

Erweiterte **Chemie**

Mathematik

und **Physik**



Mathematics

QA

1

.A67

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Siebenter Teil.

Leipzig.

**C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.**

1888-1889.

10
glu.
f=.

Inhalts-Verzeichnis

des siebenten Teils.

N ^o der Abhandlung.	Heft.	Seite.
Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
XIX. Ueber eine besondere Art von Reihen. Von F. Rogel	IV	372
XX. Die Bestimmung der Anzahl Primzahlen, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl sind. Von F. Rogel	IV	381
Integralrechnung.		
VII. Reduction einiger Integrale. Von W. Láska	I	110
XXII. Sechs Beweise für den die elliptischen Integrale erster Gattung betreffenden Additionssatz. Von U. Bigler	IV	401
XXIII. Ueber eine Differentialgleichung. Von W. Láska	IV	436
Geometrie der Ebene.		
II. Einige Beziehungen zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks. Von C. Pabst	I	10
VI. Metrische Relationen am Sehnenviereck. Von O. Zimmermann	I	64
VII. Zur Construction der Kegelschnittlinien. Von K. Schober	I	99

424967

IV

N ^o der Abhandlung.	Heft.	Seite.
VII. Beweis eines Dreieckssatzes. Von R. Caspar	I	109
XI. Die Polaren der algebraischen Curven. Von R. Gaertner	II	180
XV. Ueber Cassinische Curven. Von U. Bigler	III	311
XVI. Einige Sätze über geometrische Orte und Enveloppen bei Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittschaaren. Von J. Heller	III	325
XVIII. Die Lemniskate. Von E. Oekinghaus	IV	337
XXI. Neues über Vier- und Vielecke. Von B. Sporer	IV	389
XXIII. Ueber Vierecke am Kreise. Von Boyssell	IV	426
XXIII. Ein geometrischer Ort. Von K. Zelbr	IV	436

Geometrie des Raumes.

I. Ueber den Ort der Axen derjenigen Schraubebewegungen, durch welche eine Strecke in eine beliebige Lage im Raume gebracht werden kann. Von Pelisek	I	1
V. Die flache Kreisschraubenfläche. Von F. Schiffner	I	54
VII. Eine einfache Ableitung der Bedingungen, welche die Coefficienten einer Rotationsfläche zweiten Grades erfüllen müssen. Von F. Hofmann	I	101
VII. Untersuchungen über die Fläche 3. Ordnung, welche von Kreisen erzeugt wird, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen. Von F. Schiffner	I	104
VIII. Ueber die Schaaren von Flächen 4. Grades mit 16 singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen. Von W. Schjerning	II	113
IX. Die sphärische Curve 4. Ordnung als Einhüllende von Kreisschaaren. Von E. Czuber	II	143
X. Dichte der Sehnen von Flächen und ebenen Curven. Von R. Hoppe	II	165
XIII. Die ebenen und die sphärischen cykloidalen Curven. Von H. Ekama	II	207
XXIII. Geometrischer Beweis eines Satzes der Flächentheorie. Von E. Czuber	IV	432

Trigonometrie.

- III. Ueber trigonometrische Functionen von Winkelsummen und über Relationen zwischen Polygonwinkeln. Von Seipp I 27

Mechanik.

- IV. Die elliptischen Integrale der Bewegung eines schweren Punktes in der verticalen Parabel. Von E. Oekinghaus I 34
- XIV. Potential einer elliptischen Walze (Schluss). Von U. Bigler III 225
- XVII. Ueber Kraftlinien der Anziehung von Linien. Von R. Hoppe III 330
- XXIII. Ueber die Bewegung eines Luftballons in ruhiger Luft. Von E. Oekinghaus IV 445

Erd- und Himmelskunde.

- XII. Ueber die Lage der Mondsichel gegen den Horizont des Beobachters. Von E. Oekinghaus II 207
- XXIII. Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Von E. Oekinghaus IV 437
- XXIII. Die Refraction des Meeresbodens. Von E. Oekinghaus IV 440

Litterarische Berichte.

- XXV. Foth (Ar. Geom.) Sickenberger (el. Math. — Ar. Aufg.) Suhle (Ar.) Reichel (Ar.) Moroff (Rechn.) Lieber u. Lühmann (Plan.) Köstler (Vorsch. Geom. — Plan.) Breuer (Kegschn.) Fischer (Geom.) Hauck (Ster.) Krebs (Phys. — Chem.) Henrici (Phys.) Acc. d. Napoli (Rend. XXVI. = 2. ser. I.)
- XXVI. Lieber (ster. Aufg.) Lieber u. Lühmann (Constr. Aufg.) Reidt (plan. Aufg.) E. R. Müller (Constr. Aufg.) Harmuth (Aufg.) R. Weber (Elektr. Aufg.) Mendizabal Tam-

borrel (Log. Taf.) Sickenberger (Log. 4st.) Mascart u. Joubert (Elektr.) Mascart (stat. El.) Thompson (Elektr.) Everett (ph. Einh.) Weinstein (ph. Massbest.) Urbanitzky (Elektr.) Krieg (Zschr. I.) Japan Univ. (J. I. 4. II. 1. 2. 3) Canad. Inst. (Proc. V.) Smiths. Inst. (Rep. 1884. 1885.) Wash. Phil. Soc. (Bull. X.) Amsterdam (N. Arch. XIV.) Mittag-Leffler (A. Math. XI.) Potonié (Nat. Zschr. II.) Newcomb (Am. J. X.) H. Klein (Rev. VII.)

XXVII. F. A. Müller (Probl. Contin.) Dedekind (Zahl.) Tait (Eigensch. d. Mat.) Bonn (Structurf.) Simony (Molec. Th.) Hoh (Elektr.) Kerschbaum (Quadr. d. Kr.) Lolling (Qu. d. Kr.) Samuda (Qu. d. Hyperb.)

XXVIII. Weissenborn (Gerbert) Wohlwill (Jungius) Bierens de Haan (Baust. z. Gesch. d. Math.) Boncompagni (Bull. XX.) Schubert (Gesch. d. Qu. d. Kr.) Sibirjakoff (Elem.) Nies (Trig.) Spitz (Plan. — Trig. — Anh.) Weidemann (Plan.) Lembcke (Ar.) Amsterdam (N. Arch. XV.) Teixeira (J. VIII.) Toulouse (Ann. II.) Mansion u. Neuberg (Math. VIII.) Bur. d. Long. (Ann. 1889).

Berichtigungen im 7. Teile.

S. 99	Z. 1	v. u.		statt	Den	setze	Der
103	7	v. u.	„Wir unternehmen etc.“		Die ganze Aus-		
					führung von 14 Zeilen bis		
104	7	v. o.	„ $a_{13} = a_{13}$ u. s. w.“,		welche einen Rechen-		
					fehler enthält, soll wegfallen, dafür gesetzt		
					werden:		
					Beispielsweise folgt G ganz direct aus E und F durch Elimination von a_{11} .		
106	20	v. ob.		statt	$+ cx$	setze	(das 2te mal)
							$- cx$
	22	„ „	„	acz	„	$(acz$	
	23	„ „	„	y^3	„	y^3	

Berichtigungen im 6. Teile.

S. 438	Z. 22	v. u.		statt	aus M	setze	aus M'
440	4	v. o.	„	\mathfrak{B}	„	\mathfrak{B}	
	5	v. u.	„	a, b, c	„	$a\xi, b\eta, c\xi$	
441	14	v. o.	„	„	„	„	
	5	v. u.	„	F^3	„	Fq	

I.

Ueber den Ort der Axen derjenigen
Schraubenbewegungen, durch welche eine Strecke
in eine beliebige Lage im Raume gebracht
werden kann.

Von

Herrn **Peliš** ^v**ek** **Miloslav**,

Assistent an der k. k. deutschen technischen
Hochschule in Prag.

Mit einer Tafel.

Als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen wir die Fundamentalsätze der Kinematik:

1) Jede Bewegung eines starren Körpers aus einer Lage P in eine andere P' , wobei ein Punkt a seine Lage nicht ändert, ist äquivalent einer einzigen Rotation um eine bestimmte durch a gehende Axe.

2) Jede Bewegung eines starren Körpers aus einer Lage P in eine andere P' ist einer Translation, durch welche ein Punkt a mit seinem entsprechenden a' zusammenfällt, und einer Rotation um eine bestimmte durch a' gehende Axe äquivalent.

Jene Translation kann jedoch in eine zu dieser Axe parallele und in eine zu ihr senkrechte Componente zerlegt werden. Wenn wir die letztere mit jener Rotation combiniren, so erhalten wir eine Rotation um eine gewisse, zur früheren parallele Axe, und wenn wir endlich diese Rotation mit der übrigbleibenden Translation combiniren, eine Schraubenbewegung. Einer beliebigen Bewegung eines starren Systems kann also eine Schraubenbewegung oder eine Rotation verbunden mit einer Translation in der Richtung der Axe substituirt werden.

Soll demnach die Strecke ab in die Lage a_1b_1 übergeführt werden (Fig. I.), so verschieben wir ab parallel zu sich selbst in die Lage $a_1(b)$; dann ist der Ort der Axen derjenigen Rotationen, durch welche $a_1(b)$ nach a_1b_1 gebracht werden kann, der Strahlenbündel, dessen Scheitel a_1 und dessen Ebene die den Winkel der Geraden a_1b_1 , $a_1(b)$ senkrecht halbierende Ebene D ist.

Wie aus dem oben angeführten ersichtlich, sind die gesuchten Schraubenaxen diesen Strahlen parallel, die Ebene D ist daher ihre Directionsebene und der Ort der Schraubenaxe ist demnach ein gewisses Konoïd.

Legen wir durch den Punkt a_1 und ebenso durch den Punkt b Ebenen, welche mit D parallel sind, und wählen in denselben eine beliebige Richtung $a_1x \parallel b_1x$, dann können wir den Punkt a_1 nach a auf einer Schraubenlinie zurückführen, deren Axe mit jener Richtung parallel ist. Dieser Bewegung können wir jedoch eine Translation a_1A in der Richtung a_1x und eine Rotation in der durch a gehenden, zu a_1x senkrechten Ebene substituieren. Dabei wird zugleich b_1 durch Translation in der Richtung b_1x nach B kommen, sodass $a_1A = b_1B$ ist, und durch nachfolgende Rotation in der durch b gehenden zu b_1x senkrechten Ebene nach b gelangen; kurz wir können die Gerade a_1b_1 in der angenommenen Richtung nach AB durch Translation und dann nach ab durch Rotation bringen.

Die Rotationsaxe erhalten wir bekanntlich, indem wir aA bezüglich bB in α bezüglich β halbieren und durch diese Halbierungspunkte Ebenen ρ_α bezüglich ρ_β legen, welche auf aA bezüglich bB senkrecht stehen; der Schnitt derselben ist die gesuchte Axe, die zugleich auch eine gesuchte Schraubenaxe ist.

Es entsteht nun die Frage, welches der Ort der Punkte A bezüglich B ist, wenn a_1x alle Richtungen in der Directionsebene einnimmt.

Da die durch a gehenden zu den Richtungen a_1x senkrechten Ebenen auch zur Directionsebene D senkrecht sind, so enthalten sie alle die Senkrechte aS_a , welche von dem Punkte a zur Directionsebene gefällt werden kann; ihre Trassen auf der Directionsebene sind aber senkrecht zu den entsprechenden Richtungen a_1x , der Ort der Punkte A ist somit ein Kreis K_a über dem Durchmesser a_1S_a .

Den Ort der Punkte B erhalten wir gleichfalls, indem wir von b auf die Directionsebene die Senkrechte bS_b fällen, als einen Kreis K_b über dem Durchmesser b_1S_b . Diese Kreise K_a und K_b müssen congruent sein, da die parallelen, aus den Punkten S_a bezüglich S

ausgehenden Sehnen von gleicher Länge sind. Die Geraden aA bezüglich bB sind also die Erzeugenden je eines schiefen Kreiskegels, dessen Erzeugende aS_a bezüglich bS_b auf der Basis senkrecht stehen.

Die Halbierungspunkte α_x, β_x dieser Geraden, erfüllen also gleichfalls congruente Kreise k_a, k_b , deren Ebenen parallel zu D sind. Es ist aber leicht zu zeigen, dass diese Ebenen in eine einzige zusammenfallen. Es ist nämlich bekannt, dass die Verbindungslinie $\alpha\beta$ der Punkte, welche die Strecken aa_1 und bb_1 halbiren, ebenfalls eine Schraubenaxe ist, welche der Aufgabe genügt, und zwar diejenige, zu welcher eine halbe Umdrehung gehört; daher ist dieselbe auch parallel zu der Directionsebene, woraus aber hervorgeht, dass k_a und k_b in einer Ebene liegen.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden aS_a und bS_b mit dieser Ebene mit s_a und s_b , dann erkennen wir leicht, dass die Durchmesser $s_a\alpha$ und $s_b\beta$ der Kreise k_a und k_b parallel sind.

Die Ebene dieser Kreise wählen wir als die horizontale Projectionsebene, als die verticale dagegen die zu diesen Durchmessern parallele (Fig. II.). Um irgend eine Axe zu erhalten, ziehen wir parallele Sehnen $\alpha\alpha_x, \beta\beta_x$ (vergleiche Figuren I. und II.), ferner zu den Kegelerzeugenden $a\alpha_x$ und $b\beta_x$ durch die Punkte α_x und β_x senkrechte Ebenen; die Schnittlinie derselben ist nach früherem eine gesuchte Schraubenaxe. Diese Schnittlinie ist aber parallel mit den Sehnen $\alpha\alpha_x, \beta\beta_x$ und zugleich ist $\alpha\alpha_x = -\beta\beta_x$ die Hälfte der Translation in der Richtung dieser Axe.

Auf diese Weise erhalten wir eine leichte Uebersicht, wie sich die Länge der Translation mit der Axenrichtung ändert. Wenn wir z. B. in α und β die Tangenten ziehen, so erkennen wir, dass es in dieser Richtung keine Translation gibt, und in der Tat schneiden sich die zugehörigen Ebenen in der Rotationsaxe der gegebenen Strecken.

Die Grösse der Translation wächst bei Aenderung der Axenrichtung bis zum Maximum $2as_a = 2\beta s_b$. Dabei existirt folgende Relation:

$$x^2 + y^2 = \text{const } \overline{a_1 S_a^2} = \overline{b_1 S_b^2},$$

wenn x die Grösse der Translation in einer gewissen Richtung, y aber in dazu senkrechter Richtung bezeichnet.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Ebenen, welche in den Punkten der Kreise k_a bezüglich k_b auf den Erzeugenden $\alpha_x a$ bezüglich $\beta_x b$ senkrecht stehen, einen Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitel α bezüglich β umhüllen. Vor allem ist klar, dass eine beliebige Gerade $\alpha\alpha_x$, da sie zur zugehörigen $a\alpha_x$ senkrecht ist, in der zu dieser

Geraden senkrechten Ebene liegt und daher die Spur dieser senkrechten Ebene in der horizontalen Projectionsebene bildet. Dadurch ist aber bewiesen, dass alle betrachteten Ebenen durch den Punkt α gehen, also einen Kegel von dem Scheitel α einhüllen.

Um irgend eine Erzeugende dieses Kegels zu finden, wählen wir zu $\alpha\alpha_x$ die unendlich nahe Erzeugende des Kegels von dem Scheitel α etwa $\alpha\alpha_y$ und suchen den Schnitt der Ebenen, welche auf den Geraden $\alpha\alpha_x$ und $\alpha\alpha_y$ senkrecht stehen. Die Grenze dieses Schnittes ist die gesuchte Erzeugende des Kegels mit dem Scheitel α . Da α ein Punkt dieser Schnittlinie ist, so haben wir noch einen zu finden, am zweckmässigsten den, welcher in die verticale Ebene hineinfällt, die sich in $\alpha\alpha_x$ projicirt.

Wenn wir diese Ebene um ihre Trasse $S_a\alpha_x$ in die horizontale Projectionsebene umdrehen, wobei a nach (a) , die Erzeugende nach $(a)\alpha_x$ und der Schnitt der betrachteten Ebene in die Senkrechte $(\alpha_x)p$ hineinfällt, so finden wir, dass die Bestimmung der Grenze des Schnittpunktes der zu α_x und α_y zugehörigen Ebenen mit der nach $\alpha\alpha_x$ sich projicirenden Ebene identisch ist mit der Bestimmung des Berührungspunktes der Geraden $\alpha_x(p)$ mit der Parabel, welche durch den Brennpunkt (a) und die Scheiteltaugente $S_a\alpha_x$ bestimmt ist.

Dieser Berührungspunkt (n) hat bekanntlich doppelte Entfernung von der Parabelaxe als α_x . Drehen wir daher diese Ebene zurück, so gelangt (n) nach n' , sodass $n'\alpha_x = \alpha_x s_a$. Die Punkte n' liegen also auf einem Kreise k_n , welcher doppelt so grossen Durchmesser hat wie der frühere Kreis und denselben in s_x berührt. Dieser Kreis ist die Leitlinie des gesuchten Kegels mit dem Scheitel α , welcher also zweiter Ordnung ist. Dasselbe gilt wörtlich von dem Kegel mit dem Scheitel β .

Die Horizontaltrasse der Ebene, welche k_a in einer gegebenen Geraden $\alpha n'$ berührt, findet man offenbar, indem man den Winkel $s_a\alpha n'$ halbirt; die Halbierungslinie gibt uns nach früherem die Richtung der Axe, welche sich in dieser Ebene befindet. Auf diese Weise finden wir unter anderem, dass dem Punkte α auf k_a die Erzeugende $\alpha\gamma_a$ des Kegels k_a , ferner dem Punkte s_a die Erzeugende αs_a entspricht, woraus wir schliessen, dass die X-Axe und die Gerade $\alpha''\gamma_a'' \perp \alpha''\alpha''$ die Verticalprojection des Kegels k_a bilden. Ebenso finden wir die Verticalprojection des Kegels k_β .

Da die horizontale Projectionsebene die beiden Kegel k_a und k_β in den Geraden αs_a bezüglich βs_b berührt, so sind die Schnittlinien einer beliebigen Horizontalebene H mit diesen Kegeln gewisse Parabeln P_a und P_β , deren horizontale Projectionen $s_a\alpha$ und $s_b\beta$ zu Axen haben, und deren Scheitel und Scheiteltangenten wir erhalten,

indem wir die Schnittpunkte $\sigma_\alpha''\sigma_\beta''$ der Verticaltrasse H'' mit den Geraden $\alpha''\gamma_\alpha''$ und $\beta''\gamma_\beta''$ in die Punkte σ_α' und σ_β' projiciren.

