Vorlesungen über die algebra der logik

Ernst Schröder, Jakob Lüroth, Karl Eugen Müller

Ernst Schröder

VORLESUNGE[illegible]

[illegible]

[illegible]GEBRA DER [illegible]

([illegible]EXAKTE LO[illegible])

[illegible]

DR ERNST SCH[illegible]DER,
[illegible] DER MATHEMA[illegible] AN DER [illegible]

ZWEITER BAND.

ZWEITE [illegible]

HERAUSG[illegible]
[illegible] DEUTSCHEN MATHEMATIKER-V[illegible]

VON

DR EUGEN MÜLLER,
PROFESSOR AN DER OBERREALSCHULE ZU K[illegible]

MIT EINEM BILDNIS [illegible]

LEIPZIG
[illegible]CK UND VERLAG [illegible]
1905

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

ALGEBRA DER LOGIK

(EXAKTE LOGIK)

VON

DR. ERNST SCHRÖDER,

WEILAND PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE IN BADEN

ZWEITER BAND.

ZWEITE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAG
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

DR. EUGEN MÜLLER,

PROFESSOR AN DER OBERREALSCHULE ZU KONSTANZ.

MIT EINEM BILDNISS ERNST SCHRÖDERS.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905

Ernst Schröder †.

Von J. LÜROTH in Freiburg i. Br.

Am 16. Juni 1902 starb Ernst Schröder, großh. badischer Hofrat und Professor der Mathematik an der technischen Hochschule Karlsruhe, nach einer Krankheit von nur wenigen Tagen an Gehirnentzündung. Mit ihm ist ein guter und liebenswürdiger Mensch, ein tüchtiger Mathematiker, und mir vor allem ein lieber und treuer Freund verschieden, mit dem mich seit vierzig Jahren nahe Beziehungen verbanden.

Indem ich es unternehme, dem Verblichenen hier einige Blätter der Erinnerung zu weihen und über seine mathematischen Leistungen zu berichten, verhehle ich mir nicht die Schwierigkeiten, die mit dieser Aufgabe verbunden sind. Sie haben ihren Grund in dem Forschungsgebiete, das Schröder besonders in den letzten Jahrzehnten pflegte, das von den gewöhnlichen Wegen mathematischer Bethätigung weit ab liegt. Wenn ich auch, durch den öfteren Verkehr mit Schröder, vielleicht etwas mehr in den Logikkalkul eingeweiht bin als manche Fachgenossen, so bin ich von einer gründlichen Vertrautheit weit entfernt; und ich muss daher die Kenner bitten, den Bericht über diese Dinge nachsichtig zu beurteilen.

Ernst Schröder stammte aus einer ursprünglich hannoverschen Familie. Sein Vater war G. Fr. Heinrich Schröder[1]), „der sich durch viele mineralogische, chemische und physikalische Arbeiten, am meisten vielleicht als Vorläufer Pasteurs durch seine Untersuchungen über Filtration der Luft“ eine geachtete Stellung in der Wissenschaft erworben hatte. Zuerst in seiner Vaterstadt München am polytechnischen Zentralinstitut, dann an der Kantonschule in Solothurn thätig, siedelte er 1840 nach Mannheim über, wo ihm die Direktion der höheren Bürgerschule

1) Die in Anführungszeichen gesetzten Stellen sind fast wörtlich einer kurzen Selbstbiographie entnommen, die Schröder seinem Bilde im „Geistigen Deutschland“ beigegeben hatte.

übertragen wurde, aus der später das Realgymnasium hervorging. Er leitete diese Schule bis zu seiner 1873 erfolgten Pensionirung, nach der er 1876 seinen Wohnsitz in Karlsruhe nahm, wo später ausser seinem ältesten Sohne Ernst noch ein zweiter Sohn in hoher Staatsstellung thätig war. Er starb am 11. Mai 1885. Als erstes Kind aus seiner Ehe mit Karoline Walther, der Tochter des Pfarrers und Seniors Walther in Haunsheim, wurde Ernst am 25. November 1841 in Mannheim geboren. Er genoss zunächst zu Hause, dann zwei Jahre lang bei seinem Grossvater Walther eine vortreffliche Erziehung. Sein gutes Wortgedächtniss und ein grosses Sprachtalent befähigten den Knaben, der dem Unterricht von anderen Zöglingen seines Grossvaters beiwohnte, spielend das Lateinische so weit zu erlernen, dass er im Alter von acht Jahren ziemlich gewandt lateinisch sprach.

„Diese Frühreife hatte jedoch auch ihre Schattenseiten, indem sie den Knaben auf Unterrichtsgemeinschaft mit meist sehr viel älteren Genossen verwies, ihn der gleichaltrigen Spielkameraden beraubend und so den Grund zum Sondertum und einem Hang zu Einsamkeit legte.

Diesem Übelstande wurde einerseits entgegengewirkt durch mehrmalig freiwilliges Repetiren und Hospitiren in dem nun folgenden Besuch der drei Oberklassen der Schule seines Vaters, wo neuere Sprachen, Chemie und Naturgeschichte ihn besonders anzogen und er auch den Unterricht des namhaften Mathematikers August Weiler (der heute noch in Karlsruhe lebt) genoss.

Andererseits wurde derselbe gemildert durch die Pflege jeder Art von körperlicher Kräftigung gewidmeten Sports. Endlich wurde Schröder vor dem Übergang zum Gymnasium vier Monate lang zu einer befreundeten Oberförstersfamilie gegeben“. Im Jahre 1856 ging Schröder an das Lyceum in Mannheim über und trat in die viertoberste Klasse, damals Unterquinta geheissen, ein.

Schröder muss mit seinen Mitschülern wenig Beziehungen gehabt haben. Er selbst kam nie auf solche zu sprechen, und, wenn ich, der zwei Jahre hinter ihm dieselbe Anstalt durchlaufen hat, manchmal solche Genossen erwähnte, zeigte sich gewöhnlich, dass Schröder sie kaum kannte. Im Herbste des Jahres 1860 bekam er das Zeugniss der Reife. „Begeisterung für Naturerkenntniss und reges Interesse an philosophischen Spekulationen zeigten sich schon früh, so dass die Berufswahl nicht schwer fiel und im zehnten Lebensjahre schon für Schröder der Plan fest stand, sich mathematischen und physikalischen Studien, somit dem Lehrberufe zu widmen.“ Um diesen Plan auszuführen, wandte er sich nach Heidelberg, um unter Hesse, Kirchhoff und

Bunsen zu studiren. Er that dies mit solchem Eifer und Erfolg, dass er bereits 1862 das Doktorexamen mit der besten Note bestehen konnte.

„Ein ihm verliehenes Stipendium führte Schröder dann nach Königsberg, wo er neben dem Hören von mathematisch-physikalischen Vorlesungen bei Neumann und Richelot sich eifrig an den Seminarübungen über diese Disziplinen beteiligte und einige der dafür ausgesetzten Preise erwarb. Der Herbst des Jahres 1864 schloss die Studienjahre ab."

Schröder bestand bald darauf in Karlsruhe die Prüfung für Lehramtspraktikanten mit der Note „gut". Er hätte wahrscheinlich sofort eine Anstellung im badischen Schuldienst gefunden, wenn er es nicht vorgezogen hätte, sich zunächst nach Zürich zu wenden. Dort habilitirte er sich für Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum und lehrte gleichzeitig in Vertretung des erkrankten Prof. Gräffe als Vikar an der Kantonschule.

In Zürich verkehrte Schröder sehr viel mit Waadtländern, wobei er Gelegenheit hatte, seine guten Kenntnisse des Französischen wesentlich zu üben und zu verbessern. Seinen Neigungen zu Leibesübungen getreu benutzte er den Aufenthalt in der Schweiz zu vielen Bergtouren. Unter anderm besuchte er mit einem Freunde zusammen die Gletscherwelt im Hintergrund des Bagnethals, eines der südlichen Nebenthäler der Rhône, und machte dort zum Teil ohne Führer mehrere grosse Besteigungen.

Obgleich die Stellung in Zürich Schröder seinen Lebensunterhalt sicherte, „so schienen doch die Chancen für die geplante Laufbahn bei solcher Doppelstellung nach beiden Richtungen hin nicht sonderlich hohe". Dieser Umstand und unliebsame Vorkommnisse persönlicher Art veranlassten Schröder im Sommer 1868 die Thätigkeit in Zürich aufzugeben und sich wieder dem heimischen Schuldienst zuzuwenden. Er erhielt zunächst eine Aushilfsstelle an der höheren Bürgerschule in Karlsruhe und kurze Zeit darauf eine Lehrstelle am Pädagogium in Pforzheim. Im Oktober 1869 legte er noch das zweite Examen, die sog. Dienstprüfung, mit der Note „vorzüglich" ab.

Schröder war in diesen Jahren schon literarisch thätig gewesen. Er hatte damals eine gewisse Neigung zu Verallgemeinerungen. So interessirten ihn lebhaft die Bestrebungen, die Definition von Funktionen, die von natürlichen Zahlen abhängen, auch auf andere Zahlformen auszudehnen. Einen Versuch ähnlicher Art hatte er selbst schon gemacht in der kleinen Arbeit über „Vielecke mit gebrochener

Seitenzahl" (1)[1]), die er noch als Heidelberger Student veröffentlicht hatte, indem er hierin den Begriff des p/q Ecks aufstellte. Ähnliche Verallgemeinerungen für den Raum führten ihn auf Polyeder von gebrochner Seitenzahl, und ich erinnere mich sehr sauber gearbeitete Pappmodelle von solchen Körpern bei ihm gesehen zu haben, die er während einer Masernkrankheit in Königsberg angefertigt hatte. Doch hat er über diese Dinge nichts veröffentlicht. Auch beschäftigte er sich eingehend mit den Versuchen Liouvilles und anderer, den Begriff des Differentialquotienten auf beliebige Indices auszudehnen. In seiner Probevorlesung bei der Habilitation in Zürich behandelte Schröder diese Fragen. Eine Verallgemeinerung anderer Art knüpfte er (2) an die Maclaurinsche Summenformel. Er untersucht die Summe einer Reihe von Funktionswerten, deren Argumente nicht wie gewöhnlich reelle Zahlen, sondern äquidistante Punkte einer beliebigen Geraden der komplexen Zahlenebene sind. Er kommt hierbei auf Verallgemeinerungen der Bernoulli'schen Funktionen und gewisser von Ubbo Meyer eingeführter Zahlen, die mit den Binomial-Koeffizienten zusammenhängen und auf die er durch Kinkelin aufmerksam geworden. In einigen späteren Publikationen (5, 6, 16, 17) kommt er auf diese Dinge öfter zurück. Trotz der Belastung mit etwa 26 Schulstunden konnte Schröder, der Zeit seines Lebens ein überaus fleissiger Arbeiter war und sich viele Nachtarbeit zumutete, während seines Pforzheimer Aufenthaltes einige Arbeiten veröffentlichen (3, 4, 5, 6). Zwei von ihnen (3 und 4) beziehen sich auf eine von Eggers angeregte Methode, um Gleichungen durch Iteration aufzulösen. Die beiden anderen (5 und 6) sind wol entstanden bei den Vorarbeiten für das Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Sie behandeln die Frage, auf wie viele verschiedene Arten man ein Produkt von Zahlen berechnen könne. Als der Krieg im Jahre 1870 ausbrach, meldete sich Schröder in patriotischer Begeisterung freiwillig zum Dienst und wurde auch, der seiner Zeit bei der Konskription seiner Augen wegen zurückgewiesen war, als tauglich erklärt. Nach einer kurzen Ausbildungszeit in der Heimat wurde er der 4. schweren Batterie des badischen Feldartillerie-Regiments unter Hauptmann v. Froben zugeteilt. Sein jüngster Bruder stand gleichzeitig bei der Infanterie. Er machte die Belagerung von Strassburg und nach dessen Einnahme den Vormarsch der badischen Division nach Süden gegen Dijon mit, der mit einer Reihe von kleinen

---

1) Die Nummern beziehen sich auf das Seite XVII folgende Verzeichniss der Schriften.

Gefechten verbunden war. Aber vor den ernstlichen Zusammenstössen mit der französischen Südarmee erhielt Schröder die Nachricht, dass er zum Professor befördert sei und wurde bald darauf, am 1. Nov. 1870, nach Reklamation durch die Schulbehörde in die Heimat zurückgeschickt. Er wurde zum Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften an dem Pro- und Realgymnasium zu Baden-Baden ernannt. Diese Stelle behielt er bis zum Jahre 1874.

Während seines Aufenthaltes in Baden beschäftigte sich Schröder wesentlich mit den Arbeiten an seinem Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, das 1873 erschien. Allerdings kam er nie dazu, seinen ursprünglichen Plan vollständig auszuführen und das auf 4 Bände berechnete Werk zu vollenden. Es blieb auf den ersten damals erschienenen Band beschränkt. In ihm behandelt er zunächst sehr ausführlich und eingehend den Zahlbegriff und erwähnt dabei, wol als der erste, das allem Zählen zugrunde liegende Axiom, dass die Anzahl unabhängig sei vom Zählprozess; dass man also, wenn man eine Menge wiederholt zähle, immer dieselbe Anzahl bekommen müsse, vorausgesetzt man habe sich nicht verzählt. Dann folgt eine ausführliche Erörterung über die arithmetischen Operationen und zwar über die direkten und inversen. Die direkten Operationen werden einmal untersucht auf Grund einer independenten Definition, und dann, wesentlich nach Grassmann, unter Annahme eines rekurrenten Bildungsgesetzes. Um den Gebrauch von Klammern möglichst einzuschränken, gibt Schröder zwei Konventionen, die seither allgemeine Aufnahme in die Lehrbücher gefunden haben. In einem Anhang wird das Rechnen mit Produkten und Summenzeichen ausführlich erörtert, insbesondere werden die Regeln aufgestellt, die bei Vertauschung der Summationsordnung bei mehrfachen Summen die Änderung der Grenzen ergeben. In den vorhergehenden Kapiteln führt Schröder nun aber eine wesentliche Neuerung ein, indem er die gewöhnlich festgehaltene Eindeutigkeit der Umkehrungen fallen lässt und das Operiren mit mehrdeutigen Ausdrücken eingehend behandelt. Er benutzt hierbei schon das *Unterordnungzseichen* $\subset$ und das *Einordnungszeichen* $\subseteq$, das in seinen späteren Veröffentlichungen über die Logik eine so grosse Rolle spielt. Ferner wurde er — wenn ich nicht irre durch die monatelange Einstellung des Druckes, die durch den grossen Setzerstreik des Jahres 1872 hervorgerufen war —, nach Hankels Vorgang veranlasst, weitergehende Untersuchungen einzufügen über die Gestalt, welche die arithmetischen Formeln annehmen würden, wenn die Operationen anderen als den gewöhnlichen Gesetzen gehorchten. Inbesondere dachte er dabei, dass die Multiplikation weder kommutativ noch assoziativ sein könnte. Sie würde dann zwei Umkehrungen, also zwei Divisionen zulassen, die Schröder als *Messen* und *Teilen* bezeichnete und durch Doppelpunkt und Bruchstrich unterschied. Bei diesen Untersuchungen, die hier begannen, befolgte er zunächst den Zweck, die Folgerungen der einzelnen Annahmen von einander zu trennen, also herauszubringen, welche Formeln alleinige Folgerungen des Kommutationsgesetzes seien, welche die Folgen des Assoziationsgesetzes, welche endlich nur beim Zusammenwirken der beiden Gesetze Geltung hätten u. s. w. Im weiteren Verlauf dieser Spekulationen, die Schröder während seines ganzen Lebens beschäftigten, von denen aber nur wenige Resultate publizirt sind, stellte er sich eine sehr viel umfassendere Aufgabe. Die Multiplikation mit ihren beiden Umkehrungen kann als symbolische Bezeichnung einer Funktion von zwei Argumenten aufgefasst werden mit ihren zwei möglichen Umkehrungen, und das Studium von Gleichungen zwischen solchen Funktionen war nun sein Ziel. Um dieses Problem einigermassen einzuschränken, benützte er den Umstand, dass in den gewöhnlichen arithmetischen Fundamentalgleichungen höchstens sieben Buchstaben auftreten. Er beschränkte sich daher auf die Betrachtung von solchen Gleichungen mit nur sieben Buchstaben. Die Buchstaben sollen auf der rechten und linken Seite der Gleichungen nur durch Multiplikationen oder ihre beiden Umkehrungen verbunden sein. Ein spezieller Fall ist der, wenn auf der rechten und linken Seite je nur eine Operation zur Anwendung kommt. Bei den entsprechenden arithmetischen Gleichungen treten dabei höchstens sechs Buchstaben auf, und deswegen beschränkt sich Schröder auch bei seinen Untersuchungen des speziellen Falles auf Gleichungen mit höchstens sechs Buchstaben. Er betrachtet dabei diese Buchstaben als ganz allgemeine Zahlen, schliesst alle speziellen Zahlenwerte wie 0, 1 u. dergl. aus, und nimmt an, die Multiplikation wie ihre Umkehrungen seien vollkommen eindeutig. Er hatte nun die Absicht, die bei den angegebenen Beschränkungen möglichen Gleichungen auf ihre Folgerungen zu untersuchen, d. h. alle aus einer Gleichung folgenden anderen Gleichungen aufzustellen. Die Gesamtheit aller dieser Folgerungen nannte er in dem allgemeineren der oben genannten Fälle einen *„Kalkul“*, im speziellen einen *„Algorithmus“*. Die Gleichungen eines solchen Algorithmus oder eines Kalkuls zerfallen in zwei Klassen, indem nämlich aus einer Gleichung die sämtlichen anderen folgen oder nicht. Schröder hat einen ausserordentlichen Fleiss und eine grosse Arbeitskraft auf diese Studien verwendet, von deren Resultaten er Einzelheiten in einer Reihe von Arbeiten veröffentlicht hat (10, 11, 20, 22, 24, 25, 26).

Insbesondere beschäftigte ihn ein System von 990 Gleichungen, die in der Gesamtheit von 7342 möglichen Gleichungen eine hervorragende Rolle spielen und deren Struktur er eingehend untersucht. Um die Möglichkeit der Algorithmen oder Kalkule und ihre Unabhängigkeit von einander zu beweisen, wendet er zwei Mittel an. Er konstruirt Lösungen mit Hilfe der gewöhnlichen mathematischen Formeln, indem er einen Bruch, dessen Zähler und Nenner bilineare Funktionen von zwei Veränderlichen sind, so einrichtet, dass er die gegebene Funktionalgleichung erfüllt. Ferner konstruirt er Funktionstafeln, d. h. Tafeln, die zu gegebenen Argumentwerten den Funktionswert liefern, indem er dabei die Anzahl der möglichen Argumentwerte klein, höchstens gleich 8 annimmt. Für den Fall von nur 4 Argumentwerten stellt er die sämtlichen 576 Funktionstafeln auf, die bei eindeutigen Umkehrungen möglich sind, und für den Fall von acht Argumentwerten solche Tafeln, die gegebenen Funktionalgleichungen genügen, während sie bei weniger als acht Werten unmöglich sind. Bei all diesen Untersuchungen zeigt Schröder eine grosse Gewandtheit in der Behandlung kombinatorischer Probleme, wie er solche auch in einigen speziellen Abhandlungen untersucht hat. Einige habe ich schon früher erwähnt. In einer anderen (21) bestimmt er die Anzahl der Substitutionen, welche in eine gegebene Zahl von Zyklen zerfallen. Bei all diesen Problemen kommt ihm seine Übung in der Benützung der Ubbo Meyer'schen Fakultäten-Koeffizienten, von denen schon früher die Rede war, zugute.

Während seines Aufenthaltes in Baden-Baden begann Schröder auch die Erlernung der russischen Sprache und benutzte seine freie Zeit, um die schöne Umgebung der berühmten Bäderstadt nach allen Richtungen hin in tüchtigen Fussmärschen, auf denen ich ihn öfter begleitete, kennen zu lernen.

Seine mathematischen Arbeiten bewirkten, dass er im Jahre 1874 nach Darmstadt an die technische Hochschule als ordentlicher Professor der Mathematik berufen wurde. Im Jahre 1876 folgte er einem Rufe an die technische Hochschule nach Karlsruhe; hier lehrte er, seiner Neigung entsprechend, die Fächer der Arithmetik, Trigonometrie und höheren Analysis. In dieser Stellung blieb er, später zum Hofrat ernannt, bis zu seinem Tode. Das Vertrauen seiner Kollegen berief ihn im Jahre 1890 zum Direktor des Polytechnikums, während er dem Senat der Hochschule wiederholt angehört hatte.

Unter den Arbeiten, die er in Darmstadt und Karlsruhe veröffentlichte, verdient neben den sofort zu besprechenden besonders die über „Ein auf die Einheitswurzeln bezügliches Theorem der Funktionenlehre“ (12) Erwähnung, weil Schröder hier ein einfaches Beispiel einer analytischen Formel gibt, die in verschiedenen Teilen ihres Gebietes verschiedene Werte annimmt. Dieses Beispiel wurde später von Weierstrass benutzt.

Schon bei der Vorbereitung zu dem Lehrbuch der Arithmetik und Algebra war Schröder, wol durch Robert Grassmann's Formenlehre, auf die rechnerische Behandlung der Logik aufmerksam geworden. Diese Disziplin war es, welche seit seiner Übersiedlung nach Karlsruhe sein wissenschaftliches Leben vollständig erfüllte. Er lernte die Werke von Boole, De Morgan, Ch. S. Peirce und anderen besonders englischen und amerikanischen Autoren über die mathematische Logik kennen und studirte eifrig die Schriften von Sigwart, Trendelenburg, Lotze, Überweg, Wundt u. s. w. über den philosophischen Teil dieser Disziplin.

Er ging nun daran die von den Vertretern der mathematischen Logik erhaltenen Resultate in einheitlicher Weise darzustellen. Es gelang ihm zunächst das System von Boole dadurch zu verbessern, dass er die Benutzung der gewöhnlichen Zahlen als unnötig nachwies. Die Division und Subtraktion ersetzte er durch Einführung der Negation. Er hatte schon in seinem Lehrbuch der Arithmetik sich dahin ausgesprochen, dass man dann im Stande sein müsse, mit der Terminologie, die einem nun zu Gebote stehe, alle Beziehungen auszudrücken, in denen Begriffe dem *Umfang nach* stehen. In dem kleinen Buche (13) „Operationskreis des Logikkalkuls“, das 1877 erschienen ist, gibt er in diesem Sinne eine kurze Übersicht der Theorie. Er operirt mit *Klassen von Dingen,* d. h. mit der Gesamtheit aller Dinge, die gegebene Merkmale gemein haben. Zwei Klassen a und b können Individuen gemein haben; deren Gesamtheit wird mit $a \cdot b$ oder ab bezeichnet. Dagegen soll unter $a + b$ die Klasse der Dinge verstanden werden, die entweder zu a oder zu b gehören. Indem man nun immer auf die Individuen zurückgeht, beweist man die Rechengesetze, die mit den gewöhnlichen identisch sind, aber deswegen einfacher ausfallen, weil in der Logik $a + a = a$ und $a \cdot a = a$ ist. Die Menge der Dinge, die nicht zu a gehören, wird mit $\bar{a}$ bezeichnet. Dies ist die in späteren Schriften adoptierte Bezeichnung, früher schrieb Schröder dafür a_1. Für diese Negation gelten die Gesetze $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ und $\overline{(ab)} = \bar{a} + \bar{b}$. Diese wenigen Formeln reichen hin, um einen grossen Teil der Logik des Umfanges der Begriffe im rechnerischen Gewande darzustellen. Erst im Jahre 1890 liess Schröder diesem kleinen Werke den ersten Band (27) einer ausführlichen auf drei Bände berechneten Darstellung der Logik in mathematischem Gewande, der exakten Logik, wie er sie gern nannte, folgen. In diesen „Vorlesungen über die Algebra der Logik" gibt uns Schröder eine ausführliche systematische Darstellung der ganzen Theorie, in der er die Forschungen der Engländer und Amerikaner, insbesondere von Charles S. Peirce, in einheitlichem Gewande, vermehrt durch zahlreiche eigene Untersuchungen vorträgt. Wie in seinem früheren Schriftchen, beschränkt er sich hier auf die Logik des Umfangs. Während er aber früher die Beweise und Definitionen auf die Betrachtung der Individuen gründete, stellt er jetzt in rein formaler Weise Definitionen an die Spitze, die einen Kalkul darstellen, den er als „*identischen*" bezeichnet. In dieser Weise wird zunächst die Subsumtion definirt, oder wie Schröder sagt, die Einordnung, dann die Summe und das Produkt. Um die Formeln allgemein gültig zu machen und gewisse Ausnahmen zu vermeiden, benutzt er mit Boole die durch das Symbol 0 bezeichnete *Nullklasse*, zu der im Gegensatz die Klasse 1 steht, die allen anderen übergeordnet ist und den ganzen Denkbereich umfasst. Es gelingt mit Hilfe von diesen Definitionen, eine ganze Anzahl der Rechnungsregeln des identischen Kalkuls zu beweisen. Insbesondere auch den einen Teil des Distributionsgesetzes $ab + ac \mathrel{\underline{\in}} a(b + c)$. Dagegen gelingt es nicht, auch dessen zweiten Teil $a(b + c) \mathrel{\underline{\in}} ab + ac$ abzuleiten; und in einem Anhang an das Buch gibt sogar Schröder einen strengen Beweis dafür, dass dies unmöglich ist, indem er eine Gruppe von Operationen aufzeigt, welche die Gesetze des identischen Kalkuls erfüllen, ohne dass der zweite Teil des Distributionsgesetzes gilt. Die genannten Deduktionen werden unterbrochen durch eine Untersuchung über die Deutung der Operationen, über die Übersetzung aus der Wortsprache in die Zeichensprache, wobei besonders die verschiedene Bedeutung von „oder" genau studirt wird. Um nun auch den zweiten Teil des Distributionsgesetzes zu beweisen, benutzt Schröder die Negation und setzt jenen zweiten Teil für einen speziellen Fall voraus. DieNegation $\bar{a}$ einer Klasse a, die Schröder das Negat von a nannte und „a-Strich" aussprach, definirt Schröder ebenfalls rein formal und zeigt dann ihre Identität mit denjenigen Dingen des Denkbereiches auf, die zur Klasse a nicht gehören. Die Frage, wie Urteile, die eine Verneinung enthalten, in die Zeichensprache zu übersetzen seien, macht eine genauere Untersuchung nötig über die Bedeutung eines Urteils, das eine Negation enthält; er entscheidet sich dafür, „a ist nicht b" zu übersetzen durch $a = \bar{b}$, womit er sich an die Ansicht von Aristoteles und Wundt anschliesst. Die Negation erlaubt, die Subtraktion und die Division, welche die englischen Logiker noch benutzt hatten, ganz zu umgehen und damit gewisse Schwierigkeiten zu vermeiden, die sich sonst einstellen. Die Behandlung von Gleichungen gestaltet sich im Logikkalkul besonders einfach, da man alle Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, die eine Seite auf 0 bringen und die andere in eine lineare und homogene Funktion der unbekannten Klasse und deren Verneinung entwickeln kann. In dieser Form lässt sich dann leicht die Bedingung für die Löslichkeit, d. h. die Resultante, und der Ausdruck für die unbekannte Klasse ablesen. Eine Reihe von Beispielen zeigt die Übersetzung eines Systems von Prämissen in die Zeichensprache und die weitere Behandlung durch die Rechnung, die sich öfters überraschend einfach gestaltet. Ein Nachteil dieser Theorie ist es, dass sie nur universale Urteile behandeln kann und dass partikulare Urteile sich in ihr nur schwer unterbringen lassen. Diesem Übelstand begegnet Schröder in dem 1891 erschienenen zweiten Bande seiner Vorlesungen, von dem aber leider nur die erste Abteilung herauskam. Schröder führt in diesem Buche neben dem Subsumtionszeichen das *Ungleichheitszeichen* ein, für das er das Zeichen $\neq$ benutzt. Er kann dann das Urteil, *einige a* sind *b* durch die Formel $ab \neq 0$ ausdrücken. Um die Deduktionen zu erleichtern, und in gewisser Beziehung auch als eine Anwendung des identischen Kalkuls, benutzt Schröder den ebenfalls von Boole erfundenen sog. *Aussagenkalkul* d. h. eine symbolische Zusammenfassung von Aussagen durch Zeichen. Man kann (nach Mac Coll) jedem Urteil oder jeder Aussage ein Wertzeichen zuteilen; und zwar das Zeichen 0, wenn die Aussage falsch ist, und das Zeichen 1, wenn sie richtig ist. Dann kann man, indem man unter den Aussagen oder den sie vertretenden Buchstaben, diese Wertzeichen versteht, mit den Aussagen rechnen, indem man die Gesetze

$$0 + 0 = 0; \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$$
$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1$$
$$0 \Subset 0 \quad 0 \Subset 1 \quad 1 \Subset 1$$
$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0$$

benutzt. Die Formel $a \Subset b$ zwischen den zwei Aussagen a und b, sagt dann aus: wenn a gilt, so gilt b, oder aus a folgt b, oder a zieht b nach sich (nicht wie man etwa versucht wäre zu denken, aus b folgt a). Schröder benutzt mit Boole, um den identischen Kalkul anwenden zu können, immer die Zeiträume, in denen die einzelnen Urteile gelten. Die getroffenen Festsetzungen verlangen, dass ein Urteil, das niemals wahr ist, immer einem richtigen eingeordnet ist. Hierdurch werden zwar Ausnahmen vermieden, es ergeben sich aber andererseits auch Sätze, die auf den ersten Blick etwas Fremdartiges haben und deren Richtigkeit man sich erst besonders zum Bewusstsein bringen muss. Schröder betrachtet nach sorgfältiger und eingehender Diskussion des Aussagenkalkuls die fünf möglichen Beziehungen, die nach Gergonne zwei Klassen zu einander haben können, und deren Verbindungen miteinander. In ähnlicher Weise untersucht er die vier primitiven Urteile De Morgan's über zwei Klassen. Hierbei macht die Zulassung der 0-Klasse einige Schwierigkeiten. Mit Hilfe der gewonnenen Resultate werden dann die Syllogismen der alten Logik sorgfältig studirt und gezeigt, dass sie auf die von Miss Ladd gegebene Regel hinauslaufen, dass drei Klassen a, b, c, nicht gleichzeitig die Gleichungen $ab = 0$, $\bar{b}c = 0$ und die Ungleichung $ac \neq 0$ befriedigen können. Diese syllogistischen Untersuchungen werden noch erweitert, indem andere zwischen drei Begriffen mögliche Prämissen betrachtet werden, welche in der gewöhnlichen Syllogistik nicht auftreten. Bei all diesen Eliminationsproblemen zwischen Gleichungen und Ungleichungen ergibt sich die Notwendigkeit, den Resultanten eine Klausel beizufügen, die das Auftreten von Ausartungen unmöglich machen soll. Und diese Klausel wieder leitet Schröder dazu über, den Begriff des Individuums festzustellen, d. h. in einer Formel auszusprechen, wann eine Klasse ein Individuum ist. Die ganze Untersuchung dieses zweiten Bandes macht ausführliche Erörterungen über verschiedene Gegenstände der allgemeinen Logik, partikulare Urteile, die Verneinung, die Konversion und dergleichen nötig. Auch eine Reihe von Beispielen werden mit der Rechnung behandelt. Im Jahre 1895 erschien der dritte Band der Algebra der Logik (34) mit dem Untertitel „Algebra und Logik der Relative“. Allerdings ist von diesem Buch nur eine erste Abteilung publizirt und ob sich eine zweite Abteilung aus Schröder's Manuskripten wird zusammenstellen lassen, ist zur Zeit noch nicht bekannt. Der Schöpfer dieser Logik der Relative ist Charles S. Peirce, und seine Theorie ist es im wesentlichen, die Schröder vorträgt. Unter einem Relativ versteht bekanntlich Peirce die Gesamtheit aller Aussagen, die sich darüber machen lassen, ob sich irgend zwei Individuen i und j des Denkbereichs in einer bestimmten Beziehung A zu einander befinden. Zu der Aussage „i steht zu j in der Beziehung A“ gehört ein Wertzeichen a_{ij}, ein *Relativkoeffizient*, wie Schröder sagt, der diese Aussage, je nachdem er 1 oder 0 ist, als wahr oder unwahr kennzeichnet. Das zu A gehörige Relativ a ist dann die Gesamtheit aller Aussagen oder aller Relativkoeffizienten, die allen möglichen Paaren von Elementen des Denkbereichs entsprechen.

Aus zwei Relativen, a und b, werden nach bestimmten Regeln neue Relative abgeleitet. Und zwar betrachtet man zwei Additionen und zwei Multiplikationen: je eine identische und eine relative.

Die identische Summe $a + b$ und das identische Produkt, bezeichnet durch $a \cdot b$ oder einfacher ab, sind Relative, die durch die Relativkoeffizienten $a_{ij} + b_{ij}$ bezw. $a_{ij} \cdot b_{ij}$ definirt sind, wobei hier, wie im folgenden, die Rechnungen mit den Wertzeichen nach den beim Aussagenkalkul angeführten Regeln erfolgen. Das relative Produkt bezeichnet Schröder mit $a;b$ und spricht es a von b. Bei ihm ist der Relativkoeffizient $(a;b)_{ij} = 1$, wenn es irgend ein Element h des Denkbereiches gibt, für das $a_{ih}b_{hj} = 1$ ist, dagegen ist er Null, wenn dies nicht der Fall ist.

Die relative Summe bezeichnet Schröder mit $a \mathbin{\dagger} b$, was er „a piu b" aussprach. Sie ist dadurch definirt, dass der Relativkoeffizient $(a \mathbin{\dagger} b)_{ij} = 1$ ist, wenn für *jedes* Element h des Denkbereichs $a_{ih} + b_{hj} = 1$ ist, Null dagegen, wenn dies nicht eintritt.

Neben diesen sich auf zwei Relative erstreckenden Operationen beziehen sich die Negation und Konversion auf nur ein Relativ. Das negirte Relativ a, das Schröder mit $\bar{a}$ bezeichnet, hat den Relativkoeffizienten $\bar{a}_{ij}$ und und das konvertirte $\breve{a}$, das Schröder „a convers" aussprach, den a_{ji}. Ein Relativ a ist einem b eingeordnet, oder in Zeichen es ist $a \mathrel{=\!\!\!<} b$, wenn zwischen allen Relativkoeffizienten die Beziehung $a_{ij} \mathrel{=\!\!\!<} b_{ij}$ besteht.

Die gegenseitigen Beziehungen, die zwischen Relativen hiernach stattfinden können, und deren Zahl gegenüber den bei Zahlen möglichen gross ist, werden ausführlich untersucht. Während die Peirceschen Arbeiten, an sich nicht leicht zu lesen, durch den Wechsel der Bezeichnungen sehr schwer verständlich sind, bietet das Studium des Schröderschen Buches keine wesentlichen Schwierigkeiten, indem es in einheitlicher Durchführung und hinreichender Ausführlichkeit die einschlägigen Fragen beantwortet. Ähnlich wie bei dem identischen Kalkul lässt sich jedes System von Gleichungen durch eine einzige Gleichung ausdrücken. Der relative Kalkul leistet aber noch mehr, indem sich auch jedes System von Ungleichungen, ja sogar die Forderung, dass von einer Anzahl Gleichungen und Ungleichungen eine *oder* die andere gelte, durch eine einzige Gleichung ausdrücken lässt. Schröder behandelt ausführlich die Herstellung der Resultante, die erfüllt sein muss, damit die Auflösung möglich ist, und die Auflösung selbst. Während aber die erstere sich herstellen lässt, erfordert die letztere sogar unter Umständen unendliche Operationen. Für eine begrenzte Anzahl von Gleichungen werden alle möglichen Aufgaben ausführlich erledigt. Als eine Anwendung der Theorie gibt dann Schröder die Darstellung der Lehre von den Zahlen, wie sie in Dedekind's bekannter Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen“ enthalten ist, im Gewande des Relativkalkuls. Er weist zunächst nach, dass die wichtigsten Sätze Dedekinds als allgemeine Sätze über Relative unter der Geltung gewisser Prämissen erscheinen. Dann aber zeigt er, dass sich die Theorie noch wesentlich vereinfachen lasse.

Weitere Studien betreffen die Mengen oder Systeme von Individuen, die man auch als Relative auffassen kann, und deren Abbildung auf einander, wobei die von Cantor und von Dedekind eingeführten Begriffe der Gleichmächtigkeit und Ähnlichkeit, die auf der eindeutigen Abbildung beruhen, zur Sprache kommen. Schröder formulirt die nötigen Definitionen durch Beziehungen zwischen Relativen, die gestatten, daraus Sätze abzuleiten, ohne dass man nötig hat, auf die Individuen zurückzugehen. Weitere Anwendungen werden endlich noch gemacht auf den Begriff der Funktion und den der Substitution. Als eine Fortsetzung der zuletzt erwähnten Untersuchung erscheinen zwei Abhandlungen (36, 37, 38) aus dem Jahre 1896, die allerdings erst 1898 erschienen sind. In der einen vergleicht Schröder eine von Peirce herrührende Definition der Endlichkeit eines Systems mit der Dedekindschen Definition der Unendlichkeit und zeigt durch Rechnung, dass die eine die Negirung der andern ist. Im Anschluss daran beweist er vier von den fünf Sätzen, die Cantor über Mengen von gleicher Mächtigkeit aufgestellt hat, ohne dass er dabei von den transfiniten Zahlen Gebrauch machen muss. Den fünften Satz allerdings konnte er damals noch nicht herleiten.

In der zweiten stellt er mit Hilfe der Relativoperationen die Bedingung her, dass zwei Relative, die Systeme sind, gleich viele Individuen enthalten und ferner die Bedingung, dass die Anzahl dieser Individuen 0, 1, 2 oder 3 ist.

Durch diese Relativoperationen, glaubt Schröder, sei ein wesentlicher Schritt vorwärts gethan nach dem Ziel einer allgemeinen Pasigraphie, nach einer allgemein verständlichen, von den nationalen Sprachen unabhängigen Zeichensprache zur Darstellung wissenschaftlicher Erörterungen. Dass die Peirce'sche, von ihm verbesserte Zeichensprache des Relativkalkuls neben dem Aussagenkalkul dies eher zu leisten imstande ist als die Symbole Peano's und seiner Schüler, ist wol sicher. Ob aber das Schrödersche Ideal, wie er es in einer geistvollen Karlsruher Rektoratsrede über das Zeichen (31) und einem Vortrag auf dem Züricher Mathematikerkongress (39 und 40) hingestellt hat, sich verwirklichen wird, muss zur Zeit dahingestellt bleiben.

Schröder hat in seinem grossen Werke über Logik eine ganz ausserordentliche Menge von mühevoller Arbeit und von höchst scharfsinnigen Untersuchungen niedergelegt. Nur kann man vielleicht sagen, dass er dem Leser etwas zuviel dargeboten hat. Auch war er zu sehr systematisirender Mathematiker, dem es Freude machte, innerhalb eines gegebenen Rahmens alle Möglichkeiten zu erörtern und alle sich darbietenden Fragen zu lösen. Es ist schade, dass er uns die zweite Abteilung des dritten Bandes nicht mehr geben konnte, er hätte uns dann vielleicht an einfacheren Beispielen und Aufgaben, als die oben erwähnten sind, die Nützlichkeit der Lehre von den Relativen gezeigt. Was die Zukunft dieser logischen Disziplinen angeht, so glaube ich nicht, dass die enthusiastischen Hoffnungen, denen Schröder so oft Ausdruck gab, sich in Bälde erfüllen werden. Mir scheint es von Wichtigkeit zu sein, dass Aufgaben gefunden werden, die nicht künstlich gemacht sind, die sich aber durch den Logikkalkul in einfacherer Weise lösen lassen, als dies die gewöhnlichen Methoden gestatten.

Um sich bei den anstrengenden Arbeiten zu zerstreuen, trieb Schröder während seines Karlsruher Aufenthaltes eifrig Sprachstudien. Er vervollkommnete sich im Englischen und lernte das Spanische. Daneben beschäftigte er sich viel mit der Blumenzucht, der er viel von seiner Zeit widmete. Er hatte sich dabei sehr eingehende botanische Kenntnisse angeeignet und grosse Übung in Behandlung der Pflanzen erlangt, so dass seine Pflanzen, obgleich er bei seiner Junggesellenwohnung kein Treibhaus und keinen Garten hatte, gut gediehen. Wie früher trieb er auch den Sport eifrig. Neben Schwimmen und Schlittschuhlaufen, denen er von jeher gehuldigt hatte, übte er einige Jahre das Reiten. Später wurde er ein überaus enthusiastischer Radfahrer, da er hierdurch in kurzer Zeit sich kräftig ausarbeiten und nicht nachdenken könne. Freilich glaube ich, dass später für ihn der Genuss mehr darin bestand, viele Kilometer in möglichst kurzer Zeit zu durchmessen, als behaglich durch eine schöne Gegend zu fahren. Wenige Tage vor seinem Tode soll er noch eine grosse Radtour gemacht haben, und manche seiner Kollegen glauben, dass eine Erkältung, die er sich dabei holte, die tödliche Krankheit verursacht habe. Im Winter 1901—2, wo er das sechzigste Lebensjahr schon überschritten hatte, fing er noch den jüngsten Sport, das Skilaufen, an.

Als ich Schröder im März 1902 zum letzten Male sah und ihn von seinen Ski- und Radtouren erzählen hörte, machte er noch in jeder Beziehung den Eindruck eines überaus rüstigen Mannes, dem man ein langes Leben prophezeit hätte. Merkwürdig war mir nur in den letzten Jahren seines Lebens erschienen, dass die mit dem Leben und dem Amte unvermeidlich verbundenen Reibungen immer schwerer auf ihm lasteten und offenbar seine Leistungsfähigkeit hemmten, so sehr, dass er sich nicht entschliessen konnte, das grosse Lebenswerk seiner Logikvorlesungen zu vollenden.

Haben sich in dieser Depression die Anfänge eines tieferen Leidens gezeigt, so kann man einem gütigen Geschick nur dankbar sein, das Schröder durch einen raschen Tod nach kurzer Krankheit vor längerem Siechtum bewahrt hat.

Verzeichniss der Schriften Schröders nach ihrer Zeitfolge, mit Angabe der Datirung.

1. Über Vielecke von gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Sternpolygone in der Geometrie. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 7. Seite 55—64.
2. Eine Verallgemeinerung der Mac Laurinschen Summen-Formel nebst Beiträgen zur Kenntniss der Bernoullischen Funktion. 28 Seiten. Programm der Kantonsschule in Zürich. Zürich, Druck von Zürcher & Furrer 1867.
3. Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Pforzheim im Januar 1869. Math. Ann. Bd. 2. Seite 317—365.
4. Über iterirte Funktionen. Pforzheim im Juni 1869. Math. Ann. Bd. 3. S. 296—322.
5. Vier kombinatorische Probleme. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 15. S. 361—376.
6. Berichtigung zu dem Aufsatze „Vier kombinatorische Probleme". Baden-Baden im Dezember 1870. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 16. S. 179—180.
7. Die Umformungsregeln für algebraische Ausdrücke. Zeitschr. f. d. math. u. nat. Unterricht. Bd. 2. S. 410—415.
8. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende. Erster Band: Die sieben algebraischen Operationen. Baden-Baden im September 1873. Leipzig 1873. XI u. 360 S.
9. Abriß der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. Erstes Heft: Die sieben algebraischen Operationen. Leipzig 1874. 48 Seiten.
10. Über die formalen Elemente der absoluten Algebra. Zugleich als Beilage zum Programm des Pro- und Realgymnasiums zu Baden-Baden für 1873/74. Baden-Baden, 7. Juli 1874. Stuttgart 1874. 31 Seiten.
11. Über von Staudts Rechnung mit Würfen und verwandte Prozesse. Darmstadt, Dezember 1875. Math. Ann. Bd. 10. S. 289—317.
12. Ein auf die Einheitswurzeln bezügliches Theorem der Funktionenlehre. Januar 1876. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 22. S. 183—190.
13. Der Operationskreis des Logikkalkuls. Karlsruhe im März 1877. Leipzig 1877. V u. 37 S.
14. Note über den Operationskreis des Logikkalkuls. Karlsruhe, 7. Juli 1877. Math. Ann. Bd. 12. S. 481—484.
15. Hermann Graßmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten. Februar 1878. Math. Ann. Bd. 14, S. 1—45. (Darin von Schröder wohl nur Seite 30 Absatz bis 32 incl.)
16. Bestimmung des infinitären Wertes des Integrals $\int_0^1 (u)_n \, du$. Karlsruhe im August 1879. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 25. S. 106—117.

17. Über die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten, welche mit der Auflösung der trinomischen Gleichung zusammenhängen. Karlsruhe im Oktober 1879. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 25. S. 196—207.
18. Anzeige von Gottlob Freges Begriffsschrift. Karlsruhe 1879. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 25. Historisch-literarische Abteilung S. 81—94.
19. Selbstanzeige der unter 11., 12., 13., 14. genannten Schriften im Repertorium für reine und angew. Mathematik. Bd. 2. S. 81—87 mit Nachschrift auf S. 162.
20. Über eine eigentümliche Bestimmung einer Funktion durch formale Anforderungen. Karlsruhe im Mai 1880. Journ. f. reine u. angew. Math. Bd. 90. S. 189—220.
21. Über die Anzahl der Substitutionen, welche in eine gegebene Zahl von Cyklen zerfallen. Karlsruhe, November 1881. Archiv f. Math. u. Phys. Teil 68. S. 353—377.
22. On the most commodious and comprehensive calculus. Exposition of a logical principle, as disclosed by the algebra of logic but overlooked by the ancient logicians. Report of the British Assoc. 1883. S. 411—412.
23. Über das Eliminationsproblem im identischen Kalkul. Tageblatt der Naturforscherversammlung zu Straßburg 1885. S. 353—354.
24. Tafeln der eindeutig umkehrbaren Funktionen zweier Variablen auf den einfachsten Zahlgebieten. Karlsruhe in Baden, eingesandt Dezember 1886. Math. Ann. Bd. 29. S. 299—317.
25. Über Algorithmen und Kalkuln. Karlsruhe in Baden im Januar 1887. Archiv f. Math. u. Phys. 2. Reihe, Teil 5. S. 225—278.
26. On a certain method in the theory of functional equations. Report of the British Assoc. 1887. S. 621.
27. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Erster Band. Karlsruhe in Baden im März 1890. Leipzig 1890. XII u. 717 S.
28. Eine Berichtigung zum ersten Band meiner Algebra der Logik. Karlsruhe, 17. Juni 1890. Math. Ann. Bd. 36. S. 602.
29. Neues über die Bernoullischen Funktionen von natürlicher Ordnungszahl. Verhandl. d. Gesellsch. Deutsch. Naturf. u. Ärzte, 63. Vers. zu Bremen 1890. 2. Teil. S. 5—6.
30. Über bestimmte Integrale, die sich rational durch π und log 2 ausdrücken. ibidem S. 8—9.
31. Über das Zeichen. Festrede bei dem Direktoratswechsel an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe am 22. November 1890. Karlsruhe 1890. 24 Seiten.
32. Vorlesungen über Algebra der Logik (exakte Logik). Zweiter Band. Erste Abteilung. Karlsruhe im Juni 1891. Leipzig 1891. XIII u. 400 S.
33. Note über die Algebra der binären Relative. Karlsruhe in Baden, September 1894. Math. Ann. Bd. 46. S. 144—158.
34. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Dritter Band: Algebra und Logik der Relative. Leipzig 1895. VIII u. 649 S.
35. Selbstanzeige des eben genannten Buches in Teubners Mitteilungen 1895. Nr. 1.
36. Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantorsche Sätze. Karlsruhe in Baden, Januar 1896. Nova Acta d. Leop.-Carol. Akad. d. Nat. Bd. 71. S. 301—312.

37. Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explicite Gleichzahligkeitsbedingung. Karlsruhe in Baden, im Februar 1896. ibidem S. 363—376.
38. Über G. Cantorsche Sätze. Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Vereinigung. Bd. 5. S. 81—82.
39. On pasigraphy, its present state and the pasigraphic movement in Italy. The Monist, Oktober 1898. S. 44—62.
40. Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien. Verhandl. d. 1. internat. Mathem. Kongresses in Zürich. Leipzig 1898. S. 147—162.
41. Sur une extension de l'idée d'ordre. Bibliothèque du congrès internat. de Philosophie. III. Paris. S. 235—240.

Vorbemerkung des Herausgebers.

Der Verfasser der „Algebra der Logik" hat bei seinem Ableben Manuskripte wissenschaftlichen Inhaltes in beträchtlicher Menge hinterlassen. Dieselben sind insgesamt der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung" letztwillig zugeeignet, behufs Veröffentlichung, so weit thunlich. Ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich der genannten Vereinigung und der von derselben niedergesetzten Kommission zur Verwaltung des Schröderschen handschriftlichen Nachlasses danke für den mir sehr erwünschten und mich ehrenden Auftrag, Schröders unvollendetes Haupt- und Lebenswerk, die Algebra der Logik aus seinen hinterlassenen Papieren fortzusetzen und möglichst zu vervollständigen. Seitens der Kommission hatte insbesondere Herr Geheimrat Lüroth die Güte, das Manuskript zu dem nunmehr vorliegenden Halbband durchzusehen und mir vielfach mit Rat und That beizustehen. Dies, sowie auch die Beigabe des vorstehenden Nekrologs verbindet mich zu ganz besonderem Dank.

Das Manuskript war schon vom Verfasser ziemlich vollständig ausgearbeitet. So konnte sich die Thätigkeit des Herausgebers auf einige weniger ausgeführte Stellen und etliche Flüchtigkeiten des Textentwurfes beschränken. Ausgenommen hiervon ist der letzte Anhang über die Kempesche Abhandlung, den der Verfasser nur bis zu der bezeichneten Stelle (Seite 575) bearbeitet hatte, während von da ab keinerlei Anhaltspunkte aufzufinden waren. Ich habe mich deshalb bemüht, das Fehlende möglichst im Sinne des Verfassers nach dem Kempeschen Original zu ergänzen.

Wer sich an gewisse Eigenheiten Schröderscher Diktion und besonders an seine breite, oft abschweifende Darstellungsweise einmal gewöhnt hat, der erkennt bald gerade auch darin das durchaus gründliche, ernste und schlichte Wesen und Streben des wissenschaftlichen Forschers und Lehrers, der alle Kunst prunkhaften Vortrages, alle glänzenden und blendenden Sprachmittel verschmäht, — der nicht bewundert, nur verstanden sein will, — und zwar von Jedermann, auch vom Laien und vom jugendlichen Studirenden; für Studirende vorzugsweise hat er sein Buch geschrieben.

Dies will nun freilich nicht sagen, dass ich die vom Verfasser gewählte Ausdrucksweise auch in allen einzelnen Fällen billigte. — Ebenso kann ich auch inhaltlich seinen Ausführungen wol im grossen und ganzen, nicht aber in allen Einzelheiten beitreten. In dieser Hinsicht war ich wiederholt versucht, meinen abweichenden Standpunkt wenigstens etwa in einer Note oder einem kritischen Anhang darzulegen. Doch unterblieb dies — vor allem deshalb, damit der neu herauszugebende Teil des Werkes sich möglichst gleichförmig an die schon vorhandenen angliedere. Auch die am Schluss beigefügten „Anmerkungen des Herausgebers", auf welche hier zum voraus besonders hingewiesen sei, enthalten daher lediglich sachliche Berichtigungen und Ergänzungen, von denen anzunehmen ist, dass der Verfasser sie gleichfalls aufgenommen hätte, wenn er darauf aufmerksam geworden wäre.

Solche Berichtigungen sind mir mehrfach von den Herren Lüroth, Korselt und Couturat in freundlichster Weise zur Verfügung gestellt worden, nebst anderen Mitteilungen mehr rezensirenden Inhaltes; so zutreffend mir indessen auch diese letzteren erscheinen mochten, und so dankbar ich sie entgegennahm, so musste ich mir deren Aufnahme unter die Anmerkungen dennoch versagen mit Rücksicht sowol auf die Wünsche der Einsender als auch auf den einheitlichen Charakter des gesamten Schröderschen Werkes.

Bezüglich der Stoffeinteilung, wie sie durch das schon dem ersten Bande vorgedruckte Inhaltsverzeichniss zum ganzen, ursprünglich nur auf zwei Bände berechneten Werke angekündigt war, und bezüglich der seitherigen Änderungen kann ich auf das unten folgende Vor- und Zwischenwort des Verfassers verweisen. Nach dessen Absicht sollte dem gegenwärtigen zweiten Teil des zweiten Bandes Titelblatt, Vorwort und Inhaltsverzeichniss in nunmehr teilweise abgeändertem Wortlaut für den ganzen zweiten Band beigegeben werden, wofür dann beim Einbinden das ursprüngliche nur provisorische Titelzeug der ersten Abteilung zu beseitigen und durch das neue zu ersetzen wäre.*) Die

*) Auch ein Teil der „Ferneren Berichtigungen und Nachträge zum ersten Bande" Bd. 2, I Seite VIIIff. ist überflüssig geworden infolge Überganges des Inhaltes in den Text des gegenwärtigen Bd. 2, II. Es ist nämlich im einzelnen:

1) Bd. 2, I Seite IX Mitte bis XI Mitte, der Nachtrag zu Bd. 1 Seite 302 und 305 (betreffend Beweise von Grassmann und Peirce) ersetzt durch Bd. 2, II Seite 401 unten bis 405, — wozu auch Seite 597 Zeile 7 v. o. ff. beizuziehen ist.

zweite Abteilung sollte nur durch das „Zwischenwort“ eingeleitet sein. — War es dem Verfasser nicht mehr vergönnt, sein Werk noch selbst in dieser Weise abzuändern, so wird man sich heute wol kaum dazu entschliessen. Zeigt der posthume Teil doch auch sonst der Spuren noch mehr, dass hier dem Werke mitten im Werden und Wachsen der Schöpfer entrissen wurde.

---

2) Bd. 2, I Seite XII Mitte, zu Bd. 1 Seite 589 (McColl) ersetzt durch Bd. 2, II Seite 450 und 451 (und Bd. 2, I Seite 305 Zeile 11 v. u.).

3) Bd. 2, I Seite XIII, zu Bd. 1 Seite 711 (Poretzki) ersetzt durch Bd. 2, II Seite 442 .. 447 und 603/604.

Zum Zwecke des Ersatzes müssten also auch diese Berichtigungen und Nachträge, mit Weglassung des nunmehr hinfälligen, nachgedruckt werden.

Neues Vorwort des Verfassers zum zweiten Bande,

(zum Ersatz für das ältere Bd. 2 I, Seite III bestimmt).

Schon im ersten Bande findet sich ein Inhaltsverzeichniss zum zweiten Band, wonach dieser in seiner ersten Abteilung im wesentlichen den Aussagenkalkul, in der zweiten die Beziehungslogik behandeln sollte. Inzwischen hat sich nun aber die Notwendigkeit herausgestellt, die Beziehungslogik aus dem zweiten Bande auszuscheiden und in einen besondern dritten Band zu verweisen, und zwar aus zwei Gründen:

Einmal ist in der Zwischenzeit noch so viel hinzugekommen, teils an neuen oder dem Verfasser jetzt erst zugänglichen Arbeiten, z. B. von Poretzki und Kempe, teils auch an zahlreichen von der Kritik erhobnen Einwänden, welche einer Richtigstellung benötigten, so dass selbst bei Beschränkung der Beziehungslogik auf den ihr ursprünglich zugedachten Umfang der Band schon allzu sehr hätte anschwellen müssen.

Sodann aber hat bei der bis zuletzt aufgesparten Überarbeitung jener Schriften, die den Grund zu einer *Logik der Beziehungen überhaupt*, oder der Beziehungsbegriffe, „*Relative*", gelegt haben, dieses Forschungsgebiet sich zu einem derartigen Umfange ausgewachsen, dass es auch bei knappster Diktion einen eigenen Band beanspruchte, — wie es denn als eine ungeahnt grossartige Disziplin von unermesslicher Tragweite und noch unabsehbarer Entwicklungsfähigkeit sich darstellt.

So werde ich denn in dem Rahmen der Paragraphen des zweiten Halbbandes ganz andere Dinge abzuhandeln haben, als das provisorische Inhaltsverzeichniss in Aussicht gestellt, und glaube nicht um Entschuldigung dafür bitten zu sollen, wenn ich im ganzen doch so viel mehr als vorgesehen zu bieten in der Lage bin.

„Zwischenwort" des Verfassers.

(Die beiden Abteilungen des zweiten Bandes sollten nach der Absicht des Verfassers nur durch ein Blatt mit diesem Zwischenwort getrennt werden.)

Bei Herausgabe der ersten Abteilung dieses Bandes im Juni 1891 glaubte ich das Erscheinen der zweiten Hälfte, deren Inhalt die Logik der Relative bilden sollte, für den Herbst desselben Jahres in Aussicht stellen zu können. Selten wol in meinem Leben bin ich in einer Schätzung so weit fehlgegangen, als damals bei der Beurteilung von Grösse und Schwere der Lücken meines Manuskripts. Dies kam daher, dass die mir einzig brauchbar erscheinende Arbeit des Herrn Peirce über Relative in [9c], die auch wirklich die hauptsächliche Grundlage zu meinem Band 3 abgegeben hat, blos einen Umfang von 18 Druckseiten einnimmt, (die auf halb so viele von den unsrigen gehen würden), und dass ich wähnte, mit einem möglichst reproduzirenden Referat darüber — nicht ohne kritische Randbemerkungen — davonzukommen. Die ungeheure Tragweite dieser Abhandlung wurde mir erst bei der Detailbearbeitung klar. — Wer nun aber den Inhalt meines Bd. 3, 1 mit dem vergleicht, was man davon auf 9 Seiten sagen könnte, der wird auch ohne Kenntniss der Literatur leicht gewahr, wie wenig diejenigen meinem Buche gerecht werden, die dasselbe als ein blosses Sammelwerk hinstellen möchten.

Der Rückverweisungen halber geben wir auch hier wieder mit bei den

Inhalt des ersten Bandes.

Sechste Vorlesung.

Siebente Vorlesung.

Achte Vorlesung.

Neunte Vorlesung.

Zehnte Vorlesung.

Elfte Vorlesung.

Zwölfte Vorlesung.

Dreizehnte Vorlesung.

Vierzehnte Vorlesung.

Anhänge.

Inhalt des zweiten Bandes.

(Erste Abteilung.)

Fünfzehnte Vorlesung.

Sechzehnte Vorlesung.

Siebzehnte Vorlesung.

Achtzehnte Vorlesung.

Des zweiten Bandes

zweite Abteilung.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

ALGEBRA DER LOGIK

(EXAKTE LOGIK).

Vierundzwanzigste Vorlesung.

§ 50. **Vervollkommnung gewisser Partieen des ersten Bandes.**

In der Zwischenzeit seit dem Erscheinen der ersten $1^1/_2$ Bände bin ich der Möglichkeit inne geworden, den Lehrgang des ersten Bandes schon in einigen Hinsichten zu vervollkommnen, welche mir zu bedeutsam erscheinen, als dass es sich empfehlen könnte, ihre Besprechung blos unter die Berichtigungsnachträge einzureihen. Ich will vielmehr die einschlägigen, nicht durchweg miteinander zusammenhängenden Verbesserungen und Fortschritte in gegenwärtiger Vorlesung darlegen.

Man fasse den Überblick des in Band 1 befolgten Lehrganges ins Auge, wie er sich etwa S. 28—34 des gegenwärtigen Band 2 gegeben findet.

Derselbe bedarf (vergl. die Berichtigungsnachträge) nur der einen Richtigstellung, dass in der Aussagengleichheit S. 34, Z. 12 v. u. rechterhand der Aussagenfaktor $(ab = 0)$ beizufügen ist, so dass die Gleichung lautet:

$$(ax + bx_1 = 0) = (ab = 0)\ (x = bx_1 + a_1x)$$

Dementsprechend sollten auch in der verbalen Fassung des „Hülfstheorems des § 24“, Bd. 1, S. 502 die nachher kursiv gedruckten drei Worte eingeschaltet werden, so dass es lautet: die Gleichung $ax + bx_1 = 0$ ist, *ihre Möglichkeit vorausgesetzt*, (oder: *sofern sie überhaupt erfüllbar ist*), äquivalent der: $x = bx_1 + a_1x$.

Bei dem dort angeführten Beweise ist nämlich — für die rückwärtige Aussagensubsumtion — von der Resultante $ab = 0$ der erstern Gleichung in der That wesentlich Gebrauch zu machen.

Hiervon abgesehen, gibt sich nun noch eine *Unvollkommenheit* unserer Theorie kund in der späten Stellung, welche unser System dem Theoreme 37) anweist, nämlich dem Satze von der (Konversion durch) *Kontraposition* bei *Subsumtionen*:

37) $$(a \Subset b) = (b_1 \Subset a_1)$$

— trotz der Einfachheit und des überaus hohen Grades von unmittelbarer Evidenz, deren dieser Satz sich erfreut.

Zum Beweise desselben hatten wir uns Bd. 1, S. 357 berufen auf die Theoreme 20), 32) und 36), die von Gleichungen handeln, wogegen es natürlicher erschiene, umgekehrt das Kontrapositionstheorem für *Gleichungen*:

32) $$(a = b) = (a_1 = b_1)$$

kraft Def. (1) auf dasjenige 37) für Subsumtionen zu gründen. Zum mindesten ist es wünschenswert, jenes auf dieses auch gründen zu *können*.

Die gerügte Unvollkommenheit kam mir früh zum Bewusstsein. Dieselbe entsprang daraus, dass ich mich lange Zeit ganz vergeblich bemühte, den von Herrn Peirce[5] p. 27 für das Th. 37) gegebnen „Beweis" zu verstehen, woran dessen Darstellung nicht ohne Schuld ist. Wäre ich statt dessen zeitig darauf ausgegangen, selbst einen Beweis aufzusuchen, so würde mir der Erfolg wohl früher zuteil geworden sein. Zuletzt fand ich zwei einander dual entsprechende sehr einfache Beweise, deren einer sich aber als zusammenfallend mit dem Kern des Peirce'schen Beweises erwies, als dieser selbst also, gewissermassen befreit von verdunkelndem Beiwerk.

Die fragliche Verbesserung ist aber darum von besondrer Wichtigkeit, weil sie es erst ermöglichen wird, auch höchst beachtenswerte Beweise von noch andern Sätzen, nämlich den De Morgan'schen Theoremen 36), in den Lehrgang aufzunehmen, bei denen solches bislang ohne Zirkelschluss nicht angängig gewesen ist.

Das ersehnte Ziel lässt sich in der That sehr einfach erreichen, wenn man *die Reihenfolge der Theoreme* 36), 37), 38) *in die entgegengesetzte verwandelt.*

Um keine Verwirrung bei den Citaten zu verursachen, werde ich indessen *die bisherigen Chiffren* der Sätze *beibehalten.* — Wenn ich von neuem zu chiffriren hätte, würde ich überdies vorziehen, den Satz 35) „vom Dualismus" unchiffrirt zu lassen, da derselbe, ohnehin — vergl. S. 33 oben — von anderer Natur als die übrigen „Theoreme", eine Art von zunächst nur empirisch anerkanntem „Prinzip" statuirt.*)

Das Theorem

38) $$(1 \Subset a_1 + b) = (a \Subset b) = (ab_1 \Subset 0)$$

lässt sich in der That *ohne weiteres* — z. B. dicht hinter das Th. 35) — *vorannehmen.* Denn in Bd. 1, S. 358 haben wir dazu Beweise gegeben, die nur die Theoreme 5), 15), 16), 20), 21), $\mathrm{III}_\times$ oder 27) und 30) voraussetzten.

Wenn wir uns nun also schon hierauf berufen dürfen, so kann jetzt angereiht werden das Theorem:

37) $$(a \Subset b) = (b_1 \Subset a_1)$$

mit den folgenden beiden Beweisen:

---

*) Hierzu die Anmerkung des Herausgebers am Schlusse dieses Bandes.

Beweis 1. $(a ⋹ b) = (1 ⋹ a_1 + b) = \{1 ⋹ (b_1)_1 + (a_1)\} = (b_1 ⋹ a_1)$ nach 38_+), 31) und 38_+), — wobei wir durch die Klammer um a_1 nur darauf hinweisen wollten, dass a_1 demnächst wie ein einfaches Symbol angesehen werden möchte.

Beweis 2. Desgleichen hat man dual entsprechend

$$(a ⋹ b) = (a b_1 ⋹ 0) = \{(b_1)(a_1)_1 ⋹ 0\} = (b_1 ⋹ a_1)$$

nach $38_\times$), 31) und $38_\times$).

Schliesst man übrigens im Geiste des ersten Bandes noch verbal, also ohne wirkliche Aussagenäquivalenzen zu statuiren, so wird man $b_1 ⋹ a_1$ als *Folgerung* aus $a ⋹ b$, also nur: $(a ⋹ b) ⋹ (b_1 ⋹ a_1)$ erhalten und dieses (blos verbal angesetzte) Ergebniss nach demselben Schema in Verbindung mit Th. 31): $(b_1 ⋹ a_1) ⋹ \{(a_1)_1 ⋹ (b_1)_1\} = (a ⋹ b)$ auch als rückwärts gültige Aussagensubsumtion nachzuweisen haben, mit der es sich erst zur Aussagengleichung 37) gemäss der für Aussagen in Anspruch genommenen Def. (1) zusammenzieht.

Mit jenem Th. 38) kann jetzt auch der Satz 37) der Kontraposition ebenfalls noch vor das Th. 32) gestellt werden, und dann lässt sich auch dieses **Theorem**

32) $$(a = b) = (b_1 = a_1)$$

der Kontraposition von Gleichungen nun kraft 37) aus

$$(a ⋹ b) = (b_1 ⋹ a_1)$$
$$(b ⋹ a) = (a_1 ⋹ b_1)$$

durch überschiebendes Multipliziren, oder die darauf hinauslaufenden „Überlegungen in Worten" sofort **beweisen**.

Der erheblichste Gewinn aus der Umstellung der Sätze ist aber der, dass wir jetzt auch die schönen Beweise in unsere Theorie aufnehmen können, welche Herr **Peirce**[5] p. 37 für die **De Morgan**'schen Theoreme 36) gibt. Allerdings muss zu dem Ende diesen Theoremen auch ferner noch vorangestellt werden das **Theorem** 41) von **Peirce**

41) $$(ab ⋹ c) = (a ⋹ b_1 + c).$$

Für dieses haben wir Bd. 1 S. 364 auch einen Beweis gegeben, welcher von keinem späteren Satze als von Th. 33) Gebrauch machte, so dass die Voranziehung auch dieses Satzes ohne weiteres angängig ist. Und mehr in den Vordergrund der Theorie gerückt zu werden, als es in Bd. 1 geschah, verdient auch dieses Th 41) schon seiner eminenten Wichtigkeit halber, die z. B. auch in Bd. 3 deutlich zutage treten wird. Bildet dasselbe doch ein Gegenstück zu den fundamentalen Definitionen (3). Während nämlich letztere zeigen, wie eine Subsumtion, deren *Prädikat ein Produkt*, resp. deren *Subjekt eine Summe* ist, zerfällt werden kann in einfachere Subsumtionen, lehrt dieses Th. 41): welche Umformungen mit einer Subsumtion vorgenommen werden dürfen, bei der umgekehrt das *Subjekt ein Produkt* oder das *Prädikat eine Summe* ist. Für $a = 1$ resp. $c = 0$ geht zudem das Th. 41) über in die beiden Theoreme 38), von denen es eine Zusammenfassung und zugleich Verallgemeinerung vorstellt.

Hiernach hat man nun für De Morgan's bekannte Theoreme:

36) $$(ab)_1 = a_1 + b_1 \quad \Big| \quad (a + b)_1 = a_1 b_1$$

den folgenden Peirce'schen

Beweis. Nach Th. 30) ist

$$(ab)(ab)_1 = 0 \quad \Big| \quad 1 = (a + b) + (a + b)_1$$

oder nach Def. (1) und dem Assoziationsgesetz 13)

$$ab(ab)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} 0 \quad \Big| \quad 1 \mathrel{=\!\!\!\in} a + b + (a + b)_1$$

Bringt man in diesen Subsumtionen gemäss Th. 41) regelrecht den Faktor a (von links) nach rechts | das Glied a (von rechts) nach links, so kommt:

$$b(ab)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} 0 + a_1 = a_1 \quad \Big| \quad a_1 \cdot 1 = a_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b + (a + b)_1,$$

und wenn darnach ebenso der Term b hinübergeschafft wird:

$$(ab)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 + b_1 \quad \Big| \quad a_1 b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} (a + b)_1,$$

womit die Theoreme zunächst einseitig als Subsumtionen bewiesen erscheinen.

Um auch die umgekehrten Subsumtionen zu beweisen, wendet Peirce den Schluss der Kontraposition gemäss Th. 37) an auf die Theoreme 6):

$$ab \mathrel{=\!\!\!\in} a, \quad ab \mathrel{=\!\!\!\in} b \quad \Big| \quad a \mathrel{=\!\!\!\in} a + b, \quad b \mathrel{=\!\!\!\in} a + b$$

wonach wir haben:

$$a_1 \mathrel{=\!\!\!\in} (ab)_1, \quad b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} (ab)_1 \quad \Big| \quad (a + b)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1, \quad (a + b)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b_1$$

und sich nach Def. (3) in der That diese noch ausstehenden Subsumtionen:

$$a_1 + b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} (ab)_1 \quad \Big| \quad (a + b)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 b_1$$

ergeben, die sich endlich mit den vorhin gefundenen kraft Def. (1) zu den Gleichungen zusammenziehen, welche zu beweisen gewesen.

Was ich von Begründungsweisen der elementaren Sätze unserer Theorie sonst noch gerne in den Bd. 1 aufgenommen haben möchte, ist vor allem folgendes.

Die Art, wie Herr Robert Grassmann die Eindeutigkeit der Negation und den Satz 31) der doppelten Verneinung beweist, bildet eine Variante der Bd. 1, S. 302 sq. und S. 305 von uns gegebenen Beweise, welche keinen Gebrauch macht von dem Hülfstheorem 29), Bd. 1, S. 299.

Der Zusatz 1 zur Def. (6) der Negation knüpft l. c. an die Voraussetzungen

$$30_\times)\qquad aa_1 = 0 \qquad a + a_1 = 1 \qquad 30_+)$$
$$30'_\times)\qquad aa'_1 = 0 \qquad a + a'_1 = 1 \qquad 30'_+)$$

die Behauptung

$$a'_1 = a_1$$

und wird von R. Grassmann wie folgt bewiesen.

Nach Th. $21_\times$), der Voraussetzung $30'_+$), Prinzip $\mathrm{III}_\times$, der Voraussetzung $30_\times$) und Th. 21_+) haben wir:

$$a_1 = a_1 \cdot 1 = a_1(a + a'_1) = a_1 a + a_1 a'_1 = 0 + a_1 a'_1 = a_1 a'_1,$$

und ebenso, nur 30′) mit 30) bei den Citaten vertauscht:

$$a'_1 = a'_1 \cdot 1 = a'_1(a + a_1) = a'_1 a + a'_1 a_1 = 0 + a'_1 a_1 = a_1 a'_1,$$

also $a'_1 = a_1$ kraft Th. 4), q. e. d.

Das Theorem 31)

$$(a_1)_1 = a$$

wird ferner so bewiesen.

Nach Th. 21), 30), Pr. $\mathrm{III}_\times$, Th. $30_\times$) und $21_\times$) ist:

$$(a_1)_1 = (a_1)_1 \cdot 1 = (a_1)_1(a + a_1) = (a_1)_1 a + (a_1)_1 a_1 = (a_1)_1 a + 0 = (a_1)_1 a,$$
$$a = a \cdot 1 = a\{a_1 + (a_1)_1\} = aa_1 + a(a_1)_1 = 0 + a(a_1)_1 = (a_1)_1 a,$$

also $(a_1)_1 = a$ wiederum nach Th. 4), q. e. d.

In ähnlicher Weise lässt sich auch bei dem Beweise der Theoreme 36) De Morgan's Bd. 1, S. 352 das Hülfstheorem 29) entbehren.

z. B. links vom Mittelstriche:

Th. $36_\times$) $$(ab)_1 = a_1 + b_1;$$

Beweis. Nach $21_\times$), $30_\times$), $\mathrm{III}_\times$, $27_\times$) $13_\times$), 30_+) und 21_+) ist

$$a_1 + b_1 = (a_1 + b_1) \cdot 1 = (a_1 + b_1)\{(ab) + (ab)_1\} = (a_1 + b_1)(ab) +$$
$$+ (a_1 + b_1)(ab)_1 = a_1 ab + b_1 ab + (a_1 + b_1)(ab)_1 = 0 + 0 +$$
$$+ (a_1 + b_1)(ab)_1 = (a_1 + b_1)(ab)_1$$

und ebenso nach $21_\times$), Zusatz zu 34), $27_\times$) usw.

$$(ab)_1 = (ab)_1 \cdot 1 = (ab)_1(a_1 + b_1 + ab) = (ab)_1(a_1 + b_1) + (ab)_1(ab) =$$
$$= (ab)_1(a_1 + b_1) + 0 = (ab)_1(a_1 + b_1),$$

sonach $a_1 + b_1 = (ab)_1$ kraft Th. 4), q. e. d.

Man sieht jedoch, wie diese Beweise eben durch Vorannehmen des Hülfstheorems 29) in unserem Bd. 1 einfacher gestaltet sind.

Gleichwol erscheint der in Bd. 1, S. 352 von mir gegebene Beweis des Th. 36) dem oben vorgetragenen Peirce'schen gegenüber, — nachdem dieser zur Aufnahme in unser System geeignet geworden, — nun als ein minderwertiger.

Resumirend können wir etwa sagen, dass die Umordnung der chiffrirten Sätze unserer Theorie in die nachstehende Reihenfolge: 1) bis 31), 38), 37), 32), 33), 34), 35), 41), 36), 39), 40), 42) usw. durchführbar ist und hinsichtlich der Eleganz der dadurch ermöglichten Beweisführungen nicht zu verachtende *Vorteile* bietet.

Hiermit gelangt eine *erste* Gruppe unserer Vervollkommnungsbestrebungen zum Abschluss.

In einem ganz kurzen „Abriss" der algebraischen Logik, den ich plane, gedenke ich den nach vorstehenden Andeutungen (vergl. auch unten S. 423) verbesserten Lehrgang zu verwirklichen.

Eine *zweite* Gruppe von auf Vervollkommnung der Theorie im ersten Bande abzielenden Bemerkungen bezieht sich auf die Theoreme 45) und 46) des § 19, Bd. 1, S. 420 ⋯ 424, sowie Bd. 2, S. 33 f., welche lehren, wie mit im Sinne Boole's *„entwickelten"* Funktionen identisch zu rechnen sei.

Zunächst, — wie wir jedoch sehn werden, blos *„formell"* — lassen diese Sätze eine naheliegende *Verallgemeinerung* zu, indem an die Stelle der „Konstituenten" in den Boole'schen Entwicklungsschemata auch treten darf irgend ein System von Argumenten (Gebieten, Klassen), von denen weiter nichts bekannt zu sein braucht, als dass sie *unter sich disjunkt sind.* Für solche Argumente mögen wir füglich den Namen *„Konstituenten"* beibehalten.

Dann aber handelt es sich von vornherein nicht sowol um Funktionen, welche gemäss den Boole'schen Schemata nach jenen Argumenten „entwickelt" zu denken wären, als vielmehr einfacher blos um Ausdrücke, welche eben inbezug auf diese Argumente *linear und homogen* sind.

Gedachte Verallgemeinerungen präsentiren sich in der That als die Hülfssätze:

Funktionen oder Ausdrücke, *welche homogen linear sind inbezug auf ein System von disjunkten Argumenten* (den „Konstituenten"), *können* — gleichwie *durch Addition*, so auch — *durch Multiplikation „überschiebend"* (*„durch Superposition"*) *verknüpft werden;* das heisst: man braucht immer nur *die Koeffizienten ihrer gleichnamigen Glieder* durch die betreffende Rechnungsart zu verknüpfen.

Letztere mag man vielleicht kurz ihre „gleichstelligen" oder „korrespondirenden", „homologen" Koeffizienten nennen, — jenes, insofern man sich die Glieder einer jeden von den Funktionen nach den Argumenten „geordnet" denkt. Als *„gleichnamig"* sollten hier wiederum nur diejenigen

Glieder gelten, welche den nämlichen Konstituenten, also dasselbe Argument zum Faktor haben.

Desgleichen: *eine solche Funktion kann koeffizientenweise negirt werden.*

In Zeichen: wenn

$$xy = xz = \cdots = yz = \cdots = 0$$

ist, hat man, — wie ohnehin

$$(ax + by + cz + \cdots) + (\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots) =$$
$$= (a + \alpha)x + (b + \beta)y + (c + \gamma)z + \cdots,$$

so auch analog

$$(ax + by + cz + \cdots)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots) = a\alpha x + b\beta y + c\gamma z + \cdots,$$

und ferner

$$(ax + by + cz + \cdots)_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots.$$

Der Beweis ist völlig analog dem der früheren Sätze.

Das heisst: Für den Produktensatz ist er zu leisten durch mentales Ausmultipliziren nach dem Distributionsgesetze, resp. der Multiplikationsregel für Polynome, unter Rücksichtnahme auf die Voraussetzungen und das Tautologiegesetz $14_\times$). Bezüglich des Satzes über Negation zeigt man, dass der Negand mit dem angeblichen Negate die Summe 1 und das Produkt 0 richtig liefert kraft der vorhergehenden beiden Sätze.

In Anbetracht dass auch die Boole'schen Konstituenten als unter sich disjunkt nachgewiesen wurden, kann man die früheren Theoreme 45), 46) als besondre Fälle unter die eben aufgestellten Hülfssätze subsumiren, welche letzteren aber den Vorzug grösserer Einfachheit besitzen.

Es lassen sich jedoch auch umgekehrt diese Hülfssätze als eine partikulare Anwendung jener früheren Theoreme hinstellen.

Denn sollte eine Funktion $f(x, y, z, \cdots)$ nach diesen ihren *als disjunkt vorausgesetzten* Argumenten im Boole'schen Sinne *entwickelt* werden, so kann die Entwickelung nur die bezüglich $x, y, z, \cdots$ selbst lineare homogene Form haben:

$$f(x, y, z, \cdots) = ax + by + cz + \cdots,$$

sintemal durch Entwickelung von x selbst nach den sämtlichen Argumenten leicht zu zeigen ist, dass wegen der Voraussetzungen sein muss:

$$x = xy_1z_1 \cdots, \quad y = x_1yz_1 \cdots, \text{ usw.},$$

nämlich jeder Boole'sche Konstituent, in welchem *mehr* als *ein* Argument *unnegirt* vorkäme, jenen zufolge verschwinden und aus der Entwickelung herausfallen muss.

Desgleichen würde sich auch nach andern Schlussweisen die Prämisse $xy = 0$ *um*schreiben lassen in $x \Subset y_1$ oder $x = xy_1$, ebenso die $xz = 0$ in $x = xz_1$, womit auch gefunden ist $x = xy_1z_1$, und so weiter. —

Hiermit ist auch die Berechtigung erwiesen, den Namen „Konstituent" vom Boole'schen $xy_1z_1 \cdots$ auf unser x selbst zu übertragen.

Die Verallgemeinerung konnte deshalb blos als eine „formelle“ bezeichnet werden. Wesentlich haben wir nur eine Vereinfachung des Ausdrucks jener Theoreme damit gewonnen.

Diesen reihen sich nun noch ein paar Sätze an, bei denen ich ebenso wie bei den vorigen — namentlich im Interesse des dritten Bandes — Gewicht darauf legen muss, sie statuirt zu haben. Zunächst:

Zwei Funktionen, welche nach einem System von solch disjunkten Konstituenten „entwickelt“ sind, m. a. W: *Zwei homogen lineare Funktionen von den nämlichen disjunkten Argumenten können nicht anders einander gleich sein, als indem die* (inbezug auf diese Argumente) *gleichnamigen Glieder für sich jeweils einander gleich sind;* kurz: einander gleiche Funktionen derart *müssen gliedweise übereinstimmen.* In Zeichen: ist

$$ax + by + cz + \cdots = \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots,$$

und sind die x, y, z, $\cdots$ wie oben disjunkt, so muss sein:

$$ax = \alpha x, \quad by = \beta y, \quad cz = \gamma z, \cdots.$$

Beweis. Multiplikation der ersten Prämisse beiderseits mit x gibt wegen $xy = xz = \cdots = 0$ sofort $ax = \alpha x$; etc. q. e. d.

Umkehren lässt sich der Satz nur insofern, als die Gleichungen der „Behauptung“ ihrerseits selbstverständlich (durch Überaddiren) die erste Prämisse garantiren.

Formell mit Beschränkung auf im Boole'schen Sinne entwickelte Funktionen wurde obigen Satzes schon einmal (Bd. 2, S. 309 f.) beiläufig Erwähnung gethan.

Aus der Übereinstimmung der gleichnamigen *Glieder* kann nun im allgemeinen nicht auf die Gleichheit ihrer *Koeffizienten* geschlossen werden; aus $ax = \alpha x$ folgt bekanntlich *nicht*, dass $a = \alpha$ sein müsse.

Wol aber lässt sich diese Gleichheit beweisen, wenn von den Koeffizienten a und α etwa noch bekannt sein sollte, dass sie (gleichwie Aussagen) lediglich der Werte 0 und 1 fähig seien, und wenn man ausserdem weiss, dass $x \neq 0$ ist. Hier würde nämlich die Annahme, dass a und α nicht entweder gleichzeitig $= 1$, oder alle beide $= 0$ wären, die Annahme also, dass der eine Koeffizient 1, der andere dagegen 0 wäre, zu dem Widerspruche $x = 0$ mit der letztern Voraussetzung führen.

Sonach können wir sagen:

Wenn zwei Funktionen der nämlichen unter sich disjunkten und von 0 *verschiedenen Argumente**) *einander gleich sein sollen, und wenn die Koeffizienten ihrer Entwicklung nach diesen Argumenten auf den*

*) Solche werden überaus häufig vorkommen; der Fall liegt namentlich allemal vor, wenn die Argumente „*Individuen*“ sind.

Bereich der beiden Werte 0 *und* 1 *angewiesen sind, so müssen die Koeffizienten der gleichnamigen Glieder* (resp. eines jeden Konstituenten) in beiden Funktionen *einzeln übereinstimmen.*

Zwei mit den letzten analoge Sätze gelten schon über die Einordnung, Subsumtion, zwischen derartigen Funktionen, nämlich erstens:

Von zwei (homogenen linearen) *Funktionen der nämlichen disjunkten Argumente kann die eine der andern nicht anders eingeordnet sein, als indem die gleichgesinnte* (gleichstimmige) *Einordnung zwischen je zwei gleichnamigen Gliedern der entwickelten Funktionen besteht,* — gleichwie auch umgekehrt selbstverständlich — gemäss Th. 15), — wenn die Einordnung zwischen den homologen Gliedern durchgängig besteht, auch deren Summen, die Funktionen im Subsumtionsverhältnisse stehen müssen. In Zeichen:

Wenn für $xy = xz = \cdots = yz = \cdots = 0$ ist:

$$ax + by + cz + \cdots \Subset \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots,$$

so muss sein $ax \Subset \alpha x$, $by \Subset \beta y$, $cz \Subset \gamma z$, $\cdots$, (sowie umgekehrt).

Beweis. Denn beiderseitiges Multipliziren mit x gibt wegen ersterwähnter Voraussetzung $axx \Subset \alpha xx$ oder $ax \Subset \alpha x$, wie zu zeigen war, usw.

Sind zweitens *die Koeffizienten* wieder *auf das Gebiet der Werte* 0 *und* 1 *beschränkt, die Argumente aber von* 0 *verschieden, so folgt aus der Einordnung zwischen den Funktionen auch die im selben Sinn genommene zwischen ihren homologen Koeffizienten,* — sowie selbstverständlich auch das Umgekehrte zutreffen wird.

Denn wäre bei $ax \Subset \alpha x$ und $x \neq 0$ etwa $a \not\Subset \alpha$, so müsste $a = 1$ und $\alpha = 0$ sein, weil in den drei andern noch denkbaren Fällen eben $a \Subset \alpha$ sein würde. Alsdann aber führte die schon erwiesene Subsumtion $ax \Subset \alpha x$ zu dem Widerspruche $x \Subset 0$ mit der Voraussetzung $x \neq 0$.

Eine dritte Gruppe von Vervollkommnungsbestrebungen steht im Dienste des Satzes von der *„Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes“* — vergl. § 12 des Bd. 1, — für welche ich im Anhang 4, 5 und 6 *zwei* Beweise erstmals gegeben habe, von denen wenigstens der zweite, Bd. 1, S. 685 ff., sich ganz innerhalb des Rahmens der logischen Disziplin selbst hielt und keines extralogischen Substrates zu der Exemplifikation, auf die es ankommt, benötigte.

Die Wichtigkeit des gedachten Satzes beruht bekanntlich darauf, dass durch ihn die selbständige Existenz jener Disziplin verbürgt ist, die ich als einen „logischen Kalkul mit Gruppen“ oder kurz als *„Gruppenkalkul“* bezeichnete, um sie vom *„identischen Kalkul“* unterscheiden und diesem gegenüberstellen zu können.

Die beiden Kalkuln haben die Prinzipien und Sätze 1) bis 25) unseres Lehrganges gemein, unterscheiden sich dann aber dadurch, dass in jenem das Th. 26), mithin das volle Distributionsgesetz nicht zu gelten braucht, dagegen in diesem gilt.

Insofern man die Geltung oder Nichtgeltung von Th. 26) in jenem unentschieden lässt, kann man sagen, dass der identische Kalkul sich als ein Unterfall in den Gruppenkalkul einordnet, und dass alle Sätze dieses Gruppenkalkuls, als des allgemeineren von beiden, auch im identischen Kalkul gelten müssen, aber nicht umgekehrt. Nimmt man dagegen etwa das Nichterfülltsein des Th. 26_+) $a(b+c) \not\Subset ab + ac$ unter die Prinzipien des Gruppenkalkuls auf, so steht derselbe dem identischen Kalkul abgeschlossen und ihn ausschliessend gegenüber.

Für jenen Satz der Nichtbeweisbarkeit des Th. 26) aus den vorhergegangenen Prinzipien und Sätzen unserer Theorie sind nun alsbald von Herrn Lüroth, sodann auch von den Herren Voigt und Korselt noch drei (oder vier) andere Beweise geliefert oder angedeutet worden, bei denen wol mit einem geringeren Aufwand von Vorbetrachtungen das Ziel erreicht wird, und die ich darum, gleichwie im Interesse der Vollständigkeit meines Werkes, glaube in Kürze hier aufnehmen zu sollen. Ich will sie in der Reihenfolge ihrer zeitlichen Succession numeriren, doch ausser der Reihe besprechen.

Der Beweis 4, von Voigt[2], p. 303 f. mehr nur angedeutet, im folgenden unter seiner Beihülfe näher ausgeführt, gibt uns zugleich Veranlassung, zur Klärung der Frage einer „Inhaltslogik" oder eines etwaigen, Bd. 1, S. 100 nur von mir gestreiften, identischen Kalkuls mit (idealen?) Begriffs*inhalten* weiteres Material beizubringen, welches vielleicht auch zu den Erörterungen in der „Einleitung" unseres Bd. 1 und der von andern Seiten an diese geknüpften Polemik eine nicht unwichtige Ergänzung bildet. — Herr Voigt sagt l. c.:

„··· Dieser" (der *ideale* Begriffsinhalt) „besteht in der Gesamtheit der Merkmale, welche die Objekte, die einen bestimmten Begriff erfüllen, gemein haben. Die Logik dieser idealen Begriffsinhalte ist aus der elementaren Logik ganz auszuscheiden, da sie ihren Gesetzen nicht durchaus folgt. Ein Kalkul der idealen Inhalte wäre ein *Gruppenkalkul* im Schröderschen Sinne, für den also das dritte Prinzip nicht gilt."

