g und h und Nr. 115c und d), aber für Pringsheim sind die Zahlen doch „Zeichen, denen eine eindeutig bestimmte Sukzession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann".

Herr Dedekind hat bekanntlich seine „Arithmetik der Lage" nicht vollständig dargestellt, während Herr H. Weber in seiner Algebra und auch in der „Encyklopädie der Elementarmathematik" im wesentlichen auf der von Dedekind gegebenen Grundlage die ganze Arithmetik aufbaut, namentlich was die sogenannte „Erweiterung des Zahlenbegriffes" anlangt.

β) Die Arithmetik des Maßes.

In psychologischer Hinsicht ist zu betonen, daß wir kleinere Anzahlen (5 bis 6) unmittelbar auffassen und mit ihnen vielleicht auch einfache Rechenoperationen vollziehen, ohne dabei die Reihung 1, 2, 3, ... zu benutzen. Daß größere Anzahlen uns erst durch das Positionssystem zugänglich werden, hat u. a. Herr Husserl[3]) mit Recht betont, und durch diese Bemerkung gewinnt auch die früher nicht recht verstandene „Sandrechnung" des Archimedes eine bestimmte Bedeutung, auf die Herr H. Weber

1) Vgl. Nr. 24a.
2) Vgl. Nr. 69b, S. 432.
3) Vgl. auch in bezug auf die Praxis der Volksschule in diesen Imuk-Abhandlungen Bd. V, Heft 1, S. 28 u. f.

u. a. in einer Anmerkung zu der von ihm besorgten deutschen Ausgabe von Poincarés Buche „Der Wert der Wissenschaft" ausführlich eingeht.[1])

Für die Arithmetik des Maßes hat die Mengenlehre in logischer Hinsicht die erforderliche Grundlage geschaffen, und zwar beruht diese auf Klassenbildung und Paarung. Endliche Mengen, deren Elemente sich paaren lassen, bilden eine Klasse, und jede dieser Klassen hat eine bestimmte Invariante, welche als „Anzahl" bezeichnet wird.

Dabei sind endliche Mengen nach Dedekind dadurch bestimmt, daß sie sich nicht mit einem (echten) Teile ihrer selbst paaren lassen. Ist dies möglich, so heißt die Menge unendlich.

Die einfachsten Beispiele für solche Paarungen sind die Paarungen der Anzahlen mit den geraden Anzahlen oder mit den ungeraden Anzahlen, gemäß dem Schema:

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$
$$2, 4, 6, 8, \ldots,$$
$$1, 3, 5, 7, \ldots.$$

Würden wir Anzahlen auch über die Grenze 5 oder 6 hinaus unmittelbar anschaulich erfassen, was an sich ja durchaus möglich erscheint (vgl. Rechengenies wie Dahse) so würden wir vermutlich auch die Arithmetik des Maßes bis zu einem gewissen Grade selbständig aufbauen können. Da dieses aber nicht der Fall ist, so ist man gezwungen, die Anzahlen zu ordnen, und zwar wählt man dafür die Reihung 1, 2, 3, 4, ... und gewinnt damit den Anschluß an die Arithmetik der Lage, aus Ökonomie dasselbe Zeichensystem verwendend. Trotzdem bleibt der Gedanke der Klassenbildung hier das leitende Prinzip, und zwar faßt man dabei stets die Elemente einer Klasse als gegenseitig-ersetzbar auf. Bestimmt man die Anzahl einer Gruppe von Bäumen auf 10, so zeigt man schon durch den Ausdruck (Bäume), daß dabei von allem Individuellen abgesehen wird und daß jeder Baum „dasselbe" bedeuten soll. So liegt auch schon logisch in der Anzahl das, was sprachlich durch die Multiplicantia und Distributiva bezeichnet wird, denn zehn Bäume sind uns lediglich zehnmal je ein Baum. So wenig die Anzahl als Invariante einer Mengenklasse mit dem Maßbegriffe zu tun hat, in so enge Verbindung tritt sie doch zu ihm, wenn man nach der Bedeutung dieser Invariante für die einzelne Menge der Mengenklasse fragt, und in dieser Bedeutung gerade wurzelt in psychologischer Hinsicht die Anzahl.

Indem man je n Einheiten immer zu einer neuen Einheit zusammenfaßt, gelangt man zu Übereinheiten (Zweier, Dreier, Vierer usw.), und die Umkehrung dieses Prozesses führt zur Zerlegung der Einheit in n gegenseitig-ersetzbare Teile, d. h. zu Untereinheiten (Halbe, Drittel, Viertel usw.).

1) Vgl. Nr. 113b, S. 225.

Das Bedürfnis nach Übersicht zwingt wieder zur Ordnung, und die Ökonomie verlangt, daß man dabei die alte Reihe 1, 2, 3, 4, ... benutzt.

Indem man diese für die Einschaltung der Drittel auffaßt als 3 Drittel, 6 Drittel, 9 Drittel, 12 Drittel, ... gelingt es gemäß dem ursprünglichen Schema 1, 2, 3, 4, ..., auch 1 Drittel, 2 Drittel usw. einzuordnen.

Die Theorie des Irrationalen, welche dieser Betrachtungsweise entspricht, ist von Weierstraß gegeben worden.

Die Rechenregeln der Addition usw. folgen hier sehr einfach, solange man sich auf endliche Mengen beschränkt. Bildet man aus zwei Mengen A und B mit den Anzahlen a und b eine dritte C mit der Anzahl c, so sieht man die Elemente von A, die gegenseitig-ersetzbar waren, und die Elemente von B, die gegenseitig-ersetzbar waren, in der Menge C als gegenseitig-ersetzbar an. Man hat dann ohne weiteres

$$c = a + b = b + a.$$

Ebenso gilt bei der Vereinigung von drei Mengen A, B, C zu einer Menge D ohne weiteres:

$$d = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Die Multiplikation ist hier zunächst nur eine Addition gleicher Posten, die Division eine Subtraktion gleicher Posten, für welche dann eine abgekürzte Schreibweise benutzt wird, die sich als äußerst fruchtbar erweist.

Die Einführung des Negativen liegt hier in dem Gedanken, daß zwei Arten der Einheit nebst Übereinheiten und Untereinheiten nötig sind, um bestimmte Aufgaben lösen zu können. Für die beiden Einheiten, welche e und e' heißen mögen, hat man die lineare Gleichung $e + e' = 0$ anzusetzen.

Dabei ist das Zeichen 0 zunächst die Invariante der leeren Systeme. Jeder Jäger der Urzeit, der seine Vorratskammer erschöpft sah und wieder zum Bogen greifen mußte, um für sich und die Seinen Nahrung zu beschaffen, hatte eine Anschauung von der Null. Daß den sprachlichen Ausdrücken wie „Nichts" usw. erst spät ein mathematisches Zeichen (0) gefolgt ist, ändert daran nichts; auch ein Positionssystem läßt sich ohne das Zeichen 0 herstellen. Vor Einführung der negativen Zahlen ist es in der Tat ziemlich gleichgültig, ob man die Reihe 1, 2, 3, 4, ... oder die Reihe 0, 1, 2, 3, 4, ... bildet.

Ebenso liegt die Einführung des Imaginären in dem Gedanken, daß noch ein zweites Einheitenpaar i und i' erforderlich ist, um bestimmte Aufgaben zu lösen. Während für dieses wieder die Gleichung $i + i' = 0$ anzusetzen ist, wird die Verbindung zwischen dem ersten und dem zweiten Paare durch eine quadratische Gleichung hergestellt, nämlich durch $e^2 + i^2 = 0$, und darum läßt sich Reelles und Imaginäres nicht linear ineinander umrechnen, wie etwa Meter und Zentimeter.

γ) **Die Verbindung der beiden Arten der Arithmetik.**

Sind die Zeichen für die Ordinalia und für die Cardinalia verschieden, so entstehen zwei Reihen, welche schließlich zu einer Reihe zusammengefaßt werden können. Daß die Ordnung auch für die Arithmetik des Maßes erforderlich ist, wurde schon erwähnt, aber die Reihung ist hier im Grunde nicht ein Stellensystem wie bei der Arithmetik der Lage, sondern nur ein Mittel der Übersicht.

Umgekehrt lassen sich aber auch in der Reihe der Ordinalia

$$a, b, c, d, \ldots$$

die Schritte von a zu b, von b zu c, von c zu d, usw. der Invariantenfolge

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

zuordnen.

Da jeder einzelne Schritt dabei in bezug auf jeden andern als gegenseitig-ersetzbar angesehen werden muß, so sind nun auch bei einer graphischen Darstellung der Reihe $a, b, c, d, \ldots$ auf einer Geraden zwischen den Stellen $a, b, c, d, \ldots$ gleiche Strecken einzuführen.

Bei der Verschmelzung der Ordinalreihe und Kardinalreihe wird es auch erforderlich, in ersterer den Schritt zu a, d. h. die erste Setzung[1]) mitzurechnen, und dazu muß ein besonderes Zeichen für den Anfang des Schrittes angeführt werden. Vergleicht man die Reihung $a, b, c, d, \ldots$ mit den einzelnen Stufen einer Treppe, so fehlt noch der Podest. Es ist zweckmäßig, dafür die Invariante der leeren Systeme zu wählen, so daß die Reihe

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

nun auch für die Arithmetik der Lage Bedeutung hat.

Ursprünglich ist für sie die Lage der Nullstelle durchaus relativ, wie die Verschiebung jeder Skala zeigt.

Dagegen ist die Relativität der Einheit, welche sich in der Bildung von Übereinheiten und Untereinheiten zeigt, ein Begriff, der lediglich der Arithmetik des Maßes angehört.

Die verschiedenen Bedeutungen der Null, auf die namentlich Herr M. Simon öfter hingewiesen hat, ergeben sich zum Teil aus obigen Bemerkungen. Die „unechte" Null, welche im Anschluß an Euler[2]) u. a. immer noch hie und da zur Erläuterung des Differentiales verwendet wird, sollte überhaupt beseitigt werden.

Der Verschmelzung der beiden Zweige der Arithmetik scheint mir die dritte Theorie des Irrationalen, welche durch G. Cantor gegeben worden ist, zu entsprechen.

Bei dieser Verschmelzung tritt auch die Frage auf, wieviel (Anzahl) verschiedene Reihungen (Ordnung) eine Menge von n Elementen liefert.

---

1) Vgl. Nr. 105e, S. 98 u. f.

2) So heißt es z. B. bei Euler in der Vorrede zu den Institutiones calculi integralis (1755): quod nihilum ... signo dx representari eiusque differentiale vocari solet. Anderseits hat Euler auch in derselben Vorrede die Definition durch den limes.

Hier werden die Elemente insofern als verschieden angesehen, als man sie ordnen will, und insofern als gegenseitig ersetzbar (gleich), als sie einer Menge angehören. Damit ist die Stelle bezeichnet, an welcher die Theorie der Permutationen einsetzt und des weiteren die Kombinationslehre überhaupt.

Die stetige Reihe der reellen Zahlen und die stetige Reihe der imaginären Zahlen geben den Begriff der linearen Mannigfaltigkeit erster Ordnung, für deren graphische Darstellung eine Gerade, aber ebensogut eine Parabel oder ein Hyperbelast usw. verwandt werden kann.

Will man aus beiden Reihen ein Gewebe herstellen, so dürfen sich beide Reihen nur in Nullpunkte als dem ihnen gemeinsamen Punkte durchsetzen, falls jede Stelle eindeutig bestimmt bleiben soll. Die bekannte Zahlenebene, in der aber reelle und imaginäre Achse zunächst durchaus nicht rechtwinklig auf einander zu stehen brauchen, gibt ein Bild für ein solches Gewebe, innerhalb dessen die gemeinen Komplex-Zahlen ihre sichere Stellung haben. Diesem Bilde entspricht der Begriff einer linearen Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung, für deren graphische Darstellung auch nicht gerade eine Ebene verwandt zu werden braucht, z. B. kann ebensogut ein hyperbolisches Paraboloid benutzt werden.

Denkt man sich nach dem Muster der Reihe der reellen Zahlen oder der Reihe der imaginären Zahlen n verschiedene Reihen aus n verschiedenen Einheiten gebildet, so gibt deren Verwebung ein Beispiel einer n-fachen Mannigfaltigkeit.[1])

Wir haben oben (vgl. S. 64 u. f.) auf die (unstetigen) Vorstellungs-Reihen und die Vorstellungs-Gewebe aus Verbalformen hingewiesen und erinnern jetzt daran, um zu betonen, daß der Begriff der n-fachen Mannigfaltigkeit von jeder besonderen Veranschaulichung unabhängig ist, aber nicht von jeder Veranschaulichung überhaupt.[2])

Bis zum Falle $n = 3$ werden immer (für den Punkt als Element) Gerade, Ebene und Raum, die Worte im Sinne Euklids gebraucht, die besten Veranschaulichungen der linearen Mannigfaltigkeiten sein.

Für die Schule haben ursprünglich Fr. Meyer (Halle a. S), M. Simon, H. Schubert u. a., sachgemäße Darstellungen der Arithmetik gegeben, zu denen in letzter Zeit die Werke von H. Weber (Nr. 162) und C. Färber (Nr. 39) hinzugekommen sind, neuerdings auch noch das Handbuch von Killing-Hovestadt (Nr. 77c). Dem Lehrer sind außerdem noch ganz besonders zu empfehlen die Vorlesungen von Herrn F. Klein, „Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus" (vgl. Nr. 78m).

b) Ausführung im Unterrichte.

Das Lehrziel der Arithmetik an den höheren Schulen ist ziemlich allgemein anerkannt, es lautet: „Verständnis der Logarithmen-

1) Vgl. H. Graßmanns Ausdehnungslehre von 1844 (Nr. 53).

2) Vgl. hier S. 49 Anm. 4.

Tafel." Der Schüler soll das Handwerkszeug, welches er in den letzten Jahren so viel gebraucht hat, auch noch in seiner Konstruktion genau kennen lernen, wobei zu bemerken ist, daß die Logarithmen-Tafel natürlich u. a. auch die Tabellen der goniometrischen Funktionen selbst enthalten muß, welche bei der ersten Einführung in die Trigonometrie ja zunächst die Hauptsache sind.

Ich beginne die zusammenfassende Wiederholung und Ergänzung der Arithmetik in der Prima etwa mit der Frage nach den Elementaroperationen, ihrer Eigenart, ihrer Stufeneinteilung (3) und ihrer Anzahl (7). Unter Hinweis auf die Zweigliedrigkeit[1]) des menschlichen Denkens wird betont, daß auf den verschiedensten Gebieten immer aus 2 Denkelementen a und b nach einem bestimmten Gesetze ein drittes c gebildet wird, was durch $c = (a, b)$ bezeichnet wird. Der Ansatz $c = (a, b)$ hat 2 Umkehrungen $a = (c, b)$ und $b = (c, a)$ und man sollte also in der Arithmetik bei 3 Stufen 9 Operationen erwarten oder vielleicht 6, aber nicht 7. Die Schüler finden meist von selbst, daß $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ im Gegensatze zu $a^b \gtrless b^a$ den Widerpruch löst, daß aber in logischer Hinsicht doch auch auf den Stufen 1 und 2 beide Umkehrungen vorhanden sind.[2]) Dabei wird bemerkt, daß die Begriffsdetermination nicht commutativ ist, (z. B. Kettenglieder und Gliederketten), und daß die gegenseitige Ersetzbarkeit von a und b, welche deren Vertauschung bedingt, auf den verschiedenen Gebieten, für die sie gilt oder gelten soll, von Fall zu Fall festgestellt werden muß. Nachdem auch das assoziative und das distributive Gesetz hervorgehoben ist, wobei die Operationen der 1. und 2. Stufe (4 Spezies) den 3 Operationen der 3. Stufe bereits scharf gegenübertreten, beginnt die eigentliche ergänzende und abschließende Wiederholung.

Bei einer mäßigen Schüler-Generation gehe ich von der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots$$

aus, ihren vielseitigen Charakter (Ordinalia usw.) hervorhebend.[3])

Bei einer guten Generation kann man in geschichtlicher, psychologischer und logischer Hinsicht über diesen Anfang zurückgreifen (vgl. hier a).

Für den Aufbau des Gebietes der gemeinen Komplexzahlen von der Reihe 1, 2, 3, ... aus wird das Permanenzprinzip (vgl. Nr. 59) verwendet, schließlich aber das gebrauchte Formelsystem $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$ usw. zusammengestellt, so daß eine axiomatische Grundlage entsteht, etwa wie bei F. Klein oder D. Hilbert u. a. Im einzelnen ist nichts besonderes zu bemerken, da die oben erwähnten Werke (vgl.

1) Vgl. Wundts Logik, Psychologische Einleitung (Nr. 169 b).

2) Vgl. dazu R. Schimmack „Zur Gleichung $x^y = y^x$" in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften, 1912.

3) Dabei wird man sich auch nicht den Hinweis auf die vor oder rückwärts schreitenden Beine des Papyrus Rhind als Operationszeichen für Addition und Subtraktion (im Sinne der Ordinalia?) entgehen lassen.

S. 105) hinreichende Anleitung geben; nur möchte ich hervorheben, daß die Theorie des Irrationalen streng begründet werden muß, wobei mir für die Schule der Weg von Weierstraß am günstigsten zu sein scheint. Natürlich wird man sich damit begnügen, die weitere Geltung der alten Rechenregeln des Rationalen nur für einen oder den andern Fall wirklich zu beweisen.

Die periodischen unendlichen Dezimalbrüche sind schon von der Unterstufe her bekannt und ihnen gegenüber werden die Irrationalzahlen zunächst am besten als unperiodische unendliche Dezimalbrüche eingeführt, wie es auch Herr F. Klein in seinen Vorlesungen für Anfänger tut.[1])

Die Zeichenregel wird ursprünglich als eine empirische Regel gemäß dem Permanenzprinzipe eingeführt. Wird z. B. für $5(3-2)$ probeweise angesetzt $\pm 5 \cdot 3 \pm 5 \cdot 2 = \pm 15 \pm 10$, so muß dies zu dem Ergebnisse 5 führen, und das ist nur der Fall, wenn das erste Zeichen $+$ und das zweite Zeichen $-$ ist, usw.

Den Beweis liefert man in Anlehnung an Weierstraß für 2 Einheiten $e = +1$ und $e' = -1$, die der Bedingung $e + e' = 0$ genügen, unter der Voraussetzung $e \cdot e = e$ gemäß dem Permanenz-Prinzipe durch Multiplikation von $e + e' = 0$ mit e und e', und zwar so:

1) $$e \cdot e + e \cdot e' = 0$$

$$e \cdot e' = -e \cdot e = -e$$

2) $$e \cdot e' = e' \cdot e$$

3) $$e' \cdot e + e' \cdot e' = 0$$

$$e' \cdot e' = -e' \cdot e = +e.$$

Graphische Darstellung (Zahlenebene). Geschichtliche Notiz über andere Formen der Arithmetik (Quaternionen usw.) und Charakterisierung der Einzigartigkeit der gemeinen Komplexzahlen als Abschluß bei „natürlicher" Axiomatik.

Weitere Beschäftigung mit dem Komplexen, als dessen Sonderfälle nun Reelles und Imaginäres auftreten.[2]) Der Parallel-Koordinaten-Darstellung $a \cdot e + b \cdot i$ tritt die Polar-Koordinaten-Darstellung $r[e \cdot \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi]$ gegenüber, die später durch die Exponentialfunktion ihre endgültige Formung erhält. Sätze von Moivre. Kreisteilung.

Gegenüber der direkten Bestimmung der Hauptoperationen haben schon deren Umkehrungen, unter Hinweis auf das reiche Material früherer Beispiele, Gelegenheit gegeben, auf die „indirekte" Bestimmung durch Bestimmungsgleichungen aufmerksam zu machen und diese zu klären.

---

1) Vgl. Nr. 78 m.

2) Historisch wird erwähnt, daß sich erst beim Übergange zum Komplexen bestimmte Fragen beantworten lassen und daß man dabei ganz von selbst wieder zum Reellen oder Imaginären zurückkehrt, wenn es das Problem fordert. Ein gutes Beispiel dazu gibt die Kreisteilung. Als Analogon dazu (sachgemäße Erweiterung des Gebietes) dient der projektive Beweis des planimetrischen Satzes von Desargues durch Übergang in den Raum.

Dabei ist bereits erkannt, daß die Lösung der Gleichung 1. Grades nur die vier Species erfordert (Eindeutigkeit); Körper der rationalen Zahlen. Die Gleichung 2. Grades rollt die Probleme des Irrationalen, Imaginären und Komplexen auf. Wiederholung der quadratischen Gleichung in methodischer Behandlung (1. Quadratische Ergänzung, 2. Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten, 3. Zerlegung gemäß $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. 4. Reduktion durch $x = y - \frac{p}{n}$ für $n = 2$). Für die kubische Gleichung führen, abgesehen von der historischen Lösung, mit der begonnen wird, von diesen Methoden Nr. 4 und Nr. 2 systematisch zum Ziele. Bei ausreichender Zeit wird auch die Gleichung 4. Grades behandelt, gemäß Methode Nr. 4 und Nr. 2. Allgemeines über algebraische Gleichungen im Gegensatz zu transzendenten. Die Bestimmung der Schwimmtiefe für einen geraden Zylinder führt z. B. bei vertikaler Achsenlage zu einer sehr einfachen algebraischen, bei horizontaler Achsenlage zu einer ziemlich verwickelten transzendenten Gleichung (arc α und sin α). Satz von Gauß (n Wurzeln) meist historisch für die Schule aufgenommen, sonst Beweis wie bei Weber (Nr. 162 (erste Auflage) I, S. 208 f). Summenform (Koeffizienten) und Produktform (Wurzeln) der Gleichung. Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten. Sie sind nach den Koeffizienten entwickelt und die Frage der Umkehrbarkeit dieses Systems (Entwicklung nach den Wurzeln) ist die Frage der allgemeinen Lösbarkeit der algebraischen Gleichungen. Historische Aufnahme des Satzes von Abel, daß die Gleichungen oberhalb des Grades 4 nicht allgemein lösbar sind, d. h. nicht durch Formeln, die auf den vier Species und einer endlichen Anzahl von Radizierungen beruhen. Symmetrische Gleichungen und Kreisteilungsgleichungen als einfachste Fälle der Abelschen Gleichungen. Charakterisierung der Bedeutung des ersten Viertels des 19. Jahrhundets (von Gauß bis Abel) für die Gleichungstheorie.

G l e i c h u n g s s y s t e m e (Gleichungen mit mehreren Unbekannten). Ihre Lösungen sind W u r z e l s y s t e m e, im einfachsten Falle Paare, z. B. $(x_1; y_1) \ldots (x_5; y_5)$.

N o r m a l e Systeme (n voneinander unabhängige Gleichungen mit n voneinander unabhängigen Unbekannten) im Gegensatze zur Ü b e r b e s t i m m u n g und U n t e r b e s t i m m u n g. Ordnung (Grad) und Anzahl der Lösungen für das normale System. Zu den drei üblichen Lösungsmethoden (1. Substitution, 2. Komparation, 3. Multiplikatoren) für das System erster Ordnung wird die sogenannte Eliminationsmethode hinzugefügt (die Potenzen der Unbekannten gelten selbst als Unbekannte), um zu zeigen, daß im allgemeinen stets e i n e Schlußgleichung auf r a t i o n a l e m Wege hergestellt werden kann, und um die sogenannten „Irrationalen Gleichungen" in bezug auf ihre Lösbarkeit beurteilen zu können.

Ü b e r b e s t i m m u n g und U n t e r b e s t i m m u n g. Erstere führt entweder auf Widersprüche oder auf Entdeckung von Beziehungen zwischen den Konstanten, die man nicht beachtet oder nicht gekannt hat, oder sie dient der Ausgleichungsrechnung bei Beobachtungen. Charakterisierung der Ausgleichungsrechnung mit besonderem Hinweise auf die Methode der kleinsten Quadrate. Die Unterbestimmung führt zurück zu der von Anfang an im Unterrichte beachteten Funktion und damit bei graphischer Darstellung zur analytischen Geometrie. Für 2 Variabeln gibt es eine Art (Linie in der Ebene), für 3 Variabeln zwei Arten der Unterbestimmung (Fläche und Linie im Raume). Die Unterbestimmung bei 2 Variabeln wird an vielen Beispielen durchgearbeitet, wobei stets Gleichung, Tabelle und graphische Darstellung koordiniert werden. Stetigkeit und Beispiele für unstetige Punktsysteme mit Häufungsstellen. Leichtere Aufgaben im Gebiete von 3 Variabeln.

Der einfachste funktionale Zusammenhang entspricht der viel verwendeten direkten Proportion, wie sie seit Quarta bekannt ist, er wird dargestellt durch eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y, durch $y = mx$ oder auch durch $y = mx + n$, wo $y - n$ zu x proportional ist. Für je 2 Wertepaare gilt in beiden Fällen $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$ und dabei ist m der konstante Proportionalitätsfaktor. Für alle anderen Fälle von $y = f(x)$ wird die Ableitung $f'(x)$ als variabeler Proportionalitätsfaktor (m) eingeführt (vgl. zweispaltige Tabellen und deren Interpolation). Als klassische Beispiele Tangentenproblem und Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung, an Aufgaben durchgeführt. Ableitungsformeln für die einfachsten Funktionen. Taylors Satz für ganze Funktionen; Ausdehnung auf Potenzreihen unter Hinweis auf die Wichtigkeit des Restgliedes. Umkehrung des Übergangs von der Stammfunktion zur Ableitung. Die graphische Darstellung der Geschwindigkeit $v = f'(t)$ in Parallelkoordinaten als klassisches Beispiel für den Zusammenhang von $s = f(t)$, $v = f'(t)$ und $j = f''(t)$: Die Fläche der Kurve stellt den veränderlichen Weg dar, die Neigungen ihrer Tangenten die veränderliche Beschleunigung. Einfache Integrationen, die sich als Grenzwerte von Summen behandeln lassen.

Das normale Gleichungssystem als System von Unterbestimmungen. Graphische Lösung von normalen Gleichungssystemen. Auch die einfache Gleichung wird künstlich zum Gleichungssystem gemacht, so z. B. $x^2 - 7x + 12 = 0$ übergeführt in

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 0 \end{array}\right|$$

Näherungsverfahren und Wurzelkorrektion. Maxima und Minima. Die Systeme 3. und 4. Ordnung, die nicht mehr konstruktiv (mit Zirkel und Lineal) behandelt werden können, lassen sich nach Einführung einer Parabel (die Schablone stellt sich der Schüler selbst her!) konstruktiv behandeln. Rückblick auf die Systeme 1. und 2. Ordnung bei Einführung eines Kreises usw. (Steiner und Mascheroni).

Die drei berühmten Probleme des Altertums. Die Kurve des Hippias.[1])

1) Vgl. Nr. 167 f, S. 7.

Der Binomische Satz für ganzes positives n geht hervor aus den Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten für eine Gleichung $n$ten Grades mit den Wurzeln $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots -\alpha_n$, falls diese alle den Wert $-\alpha$ haben. Dabei das Wichtigste aus der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitslehre.

Der Satz von Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

hat schon früher die Frage nach independenten Formeln für $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ nahe gelegt. Der binomische Satz gestattet jetzt die Ausführung. Die Substitution $n\varphi = \epsilon$ und $\varphi = \frac{\epsilon}{n}$ führt zu den Formeln für den n-fach geteilten Winkel (Rückblick auf die Kreisteilung), welche für $\lim n = \infty$ zu brauchbaren Reihen für Sinus und Cosinus zu führen scheinen, was nun zu untersuchen ist. Reihentheorie unter Wiederholung der Lehre von der arithmetischen und geometrischen Reihe, welche letztere für die Schule das klassische Beispiel der Konvergenzuntersuchung liefert und für andere Beispiele als Majorante dient. Beweis der binomischen Formel für beliebige Exponenten, eventuell unter Betonung der Konvergenzbedingung historisch aufgenommen. Reihen für Sinus und Cosinus, die offenbar Bruchstücke einer Reihe (e^{xi}) darstellen. Exponentialfunktion und Logarithmus, sowie Arcusfunktionen nebst Berechnung der Zahl π.

Den Abschluß bildet das Ergebnis: „Wir haben zwei Gruppen von Funktionen kennen gelernt:

I. Eindeutige Funktionen von einfacher Periodizität, die sich rational aus der Exponentialfunktion aufbauen lassen.

II. Unendlichvieldeutige Funktionen als Umkehrungen der vorigen, deren Quelle der natürliche Logarithmus ist."

Im Gegensatz zu den vielen Aufgaben, die sich rechnerisch bewältigen ließen, wird noch auf solche hingewiesen, die nicht durch einfachperiodische Funktionen lösbar sind, (z. B. Mantel eines schiefen Kreiskegels, Länge des Bogens bei der Ellipse, Hyperbel, Lemniscate (Gauß) usw.). Hinweis auf die doppeltperiodischen Funktionen als Fortsetzung für die Bewältigung der Probleme.[1])

C) Geometrie.

Für die Schule kommen selbstverständlich nur Archimedische Formen der Geometrie in Frage, und zwar hat man bei der zusammenfassenden und ergänzenden Wiederholung in Prima natürlich anzuknüpfen an den geometrischen Aufbau der Unter- und Mittelstufe.

Geht man bei dieser Sachlage von einer Logisierung der zeitlichräumlichen Sinnenwelt aus, so ist der Punkt (als ausdehnungsloser Ort) die natürliche Invariante, welche der Geometrie als Element zugrunde

1) Vgl. Nr. 167 f, S. 111 u. f.

liegt, und damit wird der Raum selbst als dreifache Mannigfaltigkeit aufgefaßt[1]), entsprechend den drei Bewegungsstufen: Punkt ... Linie, Linie ... Fläche, Fläche ... Körper bzw. Raum.

Als weitere Invarianten kommen Gerade und Ebene hinzu, sie mögen als erstes und zweites Elementargebilde bezeichnet werden. Bei deren Bildung ist in logischer Beziehung maßgebend:

1. Ein Element allein führt zu keiner Bestimmung.
2. Das Elementargebilde erster Ordnung ist durch zwei Elemente eindeutig bestimmt.
3. Das Elementargebilde zweiter Ordnung ist durch ein Element und ein Elementargebilde erster Ordnung, also auch durch drei Elemente eindeutig bestimmt, falls diese nicht nur ein Elementargebilde erster Ordnung bestimmen.

Veranschaulicht man sich die Gerade durch Bewegung eines Punktes, so ist sie eine bestimmte Punktreihe, und es fragt sich, ob die Gerade als eine offene oder eine geschlossene Reihe für die Darstellung der Erscheinungen zweckmäßiger ist. Bisher hat sich die einfachere Annahme einer offenen Reihe als ausreichend erwiesen, und damit bleibt die Wahl zwischen der Geometrie Euklids und der von Bolyai-Lobatschefskij.

Bei Nr. 3 tritt die Frage auf, ob das Elementargebilde zweiter Ordnung, das sich als eine durch einen Punkt und die Punkte einer Geraden bestimmte Reihung von Elementargebilden erster Ordnung darstellt, durch diese Reihung vollständig gegeben werden soll oder nicht. Durch die Forderung der Vollständigkeit wird die Eindeutigkeit der Parallelen im Sinne Euklids bestimmt, so daß die Geometrie von Bolyai-Lobatschefskij ausscheidet.

Eine vollstänige Definition des Elementes und der beiden Elementargebilde ist nur indirekt, d. h. durch Beziehungen möglich. Diese indirekte Definition liegt vor in der Axiomatik Hilberts, welche eine große Reihe von Untersuchungen zu einem vorläufigen Abschlusse bringt.[2])

Im übrigen genügt es für die Schule, hinzuweisen auf Thiemes Elemente der Geometrie (Nr. 147), welche auf Grund der modernen Axiomatik aufgebaut sind, auf das Handbuch von Killing-Hovestadt (Nr. 77c) und für alles weitere auf Wellsteins Geometrie (Nr. 165). Auch Schottens vergleichende Planimetrie (Nr. 128) ist zum Studium sehr zu empfehlen. Außerdem bietet etwa der Artikel von Enriques in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (III, Heft 1) dem Lehrer eine gute Orientierung über den Stand der einschlägigen Fragen.

Ganz besonders hinzuweisen ist außerdem noch wieder auf die Vorlesungen von Herrn F. Klein „Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus“. (Vgl. Nr. 78m.)

1) Vgl. hierzu Nr. 167d.
2) Vgl. dazu S. 74.

Das Lehrziel für die Geometrie ist an unseren höheren Schulen noch nicht völlig eindeutig bestimmt, doch zeigt die Aufnahme des Wortes „Axiomatik“ in den von Herrn Treutlein ausgearbeiteten, wohl auch in Fühlung mit Herrn Stäckel entstandenen neuen Lehrplan in Baden deutlich die Richtung der augenblicklichen Bestrebungen an.

Die Meraner Lehrpläne weisen von Anfang an auf eine reichliche Verwendung der Bewegung innerhalb der Geometrie hin, so daß diese also nach ihnen nicht etwa ausgeschlossen ist, wie es zum Teil unter Berufung auf die Forderung strenger Systematik verlangt wird.[1]) Es ist auch nicht einzusehen, warum man in der Zeit der freien Begriffsbildung nicht auch den Begriff „des im Raume beweglichen starren Körpers“, dessen „Starrheit“ aber nur „Unveränderlichkeit bei der Bewegung“ bedeutet, als zulässige Invariante ansehen dürfte.[2])

Die Geometrie der Schule ist zunächst Geometrie des Maßes, und zwar im Sinne Euklids. Diese benutzt anfangs zwei Maße, die Strecke und den Winkel. Die Goniometrie macht sie einmaßig, und man hat dann für die extensiven Größen der Geometrie das Schema:

Stufe 0: Streckenverhältnis ... Winkel (l^0).
Stufe 1: Strecke (l^1).
Stufe 2: Zweigliedriges Streckenprodukt ... Flächeninhalt (l^2).
Stufe 3: Dreigliedriges Streckenprodukt ... Volumen (l^3).

Die Entstehung des Maßstabes nach Wahl einer Einheitsstrecke und des Maßkreises (Transporteurs) nach Wahl des Einheitswinkels ist genauer zu erläutern, unter Beziehung auf die Reihe der reellen Zahlen (Axiom des Eudoxos. meist fälschlich nach Archimedes benannt), ebenso die Bildung der Flächeneinheit und der Volumeneinheit, wobei den Produkten der Maßzahlen entsprechend die neuen Größen von der Dimension l^2 und l^3 gebildet werden. Inhaltsgleichheit in der Ebene und im Raume unter Hinweis auf die sogenannte Umsetzung (Zerlegungsgleichheit) der Flächen und Körper, welche für die Pyramide (vgl. die Untersuchungen von M. Dehn[3])) nicht möglich ist. Notwendigkeit des Cavalierischen Prinzipes oder einer äquivalenten Integralbetrachtung.

Bei der Wiederholung sind Planimetrie, Stereometrie und die Anfänge der darstellenden Geometrie einheitlich zusammenzufassen. Systematische Behandlung der Konstruktionen, die entweder an und für sich oder für die Anwendungen wichtig sind. Etwas von den Verwandtschaften: zentrische und symmetrische Systeme usw., auch Abbildung durch reziproke Radien. Als Hauptaxiome treten dabei hervor die Axiome der

1. Eindeutigkeit der Geraden (durch 2 Punkte),
2. Eindeutigkeit der Ebene (durch Punkt und Gerade),
3. Eindeutigkeit der Parallelen (durch Punkt und Gerade).

1) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 13f.
2) Vgl. Nr. 167 d.
3) In den Mathem. Annalen Bd. 55 (1902).

Bei der Wiederholung sind die Sätze darauf zu prüfen, von welchen dieser Hauptaxiome sie abhängen. Soweit die Planimetrie nur vom ersten Hauptaxiom abhängt, ist sie als Sphärik übertragbar, falls man sich auf eine Halbkugel beschränkt und den (halben) Grenzkreis (konjugierte Pole!) ausschließt. Daß die Lehre von der Ähnlichkeit durch Hauptaxiom 3 bedingt wird und also auf der Kugelfläche keine Bedeutung hat, ist von besonderer Wichtigkeit. Beispiele erläutern den Zusammenhang und den Unterschied zwischen Planimetrie und Sphärik. So bleibt z. B. der Satz vom Außenwinkel des Dreiecks für die Sphärik in der Form bestehen, daß der Außenwinkel größer ist als einer der beiden nicht zu ihm gehörigen inneren Winkel, während er in der Planimetrie deren Summe ist.

Sphärik ($\alpha + \beta + \gamma > 180^0$) und Pseudosphärik ($\alpha + \beta + \gamma < 180^0$) im Gegensatze zur Euklidischen Planimetrie ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$), wobei etwa die Fläche Beltramis neben der Kugel zur Veranschaulichung herangezogen wird.

Erweiterung der Betrachtung auf den Raum. Frage nach den Raumformen. Die drei hauptsächlichen Geometrien, deren mittlere die Euklids ist, welche bisher zur Darstellung der Erscheinungen ausgereicht hat. Die „unstetigen" Räume, deren Behandlung wohl mit Dedekinds algebraischem Raume (Vgl. Nr. 24b, S. XII) begonnen hat, bleiben der Schule am besten fern.

Axiomatischer Abschluß für die Geometrie Euklids in einfacher Form (etwa Hilberts Gruppe I, IV und V). Übertragbarkeit der Axiome auf andere Systeme von Raumgebilden, z. B. auf das Parabolische Kugelgebüsch nach Wellstein.[1]) Auch Poincarés Lexikon[2]) für die Bolyai-Lobatschefskijsche Geometrie ist für die Schule bei einer guten Generation und günstiger Lage der Reifeprüfung wohl verwendbar.

Frage nach der Beseitigung der Bewegung innerhalb der Geometrie: axiomatische Festlegung eines Kongruenzsatzes, etwa nach Hilbert.

Die analytische Geometrie ergänzt die Geometrie des Maßes durch Einführung von Lagebestimmungen. Zunächst werden Strecke, Streckenverhältnis, Dreiecksfläche und Tedraedervolumen durch Parallelkoordinaten ausgedrückt, ev. auch in Polarkoordinaten umgeschrieben. Die eigentliche analytische Geometrie beginnt mit der Unterbestimmung von Gleichungssystemen. Die Gerade in der Ebene und die verschiedenen, den einzelnen Aufgabengruppen angepaßten Formen ihrer Gleichung. Unter gelegentlicher Exkursion in den Raum ist das Ziel etwa die Behandlung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in der Ebene mit ihren beiden Invarianten, wobei Determinanten lediglich als mnemotechnisches Schema herangezogen werden. Ausblick auf die Flächen zweiter Ordnung.

Das Strahlenbüschel, dessen Behandlung an Hesses Normalform an-

---

1) Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 34f. 2) Nr. 113a S. 42.

schließt, u. a. führt zur Geometrie der Lage, der in der sogenannten „synthetischen Geometrie" auch auf der Schule bereits vorgearbeitet ist. Allgemeine Charakteristik der Geometrie der Lage als selbständiger Wissenschaft, etwa nach Reyes Einleitung und ersten Vorträgen.

Über die Raumanschauung in subjektiver und objektiver Hinsicht läßt sich vieles sagen, aber es ergibt sich dabei nur, daß der objektive Raum eine bestimmte Ordnung für alle subjektiven Raumanschauungen der Einzelnen ist, für deren Darstellung bisher Euklids Geometrie ausgereicht hat. In psychologischer Hinsicht entspricht der Tastraum (haptisch) der Geometrie des Maßes, der Sehraum (optisch) der Geometrie der Lage.[1])

D) Phoronomie.

Aus der „Phoronomie der Lage" oder Kinematik, die man auch noch zur Geometrie rechnen kann, sind nur die einfachsten Sätze über die Bewegung eines starren Körpers für die Schule erforderlich. Da dessen Lage durch drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist, so läßt sich der Körper durch ein Bewegungsdreieck ABC ersetzen. Verschiebung und Drehung als einfache und technisch wichtige Sonderfälle der Bewegung. Darstellung der allgemeinen Bewegung durch Abrollen zweier Kegel, deren Spitzen etwa in A liegen, während die Drehungen um Achsen durch A erfolgen. Anwendung auf die Bewegung der Erde.

In der „Phoronomie des Maßes" tritt die Zeit zu den arithmetischen und geometrischen Größen hinzu. Über sie läßt sich in subjektiver und in objektiver Hinsicht vieles[1]) sagen, doch ergibt sich dabei schließlich nur, daß die objektive Zeit eine bestimmte Ordnung für alle subjektiven Zeitanschauungen der Einzelnen ist, die in ihr logisiert sind. Zu ihrer Messung dienen periodische Erscheinungen (Erddrehung, Pendel, Schwingungsdauer des Natriumlichtes usw.). Die eigentümliche protensive Größe der Zeit (Dauer) wird stets, z. B. durch die Zeigerbewegung und das Zifferblatt, extensiv gemacht.

Während die Griechen aus ästhetischen Gründen der Lehre von der Bewegung die gleichförmige Bewegung auf dem Kreise als Invariante zugrunde legten, hat man ihr seit den Tagen Leonardos (da Vinci) und Galileis die „gleichförmige Bewegung auf der Geraden" als Invariante zugrunde gelegt. Ersteres erwies sich als unzweckmäßig, letzteres als fruchtbar.

Während an dieser, dem Zeitfluße entsprechenden „Urbewegung" nichts weiter zu erklären ist, bedarf jede Abweichung von ihr der Erklärung.

1) Weiteres dazu in Nr. 36b und 36c, Bd. II von 120c, 113a, 169a, 169b u. a. Entsprechend der dreifachen Einteilung Analysis situs, Geometrie der Lage und Geometrie des Maßes unterscheidet Herr Enriques in Nr. 36c auch drei Gruppen von Empfindungen, indem er das allgemeine Tast- und Muskelgefühl für die Analysis situs in Anspruch nimmt, ein besonderes aber für die Geometrie des Maßes.

Die „Urbewegung" gibt Veranlassung, die erste **intensive** Größe zu bilden oder vorzubereiten[1]), die **Geschwindigkeit**.[2])

Ist bei der Bewegung eines Punktes w die durchlaufene Wegstrecke und d die zugehörige Zeitdauer, so ist für zwei Wegstücke w_1 und w_2 und die zugehörigen Zeitdauern d_1 und d_2 die Proportion

$$w_1 : w_2 = d_1 : d_2$$

bei beliebiger Größe von w und d für die gleichförmige Bewegung charakteristisch.

Um eine **Invariante** für das **einzelne** Wegstück zu erhalten, bildet man

$$w_1 : d_1 = w_2 : d_2$$

zunächst an den Maßzahlen, und führt $\frac{w}{d} = c$ als **neue** Maßzahl ein. Dieser ordnet man eine **neue** Größe unter dem Namen „Geschwindigkeit" zu, die man als $\frac{\text{Wegstrecke}}{\text{Zugehörige Zeitdauer}}$ charakterisiert, den Quotienten der Maßzahlen dabei zum Muster nehmend. Der Vorgang ist so, als wenn man in der Geometrie für Bogen (b) und zugehörigen Zentriwinkel (β) am Kreise aus der Gleichung

$$b_1 : b_2 = \beta_1 : \beta_2$$

die Gleichung

$$b_1 : \beta_1 = b_2 : \beta_2$$

bildete und nun bei einem Radius r die neue Maßzahl $\frac{2r\pi}{360^\circ}$ für den Quotienten bildete und ihr die neue Größe $\frac{\text{Bogen}}{\text{Zugehöriger Winkel}}$ zuordnete. Das ist hier nicht zweckmäßig, bei der Bildung der Geschwindigkeit aber fruchtbar.

Führt man für eine gleichförmige Bewegung auf beliebiger Bahn die Stellung s auf der Bahn und den Zeitpunkt t der Zeitskala (Uhr) ein, so ist stets $w = s_1 - s_2$ und $d = t_1 - t_2$ und es gilt also

$$s_1 - s_2 = c(t_1 - t_2)$$

oder bei passender Einstellung der Skala

$$s = ct.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf ihre Einheiten homogen. Allgemein heißt $s = f(t)$ eine Bewegungsgleichung. Beispiele der Bewegung für einfache Fälle von $f(t)$ bei **gegebener** Bahn. (Zeichnerische Ausführung.)

Die Abweichung, welche $s = f(t)$ im allgemeinen von $s = ct$ zeigt, und die Abweichung der Bahn von der Geraden muß erklärt werden.

1. Die Abweichung **auf** der Bahn (Tangentialbeschleunigung).

---

1) Je nachdem man die Geschwindigkeit (v) oder die Bewegungsgröße (mv) als intensive Größe bezeichnet.

2) Sie muß für die Verwendung „extensiv" gemacht werden. Vgl. das bekannte Wort von Gauß bei Sartorius v. Waltershausen (Nr. 123 S. 98.).

Entsprechend $s = f(t)$ Einführung der Geschwindigkeit $v = f'(t)$ und der tangentialen Beschleunigung $j_T = f''(t)$ und höherer Ableitungen. Man geht aus von der mittleren Geschwindigkeit für ein Bahnstück und bewirkt den Übergang zur Grenze usw.

2. Die Abweichung der Bahn von der Geraden (Normalbeschleunigung).

Darstellung der Bewegung als Reihung von elementaren Urbewegungen.[1]) Die Richtungen der elementaren Urbewegungen (Tangenten) werden der Geschwindigkeit zugeordnet und diese so als Vektor dargestellt. Das Parallelogrammgesetz.[2]) Die Beschleunigung als Vektor und ihre Zerlegung in tangentialer (j_T) und normaler (j_N) Richtung.

Läßt man die Geschwindigkeit als Vektor am beweglichen Punkte haften, so beschreibt dessen Spitze relativ zu ihm den Hamiltonschen Hodographen, den man natürlich auch erhält, wenn man die Geschwindigkeiten als Vektoren an irgend einem festen Punkte anbringt.

Für die gleichförmige Kreisbewegung sind Bewegung und Hodograph ähnliche Systeme. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r und die Geschwindigkeit mit c, so hat man also für die Normalbeschleunigung j_N den Ansatz:

$$2r\pi : 2c\pi = c : j_N$$

und also

$$j_N = \frac{c^2}{r}.$$

Einführung des Krümmungskreises (ρ) und Ersatz der beliebigen Bahn durch eine Reihung von Bogen der Krümmungskreise. Bei einer Geschwindigkeit v gilt allgemein:

$$j_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Die Gesamtbeschleunigung j wird gebildet aus j_T und j_N und diese Bildung der Beschleunigung wird für die Kraft von grundlegender Bedeutung.

Soll die Bahn nicht als „gegeben" angesehen werden, so braucht man in der Ebene zwei und im Raume drei Bewegungsgleichungen. So entstehen drei Methoden:

1. Grundmethode bei gegebener Bahn.
2. Projektionsmethode (Parallelkoordinaten).
3. Polarmethode (Polarkoordinaten).

In der Ebene sind bei Nr. 2 die Bewegungsgleichungen $x = f(t)$ und $y = g(t)$, bei Nr. 3 die Bewegungsgleichungen $r = f(t)$ und $\varphi = g(t)$ erforderlich.

---

1) Im Gegensatze dazu später gelegentlich die Darstellung als Reihung von elementaren gleichmäßig-geänderten Bewegungen. Vgl. die Zeichnungen dazu in Nr. 167a, I, S. 98 u. 99.

2) Vgl. dazu die Untersuchung über dessen Voraussetzungen in Nr. 125a.

Schwingungsbewegung, Wellenbewegung, gleichförmige Bewegung auf einer Schraubenlinie dürften hier etwa das Lehrziel der Schule bezeichnen.

Die Flächengeschwindigkeit und Keplers Gesetze; deren Zusammenfassung in Newtons Gesetze, zunächst in phoronomischer Hinsicht.

Für Körper, und zwar lediglich für starre, ist aus der Phoronomie des Maßes nur das Einfachste über Verschiebung und Drehung zu geben, wobei aber Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung nicht übergangen werden dürfen.

Verwendung der Phoronomie für Aufgaben der Geometrie[1]) (Tangenten, Krümmungskreis usw.).

E) Dynamik.

Für die Schule scheint es mir bei dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft zweckmäßig, den geschichtlichen Weg der Dynamik in Abkürzung zu wiederholen.

Der uralte statische Kraftbegriff bietet keine besonderen Schwierigkeiten, er ist genau so entstanden, wie vieles andere, als „interpretatio ex analogia hominis". Die Erfahrungen am eigenen Körper bei Berührung mit fremden Körpern geben Veranlassung, die Begriffe „Zug und Druck" zu bilden, und diese auch auf die gegenseitigen Beziehungen zweier Fremdkörper zu übertragen. Der Stein, der unsere Hand drückt, quetscht auch nachgiebigen Boden, der Strick, der an unserer Hand zieht, reißt auch eine Stange aus. Die Erfahrung bietet alles, was hier zur Logisierung erforderlich ist, d. h. zur Darstellung der Kraft als Vektor, nämlich „Angriffspunkt, Richtung und Wert (Größe)". Für die Bestimmung der Kräfte gibt der überall vorhandene „Schwerdruck" oder „Schwerzug" (Gewicht) das Maß, wobei die Hebelwage, die ja eigentlich der Massenvergleichung dient, der Messapparat ist. Eine wirkliche Messung der Kräfte liefert die Federwage (Dynamometer), die dem Schüler als Brief- oder Fleischwage bekannt ist. In ihr kommt Hookes Gedanke zur Geltung: „Ut tensio sic vis". Daß diese statische Kraft in irgendwelcher Beziehung zur Bewegung steht, ist natürlich auch eine alte Erfahrung. Unser Körper leitet Bewegungen ein und hindert sie unter Zug- und Druckempfindungen, und man überträgt dies auch auf Fremdkörper. Bewegte Körper erzeugen in unserm Körper unter Bewegungsänderungen Zug und Druck. Ein belastetes Seil hält Zug aus, reißt es, so tritt Bewegung der Belastung ein, und der Zug gilt als verschwunden, usw.

Galilei hatte, wenn auch der Wortlaut bei ihm oft dynamisch gefärbt erscheint, auf dem Gebiete der Bewegung nur phoronomisch gearbeitet, erst Huygens, der sich von Galileis mathematischem Pendel zum physichen wandte (Trägheitsmoment), stieß auf eigentliche dynamische Auf-

1) Vgl. Nr. 167n, I, S. 188 u. f.

gaben. Dies führt zu Newton, der den Begriff der kinetischen Kraft einführt und mit ihm den alten statischen Kraftbegriff in Verbindung bringt, indem er diesen in die Invariante „Masse" und die Beschleunigung spaltet. Das war eine geniale Leistung, die natürlich nicht „bewiesen" werden kann.

Daß die Abweichung von der „Urbewegung" außerhalb dieser gesucht werden muß, ist ein seit Galilei geltendes Prinzip, und diesem gemäß kann man sich Newtons Leistung etwa folgendermaßen klar machen: Gibt man dem Punkte der Geometrie einen Koeffizienten seiner dynamischen Wirksamkeit (Maßzahl der Masse) und nennt man einen solchen Punkt der Einfachheit wegen einen Massenpunkt, falls diese Masse verschwindend klein gedacht wird im Vergleich mit den Massen, die uns umgeben, so liegt es nahe, für zwei Massenpunkte A_1 und A_2 von den Massen m_1 und m_2 folgende Voraussetzungen zu machen, wobei eine eindeutige Darstellung des Vorgangs angestrebt wird:

Fig. 5.

Die Beschleunigung j_1 von A_1 ist proportional der Masse m_2 von A_2 und umgekehrt, und beide Beschleunigungen liegen in der Geraden $A_1 A_2$ und haben entgegengesetzte Richtungen. Man hat also (vgl. Figur 5)

$$j_1 = C m_2 \text{ und } j_2 = C m_1 .$$

Daraus folgt:

$$m_1 j_1 = C m_1 m_2 = m_2 j_2.$$

Mit Rücksicht auf die erfahrungsmäßig gegebene Paarwirkung (actio reactioni par) bei statischen Kräften, die in einer Stützstange zwischen A_1 und A_2 auftreten würden, befriedigt dieser Ansatz, und es liegt also nahe, die Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung einzuführen. In der Bewegung gemessen stellt dieses Produkt die kinetische Kraft (Effektivkraft) dar, bei gehemmter Bewegung die entsprechende statische Kraft.

Das Parallelogrammprinzip, welches nun die Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und der statischen Kräfte zusammenfaßt, erledigt zunächst alle weiteren Fragen für einen Massenpunkt.

Für Körper als Systeme von Massenpunkten (oder Elementen der Masse) ist zunächst das Prinzip der Massensumme einzuführen, wonach entsprechend den Erfahrungen an der Hebelwage die Massen der Massenpunkte zur Masse des Körpers summiert werden.

Im übrigen muß natürlich die Verbindungsart der Massenpunkte bekannt oder definiert sein, ehe sich weitere Aussagen machen lassen. Der starre Körper ist dadurch charakterisiert, daß an ihm Gegenkräfte ohne Wirkung sind, d. h. beliebig fortgenommen oder zugesetzt werden dürfen. Diese Definition gestattet das Parallelogrammprinzip auf die zerstreuten Kräfte, die am starren Körper angreifen, anzuwenden. Für nicht starre

Systeme sind natürlich auch besondere Definitionen erforderlich, ehe ihre besondere Behandlung möglich ist.

Dabei ist darauf hinzuweisen, daß alle Kräfte als Paarwirkungen auftreten. Treten sie an Massenpunkten desselben Systems auf, so heißen sie dessen „innere" Kräfte. Treten sie an Massenpunkten verschiedener Systeme auf, so wird die eine Hälfte der Paarwirkung als äußere Kraft angesehen, die andere nicht beachtet. Geben wir z. B. für eine Uhr der Paarwirkung zwischen Erde und Uhrgewicht Gelegenheit sich zu äußern, indem wir das Gewicht an die Kette der Uhr hängen, so wird die hier verschwindende Einwirkung des Gewichts auf die Erde (mit Recht) nicht beachtet und die andere Hälfte dieser Paarwirkung gilt für die Uhr als äußere Kraft. Auf dieser Teilung der Paarwirkung unter Vernachlässigung ihrer einen Hälfte beruht die Berechtigung der gewöhnlichen Bezeichnung der Kraft als Ursache der Bewegung, man müßte natürlich ebenso von der „Ursache des Zuges oder Druckes" sprechen.

Die Auffassung der statischen als gehemmter kinetischer und der kinetischen als entwickelter statischer Kraft findet ihren scharfen Ausdruck im Prinzipe von d'Alembert, aus dem bekanntlich die Gleichungen von Lagrange folgen. Dieses Prinzip ist das wirkliche Prinzip der „Erhaltung der Kraft", falls man das Wort „Kraft" im eigentlichen Sinne nimmt. Ist $K = mj$ für einen Massenpunkt eines beliebigen Systems die in der Bewegung gemessene Kraft, so ist diese aufzufassen als Resultante aller inneren [J] und äußeren Kräfte [A], die auf den Massenpunkt wirken.

In Vektorbezeichnung ($^{\times}$) hat man also

$$K \overset{\times}{=} J \overset{\times}{+} A .$$

Führt man die Gegenkraft $\overline{K}$ von K ein, so gilt ebenso

$$\overline{K} \overset{\times}{+} J \overset{\times}{+} A \overset{\times}{=} 0 .$$

Denkt man nun die Massenpunkte des Systems in der Lage, welche sie in einem bestimmten Zeitpunkte haben, festgehalten, so daß sie einen, diesem Zeitpunkte entsprechenden starren Körper bilden, so steht an diesem das System aller Kräfte $\overline{K}, I, A$ im Gleichgewichte. Da sich aber das System der Kräfte I gemäß dem Prinzipe der Paar-Wirkung in sich aufhebt, so steht auch das System aller Kräfte $\overline{K}$ und A im Gleichgewichte d. h. die Systeme K und A sind aequivalent.

Eine passende Anwendung des Prinzips von d'Alembert für die Schule bieten die Erscheinungen an der Atwoodschen Fallmaschine dar.

In dem Prinzipe der Paar-Wirkung kommt die alte Frage zur Ruhe, ob die Materie (ex analogia hominis) aktiv ist (Aristoteles) oder träge (Zeitalter Galileis), sie ist beides, aber jede einseitige Deutung ist unnatürlich, es handelt sich eben um eine Beziehung. Man hat also für die Begründung der Dynamik, nachdem die Kraft definiert ist, folgende Prinzipien:

1. Prinzip der Masse. Jedem Massenpunkte kommt **ein** bestimmter Zahlen-Koeffizient seiner dynamischen Wirksamkeit zu.
2. Prinzip des Parallelogramms.
3. Prinzip der Massensumme.
4. Prinzip der Paar-Wirkung.
5. Prinzip von d'Alembert.

Von den bekannten Umformungen dieser Prinzipien ist das „Prinzip des kleinsten Zwanges" (Gauß) für die Schule sehr wohl brauchbar, da es zur Lösung von Aufgaben benutzt werden kann.

Die Bildung der gebräuchlichen dynamischen Größen, wie Kraft-Antrieb, Bewegungs-Größe, Arbeit, Energie usw. bietet keine Schwierigkeiten. Den Maßzahlen-Verbindungen entsprechend werden, falls es zweckmäßig erscheint, neue „Größen" gebildet, und so die Homogeneität der Gleichungen gewahrt. Im absoluten Maßsysteme treten die drei Grundgrößen, die extensive, die protensive und die intensive zusammen. Dimension der Größen.

Bei den Anwendungen stehen selbstverständlich Energie und Arbeit im Vordergund, für deren Beziehung der freie Fall zunächst das klassische Beispiel gibt. Der Quellpunkt aller Formeln ist die „phoronomische" Gleichung

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = j(s - s_0) = j \cdot w$$

welche durch Multiplikation mit der Maßzahl der Masse „dynamisch" wird. Newtons Gesetz in dynamischer Hinsicht (vgl. S. 116).

Leichte Übungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, auch mit Berücksichtigung der Deformationen (Hookes Gesetz), beleben das Aufgabengebiet, dessen Lehrziel etwa durch die Behandlung des physischen Pendels bezeichnet wird, außerordentlich.[1]) In der Statik sind natürlich auch die Grundzüge der Graphostatik zu geben.[2])

Für den Lehrer gibt der 4. Band der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" alles Erforderliche, namentlich der einleitende Artikel von Herrn Voß, „über die Prinzipien der rationellen Mechanik" und der Artikel von Herrn Stäckel über Elementar-Mechanik. Dabei ist aus der Vorrede von Herrn F. Klein besonders hervorzuheben: „Mechanik, überhaupt angewandte Mathematik, kann nur durch intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst gelernt werden.... Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muß....

1) Vgl. Nr. 167 m.

2) Man vergleiche damit P. Appel und J. Chappuis „Leçons de Méchanique élementaire à l'usage des élèves des classes de mathématique A et B. 3. Aufl. Paris 1909.

Möge insbesondere auch das Wort Leonardo da Vincis sich wieder bewahrheiten, daß die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist". In diesem Sinne soll auch schon auf der Schule gewirkt werden. Dabei kann auch zum Bewußtsein gebracht werden, daß im Zeitalter Leonardos die alte Frage: „Warum fallen die Körper?" ersetzt wurde durch die moderne Frage: „Wie fallen sie, d. h. nach welchem Gesetze?" Auf die erste Frage hatten die Aristoteliker vieldeutig mit Angabe von Ursachen als Ur-Sachen (Dingen) geantwortet, auf die zweite antworteten Leonardo da Vinci und Galilei eindeutig durch die Fallgesetze, d. h. durch Beziehungen zwischen Weg und Zeit, und damit begann die Phoronomie und Kinetik, die mit der alten Statik zur modernen Mechanik zusammenwuchs.

Diese „klassische" Mechanik, welche jetzt vielleicht wegen der Einordnung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen einer Umbildung entgegengeht, wird für die Schule wohl noch lange ihre Bedeutung behalten. Wie sie sich zu der neuen, im Werden begriffenen allgemeinen Mechanik verhält, das zeigt gewissermaßen mit einem Schlage der überaus durchsichtige und übersichtliche Vortrag[1]) von F. Klein: „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe", in dem er Minkowskis vierdimensionale Vektorrechnung vom Standpunkte der affinen Auffassung der Welt aus beleuchtet. „Was die modernen Physiker Relativitätstheorie nennen, ist die Invariantentheorie des vierdimensionalen Raum-Zeit-Gebietes x, y, z, t (der Minkowskischen Welt) gegenüber einer bestimmten Gruppe von Kollineationen (Affinitäten), eben der Lorentzgruppe."

5. Die Anwendungen.

Auf die Bedingungen der Verwendung der Mathematik für die einzelnen Erscheinungsgebiete muß auch auf der Schule von Fall zu Fall hingewiesen werden. Dazu eignen sich einfache Aufgaben, welche zeigen, was alles am „Gegebenen" vernachlässigt werden muß, um es dem „Kalkül" zu unterwerfen.

Dies geht auch besonders hervor aus dem gewöhnlichen Gange der technischen Mechanik mit seiner Stufenfolge in der Annäherung an die Wirklichkeit. Man betrachtet zunächst Kräfte am starren Körper der Geometrie, der frei ist und natürlich gewichtslos, bringt ihn in gegenseitige Beziehung mit der Erde (Schwerpunkt, Gewicht usw.), hebt die Freiheit auf (Befestigungs-Reaktionen und Reibungen) und ordnet schließlich die tatsächlich gegebenen Form-Änderungen ein, so weit es angeht.

Andererseits halte ich die Wahrscheinlichkeitslehre, durch welche selbst dem (scheinbaren) Zufalle Gesetze abgerungen werden, für sehr geeignet, die Bedingungen der Verwendung der Mathematik für die Schüler zu klären.

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 19, 1910.

Dabei ist alles, was hier am Schlusse des Kapitels „Die Begriffsbildung der Mathematik und ihr Charakter“ ausgeführt wurde, auch für die Schule in geeigneter Form zu verwenden.

Über die numerischen und graphischen Methoden der angewandten Mathematik geben für die Schule gute Auskunft der Vortrag von Herrn C. Runge auf dem letzten Osterferienkursus (1912) in Göttingen[1]) und die daran anschließenden Erörterungen.[2])

Was das Gebiet der Anwendungen anlangt, so kann zunächst auf die Lehrbücher und sonstigen Veröffentlichungen von Herrn G. Holzmüller verwiesen werden, vor allem aber auf die Weber-Wellsteinsche Enzyklopädie, namentlich in ihrer neuesten Auflage, und außerdem auf das Einschlägige in diesen IMUK-Abhandlungen.[3]) In bezug auf die Mechanik, insbesondere auch in bezug auf die technische Mechanik findet man in meinem Lehrbuche (Nr. 167n, vgl. dazu auch Nr. 167m) zahlreiche Anwendungen und Aufgaben, welche auch für die Schule brauchbar sind.

Während auf den Schulen die Aufgaben jetzt wohl fast überall auch für die Naturerkenntnis fruchtbar gemacht werden, sind Aufgaben, die der Naturbeherrschung dienen, im Schulbetriebe immer noch selten.

Für Beides gilt ein Wort Galileis, das sich in seinem „Saggiatore“ findet und etwa folgendermaßen lautet[4]): „Die Philosophie des Universums kann man nur verstehen, wenn man die Sprache kennt, in der sie geschrieben ist. Diese ist aber die Sprache der Mathematik, und ihre Zeichen sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren.“ Dabei muß man sich daran erinnern, daß Galilei sich nicht bloß mit der Feststellung der Fallgesetze u. a. beschäftigte, sondern auch mit Untersuchungen über die Bruchfestigkeit der Balken. Wir haben bereits auf die Vorrede von Herrn F. Klein zur Mechanik in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ (Bd. 4) hingewiesen[5]), in der auch Leonardos da Vinci gedacht wurde: er nannte die Mechanik das Paradies der Mathematiker, denn „si viene al frutto“.

So haben jene großen Schöpfer der modernen Mechanik über deren Wert gedacht, und dem entspricht es durchaus, daß in neuerer Zeit auch Schülerübungen auf den verschiedenen Gebieten, namentlich auch auf dem der Physik, die Bedeutung von Beobachtung und Versuch für die Schule außer Frage stellen. Dabei ist aber auch darauf hinzuweisen, wie die Maßzahlen, welche den Erscheinungen abgerungen werden, tatsächlich zu verwenden sind, nicht bloß zur Verifizierung bereits bekannter

1) Vgl. Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus Göttingen 1912, Bericht von Weinreich, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 43, 1912.

2) Vgl. dazu ferner M. d'Ocagne „Calcul graphique et nomographique“ (Encyclopédie Scientifique), Paris 1908.

3) Vgl. auch hier S. 14, Anmerkung 1.

4) Vgl. Opere di Galileo Galilei, Firenze 1890–1900, VI, S. 232.

5) Vgl. hier S. 120.

Formeln, sondern auch zur Herstellung gesetzlicher Beziehungen und deren systematischer Verbesserung.

So muß der Schüler die Aufstellung „empirischer" Formeln bzw. die Ableitung von „Gesetzen" bei gegebenem Zahlenmaterial in einfachen Fällen selbst vornehmen.[1]) Dabei kann man auch zeigen, daß die gewählte Funktion bis zu einem gewissen Grade willkürlich bleibt[2]), und im besonderen auf die Bedeutung der Potenzreihe, zunächst der endlichen hinweisen. Das Zahlenmaterial für s und t beim freien Falle führt leicht zu der Formel $s = \frac{g}{2} t^2$, in anderen Beispielen (Spannung des Wasserdampfes) ist der Abschluß in einer Formel durchaus unbestimmt.