Die Durchschnitte zweier entsprechenden Berührungsebenen zu k_α und k_β mit der Ebene H sind demnach zwei parallele Tangenten zu den Parabeln P_α und P_β ; befindet sich dagegen in der Ebene H irgend eine von den gesuchten Axen, so muss dieselbe die gemeinschaftliche Tangente beider Parabeln sein, und umgekehrt, jede gemeinschaftliche Tangente der Parabeln P_α und P_β ist eine gesuchte Schraubenaxe, wobei wir aber offenbar die unendlich ferne Gerade auszuschliessen haben

Ein weiterer Schluss ist der, dass jeder Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten ein Doppelpunkt der Fläche ist.

Da die Parabeln P_α und P_β parallele Axen haben, so müssen wir, wie bekannt, die unendlich ferne Gerade als doppelte gemeinschaftliche Tangente der beiden Parabeln zählen; diese Parabeln haben demnach noch zwei gemeinschaftliche Tangenten, welche entweder reell oder imaginär sein können.

Besserer Uebersicht wegen wollen wir nun die Sätze anführen, welche sich von den Systemen der Parabeln P_α und P_β beweisen lassen:

1) Die Horizontalprojection aller Parabeln P_α bezüglich P_β sind confocal und zwar ist der gemeinschaftliche Brennpunkt in α bezüglich β .

2) Die Horizontalprojectionen der gemeinschaftlichen Tangenten, an die beiden Parabeln P_α und P_β in irgend einer Horizontalebene gehen durch einen festen Punkt \mathcal{A}' .

Um den ersten Satz zu erweisen, betrachten wir die Ebene, welche k_α in der Geraden $\alpha\varphi$ berührt und mit der Geraden αs_α einen rechten Winkel einschliesst; die Trasse dieser Ebene schliesst nach dem früheren den Winkel von 45° mit αs_α und daher auch die Tangenten in den Punkten der Geraden $\alpha\varphi$; dann ist aber α die Projection des Brennpunktes aller Parabeln P_α , weil die Tangente, welche in dem Punkte berührt, dessen Projection auf die Axe der Brennpunkt ist, mit der Axe den Winkel von 45° einschliesst, wodurch der erste Satz bewiesen ist.

Seien T_1 und T_2 zwei gemeinschaftliche Tangenten der Parabeln P_α und P_β und \mathcal{A}' ihr Durchschnittspunkt (Fig. III.); ferner $I_\alpha I_\beta$, $II_\alpha II_\beta$ die Durchschnittspunkte dieser Tangenten mit den Scheiteltangenten Σ_α und Σ_β ; dann sind die Dreiecke $I_\alpha II_\alpha \alpha$ und $I_\beta II_\beta \beta$

ähnlich und für das Centrum \mathcal{A}' ähnlich gelegen; somit geht ebenfalls $\alpha\beta$ durch \mathcal{A}' hindurch. Ausserdem finden wir, dass die Dreiecke $I_\alpha\alpha\sigma_\alpha$ und $I_\beta\beta\sigma_\beta$ ähnlich und für \mathcal{A}' ähnlich gelegen sind; somit geht weiter diese Gerade $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ durch dieses Centrum.

Wenn nun die Ebene H ihre Lage ändert, indem sie sich immer parallel bleibt, so sind die Verbindungslinien $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ die Erzeugenden eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides, dessen Leitlinien $\alpha\gamma_\alpha$ und $\beta\gamma_\beta$ und dessen Directionsebenen die beiden Projectionsebenen sind.

Unter diesen Erzeugenden muss es Eine geben, welche zu dem entgegengesetzten System als $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ gehört und welche zur horizontalen Projectionsebene senkrecht steht und sich daher als ein Punkt horizontal projicirt. Da diese Gerade von allen Geraden $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ geschnitten werden muss, so muss die Projection $\sigma_\alpha'\sigma_\beta'$ durch diesen Punkt gehen. Verschieben wir H so, dass H' durch den Schnittpunkt der Geraden $\alpha''\gamma_\alpha''$ und $\beta''\gamma_\beta''$ geht, dass also H durch die Rotationsaxe, welche sich in dem System der Schraubenaxen befindet, hindurch geht, so muss auch diese $\alpha'\beta'$ durch jenen Punkt gehen. Jener Punkt ist also \mathcal{A}' , womit auch der zweite Satz bewiesen ist.

Der nächste Schluss ist nun der, dass der Ort der Doppelpunkte der Fläche eine Gerade ist, welche auf der Directionsebene senkrecht steht, und dass sie die Gerade ist, auf welcher sich der kürzeste Abstand der Rotationsaxe mit der Schraubenaxe, zu welcher halbe Umdrehung gehört, bildet.

Die Lage dieser Doppelgeraden \mathcal{A} zu den gegebenen Strecken ist sehr einfach. Sei O der Halbirungspunkt des kürzesten Abstandes der Geraden, auf denen sich die gegebenen Strecken ab und a_1b_1 befinden, und legen wir durch denselben die Directionsebene D , welche den Winkel der beiden Geraden senkrecht halbirt, und errichten wir endlich in diesen Punkten auf diese Ebene eine Senkrechte, welche von manchen Autoren die Winkelhalbirungslinie der gegebenen Strecken heisst, dann ist dieselbe identisch mit \mathcal{A} .

Ob zwar diese Behauptung aus den vorhergehenden Betrachtungen ohne Weiteres gefolgert werden kann, so wollen wir doch noch zu ihrer genauen Begründung folgendes anführen.

Die Axen sämtlicher Rotationen, durch welche die Gerade P nach P' gebracht werden kann, bilden bekanntlich ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, dessen Haupterzeugende diese Winkelhalbirungslinien sind. Da aber \mathcal{A} die Axe der Rotation, durch welche ab nach a_1b_1 gebracht werden kann, ferner die Schraubenaxe $\alpha\beta$, zu

welcher eine halbe Umdrehung gehört, rechtwinklig schneidet, so muss sie mit der Winkelhalbierungslinie identisch sein.

Die Construction sämtlicher Schraubenaxen ist auf Grund der angeführten Resultate sehr einfach. Beschreiben wir (Fig. IV.) einen Kreis über dem Durchmesser $\alpha\Delta$ (oder $\beta\Delta$), führen wir eine beliebige H'' und projeciren den Durchschnittspunkt σ_α'' mit der Geraden $\alpha''\gamma_\alpha''$ in die Punkte $1\ 2$, dann sind die Geraden 1Δ , 2Δ die Projectionen der Schraubenaxen, welche sich in der Ebene H befinden, da $1\ 2$ die Scheiteltangente, α der Brennpunkt der Parabel P_α ist, ferner 1Δ und 2Δ die gemeinschaftlichen Tangenten der Parabeln P_α und P_β .

Aus dieser Construction folgt nachstehende Verteilung der Schraubenaxen im Raume.

1) Wählen wir H so, dass die entsprechende Scheiteltangente $\overline{1\ 2}$ den Kreis nicht schneidet, dann gibt es keine reelle Axe in dieser Ebene.

2) Wenn H jene Lage erreicht, in welcher die zugehörige Scheiteltangente den Kreis in p berührt, so fallen in Δp zwei Axen zusammen. Diese Erzeugende ist die tiefste Erzeugende der Fläche, die sogenannte singuläre Erzeugende oder Kante der Fläche, da sie mit der Nachbarerzeugenden in einer Ebene liegt. Die Richtung dieser Kante halbirt den Winkel der Geraden $\alpha\beta$ und $\sigma_\alpha\alpha$.

3) Verschieben wir H noch weiter, sodass die zugehörige Scheiteltangente den Kreis in zwei Punkten $1\ 2$ schneidet, so sind 1Δ , 2Δ die Projectionen von zwei Axen, welche immer mehr divergiren. Geht die Scheiteltangente durch den Mittelpunkt des Kreises, so stehen die zugehörigen Axen aufeinander senkrecht; wenn sie dagegen durch Δ' hindurchgeht, so haben die zugehörigen Axen als Horizontalprojectionen die Tangente des Kreises in Δ' und jene Scheiteltangente $1\ 2$; diese ist die Rotationsaxe, welche sich im Systeme befindet.

4) Berührt die Scheiteltangente den Kreis in einem Punkte q , so fallen wieder zwei Axen in der Geraden Δq zusammen, indem sie nun die höchste Erzeugende, die zweite singuläre Erzeugende der Fläche bilden. Es ist leicht einzusehen, dass die beiden singulären Erzeugenden aufeinander senkrecht stehen.

5) Bewegt sich H noch weiter, so werden die Axen wieder imaginär, die ganze Fläche liegt also zwischen zwei parallelen Ebenen, welche durch die erwähnten Kanten gehen.

Es wird nicht überflüssig sein zu bemerken, dass es sehr leicht ist, zu einer Axe die zu ihr senkrechte zu finden; wir brauchen nur den Durchmesser des Punktes zu ziehen, in welchem die gegebene Axe den Kreis in der Projection schneidet, durch den Diametralpunkt geht dann die Projection der anderen Axe. Es ist ferner leicht die Entfernung solcher Axen zu bestimmen.

Aus der Construction geht hervor, dass die Fläche folgende Leitlinien hat:

- 1) die Gerade \mathcal{A} ,
- 2) die Ellipse, deren Horizontalprojection der angeführte Kreis ist, und welche somit von \mathcal{A}' geschnitten wird,
- 3) die unendlich ferne Gerade, durch welche alle Directions-ebenen hindurchgehen, und welche somit durch keinen Punkt der Ellipse geht.

Es ist aber zur Genüge bekannt, dass eine so bestimmte Fläche dritter Ordnung ist, welche \mathcal{A} als Doppelgerade besitzt.

Bisher befassten wir uns mit der Ueberführung der Strecke ab durch eine Schraubenbewegung nach a_1b_1 . Wenn wir aber ab nach b_1a_1 überführen wollen, so wird der Ort aller Axen, welche dieser Bedingung genügen, eine andere Fläche dritter Ordnung sein, deren Directionsebene die andere Ebene ist, welche den Nebenwinkel der gegebenen Strecken senkrecht halbirt, und deren Doppelgerade die andere Winkelhalbirungslinie ist.

Auf Grund der vorangehenden Betrachtungen sind wir jetzt auch im Stande die Frage zu beantworten, welches der Ort der Axen derjenigen Schraubenbewegungen ist, durch welche die Gerade P in eine willkürliche Lage gebracht werden kann.

Verschieben wir die Länge a_1b_1 in die Lage $a_2b_2, a_3b_3 \dots$ (Fig. V.), sodass die Strecke alle Lagen auf P' stetig einnimmt, dann wird jeder Lage derselben eine gewisse Fläche dritter Ordnung als Ort der Axen entsprechen. Die Punkte $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots$ liegen auf einer Geraden M , welche parallel zu P_1 ist, die Kreise über den Durchmessern $\alpha_1'\mathcal{A}' \alpha_2'\mathcal{A}' \dots$ bilden einen Büschel von Kreisen, welche sich in \mathcal{A}' berühren, sie sind also die Horizontalprojection eines Büschels von Kreiscylindern, welche sich längs der Geraden \mathcal{A} berühren. Die Ebenen, welche zu $\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2 \dots$ senkrecht sind, schneiden die Ebene αM , wie man leicht erkennt, in den Tangenten derjenigen Parabel, welche, durch den Brennpunkt α und die Scheiteltangente M bestimmt ist; diese Ebenen sind Berührungsebenen eines parabolischen Cylinders, der auf der Ebene αM senkrecht steht.

Da der Ebenenbüschel zweiter Ordnung und der Cylinderbüschel zu den Punkten α perspectivisch sind, so sind sie zu einander projectivisch. Der Ort der Ellipsen als Leitlinien aller Flächen dritten Grades ist also das Erzeugniss eines Flächenbüschels zweiten Grades mit dem dazu projectivischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Hier sei nun erwähnt, dass eine solche Fläche allgemein sechsten Grades ist und dass dieselbe unter günstigen Bedingungen auf den vierten Grad sich reduciren kann. Von einem solchen Specialfall wollen wir bei anderer Gelegenheit sprechen.

Für unsere weiteren Betrachtungen ist nur der Umstand von Wichtigkeit, dass durch jeden Punkt B im Raume eine Fläche des Büschels und somit auch eine gewisse Ebene des projectivischen Ebenenbüschels bestimmt ist. Wenn wir von diesem Punkte B eine Senkrechte zu \mathcal{A} fällen und durch den Fusspunkt dieser Senkrechten eine zu M senkrechte Ebene legen, so ist durch den Schnittpunkt α ein Cylinder des Büschels bestimmt, dessen Schnitt mit jener Ebene eine Ellipse ist. Daraus sieht man, dass jene Senkrechte zu \mathcal{A} eine Erzeugende der Fläche dritten Grades ist, welche diese Ellipse, die Gerade \mathcal{A} und die zu \mathcal{A} senkrechte Ebene als Leitelemente besitzt, es gibt also eine Schraubenaxe, welche durch B geht und der Aufgabe genügt.

Wenn wir eine Senkrechte zur anderen Winkelhalbierungslinie [\mathcal{A}] fällen, so erhalten wir auch eine Schraubenaxe, durch welche P nach P' übergeführt werden kann, wobei wir aber der Geraden P' entgegengesetzte Richtung wie zuvor beilegen.

Wenn wir diese Möglichkeit ausschliessen, so erkennen wir:

Die Axen aller Schraubenbewegungen, durch welche die Gerade P in die Lage P' gebracht werden kann, sind im Raume so verteilt, dass

- 1) durch jeden Punkt (der nicht auf \mathcal{A} liegt) eine Axe, nämlich die Senkrechte zu \mathcal{A}_1 geht,
- 2) dass in jeder Ebene (welche nicht zu \mathcal{A} senkrecht ist) eine Axe, nämlich die Senkrechte, welche wir durch den Schnittpunkt der Ebene mit \mathcal{A} zu letzterer führen können, liegt.

Sämtliche Schraubenaxen bilden demnach eine lineare Congruenz, welche durch \mathcal{A} und die unendlich ferne Gerade in der zu \mathcal{A} senkrechten Richtung als Leitlinien bestimmt ist. Durch jeden Punkt dieser Leitlinien gehen unendlich viele Axen, welche einen Ebenenbüschel der zu \mathcal{A} senkrecht ist, bilden, und in jeder Ebene, welche durch \mathcal{A} hindurchgeht, befinden sich unendliche viele zu \mathcal{A} parallele Axen.

II.

Einige Beziehungen zwischen den drei Höhen
und zwischen den drei seitenhalbirenden
Ecktransversalen eines Dreiecks.

Von

Carl Pabst.

§. 1.

Die Lösung der Aufgabe, aus drei von einander unabhängigen Stücken ein Dreieck zu construiren oder zu berechnen, unterliegt meist gewissen Bedingungen. Soll z. B. aus drei gegebenen Strecken als Seiten ein Dreieck construirt werden, so müssen die 3 Strecken der bekannten Bedingung genügen, dass die Summe je zweier derselben grösser, und die Differenz je zweier kleiner als die dritte Strecke ist. Wir wollen hier einige Beziehungen entwickeln, welche zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks bestehen.

Bezeichnen h_1, h_2, h_3 die bezüglich zu den Seiten a, b, c des Dreiecks ABC zugehörigen Höhen, so bestehen die Gleichungen:

$$(1) \dots \dots \dots ah_1 = bh_2 = ch_3$$

Mit Hilfe derselben wollen wir die Seiten a, b, c durch die drei Höhen ausdrücken.

Durch die Höhe h_1 wird das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt, aus denen man nach dem Pythagoräischen Lehrsatz erhält:

$$a = \sqrt{b^2 - h_1^2} + \sqrt{c^2 - h_1^2}$$

Durch zweimalige Quadrirung geht diese Gleichung über in

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 4a^2h_1^2 = 0$$

oder:

$$4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2h_1^2$$

Aus dieser Gleichung folgen die oben erwähnten Beziehungen zwischen den drei Seiten eines Dreiecks. Damit nämlich h_1 reell wird, muss die linke Seite dieser Gleichung positiv sein. Dieselbe stellt aber die Differenz zweier Quadrate dar, weshalb man dafür setzen kann das Product:

$$(2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2)$$

Da dieses Product positiv sein muss, so erhält man die Bedingung:

$$b^2 + c^2 - 2bc < a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$$

oder:

$$b - c < a < b + c$$

Setzt man nun in die zuletzt erhaltene Gleichung die aus (1) folgenden Werte für b und c :

$$b = \frac{h_1}{h_2} a; \quad c = \frac{h_1}{h_3} a,$$

so geht dieselbe über in

$$\left[\frac{4h_1^2}{h_2^2 h_3^2} - \frac{(h_2^2 h_3^2 - h_3^2 h_1^2 - h_1^2 h_2^2)^2}{h_2^4 h_3^4} \right] a^4 = 4a^2 h_1^2$$

$$[4h_1^2 h_2^2 h_3^2 - (h_2^2 h_3^2 - h_3^2 h_1^2 - h_1^2 h_2^2)^2] a^2 = 4h_1^2 h_2^4 h_3^4$$

Dividirt man diese Gleichung durch $k_1^2 h_2^2 h_3^2$, so erhält man:

$$\left[4h_1^2 - \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} - \frac{h_3 h_1}{h_2} - \frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^2 \right] a^2 = 4h_2^2 h_3^2$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für b und c , und zwar gehen dieselben aus der erhaltenen hervor, wenn man darin die Indices der h cyklisch und zugleich a mit b und b mit c vertauscht, so dass man erhält:

$$(2) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} a^2 = \frac{4h_2^2 h_3^2}{4h_1^2 - \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} - \frac{h_3 h_1}{h_2} - \frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^2} \\ b^2 = \frac{4h_3^2 h_1^2}{4h_2^2 - \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} - \frac{h_1 h_2}{h_3} - \frac{h_2 h_3}{h_1} \right)^2} \\ c^2 = \frac{4h_1^2 h_2^2}{4h_3^2 - \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} - \frac{h_2 h_3}{h_1} - \frac{h_3 h_1}{h_2} \right)^2} \end{array} \right.$$

Hierdurch sind die Seiten des Dreiecks durch die drei Höhen bestimmt.

§. 2.