„Addiren wir z. B. den idealen Inhalt des Begriffes: Rechtwinkliges Dreieck, zu dem idealen Inhalt des Begriffes: Gleichschenkliges Dreieck, d. h. bilden wir aus diesen beiden Begriffen einen neuen, dessen Inhalt alle Merkmale derjenigen Objekte ausmacht, die beide Begriffe zugleich erfüllen, so wird der ideale Inhalt dieses Begriffes keineswegs blos die

Summe der Merkmale der beiden gegebenen Begriffe sein, sondern der Begriff enthält auch Merkmale, die weder dem einen noch dem anderen zukamen, z. B. den, dass die Hypotenuse doppelt so gross ist als die zugehörige Höhe."

„Es wäre in der That, wie Schröder bemerkt, ein Hysteronproteron, wenn man mit einem solchen Inhaltskalkul beginnen wollte, und wenn Husserl[2] es dennoch thut oder zu thun glaubt, so hat das allein darin seinen Grund, dass er sich so „kurz fasst", anstatt ihn wirklich durchzuführen. Auffallend ist, dass Schröder nicht die Bemerkung gemacht hat, dass eine Logik idealer Inhalte eine Gruppenlogik sein müsse. Er hätte dann näher liegende Beispiele für die Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes, als die im Anhang entwickelten, haben können."

Dass in der That aus inhaltslogischen Betrachtungen naheliegende „Beispiele" zu letzterm Zwecke sich schöpfen lassen, wollen wir zunächst an der Hand eines andern ebenfalls von Voigt mir gelieferten Beispiels ausser Zweifel stellen.

Es bedeute — etwa mit Beschränkung auf den Denkbereich der Merkmale von *ebenen* Figuren — a die Merkmale des *Rechtecks*
b die Merkmale des *Rhombus*
c das Merkmal *„vierfach"*, d. h. in Bezug auf *vier* verschiedene Axen *„symmetrisch"*, — wie es z. B. das Quadrat ist in Bezug sowol auf seine beiden Diagonalen als auch auf die beiden Winkelhalbirenden dieser; wogegen der Rhombus nur in Bezug auf jene, das Rechteck nur in Bezug auf diese symmetrisch ist, beide also blos *„zweifach" symmetrisch* zu nennen wären, — ein Merkmal, welches d heissen möge.

Da das Rechteck mit *allen* vierfach symmetrischen Figuren nur die Eigenschaft gemein haben kann, in Bezug auf *zwei* Axen symmetrisch zu sein, so bedeutet ac nichts als dieses Merkmal, welches wir d genannt haben. Dasselbe d bedeutet auch bc, denn auch der Rhombus hat mit einer *durchweg beliebigen* vierfach symmetrischen Figur nichts als dieses Merkmal gemein. Also stellt auch $ac + bc$, als eine Tautologie $d + d$, nur dieses Merkmal d vor.

$a + b$ dagegen bedeutet den Merkmalkomplex, der allen denjenigen Figuren zukommt, welche die Merkmale des Rechtecks *und* die Merkmale des Rhombus in sich vereinigen*), d. h. es bedeutet die Merkmale des *Quadrates*. Da die vierfache Symmetrie c zu diesen Merkmalen gehört, so bedeutet also $(a + b)c$ nur eben dieses Merkmal c.

*) Wenigstens steht nichts im Wege, dem Symbol $a + b$ hiernächst solche Deutung zu geben.

Nun ist offenbar das Merkmal c der vierfachen Symmetrie nicht dem d der zweifachen Symmetrie eingeordnet, (sondern umgekehrt, und diese umgekehrte Einordnung ist hier eine wirkliche Unterordnung). Also gilt die Subsumtion $(a+b)c \neq\!\!\!\in ac+bc$ hier nicht, q. e. d.

Um diese wol unanfechtbaren Überlegungen beweiskräftig zu finden, scheint mir der Nachweis doch unerlässlich, dass diejenigen Prinzipien, in denen der identische Kalkul mit dem Gruppenkalkul übereinstimmt, auch wirklich Geltung haben für die vorstehend adoptirten Deutungen von Einordnung, Produkt und Summe zweier Merkmalkomplexe.

Ein Merkmalkomplex g war hier eingeordnet genannt einem Merkmalkomplex h, wenn sich jedes Merkmal des ersteren unter den Merkmalen des letzteren vorfindet. (Der Subsumtion $g \neq\!\!\!\in h$ würde also entsprechen die umgekehrte Subsumtion zwischen den Umfängen der Begriffe, die durch unsere Merkmalkomplexe bestimmt sind.) Trifft auch das Umgekehrte zu, d. h. ist sowol $g \neq\!\!\!\in h$ als $h \neq\!\!\!\in g$, so besteht zweifellos Identität zwischen den beiden Merkmalkomplexen, d. h. es besteht hier unsere Def. (1) der Gleichheit, $g = h$, zu Rechte. Ebenso müssen offenbar Prinzip I $g \neq\!\!\!\in g$ und II: Wenn $f \neq\!\!\!\in g$ und $g \neq\!\!\!\in h$, so ist auch $f \neq\!\!\!\in h$, allgemein gelten.

Ferner musste der Merkmalkomplex 0, welcher sich in jedem Merkmalkomplex mit vorfinden soll, bei uneingeschränktem Denkbereich als völlig leer vorgestellt werden, — dem Begriff „Etwas“ entsprechend, — bei Beschränkung des Denkbereiches, z. B. auf die Merkmale ebener Figuren dagegen als dieses Merkmal selbst, *eben* zu sein, während 1 den Komplex aller erdenklichen, — darunter auch kontradiktorisch entgegengesetzter — Merkmale — irgendwelcher oder bezw. ebener — Figuren bedeutet, — dem Begriffe des „Nichts“ entsprechend. Dann sind die Formeln (2) erfüllt.

$g+h$ sollte sodann bedeuten den Merkmalkomplex, der allen denjenigen Figuren gemeinschaftlich zukommt, die sowol die Merkmale g als auch die h besitzen, nnd dieser wird gebildet nicht nur von den Merkmalen g und h selber, sondern auch von allen denjenigen Merkmalen, die nach den Axiomen der Geometrie aus der Verbindung dieser beiden Merkmalkomplexe g und h hinzufolgen. (Der Umfang dieses Begriffes $g+h$ wäre in unserer Umfangslogik als das identische Produkt der den Begriffen g und h einzeln zukommenden Umfänge zu bezeichnen.) Evident ist nun hieraus, dass wenn $g+h \neq\!\!\!\in f$ ist, dann auch $g \neq\!\!\!\in f$ und $h \neq\!\!\!\in f$ sein muss.

Keineswegs ohne weiteres einleuchtend erscheint dagegen die umgekehrte Behauptung, dass so oft $g \neq\!\!\!\in f$ *und* $h \neq\!\!\!\in f$ ist, auch $g+h \neq\!\!\!\in f$ sein müsse. Der Komplex f könnte in der That zwar die Merkmale g und h für sich umfassen, aber irgend ein weiteres Merkmal ausschliessen, welches weder aus g allein, noch aus h allein, wol aber aus der Verbindung beider aufgrund geometrischer Axiome hergeleitet werden kann und somit zum Komplex $g+h$ gehört. Und zwar ist dies möglich, so lange man sich den Merkmalkomplex f ganz ad libitum zusammengesetzt denkt. Wird nun aber der Denkbereich auf die den geometrischen Axiomen unterworfenen Merkmale der ebenen Figuren eingeschränkt, so wird auch f entweder einen solchen Merkmalkomplex vorstellen, der einer ebenen Figur wirklich zukommen kann, wonach sodann letztere Figur, falls sie die Merkmale g und h besitzt, auch alle diejenigen Merkmale mit umfassen wird, die aus der Verbindung beider folgen, d. i. alle Merkmale des Komplexes $g + h$; — oder f bedeutet einen Komplex von Merkmalen aus unserm Denkbereich, welche, als nach den geometrischen Axiomen mit einander unverträglich, keiner ebenen Figur gleichzeitig zukommen können, und ist dann hier mit 1 zu bezeichnen, da man aus dem in ihrer Unverträglichkeit liegenden Widerspruch noch jedes andere erdenkliche Merkmal hinzugefolgert denken kann (vergl. Bd. 2, I, S. 18, Z. 13 v. o.), sodass f *alle* Merkmale des Denkbereiches umfasst; und dann gilt nach (2) selbstverständlich $g + h \Subset 1$ neben $g \Subset 1$ und $h \Subset 1$.

Für die angegebene Deutung der Symbole treffen somit auch die Propositionen (3) zu. Übrigens erscheint hier nur die von mir sogenannte „extensive Schreibung“ mit der „intensiven“ vertauscht, — vergl. Bd. 1, S. 623, — d. h. es haben $\Subset$ und $\Supset$, 0 und 1, Produkt und Summe, jede Proposition und deren duales Gegenstück, ihre Rollen gewechselt, — wobei indes Inhaltsprodukte bisher hier nicht zur Sprache gekommen.

Sollte das inhaltslogische Produkt gh in gleicher Weise das Gegenstück sein zur umfangslogischen Summe, so wäre ersteres zu definiren als derjenige Merkmalkomplex, welcher allen den Figuren gemeinsam ist, die den Merkmalkomplex g *oder* den h besitzen. Anders im Voigt'schen Beweis. Hier bedeutet $g \cdot h$ nur das wirkliche „identische Produkt“ der beiden Merkmalkomplexe, den Merkmalkomplex, den g und h gemein haben.*) (Vergl. Bd. 1, S. 627, Fussnote.) Selbstverständlich werden dann die formalen Forderungen unserer Def. $(3_\times)$ sich erfüllt erweisen: $(f \Subset g)\ (f \Subset h) = (f \Subset gh)$.

Ergebniss dieser Überlegungen ist also, dass in der That das Voigt'sche Aperçu beweiskräftig ist für unsern Satz der Nichtbeweisbarkeit des Distributionssatzes, und dass an der Hand der Betrachtung idealer Begriffsinhalte naheliegende „Beispiele“ („crucial tests“) gefunden werden können.

Wegen der Deutung, welche Voigt dem Produkt zweier Begriffe beilegt, ist der Voigt'sche Kalkul mit idealen Begriffsinhalten allerdings nur ein Gruppenkalkul; derselbe deckt sich aber auch aus dem gleichen Grunde keineswegs mit demjenigen inhaltslogischen Kalkul, auf welchen ich Bd. 1, S. 100 anspielte, der sich durchaus als „identischer“ Kalkul darstellt, auch mit der vollen Geltung des Distributionsgesetzes, lediglich unter durchgängiger Vertauschung der „intensiven“ mit der „extensiven“ Schreibung, gemäss der bekannten Thatsache, dass mit einer Einordnung zwischen zwei Begriffsumfängen stets die entgegengesetzte Einordnung zwischen den zugehörigen Begriffsinhalten parallel geht. Darum ist es wol auch nicht so „auffallend“, wie Voigt meint, dass ich die bewusste Bemerkung nicht gemacht habe, da diese Bemerkung nur für den Voigt'schen Inhaltskalkul zutrifft, nicht aber für den meinigen. — Dem Voigt'schen Inhaltskalkul jedoch würde eine wichtige, für die Wissenschaft wie für das gemeine Denken gleich unentbehrliche Operation abgehen: die Operation, welche aus zwei ge-

*) Hiezu auch die Anmerkung des Herausgebers am Schlusse des Bandes.

gebenen Begriffen *a* und *b* den Begriff „was *a* oder *b* ist“ ableitet. Dieser Begriff, *ohne Zuhülfenahme von Umfangsbetrachtungen*, dürfte ohnehin jeder Inhaltslogik Schwierigkeiten machen.*)

Nun noch ein Wort über die Frage: mit *welchen* Begriffs*inhalten* denn eine exakte Logik, ein Kalkul, aufzubauen wäre, wenn nicht mit den „*idealen*“? Mit den letzteren lehnt sie neben Herrn Voigt l. c. auch Herr Husserl[1] p. 255 sq. a limine ab, und so scheint das Hysteron-proteron, das mit ihnen in die Logik Eingang fände, allseitig zugegeben.

Den Inhalt z. B. des Begriffes „Kreis“ (in der Euklid'schen Geometrie) bilden die Merkmale des Kreises. Es frägt sich blos, ob alle, ob nur einige von dessen Merkmalen, und dann welche?

Diejenigen Merkmale, welche dem oder jenem Denkenden als Vorstellungsgehalt *seines* Kreisbegriffes gerade eben vorschweben, habe ich den *faktischen* Inhalt des Begriffes „Kreis“ (für diesen Denkenden in diesem Augenblick) genannt (Bd. 1, S. 83). Ich denke, keinen Widerspruch gewärtigen zu müssen, wenn ich es für ausgeschlossen erkläre, diesen wechselnden und wol meist gar nicht einheitlichen Merkmalkomplex als Substrat für logische Untersuchungen hinzustellen.

Nun wird von andern Seiten versucht, den fraglichen Begriffsinhalt einzuschränken auf den Komplex derjenigen Merkmale, welche in einer bestimmten, zugrunde gelegt gedachten „*Definition*“ des Kreises „liegen“, wie z. B. in der Definition Bd. 1, S. 87 sq., wo als wesentliches Merkmal unter andern die Gleichheit der Radien gefordert ist.

Dann kann man doch unmöglich von dem Inhalt des Kreisbegriffes z. B. das Merkmal ausschliessen, dass irgend zwei Radien *nicht* von einander *verschieden* seien! Und ebensowenig, meine ich, irgend ein andres Merkmal, welches aus dem in der Definition gegebenen Komplex denknotwendig oder *logisch*, ohne Berufung auf spezifisch geometrische Thatsachen, folgt, auch wenn dieses Merkmal in der Definition nicht ausdrücklich erwähnt ist. Dergleichen zu thun, hiesse ja geradezu: an dem Buchstaben der Definition kleben und die Logik in Abhängigkeit setzen schon von der Grammatik!

Wird aber dies zugegeben, so ist, beiläufig bemerkt, schon für weite Gebiete den Begriffen gerade dasjenige als ihr „Inhalt“ gesichert, was ich ihren „idealen“ Inhalt nenne, nämlich für die Begriffe der rein deduktiven Disziplinen, der Logik, Arithmetik und höhern Analysis.

In einer Disziplin hingegen, die wie die Geometrie noch obendrein eine axiomatische Basis hat, könnte man allerdings bei den bisher besprochenen Merkmalen halt machen und so von dem „Inhalt“ des Kreisbegriffes willkürlich jedes Merkmal ausschliessen, welches, obzwar allen Kreisen gemeinsam, wie z. B. das von der Gleichheit der Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, lediglich mittelst geometrischer Axiome aus der Definition gefolgert werden kann. Allein es wäre doch allem Usus in Wissenschaft und Leben zuwiderlaufend, zu sagen, diese Gleichheit der Peripheriewinkel sei kein Merkmal des Kreises. Warum also sie, nebst unzähligen andern Eigen-

*) Anmerkung des Herausgebers am Schlusse des Bandes.

schaften vom Inhalt des Kreis*begriffes* ausschliessen? Jedenfalls müsste ein solches Verfahren Weiterungen verursachen wie die, dass man „zum Begriffe des Kreises gehörige“ Merkmale des Kreises von den „ausserbegrifflichen“(!) Merkmalen desselben zu unterscheiden hätte; und dem Hysteronproteron entgeht man mit diesen Weiterungen dennoch nicht. Oder wollen mir vielleicht die Inhaltslogiker die Frage beantworten, ob unter Zugrundelegung der obigen (Bd. 1, S. 87) gewöhnlichen Kreisdefinition — das Merkmal: eine „überall gleichartige“ Linie zu sein, (deren jeder Teil in ihr selbst verschoben werden kann ohne Änderung an Gestalt und Grösse), ob dieses Merkmal dem in ihrem Sinne beschränkten „Inhalt“ des Kreisbegriffes angehört oder nicht? Eine solche Frage zur Entscheidung zu bringen, erfordert ja wol eben schon die ganze Kunst des Schliessens, deren Theorie die Inhaltslogiker gleichwol auf die Betrachtung solch zweifelhafter „Inhalte“ erst gründen wollen.

Der Beweis 5 von Korselt[1] nimmt die Euklid'sche Raumgeometrie zum Substrate:

Es mögen $a, b, c, \ldots$ oder auch $p_1, p_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots, e_1, e_2, \ldots$ „*Raumelemente*“, d. h. Punkte, Geraden, Ebenen, 0 das Nichts, 1 den ganzen Raum bedeuten.

Eine Subsumtion $a \Subset b$ heisse gleichwie im Gebietekalkul überhaupt: Das Raumelement a *liegt in* dem Raumelement b.

Dagegen bedeute $a \cdot b$ das *in* a und b enthaltene Element *höchster*, $a + b$ das a *und* b *enthaltende* Element *niedrigster* Dimension.

Die Anschauung zeigt uns, dass die formalen Grundlagen I, II, (1), (2) und (3) erfüllt sind.

Dies bedarf noch besonderer sorgfältiger Überlegung nur hinsichtlich der zu (3) gehörigen Subsumtionen

$$(c \Subset a)(c \Subset b) \Subset (c \Subset ab) \qquad | \qquad (a \Subset c)(b \Subset c) \Subset (a + b \Subset c),$$

was Herr Korselt nicht ausführt.

Als selbstverständlich erfüllt können auch diese beiden Formeln gelten in dem Falle, dass eines oder mehrere der drei Raumelemente a, b, c den Wert 0 oder 1 besitzen sollten. Desgleichen, wenn $a = b$ ist, da aa und $a + a$ den vorausgeschickten Definitionen zufolge die Bedeutung a haben werden. Endlich ist auch, wenn das eine Raumelement b im andern a liegt $(b \Subset a)$,

b die Bedeutung von ab | a die Bedeutung von $a + b$

und die Gültigkeit unserer Subsumtionen wiederum ohnehin ausser Frage, (da dann die Thesis blos einen Teil der Hypothesis wiederholend statuirt). Es bleiben noch die Fälle durchzugehen, wo a und b als Punkte, Gerade oder Ebenen „*auseinanderliegen*“, einschliesslich der Fälle, wo sie — als Geraden oder auch Ebenen — einander schneiden. Fälle der *Parallellage* von Raumelementen a und b sind dabei den Fällen des *Nichtschneidens* beizuzählen, insofern das „unendlich ferne“ Schnittgebilde im vorliegenden

Denkbereich gar nicht existirt, und somit auch kein im Schnittgebilde „enthaltenes Element höchster Dimension“, kein Produkt ab; wogegen bezüglich des durch a und b bestimmten und „beide enthaltenden Raumelements niedrigster Dimension“, d. i. bezüglich $a + b$, dieselben Fälle des *Parallelismus* mit denen des *Schneidens* zusammenrangiren werden.

Ist a ein Punkt ausserhalb b, (welches ein anderer Punkt oder eine Gerade oder eine Ebene sein mag,) so muss c, um in a und b zugleich enthalten sein zu können, selbst $= 0$ sein; dann gilt aber $c \leqq ab$ kraft (2).

Ist a eine Ebene ausserhalb b, (welches eine andre Ebene oder eine Gerade oder ein Punkt sein mag, jene beiden die Ebene a schneidend oder auch nicht schneidend), so muss c, um sowol a als b enthalten zu können, $= 1$, nämlich der ganze Raum sein, und dann gilt $a + b \leqq c$ kraft (2).

Damit ist links vom Mittelstrich der Punkt, rechts die Ebene als zulässige Bedeutung von a und b abgethan.

Stellen a und b zwei einander *nicht schneidende* (und auseinandergelegene) Raumelemente vor, nämlich entweder zwei windschiefe oder auch zwei parallele Gerade, oder auch eine Gerade und eine zu ihr parallele Ebene, oder endlich zwei parallele Ebenen, so muss c, um in beiden zugleich liegen zu können, wiederum $= 0$ sein, und dann gilt $c \leqq ab$ kraft (2), und übrigens auch kraft I, da auch ab hier 0 bedeuten wird. Somit bleiben (links) nur noch *schnittige* Raumelemente in's Auge zu fassen.

Sind a und b zwei schneidende Geraden, oder eine Ebene und eine sie schneidende Gerade, so stellt ab deren Schnittpunkt vor, und c muss, um als ein „Raumelement“ in a und b zugleich liegen zu können, (sofern c nicht 0 ist,) eben dieser Schnittpunkt sein. Dann gilt $c \leqq ab$ kraft I.

Sind endlich a und b zwei schnittige Ebenen, so ist ab die Schnittlinie beider. Hier muss c, um in a und b zugleich enthalten zu sein, auch in dieser Schnittlinie liegen als dem geometrischen Ort, dem Inbegriff der den beiden Ebenen gemeinsamen Punkte, — mag c nun ($= 0$ sein oder) einen Punkt (der Schnittgeraden) oder eine Gerade (diese Schnittgerade selbst) bedeuten: es muss $c \leqq ab$ sein.

Sind a und b zwei windschiefe Gerade, so muss c als beide enthaltendes Raumelement der ganze Raum 1 sein; desgleichen ist dann auch $a + b = 1$ und es gilt $a + b \leqq c$ kraft (2) und I.

Sind a und b zwei einander schneidende oder auch zwei parallele Gerade, oder eine Gerade und ein Punkt ausserhalb, so stellt $a + b$ die dadurch bestimmte Ebene vor, und c muss, um a sowol als b zu enthalten, als ein „Raumelement“ entweder selbst diese Ebene oder der ganze Raum 1 sein, so dass $a + b \leqq c$ nach I oder (2) gilt.

Sind a und b zwei verschiedene Punkte, so stellt $a + b$ deren Verbindungsgerade vor. Dann kann c, worin beide enthalten sein sollen, kein Punkt und auch nicht 0 sein. Eine Gerade, Ebene oder ein (Euklid'scher) Raum dagegen, der beide enthält, wird immer auch deren Verbindungsgerade enthalten, und es muss $a + b \leqq c$ für die genannten drei Bedeutungen von c zutreffen.

Dass unsere Aufzählung*) der Möglichkeiten eine *vollständige* ist, wird man leicht erkennen, und somit ist die Geltung der Sätze (3), mithin sämtlicher Grundlagen der Theorie, nun für Herrn Korselt's Denkbereich verbürgt. Es gelten daher auch alle in Bd. 1 aus diesen abgeleiteten Sätze, und insbesondere die erste Subsumtion des Distributionsgesetzes: $ab + ac \Subset a\,(b + c)$.

Nun seien p_1, p_2, p_3 drei verschiedene Punkte einer Geraden g, also

$$p_1 p_2 = p_1 p_3 = 0, \quad p_1 g = p_1, \quad p_2 + p_3 = g.$$

Dann ist

$$p_1(p_2 + p_3) = p_1 g = p_1, \quad p_1 p_2 + p_1 p_3 = 0 + 0 = 0,$$

also

$$p_1(p_2 + p_3) \neq p_1 p_2 + p_1 p_3, \quad \text{q. e. d.}$$

Der Beweis 3 von Lüroth[1] nimmt das Gebiet der natürlichen Zahlen zum Substrat und verwendet die arithmetischen Rechnungsarten. Es sollen die Buchstabensymbole $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, p, q, r, \cdots$ stets positive ganze Zahlen, die Null zugelassen, vorstellen. Sodann sei eine „Klasse“ a ebensolcher Zahlen definirt als die Gesamtheit aller Zahlen, (der Elemente dieser Klasse a), die durch eine bestimmte Linearform

$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \cdots + \lambda z$$

dargestellt sind, worin die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$ bestimmt gegeben und für alle Elemente der Klasse a dieselben seien, dagegen die Konstituenten $p, q, r, \cdots, z$ zunächst unbestimmte Zahlen oder Parameter vorstellen, denen einzeln und unabhängig von einander die Werte 0, 1, 2, 3, $\cdots$ der Reihe nach beizulegen sind, wenn man sämtliche Elemente der Klasse a bilden will. Diese Elemente sind hiernach nebst 0 die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \lambda$, sodann deren Vielfache, endlich alle Zahlen, die durch arithmetische Addition aus zwei oder mehreren unter den genannten Elementen, oder überhaupt aus irgend welchen Elementen der Klasse a entstehen. — Während somit die $p, q, \cdots$ innerhalb einer Klasse von Element zu Element ihre Werte wechseln, sind die für alle Elemente einer Klasse konstanten, erst von Klasse zu Klasse sich ändernden $\alpha, \beta, \cdots$ für eine Klasse a charakteristisch oder „bestimmend“; die Klasse kann auch durch $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots \lambda)$ bezeichnet werden.

Beispielsweise wird (3, 2, 0) die Zahlen von der Form $3p + 2q + 0r$, also die: 0, 2, 3, 4, 5, $\cdots$, alle Zahlen ausgenommen 1 enthalten, die Klasse (0, 3, 0) oder (3) die Vielfachen 0, 3, 6, 9, $\cdots$ von 3, die Klasse (4, 5) die Zahlen 0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, $\cdots$ und von 15 ab *alle* Zahlen umfassen.

*) Die Aufzählung wäre wol durch Berufung auf gewisse geometrische Sätze von allgemeinerer Natur (über Raumelemente, deren Schnittgebilde und Bestimmungsstücke) ersetzbar, welche zu formuliren ich aber hier nicht für meine Aufgabe halte.

$a ⋹ b$ bedeute, dass *die Zahlen der Klasse a auch alle zur Klasse b gehören.* Dann werden die Aussagen „$a ⋹ b$ nebst $b ⋹ a$“ und „$a = b$“ einander gegenseitig bedingen. Ferner folgt aus $a ⋹ b$ und $b ⋹ c$ auch $a ⋹ c$, und die Klasse $(0, 0, 0, \cdots)$ oder (0), welche blos die Zahl 0 enthält, ist eingeordnet einer jeden Klasse a, und jede Klasse a ist eingeordnet der das Zahlengebiet selbst repräsentirenden Klasse $(1, 1, 1, \cdots)$ oder $(1, 0, 0, \cdots)$ oder (1), so dass die Klassen (0) und (1) hier die Moduln 0 und 1 unserer Theorie vertreten.

ab sei die *Klasse der Zahlen, welche gleichzeitig die durch a und b verlangte Form haben;* $a + b$ dagegen enthalte *alle Zahlen, die durch* (arithmetische) *Addition einer Zahl der Form a zu einer der Form b entstehen.*

„Dass die zu $a + b$ gehörigen Zahlen eine Klasse in dem hier definirten Sinne bilden, ist leicht zu sehen.“ Die allgemeine Form dieser Zahlen ist nämlich die arithmetische Summe der a und b repräsentirenden beiden Linearformen, *nachdem* man die Konstituenten p, q, $\cdots$ in der einen von beiden Linearformen, wenn nötig, durch neue in der andern nicht vorkommende Parameterbuchstaben ersetzt hat.

„Der Beweis, dass auch die zu ab gehörigen Zahlen eine Klasse bilden, der nicht so einfach ist, sei der Kürze wegen fortgelassen.“ Derselbe wird nämlich leicht erbracht werden speziell für die Klassenprodukte des nachherigen ausschlaggebenden Beispiels, ist also im übrigen hier entbehrlich.*)

Ist dann $c ⋹ a$ und $c ⋹ b$, so ist auch $c ⋹ ab$, und umgekehrt. Und ist $a ⋹ c$ und $b ⋹ c$, so ist auch $a + b ⋹ c$, da c die Elemente von a und diejenigen von b nicht gleichzeitig enthalten kann, ohne auch die durch additive Vereinigung der *beiderseitigen* Elemente zu gewinnenden Zahlen mit zu umfassen. Endlich ist auch selbstverständlich $a ⋹ c$ und $b ⋹ c$, wenn $a + b ⋹ c$, und die formalen Grundgesetze der Theorie sind hiermit erfüllt.

Sei nun $a = (3)$ die Klasse der Zahlen von der Form $3p$, die Klasse der Vielfachen von $3 : 0, 3, 6, 9, \cdots$, ferner $b = (2)$ die der Zahlen von der Form $2q : 0, 2, 4, 6, \cdots$, der geraden Zahlen, endlich $c = (5)$ die der Form $5r : 0, 5, 10, 15, \cdots$; dann ist $a + b = (3) + (2) = (3, 2)$ die Klasse der Zahlen von der Form $3p + 2q : 0, 2, 3, 4, \cdots$, aller ganzen Zahlen von 0 an aufwärts, ausgenommen die Zahl 1, — worunter auch die Zahlen der Klasse $c = (5)$ sich befinden; es ist also $c ⋹ a + b$, $(5) ⋹ (3) + (2)$, oder auch $(a + b)c = c$, $(3, 2) \cdot (5) = (5)$, d. h. die Klasse $(a + b)c$ wird gebildet von denjenigen Zahlen, welche zugleich von der Form $3p + 2q$ und von der Form $5r$ sind, was bei *allen* der letzten Form zutrifft. Andererseits sind die Zahlen $ac = (3) \cdot (5)$,

*) Anmerkung des Herausgebers, am Schlusse des Bandes.

welche zugleich Vielfache von 3 und von 5 sind, $(3)\cdot(5)=(15)$ Vielfache von 15, gegeben durch die allgemeine Form $3p\cdot 5r = 15s$, die Zahlen $bc = (2)\cdot(5) = (10)$ durch $2q\cdot 5r = 10t$, und die $ac + bc = (15, 10)$ durch $15s + 10t = 5(3s + 2t) : 0, 10, 15, 20, \cdots$, die man erhält als Fünffache der Zahlen (3, 2), — alle durch 5 teilbaren Zahlen mit Ausnahme der Zahl 5 selbst. — Eben weil hier die Zahl 5 in (15, 10) oder $ac+bc$ fehlt bezw. nicht die Form $15s+10t$ — bei ganzen positiven Werten von s und t — besitzt, in (5), c oder $(a+b)c$ dagegen vertreten ist, gehören zwar alle Zahlen der Klasse (15, 10) auch der Klasse (5) an, oder es ist $ac + bc \mathrel{\overline{\in}} (a + b)c$, — wogegen aber das umgekehrte nicht der Fall ist: es gilt die erste, aber nicht die zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes.

Herr Lüroth schickte seinem Beweis die Bemerkung voraus: „Nachdem ich erkannt hatte, dass die Ungültigkeit des Distributionsgesetzes bei diesem“ (dem einen vom Verfasser gegebenen) „Beispiele dadurch bedingt ist, dass $a + b$ nicht *nur* die Individuen der beiden Klassen a und b enthält, *sondern auch noch andere*, war es mir leicht, noch einfachere Beispiele zu konstruiren.“ Mit dieser Bemerkung ist in der That der Kernpunkt der Frage gekennzeichnet.

Herrn Voigt verdanke ich noch folgende auf diesen Kernpunkt bezügliche Wahrnehmung, die geeignet erscheint, die Auffindung von noch weiteren derartigen „Beispielen“, die sich als Substrate für den Gruppen-, aber nicht den identischen Kalkul empfehlen, allenfalls zu erleichtern.

Theorem. Mit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes

$$26_\times)\qquad (a + b)c \mathrel{\overline{\in}} ac + bc$$

ist auch äquivalent der Satz:

„Aus $c \mathrel{\overline{\in}} a + b$ folgt (allgemein) $c \mathrel{\overline{\in}} ac + bc$“, oder, aussagenrechnerisch dargestellt:

$$\{(a + b)c \mathrel{\overline{\in}} ac + bc\} = \{(c \mathrel{\overline{\in}} a + b) \mathrel{\overline{\in}} (c \mathrel{\overline{\in}} ac + bc)\}$$

Beweis. Ist nämlich $c \mathrel{\overline{\in}} a + b$, somit $c = (a + b)\,c$, so ergibt sich unmittelbar aus $c \mathrel{\overline{\in}} ac + bc$ — durch Einsetzen links — auch die Subsumtion $26_\times$).

Und gilt umgekehrt diese, so wird aus $c \mathrel{\overline{\in}} a + b$ oder $(a + b)\,c = c$ auch $c \mathrel{\overline{\in}} ac + bc$ folgen, — q. e. d.

Den ersten Teil des Beweises kann man auch nach Voigt so führen: Folgt allgemein $c \mathrel{\overline{\in}} ac + bc$ aus $c \mathrel{\overline{\in}} a + b$, so folgt auch aus der nach Th. $6_\times$) selbstverständlichen Subsumtion

$$(a + b)\,c \mathrel{\overline{\in}} a + b,$$

worin $(a+b)c$ die Stelle des c der Voraussetzung vertritt,

$$(a+b)c \Subset a\cdot(a+b)c + b\cdot(a+b)c,$$

was sich aber nach dem Absorptionsgesetz $23_\times$) vereinfacht zu $26_\times$).

Hiernach braucht man also, um für ein gruppenlogisches Beispiel die Ungültigkeit der zweiten Subsumtion des Distributionsgesetzes darzuthun, nur ein c nachzuweisen, das in einem $a+b$ enthalten ist, ohne doch in $ac+bc$ enthalten zu sein.

Von verschiedenen Seiten sind mir auch noch andre Mannigfaltigkeiten zur Beurteilung vorgelegt worden als Versuche, damit etwas auf unser Thema bezügliches zu beweisen, und ich glaube, ohne eine Indiskretion zu begehen, der Sache dienen zu dürfen, indem ich dieselben namhaft mache.

Als Denkbereich 1 betrachtete Herr Voigt die Mannigfaltigkeit aller Kreisflächen der Ebene, — den Punkt, in welchen ein Kreis degeneriren kann, mit zugelassen, — so dass also ein „Gebiet" wie a, b, c,... stets die Innenfläche eines Kreises vorstellt. Als ab wird der *grösste* Kreis erklärt, der sowol in a als in b gelegen ist, und die 0, falls a und b keinen Punkt gemeinsam haben, — als $a+b$ der *kleinste* Kreis, der sowol den a als den b umfasst. Die beiden Ausdrücke ab und $a+b$ sind damit eindeutig bestimmt, und zwar, sofern sie nicht 0 oder mit einem der beiden Kreise a und b selbst zusammenfallen, als *Berührkreise* von diesen beiden. Die Geltung der beiden Assoziationsgesetze, sowie der ersten Subsumtion des Distributionsgesetzes lässt sich dann an interessanten Figuren nachweisen, desgleichen die Ungültigkeit der zweiten Subsumtion dieses Gesetzes. Allein hier treffen, wie leicht zu sehen, auch schon die beiden Teilsätze unserer Definition (3)

$$(3_\times)'\ (c \Subset a)(c \Subset b) \Subset (c \Subset ab) \quad | \quad (3_+)'\ (a \Subset c)(b \Subset c) \Subset (a+b \Subset c)$$

nicht allgemein zu, während die umgekehrten Subsumtionen $(3_\times)''$, $(3_+)''$ allerdings selbstverständlich gelten. Die Betrachtung ist somit für unsern Zweck nicht beweisend.

Nähme man für 1 den beschränkteren Denkbereich aller der Kreisflächen (der Ebene), die ihren Mittelpunkt auf einer bestimmten Geraden (in ihr) haben, so würde zwar (3) volle Geltung erlangen, zugleich aber auch das volle Distributionsgesetz mit seinen beiden Subsumtionen.

Erhebt man zum Denkbereiche die Mannigfaltigkeit aller Strecken einer festen Geraden 1, diese „Strecken" im landläufigen Sinne als einfach zusammenhängende, kontinuirliche Punktgebiete oder „Innenstrecken" auffassend, — und definirt man ab als die grösste sowol in a als in b liegende Strecke (wo nicht 0), $a+b$ als die kleinste sowol a als b enthaltende Strecke, so stimmt ab mit unserm „identischen Produkte" völlig überein, wogegen $a+b$ die „identische Summe" übertreffen wird, sobald die Strecken a und b auseinanderliegen, und zwar um die sie trennende Zwischenstrecke. Hier gelten zunächst alle formalen „Grundlagen“ des Gruppenkalkuls, dagegen nicht das volle Distributionsgesetz. Denn versteht man unter a und b zwei auseinanderliegende (disjunkte) Strecken und unter c eine innerhalb $a + b$ gelegene, welche z. B. mit a einen (echten) Teil ac (ihrer selbst), mit b aber nichts gemein hat, so wird $(a + b)c = c$, dagegen $ac + bc = ac + 0 = ac$ von c verschieden ausfallen. — Ich will diese sehr bequeme Exemplifikation nach ihrem Urheber als den

Beweis 6 von Korselt registriren.

Lässt man nun aber mit Herrn Korselt als „Gebiete“ auch „Aussenstrecken“ zu, so wird obendrein zwar der Begriff der *Negation* anwendbar und jedem Gebiet ein Negat in Gestalt von dessen Ergänzung zur ganzen Geraden zugeordnet. Auch kann man bei den Definitionen von ab und $a + b$ den Begriff des „grössten“ oder „kleinsten“ Gebietes beibehalten in dem Sinne, dass jedes unendliche Gebiet, also jede Aussenstrecke für „grösser“ erklärt wird, als jedes endliche Gebiet, d. i. jede Innenstrecke, dass ferner von zwei Aussenstrecken diejenige als grösser gilt, die von der ganzen Geraden das kleinere Innenstück übrig lässt. Wie leicht zu sehen, trifft dann die zweite Subsumtion des Distributionsgesetzes häufig nicht zu. Allein es gelten auch schon die beiden oben erwähnten Teilsubsumtionen $(3)'$ nicht mehr allgemein, und überdies wird sowol ab als $a + b$ in gewissen Fällen *zweideutig*, — in solchen nämlich, wo a eine Innenstrecke, b eine Aussenstrecke vorstellt und die Endpunkte der einen zu denen der andern bezw. deren Mitte symmetrisch liegen.

Um die vorliegende Gruppe von Vervollkommnungsbestrebungen zum Abschluss zu bringen, liegt es mir endlich noch ob, über eine Bemerkung von Herrn Korselt zu berichten, die mir von ihm brieflich zu diesem Zwecke vorgelegt wurde und die Frage betrifft, ob nicht bei Aufstellung der Grundlagen des identischen Kalkuls die *zeitweilige Preisgebung des Dualismus*, wie sie in unserer sechsten Vorlesung, Bd. 1 § 12 sich aufgedrängt, vermieden werden könne. Es handelt sich darum, unser „drittes“ Prinzip, das ich in dualistischer Hinsicht unsymmetrisch als

$$\text{III}_\times. \qquad (bc = 0) \Subset \{a(b + c) \Subset ab + ac\}$$

formulirt habe, zu ersetzen durch ein symmetrisches, mit dessen Hülfe sich dann ebenfalls das volle Distributionsgesetz beweisen liesse, — und zwar ohne Argumentiren auf Individuen oder Punkte unserer Punktgebiete.

Diese letztere Einschränkung, (welche Herr Korselt nicht durchweg berücksichtigt, so dass ich nur von einem Teile seiner Mitteilungen Gebrauch machen kann), ist unerlässlich, wenn die Beweisführungen überhaupt in den Lehrgang unseres Bd. 1 passen sollen. (Vollends Beweisführungen, bei denen auf die Unterscheidung von endlichen und unendlichen Systemen resp. Klassen einzugehen wäre, müssten wol als Hysteron-Proteron bezeichnet werden.)

Als ein Sonderfall des Prinzips $\mathrm{III}_\times$ war Bd. 1, Seite 294, Anm. 2 bereits hervorgehoben das Prinzip

$$\mathrm{III}_\times^\circ \qquad (bc = 0)(b + c = 1) \Subset \{a(b + c) \Subset ab + ac\},$$

— worin $a(b + c)$ auch kürzer durch $a \cdot 1, = a$ ersetzbar, und ich hatte dabei bemerkt, dass es nicht gelinge, mit diesem einfacheren Prinzip $\mathrm{III}_\times^\circ$, selbst in Verbindung mit seinem dualen Gegenstücke auszukommen. Dies ist nunmehr dahin zu berichtigen, dass letzteres doch gelingt.

Erheben wir nämlich in Anlehnung an Herrn Korselt zum dritten Prinzip den Satz $\mathrm{III}_\times^\circ$ nebst dualem Gegenstück, nämlich dass

Wenn $bc = 0$ und $b + c = 1$ ist,

$\mathrm{III}_\times^\circ.\quad a(b + c) \Subset ab + ac \quad | \quad \mathrm{III}_+^\circ\ (a + b)(a + c) \Subset a + bc,$

oder weil unter den gegenwärtigen Voraussetzungen

$$a(b + c) = a \cdot 1 = a = a + 0 = a + bc,$$

$$\mathrm{III}^\circ \quad (bc = 0)(b + c = 1) \Subset \{(a + b)(a + c) \underline{\underline{\Subset}}\, a \underline{\underline{\Subset}}\, ab + ac\},$$

wo dann die Subsumtionen rechterhand, weil als rückwärtige ohnehin gültig, die Kraft von Gleichungen haben, — so lassen sich die Beweise der Sätze 29), $33_\times$) und $34_\times$) nebst Zusätzen aus III_+° genau dual entsprechend denen der Theoreme 29), 33_+) und 34_+) in Bd. 1, S. 300 und 308 f. gestalten, wo das Prinzip $\mathrm{III}_\times^\circ$) ausreichte, und hier kann dann der Beweis der De Morgan'schen Theoreme 36) unverändert wie in Bd. 1, S. 352 angeschlossen werden. Setzt man jetzt der Einfachheit halber

$$a(b + c) = p, \quad ab + ac = q$$

so gilt nach $25_\times$) ohnehin $q \Subset p$, oder nach $15_\times$), $(6_\times)$ und $(30_\times)$

$$qp_1 \Subset pp_1 \Subset 0, \quad qp_1 = 0. \qquad \text{(Vergl. auch } 38_\times)!)$$

Ferner ist zufolge 36)

$$p_1 = a_1 + b_1c_1$$

und, bei wiederholter Anwendung des Zusatzes zu 33_+), sowie nach 30_+), und 22_+)

$$q + p_1 = ab + ac + a_1 + b_1c_1 = a_1 + b + c + b_1c_1 = a_1 + b + c + c_1 = 1.$$

Aus dem damit gewonnenen Ergebnisse

$$qp_1 = 0, \quad q + p_1 = 1,$$

zusammengehalten mit

$$pp_1 = 0, \quad p + p_1 = 1$$

ergibt dann aber das Th. 29)

$$q = p, \qquad \text{q. e. d.}$$

Diese Ableitung des Distributionsgesetzes hat den Vorteil, dass die Dualität überall erhalten bleibt. Allerdings sind dazu unter III° *zwei* Prinzipien aufgestellt, die auch wirklich beide unentbehrlich scheinen.*)

Statuirt man das Prinzip III° dicht vor dem Th. 29), so lassen sich auch für dieses

29) $$(ab = ac = 0)(a + b = a + c = 1) \Subset (b = c)$$

noch zwei einander dual entsprechende Beweise geben an Stelle des früheren Bd. 1, S. 300:

Es ist nach den Voraussetzungen von 29) und dem Schema III°

$$\begin{array}{ccc} & (b+a)(b+c) = b = ba + bc & \\ b + a = c + a & & ba = ca \\ & (c+a)(c+b) = c = ca + cb, & \\ & \text{ergo } b = c. & \end{array}$$

Auch dieser Verbesserung soll in dem oben Seite 406 erwähnten „Abriss" Rechnung getragen werden.

§ 51. Zum Kapitel der symmetrisch allgemeinen Lösungen.

Unbeschadet der sonstigen Zwecke dieses Werks kann der Leser gleichwie den § 24 des Bd. 1 auch diesen Paragraphen *überschlagen* und braucht darauf allenfalls erst dann zurückzukommen, wenn im dritten Band auf die einschlägigen Untersuchungen — nebenher, blos der Heuristik zuliebe — verwiesen wird. Wer sich jedoch etwa in selbstthätiger Forschung an noch ungelöste „Auflösungsprobleme" im Gebiet der Algebra der Relative wagen sollte, dürfte dieses Kapitel gelegentlich mit Vorteil zurate ziehen, — wie mir denn auch auf diesem Felde die hiernächst weiter zu führenden Vorarbeiten thatsächlich gute Dienste geleistet haben zur *Entdeckung* zahlreicher Sätze und Problem-Lösungen, welche dann freilich im dritten Band auch ohne Bezugnahme auf den heuristischen Gang verifiziert oder bewiesen werden.

Zunächst ist behufs *Vervollkommnung* des in § 24 Gebotenen den Lösungen zweier dortiger Aufgaben noch eine bessere Form zu geben. Sodann sollen im folgenden noch weitere Aufgaben gelöst werden.

Bei Aufgabe 12 (desgleichen auch 14) und 15 l. c., wo es sich um die symmetrisch allgemeine Bestimmung zweier Unbekannten x, y handelt, die eine gegebne Forderung zu erfüllen haben, wurde zwar jeweils das allgemeinste System von Wurzeln richtig aufgestellt, welches in symmetrischer Weise der Aufgabe genügt, wobei die Unbekannten

*) Anmerkung des Herausgebers am Schlusse des Bandes.

durch (mindestens ebenso viele) unbestimmte Parameter ausgedrückt waren. Dabei erscheint aber noch als Missstand, dass man jene Werte oder Ausdrücke, welche für die unbestimmten Parameter eingesetzt werden müssen, wenn man ein bestimmt gegebenes Wurzelpaar x, y aus ihnen erhalten will, entweder für die Anwendungen im Gedächtniss behalten oder so, wie sie sich l. c. angegeben finden, nachschlagen muss. Und schon aus diesem Grunde versteht sich die Anforderung: die Ausdrücke für die symmetrisch allgemeinen Wurzeln x, y so einzurichten, dass jeder Unbekannten ein eigener Parameter, dem x ein u, dem y ein v, als sogenannter „wesentlicher" Parameter entpricht, und dass man, *um irgend ein gewünschtes Wurzelpaar x, y zu erhalten, nur $u = x$, $v = y$ selbst zu setzen habe.*

Diese Anforderung wird sich bei den in Bd. 3 behandelten Aufgaben auch noch anderweitig motiviren; sie wird dort von mir, weil sie keineswegs im Begriff der Lösung selbst gelegen, als die *„Adventivforderung"* bezeichnet. Sie ist auch bereits bei den Lösungen der übrigen Aufgaben des § 24 erfüllt, nur bei den vorhin genannten noch zu erfüllen. Zuvor sei blos noch bemerkt, dass wenn im Ausdruck der Wurzeln neben den „wesentlichen" unbestimmten Parametern noch andre vorkommen, diese letztern als „unwesentliche" oder „Luxus-Parameter" bezeichnet werden mögen. Solche bleiben unter allen Umständen willkürlich und können *unbeschadet der Allgemeinheit der Lösungen* beliebig spezialisirt, z. B. auch ein jeder für sich gleich 0 oder gleich 1 angenommen werden, — wie dies sogleich an dem nachfolgenden sich illustriren wird.

Aufgabe 12. Nach x, y die Gleichung

$$1)\qquad xy_1 + x_1y = c$$

symmetrisch allgemein zu lösen.

Ich will die Lösungen erst angeben, dann verifiziren, zuletzt ihre Herleitung skizziren.

Die Auflösung ist:

$$2)\qquad \begin{cases} x = (c_1 + r)uv + (c + s)uv_1 + c_1su_1v + cru_1v_1 \\ y = (c_1 + r_1)uv + c_1suv_1 + (c + s)u_1v + cr_1u_1v_1 \\ x_1 = cr_1uv + c_1s_1uv_1 + (c + s_1)u_1v + (c_1 + r_1)u_1v_1 \\ y_1 = cruv + (c + s_1)uv_1 + c_1s_1u_1v + (c_1 + r)u_1v_1, \end{cases}$$

wo u, v die wesentlichen, r, s die Luxusparameter vorstellen.

Beweis durch Verifikation.

Erste Probe, auf die *Richtigkeit* der angeblichen Lösungen 2) bei beliebigen u, v, r, s, — durch Einsetzen der Werte 2) in die Gleichung 1), stimmt:

$$xy_1 + x_1y = (cr + cr_1)uv + cuv_1 + cu_1v + (cr + cr_1)u_1v_1 =$$
$$= c(uv + uv_1 + u_1v + u_1v_1) = c.$$

Die Ausdrücke 2) liefern mithin, wie immer auch die Gebiete oder Klassen u, v, r, s bestimmt werden mögen, stets *nur* richtige Wurzeln der Gleichung 1).

Eine *zweite* Probe soll aber noch die *Vollständigkeit* unserer Lösung des Problems erweisen, also darthun, dass die Ausdrücke 2) uns auch *alle* Wurzelsysteme der Gleichung 1) liefern. Zu dem Ende stellen wir uns unter x, y jetzt irgend ein Wertepaar vor, welches die Gleichung 1) oder

1') $$c(xy + x_1y_1) + c_1(xy_1 + x_1y) = 0$$

erfüllt, und denken uns ferner r, s irgendwie fixirt. Es ist zu zeigen, dass es dann jedesmal ein Wertepaar u, v überhaupt gibt (also mindestens eines) derart, dass auch die Gleichungen 2) erfüllt sein werden; d. h. dass uns für dieses Wertepaar u, v unsere Lösungen 2) das gewünschte Wurzelpaar x, y liefern.

Prinzipiell, behufs Erweises der Vollständigkeit unserer Lösungen, müsste zwar blos die Existenz solchen Wertepaars u, v dargethan werden, wie verwickelt auch dieses durch die gegebenen x und y sich ausdrücken mag. Der Adventivforderung gemäss wird nun aber

$$u = x, \quad v = y$$

selbst ein solches Wertepaar sein müssen. M. a. W. durch Einsetzen des letztern müssen sich die beiden ersten Gleichungen 2), aus welchen die beiden andern durch Negiren folgen, kraft der Voraussetzung 1) oder 1') als identisch erfüllt erweisen:

$$x = (c_1 + r)xy + (c + s)xy_1 + c_1sx_1y + crx_1y_1$$
$$y = (c_1 + r_1)xy + c_1sxy_1 + (c + s)x_1y + cr_1x_1y_1.$$

Lässt man hierin die Glieder fort, die kraft 1') ohnehin verschwinden, nachdem man die Summen $c_1 + r$, $c_1 + r_1$, $c + s$ in $c_1 + cr$, $c_1 + cr_1$, $c + c_1s$ umgeschrieben, so bleibt zu zeigen, dass

$$x = x(c_1y + cy_1), \quad y = y(c_1x + cx_1)$$

zutrifft, was nun aber mittelst Addition von 0 rechterhand, d. h. durch Hinzufügung geeigneter Glieder, die kraft 1') ebenfalls verschwinden, sich äquivalent umsetzen lässt in

$$x = x(cy + c_1y + cy_1 + c_1y_1) = x \cdot 1 = x,$$
$$y = y(cx + c_1x + cx_1 + c_1x_1) = y \cdot 1 = y$$

und sich in der That augenscheinlich bewahrheitet, q. e. d.

Eine *dritte* Probe, nämlich die Prüfung unserer Lösungen 2) auf die *Symmetrie* bezüglich der in der Problemstellung 1) zulässigen Vertauschungen erledigt sich so. Die Gleichung 1) bleibt ungeändert (oder geht nur in sich selbst über) durch die folgenden drei Systeme von Vertauschungen

$$(x, y)(x_1, y_1), \quad (x, y_1)(x_1, y), \quad (x, x_1)(y, y_1).$$

Diese aber, mit

$$(u, v)(u_1, v_1), \quad (u, v_1)(u_1, v), \quad (u, u_1)(v, v_1)$$

und

$$(r, r_1), \qquad (s, s_1), \qquad (r, r_1)(s, s_1)$$

bezüglich verbunden, führen allemal das System 2) unserer Lösungen nur in sich selbst über, wie man fast mühelos nachsieht.

Von den Bd. 1, S. 514 gefundenen Lösungsformen

$$x = \alpha c_1 + \beta c, \quad y = \alpha c_1 + \beta_1 c$$

aus konnte ich die Lösungsformen 2) systematisch entdecken, indem ich zunächst — was etwas mühsam ist — aus den vorstehenden beiden Gleichungen in Verbindung mit 1) das Symbol c eliminirte; aus der Resultante

$$0 = x_1\alpha\beta + x\alpha_1\beta_1 + y_1\alpha\beta_1 + y\alpha_1\beta + x_1y_1\alpha + xy\alpha_1 + x_1y\beta + xy_1\beta_1$$

hernach α oder β eliminirend gelangt man zu den Gleichungen

$$x_1y_1\alpha + xy\alpha_1 = 0, \quad x_1y\beta + xy_1\beta_1 = 0,$$

deren Auflösung nach α, β

$$\alpha = x_1y + s(x + y), \quad \beta = xy_1 + r(x + y_1)$$

die allgemeinsten Werte zeigt, welche für die Parameter α, β zu setzen sind, wenn man ein bestimmtes Paar von Wurzeln x, y erhalten will. Wird in diesen nun u für x und v für y geschrieben, so ergibt sich durch Einsetzen in die frühere Lösungsform notwendig eine solche, welche auch die Adventivforderung erfüllt, nämlich (wenn noch vollends nach den u, v entwickelt wird,) unsere Lösung 2).

Diese kann nun freilich noch vereinfacht werden. Nähme man z. B. $s = r$, so käme

$$x = ru + (r + u)(c_1v + cv_1),$$
$$y = v(cr_1 + c_1r + c_1u + cu_1) + c_1ru + cr_1u_1,$$

und ähnlich für $s = r_1$

$$x = u(cr + c_1r_1 + c_1v + cv_1) + c_1r_1v + crv_1,$$
$$y = r_1v + (r_1 + v)(c_1u + cu_1);$$

noch einfacher hätte man für r, s gleich 0, 0, resp. 0, 1; 1, 0 oder 1, 1 die Systeme der Lösungen:

$$3)\left\{\begin{array}{l|l|l|l}
x = u(c_1v + cv_1) & x = uv_1 + c_1v & x = uv + cv_1 & x = u + c_1v + cv_1 \\
y = uv + cu_1 & y = v + c_1u + cu_1 & y = v(c_1u + cu_1) & y = u_1v + c_1u \\
x_1 = u_1 + cv + c_1v_1 & x_1 = u_1v_1 + cv & x_1 = u_1v + c_1v_1 & x_1 = u_1(cv + c_1v_1) \\
y_1 = uv_1 + c_1u_1 & y_1 = v_1(cu + c_1u_1) & y_1 = v_1 + cu + c_1u_1 & y_1 = u_1v_1 + cu
\end{array}\right.$$

und auf ebendiese wird man auch geführt, wenn man die Werte der Luxusparameter r, s überhaupt irgendwie aus der Gruppe der Werte c, c_1, 0, 1 auswählt.

Jedes von diesen Systemen ist eine Darstellung der allgemeinsten Wurzeln der Gleichung 1) (nunmehr ohne überzählige Parameter), welche inbezug auf die wesentlichen Parameter u, v der Adventivforderung genügt. Allein es erscheint die Symmetrie in denselben nun dermassen verhüllt, dass man, wo es auf die Wahrung solcher ankommt, besser thut, die Lösungsform 2) und damit die Luxusparameter beizubehalten.

Aufgabe 15. Die allgemeinste Gleichung mit zwei Unbekannten x, y:

$$axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1 = 0 \tag{4}$$

nach diesen symmetrisch allgemein aufzulösen unter der Voraussetzung, dass die Resultante ihrer Elimination

$$abcd = 0 \tag{5}$$

erfüllt sei — Bd. 1, S. 515 $\cdots\cdot$ 519.

Auflösung. Das allgemeinste, auch der Adventivforderung genügende System von Wurzeln ist gegeben durch

$$\left\{\begin{aligned} x &= \{a_1 + (b_1r + cr_1)d\}uv + \{b_1 + (a_1s + ds_1)c\}uv_1 + \\ &\quad + (b_1 + a_1s + ds_1)cu_1v + (a_1 + b_1r + cr_1)du_1v_1 \\ y &= \{a_1 + (br + c_1r_1)d\}uv + (c_1 + a_1s + ds_1)buv_1 + \\ &\quad + \{c_1 + (a_1s + ds_1)b\}u_1v + (a_1 + br + c_1r_1)du_1v_1 \\ x_1 &= (d_1 + br + c_1r_1)auv + (c_1 + as + d_1s_1)buv_1 + \\ &\quad + \{c_1 + (as + d_1s_1)b\}u_1v + \{d_1 + (br + c_1r_1)a\}u_1v_1 \\ y_1 &= (d_1 + b_1r + cr_1)auv + \{b_1 + (as + d_1s_1)c\}uv_1 + \\ &\quad + (b_1 + as + d_1s_1)cu_1v + \{d_1 + (b_1r + cr_1)a\}u_1v_1, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

wo u, v die wesentlichen, r, s Luxusparameter vorstellen.

Beweis. Hiemit wird, zunächst ohne Rücksicht auf 5)

$$\begin{aligned} axy &= 0uv + abcds_1uv_1 + abcds_1u_1v + 0u_1v_1 \\ bxy_1 &= abcdr_1uv + 0uv_1 + 0u_1v + abcdr_1u_1v_1 \\ cx_1y &= abcdruv + 0uv_1 + 0u_1v + abcdru_1v_1 \\ dx_1y_1 &= 0uv + abcdsuv_1 + abcdsu_1v + 0u_1v_1; \end{aligned}$$

mit Rücksicht auf die Resultante verschwinden also alle vier Ausdrücke identisch, d. h. es stimmt die „Probe 1“, oder unsere Formeln 6) liefern uns stets richtige Wurzeln. „Probe 2“: Sei jetzt x, y irgend ein Paar von Wurzeln, für welche die Gleichung 4) von vornherein erfüllt ist. Falls es überhaupt ein solches gibt, so gilt dann auch die Gleichung 5). Dann muss gezeigt werden, dass für $u = x$, $v = y$ die beiden ersten Gleichungen 6) sich bewahrheiten. Setzt man aber x

für u, y für v in 6) ein, so kommt bei x das dritte und vierte, bei y das zweite und vierte Glied wegen 4) in Wegfall, und bleibt

$$x = \{a_1 + a(b_1 r + cr_1)d\}xy + \{b_1 + b(a_1 s + ds_1)c\}xy_1 = x(a_1 y + b_1 y_1)$$
$$y = \{a_1 + a(br + c_1 r_1)d\}xy + \{c_1 + c(a_1 s + ds_1)b\}x_1 y = y(a_1 x + c_1 x_1),$$

was durch Hinzufügung kraft 4) verschwindender Glieder übergeht in

$$x = x(a_1 y + b_1 y_1) + axy + bxy_1 = xy + xy_1 = x \cdot 1$$
$$y = y(a_1 x + c_1 x_1) + axy + cx_1 y = xy + x_1 y = 1 \cdot y,$$

mithin sich als richtig erweist.

Was endlich die Prüfung unserer Lösungen auf die Symmetrie betrifft, so führen die nachstehenden fünf Systeme von Vertauschungen (— und nur diese —) zwischen den Unbekannten unter sich und den Koeffizienten unter sich, nötigenfalls verbunden mit den dahinter stehenden Vertauschungen zwischen den Parametern, gleichwie die Gleichung 4) nebst 5), so auch das System der Lösungen 6) nur in sich selbst zurück:

$$7)\quad \begin{cases} (x,\ y)(x_1,\ y_1)(b,\ c) & (u,\ v)(u_1,\ v_1)(r,\ r_1) \\ (x,\ y_1)(x_1,\ y)(a,\ d) & (u,\ v_1)(u_1,\ v)(s,\ s_1) \\ (x,\ x_1)(a,\ c)(b,\ d) & (u,\ u_1)(r,\ s_1)(r_1,\ s) \\ (y,\ y_1)(a,\ b)(c,\ d) & (v,\ v_1)(r,\ s)(r_1,\ s_1) \\ (x,\ x_1)(y,\ y_1)(a,\ d)(b,\ c) & (u,\ u_1)(v,\ v_1)(r,\ r_1)(s,\ s_1) \end{cases}$$

Aus den in § 24 gefundenen Lösungsformen waren die obigen 6) leicht zu gewinnen vermittelst der nach Bd. 1, S. 519 nahegelegten Substitutionen:

$$\varkappa = uv + s(u + v), \quad \lambda = uv_1 + r(u + v_1), \quad \omega = uv_1 + u_1 v.$$

Statt dessen konnte man freilich auch den ganzen Herleitungsweg des § 24 von vorne gehen, indem man nur statt der dortigen Lösungsform der Aufgabe 12 die obige 2) benutzte. — Unsere Lösungsformen 6) verdienen aber jenen früheren gegenüber den Vorzug schon wegen der grösseren Einfachheit des Ausdrucks, und weil sie mit einem Parameter weniger, mit deren vier statt fünf, auskommen.

Nehmen wir wie oben die überzähligen Parameter r, s auf jede mögliche Weise gleich 0 oder 1 an, so tritt natürlich abermals erhebliche Vereinfachung ein, und ergeben sich die nachstehenden vier bemerkenswerten Lösungsformen:

$$8)\quad \begin{cases} x = (a_1 + cd)uv + (b_1 + cd)uv_1 + (b_1 + d)cu_1 v + (a_1 + c)du_1 v_1 \\ y = (a_1 + c_1 d)uv + b(c_1 + d)uv_1 + (bd + c_1)u_1 v + (a_1 + c_1)du_1 v_1 \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} x = (a_1 + cd)uv + (a_1 c + b_1)uv_1 + (a_1 + b_1)cu_1 v + (a_1 + c)du_1 v_1 \\ y = (a_1 + c_1 d)uv + (a_1 + c_1)buv_1 + (a_1 b + c_1)u_1 v + (a_1 + c_1)du_1 v_1 \end{cases}$$

$$10)\quad \begin{cases} x = (a_1 + b_1 d)uv + (b_1 + cd)uv_1 + (b_1 + d)cu_1 v + (a_1 + b_1)du_1 v_1 \\ y = (a_1 + bd)uv + b(c_1 + d)uv_1 + (bd + c_1)u_1 v + (a_1 + b)du_1 v_1 \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} x = (a_1 + b_1 d)uv + (a_1 c + b_1)uv_1 + (a_1 + b_1)cu_1 v + (a_1 + b_1)du_1 v_1 \\ y = (a_1 + bd)uv + (a_1 + c_1)buv_1 + (a_1 b + c_1)u_1 v + (a_1 + b)du_1 v_1, \end{cases}$$

deren jede die gleiche Allgemeinheit wie die 6) beansprucht. In diesen erscheinen freilich gewisse Koeffizientenpaare, nämlich c, d; resp. a, c; b, d; a, b, bevorzugt.

Zudem verdient aber noch eine Reihe von Spezialisirungen unserer Ergebnisse hervorgehoben und für den Gebrauch zurecht gelegt zu werden.

Exempel 1. $xy \Subset a$. Lösung: $x = u(a + v_1)$, $y = v(a + u_1)$. (Man setze in 6) a_1 für a und 0 für b, c, d).

Damit sind auch die symmetrisch allgemeinen Lösungen von

$axy = 0$ gegeben als: $x = u(a_1 + v_1)$, $y = v(a_1 + u_1)$.

Exempel 2. $x + y \Subset a$. Lösung: $x = au$, $y = av$.

Exempel 3, (zugleich Aufgabe 13 des § 24, Bd. 1, S. 515). $xy = a$. Lösung: $x = a + uv_1$, $y = a + u_1 v$.

Exempel 4. $x + y = a$. Lösung: $x = a(u + v_1)$, $y = a(u_1 + v)$.

Exempel 5. $xy_1 + x_1 y \Subset a$. Lösung:

$$\begin{cases} x\ = uv + (a+s)uv_1 + a_1 su_1 v = (a + s + v)u + a_1 svu_1 \\ y\ = uv + a_1 suv_1 + (a + s)u_1 v = (a + s + u)v + a_1 suv_1 \\ x_1 = a_1 s_1 uv_1 + (a + s_1)u_1 v + u_1 v_1 = a_1 s_1 v_1 u + (a + s_1 + v_1)u_1 \\ y_1 = (a + s_1)uv_1 + a_1 s_1 u_1 v + u_1 v_1 = a_1 s_1 u_1 v + (a + s_1 + u_1)v_1 \end{cases}$$

Speziell für $s = 0$ oder 1 hat man die Lösungsformen:

$$\begin{cases} x = (a+v)u, & x_1 = a_1 v_1 + u_1, \\ y = (a + u)v, & y_1 = a_1 u_1 + v_1 \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x = u + a_1 v, & x_1 = u_1(a + v_1) \\ y = v + a_1 u, & y_1 = v_1(a + u_1). \end{cases}$$

Exempel 6. Zu $xy_1 + x_1 y = a$, also $x = ay_1 + a_1 y$, $y = ax_1 + a_1 x$, liefert uns 6) die obigen Lösungen 2) der Aufgabe 12 wieder.

Wird in den zwei letzten Exempeln nur y, v mit y_1, v_1 vertauscht, so schreibt man aus dem angegebenen x und y_1 auch leicht noch ab die Lösungen der Aufgaben $xy + x_1 y_1 \Subset a$ resp. $= a$.

Exempel 7, (zugleich Aufgabe 14 in Bd. 1, S. 515.)

$$xy = a, \quad x_1 y_1 = b, \quad \text{wo} \quad ab = 0.$$

Aus der vereinigten Gleichung

$$(a_1 + b)xy + (a + b)(xy_1 + x_1 y) + (a + b_1)x_1 y_1 = 0$$

ersieht man, welche Einsetzungen in Schema 6) gemacht werden müssen. Man findet als Lösungen, die, im Gegensatz zu den in § 24 aufgestellten, nun auch der Adventivforderung genügen werden, nach nicht uninteressanten Zwischenrechnungen, unter Berücksichtigung auch der Resultante $ab_1 = a$ oder $a_1 b = b$:

$$\begin{cases} x = a + b_1\{uv_1 + r(u + v_1)\}, & x_1 = b + a_1\{u_1 v + r_1(u_1 + v)\} \\ y = a + b_1\{u_1 v + r_1(u_1 + v)\}, & y_1 = b + a_1\{uv_1 + r(u + v_1)\}. \end{cases}$$

Exempel 8. $xy = 0$, $x + y = 1$, oder $x = y_1$, $x_1 = y$, $xy + x_1 y_1 = 0$, gibt

$$x = uv_1 + r(u + v_1) = y_1, \quad y = u_1 v + r_1(u_1 + v) = x_1.$$

Exempel 9. $ax = b + y$, wo $b \Subset a$ oder $a_1 b = 0$, gibt die vereinigte Gleichung:

$$a_1 xy + ab_1 xy_1 + x_1 y + bx_1 y_1 = 0,$$

und damit gemäss 6) nach geringer Rechnung die Lösung:

$$x = b + auv + (a_1 + s)(uv_1 + u_1 v), \quad y = a\{uv + b_1 s(uv_1 + u_1 v) + bu_1 v_1\},$$

als deren einfachste Form wir — für $s = 0$ — haben:

$$x = b + auv + a_1(uv_1 + u_1 v), \quad y = a(uv + bu_1 v_1).$$

Damit wird — wegen $ab = b$ — in der That

$$ax = a(b + uv) = b + auv = b + y.$$

Exempel 10. $xy = a$, $b \Subset x + y$ gibt

$$a_1 xy + axy_1 + ax_1 y + (a + b)x_1 y_1 = 0$$

und zuerst:

$$\begin{cases} x = (a + br)uv + uv_1 + au_1 v + (a + br)u_1 v_1 \\ y = (a + br_1)uv + auv_1 + u_1 v + (a + br_1)u_1 v_1, \end{cases}$$

also einfacher:

$$\begin{cases} x = a + uv_1 + b(u + v_1)r, & x_1 = a_1\{u_1 v + (b_1 + r_1)(u_1 + v)\} \\ y = a + u_1 v + b(u_1 + v)r_1, & y_1 = a_1\{uv_1 + (b_1 + r)(u + v_1)\}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Problemlösungen thun oft gute Dienste. Nicht minder die nachfolgenden, die ich neu hinzufüge, — mit der in Bd. 1, § 24 begonnenen Numerirung der Aufgaben fortfahrend. Die Aufgaben sind durchweg Auflösungsprobleme mit einer beliebigen Menge von Unbekannten und sind jeweils so eingerichtet, dass sie keine Resultante liefern.

Sofern dabei Indizes für die in unbestimmter Anzahl, ja in endlicher oder auch unbegrenzter Menge vorkommenden Unbekannten x_λ (wo z. B. $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$) gebraucht werden und man sich nicht entschliessen will, dieselben als obere Indizes zu setzen, thut man gut, statt des dann unbequem anzuhängenden vertikalen den horizontal übergesetzten Negationsstrich zu verwenden.

Einer Unbekannten x_λ soll immer ein unbestimmtes Gebiet u_λ als wesentlicher Parameter entsprechen. Und alle Lösungen sollen der „Adventivforderung“ genügen derart, dass man aus ihnen ein gewünschtes System $x_\lambda (\lambda = 1, 2, 3, \cdots)$ von Wurzeln der Aufgabe durch die simultanen Annahmen $u_\lambda = x_\lambda$ (für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$) erhält.

Aufgabe 16 (Erweiterung von Aufg. 1 ⋯ 3 des § 24, Bd. 1, S. 499).

$$\Pi_\lambda x_\lambda = 0. \quad \text{Lösung:} \quad x_\lambda = u_\lambda \Sigma_\varkappa \bar{u}_\varkappa.$$

Probe 1. $\Pi_\lambda x_\lambda = \Pi_\lambda u_\lambda \Sigma_\varkappa \bar{u}_\varkappa = \Pi_\lambda u_\lambda \cdot \Sigma_\lambda \bar{u}_\lambda = 0.$

Probe 2. Ist $\Pi_\lambda x_\lambda = 0$, so folgt $\Sigma_\lambda \bar{x}_\lambda = 1 = \Sigma_\varkappa \bar{x}_\varkappa$, und folglich $x_\lambda \Sigma_\varkappa \bar{x}_\varkappa = x_\lambda \cdot 1 = x_\lambda$.

Die Symmetrie des Lösungssystems ist evident.

Aufgabe 17. $\Pi_\lambda x_\lambda \subseteq a$. (Erweiterung der vorigen.)

$$\text{Lösung:} \quad x_\lambda = u_\lambda (a + \Sigma_\varkappa \bar{u}_\varkappa), \quad \bar{x}_\lambda = \bar{u}_\lambda + \bar{a}\, \Pi_\varkappa u_\varkappa.$$

Wie leicht zu sehen, stimmen beide Proben.

Dass auch Lösungen mit noch mehr Parametern aufgestellt werden können, zeigt z. B. die Annahme $a = \Sigma_\lambda \bar{b}_\lambda$. Hier lässt sich die Aufgabe ansetzen als:

$$\Pi_\lambda b_\lambda x_\lambda = 0,$$

und man entdeckt unschwer unter Berufung auf Aufg. 16 die Lösung

$$x_\lambda = \bar{b}_\lambda \beta_\lambda + b_\lambda \alpha_\lambda \gamma \Sigma_\varkappa (\bar{b}_\varkappa + \bar{\alpha}_\varkappa), \quad \bar{x}_\lambda = b_\lambda (\bar{\alpha}_\lambda + \bar{\gamma}) + \bar{b}_\lambda \bar{\beta}_\lambda + \Pi_\varkappa b_\varkappa \alpha_\varkappa$$

worin die α_λ, β_λ und γ willkürlich.

Unbedingt stimmt hier die Probe 1, und auch die Probe 2 bei der Annahme $\gamma = 1$, $\alpha_\lambda = \beta_\lambda = x_\lambda$.

Aufgabe 18. $\Sigma_\lambda a_\lambda x_\lambda \subseteq \Sigma_\lambda a_\lambda b_\lambda$.

Lösung: $x_\lambda = u_\lambda (\bar{a}_\lambda + \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa)$.

Probe 1. Es wird $\Sigma_\lambda a_\lambda x_\lambda = \Sigma_\lambda a_\lambda u_\lambda \cdot \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa \subseteq \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa$.

Probe 2. Ist die Aufgabensubsumtion erfüllt, so folgt:

$$x_\lambda = x_\lambda (\bar{a}_\lambda + \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa),$$

indem wegen

$$\Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa = \Sigma_\varkappa a_\varkappa x_\varkappa + \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa$$

hierin der letzte Addend um den vorhergehenden vermehrt werden darf; dann findet sich aber rechts x_λ mit $\bar{a}_\lambda + a_\lambda$ oder 1 multiplizirt.

Die Herleitung ist hier sehr leicht zu bewerkstelligen; es ist nämlich nach (3_+) gestattet, in der Aufgabensubsumtion das Summenzeichen linkerhand wegzulassen, so dass folgt:

$$a_\lambda x_\lambda \subseteq \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa \quad \text{oder} \quad x_\lambda \subseteq \bar{a}_\lambda + \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa. \quad \text{Usw.}$$

Aufgabe 19. $\Sigma_\lambda a_\lambda b_\lambda \subseteq \Sigma_\lambda a_\lambda x_\lambda$.

Die Lösung ist:

$$x_\lambda = u_\lambda + \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa \cdot \Pi_\nu(\bar{a}_\nu + \bar{u}_\nu),$$

wo beide Proben stimmen; die erste, indem sich leicht

$$\Sigma_\lambda a_\lambda x_\lambda = \Sigma_\lambda a_\lambda u_\lambda + \Pi_\nu(\bar{a}_\nu + \bar{u}_\nu) \cdot \Sigma_\lambda(a_\lambda \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa) = \Sigma_\lambda a_\lambda(u_\lambda + \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa) =$$
$$= \Sigma_\lambda a_\lambda(u_\lambda + b_\lambda)$$

herausstellt, die zweite auf den ersten Blick, indem für $u_\lambda = x_\lambda$ der letzte Term unseres x_λ verschwindet.

Um zu zeigen, wie auch solche Aufgaben aufgrund des früheren oft schon systematisch gelöst werden können, kontraponiren wir die Aufgabe in

$$\Pi_\lambda(\bar{a}_\lambda + \bar{x}_\lambda) \Subset \Pi_\lambda(\bar{a}_\lambda + \bar{b}_\lambda),$$

woraus ersichtlich, dass nach dem Schema der Aufgabe 17 zunächst der allgemeine Wert des Faktors $\bar{a}_\lambda + \bar{x}_\lambda$ angebbar ist. Zu dem Ende muss das dortige Prädikat a durch die rechte Seite hier ersetzt werden, ausserdem aber, um die Adventivforderung zu wahren, das dortige u_λ hier durch $\bar{a}_\lambda + \bar{u}_\lambda$, — gleichwie die dortige Unbekannte x_λ hier vertreten erscheint durch $\bar{a}_\lambda + \bar{x}_\lambda$. Dies gewährt uns zugleich den Vorteil, dass in dem sich ergebenden Ausdrucke für $\bar{a}_\lambda + \bar{x}_\lambda$ keine Resultante der Elimination von x_λ mehr zu berücksichtigen sein wird. Man findet

$$\bar{a}_\lambda + \bar{x}_\lambda = (\bar{a}_\lambda + \bar{u}_\lambda)\{\Pi_\varkappa(\bar{a}_\varkappa + \bar{b}_\varkappa) + \Sigma_\varkappa a_\varkappa u_\varkappa\}, = c,$$

wo c nur für den Augenblick zur Abkürzung dient, und hat nun als Lösung nach x einer Gleichung $\bar{a} + \bar{x} = c$, deren Resultante $a\bar{c} = 0$ schon erfüllt ist, somit der Gleichung $acx + \bar{c}\bar{x} = 0$:

$$x = \bar{c}\bar{u} + (\bar{a} + \bar{c})u = \bar{c} + \bar{a}u.$$

Es folgt somit

$$x_\lambda = a_\lambda u_\lambda + \Sigma_\varkappa a_\varkappa b_\varkappa \cdot \Pi_\nu(\bar{a}_\nu + \bar{u}_\nu) + \bar{a}_\lambda u_\lambda$$

wie oben angegeben.

Aufgabe 20. $\quad \Sigma_\lambda a_\lambda x_\lambda = \Sigma_\lambda a_\lambda b_\lambda.$

Lösung: $x_\lambda = \Pi_\varkappa(\bar{a}_\varkappa + \bar{u}_\varkappa) \cdot \Sigma_\nu a_\nu b_\nu + \Sigma_\nu a_\nu b_\nu \cdot u_\lambda + u_\lambda \bar{a}_\lambda.$

Probe 1. $\Sigma_\lambda a_\lambda x_\lambda = \Pi_\varkappa(\bar{a}_\varkappa + \bar{u}_\lambda) \cdot \Sigma_\nu a_\nu b_\nu + \Sigma_\nu a_\nu b_\nu \cdot \Sigma_\lambda a_\lambda u_\lambda = \Sigma_\nu a_\nu b_\nu,$ weil $\Sigma_\lambda a_\lambda \cdot \Sigma_\nu a_\nu b_\nu = \Sigma_\nu a_\nu b_\nu$ ist und sich hernach die $\Sigma_\lambda a_\lambda u_\lambda$ mit dem $\Pi_\varkappa$ zu 1 ergänzt.

Probe 2. Ist die Aufgabengleichung als Voraussetzung erfüllt, so muss sein

$$x_\lambda = \Pi_\varkappa(\bar{a}_\varkappa + \bar{x}_\varkappa)\, \Sigma_\nu a_\nu b_\nu + \Sigma_\nu a_\nu b_\nu \cdot x_\lambda + x_\lambda \bar{a}_\lambda,$$

indem das erste Glied rechterhand verschwindet und alsdann bleibt:

$$x_\lambda = x_\lambda(\Sigma_\varkappa a_\varkappa x_\varkappa + \bar{a}_\lambda),$$

was durch Hervorhebung des dem Werte $\varkappa = \lambda$ entsprechenden Gliedes der $\Sigma_\varkappa$ leicht zu verifiziren ist.

Gefunden habe ich die Lösung, indem ich die Aufgabengleichung rechts auf 0 brachte, aus ihrem Polynome blos die Glieder hervorhob, welche ein bestimmtes x_λ und dessen Negat $\bar{x}_\lambda$ zum Faktor haben, — ohne im Ansatz der Koeffizienten dieser beiden Symbole ihre tautologische Wiederholung zu scheuen, — und endlich die so gewonnene Gleichung nach bekanntestem Schema nach x_λ auflöste, rechterhand alle x_λ durch die entsprechenden u_λ ersetzend.

Jeder Versuch, zur Lösung dieses Problems die bereits ermittelten Lösungen der beiden vorhergehenden Aufgaben zu benutzen, scheint dagegen in einen Zirkel zu führen.

Der Ausdruck unserer Unbekannten x_λ ist von der Form

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta = (\alpha + \gamma)(\gamma + \beta)(\beta + \delta),$$

wonach auch deren Negat $\bar{x}_\lambda$ in ähnlicher Form

$$\bar{\alpha}\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\delta} = (\bar{\alpha} + \bar{\beta})(\bar{\beta} + \bar{\gamma})(\bar{\gamma} + \bar{\delta})$$

leicht hingeschrieben werden kann.

Eine beachtenswerte Vereinfachung des Ausdrucks für x_λ tritt ein in dem Partikularfalle des Problems, wo alle $b_\lambda = 1$ sind. Alsdann nämlich zieht sich der Koeffizient $\bar{a}_\lambda$ mit dem aus der vorhergehenden $\Sigma'_\nu a_\nu$ stammenden a_λ zu 1 zusammen, und es ergibt sich

$$x_\lambda = u_\lambda + \Pi_\varkappa(\bar{a}_\varkappa + \bar{u}_\varkappa) \cdot \Sigma_\nu a_\nu$$

als die symmetrisch allgemeine Lösung der Gleichung

$$\Sigma_\lambda a_\lambda x_\lambda = \Sigma_\lambda a_\lambda.$$

Aufgabe 21. Beliebig viel zu einander disjunkte Gebiete auf die allgemeinste Weise zu bestimmen. (Erweiterung der Aufgabe 8 des § 24, Bd. 1, S. 509). Die Lösungen lauten:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4\cdots + \bar{u}_1u_2u_3u_4\cdots,\\
x_2 &= \bar{u}_1u_2\bar{u}_3\bar{u}_4\cdots + u_1\bar{u}_2u_3u_4\cdots,\\
x_3 &= \bar{u}_1\bar{u}_2u_3\bar{u}_4\cdots + u_1u_2\bar{u}_3u_4\cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Hier wird in der That $x_\varkappa x_\lambda = 0$, sobald $\varkappa \neq \lambda$. Und wenn x_1x_2, x_1x_3, $x_1x_4, \cdots x_2x_3, \cdots = 0$ ist, so muss auch

$$x_1 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\cdots + \bar{x}_1x_2x_3x_4\cdots = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\cdots$$

sein, indem das zweite Glied verschwindet, sodann wegen $x_1 \Subset \bar{x}_2$ auch $x_1\bar{x}_2 = x_1$, etc. sein wird, u. s. w.

Aufgabe 22. (Verallgemeinerung der Bd. 1, S. 508 für $n = 3$ gelösten Aufgabe 7 des § 24.)

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n + \cdots + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\cdots\bar{x}_{n-1}x_n = 0.$$

Auflösung. Wendet man auf x_1 als Unbekannte das wolbekannte Schema

$$(ax + b\bar{x} = 0) \Leftarrow (x = b\bar{x} + \bar{a}x)$$

an, so entsteht

$$x_1 = \bar{x}_1(x_2\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n + \bar{x}_2x_3\bar{x}_4\cdots\bar{x}_n + \cdots + \bar{x}_2\cdots\bar{x}_{n-1}x_n) + x_1(x_2 + x_3 + \cdots x_n),$$

und wenn man rechterhand die x durch arbiträre Parameter u ersetzt, so hat man schon mit diesem ersten Schritt unserer Methode für die erste Unbekannte die gesuchte Lösung, — woraus sich die Werte der übrigen Unbekannten nach der Symmetrie abschreiben lassen. Das System der allgemeinen Wurzeln ist mithin:

$$x_1 = u_1(u_2 + u_3 + \cdots + u_n) + \bar{u}_1(u_2\bar{u}_3\cdots\bar{u}_n + \bar{u}_2u_3\bar{u}_4\cdots\bar{u}_n + \cdots + \bar{u}_2\cdots\bar{u}_{n-1}u_n)$$
$$x_2 = u_2(u_1 + u_3 + \cdots + u_n) + \bar{u}_2(u_1\bar{u}_3\cdots\bar{u}_n + \bar{u}_1u_3\bar{u}_4\cdots\bar{u}_n + \cdots + \bar{u}_1\bar{u}_3\cdots\bar{u}_{n-1}u_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = u_n(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}) +$$
$$+ \bar{u}_n(u_1\bar{u}_2\cdots\bar{u}_{n-1} + \bar{u}_1u_2\bar{u}_3\cdots\bar{u}_{n-1} + \cdots + \bar{u}_1\bar{u}_2\cdots\bar{u}_{n-2}u_{n-1})$$
$$\bar{x}_1 = u_1\bar{u}_2\bar{u}_3\cdots\bar{u}_n + \bar{u}_1(u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4 + \cdots + u_{n-1}u_n + \bar{u}_2\bar{u}_3\cdots\bar{u}_n)$$
$$\bar{x}_2 = u_2\bar{u}_1\bar{u}_3\cdots\bar{u}_n + \bar{u}_2(u_1u_3 + u_1u_4 + u_3u_4 + \cdots + u_{n-1}u_n + \bar{u}_1\bar{u}_3\cdots\bar{u}_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{x}_n = u_n\bar{u}_1\bar{u}_2\cdots\bar{u}_{n-1} +$$
$$+ \bar{u}_n(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 + \cdots + u_{n-2}u_{n-1} + \bar{u}_1\bar{u}_2\cdots\bar{u}_{n-1}).$$

Der Bildung der Negationen liegt der leicht erweisliche Satz zum Grunde, dass die Negation von

$$a_1\bar{a}_2\bar{a}_3\cdots\bar{a}_n + \bar{a}_1a_2\bar{a}_3\cdots\bar{a}_n + \cdots + \bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_{n-1}a_n,$$

nämlich

$$(\bar{a}_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)(a_1 + \bar{a}_2 + a_3 + \cdots + a_n)\cdots(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \bar{a}_n) =$$
$$= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + \bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_n$$

ist, — wo man sich behufs Nachweises nur zu überzeugen braucht, dass a_1a_2 als Glied in jedem Faktor enthalten ist und die übrigen Partialprodukte, in denen a_1 und a_2 vorkommen, sonach absorbiren wird, sowie dass die Partialprodukte mit nur einem unnegirten Faktor, wie $\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ verschwinden.

Nach dem oben angezogenen Schema stimmt nun jedenfalls die Probe 2 und bleibt also blos noch die Probe 1 zu machen, d. h. nachzusehen, dass in der That bei ganz beliebigen u_λ z. B. $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\cdots\bar{x}_n = 0$ wird. Zu dem Ende wird man am besten $\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n$ auch nach u_1 entwickeln und darnach durchmultipliziren. Man hat

$$\bar{x}_2 = u_1\bar{u}_2(u_3 + u_4 + \cdots + u_n) + \bar{u}_1\{\bar{u}_2(u_3u_4 + \cdots + u_{n-1}u_n) + \bar{u}_3\bar{u}_4\cdots\bar{u}_n\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{x}_n = u_1\bar{u}_n(u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}) + \bar{u}_1\{\bar{u}_n(u_2u_3 + \cdots + u_{n-2}u_{n-1}) + \bar{u}_2\bar{u}_3\cdots\bar{u}_{n-1}\}$$

und es verschwindet in unserm Produkt nicht nur der Term mit u_1, — weil in seinem Koeffizienten der Faktor $u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ zusammentrifft mit dem in Überschiebung sich bildenden $\bar{u}_2\bar{u}_3 \cdots \bar{u}_n$, — sondern auch der Term mit $\bar{u}_1$; denn z. B. $u_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \cdots \bar{u}_n$, durch den Faktor in Klammern { } aus $\bar{x}_2$ unverändert gelassen, trifft in den Klammern { } aus den übrigen $\bar{x}$ zusammen entweder mit einem zweiten Gliede, das den Faktor $\bar{u}_2$ aufweist, oder mit einem ersten Gliede, und darin je mit einem Produkte zweier unnegirten u, deren mindestens eines in ihm negirt vorkommt.

Das vorstehende Problem und seine Lösung konziser darzustellen, würde erst mit dem Bezeichnungskapital des Bd. 3 ermöglicht.

Aufgabe 23. Der Forderung

$$\Sigma_\lambda(x_\lambda = a_\lambda) = 1$$

symmetrisch auf die allgemeinste Weise zu genügen. Es sollen also die Unbekannten x_λ so bestimmt werden, dass *mindestens eine* derselben dem ihr zugeordnet gegebenen Werte a_λ gleich ist.

Die Auflösung lässt sich wenigstens für den im Hinblick auf Bd. 3 besonders wichtigen Fall geben, wo die vorkommenden Symbole a, x, u sämtlich (wie Aussagen) *auf den Wertbereich 0, 1 beschränkt* sein sollen. Sie lautet alsdann:

$$x_\lambda = u_\lambda \Sigma_\varkappa(a_\varkappa u_\varkappa + \bar{a}_\varkappa \bar{u}_\varkappa) + a_\lambda \Pi_\varkappa(\bar{a}_\varkappa u_\varkappa + a_\varkappa \bar{u}_\varkappa),$$

womit, da rechts die $\Sigma_\varkappa$ und das $\Pi_\varkappa$ Negate von einander sind,

$$\bar{x}_\lambda = \bar{u}_\lambda \Sigma_\varkappa + \bar{a}_\lambda \Pi_\varkappa$$

einfach wird.