Dabei ist die Bedeutung der Proportion, zunächst der direkten und dann der indirekten, besonders hervorzuheben. Man hat immer zunächst den Versuch gemacht und wird es immer wieder tun, für zwei Größen, die zugleich wachsen und zugleich abnehmen, den funktionalen Zusammenhang durch eine direkte Proportion zu bestimmen, um gegebenen Falles von hier aus durch Verbesserungen weiter zu kommen.

Aus den Sätzen „Der größeren Seite im Dreiecke liegt der größere Winkel gegenüber" usw. schließen gerade begabtere Schüler auf die Proportion

$$a : b : c = \alpha : \beta : \gamma$$

bzw. für irgend einen Erweiterungsfaktor m auf die Gleichung $a = m\alpha$. Am rechtwinkligen Dreiecke ($\gamma = 90^0$) sehen sie ein, daß der Schluß falsch war, weil hier $\alpha + \beta = \gamma$ nach sich ziehen würde $a + b = c$, was einen Widerspruch mit $a + b > c$ gibt. Später erfahren sie den richtigen Ansatz $a = m \cdot \sin \alpha$ für $m = 2r$, falls man den Radius des Umkreises mit r bezeichnet, und die Sinus-Reihe gibt ihnen deutlich die Verbesserung an, welche erforderlich war.

Die Korrektur der Pendel-Formel für den Ausschlag α

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + f(\alpha))$$

und Ähnliches zeigt, wie die mathematische Anpassung an die Erscheinungen mehr und mehr vervollkommnet werden kann.

Während sich die direkte Proportion durchaus im Gebiete der Gleichungen ersten Grades bewegt, führt die indirekte Proportion bei graphischer Darstellung zur Hyperbel. Als Beispiel diene etwa das Boyle-Mariottesche Gesetz

$$p \cdot v = \text{constans}.$$

Mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit aller Messungen ist auch die Bedeutung der Überbestimmung von Gleichungssystemen klar zu machen, woran sich einige allgemeine Bemerkungen über Ausgleichungsrechnung knüpfen lassen.

1) Vgl. dazu auch Nr. 140.

2) Vgl. hierzu Nr. 78i und Nr. 161a S. 55, Anm. 2.

Daß die Überbestimmung gelegentlich auch auf Widersprüche hinweist, gelegentlich auch zeigt, daß bestimmte Beziehungen zwischen Konstanten nicht beachtet wurden oder noch nicht bekannt waren, ist dabei zu erwähnen. Für letzteres geben die drei Projektionsgleichungen des Dreiecks ein gutes Beispiel. Das System

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ a \cos \beta + b \cos \alpha = c \\ 2.\ a \cos \gamma + c \cos \alpha = b \\ 3.\ b \cos \gamma + c \cos \beta = a \end{array}\right\}$$

bestimmt bei gegebenen α, β, γ nur die Verhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$, nicht a, b, c selbst. Für diese Verhältnisse erhält man aus 1) und 2) einerseits und aus 2) und 3) anderseits verschiedene Werte, solange nicht die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ berücksichtigt bzw. von neuem gefunden wird.

Gerade die Anwendungen sollen den Schüler davon überzeugen, daß die Mathematik ein wichtiges Mittel der Naturerkenntnis, aber auch der Naturbeherrschung ist.

Vierter Abschnitt.

Schlußbetrachtungen.

Der Beitrag, den die Mathematik für die „Philosophie im Unterricht" liefert, muß zunächst mit den Beiträgen, welche die anderen Fächer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Gruppe geben, zu einer Einheit zusammengeschlossen werden; es handelt sich dabei, wie Herr Seith sagt, um das dem Kosmos zugewandte Ideal (vgl. S. 6).

Diesem steht die andere Einheit gegenüber, welche in den philologisch-historischen Fächern erarbeitet werden soll, das dem Menschen zugewandte Ideal.

Schließlich soll aus beiden die Einheit einer Weltanschauung erwachsen, für welche auf der Schule das humanistische Kernstück „Religion, Deutsch und Geschichte" den Kristallisationspunkt bezeichnet. Für die damit gegebene Aufgabe möchte ich neben der „Philosophischen Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage" von Schulte-Tigges und den Arbeiten von Gercken, Pietzker, Treutlein u. a. vor allem noch auf eine kleine Schrift von Halfmann „Einführung in die Weltanschauungsprobleme" verweisen, die unmittelbar für den Primaner geschrieben ist. Einzelnes, was im besondern die Mathematik anlangt, findet man in den drei, öfter schon herangezogenen Didaktiken von Reidt-Schotten, Simon und Höfler, welche auch des weiteren auf einschlägige Literatur aufmerksam machen.[1]) Hier mögen noch einige allgemeine Gesichtspunkte hervorgehoben werden.

1) Vgl. auch dazu die Abhandlung zur Geschichte der Mathematik von M. Gebhardt in diesen JMUK-Abhandlungen Bd. III Heft 6 und die dort gegebene Literatur.

Könnte man auf der Erde jede Spur des Menschen verwischen, so würde es nicht möglich sein, die philologisch-historische Wissenschaft wieder herzustellen, während das anschaulich-logische System der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung von neuem erzeugt werden könnte. In ihm kommt allem Individuellen gegenüber das Allgemein-Menschliche zur Geltung, und darum ist es international, und seine Wahrheit ist dieselbe in Berlin und in Paris. Daran ändern auch die Kämpfe um die Axiomatik nichts, deren Inhalt für Arithmetik und Geometrie jedenfalls feststeht, mag um ihren erkenntnistheoretischen Wert noch so viel Streit sein. Auf der Grundlage ihrer Axiomatik entwickelt diese Forschung jene strenge Notwendigkeit, welche so leicht dazu verführt, auch außerhalb ihrer Grenzen keine Freiheit anzuerkennen, wie z. B. die Geschichte des Naturalismus und Materialismus und gewisser Formen des Monismus lehrt.

Den Schüler bringen die Sprachen mit ihren Regeln, welche Ausnahmen zulassen, zum Bewußtsein, daß es auch in der Wissenschaft Alogisches gibt, welches sich nicht für formal-logische Arbeit formen läßt. Vielleicht könnten wir auch bei tieferer Einsicht dieses ganze Gebiet logisieren und z. B. für die Laut-Verschiebungen nicht bloß das Tatsächliche, sondern auch dessen Bedingungen angeben; aber diese tiefere Einsicht ist uns vorläufig jedenfalls verschlossen.

Neben dieser „qualitativen" Grenze unsres Erkennens macht sich aber auch eine „quantitative" überall geltend. Wir können nur Anzahlen bis etwa zu 5 oder 6 unmittelbar erfassen, und Ähnliches zeigt sich auf allen Gebieten. So würde z. B. eine exakte Meteorologie fordern, daß wir für jedes Luftteilchen den augenblicklichen Bewegungszustand kennen, aber das Problem, welches bei Voraussetzung dieser Kenntnis entstände, wäre wegen seiner Weitschichtigkeit für uns unlösbar.

Diese Erkenntnisgrenzen weisen ebenso wie die Kämpfe um die Begründung der Axiomatik und wie die Schwierigkeiten, die in den asymptotischen Prozessen trotz ihrer mathematischen Beherrschbarkeit liegen, darauf hin, daß die Notwendigkeit des Geschehens, welche wir durch die Logisierung des Gegebenen erkennen, ihre Grenzen hat, und daß also Platz bleibt für eine, in Freiheit gegründete Gesetzmäßigkeit des Sein-Sollenden, von welcher die ganze Geschichte der Menschheit Zeugnis ablegt in ihrem Ringen um religiös-ethische Ideale. Auch für diese Gesetzmäßigkeit des Sein-Sollenden wirkt die Mathematik auf der Schule mittelbar und auch unmittelbar, und damit für das zweite, dem Menschen zugewandte Ideal. In der mathematischen Arbeit mit ihren klaren Zielen, ihrer Strenge und ihrer steten Selbstkontrolle, wie sie z. B. die „Probe" einer Aufgabe gestattet, wird ein gutes Stück ethischer Erziehung geleistet.

Auch in ästhetischer Hinsicht kann die Mathematik auf der Schule, ganz abgesehen von der Verbindung mit dem Zeichnen, sehr wirksam sein. An Kroneckers Ausspruch: „Auch wir sind Dichter!" braucht nur nochmals erinnert zu werden, aber auch mit dem Hinweise, daß dem Schüler die Schönheit, die im Mathematischen liegt, wirklich zum Bewußtsein gebracht werden soll. Die berechtigte Forderung einer eleganten Darstellung führt zur Ausbildung in künstlerischer Hinsicht – die Kritik einer an sich richtigen aber uneleganten Lösung eines Schülers kann in dieser Richtung sehr wirksam sein.

Außerdem gestattet die Grenzmethode der Mathematik, geschichtlich gegebene zielstrebige Reihen von Veränderungen in Grenzvorstellungen abzuschließen, welche man als Ideen und Ideale zu bezeichnen pflegt, und so Werte wirklich zu begründen, welche in ethischer und ästhetischer Beziehung von Bedeutung sind, auch dem Gedanken der geschichtlichen Entwicklung eine genauere Form zu geben.[1])

Neben allem einzelnen ist aber besonders noch darauf hinzuweisen, daß die mathematisch-naturwissenschaftliche und die philologisch-historische Forschung, welche ja bei den Alexandrinern in enger Berührung und in gegenseitiger Achtung standen, auch auf dem späteren Wege ihrer Entwicklung sich schließlich immer zur Lösung einer gemeinsamen Aufgabe verbunden haben, mochte dies oft auch hüben und drüben nicht zum Bewußtsein kommen.

Im besondern hat die philologisch-historische Forschung des XIX. Jahrhunderts, welche zunächst dem Ideale „Klassisches Altertum" dienen wollte und in diesem Dienste das Ideal selbst kritisch zersetzen mußte, uns dafür die Kultur der Griechen und die Zivilisation der Römer erarbeitet, damit aber zugleich gezeigt, daß der ideale Mensch an keiner Stelle der Geschichte zu finden ist, auch nicht in Hellas, und daß alle Ideale jenseit der greifbaren Wirklichkeit liegen.[2])

Im besondern hat die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung des XIX. Jahrhunderts[3]), indem sie endgültig lehrte, die Sinnenwelt als ein in sich geschlossenes, durch unverbrüchliche Gesetze beherrschtes Ganzes anzusehen, den Menschen gezwungen, in seinem Innern die ewigsprudelnde Quelle seines religiös-ethischen Glaubens zu suchen, durch welche auch die Sinnenwelt ihre letzte Deutung erhält.

So weisen sie beide auf ein Ziel, auf das jenseit alles Räumlich-Zeitlichen liegende Reich des Sein-Sollenden mit seiner Freiheit.

Auf ihrem eigensten Gebiete kann die Mathematik Freiheit zwar nur in dem schöpferischen Geiste selbst anerkennen, nicht in der Gesetzmäßigkeit, die dieser feststellt, und es ist deshalb gut, daß auf der Schule überall die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung ergänzt wird durch die philologisch-historische, in der auch das Alogische des Lebens zur Geltung kommt.

---

1) Das Wort „absolut" ist meist, nicht immer, ein gutes Reagenz auf Ziele asymptotischer Entwicklungsreihen. Vgl. Nr. 167c.

2) Vgl. Nr. 167i, 167k, 167l und 167o.

3) Vgl. dazu Anm. 2 und besonders noch Nr. 98.

Zu den Ideal-Wissenschaften, welche von der Mathematik mit allen ihren Anwendungsgebieten gebildet werden, müssen auch die Real-Wissenschaften treten, welche dem Besonderen, im landläufigen Sinne Wirklichen zugewandt sind, vor allem dem Menschen und dessen vielgestaltigen sozialen Verbänden.

Aus beiden erwächst erst die Einheit des Wissens, die der Philosophie stets als unerreichbares und doch fruchtbringendes Ideal vorgeschwebt hat. In seinem Dienste hat sie, gegenüber allem, infolge der notwendigen Arbeitsteilung sich vielfach und stets mehr und mehr verzweigenden Einzel-Wissen, immer und immer wieder auf dessen Zusammenschluß hingewiesen, ihn künstlerisch durch eine Schluß-Dichtung ausgestaltend, und diese wichtige Aufgabe wird ihr auch für alle Zukunft verbleiben.

Fünfter Abschnitt.
Übersicht über die Literatur.

Die folgende Zusammenstellung bezweckt, für das weitere Studium der behandelten Fragen eine möglichst objektive, erste literarische Orientierung zu geben[1]).

Die bekannten Werke der Klassiker der Philosophie von Platon bis Kant einschließlich wurden nicht aufgenommen, ebensowenig die älteren Werke der Klassiker der Mathematik.

1. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Herausgegeben von F. Klein. 5 Bände. Leipzig und Berlin 1909 u. f.
2. Apelt, E. Fr.,
   a) Theorie der Induktion. Leipzig 1854.
   b) Metaphysik. 1857. Neudruck. Halle a. S. 1910.
3. Avenarius, R.,
   a) Philosophie als Denken der Welt gemäß dem Prinzipe des kleinsten Kraftmaßes. Neue Auflage. Berlin 1903.
   b) Kritik der reinen Erfahrung. Neue Auflage. 2 Bde. Leipzig 1907.
4. Baumann, J.,
   a) Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. I. und II. Band. Berlin 1868 und 1869.
   b) Elemente der Philosophie. Leipzig 1891.
5. Beneke, E.,
   a) Lehrbuch der Psychologie als Naturwissenschaft, neu bearbeitet von J. G. Dreßler. Berlin 1861.
   b) System der Logik. Berlin 1842.
6. Bergson, H., Essai sur les données immédiates de la conscience. 6. Aufl. Paris 1908.
7. Biel, B., Der mathematische Unterricht in seiner Beziehung zu den anderen Unterrichtsgegenständen. Gymnasial-Programm. Bensheim 1895.
8. Boirac, E., Cours élémentaire de Philosophie. 24. Aufl. Paris 1911.
9. Boltzmann L., Populäre Schriften. Leipzig 1905.
10. Bolzano, B.,
   a) Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung usw. Leipzig 1817.
   b) Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegt. Prag 1817. Neudruck, Berlin 1894.
   c) Drei philosophische Abhandlungen usw. (a. d. Nachlasse), mit einem Anhange „Bolzano, Literatur“ von Prihonsky. Leipzig 1851.
   d) Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem Nachlasse von Prihonsky. Berlin 1889.

---

1) Einschlägige Arbeiten des Verfassers mußten natürlich aufgeführt werden, soweit sie zur weiteren Begründung des in der Abhandlung selbst Gegebenen dienen.

11. Bonola, R., Die Nicht-Euklidische Geometrie; deutsche Ausgabe von H. Liebmann. Leipzig und Berlin 1908.
12. Boole, G., An investigation of the laws of thought etc. London 1854.
13. Borel, E., Elemente der Mathematik. Deutsch von P. Stäckel. 2 Bde. Leipzig 1908.
14. Brix, J., Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen; Dissertation. Leipzig 1889.
15. Burkhardt, H.,
   a) Algebraische Analysis. Leipzig 1903.
   b) Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken (Züricher Antrittsvorlesung von 1897) in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 11 (1902).
16. Cantor, G., Zahlreiche Arbeiten über die von ihm begründete „Mengenlehre" in den Math. Annalen seit 1871, im Journal f. reine u. ang. Mathematik seit 1874 und in den Acta mathematica 1884; vgl. besonders die Schrift: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig 1883. – Weitere Literatur z. B. im Enzyklop.-Artikel „Mengenlehre" von A. Schoenflies, Bd. I, 1, sowie in dessen Bericht in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 8 (1900) und Ergänzungsband 2 (1908).
17. Carnot, L. M. N., Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Paris 1797.
18. Cassirer, E.,
   a) Der kritische Idealismus und die Philosophie des gesunden Menschenverstandes. Philosophische Arbeiten, herausgegeben von Cohen und Natorp. I, 1. Gießen 1906.
   b) Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft. 2. Bd. Berlin 1906 u. f.
   c) Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin 1910.
19. Chamberlain, H. St., Immanuel Kant. München 1905.
20. Cohen, H.,
   a) Platons Ideenlehre und die Mathematik. Marburg 1879.
   b) Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Berlin 1883.
   c) Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. Berlin 1883.
   d) System der Philosophie. 2 Bde. (Logik und Ethik). Berlin 1902 und 1904.
21. Cohn, J., Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant. Leipzig 1895.
22. Cournot, A. A., Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. 2. Auflage. 2 Bde. Paris 1857.
23. Couturat, L.,
   a) De l'infini mathématique. Paris 1896.
   b) Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von C. Siegel. Leipzig 1908.
   c) L'algèbre de la logique (Sammlung Scientia). Paris 1905.
24. Dedekind, R.,
   a) Stetigkeit und irrationale Zahlen. 1. Aufl. 1872. 2. Aufl. Braunschweig 1892.
   b) Was sind und was sollen die Zahlen? 2. Aufl. Braunschweig 1893.
25. Delboeuf, J.,
   a) Prolégomènes philosophiques de la géometrie. Liège 1860.
   b) Logique algorithmique. Lüttich 1877.
26. Dingler, H.,
   a) Über die Grundlagen der Euklidischen Geometrie, Mitteilungen des naturwiss. Vereins Aschaffenburg 6 (1907).
   b) Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Leipzig 1911.
27. Donadt, A., Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome. Leipzig 1881.
28. Drobisch, M. W., Neue Darstellung der Logik. 4. Aufl. Leipzig 1875.

29. Du Bois-Reymond, E., Über die Grenzen des Naturerkennens. Die sieben Welträtsel. Neue Aufl. Leipzig 1891. Auch in den Reden, 2 Bände. 2. Aufl. Leipzig 1912.
30. Du Bois-Reymond, P., Die allgemeine Funktionentheorie. I. Teil. Tübingen 1882.
31. Dühring, E., Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik. Berlin 1869, 2. Aufl. 1877.
32. Ehrenfels, C. v., Zur Philosophie der Mathematik. Vierteljahrsschrift für wiss. Philosophie. 1891.
33. Einstein, A., Zur Elektrodynamik bewegter Körper in den Annalen der Physik Bd. 17 (1905).
34. Elsenhans, Th., Fries und Kant. Gießen 1906.
35. Engel, F., siehe Stäckel Nr. 138a u. b und Graßmann Nr. 53.
36. Enriques, F.,
    a) Vorlesungen über Projektive Geometrie, übersetzt von H. Fleischer. Leipzig 1903.
    b) Probleme der Wissenschaft, 2 Bde., übersetzt von H. Grelling. Leipzig 1910.
    c) Prinzipien der Geometrie. Enzyklopädie-Artikel III, 1. Heft 1.
    d) Fragen der Elementargeometrie. Leipzig. 1. Teil deutsch von H. Thieme 1909, 2. Teil deutsch von H. Fleischer 1907.
37. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Leipzig 1898 u. f. (Die französische Ausgabe ist eine selbständige Bearbeitung der deutschen Ausgabe.)
38. Erdmann, B.,
    a) Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.
    b) Logik. Halle a. S. 1892 u. f. Neue Bearbeitung, 1907.
39. Färber, C., Arithmetik (Grundlehren der Mathematik I. 1). Leipzig u. Berlin 1911.
40. Fechner, G. Th.,
    a) Über die physikalische und philosophische Atomenlehre. 2. Aufl. Leipzig 1864.
    b) Kollektivmaßlehre, herausgegeben von G. F. Lipps. Leipzig 1897.
41. Fehr, H., Enquête de l'enseignement mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens. Paris-Genf 1908. Vgl. auch Enseignement mathématique 1905 bis 1908.
42. Fick, A., Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeitslehre. Würzburg 1883.
43. Fischer, E. G., Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis usw. Berlin 1808.
44. Frege, G.,
    a) Begriffsschrift. Halle a. S. 1879.
    b) Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884.
    c) Funktion und Begriff. Jena 1891.
    d) Grundgesetze der Arithmetik. Bd. I, Jena 1893. Bd. II, Jena 1903.
45. Frerichs, H., Die Hypothesen der Physik. Bremen 1879.
46. Fresenius, F. C., Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. Wiesbaden 1868.
47. Freyer, P., Beispiele zur Logik aus der Mathematik und Physik. 2. Aufl. Berlin 1889.
48. Fries, I. F.,
    a) Mathematische Naturphilosophie. Heidelberg 1822.
    b) Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig 1842.
49. Friessche Schule. Abhandlungen der. Neue Folge. Herausgegeben von G. Hessenberg, K. Kaiser und L. Nelson. Göttingen 1904 u. f.
50. Frischeisen-Köhler, M., Wissenschaft und Wirklichkeit. Leipzig u. Berlin 1912.

51. Gercken, W., Die philosophischen Grundlagen der Mathematik. Schulprogramm. Perleberg 1887.
52. Gmeiner, J. A., siehe Stolz Nr. 142c.
53. Graßmann, H., Gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgeg. von F. Engel. 4 Bde. Leipzig 1894 bis 1902. (Bd. I enthält die Ausdehnungslehren von 1844 und 1862.)
54. Graßmann, R., Formenlehre. Stettin 1872 und 1891.
55. Grelling, K., siehe unter Enriques und Nelson.
56. Gutzmer, A.,
   a) Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig 1904.
   b) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte usw. Leipzig und Berlin 1908.
   c) Siehe auch Nr. 74.
57. Halfmann, H., Einführung in die Weltanschauungsprobleme. 3. Aufl. Berlin 1912.
58. Hamilton, W. R., Theory of Conjugate Functions. Dublin, Transactions 1835.
59. Hankel, H., Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen. Leipzig 1867.
60. Harms, Fr., Logik. Herausgegeben von Wiese. Leipzig 1886.
61. Hauck, G., Die subjektive Perspektive. Stuttgart 1879.
62. Helmholtz, H. v.,
   a) Wissenschaftliche Abhandlungen. 3 Bde. Leipzig 1882 bis 1895. (Bd. II enthält die Aufsätze zur Erkenntnistheorie, Bd. III Nr. 29 die Abhandlung über Zählen und Messen.)
   b) Vorträge und Reden. 2 Bde. 4. Aufl. Braunschweig 1896.
63. Henrici, J. und Treutlein, P., Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Leipzig 1896 u. f.
64. Herbart, J. Fr., Sämtliche Werke. Herausgegeben von Hartenstein. 12 Bde. Leipzig 1850 bis 1852.
65. Hertz, H., Die Prinzipien der Mechanik. Bd. 3 der gesammelten Werke, Leipzig 1894/95. Neue Auflage 1910.
66. Hessenberg, G., Grundbegriffe der Mengenlehre. Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge. Heft 4. Göttingen 1906.
67. Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1909. 4 Aufl. 1912.
68. Hillebrand, Fr., Zur Lehre von der Hypothesenbildung. Wien 1896.
69. Höfler, A.,
   a) Grundlehren der Logik und Psychologie. 2. Aufl. Leipzig und Wien 1906.
   b) Didaktik des mathematischen Unterrichts. [Bd. 1 der „Didaktischen Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen". Herausgegeben von A. Höfler und Fr. Poske.] Leipzig und Berlin 1910.
   c) Physik, mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie usw., unter Mitwirkung von E. Maß und Fr. Poske. Braunschweig 1904.
   d) Die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichts. Braunschweig 1903.
   e) Grenzfragen der Mathematik und Philosophie (Wiener Vortrag 1906). Leipzig 1906.
   f) Philosophische Elemente in allen Unterrichtsfächern, philosophische Propädeutik als eigenes Fach (Vortrag 1905). Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft, 1905, Nr. 5.
   g) Die neuesten Einrichtungen in Österreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik [Berichte über den math. Unterr. in Österreich, veranlaßt durch die Intern. Math. Unterrichtskommission, Heft 12]. Wien 1912.

70. Hölder, O., Anschauung und Denken in der Geometrie. Leipzig 1900.
71. Hovestadt, H., siehe Killing Nr. 77c.
72. Husserl, E. G.,
    a) Philosophie der Arithmetik. Halle a. S. 1891.
    b) Logische Untersuchungen. Halle a. S. Bd. I 1900, Bd. II 1901.
73. Ibrügger, Chr., Über die Grundlagen der Geometrie. Gymnasialprogramm. Stargard i. P. 1912 u. f.
74. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig 1892 u. f., zurzeit herausgegeben von H. Gutzmer.
75. Jevons, W. St.,
    a) Pure Logic etc. London 1884.
    b) The principles of science. London 1874.
76. Kerry, B.,
    a) Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung. Vierteljahrsschrift für wiss. Philosophie, Jahrg. IX, X und XI.
    b) System einer Theorie der Grenzbegriffe, herausgegeben von G. Kohn. Leipzig und Wien 1890.
77. Killing, W.,
    a) Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885.
    b) Einführung in die Grundlagen der Geometrie I u. II. Paderborn 1893 bis 1898.
    c) Handbuch des mathematischen Unterrichts im Verein mit H. Hovestadt. 1. Bd. Leipzig und Berlin 1910.
78. Klein, F.,
    a) Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (1871). Math. Ann. Bd. 4, ferner 6, 7 und 37.
    b) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Das sogenannte Erlanger Programm, Erlangen 1872. Math. Ann. Bd. 43.
    c) Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve. Erlanger Bericht 1873. Math. Ann. Bd. 22.
    d) Nicht-Euklidische Geometrie I und II. Vorlesungen, ausgearbeitet von F. Schilling. 2 Bde. (vergriffen). Göttingen 1893.
    e) Über die Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachrichten 1895.
    f) Zur ersten Verteilung des Lobatschefskij-Preises usw. Math. Ann. 50.
    g) Universität und Technische Hochschule in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 7 (1899). Vgl. dazu Pringsheim Nr. 115c u. d.
    h) Über die Aufgaben und Methoden des mathematischen Unterrichts an den Universitäten in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 7 (1899). Vgl. dazu Pringsheim Nr. 115c und d.
    i) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Vorlesungen, ausgearbeitet von C. Müller. Leipzig 1902. Neudruck 1907.
    k) Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät, betr. die Beneke-Preisaufgabe für 1901. Göttinger Nachrichten 1901.
    l) Grenzfragen der Mathematik und Philosophie. (Wiener Vortrag 1905.) Leipzig 1906.
    m) Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 2 Bde. Vorlesungen, ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig 1908 und 1909.
    n) Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe. (Göttinger Vortrag 1910.) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (sowie physikalische Zeitschrift) 1910.
    o) und Riecke, E., Über angewandte Mathematik und Physik. Leipzig 1900.
    p) –, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts. I. und II. Teil in 1 Bande. Leipzig 1904.
    q) und Schimmack, R., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907.

79. Kries, J. v., Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg i. B. 1886.
80. Kromann, K., Unsere Naturerkenntnis. Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Deutsch von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1883.
81. Kronecker, L., Werke; herausgegeben von K. Hensel. Leipzig 1896 bis 1899.
82. Laisant, C. A.,
 a) La mathématique, Philosophie, Enseignement. Paris 1898.
 b) Initiation mathématique. 7. Aufl. Paris 1909.
83. Lampe, E., Die Entwicklung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur (Rede). Berlin 1893. Vgl. auch J. C. V. Hoffmanns Zeitschr. usw. 1893.
84. Lange, F. A.,
 a) Geschichte des Materialismus. 2 Bde. 3. Aufl. Iserlohn 1876 u. 1877.
 b) Logische Studien. Ein Beitrag zur Neugründung der formalen Logik und der Erkenntnistheorie. Iserlohn 1877.
85. Laue, M., Das Relativitätsprinzip. Braunschweig 1911.
86. Liard, L.,
 a) Des définitions géométriques et des définitions empiriques. Paris 1903.
 b) Logique. 6. Auflage. Paris 1911.
87. Liebmann, O., Zur Analysis der Wirklichkeit. Straßburg 1876.
88. Lietzmann, W.,
 a) s. „Mathem. Bibliothek."
 b) Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland, und Stoff und Methode des Raumlehrunterrichts in Deutschland in Nr. 1, Bd. V, Heft 1 u. 2.
89. Lindemann, F., Lehren und Lernen in der Mathematik (Rede). München 1904.
90. Lipps, G. Fr.,
 a) Die logischen Grundlagen des mathematischen Funktionsbegriffs. (Dissertation.) Zweibrücken 1888.
 b) Mythenbildung und Erkenntnis. Leipzig und Berlin 1907. Vgl. dazu auch Wundts philosophische Studien, Bd. X u. f.
 c) Weltanschauung und Bildungsideal. Untersuchungen zur Begründung der Unterrichtslehre. Leipzig und Berlin 1911.
91. Lorentz, H. A., The Theory of Electrons and its Applications to the Phaenomena of Light and Radiant Heat. Leipzig 1909.
92. Lotze, H.,
 a) Logik (System der Philosophie I). 2. Aufl. Leipzig 1880.
 b) Metaphysik (System der Philosophie II). 2. Aufl. Leipzig 1884.
93. Lourié, S., Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Tübingen 1910.
94. Mach, E.,
 a) Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig 1883. 7. Aufl. 1912.
 b) Beiträge zur Analyse der Empfindungen. Jena 1886.
 c) Irrtum und Erkenntnis. Leipzig 1905.
 d) Über den relativen Bildungswert der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer. Wien 1886. Neue Aufl. 1908.
95. Mathematische Bibliothek. Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben, unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig und Berlin 1911 ff.
96. Mangoldt, H. v., Die Begriffe „Linie" und „Fläche". (Enzykl. Artikel III Heft 1.)
97. Meinong, A.,
 a) Über Annahmen. 2. Aufl. Leipzig 1910.
 b) Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie. Leipzig 1904.
 c) Über die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften. Leipzig 1907.
98. Merz, I. Th., A History of European Thought in the XIX. Century. 2 vols. London und Edinburgh 1903 und 1908 (3. Aufl.).

99. Meyer, W. Fr., Zur Lehre vom Unendlichen. Tübingen 1889.
100. Michaelis, Über Kants Zahlenbegriff. Programm, Charlottenburg 1884.
101. Mill, J. St., System der deduktiven und induktiven Logik. Deutsch von Schiel. Braunschweig 1877.
102. Minkowski, Raum und Zeit; in dem Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 18 (1909).
103. Müller, F. A., Das Problem der Kontinuität in Mathematik und Mechanik Marburg 1886.
104. Nath, M., Bildungsaufgaben der Mathematik. Berlin 1904.
105. Natorp, P.,
   a) Descartes Erkenntnistheorie usw. Marburg 1882.
   b) Platons Ideenlehre usw. Marburg 1903.
   c) Philosophische Propädeutik. 3. Aufl. Marburg 1909.
   d) Allgemeine Psychologie. 2. Aufl. Marburg 1910.
   e) Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaft. Leipzig und Berlin 1910.
106. Nelson, L.,
   a) Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge. Bd. I. Heft 2 und 3.
   b) Über das sogenannte Erkenntnisproblem. Ebenda. Bd. II. Heft 4.
   c) Im Verein mit K. Grelling, Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. Ebenda. Bd. II. Heft 3.
   d) Kant und die Nicht-Euklidische Geometrie, in der Zeitschrift „Das Weltall" 1906.
107. Ostwald, W.,
   a) Vorlesungen über Naturphilosophie. 3. Aufl. Leipzig 1905.
   b) Grundriß der Naturphilosophie; in Reclams Universalbibliothek. Leipzig.
108. Pasch, M.,
   a) Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1882.
   b) Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882.
109. Paulsen, Das Problem der Empfindung. I. Die Empfindung und das Bewußtsein. Philosophische Arbeiten. Herausgegeben von Cohen und Natorp. Bd. I, Heft 4. Gießen 1907.
110. Peano, G.,
   a) Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Graßmann. Preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Turin 1888.
   b) Arithmetices principia nova methodo exposita. Turin 1889.
   c) I principii di geometria logicamente esposti. Turin 1889.
   d) Formulaire de Mathématiques. Turin 1897.
111. Petzoldt, J.,
   a) Maxima und Minima der Ökonomie (Dissertation). Altenburg 1891.
   b) Einführung in die Philosophie der reinen Erfahrung. 2 Bde. Leipzig und Berlin 1900 und 1904.
   c) Das Weltproblem vom positivistischen Standpunkt aus. 2. Aufl. Leipzig 1911.
112. Pietzker, Fr.,
   a) Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchung über die Grundlage der Geometrie. Braunschweig 1891.
   b) Das humanistische Element im exakten wissenschaftlichen Unterricht. Gymnasialprogramm. Nordhausen 1894.
   c) Sprachunterricht und Sachunterricht vom naturwissenschaftlichen Standpunkt. Bonn 1900.
113. Poincaré, H.,
   a) Wissenschaft und Hypothese. Übersetzt von F. Lindemann. 2. Aufl. Leipzig 1904.
   b) Der Wert der Wissenschaft. Übersetzt von E. Weber. Herausgeg. von H. Weber. Leipzig und Berlin 1910.

114. Poske, Fr., Oberstufe der Naturlehre, nach A. Höflers Naturlehre bearbeitet. 3. Aufl. Braunschweig 1911. — Vgl. ferner die von Poske herausgegebene Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, namentlich auch die Sonderhefte (Berlin).

115. Pringsheim, A.,
a) Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. Enzykl.-Artikel. Bd. I, 1.
b) Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (Rede). München 1904. Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13.
c) Zur Frage der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung. Ebenda Bd. 7 (1899). Vgl. dazu Klein, Nr. 78g und h.
d) Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. Ebenda Bd. 6 (1898). Vgl. dazu Klein, Nr. 78g und h.

116. Reidt, Fr., Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin 1886. 2. Aufl. von H. Schotten. Leipzig 1906.

117. Reye, Th., Die Geometrie der Lage. 5. Auflage. Leipzig 1909 u. f.

118. Rickert, H.,
a) Gegenstand der Erkenntnis. 1904/05.
b) Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung. Tübingen 1902.
c) Kulturwissenschaft und Naturwissenschaft. Leipzig 1911.

119. Riecke, siehe Klein Nr. 78o u. p.

120. Riehl, A.,
a) Über wissenschaftliche und nichtwissenschaftliche Philosophie. Freiburg und Tübingen 1883.
b) Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. 2. Aufl. Leipzig 1904.
c) Der philosophische Kritizismus usw. 2 Bde. Neue Auflage 1908 u. f.
d) Logik und Erkenntnistheorie. Die Kultur der Gegenwart. Teil I. Abt. VI. 2. Aufl. 1908.
c) Humanistische Ziele des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Berlin 1909.

121. Riemann, B., Gesammelte mathematische Werke usw. Herausgegeben von R. Dedekind und H. Weber. 2. Aufl. Leipzig 1892.

122. Russell, B.,
a) An Essay on the Foundations of Geometry. Cambridge (Univ. Press.) 1897.
b) The principles of Mathematics. 2 Bde. Cambridge (Univ. Press.) 1903 und 1912.

123. Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis. Leipzig 1856.

124. Schellbach, K. H.,
a) Neue Elemente der Mechanik; bearbeitet von Arendt. Berlin 1860.
b) Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. Berlin 1887.

125. Schimmack, R.,
a) Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition. (Göttinger Dissertation.) Halle a. S. 1908. Erschienen in den Nova Acta der Kais. Leop. Kar. d. Akademie, Bd. 90 (1908).
b) Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. Göttinger Habilitationsvortrag 1911. (Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 42.)
c) Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland, Göttinger Habilitationsschrift, in Nr. 1, Bd. III, Heft 1.
d) Siehe auch F. Klein Nr. 78q.

126. Schmid, Bastian, Philosophisches Lesebuch zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Leipzig 1908.

127. Schoenflies, A.,
a) Berichte über die Mengenlehre in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 8 (1900) und Ergänzungsband 2 (1908).
b) Mengenlehre. Enzykl.-Artikel Bd. I, 1.

c) Die Stellung der Definition in der Axiomatik. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 20 (1911).
128. Schotten, H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Bisher 2 Bde. Leipzig 1890 und 1893. (Vgl. auch Reidt.)
129. Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig und Berlin 1908 u. f.
130. Schröder, E.,
a) Vorlesungen über die Algebra der Logik. Leipzig 1890 u. f.
b) Über das Zeichen. Karlsruhe 1890.
c) Der Operationsbeweis des Logikkalkuls. Leipzig 1877.
131. Schubert, H., Herausgegeben von. Sammlung mathematischer Lehrbücher. Leipzig 1899 u. f.
132. Schulte-Tigges, A., Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage. 2. Aufl. Berlin 1904.
133. Schuppe, W.,
a) Das menschliche Denken. Berlin 1870.
b) Erkenntnistheoretische Logik. Bonn 1878.
c) Grundriß der Erkenntnistheorie und Logik. 2. Aufl. Berlin 1910.
134. Schur, F.,
a) Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann. Bd. 55.
b) Die Parallelen-Frage im Lichte der modernen Geometrie. Päd. Archiv Bd. 34.
c) Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin 1909.
135. Schwarz, H., Versuch einer Philosophie der Mathematik usw. Halle a S. 1853.
136. Sigwart, Ch., Logik. 2. Aufl. Freiburg i. B. B. 1893.
137. Simon, Max,
a) Rechnen und Mathematik (Didaktik und Methodik). Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre usw. IV, 1. München 1895. 2. Aufl. 1908.
b) Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Funktionstheorie. Straßburg 1884.
c) Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. Straßburg 1890.
d) Zu den Grundlagen der Nichteuklidischen Geometrie. Festschrift für E. E. Kummer und Straßburger Programm 1891.
e) Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig und Berlin 1906.
f) Über Mathematik (Erweiterung der Einleitung in die Didaktik). Philosophische Arbeiten. Herausgegeben von H. Cohen und P. Natorp. Bd. II, Heft 1. Gießen 1908.
138. Stäckel, P.,
a) und Fr. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß usw. Leipzig 1895.
b) und Fr. Engel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Bis jetzt 2 Bde. Leipzig und Berlin 1910.
c) Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper, Enzyklopädie-Artikel IV, 6.
d) Bearbeitung von Gauß' Nachlaß betr. die „Grundlagen der Geometrie" in Bd. 8 von Gauß' gesammelten Werken.
139. Stadler, A., Über die Aufgabe der Mittelschule. München 1887.
140. Steinhauser, A., Die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln. Leipz. 1889.
141. Stöhr, A., Algebra der Grammatik usw. Leipzig und Wien 1898.
142. Stolz, O.,
a) Größen und Zahlen (Rede). Leipzig 1891.
b) B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Mathem. Annalen Bd. 18.

142. Stolz, O.,
c) Theoretische Arithmetik, in Verbindung mit I. A. Gmeiner. Leipzig 1902.
143. Streintz, H., Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.
144. Stumpf, K.,
a) Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. Leipzig 1873.
b) Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Bayr. Akad. der Wiss. 1892.
145. Tannery, I., Elemente der Mathematik; deutsch von P. Klaeß. Leipzig u. Berlin 1909.
146. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. 2. Jahrg. 1911. Leipzig und Berlin 1911.
147. Thieme, H., Die Elemente der Geometrie (Grundlehren der Mathematik II, 1). Leipzig und Berlin 1909.
148. Timerding, H. E., Die Erziehung der Anschauung. Leipzig und Berlin 1912.
149. Tobias, W., Grenzen der Philosophie usw. Berlin 1875.
150. Trendelenburg, F. A., Elementa Logices Aristoteleae. Berlin 1836.
151. Treutlein, P.,
a) Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts. Leipzig und Berlin 1911.
b) Lehrbuch der Elementar-Geometrie im Verein mit I. Henrici. Leipzig und Berlin. 4. Aufl. 1910.
152. Überweg, Fr., System der Logik. 2. Aufl. Bonn 1865.
153. Ulrici, H., Compendium der Logik. Leipzig 1860.
154. Vahlen, K. T., Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1905.
155. Venn, J., The Logic of chance. London 1876.
156. Verhandlungen der Internationalen Mathematiker-Kongresse (Zürich 1897, Paris 1900, Heidelberg 1904, Rom 1908). Leipzig 1897, Paris 1900, Leipzig 1904, Rom 1908.
157. Veronese, G., Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen usw. Deutsch von A. Schepp. Leipzig 1894.
158. Vierkandt, A., Die Stetigkeit im Kulturwandel. Leipzig 1908.
159. Volkmann, P., Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1910.
160. Volkmann von Volkmar, W., Lehrbuch der Psychologie usw. Cöthen 1885.
161. Voß, A.,
a) Über das Wesen der Mathematik. Leipzig und Berlin 1908.
b) Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Enzykl.-Artikel IV, 1, Heft 1.
162. Weber, H. und Wellstein, J., Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. 3 Bde. Leipzig und Berlin, neue Auflage [4 Bde.] 1909 u. f.
163. Weierstraß, K., Mathematische Werke. Berlin 1894 bis 1902.
164. Weigel, E., Philosophia mathematica. Jena 1693.
165. Wellstein, J., siehe Weber, H.
166. Wendt, G., Der deutsche Unterricht und die philosophische Propädeutik. (A. Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre III, 3.) München 1896.
167. Wernicke, A.,
a) Die Philosophie als descriptive Wissenschaft. Braunschweig 1882.
b) Grundzüge der Elementar-Mechanik. Gemäß den Anforderungen der philosophischen Propädeutik als Einführung in die physikalischen und technischen Wissenschaften für den Unterricht bearbeitet. Braunschweig 1883.
c) Die asymptotische Funktion des Bewußtseins. (Vierteljahrsschrift für wissensch. Philosophie 1887/88.)

167. Wernicke, A.,
d) Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Maßes [1]). Gymnasialprogr. Braunschweig 1887.
e) Zur Propädeutik-Frage. (Zeitschrift für Österr. Gymnasien, 1888.)
f) Goniometrie und Grundzüge der Trigonometrie. Braunschweig 1888.
g) Beiträge zur Theorie der centro-dynamischen Körper [1]). Gymnasialprogr. Braunschweig 1892.
h) Aus dem Gebiete des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasialunterrichts. Hallenser Lehrproben 1894/95.
i) Kultur und Schule. Osterwieck a. H. 1896. (Vgl. auch den entsprechenden Artikel in Reins Enzyklopädischem Handbuche der Pädagogik.)
k) Die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung in ihrer Stellung zum modernen Humanismus (Vortrag). Berlin 1898.
l) Weltwirtschaft und Nationalerziehung (Vortrag). Leipzig 1900.
m) Schulaufgaben aus der Mechanik unter besonderer Berücksichtigung der Technik (Vortrag). Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. 1900. [Vgl. dazu ferner den Bericht über die Vorträge der mathem.-naturw. Sektion der Philologen-Versammlung in Bremen von 1899.]
n) Lehrbuch der Mechanik. 4. Auflage. Braunschweig 1900 u. f.
o) Die kulturelle Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung. Pädag. Archiv 1903.
p) Die Oberrealschule und die Schulreformfragen der Gegenwart (Vortrag). Leipzig und Berlin 1910.
q) Die Theorie des Gegenstands und die Lehre vom Ding-an-sich bei Immanuel Kant. Habilitationsschrift von 1881, mit Bemerkungen herausgegeben als Oberrealschulprogramm. Braunschweig 1904.
r) Kant . . . und kein Ende? 2. Aufl. Braunschweig 1907.
s) Die Begründung des deutschen Idealismus durch Immanuel Kant. Ebenda 1910.
t) Kants kritischer Werdegang. Braunschweig 1911.

168. Witting, A., siehe „Mathem. Bibliothek".

169. Wundt, W.,
a) Grundzüge der physiologischen Psychologie. 3 Bde. 6. Aufl. Leipzig 1908 u. f.
b) Logik. 3 Bde. 3. Aufl. Stuttgart 1907 u. f.

170. Young, W. H., The Theory of Sets of Points. Cambridge (Univ. Press.) 1906.

171. Zeissig, E., Die Raumphantasie im Geometrieunterricht. Abhandlungen aus dem Gebiete der pädagogischen Psychologie und Physiologie; herausgegeben von H. Schiller und Th. Ziehen. Berlin 1902.

172. Zermelo, E., Abhandlungen zur Mengenlehre, besonders in den mathematischen Annalen Bd. 59 (1904) und Bd. 65 (1908).

173. Ziertmann, P., Die Philosophie im höheren Schulunterrichte usw. Oberrealschulprogramm. Steglitz 1906.

174. Zindler, K., Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis. Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften 1889.

175. Zöllner, J. C. F., Über die Natur der Kometen. Beiträge zur Geschichte und Theorie der Erkenntnis. Leipzig 1872.

1) Soweit noch Exemplare vorhanden, stehen sie auf Anfordern zur Verfügung.

International Commission on the Teaching of Mathematics

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND III HEFT 8

PSYCHOLOGIE UND MATHEMATISCHER UNTERRICHT

VON

DR. D. KATZ

PRIVATDOZENT A. D. UNIVERSITÄT UND ASSISTENT
A. D. PSYCHOLOGISCHEN ABTEILUNG D. PHILOSOPHISCHEN SEMINARS
IN GÖTTINGEN

MIT 12 ABBILDUNGEN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

VORWORT

Da über die Ziele dieses Heftes die Einleitung hinreichend unterrichtet, so bedarf es hier nur einer Kennzeichnung seiner Stellung im Rahmen der übrigen IMUK-Abhandlungen. Der derzeitige Stand der exakten psychologischen Forschung brachte es mit sich, daß weit mehr über die Beziehungen der Psychologie zum elementaren als zum mittleren und höheren mathematischen Unterricht zu sagen war. Dementsprechend hätte dieses Heft eine Aufnahme in den V. Band der IMUK-Abhandlungen finden können, der den mathematischen Elementarunterricht berücksichtigt. Auf der anderen Seite schließt es sich aber an Wernickes „Mathematik und philosophische Propädeutik" an, indem es das, was Wernicke zur logischen und erkenntnistheoretischen Seite des mathematischen Unterrichts ausgeführt hat, nach der psychologischen Seite ergänzt. Die definitive Einordnung dieses Heftes in den Band, der sich mit Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts befaßt, sollte auch den Wunsch zum Ausdruck bringen, daß sich der Lehrer der höheren Schule in stärkerem Maße, als es bis jetzt in der Regel üblich war, mit den psychologischen Fragen des mathematischen Unterrichts befassen möchte.

Die vorliegende Arbeit hat nicht nur referierenden Charakter, es konnte bei dem lückenhaften Zustand der psychologischen Forschung die Andeutung persönlicher Ansichten und neuer Fragestellungen nicht vermieden werden. Die psychologischen Betrachtungen mußten freilich bei der Enge des zur Verfügung stehenden Raumes in gedrängter Form gegeben werden, selbst die literarischen Hinweise waren auf das Notwendigste zu beschränken.

Der deutsche Unterausschuß der IMUK ermöglichte mir in freundlichem Entgegenkommen die Ausführung einer Studienreise. Ich besuchte die Städtische Blinden- und Taubstummenanstalt sowie eine Schule für Schwerhörige in Berlin, die Kgl. Taubstummenanstalt in Berlin, die Kgl. Blindenanstalt in Steglitz, das Kgl. Lehrerseminar in Spandau sowie die Anstalt für Taubstummblinde in Nowawes. In Leipzig besuchte ich das Institut für experimentelle Psychologie und Pädagogik des Leipziger Lehrervereins, in Jena die Reinsche Übungsschule. Den Leitern der besuchten Anstalten bin ich für die freundliche Aufnahme zu Dank verpflichtet. Die Anregung zu der Studienreise ging von Herrn Geheimrat Klein aus, dem ich auch herzlich danke für die mannigfachen Anregungen, die ich durch ihn bei der Besprechung pädagogischer Fragen nicht nur mit Rücksicht auf die vorliegende Arbeit erhielt.

Göttingen, im Mai 1913.

D. KATZ

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung.

Ziele der Untersuchung.

1. Kein pädagogischer Logizismus im mathematischen Unterricht.

Über die Beteiligung der Psychologie an einer Grundlegung des mathematischen Unterrichts soll an dieser Stelle nur insofern einiges bemerkt werden, als die besondere Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften auch eine Besonderheit in der Anwendung der Psychologie auf die Art ihrer Unterrichtserteilung bedingt. Die mathematischen Disziplinen zeichnen sich gegenüber den anderen Wissenschaften aus durch ihren streng logischen Aufbau. Die systematische Anordnung des Lehrstoffs kann in manchen Wissenschaften lebhafte Schwierigkeiten bereiten, in der Mathematik ist diese Anordnung nicht erst zu suchen, sie vollzieht sich nach festen logischen Prinzipien.[1] In dieser Eigenart der mathematischen Systeme liegt für ihre lehrhafte Übermittlung ein großer Vorteil; andererseits birgt sie aber auch eine gewisse Gefahr, die Gefahr des pädagogischen Logizismus, welche für andere Lehrgebiete nicht in demselben Maße besteht.

Es muß das Ziel eines jeden nicht allein auf praktische Routine, sondern auch auf wissenschaftliche Erkenntnis gerichteten Unterrichts sein, in einer systematischen Darstellung des Gebotenen auszulaufen. Vom ausgereiften Verstand wird dem systematischen Aufbau einer Wissenschaft, der mit der Definition ihrer Gegenstände und Axiome beginnt, stets vor jedem anderen sonst noch möglichen der Vorzug gegeben werden. Da sich der Lehrer in der Lage dessen befindet, der den Unterrichtsgegenstand völlig beherrscht, so liegt es nicht so fern, daß er sich auch bei seinem Unterricht allein von dem Gedanken an jenen systematischen Aufbau leiten lassen wird.[2] Nun ist aber der systematische Aufbau beim Unterricht jüngerer Menschen nicht immer der zweckmäßigste, und er ist es ganz sicher nicht in der Mathematik.

1) Von den in der Mathematik bestehenden Forschungsmethoden ist dies nicht ohne weiteres zu sagen; von ihnen ist hier auch nicht die Rede.

2) Daß sich der Lehrer zu Konzessionen an das Denken des Schülers bereit findet, ist dabei vorausgesetzt. Nicht immer trifft das zu, wie A. Höfler (Die neuesten Einrichtungen in Österreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik. Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich. Wien 1912, S. 30) an einem der Komik nicht entbehrenden Fall eines mathematischen Lehramtskandidaten geschildert hat.

Dem logischen Aufbau einer Wissenschaft tritt der pädagogische gegenüber, worunter der dem Denken des Zöglings angepaßte verstanden werden soll. Die Wissenschaft hat ihr Augenmerk allein auf die im Denken erfaßte Wahrheit zu richten, sie kann und darf absehen von den subjektiven Ausprägungen, in denen sich das Denken vollzieht. Der Psychologie dagegen ist diese subjektive Ausprägung mit all ihren individuellen Verschiedenheiten von hohem Interesse, und mit ihr geht Hand in Hand die Pädagogik, denn sie hat es in erster Linie zu tun mit einer Beeinflussung des individuellen Seelenlebens. Darum muß sich die Pädagogik in gewissem Grade den Denkgewohnheiten der einzelnen Kategorien der Zöglinge und weitergehend den Individuen jeder Kategorie anschmiegen. Was hier alles als subjektive Ausprägung des Denkens anzusehen ist, das erfährt der Lehrer allzuoft, wenn er auf Widerstand im Verständnis an solchen Stellen trifft, wo er ihn am wenigsten vermutet hätte. Es ist das allgemeinste Ziel der nachfolgenden Untersuchungen, dadurch gegen den schädlichen Logizismus im mathematischen Unterricht anzukämpfen, daß in zahlreichen Einzelfällen auf die psychologischen Komponenten nicht nur des mathematischen Unterrichts, sondern auch des mathematischen Denkens aufmerksam gemacht wird.

Verfolgen wir aber hiermit nicht dieselben Aufgaben, welche sich die Didaktiker der Mathematik gestellt haben? Das trifft nicht ganz zu, wie die folgenden kurzen Ausführungen zeigen mögen. Der Didaktiker gibt entsprechend seiner auf die Praxis gerichteten Untersuchung weniger Ausführungen über die psychologischen Prinzipien, die ihn zur Aufstellung seiner Forderungen getrieben haben. Er arbeitet mehr mit einer intuitiven Psychologie. Wir werden, soweit der mathematische Unterricht in Frage steht, die psychologischen Betrachtungen ausführlicher gestalten und dafür dort die Arbeit dem Didaktiker zur Weiterführung übergeben, wo sie die Wendung ins Praktische nimmt. Hier gibt es natürlich ein gewisses Grenzgebiet, welches um so breiter ist, je besser das didaktische Teilgebiet bereits psychologisch fundiert ist. Das gilt z. B. für die Mathematik der Elementarstufe.[1]) Die prinzipielle psychologische Betrachtung wird in höherem Maße auf die tieferen Wurzeln pädagogischer Maßnahmen hinweisen können und so auch zu neuen Fragestellungen verhelfen. Es kommt hinzu, daß in keinem Lehrbuch der Didaktik der Mathematik in einem mir hinreichend erscheinenden Maße auf die Forschungsergebnisse der neueren Psychologie, vor allem der Individualpsychologie, Rücksicht genommen worden ist. Das gilt selbst für das in vielen sonstigen Beziehungen, so auch in der Bekämpfung des pädago-

1) Hier haben unsere Untersuchungen Berührungspunkte mit den beiden Lietzmannschen Arbeiten dieser IMUK-Abhandlungen, Bd. V, Heft 1 u. 2, 'Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland', 'Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland'. Teubner 1912. Im folgenden zitiert als Lietzmann I und Lietzmann II.

gischen Logizismus, ausgezeichnete Werk A. Höflers.[1]) Vom psychologischen Standpunkt aus muß auch das als unzureichend erscheinen, was bis jetzt in didaktischen Werken über die Psychologie des mathematischen Denkens gesagt worden ist. Nicht, daß in unseren Ausführungen eine wesentliche Förderung dieser Frage zu erwarten wäre, aber wir wollen wenigstens zeigen, wo hier neue Fragestellungen möglich sind.[2])

Ein erstes Beispiel dafür, in welch hohem Maße rein psychologische Faktoren, in diesem Falle gedächtnismäßiger Natur, beim mathematischen Denken mitspielen, mag im Anschluß an eine Ausführung Poincarés gegeben werden. „Der Logiker zerlegt sozusagen jeden Beweis in eine sehr große Zahl Elementaroperationen. Wenn man alle diese Operationen, eine nach der anderen, prüft und gefunden hat, daß jede von ihnen fehlerlos ist, wird man dann glauben, den wahren Sinn des Beweises verstanden zu haben? Würde man ihn verstanden haben, selbst wenn es durch eine Anstrengung des Gedächtnisses gelänge, den ganzen Beweis zu wiederholen mit Ausführung all der elementaren Schritte, in derselben Reihenfolge, in der sie der Erfinder angeordnet hat? – Offenbar nicht; wir besäßen noch nicht die volle Wirklichkeit; das gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, würde uns entgangen sein.“[3]) Hier wird das Bewußtsein von der Einheit des Beweises erst ermöglicht dadurch, daß jene, bis jetzt allerdings wenig untersuchte Seite unserer Gedächtnisfunktion in Anspruch genommen wird, die es auch zuwege bringt, daß wir die Töne einer Melodie wirklich als einheitliche Melodie auffassen und nicht allein als eine Folge der einzelnen Töne. Wir könnten uns eine Intelligenz vorstellen, die jeden einzelnen Schritt eines Beweises spielend nähme und die doch keinen Beweis seinem eigentlichen Sinne nach erfaßte, weil die hier berührte Seite ihrer Gedächtnisfunktion nicht hinreichend leistungsfähig wäre, die doch mit irgendeiner logischen Funktion nichts zu tun zu haben scheint. Ist es nicht möglich, daß mancher Schüler wegen eines nach dieser Richtung liegenden Defektes in der Mathematik versagt?

Die Auffassung, welche das natürliche mathematische Denken – nicht dasjenige, von dem in den Lehrbüchern der Logik die Rede zu sein pflegt – allein von logischer Einsicht getragen denkt, übersieht ganz, welche Bedeutung die rein mechanische Assoziation auch bei der sinnvollen Beweisführung noch besitzt. Wäre sie bedeutungslos, so könnte es nicht vorkommen, daß auch hervorragende Mathematiker gelegentlich bei einer einfachen Beweisführung nur darum stocken, weil sie sich einer

1) A. Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Teubner 1910. Im folgenden zitiert als Höfler.

2) Hier berühren wir uns mit Ausführungen, die A. Wernicke in Bd. III, Heft 7 dieser IMUK-Abhandlungen gegeben hat. 'Mathematik und philosophische Propädeutik'. Teubner 1912. Zitiert als Wernicke.

3) H. Poincaré, Der Wert der Wissenschaft. 2. Aufl., Teubner 1910, S. 19.

Gedächtnishilfe nicht entsinnen können, die sie an dieser Stelle weiterführen sollte. Gewiß gehört die Hilfe nicht in den logischen, sondern in den natürlichen psychologischen Zusammenhang, ist sie aber darum entbehrlich?[1])

Die Psychologie des Kindes und des jugendlichen Menschen zeigt uns, daß das Vorstellen von einem durch äußere Assoziationen geleiteten Vorstellen mehr und mehr zu einem zielstrebigen und von logischen (und anderen) Normen geleiteten übergeht. Demzufolge hat der Unterricht dem assoziativen Faktor um so mehr Konzessionen zu machen, je jünger die Zöglinge sind, an die er sich wendet.[2]) Wir sprechen allerdings nicht von einem Verständnis in der Mathematik, wenn ein Beweis mechanisch gelernt worden ist, so daß sich die Rede des Schülers, der ihn vorträgt, nicht wesentlich unterscheidet von dem Sprechen eines Papageien. Wir setzen beim Verständnis ein Eindringen in seinen Sinn voraus, aber auswendiggelernt werden muß er darum doch, und hierbei helfen dem Schüler viele mechanische oder auch sinnvolle Assoziationen, wenn sie sich auch nicht auf den inneren Sinn des Beweises beziehen.

Wenn der Erwachsene einen Satz der Mathematik leicht allein nach logischen Prinzipien ableiten zu können glaubt, so darf nicht vergessen werden, daß ihm dieser Satz in der Regel so häufig nebst den ihm vorausgehenden durch den Kopf gegangen ist, daß er mehr und mehr mechanisiert worden ist. Erst muß uns ein Satz in „Fleisch und Blut" übergehen, damit wir ihn für selbstverständlich halten und damit wir etwas mit ihm anfangen können.[3]) Dieser Mechanisierungsprozeß, dem wieder logisch gar keine Bedeutung zukommt, ist pädagogisch von höchster Wichtigkeit. Das Fürwahrhalten eines mathematischen Beweises beruht meines Erachtens beim jüngeren Schüler nicht zum wenigsten auf der hohen Zahl der unter der Autorität des Lehrers erfolgten Wiederholungen.

1) Auch das, was man unter dem „eleganten" Beweis eines Satzes versteht, erhöht nicht immer dessen Erkenntniswert, sondern kommt in erster Linie psychologisch-ästhetischen Bedürfnissen nach.

2) „Die Kenntnis des Schülers ist wichtiger für den Lehrer von Kindern, die Kenntnis des Gegenstandes für Lehrer älterer Schüler." B. Branford, A study of mathematical education and the teaching of arithmetic. Oxford 1908. Eine deutsche Übersetzung des Branfordschen Buches von R. Schimmack und H. Weinreich erscheint bei Teubner.

3) Treffend scheint mir auch F. Klein die Bedeutung der Mechanisierung mathematischer Wahrheiten für deren Verbreitung in einem größeren Kreis und damit auch für den Fortschritt der Wissenschaft in seinem Seminar des W.-S. 1909/10 geschildert zu haben, welches den Beziehungen der Psychologie zur Mathematik gewidmet war. Angenommen, es hat ein Mathematiker eine Entdeckung gemacht, die zunächst nur von ihm erfaßt wird. — Gedacht ist dort an die Schicksale der Nichteuklidischen Geometrie und ihrer Beziehung zur projektiven Geometrie. — „Die weitere Entwicklung ist dann die, daß die kommende mathematische Generation das Ergebnis von vornherein als etwas Feststehendes rezipiert, die früheren Meinungsverschiedenheiten überhaupt nicht mehr versteht und über die ganze Sache mehr oder minder zur Tagesordnung übergeht."

Für die Mathematik als Wissenschaft ist es, wie wir oben bemerkten, ganz gleichgültig, unter welchen subjektiven Ausprägungen eine mathematische Wahrheit gedacht wird, nicht für die Pädagogik. Nur ein Beispiel hierfür. Der Sinn eines geometrischen Beweises ändert sich nicht, ob ich ihn mit Hilfe einer an der Tafel gezeichneten oder einer innerlich nur vorgestellten Figur führe. Wohl bedeutet das aber pädagogisch einen sehr wesentlichen Unterschied, insofern es einem Schüler, der den Beweis mit Hilfe der gezeichneten Figur zu erbringen vermag, versagt sein kann, sei es aus mangelnder Übung, sei es infolge einer angeborenen Indisponiertheit (vgl. die späteren Ausführungen über die Vorstellungstypen) sich innerlich die Figur mit der für die Beweisführung hinreichenden Deutlichkeit vorzustellen. Die logische Einsicht scheitert hier von vornherein an der Unerfüllbarkeit des psychologisch Geforderten. Individuelle Besonderheiten im Seelenleben des Lehrers können ihm Unterrichtsweisen nahelegen, die wenig fruchtbar sind, weil bei ihnen fälschlicherweise diese Besonderheiten als allgemeine geistige Eigenschaften auch der Schüler vorausgesetzt werden.[1]) Mehr auf Teilprobleme der allgemeinen Frage, wie die Psychologie ihrer Aufgabe gerecht werden kann, den gesamten Unterricht und damit auch den mathematischen zu durchdringen, geht der folgende Abschnitt der Einleitung ein.

2. Die experimentelle Pädagogik.[2]) Einteilung der folgenden Darstellung.

Die Aufgabe eines jeden Unterrichts läßt sich dahin formulieren, dem Zögling durch ein zweckmäßiges Verfahren gewisse Kenntnisse sowie Denk- und Arbeitsweisen beizubringen. Gegeben ist also das Unterrichtsziel einerseits, der Zögling andererseits, die Methode hat beide zu berücksichtigen.

1) Man beachte hierzu das unten über die Diagramme Gesagte.

2) Bei dem hohen Ansehen, welches Herbarts Pädagogik auch noch in unseren Tagen vor allem in den Kreisen der Volksschullehrer besitzt, sei hier noch kurz die Stellung der im folgenden durchgeführten Untersuchungen zu Herbarts Pädagogik gekennzeichnet. Herbart sieht bekanntlich in Ethik und Psychologie die beiden Grundwissenschaften der Pädagogik und hat auf dieser Grundlage ein System der Pädagogik konsequent durchgeführt, welches wohl gerade wegen seiner philosophischen Geschlossenheit von vielen Pädagogen als die theoretische Grundlage ihres Wirkens angenommen worden ist. Mit dem Fortschritt der Psychologie als einer empirischen Wissenschaft erweisen sich natürlich an denjenigen Stellen des Herbartschen Systems Änderungen als notwendig, an denen seine psychologischen Anschauungen gegenüber neueren Fortschritten nicht mehr haltbar sind. Mehr noch kommt aber in Frage, daß wir überhaupt über viele psychologische Dinge jetzt mehr wissen als zu Zeiten Herbarts, und daß nun diese psychologischen Erkenntnisse eine Anwendung auf pädagogische Fragen finden. Auch der Anhänger Herbarts wird zugeben müssen, daß wir an psychologischer Einsicht in vielen Beziehungen über Herbart hinausgelangt sind. Im mathematischen Unterricht steht Herbart mit mancher Forderung wie auch der, die Mathematik in Verbindung mit den A n w e n d u n g e n zu bringen, der modernen Re-

Bekanntlich warf Rousseau der Pädagogik seiner Zeit vor, das Objekt ihrer Bemühungen, das Kind, gar nicht zu kennen und dieses zu sehr nach dem Ebenbild des Erwachsenen auszudeuten. Man kann fast sagen, daß seine Aufforderung: „Fangt also an, eure Zöglinge besser zu studieren, denn ganz sicher kennt ihr sie noch gar nicht" zum Programm der Pädagogik unserer Tage geworden ist. Rousseau war berechtigt, das zu sagen. Selbst die wenigen Pädagogen, welche überhaupt die Eigenart des Kindes vor ihm zu berücksichtigen versuchten, taten dies doch mehr auf Grund apriorischer und darum meist unrichtiger Überlegungen als empirischer Untersuchungen am Kinde. Aber auch Rousseau selbst hat nun nicht, wie man erwarten sollte, versucht, der Pädagogik eine Kinderpsychologie zugrunde zu legen. Versuche hierzu sind erst in den letzten Jahrzehnten gemacht worden und haben ihren Niederschlag in der pädagogischen Bewegung gefunden, die man als experimentelle Pädagogik bezeichnet.

Wenn wir für einen Augenblick von einer Namenerklärung absehen und nur auf die Absicht der experimentellen Pädagogik eingehen, so kann sie wohl mit größter Berechtigung als diejenige pädagogische Bewegung bezeichnet werden, welche eine im Sinne der Naturwissenschaft exakte Grundlegung der Pädagogik erstrebt.[1]) Ich spreche absichtlich nicht von einer wissenschaftlichen Grundlegung, weil auch andere Grundlegungen, wie z. B. die Herbartsche, den Anspruch erheben, wissenschaftliche Grundlegungen zu sein. Die neue Grundlegung stützt sich z. T. auf Wissenschaften, deren charakteristische Signatur die naturwissenschaftliche Methode ist. Von diesen nicht-normativen Disziplinen sind als die wichtigsten die allgemeine Psychologie und die Kinderpsychologie anzusehen. Die allgemeine Psychologie hat, hauptsächlich infolge Fechners Anregung, zu ihrem größten Vorteil die naturwissenschaftliche experimentelle Methode angenommen. Was die Kinderpsychologie angeht, so wurde für sie nach einer kurzen Blüte gegen das Ende des 18. Jahrhunderts[2]) das fast ganz auf Beobachtungen des Kindes fußende Werk W. Preyers grundlegend „Die Seele des Kindes".[3]) Von seinem

formbewegung nahe. Sein Schematismus aber kann nicht aufrechterhalten werden. Es hängt wohl mit der ungenügenden und unmodernen, weil auf veralteter Grundlage beruhenden, Behandlung der Mathematik auf den Lehrerseminaren zusammen, wenn die Herbartsche Lehre hinsichtlich des mathematischen Unterrichts von ihren Anhängern keine wesentliche Weiterbildung erfahren hat.