Aus den entwickelten Gleichungen (2) lassen sich nun einige Bedingungen für die drei Höhen eines Dreiecks ableiten. Zunächst ist klar, dass die Nenner der Brüche in (2) positiv sein müssen, damit man für a, b, c reelle Werte erhält. Betrachten wir den Nenner des ersten Bruches, so stellt derselbe die Differenz zweier Quadrate dar, weshalb man dafür setzen kann:

$$\left(2h_1 + \frac{h_2 h_3}{h_1} - \frac{h_3 h_1}{h_2} - \frac{h_1 h_2}{h_3}\right) \left(2h_1 - \frac{h_2 h_3}{h_1} + \frac{h_3 h_1}{h_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3}\right)$$

Damit dieses Product positiv wird, muss sein:

$$\frac{h_3 h_1}{h_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} - 2h_1 < \frac{h_2 h_3}{h_1} < \frac{h_3 h_1}{h_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} + 2h_1$$

Zwei analoge Bedingungen ergeben sich aus den beiden anderen Gleichungen in (2), so dass man als Bedingungen für die drei Höhen eines Dreiecks hat:

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_3 h_1}{h_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} - 2h_1 < \frac{h_2 h_3}{h_1} < \frac{h_3 h_1}{h_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} + 2h_1 \\ \frac{h_1 h_2}{h_3} + \frac{h_2 h_3}{h_1} - 2h_2 < \frac{h_3 h_1}{h_2} < \frac{h_1 h_2}{h_3} + \frac{h_2 h_3}{h_1} + 2h_2 \\ \frac{h_2 h_3}{h_1} + \frac{h_3 h_1}{h_2} - 2h_3 < \frac{h_1 h_2}{h_3} < \frac{h_2 h_3}{h_1} + \frac{h_3 h_1}{h_2} + 2h_3 \end{array} \right.$$

Addirt man die beiden ersten Teile dieser Ungleichungen, so erhält man folgende Beziehung:

$$(4) \dots \dots \dots \frac{h_2 h_3}{h_1} + \frac{h_3 h_1}{h_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} < 2(h_1 + h_2 + h_3)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) lässt sich noch eine dritte Bedingung für die drei Höhen eines Dreiecks aufstellen. Löst man die Klammer im Nenner der Brüche in (2) auf, so bemerkt man, dass die 3 Brüche denselben Nenner haben. Bezeichnet man denselben mit N^2 , so dass:

$$(5) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2h_2 h_3}{N} \\ b = \frac{2h_3 h_1}{N} \\ c = \frac{2h_1 h_2}{N} \end{array} \right.$$

dann ist:

$$N^2 = 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - \left[\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)^2 + \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^2 \right]$$

Damit N reell werde, muss demnach sein:

$$(6) \dots \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)^2 + \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^2 < 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so genügen h_1, h_2, h_3 auch der Bedingung (4), denn aus dieser folgt:

$$\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \right)^2 + \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^2 < 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + 8(h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2)$$

Wenn daher ein Dreieck aus seinen drei Höhen construiert werden soll, so ist diese Aufgabe nur lösbar, wenn die Strecken h_1, h_2, h_3 den Bedingungen (3) und (6) genügen.

Mit Hilfe der Gleichungen (5) kann man nun auch von der Beschaffenheit der Höhen eines Dreiecks auf die Beschaffenheit seiner Seiten und Winkel schliessen. Zunächst ist klar, dass das Dreieck ungleichseitig ist, wenn die drei Höhen ungleich sind. Sind zwei Höhen einander gleich, so sind auch die zugehörigen Seiten gleich, d. h. das Dreieck ist gleichschenkelig; und sind die drei Höhen einander gleich, so ist das Dreieck gleichseitig. Ist nämlich $h_1 = h_2 = h_3$, so folgt aus (5):

$$a = b = c = \frac{2}{3} h \sqrt{3}$$

Ferner ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatz für $\alpha = 90^\circ$:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Setzt man hierin für a, b, c ihre Werte aus (5), so erhält man:

$$h_3^2 h_1^2 + h_1^2 h_2^2 = h_2^2 h_3^2$$

oder:

$$(7) \dots \dots \dots \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3} \right)^2 = 1$$

Ebenso ergibt sich:

$$\text{für } \beta = 90^\circ: \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 = 1$$

$$\text{für } \gamma = 90^\circ: \left(\frac{h_3}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{h_3}{h_2} \right)^2 = 1$$

Hieraus fließt der Satz:

Ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks gleich 1, so ist das aus diesen

3 Höhen construirtbare Dreieck rechtwinklig, und zwar ist derjenige Dreieckswinkel ein Rechter, von dessen Scheitel die erstere Höhe ausgeht.

Aus dem verallgemeinerten Pythagoreischen Lehrsatz folgt, dass:

$$b^2 + c^2 \gtrless a^2$$

ist, je nachdem $\alpha \lesseqgtr 90^\circ$ ist. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (5):

$$h_3^2 h_1^2 + h_1^2 h_2^2 \gtrless h_2^2 h_3^2$$

oder:

$$(8) \dots \dots \dots \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 \gtrless 1$$

Daraus fliessen die Sätze:

1) Die Summe der Quadrate der Verhältnisse einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks ist grösser oder kleiner als 1, je nachdem der Winkel, von dessen Scheitel die erstere Höhe ausgeht, kleiner oder grösser als 90° ist.

2) Im spitzwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse je einer Höhe zu den beiden anderen Höhen grösser als 1.

3) Ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks kleiner als 1, so ist der Winkel, von dessen Scheitel die erstere Höhe ausgeht, ein stumpfer.

4) Ist die Summe der Quadrate der Verhältnisse je einer Höhe zu den beiden anderen Höhen eines Dreiecks grösser als 1, so ist das Dreieck spitzwinklig.

§. 3.

Wir wollen nun noch die Winkel des Dreiecks direct durch die Höhen berechnen. Setzen wir zu dem Zwecke:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2u \\ -a + b + c &= 2(u - a) \\ a - b + c &= 2(u - b) \\ a + b - c &= 2(u - c) \end{aligned}$$

so ist, wie in der Trigonometrie bewiesen wird:

$$(9) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(u-b)(u-c)}{u(u-a)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{(u-c)(u-a)}{u(u-b)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(u-a)(u-b)}{u(u-c)} \end{array} \right.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5) des §. 1. erhält man zunächst:

$$(10) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{N}(h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2) \\ u - a = \frac{1}{N}(-h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2) \\ u - b = \frac{1}{N}(h_2 h_3 - h_3 h_1 + h_1 h_2) \\ u - c = \frac{1}{N}(h_2 h_3 + h_3 h_1 - h_1 h_2) \end{array} \right.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (9) ein, so gehen diese über in:

$$(11) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{h_2^2 h_3^2 - h_1^2 (h_2 - h_3)^2}{h_1^2 (h_2 + h_3)^2 - h_2^2 h_3^2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{h_3^2 h_1^2 - h_2^2 (h_3 - h_1)^2}{h_2^2 (h_3 + h_1)^2 - h_3^2 h_1^2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{h_1^2 h_2^2 - h_3^2 (h_1 - h_2)^2}{h_3^2 (h_1 + h_2)^2 - h_1^2 h_2^2} \end{array} \right.$$

Hiernach lassen sich aus den drei Höhen direct die drei Winkel des Dreiecks berechnen.

Aus den Gleichungen (10) lassen sich noch einige Bedingungen für die drei Höhen eines Dreiecks ableiten. Da $u - a$, $u - b$, $u - c$ positiv sind, so müssen h_1 , h_2 , h_3 den Bedingungen genügen:

$$(12) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} h_1(h_2 + h_3) > h_2 h_3 > h_1(h_2 - h_3) \\ h_2(h_3 + h_1) > h_3 h_1 > h_2(h_3 - h_1) \\ h_3(h_1 + h_2) > h_1 h_2 > h_3(h_1 - h_2) \end{array} \right.$$

das heisst in Worten: Das Rechteck aus je zwei Höhen eines Dreiecks ist kleiner als das Rechteck aus der Summe dieser beiden Höhen und der dritten Höhe und grösser als das Rechteck aus der Differenz der beiden ersteren Höhen und der dritten Höhe.

Die Bedingungen (12) lassen sich noch in folgende Form bringen:

$$(12a) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_1}{h_3} + \frac{h_1}{h_2} > 1 > \frac{h_1}{h_3} - \frac{h_1}{h_2} \\ \frac{h_2}{h_1} + \frac{h_2}{h_3} > 1 > \frac{h_2}{h_1} - \frac{h_2}{h_3} \\ \frac{h_3}{h_2} + \frac{h_3}{h_1} > 1 > \frac{h_3}{h_2} - \frac{h_3}{h_1} \end{array} \right.$$

Wie wir schon im vorigen §. erwähnt haben, ist, wenn $h_1 = h_2$ ist, das Dreieck ABC gleichschenkelig, und zwar ist $a = b$. Für diesen Fall gehen die Gleichungen (11) über in:

$$(13) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha^2 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{2h_3 - h_1}{2h_3 + h_1} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{h_1^2}{4h_3^2 - h_1^2} \end{array} \right.$$

Hieraus folgt zunächst: $2h_3 > h_1$. Das heisst in Worten: Im gleichschenkligen Dreieck ist die doppelte zur Basis zugehörige Höhe stets grösser als eine der beiden anderen Höhen.

Ferner ergibt sich aus der letzten Gleichung in (13), dass $\gamma \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 90^\circ$ ist, je nachdem $2h_3^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} h_1^2$ ist. Im gleichschenkligen Dreieck ist demnach der Winkel an der Spitze kleiner, gleich oder grösser als 90° , je nachdem das doppelte Quadrat über der zur Basis zugehörigen Höhe grösser, gleich oder kleiner als das Quadrat über einer der anderen Höhen ist.

Schliesslich folgen aus den Gleichungen (13) noch die beiden Bedingungen:

$$(14) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{h_1}{2h_3 + h_1} \\ \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{h_1}{2h_3 - h_1} \end{array} \right.$$

§. 4.

Analog dem bisherigen Verfahren wollen wir nun einige Beziehungen zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks ableiten. Bezeichnen m_1, m_2, m_3 die bezüglich die

Seiten a, b, c des Dreiecks ABC halbirenden Ecktransversalen, so erhält man nach dem erweiterten Pythagoreischen Lehrsätze:

$$\begin{aligned} m_1^2 &= b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ap \\ m_2^2 &= c^2 + \frac{1}{4}a^2 - aq \end{aligned}$$

wenn p und q die Projectionen bezüglich der Seiten b und c auf die Seite a bedeuten. Beachtet man, dass $p + q = a$ ist, so folgt:

$$2m_1^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich noch zwei Gleichungen bezüglich für m_2 und m_3 , so dass man hat:

$$(15) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2}a^2 + b^2 + c^2 &= 2m_1^2 \\ a^2 - \frac{1}{2}b^2 + c^2 &= 2m_2^2 \\ a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2 &= 2m_3^2 \end{aligned} \right.$$

Nach leichter Rechnung erhält man hieraus:

$$(16) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} a^2 &= \frac{4}{3}(-m_1^2 + 2m_2^2 + 2m_3^2) \\ b^2 &= \frac{4}{3}(2m_1^2 - m_2^2 + 2m_3^2) \\ c^2 &= \frac{4}{3}(2m_1^2 + 2m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \right.$$

Hierdurch sind die Seiten durch die drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks bestimmt. Wir wollen aus den erhaltenen Gleichungen einige Beziehungen zwischen den drei Transversalen ableiten.

Wie man sogleich ersieht, müssen, damit man für a, b, c reelle Werte erhält, die Bedingungen erfüllt sein:

$$(17) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} m_2^2 + m_3^2 &> \frac{1}{2}m_1^2 \\ m_3^2 + m_1^2 &> \frac{1}{2}m_2^2 \\ m_1^2 + m_2^2 &> \frac{1}{2}m_3^2 \end{aligned} \right.$$

d. h. in Worten: In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate über je zwei seitenhalbirenden Ecktransversalen grösser als das halbe Quadrat über der die dritte Seite des Dreiecks halbirenden Ecktransversale.

Ferner folgt aus dem Pythagoreischen Lehrsätze für $\alpha = 90^\circ$:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

In diese Gleichung die Werte für a, b, c aus (16) eingesetzt, giebt:

$$\begin{aligned} \alpha = 90^\circ: & \quad m_2^2 + m_3^2 = 5m_1^2 \\ \beta = 90^\circ: & \quad m_3^2 + m_1^2 = 5m_2^2 \\ \gamma = 90^\circ: & \quad m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2 \end{aligned}$$

Daraus fliesst der Satz: Im rechteckigen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den die Katheten halbirenden Ecktransversalen gleich dem fünffachen Quadrat über der die Hypotenuse halbirenden Ecktransversale.

Oder umgekehrt: Ist die Summe der Quadrate über zwei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks gleich dem fünffachen Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale, so ist das Dreieck rechteckig, und zwar ist derjenige Dreieckswinkel ein Rechter, von dessen Scheitel die letztere Transversale ausgeht.

Ausserdem wissen wir, dass im schiefwinkligen Dreieck das Quadrat über einer Seite grösser oder kleiner ist als die Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, je nachdem der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel kleiner oder grösser als 90° ist. Demnach ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (16):

$$\alpha \begin{cases} < \\ > \end{cases} 90^\circ: \quad m_2^2 + m_3^2 \begin{cases} < \\ > \end{cases} 5m_1^2$$

Hieraus fliessen die Sätze:

1) In einem Dreieck ist die Summe der Quadrate über zwei Transversalen, welche die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, kleiner oder grösser als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale, je nachdem der Winkel, welcher der dritten Seite gegenüberliegt, kleiner oder grösser als 90° ist.

2) Im spitzwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über je zwei Transversalen, welche die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, kleiner als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale.

3) Ist in einem Dreieck die Summe der Quadrate über zwei Transversalen, welche die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, grösser als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale, so ist der Winkel, welcher der dritten Seite gegenüberliegt, grösser als 90° .

4) Ist in einem Dreieck die Summe der Quadrate über je zwei, die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbindenden Ecktransversalen kleiner als das fünffache Quadrat über der die dritte Seite halbirenden Ecktransversale, so ist das Dreieck spitzwinklig.

§. 5.

Nachdem wir bisher die Dreiecksseiten durch die seitenhalbirenden Ecktransversalen ausgedrückt haben, bleibt uns noch übrig, die Winkel des Dreiecks zu bestimmen. Hierbei könnte man die Gleichungen (16) auf die Gleichungen (9) des §. 3. anwenden. Indessen wollen wir jetzt einen anderen Weg einschlagen, wobei wir zu neuen Bedingungen zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks gelangen werden.

Der Kürze wegen sei (Fig. 1.)

$$\begin{aligned} \widehat{CAD} = \alpha_1, & \quad \widehat{BAD} = \alpha_2 \\ \widehat{ABE} = \beta_1, & \quad \widehat{CBE} = \beta_2 \\ \widehat{BCF} = \gamma_1, & \quad \widehat{ACF} = \gamma_2 \end{aligned}$$

Alsdann ergibt sich aus dem Dreieck *BCS*:

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma_1} = \frac{m_3}{m_2}$$

$$\frac{\sin \beta_2 + \sin \gamma_1}{\sin \beta_2 - \sin \gamma_1} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma_1) = \frac{m_3 + m_2}{m_3 - m_2}$$

Zwei analoge Gleichungen ergeben sich für γ_2 , α_1 und für α_2 , β_1 , so dass man hat:

$$(18) \quad \dots \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma_1) &= \frac{m_3 + m_2}{m_3 - m_2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha_1) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha_1) &= \frac{m_1 + m_3}{m_1 - m_3} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1) &= \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} \end{aligned} \right.$$

Wie man sieht, geht jede dieser Gleichungen aus der vorhergehenden hervor, wenn man die Winkel und die Indices von *m* cyklisch vertauscht.

Ferner erhält man aus dem Dreieck *CSE*, da $\widehat{CES} = \alpha + \beta_1$ ist:

$$\frac{\sin \gamma_2}{\sin(\alpha + \beta_1)} = \frac{m_2}{2m_3}$$

Daraus folgt auf dieselbe Weise wie vorher:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha + \beta_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha - \beta_1) = \frac{m_2 + 2m_3}{m_2 - 2m_3}$$

Nun ist aber: $\frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha + \beta_1) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1)$, wodurch die letztere Gleichung übergeht in

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha - \beta_1) = \frac{m_2 + 2m_3}{m_2 - 2m_3}$$

Wendet man hierauf die eben erwähnte cyklische Vertauschung an, so erhält man:

$$(19) \quad \dots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha - \beta_1) = \frac{m_2 + 2m_3}{m_2 - 2m_3} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta - \gamma_1) = \frac{m_3 + 2m_1}{m_3 - 2m_1} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma - \alpha_1) = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 - 2m_2} \end{array} \right.$$

Beachtet man schliesslich, dass $\widehat{BFS} = \alpha + \gamma_2$ ist, so folgt aus dem Dreieck BSF :

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin(\alpha + \gamma_2)} = \frac{m_3}{2m_2}$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{1}{2}(\beta_1 + \alpha + \gamma_2) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1)$ ist, so resultirt:

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha - \gamma_2) = \frac{m_3 + 2m_2}{m_3 - 2m_2}$$

Wenn wir auch hierauf die erwähnte Vertauschung anwenden, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(20) \quad \dots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha - \gamma_2) = \frac{m_3 + 2m_2}{m_3 - 2m_2} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_1 - \beta - \alpha_2) = \frac{m_1 + 2m_3}{m_1 - 2m_3} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \gamma - \beta_2) = \frac{m_1 + 2m_2}{m_2 - 2m_1} \end{array} \right.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$(21) \quad \dots \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) = u; & \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma_1) = u' \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha_1) = v; & \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha_1) = v' \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) = w; & \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1) = w' \end{array} \right.$$

so gehen, bei Beachtung, dass $\frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha - \beta_1) = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha_1) - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1)$; etc. ist, die Gl. (18) (19) (20) über in

$$(22) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{u'}{u} = \frac{m_3 + m_2}{m_3 - m_2} \\ \frac{v'}{v} = \frac{m_1 + m_3}{m_1 - m_3} \\ \frac{w'}{w} = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} \end{array} \right.$$

$$(23) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u \frac{v'w + 1}{w - v'} = \frac{m_2 + 2m_3}{m_2 - 2m_3} \\ v \frac{w'u + 1}{u - w'} = \frac{m_3 + 2m_1}{m_3 - 2m_1} \\ w \frac{u'v + 1}{v - u'} = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 - 2m_2} \end{array} \right.$$

$$(24) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u \frac{-w'v + 1}{v + w'} = \frac{m_3 + 2m_2}{m_3 - 2m_2} \\ v \frac{-u'w + 1}{w + u'} = \frac{m_1 + 2m_3}{m_1 - 2m_3} \\ w \frac{-v'u + 1}{u + v'} = \frac{m_2 + 2m_1}{m_2 - 2m_1} \end{array} \right.$$

Ausser diesen Gleichungen genügen u, v, w noch der Gleichung:

$$(25) \dots \dots \dots u + v + w = uvw$$

weil $\frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1) + \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ$ ist.