Probe 1. Mit vorstehenden Werten der Unbekannten wird

$$\Pi_\lambda(\bar{a}_\lambda x_\lambda + a_\lambda \bar{x}_\lambda) = \Pi_\lambda(\bar{a}_\lambda u_\lambda + a_\lambda \bar{u}_\lambda) \cdot \Sigma_\varkappa(a_\varkappa u_\varkappa + \bar{a}_\varkappa \bar{u}_\varkappa) = 0,$$

und jeder Faktor des Produkts zur Linken kann bei der statuirten Einschränkung des Wertbereiches auch nur einen der Werte 0 und 1 haben. Verschwinden kann daher das Produkt nur dadurch, dass mindestens einer seiner Faktoren 0 wird. Daher ist mindestens für ein λ nun $\bar{a}_\lambda x_\lambda + a_\lambda \bar{x}_\lambda = 0$, d. h. $x_\lambda = a_\lambda$, wie immer die Werte u_λ auch als 1 oder 0 angenommen sein mochten.

Probe 2. Ist ein $x_\lambda = a_\lambda$, d. h. für wenigstens ein λ auch $\bar{a}_\lambda x_\lambda + a_\lambda \bar{x}_\lambda = 0$, so verschwindet für $u = x$ das $\Pi_\varkappa$ und wird die $\Sigma_\varkappa$ gleich 1, womit sich die Lösung als $x_\lambda = x_\lambda \cdot 1 + a_\lambda \cdot 0$ bewahrheitet.

Wie man leicht sieht, ist die Lösung so beschaffen, dass wenn zufällig ein $u_\varkappa = a_\varkappa$ ist, dann auch $x_\varkappa = u_\varkappa = a_\varkappa$ wird, während die übrigen $x_\lambda = u_\lambda$ beliebig bleiben. Ist dagegen kein $u_\varkappa$ gleich dem zugehörigen $a_\varkappa$, so werden *alle* x_λ bezüglich gleich den a_λ.

Die hiemit abgeschlossene (wol noch vermehrungsfähige und ergänzungsbedürftige) Reihe von Problemen umfasst diejenigen, auf deren vorgängige, propädeutische Erledigung mich die Versuche hingedrängt haben, die schwierigen Auflösungsaufgaben des dritten Bandes zu bewältigen. Sie sind, wie gesagt, nur in heuristisch-methodologischer Hinsicht von Belang, blos für den Forscher bei Entdeckungsfahrten auf diesem Gebiete unentbehrlich.

Umgekehrt wird mit jedem Auflösungsproblem in der Algebra der Relative implicite auch eines der Probleme „symmetrisch allgemeiner Lösungen“ seine Erledigung finden wenigstens für den Fall, wo sämtliche Unbekannten und Bekannten auf den Bereich der beiden Werte 0 und 1 eingeschränkt sind.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

§ 52. Rückblick nebst Ergänzungen aus dem neueren Literaturzuwachse. Kritisches und Antikritisches.

Nachdem wir so mancherlei Methoden zur Lösung logischer Probleme teils flüchtig gestreift, teils eingehend betrachtet haben, dürfte ein in Kürze das Wesentliche zusammenfassender Rückblick von Nutzen sein, — umsomehr als auch noch einige Nachträge unterzubringen sind, welche die inzwischen angewachsene Literatur und erweiterte Literaturkenntniss dem Verfasser aufdrängt.

Als *elementaren* Teil des Logikgebäudes stellten wir hin: die *Logik der Umfangsbeziehungen* zwischen *absoluten* Begriffen, d. h. solchen Begriffen, zu deren Darstellung schon „absolute Namen" (Bd. 1, S. 76) ausreichen. Die Umfänge solcher absoluten Begriffe können schlechtweg als *„Klassen"* bezeichnet werden, die Disziplin somit als der *„identische Kalkul mit Klassen"*, kurz als *„Klassenkalkul"*. Zugänglich dieser Disziplin und ihren Gesetzen unterworfen sind alle diejenigen Urteile, — universale oder partikulare, — zu deren Aufstellung immer nur *ein* Individuum der Subjektklasse *auf einmal* dem Geiste gegenwärtig zu sein und vorgestellt zu werden braucht.

Sagt man z. B. „Alle Planeten bewegen sich in Ellipsen" oder „Einige Planeten haben Monde", so braucht man doch an nicht mehr als *einen* Planeten dabei zu denken, wogegen ein Urteil wie „Die Planeten stören einander" gar nicht erfasst werden könnte, ohne dass man sich *mehrere* Individuen der Subjektklasse gleichzeitig vorstellte, um eben zwischen ihnen eine Beziehung zu denken, die keine „Umfangsbeziehung" in Hinsicht des Planetenbegriffes ist.

Hierin liegt gewiss von vorn herein eine ungeheure Beschränkung unserer Disziplin, — wie namentlich im dritten Bande zu sehn sein wird, wo wir, uns von der Beschränkung befreiend, über die Disziplin hinausgehen. Solches Zugeständniss thut indess der fundamentalen Bedeutung und Wichtigkeit unseres elementaren Teils der Logik keinen Eintrag. Schloss derselbe doch in sich die ganze scholastische Syllogistik und in der That auch fast die ganze traditionelle Logik, sofern man diese von ihren zahlreichen metaphysischen und psychologischen Beimengungen gereinigt fasst.

Anstatt die Individuen einer Klasse *generell* zusammenzufassen, behufs *distributiver Verwendung des die Klasse kennzeichnenden Namens*, kann man sie auch *kollektiv* zusammenfassen zu einem *Systeme*, einem *Gebiete* oder einer *Menge*, u. s. w; m. a. W. man kann auch die Klasse als ein *Ganzes* denken, von dem Individuen und Unterklassen die *Teile* vorstellen. So war der Klassenkalkul zugleich ein „Gebietekalkul" oder ein „Kalkul mit Systemen", der sich durch Diagramme oder Figuren leicht veranschaulichen liess und deshalb propädeutisch in den Vordergrund gestellt wurde.

Auf den elementaren wird als ein höherer Teil (mit Bd. 3) zu folgen haben: die *Logik der Beziehungen* überhaupt. Auch diese hat — zum voraus sei es gesagt — ihre Entwicklung allein gefunden als eine *Umfangs*logik, und zwar vornehmlich durch die Leistungen von A. De Morgan und Ch. S. Peirce, durch welche sich die Disziplin zu einer „*Algebra der Relative*" gestaltete. Ein „Relativ", wie „Ursache von —", „Teiler von —", etc. ist *der Umfang* des zugehörigen (relativen) Begriffes.

Das Verhältniss der Theorie der Relative zum elementaren Teile der Logik weist viele Analogien auf mit dem Verhältnisse der höhern Analysis, der Infinitesimalrechnung, zur sogenannten niedern, der Arithmetik und Algebra u. s. w., namentlich im Hinblick auf die vergleichende Wertschätzung und den Umfang der Anwendungssphäre beider Disziplinen, deren eine hier wie dort eine Tochterdisziplin der andern ist. Obendrein ist aber in den logischen Disziplinen auch die Wurzel der arithmetischen zu suchen. Von der (Beziehungen-) Logik hat nämlich die Logik der Beziehungen des *eindeutigen Entsprechens*, der *Zuordnung* oder *Abbildung* schon weitaus die reichste Entfaltung gewonnen in Gestalt der Arithmetik, Analysis und Funktionenlehre selbst, d. i. der reinen Mathematik (im engsten Sinne). Dagegen bleibt noch nachzuweisen deren Ursprung in der allgemeinen Logik (der Relative), — ein Nachweis, den unser dritter Band — neben anderm — zu liefern unternimmt.

Im elementaren Teil unterschieden wir zwei Etappen oder Stufen.

Auf ihrer ersten Stufe besitzt die Umfangslogik der absoluten Begriffe als *Beziehungszeichen* nur das Subsumtions- und das Gleichheitszeichen, nicht aber deren Verneinungen; sie entbehrt hier noch einer sozusagen „verneinenden Kopula."

Demzufolge sind ihr ausschliesslich zugänglich: die (bejahenden und verneinenden) *universalen* Urteile, und, als wesentlich auf dasselbe hinauslaufend, auch die *verneinenden Existenzialurteile*. Man kann die erste Logikstufe geradezu als die Logik der universalen Urteile (innerhalb des elementaren Teiles natürlich) bezeichnen. Ihr war unser Bd. 1 ausschliesslich gewidmet.

Als ein Sonderfall ordnet ihr sich ein: der *Aussagenkalkul*, als ein auf den Bereich der beiden „Wahrheitswerte" 0 („falsch") und 1 („wahr") beschränkter Klassenkalkul. Die zu verneinende Frage, ob dieser Aussagenkalkul auf einen umfassenderen Wertbereich sich ausdehnen lasse, wie von gewissen Seiten behauptet ist, wird uns noch im nächsten Paragraphen beschäftigen. Da somit uns stets

$$(A \neq 1) = (A = 0)$$

zu gelten haben wird, können wir sagen, dass auch der Aussagenkalkul von durchaus universalem Charakter ist.

Auf der zweiten Stufe gelangt die elementare Logik durch Zuhilfenahme auch einer „verneinenden Kopula" erst in den Stand, die *partikularen* Urteile, affirmative sowol als negative, sowie die *bejahenden Existenzialurteile* einzukleiden und die auf sie bezüglichen Schlussfolgerungen in ihre Gewalt zu bekommen.

Für jede der beiden elementaren Logikstufen gibt es zwei fundamentale Probleme, ein allgemeines *Eliminations*problem und ein allgemeines *Auflösungs*problem, deren letzteres die vorgängige Bewältigung des ersteren fordert. Für die erste Stufe haben beide Probleme — allerdings nur bei „endlicher" Menge von Eliminanden resp. Unbekannten — ihre Lösung bereits vollständig gefunden.

Für die zweite Stufe schien das Auflösungsproblem an Wichtigkeit gegen das Eliminationsproblem zurückzutreten, — jedoch nur, um in bedeutend erweiterter Fassung im dritten Bande wieder zu seinem Recht zu gelangen.

Weitaus die meisten der bislang zur Lösung aufgestellten „Methoden" beziehen sich auf die genannten beiden Probleme nur für die erste Stufe.

Das primitivste, kunstloseste Verfahren ist die Methode von Jevons — der Zeit nach die zweite. Sie zerhackt die Prämissen in kleinste Stücke, sozusagen Atome (Boole's „Konstituenten" in Hinsicht *aller* Klassensymbole), um darnach das zur Lösung Erforderliche aus ihnen herauszuklauben und (mühsam) zusammenzuleimen. Dabei entbehrt sie noch der allgemeinen Schemata Boole'scher „Entwicklung" nach bestimmten von den Symbolen.

Eng schliesst sich an sie an das graphische Verfahren von Venn und Scheffler — mit dem Fortschritt, dass man schon etwas mehr von dem, was dort zu zerhacken gewesen, nunmehr beisammen lassen kann.

Auch gehört hierher das *Auflösungs*verfahren (aber nicht das Eliminationsverfahren) von Boole selbst noch insofern, als dabei die durch Rechnen gefundenen Ausdrücke für die Unbekannten zu „entwickeln" sind nach jenen Konstituenten (in Hinsicht wenigstens der beim Problem gegebenen Klassen).

Als nicht sehr erhebliche Modifikation dieses Verfahrens schliesst sich neuerdings an: Herrn Macfarlane's[9] „logisches Spektrum."

Die Konstituenten werden durch schmale Rechtecke von gleicher Höhe dargestellt, die sich zu einem horizontalen Band oder Streifen aneinanderschliessen, so dass ein Schema entsteht, welches von ferne an das Sonnenspektrum mit seinen Fraunhofer'schen Linien erinnert. Die linkseitige Hälfte des Streifens ist z. B. mit a überschrieben, die rechtseitige mit a_1; von jeder dieser Hälften ist wieder die linke Hälfte mit b überschrieben, die rechte mit b_1, und so fort. Ein solches nach den *gegebenen* Klassen eingeteiltes Spektrum wird aufgestellt für eine jede der gesuchten Unbekannten x, y, $\cdots$.

Das Feld eines Konstituenten wird weiss gelassen, wenn seine Klasse durch die Data als ganz enthalten gesetzt ist in der dem Spektralstreifen zugeordneten unbekannten Klasse, sage z. B. in x; es wird schwarz bedruckt, wenn der Konstituent ganz von x ausgeschlossen ist, dagegen schraffirt, falls der Konstituent kraft der Data verschwinden muss; endlich wird das Feld des Konstituenten nur zur einen (z. B. untern) Hälfte geschwärzt da, wo die Data es offen, unbestimmt lassen, ob alles, einiges oder nichts von seiner Klasse zu x gehöre.

Über diese Fragen entscheiden aber die Koeffizienten der Boole'schen „Entwicklung", und Herrn Macfarlane's Modifikation in des letzteren Verfahren besteht blos darin, dass er die Wertsysteme $1, 1, \cdots 0, 0, \cdots$, welche nach Boole für die gegebenen Klassen jeweils einzusetzen sind in die nach x, y, $\cdots$ *aufgelösten* Gleichungen, statt dessen lieber einsetzt in die noch nicht aufgelösten, ursprünglichen Prämissengleichungen, — um diese dann in jedem einzelnen Falle gesondert nach den Unbekannten (arithmetisch) aufzulösen, wo sie allerdings nur Einsen oder Nullen zu Koeffizienten haben werden, und die allgemeine Auflösung umgangen ist. In seinem Beispiel thut er dies in 64 Fällen!

Sein Gedankengang ist: wenn der Konstituent, dessen Koeffizienten im Ausdrucke von x wir eben suchen, gleich 1 (d. i. gleich der ganzen Mannigfaltigkeit) wäre, wo dann alle übrigen Konstituenten verschwinden müssten, so wäre x gleich diesem Koeffizienten. Der letztere muss also gleich dem Werte von x sein, der sich unter der genannten Voraussetzung ergibt.

Natürlich kommen bei den Einzelauflösungen verschiedene Fälle vor: neben dem Wert 0 oder 1 der Unbekannten (und somit auch des gesuchten Koeffizienten) auch ihre Unbestimmtheit, durch die Gleichung $0 = 0$ sich kundgebend, ihre Unmöglichkeit, durch $0 = 1$ charakterisirt, und Werte wie $\frac{1}{2}$, logisch bedeutungslos, — wobei der betreffende Konstituent für sich verschwinden muss. —

Der Arbeit gegenüber ist der Wunsch am Platze, es möchten neuere

Autoren auf dem Felde der rechnenden Logik, anstatt fort und fort Boole's veraltete Methode zu variiren oder zu manieriren, sich doch nicht länger der Einsicht verschliessen, dass wir längst über eine Reihe von sehr viel besseren Prozeduren verfügen, — und verdienen Frau Franklin-Ladd's Worte[2] p. 560 zur Beherzigung empfohlen zu werden:

„Der Logiklehrer, welcher immer noch glaubt, Boole's mühsame Methoden darlegen zu müssen zu irgend andern als zu historischen Zwecken, schädigt seine Schüler ernstlich."

Diesen genannten Methoden stehen andre gegenüber, welche im Gegenteil die sämtlichen Prämissen zu einer einzigen *Gesamtaussage* erst zusammenfassen, um an dieser die Elimination und Auflösung zu vollziehen.

Wesentlich kommen alle diese hinaus auf Boole's Eliminationsverfahren (der Zeit nach die erste Methode) und auf dessen von mir modifizirtes Auflösungsverfahren (der Zeit nach die dritte zuweilen so genannte „Methode"), — wo nicht, noch minder vollkommen, auf Boole's Entwicklungsschemata oder deren duale Gegenstücke.

Man kann aber vier Manieren bei diesem Verfahren unterscheiden, nämlich *zwei Hauptmanieren*, die sich wieder in je *zwei Untermanieren* scheiden.

Die Untermanieren ergeben sich, je nachdem man vorzieht, das Polynom der „vereinigten" oder Gesamt-Aussage („Äquivalente" — sc. mit dem Prämissensystem, wie Voigt sie nennt) jeweils in Aggregatform anzusetzen, d. h. als Summe von Produkten aus lauter einfachen Symbolen, oder aber in der dazu dualen Form eines Produktes von Summen einfacher Symbole.

Die Hauptmanieren wurzeln in den folgenden beiden Möglichkeiten: Entweder man bringt sämtliche Prämissen *rechts* auf *Null*, (die Subsumtionen also auf das *Prädikat* 0), — wie ich es in der Regel vorziehe. Oder man operirt mit *links* durchweg auf *Eins* (bez. auf das *Subjekt* 1) gebrachten Subsumtionen und Gleichungen, — wie dies Mitchell[1] vorgezogen, dem auch Herr Voigt[1], (soweit die erste Stufe in Betracht kommt,) sich beigesellt, — desgleichen, wie ich neuerdings ersehe, (wiederum in andrer Weise) Herr Poretzki.

Jenes, das Umschreiben jeder Subsumtion $a \Subset b$ in $ab_1 \Subset 0$, heisst im Grunde nur: sich vergegenwärtigen, was alles nach den Daten des Problems für ausgeschlossen, unzulässig, unmöglich erklärt wird; hier: es gibt nichts, was a und nicht b wäre.

Dieses, das Transcribiren derselben Subsumtion in die $1 \Subset a_1 + b$, heisst dagegen: sich gegenwärtig halten alles, was nach den Daten noch zulässig bleibt: das Mögliche ist entweder nicht-a oder es ist b.

Dort müssen die Einzelprämissen durch Addition der Subjekte, hier durch Multiplikation ihrer Prädikate zur Gesamtaussage vereinigt werden.

Zwei von den vier Manieren bieten den Vorteil, die Elimination mittelst Tilgung des Eliminanden vollziehen zu können („Radirmethode"), — so namentlich die erste Unterart der zweiten Hauptmanier; diese muss den Vorteil aber durch den Nachteil erkaufen, dass man beim vorbereitenden Vereinigen der Prämissen die Polynome derselben zu multipliziren hat, anstatt, wie sonst, zu addiren. Und dual Entsprechendes wäre bezüglich der zweiten Unterart der ersten Hauptmanier zu sagen, wo dafür Produkte von Summen unbequem additiv zu vereinigen wären. Jedoch gelten diese Bemerkungen nur im Hinblick auf die aus der Arithmetik überkommene Gewöhnung des Rechnens mit Aggregaten und würden hinfällig, sobald man Gewandtheit im dual entsprechenden Rechnen voraussetzte. — Vergl. die Schematisirung der vier Manieren weiter unten.

Auch bei den zwei andern Manieren ist die Elimination ein leichtes, doch noch zuweilen mühsames Geschäft; die sämtlichen Prämissen können hier auch getrennt gelassen, sie brauchen nicht förmlich zur Gesamtaussage vereinigt zu werden; auch aus den einzeln stehenden, sei es rechts auf 0, sei es links auf 1 gebrachten Prämissensubsumtionen lassen sich vollständig nach und nach herauslesen die Koeffizienten (beziehungsweise Ko-addenden) der Unbekannten und ihrer Negation.

Nachdem ich im Anschluss an Boole die erste der vier Manieren ausgebildet, Mitchell die dritte vorgezogen, ist von Herrn Poretzki[1] die vierte in extenso dargelegt worden, nur mit dem im allgemeinen eine grössere Umständlichkeit bedingenden Unterschiede, dass er noch völlig an dem dualen Gegenstück der Boole'schen Entwicklungsschemata (auch nach mehreren Argumenten) klebt.

Da ich Poretzki's Schrift bei Abschluss meines Bd. 1 noch übersehen hatte, so will ich mir gestatten, im folgenden Kontext mich in Kürze über dieselbe auszulassen, teils kritisch, teils zur Abwehr, namentlich aber, um die Poretzki'schen Beispiele, der von mir angestrebten Vollständigkeit halber, einzuverleiben.

Aufgabe[1] p. 115 ... 118.

Es bedeute 1 die Mannigfaltigkeit der Mädchen auf einem Balle, und sei $a =$ wolerzogen, $b =$ lustig, $c =$ jung, $d =$ hübsch. So mögen folgende vierzehn Prämissen gegeben sein:

$1 = a + b + c + d,$	$1 = a + b + c + d_1,$	$1 = a + b + c_1 + d,$
$1 = a + b + c_1 + d_1,$	$1 = a + b_1 + c + d,$	$(0 = a_1 b c d_1$ oder)
$1 = a + b_1 + c_1 + d,$	$(0 = a_1 b c d$ oder)	$1 = a + b_1 + c_1 + d_1,$

($a \Subset b + c + d$*) oder)	$1 = a_1 + b + c + d$,	($ad \Subset b + c$ oder)
$1 = a_1 + b + c + d_1$,	($b_1 \Subset a_1 + c_1 + d_1$ oder)	$1 = a_1 + b + c_1 + d_1$,
($abc_1 \Subset d$ oder)	$1 = a_1 + b_1 + c + d$,	($c_1 \Subset a_1 + b_1 + d_1$ oder)
$1 = a_1 + b_1 + c + d_1$,	($abcd_1 = 0$ oder)	$1 = a_1 + b_1 + c_1 + d$,
$1 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$;		

Das heisst also z. B: Alle sind wolerzogen oder lustig oder jung oder hübsch, aber keine besitzt alle diese Eigenschaften gleichzeitig (letzte Prämisse); jedes wolerzogene, hübsche Mädchen ist zugleich lustig oder auch jung, ($ad \Subset b + c$), u. s. w.

Man soll jede von den vier Klassen durch jede von den drei andern ausdrücken.

Auflösung (in vereinfachter Weise). Die identische Null ist gleich dem Produkt aller sechzehn „Produzenten“, die man aus

$$a + b + c + d$$

erhält, indem man die Glieder auf jede erdenkliche Weise mit Negationsstrichen versieht — vergl. das duale Gegenstück zur Entwicklung der identischen Eins nach den Argumenten a, b, c, d, Bd. 1, S. 418 —. Von diesen sechzehn Produzenten sind der Annahme nach vierzehn gleich 1, nämlich alle ausser den beiden $a_1 + b + c_1 + d$ und $a + b_1 + c + d_1$. Darnach reduziren sich die Data auf den Ansatz:

$$0 = (a_1 + b + c_1 + d)(a + b_1 + c + d_1), = f(a,b,c,d),$$

[oder bei Poretzki

$$1 = ab_1cd_1 + a_1bc_1d, = f_1(a,b,c,d)].$$

Nach a entwickelt wird die Nullgleichung

$$a \cdot f(1,b,c,d) + a_1 \cdot f(0,b,c,d) = 0 = a(b + c_1 + d) + a_1(b_1 + c + d_1),$$

was nach den Th. 24_+) und 39) sofort erkennen lässt, dass

$$a = b_1 = c = d_1 \text{ oder auch } a_1 = b = c_1 = d$$

die gesuchte Lösung ist. Darnach sind z. B. die jungen Damen auf dem Balle zwar alle wolerzogen, aber betrübenderweise sämtlich weder lustig noch hübsch. U. s. w.

Aufgabe. Poretzki[1] p. 114 sq.

In einer Kommode sind zwei Lagen Wäsche, und bedeute 1 diese letztere, sowie a = feine, b = grosse, c = teure, d = frische Wäsche. Bekannt sei, dass

$$1 = b + a(d_1 + c_1)$$

und

$$a_1 + d_1c \Subset ab_1c_1 + b(d + ac_1).$$

Man berechne d_1. (Ist die getragene Wäsche grobe oder feine?...)

---

*) Poretzki schreibt die Subsumtionen $a \Subset b$ noch auf die schwerfällige Jevons'sche Weise: $a = ab$.

Auflösung in *meiner* Manier: In der zweiten Prämisse reduzirt sich der Major augenscheinlich auf $ac_1 + bd$, worauf diese auf

$$(a_1 + cd_1)(b_1 + d_1) = 0$$

hinauskommt und mit der ersteren: $(a_1 + cd)b_1 = 0$ vereinigt gibt:

$$(a_1 + c)(b_1 + d_1) = 0.$$

Darnach ist $(a_1 + c)b_1 = 0$ oder $(1 \Subset a + b)(c \Subset b)$ die Resultante der Elimination des d, und

$$d_1 = uac_1, \text{ wo } u \text{ unbestimmt, oder } 0 \Subset d_1 \Subset ac_1$$

die gesuchte Auflösung nach d_1. Alle Wäsche ist entweder feine oder grosse, die teure auch immer grosse, und die *getragene* durchweg feine, jedoch von der billigen Sorte.

Bringen wir statt dessen mit Poretzki auch die zweite Prämisse links auf 1:

$$1 = a(c_1 + d) + ac_1 + bd = ac_1 + ad + bd,$$

so haben wir als Gesamtaussage der Prämissen

$$1 = (ac_1 + ad_1 + b)(ac_1 + ad + bd) = ac_1 + bd, \; = f(a,\; b,\; c,\; d).$$

Die gleiche Prämisse $1 = ac_1 + bd$ ist nun auch einer andern p. 139 sq. behandelten Aufgabe Poretzki's zu grunde gelegt, wobei bedeuten soll: a = Hausbesitzer, b = reich, c = Kaufmann, d = einer gewissen Sekte angehörig: altgläubig.

Die dualen Gegenstücke zu Boole's „Konstituenten" (der Entwicklung der 1 oder irgend einer Funktion nach gegebenen Argumenten) werden von Poretzki als (elementare) „*Produzenten*" bezeichnet, — ein gut gewählter acceptabler Ausdruck.

Bilden wir letztere durch duale Entwicklung der Prämisse nach a, so zerfällt sie nach Th. $24_\times$) und $44_\times$) in die beiden

$$1 = a + f(0, b, c, d) = a + bd, \quad 1 = a_1 + f(1, b, c, d) = a_1 + c_1 + bd,$$

welche der Autor auch umsetzt in die Formen

$$b_1 + d_1 \Subset a, \quad c \Subset a_1 + bd,$$

falls wir, wie schon angedeutet, von dem Umstande absehen, dass derselbe eine Subsumtion $\alpha \Subset \beta$ immer nur in der Form $\alpha = \alpha\beta$ oder $\beta = \alpha + \beta$ anzusetzen vermag.

Entwickeln wir ebenso dual nach b, d, so ergeben sich die vier in ihrer Gesamtheit mit der einen obigen äquivalenten Prämissen:

$$1 = b + d + f(a,\; 0,\; c,\; 0) = b + d + ac_1,$$
$$1 = b + d_1 + f(a,\; 0,\; c,\; 1) = b + d_1 + ac_1,$$
$$1 = b_1 + d + f(a,\; 1,\; c,\; 0) = b_1 + d + ac_1,$$
$$1 = b_1 + d_1 + f(a,\; 1,\; c,\; 1) = b_1 + d_1 + ac_1 + 1 = 1,$$

von welchen die letzte jedoch sich als Identität erweist, so dass auch die drei Data:

$$(a_1 + c)d_1 \Subset b, \quad (a_1 + c)b_1 \Subset d_1, \quad bd_1 \Subset ac_1$$

zusammen unser obiges Datum vertreten können.

Letzteres zerfällt endlich, desgleichen entwickelt nach b, c, d, in acht Aussagen, worunter zwei Identitäten.

Die Resultante der Elimination von a und c aus der Prämisse:

$$1 = f(1, b, 1, d) + f(1, b, 0, d) + f(0, b, 1, d) + f(0, b, 0, d)$$

ist eine Identität $1 = 1$; es folgt also zwischen b und d keine bestimmte Beziehung. U. s. w.

Zum Schlusse p. 168 sq. zeigt Poretzki noch, wie man komplizirte logische Aufgaben erfinden könne über n Klassen mit m „Elementen" (Produzenten, resp. Konstituenten) und p Prämissen. Zu dem Ende setzt er willkürlich von den 2^n Produzenten hinsichtlich der n Klassen irgendwelche $m(< 2^n)$ gleich 1, z. B. $n = 4$, $m = 7$, $p = 3$:

$$1 = a + b + c + d, \quad 1 = a_1 + b + c + d, \quad 1 = a + b_1 + c + d_1,$$
$$1 = a + b_1 + c + d, \quad 1 = a_1 + b + c_1 + d, \quad 1 = a + b + c_1 + d,$$
$$1 = a_1 + b + c + d_1,$$

sondert dieselben in p Gruppen, — wie z. B. das erste Paar, das zweite Paar und die letzten drei, — und stellt das Produkt der Produzenten jeder Gruppe gesondert als Prämisse hin, — so hier:

$$1 = b + c + d, \quad 1 = a + b_1 + c, \quad 1 = b + a_1c_1 + a_1d + cd + c_1d_1,$$

was dann noch mannigfach in Subsumtionenform umgesetzt werden könnte. Endlich gibt er den Klassen eine Deutung, wie: 1 = Bewohner eines Hauses, a = reich, b = gesund, c = jung, d = im Besitz einer Familie.

Nun kann er fordern, irgend eine Eliminationsresultante zu bilden, auch eine Klasse, oder eine gegebene Funktion von gewissen Klassen durch andere darzustellen, unter Zerfällung dieser Funktion in „elementare Produzenten" (Peirce's Primfaktoren). Etc.

Aufgabe p. 111 ⋯ 114.

Zwischen den Vögeln im zoologischen Garten sind fünf Beziehungen bekannt. Wenn s = Singvögel, g = grosse, x und y solche Vögel bedeuten, welche eine Eigenschaft x resp. y haben, so sei gegeben:

$$s \Subset g + y, \quad y_1 \Subset g_1 + x_1, \quad x \Subset s + g, \quad g_1 = s + x, \quad xys_1g = 0.$$

Es soll y durch g und s, sowie x durch s und x durch y ausgedrückt werden.

Gegenüber der umständlichen Art, wie ich nach Herrn Poretzki diese Aufgabe (durch meine Methode) angeblich lösen *würde*, will ich erst zeigen, wie ich sie wirklich löse.

Sofort schreibt man als die vereinigte Prämissengleichung hin:

$$g_1sy_1 + gxy_1 + g_1s_1x + g_1s_1x_1 + gs_1xy = 0.$$

Ich pflege nun ganz naheliegende Vereinfachungen keineswegs zu unterlassen. Auf den ersten Blick ist ersichtlich, dass unser drittes und viertes Glied zu $g_1 s_1$ sich zusammenzieht; und hält man das mit dem ersten Glied zusammen, so wird bei diesem nach Th. 33_+) Zusatz die Unterdrückbarkeit des Faktors s ersichtlich; ebenso beim letzten Glied die des Faktors g. Das so vereinfachte erste Glied $g_1 y_1$, mit dem zweiten zusammengehalten, zeigt bei diesem die Überflüssigkeit des Faktors g an; und das zu xy_1 vereinfachte zweite Glied bringt bei dem schon zu $s_1 xy$ reduzirten letzten Gliede noch den Faktor y in Wegfall, wonach die Prämisse lautet:

$$g_1 y_1 + xy_1 + g_1 s_1 + s_1 x = 0 \quad \text{oder} \quad (g_1 + x)(s_1 + y_1) = 0.$$

Da die Elimination irgendwelcher von den vier Symbolen g, s, x, y sich hier immer auf das einfachste vollzieht, indem man die sie betreffenden Glieder aus dem Polynom der Gleichung fortlässt, (indem eben keines derselben sowol unnegirt als negirt vorkommt), so liest man hieraus leicht die Antwort auf jede der gestellten Fragen heraus, nämlich zusammen mit $g_1 s_1 = 0$ als Resultante: $g_1 \mathrel{\underline{\in}} y$ für die erste, $x \mathrel{\underline{\in}} s$ für die zweite und $x \mathrel{\underline{\in}} y$ für die dritte Frage.

Poretzki gewinnt mühsam gemäss der dualen Gegenstücke zu Boole's Entwicklungsformeln die vereinigte Gleichung

$$1 = gx_1 + sy$$

und deduzirt daraus (in der erwähnten unzweckmässigen Schreibweise à la Jevons) wesentlich dasselbe wie wir oben. —

Zufolge häufigen und ungemein schwankenden Gebrauches des nirgends erklärten Ausdruckes „qualitative Form" leidet Poretzki's Exposition vielfach an Unklarheit und Weitläufigkeiten; auch muss ich es als verfehlt ansehen, die Determination als eine „Realisirung" zu bezeichnen, sowie, die identische Addition als Umkehrung derselben hinzustellen (p. VII) und demgemäss „Abstraktion" zu nennen. Diese Ausstellungen treffen besonders die 24 Seiten starke Einleitung der Schrift, die sich sonst vielfach durch zutreffende kritische Bemerkungen auszeichnet.

P. 41 wirft Herr Poretzki mir einen Fehler vor: den, in meinem Operationskreis[2] nicht hinlänglich unterschieden zu haben zwischen „*unbestimmt*" und „*willkürlich*". Gewiss mit Recht führt er — in Bezug auf unser Th. $43_\times$) $(a \mathrel{\underline{\in}} b) = \sum\limits_u (a = ub)$ — aus, der Satz „Moskau ist eine Stadt" decke sich durchaus nicht mit dem Satze „Moskau ist eine *beliebige* Stadt." Bei dem Haupttheorem in[2] p. 20 hatte ich allerdings u für arbiträr erklärt. Dort hatte ich aber die Auflösung einer Gleichung nach einer *Un*bekannten im Auge, die ich stillschweigend als aus der Gleichung zu bestimmende und blos durch sie bestimmte dachte, nicht aber die Auflösung nach einer Klasse, die schon anderweitig gegeben ist. Ich hätte andernfalls u für „unbestimmt oder willkürlich" erklären müssen. Dass ich jedoch schon damals weit entfernt gewesen, diesen Unterschied zu übersehen, zeigt meine Ausführung in[3], p. 30, wo ich an einem Anwendungsbeispiele ebendiesen Unterschied darlegte, — was Herrn Poretzki wol entgangen ist. Cf. Bd. 1, S. 399 und § 21. — Wenn aber Herr Poretzki ebenda p. 41 meint, dass von meiner Behauptung, der Ausdruck $x = a_1(u + b)$ umfasse für ein von 0 bis 1 variirendes u die sämtlichen Wurzeln x der Gleichung $ax + bx_1 = 0$ (Schröder[2], p. 22), zu sagen wäre: „hier sei jedes Wort ein Fehler," so kann ich dies nur bestreiten und nach wie vor darauf bestehen, dass jedes Wort daran richtig ist. (Poretzki's — wie er fälschlich meint, notwendige — Annahme $u = x$ liefert nur *eine* von den im allgemeinen unendlich vielen Wurzeln, und zwar, sobald man unter x eine bestimmte, etwa schon anderweitig gegebene Klasse versteht, ebendiese.) — Der meiner Methode gemachte Vorwurf, formalistisch zu sein (p. 40) und sich nicht nahe genug dem natürlichen Denken anzuschmiegen, oder den Eindruck des Erkünstelten zu machen, trifft Herrn Poretzki's Verfahren als dual entsprechendes nicht minder; er trifft dieses sogar in noch höherem Maasse, sofern Poretzki noch mit den Gegenstücken der schwerfälligen Boole'schen Entwicklungsschemata arbeitet; (über diesen Vorwurf erhebt sich wol erst das McColl-Peirce'sche Verfahren, wie gezeigt). — Damit soll den Verdiensten des Autors als des ersten Forschers und Arbeiters auf dem Felde der exakten Logik im grossen Slavenreiche durchaus nicht zu nahe getreten sein.

Auf Boole's Eliminations- und sein von mir modifizirtes Auflösungsverfahren kommt wesentlich auch Frau Ladd-Franklin's[1] Methode hinaus, — soweit Probleme der ersten Stufe vorliegen. Die Verfasserin bedient sich nur einer aparten Kopula, nämlich unserer Beziehung $\mathrel{\ni\!\!\!\in}$ der Gebiet- oder Wertgemeinschaft und deren Verneinung unter dem Zeichen $\vee$ bezw. $\overline{\vee}$. Diese Beziehungszeichen sind in unserm § 36, Tafel IV° und V° (S. 120 u. 122) auf die Zeichen $=$ und $\neq$, $\subseteq$ und $\not\subseteq$ zurückgeführt.

Den Schlüssel zum Lesen ihrer Abhandlung geben folgende Formeln:

$$\begin{array}{l|l} (a \vee b) = (ab \neq 0) = (ab \mathrel{\ni\!\!\!\in} 1) & (a \vee) = (a \vee 1) = (a \neq 0) = (a \mathrel{\ni\!\!\!\in} 1) \\ (a \overline{\vee} b) = (ab = 0) = (ab \mathrel{\not\ni\!\!\!\in} 1) & (a \overline{\vee}) = (a \overline{\vee} 1) = (a = 0) = (a \mathrel{\not\ni\!\!\!\in} 1). \end{array}$$

Das bejahende Zeichen hinter a gesetzt, heisst: „does exist", das durch horizontal darüber gesetzten Negationsstrich als verneinend gekennzeichnete: „does not exist". Letzteres gilt als Keil (wedge) und drückt, zwischen a und b gesetzt, aus, dass beide disjunkt, bez. als Aussagen inkonsistent seien; es wird im ersteren Falle, was ich nicht zu billigen vermag (cf. § 15), auch als „is-not" gelesen. Was existirt, ist gebietgemein mit der ganzen Mannigfaltigkeit 1, und umgekehrt.

Charakteristisch ist, dass das Produkte verknüpfende Zeichen *an jeder beliebigen Stelle* zwischen die Faktoren gesetzt werden darf:

$$(abcde \mathrel{\ni\!\!\!\in} 1) = (abcd \mathrel{\ni\!\!\!\in} e) = (abc \mathrel{\ni\!\!\!\in} de) = (ab \mathrel{\ni\!\!\!\in} cde) = (a \mathrel{\ni\!\!\!\in} bcde) =$$
$$= (1 \mathrel{\ni\!\!\!\in} abcde)$$

und ebenso für die Verneinung. Im Hinblick auf die Selbstverständlichkeit der 1 als Faktor wird dieselbe darum auch unterdrückt, wo sie rechts isolirt vorkommt, und mit Nullen operirt die Verfasserin überhaupt nicht.

Abgesehen von dieser Eigentümlichkeit zeigt aber ein Blick auf obigen Schlüssel, dass die Ansätze sich doch unmittelbar in Gleichungen resp. Ungleichungen mit der rechten Seite 0 umschreiben lassen, und dass deshalb die Rechnungen dieselben sein müssen wie bei meinen Ansatzweisen, — welche nahe Verwandtschaft die Verfasserin auch selbst betont.

Bei Besprechung der Probleme zweiter Stufe müssen wir auf die geniale Arbeit noch eingehend zurückkommen.

Die Auflösung nach einer Unbekannten kann — wie in der Arithmetik — vollzogen werden in Gestalt einer *Gleichung*, jedoch nur unter Beizug von unbestimmten oder arbiträren Klassen, — eine Materie, die nächst Boole[4] ich allein in [2] und hier weiter verfolgt habe. Oder sie kann vollzogen werden in Gestalt eines Paares von Subsumtionen, am besten einer *Doppelsubsumtion.*

Dies war mir bei Abfassung von [2] nicht unbekannt und ist daselbst auch bei der verbalen Interpretation der Aufgabenresultate allemal von mir bethätigt; allgemein jedoch wurde diese Auflösungsform zuerst wol von McColl, hernach auch von Peirce hervorgehoben.

Man dürfte von mir erwarten, dass ich das Verhältniss meiner gegenwärtigen zu meiner früheren Arbeit, dem Operationskreis[2], hier kennzeichne. Dies vermag ich mit den wenigen Worten: *Dort* beschränkte ich mich im Anschluss an Boole auf den Gebrauch des Gleichheitszeichens und konnte folglich nicht mehr leisten, als mit diesem Mittel sich eben erreichen lässt: Viele Sätze, zu viele, mussten unbewiesen axiomatisch hingestellt bleiben. *Hier* aber zog ich mit Peirce und McColl das Subsumtionszeichen hinzu und illustrire damit hoffentlich den Ausspruch Trendelenburg's, dass mit dem zutreffenden Zeichen die Einsicht in die Sache und die Herrschaft über sie unabsehbar wachse (Bd. 1, S. 93). So beruht auch der Fortschritt unseres zweiten gegenüber dem ersten Bande wesentlich auf dem Hinzutreten eines ferneren Zeichens, des Ungleichheitszeichens. Und der dritte Band wird noch drei weitere Operationszeichen bringen.

Die obigen vier Manieren mögen nun nochmals übersichtlich schematisirt werden.

Man setzt die sämtlichen Data sowol als deren vereinigte Aussage an bei der

erten Hauptmanier also ersten und zweiten (Unter-) Manier in der Gestalt $f(x) \neq\!\!\!\in 0$	zweiten Hauptmanier also dritten und vierten (Unter-) Manier in der Gestalt $1 \neq\!\!\!\in f(x)$.

Das „Polynom“ $f(x)$ stellt man dar in der Form:
$ax + bx_1$, wo $a = f(1)$, $b = f(0)$, bei der ersten und dritten Manier,
$(a+x)(b+x_1)$, wo $a=f(0)$, $b=f(1)$, bei der zweiten und vierten Manier.

Als *vereinigte Gleichung*, *Resultante* und *Lösung* haben wir also bezüglich bei der

1. Manier	2. Manier	3. Manier	4. Manier:
$ax + bx_1 \mathrel{=\!\!\!<} 0$	$(a+x)(b+x_1) \mathrel{=\!\!\!<} 0$	$1 \mathrel{=\!\!\!<} ax + bx_1$	$1 \mathrel{=\!\!\!<} (a+x)(b+x_1)$
$ab \mathrel{=\!\!\!<} 0$	$ab \mathrel{=\!\!\!<} 0$	$1 \mathrel{=\!\!\!<} a + b$	$1 \mathrel{=\!\!\!<} a + b$
	(durch Radiren)	(Radirmethode)	
$b \mathrel{=\!\!\!<} x \mathrel{=\!\!\!<} a_1$	$a \mathrel{=\!\!\!<} x \mathrel{=\!\!\!<} b_1$	$b_1 \mathrel{=\!\!\!<} x \mathrel{=\!\!\!<} a$	$a_1 \mathrel{=\!\!\!<} x \mathrel{=\!\!\!<} b.$

Bei der Vorbereitung aber werden sich mehrere Prämissen

$ax + bx_1 = 0$	$(a+x)(b+x_1) = 0$	$1 = ax + bx_1$	$1 = (a+x)(b+x_1)$
$a'x + b'x_1 = 0$	$(a'+x)(b'+x_1) = 0$	$1 = a'x + b'x_1$	$1 = (a'+x)(b'+x_1)$
. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .

allemal vereinigen zu einer Gesamtaussage

$(a + a' \ldots)\, x +$	$(a + a' \ldots + x) \cdot$	$1 = aa' \ldots x +$	$1 = (aa' \ldots + x) \cdot$
$+ (b + b' \ldots) x_1 = 0$	$\cdot (b + b' \ldots + x_1) = 0$	$+ bb' \ldots x_1$	$\cdot (bb' \ldots + x_1),$

deren Resultante nach dem Obigen also lauten wird:

$$(a + a' \ldots)(b + b' \ldots) = 0 \qquad | \qquad 1 = aa' \ldots + bb' \ldots;$$

ebenso leicht ist hiezu jeweils die Auflösung hinzuschreiben.

Die Vereinigung der Prämissen erfordert aber zumeist den Ansatz einer weitschweifigen, nicht selten auch verwickelten Relation. — Allerdings vermag man bei jeder von den vier Manieren die in das Schema der Resultante und der Lösung eingehenden Elemente bei einiger Übung auch schon aus den noch unvereinigten Prämissen richtig herauszuklauben und vollzählig zu sammeln. Es bleibt aber die Ausstellung, dass Elimination wie Auflösung für das Prämissen*system* keineswegs vorbereitet wird durch Ausführung derselben Operationen an den einzelnen Prämissen (an welchen sie so viel leichter zu bewerkstelligen wären). Und ferner lässt sich bemängeln, dass die Reduktion aller Data auf das Prädikat „nichts" oder auf das Subjekt „alles" künstlich erscheine und nicht nahe genug dem natürlichen Denken sich anschmiege, welches sich in Subsumtionen zwischen Subjekten und Prädikaten *irgend welcher* Werte zu bewegen pflegt.

Dies rief den Wunsch hervor, das Verfahren so einzurichten, dass die Geschäfte der Elimination sowie Auflösung schon an den Prämissen selber einzeln vollzogen werden könnten, wobei denn auch mit beliebigen Subsumtionen zu operiren wäre.

Diesen Forderungen wird eine weitere Gruppe von Methoden gerecht, mit deren Ausgestaltung sich Mc Coll, Peirce und ich beschäftigt haben.

Es ist mir erst beim Abschlusse von Bd. 1 voll zum Bewusstsein gekommen, dass eigentlich *zwei* Methoden Herrn McColl zuzuschreiben sind: eine blos theoretisch von ihm schematisirte und eine auch praktisch angewendete. Ich will jene die erste, diese die zweite nennen und spreche hiernächst nur von der ersten.

Charakteristisch ist für diese Methoden, dass unmittelbar (bei McColl und mir) oder mittelbar (bei Peirce) jede Prämissensubsumtion aufgebrochen wird in zwei einzelne Subsumtionen (bei Peirce auch mehr), welche die Unbekannte x oder deren Negation isolirt enthalten, sei es als Prädikat, sei es als Subjekt. Dazu genügt allemal die Def. (3) und das Th. 41) von Peirce. (Solch rationelles Aufbrechen ist mit dem mechanischen Zerhacken bei Jevons nicht auf eine Linie zu stellen.)

A priori sind — vom Peirce'schen Verfahren abgesehen, — drei Manieren denkbar, die wir in der Aufzählung den bisherigen anreihen.

Fünfte Manier ist McColl's „erste" Methode, wobei x und x_1 durchweg zu Prädikaten gemacht werden (Bd. 1, S. 591). Aus

$$a \Subset x, \quad b \Subset x, \quad c \Subset x, \ldots \alpha \Subset x_1, \quad \beta \Subset x_1, \quad \gamma \Subset x_1, \ldots$$

folgt die Auflösung in der Gestalt

$$a + b + c \ldots \Subset x, \quad \alpha + \beta + \gamma \ldots \Subset x_1$$

und die Resultante als

$$(a + b + c \ldots)\ (\alpha + \beta + \gamma \ldots) \Subset 0.$$

Sechste Manier, auf die zuletzt Herrn Peirce's Verfahren und unmittelbar meine Modifikation desselben hinausläuft: Man isolirt durchweg x, sei es als Subjekt, sei es als Prädikat, (oder wenn man will, auch durchweg x_1). Aus

$$a \Subset x, \quad b \Subset x, \quad c \Subset x, \ldots x \Subset \alpha, \quad x \Subset \beta, \quad x \Subset \gamma, \ldots$$

folgt so

$$a + b + c \ldots \Subset x \Subset \alpha\beta\gamma \ldots$$

als Auflösung und, wenn der mittlere Term weggelassen wird, zugleich auch als Resultante. Dieses Verfahren erscheint mir als das eleganteste.

Siebente Manier: Man isolirt x sowol als x_1 durchweg als Subjekt. Aus

$$x \Subset a, \quad x \Subset b, \; x \Subset c, \ldots x_1 \Subset \alpha, \quad x_1 \Subset \beta, \quad x_1 \Subset \gamma, \ldots$$

folgt alsdann die Auflösung in der Gestalt:

$$x \Subset abc \cdots, \quad x_1 \Subset \alpha\beta\gamma \cdots$$

und die Resultante

$$1 \Subset abc \cdots + \alpha\beta\gamma \cdots.$$

Dieser Manier ist bisher noch keine Erwähnung geschehen. Doch ist zu bemerken, dass McColl bei seiner „zweiten" Methode mittelbar den Umweg durch diese Darstellung hindurch zu seiner ersten Schreibweise der Endergebnisse nimmt, zu der er alsdann schliesslich durch Kontraposition gelangt.

Allen bisherigen Methoden steht nunmehr noch McColl's „zweite" Methode als eine neue, die *achte Manier* gegenüber und nimmt unstreitig eine Sonderstellung ein. Sie schreibt nach Formeln des Aussagenkalkuls die vereinigte Aussage der Prämissen in ein Klassensymbol um, aus welchem sie nach einem besonderen Satze die Unbekannten oder vielmehr die nach diesen gebildeten Konstituenten xy, xy_1, $\cdots$ als *Subjekte* isolirt, um dieselben zu überaddiren und schliesslich zu kontraponiren.

Schon des Dualismus halber muss auch diese Methode sich in einer zweiten Manier anwenden lassen. Ob dagegen die erstere dieser beiden Manieren auch noch ein Gegenstück findet, bei welchem jene Konstituenten als *Prädikate* isolirt würden, (sowie dualistisch entsprechend dann auch die zweite,) wäre noch zu untersuchen. (Auch das Jevons'-sche Verfahren würde sich noch als dual entsprechendes in einer zweiten Manier anwenden lassen).

So viel über die doch immerhin schon grosse Mannigfaltigkeit der Schlussweisen zur Lösung der Probleme *erster* Stufe.

Für die zweite Stufe ist dagegen diese Mannigfaltigkeit eine erheblich geringere. Bisherige Arbeiten von Miss Ladd, Herrn Mitchell, mir und Herrn Voigt betreffen kaum mehr als das *Eliminations*-problem. Es handelt sich darum, aus der Mitchell'schen Gesamtaussage der Data, welche sich darstellt als eine Alternative zwischen Systemen je eines universalen mit mehreren partikularen Urteilen (oder einer Gleichung mit simultanen Ungleichungen), die Unbekannte x zu eliminiren. Herrn Mitchell's durch die „Radirmethode" gewonnene Resultante erwies sich als unzulänglich, und so bleibt das Schema meiner „Resultante aus dem Rohen" übrig, welches auch Herr Voigt auf anderem Wege begründet, als das einzige bekannte Verfahren zur Lösung der Aufgabe, so weit bis jetzt möglich.

Hier liegt mir aber noch ob, das von Miss Ladd[1] Erreichte zu besprechen, deren Verdiensten ich in § 41 noch nicht gerecht geworden bin. Frau Ladd-Franklin kommt nämlich dem erwähnten Ergebnisse viel näher als Herr Mitchell; ja man kann sagen, meine Resultante aus dem Rohen sei nur eine ziemlich nahe liegende Konsequenz eines früher von ihr aufgestellten Satzes.

Zur Erklärung: Auch die des Englischen mächtigen Leser werden es begreiflich finden, wie ich übersehen konnte, dass in dem Satze p. 45: „If the premises include an alternation of particular propositions, the conclusion consists of the partial inclusion of the total coefficient of x in the particular propositions by the negative of that of x in the universal propositions, added to the included combinations which are free from x as given," — dass in diesem Satze, sage ich, sämtliche Formeln des § 41, so namentlich das Schema v) S. 209 schon in nuce enthalten sind. Wenn wenigstens von einem Produkt oder von der Negation x_1 darin die Rede wäre, so wäre ich wol aufmerksam geworden. Die beiden Beispiele, welche die Verfasserin auf der folgenden Seite in ihrer mir nicht geläufigen Symbolik gibt, nahm ich mir vor späterhin einmal nachzurechnen, was jedoch in Vergessenheit geriet. Dagegen stimmte die Lösung der 18. Aufgabe des § 46 (S. 309 sqq.) durch Herrn Macfarlane und (angeblich) die Aufgabenstellerin nicht überein mit der von meinem Schema gelieferten.

Die p. 46 für beliebig viele partikulare Prämissen von Frau Ladd-Franklin aufgestellte Regel läuft auf den folgenden Satz hinaus:

$$(ax = 0)(px \neq 0)(qx \neq 0) \cdots \Subset (pa_1 \neq 0)(qa_1 \neq 0) \cdots,$$

einen bemerkenswerten Unterfall unseres Schemas v), § 41, S. 209.

Da keinerlei Andeutung über seine Begründung vorliegt, so ist anzunehmen, (was Bestätigung fand,) dass ihn Miss Ladd als einen selbstverständlichen hinstellen wollte. Als ein solcher lässt er sich in der That auch unmittelbar einsehen: Wenn nämlich die Gebiete a und x disjunkt sind, auseinanderliegen, und p, q, $\cdots$ je mit x etwas gemein haben, so müssen letztere auch mit a_1, dem Aussengebiet von a, etwas (und zwar mindestens ebendieses) gemein haben, da ja alsdann x ganz in a_1 zu liegen kommt.

Um hierauf nun unser Schema v) des § 41 zurückzuführen, hätten wir zunächst ebenso

$$(bx_1 = 0)(rx_1 \neq 0)(sx_1 \neq 0) \cdots \Subset (rb_1 \neq 0)(sb_1 \neq 0) \cdots;$$

und multiplizirt man dies überschiebend mit dem vorigen, so kommt mit Rücksicht auf Th. 24_+)

$$(ax + bx_1 = 0)(px \neq 0)(qx \neq 0) \cdots (rx_1 \neq 0)(sx_1 \neq 0) \cdots \Subset$$
$$\Subset (pa_1 \neq 0)(qa_1 \neq 0) \cdots (rb_1 \neq 0)(sb_1 \neq 0) \cdots,$$

ein Ergebniss, zu dessen Aussagen-Prädikat man noch den aus der ersten Prämisse links für sich folgenden Faktor $(ab = 0)$ rechts beifügen mag. In lauter Glieder von der Form des vorstehenden Aussagen-Subjekts wird aber die Hypothesis unseres Schemas v) zerfallen, wenn man nach

$$(\alpha + \beta \neq 0) = (\alpha \neq 0) + (\beta \neq 0)$$

die dortigen Ungleichungsfaktoren sämtlich zerlegt in Binome und diese dann ausmultiplizirt. Zuletzt muss überschiebendes Addiren der nach dem obigen Schema zu gewinnenden Konklusionen und Vereinigung der Konklusionenglieder in geeigneter Weise gerade unser Schema v) liefern.

Die beiden Beispiele von Miss Ladd kommen, wenn man dieselben noch etwas vereinfacht, (im zweiten nämlich die beiden simultanen Gleichungen in eine einzige zusammenzieht, alsdann aber für komplizirte Koeffizientenausdrücke einfache Symbole einführt,) auf folgende hinaus:

$$\{(ax = 0) + (bx \neq 0) + (c \neq 0)\}(px \neq 0) \Subset \{p(a_1 + b_1 + c_1) \neq 0\},$$
$$(px = 0)(qx = 0)(ax \neq 0)(bx \neq 0) \Subset (ap_1q_1 \neq 0)(bp_1q_1 \neq 0).$$

Die Beispiele geben die vollständigen Resultanten an und sind wol die *ersten* rechnerisch aus gemischt universalen und partikularen Prämissen gezogenen Schlüsse von solchem Charakter.

Dass nun aber die „Resultante aus dem Rohen“ durch eine Klausel noch zu vervollständigen sei, wurde bereits ausgeführt, — sowie auch, dass ungeachtet des Lichtes, welches Herrn Voigt's Arbeit[1] noch über diese und die Auflösungsfrage in einer Hinsicht geworfen, diese Probleme in einem andern und wesentlichen Sinne noch immer zu lösen sind.

Sind wir hiernach mit unserm Rückblick über die bis jetzt zu gebote stehenden Methoden der Algebra der Logik zu Ende, so muss ich den zuletzt (S. 451 ff.) besprochenen Fall verspäteter Gerechtigkeit zum Anlass nehmen, sogleich noch zweier analogen Zufälle zu gedenken, die beide die Prioritätsrechte derselben Forscherin betreffen.

Auf den einen Fall konnte ich schon in den Berichtigungen zur ersten Abteilung des gegenwärtigen Bandes, sowie in meiner Note in den Math. Annalen hinweisen, wo sich auch meine subjektiven Entlastungsgründe finden. Trotzdem soll auch hier nochmals statuirt werden, dass Miss Ladd[1] (Frau Franklin) *das Verdienst zukommt, die* Bd. 1, S. 670 f. aufgestellten *22 Typen, in welche die aus drei Klassen zusammensetzbaren Ausdrücke zerfallen, erstmals gegeben* und damit die mangelhafte Aufstellung von Jevons zuerst vollständig berichtigt zu haben.

Der andere Fall betrifft das dem Resultat nach als Peano's Formel S. 168 des gegenwärtigen Bandes erwähnte und S. 175 ⋯ 178 zur Lösung gebrachte Problem, *die Anzahl der Aussagen zu ermitteln, welche angebbar sind über n Begriffe.* Es war mir entgangen, dass dieses Problem wesentlich zusammenfällt mit demjenigen, welches schon

Miss Ladd[1] p. 61 ··· 69 behandelt in einer Untersuchung, der sie den Titel gab: „Über die Konstitution des Universums". Zufolge einer etwas andern Fragestellung fällt freilich die allgemeine Formel nebst den speziellen Zahlwerten bei Miss Ladd anders aus als bei Peano.

Bei der mich irre führenden Problembezeichnung und zufolge noch einiger andern Eigentümlichkeiten der Darstellung gelangte ich erst bedauerlich spät zum Verständniss von Ziel und Tragweite der gesamten hier von der genialen Verfasserin angestellten Betrachtungen.

Implicite (sozusagen „zwischen den Zeilen zu lesen") gibt die Verfasserin auf die oben gestellte Frage als Antwort den Ausdruck:

$$2^{2^{2^n}}$$

welcher von dem Herrn Peano zugeschriebnen sich unterscheidet durch den Wegfall der Subtrahenden sowol auf der Zeile, als auch (des — 1) im Hauptexponenten, und z. B. für $n = 2$ die Anzahl 65536 liefert. Grund dieser Abweichung ist der Umstand, dass Miss Ladd auch diejenigen Aussagen mitrechnet, die wir als „absurde" ausgeschlossen haben, — nämlich die Aussage $1 = 0$, erstlich im *Klassen*kalkul, besagend, dass die zugrund gelegte Mannigfaltigkeit, der Denkbereich oder das in Diskussion befindliche Universum leer sei; und sodann die analoge Gleichung $\dot{1} = 0$ des *Aussagen*kalkuls, welche „wahr" und „falsch" für einerlei erklärt. Letztere bleibt definitiv, unter allen Gesichtspunkten, eine absurde Aussage; aber sie kann doch allerdings aufgestellt werden, und es bleibt Geschmackssache, ob man sie mitzählen will oder nicht, — übrigens auch nebensächlich, sofern bei ihrer Einrechnung die Gesamtzahl nur um Eins grösser wird. — Hingegen hat die Zulassung der ersteren klassentheoretischen Absurdität jedenfalls ihre Berechtigung, da es für viele Untersuchungen von Wert sein kann, auch die Möglichkeit eines leeren Denkbereiches im Auge zu behalten; hierdurch tritt aber zu *jeder* früheren Aussage noch die Alternative $1 = 0$, verbal in Gestalt von „oder auch die ganze Mannigfaltigkeit ist eine leere", eventuell hinzu, wodurch sich die Gesamtzahl der möglichen Aussagen noch verdoppelt. — Damit sind Miss Ladd's und Peano's Ergebnisse auf einander zurückgeführt.

Wie man in der Arithmetik die Frage nach der Anzahl der Kombinationen (ohne Wiederholung) von n Elementen (oder die Summe aller Binomialkoeffizienten zum Exponenten n) beantwortet mit 2^n, indem man auch die nullte Kombinationsklasse mitrechnet, und nicht mit $2^n - 1$ oder gar $2^n - 2$, so ist auch Miss Ladd's Antwort auf die oben gestellte Frage als der eleganteren der Vorzug zuzuerkennen vor der von Peano und mir adoptirten. — Die Methode, mittels welcher Miss Ladd ihr Resultat findet, unterscheidet sich kaum wesentlich von derjenigen, durch welche es mir erst so viel später (l. c.) gelungen ist, Peano's Ergebniss zu begründen; nur in der Exposition differiren unsere Überlegungen, hier allerdings bis zur Unkenntlichkeit, und vielleicht zum Vorteil der die Priorität besitzenden Autorin, deren Darstellung jedenfalls die kürzere ist.

Fast gleichzeitig mit meinem Bd. 1 — ich glaube etwas später — ist auch das Werk von Robert Grassmann[3] erschienen. Es kann nicht meine Aufgabe sein, dieses umfang- und inhaltreiche Werk, welches eine vollständige Darstellung der exakten Logik zu verwirklichen strebt, hier erschöpfend zu rezensiren. Zu seiner Charakterisirung im allgemeinen will ich nur sagen, dass sein Verfasser zur Auflösung der Data nach einer Unbekannten sich meiner Modifikation der Boole'schen Methode anschliesst, — ohne übrigens erheblichen Gebrauch davon zu machen. Und ferner, dass derselbe sein System von vornherein auf „Argumentationen über Individuen" gründet, wogegen ich es mit Voigt für einfacher halte, gemäss Peirce alles blos auf den Subsumtionsbegriff zu gründen und von diesem aus das Individuum erst zu definiren. In der That muss R. Grassmann bei seinem Verfahren gar zu häufig mit begrenzten Summen operiren, wodurch manche Beweise für einfache Sätze schon eine etwas unerquickliche Gestalt annehmen.

Im einzelnen muss ich aber wenigstens zwei Fehler richtig stellen. Der erste findet sich p. IX, X, p. 27 und 35, wo Herr R. Grassmann jegliche Zulassung einer Subtraktion und einer Division in die Logik als unvermeidlichen Widerspruch durchaus verwirft. Schon von vorn herein muss es befremden, wenn man, nach Einführung der Addition und Multiplikation, die Frage: welche x, zu b addirt, resp. mit b multiplizirt, denn a geben, — abweisen oder verbieten will. Ein Widerspruch soll sich nun ergeben vermöge der beiden folgenden Anwendungen der Subtraktion und der Division, bezw. wegen $a - a = 0$ und $a : a = 1$:

$$a = a + 0 = a + (a - a) = (a + a) - a = a - a = 0,$$
$$a = a \cdot 1 = a(a : a) = (aa) : a = a : a = 1,$$

oder, wenn $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ gesetzt ist,

$$a = a \cdot 1 = a(a \cdot \tfrac{1}{a}) = aa \cdot \tfrac{1}{a} = a\tfrac{1}{a} = 1,$$

womit also allgemein, für jede Klasse a, bewiesen wäre, dass sie erstens Null, und zweitens, dass sie zugleich Eins sei. — Werden die beiden inversen Operationen so definirt, wie im § 23 und auch schon in meinem „Operationskreis"[2] § 4, p. 28 ff. geschehen, so sind diese angeblichen Beweise leicht zu entkräften; schon an letzterer Stelle ist betont, dass associative Gesetze wie etwa

$$a + (b - c) = (a + b) - c \text{ und } a(b : c) = (ab) : c$$

nicht allgemein und nicht unmodifizirt gelten; von diesen Gesetzen macht aber Herr R. Grassmann einen hiernach nicht zulässigen Gebrauch in den beiden ersten der drei obigen „Beweise“, — wie leicht zu zeigen. Im dritten dagegen lässt er blos die sog. „Valenzbedingung“ ausseracht, d. i. die Bedingung, dass ein Quotient $\frac{a}{b}$ überhaupt einen Sinn habe, und welche (Bd. 1, S. 479, sowie [2] S. 29) als $ab_1 = 0$ ermittelt wurde; für den Quotienten $\frac{1}{a}$ ist dieselbe sonach $a_1 = 0$ oder $a = 1$, d. h. man kann von einem Quotienten $\frac{1}{a}$ in der That nur dann sprechen, wenn von vorn herein $a = 1$ ist.

Der zweite Fehler (p. 46 sub 105. b) besteht in der Aufstellung einer allgemeinen Entwicklungsform für Funktionen beliebig vieler Argumente in Gestalt eines Produktes aus ebenso vielen Faktoren, von denen jeder linear und homogen ist in Bezug auf je eines der Argumente und seine Negation — mit konstanten Koeffizienten, — ein sehr wichtiger und erfolgreicher Satz, wofern er richtig wäre. Für zwei Argumente würde er etwa lauten:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\alpha x + \beta x_1)(\gamma y + \delta y_1) \\ &= \alpha\gamma xy + \alpha\delta xy_1 + \beta\gamma x_1 y + \beta\delta x_1 y_1; \end{aligned}$$

aus der Gleichsetzung mit der bekannten Darstellung

$$f(x,y) = axy + bxy_1 + cx_1y + dx_1y_1$$

würde hier folgen:

$$\alpha\gamma = a, \quad \alpha\delta = b, \quad \beta\gamma = c, \quad \beta\delta = d,$$

womit zugleich

$$ad = bc$$

ersichtlich ist; diese nicht allgemein bestehende Relation ergibt sich auch durch Elimination der α, β, γ, δ aus der vereinigten Nullgleichung der vorigen vier Data als vollständige Resultante, also als Bedingung der Zerlegbarkeit von $f(x,y)$ in die gedachten Linearfaktoren. — Herr Grassmann begnügt sich, zur Begründung seiner Behauptung auf seinen vorangehenden Satz, den für *ein* Argument, zu verweisen. — Mit dem in Rede stehenden Zerlegungssatz wird dann auch die Argumentation p. 68 sq. hinfällig.

Das zufolge seiner Verdeutschungsmanie mir schwer geniessbare Buch Grassmann's enthält übrigens neben manchem Wunderlichen viel Beachtenswertes; ich erwähne z. B. den Satz p. 43 sub 94:

$$(ac = bc)(ac_1 = bc_1) = (a = b).$$

Treffend ist auch p. XII die (gegen Wundt gerichtete) Ausführung (vergl. Bd. 1, S. 224), dass bei Nichtanerkennung von $ab = ba$ „sprachliche und logische Beziehungen“ verwechselt werden. „So z. B. hat ein kriegerischer Deutscher und ein deutscher Krieger sprachlich einen verschiedenen Sinn. Denn ein kriegerischer Deutscher braucht keineswegs Soldat zu sein, und ein deutscher Soldat braucht nicht kriegerisch gesinnt zu sein. Aber hier haben eben die Worte kriegerisch = kriegerisch gesinnt und Krieger = Soldat ganz verschiedene Bedeutung und bilden logisch zwei ganz verschiedene Begriffe.“

Obwol wir schon gelegentlich, da und dort im Laufe unserer Untersuchungen, auf bestimmte Probleme hingewiesen haben als auf solche, die noch ihrer Lösung harren, so will ich zum Schlusse doch auf einige weitere für interessant und dankbar zu haltende Aufgaben noch aufmerksam machen.

Frau Ladd-Franklin hat schon die Frage aufgeworfen, wie viele „Logikkalkuln“ möglich seien, und dieselbe auch in einem bestimmten Sinne zu beantworten gesucht. Die möglichen blieben dann aber noch aufzustellen und vergleichend auszugestalten.

Als eine damit verwandte will ich beispielsweise die Frage aufwerfen: wie würde unser Denken sich gestalten, wenn wir, (neben den Operationen der drei Spezies) nur über das Beziehungszeichen der Sekanz $\between$ verfügten? Welche Probleme der elementaren Logik würden uns dann blos zugänglich, und welche würden neu hinzutreten, wenn auch die Verneinung $\not\between$ dieses Beziehungszeichens mit zu Hülfe genommen würde? Auf welche Weise wären alsdann die fundamentalen Aufgaben der Umfangslogik am zweckmässigsten zu lösen? Etc. —

In § 34 haben wir die Gergonneschen 5 Elementarbeziehungen eingeführt und erörtert. Es gelang dann im § 39, alle 32767 zwischen zwei Begriffen A und B erdenklichen Umfangsbeziehungen unter diesen fünf Rubriken (in dortiger Bezeichnung):

$$a, \quad \alpha = a_1 b_1 c_1, \quad \beta = a_1 b c_1, \quad \gamma = a_1 b_1 c, \quad \delta = a_1 b c$$

übersichtlich zu klassifiziren. — Die fünf Rubriken schliessen aber eine Relativität in sich, insofern sie beruhen auf der Unterscheidung der *zwischen A und B* denkbaren Elementarbeziehungen. Dieser steht von vornherein gleichberechtigt gegenüber die Unterscheidung der zwischen A_1 und B, desgl. zwischen A und B_1, desgl. zwischen A_1 und B_1 denkbaren Elementarbeziehungen. Diese letztern werden bezüglich (in den vier primitiven a, b, c, l De Morgan's ausgedrückt) durch folgende Aussagen dargestellt, denen man im Anschluss an unsere Terminologie etwa die links beigesetzten Namen geben mag:

$$\begin{array}{lllll}
\mathrm{b}, & \alpha^b = b_1 a_1 l_1, & \beta^b = b_1 a l_1, & \gamma^b = b_1 a_1 l, & \delta^b = b_1 a l, \\
\mathrm{c}, & \alpha^c = c_1 l_1 a_1, & \beta^c = c_1 l a_1, & \gamma^c = c_1 l_1 a, & \delta^c = c_1 l a, \\
\mathrm{l}, & \alpha^l = l_1 c_1 b_1, & \beta^l = l_1 c b_1, & \gamma^l = l_1 c_1 b, & \delta^l = l_1 c b,
\end{array}$$

wo dann die α, β, γ, δ schlechtweg als Vertreter von α^a, β^a, γ^a, δ^a erscheinen würden. Zweifellos würde es unsere Übersicht über die 32767 zulässigen Aussagen noch ausserordentlich erhöhen, wenn jemand sich der Mühe unterzöge, die von uns für das erste dieser vier Einteilungsprinzipien durchgeführte Klassifikation auch auf die drei folgenden auszudehnen, wenn er alle vier Klassifikationen zur Vergleichung brächte und zusähe, inwieweit dieselben ineinander, wie weit auch sie übereinander hinausgreifen. —

Für die nächste Zeit durch dienstliche und andere Obliegenheiten wissenschaftlich und vielleicht auch literarisch an Ketten gelegt und ausser stande, die Sache selbst weiter zu verfolgen, will ich schliesslich dem Leser ein Untersuchungsfeld verraten, welches ich für eines der allerdankbarsten halte. Auf demselben wird eine *Erweiterung des* in unserm Systeme schon als nahezu abgeschlossen und fertig erscheinenden *Aussagenkalkuls* zu erzielen sein.

In diesem hatten wir uns der „intensiven“ Schreibung bedient und haben lediglich zu thun gehabt mit den drei identischen Spezies der Multiplikation, Addition und Negation. In Anhang 4, 5 und 6 aber studirten wir den Kalkul mit „Gruppen“ von Funktionalgleichungen, Algorithmen und Kalkuln, (sowie mit „Gruppen“ überhaupt,) indem wir uns der „extensiven“ Schreibung bedienten, bei welcher das Produkt der intensiven als Summe sich darstellte. Die Funktionalgleichungen waren aber blos eine gewisse Kategorie von Aussagen, und der fragliche Gruppenkalkul mochte, wie schon bei dessen Begründung Bd. 1, S. 618 angedeutet wurde, auch geradezu als „Aussagenkalkul“ schlechtweg aufgefasst werden. Die besondre Natur des gewählten Gruppensubstrates, nämlich der Funktionalgleichungen, brachte es mit sich, dass die Operationen der Negation und identischen Addition (in intensiver Deutung, nämlich der Alternativenbildung) als interesselos ausser Betracht blieben. Dafür aber drängte sich eine neue Operation oder Knüpfungsweise in den Vordergrund des Interesses, die wir extensiv schreibend als Multiplikation hinstellten, die wir aber, falls wir jetzt einmal bei der intensiven Schreibung des gewöhnlichen Aussagenkalkuls bleiben wollen, mit einem neuen, von $+$ und $\cdot$ verschiedenen Knüpfungszeichen darstellen werden. Wählen wir etwa ein Ringelchen $\circ$, gelesen: (*verknüpft*) „*mit*“, so wird, wenn A und B nun Aussagen (konstanten Sinnes) bedeuten, zur Verneinung A_1 und den Knüpfungen AB und $A + B$ der beiden Aussagen, als simultan bez. alternativ geltender, das Knüpfungsergebniss $A \circ B$ mit einer bestimmten Bedeutung hinzutreten, welche dann noch durch gewisse Nebenbestimmungen verschiedentlich regulirt werden kann. Und zwar wäre solche Regulirung logisch auf viererlei Weisen denkbar, von welchen aber nicht a priori ersichtlich ist, ob sie sämtlich sich haltbar erweisen, ob sie einen präzisen Sinn liefern und konsequent durchgeführt werden können; vielmehr steht dies nur von *einer* dieser Regulirungen von vornherein fest. — Es hätte nämlich $A \circ B$ zu bedeuten die Gesamtheit derjenigen Urteile, welche die sämtlichen denknotwendigen Folgerungen der Aussage A äusserlich gemein haben mit denen der Aussage B, — sei es schlechtweg, absolut genommen, sei es auch relativ, nämlich innerhalb eines Aussagenfeldes oder Universums U, das blos aus den Aussagen von einer bestimmt vorgeschriebenen Form besteht, die als Konsequenzen von A, B, $\cdots$ in Betracht gezogen werden, — und zwar die „denknotwendigen Konsequenzen“ entweder im absoluten Sinne, an sich, *ohne*, oder im relativen Sinne, *mit* Bezugnahme auf ein axiomatisch anerkanntes System von „Prinzipien $\mathfrak{P}$“ verstanden. *Mit* den beiden einschränkenden Relativitäten ist, wie unsere Anhänge geoffenbart haben, die Begriffsbestimmung sicherlich eine zulässige, der vollkommensten Präzision nicht ermangelnde. Und sofern sich ein gleiches auch für die drei andern Kombinationen (zwischen absolut und relativ in der einen und in der andern Hinsicht) herausstellen sollte, haben wir in Gestalt von $A \circ B$ jedenfalls eine Knüpfung vor uns, die für sich betrachtet eindeutig, kommutativ, assoziativ und dem Tautologiegesetze unterworfen ist, die in Bezug auf $\mathfrak{P}$ als die Null und U als die Eins „modulare“ Eigenschaften besitzt und endlich zu der (identischen oder intensiven) Aussagenmultiplikation in dem je nur einseitig als Subsumtion geltenden Zusammenhange steht:

$$(A \circ B)(A \circ C) \Subset A \circ (BC) \quad | \quad A(B \circ C) \Subset (AB) \circ (AC).$$

Zu den vier erwähnten Spezies käme vielleicht als Umkehrung der letzten Knüpfung noch eine fünfte hinzu; indess wäre zu untersuchen, ob nicht die Negation als unbedingt ausführbare Operation dann preisgegeben werden müsste. U. s. w. Es erscheint als eine Frage von hohem erkenntnisstheoretischem Interesse, welche Gestalt der Aussagenkalkul dann annehmen würde, und in welcher Richtung er sich weiter entwickeln liesse.

Schliesslich freue ich mich, noch das Wort zu haben zu einigen teils persönlichen teils sachlichen Bemerkungen, welche falschen Auffassungen des vorliegenden Werkes vorzubeugen geeignet sind, oder auch weitere Anregungen geben mögen.

Auf einem Felde, auf welchem schon so viele Forscher thätig gewesen und voraussichtlich noch thätig sein werden, kann es nicht ausbleiben, dass man über ein allgemein zu adoptirendes Bezeichnungssystem sich wird einigen müssen. In Bezug auf die arithmetischen Vergleichungszeichen, die Bezeichnung der Operationen und Elementarfunktionen der allgemeinen Arithmetik und höheren Analysis ist über die ganze civilisirte Erde solche Einigung glücklich erzielt. Dagegen auf dem Felde der exakten Logik sind zwar die meisten Bearbeiter darüber schon einig, welche Knüpfungen und Beziehungen als wesentliche vermittelst besondrer Zeichen dargestellt werden müssen; äusserlich aber gestaltet ein jeder sich diese Zeichen noch individuell nach seinem subjektiven Geschmacke.

Auch ich habe nicht umhin gekonnt, in manchen Einzelheiten es ebenso zu machen, und ich darf mir schwerlich mit der Hoffnung schmeicheln, dass gerade meine Bezeichnungsvorschläge allseitige Billigung und Annahme finden werden. Aber ich habe mir wenigstens angelegen sein lassen, dieselben sorgfältig zu motiviren, und glaube auch, von Bezeichnungen andrer Autoren, die vielleicht einigermassen rezipirt erschienen, immer nur dann abgewichen zu sein, wenn sachliche Gründe dazu drängten. So hoffe ich, wenigstens zu einer Klärung der einschlägigen Fragen beigetragen und auf die Erreichung jenes oben genannten wichtigen Zieles mit hingearbeitet zu haben.

Eine Zusammenstellung der von verschiedenen Autoren gebrauchten Bezeichnungsweisen, die eine Art „Schlüssel“ zur Lektüre der betr. Werke bildet, hat schon Herr Venn in [7] gegeben. Es wäre verdienstlich, diese Zusammenstellung bis zur Gegenwart fortzuführen und zu vervollständigen, noch mehr aber, damit eine Kritik dieser Bezeichnungsvorschläge zu verbinden.

Ich gestatte mir, beispielsweise über die Art, wie Herr Peano sich die wesentlichen Zeichen gestaltet, mich zur Stelle kritisch zu äussern. Nicht nur ist nämlich dieser Autor einer der begabtesten und thätigsten Forscher, welche die Methoden der exakten Logik auf immer mehr neue Anwendungsgebiete übertragen und in diesen erfolgreich verwerten, sondern derselbe ist auch neuerdings mit seinen Bezeichnungsweisen in deutsche mathematische Zeitschriften, bis in die „Mathematischen Annalen“, vorgedrungen.

Die Negation drückt Herr Peano aus vermittelst eines vorgesetzten verkürzten Minuszeichens; er schreibt $-a$ für unser a_1, Boole's $\bar{a}$. Dies kostet mehr Raum auf der Zeile, ist, besonders in der Schreibschrift, leicht mit dem Minuszeichen selbst, ev. auch mit dem Silbentrennungszeichen zu verwechseln, und zieht endlich vermehrte Anbringung von Klammern nach sich, z. B. schon beim Addiren und Multipliziren negirter einfacher Symbole. Aus diesen Gründen, die noch zu den in Bd. 1, S. 300 sqq. angeführten hinzutreten, kann ich diesem Vorschlag des Herrn Peano nicht beitreten.

Für die identische Null und Eins gebraucht Herr Peano in [1] zwei aparte Zeichen, nämlich einen ganz leeren und einen ganz geschwärzten Kreis vom Durchmesser der Nullenhöhe. Dies ist jedenfalls unverfänglich. Die identischen Zeichen 0 und 1 von den arithmetischen zu unterscheiden, kann peremptorisch geboten sein, lässt sich aber auch einfacher erreichen etwa durch Apostrophirung derselben da, wo sie als identische auftreten. — Später hat Peano die obigen Zeichen für 0 und 1 durch andere ersetzt, und zwar im Hinblick auf deren aussagenrechnerische Deutung die Aussageneins $\dot{1}$ durch V als den Anfangsbuchstaben von veritas oder verum, die Aussagennull durch ein umgestürztes V, nämlich das Zeichen Λ, zugleich erinnernd an den Anfangsbuchstaben A in absurdum. Auch Peirce bedient sich einmal der Zeichen eines fetten $\boldsymbol{v}$ und f (falsum). Bedenklich ist dies nicht; doch scheinen mir die Zeichen $\dot{0}$ und $\dot{1}$ oder 0' und 1' den Vorzug zu verdienen.

Für das identische Produkt ab und die identische Summe $a+b$ schreibt Peano (bei Klassen wenigstens):

$$a \frown b \quad \text{resp.} \quad a \smile b,$$

wobei man sich die leicht zu verwechselnden Zeichen $\frown$ und $\smile$ etwa durch die Bemerkung mnemonisch einprägen mag, dass das Zeichen $\smile$, wie eine Schaukel, die man zwischen a und b hin und her schwankend denkt, die Alternative zwischen beiden bezeichnen soll. Nur zwischen spezifizirten Aussagen lässt Peano sein Produktzeichen $\frown$ weg. *Für* die Zeichen $\frown$ und $\smile$ spricht, dass sie noch nicht anderweitig vergeben, einander dual entsprechend und von den numerischen Mal- und Pluszeichen deutlichst unterschieden sind; *gegen* dieselben, dass dabei der Zusammenhang mit den Zeichen Π und Σ der identischen Produktation und Summation, deren unsere Zeichensprache doch durchaus nicht zu entraten vermöchte, verloren geht, — ja, dass dann wol auch die ganze hierher gehörige Nomenklatur (Produkt, Multipliziren, mal, u. s. w.) als nicht passend zu erneuern wäre.

Statt unseres Subsumtionszeichens ⋹ wendet Herr Peano, — was sicher kein Vorzug ist, — meist *zweierlei* Zeichen an, nämlich zwischen Klassen ein ε als den Anfangsbuchstaben von ἐστί, „ist", zwischen Aussagen dagegen ein umgekehrtes C, also Ɔ, was erinnern soll an concluditur (è contenuto), und mit einem schon von Gergonne[1] gemachten Vorschlag nahe zusammenfällt. Ich glaube unwiderleglich dargethan zu haben, dass ein besonderes Zeichen für die letztere Beziehung entbehrlich, m. a. W. dass die Kopula der kategorischen Urteile auch für die hypothetischen verwendbar ist. Gegen Peano's ε aber ist einzuwenden, dass dies ein anderweitig, z. B. als Quantitätssymbol vielfach gebrauchter und beschlagnahmter Buchstabe ist, der sich als solcher in den Rahmen der Beziehungszeichen möglichst schlecht einfügt. — Allerdings bin ich auch überzeugt und habe es schon gelegentlich (Bd. 1, p. 482) ausgesprochen, dass man unter Umständen noch einer besonderen zweiten Art von Subsumtionszeichen bedarf, nämlich neben einem solchen für die ursprüngliche noch eines anderen für die abgeleitete Mannigfaltigkeit. So kann, wenn wie gewöhnlich a ⋹ b die Einordnung eines *Gebietes* a in ein *Gebiet* b ausdrückt, der Satz, dass das Gebiet a zur *Klasse* J der Individuen gehöre, oder dass a ein Punkt J sei, nicht zugleich durch a ⋹ J dargestellt werden. — Doch ist hiervon bei Peano nicht die Rede.

Endlich führt Herr Peano als Surrogat für die Klammern im Aussagenkalkul eine unbegrenzte Reihe von Zeichen ein, bestehend aus einem, zwei, drei, vier, fünf, ... Punkten:

$$.\,,\quad :\,,\quad \therefore\,,\quad ::\,,\quad \because\!\because\!.\,,\quad \text{etc.}$$

ich möchte sie „Trennungszeichen" nennen; ein mehrpunktiges Zeichen trennt alles, was in sich nur minderpunktige Trennungszeichen enthält, während schon die Wirkung des einpunktigen Zeichens sich über alle Beziehungs- und Knüpfungszeichen, z. B, $=$, $<$, $+$, ⋹ etc. hinweg erstreckt. Z. B. lautet unser Prinzip II hiernach

$$a ⋹ b \,.\, b ⋹ c :⋹ .\, a ⋹ c;$$

sollte das Ganze etwa als Anfangsglied einer komplizirteren Überlegung gelten, so wäre dahinter zunächst ein dreifaches Punktzeichen zu setzen. U. s. w. Die Formeln werden dadurch in der That übersichtlicher, indem dabei eine Überladung mit Klammern geschickt vermieden ist. Der Kunstgriff hat etwas Geniales und Bestechendes. Allein derselbe setzt voraus, dass man mit Peano sich durchweg enthalte, den Punkt als arithmetisches Malzeichen, sowie den Doppelpunkt als Divisionszeichen zu verwenden. Während Herr Peano ersteres Zeichen unausgedrückt lässt, stellt er den Quotienten $a : b$ „a durch b" mittelst vertikalen, leicht nach vorn geneigten Bruchstriches in der Gestalt a/b dar, — wie auch in englischen Zeitschriften (Math. Questions etc.) schon zuweilen geschehen. (Ich habe selbst anderwärts[3] hervorgehoben, dass die Eleganz fordern kann, in solchem Falle den Nenner regelmässig dem Zähler voranzustellen, wozu man den leicht rückwärts geneigten Vertikalstrich — sogar daneben noch — verwenden könnte: $a|b$ „a in b“ für $\frac{b}{a}$.) — Damit ist nun aber die Schwäche des Peano'schen Vorschlages zutage getreten: Die erwünschte allgemeine Annahme des neuen logischen Bezeichnungssystems hätte zur Vorbedingung die Abschaffung der beiden in der gesamten mathematischen Welt schon allgemein eingebürgerten Multiplikations- und Divisionszeichen! Da behelfen wir uns doch lieber noch mit den runden, eckigen, geschweiften, grossen und kleinen Klammern und gehen nicht ohne Not von den schon bestehenden Bezeichnungsgepflogenheiten ab.

Ein zeitgemässes und hochverdienstliches Unternehmen dürfte sein: eine *Geschichte* der gesamten bisherigen Bestrebungen auf dem Felde der exakten Logik, die ja bereits in frühere Jahrhunderte zurückreichen. Brauchbares Material hiezu glaube ich hier in Gestalt von Literaturangaben und kritischen Darlegungen vielfach geliefert zu haben. Andererseits sei es aber doch auch einmal ausgesprochen, dass mir hier ein solches Ziel fern gelegen; ich wünschte, den Entwicklungsgang unserer Disziplin zu fördern, nicht aber darzustellen, oder — wenn ich ein stolzes Wort gebrauchen darf — Geschichte zu machen, nicht zu schreiben.

Andernfalls hätte ich auf eine Menge von in unserem Literaturverzeichniss aufgeführten Erscheinungen ausführlich eingehen müssen — wie de Castillon[1], Delboeuf[1], Macfarlane[1] und andere, — die ich nur flüchtig oder gar nicht gestreift habe, weil mir das in ihnen Niedergelegte als eine vorübergehende Entwicklungsphase oder anderweitig überholt erschien.

Im Anschluss hieran möchte ich diejenigen unter den lebenden Mitarbeitern unserer Disziplin, welche vielleicht das von ihnen selbst Geleistete hier zu wenig berücksichtigt oder hervorgehoben finden möchten, bitten, sich nächst Vorstehendem noch zweierlei vergegenwärtigen zu wollen. Einmal würde die Wertschätzung ihres eigenen objektiven (nicht subjektiven) Verdienstes sich wol oft noch erheblich verschieben, wenn sie zu einem Überblick über die Gesamtheit aller einschlägigen Leistungen zu gelangen trachteten, und sie wird, wie ich überzeugt bin, sich der meinigen nähern, sobald diese Autoren auch nur das vorliegende Werk sorgfältig durchgearbeitet haben werden. — Es braucht nicht betont zu werden, dass ich von Personen absehend immer nur das Interesse der Sache im Auge hatte.

Sodann ist es in der That gerade auf dem Gebiete des Selbstverständlichen, Denknotwendigen besonders schwierig, allen Prioritätsansprüchen vollkommen gerecht zu werden, bei Darlegung von Dingen, auf die so Viele — in mehr oder minder abweichender Form — selbständig verfielen, diese Letzteren allemal vollzählig zu nennen und unzweifelhaft festzustellen, wer eine solche Wahrheit erstmals ausgesprochen.