1) Die erste umfassende Darstellung der experimentellen Pädagogik rührt von E. Meumann her. Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik. 1. Aufl., 2 Bde., Leipzig 1907. 2. Aufl., 1. Bd., Leipzig 1911. Zitiert als Meumann. Vor Meumann ist bereits 1903 von W. A. Lay eine weniger erschöpfende „Experimentelle Didaktik" erschienen. 2. Aufl., Leipzig 1905.

2) Vgl. hierzu W. Aments Vortrag auf dem Kongreß für Kinderforschung und Jugendfürsorge, Kongreßbericht Langensalza 1907, sowie seine Fortschritte der Kinderseelenkunde. 2. Aufl., Leipzig 1906.

3) 7. Aufl., Leipzig 1908. Herausgeg. von K. L. Schäfer. Zitiert als Preyer.

Werk ging ein starker Impuls aus, der eine schnelle Entwicklung der kinderpsychologischen Forschung zur Folge hatte und wertvolle und für die pädagogische Praxis wichtige Ergebnisse gezeitigt hat. Hier sind noch größere Erfolge zu erwarten, wenn die Kinderpsychologie sich in höherem Grade als bis jetzt des Experiments bedienen wird.[1]) Es hängt nun mit der experimentellen Methode in Kinderpsychologie und allgemeiner Psychologie zusammen, daß die Pädagogik, welche sich auf beide stützte, die Bezeichnung experimentelle Pädagogik annahm.

In der Kinderpsychologie erhalten wir ein Bild von der Entwicklung des kindlichen Seelenlebens.[2]) Die Darstellung der kindlichen Entwicklung ist nach zwei Richtungen pädagogisch wertvoll. Einerseits ist es wichtig, mit den formalen Eigenschaften dieser Entwicklung bekannt zu werden; dann aber ist es auch nötig, das geistige Inventar der Kinder, ihre Vorstellungsinhalte, kennen zu lernen, um den Unterricht an diese Vorstellungsinhalte anzuknüpfen. Nur wenn der Unterricht in jedem Stadium vom Zustand des Kindes ausgeht, hat man das Recht, von einer entwicklungstreuen Pädagogik zu sprechen. Für den mathematischen Elementarunterricht ist es z. B. notwendig, die Entwicklung der Vorstellungen, die sich auf die Zahl und das Zählen, sowie der Vorstellungen, die sich auf den Raum beziehen, kennen zu lernen. An diese natürlich gewachsenen Produkte muß der Unterricht anknüpfen. Auf die Entwicklung der Raum- und Zahlvorstellungen beim Kinde beziehen sich Abschnitt 1 und 2 des I. Teiles dieser Arbeit.

Welche Bedeutung hat nun aber die allgemeine Psychologie, d. h. also die Psychologie des Erwachsenen, für die Pädagogik? Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß die meisten Problemstellungen der Kinderpsychologie bis jetzt ihren Ausgangspunkt von Problemstellungen der allgemeinen Psychologie genommen haben. Letzten Endes wird uns das Seelenleben eines Kindes nur verständlich durch das Medium unseres eigenen Seelenlebens. Wir können nicht mit vollem Verständnis von den Elementen des Seelenlebens beim Kinde sprechen, seinen Wahrnehmungen, Vorstellungen, Gefühlen usw., wenn wir nicht selbst solche Gebilde in eigener Person erlebt haben. Auch wo wir in der Pädagogik von psychologischen Dingen schlechthin sprechen, sind immer Erkenntnisse der allgemeinen Psychologie gemeint. Für die Pädagogik von unmittelbarer Bedeutung ist derjenige Zweig der allgemeinen Psychologie, den man als differentielle Psychologie oder als Psychologie der individuellen Verschiedenheiten zu bezeichnen pflegt.[3]) Die ältere Psychologie und die sich darauf stützende Pädagogik hatten von den indi-

1) Vgl. D. Katz, Studien zur Kinderpsychologie. 4. Heft der wissenschaftlichen Beiträge zur Pädag. u. Psychol. Herausgeg. von G. Deuchler u. D. Katz. Leipzig 1913.

2) Man rechnet das kindliche Alter in der Regel bis zum Eintritt der Pubertät; mit deren Eintritt beginnt das jugendliche Alter.

3) Gesamtdarstellung von W. Stern, Die differentielle Psychologie in ihren methodischen Grundlagen. Leipzig 1911.

viduellen Verschiedenheiten des Seelenlebens fast allein in der Lehre von den Temperamenten Kenntnis genommen. Die moderne Psychologie hat nun, nicht zum wenigsten mit Hilfe des Experiments, die größten Verschiedenheiten im Seelenleben der Individuen aufgezeigt, die fast eine jede Funktion, von der elementarsten angefangen bis hinauf zu der höchsten, betreffen. Das Wahrnehmungsleben zeigt ebensolche Differenzen wie das Vorstellungsleben. Die Untersuchung des Willenslebens ist bei den in der Lehre von den Temperamenten unterschiedenen individuellen Verschiedenheiten nicht stehen geblieben[1]), und die individuellen Gestaltungen der Intelligenz lassen sich in ihrem Reichtum bis jetzt noch gar nicht überschauen.

Alle diese individuellen Differenzen sind für die Pädagogik nach zwei Richtungen von Bedeutung. Einerseits wird eine Kenntnis ihrer Existenz dem Lehrer nahelegen, zu prüfen, welche von seinen eigenen Vorstellungsweisen als ungewöhnliche individuelle Ausprägungen anzusehen sind. Eine Vertrautheit mit den pädagogisch wichtigen individuellen Verschiedenheiten wird also den Lehrer davor bewahren, Unterrichtsmaßnahmen zu ergreifen, die ihren Ursprung seiner individuellen Eigenart verdanken, und die darum nicht auf ein volles Verständnis seiner Schüler rechnen können. Andererseits hat nun der Unterricht auch auf die individuellen Verschiedenheiten der Schüler in geeigneter Weise Rücksicht zu nehmen. Der Klassenunterricht kann natürlich nie darin so weit gehen wie der Einzelunterricht; es ist aber schon vieles gewonnen, wenn der Lehrer der Klasse gegenüber nie die psychologische Einstellung verliert, daß mit großen Verschiedenheiten der Schüler zu rechnen ist. Diejenigen individuellen Verschiedenheiten, die für den mathematischen Unterricht von Bedeutung werden können, sollen in dem 3. Abschnitt des I. Teiles eine Behandlung finden.

Die Bezeichnung experimentell verdient nun die Pädagogik, die wir hier im Auge haben, nicht nur, weil sie sich in der vorstehend angegebenen Weise auf experimentierende Wissenschaften stützt, sondern auch darum, weil sie selbst für pädagogische Zwecke experimentiert. Es ist als ein pädagogisches Experiment zu bezeichnen, wenn man versuchsmäßig über den Wert pädagogischer Mittel und Methoden ein Urteil zu gewinnen sucht. Eine Entscheidung zugunsten einer von zwei konkurrierenden Unterrichtsmethoden konnte auch bislang immer nur auf Grund eines Ausprobierens stattfinden. Dieses Ausprobieren will das pädagogische Experiment mit größerer Exaktheit und entlastet von persönlicher Voreingenommenheit durchführen. Die größere Exaktheit beruht einerseits darauf, daß die Vorgänge selbst, welche von den miteinander konkurrierenden Methoden getroffen werden sollen, einer genaueren psychologischen Analyse unterworfen werden; handelt es sich z. B. um die Entscheidung über die beste Methode im Leseunterricht, so unter-

1) Man vgl. z. B. N. Ach, Der Willensakt und das Temperament. Leipzig 1910.

sucht das Experiment den Leseprozeß selbst nach seinen psychologischen Komponenten. Andererseits versucht das Experiment durch eine planmäßige Variation der Unterrichtsmaßnahmen ein Urteil über die beste Unterrichtsmethode zu gewinnen. Hierbei ist auch eine größere Exaktheit dadurch gegeben, daß die Beurteilung der nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Leistungen nicht nach einer mehr oder weniger subjektiven Einschätzung geschieht, sondern daß sie nach einem nach bestimmten Prinzipien festgelegten Maßstab erfolgt. Auf Beispiele pädagogischer oder genauer gesagt didaktischer Experimente, wie sie Lay für den Rechenunterricht angestellt hat, werden wir unten hinweisen. Es braucht wohl kaum der zuweilen gegen das didaktische Experiment erhobene Einwand zurückgewiesen zu werden, daß die experimentelle Pädagogik die Schulen in psychologische Laboratorien verwandeln wolle. Es handelt sich nur darum, gelegentlich Schüler zu Experimenten heranzuziehen, die unter dem pädagogischen Gesichtspunkt unternommen werden. Die Einführung einer jeden neuen Methode ist ja mit einem gewissen Risiko verbunden, und dieses Risiko ist sicher in dem Falle geringer, wo die Erprobung der Methode, soweit es die Umstände überhaupt erlauben, unter exakten Bedingungen stattfindet.

Der Fortschritt der experimentellen Psychologie, die auch physiologische Grenzfragen in ihren Untersuchungsbereich zieht, hat für die Pädagogik neuartige Fragestellungen zur Folge gehabt, an die man früher nicht gedacht hat. So ist man an eine Untersuchung der Gesetze der geistigen Arbeit und der geistigen Ermüdung gegangen, um die so erhaltenen Befunde zur Grundlage einer Hygiene der geistigen Arbeit zu machen. Es ist zu hoffen, daß derartige, mit genau definierten objektiven Maßen arbeitende Untersuchungen auch die Diskussion über die Überbürdung der Schüler auf ein wissenschaftliches Gleis führen werden. Bei der allgemeinen Bedeutung dieser Dinge kommen wir in einem Anhang zu Abschnitt 4 kurz auf sie zu sprechen. Von anderen wichtigen Problemen der Pädagogik, welche die frühere Pädagogik gänzlich unberücksichtigt ließ, nenne ich nur noch das Begabungsproblem, welches wir auch unten berühren werden.

Es soll nicht verschwiegen werden, daß fast alles, was bis jetzt in der experimentellen Pädagogik in Angriff genommen worden ist, nur als Ansatz zu zukünftigen Früchten betrachtet werden kann. Man bedenke, daß erst seit etwa zwei Jahrzehnten in einigen Kreisen der Gedanke an die Möglichkeit solcher Untersuchungen aufgestiegen ist. Dabei ist noch zu beklagen, daß vielfach nicht in hinreichend kritischer Weise an die Ausführung der Untersuchungen gegangen worden ist, weil die Experimentatoren nicht über die unumgängliche wissenschaftliche Schulung verfügten. Weiter bedeutet der Umstand ein beträchtliches Hemmnis für die Förderung der Fragen, die hier zu lösen sind, daß bis jetzt noch fast ganz der Kontakt zwischen den Psychologen und den Männern der Schulpraxis fehlt. Ohne eine Zusammenarbeit dieser beiden Kreise ist für die Zukunft überhaupt keine glückliche Förderung unserer Wissenschaft möglich. Man muß auf alle diese Schwierigkeiten verweisen, um nicht zu große Erwartungen hinsichtlich des Erreichten zu erregen und auch zur Vorsicht in der Anwendung der Ergebnisse der experimentellen Pädagogik auf die Praxis zu raten.[1]) Aber selbst wenn die Ergebnisse der experimentellen Pädagogik auch in Zukunft nur in beschränktem Maße auf Fragen der pädagogischen Praxis Anwendung finden könnten, so bliebe doch stets der als nicht gering einzuschätzende Nutzen bestehen, den sie bei der theoretischen Begründung der Pädagogik gewähren würde.[2])

In der Individualpsychologie werden herkömmlicherweise nur diejenigen Verschiedenheiten behandelt, die noch ganz innerhalb der von der Gesundheit zugelassenen Abweichungen liegen. In ihr finden darum keinen Raum mehr die Mindersinnigkeit und der Schwachsinn. Den mathematischen Unterricht der Mindersinnigen und Schwachsinnigen behandeln wir in dem 4. Abschnitt. Das geschieht nicht nur im Interesse einer gewissen äußeren Vollständigkeit unseres Berichts, sondern auch darum, weil die Schwierigkeiten, welche die genannten Defekte dem Unterricht im allgemeinen und so auch dem Mathematikunterricht entgegensetzen, zur Ausbildung ganz eigenartiger Methoden geführt haben, die auch das Interesse des Lehrers normaler Zöglinge beanspruchen, ihn eventuell sogar zu neuen Fragestellungen im eigenen Unterricht anregen können.

Im II. Teil dieser Arbeit ist der Versuch gemacht worden, das Verhältnis des mathematisch-technischen Zeichnens zum künstlerischen Zeichnen nach psychologischen Gesichtspunkten zu bestimmen. Ein III. Teil schließlich ist der Frage nach der Ausbildung der Lehrer in Psychologie und Pädagogik gewidmet.

1) Gewisse bedauerliche Auswüchse der experimentellen Pädagogik sind leider nicht ausgeblieben. Der unkritische Übereifer, mit dem man sich vor allem in Amerika auf die Bewegung geworfen hat und Entscheidungen für die pädagogische Praxis herbeiführen zu können glaubte, ist durchaus zu verwerfen und kann die neue pädagogische Bewegung nur in Mißkredit bringen. Über einen derartigen zu mißbilligenden Auswuchs schreibt Stern im Bericht über den 5. Kongreß für exper. Psychol., Leipzig 1912, S. 9: „Die Gesetzgebung des Staates New Jersey, welche die Anwendung von Intelligenztests bei allen der Rückständigkeit verdächtigen Kindern anordnet, scheint daher sehr verfrüht." Übrigens haben diese Übertreibungen der experimentellen Pädagogik in den Kreisen amerikanischer Lehrer selbst auch lebhafte Beunruhigung hervorgerufen. Gerade wer von der experimentellen Pädagogik einen ruhigen, gesunden Fortschritt der pädagogischen Forschung erhofft, wird derartige Übertreibungen als größte Feinde der Bewegung aufs schärfste verurteilen.

2) Die experimentelle Pädagogik gelangt auf Grund ihrer Untersuchungen dazu, für den Unterricht gewisse Normen aufzustellen. Sie ist demnach auch in gewissem Sinne normativ. Ich erwähne das nur, um daran die Bemerkung zu knüpfen, daß die experimentelle Pädagogik nicht in dem Sinne normativ ist, daß sie die letzten Unterrichts- und Erziehungsziele selbst aufstellt. Diese Ziele lassen sich allein mit Hilfe der Wertwissenschaften gewinnen.

3. Psychologie im mathematischen Unterricht.

Gänzlich verschieden von der im vorstehenden aufgeworfenen Frage, inwiefern die Psychologie auf die Gestaltung des mathematischen Unterrichts einen Einfluß zu gewinnen hat, ist die Frage, ob die Psychologie der Mathematik selbst zu einem Gegenstand des Unterrichts gemacht werden soll, welche hier mit Beschränkung auf die höheren Knabenschulen (und die entsprechenden Mädchenschulen) kurz geprüft werden mag.

In den „Lehrplänen und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen 1901" wird für die oberen Stufen gewünscht „eine in engen Grenzen zu haltende Behandlung der Hauptpunkte der Logik und der empirischen Psychologie." Dieser Behandlung kann in der Praxis auf verschiedene Art Raum gegeben werden. So bringt A. Wernicke im Anschluß an die Meraner Vorschläge, die im abschließenden mathematischen Unterricht Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte wünschen, philosophische Betrachtungen im mathematischen Unterricht, während die Tradition die Philosophie ausschließlich in den deutschen Unterricht verwiesen hat. Auch befolgt er damit das Prinzip „Philosophie im Unterricht" im Gegensatz zum Prinzip „Unterricht in Philosophie". Wernicke hat in seinen Ausführungen fast allein erkenntnistheoretische und logische Probleme berücksichtigt, die in dem abschließenden mathematischen Unterricht behandelt werden können. Psychologische Gesichtspunkte hat er nur hier und da gestreift. Bei ihm sind Psychologie und Philosophie sachlich scharf voneinander getrennt, die beiden Gebiete erscheinen ihm offenbar mehr durch historische Bande miteinander verknüpft. Manches von dem, was hier ausgeführt werden soll, mag man als eine Ergänzung zu Wernickes Ausführungen nach der Psychologie hin betrachten. Wernickes Bericht enthält eine Schilderung darüber, in welcher Weise er in seinem Unterricht Fragen der Philosophie im Anschluß an die Mathematik behandelt. Ich konnte mich nicht in ähnlicher Weise auf eigene Erfahrungen stützen. Wenn ich trotzdem vorschlage, manches von dem, was im folgenden zur Psychologie der Mathematik gesagt ist, und zwar zunächst für den Lehrer gesagt ist, im Mathematikunterricht der oberen Klassen hier und da zu berühren, so geschieht dies auf Veranlassung einer Reihe von Lehrern, die es für recht wohl möglich halten, durch derartige psychologische Betrachtungen den Unterricht in der Mathematik zu beleben; man könne auch in den oberen Klassen Verständnis und Interesse dafür voraussetzen.[1])

1) In den Bestimmungen, die nach der Mädchenschulreform von 1908 für die Studienanstalten getroffen worden sind, wird die Beschäftigung mit philosophischen Fragen in der philosophischen Propädeutik wie folgt begründet: „Der Unterricht in der philosophischen Propädeutik hat das Ziel, das bei heranwachsenden Menschen sehr lebhafte Interesse an den Vorgängen des Innenlebens zu befriedigen und zu leiten. . . ." So wie sich Wernicke gegen einen Unterricht in Philosophie wendet

Es ist dabei gedacht an die Untersuchungen über die Entwicklung des mathematischen Denkens beim Kinde und beim primitiven Menschen. Indessen käme hier wohl auch manches aus dem Abschnitt über die differentielle Psychologie in Betracht.

---

und für das Prinzip „Philosophie im Unterricht" eintritt, würde ich auch gegen einen Unterricht in Psychologie sein und das Prinzip „Psychologie im Unterricht" vertreten. Falls die Absicht besteht, auch in anderen Unterrichtsfächern als in der Mathematik psychologische Betrachtungen einzuschalten, so wären etwa folgende Hinweise am Platze. Die Physik bietet mannigfache Gelegenheit, Tatsachen der Sinnespsychologie anzudeuten. Im Anschluß an Akustik ist über das Ohr und seine Empfindungen, im Anschluß an Optik über die Funktionsweise des Auges und einige Gesetze seiner Empfindungen zu sprechen. Besonders im Anschluß an die Optik läßt sich eine Reihe einfacher leichtverständlicher Versuche ausführen, die ganz sicher das volle Interesse heranwachsender Knaben und Mädchen finden werden. Hier sowie an anderen Stellen kann man A. Höflers und St. Witaseks Hundert psychologische Schulversuche zu Rate ziehen (3. Aufl., Leipzig 1911). In der Botanik kann ein Hinweis auf das Sinnesleben der Pflanzen als Analogie zum Sinnesleben des Menschen sehr willkommen sein. In der Zoologie lassen sich kaum Exkurse in die Tierpsychologie umgehen, die Jugend scheint geradezu eine Vorliebe für Fragen der Tierpsychologie zu besitzen (Ed. Claparède, Pädagogik und Tierpsychologie. Zeitschr. für pädagog. Psychol., Bd. 12, 1911). In der Geographie und Geschichte liegen gelegentliche Ausflüge in die Völkerpsychologie nahe. Literatur, Geschichte und Religion bieten Raum für Betrachtungen der Gefühlspsychologie, die Sprachen schließlich legen sprachpsychologische Untersuchungen nahe. Das Prinzip „Psychologie im Unterricht" setzt natürlich eine gewisse Kenntnis der Psychologie bei dem Lehrer voraus. Auf die Ausbildung des Lehrers in Psychologie kommen wir unten zu sprechen.

I. Teil.

Zur Psychologie der Mathematik und des mathematischen Unterrichts.

1. Die Entwicklung der Zahlvorstellung beim Kinde.

Schon lange bevor das Kind im Besitze abstrakter Zahlbegriffe[1]) ist, vermag es, wie aus seinem praktischen Verhalten hervorgeht, numerische Verhältnisse ganz anschaulicher Natur zu erfassen und zu berücksichtigen. Preyer war der erste, der Aufzeichnungen über die Entwicklung der Zahlvorstellung in dem vorbegrifflichen Stadium vorgenommen hat.

Preyers Sohn Axel gebrauchte gewisse Zahlwörter bereits im 25. Lebensmonat, ohne auch nur eine Ahnung davon zu haben, was sie bedeuten sollten. Preyer berichtet uns von einem ihm bekannten Kind, welches im 10. Monat bemerkt haben soll, wenn ihm von den 9 Kegeln, mit denen es zu spielen pflegte, einer fehlte, und welches mit $1\frac{1}{2}$ Jahren wußte, wenn eines von den zehn ihm gehörenden hölzernen Tieren abhanden gekommen war[2]) (Preyer, S. 213). Preyers Angaben büßen etwas von ihrer wissenschaftlichen Verwendbarkeit ein, weil die näheren Umstände, unter denen die Resultate erhalten wurden, nicht mitgeteilt worden sind. In dieser Beziehung ist eine ähnliche Beobachtung viel höher einzuschätzen, die sich in einer wertvollen Arbeit von O. Decroly und J. Degand[3]) findet. Ein Mädchen suchte im 14. Monat nach einem von 3 Gewichten, welches es verloren hatte. In diesen Fällen dürfen wir natürlich in keinem Sinn von einem Abzählen der gleichartigen Objekte sprechen. Hier kommt wohl nur der Gesamteindruck der Objekte in Betracht, der eben wechselt mit der Zahl der Objekte, es handelt sich um den Vergleich mehr oder weniger bestimmter Mengeneindrücke.

---

1) Es wird aus dem folgenden selbst hervorgehen, in welchem Sinne der Begriff Zahlvorstellung, der umfassender ist als der Begriff Zahlbegriff, gebraucht wird. Die Frage nach der psychischen Gegebenheit der Begriffe muß als noch ungeklärt angesehen werden. (Vgl. hierzu K. Groos, Das Seelenleben des Kindes 3. Aufl., Berlin 1911. S. 210 ff.). Diese Ungeklärtheit hat meines Erachtens auch für die Pädagogik üble Folgen gehabt. Die Anschauung, jemand habe erst dann einen Begriff ganz verstanden, wenn er auch fähig sei, ihn zu definieren, scheint mir auch eine der Wurzeln des pädagogischen Logizismus zu sein, die viele ungesunde Schößlinge treibt. Wieviel im ganzen intelligente Menschen werden definieren können, was eine Zahl ist? Wieviel Mathematiker werden hier dieselbe Definition geben? Wir berühren diese Frage noch einmal auf S. 19.

2) Es ist anzunehmen, daß die Kegel resp. Tiere dasselbe Aussehen hatten, obwohl es Preyer nicht ausdrücklich erwähnt.

3) Archives de Psychologie. Bd. 12, 1912, S. 81 ff.

Daß mit dieser Erklärung das Richtige getroffen wird, scheint mit aller wünschenswerten Deutlichkeit aus exakten Versuchen hervorzugehen, die A. Binet[1]) unternommen hat. Er bildete je 2 Gruppen aus Bohnen oder Spielmarken und legte sie einem im 5. Lebensjahre stehenden Kinde mit der Frage vor, wo mehr seien. Das Kind erkannte selbst dann noch, wo die größere Anzahl Spielmarken lag, wenn der eine Haufen 16, der andere 18 enthielt. Bei der Unterscheidung von Spielmarkenhaufen, die 17 und 18 Spielmarken enthielten, irrte sich das Kind in 10 Fällen nur einmal! Wenn nun Binet diesem Kind 2 Gruppen von gleich viel Gegenständen vorlegte, von denen die einen einen größeren Raum einnahmen, so zeigte das Kind auf die Frage, wo mehr Gegenstände seien, auf die Gruppe mit größeren Objekten. Maßgebend für die Beurteilung von seiten des Kindes war also offenbar der von den Gegenständen bedeckte Raum. Wie groß die Empfindlichkeit des Kindes bei diesen Vergleichen ist, geht daraus hervor, daß auch der Erwachsene bei einer so kurzen Darbietung von Gruppen von Punkten, daß ihm ein Abzählen nicht mehr möglich ist, kaum eine höhere Leistung aufweisen wird.

Versuche, wie sie D. Katz und G. Révész mit Kindern von $1\frac{1}{2}$ bis 5 Jahren ausgeführt haben[2]), zeigen, wie auch ein „anschauliches Abzählen“ lange vor der Erwerbung von deutlichen Zahlvorstellungen möglich ist. Es sei gestattet, etwas ausführlicher über diese Versuche zu berichten. „Wir klebten kleine gelbe Spielmarken auf einem grauen Hintergrund fest und legten zwischen je 2 gelbe 1 rote. Das Kind erhält die Aufforderung, die losen Spielmarken fortzunehmen. Es versucht dies mit allen zu tun, hat aber natürlich nur bei den roten Erfolg. Kindern von 2 Jahren und darüber gelingt die Lösung der Aufgabe, nachdem sie vielleicht 4 bis 5mal vergeblich versucht haben, eine gelbe Spielmarke fortzunehmen. Kindern unter 2 Jahren gelingt die Lösung der Aufgabe nicht. Sie greifen später immer wieder auch nach gelben Spielmarken. Ersetzten wir die roten Spielmarken durch gelbe, so erwies sich die Aufgabe, jede lose, 2. (gelbe) Spielmarke fortzunehmen, als so erschwert, daß sie von Kindern von $2\frac{1}{2}$ bis $3\frac{3}{4}$ Jahren nicht ausnahmslos gelöst werden konnte trotz häufiger Wiederholung des Versuchs ... Eine Tatsache, die des Komischen nicht entbehrt, ist es, daß ein Kind von $2\frac{1}{2}$ Jahren zwar nicht aus einer Reihe gleichfarbiger Spielmarken, wohl aber aus einer Reihe Schokoladestückchen, von denen wieder jedes zweite festgeklebt ist, jedes zweite Stück nach kurzer Übung richtig fortnahm ... Jede dritte Spielmarke aus einer Reihe gleichfarbiger fortzunehmen, gelingt Kindern von $4\frac{1}{2}$ Jahren und darüber“.

Die Lösung dieser Aufgaben geschieht ohne Mitgegebensein der abstrakten Begriffe von „zwei“ und „drei“ oder des „zweiten“ und „drit-

1) Revue philosophique. Bd. 30, 1890.

2) Experimentell-psychologische Untersuchungen mit Hühnern. Zeitschr. für Psychol., Bd. 50, 1909.

ten". Der Versuch mit den Schokoladestückchen zeigt deutlich, in wie hohem Grade die rechnerische Leistungsfähigkeit mit der Befriedigung der Neigung des Kindes verknüpft ist. Wo das Kind mit seinem persönlichen Interesse beteiligt ist, können ihm Aufgaben gelingen, bei denen es sonst versagt. Das hat sich auch in andern Fällen gezeigt, wo das Kind das Zählen erlernen sollte. Stern betont, daß die Auswahl der der Zählung zugänglichen Objekte eng mit dem affektiv-volitionalen[1]) Charakter des Kindes zusammenhängt. Stern weist darauf hin, wie das Kind von D. R. Major[2]) im Alter von 2 Jahren 7 Monaten zwar den Unterschied zwischen 1 und 2 Äpfeln sehr gut verstand und hier auch die Zahlwörter richtig brauchte, daß aber bei Objekten von geringerem praktischen Interesse die Aufmerksamkeitseinstellung auf die Zahl und deren richtiger Gebrauch fehlte.

Decroly und Degand haben in ihrer oben erwähnten Arbeit Beispiele für den anschaulichen Vergleich von Mengen gegeben Als jemand vor dem untersuchten Mädchen im Alter von 17 Monaten den Zeigefinger der einen Hand emporhob, ahmte das Kind dies mit seinen beiden Zeigefingern nach. „Sie hatte also gesehen, daß es sich darum handelte, nur einen Finger jeder Hand zu erheben" (S. 87). Im 19. Monat ahmte das Kind auch richtig nach, wenn man von jeder Hand 2 Finger auf den Tisch legte. Noch bis in den 23. Monat hinein vermag das Kind gewisse Quantitätsunterschiede, auch wenn sie für den Erwachsenen deutlich sind, unter besonderen Umständen nicht zu unterscheiden. Wenn es nämlich bei der Verteilung von Süßigkeiten oder von Obst zugunsten anderer deutlich benachteiligt wurde, so schien es dies, aus freudiger Erregung, überhaupt etwas bei der Verteilung zu erhalten, gar nicht zu bemerken. Mehr Kritik zeigte es im 24. Monat, wo es darauf bestand, von einem in 2 ungleiche Teile zerbrochenen Biskuit den größeren Teil zu erhalten. Im 24. Monat nimmt man dem Kind von 5 Bonbons 4 weg. Erst nachdem ihm 2 davon wieder zurückgegeben worden sind, zeigt es sich beruhigt. Ebenso ist das Kind erst dann zufriedengestellt, wenn ihm von 4 bunten Kärtchen 3 zurückgegeben werden. Diese beiden letzten Fälle zeigen, daß ein exakterer Zahlvergleich in dem angegebenen Alter doch noch nicht möglich ist, wenngleich auch das kritische Verhalten des Kindes durch die Freude am Besitz der ihm zugestandenen Exemplare zurückgedrängt werden mag.

Man hat sich vielfach (auch bei philosophischen Betrachtungen) die Frage vorgelegt, ob die Ordinal- oder die Kardinalzahlen von primitiverer Natur seien. Mit Beziehung auf die Entwicklung der Zahlvorstellung beim Kinde sind hier folgende Ausführungen am Platze. Ungefähr gleich-

1) Hiermit soll die durch das Gefühl und den Willen bedingte Stellungnahme des Kindes im Gegensatz zu der durch die Erkenntnis bestimmte bezeichnet werden, die wir mehr beim Erwachsenen antreffen. Cl. u. W. Stern, Die Kindersprache. Leipzig 1907, S. 250. Zitiert als Stern I.

2) First steps in mental growth. New York 1906.

zeitig, wie in der oben an Beispielen geschilderten Auffassung von Mengenverhältnissen Vorstadien der Kardinalzahl durchlaufen werden, beginnen auch die sogenannten Reihungen der Kinder, in denen wir Betätigungen des Kindes zur Ausbildung des Begriffs der Ordinalzahl erblicken dürfen. „Die Reihungen sind primitiver als das wirkliche Zählen, da das Kind sich mit einem, höchstens zwei Worten begnügt, um die einzelnen Elemente an sich vorüber spazieren zu lassen. Mag es sich hierbei um Äpfel oder Bauklötze oder Finger handeln, immer ist das Gemeinsame die sukzessive Wiederkehr gleichartiger Eindrücke; und für diese quantitative Gemeinsamkeit schafft sich das Kind eine gemeinsame Ausdrucksweise. Es „reiht“ nicht Apfel, Apfel, Apfel und Klotz, Klotz, Klotz, sondern es sagt eins, eins, eins oder eins, noch eins, noch eins... Niemals ist konstatiert worden, daß Kinder auf solche Weise Ungleichartiges aufgereiht hätten. Die Gleichartigkeit ist also eines der elementarsten Erfordernisse des Zählprozesses. Sogar in jenen Fällen, wo das Kind das Objekt selbst benennt, bekundet es durch die Hinzufügung besonderer Reihungswörter — noch, andere — daß sein Interesse auf die sukzessive Gleichartigkeit der Eindrücke gerichtet ist“ (Stern I. S. 248f.). Es geht aus diesen wie auch aus anderen Beobachtungen hervor, daß die Entwicklung der Vorstellungen, die zu den Begriffen der Ordinal- und Kardinalzahlen hinüberleiten, gleichzeitig geschieht; es ist also in dieser Beziehung zunächst keine deutliche zeitliche Differenz zu konstatieren.

Die Zahlwörter werden vom Kind durch Nachahmung der Erwachsenen erworben und zunächst ganz mechanisch auch bei solchen Gelegenheiten reproduziert, wo von einem eigentlichen Zählen keine Rede sein kann. Um hier einen Zeitpunkt zu nennen, so wurden von dem durch Decroly und Degand beobachteten Mädchen die beiden Zahlwörter eins und zwei zum erstenmal im 23. Monat nacheinander rein mechanisch ausgesprochen. Im 19. Monate bedeutete „noch“ das Hinzutun eines Gegenstandes zu anderen, im 20. auch die Wiederholung irgendeiner Handlung. Im 28. Monat stellt sich das Zahlwort „viel“ zur Bezeichnung größerer Mengen ein. Es wird vielleicht interessieren, zu hören, daß dieses Kind schon im 23. Monat einen bestimmten Ausdruck anwandte, um das Nichtvorhandensein oder das Verschwinden eines Gegenstandes anzudeuten.

Das erste Zahlwort, welches von seiten des Kindes eine sinnvolle Anwendung findet, ist die Zwei, aber nicht, was vielleicht einer besonderen Betonung bedarf, weil man es auf Grund apriorischer Erwägungen leicht erwarten könnte, die Eins. Es ist dies ein ganz sicherer von vielen Beobachtern bestätigter Befund. Bei Decroly und Degand fand die Zwei und nur sie im 29. Monat eine richtige Verwendung. Dagegen wurde die Eins erst im 37. Monat richtig als Zahlwort verstanden. Die Zwei findet übrigens auch Anwendung auf zwei nicht identische Gegenstände, eine Tasse und ein Glas werden zusammen bezeichnet als „deux tasses verres" (Decroly u. Degand, S. 99). Eine nicht richtige Verwendung finden andere Zahlwörter als eins und zwei auch schon im 31. Monat. Beim Anblick einer Reihe identischer Gegenstände sagt das Kind wohl 1, 2, 7, 3 Tiere, 1, 2, 9, 7 Bonbons usw. (31. Monat). Hier sind offensichtlich Reminiszenzen an das Zählen im Spiel, wie es das Kind von seiten der Erwachsenen beobachtete. Die Zahlwörter sind dem Kind zunächst nur Reihen von miteinander assoziierten Klängen, bei deren Reproduktion diese oder jene ausfallen können.

Es kommt vor, „daß der richtige Gebrauch einer Zahl ... sich oft nur auf ganz bestimmte Objekte beschränkt, bei anderen dagegen versagt — ein Zeichen, daß der Abstraktionsprozeß, durch welchen die Quantität von der Qualität losgelöst wird, bei manchen Kindern nur sehr schrittweise vorwärts geht".[1]) (Stern I, S. 260.) Stern gibt an derselben Stelle noch ein Beispiel dafür, daß die Zählfähigkeit, die für eine Art von Gegenständen erworben wurde, damit nicht ohne weiteres auch für andere Gegenstände besteht. Ein Knabe von 4 Jahren $3^1/_2$ Monaten entgegnete auf die Frage des Großvaters „Wieviel Finger habe ich?": „Das weiß ich nicht, ich kann nur meine Finger zählen."

Ein Fall einer Zahlwortanwendung, die eine interessante, völkerpsychologische Parallele hat, mag hier noch Erwähnung finden. So wie bei manchen Völkern das Zahlwort für die höchste Zahl ihres Zahlensystems nicht nur die durch sie bezeichnete (bestimmte) Zahl, sondern auch alle höheren Zahlen und „viel" ausdrückt, so bezeichnete auch das von Decroly und Degand untersuchte Mädchen im Alter von 3 Jahren 10 Monaten mit den Zahlwörtern „drei" und „vier", über die ihr Zahlensystem noch nicht hinausgegangen war, jede größere Anzahl und „viel".

Die Erkenntnis, daß beim Abzählen einer Menge die Ordnungszahl des letzten gezählten Gegenstandes zugleich auch die Gesamtzahl der Gegenstände angibt, wird nicht so leicht gewonnen. Hierfür findet sich ein interessantes Beispiel bei Stern (Stern I, S. 251): „Wenn man ihr (3 Jahre 7 Monate) die Finger hinhält und frägt: Wieviel Finger sind das? so sagt sie: Ich will mal zählen, und zählt richtig von 1 bis 5. Sagt man nun gleich im Anschluß an die letzte Zahl: Also wieviel Finger sind es? dann fängt sie wieder von vorn an zu zählen, und so noch mehrmals. Der letzte Finger ist ihr zwar der fünfte, aber die Gesamtheit der Finger bedeutet für sie noch nicht die Summe fünf."

Der Beschluß unserer Ausführungen über die Entwicklung der Zahlvorstellung beim Kinde werde gemacht mit dem Bericht über die ersten Spuren „rechnerischer" Tätigkeit. Im 41. Monat ließen Decroly und Degand je 2 Gruppen von kleinen Gegenständen (Spielmarken, Bohnen), die sich jedesmal um einen Gegenstand voneinander unterschieden und höchstens 4 Gegenstände enthielten, miteinander vergleichen. Das Kind

1) Beim Eintritt in die Schule ist dieser Abstraktionsprozeß in der Regel bereits abgeschlossen.

erhielt die Aufforderung, die beiden Gruppen gleich zu machen. Es kam dieser Aufforderung dadurch nach, daß es jedesmal einen Gegenstand von der größeren Gruppe fortnahm; es kam niemals vor, daß zu der kleineren einer hinzugelegt wurde. Als die Versuche mit Gruppen wiederholt wurden, die sich um 2 voneinander unterschieden, wurden bei der erneuten Aufforderung, die beiden Gruppen gleichzumachen, niemals sofort 2 Gegenstände von dem größeren Haufen fortgenommen, sondern in jedem Fall zunächst einer, erst auf eine weitere Frage, ob nun die Gleichheit der Gruppen erreicht sei, wurde auch noch der zweite Gegenstand entfernt. Das Kind verfährt also hier subtraktiv, und es verharrt dabei selbst dann, wenn man ihm ausdrücklich klarzumachen versucht, daß der größere Haufen unverändert bleiben soll. Sehr wahrscheinlich wird dieses Verhalten eingeschlagen, weil die Erkennung der Gleichheit zweier Haufen, die beide ein Exemplar mehr enthalten, eine wesentlich schwierigere Aufgabe für die schwachen Kräfte des Kindes bedeutet.

Im 43. Monat nimmt das hier geprüfte Kind zum erstenmal eine Verteilung von Kirschen unter 3 Kindern vor, wobei der größere Teil auf es selbst entfiel. Dagegen gelingt es ihm selbst noch im 57. Monat nicht, eine Dreiteilung vorzunehmen, wenn es sich nicht um eine Menge von Gegenständen, wie Kirschen, sondern um ein einzelnes Objekt wie ein Stück Zucker handelt, und wenn nicht die Dreiheit wie in dem angeführten Fall durch die Dreiheit der Kinder vorgegeben ist. In 4 Teile vermag das Kind ein Stück Zucker zu teilen, dies wird durch zwei nacheinander ausgeführte Zweiteilungen erreicht, die dem Kinde leicht fallen.[1]) Auch dieser Fall zeigt wieder mit aller Deutlichkeit, daß logische Ähnlichkeit verschiedener Fälle durchaus noch nicht auch ihre psychologische Ähnlichkeit bedeutet, und daß man in dieser Beziehung vor allem in der Kinderpsychologie vorsichtig zu sein hat. Mit 57 Monaten gelingt diesem Kind schließlich auch noch eine primitive „Zuordnung" von Zahlgruppen, indem es von verschiedenen Arten von Gegenständen (z. B. Nüssen) so viel gibt, als ihm Finger vorgezeigt werden. Bis zu 5 Fingern geschieht die Zuordnung fast immer richtig, darüber hinaus nicht.

So bescheiden auch unsere Kenntnisse über die Zahlvorstellung beim jüngeren Kinde sind, so übertreffen sie doch noch das, was wir über ihre Weiterentwicklung beim älteren Kind wissen. In etwas eingehenderer Weise hat man sich erst wieder mit dem in die Schule eintretenden Kinde beschäftigt. So hat z. B. K. Eckhardt das Zahlenverständnis der Schulrekruten einer Mittelschule in Frankfurt a. M. zu bestimmen versucht, indem er ermittelte, welche rechnerischen Leistungen im Zählen, Addieren, Subtrahieren usw. möglich waren.[2]) Er fand dabei

1) Als bei der Aufforderung, eine Dreiteilung vorzunehmen, durch eine zweifache Zweiteilung vier Stücke entstanden sind, versucht sich das Kind durch den so echt kindlichen Vorschlag zu retten, das vierte unbequeme Stück aufzuessen.

2) Zeitschr. für exper. Pädag., Bd. 8, 1909.

beträchtliche Differenzen in der Höhe der Leistungen, die sich auch noch in den Unterrichtsleistungen der ersten Jahre wirksam zeigten.

Es ist bekannt, daß sich in der Didaktik des ersten Rechenunterrichts die Anschauer und die Zähler gegenüberstehen, von denen die ersteren darauf ausgehen, bei dem Schüler durch simultan gegebene Elemente die Zahlvorstellung anzuregen, während die Zähler dasselbe durch sukzessiv gegebene von Zählen begleitete Eindrücke erreichen wollen. Auf die Methodenfrage, über die sehr gut Lietzmann 1 orientiert, kann nicht näher eingegangen werden; dem oben (S. 2) Bemerkten gemäß können wir hier nur in eine allgemeinere Betrachtung über die psychologischen Gesichtspunkte eintreten, die gegenüber dieser Frage möglich sind.

Ich halte es durchaus nicht für unumgänglich, von einer allgemeinen philosophischen Erörterung über das Wesen der Zahl auszugehen, wie es bei vielen Methodikern des elementaren Rechenunterrichts geschieht. Dieses Verfahren birgt meines Erachtens die Gefahr des Logizismus im elementaren Rechenunterricht. Die Frage nach dem Wesen der Zahl gehört mit zu den schwierigsten Fragen der Philosophie der Mathematik, und sie ist je nach der erkenntnistheoretischen und metaphysischen Orientierung der verschiedenen Philosophen auf die verschiedenste Art beantwortet worden.[1]) Die Art des Unterrichts kann von der Beantwortung dieser Frage fast ganz unabhängig gemacht werden. Nicht einmal der Betrieb in der höheren Mathematik hat für eine erfolgreiche und fruchtbare Gestaltung eine vollkommene Klarheit über ihre philosophischen Grundlagen zur notwendigen Voraussetzung. Wie wären sonst bei aller Ungeklärtheit der philosophischen Fragen die Fortschritte in der Mathematik selbst zu verstehen?

Die Orientierung der Didaktik des elementaren Rechenunterrichts sollte darum weniger nach philosophischen als nach praktischen Gesichtspunkten erfolgen. Der Schüler soll doch lernen, etwas mit den Zahlen anzufangen. Er soll zunächst nur gewisse Eigenschaften von Zahlen und Zahloperationen kennen lernen. Die Reihe der für diese Zwecke einzuprägenden Vorstellungen ist leicht festzustellen. Ihre Kenntnis ist das Ziel des Unterrichts. Wird dieses Ziel für eine bestimmte Zeit festgelegt, so hat die Frage einen vollen Sinn, welche Wege zur Erreichung desselben zu gehen sind. Diese Art der Stellungnahme schließt natürlich nicht aus, daß stets die Frage nach den philosophischen Grundlagen im Auge behalten wird, nur kommt ihr nicht diejenige Bedeutung im Anfangsunterricht zu, die ihr jetzt noch meist zugeschrieben wird.[2])

1) Vgl. Wernicke, S. 22ff.

2) Ich befinde mich natürlich nicht im Gegensatz zu G. Deuchler, wenn dieser (Zeitschr. für pädag. Psychol., 13. Jahrg., 1912) erklärt „wenn wir bestimmen wollen, bis zu welchem Grade sich das Vorstellen oder Denken eines mathematischen Gebildes oder Begriffes entwickelt hat, so müssen wir notwendigerweise den Begriff oder das Gebilde selbst in seiner idealen oder vorbildlichen Gestalt kennen, um den

Diejenigen Eigenschaften der Zahlen, deren Bekanntschaft bei dem ersten Rechenunterricht vorauszusetzen ist, lassen sich weder bei alleiniger Befolgung des Prinzips der Anschauer noch des der Zähler für den Zögling gewinnen. Schon die tatsächlich zu beobachtende Entwicklung des Zahlverständnisses, wie wir sie oben dargestellt haben, läßt es sehr wahrscheinlich erscheinen, daß beide Extreme der Didaktik des Rechenunterrichts verfehlt sind. Die Vertreter der einen wie der anderen Richtung täuschen sich selbst, wenn sie glauben, daß sie wirklich nur das von ihnen theoretisch vertretene Prinzip der Zahlgewinnung beim Unterricht anwenden.[1]) Nicht immer ist auch mit hinreichender Entschiedenheit darauf hingewiesen worden, daß von den sinnlichen Eindrücken, welche die Zahlvorstellung anregen, noch ein weiter Weg bis zu jenen Zahlvorstellungen selbst ist. Mit der Wahrnehmung einer Anzahl von Gegenständen ist noch keineswegs die Vorstellung der Anzahl dieser Gegenstände gegeben. So besitzt auch an und für sich die Zahlvorstellung keine größere Verwandtschaft zu einer Gruppe simultan gegebener Eindrücke, wie zu einer Reihe sukzessiv gegebener Eindrücke.[2]) Der Zahlbegriff vermag auf räumliche und zeitliche Verhältnisse Anwendung zu finden, und er kann auch seine Auslösung durch räumlich und zeitlich gegliederte[3]) Elemente erfahren, aber damit ist nicht gesagt, daß er selbst noch diese Elemente enthält.

Entwicklungsgrad daran ermessen zu können." Ich glaube, der Tendenz des oben Geforderten kommt sehr nahe das, was W. A. Lay in seinem Führer durch den ersten Rechenunterricht, Wiesbaden 1898 (zitiert als Lay), mit folgenden Worten ausspricht: „Methodik des Rechenunterrichts kann bestehen, ohne daß die Frage über das Wesen der Zahl gelöst ist" (S. 163).

1) „In der wirklichen Unterrichtspraxis dürften einseitige Anschauer ebenso wie einseitige Zähler ... selten sein." Lietzmann I, S. 29. Unter den amerikanischen Pädagogen stehen sich zwei Richtungen hinsichtlich der Didaktik des Rechnens gegenüber, deren Gegensatz Ähnlichkeit mit dem der Zähler und Anschauer hat, ohne sich mit ihm zu decken. J. A. McLellan und J. Dewey (The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic. New York 1912) legen dem Elementarunterricht das Messen von Größen zugrunde. Sie beginnen nicht mit einzelnen Zahlen (fixed-units), sondern sie setzen an die Spitze Operationen mit Mengen, die das Kind miteinander zu vergleichen hat. „Vermeide es, die Zahlen wie eine Reihe von getrennten und voneinander unabhängigen Wesenheiten zu betrachten, von denen jede gänzlich beherrscht werden muß, ehe zur nächsten übergegangen werden darf" (S. 148). — Ihnen widersprechen A. V. Harris und G. M. Waldo (First journeys in number land, Chicago 1911) „Gruppierte Gegenstände bilden die Grundlage für Zahlvorstellungen; Messen bedeutet keine Zahlerfassung."

2) „Die Zahlvorstellung wird der Seele nicht durch Objekte dargeboten, selbst wenn sich diese unter den günstigsten Bedingungen darstellen. Die Zahl ist vielmehr ein Produkt, welches dann entsteht, wenn die Seele sich mit den Objekten beschäftigt, um aus einem unbestimmten Ganzen ein bestimmtes zu machen." J. A. McLellan und J. Dewey, a. a. O., S. 32. — „Nun ist zwar das Zählen eine Tätigkeit, die, wie jede andere, in der Zeit verläuft, aber dies besagt doch nicht im geringsten, daß die Zahl in engerem Zusammenhang mit der Zeit oder mit dem Zeitbewußtsein steht, als irgendeine andere Tätigkeit." Deuchler, a. a. O., S. 51.

3) Nach dem Gang, welchen die Entwicklung der Zeitvorstellung beim Kinde

Erst wenn man sich dieses kausal-genetische Verhältnis der Auslösung von Zahlvorstellungen durch räumliche und zeitliche Faktoren klargemacht hat, gewinnt auch die Frage einen guten Sinn, ob die Hilfsmittel, die dem einen Sinnesgebiet entnommen sind, sich für die Auslösung besser eignen als die eines andren, und wie bei Zugrundelegung eines Sinnesgebietes dessen Material am zweckmäßigsten zu gestalten ist.[1])

Die Betrachtungen über den zweckmäßigsten Bau von Zahlbildern haben gelegentlich ihren Ausgangspunkt von Versuchen mit Erwachsenen genommen, in denen festgestellt wurde, wieviel visuelle Eindrücke bei kurzer Exposition (sogenannter tachistoskopischer Exposition) richtig aufgefaßt werden können. Diese Untersuchungen waren zunächst in einem theoretischen psychologischen Interesse unternommen worden, nämlich zur Bestimmung des Bewußtseins- resp. Aufmerksamkeitsumfangs für visuelle Eindrücke.[2]) Neuerdings ist von Frank N. Freeman die Frage nach dem Aufmerksamkeitsumfang und der Zahlauffassung bei Erwachsenen ausführlicher untersucht worden und auch auf Kinder bis zum Alter von 6 Jahren ausgedehnt worden.[3]) Die Ergebnisse dieser Versuche sind nach ihrem didaktischen Wert nicht sehr hoch anzuschlagen. Die Expositionszeit betrug nämlich bei den Kindern nur $^1/_{20}$ Sek. Selbst wenn nicht experimentelle Untersuchungen bereits mit aller wünschenswerten Deutlichkeit gezeigt hätten, daß die Ergebnisse von tachistoskopischen Versuchen nicht ohne weiteres auch für normale zeitliche Verhältnisse Geltung beanspruchen können, so wäre es doch klar, daß die Resultate, die bei Expositionszeiten von $^1/_{20}$ Sek. für die Auffassung von Punktgruppen erhalten worden sind, nicht auf die Verhältnisse des Schulunterrichts übertragen werden dürfen, wo zwar die Zahlbilder den Kindern nicht für beliebig lange Zeit, aber doch für längere Zeit zur Betrachtung dargeboten werden. Ferner läßt sich aus Versuchen, in denen dasselbe Zahlbild nur wenigemal dargeboten und beurteilt wird, noch durchaus nicht schließen, daß dieselben Beurteilungen auch eintreten würden, wenn es häufiger dargeboten würde; um eine solche stets wiederholte Darbietung der Zahlbilder handelt es sich aber doch beim Unterricht.

Die Zahlbilder bestehen in der Regel aus Gruppen von kleinen Kreisflächen, die sich in ihrer Farbe gut vom Hintergrund abheben. Die An-

---

nimmt, halte ich es entgegen der Auffassung anderer für ausgeschlossen, daß die Zahlvorstellung durch die Erfassung von Zeitquanten eine irgendwie bedeutsame Unterstützung erfahren könnte.

1) Betreffs der Möglichkeiten, die sich im einzelnen bieten, um Zahlen zu veranschaulichen, verweise ich auf die Zusammenstellung bei Lietzmann I, S. 29ff.

2) Vgl. W. Wundt, Physiologische Psychologie. 6. Aufl., Bd. III, Leipzig 1911, S. 296ff.

3) Frank N. Freeman, Untersuchungen über den Aufmerksamkeitsumfang und die Zahlauffassung bei Kindern und Erwachsenen. Veröffentlichungen des Instituts für exper. Pädag. u. Psychol. d. Leipziger Lehrervereins. Bd. 1, Leipzig 1910. — Auf einige andere hierhergehörige Arbeiten ist verwiesen bei Botju Schanoff, Die Vorgänge des Rechnens. Leipzig 1911. S. 3ff.

ordnung der einzelnen Kreisflächen muß so gewählt werden, daß das gesamte Zahlbild übersichtlich ist. Bei dem geringen visuellen Aufmerksamkeitsumfang des Kindes verbietet es sich z. B. von selbst, daß die Kreisflächen in einer geraden Linie angeordnet werden. In diesem Falle könnten die Bilder nicht mehr innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeit überblickt werden. Diese Zeit ist zwar, wie ich bereits oben bemerkte, nicht so kurz, daß man von einer tachistoskopischen Art der Darbietung sprechen könnte, aber immerhin darf man nicht mehr als wenige Sekunden als für die Betrachtung zur Verfügung stehend ansehen. Das psychische Tempo ist beim Kind an und für sich langsamer als beim Erwachsenen, auch erfolgt die Erfassung von räumlichen Anordnungen, wie sie hier vorliegen, mangels Übung beim Kind bei weitem nicht so rasch wie bei uns. Die Zahlbilder dürfen aber noch aus anderen Gründen nicht in geraden Linien angeordnet werden. Sie heben sich dann nicht genügend deutlich voneinander ab. Zwei geradlinige aus gleich distanzierten Punkten zusammengesetzte Reihen von verschiedenen Punktzahlen unterscheiden sich für den unmittelbaren Eindruck nur hinsichtlich ihrer Länge. Man wird es schon schwer finden, auf Grund des Längenkriteriums Reihen von 6 und von 7 Punkten auseinanderzuhalten und in ihrer Individualität sofort wiederzuerkennen. Man vergleiche z. B. unter diesem Gesichtspunkt die folgenden beiden Punktreihen ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● Ohne Schwierigkeit wird dies dem Erwachsenen nicht, dem Kind wird es überhaupt kaum gelingen. Alle, die Zahlbilder geschaffen haben, haben darum auf die Anordnung der Punkte in geraden Linien verzichtet und haben zu Anordnungen gegriffen, bei denen sich Punktgestalten ergaben, die sich in ihrem Gesamteindruck deutlich voneinander abhoben. Ausgeprägter Charakter des einzelnen Zahlbildes ist also erwünscht, damit jedes derselben möglichst seinem unmittelbaren Eindruck nach das zugehörige Zahlwort und die entsprechende Zahlfertigkeit reproduziere. Man könnte auf den Gedanken kommen, die Forderung, die wir hier aufstellen, ließe sich dadurch am ehesten erfüllen, daß man die Punkte zu bildartigen Gruppen (vielleicht sogar zu Tiergestalten u. dgl.), welche das Interesse der Kinder finden, zusammensetzte. Indessen, ganz abgesehen von anderen Bedenken, ließen sich wohl gegen Zahlbilder von so charakteristischer, dem reinen Symbol[1]) sehr angenäherter Form folgende triftige Einwände erheben.

Das Zahlbild soll nach Lay „klar und deutlich" sein, d. h. es soll nicht nur als eine Gesamtheit von Punkten aufgefaßt werden, sondern es soll auch gleichzeitig jeder einzelne Punkt wahrgenommen und vorgestellt werden. Das ist nun bei komplizierteren Punktanordnungen nicht so leicht zu erreichen. Weder würden diese die Auffassung der Gesamtheit der Punkte noch die Erfassung der einzelnen Punkte wegen der Kraft,

1) Derartiger Symbolisierung nähern sich die die Einheiten nicht mehr erkennenlassenden Zahlbilder für Zehner, Hunderter und Tausender mancher Anschauer. Vgl. Lietzmann I, S. 41.

mit der sie als „sinnvolle“ Ganze die Aufmerksamkeit des Kindes fesseln, leicht machen. Dazu kommt nun als ein Zweites, daß es gar nicht erwünscht erscheinen darf, die Zahlbilder so charakteristisch und damit so eindringlich für das Kind zu gestalten, daß es sich nicht wieder oder nur nach langer Zeit und unter Aufwendung von großer Mühe von ihnen losmachen kann.[1]) Die Zahlbilder sind doch bestenfalls ein unentbehrliches Mittel zum Zweck, sie dürfen nicht zum Zweck erhoben werden. Wenn sie dem Kind als eine Krücke dienten, die ersten Schritte in das Zahlgebiet hineinzutun, so muß es diese Krücke doch später fortwerfen können und ohne ihre Last in den Bereich der hohen Zahlen gelangen.

Schließlich hat noch folgender Punkt bei der Gestaltung der Zahlbilder Berücksichtigung zu finden, der sich auch gegen eine zu weitgehende Symbolisierung richtet. Die Zahlbilder sollen nicht nur dazu dienen, die Bildung von Zahlvorstellungen anzuregen, sie dienen auch als Grundlage bei den ersten Rechenoperationen. Additionen und Subtraktionen lassen sich unter Zugrundelegung von Zahlbildern nur dann leicht ausführen, wenn die Zusammensetzung der höheren Zahlen aus den niederen durchsichtig ist. Die Zahlgruppen müssen also einerseits Gruppen von Punkten bilden, die nicht zu lose nebeneinander stehen, sondern durch eine unschwer erkennbare Gesamtform zusammengehalten werden, diese Gesamtform muß aber andererseits genügend elastisch sein, um die Zerlegung des Zahlbildes in zweckentsprechende Gruppen zuzulassen.

Worin besteht nun der Vorteil der Zahlbilder? Dem Kind übermitteln sie die Vorstellung von Anzahlen. Bei der Erweckung des Verständnisses für Zahlbilder handelt es sich um das sukzessive Erfassen jedes einzelnen Punktes, das Kind zählt ab und lernt dabei, daß jedesmal die dem letzten Punkt zugeordnete Zahl zugleich die Anzahl der Punkte darstellt. Je häufiger dieser Zählprozeß ausgeführt wird, desto mechanischer wird er, und desto mehr werden auch alle die Erkenntnisse mechanisiert, die bei der Ausführung des Abzählens gemacht werden. Das Zahlbild erhält eine solche Geläufigkeit, daß es den zugehörigen Zahlnamen und die Fertigkeiten, die in Betreff der dargestellten Zahl dem Kind vorher unter Aufwand von viel Zeit mitgeteilt worden sind, schnell zur Disposition stellt. Das Kind braucht dann nicht mehr die einzelnen Punkte abzuzählen. Das Zahlbild erhält allmählich etwas von einem Symbol; es kommt ihm so ein hoher zeitökonomischer und auch kraftökonomischer Wert zu. So wenig auch die Ansicht begründet wäre, daß die Erkenntnis der Zahlbeziehungen sich ganz auf ein Spiel von assoziativen Faktoren zurückführen lasse, so ist doch die assoziative Geläufigkeit der Rechenoperationen, die im ersten Rechenunterricht erzielt werden soll, nachdem einmal deren Einsicht erreicht worden ist, von ganz überragender

1) So könnten Zahlbilder unter Umständen auch bei der Bildung von Synopsien (s. unten) mitwirken und dadurch lästig werden. Darauf hat auch A. O. Griggs verwiesen. The pedagogical Seminary. Bd. 19, 1912, S. 355.

Bedeutung. Denn nur sie bildet die Grundlage, von der aus weiter gebaut werden kann.

Das Zahlbild regt die Aussagen an, die der Lehrer über die Zahlbeziehungen zu erhalten wünscht. Wenn der Lehrer bemerkt, daß gewisse früher erworbene Einsichten verloren gegangen sind, so erlauben ihm die Zahlbilder jederzeit wieder zur Ableitung der Einsicht zurückzukehren. So groß auch die Differenz in quantitativer Hinsicht ist, vom prinzipiellen psychologischen Standpunkt aus betrachtet unterscheidet sich die Funktion des Zahlbildes nicht wesentlich von der Funktion eines mathematischen Symbols, etwa des Differential- oder Integralzeichens, welches ja auch die Mechanisierung von mit Einsicht vollzogenen Gedankengängen krönt, die Rückkehr zur erneuten Ableitung der Einsicht in jedem einzelnen Fall unnötig macht, ihn aber doch im Bedürfnisfalle gestattet.

Bei hinreichend durchgeführter Mechanisierung sollte nach Vorstehendem ein Rechnen mit Zahlbildern möglich sein, ohne daß die Zahlen, mit denen gearbeitet wird, erneut durch Abzählen gewonnen werden müßten. Daraus läßt sich aber kein Einwand gegen die Zählmethodiker ableiten, denn das Verständnis für die Zahlbilder selbst ist ja erst durch Zählen gewonnen worden.

Man hat gelegentlich die Ansicht vertreten, die Zählmethodiker trügen dem idealen Charakter der Zahl in höherem Maße Rechnung, indem sie auf das Konkret-Anschauliche mehr verzichten. Diese Auffassung ist unberechtigt. Die akustischen Eindrücke, als welche die Zahlwörter beim Zählen fungieren, stehen prinzipiell den Zahlvorstellungen nicht näher als die visuellen Eindrücke der Zahlbilder. Sie regen auch nur die Bildung der Zahlvorstellungen an. Dienen einfache akustische Eindrücke zur Anregung von Zahlvorstellungen, so müssen sie ebenso wie die optischen Eindrücke irgendwie zu Gruppen zusammengefaßt werden. Die Mechanisierung derjenigen Prozesse, die unter Verwendung akustischer Eindrücke für die Gewinnung des Zahlverständnisses stattfindet, ähnelt der bei Verwendung visueller Eindrücke sowohl hinsichtlich des zeit- als auch des kraftökonomischen Gesichtspunktes. Eingehendere Untersuchungen über die vereinheitlichende Kraft des Bewußtseins in der Auffassung akustischer Eindrücke liegen bis jetzt nur bei Erwachsenen vor. Sie entsprechen ganz den oben erwähnten Versuchen über den Umfang des Bewußtseins resp. der Aufmerksamkeit für optische Eindrücke. Wie bei optischen Eindrücken die Anordnung in übersichtlichen Gruppen die Zahl der simultan auffaßbaren Eindrücke weit nach oben treibt, so wächst bei akustischen Eindrücken die Zahl der mit einem Zug der Aufmerksamkeit erfaßbaren Eindrücke außerordentlich durch deren Rhythmisierung.[1]) Wie angedeutet, besitzen wir bis jetzt nur wenig Versuche dieser Art, die mit Kindern durchgeführt wären. Lay stellte mit

1) Vgl. Wundt, a. a. O., S. 332.

einigen Kindern von 4–6 Jahren Versuche darüber an, wie weit es ihnen gelang, Schlagfolgen, die durch Klopfen auf dem Tisch entstanden waren, nachzuahmen. „Es zeigte sich nun, daß schon bei 2, noch mehr aber bei 3 und 4 Schlägen Fehler vorkamen.... Zu bemerken ist noch, daß die Auffassung der Schalleindrücke bedeutend erleichtert wurde, wenn man Rhythmik in die Reihen brachte" (Lay, S. 77).

Lay gibt als Beispiel für die Schwierigkeit, nach strenger Methode der Zähler eine Subtraktion durchzuführen, das Zahlsätzchen 9 — 5 = 4. „Eine klare und deutliche Reihenvorstellung von 9, 5 und 4 gibt es nicht; daher muß zunächst der Zahlname 9, dann der Zahlname 5, endlich der Zahlname 4 durch Zählen gefunden werden. Häufig kommt es nun vor, daß, während das Kind einen neuen Zahlnamen durch Abzählen bestimmt, es den einen oder andern oder beide vergißt, und da durch Anschauung die 9 Dinge mit 10 und 8, die 5 mit 4 und 6, und die 4 mit 5 und 3 leicht verwechselt werden, so muß das Zählen von neuem beginnen. Erst wenn das Kind an allen diesen Klippen glücklich vorbeigekommen ist, kann es zu dem Schlusse kommen 9 — 5 = 4" (Lay, S. 48f.).

Lay scheint hier völlig zu übersehen, daß, wie wir oben zeigten, die Zahlwörter für den Zähler diejenigen Funktionen übernehmen, welche die Zahlbilder für den Anschauer besitzen. Richtig scheint mir an seinen Ausführungen nur zu sein, daß es bei einem Versagen des Kindes leichter ist, vermittels der Zahlbilder als vermittels der Zahlwortvorstellungen auf die grundlegenden Vorgänge zurückzugehen.

Lay kommt ohne Zweifel das Verdienst zu, als erster den Versuch gemacht zu haben, Fragen der Didaktik des Rechenunterrichts auf experimentellem Wege zu lösen. Er versuchte die zweckmäßigste Gestaltung der Zahlbilder und der Rechenmaschinen zu ermitteln. Ich darf hier auf die Mitteilung der Resultate Lays, von denen auch Lietzmann (Lietzmann I, S. 32f.) einige erwähnt, verzichten, weil die meisten seiner Versuche weder in der Anlage noch in der Durchführung und Deutung einwandfrei sind.

Man hat auch begonnen, die Psychologie der vier Grundspezies sowie der einfachsten arithmetischen Leistungen zu untersuchen und die Resultate in pädagogischer Hinsicht zu verwerten.[1]) M. Döring ermittelte für die Aufgaben des kleinen Einmaleins die Rangfolge ihrer Schwierigkeit. Der Einübung der schwierigeren Aufgaben sollte nach ihm entsprechend mehr Zeit gewidmet werden. Amerikanische Pädagogen haben häufig die Frage behandelt, ob die Beschäftigung mit einer Rechnungsart eine Besserung der Leistungsfähigkeit in einer anderen Rechnungsart oder im arithmetischen Denken herbeiführt. Hier sind die Arbeiten

1) Man vgl. hierzu die beiden Sammelreferate von O. Lipmann in der Zeitschr. für angewandte Psychol., Bd. 5, 1911, S. 390–399 und Bd. 7, 1912, S. 97–107. — Die Vorgänge, die bei der Ausführung von einfachen Rechenoperationen beim Erwachsenen stattfinden, hat Schanoff in der oben erwähnten Arbeit untersucht.

von Winch, Brown und Storch[1]) zu nennen. Es wurde meist so verfahren, daß die eine von zwei als gleich tüchtig zu betrachtenden Schülergruppen mit der Rechnungsart, deren Übungseffekt ermittelt werden sollte, beschäftigt wurde, die andere nicht. Nach einiger Zeit wurde nun erneut die Tüchtigkeit der beiden Gruppen bestimmt. Es scheint aus den Untersuchungen hervorzugehen, daß auch eine Besserung der arithmetischen Leistungen durch Übung in den vier Grundspezies eintritt.