Durch Addition ergeben sich aus den Gleichungen (23) und (24):

$$\begin{aligned} w + v &= \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 - 2m_2} (v - u') + \frac{m_1 + 2m_3}{m_1 - 2m_3} (w + u') \\ u + w &= \frac{m_2 + 2m_3}{m_2 - 2m_3} (w - v') + \frac{m_2 + 2m_1}{m_2 - 2m_1} (u + v') \\ v + u &= \frac{m_3 + 2m_1}{m_3 - 2m_1} (u - w') + \frac{m_3 + 2m_2}{m_3 - 2m_2} (v + w') \end{aligned}$$

Ordnet man diese Gleichungen nach u, v, w und setzt darin für u', v', w' die aus den Gleichungen (22) folgenden Werte ein, so resultirt:

$$(26) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} m_1(m_2 + m_3)u + m_2(m_1 - 2m_3)v + m_3(m_1 - 2m_2)w = 0 \\ m_1(m_2 - 2m_3)u + m_2(m_3 + m_1)v + m_3(m_2 - 2m_1)w = 0 \\ m_1(m_3 - 2m_2)u + m_2(m_3 - 2m_1)v + m_3(m_1 + m_2)w = 0 \end{array} \right.$$

Wir haben also drei lineare Gleichungen für m_1u , m_2v , m_3w , deren absolute Glieder gleich null sind. Damit diese sich nicht widersprechen, muss, wie in der Determinantentheorie nachgewiesen wird, ihre Determinante verschwinden, also:

$$A = \begin{vmatrix} m_2 + m_3 & m_1 - 2m_3 & m_1 - 2m_2 \\ m_2 - 2m_3 & m_3 + m_1 & m_2 - 2m_1 \\ m_3 - 2m_2 & m_3 - 2m_1 & m_1 + m_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir mit Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 die Unterdeterminanten der Determinante A , welche in der Entwicklung von A als Coefficienten der Glieder der dritten Zeile auftreten, setzt man also:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m_1 - 2m_3 & m_1 - 2m_2 \\ m_3 + m_1 & m_2 - 2m_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_1 - 2m_2 & m_2 + m_3 \\ m_2 - 2m_1 & m_2 - 2m_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_2 + m_3 & m_1 - 2m_3 \\ m_3 - 2m_2 & m_3 + m_1 \end{vmatrix}$$

so erhält man aus den beiden ersten Gleichungen in (26):

$$v = \frac{m_1 \Delta_2}{m_2 \Delta_1} u$$

$$w = \frac{m_1 \Delta_3}{m_3 \Delta_1} u$$

Diese Werte in die Gleichung (25) eingesetzt giebt:

$$u^2 = \frac{\Delta_1(m_2 m_3 \Delta_1 + m_3 m_1 \Delta_2 + m_1 m_2 \Delta_3)}{m_1^2 \Delta_2 \Delta_3}$$

$$v^2 = \frac{\Delta_2(m_2 m_3 \Delta_1 + m_3 m_1 \Delta_2 + m_1 m_2 \Delta_3)}{m_2^2 \Delta_3 \Delta_1}$$

$$w^2 = \frac{\Delta_3(m_2 m_3 \Delta_1 + m_3 m_1 \Delta_2 + m_1 m_2 \Delta_3)}{m_3^2 \Delta_1 \Delta_2}$$

Diese Brüche lassen sich noch etwas vereinfachen. Es ist nämlich:

$$\Delta_1 = 3m_1(-m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\Delta_2 = 3m_2(m_1 - m_2 + m_3)$$

$$\Delta_3 = 3m_3(m_1 + m_2 - m_3)$$

so dass die Ausdrücke für u^2 , v^2 , w^2 übergehen in

$$u^2 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)(-m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 - m_2 + m_3)(m_1 + m_2 - m_3)}$$

$$v^2 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2 - m_3)(-m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$w^2 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 + m_2 - m_3)}{(-m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2 + m_3)}$$

Setzen wir schliesslich:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= 2s \\ -m_1 + m_2 + m_3 &= 2(s - m_1) \\ m_1 + m_2 + m_3 &= 2(s - m_2) \\ m_1 + m_2 - m_3 &= 2(s - m_3) \end{aligned}$$

so erhalten wir, wenn wir die Gleichungen (21) und (22) berücksichtigen:

$$(27) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 + \gamma_1)^2 &= \frac{s(s - m_1)}{(s - m_2)(s - m_3)} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 + \alpha_1)^2 &= \frac{s(s - m_2)}{(s - m_3)(s - m_1)} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1)^2 &= \frac{s(s - m_3)}{(s - m_1)(s - m_2)} \end{aligned} \right.$$

$$(28) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\beta_2 - \gamma_1)^2 &= \left(\frac{m_3 + m_2}{m_3 - m_2}\right)^2 \frac{s(s - m_1)}{(s - m_2)(s - m_3)} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\gamma_2 - \alpha_1)^2 &= \left(\frac{m_1 + m_3}{m_1 - m_3}\right)^2 \frac{s(s - m_2)}{(s - m_3)(s - m_1)} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1)^2 &= \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\right)^2 \frac{s(s - m_3)}{(s - m_1)(s - m_2)} \end{aligned} \right.$$

Hierdurch sind die Dreieckswinkel eindeutig bestimmt.

Denn in den Gleichungen (27) haben wir, wenn wir die Quadratwurzel ausziehen, nur das positive Vorzeichen dieser Quadratwurzel zu nehmen, da die halbe Summe zweier Winkelteile eines Dreiecks kleiner als 90° ist, die Cotangente von Winkeln im ersten Quadranten aber positiv ist.

§. 6.

Wenn wir die im vorigen §. erhaltenen Gleichungen (27) mit den Gleichungen (9) in §. 3. vergleichen, so ergibt sich daraus, dass $\beta_2 + \gamma_1$, $\gamma_2 + \alpha_1$, $\alpha_2 + \beta_1$ Winkel eines Dreiecks sind, welches

m_1, m_2, m_3 zu Seiten hat. Nun sind aber, wie sich aus Fig. 1. ergibt, $\beta_2 + \gamma_1, \gamma_2 + \alpha_1, \alpha_2 + \beta_1$ die Winkel, welche von dem oberen Abschnitte je einer der seitenhalbirenden Ecktransversalen und dem unteren Abschnitte einer anderen gebildet werden. Construirt man daher das Dreieck aus den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines gegebenen Dreiecks als Seiten, so sind die Winkel desselben gleich den Winkeln, welche im gegebenen Dreieck von je einem oberen Abschnitte einer der Transversalen und dem unteren Abschnitte einer anderen gebildet werden.

Dieses Resultat lässt sich auch geometrisch ableiten. Zieht man zunächst durch die Ecke B des Dreiecks ABC (Fig. 1.) die Parallele BN zu der Transversale CF , welche die Verlängerung der Transversale AD über D hinaus in N schneidet, so ist in den Dreiecken BDN und CDS :

$$\begin{aligned} BD &= CD \\ \hat{BDN} &= \hat{CDS} \\ \hat{BND} &= \hat{CSD} \\ \hline \triangle BDN &\cong \triangle CDS \\ \hline BN &= CS = \frac{2}{3}CF \\ DN &= DS = \frac{1}{3}AD \end{aligned}$$

Verlängert man nun SB über B hinaus um $BJ = SE$, zieht durch J die Parallele zu CF , welche die Verlängerung von AD über D hinaus in K schneidet, so ist:

$$JK : BN = JS : BS = 3 : 2$$

folglich:

$$JK = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}CS = CF$$

Ausserdem ist:

$$KS : NS = JS : BS = 3 : 2$$

folglich:

$$KS = \frac{2}{3}NS = AD$$

Mithin ist in dem Dreieck JKS :

$$\begin{aligned} SK &= AD \\ SJ &= BE \\ JK &= CF \\ \hat{JSK} &= \hat{BSD} = \hat{ASE} \\ \hat{JKS} &= \hat{CSD} = \hat{ASF} \\ \hat{KJS} &= \hat{BSF} = \hat{CSE} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, da sich aus den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks stets ein Dreieck construiren lässt, welches dieselben als Seiten enthält, dass zwischen ihnen die Bedingungen bestehen:

$$(29) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} m_2 + m_3 > m_1 > m_2 - m_3 \\ m_3 + m_1 > m_2 > m_3 - m_1 \\ m_1 + m_2 > m_3 > m_1 - m_2 \end{array} \right.$$

Trägt man ferner auf den seitenhalbirenden Ecktransversalen von ihrem Durchschnitte S aus nach beiden Seiten hin die Länge der betreffenden Transversale ab, so dass also

$$\begin{aligned} SG &= SK = AD \\ SH &= SL = CF \\ SJ &= SM = BE \end{aligned}$$

und verbindet die Endpunkte dieser Strecken, so erhält man das Sechseck $GHJKLM$, dessen Seiten bezüglich gleich und parallel den drei Transversalen des gegebenen Dreiecks sind. Es ist:

$$\begin{aligned} HJ &= AD = ML \\ GH &= BE = KL \\ MG &= CF = JK \end{aligned}$$

Demnach erhält man:

$$\frac{\triangle ASB}{\square GSJH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m_1 \cdot \frac{2}{3} m_2}{m_1 \cdot m_2} = \frac{2}{3}$$

also:

$$\triangle ASB = \frac{2}{3} \square GSJK$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$\begin{aligned} \triangle BSC &= \frac{2}{3} \square JSLK \\ \triangle CSA &= \frac{2}{3} \square LSGM \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen resultirt:

$$\triangle ABC = \frac{2}{3} GHJKLM$$

Nun ist aber, wie man sofort übersieht:

$$GHJKLM = 6 \triangle GSH$$

und:

$$\triangle GSH = \sqrt{s(s - m_1)(s - m_2)(s - m_3)}$$

Mithin folgt:

$$(30) \dots \Delta ABC = \frac{1}{4} \sqrt{s(s-m_1)(s-m_2)(s-m_3)}$$

wobei s , wie wir oben festgesetzt haben, die Summe der drei seitenhalbirenden Ecktransversalen des Dreiecks ABC bedeutet.

Uebrigens ergibt sich aus dem Gesagten eine einfache Construction des Dreiecks ABC aus seinen drei seitenhalbirenden Ecktransversalen m_1, m_2, m_3 .

Man construire $\triangle BSN$ aus $SN = \frac{1}{3}m_1$, $BS = \frac{2}{3}m_2$, $BN = \frac{2}{3}m_3$, ziehe durch S und N die Parallelen bezüglich zu BN und BS , welche sich in C schneiden, verlängere NS über S hinaus um $SA = SN$, so ist $\triangle ABC$ das verlangte Dreieck.

Guben, Juli 1885.

III

Ueber trigonometrische Functionen von Winkelsummen und über Relationen zwischen Polygonwinkeln.

Von
Seipp.

Beliebige Winkelgrößen, n an der Zahl, seien mit $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ bezeichnet.

Von den bekannten Formeln:

$$\sin(w_1 + w_2 + w_3) = \sin w_1 \cos w_2 \cos w_3 + \sin w_2 \cos w_1 \cos w_3 + \sin w_3 \cos w_1 \cos w_2 - \sin w_1 \sin w_2 \sin w_3$$

und

$$\cos(w_1 + w_2 + w_3) = -\sin w_1 \sin w_2 \cos w_3 - \sin w_1 \sin w_3 \cos w_2 - \sin w_2 \sin w_3 \cos w_1 + \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3$$

ausgehend, erhält man wegen

$$\sin(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) = \sin(w_1 + w_2 + w_3) \cos w_4 + \cos(w_1 + w_2 + w_3) \sin w_4$$

sogleich:

$$\begin{aligned} \sin(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) = & \sin w_1 \cos w_2 \cos w_3 \cos w_4 \\ & + \sin w_2 \cos w_1 \cos w_3 \cos w_4 \\ & + \sin w_3 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_4 \\ & + \sin w_4 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \\ & - \sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \\ & - \sin w_1 \sin w_2 \sin w_4 \cos w_3 \\ & - \sin w_1 \sin w_3 \sin w_4 \cos w_2 \\ & - \sin w_2 \sin w_3 \sin w_4 \cos w_1 \end{aligned}$$

Auf analogem Wege ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos(w_1+w_2+w_3+w_4) = & -\sin w_1 \sin w_2 \cos w_3 \cos w_4 - \sin w_1 \sin w_3 \cos w_2 \cos w_4 \\ & - \sin w_1 \sin w_4 \cos w_2 \cos w_3 - \sin w_2 \sin w_3 \cos w_1 \cos w_4 \\ & - \sin w_2 \sin w_4 \cos w_1 \cos w_3 - \sin w_3 \sin w_4 \cos w_1 \cos w_2 \\ & + \sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \sin w_4 \\ & + \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \cos w_4 \end{aligned}$$

Vorstehende Entwicklungen lassen das Bildungsgesetz der Ausdrücke für sin und cos einer beliebigen Winkelsumme bereits deutlich erkennen. Es findet seinen Ausdruck in folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \text{I) } \sin(w_1+w_2+w_3+w_4+\dots+w_n) = & \Sigma(\sin w_1 \cos w_2 \cos w_3 \dots \cos w_n) \\ & - \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \cos w_5 \dots \cos w_n) \\ & + \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_5 \cos w_6 \cos w_7 \dots \cos w_n) \\ & - \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_7 \cos w_8 \cos w_9 \dots \cos w_n) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II) } \cos(w_1+w_2+w_4+\dots+w_n) = & -\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \cos w_3 \cos w_4 \dots \cos w_n) \\ & + \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \sin w_4 \cos w_5 \dots \cos w_n) \\ & - \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_6 \cos w_7 \dots \cos w_n) \\ & + \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_8 \cos w_9 \dots \cos w_n) \\ & \dots \dots \dots \\ & + \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \dots \cos w_n \end{aligned}$$

Was das Zeichen Σ in dieser unendlichen Productensumme betrifft, so bedeutet z. B. $\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \dots \cos w_n)$: Summe aller möglichen, von einander verschiedenen Producte aus den Sinus je dreier Winkel mal den Cosinus der übrigen. Die Anzahl der so sich ergebenden Summanden unter dem Σ -Zeichen ist demnach gleich der Zahl der Combinationen von n Elementen (Indices) zu je 3 ohne Wiederholung, nämlich in I) $\binom{n}{1}, \binom{n}{3}, \dots$ in II) $\binom{n}{2}, \binom{n}{4}, \dots$

Durch Gleichsetzung der Winkel:

$$w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_n = w$$

entstehen aus I) und II) die bekannten Reihen für sin und cos der vielfachen Bögen, nämlich:

$$\text{III) } \sin nw = \Sigma(\sin w \cos^{n-1} w) - \Sigma(\sin^3 w \cos^{n-3} w) \\ + \Sigma(\sin^5 w \cos^{n-5} w) - \dots$$

oder

$$\sin nw = n \sin w \cos^{n-1} w - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 w \cos^{n-3} w \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 w \cos^{n-5} w - \dots$$

und

$$\text{IV) } \cos nw = \cos^n w - \Sigma(\sin^2 w \cos^{n-2} w) + \Sigma(\sin^4 w \cos^{n-4} w) - \dots$$

oder

$$\cos nw = \cos^n w - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin^2 w \cos^{n-2} w \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 w \cos^{n-4} w - \dots$$

Dieselben sind hiernach erhalten, ohne dass auf die Moivre'sche Binomialformel recurrirt wurde.

$w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ mögen jetzt die Umfangswinkel eines Polygons (n -Ecks) bedeuten. Dann ist wegen Σw_i oder $w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = (2n - 4)R$:

$$\sin(\Sigma w_i) = 0 \quad \text{und} \\ \cos(\Sigma w_i) = (-1)^n$$

Anstatt der hiermit aus I) und II) sofort sich ergebenden Relationen für die Winkel eines beliebigen Vielecks, sollen hier einige, andere Beziehungen aufgesucht werden, welche sich als Erweiterungen der bekannten Formeln

$$\sin 2w_1 + \sin 2w_2 + \sin 2w_3 = 4 \sin w_1 \sin w_2 \sin w_3$$

und

$$\cos 2w_1 + \cos 2w_2 + \cos 2w_3 = -1 - 4 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3$$

für's Dreieck darstellen.

Die erstere dieser beiden Formeln wird bekanntlich erhalten, indem man in dem obigen Ausdruck für $\sin(w_1 + w_2 + w_3)$ successive w_1, w_2 und w_3 negativ nimmt und die so entstehenden Gleichungen zur ursprünglichen addirt, nachdem die letztere beiderseits des Zeichens $=$ mit -1 multiplicirt worden. Eine Erweiterung dieses Verfahrens besteht nun darin, dass man sich für das Viereck, Fünfeck u. s. f., allgemein für das n -Eck der bezüglichen Factoren $-2, -3, \dots, -(n-2)$ bedient, im übrigen aber genau wie beim Dreieck operirt. Wir setzen also in Formel I) die Bögen der Reihe nach negativ und addiren die so erhaltenen n Gleichungen. Die

linken Seiten derselben lassen sich sofort auf die Form $\sin[(2n-4)R - 2w_i]$ bringen, wenn i den Repräsentanten der Winkelindices: 1, 2, 3 ... n vorstellt. Auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen ändern nur diejenigen Glieder das Vorzeichen, welche den \sin des negativ gesetzten Winkels w_i enthalten. Die Glieder mit $\cos w_i$ bleiben ungeändert. Da nun $\sin[(2n-4)R - 2w_i]$ für $n = 3, 5, 7 \dots$ positiv, für $n = 4, 6, 8 \dots$ aber negativ wird, so lässt sich allgemein dafür schreiben: $(-1)^{n \pm 1} \sin 2w_i$. Zur Summe $(-1)^{n \pm 1} [\sin 2w_1 + \sin 2w_2 + \dots + \sin 2w_i + \dots + \sin 2w_n]$ oder kürzer: $(-1)^{n \pm 1} \Sigma(\sin 2w_i)$ fügen wir ferner noch das $-(n-2)$ fache von Gleichung I) hinzu. Da die linke Seite derselben gleich null, so wird der vorige Summenausdruck dadurch nicht geändert. — Jedes Glied der Summe $\Sigma(\sin w_1 \cos w_2 \dots \cos w_n)$, Formel I), besteht aus $n-1$ \cos -Factoren und nur einem \sin -Factor. Es findet also in Folge der Setzung $-w_i$ statt w_i (während i alle Werte von 1 bis n durchläuft) nur ein Zeichenwechsel statt, und es erscheint sonach jedes Glied von $\Sigma(\sin w_1 \cos w_2 \dots \cos w_n)$ und folglich dieser Ausdruck selbst $n-1$ mal mit dem $+$ und 1 mal mit dem $-$ Zeichen behaftet. Dazu kommt noch das $-(n-2)$ fache eines jeden Gliedes. Der in Rede stehende Ausdruck Σ tritt also im Ganzen $(n-1) - 1 - (n-2)$ mal auf, d. h. er verschwindet ganz. Jedes der negativen Glieder von $-\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \dots \cos w_n)$ und folglich dieser Ausdruck selbst, kann, wenn successive $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ negativ genommen wird, nur 3 mal sein Zeichen ändern. Er tritt also $n-3$ mal unverändert und 3 mal mit entgegengesetztem Vorzeichen, zusammen $(n-3) - 3$ mal auf. Jedes der $\binom{n}{3}$ Glieder des Ausdrucks Σ wird ausserdem noch $n-2$ mal mit geändertem Vorzeichen hinzugefügt, so dass der Ausdruck $+\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \dots \cos w_n)$ im ganzen $3 - (n-3) + (n-2)$ mal, d. h. 4 mal vorkommt. Besitzen die Glieder eines Summanden Σ in Formel I) allgemein ν Sinus- und $n-\nu$ Cosinus-Factoren, so werden jene, den vorstehenden Betrachtungen gemäss, im ganzen $\nu - (n-\nu) + (n-2)$ mal, d. h. $2\nu - 2$ oder $2(\nu - 1)$ mal mit dem ihrem ursprünglichen entgegengesetzten Vorzeichen auftreten. Dasselbe gilt folglich auch von dem ganzen Ausdruck Σ . Die vorstehend beschriebene Summation ergibt demgemäss das Resultat:

$$\begin{aligned}
 \text{V) } & (-1)^{n \pm 1} \Sigma(\sin 2w_i) = 4 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \dots \cos w_n) \\
 & - 8 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_6 \cos w_7 \dots \cos w_n) \\
 & + 12 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_7 \cos w_8 \dots \cos w_n) \\
 & - 16 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_9 \cos w_{10} \dots \cos w_n) \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\{1 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \cos w_4 \dots \cos w_n) \\
 &\quad - 2 \Sigma(\sin w_1 \dots \sin w_3 \cos w_6 \dots \cos w_n) \\
 &\quad + 3 \Sigma(\sin w_1 \dots \sin w_7 \cos w_8 \dots \cos w_n) \\
 &\quad - 4 \Sigma(\sin w_1 \dots \sin w_9 \cos w_{10} \dots \cos w_n) \\
 &\quad \dots \dots \dots \}
 \end{aligned}$$