Beispielsweise erscheint als Grundpfeiler unseres Lehrgebäudes Herrn Peirce's Definition (3). Ich schreibe sie diesem Autor zu, obwol schon *vorher* Herr Mc Coll ebendieselben Sätze, die in verbaler Fassung als selbstverständliche sicherlich längst Gemeingut aller eine Sprache Sprechenden waren, auch in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls formulirt hatte. Als das wesentliche Verdienst erscheint mir nämlich die Stellung, welche Herr Peirce diesen Sätzen im System der Logik anwies, indem er sie eben zu grundlegenden Definitionen erhob. — Ebenso glaube ich, den Satz Th. 46), dass die Negation einer entwickelten Funktion zu gewinnen durch Negiren der Koeffizienten, mir selbst zusprechen zu dürfen, obwol ich nachträglich innegeworden, dass für den Fall *eines* Arguments derselbe beinahe zusammenfällt mit einem von Herrn Peirce schon früher publizirten Satze, dem Th. $\varkappa$) von Bd. 1, S 376:

$$(a + x_1)(b + x) = ax + bx_1;$$

die aufgrund der Theoreme 36) und 31) naheliegende Anmerkung, dass hier die linke Seite die Negation von $a_1 x + b_1 x_1$ vorstellt, ist das noch fehlende Glied der Kette, die letzte Sprosse zur Leiter der Wahrnehmung meines Theorems — abgesehen von der Ausdehnung auf mehr Argumente. —

Immerhin ist ein Übersehen, eine Ungerechtigkeit meinerseits nicht ausgeschlossen bei der schon so ausgedehnten Literatur über den Gegenstand, welche nicht nur eine vielsprachige ist im gewöhnlichen Sinne, sondern auch infolge des Gebrauchs der verschiedenartigen Bezeichnungssysteme gleichsam die Entzifferung von mancherlei Geheimschriften erfordert, — ganz abgesehen von Schwierigkeiten anderer Art, mit denen man zu kämpfen hat, um sich alle Erzeugnisse dieser weit zerstreuten Literatur überhaupt nur zugänglich zu machen. Die durchaus und allseitig befriedigende Bewältigung der damit angedeuteten Aufgabe würde nicht nur ein aussergewöhnliches Gedächtniss, sondern auch eine Sammlung und Musse zur Konzentration des Geistes erfordern, wie sie die mannigfaltigen Berufsgeschäfte wol selten einem Autor bewilligen. — Ich werde jede etwaige Berichtigung dankbar anerkennen und nach Kräften zur Geltung bringen. Die letzte Hand an das Werk der ausgleichenden Gerechtigkeit zu legen, wird der Geschichtsschreibung überlassen bleiben.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

§ 53. **Meine Kontroverse mit Frau Franklin-Ladd ein lehrreiches Kapitel.**

Zur Anbahnung und Verbreitung eines richtigen Verständnisses der hier vorgetragenen Aussagentheorie dürfte wesentlich beitragen die Darlegung meiner einschlägigen Kontroverse mit Frau Franklin-Ladd, woran sich alsdann noch eine zweite von mehr allgemeinlogischem Interesse anreihen wird.

Mit Geschick griff Frau Franklin-Ladd einen gewissen wesentlichen Teil jener Theorie auf das heftigste an — zuerst im Sommer 1891 im persönlichen Gedankenaustausch und sodann später auch brieflich, und forderte mich so zur Verteidigung heraus. Die Kontroverse ist seitdem auch eine öffentliche geworden durch die Besprechung meines ersten Bandes in der Zeitschrift „Mind", worin Frau Franklin-Ladd[3] auf den Inhalt des zweiten Bandes abschweift und mir dabei einen handgreiflichen Irrtum, einen „distinct error" vorwirft. Wenn sie mir übrigens ebendaselbst einen Beweis dafür zuschreibt, Subtraktion und Division seien unausführbare Operationen, und schon diese Namen seien sinnlose, so muss sie mich wol mit Robert Grassmann verwechselt haben, gegen dessen einschlägige Ausführungen ich oben S. 455 f. ankämpfe.

Die Angriffe richteten sich zunächst gegen die Konsequenzen, die ich S. 66 und 68 in Gestalt der Sätze

1) $$(A \neq 0) = (A = 1),$$

2) $$(A \neq B) = (A = B_1) = (A_1 = B)$$

aus dem Peirce'schen von mir als „spezifisches Prinzip des Aussagenkalkuls" bezeichneten Satze

3) $$(A = 1) = A$$

gezogen habe; sie kehrten sich später gegen dieses Prinzip selbst. Da Frau Franklin meinen „Fehler" nicht direkt aufweisen konnte, suchte sie meine Sätze mit ungemeinem Scharfsinn durch Beispiele ad absurdum zu führen. Eben diese Beispiele und deren Richtigstellung erachte ich für äusserst lehrreich. Es ist vorauszusehen, dass ähnliche Einwände vielfach auch noch von andern Seiten zur Bekämpfung des

Logikkalkuls vorgebracht werden, und da dieselben oft etwas Bestechendes oder Verblüffendes haben, so mag es sich empfehlen, hierdurch die eine oder andere Waffe dagegen an die Hand zu geben.

Einwürfe von Frau Franklin gegen die Gültigkeit von 1) und 2).

α) Jemand will in Abrede stellen die Richtigkeit der Behauptung: „Es trifft immer zu (It is always the case), dass einige Ärzte fehlgehen" (that some doctors are mistaken), mithin der Behauptung

α_1) $$(dm \neq 0) = 1,$$

sofern d die Ärzte (Doktoren) und m die menschlich Irrenden bezeichnet.

Die „wahre Verneinung" (true denial) wird sein: Es kommt vor, dass kein Doktor fehlgeht (there are times, when no d is m), sonach

α_2) $$(dm = 0) \neq 0,$$

wogegen „meine Ableugnung" (Schröder's denial) obiger Behauptung lauten würde, und auch in der That nach Satz 1) lauten muss:

α_3) $$(dm \neq 0) = 0,$$

d. h. Es kommt niemals vor (it never happens), dass es Ärzte gibt, die fehlgehen; kein Arzt ist jemals im Irrtum („no doctors" are ever mistaken)!

Also Satz 1) ist falsch.

Meine Entgegnung: Sie vergessen, gnädige Frau, dass wir nur mit *wohldefinirten* Klassen rechnen (Bd. 1, S. 162). Von *welchen* Ärzten wollen Sie denn reden? Von denen, die heute ein gewisses Krankenbett umstehen, oder von andern, oder vielleicht von allen Ärzten, die es je gegeben hat und noch geben wird? — Es wurde letzteres festgesetzt. — Nun gut, dann frage ich: *haben* schon Ärzte sich getäuscht, gibt es solche, die fehlgehen? Schwerlich möchte dies jemand verneinen. Dann aber ist also die Behauptung α_1) richtig, und wird ewig richtig bleiben: Die Klasse der sich irrenden Ärzte ist keine leere. Wer dies aber bestreiten wollte, der müsste diese Klasse als leere hinstellen, somit in der That behaupten, dass jeder Arzt unfehlbar wäre.

Ausdrücke wie: es trifft überall zu, es kommt stets vor, ist durchweg der Fall, it happens, it occurs, there are times when $\cdots$, etc. entsprechen nicht genau der Anwendung der Aussageneins und verleiten dazu, die Subjektklasse der Aussage in schwankendem Sinne zu nehmen, wie in unserem Beispiel, sie verschiedentlich auf die Ärzte bald an diesem, bald an jenem Krankenbette, seien es die von gestern, seien es andre von heute, einschränkend zu beziehen.

Der gleiche *Übersetzungsfehler* wie bei α_1) liegt vor bei Formel α_2), welche zufolge des umstrittenen Satzes 1) sich umschreibt in

$$(dm = 0) = 1$$

und in dieser Gestalt durch beiderseitiges Negiren (Kontraponiren) mit α_3) übereinkommt.

Man könnte hiezu bemerken, die obigen Aussprüche in Worten seien doch unmittelbar aus dem gewöhnlichen Leben und Denken hergenommen und ganz richtig gebildet, und darum spreche der gerügte Umstand, dass sie nicht durch Formeln wie α_1) etc. dargestellt werden können, nicht sowol gegen jenen Gebrauch der Wortsprache, als vielmehr gegen die Brauchbarkeit der Formeln. — Letzteres ist eine Frage für sich. Handelt es sich aber um die Gültigkeit oder Widerlegung allgemeiner Formelsätze 1) etc., so können dazu verbale Aussprüche natürlich nur insoweit taugen, als sie eben mit den angezogenen Formeln klappen.

So wurde mir denn auch nur zugegeben, in einem gewissen „weit abliegenden" Sinne (in a certain remote sense) sei meine Ausführung richtig.

β) Andrer Einwurf von Frau Franklin-Ladd. Es bedeute A das Urteil: Alle Ärzte irren, B das: Alle Patienten sterben; zu entscheiden sei, ob die Behauptung

$$A = B$$

gilt oder nicht. Dieselbe besagt: Immer dann und nur dann (when and only when), wenn alle Ärzte irren, sterben alle Patienten.

Die „wahre Verneinung" wäre: Das ist nicht so; denn es gibt Fälle (times), wo alle Ärzte irren und doch nicht alle Patienten sterben, oder aber auch solche, wo nicht alle Ärzte irren und dennoch alle Patienten sterben, — entsprechend dem Ansatze

$$AB_1 + A_1B \neq 0.$$

Da ich nun aber hierfür gemäss Satz 1) schreibe:

$$AB_1 + A_1B = 1,$$

oder auch direkt nach dem Schema

$$(A = B)_1 = (A \neq B) = (A = B_1) = (A_1 = B)$$

von Satz 2) müsse nun meine Verneinung lauten: Immer dann und nur dann, wenn alle Ärzte irren, sterben nicht alle Patienten; oder: Ausschliesslich dann, wenn nicht alle Ärzte irren, sterben alle Patienten.

Da nun die ursprüngliche Aussage $A = B$ in der That zu verneinen, meine Verneinung aber widersinnig sei, so müsse, folgert Frau Franklin-Ladd, diese Verneinung inkorrekt gebildet sein.

Entgegnung. Zuvörderst muss ich wieder Verwahrung dagegen einlegen, dass der Ausdruck „Alle Ärzte" schwankend bald auf diese, bald auf jene Gruppe von Ärzten angewendet werde; am einfachsten versteht man wol darunter die Ärzte überhaupt, wie oben bei α). — Ein gleiches muss ich hinsichtlich der Patienten verlangen. Auch dürfen wir, nachdem von Ärzten die Rede war, nicht etwa von *deren* Patienten sprechen, da wir sonst zur korrekten Einkleidung schon der ursprünglichen Aussage erst in die Logik der Relative eintreten müssten. Noch weniger darf ein kausaler Zusammenhang unterstellt werden, als ob etwa gesagt sein sollte, dass die Patienten alsbald zufolge der ärztlichen Behandlung stürben.

Nun — dann, meine ich, ist die Aussage B zweifellos zu bejahen: schliesslich sterben ja alle Patienten nicht nur, sondern überhaupt alle Menschen. Also $B = 1$.

Würde man nun nach dem „Errare humanum est" ganz in gleichem Sinne auch die Aussage A gleich 1 setzen, so wäre also die Aussage $A = B$ zu bejahen. Dann wäre aber auch nicht zu verwundern, dass die Verneinung absurd erscheint, indem sie auf $1 = 0$ hinausliefe.

Allein es könnte ja auch sein, dass es Ärzte gibt, die in ihrem Leben niemals fehlgehen. Dann ist $A = 0$ zu setzen und $A = B$ zu verneinen, die Verneinung dazu also richtig. Dieselbe kommt in der That in der Form $A = B_1$ auf $0 = 0$, in der andern $A_1 = B$ auf $1 = 1$ hinaus: dass alle Ärzte irren, gilt immer dann und nur dann, wenn nicht alle Patienten sterben, da beides nämlich nie gilt, u. s. w.

γ) Frau Franklin-Ladd forderte mich heraus, überhaupt nur einen verbalen Satz aufzustellen, in welchem das Theorem 2) sich als richtig erwiese.

Ich gestehe, dass dies seine Schwierigkeiten hat wegen der Unterstellungen, zu denen die Wortsprache fast allerorten verleitet, und die nach den Postulaten des Kalkuls auszuschliessen oder doch erst mit korrektem Ausdruck in die Zeichenformulirung aufzunehmen sind. Sofern das vorstehende Beispiel β) nicht für genügend erachtet wird, will ich jedoch mit noch einem Beispiel auf die Herausforderung antworten.

Sei A die Behauptung: Die Materie ist unzerstörbar, B die: Die Seele ist unsterblich.

So gilt für einen Anhänger des Unsterblichkeitsglaubens das Urteil

$$A = B$$

als ein auf $1 = 1$ hinauslaufendes: Immer dann und nur dann, wenn die Materie unzerstörbar ist, (das ist: stets,) ist die Seele unsterblich.

Ein Agnostiker oder Materialist will diesen Satz bestreiten. Er gibt zwar die Unzerstörbarkeit des Stoffes zu, ist aber der Überzeugung, dass die sogenannte Seele als blosser Merkmalkomplex ihres Körpers mit diesem zugleich der Zerstörung anheimfalle. Für ihn wird also $A = 1$, $B = 0$ und $A \neq B$ sein; zugleich wird derselbe aber damit auch die beiden Aussagen anerkennen:

$$A_1 = B \text{ und } A = B_1,$$

deren erste mit $0 = 0$, deren letzte mit $1 = 1$ übereinstimmt; in Worten: Ausschliesslich dann, wenn die Materie zerstörbar ist, wird die Seele unsterblich sein, (beides nämlich gilt *nie*,) resp.: Ausschliesslich dann, wenn die Materie unzerstörbar ist, ist die Seele sterblich, (nämlich immer.)

Ich habe hierbei als Negation des Satzes: „Die Seele ist unsterblich" der gewöhnlichen Gepflogenheit und der Bequemlichkeit des Ausdrucks zuliebe den Satz gelten lassen: „Die Seele ist sterblich", und bin ähnlich auch bei der Verneinung des andern der beiden Teilsätze vorgegangen, — was aber, wie anderwärts schon von mir ausgeführt, keineswegs korrekt ist. Es könnten ja auch *einige* Seelen — die „der Gerechten" z. B. „in den Himmel kommen", dagegen andere, die der unbekehrten Sünder, dem Nirwana anheimfallen, — nebenbei gesagt Möglichkeiten, dergleichen die „*Logik des Inhaltes*" begreiflicherweise regelmässig zu übersehen pflegt!

δ) Ein vorzüglicher Vorhalt der Frau Franklin-Ladd ist dieser:

Ein schlechter Mathematiker sagte eines Tages: Die Thatsache (A), dass zwei Dreiecke zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen von ihnen bezüglich gleich haben, ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (B) die Dreiecke kongruent sind. (Bekanntlich ist sie nicht hinreichend, sondern es ist dazu, nach dem sog. vierten Kongruenzsatze noch ausserdem erforderlich, dass es die grössere von den beiden als gleich bekannten Seiten sei, deren Gegenwinkel in beiden Dreiecken übereinstimmen). Professor Schröder wünschte die Behauptung $A = B$ jenes Mathematikers zu bestreiten; er sah sich aber nach seinem Satze 2) genötigt, dies in der Gestalt der Gegenbehauptung

$$\text{sei es } \quad A_1 = B, \quad \text{sei es } \quad A = B_1$$

zu thun; das heisst:

Dass zwei Dreiecke *nicht* zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen gleich haben, ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Dreiecke kongruent sind, resp. gar:

Dass zwei Dreiecke zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen gleich haben, ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese Dreiecke *nicht* kongruent sind!

Nein, so etwas spricht doch für sich selbst!

Meine Entgegnung. Gemach, gnädige Frau. Um recht behutsam zuwerke zu gehen, wollen wir erst einmal von zwei ganz bestimmten Dreiecken sprechen. Dass in beiden Urteilen A und B *die nämlichen* beiden Dreiecke gemeint sind, lässt sich in der Zeichensprache der Algebra der Logik nicht zum Ausdruck bringen, ist also in den Inhalt der Urteile selbst aufzunehmen. Es soll daher A etwa das Urteil bedeuten: Die Dreiecke abc und $a'b'c'$ stimmen überein in zwei Seiten $bc = b'c'$, $ac = a'c'$ und dem Gegenwinkel $a = a'$ der ersteren von ihnen; und B das Urteil: Die Dreiecke abc und $a'b'c'$ sind kongruent.

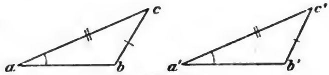

Fig. 31.

Haben wir alsdann die Dreiecke der Fig. 31 im Sinne, so ist $A = B = 1$, die Behauptung $A = B$ zutreffend und die Verneinung in ihren beiden Formen $A_{,} = B$ und $A = B_{,}$ unrichtig. Haben wir dagegen die Dreiecke der Fig. 32 im Auge, so ist $A = 1$, $B = 0$, also die Behauptung $A = B$ zu verneinen; es ist also

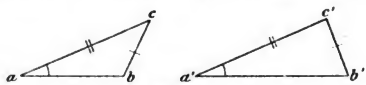

Fig. 32.

$A \neq B$, und damit ganz richtig $A_{,} = B$ und $A = B_{,}$, nämlich auf $0 = 0$ resp. $1 = 1$ hinauskommend.

Also im speziellen Fall bewahrheitet sich mein Satz 2)!

Gehen wir nun zu unserm allgemeinen Satze über, so kann ich Ihnen, gnädige Frau, den Vorwurf nicht ersparen, einen *„Fehlschluss aus unzulänglicher Bezeichnung“* (fallacy of insufficient notation) begangen zu haben. (Über diesen vergl. weiter unten.).

In der Aussagenäquivalenz $A = B$ schlechthin ist nämlich, nachdem die Aussagen A und B wie vorstehend genauer präzisirt sind, noch gar nicht ausgedrückt, dass das, was wir soeben an den beiden Figuren bald als zutreffend, bald als nicht zutreffend erkannt haben, von *jedem* beliebigen Dreieckpaar abc und $a'b'c'$ behauptet sein solle. Will man aber gerade die Allgemeingültigkeit bestreiten, so muss dieselbe zuvor in der Formel ihren zulänglichen Ausdruck nach § 30 finden, indem man der Behauptung $A = B$ ein Produktzeichen vorsetzt:

$$\prod_{a,b,c,\,a',b',c'} (A = B), = 1,$$

welches die Geltung von $A = B$ verlangt, wie immer auch die sechs Punkte a, b, c, a', b', c' als Ecken von zwei Dreiecken im Raum gewählt werden mögen.

Nun erweist sich aber die Negation dieser vollständig angesetzten Behauptung in allen ihren Formen als richtig, nämlich nach Satz 1) in der Form

$$\Pi(A = B) = 0,$$

wo das Produkt schon verschwindet, weil mindestens der auf Fig. 32 bezügliche Faktor $(A = B)$ gleich 0 ist; oder gemäss 2), indem man das Produkt links negirt:

$$\Sigma(A \neq B) = 1$$

oder

$$\Sigma(A_1 = B) = 1, \quad \Sigma(A = B_1) = 1,$$

nach Th. 22_+), schon weil mindestens der auf Fig. 32 bezügliche Summand $(A \neq B)$ etc. erfüllt, $= 1$ ist.

ε) Ein interessantes Gegenstück zum vorigen bildet der folgende Einwurf, dessen Grundgedanken von Frau Franklin herrührt.

Eine samt ihren beiden Umkehrungen eindeutige Knüpfung, welche jeweils aus zwei in bestimmter Ordnung genommenen Elementen eines Zahlengebietes ein drittes erzeugt, werde einfachst dargestellt als ab, und ihre eine Umkehrung als $a : b$ — vergl. Schröder[8].

Alsdann wird, wenn die Knüpfung etwa das Gesetz befolgt:

$$\varepsilon_1) \qquad ab = a : b,$$

dieselbe augenscheinlich auch dem Gesetz unterliegen:

$$\varepsilon_2) \qquad (ab)c = (a : b) : c,$$

das heisst: aus der ersten Gleichung, als allgemeine Formel aufgefasst, folgt jedenfalls die zweite.

Es war die Frage, ob auch das umgekehrte der Fall ist, ob also beide Gleichungen allgemein äquivalent sein müssen.

Der wirkliche (the real) Dr. Schröder — meint Frau Franklin — hat gezeigt, dass diese Frage zu verneinen ist, indem er in Bd. 1, S. 640 eine Funktionstafel nachwies mit einer Knüpfung, welche wol der zweiten ε_2), nicht aber der ersten Formel ε_1) Genüge leistet.

Ein theoretischer (an imaginary) Dr. Schröder, — der nämlich auf dem Prinzip 3) nebst Konsequenzen 1) und 2) herumreitend gedacht wird, — ist genötigt, die Verneinung der Frage von der Äquivalenz beider Formeln auszudrücken durch

$$\{(ab)c = (a : b) : c\} = \{ab \neq a : b\},$$

wonach die Geltung der (zweiten) Formel ε_2) links die notwendige und hinreichende Bedingung dafür wäre, dass die erste ε_1) nicht gelte, also dass, wo immer jene zutrifft, diese nicht gilt, und umgekehrt, — in offenbarem Widerspruch mit voraus bemerktem.

Richtigstellung. ε_3) verneint korrekt blos die für gewisse drei Zahlen a, b, c in Frage gestellte Aussagenäquivalenz. Die Allgemeingültigkeit von ε_1) und ε_2) muss schon ihren zulänglichen Ausdruck gefunden haben, bevor deren Äquivalenz als gleichfalls allgemein bestehend behauptet bezw. verneint wird. Die fragliche bezw. zu verneinende Äquivalenz lautet:

$$\varepsilon_4)\qquad \prod_{a,\,b,\,c} \{(ab)c = (a:b):c\} = \prod_{a,\,b} \{ab = a:b\},$$

worin die Produkte auszudehnen sind über alle Wertetripel a, b, c bez. Wertepaare a, b des Zahlengebietes, (und wobei rechts auch andre Buchstaben d, e für a, b genommen werden könnten,) und somit die Verneinung von ε_4) nach Schema 2):

$$\prod_{a,\,b,\,c} \{(ab)c = (a:b):c\} = \sum_{a,\,b} \{ab \neq a:b\}.$$

Diese wird aber nun eben durch die Tafel S. 640, Bd. 1 bewahrheitet, indem in dieser Tafel die Annahme linkerhand, oder ε_2), durchweg erfüllt ist, zugleich aber auch die Behauptung der rechten Seite, so zwar, dass sogar, — was keineswegs erforderlich gewesen wäre, — *jedes* Glied dieser Summe für sich $= 1$ ist, d. h. ε_1) niemals zutrifft.

ζ) Einwurf von Frau Franklin. Von den einem Kreis eingeschriebenen Polygonen gilt bekanntlich folgendes: so oft ein solches gleiche Seiten hat, hat es auch gleiche Winkel; dagegen können die Winkel gleich sein, ohne dass es die Seiten wären. Beispiel: ein Rechteck. — Die Gleichwinkligkeit solcher Kreisvielecke ist also notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ihre Gleichseitigkeit, und die Gleichseitigkeit ist hinreichende, jedoch nicht notwendige Bedingung der Gleichwinkligkeit.

Sonach wird die Behauptung, dass beim Kreispolygon die Gleichseitigkeit und die Gleichwinkligkeit einander gegenseitig bedingten,

(Die Seiten sind gleich) = (Die Winkel sind gleich),

eine unrichtige sein. Professor Schröder ist ein viel zu guter Mathematiker, um solch falsche Behauptung passiren zu lassen; er will sie leugnen; durch seinen Satz 2) hat er sich nun aber in die fatale Lage gebracht, dies in der Form thun zu müssen:

(Die Seiten sind ungleich) = (Die Winkel sind gleich),

d. h. immer dann und nur dann, wenn die Seiten ungleich sind, müssen die Winkel gleich sein, — eine Aufstellung, die begreiflicherweise noch viel schlimmer ist als jene, die damit berichtigt werden sollte.

Entkräftung — ähnlich wie bei δ): Wiederum wurde die ursprüngliche Behauptung, sagen wir $A = B$ blos in ihrer Anwendung auf ein besonderes Kreisvieleck P negirt, das Negationsergebniss aber für jedes Kreisvieleck in Anspruch genommen. Ist P das nächste beste *regelmässige* Vieleck, so war $A = B$ zutreffend und somit $A_1 = B$

falsch; bedeutet dagegen P z. B. ein Rechteck, in welchem zwar $B = 1$, aber $A = 0$ ist, so erweist sich die Verneinung von $A = B$ in jeder der beiden Formen $A_1 = B$ und $A = B_1$ als richtig. Soll endlich der allgemeine Satz negirt werden, so ist derselbe zuvor als allgemein gültiger hinlänglich auszudrücken in der Gestalt

$$\prod_P (A = B),$$

wo das Produkt zu erstrecken ist über alle erdenklichen Kreisvielecke P. Die Negation nach 2)

$$\sum_P (A \neq B), \quad = \sum_P (A_1 = B), \quad = \sum_P (A = B_1)$$

ist erfüllt, wenn auch nur ein einziges P, z. B. ein Rechteck, gleichwinklig ist, ohne gleichseitig zu sein.

η) Als letztes Einwurfsbeispiel von Frau Franklin sei noch folgendes erwähnt: Es bedeute A den Komplex aller Prinzipien und Definitionen des logischen Kalkuls, soweit sie in Bd. 1 bis zur Seite 291 dargelegt worden, — und B das volle Distributionsgesetz

$$B = \{a(b + c) = ab + ac\}.$$

Alsdann hat Schröder gezeigt, dass B nicht aus A notwendig folgt, m. a. W. dass

$$A \Subset B \quad \text{oder} \quad AB_1 = 0$$

verneint werden muss, in der Form

$$AB_1 \neq 0,$$

insofern Fälle nachgewiesen wurden, wo A erfüllt, B aber nicht erfüllt ist. — Nach Schröders Satz 1) wird daraus nun aber

$$AB_1 = 1 \quad \text{oder} \quad A_1 + B = 0$$

(durch Kontraposition), oder endlich durch beiderseitige Multiplikation mit A

$$AB = 0;$$

das heisst: Die Wahrheit von A ist inkonsistent, unverträglich mit derjenigen von B!

Behufs Richtigstellung hat man hier vielmehr die Aussage

$$A \Subset \prod_{a,b,c} B$$

zu verneinen, und erhält dann

$$A \cdot \prod B = 0$$

als richtigen Ausdruck der Inkonsistenz von A mit B nicht für alle möglichen Wertetripel a, b, c, sondern nur für irgend welche unter ihnen.

Moral: Soll eine *allgemeine* Formel C negirt werden, so bringe man zuvor die angebliche Allgemeingültigkeit zum Ausdruck mittelst eines Π-Zeichens; es wird dann

$$(\Pi C)_1 = \Sigma C_1.$$

Wer aber die Negation C_1 von C selbst wieder mit der gleichen Allgemeinheit auslegt und in Anspruch nimmt, der stellt als Negation von ΠC im Grunde ja ΠC_1 hin; der verwechselt den Fall, dass ein Urteil *nicht allgemein* gilt, mit dem andern Fall, dass es *allgemein nicht* gilt.

Abgesehen aber von derartigen Fällen wird man das Zeichen Π der Allgemeingültigkeit keineswegs immer anwenden, sondern vielmehr durchweg den Charakter der Gleichungen als „Formeln" stillschweigend unterstellen.

Mit ihren Angriffen, wie vorstehend dargelegt, zurückgeschlagen, gab Frau Franklin schliesslich zu, dass in dem Aufbau unseres Aussagenkalkuls kein Fehler vorliege, und zog sich auf eine andre Position zurück, die sie umso hartnäckiger verteidigte — und noch verteidigt, — und in der es wiederum sehr instruktiv sein wird sie aufzusuchen.

ϑ) Bevor ich dies thue, möchte ich nur in Kürze über den *„Fehlschluss aus unzulänglicher Bezeichnung"* mich versprochenermassen äussern, was umso angezeigter erscheint, als das praktisch höchst wichtige Kapitel der Fehlschlüsse in meinem so sehr angeschwollenen Buche ohnehin zu kurz kommt.

Von den allergröbsten Versehen, z. B. Schreibfehlern, abgesehen ist unzulängliche Bezeichnung der Gegenstände einer Überlegung im Grunde vielleicht ausschliesslich schuld an allen Fehlschlüssen. Entspringen dieselben doch fast immer daraus, dass man Verschiedenes und zu Unterscheidendes nicht auseinanderhält, vermengt oder verwechselt, getäuscht durch einen Doppelsinn, eine scheinbare Synonymie u. dergl. (Selbst wenn etwa in anderen Fällen ein Fehlschluss zustande kommt dadurch, dass man Wesentliches ausser acht lässt, so wird zumeist eine zu wenig markirte, nicht genügend augenfällige Bezeichnung solcher übersehener Prämissenglieder die Schuld oder Mitschuld daran tragen.) — So sahen wir soeben, dass ein Satz ganz gleich klingen kann, ob man ihn als allgemeinen hinstellt, oder ihn blos auf den speziellen Fall anwendet.

Ich will den Fehlschluss und die Art, wie derselbe zu Paradoxien zu führen pflegt, durch zwei Beispiele verdeutlichen.

In einer arithmetischen Untersuchung, bei der man längere Zeit mit vielgliedrigen (oder auch unbegrenzten) Summen

$$a + b + c + d + \cdots, \quad x + y + z + \cdots, \quad u + v + w + \cdots$$

etc. zu rechnen hat, seien diese Summen der Bequemlichkeit wegen vermittelst ihres ersten Gliedes dargestellt in Gestalt von resp.

$$\Sigma a, \quad \Sigma x, \quad \Sigma u, \quad \text{etc.}$$

Für einen zu betrachtenden besonderen Fall nun mag es sich ereignen, dass

$$x = a$$

wird. Wer daraus aber, nach dem unbestreitbaren Grundsatz: Gleiches, summirt, gibt Gleiches, auf

$$\Sigma x = \Sigma a$$

schliessen wollte, beginge einen gröblichen Fehlschluss, da in beiden Summen wol die ersten Glieder übereinstimmen, darum aber noch nicht notwendig auch die übrigen. — Und wer andererseits richtig

$$\Sigma x \neq \Sigma a$$

neben $x = a$ anerkennte, stiesse auf die Paradoxie eines (natürlich nur scheinbaren) Widerspruches zu obigem Grundsatze, (oder wol auch zu dem andern Grundsatz, dass Gleiches für Gleiches gesetzt werden dürfe).

All diese Schwierigkeiten entspringen aus dem Umstand, dass eine Summe durch ihr erstes Glied nur unzulänglich bezeichnet ist.

Das zweite Beispiel — von Herrn Lüroth — bezieht sich auf einen Satz der Differentialrechnung, bei dessen Anwendung der Anfänger Schwierigkeiten zu finden pflegt; letztere beruhen auf der Unzulänglichkeit der gebräuchlichen Bezeichnung partieller Differentialquotienten. Ist z. B. f eine Funktion dreier Argumente x, y, z:

$$f = f(x, y, z),$$

und werden durch die Substitutionen

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

für x, y, z neue Variable u, v, w in

$$f = f(\varphi, \psi, \chi)$$

eingeführt, so besagt der gedachte Satz:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

und analog für $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$. — Nimmt man nun beispielsweise

$$x = u, \quad y = uv, \quad z = w,$$

so ergibt sich leicht:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v, \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die letzte Gleichung scheint aus $w = z$ als selbstverständliche zu folgen. Dem gegenüber enthält jedoch die erste das Paradoxon, dass

$$\frac{\partial f}{\partial u} \neq \frac{\partial f}{\partial x}$$

obwol $u = x$ ist, — entgegen dem evidenten Grundsatze, dass Gleiches nach Gleichem differenzirt Gleiches geben müsse, oder dass man Gleiches für Gleiches setzen dürfe. (Daran würde sich nichts ändern, wenn man für das in u, v, w ausgedrückte f etwa F schreiben wollte, da ja auch dann $F(u, v, w) = f(x, y, z)$ bliebe).

Dies liegt hier daran, dass es beim Differenziren nach einer Variabeln nicht blos auf diese, sondern auch auf die andern Variabeln begriffsmässig ankommt, welche dabei als Konstante angesehen werden. Gibt man daher — etwa unterhalb des Differentialquotienten — noch das ganze beim Differenziren zugrunde gelegte System der unabhängigen Variabeln an, so kann man in obigem Falle unbedenklich x und u vertauschen:

$$\underset{(x,y,z)(u,y,z)}{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}}, \qquad \underset{(u,v,w)(x,v,w)}{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Erst dies ist die *zulängliche Bezeichnung partieller Differentialquotienten.* Freilich ist sie zu umständlich und schwerfällig und höchstens in verworrenen oder schwierigen Fällen zum vorübergehenden Gebrauch zu empfehlen, — ähnlich wie in der algebraischen Logik das so oft in Gedanken zu unterstellende Π- Zeichen für gewöhnlich wegbleibt.

So wenig Erfolg aber heute noch jemand sich versprechen könnte, der etwa eine Paradoxie wie die obige als ein Argument gegen die Differentialrechnung selbst ins Feld führen wollte, ebenso wenig wird man dereinst — und ich hoffe, bald — Gehör finden mit dergleichen Ungereimtheiten, wie sie in Menge gegen die Algebra der Logik jetzt noch aus dem philosophischen Lager — vergl. Husserl[1] — vorgebracht werden; wer auf eine Paradoxie stösst, wird den Fehler statt in unserer Disziplin hübsch bei sich selbst suchen.

Frau Franklin-Ladd aber hat mir in dankenswerter Weise ausgezeichnetes Material geliefert, um an einzelnen logisch-algebraischen Theoremen zu zeigen, wie sich die Disciplin bewährt, wenn man ihr allerlei Hindernisse in den Weg legt. Ich habe selbst gefühlt, wie erheblich die Einwände waren, indem ich zur Entkräftung derselben bisweilen längerer Sammlung benötigte.

Ist nun die Verwendung unzulänglicher Bezeichnungen in der That so gefährlich und verfänglich, so liegt endlich die Frage nahe: welches sind denn die Erfordernisse einer zulänglichen Bezeichnung?

Auf diese Frage bleibe ich die Antwort schuldig, mit dem Hinweise, dass ich es eben, — wie ich auch in meiner Festschrift[10] schon betonte, — mit Gustav Kirchhoff als die Hauptaufgabe der gesamten Wissenschaft betrachte, die Wirklichkeit „beschreiben“ und damit auch ihre Objekte zulänglich bezeichnen zu lernen.

§ 54. Fortsetzung. Über zeitlich partikulare Urteile. Konstitution des Begriffes, und „negative“ Merkmale.

ι) Um zu unserer Kontroverse zurückzukehren, so bestand und besteht Frau Franklin-Ladd nunmehr darauf, das Peirce'sche Aussagenprinzip 3)

$$(A = 1) = A$$

sei unbewiesen, eine willkürliche Annahme und eine bedauerliche und *unnötige Einschränkung* (unnecessary restriction) des Aussagenkalkuls, indem es den Aussagenbereich auf die beiden Werte 0 und 1 reduzire; vielmehr seien auch die Aussagen, wie die Klassen, unendlich vieler Zwischenwerte zwischen 0 und 1 fähig, auf welche die Gesetze und Schlussmethoden des Kalkuls in vollem Umfang anwendbar bleiben, sofern man nur die Konsequenzen von 3), — die ich fast alle in den § 35 zusammengedrängt, — beiseite lässt.

Angenommen selbst, dass dies sich so verhalte, so liesse sich doch nicht aufrecht erhalten, was mir Frau Franklin in ihrer schon oben erwähnten Rezension meines Bd. 1 vorwarf, dass ich nämlich das Verhältniss des Klassenkalkuls, als eines beträchtlich allgemeineren, gegenüber Peirce's Aussagenkalkul inkorrekt dargestellt (Bd. 1, S. 290). Peirce's Aussagenkalkul, von dem allein ich gesprochen, den ich darstellen wollte, involvirte in der That die getadelte Einschränkung.

Bei der wohlverdienten Autorität, deren sich meine Gegnerin erfreut, und ob der Tragweite der aufgeworfenen Streitfrage an sich, verlohnt es der Mühe, der Sache auf den Grund zu gehen.

ϰ) Von bestimmendem Einfluss auf die Gestaltung der gegnerischen Anschauungen ist eine Leistung von Mitchell[1] gewesen, von der ich bislang noch keine Notiz genommen, auf die ich nunmehr aber eingehen muss.

Mitchell hebt mit Recht hervor, dass man von „universalen“ und „partikularen“ Urteilen je in zweierlei Sinne reden kann, entsprechend den Kombinationen der vier folgenden sprachlichen Elemente:

alle (resp. keine)	*stets* (resp. nie)
einige	*manchmal*

Von diesen beziehen sich die Pronomina links auf das *Universum der Klassen*, die Adverbien rechts auf das *Universum der Fälle* oder *Gelegenheiten*.

Man könnte auch die Pronomina auf die verschiedenen *Orte im Raume* beziehen, wo sich Individuen der betreffenden Klassen (gleichzeitig) befinden mögen, und die Adverbien auf die verschiedenen *Zeitpunkte*, zu welchen solche Individuen in's Auge gefasst werden mögen. Doch ist die obige Fassung als die weitere vorzuziehen.

Jedes von beiden Universen kann als unbegrenzt oder auch irgendwie als begrenzt angenommen und den Betrachtungen zugrunde gelegt werden.

Sehr schön sagt Mitchell[1] p. 73:

„Die Logik hat hauptsächlich zu thun mit den Beziehungen zwischen den Gedankendingen. Ein *Urteil* (proposition) statuirt solch eine Beziehung. Die Gedankendinge, zwischen denen Beziehungen gedacht oder wahrgenommen werden können, begreifen unter sich nicht nur Klassen, sondern auch Aussagen. Die Konstatirung einer Beziehung zwischen Aussagen ist ein Urteil über Urteile, welches Boole ein sekundäres (secondary proposition) nannte. Aber in ihren letzten Elementen (in its ultimate analysis) drückt jedes Urteil eine Beziehung zwischen Klassen aus"...

Eine solche Beziehung kann gelten *von Allen* oder *von Einigen* aus dem Universum der Klassen und wird darnach bezüglich als *universal* oder *partikular* (schlechthin) bezeichnet.

Ebenso — sagt Mitchell — kann die Beziehung aufgefasst werden „als *permanent*" oder „als *temporär*", als fortbestehend entweder während des Ganzen von einem gewissen Zeitraum, dem „Universum der Zeit", oder nur während eines gewissen (bestimmten oder unbestimmten) Teiles dieser Zeit. Das Urteil mag alsdann als ein *der Zeit nach universales* resp. *partikulares* bezeichnet werden.

Der Kürze halber behalte ich diese Benennungen bei, obwol ich es gemäss dem vorhin bemerkten für angezeigt halte, anstatt von Boole-Mitchells „Universum der Zeit" lieber von dem Universum der (denkbaren, dem Sinne nach zulässigen) Anwendungsgelegenheiten des Urteils, — kurz vom *Universum der Fälle* zu reden.

Als Beispiel mag das oben von Frau Franklin gegebene dienen.

Partikular-universale	*Universal-partikulare*
Urteile.	
Jeder Arzt ist manchmal im Irrtum.	Es gibt Ärzte, welche sich niemals irren.
Zuweilen irrt sich keiner von den Ärzten. Oder: Es gibt Zeiten, wo sich kein Arzt irrt.	Immer irrt sich der eine oder andere Arzt.

Doppelt universale | *Doppelt partikulare*

Urteile.

Kein Arzt ist jemals im Irrtum.	Manchmal irren sich einige Ärzte.
Jeder Arzt ist beständig im Irrtum.	Es gibt Ärzte, welche sich manchmal nicht irren.

Die Urteile in derselben Horizontalflucht schliessen einander gegenseitig aus (als kontradiktorische Gegensätze oder Negationen von einander).

Diese acht Urteile, (deren sonstige Beziehungen zu erforschen, dem Leser als Übung empfohlen sei,) wären in Mitchell's Symbolik folgendermassen darzustellen, wenn, wie oben S. 465 d = Arzt, m = Irrtum bedeutet:

$(d_1 + m)_{1v}$	$(d m_1)_{u'1}$
$(d_1 + m_1)_{1v'}$	$(d m)_{u1}$
$(d_1 + m_1)_{11}$	$(d m)_{uv}$
$(d_1 + m)_{11}$	$(d m_1)_{u'v'}$

Zur Erklärung dienen die Bemerkungen:

Ohne Rücksicht zunächst auf die Quantität im Universum der Zeiten handelt es sich um die vier Urteile:

Alle Ärzte irren, d. i. $d \Subset m$ oder $d m_1 = 0$, $d_1 + m = 1$;

Kein Arzt irrt, $d \Subset m_1$, $dm = 0$, $d_1 + m_1 = 1$;

Einige Ärzte irren, $dm \neq 0$;

Einige Ärzte irren nicht, $d m_1 \neq 0$.

Die rechte Seite 1 oder $\dot{1}$ einer rechts auf Eins gebrachten Gleichung fügt nun Mitchell dem eingeklammerten Polynom derselben als Suffixum bei, und zwar als erstes Suffix, wenn die Gleichung eine primäre, die Eins also die des Klassenkalkuls ist, als zweites Suffix, falls die Gleichung eine solche des Aussagenkalkuls, und die 1 diejenige gewesen, die ich mittelst des Tupfens als $\dot{1}$ unterscheide. Ebenso verfährt er hinsichtlich des Suffixes, welches ihm die Partikularität darstellen soll. Als solches Suffix, anzuhängen dem Polynom der rechts auf Null gebrachten Ungleichung, wählt er nun aber einen Buchstaben u oder v, wobei er diese Buchstaben noch mittelst Accenten zu differenziren genötigt ist, sobald ein solcher auf eventuell verschiedene „einige", — nicht auf „same some", sondern auf „other some", hinweist, oder bezw. als zweites Suffix, bei wiederholt vorkommenden Adverbien „manchmal", nicht auf Gelegenheiten, die notwendig zusammenfallen.

Dieses Verfahren erscheint mir als ein Überbleibsel von Boole's missglücktem Versuch, die partikularen Klassenurteile vermittelst eines Faktors u oder v darzustellen. Ich kann mich mit Mitchell's Vorschlag ganz und gar nicht befreunden.

Um die acht Urteile in eine der unsrigen näher verwandte Zeichensprache einzukleiden, will ich zeitweilig den Gegnern eine Konzession machen und hier eine Aussagen-Null $\dot{0}$ (als Tupfen-Null) einführen, für welche der Satz 1) $(A \neq 0) = (A = \dot{1})$ *nicht* gilt.

Dieselbe Konzession habe ich vorübergehend auch schon bei Behandlung von Mitchell's Nebelbilderproblem S. 294 sq. gemacht. Als Analogon aus der arithmetischen Analysis kann gelten, dass man bei Grenzübergängen von $+0$ und -0 unterscheidend spricht, obwol beides identisch ist, und desgleichen von $+\infty$ und $-\infty$.

Die Zulässigkeit ebendieser $\dot{0}$ wird sich als der eine Angelpunkt der ganzen schwebenden Streitfrage erweisen.

Dann ist folgendes die ausdrucksvolle Darstellung der acht Urteile:

$(d_1 + m = 1) \neq \dot{0}$	$(dm_1 \neq 0) = \dot{1}$
$(d_1 + m_1 = 1) \neq \dot{0}$	$(dm \neq 0) = \dot{1}$
$(d_1 + m_1 = 1) = \dot{1}$	$(dm \neq 0) \neq \dot{0}$
$(d_1 + m = 1) = \dot{1}$	$(dm_1 \neq 0) \neq \dot{0}$

— in möglichster Annäherung an Mitchell; für meine Person würde ich natürlich für $d_1 + m = 1$, $d_1 + m_1 = 1$ lieber $d \rightleftarrows m$, $d \rightleftarrows m_1$ (oder $dm = 0$) schreiben und die vier Endungen $= \dot{1}$ samt Klammern weglassen. Übrigens macht hier die eine $\dot{0}$ eine ganze Menge von u, v, u', v', u'', $\cdots$ entbehrlich. Der Ansatz „$\neq \dot{0}$" übersetzt die Partikel „manchmal" oder „zuweilen" in die logische Zeichensprache.

λ) Ich bestreite die endgültige Zulässigkeit einer solchen Prozedur — siehe weiter unten. Falls ich nun aber Recht behalte, so ist von meinen Gegnern der Vorhalt vorauszusehen: dass dann ja mein Aussagenkalkul unvermögend sei, die Mitchell'schen Distinktionen überhaupt zu berücksichtigen und in die Formelsprache einzukleiden; und wie könnte ohne das mein Kalkul die Konklusionen ziehen aus gegebenen Prämissen, wenn unter diesen auch der Zeit nach partikulare vorkommen?

Ob Ersteres durch geeignete Ausgestaltung oder Anwendung der Beziehungslogik nicht dennoch unschwer erreichbar wäre, will ich hier unerörtert lassen. Dagegen nehme ich sofort Stellung zu letzterer Frage, welche freilich einen schweren Vorwurf enthielte, wenn ich sie nicht befriedigend beantworten könnte.

Treten unter den Prämissen solche auf, die keinen bestimmteren Aufschluss zu geben vermögen, als bei Gebrauch des Adverbiums „manchmal" denkbar ist, so ist zunächst zu unterscheiden, ob dieses Adverb nur *ein*mal, oder ob es mehrmals vorkommt.

Im ersteren Falle lasse man die Prämisse, die sich dieses Adverbs bedient, einmal beiseite; so wird man die Konklusion erhalten für diejenigen Fälle, wo dieses „manchmal“ eben nicht sich verwirklicht, wo vielmehr der gegenteilige Fall eintritt.

Sodann erhebe man das Eintreten des „manchmal“, d. i. des Ereignisses, auf welches dieses Adverb hinweist, zur ausdrücklichen Voraussetzung, und bilde unter Hinzuziehung solcher Annahme die Konklusion. Dies Verfahren läuft imgrunde hinaus auf eine Limitirung, eine Einschränkung des Denkbereiches der Gelegenheiten auf eben die Fälle oder „Male“, die mit jenem „manchmal“ gemeint waren. Die Konklusion darf dann auch nur für eben diesen Denkbereich in Anspruch genommen werden, d. h. sie ist auch ihrerseits nur als eine „manchmal“ zutreffende durch das Prämissensystem garantirt.

Kommt dagegen das Adverb „manchmal“ in den Prämissen *mehrmals* vor, — jedoch etwa nicht unabhängig, sondern so, dass immer das eine „manchmal“ auf das andere durch verschmelzende, identifizirende Verweisung bezogen ist, so ist mit der ganzen Gruppe derjenigen unter den Prämissen, welche dieses „manchmal“ enthalten, ebenso zu verfahren, wie vorhin mit einer einzigen Prämisse. Hingegen ist das gleiche Verfahren einzuhalten bezüglich *jedes einzelnen* „manchmal“ bei mehrfachem *unabhängigen* Vorkommen dieses Adverbs. Doch brauchen dabei die von einander unabhängigen „manchmal“ keineswegs in allen ihren Kombinationen durchgenommen zu werden. Vielmehr sind bei Anwendung des Verfahrens auf eines von ihnen, behufs Gewinnung der auf diese „Male“ bezüglichen partiellen Konklusionen, jeweils alle die Prämissen einfach fortzulassen, in welchen ein von dem vorigen unabhängiges „manchmal“ vorkommt. Ja, die vorliegende Prämisse ist selbst gänzlich zu unterdrücken, oder es sind wenigstens die betreffenden Prämissenteile zu ignoriren, wenn darin mehrere unabhängige „manchmal“ vorkommen.

Weiss man nämlich von zwei Ereignissen nur, dass jedes von ihnen manchmal eintritt, während das Zusammentreffen beider durch nichts garantirt ist, so kann der an dieses Zusammentreffen etwa denknotwendig zu knüpfende Schluss doch lediglich als ein „vielleicht manchmal“ zutreffender, nicht aber als ein durch die Prämissen notwendig bedingter hingestellt werden; es gibt dann eben überhaupt keine Konklusion.

Hier ist der Einwand denkbar: sofern es sich z. B. um Vorkehr gegen eine zu gewärtigende Gefahr handle, sei es keineswegs gleichgültig, ob dieselbe *vielleicht* eintrete, eintreten *könne*, oder nicht. Schon die „Wahrscheinlichkeit“ des Zusammentreffens der gedachten Ereignisse ist von berechtigtem Einfluss auf unser Verhalten in solchem Falle. Allein *hier*, in diesem Werke, handelt es sich nur um unabweisbare, denknotwendige Schlussfolgerungen.

Zufolge des jeweiligen Wegfalles so vieler der Zeit nach partikularer Prämissen vereinfacht sich das Geschäft des Schliessens begreiflicherweise allemal ausserordentlich, und so wird kein Anlass vorliegen, eine aparte Symbolik für den Zweck zu ersinnen. Für welche Symbolik indessen man immer sich entscheiden mag, keine wird uns doch dessen überheben können, das oben charakterisirte Minimum von Einzel-Konklusionen zu ziehen, (wie dies Mitchell's „Nebelbilderproblem“ auch in seiner Behandlungsweise an den Gliedern der von ihm auszumultiplizirenden Polynome deutlichst erkennen lässt.)

Unser Aussagenkalkul ist also sehr wol imstande, die Schlussfolgerung auch aus „in der Zeit partikularen“ Prämissen zu bewältigen.

μ) Damit sind nun freilich diese zeitlich partikularen Urteile ganz anders behandelt, als die schlechtweg partikularen. Auch aus letzteren könnte man wol die Konklusionen des Klassenkalkuls nach denselben Grundsätzen gewinnen, wie ich sie soeben für die ersteren aufgestellt und empfohlen habe. Allein damit ginge man aller Vorteile des Kalkuls verlustig, indem man die Methoden der algebraischen Logik ersetzte durch ein urwüchsiges, kunstloses und rohes Verfahren, — schlimmer als das Jevons'sche; — ein Verfahren, das zwar bei zeitlich partikularen ganz wol angeht und praktisch noch nirgends zu Unzuträglichkeiten geführt hat, das dagegen, auf die Partikularität schlechthin ausgedehnt, in ganz unerträgliche Umständlichkeiten und Weitläufigkeiten schon bei wenig verwickelten Problemen führen müsste.

Dieser auffallende Gegensatz erklärt sich durch den Umstand, dass das Partikularitäts-Pronomen „einige, manche, some“ im *zeitlichen* Sinne immer nur mit demselben Nomen: „Gelegenheiten“ oder synonym „Fälle, Male, Zeiten“, verknüpft ist, — wie denn auch sprachlich in „manchmal, sometimes“ Pronomen und Nomen zusammengewachsen sind, — wogegen sonst in „einige x“ das Nomen oder Urteilssubjekt x in der mannigfaltigsten Weise wechseln, den verschiedensten Ideenkreisen entstammen wird.

In der Tragweite dieses von meinen Gegnern wol übersehenen oder nicht genügend gewürdigten Umstandes liegt, wie mir scheint, ein zweiter Angelpunkt der obschwebenden Streitfrage.

Wenn die Konstitution unseres Intellekts uns nicht gestattete, das Pronomen „einige“ auf *verschiedenerlei* Objekte anzuwenden, wenn wir blos die Wahl hätten zu reden von allen, oder einigen oder keinen x, aber immer nur von denselben x, dann, glaube ich, dürfte jenes urwüchsige, unwissenschaftliche Folgerungsverfahren vielleicht noch das beste sein, wobei wir gelegentlich nur zu unterscheiden hätten zwischen *denselben* „einige x“ und eventuell *andern*, von den vorigen unabhängigen „einige x“. Dann auch möchten wir der Algebra der Logik (zweiter Stufe) unschwer entraten, und gegenwärtiges Buch wäre nicht geschrieben!

Wie jedoch die Sache wirklich liegt, erscheint mir das an sich berechtigte gegnerische Verlangen nach gleichmässiger Behandlung der zeitlich und der schlechtweg partikularen Urteile als irrelevant, als ein mehr nur doktrinäres, entspringend nicht einem praktischen Bedürfniss, sondern nur einem theoretischen Interesse.

Da ich jedoch auch letzteres hochhalte, so will ich nun auf einen weiteren noch offenen Einwand der Gegner aus Mitchell's Schule eingehen.

Dieselben werden mich nämlich auf die andere Möglichkeit einer ebenmässigen Bearbeitung beider Arten von Partikularität verweisen. Müssen doch — so sagen sie — die Klassen der Gelegenheiten, bei denen Aussagen zutreffen, ganz denselben Gesetzen unterliegen wie alle übrigen Klassen; wozu dann die Boole-McColl-(Peirce)-Schröder'sche Einschränkung der Aussagenwerte auf 0 und 1? Hat nicht eben Mitchell die Entbehrlichkeit dieser Einschränkung nachgewiesen durch seine Begründung des Aussagenkalkuls, worin dann auch den *zeitlich* partikularen Urteilen die Vorteile des Klassenkalkuls in gleichem Masse zugute kommen wie den übrigen?

Solches ist thatsächlich von Frau Franklin am Schlusse ihrer oben erwähnten Besprechung meines Bd. 1 angedeutet worden.

Auch ich wäre nicht der letzte, eine Erweiterung des Aussagenkalkuls durch Beseitigung des gedachten einengenden Prinzips zu begrüssen. Und eine zeitlang (cf. S. 183 Mitte) schwebte mir eine derartige Hoffnung vor. Dass dieselbe aber sich als trügerisch erwies, kann ich nun auch nicht mehr beklagen, seitdem ich den Grund der Unmöglichkeit jener Erweiterung, den ich im folgenden darlege, erkannt habe.

ν) Soll ein Aussagenkalkul überhaupt als eine besondere Art des Klassenkalkuls bestehen, so müssen die Aussagen in ihm eine Deutung erfahren und einer solchen fähig sein: als Klassen der Gelegenheiten, bei denen sie zutreffen.

Über *diesen* Punkt sind die Anhänger der rechnenden Logik samt und sonders einig. Wer dem etwa nicht zustimmt, dem ist das onus probandi zuzuweisen, nämlich die Aufforderung, mit der andersartigen neuen Grundlage hervorzutreten, auf der sich der Kalkul angeblich aufbauen liesse.

Zu den fundamentalen Aussagen gehört die Subsumtion

$$A \mathrel{=\!\!\!\in} B,$$

welche das hypothetische Urteil: „Wenn A gilt, so gilt auch B" darstellt. Es muss also für diese Subsumtion die Klasse der Gelegenheiten ermittelt werden, bei denen sie zutrifft, sofern als bekannt gelten: die Klasse der Gelegenheiten, bei denen die Aussage A (für sich), und diejenige der Gelegenheiten, bei welchen B zutrifft.

Dass eine Aussage A bei *keiner* Gelegenheit zutreffe, wird durch $A = 0$ auszudrücken sein, und ebenso, dass sie bei *allen* Gelegenheiten gelte, durch $A = 1$, — wenn anders eine Erweiterung des Aussagenkalkuls auf den Gehalt des Klassenkalkuls erzielt werden sollte. Desgleichen wird man unter diesem letzteren Gesichtspunkt auch die beiden Subsumtionen

$$0 \mathrel{=\!\!\!\in} B, \quad A \mathrel{=\!\!\!\in} 1$$

anerkennen müssen, — obwol freilich auch eine Logik *denkbar*, (aber in mancher Beziehung *im Nachteil*) wäre, die eine oder die andere von beiden als nichtssagend oder albern verwerfen würde (vergl. S. 18 u. 19). —

Wer nun aber diese beiden Subsumtionen zugibt, ist genötigt, als die Gültigkeitsklasse der Subsumtion $A \mathrel{=\!\!\!\in} B$ den Ausdruck

$$4) \qquad (A \mathrel{=\!\!\!\in} B) = A_1 + B$$

— somit unser (Peirce's) Theorem λ) von S. 68 — anzuerkennen.

Es ist einleuchtend: die Klasse der Gelegenheiten, bei welchen $A \mathrel{=\!\!\!\in} B$ zutrifft, kann sich blos zusammensetzen aus Gelegenheiten, wo B zutrifft, sowie solchen, wo A nicht zutrifft, welche letzteren wir unter dem Zeichen A_1 zusammenfassen, — und sie muss diese Gelegenheiten (zufolge der oben anerkannten Subsumtionen) auch sämtlich enthalten. Enthielte sie eine Gelegenheit, wo A zutrifft und B nicht zutrifft, so kämen wir zu einem augenscheinlichen Widerspruch mit der Forderung, dass wenn A gilt, auch B gelte.

Ich will hier nicht ausführlicher sein, weil ich sicher bin, dass mir die Gegner bis hierher willig folgen. Alles bisherige hat in anderm Zusammenhange wol Herr Peirce schon angedeutet oder gesagt. Auch musste ich mich selbst dabei rekapitulirend wiederholen. Ich brauche auch nicht etwa auf S. 68 zu verweisen, wo ich mehr rechnend vorgegangen bin in einer Weise, die die Gegner vielleicht beanstanden. — Es genügt mir, dass dieses Theorem 4) nur irgendwie zugegeben ist, wobei ich einstweilen den Gegnern die Konzession mache, die Summe $A_1 + B$ so auffassen zu dürfen, dass keineswegs A *nie* oder B *stets* zu gelten brauche, sondern dass ganz beliebig Gelegenheiten darunter zu verstehen seien, wo bald A nicht, bald wo B zutrifft, bald wo beides der Fall ist.

Nunmehr komme ich zum Haupt- und letzten Angelpunkt unserer Streitfrage, nämlich zu meiner Ableitung des spezifischen Aussagenprinzips 3) $(A = \dot{1}) = A$ aus dem Satze 4), wie ich sie S. 69, Z. 10 v. u. gegeben. Wer 4) zugegeben, der muss, wofern er nicht auch 3) anerkennen will, diese Ableitung widerlegen, und zwar direkt, nicht durch Versuche einer reductio, bei welchen allemal Fehler unterlaufen. Auch ist die Ableitung nicht so verwickelt, dass nicht ein Fehler, falls sie einen solchen enthielte, leicht aufzufinden sein müsste:

$$(A = \dot{1}) = (\dot{1} \Subset A) = \dot{1}_1 + A = 0 + A = A.$$

Der Aussagenkalkul bleibt hiernach also notwendig auf das Gebiet der beiden Werte 0 und $\dot{1}$ beschränkt. Kein Mittelding gibt es für Aussagen zwischen „ewig wahr“ und „ewig falsch“, und keine Tupfen-Null $\dot{0}$, wie sie zugunsten der Darstellung zeitlich partikularer Aussagen vorübergehend gebraucht wurde, für welche mein Satz 1) $(A \neq \dot{0}) = (A = \dot{1})$ nicht unerbittlich Geltung forderte.

Damit wird auch ein Vorwurf hinfällig, den mir Herr Husserl[1] gemacht. Derselbe meint, ich hätte zuerst die Aussagenäquivalenz etc. definiren, im Grunde also den Bd. 1 mit Bd. 2 beginnen sollen.

Er selbst glaubt eine Entdeckung gemacht zu haben, indem er die Klassensubsumtion $a \Subset b$ auf eine Aussagensubsumtion $(x \Subset a) \Subset (x \Subset b)$ zurückführt — vergl. hiezu S. 83. Was er „*seinen* Folgerungskalkul“ nennt und [2, 3] als das bessere der Welt vorführt, ist, so weit richtig, nichts als eine Transskription von Formeln und Deduktionen meines Buches aufgrund dieses Gedankens. Das alles haben aber McColl und Peirce schon längst so gemacht, und auch Frau Franklin scheint solche Grundlage — noch — vorziehen zu wollen.

Ich habe die ganze Theorie auf die breitere Grundlage des Klassenkalkuls gestellt, — solchermassen auch der ersten Entwicklung der Theorie durch Boole zu ihrem Rechte verhelfend, — einesteils weil die letzten Bestandteile der sekundären Aussagen, der hypothetischen Urteile doch immer kategorische Klassenaussagen sind, sodann aber — und dies ist ausschlaggebend, — weil es inbezug auf die eine Hälfte der kategorischen, nämlich die partikularen Urteile, ohnehin nicht anders angeht. Auch die besseren Logikbücher, dünkt mich, pflegen die hypothetischen nicht vor den kategorischen Urteilen zu behandeln.

Leider scheine ich unter den Mitarbeitern an unserer Disziplin bis jetzt noch der einzige zu sein, der die vorstehenden Thatsachen erkannt und gewürdigt hat.

ξ) Zum Schluss der Kontroverse nun noch die Frage: wie kann man sich mit der unliebsamen Beschränktheit des Aussagenkalkuls aussöhnen und befreunden?

In der sechzehnten Vorlesung glaubte ich klar gemacht zu haben, dass sich in dem spezifischen Prinzip 3) sowol als in dessen Konsequenzen 1), 2) etc. weiter nichts ausspricht als die Unabweislichkeit der Forderung, *dass Aussagen, mit welchen gerechnet werden soll, während der Rechnung immerfort im selben Sinne verstanden und ausgelegt sein müssen.*

Und das erscheint doch wol selbstverständlich. Ist doch diese Forderung der „Einsinnigkeit" für die Aussagen keine andere als für die Klassen, für Begriffswörter und für *Zeichen* jeder Art. Sie tritt ja an verbale Überlegungen nicht minder heran als an den Kalkul. Der Unterschied ist nur der, dass während man mit Worten vielfach gegen sie verstossen und sündigen kann, ohne es zu merken, der Kalkul mit unerbittlicher Strenge jeden Verstoss augenblicklich an den Tag bringt und rächt, dadurch aber auch zur Beachtung gedachter Forderung erzieht, ihre Befolgung erzwingt.

Wer in den Sätzen des Aussagenkalkuls Paradoxien zu erblicken meint, der hat sich noch nicht hinreichend frei machen gelernt von dem Gängelbande, an welchem die Wortsprache mit ihren Phrasen und elliptischen Redewendungen uns alle zeitlebens — und wie oft in der Irre — herumführt. Nicht dem Aussagenkalkul entspringen Widersprüche und Paradoxien, sondern dem Doppelsinn des Wortgebrauchs, den Mängeln der verbalen Ausdrucksmittel, der Unzulänglichkeit der sprachlichen Bezeichnungen.

Die Darlegungen meiner sechzehnten Vorlesung sind indess selbst bei hochverdienten Mitarbeitern an unserer Disziplin noch auf Schwierigkeiten des Verständnisses gestossen. Es sei mir erlaubt, noch auf eine solche Schwierigkeit einzugehen.

Das Ärgerniss gibt die Aussagengleichung

5) $$(A + B = \dot{1}) = (A = \dot{1}) + (B = \dot{1})$$

S. 57, welche sich nach unserm spezifischen Prinzip 3) unmittelbar als die Identität $A + B = A + B$ bewahrheitet.

Es ist dies der Satz, in welchem Frau Franklin einen „distinct error" finden will (s. oben S. 464). Sie führt dabei als Argument ein Beispiel in's Feld, welches zur Klarstellung der Sache ganz vorzüglich geeignet ist, nämlich: „Wenn es regnet, so nehme ich entweder einen Schirm, oder ich bleibe zuhause."

Bedeute C das Urteil „Es regnet", A das „Ich bediene mich eines Schirmes", B das Urteil: „Ich verweile im Hause", so haben wir

$$C \Subset A + B.$$

Tritt nun hier überhaupt einer von diesen beiden letztern Fällen ein, so muss, meint Frau Franklin, derselbe nach meinem Aussagenkalkul *ewig* als eintretend anerkannt werden. Die Alternative aber, entweder ewig einen Regenschirm zurhand zu nehmen, oder ewig im Hause zu bleiben, erscheint ihr so schrecklich, die Beschränktheit eines Aussagenkalkuls, der nur derartige Alternativen zu berücksichtigen vermöchte, so kläglich, dass sie diesen, den sie selbst einst so wesentlich gefördert, ablehnen zu müssen glaubt.

So schlimm ist es indessen nicht bestellt mit dem Aussagenkalkul! Das ganze Unglück rührt vielmehr nur daher, dass die Aussagen A, B und C in der angegebenen Wortfassung noch gar keine echten, vollständigen Urteile im Sinne einer exakten Logik sind, sondern nur elliptische Redensarten, lückenhafte und darum an sich sinnlose Phrasen, so lange sie nicht — mindestens in Gedanken — bezogen sind auf eine bestimmte Gelegenheit oder auch Klasse von Gelegenheiten. Was soll z. B. die Aussage A „ich bediene mich eines Schirmes“ bedeuten? Gewiss *nicht*, — wie es wegen des im Präsens stehenden Verbums scheinen könnte —: ich bediene mich jetzt, soeben, während ich dies ausspreche, eines Schirmes. Es fehlt die Zeitbestimmung! — Eine Ortsbestimmung ist wegen des Subjekts „Ich“, welches doch jederzeit an einem bestimmten Ort sich befinden muss, hier zufällig überflüssig.

Völlig explizirt wird uns deshalb nun bedeuten:

$A =$ „Ich bediene mich eines Schirmes bei der Gelegenheit g“,

$B =$ „Ich verweile im Hause bei der Gelegenheit g“,

$C =$ „Es regnet (an dem Orte, wo ich mich befinde,) bei der Gelegenheit g“.

Ergänzt man die Zeitbestimmung blos im Geiste, so kommt man leicht in die Gefahr, jene Bestimmung wieder aus den Augen zu verlieren, oder unvermerkt für dieselbe eine andere sich einschleichen zu lassen.

Wenn es nun wirklich einmal zutrifft, dass es bei der bestimmten gedachten Gelegenheit an dem Orte, wo ich mich befinde, regnet, so wird dies *ewig* zutreffen, dass es ebenda und ebendann regnete, aber es wird nicht ewig da regnen. Allgemein: Die ewige Anerkennung, dass ein Ereigniss bei bestimmten Gelegenheiten eintritt oder eintrat, ist zu unterscheiden von der Anerkennung, dass das Ereigniss ewig eintritt.

Damit ist indessen die Aussagensubsumtion

$$C \mathrel{=\!\!\!\!\!\in} A + B$$

noch nicht die für alle Fälle zulängliche Bezeichnung dessen geworden, was die Wortführerin mit ihrem Ausspruch sagen wollte. Dieselbe wollte ihre Aussage aufstellen nicht blos für eine bestimmte, sondern für *jede* Gelegenheit g. Mit Rücksicht hierauf hat man ausdrucksvoller

$$\prod_g (C \subseteq A + B)$$

zu setzen, sobald etwa z. B. die Negation einer solchen Formel in Betracht kommen sollte, — während man freilich sonst zumeist, wie oben bemerkt, auch im Kalkul sich begnügt, die Allgemeinheit der Aussage blos im Geiste zu unterstellen.

o) Ein von mir selbst begangener Fehler.

Nachdem ich andern und den verdientesten Mitarbeitern schon so vieles „am Zeuge zu flicken gehabt", ist es nicht mehr als billig, auch einmal „vor der eigenen Thür zu fegen". Mit in den Kontroversen geschärftem Blick wurde ich zuletzt dessen gewahr, dass ich auch selbst an einer Stelle dieses Buches in einen „Fehlschluss aus unzulänglicher Bezeichnung" verfallen bin, — zum Glück ohne weitergehende unzutreffende Folgerungen daran zu knüpfen.

Seite 312 dieses Bandes stellte ich die Behauptung auf, *dass der „reine" Aussagenkalkul schlechterdings unfähig sei und es definitiv bleiben müsse, auch partikulare Urteile einzukleiden.*

Wenn er aber zugestandenermassen fähig ist, die universalen Urteile auszudrücken (S. 311), wenn die partikularen Urteile blos die Negation von universalen sind, und wenn endlich der Aussagenkalkul den Prozess der Verneinung an einer jeden Aussage zu vollziehen vermag, — wie könnte er dann unfähig bleiben, ein partikulares Urteil darzustellen?

Um dieses Paradoxon aufzulösen, ist nur nötig, die McColl'sche aussagenrechnerische Darstellung der Klassensubsumtion $a \subseteq b$ auf ihren *zulänglichen* Ausdruck zu bringen; durch Negation muss sich dann freilich eine ebensolche — aussagentheoretische — Darstellung des partikularen Klassenurteils $a \not\subseteq b$ oder $ab_1 \neq 0$ ergeben.

Nach McColl soll (S. 311) die Subsumtion $a \subseteq b$ statt „alle a sind b" gedeutet werden, — indem man von irgend einem beliebigen unter den Individuen der Mannigfaltigkeit 1, doch durchweg von demselben, spricht: — „wenn es ein a ist, so ist es ein b". Trifft diese Aussagensubsumtion in der That zu für *jedes „es"*, jedes Individuum, so sagt dieselbe das gleiche wie die Klassensubsumtion $a \subseteq b$. Um nun erstere zulänglich darzustellen, ist jedenfalls auch die Allgemeinheit, die notwendig, wenn auch stillschweigend unterstellte Anwendbarkeit der Aussage auf *jedes* Individuum (ja auch auf jede Klasse) x ausdrücklich hervorzuheben, zumal ja Verneinung der Aussage beabsichtigt ist. Dann läuft die Umdeutbarkeit der Subsumtion aber, wie leicht zu sehen ist, hinaus auf die Äquivalenz:

$$6) \qquad (a \mathrel{=\!\!\!\in} b) = \prod_x \{x \mathrel{=\!\!\!\in} a) \mathrel{=\!\!\!\in} (x \mathrel{=\!\!\!\in} b)\},$$

— eine Formel, die auch schon S. 83 erwähnt und begründet ist; dieselbe ist demnach Herrn McColl wol *vor* Peirce zuzuschreiben, dessen Abhandlung[5] ich seinerzeit als meine Hauptquelle bezeichnet habe. — Wie hier die sämtlichen Klassen x des Denkbereiches natürlich auch die Individuen mit umfassen, doch aber nicht auf diese beschränkt sind, so hätte ich auch bei der Bemerkung im ersten Kontext auf S. 312 besser von allen Klassen statt nur von den Individuen gesprochen.

Wollen wir nun, um den Ausdruck des partikularen Urteils zu gewinnen, die McColl'sche Aussagensubsumtion korrekt verneinen, so darf dies keineswegs — wie S. 311 sq. — geschehen an deren unzulänglichem Ausdruck „a“ $\mathrel{=\!\!\!\in}$ „b“, worin „a“ das Urteil: „*es* (das gedachte Individuum oder Objekt) ist ein a“, „b“ das: „*es* ist ein b“ bedeuten sollte, die Allgemeinheit dieses „*es*“ aber unausgedrückt blieb, — sondern es hat zu geschehen an der rechten Seite von 6), als der zulänglichen Darstellung.

Mit dieser Darstellung der McColl'schen Umdeutung der Klassensubsumtion $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$ in eine Aussagensubsumtion „a“ $\mathrel{=\!\!\!\in}$ „b“ kommt es nun aber an's Tageslicht, dass diese letztere gar nicht rein aussagentheoretischen Charakters ist, da ihre Bestandteile $x \mathrel{=\!\!\!\in} a$ und $x \mathrel{=\!\!\!\in} b$ Klassensymbole enthalten. (Zudem ist es keine Subsumtion, sondern ein Produkt von Aussagensubsumtionen.) Es ist eine Proposition von zwiespältiger Natur, zu deren Verständniss man sowol des Klassen- wie des Aussagenkalkuls bedarf; und dieser „unreine“ Charakter wird sich ebenso auch auf ihre Negation übertragen.

Ich habe daher der vorerwähnten Behauptung ergänzend und berichtigend die zweite an die Seite zu stellen: *dass der „reine“ Aussagenkalkul schon ebensowenig fähig ist, auch nur universale Klassenurteile darzustellen.*

Damit wird auch die oben erwähnte Paradoxie hinfällig.

Da man also des Klassenkalkuls bedarf im Aussagenkalkul, da ersterer nicht auf letzteren gegründet werden kann, so muss jener notwendig vorangestellt werden. Auch ist der Aussagenkalkul nicht der einfachere, sondern vielmehr weit schwieriger zu erfassen, wie sich an den soeben besprochenen Paradoxien und Kontroversen gerade gezeigt hat.

Frau Franklin-Ladd macht in ihrer mehrerwähnten Rezension meines Bd. 1 noch einen Ausfall gegen eine Stelle S. 75 sq. dieses Bd. 1, wo ich zwar wol den Gegensatz zwischen positiven und den zugehörigen negativen Begriffen, als relative Unterscheidung, nicht aber eine Einteilung der Begriffe, in absolutem Sinne, in positive und negative in das System aufnehmen zu können erkläre, weil es an einem Kennzeichen dafür gebricht, welcher von zwei einander kontradiktorisch entgegengesetzten Begriffen, wie nützlich und schädlich, parallel und schneidend, direkt oder *un*mittelbar und *in*direkt oder mittelbar, als der positive anzusehen sei.

Sie gibt mir solches nur zu für Begriffe, die ich hier kurz „einfache" nenne, „so long as the quality which marks its signification is one and indivisible" (cf. p. 129 unten), also für Begriffe mit „unteilbarem Inhalt", wie „heiss, kalt, schwer, blau, parallel"; da sei es denn in der That einerlei, ob man z. B. die Zahlen einteile in gerade (even) und nicht gerade, oder etwa in ungerade (odd) und nicht ungerade. — Anders dagegen bei „zusammengesetzten" Begriffen (when we come to complex qualities); hier komme nämlich den positiven wesentlich der Charakter eines identischen Produktes (combination of quality elements), den negativen der einer Summe von Merkmalen (alternation of qu. el.) zu; wonach beide extremely different seien.

Die Richtigstellung dieser Meinung wird für unsere Theorie umso mehr Gewinn bringen, als Frau Franklin dabei ausging von einer schon früher von ihr aufgestellten Formel betreffend die Konstitution eines jeden („zusammengesetzten") Begriffes B: Seien $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ die Merkmale des Begriffs B (umfangslogisch verstanden, d. i. also jedes als Klasse der Objekte, die das betreffende Merkmal besitzen) und $i^1, i^2, i^3, \ldots$ die Individuen, welche derselbe unter sich begreift; dann ist

$$B = \alpha^1\alpha^2\alpha^3 \ldots (i^1 + i^2 + i^3 \ldots);$$

in der That müssen, wie leicht einzusehen, die Merkmale als Faktoren, die Individuen als Summanden in den Ausdruck des Begriffes eingehen. Man kann dabei aber die Gruppe der Faktoren α, oder aber das Aggregat der Summanden i unterdrücken; der Begriff ist das identische Produkt seiner Merkmale; er ist auch die identische Summe seiner Individuen; und als das eine oder andere ist er bereits völlig bestimmt.

Da nämlich $i^1 \neq\!\!\!\in \alpha^1$, $i^1 \neq\!\!\!\in \alpha^2, \ldots$ oder nach Th. $20_\times$) $i^1\alpha^1 = i^1$, $i^1\alpha^2 = i^1, \ldots$ ist, so bleibt $B = i^1 + i^2 + i^3 + \ldots$. Ebenso ist auch $B = \alpha^1\alpha^2\alpha^3 \ldots$ ohne den Aggregatfaktor, vorausgesetzt nur, dass die Gruppe der als wesentliche Merkmale angesetzten Faktoren α eine vollständige ist. Denn dieser Ausdruck bleibt ungeändert, wenn man ihn mit der Summe aller erdenklichen Individuen — als der identischen Eins — multiplizirt — Th. $21_\times$) —. Ist nun i ein *nicht* zur Kategorie des Begriffs gehöriges Individuum, so muss dasselbe mindestens eines von den wesentlichen Merkmalen des Begriffes entbehren, — sagen wir das Merkmal α, welches sich unter den obigen Faktoren sicher mit aufgezählt findet, jedoch auch durch eine multiplikative Kombination von einigen oder allen diesen Faktoren vertreten sein kann. Dann ist also $\alpha i = 0$, und der betreffende Summand i fällt aus der ausmultiplizirt gedachten Summe heraus, weshalb er denn schon in der nicht ausmultiplizirten Summe unterdrückt werden mag; so gelangt man dann aber zu der erstangegebenen ausdrucksvollsten Darstellung des Begriffes B zurück.

Durch Negiren erhält man nun auch in der That den Begriff B_1

$$B_1 = \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3 + \ldots + i_1^1 i_1^2 i_1^3 \ldots$$
$$= \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3 + \ldots = i_1^1 i_1^2 i_1^3 \ldots$$

als *Summe* von Merkmalen bezw. Merkmalsverneinungen.

Frau Franklin gibt hiezu ein Beispiel: Es bedeute c = Civilisation, und in

$$c = \gamma^1\gamma^2\gamma^3 \ldots (C^1 + C^2 + C^3 + \ldots) = \gamma C$$

die Faktoren γ die verschiedenen Merkmale der Civilisation, als z. B den Besitz guter Gesetze zum Schutze von Person und Eigentum, das Vorhandensein einer Macht, welche die Beobachtung der Gesetze zu erzwingen, und das Gemeinwesen auch gegen Vergewaltigung von aussen zu sichern vermag, von Institutionen, welche dem Einzelnen eine gute Erziehung und möglichst Vielen einen gewissen Grad von Glück zuwenden, etc. — wogegen die Glieder C die verschiedenen Anwendungsbeispiele des Civilisationsbegriffes bezeichnen sollen, z. B. die Civilisation der Assyrer, die der Griechen, und so fort. Unwesentlich ist dabei die Frage, ob die C wie oben Individuen i, hier also individuelle Civilisationen vorstellen, oder ob z. B. C^1 etwa die *Klasse* der Civilisationen der Hellenen des klassischen Altertums sowol als auch der Neugriechen zu bedeuten habe, da Klassen und Klassensummen C zuletzt auch Individuensummen sind.

Zur Behandlung dieses Beispiels ist zu bemerken, dass Frau Franklin die Negation C_1 „in accordance with the usual rule for taking the negative" in der Form ansetzt:

$$c_1 = (\gamma_1^1 + \gamma_1^2 + \gamma_1^3 + \ \ldots)\, C_1^1 C_1^2 C_1^3 \ \ldots\,,$$

mit ersichtlichem Verstoss gegen die Negationsregeln, — dass aber wegen

$$c = \gamma C = \gamma = C = \gamma + C$$
$$c_1 = \gamma_1 + C_1 = \gamma_1 = C_1 = \gamma_1 C_1$$

dieser Verstoss belanglos ist und die von ihr gegebene Negationsform materiell sich rechtfertigt.

Dass aber die Nicht-Civilisation c_1 nur die *Alternative* biete, mindestens einer unter denjenigen Qualitäten zu ermangeln, deren Gesamt-*Kombination* eben die Civilisation c erst ausmacht, soll nun nach Frau Franklin's Meinung jenen ersteren Begriff c_1 als absolut negativen kennzeichnen.

Allein es liegt in dem Wesen des Begriffes c_1 keineswegs die Notwendigkeit einer derartigen negativen Darstellung. Man kann ihm vielmehr wol nicht minder, als dem Begriff c, eine Reihe von „positiven" Merkmalen gleichzeitig beilegen, die ihn vollständig bestimmen; man kann ihn, vielleicht unter dem „positiven" Namen b = Barbarei = c_1, ebenfalls auf das Schema

$$b = \beta^1\beta^2\beta^3 \ldots (B^1 + B^2 + B^3 + \ldots)$$

bringen, wozu dann $c = b_1$ in negativer Darstellung treten wird. — Ähnliches lässt sich vielleicht noch besser erläutern an den beiden Begriffen *gesund*

und *krank*. Es gibt doch wol eine Kombination von Qualitäten, durch welche der erstere von beiden als „positiver" Begriff sich bestimmen lässt. Aber auch wenigstens für einen beliebigen Unterbegriff des zweiten, eine bestimmte Krankheit, z. B. Trichinose, Cholera, usw., lassen sich hinreichend viele krankhafte Veränderungen der einzelnen Organe, Krankheitssymptome u. dergl. angeben, deren Zusammentreffen die Krankheit definirt. Bei entsprechender Beschränkung des Denkbereiches kann dann schon die gedachte einzelne Krankheit kontradiktorisch der Gesundheit gegenüberstehen. Welcher von beiden Begriffen ist dann der positive? Bei allgemeinerem Denkbereich aber hätte man keinesfalls die obige Darstellung eines „negativen" Begriffes für den Krankheitsbegriff, da sich dieser doch wol *additiv* zusammensetzt aus den gedachten einzelnen Krankheitsklassen, bezw. -individuen, — mag man nun diese selbst als positive oder als negative Begriffe ansehen.

Andrerseits muss ein unbestritten „positiver" Begriff, z. B. der Begriff „polar" in dem Sinne, wie wir von Polarweide, Polarfuchs etc. sprechen, keineswegs notwendig als Produkt von Merkmalen gedacht werden; er kann auch eine Alternative

$$\text{polar} = \text{arktisch} + \text{antarktisch}$$

enthalten. Somit ist das obige Franklin'sche Begriffsschema auch für die sogenannten „positiven" Begriffe nicht allgemein verbindlich. Dasselbe zeigt nur die Konstitution eines Begriffes hinsichtlich seines Inhalts und Umfanges in „regelrechter" Darstellung; es ist ein Ideal, dem wir zustreben bei Ausbildung unseres Begriffssystems; die Möglichkeit der Darstellung eines und desselben Begriffes in verschiedenen Formen ist nicht zu bestreiten. Die Unterscheidung positiver und negativer Begriffe ist psychologischen Ursprungs und für die Logik ohne Belang.

Auch hat Frau Franklin ebensowenig meine Zustimmung, wenn sie von „einfachen" Begriffen, von „unteilbaren" Merkmalen spricht. Als Merkmal eines Dinges gilt mir alles Erdenkliche, was wahrheitsgemäss von demselben ausgesagt werden kann. Ich sehe in jedem Merkmal und in jedem Begriffe eine unbegrenzte Fülle von Merkmalen. Unter den Merkmalen eines Begriffes können freilich gewisse als „wesentliche" hervorgehoben werden, — jedoch in verschiedenster Weise, — welche die übrigen alle denknotwendig oder auch vermöge besondrer axiomatischer Voraussetzungen, mit bedingen und nach sich ziehen. Auch gibt es wol psychologisch ursprünglichere und daneben abgeleitete Begriffe und Merkmale. Wenn mir aber nun z. B. jeder richtige Satz über Parallele (sei es blos Gerade, sei es auch Kurven, Flächen etc.) ein neues Merkmal des Begriffes „parallel" vorstellt, so nehme ich damit Stellung gegen Frau Franklin, welche diesen Begriff neben andren als Beispiel eines „einfachen" hinstellen will.

Mit Frau Franklin aber darf ich hier wol von neuem denjenigen entgegentreten, welche, als Verfechter der angeblichen (aber bisher eben noch niemals rein in die Erscheinung getretenen) Logik des Inhalts, immer noch in grosser Zahl unserer Richtung ablehnend oder feindlich gegenüberstehen und sich gebärden, als ob die *Umfangs*logik der Erkenntniss der Begriffe ihrem *Inhalt* nach nicht förderlich, sondern eher hinderlich sei.

Spricht da z. B. ein Autor, den ich lieber nicht nenne, mit Bezug auf die Logik des Umfangs von der „*groben Manier, die dem Etikettenschreiber genügt*". Vor allem die Frage: wer hat denn je gesagt, dass uns die Logik des Umfangs *genüge*? Sie genügt uns noch lange nicht, ebenso wenig, wie, in unserm Streben nach Erkenntniss der Aussenwelt, etwa die Chemie oder gar die Geometrie. Ist etwa gegen die Osteologie der Vorwurf berechtigt, dass ihr vom lebendigen Leibe das dürre Knochengerüst „genüge"?

Endlich stimme ich auch Lotze zu, wenn er „das ewige Messerwetzen langweilig" findet und meint, man müsse auch etwas Ordentliches zu schneiden vorhaben. An letzterem fehlt es nun aber in den exakten Wissenschaften nirgends, und noch weniger in jenen „Wissenschaften", die, wie die Philosophie, „es vollends werden wollen". Allein das Messer — ein viel zu stumpfes Instrument — ist die Wortsprache! Es gilt die Herstellung und den Gebrauch weit feinerer Zergliederungsinstrumente!

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

§ 55. Über Knüpfungen von bestimmten formalen Eigenschaften im identischen Kalkul.

α) Der identische Kalkul ist vorzüglich geeignet, um zu jedem erdenklichen Kalkul ein Substrat zu liefern, sofern dessen direkte Operationen eindeutige, aber nicht eindeutig umkehrbare sein sollen.

Irgend eine Funktion $f(x, y)$ zweier Argumente wollen wir als eine *Knüpfung* zwischen ebendiesen in's Auge fassen und mit $x \circ y$ bezeichnen. Dann ist nach dem Boole'schen Fundamentalsatze (Bd. 1, S. 415):

$$\alpha_1) \qquad \begin{cases} x \circ y = p\,xy + q\,xy_1 + r\,x_1y + s\,x_1y_1, \\ \overline{x \circ y} = p_1xy + q_1xy_1 + r_1x_1y + s_1x_1y_1, \end{cases}$$

wenn wir uns in diesem einen Fall auch einmal des horizontalen Negationsstriches bedienen.

Die Knüpfung heisse auch „*symbolische Multiplikation*“.

Die inversen Operationen zu dieser sind zu definiren durch die Gleichungen:

$$\alpha_2) \qquad \begin{cases} (x \circ b = a) = \left(x \mathrel{=\!\!\!\in} \frac{a}{b}\right), \\ (b \circ x = a) = (x \mathrel{=\!\!\!\in} a : b), \end{cases}$$

wonach denn unter dem „*symbolischen Bruch*“ $\frac{a}{b}$ resp. unter dem „*symbolischen Verhältniss*“ $a : b$ die allgemeinste Lösung der Gleichung linkerhand zu verstehen sein wird; falls diese Gleichung nicht auflösbar sein sollte, hat der betreffende Ausdruck als sinnlos, $= \infty$, zu gelten.

Die Gleichung $x \circ b = a$, rechts auf 0 gebracht und geordnet, gibt $Ax + Bx_1 = 0$, nämlich:

$$(p_1ab + q_1ab_1 + pa_1b + qa_1b_1)x + (r_1ab + s_1ab_1 + ra_1b + sa_1b_1)x_1 = 0$$

und hat zur Resultante nach x, in Gestalt von $AB = 0$:

$$p_1r_1ab + q_1s_1ab_1 + pra_1b + qsa_1b_1 = 0,$$

und zur Lösung $x = Bu_1 + A_1u$ bei arbiträrem u:

$$\frac{a}{b} = x = (r_1u_1 + pu)ab + (s_1u_1 + qu)ab_1 + (ru_1 + p_1u)a_1b + (su_1 + q_1u)a_1b_1.$$

Schreibt man:

$$\frac{a}{b} = p'ab + q'ab_1 + r'a_1b + s'a_1b_1,$$

so ist

$$p' = r_1u_1 + pu, \quad q' = s_1u_1 + qu, \quad r' = ru_1 + p_1u, \quad s' = su_1 + q_1u$$

und man erkennt unmittelbar (oder auch durch Elimination von p, q, r, s, wobei u von selbst herausfällt,):

$$p' = r'_1, \quad q' = s'_1;$$

also ist $\frac{a}{b}$ von der Form:

$$\frac{a}{b} = r'_1ab + s'_1ab_1 + r'a_1b + s'a_1b_1. \text{ —}$$

Ebenso gibt die Gleichung $b \circ x = a$:

$$(p_1ab + r_1ab_1 + pa_1b + ra_1b_1)x + (q_1ab + s_1ab_1 + qa_1b + sa_1b_1)x_1 = 0,$$

mit der Resultante:

$$p_1q_1ab + r_1s_1ab_1 + pqa_1b + rsa_1b_1 = 0$$

und der Auflösung:

$$a : b = x = (q_1u_1 + pu)ab + (s_1u_1 + ru)ab_1 + (qu_1 + p_1u)a_1b + \\ + (su_1 + r_1u)a_1b_1;$$

es ist also auch $a : b$ von der Form

$$a : b = r'_1ab + s'_1ab_1 + r'a_1b + s'a_1b_1.$$

Überhaupt ergibt sich alles auf $a : b$ bezügliche aus dem über $\frac{a}{b}$ eruirten einfachst, indem man q mit r vertauscht.