Beachtenswert, auch wegen des Untersuchungsprinzips, ist eine Arbeit von W. Voigt über die Anlage zum Rechnen[2]), weil er die Kinder (Knaben und Mädchen von 10–14 Jahren) die im Versuch gestellten Aufgaben anstatt im dekadischen im oktadischen und hexadischen Zahlensystem ausführen ließ. Den Bericht über einige Resultate dieser Arbeit gebe ich nach einem Referat[3]), da sie mir im Original nicht zugänglich war. Die Entfaltung der Anlage zum Rechnen erfolgt nach Voigt in der Zeit vom 10.–14. Lebensjahr sprunghaft. Eine rasche Zunahme findet bei Mädchen im 13., bei Knaben im 14. Lebensjahre statt. Die Knaben blieben hinter den Mädchen stets und mit zunehmendem Alter mehr zurück, sodaß die Leistungen von 14jährigen Knaben denen von $12^1/_2$jährigen Mädchen gleichzusetzen ist. Erst nach Eintritt der Pubertät erlangen Knaben und Mädchen die Fähigkeit, Aufgaben zu lösen, die selbständiges Arbeiten mit Zahlbegriffen erfordern. Vorher wird mehr mechanisch „nach Vorlage“ gearbeitet. Die Klage, die übrigens mit allgemeinerer Wendung auch von anderer Seite mehrfach erhoben worden ist, scheint also berechtigt zu sein, daß die Kinder der Volksschule gerade in dem Zeitpunkte entzogen werden, wo der Rechenunterricht am erfolgreichsten sein würde.

Anhang.

Zahl und Zählen bei primitiven Völkern.[4])

Einen lehrreichen Einblick in die Art der Begriffsbildung, wie sie das unentwickelte Denken zur Bewältigung der Umwelt nach ihren zahlenmäßigen Beziehungen vornimmt, gewähren uns auch die Denkgebilde, die wir in dem Denkgut der primitiven Völker, der sogenannten Naturvölker, antreffen. Ein Bericht über Zahl und Zählen bei den primitiven Menschen schließt sich gut an die Ausführungen des vorausgehenden Abschnitts an, weil das Denken des Primitiven wie im allgemeinen so auch mit Beziehung auf das uns hier interessierende Teilgebiet einen ähnlichen Gesamttypus besitzt wie das des Kindes. Man darf annehmen, daß das Kind seiner natürlichen Geistesorganisation nach

1) Die Arbeiten sind im Journal of Educational Psychology erschienen.
2) Archiv für Pädagogik, II. Teil. 1. Jahrg., S. 129–197.
3) Zeitschr. für pädag. Psychol., 14. Jahrg., 1913.
4) Über die Definition der primitiven Menschen lese man nach bei W. Wundt, Elemente der Völkerpsychologie. Leipzig 1912. 1. Kap.

in noch ausgeprägterem Maße jenen Typus der Zahlvorstellungen zeigen würde, mit denen der primitive Mensch Zeit seines Lebens operiert, wenn es nicht durch die Erziehung von seiten einer geistig ganz anders organisierten Umgebung daran gehindert würde.

Es ist ein Haupterfordernis für eine der Wertung nach vorurteilsfreie und dem Verständnis nach zutreffende Beurteilung des mathematischen Geistesinventars der Naturvölker, ihr Denken nicht in die Kategorien unseres Denkens und vor allem nicht in die logischen Kategorien unseres streng wissenschaftlichen Denkens hineinzupressen. In der richtigen Erkenntnis der grundverschiedenen Struktur unserer wohl definierten mathematischen Begriffe und der Elemente, welche im Geistesleben des Primitiven eine wenigstens der praktischen Anwendung nach diesen unseren Begriffen verwandte Bestimmung besitzen, haben es die meisten Völkerpsychologen vermieden, mit Beziehung auf jene Elemente des primitiven Denkens von Zahlbegriffen oder auch nur Zahlvorstellungen zu sprechen. In der Regel charakterisiert man das Denken der Naturvölker als ein vorlogisches Denken.

Soweit sich beim Kinde eine anschauliche Erfassung von Zahlenverhältnissen sowie an den konkreten Gegenständen noch stark klebende Zahlvorstellungen konstatieren ließen, handelte es sich doch immer nur um Durchgangsstufen zum Denken mit Zahlbegriffen. Beim Primitiven dagegen ist das mit Elementen der Gegenstandswahrnehmung durchsetzte Denken von Zahlenverhältnissen gewissermaßen in Permanenz erklärt. Die in mancher Hinsicht zu betonende Ähnlichkeit zwischen dem Denken des Kindes und des primitiven Menschen darf uns auf der anderen Seite nicht die verbleibenden Differenzen übersehen lassen. Die Anschauung des Kindes besitzt noch nicht – wie alle Funktionen seines Seelenlebens – die höchste ihr erreichbare Leistungsfähigkeit. Diese Leistungsfähigkeit hängt in maßgeblicher Weise ab von der Größe und Stetigkeit der Aufmerksamkeitsenergie, die der Organismus aufzubringen vermag. Und hierin zeigt sich eine Überlegenheit des primitiven Menschen. Nach den zahlreichen übereinstimmenden Erfahrungen dürfen wir diesem sogar in Beziehung auf anschauliches Erfassen von Zahlenverhältnissen bessere Leistungen zuschreiben als dem erwachsenen Kulturmenschen. Dabei ist es nicht wahrscheinlich, daß wir es hier mit einem Unterschied zu tun haben, der allein aus Übungseinflüssen herzuleiten wäre. Denn es ist sehr fraglich, ob der Kulturmensch auch dann, wenn er die Kräfte der Anschauung nicht so verkümmern ließe, wie er es gegenwärtig in der Regel tut, diejenigen Leistungen des Primitiven aufweisen würde, deren Beschreibung unsere nächste Aufgabe ist.

Wenn sich eine nicht zu große Gesellschaft von Personen von Zeit zu Zeit für einen bestimmten Zweck zusammenfindet, so vermögen die Teilnehmer in der Regel auch ohne ein Abzählen, allein auf Grund eines unmittelbaren Gesamteindrucks anzugeben, ob bereits alle da sind oder nicht. In entsprechenden Leistungen, wo eine Beurteilung einer Menge auf

Grund einer Bekanntheit mit ihren einzelnen Gliedern in Frage kommt, entwickelt der Primitive eine weit größere Geschicklichkeit. Der Missionar Dobrizhoffer berichtet mit Erstaunen, daß die Abiponen (Indianer Südamerikas) sofort wußten, welcher Hund bei einer sehr zahlreichen Meute fehlte.[1]) Ebenso weiß der Neger Afrikas, wenn die nach Hunderten zählenden Tiere seiner Viehherden an ihm vorbeigetrieben werden, ob keins der ihm einzeln bekannten Tiere verloren gegangen ist.[2]) Aber auch dort, wo eine Beurteilung von Mengen nicht auf Grund einer Bekanntheit mit jedem einzelnen ihrer Glieder eintritt, kann es ohne ein Dazwischentreten von Zahlvorstellungen, allein infolge anschaulicher Mengeneindrücke, zu überraschend sicheren Mengeneinschätzungen und Mengenvergleichen kommen. Auch ohne Zahlwörter ist Gruppenvergleichung möglich. Sie kann sozusagen anschaulich erfolgen. Gruppen, die verschiedene Anzahlen gleichartiger Dinge umfassen, gewähren einen verschiedenen Eindruck, wie wir bereits oben (S. 13f.) andeuteten. Wenn wir auf einen Blick Gruppen von 2 und 3, von 3 und 4 Gliedern voneinander unterscheiden, so erscheint uns dies nicht weiter rätselhaft. Wo eine Vergleichung viel umfangreicherer Gruppen vorkommt, brauchen wir nicht nach prinzipiell neuartigen Erlebnissen für eine Erklärung zu suchen. Nur muß nach Maßgabe der Steigerung in der Leistung eine Zunahme der Auffassungsschärfe und des Gedächtnisses einsetzen. Es bieten sich viel Beispiele für die hohe Begabung, die dem Naturmenschen in diesen beiden Richtungen beschert ist.

Zunächst eine einer Untersuchung M. Wertheimers [3]) entnommene Illustration für die überraschende Befähigung, optische Daten umfangreicher Natur in schnellster Weise zu erfassen. Es handelt sich um ein Spiel der Pangwe, von dem der Ethnolog Teßmann Mitteilung gemacht hat. „Der Aufgeber wirft eine Anzahl Steinchen oder Kugeln innerhalb eines kleinen Bereichs ziemlich rasch einzeln hintereinander, indem er dabei laut zählt, 1, 2, 3, 4 usw. bis etwa 20, den Rest, etwa 10, wirft er auf einmal hin; er zeigt nun auf einen ohne Wissen des Ratenden vorher bestimmten, z. B. welchen er als 13. geworfen hat. Der Ratende hat nun anzugeben, der wievielte es war..." (Wertheimer, a. a. O., S. 377). Die Lösung dieser Aufgabe ist nur einer ebenso umspannenden wie raschen Auffassung möglich. Der Europäer versagt auch nach Übung gegenüber dieser Aufgabe, von deren Schwierigkeiten man sich selbst durch einen entsprechenden Versuch überzeugen kann.

Die Erfassung einer Anzahl von Pferden als eine den Raum füllende Menge veranlaßt den Abiponen zu der Frage: „Wieviel Platz nehmen die getöteten Pferde ein?", wenn er nicht etwa über diese räumlichen

1) Berichtet bei L. Lévy-Bruhl, Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures. Paris 1910, S. 207.

2) Zitiert bei H. Schubert, Zählen und Zahl, Hamburg 1887. S. 4.

3) M. Wertheimer, Über das Denken der Naturvölker. I. Zahlen und Zahlgebilde. Zeitschr. für Psychol., Bd. 60, 1912. S. 321ff.

Verhältnisse, sondern allein über die **Zahl** der getöteten Pferde Auskunft haben will. Der Raum, nach dem hier gefragt wird, läßt sich wahrnehmungsmäßig erfassen; mit dem Zahlbegriff wäre es nicht der Fall.

Die Gebärdensprache knüpft an die gewöhnlichen Ausdrucksformen des seelischen Lebens unmittelbarer an als die Wortsprache; da sie weniger von Konventionen abhängig ist, ist sie in höherem Maße international. Vielleicht ist sie als Mitteilungsform nirgends so wenig Mißverständnissen ausgesetzt wie bei der Bezeichnung numerischer Verhältnisse. Nach Wundt darf man sogar vermuten, „daß die Gebärde als das einfachere und leichter verständliche Ausdrucksmittel die Ausbildung der sprachlichen Benennungen (für Zahlen) unter den Verhältnissen einer ursprünglichen Kultur nicht selten zurückgehalten hat.“[1]) Die Völkerpsychologie gibt uns Beispiele für alle Stufen, die von der Gebärde als alleiniger Ausdrucksform von Zahlverhältnissen bis zur Gebärde als einer die gebrauchten Zahlwörter unterstreichende Begleitung führen. „Die Zahl der Tage wird hübsch und einfach verdeutlicht. Man weist auf die Sonne, beschreibt einen Bogen durch die Luft, der ihren Tageslauf versinnbildlicht, neigt den Kopf und schließt die Augen — 1 Tag; wieder beschreibt man einen Bogen usw., jeden Tag in dieser Weise besonders ausmalend.“[2]) In diesem Fall ist es ganz dem Fragesteller überlassen, die Addition der einzelnen durch die Gebärde angedeuteten Tage vorzunehmen. Mehr Unmittelbarkeit besitzt die Gebärde, wenn sie sich der Gliedmaßen des Körpers, vor allem der in größter Zahl vorhandenen Finger und Zehen bedient, um Zahlverhältnisse anzudeuten. Die Finger für sich und ebenso die Zehen für sich sind einander genügend ähnlich, um ihre Zuordnung zu Anzahlen von gleichartigen Dingen (Früchte, Waffen, Tiere, Menschen usw.) zu gestatten. Auserdem besitzen sie die für eine derartige Operation wichtigen Eigenschaften, sich nicht zu verändern und ihrem Besitzer stets zur Verfügung zu stehen. Die Reihenfolge in der Verwendung der einzelnen Finger zur Zahlenverdeutlichung ist bei den einzelnen Völkerstämmen nichts weniger als willkürlich. „Die Otomaken halten, um ‚drei‘ zu sagen, den Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger zusammen und strecken die andern nach unten. Die Tamanaken zeigen den kleinen Finger, den Ringfinger und den Mittelfinger und schließen die beiden anderen. Die Maipuris endlich erheben den Zeige-, Mittel- und Ringfinger und verdecken die beiden andern.“[3]) Ähnliches gilt für die Darstellung anderer Zahlen. Reichen die Finger einer Hand nicht aus, so geht man zu denen der anderen Hand über, sind auch diese erschöpft, so müssen die Zehen der Füße, wieder in einer bestimmten Reihenfolge, herhalten. „Erst wird Finger für Finger der linken, dann der rechten Hand angefaßt und beiseite ge-

1) W. Wundt, Völkerpsychologie. Bd. 1. Teil 2. Leipzig 1900. S. 25.

2) Karl von den Steinen, Durch Zentral-Brasilien. Leipzig 1886. S. 183.

3) Zitiert bei E. B. Tylor, Die Anfänge der Kultur. Übersetzt von Spengel u. Poske. Bd. 1. 1873. S. 243.

schoben; dann kommt der linke Fuß, und, wenn es nicht reicht, der rechte Fuß, Zehe für Zehe, an die Reihe" (von den Steinen, a. a. O., S. 184). Diese Art des Abzählens, die von dem einmal gewählten Schema nicht abgeht, ist für das Denken ohne Zweifel ökonomisch. Sind Zahlwörter mit bestimmten Gruppen von Fingern assoziiert, so findet die wechselseitige Reproduktion natürlich leichter statt, als wenn verschiedene Finger als gleichwertig füreinander eintreten würden und so bald diese, bald jene Gruppierung von Fingern dasselbe Zahlwort reproduzieren müßte. Derselben psychologischen Erwägung trägt der Elementarunterricht Rechnung, wenn er auch den ABC-Schützen, sobald er mit dem Fingerrechnen begonnen hat, zunächst immer wieder dieselben Finger für dieselben Zahlenoperationen verwenden läßt.

Die konservative Verwendung derselben Fingerfiguration für dieselbe Zahl läßt es nun leicht dahin kommen, daß diese Figuration, indem das Bewußtsein ihrer Zusammengesetztheit aus so und so viel einzelnen Fingern mehr und mehr zurücktritt, ähnlich wie das Zahlbild des Rechenunterrichts einen symbolischen Charakter annimmt. Sie kann das optische Symbol für eine Anzahl werden, wobei die Adäquatheit zwischen Symbol und Symbolisiertem zwar gewahrt wird, aber nicht mehr volle Beachtung findet. Auf dem Wege zum weniger adäquaten Symbol scheint es zu liegen, wenn nicht mehr alle Glieder der Zahlenreihe durch die entsprechende Anzahl von Fingern oder Zehen, sondern durch andere Körperteile ausgedrückt werden. So kommt es vor, daß nach Erschöpfung der Finger einer Hand an den Teilen des Armes und des Rumpfes weitergezählt wird. Ja, es kann sogar vorkommen, daß dieselbe Körperstelle je nach den Zahlenwerten, welche der durch sie zu bezeichnenden Zahl vorangehen, einen verschiedenen Wert erhält. So bedeutet in der Sprache der Maipua und Namau auf Neu-Guinea „ano", das Wort für Hals, sowohl 10 wie 14 (zitiert bei Lévy-Bruhl, a. a. O., S. 210), wobei ihm erst aus seiner Stellung in der Zahlenreihe die Eindeutigkeit erwächst. Auch diese Lokalisation von Zahlwerten an verschiedenen Körperstellen hat natürlich ihren denkökonomischen Wert. Ich will hier die Andeutung nicht unterdrücken, daß diese Art der Lokalisierung und Veranschaulichung von Zahlwerten einen fruchtbaren Boden für alle Arten von Zahlendiagrammen (s. unten) abgeben könnte, und daß den Prozessen der Individualisierung von Zahlen, die uns unten auch noch beschäftigen sollen, hier ein weiter Spielraum eingeräumt ist.

Es ist sehr schwer zu entscheiden, welche Bedeutung dort, wo beim Operieren mit Zahlen Zahlwörter und optische Zahlsymbole parallel gehen, einer jeden dieser Reihen zukommt. Soviel ist sicher, daß sich aus dem Mangel an Zahlwörtern nicht auf ein völliges Fehlen der Fähigkeit, Zahloperationen auszuführen, schließen läßt. Die Botokuden haben nur für 1 eine sprachliche Bezeichnung, alle über 1 hinausgehenden Zahlen, ebenso „viel", bezeichnen sie mit demselben Wort „muhu" (Schubert, a. a. O., S. 22). Wir wissen aber, daß sie doch auch numerische Verhältnisse, die über die 1 hinausgehen, aufzufassen vermögen. Über nur 2 Zahlwörter verfügen die Bewohner der Insel Murray (Torres-Straße), es ist dies netat = 1, neis = 2. Darüber hinaus zählen sie neis netat = 3, neis neis = 4 usw. (Lévy-Bruhl, a. a. O., S. 209). Man erkennt natürlich, daß die Leistungsfähigkeit eines Zahlensystems, welches nach diesen Prinzipien seine Zahlwörter bildet, nicht bedeutend sein kann.

Vielfach sind als Zahlwörter die Bezeichnungen der Körperteile adoptiert worden, welche zur Veranschaulichung dieser Zahlen gedient haben oder noch dienen. In der Sprache der Küstenbewohner der Gazellenhalbinsel bedeutet lima = Hand = 5. A utal a lima = eine Dreiheit von Händen = 15. (Wertheimer, a. a. O., S. 325). 2 Hände oder ein halber Mensch bedeuten bei manchen Völkern 10, ein ganzer Mensch bedeutet 20 (Summe aus Fingern und Zehen). Die Zahl 53 drückt der Grönländer aus durch „am dritten Menschen am ersten Fuß drei“ (Tylor, a. a. O., S. 246). Diese Zählweisen haben Tylor veranlaßt, von „Hand-“ oder „Fingernumeralien“ zu sprechen. Auch wo die Herleitung der Zahlwörter der jetzt gebrauchten Zahlensysteme aus Körperteilen nicht mehr möglich ist, dürfen wir bei den meisten von ihnen doch mit einem solchen Ursprung rechnen. Sonst wäre die Tatsache, daß bei den meisten Zahlensystemen die 10 als Grundzahl genommen ist, und daneben die Zahlensysteme mit den Grundzahlen 5 und 20 nicht gerade selten sind, gar nicht zu verstehen. In manchen Zahlensystemen, wie z. B. im französischen, durchkreuzen sich das dezimale und das vigesimale System. Wenn wir Zahlensysteme mit der Basis 2 antreffen, so verweisen auch sie auf einen Ursprung aus den dem Menschen von der Natur mitgegebenen Rechenmaschinen, auf die paarweise vertretenen Körperglieder.[1]) Psychologisch weniger leicht zu verstehen sind Zahlensysteme mit der Basis 60. – Wenn wir bei den verschiedensten primitiven Stämmen die Bildung ganz ähnlicher Zahlensysteme konstatieren, so ist es nach allen bis jetzt vorliegenden Untersuchungen wahrscheinlich, „daß bei verschiedenen Menschenrassen ein ähnlicher, aber unabhängiger Prozeß der Geistesentwicklung wiedergekehrt ist“ (Tylor, a. a. O., S. 244). Gegen eine Übermittlung und für eine Unabhängigkeit in der Hervorbringung der Zahlensysteme tritt auch Eisenstädter[2]) ein. Diese Verhältnisse würden ihr Analogon darin finden, daß auch bei Kindern derselben Altersstufe unabhängig voneinander stets wieder dieselben Geistesprodukte entstehen.

Die Verfolgung des Ursprungs der Zahlenbegriffe hat hier wie auch beim Kinde die Annahme gründlich zerstört, daß deren Bildung ihren Ausgangspunkt von der Einheit und der sukzessiven stets wiederholten Hinzufügung neuer Einheiten genommen habe, eine Annahme, die

1) Zum Aufbau von Zahlensystemen mit anderer Grundzahl vgl. H. G. Zeuthen, Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. Aus „Kultur der Gegenwart“. Teubner 1912. Band Mathematik.

2) J. Eisenstädter, Elementargedanken und Übertragungstheorie in der Völker-[illegible]le. Stuttgart 1912. S. 163.

der Betrachtungsweise des Logikers nahe liegt. Die Einheit ist psychologisch nicht so ausgezeichnet wie logisch resp. zahlentheoretisch. Das einzelne Exemplar war individuell bekannt, es bestand, so lange es für sich blieb, keine praktische Notwendigkeit, sein Einssein zu betonen. Nichts wäre verkehrter als anzunehmen, daß irgendein theoretisches Interesse den primitiven Menschen zur Schöpfung der ersten Zahlgebilde getrieben habe. Diese wurden seinem ungefügen Geist durch die harte Notwendigkeit des praktischen Lebens abgerungen, durch die Notwendigkeit, auf die Menge seiner Feinde, seiner Tiere, seiner Waffen zu achten. Darum sind sie noch so wenig abstrakt. Die Zahlenverhältnisse werden zunächst in engster Verbindung mit den Dingen gedacht, an denen sie bemerkt werden. Daß die an einer Gruppe von Dingen auftretenden numerischen Verhältnisse ohne weiteres auf eine andere Gruppe übertragen werden können, leuchtet dem Primitiven ebensowenig ein wie dem Kinde (S. 17). Nichts ist in dieser Beziehung so lehrreich wie die Tatsache, daß manche Völker verschiedene Zahlwörter verwenden zur Zählung verschiedenartiger Dinge. „In der Tschimschian-Sprache in Britisch-Kolumbien gibt es 7 verschiedene Reihen von Zahlen, um verschiedene Klassen zu zählen“ (Lévy-Bruhl, a. a. O., S. 223). Das Zahlwort bildet mit dem Gezählten eine feste Einheit, ist von ihm nicht ablösbar, es ist noch nicht übertragbar. Welchen bedeutenden Wert der Primitive auf die konkrete Möglichkeit vorstellungsmäßig gefaßter numerischer Verhältnisse legt, kann man an folgendem Beispiel ersehen. Ein Indianer, aufgefordert, den Satz zu übersetzen, „der weiße Mann hat heute 6 Bären geschossen“, weigert sich dies zu tun mit der Erklärung, „es sei nicht möglich, daß der weiße Mann an einem Tage 6 Bären erlege“. (Zitiert bei Wertheimer, a. a. O., S. 328.) Welches Verständnis würde ein so auf das Konkrete eingestelltes Gehirn erst etwa den Begriffen der Mengenlehre entgegenbringen?

Über die Ausführung von Rechenoperationen bei primitiven Menschen sind wir nicht so gut unterrichtet wie über ihre Zahlgebilde selbst. Vieles wird sich auch hier auf anschaulichem Wege erledigen. Das assoziative und das kommutative Gesetz werden beide ohne weiteres angewandt, weil sie sich ja in der Erfahrung völlig bestätigen. Wir gehen nicht darauf ein, wie sich die Umbildung der primitiven Zahlgebilde in die logisch definierten Zahlbegriffe, ihre „Logisierung“ vollzieht. Hier treten mehr Absicht und Willkür an die Stelle unbewußt wirkender Kräfte. Sind indessen auch die Motive, die eine Umbildung der Zahlbegriffe herbeiführen, ganz anderer Natur, so scheint mir doch die Entwicklung von den anschaulich erfaßten Zahlverhältnissen zu den Zahlvorstellungen des gewöhnlichen Lebens in den weiteren Bestrebungen zur Logisierung[1]) derselben ihre Fortführung in gleicher Richtung zu erhalten. Sollte es nur ein Zufall sein, daß die moderne Arithmetik viel-

1) Vgl. hierzu Wernicke, S. 24ff.

fach vom Mengenbegriff ausgeht, und daß an dem Ausgangspunkt aller Zahlenkunst nicht die Zahl, sondern die undifferenzierte Menge steht?

Hat die vorstehend mehrfach angedeutete Parallelität zwischen der Entwicklung der Zahlvorstellung beim Kinde und beim Primitiven eine über die Erkenntnis, die sie in wissenschaftlicher Beziehung bietet, hinausgehende pädagogische Wichtigkeit? Folgt z. B. ohne weiteres daraus, daß ein Unterrichtsgang zu empfehlen sei, der die bei der Stammesentwicklung beobachtbaren Stufen berücksichtigt? Ich glaube, die Antwort ist nicht schwer zu finden, sie ist nämlich zu verneinen. Pädagogisch zu rechtfertigen ist allein die Forderung nach einem Unterricht, welcher der Entwicklung des Kindes gerecht wird; daß eine teilweise Parallelität zwischen dieser Entwicklung und der des Stammes besteht, ist vom pädagogischen Standpunkt aus nur als belanglos anzusehen. Sie allein könnte keinerlei pädagogische Maßnahme rechtfertigen. „Das kulturhistorische Studium schafft bloß empirische Tatsachen bei. Erst wenn diese vor dem Richterstuhl der Psychologie bestehen, dann sind sie reif für den Unterricht.“[1]) Der Parallelität darf schon darum in pädagogischer Beziehung keine so große und ausschlaggebende Bedeutung beigelegt werden, weil das Kind ja von einer ganz anderen Umgebung beeinflußt wird, als der Primitive auf der entsprechenden Entwicklungsstufe. Das Kind ist beständig von einer Gesellschaft umgeben, die auf der höchsten Entwicklungsstufe steht, während der Primitive von einer ihm gleichstehenden Gesellschaft umgeben war.[2])

2. Die Entwicklung der Raumvorstellung beim Kinde.

In der Mathematik hat die Entwicklung dahin geführt, daß sich gegenüber manchen der Raumanschauung entnommenen Erkenntnissen, die man früher als verläßlich ansah, berechtigte Zweifel erhoben haben, was die Bestrebungen zur Arithmetisierung der Geometrie zur Folge hatte.[3]) Die auftauchenden Zweifel nehmen ihren Ursprung von der Erkenntnis der Unzulänglichkeit der räumlichen Anschauung.[4]) Nun ist aber auch die Raumanschauung, die man aufzugeben oder doch kritischer zu untersuchen sich anschickt, in vielen Beziehungen ein Produkt

1) E. Wilk, Das Rechnen der Volksschule. I. Lehrerheft. Dresden 1909. S. 10.

2) Ganz anders als die oben berührte pädagogische Auswertung der Entwicklungsparallelität ist natürlich das von dem amerikanischen Pädagogen J. Dewey empfohlene Prinzip zu bewerten, beim Unterricht auch die Kulturstufen zu berücksichtigen, aber in dem Sinne, daß sie zum Unterrichts*gegenstand* gemacht werden. Ihre Besprechung soll zu einem vollen Verständnis der modernen Kultur und ihres Werdens führen. Dieses Sachprinzip ist pädagogisch durchaus diskutabel und birgt zweifellos manche wertvolle Seite. Man lese hierüber in Deweys Schrift 'School and public life', Chicago 1900, nach, die für den Lehrer eine Fülle anregenden Materials enthält.

3) Vgl. hierzu F. Klein, Über die Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachrichten 1895.

4) Vgl. hierzu Wernicke, S. 47 ff.

der Umbildung, die der Mathematiker für seine Zwecke an der „natürlichen“ vorwissenschaftlichen Raumanschauung auf Grund gewisser logischer Erwägungen vorgenommen hat. Eigenschaften des Raumes, wie die Stetigkeit und die Homogenität, sind nicht in der aus der natürlichen Raumwahrnehmung hervorgewachsenen Raumvorstellung unmittelbar mitgegeben, der Raum ist vielmehr mit diesen Eigenschaften erst ausgestattet worden, weil ein wissenschaftliches Bedürfnis dafür vorlag. Es wäre nun für den Psychologen wie für den pädagogisch interessierten Mathematiker gleich instruktiv, die Ausbildung der natürlichen, sozusagen für die Bedürfnisse des alltäglichen Lebens genügenden, Raumvorstellung und weiter deren Umbildung in die von der Mathematik untersuchte Form zu verfolgen. Von der letzteren Angelegenheit wissen wir bis jetzt zu wenig Sicheres, es soll hier darum eine Bescheidung auf die Untersuchung der ersten Frage stattfinden.

Es wird für diesen Zweck nötig sein, im einzelnen zu prüfen, wieviel von der Raumwahrnehmung der verschiedenen Sinne zur Entstehung der Vorstellung von „dem“ Raume beigetragen wird.[1]) Wenn selbst Blindgeborene oder frühzeitig Erblindete dazu kommen, Geometrie mit Verständnis zu treiben, so ist dies ein Zeichen dafür, daß auch bei einem Fortfall derjenigen Anregungen, welche die Raumvorstellung aus der Raumwahrnehmung des Gesichtssinnes empfängt, deren für geometrische Zwecke genügende Ausbildung möglich ist. Der Fall des Blinden zeigt uns in schlagender Weise, welch hochgradige Unabhängigkeit auch die Einsicht in geometrische Wahrheiten von der Form besitzt, in der sie subjektiv gefaßt werden.

Wir beginnen nun mit der Darstellung der Entwicklung, die die Raumwahrnehmung beim Kinde nimmt. Während in früheren Jahrzehnten die Frage Nativismus oder Empirismus den Mittelpunkt des Problems über den Ursprung der Raumvorstellung bildete, welches uns hier beschäftigen soll, hat man jetzt diese Frage der Theorie vertagt und ist mehr und mehr dazu übergegangen, zunächst einmal die Tatsachen der Entwicklung der Raumwahrnehmung selbst reden zu lassen. Zu diesen Betrachtungen gehören eben in erster Linie die Bemühungen um die Erforschung der kindlichen Raumwahrnehmung.

Es ist nicht leicht, etwas Sicheres über die ersten Raumwahrnehmungen des Kindes zu sagen. Wir müssen hier auf die vom Kinde selbst ausgeübte Beobachtung (die Selbstbeobachtung) verzichten und sie durch die Deutung der bei ihm beobachtbaren Reaktionsweisen zu ersetzen versuchen, soweit diese auf eine räumliche Wahrnehmung schließen lassen. Es können hier aber teilweise auch Beobachtungen am Erwachsenen herangezogen werden, die unter Bedingungen angestellt wor-

1) Von den raumschaffenden Kräften des Gehörs-, Geruchs- und Geschmackssinns sehen wir im folgenden ganz ab, kommen aber unten noch einmal auf sie zu sprechen.

den sind, welche seine räumlichen Wahrnehmungen denen des Kindes ähnlich werden lassen.

Wir müssen die durch die verschiedenen Sinne der Raumvorstellung zufließenden Anregungen getrennt betrachten. Als Mittel der Raumwahrnehmung des Auges, die angeboren sind[1]), kommen in Betracht die Akkommodation der Linse, der Konvergenzmechanismus und die Art des Zusammenwirkens beider Netzhäute beim binokularen Sehen.[2]) Beobachtungen beim Erwachsenen[3]) sowie gewisse Überlegungen, welche zeigen, daß die für die Raumwahrnehmung zur Verfügung stehenden Mittel beim Kind noch nicht recht funktionsfähig sind, lassen vermuten, daß die optische Raumwahrnehmung des Kindes zunächst nicht etwa flächenhaft ist, wie man früher und meist wohl auch noch jetzt annimmt, sondern mehr raumhaft, quasi-dreidimensional. Farbige Flächen dürften dem Kind annähernd so erscheinen, wie dem Erwachsenen der vom Nebel eingenommene Raum erscheint oder wie ihm das Grau erscheint, das er in einem völlig verdunkelten Raum oder bei geschlossenen Augen wahrnimmt. In diesem optischen Raum des Kindes, den wir als den optischen Urraum bezeichnen könnten, gibt es zwar ein Außereinander, es gibt aber darin noch keine Differenzierung nach verschiedenen Richtungen, nach oben und unten, rechts und links, vorn und hinten, weil überhaupt mit dem noch völligen Fehlen eines Beziehungspunktes, nämlich des eigenen Körpers, auch alle diejenigen räumlichen Relationen fortfallen, welche von ihm aus in die Raumwahrnehmung hineingetragen werden. Diese Relationen und die damit zusammenhängenden Lokalisationen pflegt man als egozentrische zu bezeichnen.[4]) Ehe sie eintreten, besitzt der Raum eine gewisse Homogenität. Beachten wir also, daß die Entwicklung der Raumvorstellung vom homogenen Raum zum differenzierten führt und daß erst viel später wieder die, wenn auch ganz anders geartete, wissenschaftlichen Zwecken dienende Homogenisierung einsetzt. Mit dem Eintritt der Beherrschung der Mittel zur Raumwahrnehmung schreitet wahrscheinlich die Differenzierung im optischen Raum rasch vorwärts, indem sich nun aus dem mehr raumhaften Eindruck auch flächenhafte Eindrücke entwickeln und indem sich andererseits das Phänomen des

1) Von den der Erfahrung entlehnten Mitteln der Raumwahrnehmung, zu denen beispielsweise die Luftperspektive zu rechnen ist, ist im folgenden wegen der Kürze der Darstellung nicht eingehender gesprochen worden.

2) Auch wenn man mit E. R. Jaensch (Die Raumwahrnehmung, Leipzig 1911) annimmt, daß das binokulare Sehen nicht die ihm für gewöhnlich zugeschriebene bedeutende Rolle bei der Raumwahrnehmung spielt, sondern daß an seine Stelle mehr Wanderungen der Aufmerksamkeit treten, so würde doch die volle Raumwahrnehmung sich erst später ausbilden können, weil wir annehmen müssen, daß die Kinder zunächst die hierfür nötige Aufmerksamkeitsverlegung noch nicht beherrschen.

3) Vgl. D. Katz, Die Erscheinungsweisen der Farben und ihre Beeinflussung durch die individuelle Erfahrung. Leipzig 1911. Abschnitt VI.

4) Vgl. hierzu G. E. Müller, Über die Lokalisation der visuellen Vorstellungsbilder. Bericht über den 5. Kongreß für exper. Psychol., Leipzig 1912.

dreidimensionalen leeren oder von Körpern erfüllten Raumes entwickelt, welches uns Erwachsenen gegeben ist, wenn wir durch das Medium der uns umgebenden Luft die Gegenstände erblicken. Es ist sehr wahrscheinlich, daß der Raum, der mit den Augen beherrscht wird, sich erst mit der aktiven und passiven Bewegung des Kindes im Raume wesentlich erweitert.

Die Beziehungen, welche zwischen den durch die verschiedenen Sinne vermittelten Raumeindrücken hergestellt werden, sind ganz sicher Beziehungen a posteriori, mag es mit der Raumwahrnehmung des einzelnen Sinnes wie immer bestellt sein; das zeigen vor allem die Fälle der Blindgeborenen, die in späteren Jahren durch eine Operation sehend gemacht wurden.[1]) Diese Beziehungen wären natürlich unmöglich, wenn nicht gewisse formale Relationen sich in den räumlichen Wahrnehmungen der verschiedenen Sinne wiederholten. Zu diesen formalen Relationen rechne ich die des „Größerseins", „Kleinerseins" und „Gleichseins" von Raumstrecken, das „Dazwischenliegen" von Punkten u. dgl. m. Die Geltung dieser Relationen für die von den verschiedenen Sinnen ausgelösten räumlichen Eindrücke löst auch die unten zu berührende Frage, wie es kommt, daß der Blinde zu derselben Geometrie gelangen kann wie der Sehende. Nach dieser Vorbemerkung haben wir zur Analyse der von den nicht visuellen Sinnen gelieferten räumlichen Daten überzugehen.

Nicht mit Unrecht spricht Stern[2]), um die schrittweise Eroberung des Raumes durch das Kind auszudrücken, von einem Urraum, einem Nahraum und einem Fernraum. Mit dem oben charakterisierten optischen Urraum wird der taktile Urraum in Beziehung gesetzt. Letzterer nimmt seinen Ursprung von den Berührungsempfindungen, die das Kind in der Gegend des Mundes beim Saugen erlebt. Der Mund bildet den Beziehungspunkt der ersten Lokalisationen. Nach etwa 3 Wochen (bei den einzelnen Kindern ist das verschieden) hat sich die erste sensomotorische Einstellung im (optisch-taktilen) Urraum (resp. Nahraum) ausgebildet, die Hinwendung des Mundes zur Mutterbrust. Sensomotorische Einstellungen, wie sie hier erworben werden müssen, kommen in der Tierwelt als angeboren vor. Vor kurzem ausgeschlüpfte Hühner picken mit großer Sicherheit nach Futterkörnern. Ein neugeborenes Ferkel springt in geschickter Weise von einem Stuhl herab (Preyer, S. 38f.).

Aus dem Verhalten des Kindes geht hervor, daß der Nahraum für etwa 3 Monate durch eine halbkugelige Schale von $^1/_3$ m Radius dargestellt wird: soweit geht der Aktionsbereich der kindlichen Hände. Entferntere Objekte werden nicht „zu Wahrnehmungs- und Strebungsobjekten". Ihre „diffusen Eindrücke bilden den unbestimmten Hintergrund" für die Objekte des Nahraums (Stern II, S. 415), vermutlich ähn-

1) Am eingehendsten hat einen derartigen Fall untersucht Moreau, Histoire de la guérison d'un aveugle-né. Annales d'oculistique. 76. Jahrg., 1913.

2) Die Entwicklung der Raumwahrnehmung in der ersten Kindheit. Zeitschr. für angewandte Psychol. Bd. 2, 1909. Zitiert als Stern II.

lich wie für den Erwachsenen die Himmelsfläche den Hintergrund für die entferntesten Objekte abgibt. Saugen an den Händen und Spielen mit ihnen oder anderen Objekten läßt es zur Zuordnung optischer und taktil-motorischer Raumlagen kommen. Es stellen sich die egozentrischen räumlichen Lokalisationen ein sowie die Differenzierungen des Raumes nach seinen verschiedenen vom Körper unabhängig gedachten Hauptrichtungen. Als wichtigste Richtung macht sich die Oben-Unten-Richtung geltend, deren Unterscheidung mit durch Vermittlung des Organs des „statischen Sinnes“ ermöglicht zu werden scheint.[1])

Im zweiten Vierteljahr eröffnet sich nach Stern der optische Fernraum. Konvergenz und Akkommodation stellen sich auf mehrere Meter Entfernung ein. Auch die binokulare Tiefenwahrnehmung kann nun ihre volle Kraft entfalten. Mit dem Beginn der Lokomotion weichen die Raumgrenzen schnell zurück. Das Kind lernt die räumlichen Verhältnisse auch solcher Objekte zu verstehen, die nicht von ihm zu erreichen sind, indem es den entfernteren Raum nach Analogie zum erreichbaren deutet. Allerdings laufen hierbei starke Irrtümer mit unter. Daß z. B. das Zifferblatt der Kirchturmsuhr wirklich einige Meter Durchmesser besitzt, wird ihm erst eine Demonstration aus großer Nähe klar machen können. — Eine interessante Bestätigung für die erst spät einsetzende Ausbildung der egozentrischen räumlichen Lokalisationen, die sich in der Auffassung von Figuren bemerkbar macht, bilden die sogenannten, auch von Stern genauer untersuchten Raumverlagerungen.[2])

Man kann häufig beobachten, wie kleine Kinder ihr Tieralbum selbst dann mit großem Behagen genießen, wenn seine Bilder nicht die normale Orientierung haben, sondern gedreht sind. Ja, sie können dabei um 180° gedreht sein, also auf dem Kopfe stehen. Das Kind scheint die Figuren unabhängig von ihrer Orientierung zu ihm zu erkennen, eine Begabung, die der Erwachsene wegen der stärkeren Wirksamkeit der egozentrischen Lokalisationen bei weitem nicht mehr in diesem Maße besitzt. Ein 6jähriger Knabe zeichnete ein Segelschiff fast ohne größere Schwierigkeit als in normaler Lage auch um 180° gedreht aus dem Kopfe nieder. Auch die spiegelbildlichen Vertauschungen der Buchstaben beim Schreibenlernen der Schulrekruten sind Beispiele von Raumverlagerungen.

Die Untersuchung der Entwicklung der Raumvorstellung beim Kinde ist bis jetzt mehr darauf ausgegangen, zu ermitteln, wie die Grenzen des vom Kinde beherrschten Raumes allmählich zurückweichen. Ein wichtiges Mittel zur Untersuchung der Form- und Körpervorstellung des Kindes geben uns die Produkte an die Hand, die aus seiner Betätigung als bildender Künstler hervorgehen, das sind seine plastischen Arbeiten und seine Zeichnungen. In jedem gut eingerichteten Kindergarten stehen den Zöglingen Sandhaufen zur Verfügung, an denen sich ihr Drang zur räum-

1) Über den interessanten statischen Sinn orientiert kurz H. Ebbinghaus, Grundzüge der Psychologie. 2. Aufl., 1905. S. 392.

2) Über verlagerte Raumformen. Zeitschr. für angewandte Psychol. Bd. 2, 1909.

lichen Gestaltung austoben kann. Vielfach gibt man ihnen auch andere plastische Mittel wie Ton und Plastilin für diese Zwecke in die Hand. Diese Mittel, aus denen Raumgebilde durch die Selbstbetätigung des Kindes erstehen, erfüllen bei dem jüngeren Kind ihren Zweck, die Raumphantasie anzuregen, vielleicht besser als die vielfach noch angewandten starren Körper (z. B. der Holz- oder Steinbaukasten), bei denen nur eine Kombination dieser Körper möglich ist.[1]) Zu den plastischen Mitteln gesellen sich die graphischen Mittel, um die dem Kinde interessanten Dinge auf der Tafel oder dem Papier festzuhalten und so anregend auf die Ausbildung der Raumgestaltung zu wirken.

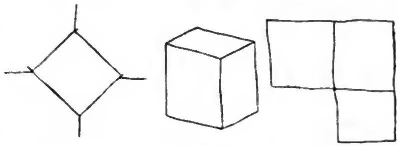
Betrachten wir die Produkte der plastischen Betätigung des Kindes aus den verschiedenen Entwicklungsjahren, so fällt auf, mit welch relativ großer Sicherheit von Anfang an die dreidimensionale Nachbildung von Objekten, sei es nach der Vorlage, sei es aus der Phantasie erfolgt. Diese Nachbildungen[2]) deuten auf eine recht gute Beherrschung derjenigen Mittel, durch die das Kind seine Vorstellung von den Körperformen zum Ausdruck bringt; sie lassen aber auch erkennen, daß es im wesentlichen zutreffende Vorstellungen von vielen der es umgebenden Körper besitzt. Das Kind scheint, was vielleicht mit noch größerer Deutlichkeit aus seinen Zeichnungen hervorgeht, auch die „Rückseite" der Körper irgendwie mit vorzustellen, die doch niemals streng gleichzeitig mit ihrer Vorderseite visuell gegeben ist. Einer Betastung kann die Vorder- und Rückseite eines Körpers gleichzeitig gegeben sein. Ich halte es darum für sehr wahrscheinlich, daß es den Anregungen durch die Tastwahrnehmungen zu verdanken ist, wenn das Kind die Objekte mit ihrer Rückseite vorstellt. In pädagogischer Hinsicht erscheint es hiernach erwünscht, den Tastsinn beim geometrischen Unterricht nicht gänzlich beiseite stehen zu lassen.

Ganz im Gegensatz zu dem relativ guten Gelingen der plastischen Nachbildung von Körperformen scheint die Nachbildung von Körpern in der Zeichenebene zu stehen. Von einer richtig erscheinenden Darstellung der Körper, d. h. von einer Anwendung der für die Projektion auf eine Fläche geltenden Regeln, kann man nichts entdecken. Das Kind versucht

1) Auch das Falten von Papier hat seine besonderen Vorzüge. Ich erinnere hier an G. C. Young und W. H. Young, The first book of Geometry, London 1905. (Ein deutsche Übersetzung des Buches von S. und F. Bernstein ist 1908 bei Teubner erschienen.)

2) Sammlungen von plastischen Kinderarbeiten befinden sich in dem der Deutschen Unterrichtsausstellung von der Stadt Berlin zur Verfügung gestellten Lokal (Berlin, Friedrichstr. 126). Sie sind von dem Institut für angewandte Psychol. zusammengebracht worden. — Abbildungen von plastischen kindlichen Arbeiten gibt auch Lay in der Zeitschr. für. exper. Pädag., Bd. 3, 1906. — Zeichnen und Formen des Kindes hat Luise Potpeschnigg in ihrer Schrift ‚Aus der Kindheit bildender Kunst' gegenübergestellt. Säemann-Schriften, Heft 2, Teubner 1912. Leider scheinen mir fast alle psychologischen Betrachtungen, die sie an die Produkte kindlichen Schaffens heranbringt, nicht haltbar.

zunächst in der Zeichnung eines Körpers das wiederzugeben, was es von dem Körper weiß. Als Beispiel führe ich die untenstehende Figur a an, welche ein Kind von 5 Jahren von einem vor ihm stehenden Tischmodell entwarf.[1]) Das Kind hat sich offenbar bemüht, die quadratische Tischplatte mit ihren 4 gleich langen an den Ecken befestigten Beinen darzustellen. Von einer Berücksichtigung projektiver Gesetzmäßigkeit ist noch keine Rede. Von Interesse ist auch der Versuch, bei dem dasselbe Kind einen perspektivisch richtig gezeichneten Würfel (siehe Figur b) nur abzeichnen soll. Es entwarf dabei die Figur c, die, wie man sieht, aus drei nebeneinanderliegenden Quadraten besteht. Das Bewußtsein, daß es sich in der Vorlage um einen Würfel handelt, hat zur Folge, daß Quadrate als Begrenzungsflächen gezeichnet werden. Da aber in der Vorlage nur 3 „Quadrate" zu sehen sind, werden auch nur 3 in der Zeichnung wiedergegeben. Alle Kinderzeichnungen sind nach demselben hier erkennbaren Prinzip entworfen.[2]) Nun möge man aber beachten, daß diese Zeichnungen nur unter dem Gesichtspunkt der vom Erwachsenen im allgemeinen verlangten perspektivischen Richtigkeit als verfehlt anzusehen sind und sich ihrem Konstruktionsprinzip nach nicht von den Produkten der plastischen Arbeiten des Kindes unterscheiden. Im Grunde verrät sich in ihnen dieselbe Kraft, welche die plastischen Arbeiten des Kindes so gut ausfallen läßt, und das ist die objektiv im wesentlichen zutreffende Vorstellung des Kindes von den Körperformen. Das Verständnis für jede Art von projektivem Zeichnen kommt dem Kinde erst sehr spät. Es hat sich gezeigt, daß sich eine Tendenz zur Berücksichtigung der Raumperspektive im allgemeinen erst als eine Folge der Unterweisung im Zeichenunterricht bemerkbar macht.[3]) Dabei ist aber noch zu berücksichtigen, daß europäische Kinder in einer Umgebung leben, die ihnen in unzähligen Fällen perspektivische Abbildungen zeigt.[4])



a *b* *c*

1) D. Katz, Ein Beitrag zur Kenntnis der Kinderzeichnungen. Zeitschr. für Psychol., Bd. 41, 1906. S. 243.

2) Bekanntlich ähneln die Zeichnungen vieler primitiver Völker den Kinderzeichnungen.

3) Vgl. hierzu G. Kerschensteiner, Die Entwicklung der zeichnerischen Begabung, München 1905, sowie S. Levinstein, Kinderzeichnungen bis zum 14. Lebensjahr, Leipzig 1905.

4) Der Primitive hat kein Verständnis für perspektivische Zeichnungen. „Ein Reklamebild in einer Zeitung, das einen Speisesaal in richtiger Perspektive zeigt, wird nur teilweise verstanden. Der Mittelgang, der durch die Stühle und Tische eckige Konturen erhält, wird als Treppe oder Leiter aufgefaßt. Von den Tischen wird ge-

In pädagogischer Hinsicht folgt aus diesen Betrachtungen, daß jedenfalls die metrische Geometrie auf ein höheres Verständnis beim Anfänger rechnen darf als die projektive Geometrie. Es folgt aber noch ein wichtigeres Prinzip aus ihnen. Die Betrachtung von Körpern, weit entfernt davon, dem Kinde besondere Schwierigkeiten zu bieten, darf unbedenklich an den Anfang der geometrischen Unterweisung gesetzt werden. Dreidimensionale Körper sind es, mit denen das Kind sich abgibt, von ihnen hat es schon in frühester Zeit, viel früher als der systematische Unterricht beginnt, eine große Reihe richtiger Erfahrungen gesammelt, wie sie in seinen plastischen Arbeiten und Zeichnungen zum Ausdruck kommen. An Körpern werden die geometrischen Erfahrungen gesammelt, in geringerem Maße an Flächen und Linien.[1]) Es heißt darum wirklich entwicklungstreue Pädagogik treiben, wenn man zuerst die vorwissenschaftlichen Erfahrungen, die sich auf dreidimensionale Körper beziehen, in ein etwas mehr wissenschaftliches Gewand kleidet. Auch ist von seiten dieser Erwägungen manches für die Fusion des geometrischen Unterrichts der Ebene und des Raumes geltend zu machen.[2]) Wenn die immer zahlreicher werdenden Befürworter[3]) eines vom Körper ausgehenden propädeutischen Kursus in Geometrie ursprünglich mehr intuitiv die Richtigkeit dieses Vorschlags erfaßten, so dürfte vorstehend auch seine eigentliche psychologische Berechtigung nachgewiesen sein.

Ein Vergleich zwischen der Entwicklung der auf die Zahl und der auf den Raum bezüglichen Vorstellungen beim Kinde läßt uns leicht erkennen, wieviel müheloser die letzteren dem Kinde zuwachsen. Der Zwang, sich im Raume zu betätigen, bringt das Kind zu einer Beachtung räumlicher Verhältnisse und läßt es über den Körper und den Raum eine Menge Erfahrungen sammeln, auf die sich, zu immer weitergehender Idealisierung schreitend, der einsetzende Unterricht stützen kann. Geometrische Begriffe werden leichter durch die Anschauung angeregt als arithmetische, die Wurzel sehr vieler, im späteren Unterricht eingeführten, geometrischen Begriffe reicht bis in die früheste Kindheit zurück. Für die arithmetischen Begriffe läßt sich das durchaus nicht sagen. Letztere setzen eine höhere Spontaneität voraus, sie erfordern auch eine weitergehende Abstraktionsfähigkeit. Fordert nicht auch dieses Verhältnis zwischen arithmetischer und geometrischer Begriffsentwicklung dazu heraus, sich so oft wie möglich beim arithmetischen Unterricht der Veranschaulichung durch geometrische Verhältnisse zu bedienen?

---

sagt: Die einen Tische (vorn) sind groß und die anderen Tische (hinten) sind klein (als wenn es ganz verschieden große Tische wären)." R. Thurnwald, Ethno-psychologische Studien an Südseevölkern. Beiheft 6 der Zeitschr. für angewandte Psychol., Leipzig 1913.

1) Branford hat in dem 1. Kapitel seines auf S. 2 erwähnten Werkes die „natürlichen" geometrischen Begriffe des Kindes zusammengestellt.

2) R. Schimmack, Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. Berichte u. Mitteilungen, veranlaßt durch die IMUK, Heft VII, Teubner 1912.

3) Vgl. hierzu P. Treutlein, Der geometrische Anschauungsunterricht. Teubner 1911.

3. Die differentielle Psychologie in ihrer Bedeutung für den mathematischen Unterricht.

a) Die Bedeutung der Lehre von den Vorstellungstypen für den mathematischen Unterricht.

Mit zu den zuerst bekannt gewordenen und seitdem am eingehendsten untersuchten individuellen Verschiedenheiten des Seelenlebens gehören die, welche man als Unterschiede des Vorstellungstypus zu bezeichnen pflegt.[1]) Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die Lehre von diesen Typen ein wichtiger Bestandteil der experimentellen Pädagogik ist und nahezu bei jeder Art von Unterricht von Bedeutung werden kann, darf sie hier zunächst in etwas allgemeinerer Art behandelt werden, ehe sie auf Verhältnisse des mathematischen Unterrichts Anwendung findet.

Fordert man mehrere Personen auf, sich eine früher wahrgenommene Landschaft, ein früher wahrgenommenes Bild oder einen beliebigen sonstigen optischen Eindruck mit größtmöglicher Deutlichkeit innerlich vorzustellen, so wird der Einzelne dieser Aufforderung in einem verschiedenen Grade nachkommen können. Manchem gelingt es vielleicht, das Gewünschte mit sinnfälliger Deutlichkeit und in all seinen Einzelheiten innerlich wiederzuerleben, bei anderen wird die reproduzierte Vorstellung manches zu wünschen übrig lassen, und schließlich werden sich auch solche finden, denen es nicht möglich ist, innerlich auch nur in dürftigster Weise die gewünschte Vorstellung zu erzeugen. Von der ersten Gruppe werden wir sagen, daß sie mit einer hohen Visualisationsfähigkeit begabt ist, diese Begabung ist bei der zweiten Gruppe niedriger, während sie bei der dritten gleich Null ist.[2])

---

1) Die Frage nach den Vorstellungstypen ist bis jetzt noch nach keiner Richtung hin völlig klargestellt, nicht einmal in der Verwendung der wichtigsten Termini herrscht bei verschiedenen Autoren Übereinstimmung. Die von mir versuchte Darstellung stimmt mit keiner der so zahlreichen Einzeluntersuchungen völlig überein. Auf Einzelheiten und Feinheiten einzugehen, verbot nicht nur der Zweck dieser Arbeit, sondern auch die Enge des Raumes. Die gründlichste Untersuchung einzelner Fragen, die zugleich deren ganze Kompliziertheit aufdeckt, findet man bei G. E. Müller, Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufes, I. Teil, Leipzig 1911. (Zitiert als Müller I.) Dort sind auch weitere Literaturhinweise gegeben. Eine Zusammenstellung der Methoden, die der Ermittlung des Vorstellungstypus dienen, findet sich bei Meumann I, S. 449 ff.

2) Bei den visuellen Vorstellungen und dementsprechend bei dem visuellen Vorstellen hat man im einzelnen wieder zu unterscheiden die Farb- und die Formelemente. Neuerdings hat G. E. Müller, Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufes, III. Teil, Leipzig 1913 (zitiert als Müller II), darauf aufmerksam gemacht, daß man von den Farb- und Formvorstellungen des visuellen Gedächtnisses dessen topische, d. h. auf Raumorte sich beziehende Vorstellungen zu trennen hat. „Neben dem visuellen Farbengedächtnis gibt es noch ein visuelles topisches Gedächtnis, dessen Betätigung in bedeutendem Umfang von motorischen Vorgängen begleitet ist, das aber eben nicht selbst ein motorisches Gedächtnis ist.“ An diese Ausführungen schließt Müller folgende für die Psychologie des geometrischen Vorstellens nicht unwichtige Betrachtungen an. „Für die mathematische Konstruktion ist

Ganz ähnliche Unterschiede in der Fähigkeit des inneren Vorstellens treffen wir an, wenn wir an verschiedene Individuen mit der Aufforderung herantreten, sich einen akustischen Eindruck zu vergegenwärtigen. Um die Extreme herauszugreifen, so wird der eine vielleicht außerstande sein, die tausendfach gehörte Stimme seines Freundes sich (innerlich) zu vergegenwärtigen, während der andere die Töne polyphoner Musikstücke zu reproduzieren vermag. Während in dem ersten Fall verschiedene Grade der Befähigung zum visuellen Vorstellen vorlagen, handelt es sich in dem letzteren Fall um verschiedene Grade der Befähigung zum akustischen Vorstellen. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß man eine ganz analoge Betrachtung im Hinblick auf die innerliche Vergegenwärtigung anderer als optischer und akustischer Eindrücke anstellen kann. Psychologisch von höherem Interesse hat sich nur noch die Frage nach dem Grad der Befähigung erwiesen, innerlich motorische Vorgänge zu reproduzieren, in welche die sogenannten kinästhetischen und taktilen Komponenten eingehen, während z. B. die gleiche Frage betreffs der Vorstellungen des Geschmacks- und des Geruchssinnes selten gestellt und untersucht worden ist.

Mit Beziehung auf eine ausgesprochene Befähigung zu einer der erwähnten Arten des Vorstellens kann man nun von verschiedenen Typen des Vorstellens oder verschiedenen Vorstellungstypen, einem visuellen, akutischen, motorischen Typus sprechen. Reine Vorstellungstypen sind verhältnismäßig selten. Viel häufiger sind die sogenannten gemischten Typen, worunter diejenigen Fälle zu verstehen sind, in denen mehrere Arten des inneren Vorstellens in annähernd gleich deutlicher Weise ausgeprägt sind. In diesen Fällen spricht man dann von einem akustisch-motorischen, visuell-motorischen .... Typus.

Man kann den Begriff des Vorstellungstypus in einer von der vorstehenden etwas abweichenden Weise festlegen. Viele oder die meisten

mit den Entfernungen und Richtungen, in denen sich die verschiedenen Punkte eines Objektes zu einem bestimmten Standpunkte oder einer bestimmten Bezugsumgebung befinden, zugleich auch die Form der Gegenstände gegeben. Für die Psychologie dagegen besteht die Tatsache, daß die Auffassung der Form eines Gegenstandes und die Auffassung seines Ortes und seiner Lage zwei verschiedene Vorgänge sind, die in einem gegebenen Falle mit sehr verschiedener Aufmerksamkeit und Nachhaltigkeit vor sich gehen und in sehr verschiedenem Grade im Gedächtnis nachwirken können . . ." „Ob ein gutes oder schlechtes Gedächtnis für projektive Orte und Lagen notwendig oder wenigstens in der Regel mit einem entsprechend guten bzw. schlechten Gedächtnis für relative Orte oder Lagen verbunden ist oder ob kein derartiger Zusammenhang besteht, muß erst noch untersucht werden." – Es finden sich Personen, die behaupten, bei ihnen komme es vor, daß sie sich Räumliches, z. B. einen Ort, eine Linie, eine Bewegung, ja sogar eine ganze geometrische Konstruktion, als Räumliches (nicht bloß in Worten) innerlich vergegenwärtigten, ohne hierbei etwas Visuelles vorzustellen. Es muß hier dahingestellt bleiben, inwieweit solchen Aussagen Unzulänglichkeiten der Selbstbeobachtung oder Vorgänge des rein motorischen Gebietes oder Geschehnisse anderer Natur zugrunde liegen. Näheres darüber wird enthalten G. E. Müller, Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufes, II. Teil.

Gegenstände wirken durch mehrere Sinnespforten auf unser Bewußtsein ein. Ein Musikinstrument, auf dem gerade gespielt wird, macht sich sowohl für mein Auge wie für mein Ohr geltend. Ein Freund ist mir sowohl durch seine Sprache wie durch sein Aussehen bekannt. Die Bewegung meiner Hand kann mir sowohl durch die visuellen wie durch die motorischen Vorgänge zum Bewußtsein kommen. Nun erhebt sich die Frage: wie stelle ich das Musikinstrument, den Freund, die Bewegung der Hand vor, wenn die Aufforderung, dies zu tun, an mich herantritt. Das Musikinstrument und der Freund brauchten mir nicht notwendig durch akustische und durch visuelle Vorstellungen repräsentiert zu sein. Ebenso kann mir die Bewegung der Hand innerlich nur durch die visuellen oder nur durch die motorischen Vorstellungen gegeben sein. Mit Rücksicht auf die Repräsentierung eines Gegenstandes, der vermöge seiner Eigenschaften auf verschiedene Sinne wirkt, hat man nun auch von einem visuellen, akustischen ... oder von einem gemischten Vorstellungstypus (dann auch Anschauungs- oder Sinnestypus) gesprochen, je nachdem, ob ein Individuum es vorzieht, jene Gegenstände nur mit dieser oder jener Art der Vorstellungen oder mit dieser und jener Art der Vorstellungen sich innerlich vorzustellen.

Im Seelenleben treten in der Regel nicht einzelne Vorstellungen, sondern ganze Reihen von Vorstellungen nach den für ihre Abfolge geltenden Gesetzen auf. Es besteht nun eine teilweise Unabhängigkeit der Stärke und Deutlichkeit der einzelnen Vorstellungsarten von ihrer Kraft, miteinander dauerhafte Assoziationen einzugehen. Werden Individuen, bei denen sich die Assoziierbarkeit der Vorstellungen verschiedener Gebiete in der angegebenen Richtung unterscheidet, Reihen von Eindrücken vorgeführt, bei denen eine Repräsentation durch nur eine von deren Seiten möglich ist, so werden sich die Individuen verschieden verhalten. Bei der Einprägung und Reproduktion werden die einen Individuen diese, die anderen jene Art der Vorstellungen bevorzugen. Handelt es sich z. B. um Reihen von Wörtern, die abgelesen werden, so wird sich der eine auf die akustischen, der andere auf die optischen Elemente der Silben stützen. Mit Rücksicht auf dieses verschiedene Verhalten der Gedächtnistätigkeit spricht man nun auch von verschiedenen Vorstellungstypen (dann auch Gedächtnistypen). Es gilt also, daß die Art der vom Gedächtnis verwendeten Vorstellungen innerhalb gewisser Grenzen von deren Deutlichkeit unabhängig ist.

Der Vorstellungstypus eines Individuums ist nicht absolut starr, sondern ist von den mannigfaltigsten Bedingungen abhängig (vgl. Müller I, S. 9ff.). Dahin gehören die Eigentümlichkeiten des Vorstellungsmaterials, die Arten der Darbietung dieses Materials und dergleichen mehr. Diesen mehr objektiven Bedingungen stehen als annähernd ebenso einflußreich gewisse subjektive Bedingungen gegenüber, wie z. B. die augenblickliche Stimmung und der Ermüdungszustand. Viele Individuen verhalten sich vor allem beim Denken wesentlich verschieden. Die psychischen Vorgänge, welche beim Denken stattfinden, können ganz verschiedener Natur sein. Man spricht von einem Denken in Sachvorstellungen dann, wenn die Objekte, über die nachgedacht wird, selbst in Vorstellungen gegeben sind, von einem Denken in Worten dann, wenn die sprachlichen Bezeichnungen der Dinge diese ersetzt haben und nun mit ihnen operiert wird. Das Denken in Worten ist außerordentlich weit verbreitet, was mit den denkökonomischen Vorteilen zusammenhängt, welche die menschliche Sprache bietet. In der Sprache herrscht das akustisch-motorische Element vor. Wir nehmen die sprachlichen Symbole durch unser Ohr auf, beim Sprechen selbst hören wir wieder unsere eigenen Laute und werden uns unserer Sprechtätigkeit durch die motorischen Vorgänge bewußt. Für den Kulturmenschen spielt daneben eine große, wenn auch dem akustisch-motorischen gegenüber untergeordnete Rolle das optische Wortbild der gedruckten sowie der geschriebenen Sprache. Ist der Vorstellungstypus nicht gänzlich von Übungseinflüssen unabhängig, so muß die Gewohnheit des Sprechens auf ihn Einfluß gewinnen. Das ist auch der Fall. Es kommt also vor, daß jemand beim Wortvorstellen akustisch-motorisch ist, während er beim Sachvorstellen mehr zum visuellen Vorstellen neigt.

Der Anwendbarkeit der Lehre von den Vorstellungstypen auf die unterrichtliche Praxis stehen eine Reihe von Schwierigkeiten entgegen. Die meisten der die Lehre von den Vorstellungstypen betreffenden Resultate sind durch Beobachtungen und Versuche am Erwachsenen gefunden worden. Aber selbst hier fehlt es noch an einer brauchbaren Statistik über die Häufigkeit der Vorstellungstypen. Mit einiger Wahrscheinlichkeit läßt sich wohl nur sagen, daß der gemischte Typus der vorherrschende ist. Hieraus läßt sich immerhin eine nicht unwichtige pädagogische Konsequenz ziehen. Der Vorstellungstypus des Lehrers kann jedesmal dann zu einer didaktischen Gefahr werden, wenn er von ausgeprägter Reinheit ist und auf ihn didaktische Maßnahmen gegründet werden. Diese didaktischen Maßnahmen des Lehrers werden nämlich günstigsten Falles einigen wenigen seiner Schüler gerecht werden, während sie gegenüber den anderen als gänzlich unangebracht erscheinen. Gleichgültig wie die Statistik der Vorstellungstypen für die Lehrer ausfallen mag, es ist notwendig, daß der Lehrer selbst mit seinem Vorstellungstypus vertraut sei, um unter allen Umständen vor einer einseitigen Unterrichtstechnik bewahrt zu bleiben. Auch muß der Lehrer unbedingt wissen, daß es so etwas wie eine Verschiedenheit der Vorstellungstypen gibt. Zunächst ist man nämlich geneigt, dem Geschehen, welches man im eigenen Bewußtseinsleben antrifft, generelle Geltung zuzuschreiben, also anzunehmen, daß es bei jedem Menschen so wie bei uns selbst zugehe.[1])

Ein geradezu klassisches Beispiel für diese irrtümliche Anschauung bietet der Fall des Mediziners Stricker, der einen von den bis jetzt be-

1) Vgl. hierzu das unten über Zahlendiagramme Mitgeteilte.

kannt gewordenen sehr seltenen Fällen eines fast reinen motorischen Vorstellungstypus darstellt. Stricker[1]) hat selbst eine eingehende Analyse seiner Vorstellungsreihen gegeben, und er weiß nicht, daß in ihrer Struktur nur eine individuelle Eigenart seines Vorstellungslebens zum Ausdruck kommt. Solche irrtümliche Auffassungen individueller Eigentümlichkeiten erfahren häufig erst dann eine Korrektur, wenn die betreffenden Individuen mehr oder weniger zufällig zu ihrer Überraschung erfahren, daß hier tatsächlich nur eine individuelle Eigentümlichkeit in Frage kam.[2]) Ich darf einschalten, daß das, was hier über die Berücksichtigung individueller Eigentümlichkeiten des Seelenlebens bemerkt wurde, nicht auf die Vorstellungstypen zu beschränken ist. Der Unterrichtende sollte sich also bei jeder angenommenen Unterrichtstechnik fragen, wieviel davon wohl individuell bedingt und generell berechtigt ist.