Für ungerade Werte von n bricht diese fortlaufende Summe mit einem Gliede ab, welches nur aus einem einzigen Sinusproduct besteht. Für $n = 3$, also $w_4 = w_5 = \dots = 0$ und folglich $\cos w_4 = \cos w_5 = \dots = 1$, $\sin w_4 = \sin w_5 = \dots = 0$ folgt z. B. $+1 \Sigma(\sin w_1) = 4 \sin w_2 \sin w_3 \sin w_4$. Die andere Relation zwischen den Dreieckswinkeln: $\cos 2w_1 + \cos 2w_2 + \cos 2w_3 = -1 - 4 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3$ wird erhalten, wenn man in der Formel für $\Sigma(\cos w_1)$ successive w_1, w_2, w_3 negativ setzt und die so erhaltenen drei Gleichungen zu den vorigen einfach addirt. Zum Viereck, Fünfeck, Sechseck ... n -Eck fortschreitend, bringen wir statt $+1$ die Factoren $0, -1, -2 \dots -(n-4)$ zur Anwendung. Im Uebrigen verfahren wir wie beim Dreieck. Das Summenglied $\Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \cos w_3 \cos w_4 \dots \cos w_n)$ fällt in Folge der besonderen Wahl jener Factoren in allen Fällen aus. Man findet auf dem angedeuteten Wege leicht:

$$\begin{aligned}
 \text{VI) } &-(n-4)(-1)^n + (-1)^n \Sigma(\cos 2w_1) = 4 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \dots \cos w_n \\
 &\quad - 4 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \sin w_3 \sin w_4 \cos w_5 \dots \cos w_n) \\
 &\quad + 8 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_6 \cos w_7 \dots \cos w_n) \\
 &\quad - 12 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_8 \cos w_9 \dots \cos w_n) \\
 &\quad + 16 \Sigma(\sin w_1 \sin w_2 \dots \sin w_{10} \cos w_{11} \dots \cos w_n) \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &= 4 \cos w_1 \cos w_2 \cos w_3 \dots \cos w_n \\
 &\quad - 4\{1 \Sigma(\sin w_1 \dots \sin w_4 \cos w_5 \dots \cos w_n) \\
 &\quad - 2 \Sigma(\sin w_1 \dots \sin w_6 \cos w_7 \dots \cos w_n) \\
 &\quad + 3 \Sigma(\sin w_1 \dots \sin w_8 \cos w_9 \dots \cos w_n) \\
 &\quad - 4 \Sigma(\sin w_1 \dots \sin w_{10} \cos w_{11} \dots \cos w_n) \\
 &\quad \dots \dots \dots \}
 \end{aligned}$$

Bei geradem n bricht diese fortlaufende Summe mit einem Product aus n Sinus-Factoren ab. Das vierfache Cosinus-Product erscheint unter allen Umständen.

Das Bildungsgesetz für die trigonometrische Tangente einer beliebigen Winkelsumme leiten wir durch Induction von

$$\operatorname{tg}(w_1 + w_2) = \frac{\operatorname{tg}w_1 + \operatorname{tg}w_2}{1 - \operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2}$$

aus ab. Zunächst folgt:

$$\operatorname{tg}(w_1 + w_2 + w_3) = \frac{\operatorname{tg}(w_1 + w_2) + \operatorname{tg}w_3}{1 - \operatorname{tg}(w_1 + w_2) \operatorname{tg}w_3}$$

oder

$$\operatorname{tg}(w_1 + w_2 + w_3) = \frac{\operatorname{tg}w_1 + \operatorname{tg}w_2 + \operatorname{tg}w_3 - \operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3}{1 - \operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 - \operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_3 - \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3}$$

und endlich allgemein für n Winkel:

$$\begin{aligned} \text{VII) } \operatorname{tg}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \dots + w_n) &= \sum_{\binom{n}{1}} (\operatorname{tg}w_1) - \sum_{\binom{n}{3}} (\operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3) \\ &\quad + \sum_{\binom{n}{5}} (\operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3 \operatorname{tg}w_4 \operatorname{tg}w_5) - \dots \\ &: 1 - \sum_{\binom{n}{2}} (\operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2) + \sum_{\binom{n}{4}} (\operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3 \operatorname{tg}w_4) - \dots \end{aligned}$$

Für $\operatorname{cotg}(\sum w_i)$ gilt der reciproke Ausdruck.

Formel VII) reducirt sich für $w_1 = w_2 = \dots w_n = w$ auf folgenden für die tang des n -fachen Winkels giltigen Quotienten zweier unendlichen Reihen:

$$\text{VIII) } \operatorname{tg}nw = \frac{n \operatorname{tg}w - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3w + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5w - \dots}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2w + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4w - \dots}$$

Für $\operatorname{cotg}nw$ gilt der umgekehrte Ausdruck.

Bedeutet jetzt $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ die Winkel am Umfang eines n -Ecks, dann ist $\operatorname{tg}(\sum w_i) = \operatorname{tg}(2n - 4)R = 0$ und die Formel VII) geht in die folgende über:

$$\text{IX) } 0 = \sum_{\binom{n}{1}} (\operatorname{tg}w_1) - \sum_{\binom{n}{3}} (\operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3) + \sum_{\binom{n}{5}} (\operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3 \operatorname{tg}w_4 \operatorname{tg}w_5) - \dots$$

Dieselbe liefert ihrerseits wieder in dem speciellen Fall, dass $w_4 = w_5 = \dots = 0$, die bekannte Relation zwischen den trigonometrischen Tangenten der Dreieckswinkel:

$$\operatorname{tg}w_1 + \operatorname{tg}w_2 + \operatorname{tg}w_3 = \operatorname{tg}w_1 \operatorname{tg}w_2 \operatorname{tg}w_3$$

Zwischen den Tangenten der Viereckswinkel besteht die entsprechende Beziehung:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} w_1 + \operatorname{tg} w_2 + \operatorname{tg} w_3 + \operatorname{tg} w_4 &= \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_3 + \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_4 \\ &\quad + \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_3 \operatorname{tg} w_4 + \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_3 \operatorname{tg} w_4 \end{aligned}$$

Formel IX) ist übrigens auch aus der auf Polygonwinkel angewandten Formel I) durch Division mit $\cos w_1 \cos w_2 \dots \cos w_n$ ableitbar.

Für die cotg einer beliebigen Winkelsumme gilt die Formel:

$$\begin{aligned} \text{X) } \operatorname{cotg}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \dots + w_n) &= \sum_{\binom{n}{1}} (\operatorname{cotg} w_1) - \sum_{\binom{n}{3}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3) \\ &\quad + \sum_{\binom{n}{5}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3 \operatorname{cotg} w_4 \operatorname{cotg} w_5) \\ &\quad - \dots \dots \dots \\ &: 1 - \sum_{\binom{n}{2}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2) + \sum_{\binom{n}{4}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \dots \operatorname{cotg} w_4) \\ &\quad - \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Beträgt die Zahl der Winkel beispielsweise 3 und gehören dieselben einem Dreieck an, so folgt aus X), da $\operatorname{cotg}(2R) = \infty$, folglich der Nenner gleich null wird,

$$\sum_{\binom{3}{2}} (\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2) = 1 \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 + \operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_3 + \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3 = 1$$

Diese Formel ist jedoch identisch mit

$$\sum_{\binom{3}{1}} (\operatorname{tg} w_1) = \operatorname{tg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_3$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die letztere Formel, je nachdem man beide Seiten derselben mit $\operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3$, $\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_3$ oder $\operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2$ multiplicirt, auch auf eine der drei Formen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} w_1 - \operatorname{cotg} w_2 - \operatorname{cotg} w_3 &= \operatorname{tg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{cotg} w_3, \\ - \operatorname{cotg} w_1 + \operatorname{tg} w_2 - \operatorname{cotg} w_3 &= \operatorname{cotg} w_1 \operatorname{tg} w_2 \operatorname{cotg} w_3, \\ - \operatorname{cotg} w_1 - \operatorname{cotg} w_2 + \operatorname{tg} w_3 &= \operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \operatorname{tg} w_3 \end{aligned}$$

gebracht werden kann.

VI.

Die elliptischen Integrale der Bewegung
eines schweren Punktes in der verticalen Parabel.

Von

Emil Oekinghaus.

Die Verwandtschaft der Curven kann dazu benutzt werden, in dynamischem Sinne die Bewegungsverhältnisse eines Punktes auf die Bewegung eines zweiten in der verwandten Curve zu beziehen.

Wir werden im Folgenden die Bewegung eines schweren Punktes in einer verticalen Parabel analytisch verfolgen und die daraus entspringenden Zeitintegrale mit denjenigen identificiren, auf welchen die Rectification der Ellipse und Hyperbel beruht.

1.

Wir nehmen zunächst an, dass die Achse der Parabel vertical nach oben gerichtet sei und erteilen im Scheitel der Parabel dem schweren Punkte eine Geschwindigkeit v_0 , welche der Geschwindigkeitshöhe h entspricht. Demnach ist

$$v_0^2 = 2gh$$

Nach Verlauf der Zeit t habe der Ort des Punktes die Abscisse x , die Geschwindigkeit wird dann durch

$$v^2 = 2g(h - x)$$

bestimmt. Führen wir den Polarwinkel θ ein, so ist, wie mittelst der Polargleichung gefunden wird,

$$\begin{aligned}x &= q \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta^2, \\y &= 2q \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta, \\r &= \frac{q}{\cos \frac{1}{2} \theta}\end{aligned}$$

Für die Grenzlage ist demnach

$$h = q \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta^2$$

Da nun $v = \frac{ds}{dt}$ und also die Zeit der Bewegung durch $t = \int \frac{ds}{v}$ gefunden wird, so muss zunächst das Differential des Parabelbogens s durch θ ausgedrückt werden, man findet

$$ds = p \frac{d \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta^2}$$

Substituirt man nun noch in v den oben abgeleiteten Wert von x , so gewinnt man schliesslich das Integral

$$t = \int \frac{p d \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta^2 \sqrt{2g(h - (h + q) \sin \frac{1}{2} \theta^2)}}$$

Zu diesem Integral gelangt man nun auch auf folgendem Wege. In einer Ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ wählen wir einen Punkt derart, dass seine beiden Brennstrahlen einen Winkel θ , also den Polarwinkel der Parabel einschliessen. Bemerket man nun, dass der Bogen S der Ellipse durch

$$S = A \int \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2} \sin^2 \varphi} d\varphi$$

bestimmt wird, dass φ der bekannte excentrische Winkel ist, welcher, wie leicht nachzuweisen, mittelst der Relation

$$\cos \varphi = \frac{B}{C} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$$

durch θ ausgedrückt werden kann, so führt die Einführung von θ auf ein Integral von der Form

$$s = \int \frac{B^2 d \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta^2 \sqrt{C^2 - A^2 \sin \frac{1}{2} \theta^2}}$$

welches mit dem obigen Zeitintegral in Uebereinstimmung gebracht werden kann. Wählt man den Bogen von der grossen Achse an, so entspricht der Bogen S der Zeit t , welche vom Scheitelpunkt der Parabel an gezählt ist.

Soll demnach die Zeit t des durchlaufenen Parabelbogens proportional durch einen Bogen s einer bestimmten Ellipse dargestellt werden, so sind folgende Bedingungen erforderlich

$$\int \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{1 - \frac{h+q}{h} \sin\frac{1}{2}\theta^2}} = \int \frac{d\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2} \sin\frac{1}{2}\theta^2}}$$

$$\frac{h+q}{h} = \frac{A^2}{C^2}$$

Aus der zweiten folgt demnach

$$\frac{q}{h} = \frac{B^2}{C^2} = \cotg\frac{1}{2}\beta^2$$

wonach der aus $\tg\frac{1}{2}\beta = \frac{C}{B}$ folgende Winkel zwischen den Brennpunkten vom Scheitelpunkte der kleinen Achse, also β , dem Polarwinkel des höchsten Punktes der Parabel, oder der Geschwindigkeitshöhe h entspricht.

In Folge des Obigen findet man die Zeit der Bewegung aus der Relation

$$t = \frac{S}{C} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

so dass für zwei Phasen

$$t : t' = S : S'$$

die entsprechenden Zeiten sich verhalten wie die bezüglichen Ellipsenbogen. Für den senkrechten Fall aus der Höhe h folgt die Zeit τ aus $h = \frac{1}{2}g\tau^2$, demnach gibt hiernach die letzte Formel die Relation

$$\frac{t}{\tau} = \frac{S}{C}$$

Die Fallzeit in der Parabel verhält sich zur Fallzeit in der Geschwindigkeitshöhe h wie der dem Polar- und Focalwinkel θ entsprechende Ellipsenbogen zur Excentricität.

Setzt man einfach

$$C = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{g} = \tau$$

so ist der Ellipsenbogen S selbst das Mass der vom Scheitel der Parabel an verflissenen Zeit.

Führt man dagegen in der allgemeineren Formel

$$S = \frac{C}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \cdot t = ct$$

die mittlere Geschwindigkeit c ein, so folgt, wenn man die Excentricität der Ellipse gleich der doppelten Geschwindigkeitshöhe, also $C = 2h$ annimmt,

$$c = v_0$$

Mit der Bewegung eines Punktes in der Parabel, deren Achse vertical nach oben gerichtet ist, steht demnach eine entsprechende gleichförmige Bewegung eines andern Punktes in einer Ellipse derart in Wechselbeziehung, dass der Polarwinkel des Punktes in der Parabel zu jeder Zeit dem Focalwinkel des bezüglichen in der Ellipse gleich ist, vorausgesetzt, dass der Polarwinkel β des äussersten Punktes mittelst der Relation

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{C}{B}$$

die Achsenverhältnisse der Ellipse definirt.

Da $v^2 = 2g(h - q \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta^2) = 2gh \left(1 - \frac{B^2}{C^2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta^2\right) = 2gh \sin^2 \varphi$ ist, so ergibt sich aus

$$v = v_0 \sin \varphi = v_0 \frac{X}{A}$$

der Satz, dass die Geschwindigkeit in den verschiedenen Parabelpunkten den Abscissen der entsprechenden Ellipsenpunkte proportional ist.

Ueberträgt man demnach in dem entwickelten Sinne die gleichförmige Bewegung eines Punktes in der Ellipse auf die Parabel in der gedachten Lage, so erhält man die Fallbewegung in derselben. Die periodische Bewegung des schweren Punktes in letzterer wird demnach durch das Durchlaufen eines zweiten Punktes in der erstern klar veranschaulicht. Je grösser die erteilte Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist, um so grösser wird β , und um so gestreckter wird die Ellipse, bis sie bei unendlich wachsendem v zu einer Geraden degenerirt. Dagegen nähert sich bei abnehmender Geschwindigkeit die Ellipse der Kreisform.

II.

Wir nehmen ferner an, dass die Achse der Parabel normal nach unten gerichtet sei.

Die Anfangsgeschwindigkeit im Scheitelpunkt sei v_0 , die der Abscisse x entsprechende Geschwindigkeit wird bestimmt durch die Formel

$$v^2 = v_0^2 + 2gx$$

Die Substitutionen sind wie vorhin einzuführen, so dass das Zeitintegral durch

$$t = \int \frac{pd \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{2g(h - (h - q) \sin \frac{1}{2}\theta^2)}}$$

definiert ist. Hierin bedeutet h die der Geschwindigkeit v_0 entsprechende Höhe.

Es kommt nun darauf an, dieses Integral auf andern Wege abzuleiten.

In einer Hyperbel $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ bestimmen wir einen Punkt der Art, dass die Focallinien einen Winkel $180^\circ - \theta$ mit einander einschliessen, welcher dem Polarwinkel θ der Parabel entspricht.

Beachten wir nun, dass bei der Rectification der Hyperbel ein Winkel φ vorkommt, der durch die Formel $\frac{A}{X} = \cos \varphi$ bekannt ist, und dass auch hier die Relation

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{C} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$$

gilt, so kann das Bogenintegral

$$S = A \int \sqrt{\frac{C^2}{A^2} - \cos^2 \varphi} \sec^2 \varphi d\varphi$$

durch Einführung der Amplitude θ in das folgende umgeformt werden:

$$S = B^2 \int \frac{d \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{C^2 - A^2 \sin \frac{1}{2}\theta^2}}$$

Dieses Integral ist dem obigen für die Parabel analog.

Soll demnach die Zeit t des vom Punkte durchlaufenen Parabelbogens proportional dem Bogen S einer bestimmten Hyperbel sein, so sind die folgenden Bedingungen erforderlich

$$\int \frac{d \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{1 - \frac{h-q}{h} \sin \frac{1}{2}\theta^2}} = \int \frac{d \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{1 - \frac{A^2}{C^2} \sin \frac{1}{2}\theta^2}},$$

$$\frac{h-q}{h} = \frac{A^2}{C^2}$$

Aus der zweiten folgt demnach wegen $C^2 = A^2 + B^2$

$$\frac{h}{q} = \frac{B^2}{C^2} = \cot^2 \frac{1}{2}\beta^2$$

Hieraus ergeben sich die Achsenverhältnisse der Hyperbel, wozu nach jeder Geschwindigkeitshöhe h eine bestimmte Hyperbel entspricht, falls $h > q$, und der Punkt gezwungen ist, die Curve nicht zu verlassen.