β) Die allgemeinste *assoziative Knüpfung* im identischen Kalkul soll jetzt ermittelt werden, — mithin die „Lösung" (der Funktionalgleichung) des Algorithmus

β_1) $$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = a \circ b \circ c.$$

Wir erhalten gemäss α_1):

$$(a \circ b) \circ c = p(a \circ b)c + q(a \circ b)c_1 + r\overline{(a \circ b)}c + s\overline{(a \circ b)}c_1 = \\ = (p + r)abc + (pq + p_1s)abc_1 + (pq + q_1r)ab_1c + \\ + (q + s)ab_1c_1 + pra_1bc + (qr + r_1s)a_1bc_1 + \\ + (ps + rs_1)a_1b_1c + qsa_1b_1c_1,$$

$$a \circ (b \circ c) = pa(b \circ c) + qa\overline{(b \circ c)} + ra_1(b \circ c) + sa_1\overline{(b \circ c)} = \\ = (p+q)abc + pqabc_1 + (pr + qr_1)ab_1c + (ps + qs_1)ab_1c_1 + \\ + (pr + p_1s)a_1bc + (qr + q_1s)a_1bc_1 + (r + s)a_1b_1c + rsa_1b_1c_1.$$

Sollen diese beiden Ausdrücke für ganz beliebige a, b, c einander gleich sein, so müssen die gleichstelligen Koeffizienten übereinstimmen:

$$p + r = p + q,\quad pq + p_1 s = pq,\quad pq + q_1 r = pr + qr_1,\quad q + s = ps + qs_1,$$
$$pr = pr + p_1 s,\quad qr + r_1 s = qr + q_1 s,\quad ps + rs_1 = r + s,\quad qs = rs.$$

Die acht Gleichungen lauten, rechts auf 0 gebracht:

$$p_1(qr_1 + q_1 r) = 0,\quad p_1 s = 0,\quad p_1(qr_1 + q_1 r) = 0,\quad p_1 s = 0,$$
$$p_1 s = 0,\quad (qr_1 + q_1 r)s = 0,\quad p_1 s = 0,\quad (qr_1 + q_1 r)s = 0,$$

und vereinigen sich zu der Gleichung

$$\beta_2)\qquad p_1 s + (p_1 + s)(qr_1 + q_1 r) = 0,$$

oder zu dem Subsumtionenprodukt:

$$(s \mathrel{\overline{\in}} p)(qr_1 + q_1 r \mathrel{\overline{\in}} ps_1).$$

Wir wollen diese Aussage die *„Charakteristik"* assoziativer Knüpfungen nennen. Dieselbe ist symmetrisch allgemein nach p, q, r, s zu lösen.

Der Subsumtion $s \mathrel{\overline{\in}} p$ wird auf die allgemeinste Weise genügt — cf. Bd. 1, S. 504 —, indem man setzt:

$$s = \varkappa\lambda,\qquad p = \varkappa + \lambda,$$
$$s_1 = \varkappa_1 + \lambda_1,\quad p_1 = \varkappa_1\lambda_1,$$

wonach $ps_1 = \varkappa\lambda_1 + \varkappa_1\lambda$ wird. Um der zweiten Forderung

$$qr_1 + q_1 r \mathrel{\overline{\in}} \varkappa\lambda_1 + \varkappa_1\lambda$$

zu genügen, ist nunmehr ebenso zu bewirken, dass

$$qr_1 + q_1 r = \alpha\beta,$$
$$\varkappa\lambda_1 + \varkappa_1\lambda = \alpha + \beta$$

wird. Nach Bd. 1, S. 513 sq. sind hiezu die Lösungen:

$\varkappa = \gamma\,\alpha_1\beta_1 + \zeta\,(\alpha + \beta)$	$q = \delta\,(\alpha_1 + \beta_1) + \varepsilon\,\alpha\beta$
$\lambda = \gamma\,\alpha_1\beta_1 + \zeta_1(\alpha + \beta)$	$r = \delta\,(\alpha_1 + \beta_1) + \varepsilon_1\alpha\beta$
$\varkappa_1 = \gamma_1\alpha_1\beta_1 + \zeta_1(\alpha + \beta)$	$q_1 = \delta_1(\alpha_1 + \beta_1) + \varepsilon_1\alpha\beta$
$\lambda_1 = \gamma_1\alpha_1\beta_1 + \zeta\,(\alpha + \beta)$	$r_1 = \delta_1(\alpha_1 + \beta_1) + \varepsilon\,\alpha\beta$

Hiermit wird dann

$$p = \gamma + \alpha + \beta,\quad s = \gamma\alpha_1\beta_1,$$

und ζ fällt ganz heraus; die allgemeinste assoziative Knüpfung im identischen Kalkul ist sonach diese:

$$\beta_3)\qquad \begin{cases} x \circ y = (\alpha + \beta + \gamma)xy + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}\,xy_1 + \\ \qquad + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}\,x_1 y + \alpha_1\beta_1\gamma x_1 y_1, \\ \overline{x \circ y} = \alpha_1\beta_1\gamma_1 xy + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta_1 + \alpha\beta\varepsilon_1\}\,xy_1 + \\ \qquad + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta_1 + \alpha\beta\varepsilon\}\,x_1 y + (\alpha + \beta + \gamma_1)x_1 y_1, \end{cases}$$

worin die fünf Gebiete α, β, γ, δ, ε arbiträre Parameter vorstellen; und zwar kann unter ihnen ε noch nach Belieben festgesetzt werden (z. B. $= 0$ oder 1) *unbeschadet der Allgemeinheit.*

Als der übereinstimmende Wert von $(x \circ y) \circ z$ und $x \circ (y \circ z)$ stellt sich heraus, (indem die Probe stimmt):

$$\beta_4)\left\{\begin{aligned} x \circ y \circ z = {} & (\alpha + \beta + \gamma + \delta)xyz + \{(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xyz_1 + \\ & + \{(\alpha + \beta + \gamma)\delta + \alpha\beta\}xy_1z + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xy_1z_1 + \\ & + \{(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1yz + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta\}x_1yz_1 + \\ & + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1y_1z + \alpha_1\beta_1\gamma\delta x_1y_1z_1. \end{aligned}\right.$$

Wir substituiren hierin $z \circ u$ für z, um nun auch $x \circ y \circ z \circ u$ sorgfältig zu berechnen. Hierbei treten merkwürdigerweise alle Koeffizienten bis auf viere doppelt auf:

$$\beta_5)\left\{\begin{aligned} x \circ y \circ z \circ u = {} & (\alpha + \beta + \gamma)xu \cdot yz + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}xu \cdot y_1z_1 + \\ & + [\{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xu_1 + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1u](yz + y_1z_1) + \\ & + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta\}x_1u_1 \cdot yz + \alpha_1\beta_1\gamma x_1u_1 \cdot y_1z_1 + \\ & + [(\alpha\beta + \delta)xu + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xu_1 + \\ & + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1u + (\alpha_1 + \beta_1)\delta x_1u_1](yz_1 + y_1z). \end{aligned}\right.$$

Die beiden Glieder in der ersten und resp. in der dritten Zeile würden sich analog zusammenziehen, wenn

$$\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta = \alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta = \alpha_1\beta_1\gamma$$

wäre; diese beiden Bedingungen laufen aber hinaus auf folgende:

$$(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta_1 = 0, \quad (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta = 0$$

oder

$$\alpha = \beta.$$

Bedingungslos aber stellt der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer auch seinerseits wieder eine assoziative Knüpfung vor.

Streng geordnet ist

$$\beta_6)\left\{\begin{aligned} x \circ y \circ z \circ u = {} & (\alpha + \beta + \gamma)xyzu + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xyzu_1 + \\ & + (\alpha\beta + \delta)xyz_1u + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xyz_1u_1 + \\ & + (\alpha\beta + \delta)xy_1zu + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xy_1zu_1 + \\ & + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}xy_1z_1u + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon\}xy_1z_1u_1 + \\ & + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1yzu + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta\}x_1yzu_1 + \\ & + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1yz_1u + (\alpha_1 + \beta_1)\delta x_1yz_1u_1 + \\ & + \{\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1y_1zu + (\alpha_1 + \beta_1)\delta x_1y_1zu_1 + \\ & + \{(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1\}x_1y_1z_1u + \alpha_1\beta_1\gamma x_1y_1z_1u_1. \end{aligned}\right.$$

Nennt man hier m und n die Koeffizienten und $m \cdots u + n \cdots u_1$ die beiden Glieder in irgend einer Zeile, und substituirt nun $u \circ v$ für u resp. $\overline{u \circ v}$ für u_1, so entsteht daraus

$$\begin{aligned} m \cdots (puv + quv_1 + ru_1v + su_1v_1) &+ \\ + n \cdots (p_1uv + q_1uv_1 + r_1u_1v + s_1u_1v_1) &= \\ = (mp + np_1) \cdots uv + (mq + nq_1) \cdots uv_1 &+ \\ + (mr + nr_1) \cdots u_1v + (ms + ns_1) \cdots u_1v_1&; \end{aligned}$$

es ist damit angedeutet, auf welche Weise die Koeffizienten bei Hinzutritt eines weiteren symbolischen Faktors aus den vorigen abzuleiten sind. Und zwar gilt diese Ableitung offenbar allgemein auch für die Fortsetzung und Ausdehnung des Verfahrens auf noch mehr Faktoren.

Ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten muss sich indessen ergeben, wenn wir bis zu einem Produkt aus höchstens 8 symbolischen Faktoren weiter gehen, weil spätestens von da ab die früheren Koeffizienten sich nur immer wiederholen müssen.

Denn die Charakteristik fordert das Wegfallen der Hälfte von den 16 Konstituenten in p, q, r, s, und mit den übrigen 8 können blos $2^8 = 256$ verschiedene Ausdrücke gebildet werden, — eben nur so viele, als das entwickelte symbolische Produkt der 8 Terme Glieder aufweist.

Doch reduzirt sich die Zahl der zu gedachtem Zweck zu berechnenden Koeffizienten noch ganz erheblich. Zunächst nämlich ist zu beachten, dass zu den 4 Koeffizienten von $x \circ y$ und den $2^3 = 8$ Koeffizienten von $x \circ y \circ z$ zuletzt mit $x \circ y \circ z \circ u$ statt $2^4 = 16$ nur 6 neue verschiedene hinzugekommen sind, da in $\beta_6)$ nur die 10 in $\beta_5)$ zusammengestellten Koeffizienten von einander verschieden sind, von diesen aber wieder das erste und das letzte Koeffizientenpaar (in $\beta_6)$) schon bei $x \circ y$ vorkommt. Diese beiden Paare liefern ebenso, wie die Koeffizienten von $x \circ y \circ z$, auch die vier ersten und die vier letzten Koeffizienten von $x \circ y \circ z \circ u \circ v$.

In diesem letzteren Ausdruck werden aber zudem von den übrigen $2^5 - 8 = 24$ zu berechnenden Koeffizienten jedenfalls weitere 8 doppelt auftreten, nämlich je die 4, welche der zweiten oder dritten bezw. der sechsten oder siebenten Zeile in $\beta_6)$ entstammen, wegen der Übereinstimmung dieser beiden Zeilenpaare in den Koeffizienten.

Für die hiernach noch übrigen 16 'Koeffizienten berechnen sich folgende Werte, und zwar
aus der zweiten (und dritten) Zeile von $\beta_6)$ die viere:

$$\alpha\beta + (\alpha + \beta + \gamma)\delta, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon,$$
$${}^*\alpha\beta + \delta + \alpha_1\beta_1\gamma, \qquad (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon,$$

aus der vierten Zeile:

$$\alpha\beta + \delta + \alpha_1\beta_1\gamma, \qquad (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon,$$
$$\alpha\beta + (\alpha + \beta + \gamma)\delta, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon,$$

aus der fünften Zeile:

$$(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta,$$
$$\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1, \qquad {}^*(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta,$$

endlich aus der sechsten (und siebenten) Zeile:

$$\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1, \qquad (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta,$$
$$(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta.$$

An neuen Koeffizienten sind hiernach nur die beiden besternten* zu den bisherigen 18 hinzugekommen. Auch ergaben sich nur viererlei Paare, von denen das erste und letzte schon bei $x \circ y \circ z$ vorkamen.

Um fortzufahren, haben wir also nur noch die beiden neuentstandenen Paare demselben Algorithmus zu unterwerfen. Das erste von diesen (in der zweiten oder dritten unserer Koeffizientenzeilen) liefert:

$$\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta, \qquad (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon,$$
$$\alpha\beta + \delta, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon,$$

das andere (in der sechsten oder siebenten Zeile):

$$\alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1, \qquad (\alpha_1 + \beta_1)\delta,$$
$$(\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta.$$

Diese Paare sind aber sämtlich unter $x \circ y \circ z \circ u$ schon vorgekommen, sodass wir den Abschluss erreicht haben.

Es können sonach in allen symbolischen Produkten aus noch so viel Faktoren nicht mehr als die bisherigen 20 Koeffizienten vorkommen, die sich in den Knüpfungen aus 2, 3, 4 und 5 symbolischen Faktoren erstmals vollständig zusammenfinden, von da ab nur wiederholen.

Ist nun ein symbolisches Produkt von N Faktoren gegeben, wohlgeordnet und so hingeschrieben, dass die Glieder seiner Entwicklung zu je zweien in einer Zeile stehen, wie oben in β_4) und β_6), und man will das symbolische Produkt aus $N+1$ Faktoren bilden, so wird jede Zeile des gegebenen Produktes zwei Zeilen des gesuchten, jedes gegebene Koeffizientenpaar einer Zeile deren zwei neue liefern. Die folgende Tafel β_9) gibt zu jedem Koeffizientenpaar (links einer {-Klammer) die beiden daraus hervorgehenden Koeffizientenpaare (rechts), wobei ich mich der im nachstehenden Koeffizientenverzeichniss β_7) gedeuteten Buchstabenbezeichnungen bediene.

$$\beta_7)\left\{\begin{array}{ll}
p = \alpha + \beta + \gamma & q = (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon \\
r = (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1 & s = \alpha_1\beta_1\gamma \\
a = \alpha + \beta + \gamma + \delta & b = (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon \\
c = \alpha\beta + (\alpha + \beta + \gamma)\delta & d = \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon \\
e = (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1 & f = \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta \\
g = \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha_1 + \beta_1)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1 & h = \alpha_1\beta_1\gamma\delta \\
a' = \alpha\beta + \delta & b' = \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon \\
c' = \alpha\beta + \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha + \beta)\delta & (d' = q) \\
(e' = r) & f' = \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta \\
g' = \alpha_1\beta_1\gamma + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\delta + \alpha\beta\varepsilon_1 & h' = (\alpha_1 + \beta_1)\delta \\
p' = \alpha\beta + \alpha_1\beta_1\gamma + \delta & (q' = b) \\
(r' = g) & s' = (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma)\delta
\end{array}\right.$$

$$\beta_8)\left\{\begin{array}{rl}
x \circ y = & pxy + qxy_1 + rx_1y + sx_1y_1, \\
x \circ y \circ z = & axyz + bxyz_1 + cxy_1z + dxy_1z_1 + \\
& + ex_1yz + fx_1yz_1 + gx_1y_1z + hx_1y_1z_1, \\
x \circ y \circ z \circ u = & pxyzu + qxyzu_1 + a'xyz_1u + b'xyz_1u_1 + \\
& + a'xy_1zu + b'xy_1zu_1 + c'xy_1z_1u + qxy_1z_1u_1 + \\
& + rx_1yzu + f'x_1yzu_1 + g'x_1yz_1u + h'x_1yz_1u_1 + \\
& + g'x_1y_1zu + h'x_1y_1zu_1 + rx_1y_1z_1u + sx_1y_1z_1u_1
\end{array}\right.$$

Tafel β_9)

$p, q \begin{cases} a, b \\ c, d \end{cases}$	$a, b \begin{cases} p, q \\ a', b' \end{cases}$ $c, d \begin{cases} a', b' \\ c', q \end{cases}$	$a', b', \begin{cases} c, d \\ p', b \end{cases}$ $c', q \begin{cases} p', b \\ c, d \end{cases}$	$p', b \begin{cases} c', q \\ a', b' \end{cases}$
$r, s \begin{cases} e, f \\ g, h \end{cases}$	$e, f \begin{cases} r, f' \\ g', h' \end{cases}$ $g, h \begin{cases} g', h' \\ r, s \end{cases}$	$r, f' \begin{cases} e, f \\ g, s' \end{cases}$ $g', h' \begin{cases} g, s' \\ e, f \end{cases}$	$g, s' \begin{cases} g', h' \\ r, f' \end{cases}$

Mit Hülfe dieser Tafel lässt sich nun ohne weiteres hinschreiben:

$$\begin{aligned}
x \circ y \circ z \circ u \circ v = & \; axyzuv + bxyzuv_1 + cxyzu_1v + dxyzu_1v_1 + \\
& + cxyz_1uv + dxyz_1uv_1 + p'xyz_1u_1v + bxyz_1u_1v_1 + \\
& + cxy_1zuv + dxy_1zuv_1 + p'xy_1zu_1v + bxy_1zu_1v_1 + \\
& + p'xy_1z_1uv + bxy_1z_1uv_1 + cxy_1z_1u_1v + dxy_1z_1u_1v_1 + \\
& + ex_1yzuv + fx_1yzuv_1 + gx_1yzu_1v + s'x_1yzu_1v_1 + \\
& + gx_1yz_1uv + s'x_1yz_1uv_1 + ex_1yz_1u_1v + fx_1yz_1u_1v_1 + \\
& + gx_1y_1zuv + s'x_1y_1zuv_1 + ex_1y_1zu_1v + fx_1y_1zu_1v_1 + \\
& + ex_1y_1z_1uv + fx_1y_1z_1uv_1 + gx_1y_1z_1u_1v + hx_1y_1z_1u_1v_1 = \\
= & \; axyzuv + p'xv(yz_1u_1 + y_1zu_1 + y_1z_1u) + \\
& \qquad + s'x_1v_1(yzu_1 + yz_1u + y_1zu) + hx_1y_1z_1u_1v_1 + \\
& + (bxv_1 + ex_1v + fx_1v_1)(yzu + yz_1u_1 + y_1zu_1 + y_1z_1u) + \\
& + (cxv + dxv_1 + gx_1v)(yzu_1 + yz_1u + y_1zu + y_1z_1u_1);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& x \circ y \circ z \circ u \circ v \circ w = \\
&= pxyzuvw + qxyzuvw_1 + a'xyzuv_1w + b'xyzuv_1w_1 + \\
&+ a'xyzu_1vw + b'xyzu_1vw_1 + c'xyzu_1v_1w + qxyzu_1v_1w_1 +_1 \\
&+ a'xyz_1uvw + b'xyz_1uvw_1 + c'xyz_1uv_1w + qxyz_1uv_1w_1 + \\
&+ c'xyz_1u_1vw + qxyz_1u_1vw_1 + a'xyz_1u_1v_1w + b'xyz_1u_1v_1w_1 + \\
&+ a'xy_1zuvw + b'xy_1zuvw_1 + c'xy_1zuv_1w + qxy_1zuv_1w_1 + \\
&+ c'xy_1zu_1vw + qxy_1zu_1vw_1 + a'xy_1zu_1v_1w + b'xy_1zu_1v_1w_1 + \\
&+ c'xy_1z_1uvw + qxy_1z_1uvw_1 + a'xy_1z_1uv_1w + b'xy_1z_1uv_1w_1 + \\
&+ a'xy_1z_1u_1vw + b'xy_1z_1u_1vw_1 + c'xy_1z_1u_1v_1w + qxy_1z_1u_1v_1w_1 + \\
&+ rx_1yzuvw + f'x_1yzuvw_1 + g'x_1yzuv_1w + h'x_1yzuv_1w_1 + \\
&+ g'x_1yzu_1vw + h'x_1yzu_1vw_1 + rx_1yzu_1v_1w + f'x_1yzu_1v_1w_1 + \\
&+ g'x_1yz_1uvw + h'x_1yz_1uvw_1 + rx_1yz_1uv_1w + f'x_1yz_1uv_1w_1 + \\
&+ rx_1yz_1u_1vw + f'x_1yz_1u_1vw_1 + g'x_1yz_1u_1v_1w + h'x_1yz_1u_1v_1w_1 + \\
&+ g'x_1y_1zuvw + h'x_1y_1zuvw_1 + rx_1y_1zuv_1w + f'x_1y_1zuv_1w_1 + \\
&+ rx_1y_1zu_1vw + f'x_1y_1zu_1vw_1 + g'x_1y_1zu_1v_1w + h'x_1y_1zu_1v_1w_1 + \\
&+ rx_1y_1z_1uvw + f'x_1y_1z_1uvw_1 + g'x_1y_1z_1uv_1w + h'x_1y_1z_1uv_1w_1 + \\
&+ g'x_1y_1z_1u_1vw + h'x_1y_1z_1u_1vw_1 + rx_1y_1z_1u_1v_1w + sx_1y_1z_1u_1v_1w_1 = \\
&= pxw \cdot yzuv + sx_1w_1 \cdot y_1z_1u_1v_1 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
+ qxw_1 & \cdot\,(yzuv & + yzu_1v_1 & + yz_1uv_1 & + yz_1u_1v & + y_1zuv_1 & + y_1zu_1v & + y_1z_1uv & + y_1z_1u_1v_1) \\
+ c'xw & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ rx_1w & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ f'x_1w_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
+ a'xw & \cdot\,(yzuv_1 & + yzu_1v & + yz_1uv & + y_1zuv & + yz_1u_1v_1 & + y_1zu_1v_1 & + y_1z_1uv_1 & + y_1z_1u_1v) \\
+ b'xw_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ g'x_1w & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ h'x_1w_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\end{array}
$$

Man sieht, dass für $c' = p$, $f' = s$, das heisst (cf. oben S. 496) für

$\beta_{10})$ $$\beta = \alpha$$

eine beträchtliche Vereinfachung eintritt. In diesem *„ausgezeichneten Falle“* $\beta_{10})$ unserer symbolischen Multiplikation fallen nämlich von den 20 Koeffizienten viere fort, indem

$$c' = p, \quad f' = s, \quad p' = a, \quad s' = h$$

wird, und die noch übrigen reduziren sich zu:

$p = \alpha + \gamma$	$q = \alpha_1\delta + \alpha\varepsilon$	$r = \alpha_1\delta + \alpha\varepsilon_1$	$s = \alpha_1\gamma$
$a = \alpha + \gamma + \delta$	$b = \alpha_1\gamma\delta + \alpha\varepsilon$	$c = \alpha + \gamma\delta$	$d = \alpha_1(\gamma + \delta) + \alpha\varepsilon$
$e = \alpha_1\gamma\delta + \alpha\varepsilon_1$	$f = \alpha_1(\gamma + \delta)$	$g = \alpha_1(\gamma + \delta) + \alpha\varepsilon_1$	$h = \alpha_1\gamma\delta$
$a' = \alpha + \delta$	$b' = \alpha_1\gamma + \alpha\varepsilon$	$g' = \alpha_1\gamma + \alpha\varepsilon_1$	$h' = \alpha_1\delta.$

$x \circ y$ und $x \circ y \circ z$ bleiben bei dieser Annahme unverändert; dagegen wird einfacher:

$$x \circ y \circ z \circ u = (pxu + qxu_1 + rx_1u + sx_1u_1)(yz + y_1z_1) + \\ + (a'xu + b'xu_1 + g'x_1u + h'x_1u_1)(yz_1 + y_1z),$$

$$x \circ y \circ z \circ u \circ v = \\ = (axv + bxv_1 + ex_1v + fx_1v_1)(yzu + yz_1u_1 + y_1zu_1 + y_1z_1u) + \\ + (cxv + dxv_1 + gx_1v + hx_1v_1)(yzu_1 + yz_1u + y_1zu + y_1z_1u_1),$$

$$x \circ y \circ z \circ u \circ v \circ w = \\ = (pxw + qxw_1 + rx_1w + sx_1w_1) \cdot \\ \cdot (yzuv + yzu_1v_1 + yz_1uv_1 + yz_1u_1v + y_1zuv_1 + y_1zu_1v + y_1z_1uv + y_1z_1u_1v_1) + \\ + (a'xw + b'xw_1 + g'x_1w + h'x_1w_1) \cdot \\ \cdot (yzuv_1 + yzu_1v + yz_1uv + y_1zuv + yz_1u_1v_1 + y_1zu_1v_1 + y_1z_1uv_1 + y_1z_1u_1v),$$

und so weiter!

Das symbolische Produkt $x \circ y \circ \cdots \circ u \circ v \circ w$ beliebig vieler Argumente stellt sich offenbar hier stets dar als Binom zweier (identischer) Produkte aus je zwei Faktoren, von denen der eine das erste Argument x mit dem letzten w verknüpft nach einem der vier Knüpfungsschemata:

$$\beta_{11})\quad \begin{cases} x \circ w = p\,xw + q\,xw_1 + r\,x_1w + s\,x_1w_1 \\ x \underset{2}{\circ} w = a'xw + b'xw_1 + g'x_1w + h'x_1w_1 \\ x \underset{1}{\circ} w = a\,xw + b\,xw_1 + e\,x_1w + f\,x_1w_1 \\ x \underset{3}{\circ} w = c\,xw + d\,xw_1 + gx_1w + h\,x_1w_1, \end{cases}$$

während der andere die übrigen Argumente $y, \cdots u, v$ enthält. Denkt man sich die identische 1 nach diesen $y, \cdots u, v$ entwickelt, und bezeichnet man die eine Hälfte dieser Entwicklung, nämlich die Summe derjenigen Entwicklungsglieder, welche eine *gerade* Anzahl $(0, 2, 4, \cdots)$ Negate aufweisen, also $y \cdots uv + y \cdots u_1v_1 + \cdots$, durch deren erstes Glied mit vorgesetztem Summenzeichen, und ebenso entsprechend die andere Hälfte, so gilt für eine *gerade* Zahl von symbolischen Faktoren:

$$x \circ y \circ \cdots \circ u \circ v \circ w = (x \circ w)\Sigma y \cdots uv + (x \underset{2}{\circ} w)\Sigma y \cdots uv_1,$$

für eine *ungerade* Zahl dagegen:

$$x \circ y \circ \cdots \circ u \circ v \circ w = (x \underset{1}{\circ} w)\Sigma y \cdots uv + (x \underset{3}{\circ} w)\Sigma y \cdots uv_1.$$

Die vier Knüpfungen β_{11}) sollen einander „*konjugirte*“ heissen, die drei letzten auch „der ersten *zugeordnet*“.

Dieselben sind je für sich wieder assoziative Knüpfungen oder symbolische Multiplikationen; denn die Charakteristik β_2) ist erfüllt wie für die erste derselben:

$$p_1 s + (p_1 + s)(qr_1 + q_1 r) = 0,$$

so auch für die ihr zugeordneten Knüpfungen:

$$\begin{aligned} a_1' h' + (a_1' + h')(b' g_1' + b_1' g') &= 0 \\ a_1 f + (a_1 + f)(b e_1 + b_1 e) &= 0 \\ c_1 h + (c_1 + h)(d g_1 + d_1 g) &= 0, \end{aligned}$$

wie man leicht nachrechnet.

γ) *Distributiver Zusammenhang.* Welches sind die Bedingungen dafür, dass zwei Knüpfungen, die als symbolische Multiplikation und Addition bezeichnet werden mögen:

$$\begin{aligned} x \circ y &= pxy + qxy_1 + rx_1 y + sx_1 y_1 \\ x \dagger y &= axy + bxy_1 + cx_1 y + dx_1 y_1, \end{aligned}$$

in dem distributiven Zusammenhang stehen:

$$x \circ (y \dagger z) = x \circ y \dagger x \circ z?$$

Es wird

$$\begin{aligned} x \circ (y \dagger z) = {} & (px + rx_1)(ayz + byz_1 + cy_1 z + dy_1 z_1) + \\ & + (qx + sx_1)(a_1 yz + b_1 yz_1 + c_1 y_1 z + d_1 y_1 z_1) = \\ = {} & (ap + a_1 q)xyz + (bp + b_1 q)xyz_1 + \\ & + (cp + c_1 q)xy_1 z + (dp + d_1 q)xy_1 z_1 + \\ & + (ar + a_1 s)x_1 yz + (br + b_1 s)x_1 yz_1 + \\ & + (cr + c_1 s)x_1 y_1 z + (dr + d_1 s)x_1 y_1 z_1, \end{aligned}$$

und andrerseits

$$\begin{aligned} & x \circ y \dagger x \circ z = \\ = {} & a(pxy + qxy_1 + rx_1 y + sx_1 y_1)(pxz + qxz_1 + rx_1 z + sx_1 z_1) + \\ & + b(pxy + qxy_1 + rx_1 y + sx_1 y_1)(p_1 xz + q_1 xz_1 + r_1 x_1 z + s_1 x_1 z_1) + \\ & + c(p_1 xy + q_1 xy_1 + r_1 x_1 y + s_1 x_1 y_1)(pxz + qxz_1 + rx_1 z + sx_1 z_1) + \\ & + d(p_1 xy + q_1 xy_1 + r_1 x_1 y + s_1 x_1 y_1)(p_1 xz + q_1 xz_1 + r_1 x_1 z + s_1 x_1 z_1) = \\ = {} & a(py + qy_1)(pz + qz_1)x + a(ry + sy_1)(rz + sz_1)x_1 + \\ & + b(py + qy_1)(p_1 z + q_1 z_1)x + b(ry + sy_1)(r_1 z + s_1 z_1)x_1 + \\ & + c(p_1 y + q_1 y_1)(pz + qz_1)x + c(r_1 y + s_1 y_1)(rz + sz_1)x_1 + \\ & + d(p_1 y + q_1 y_1)(p_1 z + q_1 z_1)x + d(r_1 y + s_1 y_1)(r_1 z + s_1 z_1)x_1 = \\ = {} & (ap + dp_1)xyz + (apq + bpq_1 + cp_1 q + dp_1 q_1)xyz_1 + \\ & + (apq + cpq_1 + bp_1 q + dp_1 q_1)xy_1 z + (aq + dq_1)xy_1 z_1 + \\ & + (ar + dr_1)x_1 yz + (ars + brs_1 + cr_1 s + dr_1 s_1)x_1 yz_1 + \\ & + (ars + crs_1 + br_1 s + dr_1 s_1)x_1 y_1 z + (as + ds_1)x_1 y_1 z_1. \end{aligned}$$

Vergleichung der Koeffizienten in den gleichnamigen Gliedern ergibt 8 Gleichungen, die, rechts auf 0 gebracht und links nach den p, q bezw. r, s entwickelt, zu je zweien übereinstimmen:

$$a_1 pq + 0 \cdot pq_1 + (ad + a_1 d_1)p_1 q + dp_1 q_1 = 0$$
$$a_1 pq + 0 \cdot pq_1 + (bc + b_1 c_1)p_1 q + dp_1 q_1 = 0$$
$$a_1 rs + 0 \cdot rs_1 + (ad + a_1 d_1)r_1 s + dr_1 s_1 = 0$$
$$a_1 rs + 0 \cdot rs_1 + (bc + b_1 c_1)r_1 s + dr_1 s_1 = 0.$$

Die vereinigte Gleichung dieser Bedingungen ist also:

$$a_1(pq + rs) + (ad + a_1 d_1 + bc + b_1 c_1)(p_1 q + r_1 s) + d(p_1 q_1 + r_1 s_1) = 0.$$

δ) Eine Knüpfung soll dem *Gesetze*

δ_1) $$(a \circ b) \circ (b \circ c) = a \circ c$$

genügen. Also bilde

$$p(a \circ b)(b \circ c) + q(a \circ b)\overline{(b \circ c)} + r\overline{(a \circ b)}(b \circ c) + s\overline{(a \quad b)}\overline{(b \circ c)} =$$
$$= p\{(pa + ra_1)b + (qa + sa_1)b_1\}\{(pc + qc_1)b + (rc + sc_1)b_1\} +$$
$$+ q\{(pa + ra_1)b + (qa + sa_1)b_1\}\{(p_1 c + q_1 c_1)b + (r_1 c + s_1 c_1)b_1\} +$$
$$+ r\{(p_1 a + r_1 a_1)b + (q_1 a + s_1 a_1)b_1\}\{(pc + qc_1)b + (rc + sc_1)b_1\} +$$
$$+ s\{(p_1 a + r_1 a_1)b + (q_1 a + s_1 a_1)b_1\}\{(p_1 c + q_1 c_1)b + (r_1 c + s_1 c_1)b_1\} =$$
$$= p(pa + ra_1)(pc + qc_1)b + p(qa + sa_1)(rc + sc_1)b_1 +$$
$$+ q(pa + ra_1)(p_1 c + q_1 c_1)b + q(qa + sa_1)(r_1 c + s_1 c_1)b_1 +$$
$$+ r(p_1 a + r_1 a_1)(pc + qc_1)b + r(q_1 a + s_1 a_1)(rc + sc_1)b_1 +$$
$$+ s(p_1 a + r_1 a_1)(p_1 c + q_1 c_1)b + s(q_1 a + s_1 a_1)(r_1 c + s_1 c_1)b_1 =$$
$$= (p + s)abc + (pq + qr + p_1 q_1 s)abc_1 +$$
$$+ (pq + qr_1 + q_1 r + q_1 s)ab_1 c + (pq + qs_1 + q_1 rs)ab_1 c_1 +$$
$$+ (pr + qr + p_1 r_1 s)a_1 bc + (pqr + q_1 r_1 s)a_1 bc_1 +$$
$$+ (pr + qr_1 s + rs_1)a_1 b_1 c + psa_1 b_1 c_1 =$$
$$= \{(p+s)ac + (pq+qr+p_1 q_1 s)ac_1 + (pr+qr+p_1 r_1 s)a_1 c + (pqr+q_1 r_1 s)a_1 c_1\}b +$$
$$+ \{(pq+qr_1+q_1 r+q_1 s)ac + (pq+qs_1+q_1 rs)ac_1 + (pr+qr_1 s+rs_1)a_1 c + psa_1 c_1\}b_1.$$

Dies soll gleich werden dem Ausdruck:

$$a \circ c = pac + qac_1 + ra_1 c + sa_1 c_1,$$

also nur scheinbar eine Funktion von b, in Wirklichkeit unabhängig von b sein. Wenn nun etwa die Funktion

$$f(x) = Ax + Bx_1$$

konstant inbezug auf x sein soll, so ist für beliebige x, y

$$f(x) = f(y), \quad Ax + Bx_1 = Ay + By_1$$

oder rechts auf 0 gebracht

$$(AB_1 + A_1B)(xy_1 + x_1y) = 0.$$

Durch Elimination von x, y erhalten wir die Resultante:

$$AB_1 + A_1B = 0 \quad \text{oder} \quad A = B$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $Ax + Bx_1$ unabhängig von x werde.

In unserem Falle nun müssen also die Koeffizienten von b und b_1 einander gleich sein, und zwar für beliebige a, c; es folgt daher:

$$\delta_2)\quad \left\{\begin{array}{rl|l} p + s = & pq + qr_1 + q_1r + q_1s & = p \\ pq + qr + p_1q_1s = & pq + qs_1 + q_1rs & = q \\ pr + qr + p_1r_1s = & pr + rs_1 + qr_1s & = r \\ pqr + q_1r_1s = & ps & = s \end{array}\right.$$

Lassen wir den letzten Teil rechts, der sich aus der Gleichsetzung mit $a \circ c$ ergibt, vorerst beiseite, um zunächst nur das Kriterium der Unabhängigkeit des $(a \circ b) \circ (b \circ c)$ von b zu gewinnen, so sind die vier Gleichungen linkerhand zunächst auf 0 zu bringen, zu welchem Ende man ihre beiden Seiten zweckmässig nach q, r oder qr entwickelt. Man erhält:

$$\begin{array}{l} p_1s_1(qr_1 + q_1r) + p_1s \cdot qr + ps_1 \cdot q_1r_1 = 0 \\ p_1s(qr + q_1r_1) + p_1s_1 \cdot qr_1 + ps \cdot q_1r = 0 \\ p_1s(qr + q_1r_1) + ps \cdot qr_1 + p_1s_1 \cdot q_1r = 0 \\ ps(qr_1 + q_1r) + ps_1 \cdot qr + p_1s \cdot q_1r_1 = 0, \end{array}$$

und als ihre vereinigte Gleichung

$$\delta_3)\quad \left\{\begin{array}{l} (ps_1 + p_1s)(qr + q_1r_1) + (ps + p_1s_1)(qr_1 + q_1r) = 0, \\ \text{oder}\quad ps_1 + p_1s = qr_1 + q_1r, \quad \text{oder} \quad ps + p_1s_1 = qr + q_1r_1, \end{array}\right.$$

oder endlich auch

$$(pqr \subseteq s \subseteq p+q+r)(pqs \subseteq r \subseteq p+q+s)(prs \subseteq q \subseteq p+r+s)(qrs \subseteq p \subseteq q+r+s),$$

d. h. jeder von den vier Koeffizienten muss zwischen dem Produkt und der Summe der drei andern liegen.

Um diese Gleichung δ_3) symmetrisch allgemein zu lösen, ersetze man sie durch die beiden:

$$ps_1 + p_1s = \varepsilon, \quad qr_1 + q_1r = \varepsilon;$$

dann erhält man nach Bd. 1, S. 514:

$$\begin{array}{llll} p = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon & p_1 = \alpha_1\varepsilon_1 + \beta_1\varepsilon & q = \gamma\varepsilon_1 + \delta\varepsilon & q_1 = \gamma_1\varepsilon_1 + \delta_1\varepsilon \\ s = \alpha\varepsilon_1 + \beta_1\varepsilon & s_1 = \alpha_1\varepsilon_1 + \beta\varepsilon & r = \gamma\varepsilon_1 + \delta_1\varepsilon & r_1 = \gamma_1\varepsilon_1 + \delta\varepsilon \end{array}$$

Die Substitution dieser Werte in die Doppelgleichungen δ_2) ergibt die folgenden:

$$\begin{aligned} \alpha + \varepsilon &= \alpha\varepsilon_1 + \beta\,\varepsilon \\ (\beta\delta + \beta_1\delta_1)\varepsilon + \gamma\varepsilon_1 &= \gamma\varepsilon_1 + \delta\,\varepsilon \\ (\beta\delta_1 + \beta_1\delta)\,\varepsilon + \gamma\varepsilon_1 &= \gamma\varepsilon_1 + \delta_1\varepsilon \\ \alpha\varepsilon_1 &= \alpha\varepsilon_1 + \beta_1\varepsilon, \end{aligned}$$

welche insgesamt auf die eine

δ_4) $$\beta_1\varepsilon = 0, \quad \varepsilon \mathrel{=\!\!\!\in} \beta$$

hinauskommen. Letztere liefert als ihre vereinigte Gleichung

$$\varepsilon = \zeta\eta, \quad \beta = \zeta + \eta$$

und hiernach

$$\begin{array}{l|l|l|l} p = \alpha + \zeta\eta & p_1 = \alpha_1(\zeta_1 + \eta_1) & q = \gamma(\zeta_1 + \eta_1) + \delta\,\zeta\eta & q_1 = \gamma_1(\zeta_1 + \eta_1) + \delta_1\zeta\eta \\ s = \alpha(\zeta_1 + \eta_1) & s_1 = \alpha_1 + \zeta\eta & r = \gamma(\zeta_1 + \eta_1) + \delta_1\zeta\eta & r_1 = \gamma_1(\zeta_1 + \eta_1) + \delta\zeta\eta, \end{array}$$

oder wenn nach $\frac{\alpha,\ \zeta,\ \eta}{\varepsilon,\ \alpha,\ \beta}$ jeder der drei Buchstaben der oberen Zeile durch den darunter stehenden ersetzt wird,

δ_5) $$\left\{\begin{array}{l|l|l|l} p = \alpha\beta + \varepsilon & q = (\alpha_1 + \beta_1)\gamma + \alpha\beta\delta & r = (\alpha_1 + \beta_1)\gamma + \alpha\beta\delta_1 & s = (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon \\ p_1 = (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_1 & q_1 = (\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 + \alpha\beta\delta_1 & r_1 = (\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 + \alpha\beta\delta & s_1 = \alpha\beta + \varepsilon_1. \end{array}\right.$$

Mithin stellt

$$\begin{aligned} x \circ y = (\alpha\beta + \varepsilon)xy + \{(\alpha_1 + \beta_1)\gamma + \alpha\beta\delta\}xy_1 + \\ + \{(\alpha_1 + \beta_1)\gamma + \alpha\beta\delta_1\}x_1y + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon x_1y_1 \end{aligned}$$

die gesuchte, dem Gesetz δ_1) unterworfene Knüpfung vor. Dieselbe ist, wie man sieht, *nicht kommutativ*, wol aber *assoziativ*, da die Charakteristik β_2) der assoziativen Operationen sich hier als erfüllt erweist.

Um noch die Charakteristik derselben aufzustellen, hat man derjenigen δ_3) der Unabhängigkeit des $(a \circ b) \circ (b \circ c)$ von b nur noch die Forderung

$$p_1 s = 0$$

hinzuzufügen (cf. δ_4); — oder da $p_1s(qr + q_1r_1) = 0$ bereits in der Unabhängigkeitscharakteristik δ_3) enthalten war, so wird letztere von der gesuchten blos um den Term $p_1s(qr_1 + q_1r)$ übertroffen, welcher $= 0$ gesetzt den Exzess dieser Charakteristik über jene darstellt. Die gesuchte lautet also:

δ_6) $$p_1s + (p_1 + s)(qr_1 + q_1r) + ps_1(qr + q_1r_1) = 0,$$

wo der letzte Term links den Exzess der vorliegenden über die Charakteristik β_2) der assoziativen Knüpfungen repräsentirt. In Subsumtionenform erhält man aus δ_6)

$$(pqr \mathrel{=\!\!\!\in} s \mathrel{=\!\!\!\in} p \mathrel{=\!\!\!\in} q + r + s)(rs \mathrel{=\!\!\!\in} q \mathrel{=\!\!\!\in} p + r)(qs \mathrel{=\!\!\!\in} r \mathrel{=\!\!\!\in} p + q).$$

§ 56. Über die Modalität der Urteile.

Mit Kant teilt die schulmässige Logik bekanntlich die Urteile ein in die drei Kategorien der „apodiktischen“, der „assertorischen“ und der „problematischen“, je nachdem dieselben — sofern sie kategorisch sind — unter einer von den drei Formen sich darstellen:

A *muss* B sein, oder: A ist *notwendig* B,

A *ist* B, oder: A ist thatsächlich, *zufällig* B,

A *kann* B sein, oder A ist *möglicherweise* (vielleicht) B.

Es genügt für das folgende, an die bejahende kategorische Urteilsform sich zu halten, da das Schema $A \Subset B$ derselben auch die verneinenden kategorischen, sowie die hypothetischen und disjunktiven mit umfasst; in der That kann B auch durch „nicht-B“ vertreten sein; und es kann, wie schon in der 15. Vorlesung gezeigt ist, dieselbe Subsumtion auch — mit Rücksicht auf die drei Modalitätskategorien — benutzt werden für die Ausdrucksformen:

Wenn A gilt, so *muss* (notwendig) B gelten,

(Zufällig) *gilt* B, wann A gilt,

Wenn A gilt, so *kann* B gelten, (gilt vielleicht),

also für hypothetische Urteile; endlich können nach S. 62 f. die disjunktiven und die noch allgemeineren alternativen Urteile leicht in die hypothetische Urteilsform umgeschrieben werden.

Der Einteilungsgrund zu der vorstehenden Klassifikation der Urteile, ihre „Modalität“, sollte sein ein genus proximum zu den Begriffen der Notwendigkeit, der Zufälligkeit (oder zufälligen Thatsächlichkeit) und der Möglichkeit. Und zwar setzte sich die Anschauung fest, als ob durch diese drei Prädikate verschiedene Grade der Gewissheit ausgedrückt würden, sodass das apodiktische Urteil eine höhere Garantie für die Wahrheit des Urteils gewähre, als das blos assertorische, und dieses wieder mehr, als das problematische. Demgemäss wurde unter zweien von den drei Urteilsformen die eine als eine *stärkere* Versicherung hingestellt, die andere dagegen *schwächer* genannt. Die Scholastik glaubte, — für die Syllogismen wenigstens — die Modalität der Konklusion nach derjenigen der Prämissen bestimmen zu können durch die Regel: „Conclusio sequitur partem debiliorem“, gemäss welcher der Konklusion die Modalität der im erläuterten Sinne schwächsten Prämisse zukäme.

Von den einfachen Syllogismen musste sich dieser Satz auf alle, wenn auch noch so zusammengesetzten deduktiven Schlüsse übertragen, in Anbetracht, dass nach der Lehre der schulmässigen Logik alle deduktiven Schlüsse durch blosses Zusammenwirken einfacher Syllogismen zustande kommen sollten.

Alles deduktive Schliessen aber sollte beruhen auf den vier Grundsätzen oder „Denkgesetzen“ der *Identität*, des *Widerspruchs*, des *ausgeschlossenen Mittels* und der *Kausalität*.

Wie vielsinnig indessen — zunächst — der Grundsatz der Kausalität ist, wie unklar darum der Ausdruck oft bei Denjenigen geblieben, die denselben im Munde führen, — und wie Unrecht man gethan hat, diesen, — im einen Sinne metaphysischen, im andern psychologischen Grundsatz mit den übrigen, den *logischen* Prinzipien auf eine Linie zu stellen, ist schon von mehreren Seiten ausgeführt worden, — vergl. hiezu auch Bd. 1, S. 26, sowie Sigwart[1] p. 203...212. Wir haben bei Begründung und Ausgestaltung des ganzen Gebäudes unserer Umfangslogik niemals Veranlassung oder auch nur eine Möglichkeit gehabt, uns auf jenen Grundsatz zu berufen oder denselben irgend wie zu verwerten. Die übrigen drei „Denkgesetze" haben wir zum Teil durch andere, gleichfalls nicht zahlreiche ersetzt, und es dürfte aus unseren Erörterungen unwiderleglich hervorgehen, dass jene Denkgesetze nicht ausreichen, um die Regeln des folgerichtigen Schliessens auch nur innerhalb der traditionellen Logik ausschliesslich auf sie gründen zu können, — selbst wenn, wie geschehen, das Prinzip der Identität noch erweitert wird zu dem der „*Übereinstimmung*", welch letzteres wesentlich auf unser Th. $6_{\times}$) $ab \neq\!\!\!\in a$ hinausläuft.

Die Mängel obiger Anschauung wurden nun aber von neueren Philosophen, insbesondere von Sigwart[1] p. 189...232 und F. A. Lange[1] p. 30...54, schon so vortrefflich und gründlich blosgelegt, dass mir, indem ich auf die Genannten verweise, hier nur wenig hinzuzufügen übrig bleibt.

In den Urteilen „A ist notwendig, resp. wirklich, resp. möglicherweise B" gehören die Adverbia nicht zum Prädikate; die Urteile prädiziren nicht über das grammatische Subjekt des Satzes, sondern lediglich über den Stand unserer Erkenntniss inbezug auf das Urteil „A ist B," welch letzteres selbst also das *logische* Subjekt der Aussage vorstellt.

Das problematische Urteil im besonderen verneint nur, dass die Verneinung jenes Urteils „A ist B" uns als gewiss gelte. Ist aber ungewiss, ob ein Urteil zu verneinen sei, so ist auch ungewiss, ob es zu bejahen ist, und umgekehrt. Denn wäre es gewisslich zu bejahen, so wäre es (cf. Th. 31)) sicherlich nicht zu verneinen, etc. Die beiden Urteile

„A ist vielleicht B" und „A ist vielleicht nicht B"

stehen also nicht im Widerspruch mit einander; vielmehr sofern sie singuläre sind, bedingen sie sogar einander gegenseitig, sind äquipollent. Wogegen andernfalls noch die dritte Möglichkeit besteht, dass A weder B noch nicht-B, sondern teils B, teils nicht-B sein mag.

Das assertorische und das apodiktische Urteil stellen beide die Geltung von $A \neq\!\!\!\in B$ als eine für uns *gewisse* hin. Im apodiktischen Urteil findet noch obendrein eine Berufung auf die „Denknotwendigkeit", ein Hinweis auf das Gefühl der Evidenz seiner Geltung statt. Das assertorische Urteil enthält dagegen einen solchen Hinweis nicht. Es scheint in manchen seiner Formen, wie „A ist *wirklich*, ist *thatsächlich* B“ solche Denknotwendigkeit noch zuzulassen, sie wenigstens nicht gerade auszuschliessen; in anderen Formen, wie „A ist (nur) *zufällig* B“ stellt es diese Denknotwendigkeit ausdrücklich in Abrede und bezeichnet die Verneinung des Urteils als *denk*möglich, wenn auch als nicht der Wirklichkeit entsprechend.

Dieser Unterschied zwischen „apodiktisch“ und „assertorisch“ indessen ist, so gefasst, überhaupt kein logischer, sondern blos ein psychologischer; in logischer Beziehung erscheint es subjektivem Belieben anheimgegeben, ob man das Urteil $A \in B$, nachdem dasselbe einmal als gewiss richtig erkannt ist, als assertorisches „A ist B“ oder als das apodiktische „A muss B sein“ formuliren will.

Dies dürfte unbestritten bleiben in Bezug auf anerkannt apodiktische Urteile, wie „2×2 ist 4“ oder „muss 4 sein“. Aber auch wer z. B. nach der Uhr sah, mag assertorisch sagen „es ist vier Uhr“, ebensogut aber auch apodiktisch: „es muss vier Uhr sein;“ (nämlich nachdem bekannt ist, dass die Uhr richtig geht und richtig abgelesen wurde).

Ohne dass Denknotwendigkeiten mitspielen, — mögen dieselben psychologisch auch nicht immer zum Bewusstsein gelangen, — kann überhaupt kein Urteil zustande kommen, auch nicht ein assertorisches. Immer müssen doch Gründe vorhanden sein, welche zur Aufstellung des Urteils „A ist B“ veranlassen und berechtigen (Kausalitätsgesetz!); andernfalls wäre diese Behauptung eine willkürliche Annahme und überhaupt keiner Gewissheit teilhaftig, also ebensowenig assertorisch, wie apodiktisch.

Selbst bei Urteilen wie „ich will dies“, welche den eigenen Empfindungs- oder Willenszustand des Urteilenden statuiren, ist eine Berufung auf die Denknotwendigkeit möglich, welche von dem Innewerden des eigenen Zustandes zur Abgabe des Urteils führt: „ich muss wollen, ich will gewiss“ statt „ich will“!

Gänzlich verfehlt ist es jedenfalls, — wie die genannten Philosophen ausgeführt haben, — den apodiktischen Urteilen einen höhern Grad von Gewissheit zuzuschreiben, als den assertorischen, sofern man glaubt, den letzteren überhaupt Gewissheit zuschreiben zu dürfen. Im Gegenteil gibt ein als Ergebniss von Schlüssen in apodiktischer Form aufgestelltes Urteil „A muss B sein“ Zweifeln Raum an der Vollständigkeit der Prämissen sowol als an der Bündigkeit der Schlusskette, die auf das Urteil führte, und pflegt daher weniger Zutrauen zu finden und zu verdienen, als das etwa auf Grund unmittelbarer Wahrnehmung assertorisch abgegebene Urteil „A ist B“, — wie die Genannten durch eine Reihe schlagender Beispiele erhärten.

„Apodiktischer Charakter“ kommt jedenfalls allen „apriorischen“ oder „analytischen“ Wahrheiten („Truismen“) zu, (wie: „schwarze Pferde sind schwarz“, „2×2 ist 4“), die wir in § 20 bereits betrachtet haben. Sie erscheinen in den einfacheren Fällen als „nichtssagend,“ „selbstverständlich“, „*evident*“ und sind uns dann unmittelbar mit dem Sinn der Wörter und der Herrschaft über die Zeichen gegeben, indem sie weiter nichts zum Ausdruck bringen als Gesetze, die den richtigen Gebrauch jener bestimmen und regeln. In den verwickelteren Fällen sind sie doch in den vorigen und etwa noch weiterhin aufgestellten Definitionen denknotwendig enthalten, mögen die Schlussreihen, mittelst welcher dies klargestellt wird, auch noch so mühsame und langwierige sein.

Es gilt nämlich für apodiktische Urteile der bezeichneten Art mit Denknotwendigkeit der Satz: *Jede Konklusion aus lauter analytisch-apodiktischen Prämissen hat wiederum apodiktische Geltung*

Dieser Satz ist dagegen keineswegs umkehrbar, da man auch aus problematischen Prämissen nach dem Aussagensatz $ab \Subset a$ alle einzelnen, jederzeit — stillschweigend oder ausdrücklich — zugleich mit vorausgesetzten analytischen Thatsachen folgerichtig herleiten kann. — Nicht immer also richtet sich die Konklusion in ihrer Modalität nach der „schwächsten“ Prämisse!

Zu den apodiktischen Urteilen der hier besprochenen Art gehören jedenfalls die „Wahrheiten“ der Logik und der (dieser eingeordneten) Arithmetik, — der beiden einzigen vonhauseaus rein deduktiven Disziplinen, — dagegen *nicht* die „geometrischen Wahrheiten“; mögen auch deren Axiome eine gewisse psychologische Denknotwendigkeit besitzen aufgrund unserer von uns erworbenen Raum-Anschauung, so ist doch durch die Nicht-Euklidische oder Pangeometrie erwiesen, dass diese Axiome der *logischen* Denknotwendigkeit ermangeln, nämlich ohne Widerspruch auch anders gedacht werden können. Noch weniger gehören dazu „physikalische Wahrheiten“, die sich auf irgend ein Naturgesetz, z. B. das Gesetz der Schwere, stützen.

Apodiktischen Charakter pflegt man nun aber gemeinhin auch einem Urteil zuzuschreiben in relativem Sinne, mit Bezugnahme auf ein bestimmtes System von Voraussetzungen, als Konventionen oder Festsetzungen, Annahmen, Hypothesen oder Axiomen, denen auch die anerkannten Prinzipien einer Disziplin, wie Naturgesetze, Rechtsnormen, u. dergl. zuzuzählen sind.

Solche Voraussetzungen sind dann entweder völlig willkürliche Annahmen, ad hoc gemacht um zuzusehen, was etwa aus ihnen folgen würde. Oder sie treten auf mit dem Anspruch auf eine gewisse Glaubwürdigkeit oder mindestens auf Zulässigkeit, indem sie sich dabei auf schon vorhandene Erkenntnisselemente berufen, zu deren Zustandekommen auch Wahrnehmung und eventuell induktive Schlüsse mitgewirkt haben müssen. Denn über andere Erkenntnissquellen, als Wahrnehmung und Folgerung, verfügen wir ja überhaupt nicht.

Gewissheit kommt solchen synthetischen Prämissen keinesfalls zu, und noch weniger Denknotwendigkeit; sie sind, wenn nicht willkürliche Annahmen, wenn überhaupt Urteile, doch immer nur problematische, mögen sie auch grammatikalisch noch so entschieden in der assertorischen Form hingestellt sein. Die Konklusion kann dann eine absolut-apodiktische sein; dann können aber die synthetischen Prämissen als überflüssig fortgelassen werden; die Konklusion gilt ja dann „selbstverständlich", auch ohne sie. Andernfalls wird die Konklusion auch nicht mehr Glaubwürdigkeit besitzen, als die Prämissen, sie wird ebenfalls problematischen Charakter haben.

Die assertorischen Urteile der traditionellen Logik sind also ihrem logischen Wesen nach stets entweder apodiktisch schlechtweg, oder aber problematisch; von ihrer Modalität bleibt bei näherem Zusehen nichts übrig, als eine sprachliche Ausdrucksform. Die Logik kennt nur *eine* absolute Gewissheit, — die 1 der Wahrscheinlichkeitsrechnung, — an welche zwar wol noch in verschiedener Weise unendliche Annäherung stattfinden mag, die aber selbst nimmermehr verschiedene Grade haben kann. Diese Gewissheit kommt ausschliesslich den analytischen Wahrheiten zu, die mit dem Sinne der Wörter und Zeichen und mit den Definitionen unserer Begriffe denknotwendig gegeben sind.

Im Falle einer problematischen Konklusion erwächst nun die hochwichtige Aufgabe, den Grad ihrer Glaubwürdigkeit zu beurteilen in jedem Falle, wo die Glaubwürdigkeitsgrade der Prämissen in Gestalt mathematischer Wahrscheinlichkeiten (bekanntlich als numerische echte Brüche) gegeben sind. Die Lösung dieser Aufgabe fällt der exakten (deduktiven) Logik zu, sofern nur denknotwendige Schlussfolgerungen in Betracht gezogen werden.

Die Aufgabe erfährt jedoch noch eine Erweiterung in der *induktiven* Logik, wo auch Schlüsse von nicht denknotwendigem Charakter, „Schlüsse nach der Wahrscheinlichkeit" gezogen werden. Es ist dann die Frage, welches die Wahrscheinlichkeit irgend einer Aussage sei, oder bezw. in dem so häufigen Falle ihrer Unbestimmtheit: zwischen welchen Grenzen sie liegen müsse, wenn die Aussage irgendwie von andern Aussagen mit gegebnen Wahrscheinlichkeiten abhängig ist, ohne aber geradezu als ihre legitime Konklusion aus ihnen hervorzugehen. Auch dieser erweiterten Aufgabe vermag die exakte Logik gerecht zu werden.

Es kommt im Entwicklungsgange der Wissenschaften nicht selten vor, dass *die Ideale* der Forschung *sich verschieben*. Was zuerst als im höchsten Maasse erstrebenswert erschienen, zeigt sich bei weiterem Fortschritt der Erkenntniss teils als gänzlich unmöglich, weder annähernd, noch überhaupt erreichbar, teils als unklar und nach Klarstellung unhaltbar, teils auch als verhältnissmässig wertlos, wogegen andre Ideale sich in den Vordergrund drängen, denen immer näher zu kommen als erreichbar und vom höchsten Wert erscheint, wenn auch ihre vollständige Verwirklichung für alle Zeiten utopisch bleiben mag.

An die Stelle des Ideales, das durch folgerichtiges Denken Erschlossene nach jenen rohen und nicht durchaus haltbaren drei Kategorien der Modalität zu beurteilen, tritt uns fortan das andere Ziel:

Aus den einzeln irgendwie gegebenen *Wahrscheinlichkeiten der Prämissen* zu deduktiven Schlussfolgerungen durch allgemeine Methoden *abzuleiten die Wahrscheinlichkeit einer* jeden Art von *Konklusion*, die sie zu liefern vermögen, — ja sogar einer jeden Aussage, die zu den Prämissen nur überhaupt in gegebener Beziehung steht!

Sofern wir auch die Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln vermöchten für empirisch oder induktorisch gewonnene Erkenntnisse, werden wir, indem wir diesem Ideal zustreben, nach und nach in den Besitz eines zuverlässigen Maassstabes für den Grad der Glaubwürdigkeit aller unserer Überzeugungen und Meinungen gelangen.

Indessen fällt die Inangriffnahme dieses Problems ausserhalb des Rahmens derjenigen Aufgaben, auf die ich in diesem Werke mich zu beschränken mir vorgesetzt habe. Ich hoffe, dasjenige, was in jener Hinsicht bereits geleistet erscheint, samt dem, was mir selbst darin zu erreichen möglich, spätestens im dritten Bande meines Lehrbuchs[1] der Arithmetik und Algebra systematisch darzustellen, wofern es mir vergönnt sein wird, auch dieses von mir begonnene Werk noch seiner Vollendung entgegenzuführen.

Anhänge.

Anhang 7.

McColl's Anwendung des Aussagenkalkuls zur Ermittelung der neuen Grenzen mehrfacher Integrale bei Abänderung der Integrationsfolge.

Dieser Anhang ist für die Mathematiker bestimmt. Kenntnisse über spezielle Integrationsmethoden brauchen allerdings in demselben nicht vorausgesetzt zu werden, wohl aber die Bekanntschaft mit dem Begriffe des n-fachen Integrals und mit seiner Darstellbarkeit vermittelst n successiver einfacher Integrationen.

Wir fassen durchweg nur reelle Grenzen und Integrationswege, nur ein reelles Integrationsbereich in's Auge. Die über ein solches zu integrirenden Funktionen $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, etc. können allemal ganz beliebig gegeben sein; nur sind sie, selbstverständlich, als innerhalb des Bereiches integrabele vorauszusetzen.

Es ist ein für die reine wie für die angewandte Mathematik wichtiges Problem der höheren Analysis, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen. Die Lösung dieses Problems wird durch die Methoden der Algebra der Logik ganz wesentlich gefördert, ja für mehr als dreifache, für Integrale von hohem Grad der Vielfachheit beinahe erst ermöglicht. Und so verdient schon um dieser Förderung willen Herrn McColl's Arbeit*) von dem mathematischen Publikum auch in Deutschland beachtet zu werden. Auf der andern Seite bietet sie ein prägnantes Beispiel dafür dar, wie die neueren Forschungsergebnisse der rechnenden Logik sich unmittelbar als auch für andere Disziplinen fruchtbar zu bewähren imstande sind.

In der Hauptsache erscheint Herrn McColl's Verfahren als eine Anwendung und Verwertung der Prinzipien und Bezeichnungsweisen des *Aussagenkalkuls,* wie sie in unsrer 15ten, 16ten und 21ten Vorlesung entwickelt worden, für solche zusammengesetzte Aussagen, deren Teilaussagen lauter *Zahlenvergleichungen* konstatiren, nämlich (Gleichungen oder) Ungleichungen zwischen Zahlen sind — das

*) Siehe 1) 2) 3) 4) des Literaturverzeichnisses Band 1, Seite 708.

Wort „Ungleichung" hier in dem gewöhnlichen, dem in der Arithmetik gebräuchlichen Sinne genommen*). Es ist eine Anwendung aber, die Herr Peirce mit Recht als „exceedingly ingenious" bezeichnet.

Um den Charakter des Problemes hervortreten zu lassen, will ich vorweg ein einfaches Beispiel vorführen.

Die Gleichung:

$$\int_a^{2a} dx \int_{x-a}^{x+a} dy \cdot f(x, y) = \left\{ \int_0^a dy \int_a^{a+y} dx \cdot + \int_a^{2a} dy \int_a^{2a} dx \cdot + \int_{2a}^{3a} dy \int_{y-a}^{2a} dx \cdot \right\} f(x, y),$$

in welcher a eine positive Zahl vorstellen soll und die Klammer rechterhand aufgelöst, nämlich $f(x, y)$ hinter *jedes* der drei Doppelintegral-Zeichen, die sie umschliesst, gesetzt zu denken ist — diese Gleichung zeigt, wie für das Doppelintegral linkerhand die Umkehrung der Integrationsfolge zu leisten ist.

Der Mathematiker, an welchen solche Aufgabe herantritt, wird in der Regel sich zunächst eine geometrische Anschauung von dem Bereich zu verschaffen suchen, über welches das gegebne Doppelintegral sich erstreckt, und wird hier unschwer finden, dass die in fragliches Bereich fallenden Wertepaare von x und y, als Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt, die Fläche des in beistehender Figur 33 schraffirten Parallelogrammes ausfüllen. Er wird sich die Gleichungen der verschiedenen (hier geraden) Linien aufstellen, welche dieses Flächenbereich begrenzen helfen, und aus dem Anblick der Figur entnehmen, dass die Fläche hier zu zerlegen ist in drei Streifen (in der Figur getrennt durch die wagrechten Striche), das Doppelintegral also in drei Teile zerfallen muss. Für jeden dieser Teile wird er aus den Gleichungen der begrenzenden Linien auf die bei der inneren Integration anzusetzenden (eventuell variabeln)

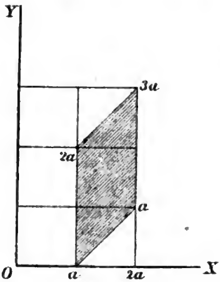

Fig. 33.

*) In der Theorie des identischen Kalkuls haben wir uns gestattet, die Negation einer Gleichung $a = b$, somit eine Behauptung von der Form $a \neq b$, als eine „Ungleichung" zu bezeichnen. Von dieser letztern Bedeutung des Wortes ist im gegenwärtigen Anhange abzusehen; ihr würde im reellen Zahlengebiete der Ansatz $a \lessgtr b$ entsprechen, während wir *hier* schon den bestimmteren Ansatz $a > b$ eine Ungleichung nennen werden.

Grenzen schliessen, so wie sie in der That in obiger Formel rechterhand sich angegeben finden, während für die äussere Integration sich die (konstanten) Grenzen aus der schon erwähnten Dreiteilung ergaben. —

Nun ist die analoge Veranschaulichung des Integrationsbereiches (als eines von verschiedenen Flächen begrenzten Raumes) bei einer dreifachen Ausdehnung desselben schon nicht mehr so leicht durchführbar; bei vier- oder mehrfacher Dimension des Bereiches, wie sie der Erstreckung eines vier- oder mehrfachen Integrales zukommen wird, ist sie überhaupt nicht thunlich.

Unter allen Umständen aber ist das ganze Veranschaulichungsverfahren, die Berufung auf die Anschauung, als ein Notbehelf zu qualifiziren, welcher nicht der Würde einer Wissenschaft entspricht, die ein rein analytisches Problem auch auf rein analytischem Wege — somit rechnend oder schliessend — lösen sollte. Auch kommen Fälle vor, wo die auf dem „Schein" basirende Anschauung trügerisch ist.

Darum verlohnt es, nach einer Methode auszuschauen, gemäss welcher die verschiedenen Teilintegrale, in die ein gegebenes mehrfaches Integral bei vorgeschriebener Abänderung der Integrationsfolge eventuell zerfällt, samt ihren verschiedenen Grenzen, zu finden sind in mechanischer Rechenarbeit nach bestimmten und allgemein gültigen Schemata. Dies aber leistet die McColl'sche Methode und zwar — *nach einer anzubringenden Berichtigung* (siehe unten sub „Regel 3") — in einer, wie es scheint, schon nahezu vollendeten Weise.

An dem Beispiel lässt sich sogleich erkennen, dass die Methode weiter nichts als ein gewisses *Transformationsproblem des Aussagenkalkuls* zu lösen hat: Es handelt sich um geeignete Umformung der Aussage:

„Der Punkt x, y fällt in das Integrationsbereich hinein."

Diese Aussage A erscheint in der That bei dem Doppelintegrale linkerhand zunächst gegeben in der Gestalt:

$$A, = (a < x < 2a)(x - a < y < x + a);$$

nachdem aber die Umkehrung der Integrationsordnung geleistet ist, mithin bei der Summe dreier Doppelintegrale rechterhand, erscheint dieselbe Aussage in der Form statuirt:

$$A, = (0 < y < a)(a < x < a + y) + (a < y < 2a)(a < x < 2a) + \\ + (2a < y < 3a)(y - a < x < 2a);$$

und umgekehrt würden wir, sobald einmal die letztere Form der Aussage A gefunden wäre, leicht im Stande sein, den gesuchten Ausdruck rechterhand hinzuschreiben und somit bei dem Doppelintegrale links die Umkehrung der Integrationsfolge zu leisten.

Die ganze Aufgabe spitzt sich also dahin zu: aus der ersten, gegebenen Form der Aussage A die zweite Form derselben abzuleiten, jene Aussage in diese zu *transformiren.* Und beide Aussagen werden *äquivalent* sein müssen auf Grund nicht nur der Gesetze des Aussagenkalkuls, sondern auch der Regeln der Arithmetik, welche das Schliessen und Denken mit Ungleichungen sowie das Rechnen mit Zahlen beherrschen.

Wir beginnen damit, die elementaren Regeln der Denkoperationen mit Ungleichungen in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls übersichtlich darzustellen.

Von den drei Beziehungszeichen der Zahlenvergleichung:

$$>, =, <$$

können die beiden äusseren nur zwischen reellen Zahlen angewendet werden. Speziell hat man:

$$(a > b) \Subset (a \text{ ist reell})(b \text{ ist reelle Zahl}).$$

Von vornherein werden wir uns darum mit unsern Betrachtungen auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränken; zu diesen gehört die (arithmetische) Null, nicht aber das Symbol ∞ der absoluten Unendlich, indessen wohl „unendlich grosse“ positive oder negative Zahlen, die wir als Integrationsgrenzen durch $+\infty$ resp. $-\infty$ darstellen. Unter a, b, c, d, $\cdots$ x, y, $\cdots$ denken wir uns hinfort stets Zahlen, welche diesem Gebiet angehören.

Wir haben sodann zunächst die als Definition hinzustellende Aussagenäquivalenz:

$$\alpha) \qquad (a > b) = (b < a)$$

durch welche der Begriff „kleiner“ auf den als bekannt vorauszusetzenden Begriff „größer“ zurückgeführt wird.

Weiter gilt die fundamentale Aussagengleichung:

$$\beta) \qquad \dot{1} = (a > b) + (a = b) + (a < b)$$

in welcher, wie hier stets, die Eins mit dem Tupfen: $\dot{1}$ nicht die Zahl 1, sondern die identische Eins des Aussagenkalkuls vorstellt. Das heisst also: Zwischen zwei reellen Zahlen a und b findet immer eine der drei Beziehungen rechterhand statt.

Und zwar sind die drei Glieder der Aussagenalternative rechterhand gegenseitig *disjunkt* („mutually exclusive“ oder unverträglich, inkonsistent miteinander), die Summe rechts ist eine reduzirte, wie dies die Formeln aussprechen:

$$\gamma) \quad (a > b)(a = b) = 0, \quad (a > b)(a < b) = 0, \quad (a = b)(a < b) = 0.$$

Gleich, grösser und kleiner sein schliesst sich gegenseitig aus.

Als der Satz: „Wenn zwei Zahlen *einer* dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich“, gilt das Th. 4) des identischen Kalkuls:

$$(a = b)(b = c) \Subset (a = c)$$

bekanntlich auch für die Zahlengleichheit. Und dazu treten die folgenden Analoga unsrer Theoreme 2), 3) und des Prinzips II:

$\delta)$ $$(a > b)(b = c) \Subset (a > c), \quad (a = b)(b > c) \Subset (a > c)$$

$\varepsilon)$ $$(a > b)(b > c) \Subset (a > c)$$

nach denen es gestattet ist, in einer Ungleichung Gleiches durch Gleiches, und den Numerus major durch einen major desselben, den Numerus minor ebenso durch einen minor des letzteren zu ersetzen.

Bekanntlich ist ferner:

$$(a > b) \Subset (a + c > b + c).$$

Von diesem Analogon des Th. 15_+) ausgehend wollen wir dasselbe zunächst erweitern. Um rechnerisch zu zeigen, dass die Subsumtion auch rückwärts gelten muss, bemerken wir, dass durch Rückwärtslesen der Ungleichungen nach α) und Vertauschung von a mit b auch entsteht:

$$(a < b) \Subset (a + c < b + c)$$

und dass bekanntlich zudem:

$$(a = b) \Subset (a + c = b + c).$$

Nach Th. $20_\times$) können diese beiden Subsumtionen auch als die Gleichungen geschrieben werden:

$$(a = b) = (a = b)(a + c = b + c), \quad (a < b) = (a < b)(a + c < b + c).$$

Nun ist $(a + c > b + c) = (a + c > b + c)\{(a > b) + (a = b) + (a < b)\}$ nach β), und multiplizirt man aus, indem man für die beiden letzten Gliederaussagen ihre vorhergehenden Werte nimmt, so erkennt man mit Rücksicht auf γ), dass die beiden letzten Teilprodukte verschwinden und nur das erste stehen bleibt, d. h. dass: $(a + c > b + c) = (a + c > b + c)(a > b)$, oder nach Th. $20_\times$):

$$(a + c > b + c) \Subset (a > b).$$

Diese Subsumtion zieht sich nun mit der obigen nach Def. (1) zusammen zu der Gleichung:

$\zeta)$ $$(a > b) = (a + c > b + c).$$

[Im Grunde wurde der Beweis der Umkehrbarkeit jener erstern Subsumtion, wie man sieht, in der bekannten Weise indirekt geleistet, indem wir zeigten, dass aus $a = b$ sowie $a < b$ im Widerspruch zu der Annahme $a + c > b + c$ folgen würde: $a + c = b + c$ resp. $a + c < b + c$, weshalb denn nur der Fall $a > b$ als einzig möglicher übrig bleibt. Mit Absicht haben wir dieses Räsonnement aber in der aussagenrechnerischen Fassung gegeben — nicht, weil die letztere unbedingt den Vorzug verdiente, sondern damit ersichtlich wird, wie die verbale Überlegung doch lediglich die Gesetze des Aussagenkalkuls zur Richtschnur hat.]

Sagt man in ζ) $a - c$ für a und $b - c$ für b und liest die Gleichung rückwärts, so hat man auch:

$$(a > b) = (a - c > b - c),$$

d. h. nachdem die Gleichung ζ) für positive c erwiesen ist, so muss sie auch für negative, somit überhaupt im reellen Zahlengebiet gelten.

Insbesondere ergibt sich für $c = b$ die Regel:

$$\eta) \qquad (a > b) = (a - b > 0),$$

nach welcher jede Ungleichung auf der einen Seite auf Null gebracht werden kann.

Für $c = a + b$ hätte sich ergeben:

$$\vartheta) \qquad (a > b) = (-b > -a) = (-a < -b)$$

wonach es gestattet ist, beide Seiten einer Ungleichung mit -1 zu multipliziren, wofern man nur zugleich das Ungleichheitszeichen umkehrt. Insbesondre ist auch:

$$(a > 0) = (-a < 0), \quad (a < 0) = (-a > 0).$$

Als nahliegende Anwendungen von η) haben wir überhaupt:

$$(a > b + c) = (a - b > c), \quad (a + c > b) = (a > b - c)$$

woraus man ersieht, dass es bei Ungleichungen geradeso wie bei Zahlengleichungen gestattet ist, Aggregatglieder (Summanden oder Subtrahenden) der einen Seite mit entgegengesetztem Zeichen auf die andre Seite des Vergleichungszeichens zu schaffen, zu „transponiren."

Formell noch etwas allgemeiner als ζ) sind die Sätze:

$$\iota) \quad (a > b)(c = d) ⋹ (a + c > b + d), \quad (a > b)(c = d) ⋹ (a - c > b - d)$$

welche — analog zu den Theoremen 18) des identischen Kalkuls — die Erlaubniss aussprechen, eine Gleichung mit einer Ungleichung durch Addition oder Subtraktion überschiebend zu verknüpfen, wo im letzteren Falle aber die Gleichung passives Operationsglied sein muss. Mit Rücksicht auf

$$(c = d) = (-c = -d) \quad \text{und} \quad a + (-c) = a - c$$

geht der zweite Satz ι) auch in den ersten über; und dieser wird seinerseits aus ζ) mit Rücksicht auf $(c = d) = (b + c = b + d)$ gemäss δ) leicht bewiesen.

Auf welche Weise die Ungleichung als passives Operationsglied subtraktiv mit der Gleichung zu verknüpfen sei, zeigen die Sätze:

$$\varkappa) \quad (a = b)(c > d) ⋹ (a - c < b - d), \quad (a = b)(c < d) ⋹ (a - c > b - d),$$

welche mittelst α) auf einander und mittelst ϑ) auf ι) leicht zurückzuführen sind.

Endlich sind noch bezüglich der Verknüpfung von Ungleichungen miteinander durch überschiebendes Addiren oder Subtrahiren die Sätze anzuführen:

$$\lambda) \quad (a > b)(c > d) ⋹ (a + c > b + d), \quad (a < b)(c < d) ⋹ (a + c < b + d),$$
$$\mu) \quad (a > b)(c < d) ⋹ (a - c > b - d), \quad (a < b)(c > d) ⋹ (a - c < b - d)$$

deren eine (rechtseitige) Hälfte aus der andern hervorgeht, indem man durchweg die Ungleichheitszeichen umkehrt, mithin auf sie gemäss α) mittelst Buchstabenvertauschung zurückkommt; wogegen die zweite Zeile mittelst ϑ) auf die erste zurückzuführen ist, sodass nur mehr die erste von diesen vier

Formeln zu beweisen bleibt. Ihr Beweis ergibt sich durch zweimalige Anwendung von ζ) und Th. $\overline{6}_\times$), wonach

$$\begin{aligned}(a > b)(c > d) &\Subset (a > b) \Subset (a + c > b + c)\\ \text{,,} \quad &\Subset (c > d) \Subset (b + c > b + d)\end{aligned}$$

und folglich nach Def. $(\overline{3}_\times)$ und ε):

$$(a > b)(c > d) \Subset (a + c > b + c)(b + c > b + d) \Subset (a + c > b + d)$$

sein wird, q. e. d.

„Gleichstimmige“ Ungleichungen können hienach unmittelbar zu einer solchen vom selben Ungleichheitszeichen durch überschiebendes Addiren verbunden werden. Und zwei „ungleichstimmige“ Ungleichungen liefern durch überschiebendes Subtrahiren eine Ungleichung vom Ungleichheitszeichen des Minuenden; es ist m. a. W. hiebei — gleichwie auch in $\varkappa$) beim (überschiebenden) Subtrahiren einer Ungleichung von einer Gleichung — jeweils das Ungleichheitszeichen der Subtrahenden-Ungleichung umzukehren.

Die Ausdehnung der auf additive Verknüpfung bezüglichen Sätze von zweien auf beliebig viele Operationsglieder ist naheliegend.

Mit vorstehendem aber sind die Schlüsse erledigt, die mit Bezug auf die Operationen der beiden ersten Spezies an Ungleichungen zu knüpfen sind.

Die *Analogie* derselben mit auf Subsumtionen bezüglichen Sätzen war im Bisherigen schon unverkennbar und wurde auch gelegentlich hervorgehoben. Noch genauer findet das analoge Entsprechen aber statt zwischen diesen auf die Ungleichung $a < b$ bezüglichen Sätzen, und jenen, welche wir für die Beziehung der eigentlichen Unterordnung $a \subset b$ in 20 des § 46 Seite 315 f. zusammengestellt haben. Während andrerseits die auf Subsumtionen $a \Subset b$ bezüglichen Sätze ihr engstanschliessendes Analogon (closest analogy) erst finden würden in denen, welche die Alternativaussage $a \leqq b$ betreffen, die als „a ist kleiner oder gleich b“ zu lesen ist und in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls ihre Definition findet durch den Ansatz:

ν) $\quad (a \leqq b) = (a < b) + (a = b) = (a = b) + (a < b) = (a \lesseqgtr b)$

mittelst dessen man, nach α) und Th. 1) Zusatz: $(a = b) = (b = a)$, auch leicht ableiten wird:

$$(a \geqq b) = (a > b) + (a = b) = (a = b) + (a > b) = (a \gtreqless b)$$

und

$$(a \leqq b) = (b \geqq a).$$

Zu meiner Genugthuung habe ich wahrgenommen, dass die von Miller herausgegebenen Mathematical Questions zuweilen schon $a \Subset b$ statt der uneleganten Schreibung $a \leqq b$, oder $a \lesseqgtr b$, drucken, mithin dasselbe Prinzip für die rationelle Zusammensetzung der Beziehungszeichen neuerdings zu verwirklichen beginnen, welches ich [1]) 1873 beim Subsumtionszeichen $\Subset$ angewendet und in § 34 sq. bei allen Umfangsbeziehungen durchzuführen mich bestrebt habe.

Auf Grund der Definition ν) und der schon bekannten Sätze über Gleichungen (zwischen Zahlen) hält es nicht schwer, die vorstehend und noch weiterhin aufgestellten Sätze über Ungleichungen, unter Zuzug der Gleichheit als einer in ihre Voraussetzungen aufzunehmenden Alternative, umzuschreiben in die wahren Analoga der auf die Subsumtion bezüglichen Sätze.

Für unsern hier vorliegenden Zweck jedoch können wir dies unterlassen auf Grund eines glücklichen Umstandes, welcher von Herrn McColl, soviel ich zu entdecken vermag, nicht hervorgehoben wurde, nämlich, dass es bei jedem (ein- oder mehrfachen) Integrale bekanntlich *gleichgültig* ist, ob man die Grenzen des Hauptintervalles resp. die Umgrenzung des Integrationsbereiches in dieses mit einrechnet oder nicht. Mag man z. B. beim einfachen Integrale:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das Integrationsintervall durch den Ansatz:

$$a < x < b$$

oder mag man es durch den Ansatz

$$a \gtreqqless x \leqq b$$

definiren, so wird der Wert des Integrales immer der nämliche sein müssen. Die Fortlassung eines unendlich kleinen Elementes $f(x)dx$ aus der Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Gliedern, als welche das Integral bekanntlich erklärt wird, ist allemal ohne Belang, ohne Einfluss auf den Grenzwert dieser Summe — und gilt dies sogar, wenn $f(x)$ in einer der Grenzen, z. B. bei b absolut ∞ sein sollte, weil in diesem Falle das Integral, wofern es überhaupt existirt, (konvergirt, eines Sinnes fähig ist,) bekanntlich nur definirt werden kann als der Grenzwert eines von a bis unendlich nahe *an* diese Grenze b hin und mit Ausschluss derselben genommenen Integrales.

Sonach dürfen wir — und dies wird sich zur Vereinfachung der Betrachtungen empfehlen — *die Integrationsgrenzen immer exclusive* (als nicht zum Integrationsbereich selbst gehörige) *rechnen.*

Die Wirkung dieses Verfahrens ist ganz dieselbe, als ob in der fundamentalen Aussagengleichheit β) der mittlere Term, die Gleichung $(a = b)$ fehlte, jene vielmehr nur so lautete:

$$\mathfrak{x})\qquad 1 = (a > b) + (a < b)$$

wonach statt drei Möglichkeiten bei jeder Zahlenvergleichung immer nur zweie zu diskutiren sein werden.

Würde z. B. das obige Integral für ein zwischen a und b gelegenes c „zerteilt" nach dem bekannten Schema:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

so hätten wir auf Grund der Voraussetzung $a < c < b$ die das Integrationsbereich statuirende Aussage linkerhand:

$$(a < x < b) = (a < x < c) + (c < x < b)$$

umgewandelt in die Alternative zur Rechten, mit Fug und Recht den Zwischenwert $x = c$ auslassend, wogegen *an sich*, d. h. ohne Rücksicht auf jenen Umstand, beim Ausmultipliziren von

$$(a < x)(x < b)\{(x < c) + (x = c) + (c < x)\}$$

zu obigen beiden äussersten Termen noch ein mittlerer Term hinzutreten würde. Etc.

Der Ausfall der Gleichung aus β), oder die Geltung von ξ) bringt uns weiter den Vorteil, dass wir jetzt eine Ungleichung $a < b$ geradezu als die *Negation* der andern $a > b$ vom umgekehrten Ungleichheitszeichen hinstellen dürfen, in Formeln, dass uns

$$(a > b)_1 = (a < b), \quad (a < b)_1 = (a > b)$$

zu gelten haben wird — wie dies kraft Th. $\overline{30}$) aus ξ) in Verbindung mit der mittleren Inkonsistenz γ) in der That folgt. —.

Obwol wir hiernach mit Gleichungen als aussagenrechnerischen Elementen überhaupt nicht mehr zu thun haben werden, sondern immer nur mit Ungleichungen, so werden wir doch im Texte und etwaigen Tafeln für die Integrationsgrenzen die Angabe dieser Grenzen nach wie vor in Gleichungenform vollziehen und z. B. wie üblich sagen, dass die Integrationsvariable x von $x = a$ (als unterer) bis zu $x = b$ (als oberer Grenze) zu gehen habe.

Nach dieser Zwischenbemerkung fahren wir fort, die Gesetze der Ungleichung uns in der Zeichensprache des Aussagenkalkuls in Erinnerung zu bringen, nunmehr auch die beiden Spezies der zweiten Stufe berücksichtigend.

Hier ist nur zweierlei anzuführen: Erstens, der als bekannt angenommene Satz, dass *im Gebiet der positiven Zahlen* eine Ungleichung mit einer Zahl *beiderseits* multiplizirt oder dividirt werden darf. Für die Multiplikation spricht ihn die Formel aus

o) $$(a > b > 0)(c > 0) \Subset (ac > bc)$$

und für die Division die Formel

$$(a > b > 0)(c > 0) \Subset \left(\frac{a}{c} > \frac{b}{c}\right)$$

— die erstere besagend, dass im positiven Zahlengebiete Grösseres mit Gleichem multiplizirt Grösseres gibt (mithin auch Kleineres mit Gleichem multiplizirt Kleineres).

Der analoge Satz für die Division kommt auf den vorigen hinaus, wenn man bedenkt, dass Division mit einer Zahl c als Multiplikation mit der reciproken Zahl $\frac{1}{c}$ sich ansehen lässt, indem $\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}$, und dass:

$$\pi) \qquad (c > 0) = \left(\frac{1}{c} > 0\right)$$

eine Zahl nämlich mit ihrem umgekehrten Wert immer zugleich positiv (oder negativ), kurz von einerlei Vorzeichen ist.

Man ersieht aus dem Vorstehenden nebenher, dass die identische Multiplikation mit *spezifizirten* Aussagen ganz harmlos neben der arithmetischen Multiplikation mit Zahlensymbolen verwendet werden kann und sich stets von selbst schon von dieser unterscheidet. Erst wenn die Aussagen gleich den Zahlen durch einfache Buchstabensymbole dargestellt würden, und man diese von jenen nicht hinlänglich auseinanderhielte, könnten Verwechselungen zu besorgen sein.

Um fortzufahren, so können, indem man $-c$ für c nimmt, gemäss den Sätzen unter ϑ) dem Satze o) auch noch weitere Korollare angereiht werden, wie

$$(a > b > 0)(c < 0) \Subset (ac < bc)$$

Man erweitert den Satz o) ferner noch leicht zu:

$$o) \qquad (a > b > 0)(c > d > 0) \Subset (ac > bd > 0)$$

und zwar mittelst des Zwischenschlusses $ac > bc$, $bc > bd$, ergo $ac > bd$ — wonach denn im positiven Zahlengebiete auch Grösseres mit Grösserem multiplizirt Grösseres (Positives) gibt. Dies wollen wir als ein naheliegendes Korollar zu o) in dieses Theorem selbst noch mit einrechnen.

Zweitens ist es die „Zeichenregel" der Multiplikation (und der Division), die wir noch anzuführen haben. Dieselbe wird durch die beiden Aussagenäquivalenzen (genauer also, oder vollständig, durch das Produkt derselben) dargestellt:

$$\varrho) \qquad \begin{cases} (ab > 0) = (a > 0)(b > 0) + (a < 0)(b < 0) = \left(\frac{a}{b} > 0\right) \\ (ab < 0) = (a > 0)(b < 0) + (a < 0)(b > 0) = \left(\frac{a}{b} < 0\right) \end{cases}$$

wo der auf die Division bezügliche (rechtseitige) Satz wiederum aus dem auf die Multiplikation bezüglichen gemäss π) ableitbar ist, indem man $\frac{1}{b}$ für b in diesem nimmt.

Nachdem wir uns so weit nur im Rahmen des gewöhnlichen Aussagenkalkuls bewegt haben, liegt es mir nun ob, Herrn Mc Coll's eigentümliche Symbolik auseinanderzusetzen. Dies ist sehr einfach. Mittelst der Erklärungen:

$$\sigma) \qquad p(x) = (x > 0), \quad p'(x) = (x < 0)$$

wird zunächst eine etwas bequemere Schreibweise eingeführt für Ungleichungen von der rechten Seite 0, die so häufig vorkommen werden — in Anbetracht, dass nach η) eine jede Ungleichung sich auf der einen Seite, z. B. rechterhand, auf 0 bringen lässt. Hienach bedeutet uns das Aussagensymbol $p(x)$ hinfort genau dasselbe wie die Redensart: x ist positiv, und $p'(x)$ wird bedeuten: x ist negativ (nicht positiv).