Die Lehre von den Vorstellungstypen wurde vorstehend mehr als eine Frage der „Pädagogik vom Lehrer aus" behandelt, sie sollte natürlich durch eine Untersuchung der Vorstellungstypen der Schüler die notwendige Ergänzung erhalten. Das, was nachstehend hierüber zu sagen ist, möchte ich nur mit Vorbehalt (nach der Zusammenstellung bei Meumann I, S. 491 ff.) wiedergeben, da die zugrundeliegenden Untersuchungen, so sehr sie im einzelnen zu begrüßen sind, sich doch an ein zu kleines Schülermaterial wenden, um als allgemeingültig angesehen werden zu können. „Kinder scheinen in den ersten Schuljahren mehr visuell zu sein, sowohl beim Wort- wie beim Sachvorstellen." „Bei Kindern bildet sich ein größerer Anteil des akustisch-motorischen Wortvorstellens in der Regel erst unter dem Einfluß des Unterrichts aus." „Ganz besonders ist der gegenwärtige Schulunterricht darauf angelegt, das hörende und sprechende Vorstellen zu entwickeln, das visuell anschauliche Vorstellen zurückzudrängen." „Bei dem weiblichen Geschlechte bleibt für das ganze Leben das visuelle Vorstellen im Vorteil gegenüber dem akustisch-motorischen." „Es ist ein didaktischer Vorteil, daß die sogenannten gemischten Typen immerhin auch bei den Kindern bei weitem die Mehrzahl zu bilden scheinen."

In den vorstehenden Sätzen ist bereits von der unterrichtlichen Beeinflußbarkeit der Vorstellungstypen die Rede. Die Möglichkeit, die Deutlichkeit jeder Vorstellungsart durch Übung zu steigern, scheint ebenso sicher durch Versuche erwiesen zu sein wie die Möglichkeit einer stärkeren Verwendung dieser oder jener Vorstellungsart bei der Vorstellungsreproduktion. Andererseits sprechen die reinen Vorstellungstypen, wie auch

1) S. Stricker, Studien über die Sprachvorstellungen. Wien 1880.

2) Auch das von K. E. Fährmann in seinen Schriften (Das rhythmische Zählen, der Konzentrationspunkt des elementaren Rechnens, Plauen i. V. 1896. — Die Veranschaulichung im Rechnen nach der rhythmischen Zählmethode, Plauen i. V. 1902) geforderte rhythmische Zählen scheint einer individuellen Vorliebe für das rhythmische Vorstellen entsprungen zu sein. Die Berechtigung der Verallgemeinerung dieser Methode bedarf wohl noch eines Beweises.

die Tatsache, daß in den beiden angedeuteten Beziehungen trotz größter Übung verschiedene Grenzen für verschiedene Individuen gesteckt zu sein scheinen, deutlich für ein Angeborensein der Dispositionen für die Vorstellungstypen. Darum ist eine Übung dort ausgeschlossen, wo auch nicht einmal schwächste Dispositionen gegeben sind; man ist dann berechtigt, von einem Vorstellungsdefekt zu sprechen. Diese Fälle dürften aber als seltene Ausnahmen zu betrachten sein.

Was nun die Frage nach der unterrichtlichen Berücksichtigung der Vorstellungstypen angeht, so ist darauf zu erwidern, daß eine möglichst gleichmäßige und weitgehende Pflege jeder Art des Vorstellens erwünscht scheint. Diese Pflege soll aber nicht losgelöst vom Sachunterricht stattfinden, also nicht formaler Natur sein, vielmehr hat ihr das Verfahren im Unterricht zu dienen. Die Forderung einer harmonischen Ausbildung der verschiedenen Arten des Vorstellens gründet sich auch schon auf der allgemein zu billigenden Forderung, keine Art von wertvoller seelischer Anlage atrophisch werden zu lassen.

Nun zur Bedeutung der Lehre von den Vorstellungstypen speziell für den mathematischen Unterricht. In seinem Interesse scheint vor allem eine Ausbildung der visuellen Vorstellungsfähigkeit zu liegen, da sie eine der Grundlagen der räumlichen Anschauung bilden dürfte, deren Ausbildung von fast allen Beteiligten als eine der dringlichsten Aufgaben der mathematischen Unterrichtsreform bezeichnet wird. Um zu prüfen, was wohl die Psychologie zu den Anforderungen zu sagen haben wird, die nach Durchführung jener Reform an die räumliche Phantasie gestellt werden dürften, tun wir gut, einmal Treutlein zu hören, nicht nur, weil er zu den eifrigsten Vertretern jener Unterrichtsreform gehörte, sondern auch, weil seine Vorschläge bereits ihre Realisierung in langjähriger Unterrichtspraxis erfahren haben.

Treutlein geht im geometrischen Unterricht vom Modell des Körpers aus, nach reichlichen Übungen am Modell wird dies entfernt, und der Schüler hat nun mit einem Phantasiekörper zu arbeiten. „Die betreffenden Körper werden durch Handbewegungen zunächst des Lehrers angedeutet, und an diesem ‚Luftkörper', der bald größer, bald kleiner der Gesamtheit der Schüler vormodelliert und so gewissermaßen vor Augen gestellt wird, haben diese die vorigen reichlichen Übungen im Zeigen und Nennen und im Erfassen der Lagebeziehungen und der Formengestaltungen durchzuführen. Die höchste und unbedingt zu erreichende Stufe für die Ausbildung der Raumauffassung wird und ist erstiegen, wenn allein die innere Anschauung der betreffenden Körperform zu den Übungen verwendet, wenn also entsprechend dem ‚Kopfrechnen' auch reine ‚Kopfgeometrie' getrieben wird" (Treutlein, a. a. O., S. 113). Man hat zunächst den Eindruck, als wenn bei dieser Art des Unterrichts in erster Linie Ansprüche an die Visualisationsfähigkeit gestellt würden. Nun erhebt sich aber sofort die Frage, mit welcher Deutlichkeit muß der Luftkörper visuell vorgestellt werden, damit an ihm ein geometrischer Beweis geführt werden kann? Solange wir hierauf keine Antwort geben können, läßt sich auch die Frage nicht entscheiden, ob man der Mehrzahl der Schüler solche Kopfgeometrie zumuten darf.[1]) Daß individuelle Differenzen der Schüler im Unterricht hervorgetreten sind, scheint aus einer Bemerkung Treutleins hervorzugehen, die sich an das oben Zitierte unmittelbar anschließt. „Nur zur Ergänzung und zur Nachhilfe für schlechter erfassende Schüler hat hierbei gelegentlich das Körpermodell wieder einzutreten."

Wir drückten uns oben absichtlich mit Vorsicht aus, wo wir erklärten, daß der Unterricht Treutleins sich an die Visualisationsfähigkeit der Schüler richte, denn streng genommen handelt es sich bei seinen Forderungen nicht um eine Produktion innerlicher Vorstellungsbilder, sondern um eine Projektion von Phantasiebildern in den äußeren Raum.[2]) Das ist psychologisch nicht dasselbe, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, wie weit die Fähigkeit hierzu bei den Schülern, an die sich der Unterricht wendet, vorausgesetzt werden darf.[3])

Nun möchte ich aber die viel tiefer gehende Frage aufwerfen, ob überhaupt eine Raumanschauung der visuellen Elemente nicht entraten kann, ob die sie meist begleitenden visuellen Elemente nicht mehr eine nicht unwichtige Stütze, als ein notwendiges Baumaterial sind. Wir werden geneigt sein, die Frage zu bejahen, wenn wir uns dessen erinnern, daß auch der von Geburt an Blinde mit Verständnis Geometrie treiben kann.[4]) Der Blinde kommt also gewiß ohne visuelle Elemente aus. Das legt aber die Frage nahe, ob nicht auch der Schüler, der wegen mangelnder Visualisationsfähigkeit den Forderungen eines Geometrieunterrichts wie des Treutleinschen nicht durch die am geeignetsten erscheinenden, visuellen Vorstellungen zu genügen vermag, zu anderen, sie ersetzenden Vorstellungen seine Zuflucht nehmen wird. Nach Untersuchungen G. E. Müllers über das Wesen des topischen Gedächtnisses könnte man hier z. B.

1) So hat auch schon Lietzmann (Lietzmann I, S. 48) mit Recht darauf aufmerksam gemacht, daß das von Zeisig und Burkhardt aufgestellte Gebot: „Geh nicht eher fort, als bis du das zu Beobachtende mit geschlossenen Augen dir genau vorstellen kannst" eine Forderung enthält, gegen die man vom Standpunkt der experimentellen Psychologie Einwendungen erheben kann.

2) Es muß dahingestellt bleiben, ob der hier berührte Gegensatz sich deckt mit dem Gegensatz, der darin besteht, daß beim Vorstellungsbild der gegenwärtige Standpunkt des Beobachters unberücksichtigt bleibt oder eine Berücksichtigung findet.

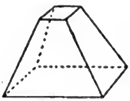
3) Aus Versuchen mit Erwachsenen wissen wir, daß auch bei der Projektion von Vorstellungsbildern in den Raum mit großen individuellen Verschiedenheiten zu rechnen ist. Man vgl. z. B. L. J. Martin, Die Projektionsmethode. Leipzig 1912. — In höherem Grade um ein innerliches Vorstellen als bei dem Treutleinschen Unterrichtsverfahren handelt es sich bei dem Verfahren, welches Diesterweg gelegentlich im Geometrieunterricht eintreten ließ und dessen Beschreibung ich Treutlein entlehne. „'Drehen S' das Gas aus!' Und nun wurden im vollständig dunkeln Zimmer die Figuren konstruiert, die Buchstaben gesetzt und die Beweise geführt . . ."

4) Vgl. hierzu die Ausführungen über Blindenpsychologie.

an motorische Vorstellungen denken.[1]) Dann wäre die Frage nach dieser Seite des Vorstellens bei Schülern zu erheben. Wenn wir nicht an die Stelle empirischer Befunde apriorische Konstruktionen setzen wollen, so müssen wir uns damit begnügen, die verschiedenen Fragen wenigstens berührt zu haben. Mir scheint es aber eine Notwendigkeit zu sein, in Zukunft diese Fragen näher zu untersuchen, um jeden geometrischen Unterricht und so auch den durch die Unterrichtsreform erstrebten auf eine wissenschaftliche psychologische Basis zu stellen. Es ist wohl im Vorstehenden deutlich geworden, wie tief die Lehre von den Vorstellungstypen in Fragen des mathematischen Unterrichts eingreift.

b) Wahrnehmungstypen.

Es genügt darauf hinzuweisen, daß sich in jeder Wahrnehmung oder Auffassung eines optischen Eindrucks die Reaktion eines Organismus zeigt, der schon die verschiedensten Erfahrungen hinter sich hat, um auch hier individuelle Differenzen verständlich erscheinen zu lassen. Die nebenstehende Zeichnung wird von der großen Mehrzahl der Leser ohne weiteres als Pyramidenstumpf aufgefaßt werden. Man wird es kaum verstehen, daß es auch Individuen gibt, bei welchen sich diese Auffassung nicht mit derselben Unmittelbarkeit einstellt. Und doch fand Katz[2]) einen Beobachter H., welcher unter gewissen Bedingungen die angeführte Zeichnung durchaus als flächenhafte Zeichnung auffaßte, nämlich dann, wenn sie ihm nur für kürzere Zeit dargeboten wurde. Ebenso wurden andere Zeichnungen, die raumhafte Gebilde darstellten, von ihm flächenhaft aufgefaßt. Eine raumhafte Auffassung dieser Figuren trat nun aber ein, wenn er sich ausdrücklich vornahm, diese eintreten zu lassen. Und in diesen Fällen wurden die Zeichnungen sogar so plastisch gesehen wie kaum von anderen Beobachtern. Mit Beziehung auf die Wahrnehmungsweise von H. spricht Katz (aus hier nicht weiter zu erwähnenden psychologischen Gründen) von einem peripheren Wahrnehmungstypus. Im Gegensatz hierzu steht der zentrale Wahrnehmungstypus, bei dem Figuren wie die obenstehende auch bei kürzester Darbietung eine raumhafte Auffassung erfahren. „Nehmen wir an, es würde an einen Schüler, der eine Organisation ähnlich wie H. besitzt, im Stereometrieunterricht eine jener häufigen Aufgaben herantreten, eine ebene Figur



1) Vielleicht sind motorische Vorstellungen auch nicht ohne Bedeutung bei der „Einfühlung" in das Kräftespiel von Maschinen, die bei Maschinenbauern vorkommt. Über gewisse Fragen der Einfühlung orientiert Th. Lipps in dem Artikel Ästhetik in Bd. I, 6 der Kultur der Gegenwart. 2. Aufl., Teubner 1908.

2) D. Katz, Über individuelle Verschiedenheiten bei der Auffassung von Figuren. Zeitschr. für Psychol., Bd. 65, 1913. Vgl. zum obenstehenden auch L. v. Karpinska, Experimentelle Beiträge zur Analyse der Tiefenwahrnehmung. Zeitsch. für Psychol., Bd. 57, 1910.

als Körper aufzufassen, so würde ein solcher Schüler trotz seines peripheren Wahrnehmungstypus hierin keine Schwierigkeit finden, weil er ja jene Figur kraft seiner Fähigkeit zur plastischen Gestaltung räumlich auffassen kann. Würde diese Fähigkeit aber wegfallen, so würde der Fall pädagogisch eine besondere Beachtung verdienen. Die Deutung ebener Figuren wäre damit sehr erschwert. Es wäre dankenswert, einmal zu untersuchen, ob zwischen den Leistungen in der Geometrie und dem Wahrnehmungstypus eine Korrelation besteht."

c) Synopsien.

Die individuellen Differenzen, mit denen wir uns bislang zu beschäftigen hatten, boten insofern dem allgemeinen Verständnis nicht unüberwindliche Schwierigkeiten, als sie doch nur typische Ausprägungen solcher Erscheinungen des normalen psychischen Geschehens bedeuteten, die fast ein jeder, wenn auch nur in unvollkommeneren Graden der Deutlichkeit, immer wieder erleben kann. Anders steht es mit denjenigen individualpsychologischen Phänomenen, bei denen von solchen das Verständnis erleichternden Übergängen kaum die Rede sein kann, deren wir aber doch in diesem Abschnitt als pädagogisch nicht ganz bedeutungslos Erwähnung tun müssen. Diese Erscheinungen machen auf jeden, der zum erstenmal von ihnen hört, durchaus den Eindruck des Absonderlichen, um nicht zu sagen des Pathologischen. Es handelt sich um diejenigen Bildungen des Vorstellungslebens, welche der Genfer Psychologe Flournoy[1]) zusammenfassend als Synopsien bezeichnet. Von diesen psychischen „Singularitäten" verdienen in dem vorliegenden Zusammenhang die Diagramme, Chromatismen und Personifikationen nicht nur deswegen eine kurze Behandlung, weil sie nachweislich wenigstens für einzelne Teile des Elementarunterrichts nicht ohne jede Bedeutung sind, sondern noch mehr unter dem allgemeineren Gesichtspunkt, daß der Pädagog dann, wenn er einmal auf sie stoßen sollte, vor einer falschen Diagnose hinsichtlich des geistigen Habitus ihres Trägers bewahrt bleiben möge. Diese Phänomene dürfen nämlich trotz ihres launenhaften und absonderlichen Charakters durchaus nicht als pathologische Symptome gedeutet werden. Wir treffen sowohl Diagramme wie Chromatismen wie Personifikationen bei geistig völlig normalen Individuen mit gar nicht so großer Seltenheit an. Der Lehrer sollte von den in Betracht kommenden Erscheinungen auch schon darum wissen, damit er darüber Auskunft zu geben vermag, falls einmal auch von seiten eines Schülers diesbezügliche Fragen an ihn herantreten.

Es handelt sich nun bei den Singularitäten, über die berichtet werden soll, um zwangsmäßige von der Willkür fast gänzlich unabhängige Verknüpfungen von Empfindungen oder Vorstellungen mit andersartigen Vorstellungen. Wir veranlassen etwa jemanden, sich eine Zahl vorzustellen,

1) Th. Flournoy, Des phénomènes de synopsie. Paris und Genf 1893.

und es taucht bei ihm sofort die Vorstellung eines mehr oder weniger deutlichen visuellen Schemas auf, in dem eine mehr oder weniger bestimmt markierte Stelle die betreffende Zahl darstellt. Dieses gleiche Schema taucht nun auch sonst mit ziemlicher Regelmäßigkeit auf, wenn das betreffende Individuum mit Zahlvorstellungen zu operieren hat. Ein derartiges Schema bezeichnen wir als ein Zahlendiagramm. Ein Chromatisma ist eine Synopsie, bei der im unmittelbaren Anschluß an einen visuellen oder akustischen Eindruck – hier interessieren uns vor allem wieder diejenigen Eindrücke, durch welche Zahlvorstellungen erweckt werden – eine Farbenvorstellung auftaucht. Um eine Personifikation schließlich handelt es sich, wenn Zahlen oder andern gedanklichen Gegenständen die Gestalten von Personen oder doch Eigenschaften von Personen, wie etwa Ernst, Freundlichkeit u. dgl. m. beigelegt werden.

Über die Häufigkeit der Synopsien läßt sich nicht viel Sicheres sagen. Auf eine bei Flournoy erwähnte Umfrage Claparèdes, die sich an 2600 Personen wandte, antworteten 694; 371 von diesen gaben an, Synopsien zu besitzen. Selbst wenn man annehmen würde, daß alle diejenigen, welche sich ausgeschwiegen haben, nicht über Synopsien verfügten, so würde doch noch mit etwa 14% Individuen mit Synopsien zu rechnen sein. Zu einem ähnlichen Wert gelangten E. Bleuler und K. Lehmann bei Untersuchungen, die sie bereits lange vor Flournoy angestellt haben.[1]) Man wird weniger überrascht sein, trotz der hier auftretenden Häufigkeitszahlen so selten spontane Äußerungen über Synopsien zu vernehmen, wenn man erfährt, daß sich dieselben lange dem Bewußtsein ihres Besitzers entziehen können oder daß ihnen darum weiter keine Aufmerksamkeit geschenkt wird, weil sie von ihrem Besitzer nicht notwendig als Gebilde aufgefaßt werden, die nicht allgemein einem jeden Bewußtsein zuzuschreiben seien. Diese letztere Tatsache wird unten (S. 54) durch einige interessante Beispiele belegt werden.

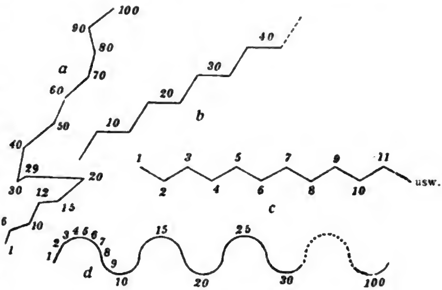
Sehr früh hat sich auch Sir Francis Galton, der Begründer der eugenistischen Bewegung in England, der Untersuchung der Synopsien zugewandt.[2]) Mit den Synopsien der Jugend und manchen Anomalien der Entwicklungsjahre hat sich A. Lemaître beschäftigt in seinem Buch „La vie mentale de l'adolescent et ses anomalies" (Saint-Blaise 1910), dessen Lektüre ich in eindringlicher Weise jedem Lehrer empfehlen kann. Es wäre sehr erwünscht, wenn entsprechende Untersuchungen auch einmal für deutsches Schülermaterial durchgeführt würden. Die

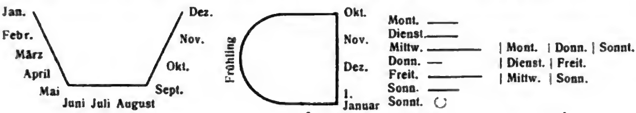
1) E. Bleuler und K. Lehmann, Zwangsmäßige Lichtempfindungen durch Schall und verwandte Erscheinungen aus dem Gebiete der anderen Sinnesempfindungen. Leipzig 1881.

2) Inquiries into human faculty and its development. London 1883. Diese Arbeit, mehr aber noch die Untersuchungen Galtons und seiner Schüler zur eugenistischen Bewegung, bei der es sich um die Anwendung der Ergebnisse der Erblichkeitstheorien auf Probleme der Bevölkerungsbewegung handelt, sind für den allgemeiner interessierten Pädagogen voller Anregungen.

exakteste und eindringendste Untersuchung der Synopsien, soweit Diagramme und Chromatismen in Betracht kommen, ist von seiten G. E. Müllers (Müller II) erfolgt; auf seine Untersuchung werde ich mich im folgenden zusammenfassenden Bericht im wesentlichen stützen.

Diagramme. Man kann die Diagramme definieren als Schemata (meist visueller Natur), deren einzelnen Stellen einzelne Teile dieser oder jener Art von Merkstoffen zugeordnet sind. In der Regel unterscheidet man 6 Arten von Diagrammen: „Zahlendiagramme, Jahres-, Wochen- und Tagesdiagramme, in denen die einzelnen Monate, Wochentage, Tagesstunden in bestimmter Weise angeordnet sind, chronologische Diagramme, deren verschiedene Stellen Lebensjahre oder Jahre historischer Ereignisse oder nur verschiedene Jahrhunderte oder noch größere Perioden der Geschichte repräsentieren, und alphabetische Diagramme, welche die Buchstaben des Alphabetes darstellen" (Müller II, S. 74). Welche geometrische Gestalt besitzen nun die Diagramme? Die Figuren a–d sind Beispiele von Diagrammen für die Zahlenreihe, die ich dem oben angeführten Werk Flournoys entnommen habe. Dorther stammen auch die in den Figuren e und f dargestellten Jahresdiagramme und die durch die Figuren g und h repräsentierten Wochendiagramme.





e f g h

Schon diesen wenigen Beispielen möge man entnehmen, welche Vielgestaltigkeit die Diagramme selbst dann besitzen können, wenn sie sich auf denselben Merkstoff beziehen. Die Mannigfaltigkeit der Diagrammformen erscheint nahezu unerschöpflich. Gemeinsam scheint verschiedenen Individuen nur die „diagrammatische Tendenz" zu sein, d. h. eine Neigung, gewissen Anordnungen von Stoffen schematische Anordnungen (meist) visueller Elemente zuzuordnen. Im einzelnen werden dann diese schematischen Anordnungen variieren mit der Variation der Umstände, denen sie ihren Ursprung verdanken. „Manche Diagramme sind einfach auf Wahrnehmungen der frühen Kindheit zurückzuführen, bei denen sich die Ziffern, Buchstaben, die Bezeichnungen der Monate, Wochentage oder Tagesstunden in bestimmter räumlicher Anordnung darboten, z. B. auf benutzte Multiplikationstabellen, Rechenmaschinen, Stundenpläne, Kalender, Ziffernblätter von Uhren u. dgl. m. Auch die Benutzung von Dominosteinen oder das Zählen und Rechnen mit den Fingern oder die Bekanntschaft mit gewissen (z. B. von den Zimmerleuten benutzten) mit Ziffern versehenen Maßstäben oder mit gewissen numerierten und in bestimmter Weise angeordneten Objekten, die sich in der Umgebung des vom Kinde bewohnten Hauses finden, kann der Entstehung und der spezielleren Form eines Diagrammes zu einem mehr oder weniger wesentlichen Teile als Grundlage dienen" (Müller II, S. 113). Aus den angegebenen Inhalten wachsen die Diagramme durch eine verschieden weit getriebene meist vereinfachende Umformung hervor. Weniger in Anlehnung an konkrete Inhalte, als vielmehr in freierer Form bewirkt die Bildung von Diagrammen die beim Kinde vorhandene Neigung zur symbolisierenden Phantasie, welcher äußere gelegentlich von emotionellen Faktoren begleitete Analogien genügen, um eine Diagrammatisierung nicht räumlicher Stoffe anzuregen.

Nun einiges über die Zeit des Entstehens der Diagramme. „Es werden Fälle beobachtet, wo ein Zahlendiagramm schon sogar vor der Kenntnis der Ziffern und vor dem Erwerb der Lesefähigkeit besteht." „Es fehlt indessen keineswegs an Fällen, wo ein Diagramm erst in späterem Lebensalter entstanden ist." „Manche in früher Kindheit entstandene Diagramme werden späterhin unter dem Einflusse neuer Bedürfnisse oder Lebensverhältnisse in gewisser Weise ergänzt oder abgeändert" (Müller II, S. 120).

Das Vorstehende mag für eine erste Orientierung über das Wesen und die Entstehung der Diagramme genügen. Wie steht es nun mit ihrer Benutzung für die Bedürfnisse des praktischen Lebens? Es scheint nötig zu sein, mit Beziehung auf die Zahlendiagramme, mit denen wir uns im folgenden allein beschäftigen wollen, zwei Formen der Benutzung zu unterscheiden; sie dienen einerseits zur Lösung rein gedächtnismäßiger Leistungen, sie helfen beim Einprägen und Merken von Zahlen und Zahlfolgen, andererseits werden sie bei der Ausführung von Rechenoperationen herangezogen. „Eine nur rudimentäre Disposition für die Benutzung eines Zahlendiagrammes tritt am leichtesten und öftesten dann hervor, wenn es sich um die Vergegenwärtigung und Einprägung sukzessiver einfacher oder in einfachen Verhältnissen zueinander stehender Zahlen handelt" (Müller II, S. 127). Hier werden also Zahlen durch Einprägung der ihnen im Diagramm zukommenden Stellen für eine spätere Verwendung gemerkt. — „Über die Rolle, welche die Zahlendiagramme beim Rechnen spielen, liegen nur sehr wenige nähere Mitteilungen vor." „Von 211 von Phillips (einem amerikanischen Psychologen) befragten

Versuchspersonen erklärten 97, daß sie von ihren Zahlendiagrammen Nutzen für das Addieren und die mathematischen Operationen überhaupt hätten" (Müller II, S. 141). Es wird instruktiv sein, an einem Beispiel zu zeigen, in welcher Weise bei der Ausführung einer einfachen Rechenoperation ein Zahlendiagramm Verwendung finden kann. Müller stellte einem seiner Diagrammatiker die Aufgabe $13 \cdot 5$. „Er sagt sich akustisch-motorisch $10 \cdot 5 = 50$ und sieht die Stelle von 50. Dann sagt er sich $3 \cdot 5 = 15$ und hat hierauf, angeblich gleichzeitig mit der akustisch-motorischen Wortvorstellung von 65, die visuelle Vorstellung dieser Zahl als einer an ihrer Stelle im Diagramm stehenden." Hier erscheinen die auftauchenden Diagrammstellen mehr als „nebensächliche Begleiterscheinungen, die gar keine wesentliche Bedeutung für den Rechenvorgang besitzen". Dagegen „dient in manchen Fällen die Mitbenutzung des Diagrammes dazu, bestimmte beim Rechnen vorkommende und festzuhaltende Zahlen fester einzuprägen. So erklärte z. B. H., daß das Diagramm beim Kopfrechnen für ihn von Wichtigkeit sei, weil er die Zahlen mit Hilfe desselben einpräge. Für das Rechnen selbst scheine das Diagramm nicht von wesentlichem Belang zu sein, da die betreffenden Diagrammstellen immer erst nach vollbrachter Rechenoperation auftauchten" (Müller II, S. 144 f.).

Von größerer Wichtigkeit wird das Zahlendiagramm dadurch, „daß die beim Rechnen auftauchenden Vorstellungen von Diagrammstellen unter Umständen auch für den Vollzug des Rechenvorgangs selbst von Bedeutung sein können". So wird von einem Diagrammatiker die interessante Mitteilung gemacht, daß er „gerade dann, wenn er in ermüdetem Zustande rechnen soll, zu dem Zahlendiagramme seine Zuflucht nimmt oder von demselben einen ausgiebigeren Gebrauch macht als sonst" (Müller II, S. 145). Ein gewisser Vorteil des Rechnens mit Zugrundelegung eines Diagrammes scheint unter besonderen Umständen nach Müller darin zu liegen, daß eine Umsetzung numerischer Verhältnisse in räumliche stattfindet und das Rechnen dementsprechend einen höheren Grad von Anschaulichkeit gewinnt. Wenn im Diagramm ein Einheitsmaß besteht, so ist damit die Möglichkeit gegeben, unmittelbar Diagrammstrecken auf den Zahlenwert hin, den sie repräsentieren, miteinander zu vergleichen.

Es geht aus den vorstehenden Ausführungen hervor, daß die Verwendung von Zahlendiagrammen in erster Linie für die elementaren Rechenoperationen in Frage kommt. Es liegt nun ein interessanter Versuch eines Lehrers vor, durch Ausführung von Rechenoperationen an einem künstlichen Diagramm, zu dessen Produktion er die Schüler von hinreichender Visualität anregte, dem elementaren Rechnen eine größere Sicherheit zu verleihen.[1]) Den Bericht über diesen Versuch gebe ich auch

1) K. Eckhardt, Visuelle Erinnerungsbilder beim Rechnen. Zeitschr. für exper. Pädag., Bd. 5, 1907.

nach Müller (Müller II S. 148). Eckhardt versuchte zu erreichen, „daß die Schüler mit Hilfe geeigneter anschaulicher Vorführung der Ziffernreihe gewöhnt würden, sich die Ziffern in Gestalt einer, etwa bis 100 reichenden, geradläufigen Reihe vorzustellen, in welcher der Abstand zwischen je 2 aufeinanderfolgenden konstant sei. Die Schüler werden angeleitet, innerhalb der ihrem Gedächtnisse eingeprägten Reihe heimisch zu werden. Deshalb werden Orientierübungen vorgenommen. Welche Zahl steht vor 50? Welche Zahlen stehen zwischen 78 und 80? Vergleiche die Strecke bis 27 mit der bis 29! Das Addieren erfolgt ohne Zerlegung... es wird darauf aufmerksam gemacht, daß die räumliche Entfernung 21 bis 31, 26 bis 36 immer dieselbe bleibt und gleichviel Einheiten enthält... Beim Addieren und Subtrahieren werden die Kinder angeleitet, in dieser Zahlenreihe, die dem Gedächtnis eingeprägt wurde... vorwärts und rückwärts zu gehen ... Ich (d. h. Eckhardt) habe öfters die Beobachtung gemacht, wie sehr schwache Schüler auf diese Weise bald das Addieren und Subtrahieren verstanden. Die Verwechslungen von 35 und 53 kommen nicht vor, und 72 + 2 konnte nie 92 geben. Dem sicheren Rechner sind diese begleitenden Gesichtsvorstellungen eine Kontrolle der Rechenmechanismen; sie leiten wegen ihrer Darstellung der Größenunterschiede zum Abschätzen an; sie bewahren später davor, sich in der Dezimalstelle zu irren, da die ungefähre Größe stets in räumlicher Darstellung angedeutet wird ... Wie weiterhin bemerkt, wird in späterer Schulzeit auch das Verständnis und die Benutzung der negativen Zahlen durch ein solches inneres Bild der (nach der negativen Seite hin verlängerten) Ziffernreihe erleichtert."

Ich stellte oben Beispiele dafür in Aussicht, daß an synoptische Phänomene gar nicht selten von ihren Besitzern die Auffassung herangebracht wird, es handle sich bei diesen nicht um individuelle, sondern um generelle Phänomene des Seelenlebens. Die Beispiele entstammen den Erfahrungen von G. E. Müller, und sie zeigen zugleich, welch nachteilige pädagogische Folgen derartige irrtümliche Auffassungen gelegentlich haben können. Müller schreibt darüber: „Bei Gelegenheit der Ausführungen, die ich in meiner allgemeinen Psychologievorlesung über die Diagramme gebe, haben mir bisher 3 an Volksschulen tätig gewesene Personen ganz unabhängig voneinander erklärt, der von ihnen erteilte Rechenunterricht sei in der ersten Zeit sehr mangelhaft gewesen, weil sie bei demselben, ja sogar bei ihren Erläuterungen der verschiedenen Rechenoperationen, von der Voraussetzung ausgegangen seien, daß ihre Schüler oder Schülerinnen gleichfalls über Zahlendiagramme verfügten und dieselben in gleicher Weise benutzen könnten, wie sie selbst ihre Zahlendiagramme verwenden." [1])

C h r o m a t i s m e n und P e r s o n i f i k a t i o n e n. Die Chromatismen und

1) Die Zahlendiagramme scheinen den Rechenmethodikern gänzlich unbekannt geblieben zu sein. Lietzmann (Lietzmann I, S. 12) hat sie der Beachtung empfohlen.

Personifikationen sind bis jetzt in ihrer Bedeutung für die Pädagogik noch weniger aufgeklärt worden als die Diagramme. Ein Zahlenchromatisma liegt dann vor, wenn zusammen mit einer bestimmten Zahl stets oder mit großer Regelmäßigkeit eine bestimmte Farbe auftaucht. Als Flournoy die 159 Chromatismen, die bei 23 Beobachtern für die Zahlen von 1–9 bestanden, näher untersuchte, ergaben sich folgende Verhältnisse (Flournoy, a. a. O., S. 130). Am häufigsten kam es vor, daß der 2 die blaue Farbe zugesprochen wurde. Aber auch die Vielfachen von 2 kamen mit einer größeren Häufigkeit mit dieser Farbe vor. Am auffälligsten war die Verknüpfung der 2 und ihrer Vielfachen mit der blauen Farbe bei einem Beobachter, der die Zahlen 2, 4, 6, 8 mit 4 verschiedenen Helligkeitsstufen der Farbe Blau verband. Die 1 erschien ziemlich häufig mit Weiß verbunden, die 3 mit Rot, die 7 mit Braun und Grün usw. Die verschiedensten Umstände können für die Art des entstehenden Chromatisma bestimmend werden, so z. B. die Klangverwandtschaft zwischen Zahlnamen und Farbennamen. Dies ist die Quelle für das Chromatisma 2 ∼ blau (deux ∼ bleu). Dann kommt es vor, daß Ziffern in den Farben erscheinen, welche sie konstituierende Buchstaben infolge eines für diese Buchstaben bestehenden Chromatisma besitzen. Aber auch viel weiter abliegende Assoziationen und Analogien bestimmen zuweilen die Art der entstehenden Chromatismen. Wie weit nun diese Chromatismen auf das Operieren mit Zahlen einen Einfluß gewinnen können, ob sie als förderlich oder als hemmend hierfür anzusehen sind, wissen wir einstweilen nicht. Wer die allseitige Subjektivität dieser Phänomene kennt, wird beim Unterrichten natürlich nie auf Chromatismen, die er bei sich vorfindet, als Stützen des Gedächtnisses hinweisen.[1])

Was die Personifikation von Zahlen anbetrifft, so begnüge ich mich damit, einige Lemaître entnommene hierher gehörige Beispiele anzuführen. Ein intelligenter Schüler von 14 Jahren machte folgende Angaben: „Seitdem ich zählen kann, d. h. seit meinem 6. Lebensjahr, erscheinen mir die Zahlen als Persönlichkeiten: die 9 ist der Schützling der 10; die 8 ist sehr liebenswürdig und ebenso ihr Kind die 4. Diese Eigenschaft muß wohl daher rühren, daß es sich um gerade Zahlen handelt und daß ich diese viel mehr liebe als die ungeraden, die auf

1) Einer meiner Lehrer, welcher in den oberen Klassen den historischen Unterricht erteilte, deutete gelegentlich an, man könne sich den blutigen Verlauf dieser oder jener historischen Begebenheit daran merken, daß die zugehörige Jahreszahl selbst einen roten Eindruck hervorrufe. Ich erinnere mich noch sehr wohl der Tatsache, daß mir derlei Angaben damals völlig unverständlich waren. Es erscheint mir jetzt nicht mehr zweifelhaft, daß jener Lehrer sich bei seinen Angaben auf bei ihm vorhandene Chromatismen stützte. – Ich gebe hier noch ein Beispiel dafür, wie Chromatismen zu falschen Erwartungen führen können, weil gewisse Beziehungen gelten zwischen den diese Chromatismen mit sich führenden Zahlen. Eine Studentin erzählte mir, sie habe als Kind mit Sicherheit angenommen, Rot und Blau ergebe gemischt Grün, weil 3 (rotes Chromatisma) und 4 (blaues Chromatisma) gleich 7 war, mit der ein grünes Chromatisma verbunden war.

mich einen falschen Eindruck machen" (Lemaître, a. a. O., S. 17). Einen humoristischen Einschlag besitzen die Personifikationen eines anderen Schülers von 16 Jahren. „Die 5 ist ein junger Mann von 20 bis 23 Jahren, welcher die 6 liebt, eine junge Dame, welcher er zu gefallen sucht. Die 7 ist ein Mann von 40 Jahren, der ebenso die 6 wie die 8 liebt, die ein Fräulein von ungefähr 35 Jahren ist; er versucht sie gegen die 9 zu schützen. Diese letztere Zahl unterdrückt alle anderen, insbesondere die 6 und die 8; diese Unterdrückung macht sich besonders bemerkbar für die 8". Bei noch anderen Schülern scheinen zwischen den einzelnen Zahlen geradezu kleine Romane zu spielen.

Die Eigenschaften, welche hier den Zahlen beigelegt werden, scheinen z. T. den Erfahrungen zu entspringen, die mit den Zahlen beim Rechnen gemacht werden. Zu einem anderen Teil scheint aber allein der Anblick einer Zahl darüber zu entscheiden, welche persönlichen Qualitäten ihr beigelegt werden. Als der Schüler, dessen Personifikationen wir an zweiter Stelle angegeben haben, über deren vermutlichen Ursprung gefragt wurde, machte er folgende Angaben. „Die Unterdrückung, welche von der 9 gegenüber den anderen Zahlen ausgeht, rührt vielleicht von der Schwierigkeit her, die ich immer beim Rechnen mit dieser Zahl empfunden habe. Aber schon ihr Anblick war und ist mir widerlich, während der Anblick der 7, der 8, der 6 und der 5 einen günstigen Eindruck auf mich macht."[1])

Wohl mancher wird überrascht sein, von diesen Dingen zu hören, die sich beim Operieren mit Zahlen im Kopfe dieses oder jenes seiner Schüler abspielen sollen. Wenn schon bei diesen als elementar angesehenen Vorgängen ganz unerwartete Komplikationen möglich sind, so wird man sich auf weit größere Überraschungen hinsichtlich der von vornherein als verwickelt anerkannten Vorgänge des jugendlichen Seelenlebens gefaßt machen müssen. Diese vorsichtige Einstellung dem Schüler gegenüber zu erwecken, war auch ein Grund für mich, auf die Chromatismen und Personifikationen hinzuweisen, trotzdem wir über ihre pädagogische Bedeutung einstweilen nicht viel wissen.

1) Wohl mit keinen Zahlen wird der Schüler lange Zeit ausschließlich so intensiv beschäftigt wie mit denen des ersten Zahlenkreises von 1—10. Nie treten ihm wieder Zahlen mit so ausgesprochener Individualität entgegen. In der Zahlenlehre „heißt Anschauung soviel wie sozusagen persönliche Bekanntschaft mit den einzelnen Zahlenindividuen innerhalb nur sehr allmählich sich erweiternder Zahlenkreise" (Höfler, S. 53). An einer anderen Stelle (S. 69 Anm.) sagt Höfler: „Gewiß, nicht erst Gauß, sondern schon der kleinste Schüler verkehre mit den Zahlen wie mit persönlich befreundeten Individuen." Wir sehen aus dem vorstehend über Personifikationen Gesagten, daß es nicht einmal mit dieser nur bildlichen Redeweise von Zahlenindividuen sein Bewenden zu haben braucht. — Die Zahlensymbolisierungen scheinen auch ihre ethnologische Parallele zu haben. So wurden bei den Ägyptern die Zahlen 1, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 dargestellt durch einen aufrechten Stab, einen Priesterstab, eine Lotosblume, einen zeigenden Finger, eine Kröte, einen Mann in Erstaunen (Branford, a. a. O., S. 246). Vgl. hierzu auch E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme bei den Kulturvölkern in alter und neuer Zeit. Mathematische Bibliothek, I, Teubner 1912.

d) Die mathematische Anlage und die Arbeitsweisen der Mathematiker.

Man kann sagen, daß das Interesse, welches in vielen Kreisen für die Probleme wach ist, die mit der mathematischen Anlage und den Arbeitsweisen der Mathematiker zusammenhängen, im umgekehrten Verhältnisse steht zu dem, was wir an Positivem über diese Dinge wissen. Dieser Mangel an Einsicht dürfte durch das Zusammenwirken folgender Umstände zu erklären sein. Die Erforschung der fraglichen Probleme würde nicht nur eine intime Kenntnis der Gesetze der mathematischen Produktion voraussetzen, die am besten auf Grund eigener mathematischer Produktion zu gewinnen wäre, sondern auch starke Begabung und tiefes Interesse für ihre psychologische Analyse. Selten waren diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt. Dazu kommt aber noch, daß die psychischen Prozesse, die bei der wissenschaftlichen Produktion in Frage kommen, überhaupt noch nicht hinreichend geklärt sind; die Psychologie schickt sich eben erst an, Wesen und Gesetzmäßigkeit des Denkens zu untersuchen. Mit dem Hinweis auf ein körperliches Symptom der mathematischen Anlage ist für deren Verständnis wenig und für die Erklärung der Arbeitsweisen der Mathematiker nichts gewonnen. So wäre mit der von Möbius[1]) aufgestellten Hypothese, daß starke mathematische Begabung stets verbunden sei mit einer ausgeprägten Hervorwölbung der äußeren Stirnecken (besonders der linken) über den Augenbrauen, selbst dann wenig anzufangen, wenn die Einzigartigkeit dieser Beziehung durch die Tatsachen besser gesichert wäre. Eine wirksamere Förderung der Frage nach der mathematischen Anlage ist von neuartigen psychologischen Untersuchungsmethoden, dem psychographischen Studium und der Korrelationslehre, zu erwarten.

Die Psychographie geht darauf aus, ein möglichst getreues Bild von der Individualität eines einzelnen Menschen zu entwerfen[2]). Sie versucht mit größter Sorgfalt und Gründlichkeit den Einzelnen mit seinen von wissenschaftlichen Gesichtspunkten aus als wesentlich betrachteten Eigenschaften vor uns hinzustellen. Die Korrelationslehre studiert die regelhaften Verknüpfungen, welche zwischen den verschiedenen so ermittelten Eigenschaften bestehen. Das von England ausgegangene Studium der Korrelationen wurde nach seiner mathematischen Seite in wesentlicher Weise durch K. Pearson und seine Schule, nach der psychologischen Seite in scharfsinniger Weise durch C. Spearman gefördert. Einen zusammen-

1) P. J. Möbius, Über die Anlage zur Mathematik. 2. Aufl., Leipzig 1907.

2) Ein Fragment eines psychographischen Schemas wurde im Institut für angewandte Psychologie und psychologische Sammelforschung (Institut der Gesellschaft für exper. Psychol.) von Baade, Lipmann und Stern zusammengestellt und im 5. Band der Zeitschr. für angewandte Psychol., 1911 veröffentlicht. Es ist hervorgegangen aus den Vorarbeiten einer Kommission für das Studium der übernormalen Begabung. Die Unterkommission für das Studium der mathematischen Begabung bestand 1910 aus den Herren Blumenthal, Rupp und Töplitz.

fassenden Bericht über den Stand der Korrelationslehre gab W. Betz[1]), bei dem man auch die Literaturhinweise bis zum Jahre 1911 findet. Dem Bericht über die aus der Korrelationslehre für uns bedeutsamen Ergebnisse schicken wir einige allgemeinere Betrachtungen über die mathematische Anlage voraus.

Die mathematische Anlage. Es trifft wohl zu, wenn Betz behauptet, „daß die Schulmathematik mit dem eigentlich mathematischen Denken nur äußerst wenig zu tun hat. Es ist eine häufig wiederholte Bemerkung, daß die mathematischen Sätze nicht so gefunden werden, wie man sie später beweist. Der Unmathematische versteht dies natürlich so, als ob der Mathematiker einen neuen Satz auf Umwegen finde, gewissermaßen durch Herumtasten, aber im Prinzip doch durch ein gleiches Verfahren, wie es im schließlichen Beweis zutage tritt. Nach dem mathematischen Schulunterricht muß man sich in der Tat die Vorstellung machen, daß das mathematische Denken in einem geschickten Aneinanderreihen von logischen Schlüssen und im Umformen von algebraischen Ausdrücken, also im wesentlichen aus kombinatorischen Leistungen bestehe. An dieser Anschauung ist nur soviel richtig, daß eine gewisse kombinatorische Geschicklichkeit in diesem Sinne dem Mathematiker nützlich ist, das eigentlich mathematische Denken liegt aber tiefer" (Betz, S. 71). Da sich ähnliche Anschauungen auch Mitteilungen von seiten produzierender Mathematiker[2]) entnehmen lassen, so scheint es auch berechtigt, ganz verschiedene Arten der Begabung vorauszusetzen für das mathematische Lernen in der Schule und für das, was man als höheres mathematisches Denken und Produzieren bezeichnet. Wie steht es nun mit der Begabung für die in der Schule behandelte Mathematik? Ist es richtig, wie man jetzt noch vielfach vor allem in Laienkreisen anzunehmen scheint, daß es für das Verständnis in der Mathematik in viel höherem Grade einer ursprünglichen Anlage bedarf als für das Verständnis in anderen Schulfächern?

„Die ganze Frage läuft schließlich darauf hinaus, ob man ein intelligenter Mensch sein kann, ohne auch nur eine Spur von mathematischem Verständnis zu besitzen, oder ob von dem intelligenten Menschen unbedingt ein gewisses Maß von mathematischem Verständnis zu fordern sei" (Betz, S. 71). Die letztere Frage wird von Betz durchaus bejaht. „Wenn man das Wort intelligent ganz im Sinne der Umgangssprache auffaßt,

1) W. Betz, Über Korrelation. Methoden der Korrelationsberechnung und kritischer Bericht über Korrelationsuntersuchungen aus dem Gebiete der Intelligenz, der Anlagen und ihrer Beeinflussung durch äußere Umstände. Beiheft 3 zur Zeitschr. für angewandte Psychol. 1911. (Zitiert als Betz).

2) Vgl. H. Fehr, Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. L'enseignement mathématique. 8. Année 1906. Die Enquête ist (unter Mitwirkung von Th. Flournoy und Ed. Claparède) auch als Sonderabdruck erschienen. Die 2. Auflage (Paris und Genf 1912) enthält auch einen Artikel Poincarés über „l'invention mathématique".

so daß es einen Menschen bezeichnet, der sich schnell auch in ihm sonst fremden Dingen zurechtfindet, der rasch begreift und 'logisch' denkt, dann wird man wohl nicht umhin können, von einem intelligenten Menschen zu verlangen, daß er gegenüber der heutigen deutschen Schulmathematik nicht völlig versage, sofern er sich ernstlich bemüht" (Betz, S. 71). Ich möchte mich dieser Ansicht von Betz anschließen. Dieser Anschauung zufolge glaube ich auch nicht, daß mit größerer Berechtigung von einer typischen a-mathematischen Begabung gesprochen werden darf wie von einer typischen a-philologischen oder a-historischen Begabung.[1]) Wenngleich wir über die Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen, damit ein mathematisches Denken möglich sei, im einzelnen noch im Unklaren sind, so betrachte ich doch die zuweilen herangezogene Analogie zwischen mathematischer Unbegabtheit und musikalischer Unbegabtheit oder sogar der Farbenblindheit als gänzlich verfehlt. Selbst aus dem schwächsten Hilfsschüler kann man bei geeigneter Behandlung doch noch manche rechnerische Leistung herauslocken, dem Farbenblinden vermag man in aller Ewigkeit keine Vorstellung einer Farbe zu verschaffen, dem gänzlich Unmusikalischen läßt sich bei aller Mühe nicht die einfachste Melodie zu Gehör bringen. Ich hege die Vermutung, daß das, was sich als eine gänzliche Unbegabtheit für Mathematik gibt, in Wirklichkeit meist als eine vollständige Interesselosigkeit für oder geradezu als eine Abneigung gegen die Mathematik anzusehen ist. Die folgenden Betrachtungen versuchen zu zeigen, daß wir mit Beziehung auf die Mathematik kleinere Begabungsdifferenzen anzunehmen haben, als die Unterrichtsresultate zunächst anzuzeigen scheinen, die auch in hohem Grade von Interessendifferenzen abhängen. Die deduktive Methode der Mathematik hat zur Folge, daß ein Nichtverstehen eines Beweises oder einer Beweisgruppe nicht nur einen — ich möchte sagen — lokalen Schaden zur Folge hat, sondern auch für das Verständnis alles dessen, was sich auf dem Nichtverstandenen aufbaut, sehr ernste Schädigungen nach sich zieht. Hat darum ein Schüler durch ein zeitweiliges Versagen seiner Kräfte oder durch Umstände, bei denen von einem eigenen Verschulden die Rede sein muß, eine Lücke in seinen Kenntnissen entstehen lassen, so kann sich dieselbe in der Mathematik als äußerst folgenschwer erweisen, während sie sich in anderen Disziplinen unter Umständen völlig der Beobachtung entziehen kann. Ist nun eine solche Lücke beim grundlegenden mathematischen Unterricht ent-

---

1) „Daß die Anlage zur Mathematik seltener sei als zu anderen Studien, ist bloßer Schein, der vom verspäteten und vernachlässigten Anfangen herrührt." Herbart, Umriß pädagogischer Vorlesungen, 3. Teil, 1. Abschnitt. — „So besitzt nach der Meinung aller Einsichtigen auch jeder normal begabte Schüler ein genügendes Maß geistiger Fähigkeiten, um dem mathematischen Unterrichte das nötige Verständnis entgegenzubringen." A. Pringsheim, Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Berichte der Kgl. Bayr. Akad. der Wissenschaften zu München, München 1904.

standen, so kann leicht als Mangel an Begabung ausgelegt werden, was sich bei näherem Zusehen erklärt eben aus einer solchen Lücke[1]).

Eine Lücke in den Kenntnissen kann unter Umständen als Folge der Interesselosigkeit des Schülers gegenüber dem mathematischen Unterricht entstehen. Es gibt zweifellos außerordentlich große Unterschiede in dem Interesse, welches einem Gegenstand von verschiedenen Individuen entgegengebracht wird. Theoretisch muß darum durchaus geschieden werden zwischen dem Interesse für ein wissenschaftliches Gebiet und der Begabung für dieses Gebiet. Die gewöhnliche Anschauung geht dahin, daß Begabung und Leistung proportional seien. Dabei ist aber auf die subjektive Stellungnahme zu dem betreffenden Gebiet noch gar nicht Bezug genommen. Unter dem Interesse für eine Sache wollen wir das persönliche von starken Gefühlen beeinflußte Verhältnis verstehen, welches zwischen einem Individuum und einem Gegenstand besteht.[2]) Dieses Verhältnis kann die verschiedensten Formen annehmen. Man kann sich zu einem Gegenstand hingezogen fühlen, man kann von ihm ergriffen sein; bei einer weiteren Steigerung des Interesses kann sich schließlich der Gegenstand unser so bemächtigen, daß wir uns nicht mehr von ihm losmachen können. Je nach der Höhe des vorliegenden Interesses zeigen sich nun auch dessen Folgen in ihren mannigfachen Stärkegraden, die wir jetzt zu charakterisieren haben. Bei Beschäftigung mit Gegenständen, die unser Interesse besitzen, stellt sich nicht so leicht das Gefühl der subjektiven Ermüdung ein wie bei einer Beschäftigung mit gleichgültigen oder gar nicht zusagenden Dingen. Ja, weit davon entfernt, sich dergestalt ermüdet zu fühlen, kann man bei der Arbeit an interessierenden Dingen in eine froherregte Stimmung geraten. Das hat zur Folge, daß man nicht nur gern zur festgesetzten Arbeitszeit zu dem Gegenstand zurückkehrt, sondern daß auch in der Zwischenzeit, dann, wenn wir uns eigentlich der Zerstreuung hingeben, die liebgewordenen Gedankenreihen immer wieder anklingen, wir uns ihnen immer wieder mehr oder weniger intensiv zuwenden.[3]) Dieses

1) Ich darf hier vielleicht auf einige Erfahrungen hinweisen, die ich bei der Erteilung von Privatunterricht in Mathematik mit Schülern gemacht habe. Ich hatte eine ganze Reihe von Schülern zu unterrichten, welche die Mathematik „nicht verstanden". Ich ging nun in solchen Fällen nie auf den Wunsch der Eltern oder Schüler selbst ein, dort zu beginnen, wo die Schüler gerade im Unterricht standen. Unbekümmert um die laufenden häuslichen Aufgaben begann ich die Mathematik ganz von vorn, um die Lücken zu entdecken und auszufüllen. Vielfach schwand nun die „Unbegabtheit" für Mathematik. Die Wirkung des Verfahrens rechtfertigte es.

2) Zum Interesse sind beispielsweise auch die wissenschaftliche Neugierde für die Tatsachen eines Untersuchungsgebietes sowie das aufmerksame Beachten derselben zu rechnen. — Auf die z. T. wesentlich abweichende Auffassung des Interesses und seiner Bedeutung für den Unterricht, die bei anderen Pädagogen, z. B. bei Herbart, vorzufinden ist, soll hier nicht eingegangen werden.

3) Nach der Anschauung der Physiologie bedeutet jede geistige Arbeit einen Verbrauch der Energie des Organismus. Darum darf man aus einem Ausbleiben des subjektiven Gefühls der Ermüdung in keiner Weise schließen, daß kein Energie-

Geläufigwerden von Gedankenreihen und ihre durch die stetige Übung eintretende Mechanisierung kann aber in der Bedeutung für die Leistung kaum überschätzt werden. Gewisse psychologische Erfahrungen sprechen dafür, daß Gehirnprozesse, die sich, ohne von Bewußtsein begleitet zu sein, im Anschluß an Bewußtseinsvorgänge abspielen, für unser gesamtes Bewußtseinsleben von großer Bedeutung werden können. Diese Vorgänge im „Unbewußten" mögen für die Leistungen, welche Individuen aufzeigen, die sich in der vorstehend geschilderten Weise mit einem sie interessierenden Gegenstand beschäftigen, von ganz besonderer Wichtigkeit sein. Es kann nicht anders sein, als daß die Leistungen eines Individuums, welches sich zufolge eines starken Interesses in der angegebenen Weise mit einem Gegenstand beschäftigt, viel höhere sein müssen als die Leistungen eines Individuums, welches bei sonst gleicher Begabung weniger Interesse zeigt. Ja, es ist sogar sehr wohl möglich, daß eine mäßige Begabung in Verbindung mit einem hohen Interesse weit höhere Leistungen zutage fördert als eine relativ hohe Begabung, die mit keinem oder nur geringem Interesse verknüpft ist. So könnte also ein Schüler, der kein Interesse für die Mathematik besitzt, ohne Defekt in denjenigen geistigen Operationen, die beim mathematischen Denken ins Spiel kommen, also ohne eigentlich eine schlechte mathematische Begabung zu besitzen, viel weniger leisten als ein für die Mathematik gleich oder gar weniger Begabter, der mehr Interesse für die Mathematik besitzt. Würde man auf Grund einer Beurteilung der Leistungen dem ersteren Schüler eine geringere Begabung zugesprochen haben, so hätte man eine falsche Diagnose gestellt. Aus den vorstehenden Ausführungen geht hervor, daß eine völlige Interesselosigkeit für Mathematik es zu keinen irgendwie befriedigenden Leistungen kommen lassen kann. Nach meinen Erinnerungen aus der Schulzeit scheint nicht nur mit einer solchen Interesselosigkeit, sondern sogar mit einem Abscheu gegen die Mathematik bei manchen Schülern zu rechnen zu sein[1]).

Man könnte den vorstehenden Ausführungen gegenüber einwenden, daß wir das Problem der mathematischen Begabung durch sie um keinen Schritt seiner Lösung näher gebracht haben. Dadurch, daß wir zwei

---

verbrauch stattgefunden habe. Der Eintritt des Ermüdungsgefühls trägt den teleologischen Charakter eines Warnungszeichens, welches einer irreparablen Ermüdung (Erschöpfung) vorbeugen soll. Bleiben nun die subjektiven Symptome der Ermüdung aus, so steigt die Gefahr der Überarbeitung. Tatsächlich beobachten wir nicht selten gerade in dem Falle eine Überanstrengung mit plötzlichem Zusammenbruch, wo der Arbeitsstoff den Menschen ganz erfaßt hatte. Wir kommen auf die Ermüdungsphänomene unten näher zu sprechen.

1) Wie in der Mathematik, so ist auch mit Beziehung auf andere Wissenszweige zwischen Begabung und Interesse zu scheiden. Nur scheint die Mathematik mit ihrem formalen Charakter denjenigen, der sich ihr überhaupt nähern will, in einer viel entschiedeneren Weise zu einer Stellungnahme zu zwingen, als es die anderen Wissenschaften tun. Darum gibt das Interesse bei ihr vielleicht den Ausschlag für die Leistungen, die man in ihr erwarten kann.

voneinander zu trennende Quellen der mathematischen Leistung aufgewiesen haben, hätten wir die Angelegenheit nur noch weiter verwickelt, denn nun sei nicht nur nach dem Ursprung der mathematischen Anlage, sondern auch des mathematischen Interesses zu fragen. Darauf erwidern wir, daß ein Nachweis dieser beiden tatsächlich vorhandenen Quellen der Leistung im Interesse einer exakteren Forschung nicht zu umgehen war, und daß einer Forschung der Zukunft nichts weiter übrig bleibt, als dem Ursprung beider nachzugehen. Vorderhand scheint es mir, ohne zu schlecht begründeten Hypothesen zu greifen, schlechterdings unmöglich, irgendeine Erklärung dafür zu geben, daß sich bei verschiedenen Individuen bei einem Bekanntwerden mit einem Wissensgebiet eine ganz verschieden starke Hinneigung einstellt. Die Erfahrung zeigt uns, daß sich ein tiefes Interesse für eine Disziplin einstellen kann, ohne daß dafür auch eine besondere Begabung zu konstatieren wäre. Ein klassisches Beispiel bietet hier Goethe, der wie kaum ein anderer Interesse für die Erscheinungen der Optik hatte, ohne doch in besonderem Maße für ihre wissenschaftliche Behandlung begabt gewesen zu sein. So gibt es auch viele Menschen, die für die Mathematik Interesse haben und ihre Schönheit kennen lernen möchten, ohne doch eine höhere Begabung für sie mitzubringen.[1])

Werden durch den Nachweis von der Bedeutung des Interesses, dieses irrationalen Faktors, die Erwartungen nicht gemindert, die man auf die Wirksamkeit didaktischer Maßnahmen in der Mathematik setzen darf? Da ist zunächst zu sagen, daß, wenn auch manche Erfahrungen, besonders die in extremen Fällen gemachten, die Annahme eines angeborenen Interesses fast unumgänglich machen, andere Erfahrungen dafür sprechen, daß ein Interesse auch im Laufe des Lebens erworben werden kann. Es kommt vor, daß wir einer Sache, die uns zunächst ganz kalt ließ, auf einmal eine interessante Seite abzugewinnen vermögen. Hier kann dann das Interesse, welches wir zunächst nur für eine Seite der Sache haben, auf das Ganze überstrahlen. Wenn sich ein Schüler nicht für die „reine" Mathematik interessiert, so braucht sie ihm doch nicht gleichgültig zu sein in der Anwendung auf die Naturwissenschaften oder gar auf die Praxis. Die Mathematik wird durch so zahlreiche Fäden mit anderen Wissenschaften und der Praxis des Lebens verknüpft, daß man immer damit rechnen darf, der Mathematik das Interesse des Schülers auf dem Umweg über dieses oder jenes den Schüler interessierende Gebiet zu gewinnen.[2]) Tatsächlich ist es ja immer das Kriterium einer guten

1) Pringsheim hat in seiner oben erwähnten Untersuchung auf die interessante Tatsache aufmerksam gemacht, daß Novalis der Mathematik ein Lob von religiös-schwärmerischem Charakter gab („reine Mathematik ist Religion"). Dem hohen Interesse des Romantikers für Mathematik, auf welches dieses Lob hinweist, stand durchaus nicht die entsprechende mathematische Begabung zur Seite.

2) M. Gebhardt hat in Bd. III, Heft 6 dieser IMUK-Ablandlungen (Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands)

Methode, mehr noch eines guten Pädagogen gewesen, eine Sache dem Zögling hinreichend anziehend zu machen. Der Zug zum Praktischen, zur Lebensnähe und zum Anschaulichen, der durch die moderne Pädagogik des mathematischen Anfangsunterrichts hindurchzieht, zeigt auch an, daß man sich den natürlichen Interessenrichtungen des jugendlichen Schülers anzupassen strebt.

Ich lasse nun einige Resultate der Korrelationsuntersuchungen folgen, die sich auf die Anlage für spezielle Leistungen in der Mathematik beziehen. Den Bericht über eine Arbeit von Brown erstatte ich nach Betz, da mir die Originalarbeit nicht zugänglich war. „Von Brown wurde der erste Versuch gemacht, die Korrelationen innerhalb des mathematischen Denkens an 83 Schülern der mittleren Klassen einer englischen höheren Schule festzustellen. Die Schüler hatten alle den gleichen Lehrgang durchgemacht, und es wurden ihnen je eine Reihe schriftlicher Aufgaben aus der Geometrie, der Arithmetik und der Algebra gegeben. Die Lösungen wurden nun mit Punkten bewertet und gruppiert, je nachdem verschiedene intellektuelle Prozesse in ihnen vorkamen. Brown unterscheidet neun solcher Prozesse, z. B. Gedächtnis für Definitionen, für Konstruktionen, für frühere Sätze, Fähigkeit im Spezialfall allgemeinere Beziehungen zu finden, Rechenfehler, Gedächtnis für Regeln usf." (Betz, S. 75). Versteht man unter dem Korrelationswert 1 beziehungsweise 0 das Vorhandensein einer völligen Korrelation beziehungsweise das Fehlen jeder Korrelation, so haben sich bei Brown die Korrelationen der Leistungen in Algebra und Arithmetik zu 0,76, in Geometrie und Arithmetik zu 0,28 und in Geometrie und Algebra zu 0,18 ergeben. Ich möchte nicht versäumen, darauf hinzuweisen, daß nach Betz die Brownsche Arbeit an einer gewissen Undurchsichtigkeit des Verfahrens leidet. Der geringe Korrelationswert Geometrie-Algebra scheint in guter Harmonie mit der Tatsache zu stehen, daß bei produzierenden Mathematikern eine spezielle Begabung für Geometrie und für Analysis getrennt vorzukommen scheint.

Von M. Lobsien liegen zwei Untersuchungen über die Korrelation zwischen dem Zahlengedächtnis und den elementaren Rechenleistungen vor, von denen mir nur eine zugänglich war.[1]) Er formuliert das Resultat dieser Untersuchung, an deren Methode, worauf schon Betz hingewiesen hat, manches auszusetzen ist, in folgenden beiden Sätzen. „Auch das elementare Rechnen ist nicht in erster Linie verknüpft mit der Energie des Zahlengedächtnisses, sondern andere psychische Funk-

darauf hingewiesen, welch ausgezeichnete Dienste für den angegebenen Zweck auch Exkursionen in das Gebiet der Geschichte der Mathematik leisten können. „Für mich ist es eine Erfahrungstatsache, daß bei mathematisch Unbegabten und vor allem auch bei der nicht geringen Anzahl von mathematisch Böswilligen Lust und Liebe bis zu einem gewissen Grade geweckt werden können, wenn man die Mathematik nebenbei auch geschichtlich behandelt." (Gebhardt, a. a. O., S. 106.)

1) Korrelationen zwischen Zahlengedächtnis und Rechenleistung. Zeitschr. für pädag. Psychol., Bd. 12, 1911.

tionen werden mit ihm in größerer, innigerer Beziehung stehen" (S. 59). „Für die elementaren Rechenfunktionen kommt fast ausschließlich das akustische Zahlengedächtnis in Frage" (S. 60).