Trägt man auf der kleinen Halbachse die Strecke B auf und zieht die Focallinien, so schliessen diese einen Winkel β ein, welcher gleich dem Polarwinkel β der Parabel ist, letzterer entspricht der Höhe h für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

Die Zeit des durchlaufenen Parabelbogens ist dem Bogen S der Hyperbel proportional, wenn der Polarwinkel gleich dem Focalwinkel ist. Man hat dann wie bei der Ellipse

$$t = \frac{S}{C} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Für die der freien Fallbewegung in h entsprechende Zeit τ folgt aus der letzten Formel

$$\frac{t}{\tau} = \frac{S}{C}$$

Bewegt sich demnach ein Punkt vom Scheitelpunkt einer Hyperbel aus in gleichförmiger Bewegung, so ist mit dieser eine beschleunigte eines schweren Punktes in einer Parabel verknüpft, und zwar so, dass der Focalwinkel der Hyperbel dem Polarwinkel der Parabel gleich ist. Wie man sieht, geht die Bewegung in's Unendliche fort.

$$\text{Da } S = \frac{C}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \cdot t \text{ ist, so führen wir ein } c = \frac{C}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Die gleichförmige Geschwindigkeit in der Hyperbel ist demnach $= c$. Setzen wir die Excentricität gleich $2h$, so folgt $c = v_0$, wozu nach bei der Hyperbel die constante Geschwindigkeit mit derjenigen im Scheitel der Parabel übereinstimmt. Je kleiner diese ist, um so grösser wird wegen $\text{tg } \frac{1}{2}\beta = \frac{C}{B}$ der Asymptotenwinkel und um so steiler die Curve. Bei grösserer Geschwindigkeit dagegen wird der Winkel kleiner, und die Hyperbel degenerirt zu zwei in der Abscissenachse liegenden Geraden. In beiden Fällen nehmen wir die Excentricität C als constant an.

Die Geschwindigkeit wird durch die Formel

$$v^2 = 2gh \left(1 + \frac{B^2}{C^2} \text{tg } \frac{1}{2}\theta^2 \right)$$

also wegen bekannter Beziehungen durch

$$v = \frac{v_0}{\cos\varphi} = \frac{v_0}{A} \cdot x$$

bestimmt. Sie ist demnach der Hyperbelabscisse x proportional und wächst mit der Zeit in's Unendliche.

Man wird schon bemerkt haben, dass die Bewegung eines Punktes in der Parabel mit nach unten gerichteter Achse auf besondere Grenzfälle stösst, die einer Untersuchung bedürfen, da der Modulus des elliptischen Integral grösser, kleiner und gleich null gesetzt werden kann. Im letztern Fall ist $h = q$, oder die Geschwindigkeitshöhe wird zur Focaldistanz der Parabel und damit wird die Bewegung die freie der Wurfbewegung im leeren Raume.

Für diesen Fall müssen wir sehen, was aus unserer Hyperbel wird. Da der betreffende Polarwinkel der Parabel $= 90^\circ$ und demnach $C = B$ wird, so geht die Hyperbel in die Ordinatenachse über. Der Wurfbewegung entspricht demnach eine gleichförmige Bewegung in einer Geraden, welche man in entgegengesetzter Richtung mit der Achse der Parabel in gleicher Lage annehmen kann. Die Ordinaten des Brennpunktes schneiden die Parabel in den Brennpunkten dieser Grenzhyperbel. Auch ist der Focalwinkel in jedem Punkte dieser Geraden gleich dem Polarwinkel der genannten Bewegung in der Parabel. Da wegen $h = q$ die Excentricität gleich $2h = 2q$ ist, so ist die gleichförmige Bewegung in der Geraden gleich der Geschwindigkeit ein Scheitel der Bahn.

Hinsichtlich der Wurfbewegung bemerken wir noch, dass die Schnittpunkte der Parabelachse mit den Tangenten, welche durch die aufeinander folgenden von dem geworfenen Körper durchheilten Parabelpunkte gezogen werden, sich nach oben in einer der Fallbewegung entsprechenden Art bewegen.

Denn die Geschwindigkeit in der Parabelachse wird durch

$$c = p \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta^2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

in der Parabel durch

$$v = \frac{p}{\cos \frac{1}{2}\theta^3} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

ausgedrückt, woraus

$$\frac{c}{v} = \sin \frac{1}{2}\theta$$

also

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{2g(r-q)}{2gr}$$

und damit das genannte Gesetz folgt.

Wir haben hiermit die Fälle $h \geq q$ erledigt, damit ist auch die Verwendung der Hyperbel erschöpft, da alle Verhältnisse und Lagen derselben innerhalb der obigen Grenzbedingungen enthalten sind. Die Frage ist demnach, zu welcher Curve die Bewegung hinüberführt, wenn $h < q$ ist. Ist demnach die Geschwindigkeitshöhe h der Anfangsbewegung im Scheitel der Parabel zwischen 0 und der Focaldistanz q enthalten, so besteht die Untersuchung darin, eine Curve zu suchen, welche, von einem Punkte gleichförmig durchlaufen der Parabelbewegung entspricht. Zugleich muss dieselbe der Integralgleichung Genüge tun.

Dieselbe ist

$$t = \int \frac{p d\frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta^2 \sqrt{2g(h + (q - h) \sin \frac{1}{2}\theta^2)}}$$

oder

$$t = \int \frac{\sqrt{\frac{p}{g}}}{\sin \frac{1}{2}\theta'^2} \frac{d\frac{1}{2}\theta'}{\sqrt{1 - \frac{q-h}{q} \sin \frac{1}{2}\theta'^2}} \quad \theta + \theta' = 180^\circ$$

Um nun die Curve aufzusuchen, deren Bogen durch ein solches Integral definiert ist, schreiben wir abgekürzt

$$s = \int \frac{a d\varphi}{\sin \varphi^2 \sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}}$$

Da nun

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

so folgt

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 d\varphi^2}{\sin^4 \varphi (1 - k^2 \sin \varphi^2)}$$

Wir führen ein

$$x = a \cotg \varphi,$$

$$dx = - \frac{a d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

wodurch

$$dy = \frac{ak d\varphi}{\sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin \varphi^2}}$$

oder

$$dy = \frac{ka dx}{\sqrt{a^2 k'^2 + x^2}}$$

Die Integration ergibt

$$y = ak \log(x + \sqrt{a^2 k'^2 + x^2}) + \text{Const}$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

Der Einfachheit wegen nehmen wir die Constante so, dass y für $x = 0$ verschwindet. Man hat also definitiv die transcendente Curve

$$y = ak \log \frac{x + \sqrt{a^2 k'^2 + x^2}}{ak'}$$

Diese Gleichung genügt der oben ausgesprochenen Bedingung.

Denn differentirt man sie und setzt in

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

den gefundenen Differentialquotienten ein, so resultirt, wenn $x = \cot \varphi$ gesetzt wird, die obige Integralformel für s .

Aus der Identität beider Integrale folgt für $\varphi = \frac{1}{2}\theta' = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

$$\frac{s}{a} = \frac{t}{\sqrt{\frac{p}{g}}}$$

Die zur Geschwindigkeitshöhe als Abscisse gehörende Ordinate sei a , dann ist $a^2 = 2ph$, weshalb die letzte Formel in die Relation

$$s = v_0 t \text{ übergeht.}$$

Der in der Curve mit dem Parabelpunkt correspondirende Punkt beschreibt die Curve mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_0 , welche der Geschwindigkeit im Scheitel der Parabel gleich ist.

Die Abscisse in der ersteren wird stets durch $x' = a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$ ausgedrückt, so dass, da $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = \frac{y}{p}$, $\frac{x'}{a} = \frac{y}{p}$, x' stets der Ordinate des bezüglichen Parabelpunktes proportional ist.

Man kann noch die oben abgeleitete Gleichung mit der Kettenlinie in Beziehung bringen, wenn man x und y mit einander vertauscht. Wird $a = 1$ gesetzt, so findet man

$$\begin{aligned} \sqrt{k'^2 + \cot^2 \varphi} + \cot \varphi &= k' e^{\frac{x}{k}} \\ \sqrt{k'^2 + \cot^2 \varphi} - \cot \varphi &= k' e^{-\frac{x}{k}} \end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraction folgt hieraus

$$\frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} \right) = \frac{k}{k'} \sqrt{k'^2 + \cot^2 \varphi} - x',$$

$$\frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) = \frac{k}{k'} \cot \varphi = s'$$

Da der Bogen s' der Kettenlinie $= k \operatorname{tg} \delta$ ist, worin δ den Winkel der Tangente des bezüglichen Curvenpunktes mit der X -Achse darstellt, so folgt

$$\cot \varphi = k' \operatorname{tg} \delta = x$$

Hieraus resultirt, wenn die Kettenlinie gegeben ist, eine leichte Construction der Curve, und zwar mit Hülfe der Tangente.

Wir bemerken noch, dass die Rectification der vorliegenden logarithmischen Curve auch durch das Integral

$$s = \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \delta}}{\cos \delta} d\delta = F(\delta) - E(\delta) + \Delta \operatorname{tg} \delta$$

formulirt werden kann. Berücksichtigen wir nun, dass der Bogen einer Hyperbel $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{k'^2} = 1$ durch

$$s' = k'^2 F(\delta) - E(\delta) + \Delta \operatorname{tg} \delta$$

definirt wird, worin δ ein bekannter Winkel ist, so folgt durch Vergleichen der letzten Ausdrücke noch die Relation

$$s - s' = k^2 \int \frac{d\delta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \delta}}$$

Die Differenz zweier einander entsprechenden Lagen der transcendenten Curve und der Hyperbel ist demnach durch ein elliptisches der ersten Art charakterisirt.

Wie aus den Entwicklungen hervorgegangen ist, sind die Bewegungsverhältnisse des schweren Punktes in einer Parabel je nach der Lage der letztern auf die Ellipse und die Hyperbel übertragbar.

Die Vermittelung beider Bewegungen ging aus der Uebereinstimmung der elliptischen Integrale hervor, zu welchen die Rectification der Kegelschnitte und die Zeitbestimmung der Bewegung geführt hatte. Wir werden später zeigen, dass auch die Newton'sche Centralbewegung eines in Kegelschnitten einhergehenden Punktes durch eine ihr verwandte andere dargestellt werden kann.

Emmerich, im Nov. 1884.

A n h a n g.

Wir geben hier noch einige Sätze über die Fusspunkturen der Kegelschnitte.

Ausserhalb einer Ellipse ziehen wir durch einen Punkt $R(\psi)$ eine Secante, welche mit der X -Achse den Winkel τ einschliesst. Die Secantenteile seien s_1, s_2 . Sie sind Wurzeln der Gleichung

$$s^2(a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau) - 2R(a^2 \sin \tau \sin \psi + b^2 \cos \tau \cos \psi)s + R^2(a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) - a^2 b^2 = 0$$

Soll die Secante zur Tangente werden, so müssen beide Wurzeln gleich sein:

$$t = \frac{a^2 y \sin \tau + b^2 x \cos \tau}{a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau}$$

und die Bedingungsgleichung hierfür ist:

$$(a^2 y \sin \tau + b^2 x \cos \tau)^2 = (a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau)(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)$$

Aus diesen Beziehungen lässt sich eine Gleichung für t ableiten, wenn τ eliminirt wird. Man findet

$$a^2 y \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2} - b^2 t^2 + b^2 x \sqrt{-a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 + a^2 t^2} = c(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)$$

woraus für t^2 eine quadratische Gleichung hervorgeht, da 2 Tangenten existiren. Sie ist:

$$t^4(a^2 y^2 + b^2 x^2)^2 - 2t^2 M(a^2 y^4 + b^2 x^4 + (a^2 + b^2)x^2 y^2 + a^2 c^2 y^2 - b^2 c^2 x^2) + M^2((x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4) = 0$$

$$M = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2$$

Daher ist

$$t_1 t_2 = \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2 y^2 + b^2 x^2} \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4}$$

Den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, welcher nur von der Excentricität abhängt, bezeichnen wir mit q^4 , so dass also das Product $p_1 p_2$ der von $R(\psi)$ nach den Brennpunkten gehenden Geraden gleich q^2 ist.

Daher hat man

$$\frac{t_1 t_2}{p_1 p_2} = 1 - \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

Da aber $x = R \cos \psi$, $y = R \sin \psi$, $\frac{\cos \psi^2}{a^2} + \frac{\sin \psi^2}{b^2} = \frac{1}{r^2}$, wo r der in R liegende Ellipsenradius ist, so folgt

$$\frac{t_1 t_2}{p_1 p_2} = \frac{(R+r)(R-r)}{R^2}$$

$(R+r)(R-r)$ ist das Product der Teile der Mittelpunktssecanten, welches wir mit $s_1 s_2$ bezeichnen wollen, Daher besteht die Relation

$$\frac{t_1 t_2}{s_1 s_2} = \frac{q^2}{R^2}$$

woraus der Satz folgt:

Zieht man von einem Punkte $R(\psi)$ an eine Ellipse die beiden Tangenten und die Secante durch den Mittelpunkt, so ist für alle confocalen Ellipsen das Verhältniss der Producte beider Tangenten zu dem Producte der entsprechenden Secanten eine constante GröÙe $\frac{q^2}{R^2}$.

Setzen wir $\frac{q}{R} = n$, so besteht hierfür die Curve

$$R^4(1 - n^4) - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 = 0$$

als geometrischer Ort der Punkte, für welche auch $\frac{q}{R}$ constant ist.

Ist $n = 1$, so folgt eine gleichseitige Hyperbel. Im allgemeinen ist die Curve eine Cassinische Linie.

Man kann ferner setzen

$$\frac{t_1 t_2}{p_1 p_2} = \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2 y^2 + b^2 x^2} = k$$

Hiernach soll das Verhältniss $\frac{t_1 t_2}{p_1 p_2}$ constant $= k$ sein. Der geometrische Ort der Punkte dieses constanten Verhältnisses ist ein Kegelschnitt:

$$\frac{x^2}{1-k} + \frac{y^2}{1-k} = 1$$

Mit jedem Kegelschnitt ist demnach ein beliebiger zweiter und ähnlicher verknüpft, welcher die Eigenschaft besitzt, dass das Product der vom 2. an den 1. gezogenen Tangenten zu dem Producte der entsprechenden Brennstrahlen ein constantes Verhältniss bildet.

Die Tangenten an einen Kegelschnitt kann man auch auf folgende Art mit Kreistangenten in Verbindung bringen. Wir beschreiben um das Centrum des Kegelschnitts einen Kreis mit dem Radius ρ . Vom Punkte xy oder $R(\psi)$ ziehen wir an beide Curven die Tangenten.

Für den Kreis besteht demnach die Gleichung

$$t^2 = x^2 + y^2 - \rho^2$$

Wir nehmen an, dass $t_1^2 + t_2^2 = 2t^2$ ist und gewinnen aus den entwickelten Gleichungen die Curve 4 Grades

$$x^4 b^4 (\rho^2 - a^2 - c^2) + y^4 a^4 (\rho^2 - b^2 + c^2) + x^2 y^2 a^2 b^2 (2\rho^2 - a^2 - b^2) - a^2 b^2 c^2 (a^2 y^2 - b^2 x^2) = 0$$

Es sei $\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$, so erhalten wir aus

$$\frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4} = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

die Gerade $y = \frac{b}{a}x$ und den Kegelschnitt $\frac{x^2}{\frac{3}{2}a^2} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}b^2} = 1$, welcher eine Hyperbel sein muss. Beide Resultate geben zu neuen Sätzen Veranlassung.

Auf Fusspunktcuren kommen wir durch Einführung des Winkels ω zwischen den Tangenten $t_1 t_2$ eines Kegelschnitts, für welchen die Formel

$$\cos \omega = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4}}$$

oder

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega^2 = \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2}{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2}$$

gilt. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(a^2 + b^2 + 2b^2 \cot \omega^2)x^2 + 2(a^2 + b^2 + 2a^2 \cot \omega^2)y^2 - (a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cot \omega^2$$

Wir wählen die Hyperbel als Grundcurve, setzen also $-b^2$ statt b^2 und führen ein

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2 \frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon$$

also

$$\omega = 2\varepsilon$$

dann folgt

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^2} x^2 + \frac{a^4 - b^4}{b^2} y^2$$

Diese Gleichung stellt die Fusspunktcurve einer Ellipse dar. Daher haben wir den Satz:

Mit jeder Hyperbel ist eine bestimmte Fusspunktcurve einer Ellipse verbunden, welche der geometrische Ort aller der Punkte ist, von welchen die an die Hyperbel gezogenen Tangenten einen constanten Winkel $\omega = 2\varepsilon$, den Asymptotenwinkel, einschliessen.

Aus der allgemeinen Gleichung folgt für die gleichseitige Hyperbel mit constantem ω

$$R^4 - 2c^2 \cot \omega^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 \cot \omega^4 = \frac{\cot \omega^2}{\sin \omega^2}$$

Also resultirt hieraus:

Mit jeder gleichseitigen Hyperbel existiren Schaaren von aus einem Zuge bestehenden Lemniskaten, welche die Eigenschaft besitzen, dass die von jedem ihrer Punkte an die Hyperbel gezogenen Tangenten constante Winkel einschliessen.

Wir wollen über die Rectification der Fusspunktcuren der Kegelschnitte noch einige Integrale aufstellen und transformiren.

Die allgemeine Gleichung derselben ist

$$r^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi$$

Der Bogen wird dargestellt durch

$$s = a \int \frac{\left(1 - \frac{a^4 - b^4}{a^4} \sin^2 \varphi\right) d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^4 - b^4}{a^4} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \varphi\right)}}$$

Wir führen ein

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a^2}{b^2} \cot \varphi$$

so folgt für die Ellipsenfusspunktcurve

$$s = \int \frac{d\psi}{\left(1 - \frac{a^4 - b^4}{a^4} \sin^2 \psi\right) \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \psi}} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

Der Winkel ψ ist geometrisch leicht bestimmbar. Er ist der Winkel, den die kleine Achse mit dem Radius des Ellipsenpunktes macht, auf dessen Tangente die Normale $r(\varphi)$ als Vector der Fusspunktcurve gefällt ist.

Wenden wir das Additionstheorem der elliptischen Integrale 3. Art auf diesen Fall an, setzen demnach

$$\cos \psi_3 = \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \psi_1 \sin \psi_2 \Delta \psi_3$$

so findet man nach einigen Entwicklungen

$$s_1 + s_2 = s_3 - \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{arctg} \frac{b^3 c^2 \sqrt{a^2 + b^2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3}{a^2 (b^4 - (a^4 - b^4) \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3)}$$

Zu zwei Bogen der Fusspunktcurve einer Ellipse lässt sich demnach ein dritter finden, der von der Summe der beiden ersten um einen bestimmten Bogen eines Kreises differirt.

Für die Fusspunktcurve der Hyperbel

$$r^2 = a^2 - c^2 \sin^2 \varphi$$

folgt der Bogen

$$s = \frac{a^3}{b^2} \int \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{a^4 - b^4}{b^4} \sin^2 \varphi\right) \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \varphi}}, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a^2}{b^2} \cot \varphi$$

Es ist φ der Polarwinkel des Hyperbelpunktes, auf dessen Tangente die Normale $r(\varphi)$ als Vector der Fusspunktcurve gefällt ist.