Nach dem unter ξ) gesagten gilt alsdann unbedingt:

$$\tau) \qquad p(x)p'(x) = 0,$$

und wenigstens für die uns vorschwebende Untersuchung auch

$$\upsilon) \qquad p(x) + p'(x) = \dot{1}$$

sodass $p'(x)$ als Negation von $p(x)$ zu bezeichnen ist, hier also der Accent unsern Negationsstrich vertritt. Obwol ich letztern bislang als Suffixum zu setzen pflegte, muss ich hier selber dem Gebrauch des Accentes den Vorzug geben, um eben darauf hinzuweisen, dass der Negationsbegriff diesmal nicht auf die normale Weise zustande kommt, sondern erst auf Grund des Umstandes zulässig wird, dass man von allen Aussagen absehen darf, welche *Gleichungen* zwischen Zahlen statuiren, dass m. a. W. die unsern Untersuchungen zugrunde liegende Mannigfaltigkeit $\dot{1}$ von Aussagen mit Ausschluss aller Gleichungen sich auf das Gebiet der Ungleichungen (zwischen Zahlen) beschränkt. Demgemäss wäre dann die Bezeichnung $p_1(x)$ exakter zu reserviren für die Beziehung:

$$p_1(x) = (x \lesseqgtr 0) = (x < 0) + (x = 0) = p'(x) + (x = 0).$$

Nach ϑ) gilt nun also auch:

$$\varphi) \qquad p(x) = p'(-x), \quad p(-x) = p'(x),$$

$$\psi) \quad p(x)p(-x) = 0 = p'(x)p'(-x), \quad p(x) + p(-x) = \dot{1} = p'(x) + p'(-x)$$

und zwar — dürfen wir sagen — für das *ganze* Gebiet der reellen Zahlen x, weil die Möglichkeit $x = 0$ gar nicht für uns in Betracht kommen kann, vielmehr nur immer die beiden Möglichkeiten $x > 0$ und $x < 0$ zu berücksichtigen bleiben.

Die „Zeichenregel" — der Multiplikation z. B. — wird in der neuen Symbolik lauten:

$$\chi) \qquad \begin{cases} p(xy) = p(x)p(y) + p'(x)p'(y), \\ p'(xy) = p(x)p'(y) + p'(x)p(y). \end{cases}$$

Nimmt man in ihr $y = x$ an, so folgt nach υ) und τ) nebst Th. $\overline{14}$ insbesondere:

$$\omega) \quad p(x^2) = \dot{1}, \quad p'(x^2) = 0, \text{ sonach auch } p(-x^2) = 0, \quad p'(-x^2) = \dot{1}$$

als der bekannte Satz, dass das Quadrat jeder reellen Zahl positiv ist.

Zur *Übung* fordert McColl auf, für das *positive* Zahlengebiet die folgenden Aussagenäquivalenzen zu beweisen:

$$p(x^2 + y^2 - a^2) = p\left(y - \sqrt{a^2 - x^2}\right)p'(x - a) + p(x - a),$$
$$p'(x^2 + y^2 - a^2) = p'\left(y - \sqrt{a^2 - x^2}\right)p'(x - a).$$

Andeutung des Beweises. Entweder ist $x > a$, d. h. es gilt $p(x - a)$. Weil ohnehin $a > 0$ gedacht wurde, gilt dann nach o) auch $xx > aa$ oder $x^2 - a^2 > 0$, um so mehr auch $x^2 + y^2 - a^2 > 0$, d. h. $p(x^2 + y^2 - a^2)$.

Oder es ist $x < a$; dann gilt $p'(x - a)$ und kann man zerlegen:

$$x^2 + y^2 - a^2 = \left(y + \sqrt{a^2 - x^2}\right)\left(y - \sqrt{a^2 - x^2}\right),$$

die dann reelle Wurzel positiv verstanden. Da der erste Faktor rechts von selbst positiv, somit $p\left(y + \sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ ist, so ist das Positivsein des zweiten Faktors notwendige und hinreichende Bedingung für das der linken Seite. Etc.

Soll dagegen $x^2 + y^2 - a^2 < 0$ sein, so muss um so mehr auch $x^2 - a^2 < 0$, und wie leicht indirekt zu beweisen, dann jedenfalls auch $x - a < 0$, d. h. $p'(x - a)$ gelten. Ausserdem muss aber nach der obigen Zerlegung auch $y - \sqrt{a^2 - x^2} < 0$ sein oder $p'\left(y - \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ gelten. Und umgekehrt, wenn diese beiden Annahmen zugleich gelten, so gilt auch $p'(x^2 + y^2 - a^2)$. Etc. Nach diesen Andeutungen ist der Beweis der beiden Sätze leicht aussagenrechnerisch in aller Form — wenn man will, ganz pedantisch — durchzuführen.

Eine andre Übungsaufgabe McColl's: für das reelle Zahlengebiet die Äquivalenz darzuthun

$$p(x + y) = p(x)p(y) + p'(x)p(y^2 - x^2) + p'(y)p(x^2 - y^2)$$

überlassen wir ganz dem Leser. —

Besteht für eine Variable x bei gegebenem a die Bedingung:

$$p(x - a), \text{ oder also: } x > a,$$

so nennen wir a eine „*untere Grenze*“ für (oder von) x. Besteht dagegen eine Bedingung:

$$p'(x - b), \text{ oder also: } x < b,$$

so nennen wir b eine „*obere Grenze*“ für x.

Weil $x = x - 0$, so wird insbesondere, wenn x die Anforderung $p(x)$ zu erfüllen hat, die 0 als seine untere, und wenn es die Anforderung $p'(x)$ zu erfüllen hat, die 0 als seine obere Grenze zu bezeichnen sein.

Ist x Integrationsvariable in einem mehrfachen Integrale, so werden für dieselbe zumeist mehrere untere und mehrere obere Grenzen angebbar sein als von x nicht unterschreitbare, resp. nicht zu überschreitende Zahlen; und diese „*konkurrirenden*“ Grenzen einer jeden Sorte (die unteren sowol als die oberen) werden selbst mannigfach *variiren*, sodass bald diese bald jene von ihnen die grösste resp. die kleinste ist unter denen ihrer Sorte; dieselben werden sich nämlich als gewisse Funktionen der übrigen Integrationsvariablen oder einzelner gewisser von diesen darstellen und sich als von ihnen wirklich abhängig erweisen.

Ein letzter Teil der McColl'schen Symbolik bezweckt demgemäss eine abkürzende Zusammenfassung der Aussagen, durch welche dergleichen konkurrirende Grenzen statuirt werden sollen für irgend eine Variable.

Eine solche Zusammenfassung wird in — wie mir scheint — unübertrefflicher Weise ermöglicht durch folgende Konventionen.

Zahlenausdrücke, die als Grenze für eine Variable x auftreten, sollen mit dem Buchstaben dieser Variabeln selbst bezeichnet und mittelst eines unteren Index, wie $_{0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,\cdots}$, von einander und von dieser unterschieden werden. Und zwar sei der Index 0 ausschliesslich für den Fall reservirt, wo die Zahl 0 selbst als Grenze für x auftritt, sodass uns als Zahl das Symbol x_0 stets die 0 bedeutet; desgl. also auch das Symbol y_0 etc.

Im übrigen empfiehlt es sich, ungerade Zahlen $_{1,\,3,\,5,\,\cdots}$ zur Darstellung von unteren Grenzen, gerade $_{2,\,4,\,6,\,\cdots}$ (ohne die 0) zur Darstellung von oberen Grenzen für x als Indices dieses Buchstabens vorzugsweise zu verwenden.

Stellt nun $\varkappa$ irgend einen aus der Reihe jener Indices vor, und λ irgend einen andern, etc., so wird nach dem bisherigen das Zeichen $p(x - x_\varkappa)$ ausdrücken, dass die Zahl $x_\varkappa$ untere Grenze für x sein solle, und ebenso wird das Zeichen $p'(x - x_\lambda)$ besagen, dass x_λ obere Grenze.

Diese Zeichen *und die Produkte von ihresgleichen* sollen nun aber für die Zwecke der Aussagenrechnung noch weiter abgekürzt werden nach den Grundsätzen:

α_1) $$p(x - x_\varkappa) = x_\varkappa, \quad p'(x - x_\lambda) = x_{\lambda'},$$

β_1) $$x_\varkappa x_{\lambda'} x_\mu x_{\nu'} x_\xi \cdots = x_{\lambda', \nu', \ldots \varkappa, \mu, \xi, \ldots}$$

wo in dem Ausdruck des letzteren linkerhand das identische Produkt der unmittelbar vorher definirten Aussagensymbole zu erblicken ist, oder die Aussage, welche eben die simultane Geltung dieser Faktoraussagen statuirt.

Ich habe mir rechterhand nur erlaubt, die Punkte, durch welche McColl die verschiedenen Indices trennt, durch Kommata zu ersetzen.

Allerdings wird hiermit für das Symbol $x_\varkappa$ mit nicht accentuirtem Suffixum ein gewisser Doppelsinn geschaffen, indem dasselbe als *Zahl* verstanden eine gewisse untere Grenze für x vorstellt, als *Aussage* gedeutet jedoch die Forderung repräsentiren wird, dass ebendiese Zahl untere Grenze für x sein solle. Im weitern Verlauf unsrer Untersuchung wird es sich jedoch als leicht herausstellen, aussagenrechnerische Operationen von den zahlenrechnerischen immer gebührend auseinanderzuhalten.

Wegen des Kommutationsgesetzes $\overline{12_\times}$) der Aussagenmultiplikation steht natürlich die Reihenfolge der Indices rechts in β_1) ganz in unserm Belieben, und dürften wir ebensogut z. B. $x_{\varkappa,\lambda',\mu,\nu',\xi,\ldots}$ für die rechte Seite dieser Äquivalenz schreiben.

Zur Einübung vorstehender Symbolik sei hier noch ein Schema aufgestellt, das bei den Anwendungsaufgaben wiederholt zu verwerten sein wird:

Es bedeute a eine positive Zahl, und werde

$$\alpha_1') \qquad -a = x_1, \quad a = x_2$$

genannt. Alsdann ist — nach der Zeichenregel χ):

$$\begin{aligned}(a^2 < x^2) &= p\,(x^2 - a^2) = p\,\{(x-a)(x+a)\} = \\ &= p\,(x-a)\,p\,(x+a) + p'\,(x-a)\,p'\,(x+a) = \\ &= (a < x)(-a < x) + (x < a)(x < -a) = \\ &= (a < x) + (x < -a),\end{aligned}$$

da zufolge der Voraussetzung $-a < 0 < a$ der Faktor $(-a < x)$ neben dem andern $(a < x)$ als dessen Folgerung nach Th. $\overline{20_\times}$) absorbirt wird, ebenso $(x < a)$ neben $(x < -a)$; und ferner:

$$\begin{aligned}(x^2 < a^2) = p'\,(x^2 - a^2) &= p\,(x-a)\,p'\,(x+a) + p'\,(x-a)\,p\,(x+a) = \\ &= (a < x < -a) + (-a < x < a) = (-a < x < a)\end{aligned}$$

indem hier der erste Term $(a < x < -a) = 0$ ist, als den Widersinn $a < -a$ involvirend.

Wir haben demnach die Ergebnisse:

$$\beta_1') \qquad \begin{cases} p\,(x^2 - a^2) = x_{1'} + x_2 \\ p\,(a^2 - x^2) = p'\,(x^2 - a^2) = x_{2',1}\,, \end{cases}$$

welche auch auf einander zurückzuführen sind durch „Negiren" unter der hier eingeführten Beschränkung ξ), z. B.

$$p'\,(x^2 - a^2) = (x_{1'} + x_2)' = x_1 x_{2'} = x_{1,2'}.$$

Mc Colls Methode beruht nun ganz auf *drei Regeln*, von denen die zweite übrigens nur für die oberen Grenzen wiederholt, was die erste für die unteren statuirte.

Regel 1. Die Aussage $x_{1,3,5,\ldots}$ lässt sich linear und homogen entwickeln nach den Aussagen $x_1, x_3, x_5, \cdots$ in der Gestalt:

$$\gamma_1) \qquad x_{1,3,5,\ldots} = x_1 \cdot \alpha^1 + x_3 \cdot \alpha^3 + x_5 \cdot \alpha^5 + \cdots,$$

worin ein jeder Koeffizient $\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5, \cdots$ die Bedingung darstellt, dass die Zahl x_1, resp. $x_3, x_5, \cdots$ die jeweilige *grösste* von den sämtlichen unteren Grenzen für x ist, mithin, ausführlich dargestellt, bedeuten wird:

$$\delta_1) \qquad \begin{aligned} \alpha^1 &= p\,(x_1 - x_3)\, p\,(x_1 - x_5)\, p\,(x_1 - x_7) \cdots \\ \alpha^3 &= p\,(x_3 - x_1)\, p\,(x_3 - x_5)\, p\,(x_3 - x_7) \cdots \\ \alpha^5 &= p\,(x_5 - x_1)\, p\,(x_5 - x_3)\, p\,(x_5 - x_7) \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hiezu ist noch anzumerken, dass sämtliche Koeffizienten α der Entwicklung unter sich disjunkt sind, ihre Summe aber gleich der identischen i des Aussagenkalkuls sein wird, in Zeichen, dass

$$\varepsilon_1) \qquad \alpha^1\alpha^3 = 0, \quad \alpha^1\alpha^5 = 0, \quad \alpha^3\alpha^5 = 0, \cdots$$

$$\zeta_1) \qquad \mathrm{i} = \alpha^1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots$$

Dies alles ist ganz unmittelbar einleuchtend und läuft darauf hinaus, dass in jeder Phase der Änderung der Zahlen $x_1, x_3, x_5, \cdots$ doch irgend eine derselben die grösste sein muss, (sintemal die Fälle des *Gleich*werdens — von mehreren derselben als grössten Zahlen — auszulassen), wobei es dann keine von den übrigen sein wird und, damit x sie alle übertreffe, es genügen wird und auch erforderlich ist, dass es nur diese eben grösste unter ihnen übertreffe.

Ungeachtet dieser Evidenz wollen wir am Schlusse dieses Anhanges (Seite 555 ff.) zeigen, wie der Satz sich auf Grund der bisherigen Sätze *beweisen* lässt, — was Herr Mc Coll unterlassen.

Gleichwie Regel 1 sich auf den Fall konkurrirender *unterer* Grenzen, so bezieht die zweite Regel sich auf den von konkurrirenden *oberen* Grenzen.

Regel 2. Die Aussage $x_{2', 4', 6', \ldots}$ *lässt sich linear und homogen entwickeln nach den Aussagen* $x_{2'}, x_{4'}, x_{6'}, \cdots$ *in der Gestalt:*

$$\eta_1) \qquad x_{2', 4', 6', \ldots} = x_{2'} \cdot \alpha^{2'} + x_{4'} \cdot \alpha^{4'} + x_{6'} \cdot \alpha^{6'} + \cdots$$

worin irgend ein Koeffizient $\alpha^{2'}, \alpha^{4'}, \alpha^{6'}, \cdots$ die Bedingung ausspricht, dass die Zahl x_2, bezüglich $x_4, x_6, \cdots$ die jeweilige *kleinste* von diesen sämtlichen oberen Grenzen für x ist, somit ausführlich dargestellt bedeuten wird:

$$\vartheta_1) \qquad \begin{aligned} \alpha^{2'} &= p'\,(x_2 - x_4)\, p'\,(x_2 - x_6)\, p'\,(x_2 - x_8) \cdots \\ \alpha^{4'} &= p'\,(x_4 - x_2)\, p'\,(x_4 - x_6)\, p'\,(x_4 - x_8) \cdots \\ \alpha^{6'} &= p'\,(x_6 - x_2)\, p'\,(x_6 - x_4)\, p'\,(x_6 - x_8) \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und ferner alle diese Aussagen miteinander unverträglich sein werden, die Alternative zwischen ihnen aber alle Möglichkeiten umfassen wird, wie es die Formeln aussprechen:

$$\iota_1) \qquad 0 = a^{2'} a^{4'} = a^{2'} a^{6'} = a^{4'} a^{6'} = \cdots$$

$$\varkappa_1) \qquad 1 = a^{2'} + a^{4'} + a^{6'} + \cdots$$

In der That ist nämlich jederzeit irgend einer von den Zahlwerten $x_2, x_4, x_6, \cdots$ der kleinste unter ihnen (da die Fälle des Gleichseins zweier ausser Betracht bleiben dürfen), und dann ist es keiner von den übrigen; damit aber x kleiner sei als sie alle, muss es und braucht es blos den jeweiligen kleinsten derselben zu untertreffen.

Im übrigen wären, um die Sätze wieder rechnerisch zu beweisen, alle die Betrachtungen zu wiederholen, die wir Seite 555 ff. zur Regel 1 geben.

Die Regeln 1 und 2 bleiben natürlich auch in Kraft, wenn einer der in ihnen erwähnten Grenzen, — etwa der *letzten* unter ihnen, der Wert 0 zukommen sollte. Man darf m. a. W. den ungeraden sowol als den geraden Indices, wenn man will, auch den Index 0 zugesellen, denselben im letzteren Falle bei den Aussagensymbolen als $0'$ accentuirend.

Die dritte Regel McColl's bezieht sich auf die Konkurrenz, das Zusammentreffen irgend einer unteren mit einer oberen Grenze für x.

Regel 3. Stets ist:

$$\lambda_1) \qquad x_{2',1} = x_{2',1} \cdot p\,(x_2 - x_1),$$

worin uns 2 und 1 irgend zwei Indices vertreten mögen.

Beweis. $x_{2',1}$ bedeutet: $p'\,(x - x_2)\, p\,(x - x_1)$ oder die Aussage, dass gleichzeitig $x - x_2 < 0$ und $x - x_1 > 0$ sei. Dann ist aber $x_1 < x < x_2$ und damit *a* fortiori $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$, d. h. es gilt $p\,(x_2 - x_1)$. Somit ist gezeigt dass:

$$x_{2',1} \Subset p\,(x_2 - x_1)$$

ist, was sich nach Th. $20_\times$) in die oben der Regel 3 gegebene Fassung umschreibt, q. e. d.

Zu deutsch: ist x_1 untere und x_2 obere Grenze für x, so muss natürlich diese grösser sein als jene, sofern es wirklich ein x gibt, welches erstere über- und zugleich letztere unterschreitet; gibt es aber ein solches x nicht, so haben (für jedes x) die beiden Seiten der behaupteten Aussagenäquivalenz den Wert 0 und diese besteht gleichwol zu Recht.

Nach dieser Regel — mögen wir nun sagen — *„kooptirt"* ein Symbol von der Form $x_{\varkappa',\lambda}$ jedesmal einen gewissen Faktor: $p\,(x_\varkappa - x_\lambda)$, und zwar einen solchen, welcher die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrückt, dass es überhaupt ein x gebe, welches die Forderung $x_{\varkappa',\lambda}$ erfüllt, für welches nämlich x_λ untere und zugleich $x_\varkappa$ obere Grenze ist. Die Ungleichung

$$x_\lambda < x_\varkappa$$

charakterisirt sich in der That als (volle) *Resultante* der Elimination von x aus der Doppelungleichung

$$(x_\lambda < x)(x < x_\varkappa) \text{ oder } (x_\lambda < x < x_\varkappa);$$

und sie könnte auch — in offenbarer Analogie mit dem § 21 unserer Theorie — als die „Valenz-Bedingung" für das durch letztere eingeschränkte x bezeichnet werden. Indem die kooptirte Ungleichung $p(x_\varkappa - x_\lambda)$ die Unbekannte x gar nicht enthält, bringt sie immer nur eine Bedingung zum Ausdruck, welcher die übrigen Integrationsvariabeln (ausser x) und eventuell die Parameter des Problems zu unterwerfen sind, und pflegt sich die Ausserachtlassung dieser Bedingung gewöhnlich schwer zu rächen. —

Aus in geeigneter Ordnung wiederholten Anwendungen vorstehender drei Regeln wird sich das ganze Verfahren Mc Coll's zusammensetzen. Bevor wir dies darlegen, muss jedoch die oben erwähnte Berichtigung angebracht werden.

Das Verfahren leidet nämlich, so wie Herr Mc Coll es dargestellt, an einem prinzipiellen Fehler, welcher entspringt aus dem Doppelsinn des Wortes „obere resp. untere Grenze", der durch Mc Coll's Erklärung eingeführt worden. Die obere Grenze b und untere a eines Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ist nicht immer eine solche in dem Sinne Mc Coll's, wonach unbedingt $(a < x)(x < b)$ gelten müsste, sondern ebensogut mag auch umgekehrt $(b < x)(x < a)$ gelten. Im letzteren Falle, wo $b < a$ ist, kann man ja bekanntlich durch Vertauschung der beiden Grenzen, was unter Voransetzung eines Minuszeichens, Zeichenänderung des Integrals, gestattet ist, in Gestalt des Ansatzes:

$$-\int_b^a f(x)\,dx$$

den ersteren Fall herstellen, und kommt das betreffende Integral dergestalt angesetzt mit Grenzen im Mc Coll'schen Sinne, von welchen die untere wirklich algebraisch kleiner ist als die obere, dann einfach negativ in Rechnung. Bei konsequenter Anwendung von Mc Coll's Verfahren müsste es aber *ausfallen*, würde es unberücksichtigt bleiben!

Am einfachsten geht dies aus Regel 3 hervor, bei deren Begründung der Umstand vielleicht schon manchem Leser aufgefallen ist.

Betrachten wir z. B. das Integral: $\int\limits_{5}^{-3} f(x)\,dx$, so wäre, wenn $5 = x_1$ und $-3 = x_2$ genannt wird: $x_{2',1} = (5 < x < -3)\,p\,(-3-5)$ die zugehörige Integralaussage, und da schon der Faktor $p\,(-8)$, $= (-8 > 0) = 0$ absurd ist und die Regel 3 namentlich auch verwendet wird, um Terme mit widerspruchsvollen Grenzenbestimmungen ausfindig zu machen und auszumerzen (to „reject"), so müsste ein auf vorliegendes hinauslaufendes Teilintegral nun „verworfen" werden! Richtig zu werke gehend aber müssten wir es doch als: $-\int\limits_{-3}^{5} f(x)\,dx$ in Rechnung ziehen.

Demgemäss lässt sich unmodifizirt die Methode Mc Coll's nur anwenden auf solche mehrfache Integrale, in denen bei jeder einzelnen von den vorgeschriebenen successiven einfachen Integrationen die untere Grenze *stets* kleiner bleibt (genauer gesagt: nie grösser wird) als die obere.

Auf andere Integrale ohne weiteres angewendet wird sie falsche und zwar im allgemeinen zu grosse Werte liefern, weil negativ (resp. entgegengesetzt) in Rechnung fallende Teilintegrale oder Integralteile von ihr unberücksichtigt gelassen werden.

Indessen kann man jedem gegebnen mehrfachen Integrale eine solche Vorbereitung geben, man kann es nötigenfalls durch Zerlegung der verschiedenen Intervalle und Vertauschung der beiden Grenzen in dem einen oder andern der damit sich ergebenden Teilintegrale (unter Umkehrung seines Vorzeichens) in lauter solche Integrale zerspalten, dass auf deren jedes die Methode sofort anwendbar sein wird.

Nicht angängig erscheint es, etwa die Symbole $x_{\varkappa',\lambda}$ Mc Coll's blos durchweg zu ersetzen durch $x_{\varkappa',\lambda} + x_{\lambda',\varkappa}$, weil dabei nicht zum Ausdruck käme, dass die Teilintegrale, welche den vom zweiten Term herrührenden Aussagen im Endergebniss entsprechen werden, entgegengesetzt in die Summe einzutreten haben. Ob es vorteilhaft sein könnte, als zugehörige Aussagen*summe* statt dessen etwa $x_{\varkappa',\lambda} - x_{\lambda',\varkappa}$ zu schreiben, auf diese Weise beim zweiten Terme jenen Umstand markirend — wo die Minuszeichen zwar als Zeichen identischer Addition zu deuten und zu behandeln wären, die ausserdem nur der Zeichenregel: $-+ = +- = -$ und $-- = +$ unterworfen sind — wollen wir dahingestellt sein lassen. Immer hat man doch die Mc Coll'schen Operationen an jedem Terme einzeln durchzuführen.

Die ferneren Betrachtungen mögen an das allgemeine vierfache

Integral mit variabelen Grenzen geknüpft werden, (da von ihnen die an das n-fache anzuknüpfenden sich nur quantitativ unterscheiden):

$$\mathfrak{J} = \int_a^b dw \int_{\varphi(w)}^{\psi(w)} dx \int_{\varphi(w,x)}^{\psi(w,x)} dy \int_{\varphi(w,x,y)}^{\psi(w,x,y)} dz \cdot f(w, x, y, z),$$

wobei von vornherein $a < b$ gedacht werde.*)

Die oft gar nicht unbeträchtliche Vorarbeit, deren Erforderlichkeit McColl übersehen, besteht darin, zunächst die Ungleichung $\varphi(w) > \psi(w)$ innerhalb des Intervalles $w = a$ bis $w = b$ aufzulösen, d. h. diejenigen Teile gedachten Intervalles ausfindig zu machen, für welche die Voraussetzung $\varphi(w) < \psi(w)$ nicht erfüllt ist, und darnach das gegebene Integral nach dw zu zerlegen, die den gesuchten Intervallteilen entsprechenden Teilintegrale, unter Vertauschung der untern mit der oberen Grenze *von* x, negativ ansetzend. Gibt es solche nicht, so ist innerhalb des x-Intervalles $x = \varphi(w)$ bis $x = \psi(w)$ von $\mathfrak{J}$ selbst, gab es solche aber, so ist innerhalb des x-Intervalles bei jedem der Teilintegrale die Ungleichung $\varphi(w, x) > \psi(w, x)$ ebenso nach x aufzulösen und entsprechend zu zerlegen, zuletzt die Ungleichung $\varphi(w, x, y) > \psi(w, x, y)$ nach y bei jedem der neuen Teilintegrale innerhalb des zugehörigen y-Intervalles aufzulösen, etc.

Das hiebei zu beobachtende Verfahren würde eine eingehendere Theorie wol verdienen, auf welche wir jedoch an dieser Stelle nicht eintreten wollen.

Das gegebene Integral $\mathfrak{J}$ zerfällt hierdurch in ein Aggregat von lauter ebensovielfachen („Teil"-)Integralen je mit derselben Reihenfolge der Integrationsvariabeln und genommen von der nämlichen Funktion f, *in deren jedem aber die unteren Grenzen durchweg kleiner (nie grösser) sind als die entsprechenden oberen,* und jedes dieser Teilintegrale geht in das Aggregat mit ganz bestimmtem Vorzeichen ein. Das Aggregat ist eingliedrig, fällt mit $\mathfrak{J}$ selbst zusammen, wenn die hervorgehobene Voraussetzung sich als von vornherein schon bei $\mathfrak{J}$ erfüllt erweist.

Auf jedes der Teilintegrale ist alsdann die Methode anzuwenden, die wir nunmehr in Bezug auf $\mathfrak{J}$ selbst auseinandersetzen wollen, indem wir bei diesem Integrale jetzt die gedachte Voraussetzung eintreten lassen, dass die obern Grenzen durchweg die untern übertreffen.

*) Dass die Bedeutung eines und desselben Funktionsbuchstabens, wenn für ein, zwei, drei, . . . Argumente in Anspruch genommen, jedesmal eine vollkommen unabhängige ist, eine für $\varphi(w)$ gegebene Erklärung z. B. in keiner Weise der Definition von $\varphi(w, x)$ präjudizirt, bedarf für den Mathematiker kaum der Erinnerung.

Wenn man will, können auch alle jene Teilintegrale, die mit demselben Vorzeichen in das Aggregat eingehen, gemeinsam — mithin in zwei Gruppen gesondert — behandelt werden, und liefern dann eine Alternativ-Aussage oder Aussagensumme, deren Glieder von der Art sind der jetzt für $\mathfrak{J}$ in's Auge zu fassenden Aussage.

Man stelle nunmehr die „*Integralaussage*" auf, welche den Integrationsbereich bestimmt, und für unser $\mathfrak{J}$ lautet:

$$A = (a < w < b)\{\varphi(w) < x < \psi(w)\}\{\varphi(w, x) < y < \psi(w, x)\}$$
$$\{\varphi(w, x, y) < z < \psi(w, x, y)\}.$$

Beim $n$fachen Integrale wird dieselbe ein Produkt von n Doppelungleichungen, oder, was dasselbe sagt, von $2n$ Ungleichungen sein, — *im allgemeinsten Falle ein Aggregat von dergleichen Produkten.*

Es könnte nämlich auch irgend welche von den successiven Integrationen sich über getrennte (oder „diskrete") Intervalle von stetiger Erfüllung zu erstrecken haben, z. B. das $\int_{\varphi(w)}^{\psi(w)} dx \cdot$ vertreten sein durch $\int_{\varphi_1(w)}^{\psi_1(w)} dx \cdot + \int_{\varphi_2(w)}^{\psi_2(w)} dx \cdot + \cdots$, wo dann der zweite Faktor von A durch die Summe $\{\varphi_1(w) < x < \psi_1(w)\} + \{\varphi_2(w) < x < \psi_2(w)\} + \cdots$ zu ersetzen wäre, und mit den andern ausmultiplizirt ein Polynom von Aussagen als „Integralaussage" liefern würde. Was weiter von A gesagt wird, ist auf jedes Glied solchen Polynoms dann anzuwenden.

Wie üblich sollen beim mehrfachen Integrale die successiven Integrationen und ihre Variabeln in der Richtung (von links nach rechts) gezählt werden, in welcher sie geschrieben und gelesen werden. Die Reihenfolge, in welcher die Integrationen ausgeführt werden müssen und in welcher sie überhaupt stets ausgeführt *zu denken* sind, ist aber die umgekehrte, sodass die „letzte" oder innerste Integration allemal die zuerst auszuführende ist, die Integration nach der ersten Variabeln auch die zuletzt auszuführende.

Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn wir zeigen, *wie man die Integration nach irgend einer vorgegebenen von den Integrationsvariabeln zur innersten oder letzten machen kann* — z. B. die nach x.

Um die Integrationsordnung umzukehren, braucht man nämlich blos die Integration nach w zur letzten zu machen, von den hernach dieser vorausgehenden Integrationen hierauf die nach x und von den diesen beiden vorausgehenden Integrationen endlich die nach y, so wird die Integration nach z von selbst auch zur ersten oder äussersten geworden sein.

Die Lösung der hiermit gekennzeichneten Aufgabe: die Aussage A

so zu transformiren, dass sie unmittelbar die Grenzen für eine bestimmte Integrationsvariable x zu erkennen gibt, wenn nach dieser zuerst integrirt, die Integration nach ihr zur innersten oder „letzten" gemacht werden soll, lässt sich nun ganz unabhängig geben von der Voraussetzung der speziellen Form unsres oben angegebenen A, — welches uns in der That bei den nachfolgenden Betrachtungen nur als ein Paradigma vorschweben mag.

McColl's Methode ist ebensogut anwendbar, um die Grenzen für die successiven Einzelintegrationen auch erstmalig zu ermitteln, wenn z. B. das Integrationsbereich gegeben sein sollte durch eine einzige Ungleichung

$$\mathfrak{F}(w, x, y, z) < 0$$

für sämtliche Integrationsvariable. Wir wollen von vornherein den denkbar allgemeinsten Fall unsern Betrachtungen zugrunde legen, wo das Integrationsbereich gegeben (oder wenigstens eingeschränkt) ist durch *irgend eine aus Ungleichungen aufgebaute Aussage.*

Die Aussage A wird dann eine Funktion des identischen Kalkuls sein von lauter gegebenen Aussagen, und denken wir uns diese Funktion in der obigen Form $\mathfrak{F} < 0$ mittelst der Zeichensprache des Aussagenkalkuls hingeschrieben.

Zu erinnern ist hiebei, dass simultane Bedingungen sich als Produkt von diesen, alternativ geltende als Summe derselben präsentiren. Auch „disjunktive" Urteile wären leicht nach bekanntem Schema zu formuliren. Die Negation aber lässt sich bei jeder Ungleichung immer sofort „ausführen", indem als Verneinung von $\varphi < \psi$ jeweils $\psi < \varphi$, und von $\mathfrak{F} < 0$ etwa: $-\mathfrak{F} < 0$ zu gelten hat. Konditionale oder „hypothetische" Ungleichungen sind in kategorische Aussagen umzuschreiben nach dem Schema λ) des § 32, wonach die Subsumtion:

$$(\varphi < 0) \Subset (\psi < 0)$$

äquivalent ist der Alternative:

$$(-\varphi < 0) + (\psi < 0)$$

— mit Rücksicht auf das soeben Gesagte, sodass also Subsumtions- (sowol als Gleichheits-)zeichen in unsrer Aussagenfunktion nicht vorkommen werden, so wenig, wie Negationsstriche. Überhaupt:

Unsere Aussagenfunktion A wird, als eine lediglich durch die Operationen der Addition und Multiplikation aufgebaute, nach den Ergebnissen unsrer Untersuchungen in Bd. 1, § 13, S. 312, sich immer darstellen lassen als ein Aggregat (Polynom) von (monomischen) Produkten aus (unbedingten, oder: kategorisch zu erfüllenden) Ungleichungen — und in dieser Form mögen wir sie als gegeben voraussetzen. Sie wird m. a. W. die Alternative stellen zwischen verschiedenen Systemen von simultan geforderten Ungleichungen.

Um nun die Integration nach einer vorgeschriebenen Variabeln x zur innersten zu machen, *breche man sämtliche Ungleichungen, in welchen x vorkommt, nach dieser Variabeln* als einer Unbekannten *auf* (und behalte die übrigen Ungleichungen unverändert bei).

Unter dem „*Aufbrechen*“ (oder „*Auflösen*“) einer Ungleichung nach einer Unbekannten verstehen wir die Ableitung von lauter solchen Ungleichungen aus jener, welche als Major oder Minor die gedachte Unbekannte höchstens (d. h. wenn überhaupt, so jedenfalls) *isolirt* enthalten (sodass dieselbe auf ihrer andern Seite dann auch nicht vorkommt), eventuell mit Angabe der jeweils für ihre Geltung sich ergebenden Bedingungen, und so, dass aus ihrer Gesamtheit (oder vereinigten Aussage) ein Rückschluss auf die gegebene Ungleichung zulässig ist, mithin zusammen sie dieser äquivalent sein werden.

Diesen Prozess, der, wie schon (S. 533) angedeutet, eine eingehendere Theorie verdiente, wollen wir hier ohne weiteres als allgemein ausführbar voraussetzen.

Aus einer gegebenen Ungleichung $\mathfrak{F}(x) < 0$ mögen in dieser Weise folgen:
erstens Ungleichungen, die x gar nicht enthalten; — z. B. sollte $c(x^2 + y^2) < 0$ sein, so müsste $c < 0$ sein —
zweitens Ungleichungen, die x — indessen blos als Major oder aber Minor — enthalten.

Von beiderlei Sorten von Ungleichungen kann wieder erforderlich sein, dass sie simultan, oder dass sie alternativ gelten; auch kann die Geltung der einen an diejenige von andern als an eine Bedingung geknüpft sein — in welch' letzterem Falle wir die konditionale Forderung, wie im vorigen Kontext geschildert, in eine Alternative werden umzuwandeln haben. Kurzum es mag sich als die der Ungleichung $\mathfrak{F}(x) < 0$ äquivalente „Auflösung“ derselben nach der Unbekannten x eine Aussage ergeben von beliebiger Komplikation, aber ähnlicher Natur wie die schon geschilderte A selbst — nur dass sie eben bei den in sie eingehenden Ungleichungen das x jetzt nicht mehr anders, denn isolirt, enthält. Von dieser wird demnach ebenfalls gelten, dass sie als eine Summe von lauter Produkten aus Ungleichungen selbst darstellbar ist.

Die so gewonnene Auflösung nach x einer jeden Ungleichung in A, die x enthielt, ist aussagenrechnerisch dargestellt nun in den Ausdruck von A zu substituiren und sind wenigstens diejenigen Terme, in denen x vorkommt, auszumultipliziren. Somit erhalten wir A nun dargestellt als ein Aggregat von Gliedern, in deren Faktor-ungleichungen x nie anders als wie als Major oder Minor auftritt.

Die hinsichtlich x konstante andre Seite einer jeden solchen Ungleichung, der Minor resp. Major derselben, ist eine der gesuchten „unteren“ resp. „oberen“ *Grenzen* für die Integrationsvariable x. Auf diese Grenzen ist McColl's unter α_1), β_1) beschriebene Symbolik anzuwenden; sie sind, mit $x_{\varkappa'}$, $\cdots x_\varrho$, $\cdots$ bezeichnet, in eine *„Grenzentabelle“* einzutragen, und unter Bezugnahme auf diese Tabelle wird ein jedes Glied von A sich in der Form präsentiren:

$$\omega x_{\varkappa', \lambda', \mu', \cdots \varrho, \sigma, \cdots},$$

worin ω eine irgendwie aus Ungleichungen zusammengesetzte Aussage vorstellt (eventuell die i), in welcher die Variable x nicht mehr vorkommt.

Nach Regel 1 und 2 mögen wir aber hiefür schreiben:

$$\omega(\alpha^{\varkappa'} x_{\varkappa'} + \alpha^{\lambda'} x_{\lambda'} + \alpha^{\mu'} x_{\mu'} + \cdots)(\alpha^\varrho x_\varrho + \alpha^\sigma x_\sigma + \cdots)$$

und durch Ausmultipliziren dies weiter verwandeln in ein Aggregat von Gliedern der Form

$$\omega \alpha^{\varkappa'} \alpha^\varrho x_{\varkappa', \varrho}$$

was nach Regel 3 äquivalent ist:

$$\omega \alpha^{\varkappa'} \alpha^\varrho p(x_\varkappa - x_\varrho) \cdot x_{\varkappa', \varrho}$$

indem der zugezogene Faktor $p(x_\varkappa - x_\varrho)$ die notwendige und hinreichende Bedingung ausdrückt, welche den übrigen Variabeln (und ev. Parametern) auferlegt wird durch die Forderung, dass es ein x gebe, welches x_ϱ über- und zugleich $x_\varkappa$ untertrifft.

Nunmehr ist, wie wir sagen wollen, A *„entwickelt“* nach der Integrationsvariabeln x; es besteht aus lauter — in McColl's Ausdrucksweise — (nach x) „elementaren“ Termen, nämlich Gliedern von der Form:

$$\chi x_{\varkappa', \varrho}$$

worin χ eine höchstens die übrigen Integrationsvariabeln betreffende Forderung ausspricht, deren Erfülltsein aber kraft des einverleibten Faktors $p(x_\varkappa - x_\varrho)$ zugleich die Existenz eines die andre Forderung:

$$x_{\varkappa', \varrho} \quad \text{oder:} \quad x_\varrho < x < x_\varkappa$$

erfüllenden x verbürgt.

Nunmehr braucht man, um etwa die Integration nach einer zweiten Variabeln y zur vorletzten zu machen, blos jeden Koeffizienten hinsichtlich des y ebenso zu behandeln, wie zuvor das allgemeine Glied von A bezüglich des x; man braucht nur mehr diese Koeffizienten noch nach y zu „entwickeln“. Und so weiter.

Zum Beispiel für unser vierfaches Integral $\mathfrak{J}$ wird nach so vollzogener Umkehrung der Integrationsfolge die Integralaussage A sich schliesslich darstellen als eine Summe von lauter Gliedern der Form:

$$\psi z_{\tau', v} y_{\varrho', \sigma} x_{\mu', \nu} w_{\varkappa', \lambda}$$

worin die durch die Suffixe angezeigten Grenzen einer jeden Variabeln nur Funktionen der dem zugehörigen Aussagenfaktor vorangehenden Variabeln sein können, die von z also konstant sein müssen, und die Bedingung ψ nur aus Ungleichungen bestehen kann, in welche die Parameter der ursprünglich zu Grenzen gesetzten Funktionen eingehen.

Hiezu ist noch zu bemerken: Ergeben für eine Variable sich nicht *zwei* einschliessende Grenzen, sondern z. B. gar keine oder nur eine als untere resp. obere, so ist für die fehlende untere Grenze: $-\infty$, für die fehlende obere: $+\infty$ anzusetzen; die betreffende Variable ist dann völlig oder nach einer Seite unbegrenzt variabel — Notabene: soferne man korrekt zuwerke gegangen ist, und nicht etwa eine der nach Regel 3 zu kooptirenden Faktoraussagen anzumerken vergessen hat!

Hienach ist auch klar, was es zu bedeuten hat, wenn etwa in der Aussage A ein „Absolutglied" φ auftreten sollte, welches in gar kein Symbol der Form $z_{\tau',\,v}$ u. s. w. multiplizirt erscheint, wenn also die vollends „entwickelte" Aussage A mit dem Gliede $\varphi + \cdots$ schlechtweg begänne. Dies würde bedeuten, dass unter der Bedingung φ nach sämtlichen Variabeln von $-\infty$ zu $+\infty$ zu integriren ist.

Mit Bezugnahme auf die durch allmäligen Zuzug der Grenzen $w_\varkappa$, w_λ, $\cdots x_\mu$, x_ν, $\cdots y_\varrho$, y_σ, $\cdots z_\tau$, z_v, $\cdots$ angewachsene und vollendete Grenzentafel ist es nun leicht, jeweils das vierfache Integral hinzuschreiben, welches der hinter dem „Koeffizienten" ψ stehenden „Konstituenten"-Aussage entspricht. Für das vorliegende Schema lautet dasselbe nämlich:

$$\int_{z_v}^{z_\tau} dz \int_{y_\sigma}^{y_\varrho} dy \int_{x_\nu}^{x_\mu} dx \int_{w_\lambda}^{w_\varkappa} dw \cdot f.$$

Und es frägt sich nur noch, was es mit jenen Koeffizienten ψ für eine Bewandtniss hat, wie dieselben für das Endresultat zu verwerten sind?

Die Koeffizienten stellen, wie erwähnt, Forderungen vor, die an die Parameter der ursprünglichen Grenzenfunktionen zu stellen sind.

Ist eine solche Forderung oder Bedingung von den Parametern *erfüllt*, so ist $\psi = 1$ zu setzen, der Koeffizient einfach zu unterdrücken, und das zugehörige Integral geht dann sicher als Glied ein in die Summe von Integralen, in welche $\mathfrak{J}$ überhaupt (im Allgemeinen) zerfällt.

Ist sie *nicht erfüllt*, so ist $\psi = 0$, und das gedachte Glied schon in der Integralaussage fortzulassen. Das Endergebniss, die Darstellung von $\mathfrak{J}$ vereinfacht sich alsdann durch den Wegfall des vorstehend angeführten zugehörigen Teilintegrales.

Sind aber die Parameter allgemeine oder zum Teil voraussetzungslose Buchstabenzahlen wie a, b, $c, \ldots$, sodass die Bedingung ψ bald erfüllt, bald auch nicht erfüllt sein kann, so nötigt das Auftreten des Koeffizienten ψ zur Unterscheidung von zweierlei Fällen: dem einen Falle $\psi = 1$, in welchem jenes Teilintegral in der $= \mathfrak{J}$ zu setzenden Summe anzusetzen, und dem andern $\psi = 0$, in welchem es fortzulassen ist.

Für jeden Fall wird hienach das Endergebniss leicht und zweifelsohne hinzuschreiben sein, sobald nur die Bedingungen ψ *einander gegenseitig ausschliessen.* Dies thun sie aber sicher bei all' den Gliedern, die von der „Entwickelung" eines einzigen Terms $\omega x_{x', \ldots \varrho, \ldots}$ von A herrühren. Denn da die Summen $\alpha^{x'} + \alpha^{\lambda'} + \cdots$ und $\alpha^{\varrho} + \alpha^{\sigma} + \cdots$ „reduzirte" sind, nämlich aus „disjunkten" oder miteinander „inkonsistenten" Gliederaussagen nach ε_1) und ι_1) sich zusammensetzen, so muss nach einem Hülfssatze McColl's (Zusatz 3, Bd. 1, S. 295) auch deren expandirtes Produkt eine reduzirte Summe sein, es müssen auch die Produkte $\alpha^{x'}\alpha^{\varrho}$ und damit die Koeffizienten χ des „nach x entwickelten" Terms von A durchweg unter sich inkonsistent sein, und dasselbe gilt dann ebenso weiter von den Koeffizienten der Entwickelung ebendieses χ nach y, und so fort bis herab zu den Koeffizienten ψ auch der *letzten* Entwickelung nach der zur ersten gemachten Integrationsvariablen.

Desgleichen muss gegenseitiges Ausschliessen zwischen den Koeffizienten der Endaussage A vorliegen bei dem uns hier beschäftigenden Problem der Integrationsfolge-Umkehrung, wofern man nur bei dem Aufbrechen der vorkommenden Ungleichungen richtig dichotomisch zuwerke gegangen, nämlich Sorge getragen, schon hier stets mit einander ausschliessenden Bedingungen zu operiren — solche nötigenfalls nach Th. $\overline{33}_+$) Zusatz oder den Methoden des § 19 „entwickelnd". Obzwar nämlich mehrere Terme von der vorhin betrachteten Form in A dann vorhanden sein mögen, so werden diese doch in ihren Koeffizienten, je zu zweien verglichen, durch solche Faktoren sich unterscheiden, die als Negationen von einander zum Produkte 0 geben, und diese werden sich auf alle Unterterme mit übertragen, in welche man sie noch weiterhin zerlegen mag — sodass zwei Unterterme disjunkte Koeffizienten haben, auch wenn sie aus verschiedenen Termen des A herrühren. Mithin bleiben alle Koeffizienten dann stetsfort disjunkt.

Hiermit dürfte das praktisch Wichtige erledigt sein.

Theoretisch könnte freilich auch ein Fall vorliegen, wo die das Integrationsbereich bestimmende Ur-Aussage ganz ad libitum gegeben ist, und wo die Endkoeffizienten ψ nicht mehr disjunkt ausfallen. Man „entwickele" sie dann nach den vorkommenden Parameterungleichungen in disjunkte Glieder und ziehe die gleichnamigen unter diesen aus der ganzen Aussage A zusammen, die als Kofaktor auftretende Konstituentensumme jeweils nach den Tautologie- und Absorptionsgesetzen etc. auf ihren einfachsten Ausdruck reduzirend.

Natürlich wenn unter der Bedingung eines und desselben Koeffizientengliedes zweimal gefordert würde, (dieselbe Funktion) nach x von a bis b zu integriren, so dürfte in der Summe von Teilintegralen das $\int_a^b dx \cdot$ etc. doch nur *ein*mal angesetzt werden. Und wenn etwa (für $c > 0$, $d > 0$) unter der nämlichen Bedingung der Ansatz von $\int_a^b dx \cdot$ alternativ mit dem Ansatze $\int_{a-c}^{b+d} dx \cdot$ zusammenträte, so wäre der erstere zu verwerfen, der letztere allein beizubehalten; es wäre in solch' scheinbarem Konfliktsfalle zu integriren immer zwischen den weitesten oder entferntesten der angegebenen oder zugelassenen Grenzen. In der That beweist man sich leicht, dass (unter genannter Voraussetzung):

$$(a < x) + (a + c < x) = (a < x), \quad (x < b) + (x < b + d) = (x < b + d),$$
$$(a < x < b) + (a - c < x < b + d) = (a - c < x < b + d),$$
$$(a - c < x < b) + (a < x < b + d) = (a - c < x < b + d), \text{ etc.}$$

Zwecks Mitteilung, Drucklegung eines nach McColl's Methode gelösten Problemes thut man gut, die „Grenzentabelle" sogleich zum voraus fertig anzugeben, obwol dieselbe sich erst nach und nach ergibt und anwächst nach Maassgabe wie die Operationen fortschreiten.

McColl macht noch darauf aufmerksam, dass wenn etwa aus Unachtsamkeit die nämliche Zahl zweimal unter verschiedenen Namen — sagen wir $x_\varkappa$ und x_λ — als Grenze für dieselbe Variable x in die Tafel eingetragen sein sollte, dieses sich zumeist dadurch kundgeben würde, dass nach Regel 3 ein Faktor $p(x_\varkappa - x_\lambda) = p(0) = (0 < 0) = 0$ bei Gliedern der Aussage A aufträte.

In die Tabelle brauchen die in der ursprünglichen Integralaussage unmittelbar gegebenen Grenzen nicht eingetragen zu werden, sondern erst die beim Aufbrechen ihrer Ungleichungen nach der zur innersten, zweitinnersten etc. designirten Integrationsvariablen sich als Grenzen ergebenden Werte. Das erste mal wollen wir indess bei einem Beispiele auch jene noch in die Tafel aufnehmen.

Zur *Erläuterung* des Verfahrens wollen wir nämlich jetzt als ein erstes einfachstes Beispiel das eingangs angeführte Doppelintegral behandeln.

Dasselbe wird das erste nach McColl's Methode behandelte *Doppel*integral sein, indem der Entdecker dieser Methode und seine bisherigen Nachfolger dieselbe immer nur auf drei- und vierfache Integrale angewendet haben. — Hier sind die oberen Grenzen ohnehin stets grösser als die untern, sodass die Vorbereitungsarbeit wegfällt.

Die unmittelbar gegebene Aussage war

$$A, = (a < x < 2a)(x - a < y < x + a),$$

und indem wir uns die folgende „*Grenzentabelle*“ anlegen:

$x_1 = a$	$y_1 = x - a$
$x_2 = 2a$	$y_2 = x + a$
$x_3 = y - a$	
$x_4 = y + a$	

deren erste beiden Zeilen durch vorstehende Data direkt nahegelegt erscheinen, wogegen sich die Fortsetzung mit der dritten und vierten Zeile erst (gleich nachher) ergeben wird, so haben wir in der eingeführten Symbolik:

$$A = x_{2',1}\, y_{2',1}.$$

Da es darauf ankommt, die Integration nach x zur erstauszuführenden oder innern Integration zu machen, so werden wir die nach y „aufgelöst“ erscheinende Doppelungleichung $y_{2',1} = (x - a < y < x + a)$ nun nach x „auflösen“, d. h. diese Variable aus ihr (in der Mitte) isoliren. Es ergibt sich — hier durch blosse Umstellung der Glieder nach bekannten Sätzen:

$$(x - a < y < x + a) = (y - a < x < y + a), \text{ oder}$$
$$y_{2',1} = x_{4',3}$$

womit nun auch jene Fortsetzung unsrer Grenzentabelle gewonnen ist. Darnach ist:

$$A = x_{2',1}\, x_{4',3} = x_{2',4',1,3} = x_{2',4'}\, x_{1,3}$$

und haben wir nach Regel 2:

$$x_{2',4'} = x_2\, \alpha^{2'} + x_4\, \alpha^{4'}, \text{ wo } \alpha^{2'} = p'(x_2 - x_4) = (a - y < 0)$$
$$\alpha^{4'} = p'(x_4 - x_2) = (y - a < 0)$$

sowie nach Regel 1:

$$x_{1,3} = x_1 \alpha^1 + x_3 \alpha^3, \text{ wo } \alpha^1 = p(x_1 - x_3) = (2a - y > 0)$$
$$\alpha^3 = p(x_3 - x_1) = (y - 2a > 0)$$

mithin:

$$A = (x_2\, \alpha^{2'} + x_4\, \alpha^{4'})(x_1 \alpha^1 + x_3 \alpha^3) =$$
$$= x_{2',1}\, \alpha^{2'} \alpha^1 + x_{2',3}\, \alpha^{2'} \alpha^3 + x_{4',1}\, \alpha^{4'} \alpha^1 + x_{4',3}\, \alpha^{4'} \alpha^3;$$
$$\overbrace{\cdot\, p(x_2 - x_1)} \quad \overbrace{\cdot\, p(x_2 - x_3)} \quad \overbrace{\cdot\, p(x_4 - x_1)} \quad \overbrace{\cdot\, p(x_4 - x_3)}$$

nach Regel 3 sollen den Koeffizienten rechts noch die darunter gesetzten Faktoren beigesetzt werden, und wollen wir sie mit diesen vereinigt ausführlich hinschreiben, um dieselben nach y aufzubrechen; es ist:

$$\alpha^{2'} \alpha^1 p(x_2 - x_1) = (y - a > 0)(2a - y > 0)(a > 0) = (a < y < 2a).$$
$$\alpha^{2'} \alpha^3 p(x_2 - x_3) = (y - a > 0)(y - 2a > 0)(3a - y > 0) = (2a < y < 3a).$$
$$\alpha^{4'} \alpha^1 p(x_4 - x_1) = (a - y > 0)(2a - y > 0)(y > 0) = (0 < y < a).$$
$$\alpha^{4'} \alpha^3 p(x_4 - x_3) = (a - y > 0)(y - 2a > 0)(2a > 0) =$$
$$= (2a < y < a)(a > 0) = 0,$$

wobei die unterstrichenen Faktoren je als durch die beiden andern mitbedingt oder aber nach der Voraussetzung $a > 0$ schon überflüssig unterdrückt werden dürfen, der letzte Koeffizient aber als einen Widerspruch $(2a < a)(a > 0) \Subset (2 < 1)$ involvirend, verschwindet. Demgemäss wird denn auch von den vier Konstituenten:

$x_{2',1} = (a < x < 2a)$, $x_{2',3} = (y - a < x < 2a)$, $x_{4',1} = (a < x < y + a)$, $x_{4',3} = (y - a < x < y + a)$

der letzte ausser Betracht bleiben dürfen, wird ausfallen, und ist gefunden:

$$A = (a < y < 2a)(a < x < 2a) + (2a < y < 3a)(y - a < x < 2a) + \\ + (0 < y < a)(a < x < y + a)$$

was nach Voranstellung des dritten Gliedes die gesuchte Transformation der Aussage A ist, die uns das Doppelintegral sogleich mit der umgekehrten Integrationsfolge anzuschreiben gestattet, so wie sie oben S. 516 zum voraus angegeben worden.

Hätten wir — gelegentlich der letzten Operationen — der Grenzentabelle rechts noch die Werte angefügt:

$$y_0 = 0,\ y_3 = a,\ y_4 = 2a,\ y_5 = 3a,$$

so würde die Aussage als ihren konzisesten Ausdruck diesen erhalten haben:

$$A = y_{3',0}\, x_{4',1} + y_{4',3}\, x_{2',1} + y_{5',4}\, x_{2',3}.$$

[Wie man sieht, tritt hier die Zahl y_3 sowie y_4 teils als untere teils als obere Grenze auf, sodass die Unterscheidung von unteren und oberen Grenzen mittelst ungerader und gerader Indices nicht vollkommen durchgeführt ist. Auch bei y_5, das nur als obere Grenze auftritt, sind wir von dem Grundsatz abgewichen, weil bei Bezeichnung dieser Zahl mit y_6 der Index 5 übersprungen wäre. So werden wir denn an solchem Prinzip der Nomenklatur auch inskünftige nicht unbedingt festhalten, wie sehr dasselbe sich auch zur Schematisirung der allgemeinen Regeln empfohlen hatte.]

Nunmehr soll auch ein bedeutend komplizirteres Problem in extenso nach der Methode durchgerechnet werden.

Wir wählen die von Mc Coll in [1]) behandelte Muster-Aufgabe, an welcher er seine Methode erstmalig auseinandersetzt, um dabei die von ihm gegebene Lösung, wie sie dessen bedürftig ist, zu berichtigen.

Aufgabe: In dem vierfachen Integrale:

$$\mathfrak{J} = \int_{-a}^{2a} dw \int_{-w}^{2w} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} dz \cdot f(w, x, y, z),$$

worin $a > 0$ gedacht sei, soll die Reihenfolge der Integrationen in die entgegengesetzte verwandelt werden.

Als Endergebniss findet Herr Mc Coll eine Summe von *sieben* vierfachen Integralen nach z, y, x, w, die sich durch ihre Grenzen soweit unterscheiden, dass sie nicht in weniger solche zusammengezogen werden können. Von diesen leitet er auf fünf Druckseiten Rechnung das erste nur ganz ausführlich ab, welches in dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" Bd. 10, p. 35 irrtümlich als das ganze Resultat hingestellt ist.

Ungeachtet der Korrektheit seiner Rechnungen ist jedoch zufolge des schon gekennzeichneten prinzipiellen Fehlers Mc Coll's Ergebniss falsch, und habe ich mich zum Überfluss durch die Probe für $f = 1$ überzeugt, dass seine Formeln ein viel zu grosses Resultat liefern. In Wirklichkeit ist die Aufgabe eine noch verwickeltere als sie bei Mc Coll schon scheint, und die Arbeit ihrer Lösung mehr als die dreifache: es wird $\mathfrak{J}$ nämlich in 28 (vierfache) Teilintegrale zerfallen, zwischen deren Grenzen keine solchen Anschlüsse stattfinden, dass sie in weniger zusammengezogen werden könnten.

Die Richtigkeit meiner Lösung, die ich verbürgen zu können glaube, habe ich für die Annahme $f = 1$ auch erprobt.

Zur Vorbereitung müssen wir erst durch geeignete Zerteilung der Intervalle und nötigenfalles Vertauschung der Grenzen (unter obligater Änderung des Vorzeichens beim Integrale) hinzubringen suchen, dass unser Integral $\mathfrak{J}$ sich additiv oder subtraktiv aus lauter solchen Teilintegralen zusammensetze, in denen durchweg jede obere Grenze wirklich grösser ist, als die entsprechende untere.

Inbezug auf die beiden ersten Integrationen nach w und x gelingt dies zunächst durch die Zerlegung:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2, \text{ wo}$$

$$\mathfrak{J}_1 = \int_0^{2a} dw \int_{-w}^{2w} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} dz \cdot f, \qquad -\mathfrak{J}_2 = \int_{-a}^{0} dw \int_{2w}^{-w} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} dz \cdot f.$$

Und inbezug auf die beiden letzten Integrationen nach y und z, somit durchaus, gelingt es weiter, indem wir zerlegen:

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_{11} + \mathfrak{J}_{12}, \quad -\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_{21} + \mathfrak{J}_{22}, \quad \text{wo}$$

$$\mathfrak{J}_{11} = \int_0^{2a} dw \int_0^{2w} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} dz \cdot f, \qquad \mathfrak{J}_{12} = \int_0^{2a} dw \int_{-w}^{0} dx \int_{2x}^{-x} dy \int_{\frac{y^2}{2x}}^{-2x} dz \cdot f,$$

$$w > 0,\ x > 0 \qquad\qquad w > 0,\ x < 0$$

$$\mathfrak{J}_{21} = \int_{-a}^{0} dw \int_0^{-w} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} dz \cdot f, \qquad \mathfrak{J}_{22} = \int_{-a}^{0} dw \int_{2w}^{0} dx \int_{2x}^{-x} dy \int_{\frac{y^2}{2x}}^{-2x} dz \cdot f,$$

$$w < 0,\ x > 0 \qquad\qquad w < 0,\ x < 0$$

wobei schliesslich also:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{11} + \mathfrak{J}_{12} - \mathfrak{J}_{21} - \mathfrak{J}_{22}$$

sein wird.

Bei jedem der vier Teilintegrale wird sich nun Mc Coll's Methode unbedenklich anwenden lassen.

Wir vollziehen zunächst die Umkehrung der Integrationsfolge bei

$$\mathfrak{J}_{11}.$$

Unmittelbar gegeben ist die *„Integralaussage“*.

$$A = (0 < w < 2a)\,(0 < x < 2w)\,(-x < y < 2x)\left(-2x < z < \frac{y^2}{2x}\right).$$

Die Ordnung

$$w\ x\ y\ z$$

der Variabeln soll nun in

$$z\ y\ x\ w$$

verkehrt werden.

Voraus bemerkt sei, dass die *„absoluten Grenzen“* für sämtliche Integrationsvariable, d. h. die *konstanten* Werte, zwischen denen sie stets bleiben und die sie höchstens noch erreichen, sich hier leicht auf dem gewöhnlichen Wege ergeben — mit Ausnahme, vielleicht, der oberen Grenze für z, die später jedoch, im Verlauf der Mc Coll'schen Operationen, zutage treten wird — wir führen nachher auch diese vorgreifend mit an. So geht der Maximalwert von x als $= 4a$ aus seiner oberen Grenze $2w$ für den Maximalwert $2a$ von w hervor. Daraus folgen dann $-4a$ und $8a$ als Minimal- und Maximalwert von y und $-8a$ als Minimalwert von z (in Anbetracht, dass $\frac{y^2}{2x}$, wie schon erkannt, stets grösser ist als $-2x$ und überhaupt nicht negativ hier werden kann). Immer jedoch müssen auch die absoluten Grenzen sich alle von selbst im Verlauf der Mc Coll'schen Prozeduren ergeben.

Die Aussage A ist ein Produkt von acht Ungleichungen.

Diese, sofern sie w enthalten, brechen wir nun zunächst nach w auf, die übrig bleibenden sodann nach x (eventuell noch übrige dann nach y und die letzten, wenn solche noch vorhanden, nach z). Auf diese Weise ergibt sich für A leicht die folgende Darstellung, welcher wir *nebenher, in eckiger Klammer,* auch die Angabe der vorerwähnten absoluten Grenzen vollends anfügen:

$$\begin{array}{lll}
A = [(-8a < z < 8a)(-4a < y < 8a)] & (0 < x\,[< 4a]) & (0 < w < 2a)\,. \\
 & \cdot(-y < x) & \cdot\left(\frac{x}{2} < w\right) \\
 & \cdot\left(\frac{y}{2} < x\right)\cdot & \\
 & \cdot\left(-\frac{z}{2} < x\right)\cdot & \\
 & \cdot\left\{(0 < z) \in \left(x < \frac{y^2}{2z}\right)\right\}\cdot &
\end{array}$$

was kolonnenweise zu lesen ist, und so sich fortschreitend von rechts nach links ergab — abgesehen von dem vorgreifend in [ ] beigefügten. Hier dürfte nur die letzte Zeile eine Erläuterung beanspruchen. Die Forderung $z < \frac{y^2}{2x}$ ist, da $0 < x$ hier ist, äquivalent mit: $2xz < y^2$, und kommt für ein positives z, d. h. für $0 < z$ auf $x < \frac{y^2}{2z}$ hinaus, wogegen sie für ein negatives z hinfällig wird, nämlich sich als ohnehin erfüllt erweist, weil eine negative Zahl sicher kleiner ist als das unbedingt positive Quadrat von y.

Man bemerkt, dass wir ohne die eckigen Klammern wieder acht Faktoren haben, welche als blosse Umformungen der vorigen achte erscheinen, die wir bei der Transcription vollständig berücksichtigt haben.

Durch diese in den letzten zwei Kolonnen enthaltenen Forderungen ist nun der *Anfang* der nachstehenden Tabelle von Grenzen gegeben, deren übrige Ansätze sich erst später motiviren werden, die wir aber der Übersicht und leichtern Bezugnahme halber (sonach teilweise vorgreifend) sogleich vollständig hinsetzen wollen:

Grenzentabelle.

$w_0 = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$z_0 = 0$
$w_1 = \frac{x}{2}$	$x_1 = -y$	$y_2 = \frac{z}{2}$	$z_1 = -8a$
$w_2 = 2a$	$x_3 = \frac{y}{2}$	$y_1 = -z$	$z_2 = 2a$
	$x_5 = -\frac{z}{2}$	$y_3 = -4a$	$z_3 = 8a$
	$x_2 = \frac{y^2}{2z}$	$y_4 = 8a$	
		$y_5 = -\sqrt{8az}$	
	$x_4 = 4a$	$y_6 = \sqrt{8az}$	
		$y_7 = -2z$	
		$y_8 = z$	

Und mit Bezug auf diese haben wir als konzisesten Ausdruck unserer Integralaussage:

$$A = x_{0,1,3,5,}(z_{0'} + z_0 x_{2'})\, w_{2',0,1}\,.$$

Dass der in Gestalt von $z_0 \neq\!\!\!\in x_{2'}$ zunächst sich darbietende Aussagenfaktor in $z_{0'} + z_0 x_{2'}$ umgeschrieben werden durfte, sieht man unschwer ohne Rechnung, kann es aber auch rechnerisch darthun (nach Th. λ) des § 32 und Th. $\overline{33}_+$) Zusatz).

Nun ist:

$$x_0\, w_{2',0,1} = x_0\, w_{2',1}$$

indem wegen $0 < x$, also $0 < \frac{x}{2}$, der Faktor $(0 < w)$ durch den $\left(\frac{x}{2} < w\right)$ überflüssig gemacht ist.

Man kann dies auch nach Regel 1 einsehen, gemäss welcher

$$w_{0,1} = \alpha^0 w_0 + \alpha^1 w_1$$

ist, wo

$$\alpha^0 = p\,(w_0 - w_1) = p\left(0 - \frac{x}{2}\right) = p'\,(x) = x_{0'}$$

mit dem Kofaktor x_0 in A inkonsistent ist, wogegen $\alpha^1 = p\,(w_1 - w_0) = p\,(x) = x_0$ nur eine Wiederholung dieses Faktors ausdrücken würde. Im allgemeinen zwar wäre also:

$$w_{0,1} = x_{0'} w_0 + x_0 w_1$$

wogegen unter der Herrschaft des Aussagenfaktors (unter der Annahme) x_0 einfach

$$w_{0,1} = w_1$$

gesetzt werden mag, und der erste Term wegen $x_{0',0} = x_0 x_{0'} = 0$ fortfallen wird.

Nach Regel 3 hat aber die Geltung von $w_{2',1}$ auch die gleichzeitige von $p\,(w_2 - w_1) = p\left(2a - \frac{x}{2}\right) = p'\,(x - 4a) = (x < 4a) = x_{4'}$ im Gefolge, womit nun die absolute obere Grenze für x gewonnen und die Eintragung derselben in die Tabelle motivirt ist.

Nachdem so $x_{4'} \cdot w_{2',1}$ für $w_{2',0,1}$ in A eingesetzt worden, ist die Aussage nach der als letzte designirten Variabeln w bereits „entwickelt". Wir mögen den endgültigen Faktor $w_{2',1}$ oder $\left(\frac{x}{2} < w < 2a\right)$ dann ganz beiseite lassen und den Komplex der ihm vorangehenden Aussagenfaktoren etwa B nennen, sodass:

$$A = B \cdot w_{2',1}$$

wo

$$B = z_{0'} x_{4',0,1,3,5} + z_0 x_{2',4',0,1,3,5}$$

demnächst nach der zur vorletzten bestimmten Integrationsvariabeln x zu entwickeln sein wird.

Der erste Term heisse B_1, der andere B_2, sodass

$$B = B_1 + B_2.$$

In beiden Termen ist nach Regel 1 der Faktor zu enwickeln:

$$x_{0,1,3,5,} = \alpha^0 x_0 + \alpha^1 x_1 + \alpha^3 x_3 + \alpha^5 x_5$$

wo

$$\alpha_0 = p\,(0 + y)\,p\left(0 - \frac{y}{2}\right) p\left(0 + \frac{z}{2}\right) = p\,(y)\,p'\,(y)\,p\,(z) = y_{0',0}\, z_0 = 0$$

unmöglich ist wegen des inkonsistenten Faktors $y_0 y_{0'}$, wo ferner

$$\alpha^1 = p\,(-y - 0)\,p\left(-y - \frac{y}{2}\right) p\left(-y + \frac{z}{2}\right) = p'\,(y)\,p'\left(y - \frac{z}{2}\right) = y_{0',2'}$$

die Grenzen $y_0 = 0$ und $y_2 = \frac{z}{2}$ liefert und ihre Eintragung in die Tabelle motivirt, weiter:

$$\alpha^3 = p\left(\frac{y}{2} - 0\right) p\left(\frac{y}{2} + y\right) p\left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right) = p(y)\, p(y+z) = y_{0,1}$$

die Grenze $y_1 = -z$ beisteuert, endlich:

$$\alpha^5 = p\left(-\frac{z}{2} - 0\right) p\left(-\frac{z}{2} + y\right) p\left(\quad\frac{z}{2} - \frac{y}{2}\right) = p'(z)\, p\left(y - \frac{z}{2}\right) p'(y+z) = z_{0'}\, y_{1',2}$$

ist. Darnach haben wir:

$$x_{0,1,3,5} = y_{0',2'}\, x_1 + y_{0,1}\, x_3 + z_{0'}\, y_{1',2}\, x_5$$

und wird dieses mit $z_{0'} x_{4'}$ durchmultiplizirt, zugleich in jedem Term auf die x-Aussagen die Regel 3 angewendet, so haben wir:

$$B_1 = z_{0'} \{ y_{0',2'}\, p(x_4 - x_1)\, x_{4',1} + y_{0,1}\, p(x_4 - x_3)\, x_{4',3} + y_{1',2}\, p(x_4 - x_5) x_{4',5} \}$$

als völlig nach x entwickelt. Es ist aber: $p(x_4 - x_1) = p(4a + y)$ $= (-4a < y) = y_3$ die an dieser Stelle gewonnene und hier in die Tabelle einzutragende absolute untere Grenze von y (sofern als Zahl statt als Aussage gedeutet); ferner $p(x_4 - x_3) = p\left(4a - \frac{y}{2}\right) = p'(y - 8a)$ $= (y < 8a) = y_{4'}$, womit $y_4 = 8a$ als die absolute obere Grenze von y gewonnen ist, und endlich wird:

$$p(x_4 - x_5) = p\left(4a + \frac{z}{2}\right) = p(z + 8a) = (-8a < z) = z_1$$

die absolute untere Grenze von z einführen. Sodass:

$$B_1 = z_{0'} \{ y_{0',2',3}\, x_{4',1} + y_{4',0,1}\, x_{4',3} + z_1\, y_{1',2}\, x_{4',5} \}$$

nunmehr nach y zu entwickeln bleibt.

Nun ist $y_{0',2',3} = y_{2',3}$, weil die Forderung $y < 0$ durch die $y < \frac{z}{2}$ bei $z < 0$ überflüssig gemacht wird, oder, wenn man es vorzieht, weil nach den Regeln: $y_{0',2'} = \beta^{0'} y_{0'} + \beta^{2'} y_{2'}$, wo $\beta^{0'} = p'(y_0 - y_2) = p'\left(0 - \frac{z}{2}\right)$ $= z_0$ und $\beta^{2'} = p'(y_2 - y_0) = z_{0'}$, also allgemein zwar $y_{0',2'} = z_0\, y_{0'} + z_{0'}\, y_{2'}$, *hier* jedoch, unter der Herrschaft des Faktors $z_{0'}$, sich $y_{0',2'} = y_{2'}$ wird setzen lassen.

Und $y_{2',3}$ kooptirt nach Regel 3 den Faktor: $p(y_2 - y_3) = p\left(\frac{z}{2} + 4a\right)$ $= p(z + 8a) = z_1$, sodass wir $y_{0',2',3} = z_1\, y_{2',3}$ einzusetzen haben.

Weiter ist $y_{4',0,1} = y_{4',1}$, weil bei $z < 0$ die Forderung $0 < y$ durch die $-z < y$ entbehrlich gemacht wird, oder auch, weil nach der Regel: $y_{0,1} = \beta^0 y_0 + \beta^1 y_1$, wo $\beta^0 = p(y_0 - y_1) = p(0 + z) = z_0$ mit $z_{0'}$ inkonsistent, $\beta^1 = p(y_1 - y_0) = p(-z - 0) = p'(z) = z_{0'}$ dessen tautologische Wiederholung.

Und $y_{4',1}$ kooptirt den Faktor $p(y_4 - y_1) = p(8a + z) = z_1$, sodass $y_{4',0,1} = z_1 y_{4',1}$ einzusetzen sein wird.

Endlich kooptirt $y_{1',2}$ den Faktor $p(y_1 - y_2) = p\left(-z - \frac{z}{2}\right) = p'(z) = z_{0'}$, der sich oben ohnehin vorfindet.

Darnach ist:

$$B_1 = z_{0',1}(y_{2',3}x_{4',1} + y_{4',1}x_{4',3} + y_{1',2}x_{4',5})$$

auch nach y entwickelt, desgleichen aber nicht minder nach z, in welcher letztern Hinsicht nur noch zu bedenken bleibt, dass der von $z_{0',1}$ kooptirte Faktor $p(z_0 - z_1) = p(0 + 8a) = 1$ laut Annahme $a > 0$ ohnehin erfüllt ist.

Der Ausdruck B_1 ist daher jetzt fertig, und besteht nach Mc Coll's Ausdrucksweise aus lauter „elementary terms". —

Was $B_2 = z_0 x_{2',4',0,1,3,5}$ betrifft, so haben wir nach Regel 2:

$$x_{2',4'} = \alpha^{2'}x_{2'} + \alpha^{4'}x_{4'}$$

wo $\alpha^{2'} = p'(x_2 - x_4) = p'\left(\frac{y^2}{2z} - 4a\right)$ wegen $0 < z$ gleich $p'(y^2 - 8az) = p'\{(y - \sqrt{8az})(y + \sqrt{8az})\}$.

Wenn hier die Grenzen $y_5 = -\sqrt{8az}$, $y_6 = \sqrt{8az}$ in die Grenzentafel eingetragen werden, so ist nun die vorstehende Aussage nach den unter $\alpha'_1), \beta'_1)$ oben Seite 528 bereits gegebenen Schemata:

$$\alpha^{2'} = y_{6',5}.$$

Ebenso ist ferner $\alpha^{4'} = p'(x_4 - x_2) = p'\left(4a - \frac{y^2}{2z}\right)$ unter Herrschaft von z_0 gleich $p'(8az - y^2) = p(y^2 - 8az)$ nach ebendiesen Schemata: $= y_{5'} + y_{6}$.

Mithin wird bei Geltung von z_0 sein:

$$x_{2',4'} = y_{6',5}x_{2'} + (y_{5'} + y_6)x_{4'}.$$

Dies haben wir mit dem oben voraussetzungslos abgeleiteten Ausdruck von $x_{0,1,3,5}$ zu multipliziren. In ihm kann aber wegen des Ko-Faktors z_0 in B_2 der damit inkonsistente dritte Term $z_{0'}y_{1',2}x_5$ fortgelassen und einfacher blos:

$$x_{0,1,3,5} = y_{0',2'}x_1 + y_{0,1}x_3$$

genommen werden. So entsteht durch Ausmultipliziren, wenn wir sogleich auch Regel 3 auf die x-Konstituenten anwenden:

$$B_2 = z_0\{y_{0',2',6',5}\,p(x_2 - x_1)x_{2',1} + y_{6',0,1,5}\,p(x_2 - x_3)x_{2',3} + (y_{0',2',5'} + y_{0',2',6})\,p(x_4 - x_1)x_{4',1} + (y_{5',0,1} + y_{0,1,6})\,p(x_4 - x_3)x_{4',3}\}$$

wo $p(x_2 - x_1) = p\left(\frac{y^2}{2z} + y\right)$ wegen z_0 gleich $p(y^2 + 2yz)$ und wegen des Kofaktors $y_{0'}$ gleich $p'(y + 2z) = y_{7'}$ die Eintragung der Grenze

y_7 in die Tabelle fordert, während $p(x_2 - x_3) = p\left(\frac{y^2}{2z} - \frac{y}{2}\right)$ wegen z_0 gleich $p(y^2 - yz)$ und wegen des Kofaktors y_0 gleich $p(y - z) = y_8$ ist, also die Eintragung der Grenze y_8 erheischt, und schliesslich $p(x_4 - x_1) = p(4a + y) = y_3$, sowie $p(x_4 - x_3) = p\left(4a - \frac{y}{2}\right) = p'(y - 8a) = y_{4'}$ ist. Mithin ist:

$$B_2 = z_0 \{y_{0', 2', 6', 7', 5}\, x_{2', 1} + y_{6', 0, 1, 5, 8}\, x_{2', 3} + (y_{0', 2', 5', 3} + y_{0', 2', 3, 6})\, x_{4', 1} + \\ + (y_{4', 5', 0, 1} + y_{4', 0, 1, 6})\, x_{4', 3}\}$$

nunmehr nach x entwickelt, und müssen es die Koeffizienten jetzt auch nach y werden.

Dies kann strikte nach den Regeln geschehen. Doch gestaltet sich deren pedantische Anwendung da, wo *viele* Suffixe zusammentreten, immerhin etwas umständlich, und wird man praktisch zuvor alle diejenigen Faktoren unterdrücken, welche durch andere von ihnen auf den ersten Blick überflüssig gemacht werden. So ist z. B.

$$y_{\underset{\cdot}{0'}, \underset{\cdot}{2'}, \underset{\cdot}{6'}, 7', 5} = \underline{(y < 0)}\, \underline{\left(y < \frac{z}{2}\right)}\, \underline{(y < \sqrt{8az})}\, (y < -2z)\, (-\sqrt{8az} < y)$$

augenscheinlich $= y_{7', 5}$, indem wegen des hier positiven z die drei ersten Faktoren durch die als erfüllt zu denkende Forderung des vierten Faktors hinfällig werden, nämlich als schon selbstverständlich erfüllte zu ganz nichtssagenden Bedingungen sich stempeln. Ganz dasselbe würde sich natürlich auch durch Entwickelung von $y_{0', 2', 6', 7'}$ gemäss Regel 2 herausgestellt haben. McColl unterpunktirt die hinfällig werdenden Suffixe und unterstreicht eingehende Faktoren (sowie als inkonsistent verschwindende Summanden) bei den Aussagen, wie wir es vorstehend exemplifizirt haben. Solches empfiehlt sich sehr für das schriftliche Arbeiten, stellt aber an den Druck höhere typographische Anforderungen, weshalb wir fernerhin keinen Gebrauch von diesem Verfahren machen wollen.

Nach Regel 3 wird $y_{7', 5}$ den Faktor kooptiren: $p(y_7 - y_5) = p(-2z + \sqrt{8az}) = (\sqrt{8az} > 2z)$, was wegen z_0 gleich $(z < 2a) = z_{2'}$ ist und die Grenze z_2 zur Tabelle beisteuert, sodass $y_{0', 2', 6', 7', 5} = z_{2'}\, y_{7', 5}$ einzusetzen ist.

Ähnlich nun vereinfacht (bei Geltung von z_0) sich sofort: $y_{6', 0, 1, 5, 8} = y_{6', 8}$, $y_{0', 2', 5', 3} = y_{5', 3}$, $y_{0', 2', 3, 6} = 0$, $y_{4', 5', 0, 1} = 0$, $y_{4', 0, 1, 6} = y_{4', 6}$ und zwar verschwindet der drittletzte Koeffizient, weil in ihm die Forderung $y_{6'} = (\sqrt{8az} < y)$ mit der $y_{0'} = (y < 0)$ unverträglich ist, und ebenso der vorletzte, weil sein Faktor $y_{5'}, = (y < -\sqrt{8az})$ kollidirt mit dem Faktor $y_0, = (0 < y)$.

Es fällt hienach überhaupt nicht mehr nötig die Regeln 1 und 2 anzuwenden. Nach Regel 3 aber wird $y_{6',8}$ den Faktor kooptiren:

$$p(y_6 - y_8), = p(\sqrt{8az} - z) = (z < 8a) = z_{3'},$$

welcher die absolute obere Grenze für z andeutet und als z_3 hier in die Tabelle einzutragen ist.

Und $y_{5',3}$ kooptirt $p(y_5 - y_3), = p(-\sqrt{8az} + 4a) = (z < 2a)$ $= z_{2'}$, endlich $y_{4',6}$ kooptirt $p(y_4 - y_6), = p(8a - \sqrt{8az}) = (z < 8a) =$ $= z_{3'}$, sodass wir nach Einsetzung der gefundenen Koeffizienten haben:

$$B_2 = z_0 \{z_{2'} y_{7',5} x_{2',1} + z_{3'} y_{6',8} x_{2',3} + z_{2'} y_{5',3} x_{4',1} + z_{3'} y_{4',6} x_{4',3}\}$$

Bedenkt man jetzt nur noch, dass $z_{2',0}$ sowie $z_{3',0}$ die Faktoren kooptiren: $p(z_2 - z_0), = p(2a)$ resp. $p(z_3 - z_0), = p(8a)$, die wegen $a > 0$ gleich 1, d. h. ohnehin erfüllt sind, so ist klar, dass:

$$B_2 = z_{2',0}(y_{7',5} x_{2',1} + y_{5',3} x_{4',1}) + z_{3',0}(y_{6',8} x_{2',3} + y_{4',6} x_{4',3})$$

nach allen drei Variabeln, zuerst x, dann y, dann z fertig entwickelt ist.

Dasselbe gilt hienach auch bezüglich aller vier Integrationsvariabeln w, x, y, z von

$$A = (B_1 + B_2)\, w_{2',1}$$

selbst, was nun unter Einsetzung der gefundenen Endwerte von B_1 und B_2 leicht vollständig hinzuschreiben wäre, und die „Aussage" für das gesuchte Integral $\mathfrak{J}_{11}$ mit umgekehrter Integrationsfolge vorstellt. Dasselbe zerfällt hienach in sieben vierfache Teilintegrale, die sich durch irgendwelche Abweichungen in den korrespondirenden Grenzen von einander unterscheiden, und unter Bezugnahme auf die Grenzentabelle leicht hinzuschreiben sind. Unsere Aufgabe löst der Ansatz:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{11} = \Bigg[& \int_{-8a}^{0} dz \left\{ \int_{-4a}^{\frac{z}{2}} dy \int_{-y}^{4a} dx \cdot + \int_{-z}^{8a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{4a} dx \cdot + \int_{\frac{z}{2}}^{-z} dy \int_{-\frac{z}{2}}^{4a} dx \cdot \right\} + \\ & + \int_{0}^{2a} dz \left\{ \int_{-\sqrt{8az}}^{-2z} dy \int_{-y}^{\frac{y^2}{2z}} dx \cdot + \int_{-4a}^{-\sqrt{8az}} dy \int_{-y}^{4a} dx \cdot \right\} + \\ & + \int_{0}^{8a} dz \left\{ \int_{z}^{\sqrt{8az}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y^2}{2z}} dx \cdot + \int_{\sqrt{8az}}^{8a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{4a} dx \cdot \right\} \Bigg] \int_{\frac{x}{2}}^{2a} dw \cdot f.\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe für $\mathfrak{J}_{12}$

Grundaussage:

$$A = (0 < w < 2a)(-w < x < 0)(2x < y < -x)\left(\frac{y^2}{2x} < z < -2x\right).$$

Erste Transcription derselben, bei welcher von dem in [ ] vorgreifend angeführten abzusehen:

$$A = [(-4a < z < 4a)(-4a < y < 2a)]([-2a <] x < 0) \quad \cdot (0 < w < 2a).$$
$$\cdot (x < -y) \cdot (-x < w) \cdot$$
$$\cdot \left(x < \frac{y}{2}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(x < -\frac{z}{2}\right) \cdot$$
$$\cdot \left\{(z < 0) \in \left(\frac{y^2}{2z} < x\right)\right\} \cdot$$

Die Grenzentabelle:

$w_0 = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$z_0 = 0$
$w_2 = 2a$	$x_1 = -y$	$y_2 = \frac{z}{2}$	$z_4 = -a$
$w_3 = -x$	$x_2 = \frac{y^2}{2z}$	$y_1 = -z$	$z_5 = -4a$
	$x_3 = \frac{y}{2}$	$y_9 = -\sqrt{-4az}$	$z_6 = 4a$
	$x_5 = -\frac{z}{2}$	$y_{10} = \sqrt{-4az}$	
	$x_6 = -2a$	$y_7 = -2z$	
		$y_{11} = 2a$	
		$y_8 = z$	
		$y_3 = -4a$	

ist dieselbe wie bei $\mathfrak{J}_{11}$, nur mit Wegfall von w_1, x_4, y_4, y_5, y_6, z_1, z_2, z_3 und unter Anfügung von w_3, x_6, y_9, y_{10}, y_{11}, z_4, z_5, z_6.
Sonach:

$$A = x_{0', 1', 3', 5'}(z_{0'}\, x_2 + z_0)\, w_{2', 0, 3} \cdot$$

Wegen $x_{0'}$ ist $w_{2', 0, 3} = w_{2', 3} = w_{2', 3}\, x_6$. Also $A = (B_1 + B_2)\, w_{2', 3}$, wo $B_1 = z_{0'}\, x_{0', 1', 3', 5', 2, 6}$, $B_2 = z_0\, x_{0', 1', 3', 5', 6}$.

Nun ist: $x_{0', 1', 3', 5'} = y_{0, 2}\, x_{1'} + y_{0', 1'}\, x_{3'} + z_0\, y_{2', 1}\, x_{5'}$, und falls $z_{0'}$ gilt: $x_{2, 6} = y_{10', 9}\, x_2 + (y_{9'} + y_{10})\, x_6$, also:

$$B_1 = z_{0'}\, \{y_{10', 0, 2, 9} \cdot y_7\, x_{1', 2} + (y_{9', 0, 2} + y_{0, 2, 10})\, y_{11'}\, x_{1', 6} + y_{0', 1', 10', 9} \cdot y_{8'}\, x_{3', 2} +$$
$$+ (y_{0', 1', 9'} + y_{0', 1', 10})\, y_3\, x_{3', 6}\}.$$

Aber bei $z_{0'}$ ist:

$$y_{10',0,2,7,9} = y_{10',7}\,z_4, \quad y_{9',11',0,2} = 0, \quad y_{11',0,2,10} = y_{11',10}\,z_4,$$
$$y_{0',1',8',10',9} = y_{8',9}\,z_5, \quad y_{0',1',9',3} = y_{9',3}\,z_5, \quad y_{0',1',3,10} = 0,$$

somit:

$$B_1 = z_{0',4}\left(y_{10',7}\,x_{1',2} + y_{11',10}\,x_{1',6}\right) + z_{0',5}\left(y_{8',9}\,x_{3',2} + y_{9',3}\,x_{3',6}\right).$$

Weiter ist ($x_{0',1',3',5',6}$ oder sogleich):

$$B_2 = z_0\left(y_{0,2}\cdot y_{11'}\,x_{1',6} + y_{0',1'}\cdot y_3\,x_{3',6} + y_{2',1}\cdot z_{6'}\,x_{5',6}\right)$$

wo, bei z_0:

$$y_{11',0,2} = y_{11',2}\,z_{6'}, \quad y_{0',1',3} = y_{1',3}\,z_{6'}, \quad [y_{2',1} = z_0\,y_{2',1}], \text{ also:}$$
$$B_2 = z_{6',0}\left(y_{11',2}\,x_{1',6} + y_{1',3}\,x_{3',6} + y_{2',1}\,x_{5',6}\right)$$

völlig entwickelt. Damit ist auch A gefunden, und lässt sich ohne weiteres hinschreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{12} = \Bigg[& \int_{-a}^{0} dz \left\{ \int_{-2z}^{\sqrt{-4az}} dy \int_{\frac{y^2}{2z}}^{-y} dx \cdot + \int_{\sqrt{-4az}}^{2a} dy \int_{-2a}^{-y} dx \cdot \right\} + \\ & + \int_{-4a}^{0} dz \left\{ \int_{-\sqrt{-4az}}^{z} dy \int_{\frac{y^2}{2z}}^{\frac{y}{2}} dx \cdot + \int_{-4a}^{-\sqrt{-4az}} dy \int_{-2a}^{\frac{y}{2}} dx \cdot \right\} + \\ & + \int_{0}^{4a} dz \left\{ \int_{\frac{z}{2}}^{2a} dy \int_{-2a}^{-y} dx \cdot + \int_{-4a}^{-z} dy \int_{-2a}^{\frac{y}{2}} dx \cdot + \int_{-z}^{\frac{z}{2}} dy \int_{-2a}^{-\frac{z}{2}} dx \cdot \right\} \Bigg] \int_{-x}^{2a} dw \cdot f.\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe für $\mathfrak{J}_{21}$.