Ich komme noch auf eine Korrelation zu sprechen, die nach Lemaître (S. 207ff.) zur Zeit der Pubertätsentwicklung zwischen den Leistungen in der Mathematik und in anderen Unterrichtsfächern zu bestehen scheint. Es hat sich mehr und mehr die Erkenntnis Bahn gebrochen, daß die Pubertätsentwicklung eine fast revolutionäre Umgestaltung des gesamten psychischen Habitus besonders beim männlichen Geschlecht nach sich ziehen kann. Es scheint eine lebhafte Entwicklung der feineren Elemente des Gehirns und speziell der Hirnrinde zur Zeit der Pubertät stattzufinden.[1]) Hierin haben wir wohl die physiologischen Grundlagen für die beobachtbaren psychischen Umwälzungen dieser Zeit zu sehen. Das Denken des Knaben gewinnt mit Eintritt der Pubertätsentwicklung eine größere Abstraktheit und wird mehr als vordem durch normative Gesichtspunkte geregelt. Nach neueren physiologischen Anschauungen, die sich auf die Bedeutung der Sekretion innerer Organe für die Funktion des Organismus beziehen, ist es sehr wohl möglich, daß die von den Geschlechtsdrüsen abgesonderten Säfte den Anstoß zu der bei Beginn der Pubertät eintretenden Veränderung in körperlicher und geistiger Beziehung geben. An eine derartige Einwirkung ist vielleicht auch zu denken, wenn man eine Erklärung für eine von Lemaître mitgeteilte Beobachtung geben will. Bei 23 Knaben im Alter von 9–13½ Jahren, bei denen Lemaître Masturbation festgestellt hatte, wurden die Leistungen in Französisch, Lateinisch, Deutsch, Geographie und Arithmetik ermittelt. Es ergab sich, daß diese Schüler die besten Leistungen in Arithmetik, die schlechtesten in Geographie zeigten. Lemaître fragt, woher kommt dieses überraschende Versagen in Geographie und die nicht weniger überraschende Überlegenheit in Arithmetik. Er antwortet darauf folgendes: „Die Geographie wendet sich ohne Zweifel an die Überlegung, mehr aber noch an das Wortgedächtnis und topographische Gedächtnis. In unserem Land tritt zwischen dem 14. und 15. Lebensjahr ein Augenblick ein, wo das Wortgedächtnis plötzlich der abstrakten Überlegung Platz macht: das erstere nimmt schnell ab, während das letztere steigt. Was geht nun dann bei jenen vor sich, welche schlechte Gewohnheiten haben? Vorzeitig reif geworden, hat ihr Wortgedächtnis und topographisches Gedächtnis vor der Zeit einen starken Niedergang erfahren, von dem es sich später nur auf Kosten größerer Anstrengungen erholen wird, ohne daß von seiten der Vernunft eine gleich-

1) Nach A. Cramer (Pubertät und Schule. S. 4. Schriften des deutschen Ausschusses für den mathem. und naturwiss. Unterricht. Heft 4. Teubner 1910) wäre sogar anzunehmen, „daß gerade in der Pubertät die l e t z t e Entwicklung der feineren Elemente des Gehirns und speziell der Hirnrinde vor sich geht". Dem widersprechen aber Ausführungen von L. Edinger in „Die Naturwissenschaften" 1, 1913, S. 442. „Die Hirnrinde reichert sich übrigens bis in die 50er Lebensjahre immer mehr mit Fasern an."

wertige Kompensation stattgefunden hätte, da die Vernunft innerhalb des Normalen bleibt, ohne es zu überschreiten" (Lemaître, a. a. O., S. 209f.).

Ich glaube, daß das kritische Alter der Pubertätsentwicklung in pädagogischer Beziehung immer noch nicht hinreichend berücksichtigt wird. Es ist nicht die Aufgabe dieser Zeilen, für die Behandlung dieser schwierigen Frage im einzelnen Vorschläge zu machen. Darf ich für die Didaktik der Mathematik eine Richtlinie andeuten, deren Innehaltung sich zu empfehlen scheint, so ist es die, vor und während der Pubertätsentwicklung nicht zu hohe Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit zu stellen und mehr einen die Anschauung berücksichtigenden Unterrichtsgang einzuschlagen.[1]).

Die Arbeitsweisen der Mathematiker.[2]) Die verschiedenen Interessenrichtungen, die innerhalb der Mathematik bestehen, treten beim Schüler nicht mit der Deutlichkeit in die Erscheinung wie beim produzierenden Mathematiker. Nach Poincaré hätte man wesentlich zwischen zwei verschiedenen Interessenrichtungen der Mathematiker zu unterscheiden, die einen sind Geometer, die anderen bevorzugen die Analysis. Die verschiedenen Interessenrichtungen bedingen auch eine entsprechende Verschiedenheit der Methoden. „Nicht der zu bearbeitende Stoff veranlaßt sie (die Mathematiker) zur einen oder anderen Methode. Wenn man die einen oft Analytiker, die anderen Geometer nennt, so bleiben die einen Analytiker, selbst bei geometrischen Arbeiten, während die anderen auch dann noch Geometer sind, wenn sie sich mit reiner Analyse beschäftigen. Es ist die Anlage des Geistes, die sie zu Logikern oder intuitiven Naturen macht, und sie können sich nicht davon befreien, wenn sie einen neuen Gegenstand vornehmen. – Es ist auch nicht die Erziehung, die in ihnen die eine der beiden Richtungen geweckt und die andere erstickt hat. Man wird zum Mathematiker geboren, nicht erzogen und allem Anschein nach wird man auch zum Geometer oder zum Analytiker geboren."[3]) Nach Poincaré unterscheiden sich die beiden von ihm unterschiedenen Typen von Mathematikern auch in der Verwendung der Denkmittel. Die Geometer lieben es, von der äußeren Anschauung auszugehen oder in räum-

1) Man vgl. mit diesen Ausführungen, wie Höfler (S. 52 Anm.) es bekämpft, Knaben von 12 Jahren schwierige (abstrakte) geometrische Beweise beizubringen. „Und ist es denn nicht einem gefürchteten Kindeslaster ähnlich, wenn man vorzeitige intellektuelle Leistungen gewaltsam hervorlockt, wiewohl der seelische Organismus eines 10–13jährigen für sie noch nicht reif ist?!" – Auch Griggs fürchtet, daß durch einen zu früh einsetzenden arithmetischen Unterricht die plastische (anschauliche) Fähigkeit des Zöglings geschädigt wird, was seiner ganzen Entwicklung nachteilig werden kann. Er erinnert daran, daß Negerkinder bei einem frühzeitig beginnenden Unterricht bis zur Pubertät annähernd dasselbe leisten wie weiße Kinder, daß sie dann aber plötzlich versagen. Dagegen erreichen Neger, die bis zum 18. oder 20. Lebensjahr ungebildet bleiben, gute Erfolge auf dem College (Griggs, a. a. O., S. 359).

2) Vgl. hierzu auch Wernicke, S. 56ff.

3) H. Poincaré, a. a. O., S. 8f.

lichen Bildern zu denken. Zu ihnen rechnet Poincaré Klein, Bertrand, Riemann und Lie. Bei den Analytikern scheint das Denken durch andere Elemente getragen zu werden, es vollzieht sich mehr durch Begriffe als durch anschauliche Elemente, vermutlich sind es Wortvorstellungen, welche bei ihnen Träger der Begriffe werden. Zu den Analytikern zählt Poincaré Männer wie Méray, Hermite, Weierstraß und Frau Kowalewski.[1]) Die Analytiker werden ihrer Arbeitsweise nach gelegentlich auch als Logiker, die Geometer als Intuitive bezeichnet. Klein hat schon früher drei Typen von Mathematikern nach ihren verschiedenen Arbeitsweisen unterschieden.[2]) Von den Logikern und Intuitiven trennt er die „Formalisten", zu denen er z. B. Gordan, Cayley und Sylvester rechnet. Die Formalisten versuchen zu neuen Erkenntnissen zu gelangen, indem sie von den Formeln ausgehen und diese in geschickter Weise umbilden.

Man hat nun auch den Versuch gemacht, die beiden Typen von Mathematikern in Beziehung zu setzen zu der oben behandelten Vorstellungstypik. Man neigt dazu, dem Analytiker den akustisch-motorischen, dem Geometer den visuellen Typus zuzusprechen. Gelegentliche Äußerungen von Mathematikern scheinen dieses Verhalten zu rechtfertigen. So erklärt z. B. G. Cantor, der Historiker der Mathematik, in der Fehrschen Enquête: „Für die Geometrie fehlt mir eine gewisse Vorstellung des Raumes."[3]) Wollte man überhaupt die mathematischen Typen und Arbeitsweisen mit elementaren Differenzen des Vorstellens in Verbindung bringen, so würde hier auch das topische Vorstellen nicht außer acht zu lassen sein. Ich hege indessen die Vermutung, daß die bis jetzt von der experimentellen Psychologie untersuchten elementaren Vorstellungsweisen überhaupt keine derartige unmittelbare Bedeutung für die mathematischen Typen und Arbeitsweisen besitzen. Solange nicht in einwandfreien Experimenten eine Überlegenheit der sogenannten Geometer in der Visualisationsfähigkeit nachgewiesen worden ist, d. h. solange nicht gezeigt worden ist, daß sie gerade in denjenigen Leistungen, die man bislang als Kriterien der Visualität gedeutet hat, über den Analytikern

1) Man trifft gelegentlich auf die Behauptung, daß Verschiedenheiten in der Richtung der mathematischen Begabung in Verbindung mit Rassenunterschieden vorkämen, der Art, daß z. B. die jüdische Rasse mehr zum Analytischen, die germanische mehr zum Geometrischen neige. Vielleicht trifft diese Behauptung mit Beziehung auf die vorzugsweise analytische Begabung der jüdischen Rasse zu.

2) F. Klein, Lectures on Mathematics. The Evanston Colloquium (abgehalten bei Gelegenheit der Chicagoer Weltausstellung 1893). New York 1894. S. 2.

3) Inwiefern man Mitteilungen über psychische Vorgänge, die man bei Gelegenheit von Enquêten erhält, mit Vorsicht aufzunehmen hat, das hat Müller, der die Methode der Selbstbeobachtung, die bei derartigen Enquêten meist verwendet wird, als Methode der vermeintlichen Reminiszenzen bezeichnet, im einzelnen dargelegt (Müller I, S. 143ff.). — Nach der von Toulouse (Paris 1913) vorgenommenen Untersuchung Poincarés, die leider fast ganz in Äußerlichkeiten stecken bleibt, war Poincaré von akustisch-motorischen Typus. Hierzu teilt mir Herr Geheimrat Klein mit, Poincaré habe sich selbst ihm gegenüber als visuell-motorisch bezeichnet.

stehen, scheint es die wissenschaftliche Vorsicht zu gebieten, die Frage nach dem Zusammenhang von Vorstellungstypus und Arbeitsweise des Mathematikers in der Schwebe zu lassen.

Oben wurde die Vermutung ausgesprochen, daß selbst eine mittlere Begabung für einen Gegenstand bei hohem Interesse zu bedeutenden Leistungen verhelfen kann. Hervorragende wissenschaftliche Leistungen wird man selten beobachten, wenn nicht hohe Begabung mit hohem Interesse für einen Gegenstand gepaart ist. In der Enquête Fehrs waren auf die Frage, welches der Anteil des Zufalls oder der Eingabe bei der Arbeit sei, alle einig „über die Notwendigkeit des Studiums, der Reflexion, der Geduld, kurz der angestrengten Arbeit, um die Geschenke des Zufalls oder der Inspiration vorzubereiten oder zu ermöglichen". Ich sehe nun die eigentliche Wurzel für die Ermöglichung einer derartigen angestrengten Arbeit in dem Vorhandensein eines hervorragenden Interesses. Nur dieses garantiert die notwendige ununterbrochene Beschäftigung mit den Problemen. „Die mathematischen Entdeckungen entspringen nie spontaner Erzeugung." „Sie setzen immer einen Boden voraus, der durch bewußte oder unbewußte Arbeit wohl präpariert ist" (Fehrs Enquête).

Wenn sich nach einer jahrelangen erfolglosen Beschäftigung mit demselben Problem der Weg zu dessen Lösung oder die Lösung selbst plötzlich zu einer Zeit einstellt, wo man sich nicht gerade mit dem betreffenden Problem abgab, so hat das zunächst natürlich etwas Überraschendes.[1]) Derartige Erlebnisse, die übrigens keineswegs nur bei der mathematischen Produktion vorkommen, können leicht den Eindruck übernatürlicher Eingebung machen, weil man sich gerade in dem Augenblick der Eingebung gar nicht bewußterweise um die Lösung abmühte. Vom psychologischen Standpunkt aus erscheinen sie weniger rätselhaft; ist doch von ihm aus betrachtet eine Leistung gar nicht allein als ein Erfolg des augenblicklichen, aktuellen Nachdenkens, sondern auch jener ganzen Summe von Anstrengungen anzusehen, die das Zentralnerven-

1) Ein ausgezeichnetes Beispiel hierfür findet sich in einem von Gauß an den Astronomen Olbers gerichteten Brief. (Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke, 2. Band, Briefwechsel zwischen Olbers und Gauß, Berlin 1900, S. 268f.). „Seit vier Jahren wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht einen oder den anderen vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte – besonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen – aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst; ich selbst wäre nicht imstande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wußte, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte – und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen." – Auch Helmholtz hat auf das plötzliche Auftreten weittragender wissenschaftlicher Gedanken, denen lange anstrengende Arbeit vorherging, in der bekannten Tischrede bei der Feier seines 70. Geburtstages hingewiesen. Helmholtz' Vorträge und Reden, I. Band, 4. Aufl., Braunschweig 1896. Schließlich sei noch auf die entsprechenden Beobachtungen Poincarés verwiesen, die sich in dem Anhang der Fehrschen Enquête befinden.

system in bewußter und vielleicht mehr noch in unbewußter Arbeit an jenes Problem gewendet hat. Für ein Gehirn, welches eine solche Arbeit hinter sich hat, bedeutet das Aufblitzen einer Erkenntnis nicht mehr eine gänzlich wunderbare Eingebung. Mit diesen Ausführungen soll natürlich die Notwendigkeit einer näheren Untersuchung über das Zustandekommen derartiger Leistungen nicht geleugnet werden.

Nach Fehrs Enquête zeigte sich der Sinn für Mathematik ziemlich früh, in 78 von 93 Fällen vor dem 16. Lebensjahre. Manche der Befragten gaben an, daß sich ihr Interesse sehr früh den Zahlen zuwandte, bei einem mit $3\frac{1}{2}$ Jahren. Wir machen aber auch bei großen Zahlenvirtuosen die Beobachtung, daß ihr Interesse für die Zahlen in jungen Jahren erwacht, ohne daß sie auch nur mittelmäßige Mathematiker würden.

Was die Erblichkeit der Anlage für Mathematik anbetrifft, „so reduzieren sich die positiven etwas sicheren Fälle auf 20 gegen mehr als 50 negative oder zweifelhafte Fälle, und nur in 7–8 Fällen ist in der Verwandtschaft ein Mathematiker von Beruf zu verzeichnen." Auch in den letzteren Fällen ist immer noch „mit einem zufälligen Zusammentreffen günstiger äußerer Umstände zu rechnen"[1]) (Fehrs Enquête). Dort, wo eine Vererbung der mathematischen Anlage angenommen werden kann, kommt die mathematische Mitgift in der Regel von der Vaterseite.

e) Die Begabungsdifferenzen für die Mathematik in sexueller Beziehung.

Der hervorstechendste Zug an der Reform[2]) des höheren Mädchenschulwesens in Preußen durch die Neuordnung vom August 1908 ist zweifellos die Betonung und der Ausbau des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Während die früheren „höheren Mädchenschulen" sich mit den bescheidensten mathematischen Ansprüchen begnügten, werden jetzt in den ihnen entsprechenden „Lyceen" der heranwachsenden weiblichen Generation viel höhere Leistungen in der Mathematik zugemutet. Die Ausbildung in der Mathematik erfährt in den wissenschaftlichen Klassen und der Seminarklasse des Oberlyzeums sowie in den Studienanstalten eine solche Steigerung, daß man sie als Äquivalent der mathematischen Ausbildung der Abiturienten höherer Schulen betrachtet und dementsprechend die Abiturientinnen der genannten Anstalten zum Studium der Mathematik an der Universität zuläßt.

Bei dieser Reform in Preußen, der ähnliche in den meisten anderen deutschen Bundesstaaten entsprechen, ist also scheinbar vorausgesetzt worden, daß die Mädchen in der in der Schule behandelten Mathematik dasselbe leisten können wie die Knaben, daß es dementsprechend auch

1) Man wird indessen wohl nicht geneigt sein, den Reichtum der Familie Bernouilli an mathematischen Talenten allein auf einen Zufall zurückzuführen.

2) Vgl. hierzu J. Schröder, Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands. Diese IMUK-Abhandlungen, Bd. I, Heft 5. Teubner 1913.

keine hervorstechenden Begabungsdifferenzen für die Schulmathematik in geschlechtlicher Beziehung gebe, die eine besondere Berücksichtigung verdienten. Der Umstand, daß den Mädchen zur Erreichung des Unterrichtszieles der Studienanstalten, die ihnen in erster Linie den Zugang zur Universität eröffnen sollen, ein Jahr mehr zugestanden wird als den Knaben für die Absolvierung der höheren Schulen, ist demgegenüber bedeutungslos, weil es sich hierbei um eine allgemeinere die sexuelle Entwicklung berücksichtigende schulhygienische Maßnahme handelt, die mit dem Unterricht in der Mathematik nicht in engerer Beziehung steht.

Hier möge nun einmal gefragt werden, ob irgendein wesentlicher Unterschied in der Begabung für Mathematik zwischen dem männlichen und dem weiblichen Geschlecht besteht? Wir stellen hier die allgemeinere Frage und begnügen uns nicht damit, zu fragen, wie die Mädchen zur Schulmathematik stehen. Notwendig ist die größere Allgemeinheit der Fragestellung nicht, da wir oben bereits auseinandersetzten, daß man zwischen der Befähigung zur Schulmathematik und zur höheren, vor allen Dingen zur Produktion in der Mathematik wohl scheiden muß. Die Frage nach der Befähigung der Frauen zur mathematischen Produktion könnte möglicherweise verneint werden, ohne daß damit auch schon die Nichtbefähigung der Mädchen für die Schulmathematik ausgesprochen wäre.

Wenn man überhaupt die Leistungs- und Begabungsdifferenzen, die in sexueller Hinsicht bestehen, untersuchen will, so muß man sich der ungewöhnlich großen und zahlreichen Schwierigkeiten wohl bewußt sein, die sich einer Erforschung dieser Dinge in den Weg stellen. Vorgefaßte Meinungen, die von starken Gefühlen geschaffen sind und getragen werden, lassen es hier, wo man nicht umhin kann, theoretische Grundlagen der modernen Frauenbewegung zu berühren, auch beim besten Willen nicht so leicht zu einem unparteiischen Urteil kommen. Aber auch abgesehen davon kann man sich bei der Untersuchung der sexuellen Differenzen in den wissenschaftlichen Leistungen und Begabungen zurzeit nur auf wenig wirklich zuverlässiges Material stützen.

Die folgenden Betrachtungen seien eingeleitet mit einigen Bemerkungen von G. Heymans[1]), in denen die eigentlich selbstverständliche, aber als solche nicht immer berücksichtigte Tatsache betont wird, daß wir es bei den psychischen Geschlechtsunterschieden immer nur mit statistischen Unterschieden zu tun haben. „Wenn also behauptet wird, daß auf einem bestimmten Gebiete, z. B. demjenigen der Befähigung zur wissenschaftlichen Arbeit, die Frauen vor den Männern zurückstehen, so will das nicht sagen, daß keine Frau, und ebensowenig, daß jeder Mann zu wissenschaftlicher Arbeit befähigt sei, sondern nur, daß die Zahl der

1) G. Heymans, Die Psychologie der Frauen. Heidelberg 1910. Diese Arbeit ist wegen ihrer vorsichtigen Stellungnahme für eine erste Orientierung zu empfehlen. Weniger eingehend ist die kleine Arbeit von A. Wreschner, Vergleichende Psychologie der Geschlechter. Zürich 1912.

Befähigten und das Maß der durchschnittlichen Befähigung bei den Männern größer sei als bei den Frauen. Gewiß haben eine Sophie Germain und eine Sonja Kowalewski mehr von der Mathematik verstanden und mehr in der Mathematik geleistet als die übergroße Mehrzahl der Männer; wahrscheinlich sind sie auch besser als die meisten Männer zur Mathematik befähigt gewesen; die Frage ist aber, ob es nicht viel mehr Männer als Frauen gegeben hat, welche diesen Grad der Befähigung besessen haben. Man soll eben nicht die genialsten Frauen mit dem Durchschnittsmanne, sondern entweder die genialsten Frauen mit den genialsten Männern, oder die Durchschnittsfrau mit dem Durchschnittsmann vergleichen" (Heymans, S. 107f.).

Wir beginnen diesem Vorschlag entsprechend unsere Untersuchung mit der Prüfung der besten von Frauen in der Mathematik gezeigten Leistungen und stützen uns dabei auf die wertvolle Zusammenstellung des in Betracht kommenden Materials in einer Schrift von W. Lorey.[1])

Die auch durch ihre sonstigen Lebensschicksale bekannteste Mathematikerin ist die Russin S. Kowalewski. Ich darf hier vielleicht die Beurteilung hersetzen, die sie von seiten Stäckels in einem an Lorey gerichteten Brief erhalten hat und die sich hauptsächlich bezieht auf die von ihr im Jahre 1889 gelöste Preisarbeit der Pariser Akademie. „Ich bin überzeugt, daß die Problemstellung bei der Preisarbeit, ohne Zweifel der bedeutendsten Leistung der Kowalewski, von Weierstraß herrührt, daß aber in der Durchführung, die keineswegs leicht war, diese recht selbständig gearbeitet hat; der Vater der Arbeit war Weierstraß, die Mutter die Kowalewski. Es ist jedoch zu betonen, daß solche Durchführungen eine wissenschaftliche Leistung darstellen, die erheblich über dem Durchschnittsniveau der Mathematiker liegt. Jedenfalls bleiben alle Arbeiten der Kowalewski, wenn sie auch zeigen, daß sie ein großes analytisches Talent besaß, doch in dem Gebiete der Weierstraßschen Ideen" (Lorey, S. 17).

Hiernach ist das Urteil berechtigt, daß an den höchsten Leistungen in der Mathematik Frauen nicht beteiligt sind. Was die sonstige Geeignetheit der Frau zum mathematischen Studium angeht, so scheinen hier nach den bisherigen, allerdings nicht sehr zahlreichen Erfahrungen (Lorey, S. 17ff.), die Verhältnisse für die Frauen günstiger zu liegen. Wir verweisen hier an erster Stelle auf Grace Chisholm Young, „die erste Frau, die regelrecht an einer preußischen Universität die Doktorprüfung bestanden hat, und zwar magna cum laude" (Lorey, S. 19). Nach ihrer Promotion veröffentlichte sie zusammen mit ihrem Mann zwei umfangreiche Werke, von denen das eine, pädagogischen Inhalts, bereits oben genannt worden ist. Das andere: The theory of sets of points, ist „ein streng wissenschaftliches Werk, das auf dem neuerschlossenen Gebiet

1) W. Lorey, Die mathematischen Wissenschaften und die Frauen. Teubner 1909. Sonderabdruck aus dem 8. Jahrgang der Zeitschrift „Frauenbildung".

der Mengenlehre von großer Bedeutung ist" (Lorey, S. 19). Es verdient Beachtung, daß eine Frau Mitherausgeberin des American Journal of Mathematics ist: Fräulein Charlotte A. Scott, Professor der Mathematik an dem Bryn Mawr College bei Philadelphia. Wegen anderer Frauen, die sich in letzter Zeit in der Mathematik hervorgetan haben, muß hier auf Loreys Schrift verwiesen werden. Es erscheint nun aber Lorey zweifelhaft, „ob sich in künftiger Zeit mehr Frauen finden werden, die eine solche mathematische Begabung haben, daß sie zu eigentlichem Studium der mathematischen Wissenschaften mit produktivem Erfolge übergehen können". Der hier für die Mathematik angedeutete Mangel an Produktivität ist fast von allen, die sich mit der Psychologie der Frau beschäftigt haben, auch für andere Wissenszweige behauptet worden. Man wird wohl erst noch Erfahrungen darüber sammeln müssen, wie sich die Leistungen der Frauen unter den völlig veränderten Bedingungen ihres Schaffens gestalten werden, um zu einer einwandfreien Beurteilung derselben zu gelangen.

Heymans glaubt die niedrigen Leistungen der Frau in der Wissenschaft mehr noch als auf mangelnde Begabung auf andere Faktoren zurückführen zu können. Er fällt über die Mehrzahl der studierenden Frauen folgendes Urteil: „Vieles läßt sich erzwingen, nur die Liebe nicht; und eben die Liebe zur Wissenschaft ist es, welche diesen Frauen fehlt. Für sie ist der Verkehr mit der Wissenschaft Sache der Pflicht, nicht freie, genußreiche, natürliche Betätigung. Sie werden nicht wirklich intim mit der Wissenschaft, bleiben eigentlich draußen und arbeiten mehr an als in derselben ... Die Wissenschaft ist für sie nicht ein Gegenstand spontaner und unwillkürlicher, sondern vielmehr ein Gegenstand willkürlicher, oft mühselig erzwungener Aufmerksamkeit" (Heymans, a. a. O., S. 145). Trifft diese Charakterisierung zu, so wäre nach den obigen Ausführungen über die Bedeutung des freien Interesses für die produktive Leistung zum Teil aus diesem bei den Frauen mangelnden Interesse ihre Unproduktivität zu verstehen. Wenn es wahr ist, daß den Frauen eine Vorliebe für das Konkrete und da wieder für das gefühlsbetonte Konkrete eignet, so sind es von allen Wissenschaften wieder die mathematischen, in denen wir am wenigsten an Produktion von ihnen zu erwarten haben.

Lassen es die bisherigen Erfahrungen zu einem weniger günstigen Resultat kommen, soweit die Begabung der Frau für die mathematische Produktion in Betracht kommt, so folgt hieraus gemäß dem oben Bemerkten über das Verhältnis der Schulmathematik und ihrem Verfahren zur höheren Mathematik und mathematischen Produktion noch gar nichts für die Begabung der Frauen in der Schulmathematik.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Erfahrungen, die man seit der Umbildung des höheren Mädchenschulwesens mit der Betonung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts hinsichtlich der Begabung, des Interesses und der Leistungen der Mädchen in der Mathematik sammeln konnte, nicht hinreichen, um bereits ein abschließendes Urteil zu geben.[1]) Es wird dies auch in den beiden kurzen Mitteilungen betont, die zu unserem Gegenstand von zuständiger Seite, nämlich von Direktoren von Lyzeen, gemacht worden sind. F. Möhle[2]) unterscheidet zwischen dem Interesse der Mädchen für Mathematik, welches auf Grund einer ausgedehnten Umfrage als „durchaus befriedigend“ scheint bezeichnet werden zu müssen, und der Veranlagung für Mathematik, welche „nicht ganz so günstig“ beurteilt wird wie ihr Interesse. „Im Vergleich mit den Knaben finden 47 Kollegen sie (d. h. die Beanlagung für Mathematik und Naturwissenschaft) ebenso groß, 18 geringer“ (Möhle, S. 39). Zu einer ähnlichen Beurteilung ist Schröder auf Grund einer Umfrage gelangt. Die Majorität der Befragten stellte fest, „daß keine Anlageverschiedenheit zwischen Knaben und Mädchen hinsichtlich der Erfassung der Mathematik besteht, ebensowenig wie in anderen Fächern von einem solchen Unterschiede die Rede ist“ (Schröder, S. 91). Nicht unterdrücken möchte ich, daß nach dem Urteil der Minorität die Mädchen „mehr rezeptiv und weit weniger produktiv selbständig arbeiten als die Knaben, so daß sie hauptsächlich bei den Anwendungen viel leichter versagen als die Knaben“ (Schröder, S. 91).

Ganz zweifellos geht aus den Nachforschungen Möhles wie Schröders hervor, daß der Erfolg im mathematischen Unterricht bei den Mädchen in viel höherem Grade als bei den Knaben von der Persönlichkeit des Lehrers abhängt. Dabei wird von diesem nicht nur verlangt, daß er seinen Unterricht sachlich der Eigenart der Mädchen anpasse[3]), sondern es gilt auch, daß in vielen Fällen „der Erfolg durch das Interesse der Mädchen an der Persönlichkeit des Lehrers mitbestimmt wird“. Also hier tritt gegenüber dem rein sachlichen Moment das gefühlsbetonte persönliche stärker hervor, wie es denn auch für die weibliche Psyche ihrer ganzen Anlage nach mehr zu bedeuten scheint.[4]) Wenn den Mäd-

1) Ich beschränke mich auf die Mitteilung der in Deutschland gemachten Erfahrungen. Auf Frankreich bezügliches Material findet man in Bd. 5 der Abhandlnngen der französischen Unterkommission der IMUK, Paris 1911. Auf England bezügliches Material enthält Bd. 26 der Schriften des Board of education. The teaching of mathematics in the united kingdom. Besorgt für die IMUK. London 1912. Der Bericht der amerikanischen Unterkommission der IMUK enthält kein nennenswertes Material für unsere Frage.

2) Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den preußischen Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten nach der Neuordnung von 1908. Heft 15 der Schriften des Deutsches Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Teubner 1913.

3) „Die Mädchen verlangen einen stets lebhaften und anregenden Unterricht“ (Möhle). Der mathematische Unterricht muß „durch und durch anschaulich“ erteilt werden; „das Beiseitelassen unnötiger Deduktionen und die Heranziehung dessen, was aus der Anschauung her als leicht faßlich gilt“ (Schröder).

4) W. Stern hat einmal eine Umfrage über die Beliebtheit und Unbeliebtheit der Unterrichtsfächer bei Knaben und Mädchen angestellt, die sich auch auf das Rechnen erstreckte (Zeitschr. für pädag. Psychol., Bd. 7, 1905). Wie man sieht,

chen nach der Schulreform eine stärkere Kost in der Mathematik zugemutet wird, so ist dies im Interesse einer stärkeren Verstandes- und Willensbildung nur zu begrüßen.

Nach Möhle hat sich unzweifelhaft gezeigt, „daß die Mädchen keineswegs für die Fremdsprachen mehr Interesse und Veranlagung haben als für die mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer". Damit steht es denn auch im Einklang, „daß in 86 Anstalten die Nichtversetzungen gleichmäßig auf die Sprachen wie auf die Mathematik und Naturwissenschaften zurückzuführen waren, in 50 Anstalten mehr auf die Sprachen, in 9 mehr auf die Mathematik" (S. 40).

Nach der bei Möhle und Schröder geltend gemachten Notwendigkeit einer verschiedenen Behandlung der Mathematik bei Knaben und Mädchen erscheint die ablehnende Haltung gegenüber der Koedukation, wie sie Schöder einnimmt, durchaus verständlich. „Dadurch verbietet sich denn auch die grundsätzliche Anerkennung der immer wieder von Frauenrechtlerinnen verfochtenen Forderung, man solle den Mädchen auch in Preußen die Pforten der Knabenschulen öffnen und ihnen dazu verhelfen, in Koedukation oder wie jetzt wohl auch gesagt wird, in Koinstruktion oder in Gemeinschaftserziehung mit den Knaben bis in die obersten Klassen hinauf den gleichen Lehrgang durchzumachen."[1])

f) Zur Psychologie der Zahlenvirtuosen und Rechenkünstler.

Von seiten des großen Publikums durften sich die sogenannten Zahlenvirtuosen und Rechenkünstler stets einer besonderen Beachtung erfreuen, nicht nur, wie ich vermute, weil ihre Leistungen selbst, absolut genommen, den Durchschnitt so sehr überragten, sondern mehr noch, weil man

---

für eine Förderung der mathematischen Leistungen in den Lyzeen und Studienanstalten eine Umfrage über die Beliebtheit und Unbeliebtheit des Mathematiklehrers und deren Ursachen von vielleicht noch höherer Bedeutung.

1) Schröder hat auf S. 92 seiner Arbeit einige Literatur zur Frage nach der Koedukation zusammengestellt. Bei einer prinzipiellen Entscheidung über die Frage nach der Koedukation sind natürlich auch allgemeinere Gesichtspunkte zu berücksichtigen. Neben den Differenzen in der aktual-psychischen Struktur der beiden Geschlechter ist als wichtigstes Moment zu beachten die Verschiedenartigkeit der Entwicklungsrhythmik, der Frau und Mann unterworfen sind. — Offner hat in seiner unten zu erwähnenden Untersuchung über die geistige Ermüdung darauf hingewiesen, daß zur Zeit der Pubertätsentwicklung die Ermüdbarkeit gesteigert ist und daß auf sie die Schule Rücksicht zu nehmen habe. Er führt nun aus: „Da die Pubertätsentwicklung bei den Mädchen durchschnittlich mit dem 13. Jahre einsetzt, bei den Knaben aber erst mit dem 15. Jahre, geht es auch nicht an, die beiden Geschlechter vom 12.–17. Jahre zusammen zu erziehen. Denn vom 12.–15. Jahre würden die Forderungen für die Mädchen zu hoch sein, wenn man die mittlere Leistungsfähigkeit der Knaben dieses Alters zur Norm nehmen wollte, vom 15.–17. vielleicht für die Knaben, wenn man die durchschnittliche Leistungsfähigkeit der Mädchen als Maßstab zugrunde legte, oder aber es müßten die Forderungen herabgesetzt werden zunächst im Interesse der Mädchen, wobei dann die Knaben nicht genügend angespannt würden, späterhin im Interesse der Knaben, wobei wiederum die Leistungsfähigkeit der Mädchen nicht ganz ausgenützt würde" (S. 52).

in diesen Leistungen die Offenbarung einer übermäßigen Intelligenz bewunderte. Eine psychologische Analyse dieser Leistungen, die uns zu einer wesentlich abweichenden Beurteilung führen wird, hat zwar mehr Interesse für den Psychologen vom Fach, immerhin wird auch dem Pädagogen und Mathematiker manches davon beachtenswert erscheinen. So zeigen die hervorragenden Gedächtnisleistungen dieser Zahlenvirtuosen dem Pädagogen einerseits, welche Leistungen sich bei ungewöhnlicher Begabung und ebensolchem Interesse für einen Gegenstand günstigsten Falles erzielen lassen, anderseits muß es für den Mathematiker wertvoll sein, zu erfahren, wie ein Rechenkünstler wie Rückle, der zugleich als ein begabter Mathematiker anzusehen ist, seine theoretischen Kenntnisse im Dienste der Rechenkunst verwendet.

Es soll wissenschaftlich bedeutende Mathematiker geben, die doch in den mehr mechanisch auszuführenden rechnerischen Leistungen nicht sehr glänzen. Es harmoniert gut mit dem niedrigen Korrelationswert, der hiernach im allgemeinen zwischen der wissenschaftlich zu bewertenden mathematischen Leistung und der Geschicklichkeit, mit Zahlenwerten umzugehen, zu erwarten ist, wenn gar nicht so selten auf der anderen Seite Fälle zu verzeichnen sind, in denen eine über den Durchschnitt außerordentlich weit hinausgehende Rechenfertigkeit in Verbindung mit im allgemeinen geringer oder sogar unter dem Durchschnitt stehender Intelligenz einhergeht.[1]) So ist selbst bei Schwachsinnigen gelegentlich nicht nur ein über den Durchschnitt weit hinausgehendes Gedächtnis für Zahlen, sondern auch eine ebenso zu charakterisierende Rechenfähigkeit gefunden worden.[2]) Unter den bekannt gewordenen Zahlenvirtuosen sind nur einige, die auch in sonstiger Beziehung eine besondere Intelligenz besitzen, denn Erscheinungen wie die des englischen Zahlenvirtuosen Bidder, der zugleich ein bedeutender Ingenieur war, sind als Ausnahmen anzusehen.[3]) Hiermit ist also schon die Anschauung widerlegt, daß eine erfolgreiche Beschäftigung mit Zahlen ohne eine hohe Allgemeinintelligenz nicht möglich sei.

---

1) Eine ungewöhnliche Ausnahme macht Gauß, der sich bekanntlich in der eingehendsten Weise mit den Eigenschaften der einzelnen Zahl beschäftigt hat, mit Vorliebe Zahlenrechnungen durchgeführt und sich umfangreiche Zahlentabellen angelegt hat. F. Klein schreibt in den Vorbemerkungen zu dem von ihm herausgegebenen (übrigens psychologisch sehr interessanten) wissenschaftlichem Tagebuch Gauß' (Mathematische Annalen, Bd. 57) folgendes: „Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen."

2) A. Wizel, Ein Fall von phänomenalem Rechentalent bei einer Imbezillen. Archiv für Psychiatrie u. Nervenkrankheiten, Bd. 38, 1904. — „Es ist Tatsache, daß manche Rechenkünstler, welche in öffentlichen Schaustellungen auftreten, debil sind: dem ausgezeichneten Zahlengedächtnis steht ein unverkennbarer Intelligenzdefekt auf anderen Vorstellungsgebieten gegenüber." Th. Ziehen, Die Geisteskrankheiten des Kindesalters. Berlin 1902, S. 63.

3) Interessante Ausführungen über Bidder findet man in Kap. 7 des oben erwähnten Branfordschen Werkes.

Von den älteren Untersuchungen, die sich mit der Psychologie der Zahlenvirtuosen beschäftigt haben, nenne ich nur die Arbeit von A. Binet, Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs, Paris 1894. Die eingehendste und exakteste Untersuchung des Falles Rückle findet man bei Müller I. In dem 3. Abschnitt dieser Arbeit erhält man hinsichtlich der Literatur unseres Gegenstandes jede gewünschte Auskunft. Ich halte es für zweckmäßig, mich im engen Anschluß an Müllers Ausführungen auf ein Referat über Rückles Leistungen zu beschränken und Leistungen anderer Rechenkünstler nur soweit zu erwähnen, als sie wertvolle Parallelen zu Rückles Leistungen zu geben vermögen.

Zunächst einige wenige Angaben über Rückles Zahlengedächtnis. Rückle hatte Zahlenreihen zu lernen, die sich aus 20–408 einzelnen Ziffern zusammensetzten. Ich darf wohl den Bau der Zahlenreihen etwas ausführlicher mit Müllers eignen Worten schildern, weil nur einige Versuche, die man an sich selbst vornimmt, einem mit voller Deutlichkeit vor Augen zu führen vermögen, welche Leistungen hier von seiten Rückles vorliegen. „Jede der Ziffern 1 bis 99 und außerdem auch die Ziffer 0 war auf ein Papierzettelchen geschrieben. Diese 100 Zettelchen wurden in einem Kasten untereinander gemischt und dann ganz nach Zufall aus dem Kasten gezogen, und die aufgeschriebenen Ziffern oder Ziffernpaare wurden in der Ordnung ihres Gezogenwerdens zu Reihen der verlangten Länge zusammengestellt." (Müller I, S. 179). „Eine Reihe von 25 oder weniger Ziffern war stets in einer einzigen Zeile geschrieben." Die längeren Reihen, deren Lernzeiten unten angeführt werden, waren in der Regel aus Zeilen aufgebaut, die aus 18, 20, 24 und 30 Ziffern bestanden; die überschüssigen Ziffern, die sich bei dieser Art des Aufbaus ergaben, wurden in der letzten weniger umfangreichen Zeile untergebracht.

Ich gebe nun nur diejenigen Lernzeiten an, welche sich bei der Wiederholung einzelner Versuche mit derselben Ziffernzahl als die kürzesten ergaben. Es wurden erlernt 20 Ziffern in 16 Sek., 60 Ziffern in 70,5 Sek., 102 Ziffern in 200 Sek., 204 Ziffern in 13 Minuten und 408 Ziffern in 27 Minuten. Zum Vergleich gebe ich an, daß R. zum Erlernen einer 100ziffrigen Reihe etwa die Hälfte der von Inaudi (einem italienischen Zahlenvirtuosen) und etwa ein Viertel der von dem Franzosen Diamandi gebrauchten Zeit benötigte. „R. hat für die Erlernung einer 204ziffrigen Reihe ungefähr den 4. Teil der Zeit gebraucht, deren Diamandi für eine 200ziffrige Reihe bedurfte." R. hat für die Erlernung von 25 Ziffern, die in Form eines Quadrates von 5 Längs- und 5 Querreihen geschrieben sind, bei seiner letzten Untersuchung durchschnittlich 12,7 Sek. gebraucht, Inaudi dagegen 45 Sekunden. Welche Leistung auch hier vorliegt, erkennt man daran, daß auch ein tüchtiger normaler Lerner etwa 150 Sek. braucht, um sich ein solches Zahlenquadrat einzuprägen. Wie fest das einmal von R. Eingeprägte sitzt, mag man daraus entnehmen, daß die Zahlen ohne größere Schwierigkeit auch in einer beliebigen vorgeschriebenen Reihenfolge, z. B. auch in umgekehrter Reihenfolge, genannt werden können. Auch was in dieser Leistung vorliegt, kann man nur dann ganz ermessen, wenn man selbst einmal sich ähnlichen Versuchen unterworfen hat. R. erlernte eine Reihe von 204 Ziffern nach 3 Tagen mit einer Ersparnis von etwa 80 Prozent. Eine Untersuchung von R.'s Gedächtnis mit anderem Gedächtnismaterial (Erlernung von Konsonantenreihen, sinnlosen Silben, Gedichtstrophen, Figurenreihen) ergab, daß es „nicht nur für Zahlen von besonderer Güte ist, sondern auch in den übrigen Gebieten einen sehr hohen Rang, wenn auch nicht eine so hervorragende Stellung wie in Beziehung auf die Zahlen einnimmt."

Vielleicht das Hervorstechendste an R.'s Gedächtnis ist seine „erstaunlich geringe Ermüdbarkeit", die es ihm gestattet, stundenlang in der angegebenen Weise Zahlenreihen zu erlernen. Der Vorstellungstypus R.'s ist wesentlich visuell. Er vermag sich innerlich 6stellige Ziffernkomplexe simultan deutlich vorzustellen, in der Regel liest er auch beim Reproduzieren von diesen vorgestellten Komplexen ab. Wird ihm ein Gedächtnismaterial akustisch vorgeführt, so versucht er dies, so weit als es die Versuchsumstände erlauben, ins Visuelle umzusetzen. „Obwohl bei R. das visuelle Gedächtnis an erster Stelle steht, so spielt doch auch das akustisch-motorische Gedächtnis bei ihm in manchen Fällen eine nicht unwichtige Rolle." Die Zahlen wurden nicht einzeln dem Gedächtnis eingeprägt, sondern, wie es für jeden, der nur einmal solche Versuche durchgemacht hat, selbstverständlich ist, in Ziffernverbänden, sogenannten Komplexen. In der Regel wurde mit konstantem Komplexumfang gelernt, wobei Komplexe von je 5, bei umfangreicheren Reihen von je 6 Ziffern gebildet wurden.

R. verwandte bei seinem Lernen eine große Reihe von Hilfen. Müller gliedert sie in verschiedene Gruppen, von deren jeder hier ein Beispiel gegeben werden soll. Manche Zahlen, wie die 353, haften als Primzahl. (R. gibt an, daß „er schon im 12. Lebensjahre betreffs aller Zahlen von 1–1000 auswendig gelernt hatte, ob sie Primzahlen sind oder nicht, beziehungsweise aus welchen Faktoren sie sich zusammensetzen.") Die Zahl 925 wird in die beiden Faktoren $25 \cdot 37$ zerlegt, ähnliche Zerlegungen erfolgen mit anderen Zahlen. Die Zahl 528 wurde behalten, weil R. sehr oft das Quadrat derselben ausgerechnet hatte. Das Quadrat wurde auf Befragen sofort angegeben. Eine andere Gruppe von Zahlen haftet sofort wegen ihrer Bedeutung als mathematische Konstanten. 473 ist ihm unvergeßbar als Diskriminante eines kubischen Zahlkörpers, den er untersucht hat. 548519 – die Differenz zwischen der ersten und zweiten Hälfte des Komplexes ist die Primzahl 29. 70218 wird wie folgt gemerkt: $701 + 28 = 729 = 9^3$. Hilfe bei 86219 ist $219 = 3 \cdot 73$ und $\log. 73 = 1{,}86 \ldots$ Stütze bei 484573 ist, daß die beiden Komplexhälften kontrastieren; denn die erste besteht nur aus geraden, die zweite nur aus ungeraden Zahlen. Hilfe bei 718982 ist 18 und 82 ergänzen sich zu hundert. Die beiden unmittelbar aufeinanderfolgenden Komplexe 446250 und 445966 kontrastieren, „denn 446 ist mit einer Zahl verbunden, die beinahe ihre Hälfte ist, 445 dagegen mit einer solchen, die fast ihr Doppeltes ist". Schließlich werden bei einer letzten Gruppe von Hilfen auch geschichtliche und geographische Hilfen herangezogen. Beispiel: 559 Regierungsantritt von Cyrus.

Hilfen von der soeben angegebenen Art wurden von R. nicht bloß „in großem Umfang, sondern auch mit äußerster Promptheit benutzt. Es ist erstaunlich, wie schnell bei ihm solche Hilfen sich geltend machten." R. bedient sich keinerlei mnemotechnischer Kunstgriffe, wenn man dabei an Vorschriften denkt, wie sie durch mehr oder weniger bekannte mnemotechnische Systeme gegeben werden.

Diejenigen Fälle, in denen man sich im mathematischen Unterricht vor die Notwendigkeit gestellt sieht, längere Zahlenreihen oder auch nur Zahlenkomplexe einzuprägen, sind verhältnismäßig selten. Bei der Einprägung von historischen und geographischen Daten kommt jedesmal nur die Verknüpfung einer Zahl mit einer geschichtlichen Tatsache oder einem geographischen Sachverhalt in Betracht. Hierbei sind also ganz andere Aufgaben zu lösen als bei der Verknüpfung von lauter Zahlenkomplexen. Der Ertrag für die pädagogische Praxis, der sich demnach aus der Analyse der reinen Gedächtnisleistungen eines Individuums wie Rückle ziehen ließe, ist darum nicht nur für den Rechenunterricht, sondern auch für jeden sonstigen Unterricht kaum nennenswert.

Von etwas höherer Bedeutung sind für die Pädagogik die Leistungen von Individuen wie Rückle als Rechenkünstler. Ich beginne auch hier mit der Schilderung einiger von Rückles Leistungen. „Es ist die Zahl anzugeben, deren Quadratwurzel und deren kubische Wurzel die Differenz 18 ergeben. Die Antwort 729 erfolgte bei R. nach 2,5 Sek., während Inaudi einer Überlegungszeit von 1 Min. 57 Sek. bedurfte." „Es ist eine 5stellige Zahl in 4 Quadrate zu zerlegen. Gegeben 53116. Genannt nach 51 Sek. $230^2 + 14^2 + 4^2 + 2^2$ und sofort hinterher noch $230^2 + 12^2 + 6^2 + 6^2$". Noch ein Beispiel dieser Art. Gegeben 73641. Genannt nach 9 Sek. $270^2 + 26^2 + 8^2 + 1^2$. Die mitgeteilten Lösungen entstammen einer Zeit, zu der R. noch keine besondere Übung in diesen Dingen besaß. In einer Prüfung, die Müller mit ihm vornahm, nachdem er sich längere Zeit in öffentlichen Schaustellungen betätigt hatte, trat eine beträchtliche Steigerung seiner Leistungen zutage.

In diesen erstaunlichen Leistungen sind z. T. Übungsphänomene zu erblicken, wie sich nach den unten folgenden Ausführungen ergeben wird. Für das psychologische Verständnis allgemeiner und damit auch mathematischer unterrichtlicher Tätigkeit ist es von Interesse, eine Einsicht in die formalen Teilkräfte zu gewinnen, auf die man die Leistungen Rückles und der andern Rechenkünstler zurückgeführt hat. Der Annahme, daß wir es hier mit einem angeborenen Zahlengedächtnis von besonderer Güte zu tun haben, erwachsen, wie Müller (Müller I, S. 238f.) überzeugend dartut, so beträchtliche Schwierigkeiten, daß man sie als unbegründet bezeichnen muß. Müller führt mit Binet die Leistungen der Zahlenkünstler auf folgende formalen Eigenschaften ihres Bewußtseins zurück. Es muß gegeben sein die Fähigkeit zu einer bedeutenden Konzentration der Aufmerksamkeit, eine schnelle Auffassungsgabe, geringe Ermüdbarkeit und Dauerhaftigkeit der Assoziationen. Während diese Eigenschaften nun bei ihrer Übung bedeutende Leistungen in jedem Gebiet zur Folge haben würden, muß man für die ausgezeichneten Leistungen gerade im Rechnen noch annehmen ein irgendwie entstandenes hochgradiges Interesse für die Zahlen und ihre Eigenschaften. Dieses hochgradige Interesse bedingt, daß sich die Individuen, ohne dessen überdrüssig zu werden, ständig mit den Zahlen beschäftigen.[1]) Viele Virtuosen werden geradezu von einer unstillbaren Leidenschaft zum Rechnen gepackt. Die Beschäftigung mit den Zahlen und ihren Eigenschaften nimmt einen wesentlichen Teil des gesamten Denkens dieser Individuen ein. Es kann nicht ausbleiben, daß bei dieser dauernden Beschäftigung eine große Reihe von Hilfen bekannt und zugleich eingeprägt wird. Diese beträchtliche Menge von Hilfen bedeutet das Produkt der speziellen Übung, und nicht zum wenigsten bedingen sie dann die außerordentlichen Leistungen. Eine entsprechende spezielle Übung stellt sich bei der Beschäftigung mit anderem Gedächtnismaterial (z. B. Silben, Buchstaben u. dgl.) nicht ein, und so erklärt es sich, daß wir andere Spezialgedächtnisse als das für Zahlen nicht so häufig antreffen oder fast ganz vermissen müssen.

Wie es nun kommt, daß sich überhaupt bei einzelnen Individuen ein so unerschütterliches Interesse für Zahlen einstellt, läßt sich zunächst nicht weiter erklären. Hierbei handelt es sich, wie wir auch schon oben ausführten, um eine fundamentale Tatsache. Eine gewisse biologische Aufklärung, nicht psychologische Erklärung des Interesses würde dann vorliegen, wenn sich der Nachweis einer Vererbung von Interessenrichtungen erbringen ließe. Tatsächlich läßt sich weder in dem Fall Rückle noch in den Fällen der meisten anderen Zahlenkünstler von einer Vererbung reden. Doch soll nach Binet der oben genannte Ingenieur Bidder sein Interesse für Zahlen auf seinen Sohn und seine Enkel vererbt haben (Binet, a. a. O., S. 23).

4. Die Mathematik in der Pädagogik der Mindersinnigen und Schwachsinnigen.[2])

Bei dem Klassenunterricht darf nur mit Variationen der Zöglinge zu rechnen sein, die noch ganz innerhalb der physiologischen Breite gelegen sind. Darüber hinausgehende Variationen erfordern eine besondere

1) Vgl. hierzu das oben (S. 59ff.) über die Wirkung eines vorhandenen Interesses Bemerkte.

2) Die Entfaltung des Schulwesens für die nicht-normalen Kinder ist auch kennzeichnend für die gesunde und stetige Entwicklung, in der sich die Pädagogik unserer Tage befindet. Hier ist die Differenzierung gegenüber früheren Zeiten über-

Anpassung der pädagogischen Maßnahmen. Auf die Schwerhörigkeit niederen Grades kann der Klassenbetrieb schließlich noch ebenso Rücksicht nehmen wie auf die Schwachsichtigkeit, auf den Tauben und Blinden nicht mehr. Gemeinsamer Unterricht Blinder und Tauber mit Normalen wäre sowohl für diese Mindersinnigen wie für ihre Kameraden mit schwerem Nachteil verbunden. Eine andere pädagogische Behandlung als die Normalen verlangen also die Blinden und Tauben. Erfordert schon der Unterricht dieser beiden Arten von Mindersinnigen die Aufstellung ganz eigenartiger, vom Normalen weit abweichender Unterrichtsmethoden, so steigert sich die pädagogische Kunst auf das Höchste gegenüber jenen, glücklicherweise nicht zahlreichen Kindern, die sowohl des Gehörs wie des Augenlichts beraubt sind, der Taubstummblinden, oder, wie man sie gelegentlich im Anschluß an ältere vulgärpsychologische Sprachgewohnheiten bezeichnet, der Dreisinnigen.[1]) Von

---

raschend weit fortgeschritten. Es mag hier nicht unerwähnt bleiben, daß neuerdings auch die Forderung nach Klassen für geistig übernormale Kinder erhoben wird, eine Forderung, deren Ausführung allerdings nicht geringe Bedenken entgegenstehen. Die Differenzierung des Schulwesens ist zweifellos eine Folge der Einsicht in die Notwendigkeit, den Unterricht den verschiedenen Gruppen nicht-normaler Schüler psychologisch anzupassen. Die Psychologie sollte aber auch sonst in einem viel höheren Grade, als es jetzt noch üblich ist, gehört werden, wo größere soziale Gruppen einem bestimmten Ziel durch pädagogische Beeinflussung zugeführt werden. Je einheitlicher das Material dieser Gruppen ist (nach Nationalität, Alter, Vorbildung, Entwicklungsstufe, sozialem Milieu), um so leichter ist es, eine Typik dieser Gruppen aufzustellen und sie dem Unterrichtsverfahren zugrunde zu legen. Warum hat sich noch nie jemand der Aufgabe unterzogen, die gesamte militärische Ausbildung zu psychologisieren? Die Kasernenhofblüten und Witze aus der Instruktionsstunde machen sich zwar in Witzblättern manchmal recht gut, sprechen sie aber auf der andern Seite nicht deutlich dafür, daß es mit der Militärpädagogik nicht allzu gut bestellt sein kann? Hauptmann Meyer hat in der Zeitschr. für pädag. Psychol., Bd. 13, 1912 in dem Aufsatz „Psychologie und militärische Ausbildung" auf einige pädagogische Probleme der militärischen Ausbildung hingewiesen. — Auch bei ähnlichem Ziel können völlig verschiedene Unterrichtsweisen am Platze sein, wenn das Schülermaterial wechselt. Ist die Mathematik an der Fachschule nicht ganz anders zu behandeln als an der höheren Schule und erfordern nicht wieder die verschiedenen Arten von Fachschulen ebensoviele verschiedene Methoden des mathematischen Unterrichts? Aber die Psychologie sollte auch Einfluß finden auf die Gestaltung des Vorlesungswesens an unseren Hochschulen. Die Berücksichtigung der Psychologie des Studenten ist doch wohl die treibende Kraft, die hinter den modernen Bestrebungen der Hochschulpädagogik steht. (Vgl. hierzu E. Bernheim, Das Persönliche im akademischen Unterricht, Leipzig 1912). Ich darf vielleicht die Worte Perrys hierhersetzen, mit denen er die ungenügende Berücksichtigung der Psychologie der Studierenden der Ingenieurwissenschaften in den mathematischen Vorlesungen bekämpft (Nature, Nr. 2237, Vol. 90, 1912). „Der Durchschnittsstudent kann abstrakte Überlegung nicht verstehen; sein Lehrer kennt ihn nicht . . . Er studiert seinen Schüler nie. Es gibt Leute, welche fast jedes Tier abrichten können; sie studieren seine Denkgewohnheiten, sie sind freundlich und mitfühlend. Der arme englische Durchschnittsstudent wird niemals durch die Berufsmathematiker studiert."

1) Vorausgesetzt sind bei dieser Ausdrucksweise die fünf Sinne, von denen Geruchs-, Geschmacks- und Gefühlssinn geblieben sind. Die neuere Psychologie

diesen Mindersinnigen sind ihrer geistigen Struktur nach scharf zu trennen die Schwachsinnigen. Handelt es sich bei den ersteren um Sinnesdefekte, die, wenn sie auch das Bewußtseinsleben tief berühren, doch nicht notwendig eine Beeinträchtigung des höheren Geisteslebens zur Folge haben müssen, so sind bei den letzteren bei völliger Intaktheit der Sinnestätigkeit höhere geistige Fähigkeiten, in erster Linie das Denken, geschädigt. Die Bezeichnung „Heilpädagogik" beschränkt man jetzt in der Regel auf die Pädagogik der Schwachsinnigen.[1])

Während man in der Pädagogik des normalen Kindes auch ohne eingehendes Studium seiner Psychologie schlimmstenfalls auszukommen vermag, weil man sich doch bis zu einem gewissen Grad auf die Erfahrungen des eigenen Seelenlebens verlassen kann, ist an ein förderliches Arbeiten in der Pädagogik der Mindersinnigen und Schwachsinnigen gar nicht zu denken, ohne daß man in ein eingehendes Studium ihres Verhaltens eingedrungen ist.

a) Zur Psychologie und Pädagogik der Mindersinnigen.

A. Die Blinden.[2])

In Reinheit zeigt sich das Seelenleben der Blinden bei den Blindgeborenen oder den frühzeitig, vor den 4. oder 5. Lebensjahr Erblindeten. Die Bedeutung, welche die Gesichtswahrnehmungen für die Auffassung der Umwelt besitzen, erhellt am besten aus der Tatsache, daß selbst der nach dem 5. Lebensjahr völlig Erblindete in der Regel mit optischen Vorstellungselementen, die ihm von früher her verblieben sind, zu wirtschaften pflegt. Wie das geschieht, davon kann man sich am ehesten eine, wenn auch nicht ganz zutreffende, Vorstellung machen, wenn man sich in einem bekannten Zimmer bei völligem Ausschluß der Gesichtswahrnehmungen (bei verdeckten Augen) zu orientieren versucht. Die Umsetzung dessen, was wir unter diesen Umständen an nicht-visuellen Eindrücken erleben, ins Visuelle, würde nicht eintreten, wenn nicht die visuelle Erfassung des Raumes anderen Arten seiner Erfassung überlegen wäre.

Der Gesichtssinn gibt uns über die Farben, die Formen und die räumlichen Verhältnisse unserer Umgebung Auskunft. Durch einen Fortfall der Farbenwahrnehmung wird unsere Erkenntnis der Außenwelt wenig beeinträchtigt. Davon legen beispielsweise auch die Totalfarbenblinden Zeugnis ab. Die Form der Körper und der Raum werden dem Blinden vor allen Dingen durch taktile und kinästhetische Wahrnehmungen erschlossen. Während Geruchs- und Geschmackssinn für die räumliche

---

nimmt bekanntlich mehr als 5 Sinne an. Vgl. hierzu das oben erwähnte Lehrbuch von Ebbinghaus.

1) Vgl. hierzu H. Heller, Grundriß der Heilpädagogik. 2. Aufl., Leipzig 1912.

2) Auf die Organisation des mathematischen Unterrichts der Blinden- und Taubstummenanstalten wird Lietzmann in Bd. V Heft 6 dieser IMUK-Abhandlungen ausführlich eingehen.

Orientierung überhaupt kaum eine Bedeutung besitzen, lernt der Blinde (wie der Sehende) Gehörseindrücke für die Lokalisation der Körper zu verwenden.

Die nervösen Endapparate, welche dem Tasten dienen, sind beim Blinden nicht anders organisiert als beim Sehenden. Wenn der Raumsinn des Blinden tatsächlich feiner ist als der des Sehenden, so beruht dies auf der beständigen Übung.[1]) Diese scheint aber nicht spontan betätigt zu werden. Blinde Kinder zeigen „zu Beginn ihres Unterichts ein vollständig unentwickeltes Tastvermögen".[2]) Die größte räumliche Unterschiedsempfindlichkeit besitzen die beweglichsten Stellen des Körpers, so die Finger, die Zehen, die Zunge und die Lippen. Der Blinde benutzt für die räumliche Analyse in der Regel die Finger; die Zunge und die Lippen benutzt er nur ausnahmsweise.[3]) „Jene Art des Tastens, bei welcher vor allem der Raumsinn der Haut zur Anwendung gelangt, wollen wir als synthetisches Tasten bezeichnen. Im Gegensatz hierzu kann sich die tastende Hand auch derart verhalten, daß eine engbegrenzte Stelle sukzessive mit den Konturen der Gegenstände, welche gleichsam die Bedeutung von Fixationslinien erlangen, in Berührung gebracht wird. Bei dieser zweiten Tastart, die wir das analytische Tasten nennen können, kommt der Raumsinn der Haut nicht in Anwendung" (Heller, S. 234). „Der Auffassung dreidimensionaler Gebilde dient jene Tastart, die wir als umschließendes Tasten bezeichnen möchten" (Heller, S. 250). Es findet durch ein Anlegen der Tastflächen einer oder meist beider Hände an den Körper statt, wobei die Hände in beständiger Bewegung gehalten werden. Diese Art des Tastens bezieht sich zunächst auf den sogenannten engeren Tastraum, welcher seine Grenzen an den Stellen findet, die gleichzeitig mit beiden Händen zu erreichen sind. Alle dem Blinden dargebotenen Objekte von kleineren Dimensionen werden für ihre Analyse in den engeren Tastraum gebracht.

Bei größeren Objekten, die dem weiteren Tastraum angehören, z. B. bei Tischen, Schränken, Türen, kommen symmetrische Bewegungen der beiden ausgestreckten Arme hinzu. Diese Art des Abtastens findet ihre Grenzen an den Punkten, die noch gerade durch die ausgestreckten Arme zu erreichen sind. Der weitaus größte Teil der Körperwelt bleibt außerhalb jeder Tastmöglichkeit. „Nur innerhalb des engeren Tastraumes sind alle Bedingungen für das Zustandekommen einer präzisen Raumvorstellung gegeben" (Heller, S. 409). Wenn ein Blinder ein Objekt nicht als

1) Der Blinde erreicht bei der vollkommenen Ausbildung des Tastorgans „nicht mehr, als der Sehende bei gleichem Aufwand von Mühe erreichen könnte". W. Wundt, Grundzüge der physiologischen Psychologie. 6. Aufl., Bd. 2. Leipzig 1910. S. 491.

2) S. 230 von Th. Heller, Zur Blindenpsychologie. Wundts Philosophische Studien. Bd. 11, 1895. (Zitiert als Heller).

3) In dieser Beziehung ist eine Beobachtung Hellers interessant, derzufolge es einem Mädchen gelang, unter Verwendung des Zungentastens „die Bestimmung einer Blüte von Amygdalus communis bis in das kleinste Detail vorzunehmen".

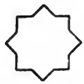
Ganzes auffassen kann, „so begnügt er sich mit der Aufsuchung eines bestimmten, den Tastbedingungen günstig gelegenen Teiles, der in seinem Bewußtsein die Vorstellung des Gesamtobjektes vertritt und sich häufig selbst mit dem Namen des betreffenden Gegenstandes deckt" (Heller, S. 412). Ein Haus vermag der Blinde nicht abzutasten. Er kommt aber zu einer Vorstellung desselben durch das Abtasten des ihm zur Verfügung gestellten Hausmodells, das er sich entsprechend vergrößert denkt. Die Größenmaße werden ihm geliefert durch die Erfahrungen, die er bei Bewegungen im Raume macht. So denkt er beim Hausmodell die Zahl der zu seinem Abschreiten notwendigen Schritte hinzu. Nach den zuverlässigen Beobachtungen Hellers folgt, daß viele Blinde nur von den Objekten des engeren Tastraums präzise Raumvorstellungen entwickeln.

Wir brauchen nicht Vermutungen zu äußern über die Genese der einheitlichen Tastraumvorstellung des Blinden, wenn wir über die Genese der Gesichtsraumvorstellung beim Sehenden noch so wenig orientiert sind. Beim Sehenden stimmen der Gesichtsraum und der Tastraum in formalen Beziehungen überein; wäre das nicht der Fall, so würde es zu fortwährenden Widersprüchen zwischen den räumlichen Erfahrungen des Gesichts- und des Tastsinnes kommen. Daraus ist denn auch ohne weiteres zu verstehen, daß die Geometrie des Blinden dieselbe ist wie die des Sehenden. „So wird es denn erklärlich, daß Tast- und Gesichtsraum trotz der ungeheuren Unterschiede ihrer Ausdehnung dennoch in formaler Beziehung übereinstimmen, so grundverschieden auch das Empfindungsmaterial ist, aus welchem dieselben bestehen, eine Tatsache, die sich vor allem darin kundgibt, daß die Geometrie des Blinden dieselbe ist wie die des Sehenden" (Heller, S. 441).

Nach G. E. Müller „ist die räumliche Wahrnehmung des Hörsinnes sekundärer Art, erst auf Grund der räumlichen Anschauungen, welche mittels des Gesichts-, Tast- und Muskelsinnes erworben sind, mit Hilfe gewisser Assoziationen entstanden". Auch beim Blinden vermögen Gehörseindrücke nur mittelbar räumliche Vorstellungen auszulösen. „Der Gehörsinn entleiht von dem Raumsinn des Blinden auf einer frühen Stufe der Bewußtseinsentwicklung seine räumlichen Beziehungen" (Heller, S. 544). Er ist nun darum für den Blinden von besonderer Wichtigkeit, weil er ihm bis zu einem gewissen Grad über Verhältnisse des Raumes jenseits der Grenzen des tastbaren Raumes Auskunft gibt.

Für uns ist von speziellem Interesse das Verfahren des Blinden bei der Auffassung von räumlichen Distanzen. „Das Meßinstrument wird gebildet durch das Entgegenstellen des Daumens und Zeigefingers, welch letzterem häufig der Mittelfinger assistiert." Indem die Blinden ihre so gegeneinandergestellten Finger an den Objekten hingleiten lassen, merken sie die feinsten Distanzänderungen. „Die größte Unterschiedsempfindlichkeit herrscht bei möglichster Nähe der beiden Tastfinger. So sind viele Blinde imstande, die wechselnde Dicke von Papiersorten zu unterscheiden, die nur mit Hilfe subtilster Maßverfahren für gewöhnlich festgestellt werden könnte" (Heller, S. 421). Diese (als Konvergenztasten bezeichnete) Art des Tastens bewirkt, daß dem Blinden die Parallelität und Nichtparallelität von Linien mindestens ebenso deutlich zum Bewußtsein kommt wie dem Sehenden durch das Gesicht.