Das Additionstheorem liefert nun auch die Relation der 3 Bogen

$$s_1 + s_2 = s_3 + \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{arctg} \frac{a^3 c^2 \sqrt{a^2 - b^2} \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3}{b^2 (a^4 - (a^4 - b^4) \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3)}$$

wenn $a > b$ ist. Ist dagegen $a < b$, so folgt

$$s_1 + s_2 = s_3 + \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - a^2} \\ \times \log \frac{b^2(a^4 - (a^4 - b^4)\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3) - a^3c^2\sqrt{b^2 - a^2}\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3}{b^2(a^4 - (a^4 - b^4)\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\psi_3) + a^3c^2\sqrt{b^2 - a^2}\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3}$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen lassen sich leicht noch specielle entwickeln, wenn s_3 ein Quadrant ist etc.

Legen wir eine Gerade durch die Fusspunktcurve, welche gegen die Achse um den Winkel β geneigt ist und den Abstand h vom Centrum hat, und entwickeln die Gleichung für $\text{tg } \varphi$, so folgt

$$\text{tg } \varphi^4 \left(\frac{h^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \cos \beta^2 \right) + \frac{b^2}{a^2} \sin 2\beta \text{tg } \varphi^3 + \left(2 \frac{h^2}{a^2} - 1 + \frac{c^2}{a^2} \sin \beta^2 \right) \text{tg } \varphi^2 \\ + \sin 2\beta \text{tg } \varphi + \frac{h^2}{a^2} - \sin \beta^2 = 0$$

Wie wir in einer früheren Abhandlung nachgewiesen, existirt mit einer solchen Gleichung eine Integralfunction

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 2K$$

deren Modulus aus

$$k'^2 = \frac{\frac{b^4}{a^4} \sin 2\beta^2 + 2 \left(\frac{h^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \cos \beta^2 \right) \frac{c^2}{a^2} (\cos 2\beta \pm 1)}{\sin 2\beta^2 + 2 \left(\frac{h^2}{a^2} - \sin \beta^2 \right) \frac{c^2}{a^2} (\cos 2\beta \pm 1)}$$

hervorgeht. Nehmen wir eine Fusspunktcurve der Hyperbel an, so erhält man für das untere Zeichen unter Voraussetzung $k^2 = \frac{c^2}{a^2}$

$$h^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \sin \beta^2$$

und wenn $h = x \sin \beta$,

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Alle Geraden demnach, welche durch den auf der Achse der Fusspunktcurve einer Hyperbel, deren Gleichung

$$r^2 = a^2 - (a^2 + b^2) \sin^2 \varphi$$

ist, liegenden, vom Centrum um $x = \frac{ab}{c}$ entfernten Punkt gehen und die Polarwinkel $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$ bedingen, bestimmen eine Integralfunction, und zwar unter andern die folgende

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \varphi_1}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \varphi_2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \varphi_3}} \\ + \int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \varphi_4}} = 2K$$

Für die gleichseitige Hyperbel geht die Curve in die Lemniskate über, und es ist $c^2 = 2a^2$, demnach

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\cos 2\varphi_1}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{\cos 2\varphi_2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{\cos 2\varphi_3}} + \int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{\cos 2\varphi_4}} = 2K$$

Da aber die Integrale Lemniskatenbogen bezeichnen, so ist die Summe der Bogen, welche von einer durch einen Brennpunkt gehenden Geraden auf der Lemniskate begrenzt werden, eine constante Grösse und zwar dem halben Umfang der Curve gleich. Zugleich besteht allgemein für alle Fusspunktcurven die Relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\pi + 2\beta$$

Wir halten es für nützlich, hinsichtlich der Verwandtschaft der Bewegungen das Rectificationsintegral der Fusspunktcurven der Kegelschnitte mit einem andern analogen in Verbindung zu bringen, welches die Zeit ausdrückt, welche ein schwerer Körper zum Durchlaufen eines Bogens einer Trochoide bedarf.

Man unterscheidet bekanntlich ausser den einfachen Cykloiden noch geschweifte und verkürzte, welche man Trochoiden nennt. Während die erste durch einen Punkt im Umfang des Rollkreises erzeugt wird, dessen Radius a sein möge, werden die Trochoiden durch feste Punkte, die innerhalb oder ausserhalb des Rollkreises liegen, beschrieben. Es sei b der Abstand eines solchen Punktes vom Centrum.

Die von ihm beschriebene Curve ist

$$x = a\theta - b \sin \theta, \\ y = a - b \cos \theta$$

Wir wollen die Bewegung eines schweren Punktes auf dieser Curve, die wir unterhalb der X -Achse denken, verfolgen und die Geschwindigkeit v durch die Relation $v^2 = 2gy$ definiren.

Wir betrachten demnach die X -Achse als Directrix, wodurch die Geschwindigkeit ihre bestimmte Fallhöhe erhält. Das Zeitintegral ist, wie man bald findet

$$t = \sqrt{\frac{2(a+b)}{g}} \int \frac{\left(1 - \frac{4ab}{(a^2+b)^2} \sin^2 \frac{1}{2}\psi\right) d\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{4ab}{a+b} \sin^2 \frac{1}{2}\psi\right) \left(1 - \frac{2b}{a+b} \sin^2 \frac{1}{2}\psi\right)}}$$

$$\psi + \theta = 180^\circ$$

Die Bewegung rechnen wir demnach vom tiefsten Punkt an.

Das Integral für den Bogen einer Fusspunktcurve der Kegelschnitte ist aber

$$s = A \int \frac{\left(1 - \frac{A^4 - B^4}{A^4} \sin^2 \varphi\right) d\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{A^4 - B^4}{A^4} \sin^2 \varphi\right) \left(1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2} \sin^2 \varphi\right)}}$$

$$R^2 = A^2 - C^2 \sin^2 \varphi$$

Wir können demnach

$$\frac{s}{A} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}}}$$

setzen, wenn wir identisch haben

$$\frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{A^4 - B^4}{A^4}, \quad \frac{2b}{a+b} = \frac{A^2 - B^2}{A^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\psi$$

Die zweite Bedingung ist eine Folge der ersten, und man hat

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{B^2}{A^2}$$

als einzige Bedingungsgleichung für verkürzte Trochoiden $a > b$.

Die geometrische Bedeutung von A und B erkennt man sofort aus den beiden Rollkreisen, deren Radien a und b sind; A und B sind proportional den Katheten des dadurch bestimmten Dreiecks im grösseren Kreise. Man kann also $A = a + b$ setzen und es ist

$$s = \sqrt{\frac{gA}{2}} t$$

Die Bewegung eines schweren Punktes in der Trochoide, also hier in der verkürzten Cykloide, steht mit der gleichförmigen Bewegung eines Punktes in einer Fusspunktcurve einer Ellipse in einer solchen Beziehung, dass der Polarwinkel φ des letztern stets

dem halben Wälzungswinkel ψ der erstern gleich und die constante Geschwindigkeit $= \sqrt{\frac{gA}{2}}$ ist.

Für die Bewegungsverhältnisse in einer geschweiften Cykloide $a < b$ tritt, wie man leicht bemerkt, die Fusspunktcurve der Hyperbel an Stelle der Ellipse auf und die Bedingungen modificiren sich darnach.

Wir wollen schliesslich noch auf eine schöne Eigenschaft der Fusspunktcurven aufmerksam machen.

Betrachtet man das elliptische Integral der 1. Art

$$F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

so erkennt man augenblicklich, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen dazu einladet, ihn mit der Gleichung der Fusspunktcurven

$$r^2 = a^2 - c^2 \sin^2 \varphi$$

oder

$$r = a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad k = \frac{c}{a}$$

in Beziehung zu bringen. Indem wir diesen Gedanken benutzen, wollen wir zeigen, dass das Integral vermittelst der Curve eine interessante optische Bedeutung gewinnt.

Zunächst wird

$$F = a \int \frac{d\varphi}{r}$$

Wir lassen zunächst in der Curve φ um $d\varphi$ wachsen, und betrachten das unendliche schmale Dreieck zwischen r , $r + dr$, und dem Bogendifferential ds , dessen Normale mit r den Winkel ε einschliessen möge. Alsdann bestehen die Relationen

$$r d\varphi = ds \cos \varepsilon,$$

$$\frac{d\varphi}{r} = \frac{ds \cos \varepsilon}{r^2},$$

$$F = a \int \frac{ds}{r^2} \cos \varepsilon$$

Die physikalische Bedeutung des Integrals ist sofort klar.

Wir nehmen eine Lichtquelle an. Dieselbe möge eine kleine Kugel im Centrum der Curve in der Einheit der Entfernung mit

der Stärke $= a$ beleuchten, die Lichtmenge wird demnach in der Entfernung r gleich $\frac{a}{r^2}$ sein. Der Bogen s der Fusspunktcurve sei eine leuchtende Linie; alsdann wirkt das Lichtteilchen ds , dessen Ausstrahlungswinkel $= \theta$ ist, durch den Zuwachs $\frac{a ds}{r^2}$, und wenn der Winkel $= E$ ist, nach bekanntem Gesetz durch

$$dF = \frac{a ds \cos \varepsilon}{r^2}$$

auf die Kugel ein. Daher bedeutet das Integral

$$F = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = a \int_0^{\varphi} \frac{ds \cos \varepsilon}{r^2}$$

die Quantität des Lichtes oder der Wärme, welcher ein Lichtbogen der Fusspunktcurve einer im Centrum befindlichen Kugeloberfläche erteilt.

Der Modulus k kann jeden Wert haben, er ist für die Fusspunktcurve der Ellipse kleiner, für die der Hyperbel grösser als die Einheit.

Das Additionstheorem bestimmt mit Leichtigkeit Bogen der Curve von gleicher Lichtstärke.

Erwähnenswert ist noch, dass wenn in der X - und Y -Achse eine Fläche angebracht wird, die Stärke der Beleuchtung derselben im 1. Fall durch

$$F_x = \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k} \log \frac{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} - k \cos \varphi}{1 - k}$$

im zweiten Fall durch

$$F_y = \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\varphi}{k}$$

gegeben ist, wonach die Beleuchtung dem Polarwinkel proportional ist. Specielle Fälle haben wir schon früher erwähnt.

Die vorhin entwickelte Integralfunctio n der Fusspunktcurve der Hyperbel kann in dem angedeuteten Sinne interpretirt werden, wodurch sie an Interesse gewinnt.

V.

Die flache Kreisschraubenfläche.

Von

Franz Schiffner.

Die gewöhnliche Schraubenfläche wird von einer Geraden G erzeugt, welche mit einem ihrer Punkte auf einer anderen Geraden L weiterrückt und dabei gleichzeitig um L rotirt. Eine Kreisschraubenfläche soll entstehen, wenn sich ein Punkt p der Geraden G auf einer Kreislinie K bewegt, und G zugleich eine Drehung vollführt. Die Kreisschraubenfläche kann gleichsam als eine deformirte gewöhnliche Schraubenfläche betrachtet werden; als eine Schraubenfläche, deren Achse L in einen Kreis K übergegangen ist. Bei dieser Deformation ändern sich die kleinsten Elemente von L so, dass sie zu Kreiselementen werden und die Richtung der Kreistangente in dem betreffenden Elemente erhalten. G dreht sich also in jedem Momente um eine andere Achse; und zwar können wir, damit die gegenseitige Lage der gemeinschaftlichen Elemente von G und L durch die Deformation nicht geändert wird, der Drehung von G jene Kreistangente t als Achse nachweisen, welche in dem Schnittpunkte p von G und K berührt. Da die Bewegung von p auf K oder t an K auch eine Drehung ist, nämlich eine Drehung von p und t um die Gerade A , welche im Kreismittelpunkt O auf der Kreisebene K senkrecht steht, so macht G eigentlich gleichzeitig zwei Rotationen: um die Gerade t und mit p und t um die Gerade A .

Die Kreisschraubenfläche F wird bestimmt sein, sobald die gegenseitige Lage von G und K bekannt ist und die Beziehung zwischen den beiden Drehungen festgestellt wurde. Bei der gewöhnlichen flachen Schraubenfläche ist G stets normal zu L ; bei der flachen

Kreisschraubenfläche — die wir hier zunächst untersuchen wollen — soll dem entsprechend G auf K , d. h. G auf t senkrecht stehen. Bei der gewöhnlichen Schraubenfläche wird meistens nebst dem Drehungssinne die Ganghöhe angegeben, das ist jene Strecke, welche ein Punkt von G auf L durchläuft, wenn sich G einmal um L dreht. Dem entspricht hier die Angabe des Bogens, den p auf K durchmessen soll, wenn G eine volle Umdrehung macht; oder die Angabe, in welchem Verhältnisse die Drehung von p zu jener von G stehen soll. Wir wollen zuerst einen einfachen Fall betrachten und annehmen, p durchlaufe den Kreis K , wenn G eine Umdrehung macht; oder die Drehungsgeschwindigkeiten, resp. die Drehungswinkel von p und G seien gleich. Nun ist die Fläche F vollständig bestimmt, weil die Erzeugende G während ihrer ganzen Bewegung verfolgt werden kann.

Für die Darstellung von F empfiehlt es sich, der Geraden A eine verticale Richtung zu geben, als Anfangslage von G jene Lage G_0 zu wählen, welche in der horizontalen Kreisebene liegt, und die Projectionsachse parallel zu G_0 anzunehmen. (Als positiv gelte die der Bewegung von Uhrzeigern entgegengesetzte Drehung.) G kann nun in jeder Lage leicht dargestellt werden und damit die Gesamtheit dieser Lagen: die flache Kreisschraubenfläche F .

Es ist für die Darstellung der Erzeugenden G , in welche die Gerade G_0 fällt, wenn sie sich in beiderlei Sinn um den Winkel α gedreht hat, ganz gleichgiltig, ob die beiden Drehungen um t und A zugleich oder nach einander, und ob diese oder jene früher gemacht wurde.

Bei obigen Annahmen ist es angezeigt, G_0 zuerst um t_0 nach (G) zu drehen, dann (G) um A nach G ; denn es projicirt sich erstere Drehung im Aufriss, letztere im Grundriss in wahrer Grösse und man hat nur $(G)''$ durch p_0'' unter den Winkel α zu G_0'' zu ziehen und p_0 auf K um den Winkel α zu drehen. Es bleibt nämlich bei der ersten Rotation der Kreisbogen p_0 , bei der zweiten Drehung der Schnittpunkt B von (G) mit A fix. G und A müssen sich in einem Punkte B schneiden, weil G auf K oder vielmehr t senkrecht steht, also G_0 durch O geht, und die Drehung von G_0 um t_0 in der Ebene (AG_0) erfolgt.

Für die Winkel α von 0° bis 360° erhält man alle Erzeugende G der Fläche F ; in der weiteren Drehung fällt G mit früheren Lagen zusammen: F besteht deshalb nur aus einem Teile.

Wie oben erwähnt, trifft jede Erzeugende G die Gerade A in einem Punkte B ; aber durch jeden Punkt B von A gehen zwei Er-

zeugende der Fläche, denn es ist $OB = -a \cdot \operatorname{tg} u$, (wenn a der Halbmesser von K ist) und dieser Ausdruck hat für u^0 und $(180 + u)^0$ denselben Wert. A ist sonach eine Doppelgerade der Fläche F .

Die beiden Erzeugenden, welche sich in demselben Punkte B treffen, liegen immer in einer durch A gehenden Ebene und bilden mit A gleiche Winkel; sie fallen nur für $u = 0^0$ und $u = 180^0$ oder $OA = 0$ zusammen und sind nur für $u = 90^0$ und $u = 270^0$ oder $OB = \infty$ parallel. Zwei beliebige andere Erzeugende sind windschief. Auch zwei Nachbarerzeugende kreuzen sich, weil sie sonst beide durch denselben Punkt von A gehen müssten, in welchem die durch sie gelegte Ebene der Geraden A begegnet, was wegen der Verschiedenheit der Werte $a \cdot \operatorname{tang} u$ und $a \cdot \operatorname{tang} (u + du)$ nicht sein kann. Mit anderen Worten heisst es: die flache Kreisschraubenfläche ist eine windschiefe Fläche.

Untersuchen wir nun, von welchem Grade sie ist. Irgend ein Strahl L hat mit F so viele Punkte gemein als er Erzeugende G trifft. Ist G_n eine solche Gerade, welche von L geschnitten wird, dann lässt sich durch L und G_n eine Ebene legen. Diese muss den Punkt B_n enthalten und ihre Spur in der Kreisebene K muss durch den Kreispunkt p_n gehen. Da p_n auch ein Punkt der Geraden Op_n ist, in welcher die Ebene (AG_n) die Kreisebene K schneidet, so folgt: Wenn der Strahl L die Fläche F in einem Punkte von G_n schneidet, dann treffen sich die Spuren der Ebenen (LB_n) und (AG_n) in einem Punkte p_n des Kreises K . Nun ist aber das Ebenenbüschel (AG) mit der Punktreihe (B) projectivisch, denn das Ebenenbüschel (AG) liegt zu einer Punktreihe (b) auf t_0 perspectivisch, die mit der Punktreihe (B) congruent ist. (p_0b und OB haben nämlich die gleiche Länge $a \cdot \operatorname{tang} u$). Infolge dessen wird auch das zur Punktreihe (B) perspectivische Ebenenbüschel (LB) mit dem Ebenenbüschel (AG) projectivisch sein, und als Spuren von (LB) und (AG) in der Kreisebene K werden sich zwei projectivische Strahlenbüschel ergeben, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt k ist. Die Linien der zweiten Ordnung k und K haben im allgemeinen vier Punkte gemein, die Spuren der Ebenen (LB) und (AG) können sich deshalb nur viermal in K begegnen und L kann mit F höchstens vier Schnittpunkte liefern. Die Fläche F ist somit von der vierten Ordnung und als windschiefe Regelfläche auch von derselben Classe oder kurz: F ist eine Fläche des 4. Grades.

Dies Resultat wird auch durch die Gleichung von F bestätigt, welche wie folgt abgeleitet werden kann.

Es besteht für jeden Punkt P in G die Proportion:

$$PP' : P'p = OB : Op$$

Nimmt man G_0 als Achse der x , A als Achse der z und zu beiden senkrecht die Achse der y an, und zwar so, dass ihre positiven Richtungen $+u$ entsprechen, dann kann man statt jener Proportion schreiben:

$$z : (\sqrt{x^2 + y^2} - a) = a \cdot \frac{y}{x} : a$$

woraus sich

$$zx = y \sqrt{x^2 + y^2} = ay$$

oder

$$y^2(x^2 + y^2) - (ay + zx)^2 = 0$$

als Gleichung von F ergibt. Sie ist richtig vom vierten Grade.

Irgend eine Ebene E schneidet deshalb F nach einer Curve der vierten Ordnung C_4 .