Grundaussage:

$$A = (-a < w < 0)\,(0 < x < -w)\,(-x < y < 2x)\left(-2x < z < \frac{y^2}{2x}\right).$$

Erste Transcription derselben:

$$A = [(-2a < z < 2a)\,(-a < y < 2a)]\,(0 < x\,[< a])\,(-a < w < 0).$$

$$\cdot(-y < x)\cdot \qquad\qquad \cdot(w < -x)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{y}{2} < x\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{z}{2} < x\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{(0 < z) =\!\!\!\!\in \left(x < \frac{y^2}{2z}\right)\right\}\cdot$$

Die Grenzentabelle:

$w_0 = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$z_0 = 0$
$w_3 = -x$	$x_1 = -y$	$y_2 = \frac{z}{2}$	$z_7 = -2a$
$w_4 = -a$	$x_3 = \frac{y}{2}$	$y_1 = -z$	$z_8 = \frac{a}{2}$
	$x_5 = -\frac{z}{2}$	$y_{12} = -a$	$z_2 = 2a$
	$x_2 = \frac{y^2}{2z}$	$y_{11} = 2a$	
	$x_7 = a$	$y_{13} = -\sqrt{2az}$	
		$y_{14} = \sqrt{2az}$	
		$y_7 = -2z$	
		$y_8 = z$	

führt unter Wegfall mancher früheren nur w_4, x_7, y_{12}, y_{13}, y_{14}, z_7, z_8 als neue Grenzen ein. Sonach:

$$A = x_{0,1,3,5,}(z_{0'} + z_0 x_{2'})\, w_{0',3',4}$$

Bei Geltung von x_0 ist: $w_{0',3',4} = w_{3',4} = w_{3',4} x_{7'}$, also:

$A = (B_1 + B_2)\, w_{3',1}$, wo $B_1 = z_{0'} x_{7',0,1,3,5}$, $B_2 = z_0 x_{2',7',0,1,3,5}$.

Nun ist: $x_{0,1,3,5} = y_{0',2'} x_1 + y_{0,1} x_3 + z_{0'} y_{1',2} x_5$, wie früher S. 547. Also:

$$B_1 = z_{0'}\,(y_{0',2'} \cdot y_{12} x_{7',1} + y_{0,1} \cdot y_{11'} x_{7',3} + y_{1',2} \cdot z_7 x_{7',5}).$$

Aber bei $z_{0'}$ ist: $y_{0',2',12} = y_{2',12} = y_{2',12} z_7$, $y_{11',0,1} = y_{11',1} = y_{11',1} z_7$, $y_{1',2} = y_{1',2} z_{0'}$, also:

$$B_1 = z_{0',7}\,(y_{2',12} x_{7',1} + y_{11',1} x_{7',3} + y_{1',2} x_{7',5}).$$

Bei z_0 ist $x_{2',7'} = y_{14',13} x_{2'} + (y_{13'} + y_{14})\, x_{7'}$, also:

$$B_2 = z_0 \{ y_{0',2',14',13} \cdot y_{7'} x_{2',1} + (y_{0',2',13'} + y_{0',2',14})\, y_{12} x_{7',1} + y_{14',0,1,13}\, y_8 x_{2',3} + \\ + (y_{13',0,1} + y_{0,1,14})\, y_{11'} x_{7',3} \},$$

wo $y_{0',2',14',7',13} = y_{7',13} z_{8'}$, $y_{0',2',13',12} = y_{13',12} z_{8'}$, $y_{0',2',12,14} = 0$, $y_{14',0,1,8,13} = y_{14',8} \cdot z_{2'}$, $y_{11',13',0,1} = 0$, $y_{11',0,1,14} = y_{11',14} z_{2'}$ bei z_0 ist, somit:

$$B_2 = z_{8',0}\,(y_{7',13} x_{2',1} + y_{13',12} x_{7',1}) + z_{2',0}\,(y_{14',8} x_{2',3} + y_{11',14} x_{7',3}).$$

Dies gibt:

$$\mathfrak{I}_{21} = \Bigg[\int_{-2a}^{0} dz \Big\{ \int_{-a}^{\frac{z}{2}} dy \int_{-y}^{a} dx \cdot + \int_{-z}^{2a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{a} dx \cdot + \int_{\frac{z}{2}}^{-z} dy \int_{-\frac{z}{2}}^{a} dx \cdot \Big\} +$$

$$+ \int_{0}^{\frac{a}{2}} dz \Big\{ \int_{-\sqrt{2az}}^{-2z} dy \int_{-y}^{\frac{y^2}{2z}} dx \cdot + \int_{-a}^{-\sqrt{2az}} dy \int_{-y}^{a} dx \cdot \Big\} + \int_{0}^{2a} dz \Big\{ \int_{z}^{\sqrt{2az}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y^2}{2z}} dx \cdot + \int_{\sqrt{2az}}^{2a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{a} dx \cdot \Big\} \Bigg] \int_{-a}^{-x} dw \cdot f.$$

Aber bei $z_{0'}$ ist:

$$y_{10',0,2,7,9} = y_{10',7}\, z_4, \quad y_{9',11',0,2} = 0, \quad y_{11',0,2,10} = y_{11',10}\, z_4,$$
$$y_{0',1',8',10',9} = y_{8',9}\, z_5, \quad y_{0',1',9',3} = y_{9',3}\, z_5, \quad y_{0',1',3,10} = 0,$$

somit:

$$B_1 = z_{0',4}\,(y_{10',7}\, x_{1',2} + y_{11',10}\, x_{1',6}) + z_{0',5}\,(y_{8',9}\, x_{3',2} + y_{9',3}\, x_{3',6}).$$

Weiter ist ($x_{0',1',3',5',6}$ oder sogleich):

$$B_2 = z_0\,(y_{0,2} \cdot y_{11'}\, x_{1',6} + y_{0',1'} \cdot y_3\, x_{3',6} + y_{2',1} \cdot z_{6'}\, x_{5',6})$$

wo, bei z_0:

$$y_{11',0,2} = y_{11',2}\, z_{6'}, \quad y_{0',1',3} = y_{1',3}\, z_{6'}, \quad [y_{2',1} = z_0\, y_{2',1}], \text{ also:}$$
$$B_2 = z_{6',0}\,(y_{11',2}\, x_{1',6} + y_{1',3}\, x_{3',6} + y_{2',1}\, x_{5',6})$$

völlig entwickelt. Damit ist auch A gefunden, und lässt sich ohne weiteres hinschreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{12} = \Bigg[& \int_{-a}^{0} dz \left\{ \int_{-2z}^{\sqrt{-4az}} dy \int_{\frac{y^2}{2z}}^{-y} dx \cdot + \int_{\sqrt{-4az}}^{2a} dy \int_{-2a}^{-y} dx \cdot \right\} + \\ & + \int_{-4a}^{0} dz \left\{ \int_{-\sqrt{-4az}}^{z} dy \int_{\frac{y^2}{2z}}^{\frac{y}{2}} dx \cdot + \int_{-4a}^{-\sqrt{-4az}} dy \int_{-2a}^{\frac{y}{2}} dx \cdot \right\} + \\ & + \int_{0}^{4a} dz \left\{ \int_{\frac{z}{2}}^{2a} dy \int_{-2a}^{-y} dx \cdot + \int_{-4a}^{-z} dy \int_{-2a}^{\frac{y}{2}} dx \cdot + \int_{-z}^{\frac{z}{2}} dy \int_{-2a}^{-\frac{z}{2}} dx \cdot \right\} \Bigg] \int_{-x}^{2a} dw \cdot f.\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe für $\mathfrak{J}_{21}$.

Grundaussage:

$$A = (-a < w < 0)\,(0 < x < -w)\,(-x < y < 2x)\left(-2x < z < \frac{y^2}{2x}\right).$$

Erste Transcription derselben:

$$A = [(-2a < z < 2a)\,(-a < y < 2a)]\,(0 < x\,[< a])\,(-a < w < 0).$$
$$\cdot(-y < x)\cdot \qquad \cdot(w < -x)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{y}{2} < x\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{z}{2} < x\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{(0 < z) \mathrel{\overline{\in}} \left(x < \frac{y^2}{2z}\right)\right\}\cdot$$

Die Grenzentabelle:

$w_0 = 0$	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$z_0 = 0$
$w_3 = -x$	$x_1 = -y$	$y_2 = \frac{z}{2}$	$z_7 = -2a$
$w_4 = -a$	$x_3 = \frac{y}{2}$	$y_1 = -z$	$z_8 = \frac{a}{2}$
	$x_5 = -\frac{z}{2}$	$y_{12} = -a$	$z_2 = 2a$
	$x_2 = \frac{y^2}{2z}$	$y_{11} = 2a$	
	$x_7 = a$	$y_{13} = -\sqrt{2az}$	
		$y_{14} = \sqrt{2az}$	
		$y_7 = -2z$	
		$y_8 = z$	

führt unter Wegfall mancher früheren nur w_4, x_7, y_{12}, y_{13}, y_{14}, z_7, z_8 als neue Grenzen ein. Sonach:

$$A = x_{0,1,3,5,}(z_{0'} + z_0\, x_{2'})\, w_{0',3',4}$$

Bei Geltung von x_0 ist: $w_{0',3',4} = w_{3',4} = w_{3',4}\, x_{7'}$, also:

$A = (B_1 + B_2)\, w_{3',4}$, wo $B_1 = z_{0'}\, x_{7',0,1,3,5}$, $B_2 = z_0\, x_{2',7',0,1,3,5}$.

Nun ist: $x_{0,1,3,5} = y_{0',2'}\, x_1 + y_{0,1}\, x_3 + z_{0'}\, y_{1',2}\, x_5$, wie früher S. 547. Also:

$$B_1 = z_{0'}\,(y_{0',2'} \cdot y_{12}\, x_{7',1} + y_{0,1} \cdot y_{11'}\, x_{7',3} + y_{1',2} \cdot z_7\, x_{7',5}).$$

Aber bei $z_{0'}$ ist: $y_{0',2',12} = y_{2',12} = y_{2',12}\, z_7$, $y_{11',0,1} = y_{11',1} = y_{11',1}\, z_7$, $y_{1',2} = y_{1',2}\, z_{0'}$, also:

$$B_1 = z_{0',7}\,(y_{2',12}\, x_{7',1} + y_{11',1}\, x_{7',3} + y_{1',2}\, x_{7',5}).$$

Bei z_0 ist $x_{2',7'} = y_{14',13}\, x_{2'} + (y_{13'} + y_{14})\, x_{7'}$, also:

$$B_2 = z_0\,\{y_{0',2',14',13} \cdot y_{7'}\, x_{2',1} + (y_{0',2',13'} + y_{0',2',14})\, y_{12}\, x_{7',1} + y_{14',0,1,13}\, y_8\, x_{2',3} + \\ + (y_{13',0,1} + y_{0,1,14})\, y_{11'}\, x_{7',3}\},$$

wo $y_{0',2',14',7',13} = y_{7',13}\, z_{8'}$, $y_{0',2',13',12} = y_{13',12}\, z_{8'}$, $y_{0',2',12,14} = 0$,
$y_{14',0,1,8,13} = y_{14',8} \cdot z_{2'}$, $y_{11',13',0,1} = 0$, $y_{11',0,1,14} = y_{11',14}\, z_{2'}$
bei z_0 ist, somit:

$$B_2 = z_{8',0}\,(y_{7',13}\, x_{2',1} + y_{13',12}\, x_{7',1}) + z_{2',0}\,(y_{14',8}\, x_{2',3} + y_{11',14}\, x_{7',3}).$$

Dies gibt:

$$\mathfrak{J}_{21} = \left[\int_{-2a}^{0} dz \left\{\int_{-a}^{\frac{z}{2}} dy \int_{-y}^{a} dx \cdot + \int_{-z}^{2a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{a} dx \cdot + \int_{\frac{z}{2}}^{-z} dy \int_{-\frac{z}{2}}^{a} dx \cdot \right\} + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\frac{a}{2}} dz \left\{\int_{-\sqrt{2az}}^{-2z} dy \int_{-y}^{\frac{y^2}{2z}} dx \cdot + \int_{-a}^{-\sqrt{2az}} dy \int_{-y}^{a} dx \cdot \right\} + \int_{0}^{2a} dz \left\{\int_{z}^{\sqrt{2az}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y^2}{2z}} dx \cdot + \int_{\sqrt{2az}}^{2a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{a} dx \cdot \right\}\right] \int_{-a}^{-x} dw \cdot f.$$

Lösung der Aufgabe für $\mathfrak{J}_{22}$.

Grundaussage:

$$A = (-a < w < 0)(2w < x < 0)(2x < y < -x)\left(\frac{y^2}{2x} < z < -2x\right).$$

Erste Umformung derselben:

$$\begin{aligned} A = [(-4a < z < 4a)(-4a < y < 2a)]([-2a <]x < 0)(-a < w < 0).& \\ \cdot (x < -y). \quad \left(w < \frac{x}{2}\right)&. \\ \cdot \left(x < \frac{y}{2}\right)&. \\ \cdot \left(x < -\frac{z}{2}\right)&. \\ \left\{(z < 0) \in \left(\frac{y^2}{2z} < x\right)\right\}&. \end{aligned}$$

Die Grenzentabelle:

$w_0 = 0$	$x_0 = 0$	etc.
$w_4 = -a$	etc.	
$w_1 = \frac{x}{2}$		

ist bis auf die Vertauschung von w_2, w_3 mit w_1, w_4 dieselbe wie bei $\mathfrak{J}_{12}$. Also:

$$A = x_{0', 1', 3', 5'}(z_{0'} x_2 + z_0) w_{0', 1', 4}.$$

Wegen $x_{0'}$ ist $w_{0', 1', 4} = w_{1', 4} = w_{1', 4} x_6$, sonach

$$A = (B_1 + B_2) w_{1', 4}$$

wo B_1 und B_2 dieselben Bedeutungen und somit auch dieselben ausgerechneten Endwerte haben wie in $\mathfrak{J}_{12}$. Man kann hiernach das Ergebniss sogleich hinschreiben. Dasselbe lautet:

$$\mathfrak{J}_{22} = [\cdots] \int_{-a}^{\frac{x}{2}} dw \cdot f$$

wo in der Klammer [ ] derselbe Ausdruck wiederholt zu denken ist, der beim Resultat für $\mathfrak{J}_{12}$ in einer solchen steht.

Zum Schlusse sei bemerkt, dass McColl's Methode sich mit geringfügiger Modifikation auch auf *mehrfache Summen* ausdehnen lässt, sei es, um die Grenzen der successiven Einzelsummationen nach gegebenen Summationsvariabeln zu ermitteln, wenn der Summationsbereich irgendwie gegeben ist, sei es um eine gegebene Summationsordnung umzukehren, für die umgekehrte aus den alten die neuen Grenzen abzuleiten.

Die bei den Integralen erforderliche (von McColl übersehene) *„Vorbereitungsarbeit" fällt hier fort,* weil eine Summe gemeinhin als 0 gerechnet zu werden pflegt, sobald ihre untere Grenze die obere übertrifft, und insofern gestaltet bei den Summen sich die Arbeit einfacher als bei den Integralen.

Komplizirter wird dagegen das analoge Summenproblem in zwei andern Hinsichten. Einmal, aber nicht sehr erheblich, zufolge des Umstandes, dass wir jetzt nicht blos mit Ungleichungen, sondern auch mit Gleichungen zu thun haben werden. Diese dürfen jetzt nicht mehr ausgeschieden werden: die untere (und zumeist auch die obere) Grenze einer Summe muss immer einschliesslich, inklusiv gerechnet werden; es ist hier *nicht* gleichgültig, ob man sie einrechnet oder ausschliesst.

Diesem Umstand wird leicht in folgender Weise Rechnung zu tragen sein:
Man definire: $p(x-a) = (a \lesseqgtr x)$, sonach $p(x) = (0 \lesseqgtr x)$, und $p'(x-a) = (x < a)$, $p'(x) = (x < 0)$, wie früher; so wird jetzt $p'(x)$ exakt $= p_1(x) = \{p(x)\}_1$ die Negation von $p(x)$ sein, und ist das frühere Verhältniss hergestellt.

Die „unteren" Summengrenzen für eine Summationsvariable x treten jetzt auch als solche in die Aussagensymbole ein. Dagegen wird man die *oberen* Summengrenzen, soferne auch sie wie üblich inklusive gerechnet werden sollen, je nur *um 1 vermehrt* in die Grenzentafel und in die Aussagensymbole p eintreten lassen dürfen, um sie zuletzt beim Rückschlusse aus den Aussagensymbolen auf die anzusetzende mehrfache Summe wiederum um 1 vermindert als obere Grenzen anzuschreiben.

Darnach werden die drei McColl'schen Regeln, auf denen alle Prozesse beruhten, sich ohne weiteres wieder als gültig erweisen und seine Methode sofort anwendbar sein.

Eine erheblichere Erschwerung kann aus dem andern Umstand erwachsen: dass nämlich die Summationsvariabeln mit ihrer Veränderlichkeit auf das Gebiet der *ganzen* Zahlen beschränkt und in diesem angewiesen sind, stets eine *Sequenz* von solchen zu durchlaufen.

Beweis der Regel 1, Seite 528/9:

γ_1) $$x_{1,3,5,\ldots} = x_1\alpha^1 + x_3\alpha^3 + x_5\alpha^5 + \cdots$$
sowie der zugehörigen Sätze ε_1), ζ_1).

Zunächst ist ε_1) oder
$$\alpha^\varkappa \alpha^\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda$$
evident; denn $\alpha^\varkappa$ enthält nach der Definition δ_1) den Faktor $p(x_\varkappa - x_\lambda)$, dagegen α^λ den $p(x_\lambda - x_\varkappa)$, und nach ψ) ist:
$$p(x_\varkappa - x_\lambda)p(x_\lambda - x_\varkappa) = p(x_\varkappa - x_\lambda)p\{-(x_\varkappa - x_\lambda)\} = 0.$$

Ebendarum ist auch

$$\mathrm{i} = p(x_\varkappa - x_\lambda) + p(x_\lambda - x_\varkappa);$$

denkt man sich nun diese Gleichung angesetzt für alle erdenklichen Paare von unter sich verschiedenen x-Grössen x_1, x_3, x_5, $\cdots$ und überschiebend mit einander multiplizirt:

$$\mu_1)\qquad \mathrm{i} = \{p(x_1 - x_3) + p(x_3 - x_1)\}\{p(x_1 - x_5) + p(x_5 - x_1)\}\cdot \\ \cdot\{p(x_3 - x_5) + p(x_5 - x_3)\}\cdots$$

so muss daraus die Gleichung $\zeta_1)$ $\mathrm{i} = \alpha^1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots$ entstehen, (aus welcher dann $\gamma_1)$ leicht abzuleiten sein wird,) — wofern man nur in $\mu_1)$ rechterhand ausmultiplizirt, die kraft $\psi)$ etc. verschwindenden Terme des ausmultiplizirten Produktes fortlässt, und bei den stehen bleibenden die „überflüssigen" Faktoren („redundant" factors) unterdrückt, die kraft des Absorptionsgesetzes in den übrigen eingehen.

Um dies einzusehen, hätte man, wenn n die Anzahl der unteren Grenzen oder Symbole der x-Reihe ist, von den $\frac{n(n-1)}{2}$ Faktoren in $\mu_1)$ $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Partialprodukte im Geiste durchzugehen. Dieser Gedanke, dessen Ausführung sich freilich meist umständlich gestalten dürfte, lässt sich immerhin allgemein in folgender Weise verwirklichen.

Irgend ein Glied von $\zeta_1)$, z. B. α^1, wird in $\mu_1)$ aus denjenigen $n-1$ von den $\frac{n(n-1)}{2}$ binomischen Faktoren entstehen, in welchen das Zahlensymbol x_1 vorkommt; und zwar wird, wenn wir uns diese $n-1$ Faktoren zunächst für sich ausmultiplizirt denken, α^1, als eines der 2^{n-1} Partialprodukte, herrühren von den Binomgliedern der Form $p(x_1 - x_\lambda)$, in welchen x_1 hinter p als Minuend steht. Im Gesamtprodukt von $\mu_1)$ findet sich dann jedes dieser 2^{n-1} Partialprodukte, darunter also auch α^1, noch multiplizirt mit allen übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ binomischen Faktoren von $\mu_1)$, in welchen x_1 nicht vorkommt, — deren jeder aber $= \mathrm{i}$ ist. Also tritt α^1 auch im Gesamtprodukt $\mu_1)$ als einzelner Term mit dem Koeffizienten i auf.

Ebenso wie α^1 lassen sich hierauf auch α^3, sodann α^5, u. s. w. in $\mu_1)$ als besondere Glieder aussondern, unter Mitbenützung freilich von Faktoren und Gliedern, die auch schon zur Bildung früherer α-Produkte Verwendung fanden. Ungeachtet dieses letztern Umstandes dürfen wir — wegen des Tautologiegesetzes $\overline{14})$ — nunmehr das expandirte Produkt $\mu_1)$ in der Gestalt

$$\alpha^1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots + R$$

uns vorstellen, wenn hier unter dem Zeichen R die restirenden, noch zu den α hinzutretenden Glieder zusammengefasst sind. $\zeta_1)$ ist bewiesen, wenn noch gezeigt ist, dass $R = 0$ wird.

Nun ist ein jedes Glied von R ein Produkt aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Aussagen p der Form $p(x_\varkappa - x_\lambda)$; und in jedem dieser Glieder ist eine jede x-Grösse, z. B. x_1, gerade wieder $n-1$ mal vertreten, sei es als Minuend, sei es als Subtrahend in je einem p-Faktor, und zwar so, dass *keine von den n x-Grössen durchweg als Minuend erscheint.* Wäre nämlich etwa das Element x_1 durchweg Minuend in allen $n-1$ Faktoren p, in welchen dasselbe vorkommt, so wäre das betreffende Glied von μ_1) schon mit α^1 berücksichtigt worden.

Dies vorausgesetzt, lässt sich nun beweisen, dass unter den Faktoren eines jeden Gliedes von R sich stets eine geschlossene Kette, ein Ring oder „*Cyklus*" finden muss — mitunter auch deren mehrere — von der Form

$$\nu_1)\qquad \begin{cases} p(a-b)p(b-c)p(c-a), = 0 \\ p(a-b)p(b-c)p(c-d)p(d-a), = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Zunächst ist leicht einzusehen, dass ein solcher Cyklus jederzeit, (wie auch schon der nur aus zwei Faktoren bestehende

$$p(a-b)p(b-a), = 0,$$

vergl. ψ) Seite 525,) $= 0$ ist und damit, wofern er wirklich in einem Glied von R vorhanden ist, auch dieses Glied zum Verschwinden bringt; denn aus $a-b>0$, $b-c>0$ folgt durch überschiebendes Addiren $a-c>0$, (oder aus $a>b$, $b>c$ a fortiori $a>c$,) also

$$o_1)\qquad p(a-b)p(b-c) \mathrel{\overline{\in}} p(a-c)$$

und hieraus die erste der Inkonsistenzen ν_1), da $p(c-a)$ als Negation von $p(a-c)$ zu gelten hat. U. s. w.

Dass aber wirklich in jedem Glied von R mindestens ein solcher Cyklus notwendig auftreten muss, darin prägt sich ein eigener Satz der Kombinatorik aus, den ich nachher für n Elemente irgend welcher Art — die dann nicht $x_1, x_3, x_5, \cdots$ sondern $1, 2, 3, \cdots n$ genannt werden sollen — von allem bisherigen unabhängig aussprechen und beweisen werde. Unter der Voraussetzung, dass dies bereits geschehen sei, möchte ich jedoch, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, mit dem begonnenen Beweise von McColl's Regel 1 zu Ende kommen.

Nach alledem wird also die Gleichung ζ_1) anzusehen sein als das Ergebniss der Entwickelung der identischen 1 nach den $\frac{n(n-1)}{2}$ Aussagen $p(x_\varkappa - x_\lambda)$.

Aus ζ_1) ist dann endlich leicht γ_1) rechnerisch abzuleiten, indem man jene Gleichung mit der gemäss β_1) geltenden:

$$x_{1,3,5,\ldots} = x_1 x_3 x_5 \cdots$$

überschiebend multiplizirt und zwar rechts ausmultiplizirend. Dabei ist nur noch zu beachten, dass in jedem Gliede alle Aussagenfaktoren x, welche einen vom Exponenten des α verschiedenen Index haben, im Produkte eingehen, speziell also, dass:

$$\begin{aligned}\alpha^1 x_1 x_3 x_5 \cdots &= \alpha^1 x_1,\\ \alpha^3 x_1 x_3 x_5 \cdots &= \alpha^3 x_3,\\ \cdots &\cdots\end{aligned}$$

ist. Um das erstere einzusehen (was für den Rest typisch ist), schreibe man sich das Produkt ausführlicher hin:

$$p(x - x_1)p(x - x_3)p(x - x_5)\cdots p(x_1 - x_3)p(x_1 - x_5)\cdots$$

In Anbetracht aber, dass die Subsumtion o_1) nach Th. $\overline{20}_\times$) auch geschrieben werden kann:

$$\pi_1)\qquad p(a - b)p(b - c)p(a - c) = p(a - b)p(b - c),$$

haben wir ein Schema vor uns, gemäss welchem nun oben der Faktor

$$\begin{array}{llll} & p(x - x_3) & \text{von dem Produkte} & p(x - x_1)p(x_1 - x_3),\\ \text{der} & p(x - x_5) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & p(x - x_1)p(x_1 - x_5),\\ & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

augenscheinlich absorbirt (nämlich ohnehin mitbedingt) wird, (weshalb seine Statuirung überflüssig). Sonach vereinfacht unser Glied sich in der That zu:

$$p(x - x_1)p(x_1 - x_3)p(x_1 - x_5)\cdots, = x_1\alpha^1,$$

wie zu zeigen gewesen, und die Formel γ_1) ist gerechtfertigt.

Der kombinatorische (Hülfs-)Satz, auf welchen mich der Versuch geführt hat, den Beweis von McColl's Regeln zu vervollständigen, und von welchem vorstehend in der That Gebrauch gemacht werden *musste*, ist vielleicht — gleichwie der Beweis für denselben — auch an sich von Interesse. Derselbe ist wie folgt zu formuliren.

Betrachtet man die $\frac{n(n-1)}{2}$ Kombinationen ohne Wiederholungen zur zweiten Klasse von n Elementen $1, 2, 3, \cdots n-1, n$, dieselben jedoch „ungeordnet" (d. h. mit irgendwie geordneten Elementen) genommen, m. a. W. nur als „Elementepaare" aufgefasst, somit jede einzelne Kombination beliebig entweder als „Rechtfolge" oder aber als „Kehrfolge" angesetzt, so gilt der Satz: *Wenn kein Element in allen $n - 1$ Elementepaaren, in denen es vorkommt, voransteht, so lassen sich immer gewisse von den Elementepaaren zu einem „Ringe" oder „Cyklus" ordnen* — wie

23, 34, 42,	abgekürzt: 2342,
12, 23, 34, 41,	12341,
. . . . . .	. . .

— dergestalt dass der Konsequent (oder das zweite Element) jedes Paares mit dem Antezedenten (oder ersten Element) des ihm folgenden Paares zusammenfällt, der letzte Konsequent aber mit dem ersten Antezedenten — und zwar eventuell auf mehrere Arten.

Die Cyklen bestehen natürlich aus mindestens drei Elementepaaren, sind drei- oder „mehrgliedrige"; ein „zweigliedriger" Cyklus wie 23, 32, kann nämlich nicht vorkommen, weil jede Kombination nur ein mal durch ein Elementepaar vertreten sein soll; und noch weniger kann ein „eingliedriger" Cyklus, wie 11, vorkommen, weil Wiederholung von Elementen in jeder Kombination ausgeschlossen.

Die Anzahl der möglichen Systeme (oder Kombinationen) von Elementepaaren ist, wie leicht zu sehen, $= 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Den *Beweis* des Satzes beginnen wir mit dem empirischen Nachweise seiner Gültigkeit für die niedersten Werte: 2, 3 und 4 von n.

Zwei Elemente: 1 und 2; also $n = 2$, $n - 1 = 1$, $\frac{n(n-1)}{2} = 1$, $2^1 = 2$.

Kombinationen:

12	*
21	*.

Hier kann die Voraussetzung des Satzes niemals zutreffen, weil in allen, d. i. eben in dem einzigen Elementepaare des Systems sicher ein Element „durchweg" voransteht. Und unser Satz muss hier als ein „nichtssagender" *gelten.*

Drei Elemente: 1, 2, 3; also $n = 3$, $n - 1 = 2$, $\frac{n(n-1)}{2} = 3$, $2^3 = 8$.

Kombinationen:		Cyklen:
12, 13	23	*
	32	*
12, 31	23	1231
	32	*
21, 13	23	*
	32	1321
21, 31	23	*
	32	*

Vor den ersten Vertikalstrich haben wir die das Element 1 enthaltenden Elementepaare des jeweils in einer Zeile dargestellten Systemes gesetzt und sind dieselben in den leeren Plätzen aus den darüberstehenden Zeilen *wiederholt* zu denken. Hinter jenem Strich stehen die das Element 1 nicht enthaltenden Elementepaare. Sodann haben wir hinter einen zweiten Vertikalstrich die ersichtlichen Cyklen gesetzt in den Fällen, wo die Voraussetzung unsres Satzes zutrifft, dagegen mit einem *Stern* die Fälle gekennzeichnet, wo diese Voraussetzung nicht zutrifft, indem entweder das Element 1 oder das 2 oder 3 durchweg voransteht in allen Elementepaaren des betreffenden Systems oder der Zeile, die dasselbe enthalten.

Ähnlich verfahren wir auch bei den nachfolgenden Zusammenstellungen.

Vier Elemente: 1, 2, 3, 4; also $n = 4$, $n - 1 = 3$, $\frac{n(n-1)}{2} = 6$, $2^6 = 64$.

Kombinationen der Elementepaare mit ev. zugehörigen Cyklen:

12, 13, 14	23, 24, 34	*
	23, 24, 43	*
	23, 42, 34	*
	23, 42, 43	*
	32, 24, 34	*
	32, 24, 43	*
	32, 42, 34	*
	32, 42, 43	*
12, 13, 41	23, 24, 34	12341, 1241, 1341
	23, 24, 43	1241
	23, 42, 34	12341, 1341, 2342
	23, 42, 43	*
	32, 24, 34	1241, 13241, 1341
	32, 24, 43	1241, 13241, 2432
	32, 42, 34	1341
	32, 42, 43	*
12, 31, 41	23, 24, 34	1231, 12341, 1241
	23, 24, 43	1231, 1241, 12431
	23, 42, 34	1231, 12341, 2342
	23, 42, 43	*
	32, 24, 34	*
	32, 24, 43	1241, 12431, 2432
	32, 42, 34	*
	32, 42, 43	*
21, 31, 41	23, 24, 34	*
	23, 24, 43	*
	23, 42, 34	2342
	23, 42, 43	*
	32, 24, 34	*
	32, 24, 43	2432
	32, 42, 34	*
	32, 42, 43	*

Von den 64 Kombinationen der Elementepaare haben wir hier nur die Hälfte angeführt, die Fälle veranschaulichend, wo das Element 1 in allen drei Elementepaaren, in die es eingehen muss, voransteht, oder in nur zweien derselben, oder in einem, oder in keinem. Aus dieser angeführten Hälfte muss sich nämlich die andre durch blosse Vertauschungen unter den Elementen 2, 3, 4 im zweiten und dritten Viertel obiger Tafel ergeben.

Hienach ist erkannt, dass für $n = 2$, 3 oder 4 unser Satz Geltung besitzt. Wir können daher den Beweis durch Schluss von n auf $n + 1$ antreten, und nehmen an, der Satz gelte bereits für eine gewisse Anzahl von $n - 1$ sowie auch von noch weniger Elementen (bis zu zweien herab), um darzuthun, dass er dann auch für n Elemente wird gelten müssen.

Zu dem Ende fassen wir den Fall in's Auge, wo das Element 1 in $h (= 0, 1, 2, \cdots n-2)$ von den $n-1$ Elementepaaren des Systems, in die es eingeht, *voran*steht, also in den $k = n-h-1 (= n-1, n-2, \cdots 1)$ übrigen *hintan*steht. Der Fall nämlich, wo es in allen $(h =) n-1$ Paaren voranstünde, (in $n-h-1=0$ solchen hintansteht), wäre jedenfalls ein solcher (mit Stern zu markirender), in welchem die Voraussetzung des Satzes nicht zutrifft.

Für die Elemente $1, 2, 3, \cdots 9, 0$, also $n = 10$, $n-1 = 9$, $\frac{n(n-1)}{2} = 45$, $2^{45} = 35\,184372\,088832$, und zwar $h = 5$, $n-h-1 = 4$ mögen die abstrakten Betrachtungen jeweils veranschaulicht werden. Hier sind etwa:

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16;\quad 71,\ 81,\ 91,\ 01 \,|$$

die vor dem ersten Striche stehenden neune von den 45 Elementepaaren, und hinter dem Striche haben wir uns $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, hier 36, Elementepaare zu denken.

Es bedeute $\varkappa$ irgend eines, sowie $\varkappa'$ irgend ein anderes der h *hinter* 1 stehenden Elemente, (hier 2, 3, 4, 5, 6) und ähnlich λ sowie λ' irgend eines der $n-h-1$ *vor* 1 stehenden (7, 8, 9, 0). So haben wir die Paare

$$1\varkappa \quad \text{und} \quad \lambda 1.$$

Nun ist klar, dass wenn hinter dem Striche ein Elementepaar $\varkappa\lambda$ steht, der Cyklus

$$1\varkappa,\ \varkappa\lambda,\ \lambda 1 \quad \text{oder} \quad 1\varkappa\lambda 1$$

vorliegen, unser Satz mithin als geltend erwiesen sein wird.

Zu beweisen haben wir ihn demnach nur noch für den Fall, wo *alle* aus einem $\varkappa$ und einem λ zusammengesetzten Elementepaare Kehrfolgen $\lambda\varkappa$ sind. Mit dieser Voraussetzung sind die $h(n-h-1)$ gleich 20 Elementepaare der

$$\text{„}\textit{ersten Matrize}\text{“:}\quad \begin{vmatrix} 72, & 73, & 74, & 75, & 76 \\ 82, & 83, & 84, & 85, & 86 \\ 92, & 93, & 94, & 95, & 96 \\ 02, & 03, & 04, & 05, & 06 \end{vmatrix}$$

vollkommen bestimmt; diese jedenfalls werden hinter dem Striche stehen, und können nur noch die $\frac{h(h-1)}{2}$ gleich 10 Kombinationen der h Elemente $\varkappa$ unter sich, sowie die $\frac{(n-h-1)(n-h-2)}{2}$ gleich 6 Kombinationen der $n-h-1 = k$ Elemente λ unter sich irgendwie (als Recht- *oder* Kehrfolgen) sich angesetzt finden — und zwar auf $2^{\frac{h(h-1)}{2}} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$ gleich $2^{16} = 65\,536$ verschiedene Arten.

In der That ist identisch:

$$\frac{n(n-1)}{2} = n-1 + h(n-h-1) + \frac{h(h-1)}{2} + \frac{(n-h-1)(n-h-2)}{2},$$

oder $n - h - 1 = k$, $n = h + k + 1$ eingesetzt:

$$\frac{(h+k+1)(h+k)}{2} = h + k + hk + \frac{h(h-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2},$$

und hier: $45 = 9 + 20 + 10 + 6$.

Die Auswahl der also weiterhin noch hinter den Strich tretenden Elementepaare hat man sich so getroffen zu denken, dass von den „Gegenpaaren" $\varkappa\varkappa'$ und $\varkappa'\varkappa$ resp. $\lambda\lambda'$ und $\lambda'\lambda$, die sich in den Matrizen, als da sind die

$$\text{„}\textit{zweite}\text{":} \quad \begin{vmatrix} \cdot & 23, & 24, & 25, & 26 \\ 32, & \cdot & 34, & 35, & 36 \\ 42, & 43, & \cdot & 45, & 46 \\ 52, & 53, & 54, & \cdot & 56 \\ 62, & 63, & 64, & 65, & \cdot \end{vmatrix} \qquad \text{und die „}\textit{dritte}\text{":} \quad \begin{vmatrix} \cdot & 78, & 79, & 70 \\ 87, & \cdot & 89, & 80 \\ 97, & 98, & \cdot & 90 \\ 07, & 08, & 09, & \cdot \end{vmatrix}$$

über die Diagonale symmetrisch gegenüberstehen, je immer nur eines genommen ist.

[Mit 1 — wäre leicht pedantisch zu zeigen — kann nun kein Cyklus beginnen. Man kann nämlich mittelst geeigneter Aushebung von Elementepaaren von jedem $1\varkappa$ allerdings zu jedem $1\varkappa'$ in der „zweiten" Matrize gelangen, und ebenso von jedem $\lambda 1$ zu jedem $\lambda' 1$ innerhalb der dritten — zwischen welchen beiden Matrizen, weil sie kein Element gemein haben, nie ein Anschluss möglich ist. Also müsste man sich behufs Herstellung eines Anschlusses der „ersten" Matrize bedienen, welche aber ein $1\varkappa$ mittelst ihres $\lambda\varkappa$ nicht mit einem $\lambda 1$ zu verbinden vermag.

Zwischen den Elementepaaren der zweiten Matrize sind solche Aushebungen möglich, bei denen ein Cyklus entsteht — wie 23, 34, 42, etc., und dergleichen mehr — aber auch solche Aushebungen sind möglich, bei denen keiner entsteht — wie z. B., wenn man alle Elementepaare, die oberhalb der Diagonale stehen, auswählte.

Der Beweis muss sich hiernach dahin zuspitzen, dass gezeigt wird, wie unter den Voraussetzungen des Satzes notwendig aus den Elementen λ der *dritten* Matrize sich Cyklen herstellen lassen, wie immer man auch die Elementepaare, jenen Voraussetzungen entsprechend, daselbst ausgewählt denken, sie „ausheben" mag. Und dies gelingt unschwer wie folgt.]

Es dürfen aus der dritten Matrize keinenfalles die Elementepaare sämtlich ausgehoben werden, die auf einer Zeile beisammenstehn; denn ist λ das in den Elementepaaren einer solchen Zeile voranstehende Element, so beginnen mit λ erstens das Elementepaar $\lambda 1$, zweitens die h Elementepaare $\lambda\varkappa$ der ersten Matrize und drittens die $k - 1 = n - h - 2$ Elementepaare $\lambda\lambda'$ der gedachten Zeile in unsrer dritten Matrize, sonach im Ganzen alle $1 + h + (n - h - 2) = n - 1$ Elementepaare, welche λ überhaupt enthalten — entgegen den Voraussetzungen unsres Satzes.

Nunmehr mögen wir von allem übrigen absehen und unsre Aufmerksamkeit ganz auf die dritte Matrize konzentriren. Wird wieder $n - h - 1 = k$ genannt, so sind von den $k(k-1)$ Elementepaaren $\lambda\lambda'$ in derselben $\frac{k(k-1)}{2}$ so auszuheben, dass alle Kombinationen ihrer k Elemente λ (oder 7, 8, 9, 0) je einmal vertreten sind, in den ausgehobenen jedoch keines der Elemente durchweg (überall wo es vorkommt) voransteht. Mithin treffen für diese ausgehobenen Elementepaare die Voraussetzungen unsres Satzes zu, und da $k < n$ ist, so gilt laut Annahme der Satz bereits für diese, d. h. es muss sich innerhalb der ausgehobnen Elementepaare ein Cyklus aus solchen herstellen lassen (q. e. d.).

Eine Ausnahme scheinen indes die Fälle $k = 1$ und $k = 2$ zu bilden, wo solcher Cyklus gar nicht existirte. Da dann aber auch die Voraussetzungen des Satzes nicht mehr realisirbar sein werden, so fällt der Fall sicher unter die Klasse der mit Stern zu markirenden Aushebungen oder Systeme.

Für $k = 2$ nämlich — wo noch $\cdots$ 18, dann aber 91, 01 vor dem Striche steht, reduzirt sich unsere dritte Matrize zu dem Schema:

$$\begin{vmatrix} \cdot 90 \\ 09 \cdot \end{vmatrix}$$

und muss man von den beiden Paaren 90 und 09 das eine haben, sonach gewiss die sämtlichen aus *einer* Zeile dieser Matrize: wählt man das erstere, so wird das Element 9, das letztere, so wird 0 durchweg voranstehen — im Einklang mit der schon allgemein geführten Überlegung.

Ebensowenig bildet der Fall $k = 1$ eine Ausnahme, wenn in ihm auch die bisherige Beweisführung sich ein wenig modifizirt. Hier sind die das Element 1 enthaltenden Paare, oder es stehn vor dem Striche: 12, 13, $\cdots$ 19; 01; eine „dritte“ Matrize existirt hier gar nicht, und die zweite reduzirt sich zu der einen Zeile: $|\,02,\ 03,\ \cdots\ 09\,|$, woraus bereits zu ersehen, dass jetzt das Element 0 durchweg voransteht — entgegen den Voraussetzungen des Satzes.

Der Satz ist also völlig bewiesen.

Da leicht zu sehen, dass ein Cyklus — wie 12, 23, 31 — wieder ein solcher wird, m. a. W. ein solcher bleibt (13, 32, 21), wenn alle Paare rückwärts gelesen werden, so steht natürlich dem Satze noch ein zweiter vom selben Wortlaut gegenüber, in welchem nur statt „voran-“ jetzt „hintan-“ gesagt ist; und dessen Geltung wird aus der des vorigen mitfolgen, indem man, wie angedeutet, rückwärts liest.

Die Frage, inwieweit die Sätze umkehrbar sind, sowie vielleicht von Elementepaaren auf Elementetripel etc. sich ausdehnen lassen, empfehlen wir dem Leser zu fernerer Prüfung.

Anhang 8.

Kempe's Zusammenhang des identischen Kalkuls mit der Geometrie der Lage.

Mit diesem Anhang gehe ich über das dem ersten Band beigegebene Inhaltsverzeichniss des zweiten Bandes hinaus, da die Arbeit des Herrn Kempe[3] erst seitdem hinzugekommen ist, und ich mir vorgenommen hatte, die Literatur vollständig zu berücksichtigen. Diese Arbeit, betitelt: *Über die Beziehung zwischen der logischen Theorie der Klassen und der geometrischen Theorie der Punkte*, ist so durchaus eigenartig und eröffnet so merkwürdige Ausblicke, dass sie nicht blos nebenher, etwa in der Schlussbetrachtung unserer letzten Vorlesung noch besprochen werden konnte, sondern dass vielmehr derselben ein besondres Kapitel gewidmet werden muss.

Es handelt sich um den Nachweis, dass und wie die „synthetische" oder „projektive" Geometrie, die „geometria situs" mittelst identischen Rechnens begründet werden kann. Aus solch inniger Verbindung zwischen zwei hochwichtigen und anscheinend völlig auseinander liegenden Forschungsgebieten entspringt einesteils zuletzt eine gewisse erweiterte Auffassung der geometria situs, während andernteils auch der identische Kalkul, auf ganz aparte Grundlagen gestellt, in neuem Lichte erscheint.

Wollten wir uns dem Gedankengang der Kempe'schen Arbeit völlig anschliessen, so bliebe uns bei der konzisen Darstellungsweise derselben wesentlich fast nur die Aufgabe getreuer Reproduktion bezw. Übersetzung. Behufs schnellerer Einführung in Kempe's Terminologie ziehe ich indessen vor, den Weg als einen Hinweg einzuschlagen, welchen Kempe von seinen originellen Betrachtungen aus sozusagen als Rückweg geht.

Die Theorie entspringt aus der Wahrnehmung einer weitgehenden Analogie gewisser zusammengesetzter Relationen unseres identischen Kalkuls mit der Beziehung der *Kollinearität* von Punkten (im Raume), d. h. mit ihrer etwa vorliegenden Eigenschaft, *zusammen in gerader Linie zu liegen*, und beruht auf dem Nachweise der Identität formaler Grundgesetze für beiderlei Relationen — bei Zugrundelegung einer geeigneten Bezeichnung.

Wir verstehen unter den Buchstaben $a, b, c, \cdots$ wie früher Gebiete einer gewöhnlichen Mannigfaltigkeit, oder etwa auch Klassen, nennen dieselben aber nun „Elemente“ (der Rechnung) — „entities“ of the system —.

α) Eine zusammengesetzte Operation des identischen Kalkuls, welche *drei* Elemente symmetrisch verknüpft, möge mittelst eckiger Klammern durch das Symbol $[abc]$ dargestellt und wie folgt definirt werden:

$$\text{Я 50.} \qquad [abc] = ab + ac + bc = (a+b)(a+c)(b+c).$$

Die Chiffren der Kempe'schen Sätze — „sections“ oder „paragraphs“ — citire ich mit Я. Dieselben gehen bis 158.

Dass nämlich die beiden letzten Ausdrücke übereinstimmen, wurde in § 18, φ), Bd. 1 S. 383 nachgewiesen. Unsere Operation ist also nicht nur, wie gesagt, *symmetrisch*, so dass

$$\text{Я 13.} \qquad [abc] = [acb] = [bca] = [bac] = [cab] = [cba]$$

und die Ordnung der Elemente stets unwesentlich („immaterial“) ist, sondern sie ist auch *zu sich selbst dual.*

Und ferner *begreift sie die beiden direkten Operationen*, die identische Multiplikation sowie die Addition, *als Spezialfälle unter sich*, indem ersichtlichermassen ist:

$$\text{Я 40.} \qquad [ab0] = ab \qquad\qquad [ab1] = a + b \qquad \text{Я 42.}$$

β) Von dieser Operation die formalen Eigenschaften nachzuweisen:

$$\text{Я 14.} \qquad [aba] = a \quad \text{oder} \quad [abb] = b,$$

$$\text{Я 18.} \qquad [ab[acd]] = [ad[abc]] = [ac[abd]],$$

$$\text{Я 16.} \qquad [[abc][abd]e] = [ab[cde]] = [[abc][abd][abe]], \qquad \text{Я 17.}$$

$$\text{Я 19.} \qquad [ab[abc]] = [abc],$$

wäre nur eine leichte Rechenübung. —

Ebenso leuchten unmittelbar ein die Sätze:

$$\text{Я 22.} \qquad [aab_1] = a, \qquad\qquad [aba_1] = b \qquad \text{Я 36.}$$

$$\text{Я 37.} \qquad [abc]_1 = [a_1 b_1 c_1]$$

$$\text{Я 25.} \qquad ([abc_1] = c) = (a = b = c).$$

γ) Kempe bezeichnet auch mittelst *geschweifter* Klammern:

$$\text{Я 35.} \qquad [abc_1] = \{ab,\ c\}$$

und nennt diesen Ausdruck eine „unsymmetrical resultant“ im Gegensatz zur „symmetrical resultant“ $[abc]$. Mit dieser Verwendung des Namens „Resultante“ vermag ich mich nicht zu befreunden, da sie gegen den allgemeinen Gebrauch verstösst, gemäss welchem wir unter diesem Namen eine als Eliminationsergebniss gewonnene *Relation* verstehen, nicht aber einen Ausdruck, der eine Klasse (Element, entity) ist. Ich werde, falls ich des Namens bedarf, kurzweg *„Erzeugniss“* sagen.

Abgesehen hievon, sowie von unwesentlichen Äusserlichkeiten, — wie die, dass Herr Kempe die Negation a_1 von a mit a' bezeichnet, die identische Null (zero) mit z, die Eins also mit z', die Gleichung $(ab = 0)$ mit $(a * b)$, die Subsumtion $a \Subset b$ aber, gleichwie Robert Grassmann, mit $a < b$, — während doch das Subsumtionszeichen $\Subset$ dem Zeichen $\leqq$ entspricht, — abgesehen hievon kann ich mich fast durchweg Kempe's Bezeichnungs- und Benennungsweisen anschliessen.

δ) Der Begriff des „unsymmetrischen Erzeugnisses“ $\{ab,\ c\}$ wird fernerhin unter $\mathfrak{K}$ 28 von dreien auf beliebig viele Operationsglieder ausgedehnt, auf Grund der Wahrnehmung, welche wesentlich auf obigen Satz $\mathfrak{K}$ 18 hinausläuft, dass

$\mathfrak{K}$ 28. $$\{\{ab,\ d\}c,\ d\} = \{\{ac,\ d\}b,\ d\} = \{\{bc,\ d\}a,\ d\},$$

wonach der übereinstimmende Wert dieser drei Ausdrücke denn mit

$$\{abc,\ d\}$$

bezeichnet werden mag, und in diesem Symbol die Reihenfolge der drei Buchstaben a, b, c belanglos sein wird. Der Wert des Ausdrucks ist

$$\{abc,\ d\} = abc + (a + b + c)d_1 = abcd + (a + b + c)d_1.$$

Ferner mögen wir definiren

$$\{abcd,\ e\} = \{\{abc,\ e\}d,\ e\} = abcd + (a + b + c + d)e_1,$$

wo wieder in $\{abcd,\ e\}$ die Ordnung der vier Elemente a, b, c, d gleichgültig sein wird, — und allgemein rekurrirend den in Bezug auf $a, b, \ldots v, w, x, y$ symmetrischen Ausdruck

$$\begin{aligned}\{ab\ldots wxy,\ z\} &= \{\{ab\ldots wx,\ z\}y,\ z\} = \\ &= ab\ldots wxy + (a + b + \ldots + x + y)z_1.\end{aligned}$$

Der hier vollzogene Schluss von n auf $n + 1$ Elemente, — der mir bei Herrn Kempe nicht genügend markirt zu sein scheint, — ist folgender:

Nachdem die Vertauschbarkeit der drei Elemente a, b, c in $\{abc,\ z\}$ nach $\mathfrak{K}$ 28

$$\{\{ab,\ z\}c,\ z\} = \{\{ac,\ z\}b,\ z\} = \{abc,\ z\}$$

erkannt ist, möge dieselbe nun vorausgesetzt werden für 4, 5, 6, … $n - 1$, bis n Elemente $a, b, \ldots v, w, x$, z. B.

$$\{\{ab\ldots v,\ z\}w,\ z\} = \{\{ab\ldots w,\ z\}v,\ z\} = \ldots = \{ab\ldots vw,\ z\} = U,$$

wo das Zeichen U nur zur Abkürzung dient, und

$$\{Ux,\ z\} = \{\{ab\ldots w,\ z\}x,\ z\} = \{ab\ldots wx,\ z\}$$

wird. Dann hat man auch für ein weiteres $(n+1)$tes Element y noch bei nur n Elementen vor dem Komma —

$$\{Uy,\ z\} = \{\{ab\ldots w,\ z\}y,\ z\} = \{ab\ldots wy,\ z\},$$

und nach ℜ 28

$$\{\{Ux,\ z\}y,\ z\} = \{\{Uy,\ z\}x,\ z\} = \{Uxy,\ z\},$$

oder

$$\{\{ab\ldots wx,\ z\}y,\ z\} = \{\{ab\ldots wy,\ z\}x,\ z\} \qquad \text{q. e. d.}$$

Im Gegensatz zu dem „unsymmetrischen" scheint sich das „symmetrische Erzeugniss" *nicht* von drei Elementen auf beliebig viele als solches begrifflich ausdehnen zu lassen. Vergl. schon Bd. 1, S. 383.

ε) Die Bedeutung des symmetrischen Erzeugnisses $[abc]$ versinnlicht für die Kreise a, b, c die Figur 34, in welcher dasselbe schraffirt

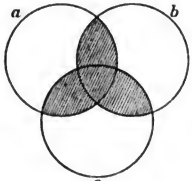

Fig. 34.

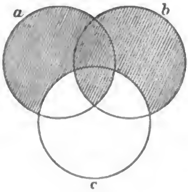

Fig. 35.

erscheint; ebenso die des unsymmetrischen Erzeugnisses $\{ab,\ c\}$ oder $[abc_1]$ die Figur 35; und für vier Elemente $\{abc,\ d\}$ die Figur 36.

ζ) Die Gleichung

$$abc + a_1b_1c_1 = 0$$

ist eine bemerkenswerte, ebenfalls *symmetrische* Relation zwischen *drei* Elementen, — der wir schon bei den „symmetrisch-allgemeinen Lösungen" in § 24 (Bd. 1, S. 512) sowie am Schluss des Anhangs 6 eingehende Betrachtungen gewidmet. Sie möge nach Kempe dargestellt werden durch das zwischen Punkte · gesetzte Symbol abc:

$$(\cdot abc\cdot) = (abc + a_1b_1c_1 = 0).$$

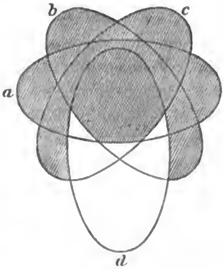

Fig. 36.

Statt: es gilt (oder „wir haben") $\cdot abc\cdot$, wollen wir auch sagen: a, b und c bilden eine *„obverse"* Triade.

η) Ersetzt man in dieser das Element c durch c_1, so verliert sie die Symmetrie in Hinsicht der drei Elemente a, b, c und bleibt nur noch symmetrisch bezüglich der beiden Elemente a und b. Die so gewonnene Relation soll gemäss Kempe durch ein neues Symbol $ab \cdot c$

$$(ab \cdot c) = (\cdot abc_1 \cdot)$$

dargestellt werden, — welches wir im Bedarfsfalle auch in runde Klammern schliessen.

Die Relation lässt sich auch in eine Doppelsubsumtion mit dem Mittelgliede c umschreiben:

$$(\cdot abc_1 \cdot) = (abc_1 + a_1 b_1 c = 0) = (ab ⋹ c ⋹ a + b) = (ab \cdot c) = (ba \cdot c).$$

Zur Veranschaulichung der Relation dient die Figur 37, $\mathfrak{K}$ 105.

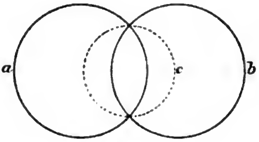

Fig. 37.

Im Gegensatz zu den oben betrachteten *Klassen*symbolen oder „Elementen" $[abc]$ und $\{ab, c\}$ usw. werden also sowol $\cdot abc \cdot$ als $ab \cdot c$ *Aussagen*symbole sein.

Herr Kempe pflegt die Relation $ab \cdot c$ zu umschreiben mit den Worten „we have $ab \cdot c$", oder mit dem Satze: a, b und c bilden eine *„lineare" Triade* mit a und b als „even members" und c als dem „odd member", — wogegen unseres Erachtens passender umgekehrt a und b als die ungeraden (oder äusseren, extremen) und c als das gerade (innere, Zwischen-) Glied hingestellt würden.

Diese Relation $ab \cdot c$ zwischen den Elementen einer linearen Triade ist nun der Ausgangspunkt der Theorie Kempe's. Er bildet es zu einer Virtuosität aus, ganz und gar in solchen Relationen zu denken und, indem er für sie eine Anzahl von Gesetzen axiomatisch aufstellt, mittelst linearer Triadenbildung alles Andere zu definiren und zu beweisen. Die Auswahl gerade dieser Relation erscheint als ein geniales Aperçu, welches ahnen lässt, dass der identische Kalkul eine Fundgrube auch noch für andere Theorien verschiedensten Charakters bilden wird.

ϑ) Es sind nun zunächst Herrn Kempe's formale „Gesetze" von unserem Ausgangspunkte aus zu beweisen. In der Zeichensprache lauten diese Gesetze übersichtlich wie folgt:

„Law I". $\quad (ap \cdot b)(cp \cdot d) ⋹ \sum_q (ad \cdot q)(bc \cdot q)$

„Law II". $\quad (ab \cdot p)(cp \cdot d) ⋹ \sum_q (aq \cdot d)(bc \cdot q)$

„Law III". $(ab \cdot c)(a = b) \Subset (a = b = c),$

oder $(aa \cdot b) \Subset (a = b)$

„Law IV". $(a = b) \Subset \prod_c (ac \cdot b)(bc \cdot a),$

oder kürzer $(ab \cdot a) = 1,$

— wozu zu bemerken ist, dass in den beiden letzten Gesetzen das Subsumtionszeichen als ein auch umgekehrt gültiges in ein Gleichheitszeichen verwandelt werden dürfte.

ι) Das erste Gesetz versichert, dass bei gleichzeitigem Bestehen der beiden linearen Triaden $ap \cdot b$ und $cp \cdot d$ es immer ein Element q geben wird derart, dass auch $ad \cdot q$ *und* $bc \cdot q$ als lineare Triaden bestehen.

Der Beweis dieses Gesetzes könnte geleistet werden, indem wir unter der Voraussetzung, welche ausführlich geschrieben lautet:

$$(apb_1 + a_1p_1b = 0)\,(cpd_1 + c_1p_1d = 0)$$

oder wegen Th. 24_+)

$$(ab_1 + cd_1)\,p + (a_1b + c_1d)\,p_1 = 0,$$

ein Element q angäben, welches auch die Behauptung

$$(adq_1 + a_1d_1q = 0)\,(bcq_1 + b_1c_1q = 0)$$

oder

$$(a_1d_1 + b_1c_1)\,q + (ad + bc)\,q_1 = 0$$

nachweislich erfüllt.

Ein solches gibt Herr Kempe an in der Gestalt:

$$q = (ad + bc)\,u + (a + d)\,(b + c)\,u_1,$$

worin u ein arbiträres Element vorstellt, und macht die Probe mittelst Einsetzung des Wertes von q in die Thesis unter Berücksichtigung der Relation zwischen a, b, c, d, welche aus der Hypothesis durch Elimination von p fließt. Dieses Element q ist aber nichts anderes, als die regelrechte Auflösung der behaupteten Gleichung nach eben dieser Unbekannten, und erfüllt diese Gleichung also sicher, wofern letztere nur überhaupt auflösbar ist. Wir können darum Kempe's Rechnung hier sparen und brauchen blos das Bestehen dieser Auflösbarkeit, unserer „Valenzbedingung" für q, auf Grund der Prämisse nachzusehen.

Am besten beschränkt man sich darauf, zu zeigen, wie die Prämissengleichung die Existenz einer Wurzel q der behaupteten Gleichung garantirt, das heisst: zu zeigen, dass die Resultante der Elimination von p aus jener nachsichzieht die Resultante der Elimination von q aus dieser. Da aber in der That Gleichheit der beiden Resultanten-Polynome:

$$(ab_1 + cd_1)\,(a_1b + c_1d) = (a_1d_1 + b_1c_1)\,(ad + bc):$$

als analytische Formel besteht, indem die beiden Seiten durch Ausmultipliziren übereinstimmend auf

$$ab_1c_1d + a_1bcd_1$$

hinauslaufen, so wird mit der einen Seite auch zugleich die andere verschwinden, q. e. d.

$\varkappa$) Wir fragen noch, — Kempe's Theorie vervollständigend, — wann das dem Law I (oder dann auch dem Law II) genügende q ein eindeutig bestimmtes Element (oder Klassensymbol) sein wird, m. a. W. unter welchen Bedingungen es gerade nur *ein* solches q geben wird.

Die Antwort ist aus Bd. 1 S. 463 zu entnehmen, und lautet darnach wie folgt: nur *ein* q wird es geben, falls die Koeffizienten von q und q_1 Negationen von einander sind, also (für Law I) falls

$$a_1d_1 + b_1c_1 = (ad + bc)_1,$$

(somit jeder von beiden ein solcher Ausdruck ist, dessen Negation dadurch entsteht, dass man die ihn zusammensetzenden einfachen Symbole durchweg einzeln negirt.) Und der fragliche Wert von q ist dann:

$$q = ad + bc.$$

Bringt man obige Bedingung hiefür rechts auf 0, so wird sie lauten:

$$(ad + bc)(a_1d_1 + b_1c_1) + (a + d)(b + c)(a_1 + d_1)(b_1 + c_1) = 0$$

oder

$$abc_1d_1 + a_1b_1cd + acb_1d_1 + a_1c_1bd + adb_1c_1 + a_1d_1bc = 0;$$

in einer weiter unten zu begründenden Symbolik Kempe's wird dieselbe sich deshalb darstellen als das Produkt von drei Aussagen:

$$(ab \cdot cd)(ac \cdot bd)(ad \cdot bc),$$

deren letzte $(ad \cdot bc)$ allein durch die Prämissen des Law I als gültig garantirt war.

Hiezu folgen weitere Ausführungen am Schlusse dieses Anhanges, S. 589 ff.

λ) Behufs Beweises von Law II ist ebenso zu zeigen, dass unter der Voraussetzung

$$(abp_1 + a_1b_1p = 0)(cpd_1 + c_1p_1d = 0)$$

oder

$$(a_1b_1 + cd_1)p + (ab + c_1d)p_1 = 0$$

auch die Behauptung

$$(aqd_1 + a_1q_1d = 0)(bcq_1 + b_1c_1q = 0)$$

oder

$$(ad_1 + b_1c_1)q + (a_1d + bc)q_1 = 0$$

durch gewisse q erfüllbar ist.

Es folgt dies in der That aus

$$(a_1 b_1 + c d_1)\,(a b + c_1 d) = (a d_1 + b_1 c_1)\,(a_1 d + b c),$$

worin beide Seiten auf

$$a b c d_1 + a_1 b_1 c_1 d$$

hinauslaufen, und das Verschwinden der linken Seite also auch das der rechten nach sich ziehen wird.

Die fraglichen q erhält man hienach leicht durch Auflösen der vorhergehenden Gleichung nach q, oder auch durch Vertauschung von a mit a_1 in der Lösung der für Law I behandelten Gleichung.

μ) Aus den Beweisen dieser beiden Gesetze geht auf den ersten Blick hervor, dass ebenso auch umgekehrt gilt:

$$(ad \cdot q)\,(bc \cdot q) \Subset \sum_p (ap \cdot b)\,(cp \cdot d), \quad (aq \cdot d)(bc \cdot q) \Subset \sum_p (ab \cdot p)\,(cp \cdot d).$$

Die letztere Umkehrung deckt sich, wie Vertauschung von a mit c und p mit q zeigt, mit Law II selber. Dagegen stellt die erstere, (durch Vertauschung von b mit d und von p mit q) geschrieben als

$$(ab \cdot p)\,(cd \cdot p) \Subset \sum_q (aq \cdot d)\,(cq \cdot b)$$

ein den beiden vorigen analoges „Law" (Gesetz) vor, welches Herr Kempe nicht erwähnt.

Wie ebenfalls aus dem Nachweis sofort erhellt, würden übrigens diese Gesetze alle drei sich auch symmetrischer als Gleichungen schreiben lassen:

Gesetz I. $\quad \sum_p (ap \cdot b)\,(cp \cdot d) = \sum_q (ad \cdot q)\,(bc \cdot q)$

Gesetz II. $\quad \sum_p (ab \cdot p)\,(cp \cdot d) = \sum_q (aq \cdot d)\,(bc \cdot q).$

(Vergleiche unten Seite 587 f.)

ν) Der Beweis zu Law III ergibt sich unmittelbar, indem man in der Definition von $ab \cdot c$ von der Voraussetzung $a = b$ Gebrauch macht, wodurch sie übergeht in $a \Subset c \Subset a$ oder $c = a$.

Endlich der Beweis von Law IV ist ebenso naheliegend, indem für $a = b$ bei beliebigem c

$$(ac \cdot b) = (ac \cdot a) = (bc \cdot a) = (ac \Subset a \Subset a + c) = 1$$

wird, nämlich nach Th. 6) identisch gilt.

o) Sind in einer obversen Triade $\cdot abc \cdot$ zwei Elemente einander gleich, z. B. $b = c$, so kommt die Aussage auf die mit $\cdot ab \cdot$ zu bezeichnende $(\cdot ab \cdot) = (\cdot abb \cdot) = (\cdot aab \cdot) = (ab + a_1 b_1 = 0) = (a = b_1) = (b = a_1)$

hinaus. *Alle drei Elemente können nicht einander gleich sein*, weil die Aussage $a = a_1$ absurd ist, — $\mathfrak{K}$ 33, 77. Die obverse Triade verhält sich also in dieser Hinsicht ebenso, wie schon das *„obverse Paar“* (*Dyade*) a, a_1; — so nennt Kempe ein Element und seine Negation; — denn haben wir damit die obverse Dyade $\cdot ab \cdot$ definirt als ein Elementepaar a, b, für welches $b = a_1$ gilt, so dass also in der That stets $\cdot aa_1 \cdot$ identisch ist, so kann auch hier b nicht gleich a sein, wenn $\cdot ab \cdot$ gilt.

Die *„obverse Monade“* $\cdot a \cdot$, d. i. die Aussage:

$$(\cdot a \cdot) = (a + a_1 = 0) = (1 = 0)$$

wäre hienach ein Symbol der Absurdität.

Die Wahrnehmung obiger Analogie bildete das Motiv zu Kempe's Benennung *obverser Elementesysteme*. Den Begriff nämlich auf beliebig viele Elemente auszudehnen, liegt nahe:

π) So soll gesagt werden, die Elemente a, b, c, d bildeten eine *obverse Tetrade*, oder es gelte $\cdot abcd \cdot$, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$(\cdot abcd \cdot), = (abcd + a_1 b_1 c_1 d_1 = 0)$$

— $\mathfrak{K}$ 79; — diese reduzirt sich auf eine obverse Triade, wenn zwei von den vier Elementen zusammenfallen, z. B. $d = c$, und auf eine obverse Dyade $\cdot ab \cdot$, wenn $d = c = b$ ist. Alle vier Elemente aber können konsistenterweise nicht in eines zusammenfallen.

Allgemein definiren wir mit

$\mathfrak{K}$ 80. $$(\cdot abc \ldots p \cdot) = (abc \ldots p + a_1 b_1 c_1 \ldots p_1 = 0)$$

ein *„obverses System* von irgendwieviel Elementen“ („obverse collection“) und haben neben der Symmetrie desselben in Hinsicht seiner sämtlichen Elemente augenscheinlich

$\mathfrak{K}$ 81. $$(\cdot abc \ldots p \cdot) = (\cdot a_1 b_1 c_1 \ldots p_1 \cdot).$$

ϱ) Stellt P die Elementezusammenstellung $abc \ldots p$ vor, so gilt für ein beliebiges weiteres Element z, wie leicht zu sehen:

$$(\cdot P \cdot) \Subset (\cdot Pz \cdot) \quad \text{sowie} \quad (\cdot Pz \cdot)(\cdot Pz_1 \cdot) \Subset (\cdot P \cdot),$$

zwei Sätze („Law A und B“ von $\mathfrak{K}$ 82), die sich in den einen zusammenziehen lassen:

$\mathfrak{K}$ 82. $$(\cdot Pz \cdot)(\cdot Pz_1 \cdot) = (\cdot P \cdot).$$

σ) Die analoge Begriffserweiterung auf irgendwieviel Elemente soll nun auch für die *lineare* Triade vollzogen werden, und zwar soll das Ergebniss — aus gegen Ende hervortretenden Gründen — ein *flaches* System von Elementen („flat collection“) genannt werden.

Sind $a, b, \ldots m$ und $p, q, \ldots x$ irgendwieviel Elemente, so soll in der Gleichung

$$(ab \ldots m \cdot pq \ldots x) = (ab \ldots mp_1 q_1 \ldots x_1 + a_1 b_1 \ldots m_1 pq \ldots x = 0)$$

das Symbol linkerhand uns die Aussage rechts vertreten; und wenn letztere erfüllt ist, soll gesagt werden, die im ersteren vorkommenden Elemente bilden ein *„flaches System"*.

Bei einem solchen werden zwei Elemente unter sich vertauschbar sein, wenn sie beide vor oder beide hinter dem erhöhten Punkt stehen. Auch können die beiden durch den Punkt getrennten Elementegruppen ihre Stellung wechseln. Und ferner kann man für alle Elemente durchweg ihre Negationen setzen; bilden erstere ein flaches System, so auch letztere.

Die Elemente der einen Gruppe (vor dem Punkt) eines flachen Systems bilden mit den negirten Elementen der andern (hinter dem Punkt) ein obverses System

$$(ab \ldots m \cdot pq \ldots x) = (\cdot ab \ldots mp_1 q_1 \ldots x_1 \cdot) = (\cdot a_1 b_1 \ldots m_1 pq \ldots x \cdot).$$

τ) Es entsprechen sich die Identitäten (vergl. o)

$$(\cdot ab \cdot) = (a = b_1) \qquad (a \cdot b) = (a = b), \qquad \mathfrak{K}\ 89.$$

während $(a \cdot a_1) = (\cdot a \cdot)$ absurd ist. Dagegen gilt identisch für beliebige Elemente z und a die lineare Triade $zz_1 \cdot a$, $\mathfrak{K}$ 30, welche sich zuletzt auf das obverse Paar $\cdot zz_1 \cdot$ reduzirt:

$$(zz_1 \cdot a) = (zz_1 a_1 + zz_1 a = zz_1 = 0) = (\cdot zz_1 \cdot) = 1.$$

Und die unter ϱ) aufgestellte Identität $\mathfrak{K}$ 82

$$(\cdot Pz \cdot)(\cdot Pz_1 \cdot) = (\cdot P \cdot) = (\cdot Pz \cdot)(P \cdot z)$$

lässt sich jetzt dahin erweitern, dass wenn mit P und R zwei Elementezusammenstellungen bezeichnet sind, welche kein gemeinsames Element besitzen, und mit q ein weiteres weder in P noch in R vorkommendes Element,

$$(P \cdot R) = (Pq \cdot R)(P \cdot qR),$$

$\mathfrak{K}$ 87. $\quad (P \cdot R) \Subset (Pq \cdot R), \quad (P \cdot R) \Subset (P \cdot qR).$

Einfache Fälle sind:

$\mathfrak{K}$ 7. $\quad (a \cdot c) = (ac_1 + a_1 c = abc_1 + a_1 b_1 c + ab_1 c_1 + a_1 bc = 0) =$

$$= (ab \cdot c)(a \cdot bc),$$

$$(ab \cdot e) = (abc \cdot e)(ab \cdot ce) = (abcd \cdot e)(abc \cdot de)(abd \cdot ce)(ab \cdot cde),$$

$$(a \cdot e) = (ab \cdot e)(a \cdot be) = (abc \cdot e)(ab \cdot ce)(ac \cdot be)(a \cdot bce) =$$

$$= (abcd \cdot e)(abc \cdot de)(abd \cdot ce)(ab \cdot cde)(acd \cdot be)(ac \cdot bde)(ad \cdot bce)(a \cdot bcde).$$

$$= (4 \cdot e)(3 \cdot de)(3 . ce)(3 \cdot be)(ab \cdot 3)(ac \cdot 3)(ad \cdot 3)(a \cdot 4),$$

usw., wobei in der letzten Zeile die Elemente einerseits des Trennungspunktes nur durch ihre Anzahl angedeutet sind, — eine Abkürzung, die jedenfalls dann stets ohne weiteres anwendbar ist, wenn die ersten aufeinanderfolgenden Buchstaben des Alphabets von a an als Elementezeichen genommen sind. — Man sieht, dass eine derartige Zerlegung eines flachen Systems in ein Produkt aus ebensolchen mit mehr Gliedern auf die „Entwicklung" des Polynoms einer (rechts auf Null gebrachten) Gleichung nach einem oder mehreren nicht darin vorkommenden Symbolen hinauskommt. — In den Faktoren, z. B. von $ab\cdot e$, erscheinen die durch den Punkt getrennten Elemente des Produkts $ab\cdot e$ überall ebenfalls getrennt, während die übrigen neu hereinkommenden Elemente in jeder möglichen Verteilung vor und hinter dem Punkt auftreten.

v) Wenn a, b, c und d ein flaches System bilden, so muss dieses offenbar einem der beiden folgenden Typen von vier resp. drei Formen angehören (𝔎 86):

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot bcd \\ b\cdot acd \\ c\cdot abd \\ d\cdot abc \end{array}\right. \text{ erster Typus,} \qquad \left.\begin{array}{l} ab\cdot cd \\ ac\cdot bd \\ ad\cdot bc \end{array}\right. \text{ zweiter Typus.}$$

Ebenso sind alle möglichen Formen eines fünfgliedrigen flachen Systems aus den Elementen a, b, c, d, e enthalten unter zwei Typen von fünf und von zehn Formen: (mit der oben erläuterten Abkürzung)

$$a\cdot 4 \quad b\cdot 4 \quad c\cdot 4 \quad d\cdot 4 \quad e\cdot 4 \quad \text{erster Typus,}$$

$$\left.\begin{array}{cccccc} & ab\cdot 3 & ac\cdot 3 & ad\cdot 3 & ae\cdot 3 & \\ bc\cdot 3 & bd\cdot 3 & be\cdot 3 & cd\cdot 3 & ce\cdot 3 & de\cdot 3 \end{array}\right\} \text{zweiter Typus.}$$

Ähnlich bei mehr Elementen.

φ) Durch erhöhte Punkte zwischen je zweien von irgendwieviel Elementen soll angedeutet werden, dass diese Elemente ein flaches System bilden, ohne dass zugleich bekannt sein soll, welche von den möglichen Formen diesem flachen Systeme zukommt, oder welche Elemente vor, welche hinter den Trennungspunkt treten. So ist also in

$$(a\cdot b\cdot c) = (ab\cdot c) + (ac\cdot b) + (bc\cdot a)$$

das Symbol links aussagenrechnerisch definirt als die Alternative zwischen den drei Aussagen rechts.

Trifft diese Alternative zu, so soll gesagt werden, die Elemente a, b, c seien *kollinear* oder *lägen in gerader Linie*, bildeten ein *geradliniges System*.

Analog definiren wir

$$(a\cdot b\cdot c\cdot d) = (a\cdot 3) + (b\cdot 3) + (c\cdot 3) + (d\cdot 3) + (ab\cdot 2) + (ac\cdot 2) + (ad\cdot 2)$$

und sagen, wenn die Alternative zutrifft, die Elemente a, b, c, d seien *koplanar*, *lägen in einer Ebene* oder bildeten ein *ebenes System*.

Und so weiter für noch mehr Elemente, indem man das System bei fünf Elementen ein *räumliches* (für den gewöhnlichen „flachen" oder Euklidischen Raum von drei Dimensionen), bei n Elementen eine *flache Mannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen* nennen wird.

Aus τ), $\mathfrak{K}$ 87 ergibt sich hier z. B.

$\mathfrak{K}$ 88. $$(a \cdot b \cdot c) \mathrel{=\!\!\!\in} (a \cdot b \cdot c \cdot d)$$

für jedes beliebige zu a, b, c hinzutretende Element d.

χ) Systeme, die entweder obverse oder flache sind, nennt Kempe ($\mathfrak{K}$ 90) endlich *„bedingte Systeme"* („restricted collections"), wendet dafür die wie folgt definirten Symbole an:

$\mathfrak{K}$ 91, 92. $$({}^{\cdot}a \cdot b^{\cdot}) = (a \cdot b) + ({}^{\cdot}ab^{\cdot}), = (a = b) + (a = b_1)$$
$\mathfrak{K}$ 91, 93. $$({}^{\cdot}a \cdot b \cdot c^{\cdot}) = (a \cdot b \cdot c) + ({}^{\cdot}abc^{\cdot})$$
$\mathfrak{K}$ 91. $$({}^{\cdot}a \cdot b \cdot c \cdot d^{\cdot}) = (a \cdot b \cdot c \cdot d) + ({}^{\cdot}abcd^{\cdot}),$$

usw., und hebt hervor, dass man einem solchen Symbole noch ein beliebiges Element (mit erhöhtem Schlusspunkt) zufügen darf, z. B.

$\mathfrak{K}$ 94. $$({}^{\cdot}a \cdot b \cdot c \cdot d^{\cdot}) \mathrel{=\!\!\!\in} ({}^{\cdot}a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot z^{\cdot}),$$

sowie $\mathfrak{K}$ 95, dass man in einem bedingten System irgend welche Elemente durch ihre Negationen ersetzen darf und stets ein bedingtes System behalten wird.

Damit sind wir vom identischen Kalkul aus mit geringster Mühe in die Symbolik Kempe's eingedrungen. Es erübrigt nunmehr, seinen Gedankengang unter Benutzung dieser Symbolik darzulegen, um hierauf zur Anwendung auf die projektive Geometrie überzugehen.*)

Es wird zunächst die lineare Triade $ab \cdot c$ definirt lediglich als Zusammenstellung dreier Elemente, symmetrisch bezüglich zweier a und b, der „geraden" Glieder, während das dritte c das „ungerade" heisst. Alle formalen Eigenschaften dieser linearen Triaden und auch aller anderen Beziehungen und Ausdrücke, welche wir oben mittelst des identischen Kalkuls definirt und untersucht haben, werden dann ausschliesslich gegründet auf die axiomatisch an die Spitze gestellten Grundgesetze oder Laws I bis IV, welche oben unter ϑ) erläutert sind, (nebst noch zwei weiteren später zu erwähnenden).

*) Mit dieser Ankündigung bricht das Schröder'sche Manuskript ab. Es folgen hier ergänzende Ausführungen des Herausgebers.

Während diese vier ersten Grundgesetze festsetzen, was aus der Übereinstimmung zweier Elemente zwischen zwei linearen Triaden, bezw. innerhalb einer einzigen zu schliessen ist, werden hieraus zunächst die Ergebnisse aus zwei und drei Triaden mit mehr als einem gemeinsamen Element hergeleitet:

Я 7.	$(ac \cdot b)(bc \cdot a) = (a = b)$	(vergl. oben τ)
Я 8.	$(ab \cdot c)(bc \cdot d) = (ab \cdot d)(ad \cdot c)$	
Я 9.	$(ab \cdot c)(ab \cdot d)(cd \cdot e) \Subset (ab \cdot e)$	
Я 10.	$(ab \cdot d)(ac \cdot e)(de \cdot b) \Subset (cd \cdot b)$	
Я 11.	$(ab \cdot d)(ac \cdot d)(bc \cdot e) \Subset (ae \cdot d)$.	

Zur Bestätigung dieser Sätze wird man wol am einfachsten, ähnlich wie schon oben in τ) für Я 7, jede Triade nach allen im Satz vorkommenden Elementen gemäss τ) entwickeln, wonach man z. B in Я 8 links und rechts des Gleichheitszeichens dieselben vier Entwicklungsfaktoren

$$(abd \cdot c)(ab \cdot cd)(abc \cdot d)(ad \cdot bc)$$

erhält, während — für Я 9 — von den vier Entwicklungsfaktoren des Subsumtionsprädikats

$$(ab \cdot e) = (4 \cdot e)(3 \cdot ce)(3 \cdot de)(ab \cdot 3)$$

offenbar jeder in der Entwicklung wenigstens einer der drei Subjekt-Triaden vorkommt:

$$(ab \cdot c) \Subset (3 \cdot ce)(ab \cdot 3), \quad (ab \cdot d) \Subset (3 \cdot de)(ab \cdot 3), \quad (cd \cdot e) \Subset (4 \cdot e);$$

usw.

Diese fünf Theoreme Я 7—11 nebst den Voraussetzungen Law I—IV genügen nun zum Nachweis folgender Thatsachen: Ein Element x ist vermöge des Zusammenbestehens der drei linearen Triaden $ab \cdot x$, $bc \cdot x$, $ca \cdot x$ in eindeutig bestimmter Weise abhängig von a, b und c, und zwar hat diese Funktion x gerade diejenigen Eigenschaften, welche wir unter α) und β) dem Ausdruck $ab + bc + ca$, dem „symmetrischen Erzeugniss" $[abc]$ zuzuschreiben hatten (Я 12—19). Desgleichen wird sodann eine andere Funktion y von a, b, c, das „unsymmetrische Triaden-Erzeugniss" $y = \{ab, c\}$, durch die gleichzeitig bestehenden Triaden $ab \cdot y$, $cy \cdot a$, $cy \cdot b$ definirt und diskutirt.

Bestätigend rechnet man leicht nach:

$$\begin{aligned}(ab \cdot x)(bc \cdot x)(ca \cdot x) &= \{(a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1)x + (ab + bc + ca)x_1 = 0\} \\ &= \{[abc]_1 x + [abc] x_1 = 0\},\end{aligned}$$

worin die Koeffizienten von x und x_1 Negationen (oder „obvers", vergl. oben o)) zu einander sind; es folgt daher (nach Bd. 1, Seite 463)

$$x = [abc] = ab + bc + ca. \qquad \text{Usw.}$$

Das unsymmetrische Erzeugniss, begrifflich ausgedehnt auf beliebig viele Argumente wie oben in δ), dient nunmehr auch zur Einführung der Negation eines Elementes z, des „obversen“ z_1 zu z, und zwar, wenn unter $a, b, c, \cdots y, z$ *alle* Elemente des Systems oder Denkbereiches verstanden werden, worunter z ein beliebiges, mittelst der Definition

$$z_1 = \{abc \ldots yz,\ z\}.$$

Hiebei ist nun, wie auch anderwärts, wesentlich Gebrauch zu machen von einem weiteren Grundgesetz V, Ꝁ 6, dem „Kontinuitätsgesetz“ (Law of continuity):

Zum Denkbereich ist als zugehörig zu betrachten jedes Element, welches mit den bereits vorhandenen Elementen als verträglich sich erweist. (No entity is absent from the system which can consistently be present.)

Da hiernach unter „allen“ Elementen $a, b, \ldots z$ auch schon das neuerdings definirte z_1 sich befindet, so ist nach den Gesetzen des identischen Rechnens in

$$\{ab \ldots z,\ z\} = ab \ldots z + (a + b + \ldots + z)z_1$$

rechterhand das Produkt $ab \ldots z = 0$ und die Summe $a + b + \ldots + z = 1$.

Nun wird der gesamte identische Kalkul gegründet auf die Begriffe und Gesetze von den linearen Triaden und deren „Erzeugnissen“, und zwar dienen die Beziehungen α), Ꝁ 40 und 42

$$[ab0] = ab, \quad [ab\,1] = a + b = \{ab,\ 0\}$$

zur Definition des Produktes und der Summe zweier Elemente. Bezeichnend ist hier die Art, wie die beiden Moduln 0 und 1 eingeführt werden. Der eine, die Null, ist zunächst ein ganz beliebiges Element z des Denkbereiches, der andere, die Eins, dessen Negation z_1; und den Modulncharakter nehmen diese beiden zu einander obversen Elemente erst an durch Beschränkung des Operationsfeldes auf solche symmetrische und unsymmetrische Erzeugnisse, welche eines von beiden, etwa z, als „konstantes“ Glied enthalten, — indem diese Erzeugnisse sodann als Funktionen der übrigen beiden Glieder betrachtet und $[abz]$ mit ab, $\{ab,\ z\}$ mit $a + b$ *bezeichnet* wird. Das Zeichen 0 für z zu gebrauchen, wegen der hiernach leicht zu erweisenden Beziehung $az = z$ (und $a + z = a$), lehnt Kempe Ꝁ 41 nicht geradezu ab, wenn man dabei nur nicht aus dem Auge verliere, dass dieses innerhalb der in Rede stehenden „Algebra“ bevorzugte, konstante Element z sich ursprünglich durch nichts von den andern Elementen des Grundsystems unterscheidet, und dass man jedes andere Element ebensogut hätte zum Modul machen können; wogegen er allerdings an der Bezeichnung 1 für z_1 wegen $a+z_1=z_1$ Anstoss nimmt (Ꞩ 46).

Auch die linearen Triaden mit innerhalb der „Algebra“, also des identischen Kalkuls „konstantem“ Element z oder 0 werden, als Beziehungen zwischen den andern beiden Gliedern:

Ꞩ 59. $$(a0\cdot b) = (b \not\in a), \quad (ab\cdot 0) = (ab = 0),$$

mit neuen Symbolen bezeichnet, — wenn auch freilich nicht mit den hier gebrauchten — vergl. γ).

Nach „algebraischer“ d. i. identisch rechnerischer Behandlung der bisher aufgestellten und einiger neuen Begriffe und Ergebnisse in grossenteils oben dargelegter Weise wendet sich die Untersuchung nunmehr der geometrischen Anwendung zu.

Unter dem Namen eines „linearen Punktsystems“ („linear set“) wird zunächst Ꞩ 127 ff. eine Gruppe von Elementen ins Auge gefasst, unter denen nicht zwei einander gleich sind, während dagegen je drei von ihnen eine lineare Triade bilden. Die durchgängige Verschiedenheit der Elemente schliesst nach Ꞩ 7, Seite 576 oder τ) das Bestehen mehrerer linearer Triaden zwischen denselben drei Elementen aus; dagegen bilden die zwischen je vieren von ihnen bestehenden linearen Triaden, wie sich zeigen lässt (Ꞩ 128), stets eine Triaden-Tetrade von bestimmter Form, nämlich von der Form der vier in dem Theorem Ꞩ 8 Seite 576 enthaltenen Triaden

$$ab\cdot c, \quad bc\cdot d, \quad ab\cdot d, \quad ad\cdot c,$$

von denen nach ebendiesem Theorem das erste und das zweite Paar einander gegenseitig bedingen.

Ein Nachweis hiezu, — von Kempe nur flüchtig angedeutet, — ist unten Seite 582 ff. ausgeführt, um das Referat an dieser Stelle nicht damit zu unterbrechen.

Da zwar zwei obverse Elemente a und a_1 scheinbar eine lineare Triade $aa_1\cdot b$ bilden mit jedem beliebigen anderen Element b als ihrem Zwischenglied, wie oben Ꞩ 30, τ) erwähnt, diese Triade aber in Wirklichkeit, als Identität, auf das obverse *Paar* $\cdot aa_1\cdot$ hinauskommt, so enthält ein lineares System nicht zwei obverse Elemente.

Ein lineares System heisst vollständig („complete“), wenn demselben ein jedes Element angehört, das mit irgend zwei Elementen des Systems eine lineare Triade bildet (kollinear ist, vergl. φ)).

Indem man das ungerade Glied einer linearen Triade auch als „Zwischenglied“ oder als „liegend zwischen“ den geraden Gliedern bezeichnet, wird man von den vier Elementen oder „Punkten“ a, b, c, d

der Triaden-Tetrade $ab \cdot c$, $bc \cdot d$, $ab \cdot d$, $ad \cdot c$ sagen, sie liegen in der Reihenfolge $acdb$; und dem entspricht die Ausdrucksweise: Die Punkte eines linearen Systems bilden eine „gerade Linie".

Freilich können im allgemeinen zwei lineare Systeme gemeinsame Elemente in irgend welcher Anzahl enthalten. Nun beschränken wir aber unsere Betrachtung auf ein System von Elementen oder Punkten, innerhalb dessen es nicht zwei lineare Systeme mit mehr als einem gemeinsamen Element gibt. Ein solches System heisst ein „geometrisches" („geometric set"). Dasselbe ist somit dadurch gekennzeichnet, dass zu den fünf früheren Grundgesetzen noch als neues hinzutritt (𝔎 136):

„Law VI". $$(a \cdot p \cdot q)(b \cdot p \cdot q)(\overline{a \cdot b \cdot p}) \Subset (p = q),$$

worin neben den beiden kollinearen Triaden $a \cdot p \cdot q$ und $b \cdot p \cdot q$ (vergl. φ)) als dritte Prämisse die Aussagenverneinung

$$(\overline{a \cdot b \cdot p}) = (\overline{ab \cdot p})(\overline{bp \cdot a})(\overline{ap \cdot b})$$

bedeutet, dass es zwischen den drei Elementen a, b, p keine lineare Triade, keine „gerade Linie" gebe.

Es lässt sich zeigen, dass die Punkte eines flachen Raumes von beliebig vielen Dimensionen als Elemente eines solchen geometrischen Systems angesehen werden können, wobei auch die mehrfach der Geometrie entlehnten Benennungen in ihrer eigentlichen geometrischen Bedeutung zu nehmen sind.