Didaktik des mathematischen Unterrichts bei den Blinden.[1]) Wir besprechen zunächst den Rechenunterricht. Die Zahlen und Rechenzeichen werden durch kleine vierseitige Bleisäulchen dargestellt, deren eine quadratische Fläche am Rande ein schmales Leistchen, deren andere am Rande 2 kleine punktförmige Erhöhungen trägt, die einen Abstand von der Länge des Leistchens besitzen. Diese kleinen Säulen werden in Blechrahmen gesteckt, welche (wie etwa kariertes Papier) neben- und untereinander geordnete Kästchen von der in nebenstehender Zeichnung angedeuteten Form besitzen (Taylersche Rechentafel). Man kann, wie auch aus der Figur hervorgeht, ein Säulchen so in ein Kästchen hineinstecken, daß seine Leiste oder die 2 Punkte 8 verschiedene Lagen einnehmen. Unter Verwendung der beiden Enden der Säulchen und Ausnutzung der 8 verschiedenen Lagen kann man somit 16 verschiedene Symbole gewinnen; von diesen werden 15 verwendet, um die Zahlen von 0–9 und die Rechenzeichen +, –, :, $\times$ und = auszudrücken. Mit Hilfe dieser Symbole läßt sich unter Ausnutzung der Stellenwerte der Rechentafel genau so rechnen wie mit Hilfe der optischen Zeichen von seiten des Sehenden. Es liegt in der Natur dieses Rechenverfahrens, daß es im allgemeinen mehr Zeit braucht als das visuelle. Das Abtasten, welches den Blinden über die Stellung der verwendeten Säulchen unterrichtet, geht bei größerer Menge der Zahlzeichen nicht so schnell vor sich wie das visuelle Überschauen beim Sehenden. Das letztere dürfte auch nicht so anspannend sein. Immerhin zeigt die Tatsache, daß blinde Kinder sich mit großer Liebe dem Schachspiel und anderen Brettspielen hingeben, bei denen sehr schnell eine Orientierung über die Stellung einer großen Reihe von Figuren zu erfolgen hat, deutlich, um wieviel bei derartigen Orientierungen durch den Tastsinn der Blinde infolge seiner ständigen Übung dem Sehenden überlegen sein muß.



Von höherem Interesse als der Rechenunterricht ist der Unterricht, den der Blinde in der Geometrie empfängt, weil er zu ganz eigenartigen Methoden geführt hat, aus denen vielleicht auch für den Geometrieunterricht Sehender manches zu gewinnen ist. In der Regel nimmt der geometrische Unterricht seinen Ausgang von Körpern, an denen die Begriffe Punkt, Linie, Fläche gewonnen werden. Ich gehe etwas ausführlicher nur auf den Unterricht in ebener Geometrie ein, indem ich einige Me-

1) Nach J. Matthies, Das Blindenunterrichtswesen im Deutschen Reich (S. 391 –441 in dem Sammelwerk von W. Lexis, Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich. Bd. 3. Berlin 1904) kam 1900 in Preußen auf 1600 Einwohner 1 Blinder. In den 16 preußischen Blindenanstalten gab es 1911 1284 männliche und 933 weibliche Zöglinge, darunter 518 Knaben und 348 Mädchen im Alter von 6–14 Jahren.

thoden schildere, die man mir in der Kgl. Blindenanstalt in Steglitz und in der städtischen Blindenanstalt in Berlin gezeigt hat, und die mit gewissen Modifikationen ihren Einzug in fast alle Blindenanstalten gehalten haben sollen. Vielfach findet Verwendung die sogenannte Heboldtsche Scheibe, welche aus einer kreisrunden, ziemlich dicken Holzscheibe besteht, die am Rande in Abständen von 10 zu 10° tiefere Einschnitte besitzt. Der Mittelpunkt der Scheibe ist durch einen hervorragenden Metallstift gekennzeichnet. An der Rückseite der Scheibe ist ein ziemlich langer Bindfaden befestigt, mit dem durch ein Einlegen in die Kerben Konstruktionsaufgaben gelöst werden. Im Blindenunterricht geht dem Beweis an einer Figur die sorgfältige Konstruktion derselben voraus, während der sehende Schüler in der Regel von der fertigen Figur ausgeht. Nur durch die Konstruktion gewinnt der Blinde die für den Beweis notwendige Einsicht in die Eigenschaften der Figur. Das lose Ende des Bindfadens wird nach Herstellung der gewünschten Figuren durch eine auf der Hinterseite der Holzscheibe angebrachte Metallzunge festgeklemmt, damit der Blinde mit den Figuren hantieren kann, ohne sie zu zerstören. An der Heboldtschen Scheibe lassen sich sehr schnell eine große Reihe von Figuren herstellen, über deren Eigenschaften man sich durch Abtasten der Einschnitte am Rande leicht orientieren kann. Auch die Kreissätze lassen sich bequem mit Hilfe dieser Scheibe ableiten. Ich war zugegen, wie einige Zöglinge der Kgl. Blindenanstalt in Steglitz mit dieser Scheibe schnell und sicher Operationen durchführten und Beweise erbrachten.

Ein anderes, einfacheres Mittel, welches beim Blindenunterricht in der Geometrie Verwendung findet und zugleich in noch höherem Maße als die Heboldtsche Scheibe zur Selbstbetätigung des Schülers herausfordert, besteht in einer Filzscheibe, auf welcher die Konstruktionen mit Hilfe von Bindfaden, der um die Köpfe von in sie gesteckten Nadeln geschlungen wird, ausgeführt werden.[1]) Als Konstruktionsmittel dienen ein Lineal, welches von Zentimeter zu Zentimeter Kerben aufweist, sowie ein

1) Branford erwähnt in seiner oben zitierten Arbeit, daß ein blinder, um die Mitte des 18. Jahrhunderts lebender Mathematiker Saunderson beim Geometrieunterricht zur Konstruktion von Figuren an der Tafel auch Schnüre verwendete. Br. weist darauf hin, daß dieses Konstruktionsverfahren in manchen Fällen dadurch Vorteile gewährt, daß an die Stelle starrer Figuren bewegliche treten. – An der Universität Halle doziert der mit 13 Jahren erblindete Mathematiker V. Eberhard, der zwei umfangreiche geometrische Werke veröffentlicht hat. 1. Zur Morphologie der Polyeder. Teubner 1891. „Das Buch ist topologischen Untersuchungen über die Eulerschen Polyeder als denjenigen Raumgebilden gewidmet, welche bei größter Einfachheit der Erzeugungsweise eine außerordentliche Formenmannigfaltigkeit aufweisen." „In seinen Deduktionen bedient sich der Verfasser nur elementarer Hilfsmittel, die unmittelbar der Anschauung entlehnt sind." 2. Die Grundgebilde der ebenen Geometrie. Teubner 1895. „Das Buch sucht . . . die Geometrie als Wissenschaft von den räumlichen Vorstellungen ganz allgemein aus den Grundtatsachen der Anschauung zu entwickeln." – Neuerdings lernte ich einen an der Göttinger Universität studierenden Mathematiker kennen, der im 6. Lebensjahr völlig erblindete. Er beschäftigt sich zwar in erster Linie mit Analysis, hat aber auch für Geometrie ein

Winkelmesser, welcher auch von 5 zu 5° Einschnitte besitzt. Um darzulegen, wie die Kinder vorgehen, bespreche ich am besten die Ausführung einer bestimmten Konstruktion. Der Lehrer stellt die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren, dessen Grundlinie gleich 10 cm und dessen beide anliegende Winkel gleich 50° resp. 60° sind. Der Zögling steckt zunächst mit Hilfe des gekerbten Lineals zwei Nadeln in einem Abstand von 10 cm in das Filzkissen und verbindet beide mit dem Bindfaden. Darauf werden mit Hilfe des Winkelmessers die Richtungen der freien Winkelschenkel bestimmt. Diese werden so weit verlängert, daß die sie markierenden Bindfadenstücke sich in dem dritten Eckpunkt des Dreiecks schneiden. Dieser Schnittpunkt wird durch Tasten gefunden und durch eine Stecknadel markiert. Zur Beweisführung wie überhaupt zur gegenseitigen Verständigung werden die Teile der Figuren wie beim Geometrieunterricht der Sehenden mit Buchstaben bezeichnet. Eine größere Gewandtheit im Gebrauch dieser Buchstaben wird dadurch erzielt, daß mit den Buchstaben nicht gewechselt wird, sondern daß für dieselben Stücke einer Figur stets dieselben Buchstaben Verwendung finden.

B. Die Taubstummen.[1])

Weniger als bei den Blinden unterscheidet sich die Didaktik der Mathematik bei den Taubstummen von der bei den normalen Kindern. Das mathematische Denken besitzt eine höhere Abstraktheit als das Denken in anderen Wissensgebieten. Nun fehlt dem unerzogenen Taubstummen die Sprache sowie jedes andere Symbolsystem von gleicher Vollkommenheit, welches zum Träger abstrakter Gebilde gemacht werden könnte. Beim Unterricht führt also der Weg zur Erwerbung mathematischer Einsicht über die Erwerbung des Verständnisses der Sprache und der Schrift.

Die Taubheit ist entweder angeboren oder (meist in den ersten 3 Lebensjahren) erworben.[2]) Kinder, welche vor dem 7. Lebensjahr ertauben, verlieren in der Regel die Sprache wieder, wenn nicht geeignete Maßregeln für ihre Erhaltung getroffen werden. Nach Walther bleibt der Taubstumme in der Entwicklung seiner geistigen Anlagen zurück. Verkümmerte intellektuelle Kräfte sollen bei ihm ungemein häufig vorkommen. Vielleicht ist dies nicht nur dadurch bedingt, daß die sprachlichen

ausgesprochenes Interesse. Herr Dr. Lietzmann, welcher diesen Herrn von Obersekunda bis Prima in Mathematik unterrichtet hat, schreibt mir über ihn: „Er beschrieb Konstruktionen der darstellenden Geometrie ohne Hilfe von Figuren so schnell, daß ich vielfach ohne Figur nicht folgen konnte."

1) Nach E. Walther, Das Taubstummenbildungswesen im Deutschen Reich (S. 347–390 des oben zitierten Sammelwerks von W. Lexis) gab es 1903 in Deutschland 1 Taubstummen auf etwa 1000 Einwohner. (Zitiert als Walther I.) In den 48 preußischen Taubstummenanstalten gab es 1911 2691 männliche und 2186 weibliche Zöglinge, darunter 2304 Knaben und 1843 Mädchen im Alter von 6–14 Jahren.

2) E. Walther, Handbuch der Taubstummenbildung. Berlin 1895. (Zitiert als Walther II.) S. 56.

Elemente als Träger geistigen Lebens fehlen, sondern auch dadurch, daß die allgemeine Entwicklung des Gehirns in der wichtigsten Entwicklungsperiode mangels der Anregung durch akustische Eindrücke zurückgeblieben ist. So stellt Walther taubstumme Kinder von 8 Jahren kaum auf die Stufe normaler Kinder von 5 Jahren. Auch die tüchtigen Taubstummen kommen über eine bescheidene Mittelbildung nicht hinaus[1]) (Walther II, S. 92). Wie intellektuell, so steht der Taubstumme nach Walther auch sittlich mehr auf der Stufe des harmlosen, unbefangenen Kindes.

Mit der Gebärdensprache vermag das taubstumme Kind weder in der natürlichen Form, die sich auf angeborene Ausdrucksbewegungen stützt, noch in der vervollkommneten künstlichen Form sehr weit zu kommen, für das Abstrakte eignet sie sich gar nicht. Die an die natürliche Gebärde anknüpfende französische Methode des Taubstummenunterrichts ist darum mit Recht von der viel geeigneteren deutschen Methode, der Lautsprachenmethode, verdrängt worden.

Ehe bei Taubstummen mit dem eigentlichen Sachunterricht begonnen werden kann, hat ein sehr intensiver sprachlicher Unterricht zu erfolgen. Der Artikulationsunterricht, der mit der Produktion einzelner Laute beginnt und von diesen ausgehend Lautkombinationen und Worte aufbaut, erstreckt sich über etwa 3 Jahre, aber auch späterhin, wenn der eigentliche Sprachunterricht einsetzt, wird er nie ganz unterlassen. Die Erlernung der Sprache stützt sich einmal auf ein Absehen der Stellungen der Sprachorgane des Lehrers, andererseits auf ein Abtasten seiner Sprachorgane während ihrer Tätigkeit. Für den Taubstummen entfallen die akustischen Wortbilder gänzlich.[2]) Solange er die Sprache

1) Individuen wie die unten erwähnte taubstumme — und dazu noch blinde — Helen Keller stellen ungewöhnliche Ausnahmen dar.

2) Von den völlig tauben Kindern sind diejenigen Kinder zu trennen, welche noch einige Hörreste besitzen. Sie verstehen die Flüstersprache überhaupt nicht mehr, laut gesprochene Sprache aber nur aus einer Entfernung von einigen Zentimetern. In der Regel werden dabei die Vokale noch besser verstanden als die Konsonanten. Wenn man diese Kinder in die Taubstummenschulen schickt, ohne dort ihren geringen Hörresten beim Unterricht Rechnung zu tragen, so erlernen sie auch nur die Sprache mit derjenigen Unvollkommenheit, die stets der Sprache der völlig Ertaubten anhaftet. Es ist notwendig, derartige Kinder in besonderen Klassen zusammenzuschließen und sie nach besonderen Methoden zu unterrichten. Die erste aus 5 Jahrgängen bestehende Schule für Schwerhörige wurde von D. Reinfelder in Berlin 1907 begründet und steht unter seiner Leitung. Was die Zöglinge dieser Schule anbetrifft, so haben viele von ihnen eine sehr deutliche Sprache, der man nicht anhört, daß sie von nahezu Tauben gesprochen wird. Es wird dies nun dadurch erreicht, daß der Unterricht aus einer nach Abhören und Absehen kombinierten Methode erteilt wird. Im Unterricht kommt von seiten des Lehrers ein Sprachrohr zur Verwendung, an welches durch Schlauchleitungen eine Reihe von Hörrohren angeschlossen werden können, so daß gleichzeitig mehrere Schüler das vom Lehrer Gesprochene vernehmen. Ein größerer Wert als auf das akustische Element wird indessen auf das optische beim Sprachunterricht gelegt. Die Schüler lernen es auch, vom Munde des Lehrers abzulesen, wie es beim Taubstummenunterricht geschieht.

nur durch Sprechen kennen gelernt hat, bestehen für ihn die Sprachvorstellungen nur aus motorischen Elementen. Sobald der Schreibunterricht beginnt, was übrigens jetzt in der Regel mit Beginn des Unterrichts überhaupt der Fall ist, erhält das Kind auch die Schriftbilder der Worte, auf die es sich nun neben den motorischen Wortbildern beim Vorstellen und Denken stützen kann.

„Der Rechenunterricht tritt ein, wenn die Schüler sprachlich so weit gefördert sind, daß sie die Zahlen zu sprechen vermögen, wenn also das Rechnen mit Hilfe der Lautsprache möglich ist, demnach nicht vor dem zweiten Schuljahre.“ „Es verfolgt den Zweck, die Taubstummen für das praktische Rechnen zu befähigen und sie im abstrakten Denken und korrekten Sprechen zu üben“ (Walther I, S. 376). Der Unterricht in der Raumlehre tritt gegenüber dem Rechenunterricht zurück. „Unter besonderen Umständen können einige Gebiete der Raumlehre, die für das praktische Leben Bedeutung haben, zur Behandlung kommen“ (Walther I, S. 376).

„Der Anschauungsunterricht bildet das Sachgebiet, an das sich der Rechenunterricht anzuschließen hat“ (Walter II, S. 519). Für den Rechenunterricht hat man bei den Taubstummen stets an dem Prinzip höchstmöglicher Anschaulichkeit festgehalten. Auch hat man nie die Betonung des Praktischen als Ausgangspunkt und als Ziel unterlassen. So gibt man den Kindern die Gewichte selbst in die Hand, läßt sie auf der Chaussee selbst einen Kilometer abmessen. Sie lernen mit dem Geld umgehen, indem sie fingierte Märkte besuchen und dort Einkäufe vornehmen.

Nach Hilger „können beim ersten Rechenunterricht die Zahlenbilder ohne jeden Nachteil für diesen sowohl bei der Gewinnung der Zahlvorstellungen als für das Verständnis der Grundrechnungsarten vollständig entbehrt werden“ (Walther II, S. 555). Die Bildung der Zahlbegriffe wird durch Mengen von Gegenständen angeregt. „Es fällt dem kleinen Taubstummen außerordentlich schwer, die Zahl von der Sache zu abstrahieren ... Es muß mit möglichster Anschaulichkeit verfahren werden, falls das Geistige apperzipiert werden soll“ (Walther II, S. 560). Es tritt darum ein beständiger Wechsel in der Art der veranschaulichenden Gegenstände statt. So kommt es zunächst eigentlich überraschend, „daß (wegen des kleinen zur Verfügung stehenden Sprachschatzes) die Taubstummenanstalt entgegen der Volksschule das Rechnen mit reinen Zahlen beginnen muß und nur ganz allmählich zu benannten Zahlen fortschreiten kann“ (Walther II, S. 537).

Ich machte die Beobachtung, daß beim gemeinsamen Sachunterricht der Lehrer nicht lauter spricht als vor einer Klasse normaler Kinder. Die Kinder verstehen die Worte dadurch, daß sie sich auf das Ablesen und die wenigen von ihnen gehörten Laute stützen. Ihre Hörreste werden mehr im Dienste der Spracherlernung verwendet als im Dienste des Sprachverständnisses.

C. Die Taubstummblinden.[1])

Die Schwierigkeiten, die sich dem Unterricht von Blinden und Taubstummen einzeln bieten, kombinieren sich beim Unterricht derjenigen Kinder, die sowohl taub wie blind sind. Es gibt nur wenige unter ihnen, die eine kongenitale Taubheit und Blindheit besitzen. Meist ist bei kongenitalem Gegebensein des einen Gebrechens das andere zu einem späteren Zeitpunkt erworben worden. Relativ häufig sind die Fälle, in denen im Kindesalter infolge einer Gehirnhautentzündung gleichzeitig Erblindung und Ertaubung eingetreten ist. Je früher sich beide Gebrechen einstellen, um so verhängnisvoller gestalten sich ihre Wirkungen für die weitere Entwicklung des Kindes.

Die größte Berühmtheit erlangte unter den überhaupt bekannt gewordenen Taubstummblinden die infolge einer im 19. Monat eingetretenen Erkrankung ertaubte und erblindete Amerikanerin Helen Keller, die durch geeignete Methoden geistig so weit gefördert wurde, daß sie die Universität absolvierte und sich in ausführlicher Weise in verschiedenen Schriften über Fragen ihres eigenen Seelenlebens verbreitet hat[2]). In Helen Keller war ohne Zweifel ein geistig hochbegabtes Individuum von den Sinnesdefekten getroffen worden. Bei einem Besuch der Anstalt für Taubstummblinde in Nowawes[3]) war ich nun aber sehr überrascht zu sehen, wieviel durch zweckmäßige Methoden auch aus ihrer Beanlagung nach nicht hochstehenden Taubstummblinden herauszuholen ist. Ich beziehe mich in meinem Bericht auf solche Kinder, die völlig blind und taub sind und bei denen der Unterricht auch in keiner Weise an Erfahrungen aus einem früheren Zustand der Integrität eines oder beider Sinne anknüpfen konnte.

Man kommt diesen Kindern durch Verwendung eines Fingeralphabets bei, welches ihnen in eine Hand hineingetastet wird. Jeder Buchstabe dieses Fingeralphabets wird durch eine charakteristische Stellung der Finger einer Hand dargestellt. Dieses Fingeralphabet wurde früher vielfach von den sehenden Taubstummen zur Verständigung verwendet und findet auch jetzt noch gelegentlich dazu Verwendung. Die Taubstummblinden umfassen mit ihrer Hand die die Buchstaben darstellende Hand

1) Ich glaubte, die Taubstummblinden wegen des allgemeinen pädagogischen Interesses, das sie beanspruchen können, mit anführen zu sollen, obwohl über ihre mathematische Ausbildung fast nichts zu sagen ist. – Zur Literatur der Taubstummblindheit verweise ich auf die Arbeiten von Hoppe, Die Taubstummblinden, Nowawes 1910 und von G. Riemann, 1. Taubstumm und blind zugleich. Berlin 1895; 2. Psychologische Studien an Taubstummblinden. Berlin 1905; 3. Die Arbeit an den Taubstummblinden. Vortrag 1909.

2) Vgl. z. B. Helen Keller, Die Geschichte meines Lebens. Stuttgart 1905. – Eine andere berühmte Taubstummblinde ist behandelt worden von W. Jerusalem, Laura Bridgman. Wien 1890. Laura Bridgman (1829–1889) war die erste Taubstummblinde, welche eine systematische Erziehung empfing.

3) Es sind dort etwa 30 Kinder untergebracht. Nach der Volkszählung vom 1. Dez. 1905 gab es in Preußen 144 taubstummblinde Personen.

dessen, der mit ihnen in Verbindung treten will. Der eigentliche Unterricht beginnt nun nicht mit einzelnen Buchstaben, sondern mit ganzen Wörtern, die erst viel später in ihre Elemente zerlegt werden[1]). Dem Kinde werden in die eine Hand einzelne Gegenstände zur Betastung gegeben, während ihm in die andere Hand die Wörter dieser Gegenstände buchstabiert werden. Hier kommen einfache handliche Gegenstände in Betracht, mit denen das Kind zu spielen gewohnt ist, wie ein Ball, eine Kerze, eine Puppe u. dgl. m. Mit den einzelnen Gegenständen werden immer und immer wieder die Buchstabengruppen des Fingeralphabets assoziiert. Dieses Verfahren ist rein mechanisch und wird so lange fortgesetzt, bis das Kind imstande ist, die Buchstabengruppen selbst zu wiederholen, die den einzelnen Gegenständen zugeordnet sind. Das Kind braucht also zunächst noch kein Bewußtsein davon zu haben, daß die Tastkomplexe die Gegenstände b e d e u t e n, welche ihm gleichzeitig mit den Tastkomplexen geboten werden. Wie man mir in Nowawes versicherte, stellt sich dieses Bewußtsein bei fast allen Kindern ziemlich plötzlich ein; auf einmal scheint in ihnen eine Art Erleuchtung einzutreten, daß ihnen in den Tastkomplexen ein Mittel übergeben wird, durch welches sie aus ihrer seelischen Einsamkeit herauskommen und mit ihrer Umgebung in Verbindung treten können[2]). Das Aufdämmern dieser Erkenntnis dokumentiert sich auch in der Tatsache, daß die Kinder von diesem Zeitpunkt an darauf dringen, daß man ihnen die Bezeichnungen für von ihnen vorgezeigte Gegenstände mitteile. Bekanntlich gibt es auch bei der sprachlichen Entwicklung des normalen Kindes einen Zeitpunkt, in dem es aus seiner Rezeptivität für sprachliche Ausdrücke herausgeht und nach den Namen der Objekte seiner Umgebung fragt.

Nachdem man dem Kind die Zeichenkomplexe für einzelne Gegenstände beigebracht hat, geht man zur Mitteilung der Zeichenkomplexe für ihre Eigenschaften über. Man macht auf das „Rundsein" des Balles, das „Langsein" der Kerze usw. aufmerksam und fingert dem Kind Sätze in die Hand wie „der Ball ist rund", „die Kerze ist lang" usw. Wohlgemerkt gibt man diese vollständigen Sätze und begnügt sich nicht etwa damit, Kombinationen wie „Ball rund", „Kerze lang" usw. auszudrücken. Man will eben das Kind von vornherein nicht nur mit den Elementen der Sprache, sondern auch mit den Satzformen vertraut machen, die es später anwenden muß. Das Kind soll sich aus Sätzen, wie „der Ball ist rund" usw. die einzelnen Worte selbst herausschälen und erkennen, wie das Verhältnis von Subjekt und Prädikat grammatikalisch zum Ausdruck

1) Beim Leseunterricht des sehenden Kindes kann man auch von ganzen Wörtern ausgehen und sie in ihre Elemente zerlegen (analytische Methode). Ihr steht die synthetische Methode gegenüber, die von den einzelnen Buchstaben ausgeht und diese zu Wörtern zusammensetzt.

2) Helen Keller gibt in ihrer Lebensbeschreibung eine ganz ähnliche Schilderung von dem ersten Fall, bei dem ihr der Symbolwert der ihr in die Hand getasteten Buchstabengruppen zum Bewußtsein kam.

kommt. Man beachte, wenn man zunächst über diese Methode etwas überrascht sein sollte, daß wir ja auch mit dem die Sprache erlernenden normalen Kind in ganzen Sätzen und nicht in lose zusammengestellten Wörtern sprechen. Es wird also beim Taubstummblinden die Methode der Spracherlernung versucht, die für das normale Kind die natürliche ist.

Prinzipiell wäre die dem taubstummblinden Kinde übermittelte Fingersprache für einen Verkehr mit demjenigen Teil seiner Umgebung, der in diese Zeichensprache eingeweiht ist, ausreichend. Der Unterricht bleibt indessen hierbei nicht stehen. Man unterrichtet die Taubstummblinden auch in der Lautsprache. Die Erlernung der Lautsprache, die schon dem sehenden Taubstummen keine geringe Mühe macht, ist nun für die Taubstummblinden mit außerordentlich großen Schwierigkeiten verbunden. Für sie fällt ja das Absehen von den Sprachorganen des Lehrers gänzlich fort. Sie müssen allein auf Grund eines Abtastens der Organe des Lehrers, die sich beim Sprechen betätigen, zu einer Nachahmung dieser Tätigkeit gebracht werden. Diejenigen Kinder, die man mir in Nowawes vorstellte, beherrschten die Lautsprache in einem solchen Grad, daß ich sie ohne große Mühe verstehen konnte.

Während Taubstumme und Blinde zu einer gewissen Selbständigkeit im bürgerlichen Leben gelangen können, bleiben die Taubstummblinden unselbständig und sind stets auf die weitgehende Unterstützung von seiten ihrer Umgebung angewiesen. Demgemäß beschränkt sich auch in der Regel ihr Unterricht auf die Mitteilung des für den Verkehr mit ihrer Umgebung Notwendigsten. Das gilt auch für das Rechnen, welches durch Betasten von kleinen gleichartigen Gegenständen beigebracht wird. Immerhin überraschte mich ein Knabe, den man mir vorstellte, dadurch, daß er Additionen und Subtraktionen im Zahlenbereich bis 100 schnell im Kopf zu lösen vermochte. Das Rechnen beginnt wie bei den Taubstummen mit der nackten Zahl. Raumverhältnisse lernen die Kinder kennen durch Modellieren, Flechten und andere Handarbeiten.

b) Zur Psychologie und Pädagogik der Schwachsinnigen.

Wie bereits oben angedeutet, erfordern eine ganz andere Behandlung als die mit Sinnesdefekten behafteten Kinder die Schwachsinnigen, bei denen Defekte des höheren Seelenlebens bestehen, von denen uns hier nur die Intelligenzdefekte beschäftigen sollen. Es ist nur schwer zu sagen, wo die noch innerhalb der physiologischen Breite liegende Dummheit aufhört und der pathologische Intelligenzdefekt beginnt. In der Regel scheidet man bei den Schwachsinnigen zwischen Idioten, Imbezillen und Debilen. Nur die mittleren und leichteren Grade des Schwachsinns sind einer pädagogischen Behandlung innerhalb der Schule

1) Über allgemeine Fragen der Psychopathologie des Kindesalters orientieren neben dem auf S. 130 genannten Heller: Th. Ziehen, Die Geisteskrankheiten des Kindesalters, Berlin 1902; L. Strümpell, Die pädagogische Pathologie, 4. Aufl., Leipzig 1910; W. Strohmayer, Vorlesungen über Psychopathologie des Kindesalters, Jena 1913.

zugänglich, die schwereren Fälle sind dem Einzelunterricht oder dem Psychiater zu überlassen.

Die Schwachsinnigen wurden bis vor gar nicht langer Zeit allgemein in den Volksschulen untergebracht, und das ist auch heute noch dort der Fall, wo man nicht zur Einrichtung besonderer für sie bestimmter Klassen übergegangen ist. Es ist kaum nötig, auf die Nachteile hinzuweisen, welche eine solche Nichtberücksichtigung der Schwachsinnigen nach Unterrichtsziel und Lehrverfahren für sie selbst, die Lehrer sowie die gesamte Klasse nach sich ziehen mußte. „Derartige Kinder drückten oft jahrelang buchstäblich dieselbe Schulbank, kamen nie aus der untersten Klasse heraus ... und wurden schließlich seelisch und moralisch auf ein noch tieferes Niveau herabgedrückt, als sie ohnedies einnahmen."[1])

Ein wichtiger Schritt zu einer stärkeren Berücksichtigung der verschiedenen Intelligenzgrade der Kinder in der Schule ist von dem Mannheimer Schulrat A. Sickinger getan worden. Seine Maßnahmen gehen dahin, diejenigen Schüler, welche infolge einer mangelnden Begabung nicht dem normalen Lehrverfahren unterworfen werden können, in besonderen Klassen (Förderklassen) zusammenzuschließen und sie dort einem niedriger gesteckten Ziel zuzuführen. Diejenigen Schüler, welche auch in diesen Förderklassen wegen pathologischer Unbegabtheit nicht weiterzukommen vermögen, sollen in Hilfsklassen untergebracht werden. Mehrere Hilfsklassen bauen sich aufeinander auf und bilden eine Schule (Hilfsschule). Das Hilfsschulwesen hat bis jetzt eine durchgehende einheitliche Regelung nicht erfahren. Sowohl was die Einschulung, die Anzahl der Klassen, das Unterrichtsziel und die Unterrichtsmethode betrifft, gibt es zahlreiche lokale Abweichungen.[2])

Die Einschulung in die von mir besichtigte Göttinger Hilfsschule erfolgt nach einem zweijährigen erfolglosen Besuch der Volksschule. Die Überweisung des Zöglings geschieht auf Grund einer vorhergegangenen Konferenz der Lehrer sowie einer Untersuchung von ärztlicher Seite. Für jedes Kind wird ein Personalbogen geführt, der über die vermutliche Ursache seines Schwachsinns, die Entwicklung in körperlicher und geistiger Beziehung, den Zustand beim Eintritt in die Hilfsschule sowie über die Entwicklung im Laufe des Unterrichts Auskunft gibt.

Intelligenzprüfungen. Wie man sieht, erfolgt die Überweisung in die Hilfsschule auf Grund einer mehr oder weniger subjektiven Beurteilung von seiten einzelner Personen. Wenn auch die Gefahr nicht so groß ist, daß hierbei Fehlgriffe begangen werden, so scheint es doch erwünscht, an die Stelle subjektiver Einschätzungen objektive Maßstäbe zu setzen. Die experimentelle Pädagogik hat sich nun in den letzten Jahren intensiv mit der Frage beschäftigt, ob nicht eine einwandfreie exakte Bestimmung der Begabung eines Schülers möglich sei. Die Leistungen, die man als Leistungen der Intelligenz bezeichnet, stellen sich ja bei einer näheren Untersuchung durchaus nicht als etwas so Einfaches heraus, wie die Vulgärpsychologie annimmt. Es

---

1) Marg. N. Zepler, Die Hilfsschulen (Nebenklassen) für schwachsinnige Kinder. Zeitschr. für exper. Pädag. Bd. 6, 1908.

2) Zur Orientierung kann dienen B. Männel, Vom Hilfsschulwesen. Teubner 1905.

sind eine ganze Reihe seelischer Kräfte, die bei der Ausführung intelligenter Leistungen in Anspruch genommen werden können, von denen hier nur Gedächtnis, Wille, Aufmerksamkeit, Auffassungs- und Urteilsfähigkeit, Kombinationsgabe und Abstraktionsfähigkeit genannt werden mögen. Die Bemühungen der Begabungsforschung haben nun zum Ziel, durch zweckmäßig eingerichtete Prüfungen (tests) die verschiedenen Teilfaktoren, die bei intelligenten Leistungen mitspielen, zu bestimmen sowie die Grade der Begabung in möglichst exakter Weise gegeneinander abzugrenzen. Nachdem sich ein erstes Bedürfnis zur objektiven Bestimmung von geistigen Leistungen in der Psychiatrie geltend gemacht hatte, wurden analoge Versuche mit pädagogischer Absicht unter sehr weitgehender Vervollkommnung der Methode von dem geistvollen französischen Psychologen A. Binet[1]) (mit Unterstützung des Arztes A. Simon) unternommen. Er führte Teststaffeln ein, d. h. Reihen von Tests, die vom Leichteren zum Schwereren angeordnet waren. Durch die Anwendung dieser Tests soll ermittelt werden, ob ein Kind diejenige Stufe der Entwicklung erreicht hat, die bei normaler Begabung in seinem Alter zu erwarten ist. Ergeben die Prüfungen, daß das Kind um eine gewisse Stufe hinter der zu fordernden Höhe der Intelligenz zurückbleibt, so soll seine Überweisung in die Hilfsschule erfolgen. Die von den französischen Forschern begonnenen Versuche wurden von vielen Seiten aufgenommen und weitergeführt. Diese Untersuchungen haben nicht nur eine Abgrenzung der Normalen von den Nichtnormalen im Auge, es ist auch der Ausbau von Methoden begonnen worden, durch die innerhalb einer Gruppe von Normalen annähernd gleicher Entwicklungsstufe, z. B. innerhalb der Schüler einer Klasse, die intellektuellen Verschiedenheiten bestimmt werden sollen. Wenn auch von einer voreiligen Anwendung der erhaltenen Resultate immer wieder nur gewarnt werden muß, so ist doch die Hoffnung berechtigt, daß wir in der Begabungsforschung noch manche Einsicht in theoretischer Hinsicht und wertvolle Ergebnisse für die Praxis zu erwarten haben[2]).

Entsprechend dem Umstand, daß eine Hilfsklasse fast so viele in ihrer pathologischen Beanlagung scharf voneinander abweichende Individualitäten wie Kinder überhaupt enthält, muß der Unterricht in hohem Maße individuell sein. Der Unterricht empfängt so mehr den Charakter von Einzelunterricht, was sich infolge der niedrigen Zahl von etwa 12 Schülern (Knaben und Mädchen) einer Klasse ermöglichen läßt. Der natürlichen Schwierigkeit des Unterrichts in den Hilfsklassen wird durch die weitgehende Freiheit, die dem Hilfsschullehrer hinsichtlich der Abgrenzung des Stoffes und seiner Behandlung zugestanden wird, Rechnung getragen. Der Lehrer ist nicht gehalten, während einer Stunde nur den vom Stundenplan angegebenen Stoff zu behandeln. Merkt er, daß seine Kinder mit ihrer von Natur so kleinen Aufmerksamkeitsenergie dem Unterricht nicht mehr folgen können, so kann er zu einer anderen Arbeit oder auch zur Unterhaltung übergehen.

Wenn man beim Unterricht normaler Schüler schwanken kann, wie man die Grenzen des Anschauungsunterrichts abstecken soll, so hat man

---

1) Binets Arbeiten sind zumeist in der von ihm herausgegebenen Année psychologique erschienen.

2) Es liegt bereits eine sehr umfangreiche Literatur über das Intelligenzproblem vor. Ich begnüge mich damit, die zusammenfassende Darstellung von W. Stern zu nennen, die sich im Bericht über den 5. Kongreß für exper. Psychol., Leipzig 1912 findet. Stern macht dort auch ausführliche Literaturangaben. Mit dem Intelligenzproblem hat sich auch der erste deutsche Kongreß für Jugendbildung und Jugendkunde zu Dresden 1911 beschäftigt. Kongreßbericht Teubner 1912.

in der Hilfsschule nie einen Augenblick daran gezweifelt, daß der Unterricht nur bei höchster Anschaulichkeit Erfolg verspricht. So verzichtet auch der Rechenunterricht zunächst auf jede Art der Abstraktheit und begnügt sich mit dem Rechnen mit benannten Zahlen. Wer einmal dem Rechnen in einer unteren Hilfsklasse beigewohnt hat, der könnte durch den Umstand, daß auch die einfachen Zahlenoperationen trotz beständiger Wiederholung nicht ausgeführt werden können, wie z. B. die Operation, eine Kugel und noch eine Kugel = zwei Kugeln, leicht in seinem Glauben erschüttert werden, daß die mathematischen Erkenntnisse mit einem besonderen Grad der Evidenz gegeben seien. Die Schwierigkeit, die selbst das Rechnen mit Gegenständen bereitet, ist so groß, daß man in der Regel im ersten Schuljahr (d. h. meist dem dritten Schuljahr überhaupt) nicht über den Zahlenbereich von 1—10 hinauskommt! Mit welch langsamen Fortschritten im Verständnis von Zahlenverhältnissen bei Schwachsinnigen zu rechnen ist, das entnehme man den Vorschlägen, die Th. Ziehen auf S. 63f. seines oben erwähnten Buches auf Grund seiner Erfahrungen für die Vermittlung von Zahlvorstellungen an Schwachsinnige macht.

„Durchaus verpönt ist das mechanische vorstellungslose Hersagen von Zahlen. Am vorteilhaftesten beginnt man in der Weise, daß man dem Kinde fünf oder sechs Gegenstände vorlegt, unter welchen sich zwei gleiche befinden, während alle anderen erheblich verschieden sind, also z. B. ein Messer, ein Tuch, zwei Teller und einen Stock. Von Anfang an stelle ich die beiden Teller nebeneinander. Nun sage ich dem Kinde vor: ein Messer, ein Tuch, zwei Teller und stelle dabei die Teller aufeinander usw. Auch die Erläuterung ein Teller, „noch" ein Teller oder „auch" ein Teller kann hinzugefügt werden. Dann stelle ich die Teller wieder nebeneinander und lasse das Kind nachsprechen: ein Messer, ein Tuch, zwei Teller und lasse dabei das Kind die Teller aufeinanderstellen, nachdem es entsprechend den zwei Tellern zwei Deutbewegungen ausgeführt hat. Die räumliche Zusammenfassung erleichtert den Erwerb von Zahlenvorstellungen bei schwachsinnigen Kindern außerordentlich. Der Gebrauch sogenannter Rechenmaschinen usw. ist für die ersten Zahlübungen nicht zweckmäßig. Der weitere Verlauf der Übungen ist folgender: Man fordert nun das Kind, indem man ihm dieselben Gegenstände vorlegt, auf, „die zwei Teller" zu geben. Diese Übung muß sehr lange fortgesetzt werden, meist wird an diesem Punkte zu rasch vorgegangen. Erst wenn man diese Übung sehr oft wiederholt und auch z. B. statt des Tuchs einmal diesen oder jenen anderen Gegenstand (in einem Exemplar) verwendet hat, nimmt man statt eines Messers zwei Messer, legt also dem Kinde z. B. zwei Messer, ein Tuch, zwei Teller und einen Stock vor und wiederholt die analoge Übung. Dann geht man dazu über, daß man einen dritten und später einen vierten Teller abseits von den beiden zuerst gezeigten Tellern aufstellt und nun bezeichnen läßt: ein Teller, zwei Messer, ein Tuch, zwei Teller, ein Stock. Ganz allmählich gelangt man zu einer Reihe, welche nur aus Tellern besteht, von welchen zwei etwas näher beieinander stehen. Diese läßt man erst abzählen, stets unter Deutbezeichnung: „ein Teller", „ein Teller", „ein Teller" – nun folgen die beiden, dichter beieinander stehenden Teller, welche man nun aufeinandersetzt bzw. aufeinandersetzen läßt, wobei gesagt und nachgesprochen wird „zwei Teller" usw. Jetzt erst ist das Kind so weit, daß man die Übung beginnen kann: gib mir zwei Teller! und schließlich auch dem Kind bald einen, bald zwei aufeinandergelegte Teller vorlegen und fragen kann: wieviel Teller sind das? Nur äußerst langsam erweitert man den Zahlenkreis. Die Schwierigkeiten der Bildung von Zahlvorstellungen ist oft außerordentlich groß und kann nur von demjenigen gewürdigt werden, welcher selbst oft diesen Zahlenunterricht bei solchen Kindern versucht oder kontrolliert hat."

In experimenteller Weise hat Ranschburg das elementare Rechnen des Schwachsinnigen mit dem des normalen Kindes verglichen[1]). Um nur ein Resultat seiner eingehenden Untersuchungen zu nennen, so fand er bei Subtraktionsleistungen im Zehnerzahlenkreis, „daß es zwischen der Leistungsfähigkeit der normalen Schwachen und der Schwachbefähigten (Schwachsinnigen) nicht nur den komplizierten, sondern auch den elementarsten Rechenaufgaben gegenüber schon bezüglich des Umfanges der Leistung gewisse Unterschiede geben kann, und daß es gewisse Grenzen gibt, welche auch von den schwächsten Normalen im Alter von 8 Jahren überschritten werden, während die pathologisch Schwachbefähigten zum Teil erst nach mehrjährigem, speziellem Unterricht, mit bedeutender Verspätung, zum Teil jedoch überhaupt nicht über dieselben hinwegkommen". Eine Berücksichtigung des Zeitaufwandes beim Rechnen läßt den Unterschied zwischen den Normalen und den Schwachbefähigten noch deutlicher zum Ausdruck kommen. „Im Alter von über 8 Jahren sprechen Subtraktionswerte (im Zehnerzahlenkreis) von mehr als 3 Sekunden Dauer mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90%, die 4 Sekunden übersteigenden Subtraktionszeiten mit einer Wahrscheinlichkeit von fast 100% gegen eine normale geistige Entwicklung" (Ranschburg, a. a. O., Bd. 9, S. 261).

5. Anhang.
Die geistige Ermüdung und die Hygiene der geistigen Arbeit.[2])

Es war oben (S. 60) von einer Ermüdung die Rede, die sich nicht in subjektiver Hinsicht, wie z. B. in den Ermüdungsgefühlen, äußern soll, sondern in irgendwelchen objektiven Zuständen des leiblichen Organis-

1) P. Ranschburg, Zur physiologischen und pathologischen Psychologie der elementaren Rechenarten. Zeitschr. für exper. Pädag. Bd. 7, 1908 und Bd. 9, 1910.

2) Neben der Monographie von M. Offner, Die geistige Ermüdung, Berlin 1910, ist hier vor allem die flüssig geschriebene Darstellung Ed. Claparèdes zu lesen in seinem Buch Psychologie de l'enfant et pédagogie expérimentale. Genf 1911. Weiter kommt in Betracht die 11. und 12. Vorlesung von Meumann. Bd. 2. Wer in

mus. Man könnte fragen, ob denn diese letzteren Zuständlichkeiten nicht bedeutungslos für die geistige Leistungsfähigkeit seien, da doch geistige und körperliche Arbeit durch eine unüberschreitbare Kluft getrennt seien. Es sei an dieser Stelle auf die Beziehungen zwischen geistiger und körperlicher Arbeit, sowie auf einige damit zusammenhängende pädagogische Probleme in kurzen Worten eingegangen.

Von grundlegender Bedeutung für das Verständnis der geistigen Arbeit waren die Untersuchungen des italienischen Physiologen Mosso.[1]) Er hat gezeigt, daß, so wenig körperliche und geistige Arbeit auch unmittelbar miteinander gemein haben, sie doch in ihrer Wirkung ganz gleich sind. Sowohl bei körperlicher wie bei geistiger Arbeit entstehen durch eine Dissimilation von Stoffen des Organismus Zerfallsprodukte (Ermüdungsgifte) und sowohl das Entstehen dieser Ermüdungsgifte wie das Verschwinden von abbaufähigen Stoffen bewirken, daß die Leistungsfähigkeit des in Anspruch genommenen Körperteils herabgeht. Die Dissimilationsvorgänge haben zunächst zwar nur lokalen Charakter, die Blutzirkulation indessen bedingt, daß aus nicht beanspruchten Teilen des Körpers neue Stoffe in die arbeitenden Gegenden transportiert werden, und daß andererseits die Ermüdungsgifte den ganzen Körper überschwemmen und so eine allgemeine Herabsetzung seiner Leistungsfähigkeit bewirken. Je nachdem, ob es sich um eine vorübergehende oder dauernde Herabsetzung der Leistungsfähigkeit handelt, wollen wir von einer Ermüdung oder einer Erschöpfung des Organismus sprechen. Es trifft nun zwar zu, daß sich die Herabsetzung der Leistungsfähigkeit des Organismus in der Regel auch subjektiv in jenen allen bekannten Ermüdungssymptomen bemerkbar macht, das ist aber durchaus nicht immer der Fall. Andererseits kommt es auch vor, daß sich subjektiv Ermüdungsgefühle einstellen, ohne daß von einer entsprechenden Herabsetzung der Leistungsfähigkeit des Organismus die Rede sein kann. „Es gibt Individuen, die sich sehr leicht müde fühlen, wenn sie auch ihre Kräfte noch lange nicht bis zum Maximum angespannt haben, und andere, die selbst eine hochgradige Erschöpfung nicht oder nur sehr wenig empfinden“ (Meumann, Bd. 2, S. 83).

Die auf die körperliche oder geistige Arbeit folgende Erholungspause bewirkt, daß die Ermüdungsgifte wieder ausgeschieden werden (durch die Nieren als Harnstoff, durch die Lungen als Kohlensäure und Wasser) und eine Restitution der abgebauten Stoffe (Assimilation) durch Zufuhr frischer Stoffe (Nahrungsaufnahme) erfolgt. Am ergiebigsten erfolgen diese Prozesse im Schlaf. Vermag in der dem Organismus gewährten Ruhepause nicht zum mindesten der erforderliche Ausgleich zu erfolgen

---

die Kritik der Methoden zur Untersuchung der Ermüdung eindringen will, sei auf die Arbeit von W. Baade verwiesen: Experimentelle und kritische Beiträge zur Frage nach den sekundären Wirkungen des Unterrichts, insbesondere auf die Empfänglichkeit des Schülers. Leipzig 1907.

1) A. Mosso, Die Ermüdung. 1892.

und findet so ein dauernder Abbau von Stoffen statt ohne entsprechende Assimilation, so wird die Herabsetzung der Leistungsfähigkeit des Organismus stationär, es tritt dann Erschöpfung ein.

Da man sich auf die subjektiven Symptome der Ermüdung nicht unter allen Umständen verlassen kann, und da diese, selbst wenn das der Fall wäre, keine objektiven Messungen zulassen, so hat man sich frühzeitig nach Methoden umgesehen, um die Ermüdungsgrade in objektiver Weise zu bestimmen. Wir können die Methoden zur Messung der Ermüdung mit Claparède in direkte und indirekte einteilen. Die direkten Methoden messen die Ermüdung wieder durch geistige Arbeit, während die indirekten Methoden die Änderungen bestimmen, welche die Ermüdung auf andere Funktionen, wie z. B. auf die Sinnesempfindlichkeit, die Muskelenergie, den Herzschlag ausübt (Claparède, a. a. O., S. 294). Damit eine Methode für pädagogische Zwecke brauchbar sei, muß sie auch beim Massenversuch exakte Resultate liefern, ohne zu umständlich zu sein.

Eine in unteren Klassen anwendbare direkte Methode ist das Diktatschreiben. Vor und nach der Arbeit, deren Ermüdungseffekt man bestimmen will, diktiert man Texte, die nach Umfang und Schwierigkeiten möglichst ähnliche Verhältnisse bieten und ermittelt nun die Zahl der Fehler und Verbesserungen, die vor und nach der Arbeit gemacht worden sind. Nach einer anderen Methode läßt man vor und nach der Arbeit einfache Rechnungen ausführen (Additionen, Multiplikationen) und ermittelt die während einer festen Zeit erreichte Menge des Gerechneten und die begangenen Fehler.

Die indirekten Methoden sind entweder psychologischer oder physiologischer Natur. Zu den physiologischen Methoden gehört die ergographische Methode Mossos, die darauf ausgeht, zu bestimmen, welche physische Arbeit von einer Muskelgruppe in verschiedenen Ermüdungszuständen geleistet werden kann.[1]) So fand Mosso eine starke Herabsetzung der Arbeitsleistung, nachdem durch Abhalten von Examina eine starke geistige Ermüdung eingetreten war. Von den indirekten psychologischen Methoden ist die von Griesbach benutzte sogenannte ästhesiometrische Methode die bekannteste. Bekanntlich müssen zwei gleichzeitig auf eine Hautstelle aufgesetzte Zirkelspitzen einen je nach der Stelle des Körpers verschieden großen Abstand besitzen, damit sie eben noch als zwei Zirkelspitzen aufgefaßt werden (Raumschwelle der Haut). Griesbach glaubte nun eine Zunahme der Raumschwelle mit zunehmender Ermüdung gefunden zu haben und wollte nach der jeweils erhaltenen

1) Sehr beachtenswert sind die von A. Lehmann in Kopenhagen veranlaßten Versuche, den Stoffwechsel während geistiger Arbeit unmittelbar durch Messung der bei dieser Arbeit produzierten Mengen von Kohlensäure zu bestimmen. Hier bietet sich die Möglichkeit, unmittelbar die Ermüdungswerte verschiedener geistiger wie körperlicher Leistungen zu bestimmen und miteinander zu vergleichen. Bericht über den 5. Kongreß für exper. Psychol., Leipzig 1912. S. 136ff.

Raumschwelle den Ermüdungszustand bestimmen. Diese Methode ist keineswegs so leicht durchzuführen, wie es den Anschein hat, auch sonst hat sie nicht die Erwartungen erfüllt, die man auf sie gesetzt hat. Weitere indirekte Methoden sollen hier nicht erwähnt werden.

Für die Pädagogik von besonderem Interesse sind die Untersuchungen über die fortlaufende geistige Arbeit. Diese am stärksten von dem Psychiater E. Kräpelin und seiner Schule[1]) geförderten Untersuchungen erstreben eine Analyse der über eine längere Zeit sich erstreckenden geistigen Arbeit, es werden also Leistungen unter Verhältnissen bestimmt, wie sie ähnlich in der Schule gegeben sind. Die Kurve, welche die im Verlaufe einer längeren Zeit zu den verschiedenen Zeitpunkten geleistete Arbeit darstellt, wird als Arbeitskurve bezeichnet. Das Studium des Verlaufs der Arbeitskurve hat nun nach zwei Richtungen interessante Resultate zutage gefördert. Es hat sich einmal gezeigt, daß auf ihre Gestaltung eine große Reihe kaum vermuteter Faktoren Einfluß gewinnt, andererseits haben sich trotz der generellen Wirksamkeit dieser Faktoren ungeahnt große individuelle Differenzen ergeben.

Die Ermüdung, welche wir uns sofort mit dem Beginn der geistigen Arbeit einsetzend zu denken haben, würde, wenn sie allein wirksam wäre, die Arbeitskurve von einer gewissen Höhe allmählich bis auf Null fallen lassen. Ihr entgegen wirkt die Übung, die, ihre alleinige Wirksamkeit vorausgesetzt, die Arbeitskurve beständig steigen lassen würde. Fördernd wirkt auch die Gewöhnung, worunter man das Zurücktreten der die Arbeit zunächst noch störenden Nebeneindrücke und das Hineinfinden in die neue Arbeit versteht. Außerdem führt Kräpelin als fördernd noch an die Anregung oder Arbeitsbereitschaft und den Antrieb, der wieder ein Anfangs-, Wechsel- oder Schlußantrieb sein kann.

Was die individuellen Unterschiede der Arbeitskurve angeht, so glaubt man im ganzen vier Typen derselben unterscheiden zu können. Bei dem ersten zeigt die Kurve einen ständig steigenden, bei dem zweiten einen ständig fallenden Verlauf. Beim dritten und vierten haben wir es mit einem zunächst steigenden und dann fallenden oder zunächst fallenden und dann steigenden Kurvenverlauf zu tun.

Welche Bedeutung haben die hier angedeuteten Dinge für die Schule? Zunächst möchte ich auf die für die Pädagogik sicher nicht unwichtige Erkenntnis hinweisen, daß körperliche und geistige Arbeit in ihrer Wirkung auf den Organismus als gleich anzusehen sind. Die technischen Fächer, vor allem das Turnen, sind also keineswegs als Erholungsfächer zu betrachten. Auch in den ihnen gewidmeten Stunden findet eine Ermüdung statt, die allerdings zunächt ganz andere Teile des Körpers betrifft als bei geistiger Arbeit. Sehr wahrscheinlich übersteigt der Ermüdungswert einer strammen Turnstunde den Ermüdungswert jeder anderen Unterrichtsstunde ganz wesentlich, so daß der

1) Siehe Kräpelins Psychologische Studien, Leipzig.

schädigende Einfluß, der von einer solchen Turnstunde auf den ihr folgenden Unterricht ausgeht, recht beträchtlich werden kann. Schon so wird man diesen Betrachtungen einen Einfluß auf die Gestaltung des Tagesstundenplans einräumen und in noch höherem Maße wird das der Fall sein können, wenn wir erst noch besser über den Ermüdungswert der verschiedenen Unterrichtsgegenstände orientiert sein werden.

Der allerdings noch in weiter Zukunft liegende, allen wissenschaftlichen Anforderungen genügende Ausbau von Methoden zur Untersuchung der Ermüdung wird die seit langer Zeit diskutierte Frage nach der Überbürdung der Schüler auf einen wirklich wissenschaftlichen Boden stellen. Das Lebensalter (z. B. Schuleintritt, Pubertätsentwicklung) wird bei der Überbürdungsfrage in besonderem Maße zu berücksichtigen sein.

Die Resultate, die das Studium der Arbeitskurve ergeben hat, werden bei der Bestimmung der Dauer der Unterrichtsstunden sowie bei dem Ausmaß der Pausen zu Rate zu ziehen sein. Gegen zu kurze Lektionen spricht, daß die Faktoren des Antriebs, der Gewöhnung und der Arbeitsbereitschaft in ihnen nicht voll zur Geltung kommen und ausgenutzt werden.[1]) Die Pausen müssen so gewählt werden, daß eine hinreichende Erholung möglich ist. Um die Übung möglichst wirksam zu machen, muß man eine zweckmäßige Verteilung der einem Gegenstand gewidmeten wöchentlichen Stunden vornehmen. Den individuellen Verschiedenheiten im Verlaufe der Arbeitskurve wird der Klassenunterricht auch eine gewisse Beachtung schenken können. Erst eine volle Berücksichtigung dieser Verhältnisse wird zu einer wissenschaftlich fundierten Hygiene der geistigen Arbeit in der Schule verhelfen.

1) Höfler, der einer von den wenigen ist, welche als Didaktiker die Wichtigkeit der Ergebnisse der experimentellen Pädagogik für die Unterrichtspraxis gelegentlich betonen, bemerkt (S. 73) ganz richtig mit Beziehung auf Versuche Burgersteins: „Nach dieser Methode nun könnte ein Lehrer, der sicher gehen will, daß er nicht zu viel und nicht zu wenig speziell an mechanischem Rechnen von seinen Schülern verlangt, Versuche darüber anstellen, wann für jede einzelne Rechnungsart das Optimum der Leistung erreicht ist; denn offenbar soll man nicht länger (in die Ermüdungszeit hinein), aber auch nicht viel kürzer die Übungen fortsetzen lassen. Der Schüler selbst würde, wenn er auf seine Zustände reflektieren und sie aussprechen könnte, in solchen Fällen sagen: 'Ach, jetzt wäre ich gerade so schön hineingekommen, und gerade jetzt muß ich aufhören'."

II. Teil.

Zur Psychologie des mathematisch-technischen und des künstlerischen Zeichnens.

Man kann das gesamte Zeichnen unter Berücksichtigung der verschiedenen erstrebten Ziele einteilen in ein mathematisch - technisches und ein künstlerisches Zeichnen. Das erstere verfolgt theoretische oder praktische Ziele, indem es sich in den Dienst der reinen Erkenntnis oder der Technik stellt. Das künstlerische Zeichnen, zu dem wir nicht nur das mit graphischen Mitteln (Bleistift, Kohle, Kreide usw.) operierende Zeichnen rechnen wollen, sondern auch das Arbeiten mit Farben, soweit es auf der Schule gepflegt wird, geht im Prinzip auf eine ästhetische Wirkung. Allerdings begnügt es sich als Zeichnen nach der Natur in den unteren Klassen mit der schlichten naturwahren Darstellung und läßt erst in den oberen Klassen diesen oder jenen ästhetischen Gesichtspunkt in der Darstellung mehr zur Geltung kommen.

Prinzipiell ist eine strenge Scheidung zwischen mathematisch-technischen und künstlerischen Zeichnungen nicht vorzunehmen. Eine sauber durchgeführte mathematisch-technische Zeichnung besitzt ganz sicher ästhetische Qualitäten, die sogenannten Schaubilder der Architekten werden ja mit der Absicht hergestellt, auch kraft des durch sie ausgelösten Wohlgefallens für den Plan des Architekten einzunehmen. Auf der anderen Seite läßt es sich der Künstler bisweilen angelegen sein, eine Maschine oder eine technische Anlage ästhetisch im Kunstwerk zu gestalten, welches dann auch dem Techniker manches sagen kann.

Zuweilen stellt man das mathematisch-technische Zeichnen als Linearzeichnen dem künstlerischen als Freihandzeichnen gegenüber. Hierzu ist nun zu bemerken, daß das mathematisch-technische Zeichnen gelegentlich auch Freihandzeichnen ist und daß sich auf der anderen Seite mit Hilfe von Zirkel und Lineal künstlerisch wirkende Zeichnungen erzielen lassen. So ist einerseits das Freihandskizzieren für technische Zwecke auf niederen technischen Schulen (Fortbildungsschulen usw.) allgemein üblich[1]), andererseits werden im sogenannten geometrischen Zeichnen mit Zirkel und Lineal Figuren entworfen, denen Wohlgefälligkeit der Form nicht abzusprechen ist. In der Schule herrscht allerdings das Freihandzeichnen im künstlerischen Zeichnen durchaus vor und das mathematische Zeichnen, in dem die darstellende Geometrie den größten

1) Vgl. hierzu z. B. K. Ott, Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie, IV. Teil. Diese IMUK-Abhandlungen, Bd. IV, Heft 2. Teubner 1913.

Raum einnimmt, arbeitet fast ausschließlich mit Zirkel und Lineal. Darum findet in den Lehrplänen noch vielfach die Gegenüberstellung von Freihandzeichnen und Linearzeichnen statt. Diesem Sprachgebrauch wollen auch wir uns in den nächsten Ausführungen gelegentlich anschließen, er ist vor einer falschen Auffassung ohnehin durch das Vorstehende bewahrt.

Die Betonung der Pflege der Raumanschauung, die sich im Programm zur Reform des mathematischen Unterrichts findet, hat zur Folge gehabt, daß auch dem Unterricht im mathematischen Zeichnen eine größere Aufmerksamkeit zugewendet wird. Was läßt sich von seiten der Psychologie zum Verständnis des Verhältnisses zwischen mathematischem Zeichnen und künstlerischem Zeichnen beibringen?

Es ist wohl gestattet, daß wir im folgenden aus dem mathematischen Zeichnen seinen wichtigsten Teil, die darstellende Geometrie, zum Vergleich mit dem künstlerischen Zeichnen herausgreifen. „Die darstellende Geometrie ... ist die Wissenschaft, welche lehrt, Raumgebilde (Punkte, Linien, Flächen, Körper) auf eine oder mehrere bestimmte Ebenen zu projizieren und auch umgekehrt solche Raumgebilde aus ihren Projektionen zu rekonstruieren." „Die theoretischen Grundlagen der darstellenden Geometrie sind rein mathematischer Natur, während zu ihrer praktischen Betätigung eine nicht geringe Zeichenfertigkeit erforderlich ist."[1]) Ist hier von der darstellenden Geometrie als von einer Wissenschaft die Rede, so ist das künstlerische Zeichnen, wie auch schon in seinem Namen angedeutet ist, eine Kunst. Wie in jeder Wissenschaft ist auch im mathematischen Zeichnen das Verständnis seiner Begriffsbildung von grundlegender Bedeutung. Wird eine seiner Zeichnungen noch so sauber und exakt in den Abmessungen ausgeführt: ohne Verständnis für das „Warum" der einzelnen Schritte hat sie ihren Zweck völlig verfehlt. Im mathematischen Zeichnen versucht man nicht, Körper möglichst erscheinungsgemäß darzustellen, man denkt sich dieselben von einem ideellen Gerüst von Linien durchzogen, welches die Körperform völlig zum Ausdruck bringt, und verwendet von diesen nur diejenigen, welche dem gerade vorliegenden konstruktiven Bedürfnis entsprechen. Es steht hiermit nicht im Widerspruch, daß man beim Unterricht gelegentlich vom konkreten Körper ausgeht, denn hier dient der Körper nur dazu, der Phantasie die Anlehnung jener für die Konstruktion wichtigen Linien zu erleichtern.[2]) Auch der Raum, in den die darstellende Geometrie ihre Körper stellt, ist nicht der unmittelbar wahrgenommene Raum, vielmehr ist es ein durch Definitionen seiner inneren Struktur nach festgelegter Raum, der sich allerdings je nach dem Prinzip seiner Definition dem psychologischen Raum mehr oder weniger nähern kann.

1) P. Zühlke, Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. Diese IMUK-Abhandlungen, Bd. III, Heft 3. Teubner 1911.

2) Unter Umständen kann es sogar zweckmäßig sein, von Körpern auszugehen, welche mit Oberflächenkurven bedeckt sind.

Vielleicht dient es dem Verständnis des im Freihandzeichnen[1]) Erstrebten am besten, wenn wir von einem konkreten Fall ausgehen. Es sei z. B. die Aufgabe gestellt, einen Gegenstand, etwa einen Kreiszylinder, nach der Natur zu zeichnen oder zu malen. Wer diese Aufgabe lösen will, braucht über den Zylinder keinerlei explizite formulierbare Kenntnisse zu besitzen. Er muß nicht imstande sein, sein konstruktives Prinzip zu verstehen. Für ihn ist der Zylinder nicht ein Gegenstand, durch den seine Phantasie zur Konstruktion ideeller Linien angeregt werden soll, vielmehr ist dieser anschaulich erfaßte Zylinder mit der ihm eignen Individualität in der Zeichnung oder im Gemälde festzuhalten. In diesem Falle ist es natürlich auch nicht gleichgültig, aus welchem Material der Zylinder hergestellt ist, ob aus Holz oder Metall, mit dem Material ändert sich seine Oberflächenstruktur, die auf der Zeichnung oder dem Gemälde zum Ausdruck zu kommen hat. Noch viel weniger gleichgültig ist es, welche Farbe der Zylinder hat; für das Linearzeichnen hatte die Farbe der Vorlage keine Bedeutung, während sie für das Freihandzeichnen eine völlige Änderung des Bildes nach sich ziehen kann. Geht also das mathematische Zeichnen konstruktiv vor, versucht es eine präzise Vorstellung der objektiven Form des Körpers zu vermitteln, so arbeitet das künstlerische Zeichnen eindruckmäßig (mehr oder weniger „impressionistisch"), es sucht die Erscheinung des darzustellenden Objektes festzuhalten. Nehmen wir einmal an, es würde der Zylinder ganz wesent-

1) Nachdem vor etwa einem Jahrzehnt die Methodik des Freihandzeichnens dahingehend einen völligen Umschwung erlebt hat, daß jenes das Auge und den Geschmack abstumpfende und auch noch in anderen Beziehungen unpädagogische Zeichnen nach Vorlagen und Gipsmodellen fast völlig durch das Zeichnen nach der Natur verdrängt worden ist, bereiten sich jetzt scheinbar neue Zielsetzungen vor. Das Zeichnen soll mehr, als es früher der Fall war, auch zum Ausdrucksmittel des Schülers gemacht werden. Das Zeichnen soll selbständiges oder neben die Sprache tretendes und sie ergänzendes Ausdrucksmittel werden. Wird so die Zeichnung ähnlich wie in der hohen Kunst zum Ausdrucksmittel der Individualität, so soll sie auf der anderen Seite in der Form der Skizze dort eintreten, „wo es sich um die Klarlegung form- und lagegemäßer Einzelheiten handelt, die durch Worte oft gar nicht oder nur sehr umständlich wiederzugeben sind". E. Lewicki auf dem 4. internationalen Kongreß für Kunstunterricht, Zeichnen und angewandte Kunst. Dresden 1912. Vgl. hierzu auch desselben Autors Aufsatz: Rationelles Gedächtniszeichnen als allgemeines Bildungsmittel. Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen. Teubner 1910. Auf dem Dresdener Kongreß wurde auch der Wunsch geäußert, das Zeichnen als ein Fachprinzip auch in anderen Disziplinen, wie im Deutsch, in der Geschichte und Geographie vielfach als Ausdrucksmittel heranzuziehen. Eine Durchführung des Prinzips „Zeichnen als Ausdrucksmittel" hat zur Folge, daß in viel höherem Maße, als es früher der Fall war, das Zeichnen nach dem Gedächtnis geübt werden muß. Das Gedächtnis muß sich eine Reihe Schemata von am meisten darzustellenden Objekten einprägen, um mit ihnen ähnlich operieren zu können wie mit den Wörtern, dem Mittel der Sprache. — Über die verschiedenen Richtungen des Freihandzeichnens kann man sich recht gut orientieren bei G. Stiehler, Beitrag zur Psychologie und Methodik des Zeichenunterrichts. Osterwieck und Leipzig 1913. Sonderabdruck aus dem Werke: Aus der Praxis der Arbeitsschule. Bearbeitet von A. Pabst.

lich seiner Form nach geändert, ohne daß sich seine Erscheinung änderte, so würde das für die Darstellung im mathematischen Zeichnen von größter Bedeutung werden, für die künstlerische Darstellung wäre die Änderung völlig gleichgültig. So würde sich die Abtrennung eines Teiles des Zylinders auf der vom Beobachter abgewandten Seite in der Freihandzeichnung gar nicht bemerkbar machen, während sie in der Linearzeichnung voll zum Ausdruck käme.