Um für einen solchen Raum, insbesondere den flachen dreidimensionalen oder Euklidischen, die Gültigkeit der Grundgesetze I—IV darzuthun, — während die der Gesetze V und VI als selbstverständlich angesehen werden kann, — genügen wenige Worte und der Anblick der Figuren 38 und 39: Liegt ein Punkt p zugleich in der Geraden der beiden Punkte a und b und in derjenigen durch c und d, und zwar so, dass dort b, hier d der ungerade oder zwischenliegende Punkt ist, so muss es, laut Gesetz I, auch einen Punkt q geben, welcher zugleich auf den beiden Geraden ad und bc liegt, und zwar zwischen a und d, sowie zwischen b und c. — Wenn sich dagegen die beiden Geraden ab und cd schneiden in einem Punkt p innerhalb der Strecke ab, jedoch ausserhalb der Strecke cd, in der Verlängerung dieser Strecke über d hinaus, so liegt der Schnittpunkt q der

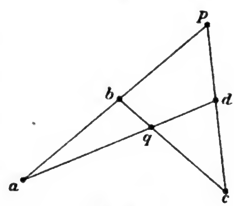

Fig. 38.

Geraden ad und bc innerhalb der Strecke bc und in der Verlängerung der Strecke ad über d hinaus, nach Gesetz II. — Fallen von drei kollinearen Punkten zwei zusammen, und sind es die beiden geraden oder Aussenpunkte, so muss der Zwischenpunkt ebenfalls mit ihnen zusammenfallen; fällt aber der Zwischenpunkt mit einem Aussenpunkt zusammen, so ist der andere Aussenpunkt beliebig, es liegt dann jeder Punkt mit den beiden ersteren in einer Geraden; — bekannte Thatsachen, welche mit Law III und IV ausgesprochen sind.

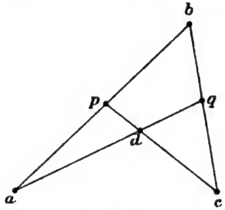

Fig. 39.

Um nun — wenigstens für die einfachsten Fälle eines Euklidischen Raumes — auch zu zeigen, wie die Grundgesetze, welche im wesentlichen den Begriff der linearen Triade konstituiren, nicht nur notwendig zutreffen, sondern auch hinreichen zur Bestimmung der grundlegenden geometrischen Gebilde, wird hingewiesen auf die Kollinearität von Punkten als Bedingung der Lage von Punkten auf einer Ebene, in einem flachen dreidimensionalen Raum und auf einem Kegelschnitt:

Die (notwendige und hinreichende) Bedingung, dass die vier Punkte a, b, c, d koplanar sind, ist, dass sich die Geraden ab und cd schneiden (in einem Punkt p):

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d) = \sum_p (a \cdot b \cdot p)(c \cdot d \cdot p);$$

sollen ferner die fünf Punkte a, b, c, d, e einem Euklidischen Raum von drei Dimensionen angehören, so muss man durch einen e der Punkte eine Gerade legen können, welche die beiden Geraden ab und cd der Paare der übrigen Punkte schneidet (in zwei Punkten l und m):

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) = \sum_{l,\,m} (a \cdot b \cdot l)(c \cdot d \cdot m)(l \cdot m \cdot e);$$

sollen endlich die sechs Punkte a, b, c, d, e, f auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen die drei Schnittpunkte l, m, n der drei Gegenseitenpaare ihres Sechseckes in einer Geraden liegen, — es müssen die sieben kollinearen Triaden bestehen:

$$a \cdot b \cdot l, \quad d \cdot e \cdot l, \quad b \cdot c \cdot m, \quad e \cdot f \cdot m, \quad c \cdot d \cdot n, \quad f \cdot a \cdot n, \quad l \cdot m \cdot n.$$

Nach einigen Andeutungen (𝔎 149) über eine „Algebra" der kollinearen Punkte, der Punkte eines geometrischen Systems, — von gleichem Charakter wie die „Algebra der Grössen", und ähnlich der früher aufgestellten identischen Algebra wenigstens hinsichtlich der Art der Begründung mittelst der Theorie der linearen Triaden, jedoch mit drei „konstanten" Punkten oder Moduln, entsprechend den Grössenmoduln ∞, 0 und 1, — worüber auf Kempe[1] verwiesen wird, — werden Name und Bedeutung eines „flachen" mehrgliedrigen Systems erläutert: Wenn n Punkte ein flaches System — innerhalb eines geometrischen Punktsystems — bilden, so liegen diese Punkte in einem flachen Raume von $n - 2$ Dimensionen. So z. B. liegen die drei Punkte einer linearen Triade in einer Geraden, also einem eindimensionalen Raum, die Punkte einer flachen Tetrade auf einer Ebene von zwei Dimensionen, usw. — In letzterwähntem Falle besagt die Form $a \cdot bcd$ der Tetrade, dass a im Innenraum des Dreiecks bcd liege, während nach der anderen Form $ab \cdot cd$ die Punkte a und b auf verschiedenen Seiten der Geraden cd liegen, und umgekehrt die Punkte c und d beiderseits der Geraden ab.*)

Zwei obverse Elemente a und $a_{,}$ können einem geometrischen System ebensowenig angehören als einem linearen; denn andernfalls würde für drei beliebige andere, von a, $a_{,}$ und von einander verschiedene Elemente b, c, d des geometrischen Systems aus ℜ 30, τ) $aa_{,} \cdot b$, $aa_{,} \cdot c$, $aa_{,} \cdot d$ nach Law VI — da hier $a \neq a_{,}$, — $a \cdot b \cdot c$, $a_{,} \cdot b \cdot c$, $a \cdot b \cdot d$, usw. folgen, und ebenso hieraus, wenn $a \neq b$, $b \cdot c \cdot d$, usw.; es müssten alle Elemente des geometrischen Systems kollineare Triaden bilden, das geometrische System wäre ein lineares, welches aber, wie bereits oben gezeigt, nicht zwei obverse Elemente a und $a_{,}$ enthalten könnte.

Da nun $(ab \cdot c) = (a_{,} b_{,} \cdot c_{,})$, die obversen der Elemente einer linearen Triade wieder eine solche bilden, so erhält man auch zu einem geometrischen System ein zweites, das „konjugirte" geometrische System, indem man die Elemente sämtlich negirt; und zwei solche einander konjugirte bilden ein neues symmetrisches, das „erweiterte" („extended") geometrische System. Ein solches zerfällt aber nicht etwa blos in die beiden konjugirten Systeme, aus denen es durch Zusammensetzung entstanden ist, sondern es lässt sich auf mehrere, ja, sofern es unbegrenzt viele Elemente enthält, auf unbegrenzt viele Arten in zwei konjugirte Systeme aufbrechen, — ebenso, wie man eine Kugel auf unbegrenzt viele Arten in zwei Halbkugeln zerteilen kann.

Es entspricht so einer geraden Linie, d. i. einem vollständigen linearen Systeme, dessen Elemente — einem geometrischen Systeme zugehörig — zu je dreien eine lineare Triade bilden, im erweiterten

*) Vergl. unten Seite 587 ff.

geometrischen Systeme eine „erweiterte Gerade", deren Punkte sämtlich „bedingte" Triaden (vergl. χ)) bilden; eine solche erweiterte Gerade ist als eine geschlossene Linie zu denken, welche auf unbegrenzt viele Arten in zwei gewöhnliche gerade Linien auseinander fallen kann. Ebenso, während von den Punkten einer Ebene jede Tetrade eine flache Tetrade ist, werden die Punkte einer erweiterten Ebene stets zu bedingten Tetraden zusammentreten. — Einem flachen n-dimensionalen Raum, dessen Punkte zu je $n+2$ ein flaches System zusammensetzen, wird ein erweiterter oder bedingter n-dimensionaler Raum entsprechen, in welchem je $n+2$ Punkte einem bedingten System angehören.

Es ist hervorzuheben, dass im Gegensatz zu der gewöhnlichen analytischen Geometrie die hiermit angebahnte Rechnung mit Punkten und Punktsystemen nichts zu thun hat mit *Grössen* irgend welcher Art.

Nach Darlegung des Kempe'schen Gedankenganges sollen nun — der mutmasslichen Absicht des Verfassers möglichst entsprechend — einige Ausführungen zur Vervollständigung des vorstehenden, insbesondere zum Nachweis einiger Sätze (Seite 570, 578 u. 581) sich hier anschliessen.

Es handelt sich vorzugsweise um Eigenschaften eines *linearen* Punktsystems, hierauf auch um diejenigen eines *geometrischen* und eines *erweiterten geometrischen* Systems. In einem linearen Punktsystem ist, wie oben Seite 578 angegeben, für zwei beliebige Systempunkte a und b, vorausgesetzt $a \neq b$ oder $(\overline{a \cdot b})$, (cf. τ), für deren drei a, b, c neben der durchgängigen Verschiedenheit noch:

$$(a \cdot b \cdot c), = (ab \cdot c) + (ac \cdot b) + (bc \cdot a)$$

(cf. φ), wobei wegen τ) $(ab \cdot c)\,(ac \cdot b) = (b \cdot c)$ somit von den drei linearen Triaden $ab \cdot c$, $ac \cdot b$, $bc \cdot a$ eine und nur eine bestehen soll, — während endlich für vier Punkte a, b, c, d mit

$$(\overline{a \cdot b})\,(\overline{a \cdot c})\,(\overline{a \cdot d})\,(\overline{b \cdot c})\,(\overline{b \cdot d})\,(\overline{c \cdot d})\,(a \cdot b \cdot c)\,(a \cdot b \cdot d)\,(a \cdot c \cdot d)\,(b \cdot c \cdot d)$$

die Voraussetzung, dass die vier Punkte einem linearen System angehören, ihren vollständigen Ausdruck findet, worin die Tetrade *kollinearer* Triaden vermöge der sechs vorausgehenden Ungleichungen nur eine Tetrade *linearer* Triaden bedeutet.

Wir denken uns nun, — um den Satz Ꝁ 128, Seite 578 zu beweisen, — eine jede von den 4×3 denkbaren linearen Triaden der vier Punkte a, b, c, d nach dem nicht darin vorkommenden vierten Element entwickelt, wie z. B. $(ab \cdot c) = (ab \cdot cd)\,(abd \cdot c)$, d. h. dargestellt als Produkt zweier flacher Tetraden, nämlich einer vom ersten und einer vom zweiten Typus der unter v) zusammengestellten denkbaren flachen Tetraden:

$$\begin{array}{ll} \text{erster Typus:} & a\cdot 3,\quad b\cdot 3,\quad c\cdot 3,\quad d\cdot 3, \\ \text{zweiter Typus:} & ab\cdot 2,\quad ac\cdot 2,\quad ad\cdot 2; \end{array}$$

es ist dann leicht zu erkennen, dass man die 4×3 Triaden sämtlich erhält, indem man jede der vier Formen vom ersten Typus mit den dreien des zweiten Typus der Reihe nach multiplizirt. So ergibt sich aus den vier Formen des ersten Typus mit *einer*, der ersten, vom zweiten Typus:

$$\begin{aligned} (a\cdot 3)\,(ab\cdot 2) &= (a\cdot cd) \\ (b\cdot 3)\,(ab\cdot 2) &= (b\cdot cd) \\ (c\cdot 3)\,(ab\cdot 2) &= (c\cdot ab) \\ (d\cdot 3)\,(ab\cdot 2) &= (d\cdot ab), \end{aligned}$$

eine Tetrade linearer Triaden, worin jede Kombination der vier Elemente a, b, c, d zu dreien *einmal* vertreten ist, — eine Triaden-Tetrade, welche unseren Voraussetzungen ersichtlichermassen entspricht. Wie die *erste* Form des zweiten Typus, so ergibt auch die zweite und die dritte je eine solche Triaden-Tetrade: in zweien von den Triaden werden die geraden Glieder übereinstimmend von dem einen Paar von Elementen gebildet, in den beiden andern Triaden von dem andern Elementepaar.

Tetraden anderer, zweiter Art erhält man, wenn man zwei Formen des zweiten Typus mit zweien vom ersten verbindet, — sofern daraus keine Elementegleichheit hervorgeht. Nach τ) ist nämlich z. B.

$$(a\cdot b) = (a\cdot 3)\,(b\cdot 3)\,(ac\cdot 2)\,(ad\cdot 2)$$

wogegen wir schon in ℜ 8 Seite 576

$$(ab\cdot c)\,(bc\cdot d) = (c\cdot 3)\,(d\cdot 3)\,(ab\cdot 2)\,(ad\cdot 2) = (ab\cdot d)\,(ad\cdot c)$$

vier Triaden hatten, von denen ein Paar das andere bedingt, und unter denen jede der vier kollinearen Triaden von a, b, c, d einmal vertreten ist; die „vier Triaden nach ℜ 8" bilden einen Vertauschungszyklus:

$$\begin{array}{llll} ab\cdot c & & & \\ & bc\cdot d & & \\ & & c\cdot da & \\ & & & d\cdot ab \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{c} c\cdot da \\ \overline{d\cdot a}\underline{b\cdot c} \\ bc\cdot d \end{array}$$

Man kann die 6 Paare der 4 Triaden ersten Typus mit den drei Paaren von Triaden des zweiten Typus auf 3×6 Arten zusammenstellen.

Dabei ergibt jedes Triadenpaar vom ersten Typus mit einem bestimmten Paar des zweiten Typus je eine Elementegleichheit, und man erhält auf diese Weise die 6 nach Voraussetzung ausgeschlossenen Gleichungen $a \cdot b,\ a \cdot c, \ldots c \cdot d$, nebst 12 Triaden-Tetraden „zweiter Art“ oder „Tetraden nach $\mathfrak{K}$ 8“.

Andere Tetraden aber als solche erster und zweiter Art kann es unter den obigen Voraussetzungen nicht geben ($\mathfrak{K}$ 127). Denn soll vom zweiten Typus der flachen Elemente-Tetraden überhaupt mehr als eine Form bestehen, so müssen mindestens deren zwei vom ersten Typus hinzutreten, womit aber mindestens eine Triaden-Tetrade zweiter Art gegeben ist; mit einer solchen kann dann keine weitere Triade mehr zusammen bestehen, ohne dass irgend zwei Elemente einander gleich werden.

Zieht man nun aber noch ein fünftes Element e unseres linearen Systems in betracht, so dass zu den bisherigen 10 Einzelvoraussetzungen über die ersten vier Elemente noch 10 weitere auf e bezügliche:

$$(\overline{a \cdot e})\,(\overline{b \cdot e})\,(\overline{c \cdot e})\,(\overline{d \cdot e})\,(a \cdot b \cdot e)\,(a \cdot c \cdot e \cdot)\,(a \cdot d \cdot e)\,(b \cdot c \cdot e)\,(b \cdot d \cdot e)\,(c \cdot d \cdot e)$$

hinzukommen, so ergibt eine leichte, wenn auch etwas umständliche Überlegung, dass von den beiden nach dem bisherigen noch möglichen Arten von Triaden-Tetraden zwischen je vieren von den fünf Elementen die erste Art nicht mehr statt hat und nur noch die zweite Art der Tetraden nach $\mathfrak{K}$ 8 sich behauptet.

Nehmen wir nämlich an, es bestehe zwischen a, b, c, d eine Triaden-Tetrade T erster Art:

$$T = (a \cdot cd)\,(b \cdot cd)\,(c \cdot ab)\,(d \cdot ab) = (a \cdot 3)\,(b \cdot 3)\,(c \cdot 3)\,(d \cdot 3)\,(ab \cdot 2) =$$
$$= \left\{\begin{array}{c} (a \cdot 4)\,(b \cdot 4)\,(c \cdot 4)\,(d \cdot 4) \\ (ae \cdot 3)\,(be \cdot 3)\,(ce \cdot 3)\,(de \cdot 3) \\ (ab \cdot 3)\,(cd \cdot 3), \end{array}\right.$$

worin von allen 15 überhaupt denkbaren fünfgliedrigen flachen Systemen (cf. $\boldsymbol{v}$) nur noch eine vom ersten Typus und vier vom zweiten Typus fehlen, nämlich

$$A = (e \cdot 4), \quad B = (ac \cdot 3), \quad C = (ad \cdot 3), \quad D = (bc \cdot 3), \quad E = (bd \cdot 3).$$

Diese fünf Formen seien zur Abkürzung mit den beigesetzten Buchstaben bezeichnet. Man sieht leicht, wie dieselben mit den 10 Elementegleichungen nach $\boldsymbol{\tau}$) zusammenhängen:

$$(a \cdot b) \in BCDE \qquad \begin{array}{l} (a \cdot c) \in CD \\ (b \cdot c) \in BE \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a \cdot d) \in BE \\ (b \cdot d) \in CD \end{array} \qquad (c \cdot d) \in BCDE$$
$$\begin{array}{l} (a \cdot e) \in ABC \\ (b \cdot e) \in ADE \end{array} \qquad \begin{array}{l} (c \cdot e) \in ABD \\ (d \cdot e) \in ACE. \end{array}$$

Zu jeder Elementegleichung, z. B. $a \cdot b$, gehören im ganzen acht fünfgliedrige Formen, von denen die hier nicht angegebenen in der Tetrade T enthalten sind; daher gilt auch

$$TBCDE \prec\!\!\in (a \cdot b), \quad TCD \prec\!\!\in (a \cdot c), \text{ usw.},$$

d. h.: sollten etwa mit dem fünften Element e zur Tetrade T noch irgend welche lineare Triaden als gleichzeitig geltende hinzukommen, welche das Bestehen der zwei fünfgliedrigen Formen C, D oder B, E, oder irgend eines andern Paares von diesen vier in Verbindung mit A erforderten, so wäre in jedem dieser Fälle mindestens eine Elementegleichheit gegeben und damit die Konsistenz des linearen Systemes gestört.

Nun liest man andererseits für die 6 kollinearen, bezw. die 3×6 denkbaren linearen Triaden, in welchen e vorkommt, leicht ab:

$$\begin{array}{cccc}
 & (ab \cdot e) \prec\!\!\in A & (cd \cdot e) \prec\!\!\in A & \\
 & (ae \cdot b) \prec\!\!\in DE & (ce \cdot d) \prec\!\!\in CE & \\
 & (be \cdot a) \prec\!\!\in BC & (de \cdot c) \prec\!\!\in BD & \\
(ac \cdot e) \prec\!\!\in AB & (ad \cdot e) \prec\!\!\in AC & (bc \cdot e) \prec\!\!\in AD & (bd \cdot e) \prec\!\!\in AE \\
(ae \cdot c) \prec\!\!\in D & (ae \cdot d) \prec\!\!\in E & (be \cdot c) \prec\!\!\in B & (be \cdot d) \prec\!\!\in C \\
(ce \cdot a) \prec\!\!\in C & (de \cdot a) \prec\!\!\in B & (ce \cdot b) \prec\!\!\in E & (de \cdot b) \prec\!\!\in D \\
(E) & (D) & (C) & (B)
\end{array}$$

Unterhalb der einzelnen Gruppen sind noch diejenigen Formen angegeben, welche in den betreffenden Gruppen nicht vorkommen. — Aus jeder Gruppe soll *eine* Triade zu T hinzutreten. Man bemerkt sofort, dass von den beiden ersten Gruppen $a \cdot b \cdot e$ und $c \cdot d \cdot e$ nur je die ersten Triaden sich gegenseitig vertragen, während z. B. $ae \cdot b$ mit den dreien der zweiten Gruppe der Reihe nach ergäbe:

$$\begin{aligned}
&T(ae \cdot b)(cd \cdot e) \prec\!\!\in TADE \prec\!\!\in (b \cdot e)\\
&T(ae \cdot b)(ce \cdot d) \prec\!\!\in TCDE \prec\!\!\in (a \cdot c)(b \cdot d)\\
&T(ae \cdot b)(de \cdot c) \prec\!\!\in TBDE \prec\!\!\in (a \cdot d)(b \cdot c),
\end{aligned}$$

usw. (Nach $\mathfrak{K}$ 9, Seite 576 würde ohnhin eine der beiden Triaden $ab \cdot e$ und $cd \cdot e$ — neben T — die andere nach sich ziehen.) Also müssen $ab \cdot e$ und $cd \cdot e$ jedenfalls zu den 6 Triaden gehören, welche zu T hinzukommen sollen.

Sucht man damit eine Triade aus einer andern Gruppe, z. B. der dritten $a \cdot c \cdot e$ zusammenzustellen, so zeigt sich folgendes: Die erste Triade $ac \cdot e$ dieser Gruppe, welche A und B zur Folge hat, verträgt sich mit keiner Triade aus der letzten Gruppe $b \cdot d \cdot e$, zu welcher B nicht gehört, wo daher jede Triade zu A und B noch irgend eine weitere von den drei übrigen Formen C, D, E hinzubringt und damit eine Elementegleichheit bedingt. Die Triade $ac \cdot e$ passt also nicht in unser lineares System hinein. Die folgende Triade $ae \cdot c$ aber ebenfalls nicht, da diese in Verbindung mit den notwendig hinzutretenden $ab \cdot e$ und $cd \cdot e$ die Formen A und D verlangt und sich daher mit keiner Triade der vierten Gruppe $a \cdot d \cdot e$ verträgt, wo D fehlt und dafür in jeder Triade eine der drei andern Formen B, C, E vertreten ist; und ganz ebenso schliesst die dritte Triade

$cc \cdot a$ der Gruppe $a \cdot c \cdot e$ eine jede Triade der vorletzten Gruppe $b \cdot c \cdot e$ aus. — Es gibt also gar keine Zusammenstellung von 6 linearen Triaden zwischen e und den übrigen Elementen a, b, c, d, welche zur Tetrade T erster Art in das lineare System passt. — Die beiden andern Tetraden erster Art gehen aus T durch Buchstabenvertauschungen hervor, durch welche die Voraussetzungen nicht geändert werden. Sollen demnach von fünf (oder mehr) durchweg von einander verschiedenen Elementen je drei kollinear sein, so kann es keine vier unter den Elementen geben, deren lineare Triaden eine Tetrade erster Art bilden.

Sofern es also überhaupt lineare Systeme von mehr als vier Elementen gibt, — und die nachfolgende geometrische Erörterung bietet als Beispiel eines solchen Systems die sämtlichen Punkte einer geraden Linie, — so müssen für je vier Elemente des Systems die vier zugehörigen linearen Triaden zu einer Tetrade zweiter Art nach $\mathfrak{K}$ 8 zusammentreten, und zwischen n Elementen des Systems werden $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ lineare Triaden bestehen, die sich zu $\binom{n}{} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ Triaden-Tetraden nach $\mathfrak{K}$ 8 zusammenordnen lassen.

Bei 5 Elementen hat man so z. B. die 5 Tetraden:

$a \cdot b \cdot c \cdot d$	$b \cdot c \cdot d \cdot e$	$a \cdot b \cdot c \cdot e$	$a \cdot b \cdot d \cdot e$	$a \cdot c \cdot d \cdot e$
1) $ab \cdot c$	7) $bc \cdot d$	1) $ab \cdot c$	3) $ab \cdot e$	4) $ad \cdot c$
7) $bc \cdot d$	10) $cd \cdot e$	8) $bc \cdot e$	9) $be \cdot d$	10) $cd \cdot e$
2) $ab \cdot d$	8) $bc \cdot e$	3) $ab \cdot e$	2) $ab \cdot d$	6) $ad \cdot e$
4) $ad \cdot c$	9) $be \cdot d$	5) $ae \cdot c$	6) $ad \cdot e$	5) $ae \cdot c$

worin die Triaden zur Erleichterung der Kontrolle nach der alphabetischen Reihenfolge ihrer kollinearen Formen 1) $a \cdot b \cdot c$, 2) $a \cdot b \cdot d$, … 10) $c \cdot d \cdot e$ numerirt sind. — Die Fortsetzung für ein und mehr weitere Elemente wäre leicht etwa nach dem durch $(ab \cdot c)\,(bc \cdot d)\,(cd \cdot e)\,(de \cdot f)$ … angedeuteten Verfahren zu gewinnen.

Seien jetzt (cf. Seite 581) die vier Punkte a, b, c, d koplanar ($a \cdot b \cdot c \cdot d$, und z. B. $(\overline{\cdot abcd \cdot})$,) durchweg verschieden $\left(\overline{(a \cdot b)}\,\overline{(a \cdot c)} \ldots \overline{(c \cdot d)}\right)$ und nicht drei von ihnen kollinear $\left(\overline{(a \cdot b \cdot c)}\,\overline{(a \cdot b \cdot d)}\,\overline{(a \cdot c \cdot d)}\,\overline{(b \cdot c \cdot d)}\right)$; ferner mögen dieselben, sowie auch die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden z. B. ab und cd, überhaupt alle nunmehr in betracht zu ziehenden Punkte p, q, r, s, … einem „geometrischen Punktsystem“ angehören, (Law VI, S. 579)

$$(p \cdot q \cdot r)\,(p \cdot q \cdot s)\,\overline{(p \cdot r \cdot s)} \Subset (p \cdot q)$$

oder auch

$$(p \cdot q \cdot r)\,(p \cdot q \cdot s)\,\overline{(p \cdot q)} \Subset (p \cdot r \cdot s)\,(q \cdot r \cdot s)$$

Ist nun x etwa ein Schnittpunkt der beiden Geraden ab und cd, $(a\cdot b\cdot x)\,(c\cdot d\cdot x)$, so kann keine von den übrigen vier Verbindungsgeraden ac, ad, bc, bd durch den Punkt x gehen; denn wäre z. B. $a\cdot c\cdot x$, so hätte man

$$(a\cdot b\cdot x)\,(a\cdot c\cdot x)\,\overline{(a\cdot b\cdot c)} \Subset (a\cdot x)$$
$$(a\cdot c\cdot x)\,(c\cdot d\cdot x)\,\overline{(a\cdot c\cdot d)} \Subset (c\cdot x),$$
$$(a\cdot x)\,(c\cdot x) \Subset (a\cdot c),$$

wogegen $\overline{(a\cdot c)}$ vorausgesetzt ist. — Wäre nun x' ein zweiter Schnittpunkt von ab und cd, $(a\cdot b\cdot x')\,(c\cdot d\cdot x')$, so hätte man

$$(a\cdot b\cdot x)\,(a\cdot b\cdot x')\,\overline{(a\cdot b)} \Subset (a\cdot x\cdot x')\,(b\cdot x\cdot x')$$
$$(c\cdot d\cdot x)\,(c\cdot d\cdot x')\,\overline{(c.d)} \Subset (c\cdot x\cdot x')\,(d\cdot x\cdot x'),$$
$$(a\cdot x\cdot x')\,(c\cdot x\cdot x')\,\overline{(a\cdot c\cdot x)} \Subset (x\cdot x'),$$

wonach die Punkte x und x' zusammenfallen; d. h. Law VI bedeutet in der That, — wie auch ohnehin leicht erkennbar, — dass zwei Gerade ab und cd nicht mehr als einen Schnittpunkt haben können. Dass aber auch immer ein solcher Schnittpunkt x vorhanden ist, wird verbürgt durch die Voraussetzung $a\cdot b\cdot c\cdot d$, dass zum mindesten eine der sieben möglichen flachen Tetraden zwischen a, b, c, d bestehe; so stellt sich z. B. $a\cdot bcd$

$$(a\cdot bcd) = \{(ab_1 + cd)\,(a_1b + c_1d_1) = (ac_1 + bd)\,(a_1c + b_1d_1) =$$
$$= (ad_1 + bc)\,(a_1d + b_1c_1) = 0\}$$

als Eliminationsresultante nach x dar entweder für die Gleichung

$$\{(ab_1 + cd)\,x + (a_1b + c_1d_1)\,x_1 = 0\} = (ax\cdot b)\,(\cdot cdx\cdot),$$

oder für die

$$\{a_1b + c_1d_1)\,x + (ab_1 + cd)\,x_1 = 0\} = (bx\cdot a)\,(cd\cdot x),$$

usw., also

$$(a\cdot bcd) = \sum_x (ax\cdot b)\,(\cdot cdx\cdot) = \sum_x (ax\cdot c)\,(\cdot bdx\cdot) = \sum_x (ax\cdot d)\,(\cdot bcx\cdot)$$
$$= \sum_x (bx\cdot a)\,(cd\cdot x) = \sum_x (cx\cdot a)\,(bd\cdot x) = \sum_x (dx\cdot a)\,(bc\cdot x)$$

(vergl. Law II). Das Zusammenbestehen eines Triadenpaares aus der ersten dieser beiden Zeilen (für denselben x-Wert, z. B. $(ax\cdot b)\,(\cdot cdx\cdot) = (ax\cdot b)\,(cd\cdot x_1)$, usw.) ist ausgeschlossen durch die Voraussetzung, dass alle in betracht kommenden Punkte einem und demselben geometrischen System angehören sollen, welches zwar alle zu a, b, c, d kollinearen Punkte umfassen kann, nicht aber zwei zu einander obverse Punkte x und x_1. Dagegen gibt die zweite Zeile offenbar die Lage der drei Schnittpunkte p, q, r der Geradenpaare ab und cd, ac und bd, ad und bc bezw. wie in Fig. 40 (cf. Seite 581).

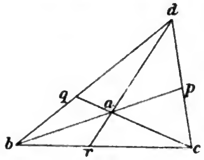

Fig. 40.

Jede andere flache Tetrade wird nun, wie man sich leicht überzeugt, *andere* Schnittpunkte derselben Geradenpaare bedingen; es können deshalb nicht zwei flache Tetraden zwischen denselben vier Punkten a, b, c, d gleichzeitig bestehen. (Anders Seite 570, x), wo nicht von Punkten eines *geometrischen* Systems die Rede ist.)

In gleicher Weise zeigt sich: Eine Tetrade $ab\cdot cd$ vom zweiten Typus

$$(ab\cdot cd) = \{(ab + cd)(a_1 b_1 + c_1 d_1) = (ac_1 + b_1 d)(a_1 c + bd_1) = $$
$$= (ad_1 + b_1 c)(a_1 d + bc_1) = 0\}$$
$$= \sum_x (\cdot abx\cdot)(\cdot cdx\cdot) = \sum_x (ax\cdot c)(dx\cdot b) = \sum_x (ax\cdot d)(cx\cdot b)$$
$$= \sum_x (ab\cdot x)(cd\cdot x) = \sum_x (cx\cdot a)(bx\cdot d) = \sum_x (dx\cdot a)(bx\cdot c)$$

(cf. Law I) bedeutet die Alternative

$$(ab\cdot p)(cd\cdot p)\,\{(aq\cdot c)(dq\cdot b) + (cq_1\cdot a)(bq_1\cdot d)\}\,.$$
$$.\,\{(ar\cdot d)(cr\cdot b) + (dr_1\cdot a)(br_1\cdot c)\}\,,$$

wobei die Schnittpunkte p und p_1 wegen ihrer gleichen Lage $(\cdot abp\cdot)(\cdot cdp\cdot) = (ab\cdot p_1)(cd\cdot p_1)$ nicht unterschieden sind, (während im übrigen natürlich Punkte wie q_1, r_1 im geometrischen System enthalten sein können, sofern ihre obversen q, r nicht ebenfalls schon darin vorkommen,) — also die Alternative zwischen den folgenden vier Figuren 41—44 (cf. Seite 581):

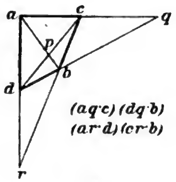

Fig. 41.

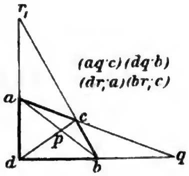

Fig. 42.

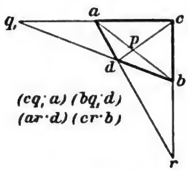

Fig. 43.

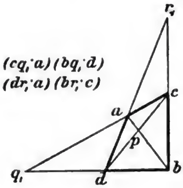

Fig. 44.

Gehen wir jetzt über zu einem „erweiterten geometrischen System", dessen Punkte p, q, r, $s\ldots$, entsprechend denen des geometrischen, der Bedingung

$$(\cdot p \cdot q \cdot r \cdot)(\cdot p \cdot q \cdot s \cdot)\overline{(\cdot p \cdot r \cdot s \cdot)} \mathrel{=\!\!\!\in} (\cdot p \cdot q \cdot)$$

oder

$$(\cdot p \cdot q \cdot r \cdot)(\cdot p \cdot q \cdot s \cdot)\overline{(\cdot p \cdot q \cdot)} \mathrel{=\!\!\!\in} (\cdot p \cdot r \cdot s \cdot)(\cdot q \cdot r \cdot s \cdot)$$

genügen müssen, so kann man ganz ähnliche Überlegungen anstellen. Gehören diesem System wieder die vier Punkte a, b, c, d an, von denen nicht zwei in einen Punkt und nicht drei in eine (erweiterte) Gerade fallen sollen, so werden auch deren obverse a_1, b_1, c_1, d_1 Systempunkte sein, auf welche sich die Voraussetzungen nunmehr auch erstrecken werden: es soll gelten:

$$\overline{(\cdot a \cdot b \cdot)}\,\overline{(\cdot a \cdot c \cdot)} \ldots \overline{(\cdot c \cdot d \cdot)}\,\overline{(\cdot a \cdot b \cdot c \cdot)} \ldots \overline{(\cdot b \cdot c \cdot d \cdot)}$$

Ferner mögen die Elemente a, b, c, d eine bedingte Tetrade $\cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot$ bilden, (d. h. eine oder mehrere flache oder auch eine obverse). Ganz wie im geometrischen System ergibt sich dann auch hier aus der Annahme, dass die beiden bedingten Geraden ab und cd *zwei* Schnittpunkte x und x' hätten,

$$(\cdot x \cdot x' \cdot), = (x' = x) + (x' = x_1),$$

d. h. zwei bedingte Gerade haben stets zwei und nur zwei — zu einander obverse — Schnittpunkte. Und daraus folgt wieder, dass die vier Punkte a, b, c, d nur *eine* flache Tetrade bilden können, oder aber die obverse Tetrade

$$\begin{aligned}(\cdot abcd \cdot) &= \sum_x (ab \cdot x)(\cdot cdx \cdot) = \sum_x (ac \cdot x)(\cdot bdx \cdot) = \sum_x (ad \cdot x)(\cdot bcx \cdot)\\ &= \sum_x (\cdot abx \cdot)(cd \cdot x) = \sum_x (\cdot acx \cdot)(bd \cdot x) = \sum_x (\cdot adx \cdot)(bc \cdot x).\end{aligned}$$

Die Möglichkeit des Zusammenbestehens mehrerer flacher und allenfalls auch der obversen Tetrade ergibt sich erst, wenn nunmehr von den bisherigen Voraussetzungen die eine ausscheidet, dass wir nur mit Punkten eines geometrischen, bezw. eines erweiterten geometrischen Systems zu thun hätten. Indessen auch dann verträgt sich eine flache Tetrade $a\cdot bcd$ vom ersten Typus nicht mit einer solchen vom zweiten, z. B. $ab\cdot cd$, noch auch mit der obversen $\cdot abcd\cdot$, wegen

$$(a\cdot bcd)(ab\cdot cd) = (a\cdot cd)$$
$$(a\cdot bcd)(\cdot abcd\cdot) = \{0 = (a + a_1)b_1c_1d_1 + (a_1 + a)bcd\} = (\cdot bcd\cdot),$$

da noch, wie bisher, unter anderm $(\overline{\cdot a\cdot c\cdot d\cdot})$ und $(\overline{\cdot b\cdot c\cdot d\cdot})$ vorausgesetzt bleibt.

Es bedeutet hier jede — flache oder obverse — Tetrade das Vorhandensein je zweier Gruppen von Schnittpunkten für jedes der drei Geradenpaare ab und cd, ac und bd, ad und bc; z. B., wie oben,

$$(a\cdot 3) = \Sigma(ap\cdot b)(\cdot cdp\cdot) = \Sigma(aq\cdot c)(\cdot bdq\cdot) = \Sigma(ar\cdot d)(\cdot bcr\cdot)$$
$$= \Sigma(bp_1\cdot a)(cd\cdot p_1) = \Sigma(cq_1\cdot a)(bd\cdot q_1) = \Sigma(dr_1\cdot a)(bc\cdot r_1),$$

wobei die Summationsvariabeln p, q, r bezw., wie auch im folgenden, nicht besonders bezeichnet sind. Die p_1-Gruppe enthält offenbar die obversen der Punkte der p-Gruppe, usw. Das Zusammenfallen eines Punktes x z. B. aus der p-Gruppe mit irgend einem aus der p_1-Gruppe

$$(ax\cdot b)(\cdot cdx\cdot)(bx\cdot a)(cd\cdot x) = (a\cdot b)(\cdot cd\cdot)$$

würde gegen die Voraussetzungen $(\overline{\cdot a\cdot b\cdot})$, $(\overline{\cdot c\cdot d\cdot})$ verstossen.

Jede weitere hinzukommende Tetrade, z. B.

$$(b\cdot acd) = \Sigma(bp'\cdot a)(\cdot cdp'\cdot) = \Sigma(\cdot acq'\cdot)(bq'\cdot d) = \Sigma(\cdot adr'\cdot)(br'\cdot c)$$
$$= \Sigma(ap_1'\cdot b)(cd\cdot p_1') = \Sigma(ac\cdot q_1')(dq_1'\cdot b) = \Sigma(ad\cdot r_1')(cr_1'\cdot b)$$

bringt je ein weiteres (im allgemeinen anderes) Schnittpunkt-Gruppenpaar mit sich für jedes der drei Geradenpaare. Indessen hat man auch:

$$\begin{aligned}(a\cdot 3)(b\cdot 3) = \{0 &= (ac_1 + bd + ad + bc_1)(a_1c + b_1d_1 + a_1d_1 + b_1c)\\ &= (a + b)(c_1 + d)(a_1 + b_1)(c + d_1)\\ &= (ac + bd_1 + ad_1 + bc)(a_1c_1 + b_1d + a_1d + b_1c_1)\}\\ &= \Sigma(ax\cdot c)(\cdot bdx\cdot)(\cdot adx\cdot)(bx\cdot c) = \Sigma(\cdot acx'\cdot)(bx'\cdot d)(ax'\cdot d)(\cdot bcx'\cdot)\\ &= \Sigma(cx_1\cdot a)(bd\cdot x_1)(ad\cdot x_1)(cx_1\cdot b) = \Sigma(ac\cdot x_1')(dx_1'\cdot b)(dx_1'\cdot a)(bc\cdot x_1'),\end{aligned}$$

d. h. die q-Gruppe hat mit der r'-Gruppe gewisse Punkte x gemein, ebenso die r-Gruppe mit der q'-Gruppe Punkte x', und entsprechendes gilt von den obversen Gruppen; es gibt also bei zwei gleichzeitig bestehenden (mit einander verträglichen) Tetraden gemeinsame Schnittpunkte für vier von den sechs Geraden.

Beachtet man:

$$(a\cdot 3)(b\cdot 3) =$$
$$= \{0 = (a_1 b_1 + cd_1)_1 (ab + c_1 d)_1 = (a_1 b_1 + c_1 d)_1 (ab + cd_1)_1\}$$

während anderseits gilt

$$\{0 = (a_1 b_1 + cd_1)(ab + c_1 d)\} = (d\cdot 3) = \Sigma(ab\cdot p''')(cp'''\cdot d)$$
$$= \Sigma(\cdot abp_1'''\cdot)(dp_1'''\cdot c)$$
$$\{0 = (a_1 b_1 + c_1 d)(ab + cd_1)\} = (c\cdot 3) = \Sigma(ab\cdot p'')(dp''\cdot c)$$
$$= \Sigma(\cdot abp_1''\cdot)(cp_1''\cdot d),$$

so erkennt man (wie oben in $\varkappa$), nach Bd. 1, p. 463), dass eine weitere Tetrade, etwa $c\cdot 3$, einen *einzigen* gemeinsamen Schnittpunkt x' aus der r- und q'-Gruppe bedingt, und umgekehrt, dass auch die mit $c\cdot 3$ erscheinende p''-Gruppe sich auf *einen* Punkt p'' reduzirt, nämlich den obversen $p'' = x_1'$ zu jenem, m. a. W dass auch die beiden Geraden ab und cd durch die beiden obversen Schnittpunkte der andern vier Geraden gehen. — Dasselbe liest man auch ab aus

$$(a\cdot 3)(b\cdot 3)(c\cdot 3) = \{0 = (ab + cd_1 + ac + bd_1 + ad_1 + bc)\cdot$$
$$\cdot(a_1 b_1 + c_1 d + a_1 c_1 + b_1 d + a_1 d + b_1 c_1)\}$$
$$= \Sigma(\cdot abx\cdot)(cx\cdot d)(\cdot acx\cdot)(bx\cdot d)(ax\cdot d)(\cdot bcx\cdot)$$
$$= \Sigma(ab\cdot x)(dx\cdot c)(ac\cdot x)(dx\cdot b)(dx\cdot a)(bc\cdot x),$$

worin, wie leicht nachzurechnen, die Koeffizienten von x und x_1 zu einander obvers sind; es ist hier, wenn die gemeinsamen Schnittpunkte der sechs Geraden kurz mit ihren Gruppenbuchstaben bezeichnet werden,

$$x = p_1'' = q' = r_1 = a_1 b_1 + c_1 d = a_1 c_1 + b_1 d = b_1 c_1 + a_1 d$$
$$= (a_1 + b_1)(c_1 + d) = (a_1 + c_1)(b_1 + d) = (b_1 + c_1)(a_1 + d),$$
$$x_1 = p'' = q_1' = r_{11} = ab + cd_1 = ac + bd_1 = bc + ad_1$$
$$= (a + b)(c + d_1) = (a + c)(b + d_1) = (b + c)(a + d_1).$$

Gilt nun überdies die vierte, allein noch mit den drei bisherigen verträgliche Tetrade $d\cdot 3$, so wird nicht nur, gemäss der Zusammenstellung $(a\cdot 3)(b\cdot 3)(d\cdot 3)$,

$$p_1''' = q = r'_1 = a_1 b_1 + d_1 c = b_1 d_1 + a_1 c = a_1 d_1 + b_1 c,$$

usw., sondern es werden, entsprechend den noch fehlenden Kombinationen $(a\cdot 3)(c\cdot 3)(d\cdot 3)$ und $(b\cdot 3)(c\cdot 3)(d\cdot 3)$, die vier Schnittpunkt-Gruppenpaare für jedes unserer drei Geradenpaare sich zusammenziehen auf vier Paare obverser Punkte, durch deren jeden alle sechs Geraden gleichzeitig gehen. Übrigens ist in diesem besonderen Falle von den vier Punkten

a, b, c, d jeder durch die drei andern eindeutig bestimmt, da nämlich z. B. in

$$(a \cdot 3)(b \cdot 3)(c \cdot 3)(d \cdot 3) =$$
$$= \{0 = a(b_1 c_1 d_1 + b_1 cd + bc_1 d + bcd_1) + a_1(bcd + bc_1 d_1 + b_1 cd_1 + b_1 c_1 d)\}$$

die Koeffizienten von a und a_1 obvers sind.

Analoges gilt für die drei flachen Tetraden vom zweiten Typus zusammen mit der obversen Tetradenform.

Anmerkungen des Herausgebers.

Seite 401, Zeile 13 v. oben. Die Richtigstellung war nicht erforderlich, und der Faktor $(ab = 0)$ ist hier überflüssig; derselbe, oder $(b \leftarrow a_1)$, folgt nämlich aus $x = bx_1 + a_1x$ nicht minder als aus $ax + bx_1 = 0$, — wie Band 1 Seite 425 ausführlich bewiesen ist. — Auch sind es durchweg Äquivalenzen, vermittelst deren man von $x = bx_1 + a_1x$ aus — dem Rat des Verfassers Bd. 1 Seite 502 folgend und diese Gleichung rechter Hand auf Null bringend — zu $ax + bx_1 = 0$ gelangt. — Der Irrtum befremdet umso mehr, als der Verfasser sonst stets, und gerade auch bei den hier in betracht kommenden Sätzen (Bd. 1 Seite 502, 425, 446, 449 u. a.) sorgfältig auf die Äquivalenzen achtet.

„ 402, Zeile 12 v. unten. Statt anerkanntem lies: erkanntem. — Hier wird der Satz vom Dualismus, der noch Bd. 1 Seite 318 zum Beweis der dualen Gegenstücke einiger Sätze als „wirksames", wenn auch nicht unentbehrliches Hilfsmittel empfohlen worden, als solches in der Theorie wirksames Prinzip wieder aufgegeben. So wird es denn auch erst verständlich, wie der Verfasser in dem gegenwärtigen Band Seite 423, oben Zeile 4 (zum Korseltschen Beweis des Distributionsgesetzes) von den beiden Prinzipien $\mathrm{III}^{\circ}_{\times}$ und III°_{+} keines entbehren zu können meint, — während doch — selbstverständlich — das eine aus dem andern vermöge des Dualitätssatzes entspringt. — Vergl. übrigens unten Seite 596 die Anmerkung zu dieser Stelle.

„ 407, Zeile 3 v. o. Wer hier zum Beweis des Satzes den vom Verfasser gewiesenen Weg geht, der findet, dass „der Negand mit dem angeblichen Negate" zwar „das Produkt 0 richtig liefert", nicht aber im allgemeinen die Summe 1, sondern vielmehr

$$(ax + by + \cdots) + (a_1x + b_1y + \cdots) = x + y + \cdots,$$

und dass somit zu den bisherigen Voraussetzungen noch etwa die weitere $x + y + \cdots = 1$ oder $x_1y_1z_1 \cdots = 0$ hinzukommen muss, damit die Behauptung sicher zutrifft. Andernfalls hätte man richtig

$$(ax + by + cz + \cdots)_1 = a_1x + b_1y + c_1z + \cdots + x_1y_1z_1 \cdots.$$

(Auf diesen Sachverhalt wurde ich zuerst von Herrn Korselt aufmerksam gemacht. Vergl. auch Bd. 1, Seite 423 unten, über eine Fehlerquelle beim Negiren entwickelter Funktionen nach Th. 46_+) „koeffizientenweise"!)

Derselben Zusatz-Voraussetzung bedarf auch die (auf Seite 407) weiter folgende Behauptung, eine jede Funktion $f(x, y, z, \cdots)$ *disjunkter* Argumente $x, y, z, \cdots$ stelle sich, nach letzteren entwickelt, als lineare *homogene* Funktion dar; im allgemeinen wird vielmehr diese Entwicklung etwa lauten:

$$f\,(x, y, z, \cdots) = a\,x + b\,y + c\,z + \cdots + m\,x_1y_1z_1 \cdots,$$
$$f_1(x, y, z, \cdots) = a_1x + b_1y + c_1z + \cdots + m_1x_1y_1z_1 \cdots;$$

besteht aber noch die Beziehung

$$x + y + z + \cdots = 1,$$

so ist $f(x, y, z, \cdots)$, sowie $f_1(x, y, z, \cdots)$ homogen.

Dem entsprechend ist auch bei den auf Seite 408 und 409 folgenden Sätzen, die von homogenen linearen Funktionen disjunkter Argumente handeln, die Homogenität stets besonders vorauszusetzen.

Seite 413—414. Die Figuren oder sonstigen Objekte mit den Eigenschaften g werden mit denen von den Eigenschaften h in der Regel eben das gemein haben, was an Merkmalen den Komplexen g und h gemein ist (Seite 413, Absatz 2); d. h. das — kurz so zu nennende — „Schrödersche" Begriffsinhalts-Produkt gh wird mit dem „Voigtschen" in häufigen Fällen übereinstimmen. Zur weiteren Verdeutlichung des Unterschiedes könnte daher vielleicht noch folgende Bemerkung dienen. Für das Voigtsche Beispiel seien mit a', b', c', d' die Begriffsumfänge bezeichnet, welche den vier Begriffsinhalten a des Rechtecks, b des Rhombus, c der vierfach und d der zweifach symmetrischen ebenen Figur der Reihe nach zukommen. Dann ist zunächst umfangslogisch

$$(a' + c')(b' + c') = a'b' + c', = c',$$

d. h. es gehören zu den Rechtecken a' und den vierfach symmetrischen Figuren c', sowie zugleich zur Klasse der Rhomben b' nebst wieder den vierfach symmetrischen Figuren c' ausser diesen c' nur solche Rechtecke a', welche gleichzeitig Rhomben $a'b'$ sind, d. h. die Quadrate, und ebenso unter den Rhomben nur die Quadrate, — welch letztere indessen bei den vierfach symmetrischen Figuren c' ohnehin schon mit inbegriffen waren. Dies lediglich dual umgeschrieben, ergibt für die „Schrödersche" Inhaltslogik

$$ac + bc = (a + b)c = c.$$

$(a + b)c = c$ gilt auch nach „Voigtscher" Auffassung. Dagegen sind zu unterscheiden der „Voigtsche" Begriff $V = ac$ von dem, was „das Rechteck a mit allen vierfach symmetrischen Figuren c gemein hat", (nämlich die zweifache Symmetrie $ac = d$, Seite 411, vorletzter Absatz), — und der „Schrödersche" Begriff $S = ac$ dessen, „was (nur entweder) a oder c (oder auch beides zugleich) ist" (Seite 414, 1. Zeile), — und wozu unter den zweifach symmetrischen Figuren z. B. die Rhomben *nicht* gehören Dem beschränkteren Umfang des letzteren Begriffes S muss ein inhaltlicher Überschuss irgend welcher Art über den ersteren Begriff V entsprechen; allein dieses Überschussmerkmal anzugeben, darin dürfte eine von den Seite 414 oben angedeuteten Schwierigkeiten bestehen. Vergl. auch Bd. 1, Seite 99 (über „inhaltslose" Begriffe).

Wenn nach Seite 419 des gegenwärtigen Bandes der Verfasser mit Herrn Lüroth (und Voigt, cf. Seite 410/411) den Kernpunkt der Frage nach weiteren gruppenlogischen Beispielen in dem Umstand erblickt, „dass $a + b$ nicht nur die Individuen der beiden Klassen a und b enthält, sondern auch noch andere", — ein Fall, der bei der „Schröderschen" *identischen* Inhaltslogik nicht minder vorliegt als bei der „Voigtschen" *Gruppen*logik, — so ist dabei stillschweigend angenommen, dass das Klassen- oder Begriffsprodukt ab als gewöhnliches identisches definirt bleibt. Sind dann nämlich etwa die Individuen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots$ nicht in a und nicht in b, dennoch aber in $a + b$ enthalten, so braucht man unter c zunächst nur eben ein solches Individuum γ (vergl. das Korseltsche Beispiel 5, Seite 415—417) oder auch eine Klasse von solchen zu verstehen, damit $ac = bc = 0 = ac + bc$ neben $(a + b)c = c \neq 0$ werde; oft findet sich aber auch eine Klasse c, welche wenigstens eines oder mehrere dieser γ mit $a + b$ gemein hat, während nicht nur — selbstverständlich — ac und bc, sondern dann auch $ac + bc$ von den γ frei sind. — Wenn nun aber dem „Schröderschen" Produkt ac bezw. bc das Merkmal c (der vierfachen Symmetrie), obschon fehlend in a und b, doch derart alternativ bedingt zukommt, dass es in der Summe $ac + bc$ wieder unbedingt auftritt, so versteht sich, wie hier der Distributionssatz statt haben kann trotz des gruppenlogischen Charakters der Begriffssumme.

Seite 418, Zeile 19 v. o. Da der Verfasser, einer Zusatzbemerkung im Manuskript zufolge, es gleichwol für wünschenswert hielt, dass dieser Beweis „auch allgemein und ohne übergrossen Aufwand von zahlentheoretischem Erkenntnisskapital elegant geleistet werde", so möge hier ein Beweis nachträglich folgen. — Sei

$$\mu = \alpha p' + \beta q' + \cdots + \lambda z'$$

irgend eine unter den Zahlen der Klasse a oder $(\alpha, \beta, \cdots \lambda)$, und darin $p', q', \cdots z'$ die diesem Element μ entsprechenden Spezialwerte der $p, q, \cdots z$. Es wird dann auch jedes Vielfache von μ, etwa

$$\mu m = \alpha \cdot mp' + \beta \cdot mq' + \cdots + \lambda \cdot mz'$$

wieder die Form $\alpha p + \beta q + \cdots$ haben oder der Klasse a angehören; es wird die Klasse $(\mu) \Subset a$ der Klasse a eingeordnet sein. Dasselbe gilt auch von jeder Summe eines solchen Vielfachen μm mit beliebigen Vielfachen der „Bestimmungselemente" $\alpha, \beta, \ldots \lambda$:

$$\mu m + \alpha p'' + \beta q'' + \cdots = \alpha(mp' + p'') + \beta(mq' + q'') + \cdots.$$

Man könnte daher die Zahl μ auch den Bestimmungselementen der Klasse a beifügen:

$$a = (\alpha, \beta, \cdots \lambda, \mu) = (\alpha, \beta, \cdots \lambda).$$

Z. B. $(2) = (2, 6)$; $(2, 5) = (2, 4, 5, 13)$. Umgekehrt wird man darum auch bei der Bezeichnung der Klassen zur Abkürzung jedes Bestimmungselement fortlassen, welches schon in der durch die übrigen gegebenen Klasse vorkommt. Dagegen bewirkt die Aufnahme einer noch nicht der Klasse a angehörenden Zahl unter deren Bestimmungselemente, wie leicht zu sehen, eine Erweiterung der Klasse, und es wird allgemein

$$(\alpha) \Subset (\alpha, \beta) \Subset (\alpha, \beta, \gamma) \Subset \cdots.$$

Ist nun ferner $\nu = \alpha p'' + \beta q'' + \cdots$, wie μ, ein zweites beliebiges Element derselben Klasse a, so gehört zu a neben der Klasse (ν) auch jede Zahl der Form

$$\mu m + \nu n = \alpha(mp' + np'') + \beta(mq' + nq'') + \cdots,$$

oder es ist die Klasse $(\mu, \nu) \Subset a$. Beispiele: $(\alpha, \alpha + \beta) \Subset (\alpha, \beta)$; $(8, 5) \Subset (3, 5) \Subset (2, 3)$. — Die Betrachtung lässt sich ebenso auf beliebig viele Elemente $\mu, \nu, \varrho, \cdots$ ausdehnen: Gehören dieselben irgend einer Klasse a an, so enthält a auch alle Elemente der Klasse $(\mu, \nu, \varrho, \cdots)$. — Stellen wir uns jetzt unter $\mu, \nu, \varrho, \cdots$ die sämtlichen zwischen zwei Klassen a und b gemeinsamen Elemente vor; dann bestimmen diese eine Klasse $(\mu, \nu, \varrho, \cdots)$, deren Elemente alle sowol der Klasse a als der Klasse b angehören müssen; es sind dies also die Elemente $\mu, \nu, \varrho, \cdots$ selbst, und $(\mu, \nu, \varrho, \cdots) = ab$.

Damit ist die Klasse ab freilich durch ihre sämtlichen unbegrenzt vielen Elemente bestimmt. Auf die kürzeste, eben noch hinreichende Zusammenstellung von Bestimmungselementen führt etwa folgendes Verfahren: Unter den zwischen a und b gemeinsamen Elementen werde das kleinste μ herausgesucht. Hierauf sei ν wieder das kleinste unter den nicht zur (gemeinsamen) Klasse (μ) gehörigen gemeinsamen Elementen, so dass wieder $(\mu, \nu) \Subset ab$ wird. Sind jetzt ausser den Elementen der Klasse (μ, ν) noch weitere den Klassen a und b gemein, so sei ϱ wieder das kleinste von diesen, wonach $(\mu, \nu, \varrho) \Subset ab$. Usw.

„ 420, Zeile 9 v. unten. Herr Korselt zeigt durch die umstehende Fig. 45, dass in dem beschränkteren Voigtschen Denkbereich das Distributionsgesetz nicht allgemein gilt, da hier offenbar $ac = bc = 0$, dagegen $(a + b)c = c \neq 0$ ist. Die vorliegende Voigtsche Bemerkung bildet also in der That einen besonderen („siebenten") Beweis für die Unbeweisbarkeit des Distributionssatzes.

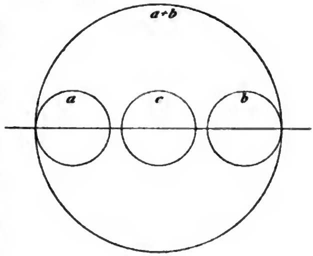

Fig. 45.

Seite 423, oben Zeile 4. Der hier gegebene Beweis des Distributionssatzes aus $\mathrm{III}^0_\times$ und III^0_+ zusammen entstammt einem Brief des Herrn Korselt an den Verfasser aus dem Jahre 1895. Dass indessen beide Prinzipien unentbehrlich seien (wenn man absieht vom Dualitätssatz, vergl. die Anm. oben Seite 593), trifft nicht zu und ist auch bald darauf von Herrn Korselt selbst in einer weiteren brieflichen Mitteilung an den Verfasser widerlegt worden. Aus einem späteren ausführlicheren Briefe von 1899, den ich, wie auch die beiden erstgenannten von 1895, bei den hinterlassenen Papieren des Verfassers aufgefunden habe, sei hier der wesentliche Teil des Beweises wiedergegeben, wenn auch, mit freundlicher Erlaubniss des Urhebers, in einer den Schröderschen Gewohnheiten mehr angepassten Darstellungsweise. Es werden aus $\mathrm{III}^0_\times$ und den in Band 1, Seite 299 bis 306 darauf gegründeten Theoremen 29), 30), 31) und 32) zunächst die De Morganschen Theoreme 36) in eigenartiger Weise hergeleitet, nämlich mit viermaliger Anwendung des Prinzips $\mathrm{III}^0_\times$, — welches dabei am bequemsten in der Gestalt $a = ab + ab_1$ (Band 1, Seite 294, Anmerkung 2) geschrieben wird, — derart, dass immer einer der beiden Posten rechts verschwindet. — So folgt

aus $\mathrm{III}^0_\times$ und $30_\times$) $\quad a = a \cdot a_1 b_1 + a(a_1 b_1)_1 = a(a_1 b_1)_1,$

nach $20_\times$) $\quad a ⋹ (a_1 b_1)_1 \quad$ und ebenso $\quad b ⋹ (a_1 b_1)_1,$

und nach (3_+) $\quad a + b ⋹ (a_1 b_1)_1. \qquad \alpha)$

Multiplizirt man in dieser Subsumtion beiderseits mit $a_1 b_1$, so wird nach $30_\times$) und $5_\times$)

$$(a + b) a_1 b_1 = 0,$$

wonach wieder in der folgenden Anwendung des Prinzips $\mathrm{III}^0_\times$ rechts das erste Glied fortfällt:

$$a_1 b_1 = a_1 b_1 (a + b) + a_1 b_1 (a + b)_1 = a_1 b_1 (a + b)_1$$

und nach $20_\times$) $\quad a_1 b_1 ⋹ (a + b)_1. \qquad \beta)$

Eine zweite ähnliche Reihe von Folgerungen erhält man aus der weiteren Anwendung von $\mathrm{III}^0_\times$:

$$(a + b)_1 = (a + b)_1 a + (a + b)_1 a_1,$$

wo nämlich das erste Glied rechts wieder wegfällt wegen $23_\times$)

$$(a + b)_1 a = (a + b)_1 a (a + b) = 0,$$

und somit $\quad (a + b)_1 = (a + b)_1 a_1,$

oder nach $20_\times$) $\quad (a + b)_1 ⋹ a_1, \quad$ ebenso $\quad (a + b)_1 ⋹ b_1,$

endlich nach $(3_\times)$ $\quad (a + b)_1 ⋹ a_1 b_1 \qquad \gamma)$

wird. Hier multipliziren wir beiderseits mit $(a_1 b_1)_1$, um so wieder

$$(a + b)_1 (a_1 b_1)_1 = 0$$

das zweite Glied der Entwicklung von $(a_1 b_1)_1$ nach dem Prinzip $\mathrm{III}^0_\times$ verschwinden zu sehen,

$$(a_1 b_1)_1 = (a_1 b_1)_1 (a + b) + (a_1 b_1)_1 (a + b)_1 = (a_1 b_1)_1 (a + b),$$

woraus man wieder nach $20_\times$) findet

$$(a_1 b_1)_1 ⋹ a + b. \qquad \delta)$$

Aus α) und δ) bezw. aus β) und γ) lassen sich jetzt die De Morganschen Theoreme zusammensetzen. Mit deren Hilfe ist dann leicht III_{+}^{0} aus $III_{\times}^{0}$ abzuleiten, wonach endlich das Distributionsgesetz etwa wie Seite 422 folgen kann. — Herr Korselt erwähnt noch, dass man dieser Herleitung des Distributionssatzes aus $III_{\times}^{0}$ eine zweite genau dual entsprechende, doch völlig selbständige, aus III_{+}^{0} gegenüberstellen kann.

Mir scheint beim Beweis der De Morganschen Sätze aus $III_{\times}^{0}$ noch etwas vorteilhafter, — ähnlich wie Seite 402 — auszugehen von dem Satz $38_{\times}$) $(a \mathrel{=\!\!\!\in} b) = (ab_1 = 0)$, welcher in Band 1, Seite 358 ausschliesslich aus $III_{\times}^{0}$ und den Theoremen bis 30) hergeleitet worden, (während bei 38_{+}) das volle Prinzip $III_{\times}$ zugezogen wurde). Wird dieser Satz $38_{\times}$) sonach etwa unmittelbar hinter 31) angereiht, so kann sich dann das Th. 37) mit dem Seite 403 gegebenen „Beweis 2" anschliessen, hierauf 32), und endlich 36) mit Beweisen nach Art des zweiten Teils der Peirceschen Beweise Seite 404, ohne Hilfe des dort verwendeten Peirceschen Th. 41), z. B. nach 6_{+}), 37), 31) u. a.

$$(a_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 + b_1)(b_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 + b_1) = \{(a_1 + b_1)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a\}\{(a_1 + b_1)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} b\} =$$
$$= \{(a_1 + b_1)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} ab\} = \{(ab)_1 \mathrel{=\!\!\!\in} a_1 + b_1\},$$

usw. Jetzt liegt es nahe, den Satz $38_{\times}$) mittelst 36) und 32) durch 38_{+}) zu ergänzen, und ebenso dem Prinzip $III_{\times}^{0}$ sein duales Gegenstück III_{+}^{0} an die Seite zu stellen, um somit, nach derart kurzer Unterbrechung des dualsymmetrischen Beweisganges, von da ab auf die Korseltsche Art zum Distributionsgesetz zu gelangen. — Dieses Verfahren, so eng sich anlehnend in seinem ersten Teil an die Bemerkungen des Verfassers Seite 401 bis 404, und zuletzt überleitend auf die Schlussweise des Herrn Korselt Seite 422, scheint mir am besten geeignet zur Aufnahme in den vom Verfasser geplanten und wiederholt (Seite 406 und 423) erwähnten „Abriss" der algebraischen Logik, den ich zu verwirklichen gedenke. Es sei mir erlaubt zu erwähnen, dass ich, ohne Kenntniss von den nunmehr vorliegenden Behandlungsweisen des Gegenstandes durch den Verfasser und Herrn Korselt, einen in wesentlichen Teilen ähnlichen Beweisgang auch in meiner Programmschrift „die Grundlagen des Gebietekalkuls" 1900 verfolgt habe.

Seite 461, oben Zeile 4ff. Obgleich mir einige Veröffentlichungen von Peano bekannt waren, bin ich doch erst dank einer brieflichen Bemerkung des Herrn Couturat auf den auffallenden Irrtum des Verfassers bezüglich der Peanoschen Zeichen ε und $\supset$ aufmerksam geworden. In Peanos „Notations de Logique mathématique" vom Jahre 1894, welche dem Verfasser zur Zeit der Entstehung des gegenwärtigen Textes (vermutlich nach 1895, nach dem Erscheinen des Bandes 3, I der Algebra der Logik) vorgelegen haben könnten, und die ich im Nachlass des Verfassers vorfinde, ist Seite 7 zu lesen: „Soit a une classe. Alors $x \varepsilon a$ représente la proposition singulière: «x est un individu de la classe a», ou «x est un a»", während sodann von zwei Klassen a und b mit $a \supset b$ gesagt sein soll: «la classe a est contenue dans b», «tout a est b»; ferner Seite 10, § 9: „On adopte entre propositions les signes déjà expliqués entre classes . . . Soient a, b des propositions: $a \supset b$ signifie «de la a on déduit la b» ou «la b est conséquence de la a»" u. s. f. — In späteren Schriften Peanos ist die äussere Gestaltung der vom Verfasser Seite 460 und 461 besprochenen Zeichen zum Teil geändert.

„ 536, Zeile 9 v. u. Herr Lüroth hatte die Güte, mich darauf aufmerksam zu machen, dass hier die Absicht des Verfassers nicht ganz leicht zu erkennen ist, und dass der Satz besser etwa so lauten würde: „Jede nach x aufgelöste Ungleichung ist nun an Stelle des Aussagenfaktors, aus welchem sie entstanden ist, in den Ausdruck von A einzusetzen und sind wenigstens . . ."

Literaturverzeichniss

nebst Bemerkungen.

Unter diesem Titel beabsichtigte der Verfasser die dem 1. Band beigegebene Bibliographie fortzusetzen und zu ergänzen. Im handschriftlichen Nachlass fanden sich hiezu indes nur ganz wenige vorbereitende Notizen. Der Herausgeber bedauert und bittet um Nachsicht, dass das hier folgende Verzeichniss wol nicht annähernd so reichhaltig und vollständig ausfallen konnte, als dies bei der umfassenden Literatur- und Personenkenntniss des Verfassers — und bei den ihm in grösserem Masse zu Gebote stehenden Hilfsmitteln — zu erwarten gewesen wäre. Aus den letzten Jahren insbesondere sind einschlägige literarische Erscheinungen nur vereinzelt vertreten; dieselben sollen in grösserer Zahl bei Gelegenheit weiterer Publikationen aus dem Schröderschen Nachlass nachgetragen werden. — Neben den in den beiden Abteilungen des 2. Bandes zitirten, nicht schon im 1. Band mit aufgeführten Schriften enthält das folgende Verzeichniss Arbeiten über Logik, insbesondere über mathematische Logik, aus der vom Verfasser hinterlassenen Handbibliothek — grossenteils erschienen *nach* Abfassung von Bd. 2, II —, sowie einige dem Herausgeber anderweitig bekannt gewordene Werke; endlich sind, wie im 1. Band aus Venn[1] (cf. Bd. 1, Seite 700 die Vorbemerkung), so jetzt aus der 2. Auflage dieser Schrift, Venn[12], weitere Literaturangaben beigefügt, worunter wieder diejenigen mit Stern * versehen sind, denen Venn für die rechnerische Logik eine besondere Bedeutung beimisst.

Boole, Mary.

1) Symbolical methods of study. London, Kegan & French 1884, 197 Seiten.
2) Logic taught by love. Marylebone, Edwards, 1890, 176 Seiten.

Bradley, F. H. 1) The principles of logic, 1883.

Burali Forti, Cesare.

1) Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science. „Enseignement mathématique", 1889, Seite 246.
2) Teoria delle Grandezze. Parte IV del „Formulario" publicato dalla „Rivista di Matematica". Torino, 1893.
3) I numeri negativi. „Rivista di Matem". t. 3 p. 138.
4) Sulle classi derivate a destra e a sinistra. „Atti della Accademia di Torino". Vol. 29, 1894.
5) Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti. „Rend. Circolo Matem. Palermo." T. 8, 1894.
6) *Logica matematica.* Milano, Hoepli, 1894.
7) Sul limite delle classi variabili, „Atti Accad. Torino", 1895.
8) Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles. „Mathem. Annalen", Bd. 47, 1895.
9) Le classi finite; Atti Acc. Torino, 1896.

10) Sopra un teorema del sig. G. Cantor; ibid. 1896.
11) Exercice de traduction en symboles de logique mathématique. „Bulletin de Mathématiques élémentaires". Turin, 1897.
12) Il metodo del Grassmann nella geometria proiettiva. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1896—97.
13) Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. Paris, Gauthier-Villars, 1897.
14) Sui simboli di logica matematica. „Il Pitagora", 1900, p. 1, 65, 129.

Castillon, G. F. 1) s. Bd. 1, Seite 702.
2) Réflexions sur la logique. „Mém. de l'Acad. Berlin", 1802.

Couturat, Louis.
1) De l'infini mathématique; Paris, Alcan, 1896.
2) La logique de Leibniz, d'après des documents inédits; ibid. 1901.
3) Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits de manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre; ibid. 1903.
4) Histoire de la langue universelle, en collaboration avec M. Leau; Paris, Hachette, 1903.
5) *L'Algèbre de la logique;* Paris, Gauthier-Villars, 1905. (Scientia, no. 24.) 100 Seiten.
Von demselben Verfasser befinden sich in Vorbereitung: Les principes des Mathématiques; *Manuel de Logistique (Logique algorithmique);* Histoire de la Logistique. Ferner sind zahlreiche Aufsätze von ihm erschienen u. a. in der „Revue de Métaphysique et de Morale"; Paris, Colin.

Darjes, J. G. 1) s. Bd. 1, Seite 702.
*2) Introductio in artem inveniendi. 2. Aufl., 1747.

De Morgan, Augustus. 1) .. 10) s. Bd. 1, Seite 702.
11) On the foundations of Algebra; „Transactions of the Cambridge Philosophical Society", 1841.
12) Trigonometry and double Algebra, 1849.

Franklin-Ladd, Frau, s. Ladd.

Franklin, Fabian. 1) s. Johns Hopkins University circulars, April 1881.

Frege, Gottlob. 1) .. 4) s. Bd. 1, Seite 704.
5) Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. 1. Band. Jena, Pohle, 1893, 254 Seiten.
6) Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik. „Archiv für systematische Philosophie", Bd. 1, 1895, Seite 433 .. 456.
7) Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene. Bericht der math. Klasse der Gesellsch. zu Leipzig, 6. Juli 1896.

Garden, F. 1) Elements of logic, 1867.

Grassmann, Hermann. 1) s. Bd. 1, Seite 704.
2) Die lineale Ausdehnungslehre, 1844.

Grassmann, Robert. 1) u. 2) s. Bd. 1, Seite 704.
3) (Der Formenlehre) Drittes Buch: Die Bindelehre oder Kombinationslehre. Stettin, R. Grassmann, 1872, 24 Seiten.

4) Viertes Buch: Die Zahlenlehre oder Arithmetik; ibid. 62 Seiten.
5) Fünftes Buch: Die Ausenlehre oder Ausdehnungslehre; ibid. 62 Seiten.
6) *Die Logik und die andern logischen Wissenschaften;* ibid. 1890, 188 Seiten.
7) Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grössen in strenger Formel-Entwicklung; ibid. 1891.

Gregory, D. J.
1) On the real natural of Symbolic Algebra. „Transactions of the Royal Society of Edinburgh". Vol. 14, 1839.

Hassler, K. D. 1) Psychologie und Logik, 1832.

Hontheim, Joseph, S. J.
1) Der logische Algorithmus in seinem Wesen, in seiner Anwendung und in seiner philosophischen Bedeutung. Berlin 1895.

Huntington, Edward V.
1) Simplified definition of a group. „Bulletin of the American mathematical Society", Vol. 8, April 1902, Seite 296 .. 300.
2) *Sets of independent postulates for the algebra of logic.* „Transactions of the American math. Soc.", Vol. 5, Juli 1904, Seite 288 .. 309.

Husserl, E. G.
*1) Rezension der „Vorlesungen über die Algebra der Logik" von E. Schröder; „Göttingische Gelehrte Anzeigen", April 1891, Seite 243 .. 278.
*2) Der Folgerungskalkul und die Inhaltslogik; „Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie", 1891, Seite 168 .. 189.
3) Nachträge zum vorigen Aufsatz; ibid. Seite 351 .. 356.

Jäger, J. N. 1) Handbuch der Logik, 1839.

Johnson, W. E.
*1) The logical calculus. Mind, Vol. 1, new series, 1892, Nos. 1, 2, 3.
2) Sur la théorie des égalités logiques. „Bibliothèque du Congrès internat. de Philosophie", III. Section, Paris, Colin 1901.

*Kaulich, W. 1) Handbuch der Logik, 1869.

Kelland, P., and Tait, P. G. 1) Introduction of quaternions, 1873.

Kempe, A. B.
1) *Memoir on the theory of mathematical form.* Philos. Transactions, vol. 47, p. 1.
2) Note zur vor. Abhandlung. Proceed. Roy. Society, vol. 42, p. 193.
3) *On the relation between the logical theory of classes and the geometrical theory of points.* „Proceedings of the London mathematical Society", Vol. 21, p. 147 .. 182.
4) The subject-matter of exact thought. „Nature", Vol. 43, 1890, p. 156 .. 162.

Korselt, Alwin.
1) Bemerkung zur Algebra der Logik. Mathematische Annalen, Bd. 44, Seite 156 u. 157.

2) Anzeige von Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, 1. Band. „Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht", Bd. 28, Seite 578 .. 599, und Bd. 29, Seite 30 .. 43.

3) Über die Grundlagen der Mathematik. „Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", Bd. 14, 1905, Seite 365 .. 389.

Krause, K. C. F. 1) Abriss des Systems der Logik, 1828.

Ladd Franklin, Christine. 1) .. 4) s. Bd. 1, Seite 707.

5) The reduction to absurdity of the ordinary treatment of the Syllogism. „Science", Vol. 13, p. 574 .. 576, 12. April 1901.

*Lichtenfels, J. 1) Lehrbuch der Logik, 1842.

Loria, Gino.

1) La logique mathématique avant Leibniz. „Bulletin des sciences mathématiques", t. 18. Mai 1894.

Lüroth, Jakob.

1) Anzeige von E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, 1. Band. „Zeitschrift für Math. und Phys.", Bd. 36, Hist. lit. Abteilung, Seite 161 .. 169.

2) *Aus der Algebra der Relative.* „Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", Bd. 13, 1904, Seite 73 .. 111.

Macfarlane, Alexander. 1) .. 10) s. Bd. 1, Seite 708.

11) Principles of the algebra of Physics. „Proceedings of the American Association for the advancement of science", Vol. 40, 1891, p. 65 .. 117.

12) On exact analysis as the basis of language. „Transactions of the Texas academy of science", Febr. 1892, p. 5 .. 10.

13) The fundamental principles of Algebra. „American Association for the advanc. of science", Annual meeting, Columbus, Ohio, 1899.

14) Les idées et principes du calcul géométrique. Congrès internat. de Philosophie. Paris, 4 août 1904.

McColl, Hugh. 1) .. 8) s. Bd. 1, Seite 708.

9) Implicational and equational logic. „Philosophical Magazine." Vol. 11, 5. Series, Jan. 1881, p. 40 .. 43.

10) Symbolical or abbreviated language with an application to mathematical probability; „Math. Questions," Vol. 28, p. 20 .. 23.

11) Symbolical language Nr. 2, ibid. p. 100.

12) *The calculus of equivalent statements* (fifth paper). Proc. Lond. math. Soc. Vol. 28, p. 156 .. 183.

13) Desgl. (sixth paper), ibid. Vol. 28, p. 555 .. 579.

14) Desgl. (seventh paper), ibid. Vol. 29, p. 98 .. 109.

15) On the calculus of equivalent statements. Explanatory note and correction, ibid. Vol. 30, p. 330 .. 332.

16) Symbolic reasoning (II), „Mind." Vol. 6, N. S., p. 3 .. 20.

17) Desgl. (III). ibid. Vol. 11, N. S., p. 1 .. 10.

18) *La logique symbolique et ses applications.* „Bibliothèque du Congrès internat. de Philosophie". Section III. Paris 1901. p. 135 .. 183.

Mich, J. 1) Grundriss der Logik. 1871.

Müller, Eugen. 1) Über die Algebra der Logik: I. Die Grundlagen des Gebietekalkuls; II. Das Eliminationsproblem und die Syllogistik. Zum Programm des Gymnasiums Tauberbischofsheim. 1900, 1901. 30+22 Seiten.

*Monro, C. J. 1) Review of symbolic logic. „Mind." Vol. 6.

Moore, E. H. 1) A definition of abstract groups. „Transactions Americ. math. Soc." Vol. 3, 1902.

Nagy, Albino.
1) Fondamenti del calcolo logico. „Giornale di Matematiche." Vol. 28, 1890. 35 Seiten.
2) Sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche. „Rendiconti della Accademia dei Lincei." Vol. 6, 1890, p. 373 . . 378.
3) Principî di logica. Torino, Loescher. 1892.
4) I teoremi funzionali nel calcolo logico. „Rivista di Matematica", Nov. 1892, p. 177 . . 179.
5) Über Beziehungen zwischen logischen Grössen. „Monatshefte für Mathematik und Physik", 4. Jahrg.
6) Über das Jevons-Clifford'sche Problem; ibid. 5. Jahrg. Seite 331 . . 345.

Padoa, A.
1) Conférences sur la logique mathématique. Université nouvelle de Bruxelles. 1898.
2) Algebra elementare logicamente esposta. Conferenze tenute nella R. Universitá di Pavia, 1899, p. 35.
3) Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, avec une introduction logique à une théorie déductive quelconque. Congrès internat. de Philosophie. Paris, 3. août 1900. — Vom Verfasser bearbeitet unter dem Titel: *Numeri interi relativi.* „Revue de Mathématiques", Bd. 7, 1901, Seite 73 . . 84.
4) Le problème Nr. 2 de M. David Hilbert; „Enseignement mathématique". Vol. 5, 1903, p. 85 . . 91.

Peacock, George. 1) Algebra 1830.
2) On certain branches of analysis. „Report of the British Assoc. for the adv. of science." 1834.
3) Symbolic Algebra. 1845.

Peano, Giuseppe. 1) . . 3) s. Bd. 1, Seite 709.
Zahlreiche, nach Inhalt oder Darstellungsweise hierher gehörige Arbeiten von Peano und seinen Mitarbeitern erscheinen seit 1891 in „*Rivista di Matematica*" bez. „*Revue de Mathématiques,*" Turin, Bocca, sowie in dem 1892 begonnenen „*Formulaire de Mathématiques*". Turin, Bocca und Clausen, bis jetzt 4 Bände; Rezension von Schröder, Alg. d. L., Bd. 1 und 2, I: Riv. di Matemat., t. 1, p. 164 und t. 6, p. 95. Besonders bemerkenswert:
4) *Notations de logique mathématique.* Introduction au „Formulaire de Mathématiques", 1894. 52 Seiten.
5) Les propositions du V. livre d'Euclide réduites en formules. „Mathesis", t. 10. 1890. Fortsetzung: *Sommario dei libri VII, VIII e IX d'Euclide.* Riv. di Mat. t. 1.

6) Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. „Mathemat. Annalen," Bd. 37, 1890.
7) Principios de Lógica matemática. „Progreso matemático," Zaragoza, 1892, p. 20. Übersetzung aus Riv. di Matem., t. 1.
8) Lezioni di Analisi infinitesimali.
Torino. 1893. Ein Teil dieses Werkes: Genocchi, Differentialrechnung, deutsch von Bohlmann und Schepp. Leipzig, Teubner, 1899; bei dieser Bearbeitung durch Genocchi ist mit benützt: Sulla definizione di integrale, 1895, sowie die folg. Schrift:
9) *Studii di Logica matematica.* „Atti della R. Accademia di Torino." Vol. 32, 1897, p. 3 . . 21.
10) Saggio di calcolo geometrico; ibid. Vol. 31, 1896, p. 3 . . 26.
11) Sur la définition de la limite d'une fonction. Exercice de logique mathématique. „American Journal of Mathematics". Vol. 17, 1894, p. 37 . . 68. Aus Riv. di Matem., t. 2, p. 77.

Peirce, Charles S. 1) . . 11) s. Bd. 1, Seite 710.
Zu 6) *„Brief description . . ."*: Ein Exemplar dieser Schrift befindet sich im Nachlass des Verf. und trägt eine Bemerkung von dessen Hand, wonach dieselbe separat in Baltimore erschienen und nur in wenigen Exempl. in den Handel gekommen ist. Am Schluss ist das Datum „Baltimore, Jan. 7, 1882," bezw. in einem „Postscript": January 16, 1882" beigedruckt.
12) Rezension von E. Schröder, Alg. d. L., Bd. 1 und 2, I: „Monist," 1896.

Pieri, M.
1) Sui principii che reggono la geometria di posizione. Note I, II, III. „Atti della Accademia di Torino", 1895—96.
2) Un sistema di postulati per la geometria proiettiva astratta degli iperspazî. „Revue de Mathématiques", 1896.
3) Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta. „Atti della Acc. Torino", 1897.
4) Nuovo modo svolgere deduttivamente la geometria proiettiva. „Reale istituto Lombardo di scienze e lettere" (Milano.) Rendiconti, ser. 2, vol. 31, 1898.
5) I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo. „Atti della Acc. Torino", 1898, t. 48.
6) Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto; ibid. 1900, t. 49.

Ploucquet, Gottfried. 1) . . 4) s. Bd. 1, Seite 711.
Unter 1) ist ein Druckfehler zu berichtigen: Man lese: Nach Itelson [1]: 1766 statt 1776. — Ferner ist zu der Fussnote Seite 100 dieses Bds. 2, I zu bemerken, dass nach Venn [13] p. 8 sq. und 538 die Doktrin von der „Quantifikation des Prädikates" schon auf Ploucquet zurückgeht und in dem Kapitel vom calculus logicus in 4), sowie auch in der zweiten von den beiden folgenden Schriften enthalten ist:
*5) Fundamenta philosophiae speculativae, 1759.
*6) Institutiones philosophiae theoreticae sive de arte cogitandi; 1772.

*Pokorny, J. 1) Neuer Grundriss der Logik, 1878.

Poretzki, Platon S.
1) *Über die Methoden zur Auflösung der logischen Gleichheiten und über die inverse Methode der mathematischen Logik;* „Bulletin der

physiko-mathematischen Gesellschaft zu Kasan", II, III, 1884 (russisch); cf. „Fortschritte der Mathematik", Bd. 16, p. 43 sq.

2) Lösung des allgemeinen Problems der Wahrscheinlichkeitstheorie mittelst der mathematischen Logik; ibid. 1887.

3) La loi des racines en logique. „Revue de Mathématiques"; t. 6, 1896, Seite 5 . . 8.

4) Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques; „Bull. der phys.-math. Gesellsch. Kasan", Bd. 8, 1899, Seite 33 . . 103, 129 . . 181, 183 . . 216.

5) Exposé élémentaire de la théorie des égalités logiques à deux termes. „Revue de Métaphysique et de Morale"; Bd. 8, 1900, Seite 169 . . 188.

6) Théorie des égalités à trois termes. „Bibliothèque du Congrès internat. de Philosophie", Section III, Paris, 1901, p. 201 . . 233.

7) Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques; Supplément zu 4); Kasan Gesellsch. Bd. 10, 1902, Seite 50 . . 84, 132 . . 180, 191 . . 230; Bd. 11, Seite 17 . . 63.

8) Théorie des non-égalités logiques; ibid. 1904.

Prochazka, J. J. 1) Gesetzbuch für das Denken. Ein Handbuch der Logik.

Reimarus, H. S. 1) Vernunftlehre, 1790.

Reyes y Prósper, Ventura.

1) Christina Ladd Franklin. Matemática americana y su influencia en la Lógica simbólica. „Progreso matemático." Zaragoza, Bd. 1, Nr. 12, Dez. 1891.

2) Ernesto Schroeder. Sus merecimientos ante la Lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras; ibid. Bd. 2, Nr. 14, Febr. 1892.

Russel, Bertrand.

1) *Sur la logique des relations.* „Revue de Mathématiques", t. 7, 1901, p. 115 . . 136.

2) The principles of Mathematics. Vol. I, Cambridge, 1903.

Sanderson, R. 1) Logicae artis compendium. 1860.

Schaden, E. A. von. 1) System der positiven Logik. 1841.

Schröder, Ernst. 1) . . 9) s. Bd. 1, Seite 712.

10) Über das Zeichen. Direktoratsrede an der Technischen Hochschule in Karlsruhe 1890. In Kommission bei Fock, Leipzig.

11) Eine Berichtigung zum ersten Bande meiner Algebra der Logik. „Math. Annalen", Bd. 36, 1890, Seite 602.

Diese Berichtigung zu Bd. 1 Seite 671 ist seitdem auch unter die „Ferneren Berichtigungen und Nachträge zum ersten Bande", Bd. 2, I, Seite XII, Zeile 18 v. u., sowie in den gegenwärtigen Teil des Werkes, Seite 453, Zeile 10 v. u. aufgenommen.

Eine vollständige Liste der Schröder'schen Publikationen findet sich oben Seite XVII, jedoch mit anderer Numerirung.

Seton, J. Dialectica. 1611.

Sigwart, H. C. W. 1) Handbuch zu Vorlesungen über die Logik. 2. Aufl. 1835.

Vailati, G.

1) Un teorema di logica matematica. „Rivista di Matematica", t. 1, p. 103.
2) Le proprietà fondamentali delle operazioni della logica deduttiva, studiate dal punto di vista d'una teoria generale delle operazioni; ibid., t. 1, p. 127.
3) Sui principî fondamentali della geometria della retta; ibid., t. 2, p. 71.
4) Dipendenza fra le proprietà delle relazioni; ibid. t. 2, p. 161.

Venn, John. 1) .. 11) s. Bd. 1, Seite 714.

12) (Extra Series) University Library Bulletin. Catalogue of a collection of Books on Logic, presented to the library by John Venn. Cambridge, 1899. 125 Seiten — worauf 1124 Logikschriften verzeichnet.
13) *Symbolic Logic.* Second edition, revised and rewritten. London, Macmillan, 1894. 540 Seiten.

*Victorin, A. 1) Neue natürlichere Darstellung der Logik. 1835.

Voigt, Andreas Heinrich. 1) s. Bd. 1, Seite 714.

2) Was ist Logik? „Vierteljahrsschrift für wissenschaftl. Philosophie", 1892, Seite 289 .. 332.
3) Zum Kalkul der Inhaltslogik. Erwiderung auf Herrn Husserl's Artikel, ibid. 1893, Seite 504 .. 507.

Weise, Ch.— s. auch Bd. 1, Seite 715 Zeile 3 v. o.

1) Doctrina logica. 1711.
2) Curieuse Fragen über die Logica. 1700.

Welton, J. C. 1) Manual of logic. 1891.

Whitehead, Alfred North.

1) A Treatise of universal Algebra. Vol. I. Cambridge, University Press, 1898.
2) Memoir on the Algebra of symbolic Logic. „American Journal of Mathematics", t. 23, 1901.
3) On cardinal numbers; ibid. t 24.

Namenverzeichniss zum zweiten Bande.

Die Zahlen hinter jedem Namen bedeuten die Nummern der Seiten, auf welchen der Name sich erwähnt findet.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Von **Ernst Schröder** erschienen im gleichen Verlage:

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende. I. Band: Die sieben algebraischen Operationen. [X u. 360 S.] gr. 8. 1873. geh. n. ℳ 8.—

Abriß der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. I. Heft: Die sieben algebraischen Operationen. [48 S.] gr. 8. 1874. geh. n. ℳ —.60.

Der Operationskreis des Logikkalkuls. [VI u. 37 S.] gr. 8. 1877. geh. n. ℳ 1.50.

Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). 3 Bände. gr. 8. I. Band. Mit vielen Figuren im Text. [XII u. 717 S.] 1890. geh. n. ℳ 16.—

——— II. Band. 1. Abteilung. Mit vielen Figuren im Text. [XV u. 400 S.] 1891. geh. n. ℳ 12.—

——— ——— 2. Abteilung. Herausgegeben im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Dr. Eugen Müller, Professor an der Oberrealschule zu Konstanz. Mit einem Bildnis Ernst Schröders. [XXXII u. 206 S.] 1905. geh. n. ℳ 8.—

——— III. Band. A. u. d. T.: **Algebra und Logik der Relative.** Mit vielen Figuren im Text. In 2 Abteilungen. I. Abteilung. [VIII u. 649 S.] 1895. geh. n. ℳ 16.—