Die mathematische Zeichnung gestattet, den in ihr dargestellten Körper sofort zu rekonstruieren. Daher rührt ihre hohe Bedeutung für die Technik („Sprache der Technik"). Für die Zwecke des Technikers ist ein „erscheinungsmäßiges" Bild in der Regel nicht brauchbar. Dieses gibt z. B. von einer Maschine nur die dem Beschauer zugewandte Oberfläche. Eine Andeutung der inneren Teile der Maschine oder ihrer Rückseite würde dem Geiste des Kunstwerks völlig widersprechen; in dem mathematischen Zeichnen werden die auch nicht unmittelbar sichtbaren Teile der Maschine durch Linien angedeutet. Die mathematische Zeichnung will, mag sie auch ästhetische Qualitäten besitzen, zunächst mit dem Verstand erfaßt werden, die erscheinungsmäßige Wiedergabe will mit den Sinnen ästhetisch genossen werden.

Wir sprachen oben davon, daß auch der Raum der darstellenden Geometrie nicht der psychologische Raum ist. Zeichnungen, die völlig korrekt nach der Zentralperspektive durchgeführt sind, können bei Annahme eines nahen Distanzpunktes den Eindruck totaler Verzeichnung machen, sie können gänzlich unnatürlich und unästhetisch wirken.[1]) Der mathematische Konstrukteur wird sich keinen Augenblick hierdurch stören lassen, er darf keinerlei Konzessionen an den Geschmack machen, damit seine nach einem bestimmten Prinzip durchgeführten Zeichnungen ablesbar bleiben. Seine Zeichnung soll nur ästhetisch wirken, soweit die Art ihrer Ausführung in Frage kommt. Auch kann das Schönheitsempfinden im Unterricht gepflegt werden, „indem der Schüler dazu angehalten wird, bei der Auswahl der Größenverhältnisse und der Anordnung der einzelnen Figuren auch ästhetische Gesetze zu beachten". (Zühlke, S. 9).

So wenig der darstellende Geometer in der Perspektive übertriebene Zeichnungen als falsch verwerfen wird, so sehr werden sie beim künstlerischen Zeichnen gemieden werden. Solche Eindrücke des Raumes sind, wie schon gesagt, ästhetisch wenig genießbar. Wenn sie sich vermeiden lassen, werden sie beim künstlerischen Zeichnen auch vermieden werden; wo dies unmöglich ist, wird man eher die zentralperspektivisch korrekte Raumdarstellung aufgeben, um der Forderung nach Gefälligkeit des räumlichen Eindruck Konzessionen zu machen. Niemals würde sich

1) Gute Beispiele hierfür liefern manche der Photographien, welche für den von Zeiß (nach A. Gullstrand) konstruierten Veranten aufgenommen sind.

natürlich die darstellende Geometrie auf dergleichen Kompromisse einlassen dürfen.[1])

Die Lösung einer Aufgabe der darstellenden Geometrie ist entweder falsch oder richtig. Der Individualität ist bei der Lösung kaum irgendeine Freiheit gelassen. Nur kann die Zeichnung mehr oder weniger sauber und sorgfältig ausgeführt sein. Im Freihandzeichnen kann nicht in demselben Sinne von einer eindeutigen Problemstellung und von einer entsprechenden eindeutigen Lösung die Rede sein. Gewiß spielt auch das Maß von erscheinungsmäßiger Richtigkeit in der Ausführung der Freihandzeichnung keine unbedeutende Rolle. Aber der Schwerpunkt bei der Lösung der Aufgabe ruht doch im Ästhetischen. Der Schüler muß sich am Modell selbst die ästhetisch wirksamste Seite aussuchen[2]), und auch die Art der Darstellung sollte seinem allerdings durch den Unterricht beeinflußten Geschmack überlassen werden.[3]) Hier ist also der Individualität im Gegensatz zum Verfahren beim Linearzeichnen ein größerer Spielraum zu lassen.

Fast ganz verzichtet das mathematische Zeichnen auf naturwahre Farben- und Beleuchtungsdarstellung, auf Schönheit der einzelnen Farben und der Farbenzusammenstellungen.[4]) Wo in ihm bunte Farben Verwendung finden, besitzen sie in der Regel nur einen konventionellen theoretischen, keinen darstellenden Wert. So bedeutet es nur eine

1) Vergleiche hierzu G. Hauck, Die subjektive Perspektive und die horizontalen Kurvaturen des dorischen Stils, Stuttgart 1879, sowie das 3. Kapitel der oben zitierten Arbeit Jaenschs.

2) Die künstlerische Photographie zeigt, wie schon durch die Wahl des Betrachtungsstandpunkts und des für die Beleuchtung günstigsten Zeitpunktes ein ästhetischer Eindruck eines Objektes erzielt werden kann.

3) Über das Problem der künstlerischen Gestaltung, welches hier berührt wird, vgl. man hauptsächlich A. Hildebrand, Das Problem der Form in der bildenden Kunst, 3. Aufl., Straßburg 1901, und H. Cornelius, Elementargesetze der bildenden Kunst, 2. Aufl., Teubner 1911. Mehr als früher versucht man jetzt, das Zeichnen als Mittel der ästhetischen Ausbildung zu verwenden. Derartige Ziele verfolgt auch E. Weber in seinem Büchlein Angewandtes Zeichnen, Teubner 1911. Hier, mehr noch in seiner „Ästhetik als pädagogische Grundwissenschaft", hat er gefordert die „Kunst als Prinzip, das den Gesamtunterricht durchdringen muß." Wie sehr in derartigen Strömen der Pädagogik tiefgehende kulturelle Strömungen zu sehen sind, das vermag man am ehesten in Erscheinungen wie den Kunsterziehungstagen zu erkennen, deren erster (Dresden 1901) sich mit den Fragen der bildenden Kunst in ihren Beziehungen zur Pädagogik beschäftigt hat. Einen sehr interessanten Beitrag zur Frage der Kunsterziehung auf den höheren Schulen stellt K. Reichholds „Architektur und Kunsterziehung" dar. Teubner 1912.

4) Eine Ausnahme machen z. B. die bereits oben erwähnten Schaubilder der Architekten, auf denen eine mehr erscheinungsmäßige Art der Farben- und Beleuchtungsdarstellung üblich ist. – Die Darstellung der Beleuchtung, die man auf Zeichnungen der darstellenden Geometrie antrifft, ist nicht in künstlerischem Sinne erscheinungsmäßig. Sie erfolgt — zuweilen auch auf Grund von physikalischen Versuchen — nach theoretischen Erwägungen. Hierzu vergleiche man L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen, Leipzig 1875, sowie Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Teubner 1884.

Stütze des Gedächtnisses, wenn etwa dieselben Risse oder Schnitte immer dieselbe Farbe erhalten. Eine Ausbildung des Farbensinns und die Erweckung des Sinns für die Schönheit der Farbe in Natur und Kunst ist demnach nur im künstlerischen Zeichnen möglich.[1])

Mehr Berührungspunkte gibt es zwischen den beiden Richtungen im Zeichnen hinsichtlich der Ausbildung der Raumanschauung. Der darstellende Geometer gewinnt eine volle Auffassung der geometrischen Form der Dinge. „Ganz besonders aber wird die Anschauungskraft gestärkt. Man lernt es, sich von ebenen Zeichnungen aus räumliche Dinge vorzustellen, man lernt es, bewußter zu beobachten und Körperliches klarer zu erkennen". (Zühlke a. a. O., S. 9.) Auch ist es richtig zu betonen, daß das mathematische Zeichnen „ganz besonders für Schüler mit schwacher Raumanschauung, für schlechte Mathematiker" zu empfehlen ist. (Zühlke, a. a. O., S. 17.) Hier aber wie anderwärts, wo die Bedeutung des mathematischen Zeichnens für die Ausbildung der Raumphantasie betont wird, scheint mir nicht hinreichend darauf geachtet zu sein, daß es sich dabei um den mathematischen Raum handelt. Ich möchte sagen, es handelt sich dabei mehr um die Ausbildung der Kenntnisse vom geometrischen Raum als um die Pflege der sinnlichen Raumanschauung. Risse und Durchschneidungen, innere und hintere Teile von Körpern sind uns ja an den konkreten Körpern nicht unmittelbar gegeben, wenn diese nicht zufällig aus durchsichtigem Material bestehen. In der darstellenden Geometrie werden Körper und Raum nicht naiv hingenommen, sondern ein Netz mathematischer Beziehungen wird um sie gesponnen. Ich könnte mir sehr wohl denken, daß ein Schüler Bedeutendes in der darstellenden Geometrie leistet, ohne von Natur eine starke Begabung im räumlichen Vorstellen zu besitzen. Die in ihr geforderten Leistungen wenden sich mehr an den Verstand.[2]) Dementsprechend erfährt auch in erster Linie das konstruktive technische Verständnis der Dinge eine wesentliche Förderung.

Ein derartiges konstruktives Verständnis braucht beim künstlerischen Zeichnen nicht gegeben zu sein. Es ist im eigentlichen Sinne oberflächlicher, indem es sich begnügt mit der Form und der Farbe der Dinge, wie sie sich unmittelbar dem Auge zeigen. Das künstlerische Zeichnen vermag beim Arbeiten nach der Natur nur wenige allgemeine Konstruktionsprinzipien für das Verständnis der Ding- und Raumformen anzugeben. Es muß in viel höherem Maße versuchen, sich die einzelne Form

1) Farbenblindheit kann sich beim Malen sehr störend geltend machen, weil es hier meist darauf ankommt, die in der Natur gegebenen Farbentöne richtig zu treffen; das Linearzeichnen leidet unter der Farbenblindheit nicht in dem Maße, weil bei ihm die Farben allein in konventioneller Weise Verwendung finden. Die am häufigsten vorkommende Rotgrünblindheit findet sich bei 3–4 Prozent aller Männer der weißen Rasse, während sie „bei Frauen sehr selten ist, falls sie überhaupt vorkommt". (Ebbinghaus, a. a. O., S. 209). Die Methoden zur Ermittlung der Farbenblindheit sind leicht anzuwenden.

2) Hiermit soll natürlich einem Zeichnen „nach Regeln" in der darstellenden Geometrie nicht das Wort geredet werden.

anschaulich einzuprägen. Der darstellende Geometer darf sich mit der Durcharbeitung verhältnismäßig weniger Formen begnügen, weil diese wenigen Formen den anderen untergelegt werden können. Er versucht diese Formen überall wiederzufinden. Brauchte er keine oder eine nur mäßige Visualisationsfähigkeit zu besitzen, so wird sich eine hochstehende Visualisationsfähigkeit für das künstlerische Zeichnen als vorteilhaft erweisen. Sie bedarf einer besonderen Pflege. Wir sehen also, daß die verschiedenen Raumprobleme, die für das mathematische Zeichnen und für das künstlerische Zeichnen vorliegen, verschiedene Methoden erfordern und auch verschiedene Anforderungen an die Beanlagung des Schülers stellen. Im Hinblick auf die Methode der darstellenden Geometrie spricht Zühlke davon, daß der Lehrer seine Zöglinge „langsam, aber beharrlich von der intuitiven Kenntnis zur bewußten Kenntnis (des Raumes)" zu führen habe.

Ein wichtiger Berührungspunkt zwischen dem künstlerischen Zeichnen und dem mathematischen Zeichnen ist bei der Darstellung architektonischer Verhältnisse gegeben. Die architektonische Raumgestaltung ist nur zu verstehen aus einer ästhetischen Raumgestaltung, bei der technisch-konstruktive Forderungen (des Materials, des baulichen Zwecks u. dgl.) Berücksichtigung gefunden haben. Hier verschmelzen intuitive (ästhetische) und konstruktive (mathematisch-begriffliche) Raumerfassung zu einer höheren Einheit. In der zeichnerischen Behandlung architektonischer Probleme ist die Verbindungsbrücke zwischen dem mathematischen Zwecken dienenden Linearzeichnen und dem künstlerischen Zwecken dienenden Freihandzeichnen zu sehen. Die Verschmelzung zwischen den beiden Zweigen des Zeichnens findet z. B. in dem Lehrplan 1907 der oberen Klassen der bayrischen Oberrealschulen folgenden Ausdruck: VIII. Klasse. Darstellung des Bogens, des Tonnen- und Kreuzgewölbes in Parallelperspektive mit kunstgeschichtlichen durch Anschauungsbilder unterstützten Erläuterungen (Kolosseum, Triumphbogen, Inneres von romanischen und gotischen Kirchen). Auch bei diesen Aufgaben entstehen fast nur Forderungen an die konstruktive Raumanschauung; man wird wohl nie mit neuen architektonischen Aufgaben an den Schüler herantreten. Es geht hieraus hervor, daß die „künstlerische Seite" des Linearzeichnens auf der Schule nicht sehr bedeutend ist.[1]) Es sollte sich also die von

1) Es mag aber darauf hingewiesen werden, daß es kaum Zufall sein kann, wenn die Vertreter der darstellenden Geometrie an den Universitäten und technischen Hochschulen in der Regel auch starke künstlerische Neigungen zeigen. Es hängt dies wohl damit zusammen, daß diese darstellenden Geometer vielfach vor Studenten vorzutragen haben, bei deren Ausbildung (wie z. B. bei der der Architekten) die künstlerische Gestaltung des Raumes eine Berücksichtigung zu finden hat. Es mag noch hinzukommen, daß nur derjenige als seine Hauptbetätigung die zeichnerische Darstellung des Raumes wählen wird, dessen Interesse für den Raum, ganz abgesehen von der zeichnerischen Begabung, auch einen künstlerischen Einschlag besitzt. Vgl. hierzu auch K. Döhlemann, Die bildenden Künste, ihre Eigenart und ihr Zusammenhang, Teubner 1913. — Während in der modernen Malerei das Fernbild mit seinem

Zühlke (S. 27) ausgesprochene Gefahr unschwer vermeiden lassen, daß bei der Erteilung des Unterrichts im Linearzeichnen allein durch den Mathematiklehrer die künstlerische Seite desselben leicht zu kurz komme.

Über die psychischen Vorgänge beim Freihandzeichnen hat Meumann (Meumann Bd. II, S. 361 ff.) eine Analyse gegeben.[1] Er führt das Nicht-Zeichnenkönnen auf eine Reihe von Ursachen zurück, von denen ich aber nur diejenigen nenne, die beim Zeichnen nach der Natur in Betracht kommen. „1. Darauf, daß der Wille zu analysierendem Sehen und zum Merken der Formen und Farben der Dinge nicht geweckt ist. 2. Darauf, daß, auch wenn dieser Wille da ist, das analysierende Sehen dem Individuum schwer fällt. 3. Auf mangelhafte Zuordnung der optischen . . . Wahrnehmungsbilder zu den auszuführenden zeichnerischen Bewegungen . . . 4. Darauf, daß kein Verständnis für die (erscheinungsmäßige) Projektion des dreidimensionalen Raumes in die Ebene vorhanden ist. 5. Auf dem bloßen Mangel an Handgeschicklichkeit." Die Prozesse, von denen hier unter 1—4 die Rede ist, kommen für das Linearzeichnen wenig in Betracht. Die unter 2, 3 und 4 genannten Leistungen rechnen mehr mit einer natürlichen Begabung. Es ist allein die unter 5 genannte Handgeschicklichkeit, welche bei dem mechanischen Prozeß des Linearzeichnens zu berücksichtigen ist. Man muß lernen mit dem Zirkel, der Reißschiene und den sonstigen Utensilien des Zeichenunterrichts umzugehen. Diese Instrumente entfallen beim Freihandzeichnen gänzlich. Als höchste Anforderung des Linearzeichnens an die Handgeschicklichkeit kann das Zeichnen einer nicht mit dem Zirkel konstruierbaren Kurve in Betracht kommen, was aber in der Regel auch mit Hilfe des Kurvenlineals erledigt werden wird. Ich verkenne nicht die Schwierigkeiten, die hier genannten Operationen mit der ganzen erforderlichen Exaktheit auszuführen. Aber ich möchte bestreiten, daß dieses Ziel nicht durch Fleiß, Ausdauer und beständige Übung von jedem Schüler unserer höheren Schulen zu erreichen sei, der über die normale manuelle Geschicklichkeit verfügt.

Die vorstehenden Ausführungen dürften zeigen, daß das Freihandzeichnen psychologisch auf einer anderen Grundlage ruht als das Linearzeichnen. Dementsprechend sind sie auch pädagogisch ganz verschieden

---

ausgesprochen flachen Charakter vorherrscht, hat man in andern Epochen der Malerei, wie z. B. zur Zeit der Renaissance, mit besonderer Vorliebe den dreidimensionalen Raum mittels der wieder entdeckten Raumperspektive mit höchster Illusion darzustellen versucht. Es sei hier nur an Künstler wie Leonardo da Vinci, Leone Battista Alberti und Dürer erinnert. Hierzu vergleiche man auch das Kapitel „Die Apperzeption des Bildes zur Zeit der Renaissance" aus Jaenschs oben erwähntem Werk. Diese Maler waren zugleich hervorragende darstellende Geometer. Wenn die moderne Malerei auf illusionistische Darstellung des Raumes in der Regel verzichtet, so hängt das mit tiefgehenden Wandlungen des ästhetischen Geschmacks zusammen.

1) Vgl. hierzu auch Meumann, Ein Programm zur psychologischen Untersuchung des Zeichnens. Zeitschr. für pädag. Psychol., Bd. 13, 1912, sowie J. W. Ruttmann, Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen zur Psychologie des Zeichnens. Leipzig 1911.

zu bewerten. Sie haben im wesentlichen andere Ziele, sie haben andere Methoden[1]) und sie setzen dementsprechend bei ihren Zöglingen andere Fähigkeiten voraus. Wenn sich der Erfolg im Linearzeichnen herausstellt als eine Sache eines gewissen mathematischen Verständnisses, welches nicht größer zu sein braucht als das im sonstigen mathematischen Unterricht vorausgesetzte, sowie des Fleißes und der Energie, welche der Zögling dieser Sache widmet, so ist das Linearzeichnen im Ganzen des Unterrichtsbetriebs nicht anders zu behandeln wie jeder andere Unterrichtsgegenstand. Man darf also hiernach das Linearzeichnen obligatorisch machen und in ihm dieselben Durchschnittsleistungen fordern wie anderwärts, man kann es auch als Prüfungsfach einführen und entsprechend den anderen Prüfungsfächern bewerten.

Zu einer anderen Beurteilung kommen wir bezüglich des Freihandzeichnens. In dem Maße, wie die in ihm erzielbaren Leistungen sich mehr als eine Folge natürlicher Begabung als des darauf verwendeten Fleißes herausstellen, tritt auch die Möglichkeit zurück, bestimmte Leistungen in ihm zu fordern und es gar als ein den anderen Fächern gleichwertiges Prüfungsfach zu betrachten.[2]) Es können dem Schüler auch beim besten Willen hierin ebenso wie etwa im Singen befriedigende Leistungen unmöglich sein. So wenig darum auch davon die Rede sein sollte, im Freihandzeichnen in demselben Maße gewisse Durchschnittsleistungen

1) Beim Linearzeichnen verrät es zwar nicht hohe pädagogische Einsicht, wenn man lange Zeit zu Übungszwecken nur gerade Linien zeichnen läßt, ohne an Konstruktionsaufgaben heranzugehen, denen der Knabe ein höheres Interesse entgegenbringt. Immerhin wäre es keine Zeitvergeudung, so zu verfahren, da ja gelernt werden soll, gerade Linien in aller Sauberkeit zu zeichnen. Ganz verfehlt ist es dagegen, im Hinblick auf das eigentlich zu erreichende Unterrichtsziel, auch das Freihandzeichnen mit dem geistlosen Ziehen solcher geraden Linien zu beginnen. Die schnurgerade Linie spielt bei der Abbildung der Natur oder beim Gedächtniszeichnen fast keine Rolle. Wo solche Linien in der Darstellung gefordert werden, wird man doch in der Regel das Lineal zu Hilfe nehmen. Es ist darum als ein großer Fortschritt zu bezeichnen, daß man sich von der Methode, den Zeichenunterricht mit dem Zeichnen von geraden Linien und deren Kombinationen zu beginnen, freigemacht hat und den Beginn macht mit dem Zeichnen nach der Natur, welches sofort krumme Linien verlangt. Auch im Zeichenunterricht hat sich der in der Pädagogik immer und immer wieder zu beobachtende Irrtum geltend gemacht, das logisch Elementare (und zum logisch Elementaren gehört die gerade Linie) mit dem psychologisch Elementaren zu verwechseln. – Hier noch eine kleine Geschichte, welche diesen Irrtum auch in einem konkreten Fall zeigt. Ein Zeichenlehrer einer höheren Schule, der über die Einführung des Zeichnens nach der Natur in den Anfangsunterricht sehr unglücklich war, kleidete das in die Worte: „Mein Gott, da sollen die Jungens alle möglichen Dinge zeichnen und können noch keinen geraden Strich machen!"

2) Es ist sehr wohl denkbar, daß jemand im Freihandzeichnen versagt und doch im Linearzeichnen auf respektable Leistungen hinweisen kann. Derartige Fälle sind mir aus der Schule erinnerlich. Andererseits kann ich mir sehr wohl denken, daß mancher unserer tüchtigsten Maler mangels mathematischen Verständnisses versagen würde, wenn er vor eine auch nur leidlich schwere Aufgabe der darstellenden Geometrie gestellt würde.

zu fordern wie in andern Fächern, so berechtigt erscheint es mir doch, hervorragende Leistungen im Freihandzeichnen als Kompensation für ungenügende Leistungen in andern Fächern anzuerkennen. Man beurteilt doch auch in andern Fächern, z. B. in der Mathematik, die Leistungen und fragt wenig danach, wie viel davon auf Kosten der mathematischen Begabung, wieviel auf Kosten des angewandten Fleißes zu setzen ist. Für eine Kompensation spricht auch, daß die ganze Entwicklung dahin drängt, die Bedeutung tüchtiger Leistungen im Zeichnen für unser gesamtes Kulturleben höher und höher einzuschätzen.[1])

So sehr auch, wie aus dem Vorstehenden wohl deutlich geworden ist, eine nahezu völlige Unabhängigkeit zwischen Freihandzeichnen und Linearzeichnen auf der Schule besteht, so wäre es doch nicht nur möglich, sondern geradezu erwünscht, daß zwischen den beiden Zeichengebieten durch den Lehrer eine Art Personalunion geschaffen werde. Sie wird sich allerdings wohl nicht immer unter den heutigen Umständen verwirklichen lassen. Für den Linearzeichenunterricht ist unter allen Umständen ein mathematisch gut geschulter Lehrer zu fordern, für den Unterricht im Freihandzeichnen ein künstlerisch gut geschulter Lehrer. Letzterer müßte von Mathematik so viel verstehen, wie zur Beherrschung des Grenzgebietes zwischen künstlerischem und mathematisch-technischem Zeichnen notwendig ist. Da hier die mehr technischen Fragen der Lehrerausbildung beginnen, so darf der Psychologe seine Aufgabe als erledigt ansehen.

---

1) In der Denkschrift vom 20. März 1912 über die Bedeutung und Stellung des Zeichenunterrichts an den höheren Schulen Preußens, welche unter Beteiligung einer Reihe von Hochschulen dem Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten überreicht worden ist, wird eingetreten für eine Gleichstellung des Zeichenunterrichts mit den wissenschaftlichen Fächern von derselben Stundenzahl (Einfluß der Leistungen auf den Klassenplatz, sowie auf die Versetzung und Reifeprüfung). Dabei wird vorausgesetzt, daß Leistungen im Freihandzeichnen nicht in höherem Maße an ein Talent gebunden seien als Leistungen in anderen Fächern. Es geht aus der obigen Darstellung hervor, daß ich dieser Voraussetzung nicht zustimme. Dagegen ist der in jener Denkschrift vertretenen Anschauung durchaus zuzustimmen, daß der Zeichenunterricht als ein „Kulturfaktor allerersten Ranges“ anzusehen sei.

III. Teil.

Zur Ausbildung der Lehrer in Psychologie und Pädagogik.

1. Die Ausbildung und Fortbildung der seminarisch gebildeten Lehrer.

a) Präparandenanstalt und Seminar.

Man wird den Wunsch berechtigt finden, daß der Lehrer der Mathematik mit dem bekannt gemacht werde, was in den vorstehenden Betrachtungen zur Psychologie der Mathematik und des mathematischen Unterrichts und was darüber hinausgehend an allgemeinen pädagogischen Dingen berührt worden ist. Was geschieht in dieser Beziehung tatsächlich bei der Vorbereitung der Lehrer, oder fragen wir gleich, was geschieht überhaupt für die Ausbildung der Lehrer in Psychologie und Pädagogik?

Die Präparandenanstalten und Lehrerseminare boten auch in ihrer bisherigen Organisation dem zukünftigen Volksschullehrer die Möglichkeit, sich mit den für seine spätere Wirksamkeit wichtigen Fragen der Psychologie und Pädagogik zu beschäftigen. Die Lehrpläne der Kgl. Preußischen Präparandenanstalten und Lehrerseminare vom 1. Juli 1901 [1]) sehen für die Klassen 1–3 wöchentlich 3 Stunden für Pädagogik vor. In der 3. Klasse tritt eine Beschäftigung mit dem grundlegenden Unterricht in Psychologie und Logik ein, und es soll die allgemeine Unterrichtslehre behandelt werden. Die Erziehungslehre schließt sich in der 2. Klasse an, in der auch vom 2. Halbjahr an Geschichte der Pädagogik getrieben wird. In der 1. Klasse wird die Geschichte der Pädagogik bis auf die Gegenwart verfolgt und Schulkunde getrieben, worunter Schuleinrichtungen, Schulhygiene, Schulverwaltung und Schulordnungen verstanden werden.

Wir finden zur Ausführung des angedeuteten Lehrplans folgende methodischen Anweisungen: „Der Unterricht in der Psychologie ist als die Grundlage der pädagogischen Unterweisung an den Anfang zu stellen." „Bei dem Unterricht in der Psychologie, dem etwa 3 Vierteljahre

1) Herausgegeben von K. Muthesius. Gotha 1908. Ich beschränke mich hier auf eine Berücksichtigung der Verhältnisse, wie sie in dem größten deutschen Bundesstaat gegeben sind. Über die Verteilung der Stunden in Pädagogik in einigen anderen Bundesstaaten (Württemberg, Baden, Anhalt, Hamburg, Lübeck) gibt Auskunft K. Umlauf, Mathematik und Naturwissenschaften an den deutschen Lehrerbildungsanstalten. Arbeiten des Bundes für Schulreform, 3, Teubner 1912. – Ich betone, daß ich den Unterricht in Psychologie und Pädagogik nur auf Grund der gedruckt vorliegenden Lehrpläne beurteile, nicht auf Grund einer persönlichen Kenntnisnahme, die wohl allein zeigen würde, wie hier die Verhältnisse in Wirklichkeit liegen.

einzuräumen sein werden, sind in einer dem Standpunkt des Zöglings angemessenen Weise mit Hilfe reichlicher Veranschaulichungsmittel — insbesondere auf Grund von Beobachtungen, Erfahrungen, Beispielen — die Entwicklung des seelischen Lebens im Kinde nach ihrem normalen Verlaufe und ihren wichtigsten pathologischen Zuständen, sowie die hauptsächlichen Erscheinungen und Vorgänge des Seelenlebens und ihre Gesetze zum Verständnisse zu bringen." „Die Kenntnis der Unterrichts- und Erziehungslehre ist unter Begründung auf die Psychologie und unter steter Bezugnahme auf die Anwendung in der unterrichtlichen und erziehlichen Tätigkeit zu vermitteln."

Hier findet zwar in erfreulicher Weise eine Betonung der psychologischen Grundlegung der Pädagogik statt, der Ausbildung dieser Einsicht bei den Lehrern auf dem hier vorgeschlagenen Weg scheint sich aber doch Verschiedenes hindernd entgegenzustellen. Die für die Psychologie vorgesehene Stundenzahl kann nicht auch nur für die Übermittlung der wichtigsten Tatsachen der Psychologie als ausreichend angesehen werden, an ein tieferes Eindringen in die Probleme und in die Methoden der Psychologie ist in so kurzer Zeit nicht zu denken. Das Methodische ist aber vielleicht von nicht geringerer Bedeutung für den künftigen praktischen Schulmann als die Kenntnis einzelner Tatsachen. Die Methoden müssen ihm in die Hand gegeben werden, damit er neuen auftauchenden Fragen des Unterrichts nicht ratlos gegenübersteht. Das Ziel der Ausbildung in der Psychologie sollte sein: Gewinnung eines Verständnisses des seelischen Lebens, welches zu einer selbständigen Beurteilung und Begründung pädagogischer Maßnahmen verhelfen kann. Das läßt sich aber nur erreichen durch eine intensive und anhaltende Beschäftigung mit psychologischen Dingen. Für die Ausbildung des Lehrers sollte ebenso wie für die des Schülers letztes Ziel nicht die Einprägung einer gewissen Summe von Wissen, sondern die Erziehung zum selbständigen und leistungsfähigen Denken sein. Erst dann kann von einem wissenschaftlichen Geist des Unterrichts die Rede sein.[1])

Bei dem jetzt üblichen Seminarbetrieb scheint noch immer auf die historisch-pädagogische Ausbildung gegenüber der psychologisch-pädagogischen ein zu großer Wert gelegt zu werden. Ich bin der letzte, der die Orientierung an großen Pädagogen der Geschichte in ihrer prinzipiellen Bedeutung verkennen würde, ich vermag mich aber andererseits nicht der Einsicht zu verschließen, daß der systematisch gerichteten psychologisch-pädagogischen Ausbildung des praktischen Schulmanns der höhere Wert zuzuschreiben ist. Sie erst macht auch die Wertung von historischen Systemen möglich, ohne sie gibt es keine echte Kritik der großen Pädagogen. Diese Erwägungen lassen eine stärkere Betonung des psychologischen gegenüber dem historischen Gesichtspunkt bei der Aus-

1) „Der wissenschaftliche Geist ist es, der dem Seminare großenteils noch fehlt, darüber hilft alle Hingabe des einzelnen . . . nicht hinweg." K. Umlauf, a. a. O., S. 27.

bildung der Volksschullehrer wünschenswert erscheinen.[1]) Dies ließe sich erreichen durch eine Verschiebung des Schwergewichts nach der psychologischen Seite des Unterrichts, ohne daß eine Erhöhung der für die Pädagogik bestimmten Stundenzahl einzutreten brauchte. Noch folgender Gesichtspunkt spricht dafür, auf dem Lehrerseminar dem Psychologischen einen größeren Raum zu gewähren. Bekanntlich bedarf es in viel höherem Grade einer persönlichen Unterweisung, wenn es sich um die Erwerbung methodologischer als wenn es sich um die Erwerbung rein stofflicher Kenntnisse handelt. Die letzteren sind durch Lektüre leichter zu gewinnen als die ersteren. Das gilt selbst für Disziplinen wie die Physik und die Chemie, wo sich feste Methoden ausgebildet haben und in die Literatur eingegangen sind, um wieviel mehr für die Psychologie, wo die Methodologie noch weniger ausgebaut ist und so manches allein durch die persönliche Tradition wirken kann.

Nach dem jetzt in Preußen geltenden Lehrplan ist die Behandlung der Psychologie der dritten Klasse überwiesen worden. Wenn sich nun auch schon in frühen Jahren ein lebhaftes Interesse für gewisse Fragen der Psychologie geltend macht, so sind es doch mehr die Phänomene als solche, welche um diese Zeit interessieren. Für das Methodologische, dessen größere Wichtigkeit für die spätere selbständige Beurteilung pädagogischer Maßnahmen wir soeben betonten, fehlt in jüngeren Jahren nicht nur meist das Interesse, sondern in der Regel auch das Verständnis. Es erscheint darum erwünscht, die Psychologie oder wenigstens ihre Methodologie erst in einer späteren Klasse zu behandeln.

Was nun die spezielle Gestaltung des Unterrichts in Psychologie anbetrifft, so könnte man sich mit dem oben gekennzeichneten Lehrstoff wohl schon einverstanden erklären. Dabei ist eine Berücksichtigung der wichtigsten Ergebnisse und Methoden der experimentellen Psychologie unumgänglich. Sie scheint bis jetzt nicht in dem notwendigen Maße stattgefunden zu haben, weil es sonst in den Lehrplänen besonders erwähnt worden wäre. Es fehlt vermutlich bis jetzt an den Lehrerseminaren noch an Lehrkräften, die für eine Erteilung des Unterrichts in Psychologie in dem angedeuteten Sinne geeignet wären, sowie an den hierzu erforderlichen technischen Hilfsmitteln.[2])

Es ist bedauerlich, daß in den beiden wichtigsten Arbeiten, die sich mit der Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den Lehrerbildungsanstalten beschäftigen, die Psychologie in ihrem Verhältnis zu den behandelten Unterrichtsfächern nicht berücksichtigt

1) Dagegen heißt es in Kohlbachs Referat über die Hauptversammlung der Konferenz preußischer Seminardirektoren zu Ostern 1913 in den pädagogischen Blättern: „Es war gewiß der Wunsch der Mehrheit, daß der Geschichte der Pädagogik ... der Platz gelassen werde, der dieser Disziplin jetzt zuerkannt wird.“ Leider schloß sich auf der Konferenz an diesen Punkt keine Diskussion.

2) Wie sich unter Aufwendung relativ kleiner Mittel ein wertvolles psychologisches Instrumentarium gewinnen läßt, haben Höfler und Witasek in ihrer oben genannten Schrift gezeigt.

worden ist. Umlauf hat in der oben zitierten Schrift ausdrücklich ausgesprochen, daß auf die Psychologie und ihre eigenartige Stellung in dem Ganzen der Unterrichtsfächer nicht eingegangen werden soll. In dem von dem „Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ herausgegebenen Reformvorschlägen[1]) findet sie nur einmal bei der Menschenkunde Erwähnung, indem (S. 35) gesagt wird, daß der Lehrer „auf dem Gebiete der Hygiene und der Physiologie des Nervensystems – zum tieferen Verständnis der Psychologie – ein Wissen besitzen muß, das ihn zum Hüter und Berater seiner Schutzbefohlenen, zum scharfsichtigen Beobachter und Beurteiler ihrer Individualitäten befähigt.“ Und doch hätte es gerade im Sinne der in diesen Schriften angeregten Reformvorschläge gelegen, anzudeuten, daß diese Vorschläge einerseits auch für die Behandlung der Psychologie innerhalb des ihr im ganzen des Unterrichts zur Verfügung gestellten Raumes nicht bedeutungslos sind, andererseits eine in modernem Gewand auftretende Psychologie unmittelbar wie mittelbar von Nutzen werden kann für die neuartige Behandlung, die der Mathematik und den Naturwissenschaften zuteil werden soll.[2])

Gegenüber früher hat die moderne Psychologie ganz wesentlich an Exaktheit gewonnen durch die Anwendung des Experiments. Die durch den Einzug naturwissenschaftlichen Geistes bedingte methodische Umbildung der Psychologie hat es mit sich gebracht, daß nun auch in ihr Betrachtungen über funktionale Beziehungen eine beherrschende Rolle spielen. Die von den Reformvorschlägen gewünschte stärkere Betonung des funktionalen Denkens in der Mathematik findet in der Psychologie einen dieses Denken stark anregenden und darum wertvollen Stoff. Auch vermag die experimentelle Psychologie vielleicht wie keine andere Disziplin das Wesen der induktiven Methode und der mathematischen Behandlung empirisch gefundener Resultate zur Klarheit zu bringen.[3]) Hierin liegt also auch eine von den Reformern warm zu begrüßende Erkenntnisgelegenheit.

Was nun die unmittelbare Unterstützung des in den Reformvorschlägen Geforderten von seiten der Psychologie anbetrifft, so kann ich mir die gewünschte „Einsicht in den Aufbau und die Leistungen des menschlichen Körpers, im Vergleich mit dem der höheren Tiere“ (DAMNU-Schrift, S. 37) gar nicht denken, ohne daß sowohl auf die Psychologie

1) Heft 14 der Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. (DAMNU) Teubner 1912.

2) Es besteht alle Hoffnung, daß in Zukunft zwischen dem DAMNU und Vertretern der experimentellen Psychologie eine engere Fühlungnahme stattfinden wird, um auch die Psychologie bei den von dem DAMNU verfolgten pädagogischen Reformen stärker zu berücksichtigen.

3) Von der Physik heißt es z. B. auf S. 27 der DAMNU-Schrift: „Die Physik ist als Unterrichtsgegenstand so zu betreiben, daß auch die Art, wie physikalische Erkenntnisse gewonnen werden, den Schülern im Laufe des Unterrichts immer deutlicher ins Bewußtsein tritt.“

des Menschen wie des Tieres Rücksicht genommen wird. Abgesehen von der sachlichen Förderung biologischer Fragen durch Berücksichtigung der Ergebnisse der experimentellen Psychologie des Menschen und des Tieres wird die Biologie hierbei, wie ich vermute, eine wertvolle Belebung ihres Unterrichtsbetriebs erfahren.

Die vorstehenden Ausführungen treten dafür ein, daß die Psychologie, soweit sie schon jetzt im Dienst der Pädagogik getrieben wird, in moderner Weise, d. h. unter Berücksichtigung der experimentellen Methode, gehandhabt werde. Solche Tendenzen stehen im besten Einklang mit der geforderten Modernisierung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Ihre Durchführung wird in höherem Maße das erreichen lassen, was stets als erstrebenswert bezeichnet worden ist, eine Konzentration des Unterrichts.

b) Private Veranstaltungen.[1])

Um diejenigen Einrichtungen, welche der dringenden Pflege der experimentellen Pädagogik dienen können, nicht länger zu vermissen, ist die Lehrerschaft an manchen Orten zur Selbsthilfe übergegangen[2]). Der Leipziger Lehrerverein gründete als erster im Jahre 1906 ein Institut für experimentelle Pädagogik und Psychologie, dessen Leiter Privatdozent Dr. M. Brahn ist. „Das Institut verfolgt den Zweck, die Mitglieder in die experimentelle Pädagogik und Psychologie einzuführen, Gelegenheit zu geben für selbständige wissenschaftliche Arbeiten auf beiden Gebieten und weitere Kreise für beide Wissenschaften zu interessieren. Diesem Zwecke dienen folgende Veranstaltungen a) Einführungskurse, b) selbständige Arbeiten der Mitglieder, c) Ferienkurse für auswärtige Lehrer, d) Veröffentlichungen, e) eine wissenschaftliche Bibliothek[3])." Aus diesem Institut sind schon einige Arbeiten hervorgegangen, zu denen auch die oben erwähnte Arbeit Freemans gehört.

Dem Beispiel des Leipziger Lehrervereins folgte der Bezirkslehrerverein München-Stadt durch die Gründung seines unter Leitung von Privatdozent Dr. A. Fischer stehenden pädagogisch-psychologischen Instituts[4]). „Das Institut ist in erster Linie der wissenschaftlichen For-

1) Wir übergehen im folgenden die an vielen Orten bestehenden pädagogischen Vereinigungen von Volksschullehrern, in denen auch manches Gute für die pädagogische Fortbildung geschehen mag.

2) Eine wertvolle Übersicht über die Zeitschriften, Sammlungen von Monographien, Vereine und Gesellschaften, Institute und Kongresse des In- und Auslandes, die sich mit Forschung und Unterricht in der Jugendkunde befassen, enthält die von Lipmann und Stern herausgegebene Schrift des Bundes für Schulreform „Forschung und Unterricht in der Jugendkunde". Teubner 1912.

3) Das Institut für experimentelle Pädagogik und Psychologie. Leipzig 1912, S. 3f.

4) Ein ausführlicher Bericht über das Institut von dessen wissenschaftlichem Leiter findet sich in den Pädagogischen Blättern. Herausgegeben von K. Muthesius. 40. Jahrg., 1911. Heft 2.

schung auf dem Gesamtgebiet der Pädagogik und ihrer Hilfswissenschaften gewidmet, in zweiter Linie der wissenschaftlichen Fortbildung der Berufspädagogen. Dieser Absicht dienen 1. Arbeiten, welche im Auftrag bzw. mit Unterstützung des Instituts gemacht werden, und für welche das psychologische Laboratorium und die Sammlungen des Instituts Hilfsdienste leisten. Im Arbeitsprogramm überwiegen zurzeit die jugendkundlichen Themen, besonders Untersuchungen zur Psychologie des Schulkindes. 2. Vorlesungen mit anschließenden Diskussionen. 3. Informationskurse zur speziellen psychologischen Schulung und Durchbildung von Lehrern, die dann als wissenschaftliche Hilfsarbeiter dem Institut sich zur Verfügung stellen. 4. Seminaristische Besprechungen aktueller Fragen des Erziehungswesens und seiner wissenschaftlichen Grundlagen. 5. Eine Sammlung von Dokumenten zur Entwicklungsgeschichte des Kindes, der Lehrmittel, der Schulformen. 6. Ein psychologisches Laboratorium. 7. Beziehungen zur Praxis des Schulbetriebes und zur Schulreformbewegung" (Lipmann und Stern, S. 13).

Exakte pädagogische Arbeit soll auch in der von Dozent Dr. G. Deuchler-Tübingen geleiteten Stuttgarter „Pädagogischen Arbeitsgemeinschaft" geleistet werden. An dieser Stelle werde auch noch einmal auf das bereits mehrfach erwähnte „Institut für angewandte Psychologie und psychologische Sammelforschung" verwiesen; es ist dies das Institut der im Jahre 1904 gegründeten Gesellschaft für experimentelle Psychologie. Dieses von Lipmann und Stern geleitete Institut soll als „Zentralstelle für die Organisation gemeinschaftlicher Untersuchungen und für die Anlegung psychologischer Sammlungen" dienen. „Es will nicht nur die Fachpsychologen untereinander, sondern auch diese mit den Vertretern der Anwendungsgebiete der Psychologie zu systematischer Arbeitsgemeinschaft verbinden. Die Absicht geht auf die Gewinnung solcher psychologischer Ergebnisse, die auf andere Gebiete des Lebens und des Wissens Anwendung gestatten, so auch auf die der Erziehung und des Unterrichts. Das Sammelarchiv des Instituts enthält u. a. eine Sammlung kindlicher Kunstbetätigungen (Zeichnungen, Plastiken usw.), ferner eine Sammlung psychologischer Individualitäten-Formulare, Personalienbücher u. dgl." (Lipmann und Stern, S. 12).

c) Die Ausbildung der Seminarlehrer.

Auch die Reform der Ausbildung der Seminarlehrer, die eine wissenschaftliche Vertiefung erfahren soll, wird seit einer Reihe von Jahren lebhaft diskutiert. Während die einen für eine Ausbildung der Seminarlehrer[1]) an besonderen pädagogischen Akademien eintraten, glaubten andere, daß sie am zweckmäßigsten an der Universität stattfinden

1) Ähnliches wie für die Ausbildung der Seminarlehrer gilt für die Ausbildung der Schulrektoren und Schulaufsichtsbeamten.

könne.[1]) Den Gedanken der pädagogischen Akademie als letztes Ziel hat auch die Pädagogische Zentrale des Deutschen Lehrervereins wieder fallen lassen. Eine Reihe von Bundesstaaten (Königreich und Großherzogtum Sachsen, Großherzogtum Hessen, Großherzogtum Oldenburg, Bayern und Württemberg) hat für die Ausbildung ihrer Seminarlehrer den Universitätsweg eingeschlagen. Eine besondere Beachtung verdient an dieser Stelle auch der von F. Klein 1910 gemachte Vorschlag, der mathematisch-naturwissenschaftliche Vorbereitungskurse für Mittelschullehrer an der Universität Göttingen bezweckte[2]). Ich hebe aus ihm nur hervor, was auf die psychologische Ausbildung bezug nimmt. „Die Kandidaten der naturwissenschaftlichen Richtung werden voraussichtlich auf eine Einführung in die experimentelle Psychologie besonderes Gewicht legen. In dieser Hinsicht bietet die Göttinger Universität nicht nur regelmäßig wiederkehrende Vorlesungen, sondern in dem sogenannten philosophischen Seminar (psychologische Abteilung) eingehende Anleitung zu praktischen Versuchen.“

Preußen hat die Begründung besonderer Kurse zur Ausbildung von Seminarlehrern in Berlin, Posen und Münster vorgenommen. Es soll in diesen zweijährigen Kursen neben der beruflichen eine tiefer gehende fachwissenschaftliche Ausbildung erzielt werden. Der Lehrplan, welcher dem Kursus in Posen vom Oktober 1912 bis Herbst 1914 zugrunde liegt, scheint mir zu einer im wesentlichen befriedigenden Lösung der Frage der beruflichen Weiterbildung gelangt zu sein. Er sieht nämlich als allgemein verbindliche Fächer vor: 1. Psychologie und Pädagogik mit 3 Stunden, 2. Schulkunde mit 1 Stunde, 3. Philosophie mit 2 Stunden, 4. Jugendpflege mit 1 Stunde, 5. Gesundheitspflege mit 1 Stunde und 6. Bürgerkunde mit 2 Stunden. Während diese Fächer allgemein verbindlich sind, steht es den Kursteilnehmern frei, für ihre wissenschaftliche Ausbildung die historisch-philologische oder die mathematisch-naturwissenschaftliche Gruppe von Fächern zu wählen beziehungsweise innerhalb dieser Gruppen eine Auswahl zu treffen. Der Lehrplan verrät im allgemeinen eine moderne Auffassung, die auch in der Ordnung der Abschlußprüfung zum Ausdruck kommt. So besagt § 6 derselben: Die Prüfung soll „nicht so sehr bestimmtes Wissen feststellen als vielmehr die Befähigung im Gebiete des Seminars wissenschaftlich zu arbeiten und überall da, wo es möglich ist, die Beziehungen zu dem wirklichen Leben herzustellen“.

1) Vgl. zur Diskussion dieser Frage die Artikel von K. Muthesius in der Pädagogischen Jahresschau. 5., 6. u. 7. Bd., Teubner 1910, 1911 u. 1912, sowie von demselben Verfasser: Grundsätzliches zur Volksschullehrerbildung. Teubner 1911.

2) Abgedruckt in F. Klein, Aktuelle Probleme der Lehrerbildung. Heft 10 der Schriften des DAMNU. Teubner 1911.

2. Die Ausbildung der akademisch gebildeten Lehrer.

Die Volksschullehrer sind ihrer beruflichen Vorbildung nach viel besser gestellt als die Oberlehrer. Für die berufliche Vorbildung der letzteren geschieht während ihrer Studienzeit fast nichts, ihr sind Seminar- und Probejahr gewidmet[1]). Was vom zukünftigen Oberlehrer an theoretisch-pädagogischer Einsicht verlangt wird, kommt in dem Maß der in der allgemeinen Prüfung des Staatsexamens gestellten Anforderungen zum Ausdruck. „Für die mündliche Prüfung ist zu fordern, daß der Kandidat ... in der Philosophie mit den wichtigsten Tatsachen ihrer Geschichte sowie mit den Hauptlehren der Logik und der Psychologie bekannt ist ... in der Pädagogik nachweist, daß er ihre psychologischen Grundlagen sowie die wichtigsten Erscheinungen in ihrer Entwickelung seit dem 16. Jahrhundert kennt und bereits einiges Verständnis für die Aufgaben seines künftigen Berufes gewonnen hat."

Diese Anforderungen sind so unbestimmt gehalten, daß sie dem Examinator des philosophischen Teiles der allgemeinen Bildung erlauben, je nach den Wünschen der Kandidaten bei der Prüfung der Philosophie oder der Psychologie oder der Pädagogik ein größeres Gewicht beizulegen. Von diesem Spezialgebiet wird auch das Thema der schriftlichen Arbeit abhängen, welches dem Kandidaten zur Bearbeitung gestellt wird. Die Annahme ist wohl nicht unberechtigt, daß unter den jetzt bestehenden Verhältnissen nur selten in der mündlichen und schriftlichen Prüfung vom Kandidaten der Nachweis einer Beschäftigung mit experimenteller Psychologie oder gar mit experimenteller Pädagogik verlangt wird. Anders dürfte es beispielsweise in Österreich sein, wo der Psychologie in der Prüfung der Gymnasiallehrer eine bevorzugte Stellung eingeräumt wird unter entsprechender Berücksichtigung ihrer experimentellen Seite[2]). Es muß erwünscht erscheinen, daß dem zukünftigen Oberlehrer schon auf der Universität Gelegenheit geboten werde, in geeigneten Laboratorien die Handhabung der Methoden der experimentellen Psychologie und Pädagogik kennen zu lernen, daß er also psychologisch experimentieren lerne. Dazu ist allerdings zu sagen, daß selbst an denjenigen preußischen Universitäten — für die außerpreußischen deutschen Universitäten gilt Ähnliches — welche bereits psychologische Laboratorien be-

1) „Im Seminarjahre sollen die Kandidaten mit der Erziehungs- und Unterrichtslehre in ihrer Anwendung auf höhere Schulen und mit der Methodik der einzelnen Unterrichtsgegenstände vertraut gemacht sowie zur praktischen Tätigkeit als Lehrer und Erzieher angeleitet werden." „Das Probejahr dient vorzugsweise der selbständigen Bewährung des im Seminarjahre erworbenen Lehrgeschicks." Ordnung der praktischen Ausbildung der Kandidaten für das Lehramt an höheren Schulen Preußens von 1908. — An der von W. Rein geleiteten mit dem pädagogischen Universitäts-Seminar in Verbindung stehenden Übungsschule in Jena ist dem zukünftigen Pädagogen auch während seiner Studienzeit Gelegenheit geboten, sich praktisch unterrichtlich zu betätigen.

2) Vgl. S. 35 der oben (S. 1) erwähnten Schrift Höflers.

sitzen, deren Einrichtung nicht eine derartige ist, daß sie auch nur einem kleinen Teil der in Betracht kommenden Studenten für den angedeuteten Zweck Aufnahme gewähren könnten. Diese Institute müssen unter den jetzt in der Psychologie gegebenen wissenschaftlichen Verhältnissen ihre wichtigste Aufgabe darin sehen, Forschungsinstitute zu sein[1]).

Es werden immer mehr Stimmen laut, die für eine bessere berufliche Ausbildung der Oberlehrer eintreten. „Der Staat hat ... weder für genügende pädagogische Ausbildung gesorgt, noch kümmert er sich um die Vorbildung der jungen Lehrer zu weitergehenden Berufsstellungen." „Das Seminarjahr ist bei aller guten Absicht doch eine Halbheit" (Brandi[2]), S. 28). „Hoffentlich ist die Zeit nicht mehr fern, wo auch für Oberlehrer akademische Kurse zustande kommen, die das ganze große Gebiet der wissenschaftlichen und praktischen Pädagogik so gründlich bearbeiten, wie es der Fachmann im Schulwesen bis in die höchsten leitenden Kreise nötig hat" (Brandi, S. 32). „Nach ihrem gegenwärtigen Stande sollte die pädagogische Psychologie jedem künftigen Lehrer im Laufe seiner Vorbildung nahetreten und es sollten also auch auf der Hochschule Veranstaltungen getroffen werden, um dieses Ziel zu erreichen, was bis jetzt bekanntlich nur ausnahmsweise geschehen ist."[3])

Wie weit soll man nun in Zukunft mit der pädagogischen Ausbildung der Oberlehrer auf der Universität gehen? Soll sie nur nach der theoretischen Seite die unumgängliche Vertiefung erfahren oder soll dazu auch noch eine praktische Ausbildung, z. B. auf Universitätsübungsschulen (ähnlich wie in Jena), kommen?[4]) Vielleicht erweist sich hier der mit der Begründung des pädagogischen Seminars in Halle neuerdings beschrittene Weg gangbar. Dort findet neben der Pflege der theoretischen Pädagogik eine Behandlung einzelner wissenschaftlicher Disziplinen mit Rücksicht auf die in der Schule übliche Form der Darstellung statt. In den experimentierenden Wissenschaften soll der Student z. B. das auf der Schule unentbehrliche Vortragen an der Hand von Experimenten er-

1) In dem Göttinger psychologischen Institut finden etwa in jedem 4. Semester Kurse zur Einführung in die experimentellen Methoden der Psychologie statt, die in der Regel einen starken Besuch aufweisen.

2) Brandi, Unterrichtsverwaltung und Schulwesen in Preußen. Preußische Jahrbücher, Bd. 150, 1. Heft. 1912.

3) R. Lehmann, Über die Vorbildung der Oberlehrer. Vortrag, gehalten auf dem 2. Kongreß des Bundes für Schulreform. S. 93 des Kongreßberichts. Teubner 1913. Man vergleiche zum folgenden auch die anderen Vorträge des dritten Verhandlungstags dieses Kongresses.

4) „Die Anleitung zum Unterrichten gehört nicht zu den Aufgaben der Universität. Damit sprechen wir pädagogischen Vorlesungen keineswegs ihre Berechtigung ab. Diese können die praktische Tätigkeit in etwas vorbereiten und manche Winke enthalten, die verdienen, für das Lehren festgehalten zu werden. Aber durch theoretische Erörterungen wird niemand zum Lehrer gemacht. Diesem Zweck dienen die beiden Jahre, die dem Examen folgen, das pädagogische und das Probejahr." W. Killing, Bemerkungen über die Ausbildung der Gymnasiallehrer. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 22. Teubner 1913. S. 25.

lernen. Die Behandlung der didaktischen Fragen der einzelnen Fächer findet in Halle durch Dozenten statt, welche diese Fächer als solche an der Universität vertreten. Vielleicht befolgt man das Beispiel, welches mit der Habilitation (Göttingen 1911) des leider so früh verstorbenen R. Schimmack für die Didaktik der Mathematik gegeben war, anderwärts auch für andere Fächer. Die Behandlung didaktischer Fragen eines Faches von seiten des Fachmanns dürfte am ehesten geeignet sein, die noch jetzt vielfach in akademischen Kreisen vorhandenen Befürchtungen hinsichtlich einer Verflachung des wissenschaftlichen Niveaus dahinzielender Bestrebungen zu zerstreuen.

Wird man bei einer weitergehenden pädagogischen Ausbildung der wissenschaftlichen Ausbildung die gleiche Sorgfalt wie früher zuwenden können? Oder wird hier mehr eine Beschränkung mit Rücksicht auf die Schulwissenschaften[1]) stattfinden und eine weitergehende Spezialisierung ferngehalten werden müssen? Die Beantwortung dieser Fragen muß der Zukunft überlassen bleiben, die auch die Entscheidung über die Weiterentwicklung unserer Universitäten nach der Richtung der Forschungs- und der Lehrinstitute bringen wird. „Sollte die Entwicklung des Hochschulwesens zu einer weiteren Ausgestaltung der Fachakademien führen, so daß diesen allgemein die praktische Ausbildung überlassen würde, so würde auch das pädagogische Gebiet ähnlich dem technischen und militärischen einer besonderen Akademie zufallen. Anders würde es werden, wenn die Universitäten für die Zukunft überall den Anschluß der praktischen Ausbildung ihrer Zöglinge festhielten und diese dann auch hinsichtlich der Oberlehrer zu übernehmen haben würden" (Brandi, S. 30).

Wie die Volksschullehrer durch die Gründung von Laboratorien für experimentelle Psychologie und Pädagogik ihre pädagogische Fortbildung teilweise in die eigene Hand genommen haben, so sind auch die Studenten einiger Universitäten durch die Gründung sogenannter pädagogischer Gruppen zur Selbsthilfe in der pädagogischen Vorbereitung für das höhere Lehramt geschritten[2]). Diese Gruppen verfolgen das Ziel, den künftigen Oberlehrer hauptsächlich mit neueren Fragen der pädagogischen Theorie und Praxis bekannt zu machen, deren Pflege von seiten der Universität bis jetzt nicht in genügendem Maße erfolgt. Diesem Zweck dienen Vorträge und Diskussionen, an denen auch, um gerade die Beziehungen zur Praxis zu pflegen, ausübende Pädagogen sich beteiligen[3]). Es

1) Vgl. hierzu J. Baumanns auch als Buch (Leipzig 1899) erschienenen Vortrag „Schulwissenschaften", den er auf der Tagung der deutschen Philologen und Schulmänner in Bremen 1899 gehalten hat.

2) Vgl. hierzu „Studentische Selbsthilfe in der pädagogischen Vorbereitung für das höhere Lehramt". Zeitschr. für pädag. Psychol., 13. Jahrg., 1912, sowie W. Stern, Der Student und die pädagogischen Strömungen der Gegenwart. Säemann-Schriften, Heft 6. Teubner 1912.

3) Die ideale Form der pädagogischen Gruppe ist vielleicht an der Göttinger Universität verwirklicht, wo neben den Studenten regelmäßig Dozenten, Oberlehrer

findet auch die Besichtigung pädagogisch interessanter Anstalten statt. Derartige Besichtigungen sind dem Studenten zufolge seiner größeren Bewegungsfreiheit viel leichter möglich als dem Besucher des Seminars. Der Student muß schon während seiner Ausbildungszeit auf der Universität enge Fühlung nehmen mit der Pädagogik, damit er die Fragen seines zukünftigen Berufes zu den Fragen seines Fachstudiums in Beziehung setzen lerne. Er muß die Eigenart der Jugend, mit deren Unterricht und Erziehung er sich Zeit seines Lebens beschäftigen soll, aus eigener Anschauung kennen lernen, damit er schon früh die pädagogisch-psychologische Einstellung gewinnt, die er für den Beruf des Erziehers benötigt, oder aber auch – und das ist auch nicht bedeutungslos – damit er möglichst früh erkenne, daß er für diesen Beruf nicht die geeignete Persönlichkeit ist und daraus die Konsequenzen zieht.

Noch eine andere Bedeutung kann die freiere Beschäftigung mit Pädagogik in den Studentenjahren gewinnen. Der Blick wird dabei nicht eingeengt auf die Gattung der höheren Schulen, er ist auf das allgemeine Bildungsproblem gerichtet und kann so das Schulwesen vom Kindergarten bis zur Hochschule umfassen. Das Seminarjahr kann in der Regel nur den an der ausbildenden Schule gegebenen Unterrichtsbetrieb berücksichtigen. Wie fruchtbar aber auch für den Oberlehrer eine Fühlungnahme mit der Organisation und der Pädagogik anderer Schulen, wie z. B. der Volksschule, der Fortbildungsschule und Fachschule werden kann, davon legen nicht zum wenigsten gerade die IMUK-Abhandlungen mit ihrem Überblick über den Betrieb des gesamten mathematischen Unterrichts auf den verschiedensten Lehranstalten beredtes Zeugnis ab.

---

und Volksschullehrer an den Zusammenkünften teilnehmen. – Es sei hier darauf hingewiesen, daß schon im Jahre 1898 auf Anregung von E. Bernheim eine Vereinigung aller Lehrer zu Greifswald erfolgt ist, welche sich der Pflege pädagogischer Fragen annahm. Wie mir Herr Prof. Bernheim hierzu mitteilte, nahm die Vereinigung nach zweijährigem Bestand infolge von Unstimmigkeiten zwischen den akademisch und den seminarisch gebildeten Lehrern ein Ende.

NAMENVERZEICHNIS

SCHRIFTEN
DES DEUTSCHEN UNTERAUSSCHUSSES DER INTERNATIONALEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHTSKOMMISSION

Es handelt sich einerseits darum, das deutsche Publikum durch geeignete Mitteilungen und Übersetzungen über den allgemeinen Stand der Arbeiten der Kommission auf dem laufenden zu halten, andererseits aber die verschiedensten Seiten des deutschen mathematischen Unterrichts in ausführlichen Darlegungen zur Geltung zu bringen. Dieser Aufgabe dienen zwei Reihen von Veröffentlichungen:

A. **Berichte und Mitteilungen**, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von W. Lietzmann. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh.

1. Fehr, H., Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. Deutsche Übersetzung von W. Lietzmann. (S. 1—10.) 1909. M. —.30.
2. Noodt, G., Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen. (S. 11—32.) 1909. M. —.80.
3. Klein, F., und Fehr, H., Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 33—38.) 1909. M. —.20.
4. Klein, F., und Fehr, H., Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann, sowie Zühlke, P., Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preußischen Realschulen. (S. 39 bis 54.) 1910. M. —.50.
5. Lietzmann, W., Die Versammlung in Brüssel. Nach dem von H. Fehr verfaßten dritten Rundschreiben des Hauptausschusses. (S. 55—74.) 1911. M. —.60.
6. Fehr, H., Viertes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 75—88.) 1911. M. —.50.
7. Lietzmann, W., Der Kongreß in Mailand vom 18. bis 20. September 1911, sowie Schimmack, R., Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. (S. 89—126.) 1912. M. 1.60.
8. Stäckel, P., Nachruf auf Peter Treutlein, sowie Lietzmann, W., Der Internationale Mathematikerkongreß in Cambridge. (S. 129—186.) 1913. M. 1.60.
9. Dreßler, H., Mathematische Lehrmittelsammlung insbesondere für höhere Schulen. Mit 21 Figuren. (S. 187—217.) 1913. M. 1.—

B. **Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland**, veranlaßt durch die Internationale Math. Unterrichts-Kommission. Hrsg. v. F. Klein. 5 Bde., in einzeln käuflichen Heften. gr. 8. Steif geh.

I. Band. Die höheren Schulen in Norddeutschland. Kompl. (Heft 1—5) geh. M. 16.—, in Leinw. geb. M. 18.—

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Mit einem Einführungswort zu Band I von F. Klein. (XII u. 102 S.) 1909. M. 2.—
2. Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höh. Knabenschulen in Preußen. Mit 18 Fig. (VIII u. 204 S.) 1910. M. 5.—
3. Lorey, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen und in einigen norddeutschen Staaten. (VI u. 118 S.) 1911. M. 3.20.
4. Thaer, A., Geuther, N., Böttger, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. (VI u. 93 S.) 1911. M. 2.—
5. Schröder, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts a. d. höh. Mädchenschulen Deutschlands, insbes. Norddeutschlands. Mit einem Schlußwort zu Bd. I von F. Klein. (XII u. 183 S.) 1913. M. 6.—

II. Band. Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland. Kompl. (Heft 1—8) geh. M. 12.—, in Leinw. geb. M. 14.—

1. Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten, sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. Mit einem Einführungswort zu Bd. II von P. Treutlein. (XIV u. 85 S.) 1910. M. 2.40.
2. Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. (XII u. 78 S.) 1910. M. 2.20.
3. Geck, E., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. (IV u. 104 S.) 1910. M. 2.60.
4. Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Baden. (IV u. 48 S.) 1910. M. 1.60.

5. Schnell, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Hessen. (VI u. 51 S.) 1910. M. 1.60.
6. Hoßfeld, C., Der mathemat. Unterricht an den höheren Schulen Thüringens. (IV u. 18 S.) 1912. M. —.80.
7. Wirz, J., Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsaß-Lothringen. (IV u. 58 S.) 1911. M. 1.80.
8. Lietzmann, W., Geck, E., Cramer, H. Neue Erlasse in Bayern, Württemberg u. Baden. Mit einem Schlußwort z. Bd. II v. A. Thaer. (49 S.) 1913. M. 1.50.

III. Band. Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts.

1. Schimmack, R., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Mit einem Einführungswort zu Band III von F. Klein. (VI u. 146 S.) 1911. M. 3.60.
2. Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern Mit 22 Figuren. (VI u. 112 S.) 1910. M. 2.80.
3. Zühlke, P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. (IV u. 92 S.) 1911. M. 2.60.
4. Hoffmann, B., Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen. Mit 9 Figuren. (VI u. 68 S.) 1912. M. 2.—
5. Timerding, H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. (IV u. 45 S.) 1911. M. 1.60.
6. Gebhardt, M., Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht an den höheren Schulen Deutschlands. Dargelegt auf Grund alter und neuer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen. (VII u. 157 S.) 1912. M. 4.80.
7. Wernicke, A., Mathematik und philosophische Propädeutik. Mit 5 Figuren. (VII u. 138 S.) 1912. M. 4.—
8. Katz, D., Psychologie und mathematischer Unterricht. (IV u. 120 S.) 1913.
9. Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870. (Unter der Presse.)

IV. Band. Die Mathematik an den technischen Schulen.

1. Grünbaum, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. Mit einem Einführungswort zu Bd. IV von P. Stäckel. (XVI u. 100 S.) 1910. M. 2.60.
2. Ott, C., Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (IV u. 164 S.) 1913. M. 4.—
3. Girndt, M., Der mathematische Unterricht an den Baugewerkschulen. (In Vorb.)
4. Schilling, C., und Meldau, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen. (VI u. 82 S.) 1912. M. 2.—
5. Trost, W., Die mathematischen Fächer an den gewerblichen Fortbildungsschulen. (Unter der Presse.)
6. Penndorf, B., Rechnen und Mathematik im Unterricht der kaufmännischen Lehranstalten. (IV u. 100 S.) 1912. M. 3.—
7. Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. (VI u. 56 S.) 1911. M. 1.80.
8. Furtwängler, Ph., und Ruhm, Die mathematische Ausbildung der Landmesser. (In Vorbereitung.)
9. Stäckel, P., Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen. (In Vorbereitung.)

V. Band. Der mathematische Elementarunterricht und die Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten.

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit einem Einführungswort zu Bd. V von F. Klein. Mit 20 Figuren. (VII u. 125 S.) 1912 M. 3.—
2. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 38 Figuren. (IV u. 88 S.) 1912. M. 2.80.
3. Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Süddeutschland, mit Ausführungen von H. Hensing über Hessen, H. Cramer über Baden, E. Geck über Württemberg, G. Kerschensteiner u. A. Bock über Bayern. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein. (XIV und 163 S.) 1912. M. 5.—
4. Dreßler, H. u. Körner, K., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen und Thüringen. (In Verb.)
5. Umlauf, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte. (In Vorbereitung.)
6. Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts in den preußischen Volksschulen. (In Vorbereitung.)
7. Körner, K. u. Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts in den Lehrerbildungsanstalten in Preußen. (In Vorbereitung.)