C_2 wird in Curven niederer Ordnung zerfallen, wenn E 1) durch die Doppelgerade A geht, 2) die zweifache Gerade G_0 oder 3) irgend eine andere Erzeugende G enthält.

Im ersten Falle zählt A als Doppelgerade von C_4 und die ergänzende Curve 2. Ordnung besteht aus zwei Geraden, die sich in einem Punkte B von A schneiden. Nach früherem haben zwei solche Gerade gleiche Horizontalneigung u und können deshalb auch als Schnitte mit dem Kegel (BK) ermittelt werden, wenn

$$OB = -a \operatorname{tang} u$$

ist. Hieraus folgt, dass man die Fläche F als das Erzeugniss eines Ebenenbüschels und einer Schar von Rotationskegeln betrachten kann. Die Ebenen des Büschels gehen durch A und haben zu G_0 die Neigung u , die Kegeln gehen durch K , und ihre Spitzen haben von K den Abstand

$$OB = -a \operatorname{tang} u$$

Man erhält alle Erzeugende, wenn u alle Werte von 0° bis 180° annimmt.

Im zweiten Falle zählt G_0 als zweifache Gerade des ebenen Schnittes C_4 , welcher also durch einen Kegelschnitt C_2 zur Curve der 4. Ordnung ergänzt werden muss. In der That liefert die Flächengleichung

$$y^2(x^2 + y^2) = (ay + zx)^2$$

für den constanten Wert

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tang} v = m$$

die Gleichung 2. Grades

$$x^2 + y^2 = (a + mx)^2$$

welche, da z nicht darin vorkommt, als Gleichung des Grundrisses C_2 der Schnittlinie C_2 betrachtet werden kann. Für jeden constanten Wert m erhält man einen bestimmten Kegelschnitt, d. h. jede durch G_0 gehende Ebene schneidet F in einer Curve 2. Ordnung: C_2 . Von allen Kegelschnitten C_2 liegt die Hauptachse in G_0 . Für den Grundriss C_2' hat die Hauptachse die Länge: $\frac{2a}{1-m^2}$, die Nebenachse die Länge: $\frac{2a}{\sqrt{1-m^2}}$, der Mittelpunkt die Coordinaten: $x = \frac{am}{1-m^2}y=0$, oder $x = \frac{a}{2} \tan 2v$, $y = \gamma$. Alle C_2' haben O zum Brennpunkte und den Parameter $2a$, was auch aus der Polargleichung von C_2' hervorgeht, die $r = \frac{a}{1-m \cos u}$ lautet. Unter diesen Kegelschnitten C_2 sind zwei Parabeln ($m = \pm 1$), unendlich viele Ellipsen ($m < 1$), unendlich viele Hyperbeln ($m > 1$), aber nur ein Kreis ($m = 0$) und ein Paar zusammenfallende Gerade ($m = \infty$).

Daraus liesse sich noch folgende Erzeugungsart der Fläche F ableiten. Dreht sich eine Ebene um die Gerade G_0 aus der horizontalen Lage um den Winkel v , so bilden die in ihr liegenden Kegelschnitte mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = (a + x \tan v)^2$$

die Fläche F . Letztere und die vorher besprochene Erzeugungsart lassen erkennen, dass F unter die von Plücker in seiner „Neuen Geometrie des Raumes“ etc. besprochenen Complex-Flächen gehört und zwar unter die Meridian-Flächen der Complexe 2. Grades.

Wenn endlich drittens die schneidende Ebene E durch irgend eine andere Erzeugende G der Fläche F geht, dann wird die Schnittcurve C_4 aus G und einer Curve 3. Ordnung C_3 bestehen, welche den Schnittpunkt von E mit A zum Doppelpunkte hat.

Enthält die schneidende Ebene gar keine Erzeugende der Fläche, dann ist ihre Schnittlinie mit F eine Curve 4. Ordnung, die nicht zerfällt. Von solchen Schnittlinien lassen sich jene leicht construiren, die in einer zu K parallelen Ebene liegen. Denkt man sich F durch Ebenen aus A , welche gegen G_0 die Neigung u haben, und die Kegel (BK) erzeugt, so kann man die Schnittcurve in der Ebene $z = c$ als die Gesamtheit der Punkte auffassen, welche Strahlen in $z = c$ aus dem Spurpunkte von A mit concentrischen Kreisen aus demselben Spurpunkte gemein haben. Der Neigungswinkel der Strahlen zur Ebene (G_0A) ist u , der Halbmesser der Kreise ist $(a + c \tan u)$.

Ausser den erwähnten ebenen Linien G und C_4 auf F sind noch jene Curven \mathcal{C} der Fläche von Bedeutung, welche die einzelnen Punkte der rotirenden Geraden beschreiben und welche den cylindrischen Schraubenlinien der gewöhnlichen Schraubenflächen entsprechen. Eine von diesen Curven \mathcal{C} , nämlich der Kreis K , ist als Weg des Punktes p schon durch die Definition von F fixirt. K ist die einzige Linie unter \mathcal{C} , welche eben ist. Eine beliebige andere Curve \mathcal{C} kann man sich auf zweifache Art durch die Bewegung des Punktes \mathfrak{P} entstanden denken, je nachdem man \mathfrak{P} als Punkt der Geraden G betrachtet und mit dieser zugleich dreht oder \mathfrak{P} unabhängig von G bewegt. Ersteres sagt, dass man G in den verschiedenen Lagen darstellen und in jeder derselben \mathfrak{P} aufsuchen soll, indem man z. B. beachtet, dass \mathfrak{P} stets um dasselbe Stück b von p absteht. Ohne Benutzung von G kann man \mathcal{C} entstehen lassen, indem man \mathfrak{P} um t dreht, also \mathfrak{P} einen Kreis \mathfrak{R} beschreiben lässt, und dann \mathfrak{P} mit diesem Kreise \mathfrak{R} um A rotirt. \mathfrak{R} erzeugt so eine Ring- und Wulstfläche W , auf welcher \mathcal{C} liegen muss. \mathfrak{R} hat p zum Mittelpunkte, $\mathfrak{P}p = b$ zum Halbmesser und liegt in einer durch A gehenden Ebene. Durch jeden Punkt \mathfrak{P} geht ein solcher Kreis \mathfrak{R} und noch ein horizontaler Kreis der Ringfläche W vom Halbmesser $(a + b \cos u)$. Die Coordinaten des Punktes \mathfrak{P} sind:

$$x = (a + b \cos u) \cos u, \quad y = (a + b \cos u) \sin u, \quad z = b \sin u$$

der Grundriss \mathcal{C}' von \mathcal{C} hat deshalb die einfache Polargleichung:

$$r = a + b \cos u$$

Hieraus folgt für die Subnormale OD der Wert

$$\frac{dr}{du} = -b \sin u = -z$$

Bedenkt man noch, dass \mathcal{C} auf W liegt, die Tangente \mathfrak{T} an \mathcal{C} also der Berührungsebene ϵ der Wulstfläche angehört, so ist die Tangente \mathfrak{T} für jeden Punkt \mathfrak{P} der Raumcurve \mathcal{C} durch leicht construirbare Bedingungen bestimmt.

Auf diese Weise haben wir aber auch die Tangentenebene der Fläche F für jeden Punkt P festgestellt. Sie geht durch die Erzeugende G des Punktes P und durch die Tangente \mathfrak{T} der Curve \mathcal{C} , welche P beschreibt. Es ist aber vorzuziehen, statt der Tangente \mathfrak{T} jene Gerade T zu benutzen, welche den durch P gehenden Kegelschnitt C_2 in P berührt. An C_2 kann man, sobald P gegeben ist, die Tangente leicht ziehen, wenn man berücksichtigt, dass O ein Brennpunkt des Grundrisses C_2' ist, dass der Mittelpunkt o von C_2'

nach früherem die Coordinaten $x = \frac{a}{2} \tan 2v$, $y = 0$ hat (wenn $\tan v = \frac{x}{y}$ ist) und dass C_2 in der Ebene (PG_0) liegt. Es könnte auch der Umstand ausgenutzt werden, dass alle C_2' durch den Grundriss \mathfrak{G}' und $(\mathfrak{G})'$ jener zwei Erzeugenden \mathfrak{G} und (\mathfrak{G}) gehen, die auf der Ebene K senkrecht stehen; denn man kennt dann, wenn P gegeben ist, von C_2' den Brennpunkt O und drei Punkte \mathfrak{G} , $(\mathfrak{G})'$, P' , kann also nach „Reye: Geometrie der Lage 2. Aufl. 1. Th. S. 187“ den zweiten Brennpunkt suchen und die Tangente T construiren.

Besonders einfach lassen sich Aufgaben über Berührungsebenen lösen, wenn man den Satz verwertet: haben Kegelschnitte denselben Parameter, dann treffen sich alle jene Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem durch den gemeinsamen Brennpunkt gehenden Strahle liegen, in einem Punkte der Parametergeraden. (Aufsatz des Verfassers in Grunerts Archiv). In unserem Falle müssen somit alle Tangenten T' an die Kegelschnitte C_2' , welche in Punkten derselben Geraden G' berühren, auf OY einen gemeinsamen Punkt U' haben. Daraus folgt, dass die Tangenten T an alle Kegelschnitte C_2 einer zu OZ oder A parallelen Geraden U in YOZ begegnen, wenn die Tangenten T in Punkten einer Erzeugenden G berühren. Darnach construirt man die Tangentenebene des Punktes P folgendermassen. Die Tangente t in p an K trifft OY in jenem Punkte U' , durch welchen die Gerade U parallel A zu ziehen ist; die Ebene (G_0P) schneidet U in dem Spurpunkt von T mit YOZ ; die verlangte Berührungsebene geht durch T und G .

Umgekehrt kann man den Berührungspunkt einer gegebenen Tangentenebene auf diese Art finden. Die gegebene Ebene E hat mit F eine Erzeugende G gemein, welche K in p schneidet; die Tangente an K in p trifft OY in jenem Punkte U' , durch welchen die Gerade U parallel zu A zu ziehen ist; begegnet E der Geraden U in dem Punkte V , so muss die Ebene (G_0V) den Kegelschnitt C_2 enthalten, der von E berührt wird, oder (G_0V) muss G in dem Berührungspunkte der Ebene E treffen.

Sobald drei durch eine Erzeugende G gehende Berührungsebenen bekannt sind, wird für die Ermittlung anderer Tangentenebenen derselben Erzeugenden mit Vorteil der Satz angewendet: „das Büschel der Berührungsebenen durch eine Erzeugende der Regelfläche ist projectivisch zur Reihe der Berührungspunkte derselben auf dieser Erzeugenden.“ (Dr. W. Fiedler Darst. Geometrie

2. A. S. 411). Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich ebenfalls der Berührungspunkt einer gegebenen Tangentenebene auffinden. Z. B. kann so auch gesucht werden, in welchem Punkte Q'' der Aufriss G'' einer Erzeugenden G die Verticalcontour der Fläche tangirt, indem Q als Berührungspunkt der durch G gelegten vertical projectirenden Ebene gesucht wird. G_0'' berührt die Aufrisscontour in den Punkten p_0'' und $(p_0)''$, weil die horizontale Ebene K Tangentenebene der Punkte p_0 und (p_0) ist; \mathfrak{G}'' und $(\mathfrak{G})''$ sind Asymptoten der Verticalcontour, denn die Ebene YOZ berührt F in dem unendlichen Punkte der Geraden \mathfrak{G} und (\mathfrak{G}) .

Die Kreuzrisscontour ergibt sich einfacher. Die früher erwähnten Kegelschnitte C_2 haben die Hauptachsen MM_1 in G_0 , somit in den Endpunkten der Nebenachsen NN_1 zu G_0 parallele oder zur Ebene YOZ normale Tangenten. (Selbstverständlich sind diese Tangenten nur reell, wenn C_2 eine Ellipse, d. h. $m < 1$ ist). Die Tangentenebenen für solche Punkte N , N_1 stehen also auf der Kreuzrissebene senkrecht und ihre Spuren G_n'' berühren die Kreuzrisscontour in N_n''' . Da die Punkte N mit dem Mittelpunkte o von C_1 gleiche Abscisse haben, so sind ihre Coordinaten:

$$x = \frac{am}{1-m^2}, \quad y = \pm \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}, \quad z = m \cdot y$$

Setzt man für m seinen Wert $\tan v = \frac{z}{y}$ in y ein, so erhält man

$$y^2 = \frac{a^2 y^2}{y^2 - z^2}$$

woraus sich für die dritte Projection der Kreuzrisscontour nebst $y^2 = 0$ die Gleichung

$$y^2 - z^2 = a^2$$

ergibt, welche sagt, dass die Kreuzrissprojectionen G''' der Flächen-erzeugenden G eine Hyperbel umhüllen. Die Contourcurve selbst ist aber von der 4. Ordnung (der Grundriss hat die Gleichung

$$y^4 - a^2 y^2 - a^2 x^2 = 0)$$

und ihr Kreuzriss ist nur wegen der Symmetrie zu YOZ eine Linie der 2. Ordnung. Dies Resultat liesse sich auch so ausdrücken: der Fläche F kann der gerade hyperbolische Cylinder $y^2 - z^2 = a^2$ umschrieben werden, dessen Kanten zu G_0 parallel sind.

Zu den Berührungsebenen der Fläche gehören alle Ebenen, welche durch A gehen, sowie jene, die durch G_0 gehen; erstere

berühren in den ihnen entsprechenden Punkten B , letztere in den Hauptscheitelpunkten der in ihnen liegenden Kegelschnitten C_3 . Berührt die Tangentenebene im unendlichen Punkte der Erzeugenden G , so wird sie zur asymptotischen Ebene der Erzeugenden G .

Eine solche kann nach den obigen Sätzen oder als Parallele zur Berührungsebene des Richtungskegels F längs der zu G parallelen Erzeugenden g desselben construiert werden. Zum Richtungs- oder Directionskegel der Fläche gelangen wir wie folgt. Eine Gerade g , welche durch irgend einen Raumpunkt R parallel zur Flächenerzeugenden G gezogen wird, muss zur horizontalen Bildebene ebenso geneigt sein wie G , weshalb der Spurpunkt s von g in der Ebene XOY so liegt, dass

$$RR' = R's \operatorname{tang} u$$

Alle Punkte s bilden die Spurcurve S des Richtungskegels in der horizontalen Bildebene. Wählt man z. B. R in A und $RR' = a$, so ist

$$a = Os \operatorname{tang} u$$

und die Spurcurve S hat dann die Polargleichung

$$r = - \frac{a}{\operatorname{tang} u}$$

wonach S leicht construiert werden kann. In Punktcoordinaten lautet ihre Gleichung:

$$y^2(x^2 + y^2) = a^2 x^2$$

S ist eine Curve der 4. Ordnung, liegt zu beiden Coordinatenachsen symmetrisch, hat in O einen Doppelpunkt und besitzt zwei im Abstände $\pm a$ zu OX parallele Asymptoten. Die Tangente τ an S in s bildet mit dem Radiusvector Os einen Winkel φ , welcher im allgemeinen der Bedingung

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dr}{du} : r$$

genügt. Da

$$r = - a \operatorname{cotang} u, \quad \frac{dr}{du} = \frac{a}{\sin^2 u}$$

ist, so wird hier

$$\operatorname{tang} \varphi = - \cos u \sin u$$

sein. Wird also in (p_0) eine Senkrechte auf OX errichtet, welche Os in H trifft, und hier normal zu Os das Stück $HW = a \sin u$ aufgetragen, so gibt OW die Richtung von τ an. Die Ebene $(R\tau)$ berührt den Richtungskegel nach g und hat gleiche Stellung mit der asymptotischen Ebene der zu g parallelen Flächenerzeugenden G .

Einfacher ist es aber, die asymptotische Ebene mit Benutzung der Geraden U zu construiren. Man hat dann nur den Schnittpunkt U' der Tangente t in p an K mit OY und den Schnittpunkt h der Parallelen zu G' durch U' mit G_0 zu suchen; (hG) ist die asymptotische Ebene der Erzeugenden G .

Wie Richtungskegel und asymptotische Ebene zur Bestimmung der Asymptoten eines ebenen Schnittes und zur Construction der Strictionslinie der Fläche angewendet werden, ist bekannt.

Mit den gewonnenen Resultaten sind überhaupt schon so viele Eigenschaften der flachen Kreisschraubenfläche hervorgehoben worden, dass sie leicht einer constructiven Behandlung unterzogen werden kann.

VI.

Metrische Relationen am Sehnenviereck.

Von

Herrn Dr. **Otto Zimmermann.**

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, in welchem $AB > CD$ und $BC > AD$ ist. AB und CD mögen sich in P , BC und AD in Q schneiden, die Diagonalen AC und BD in N . Setzt man $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$, $BD = g$ und bezeichnet die Diagonale AC' desjenigen Sehnenvierecks $ABC'D$, welches aus $ABCD$ durch Vertauschung von b und c entsteht, mit h , so gelten bekanntlich folgende Gleichungen¹⁾:

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad g^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

$$h^2 = \frac{(ab + cd)(ad + bc)}{ac + bd};$$

$$AN = \frac{ad}{h}, \quad BN = \frac{ab}{h}, \quad CN = \frac{bc}{h}, \quad DN = \frac{cd}{h};$$

$$J = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

$$R = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}} = \frac{f \cdot g \cdot h}{4J}$$

1) Kunzes Geom. 2. Aufl., S. 225 f., Baltzers Elem. d. Math. 4. Buch S. 126 f. und Dostor, Propriétés nouvelles etc. in Grunerts Archiv XXXXVIII S. 245.

$$AP = \frac{d(ad+bc)}{b^2-d^2}, \quad BP = \frac{b(ab+cd)}{b^2-d^2}, \quad CP = \frac{b(ad+bc)}{b^2-d^2},$$

$$DP = \frac{d(ab+cd)}{b^2-d^2};$$

$$AQ = \frac{a(ad+bc)}{a^2-c^2}, \quad BQ = \frac{a(ab+cd)}{a^2-c^2}, \quad CQ = \frac{c(ad+bc)}{a^2-c^2},$$

$$DQ = \frac{c(ab+cd)}{a^2-c^2};$$

$$\Delta ADP = \frac{d^2 J}{b^2-d^2}, \quad \Delta BCP = \frac{b^2 J}{b^2-d^2}, \quad \Delta ABQ = \frac{a^2 J}{a^2-c^2},$$

$$\Delta CDQ = \frac{c^2 J}{a^2-c^2};$$

$$\cos ADB = \cos ACB = \frac{a(b^2+c^2+d^2-a^2)+2bcd}{2fgh}$$

$$\cos BAC = \cos BDC = \frac{b(a^2+c^2+d^2-b^2)+2acd}{2fgh}$$

$$\cos CBD = \cos CAD = \frac{c(a^2+b^2+d^2-c^2)+2abd}{2fgh}$$

$$\cos DBA = \cos DCA = \frac{d(a^2+b^2+c^2-d^2)+2abc}{2fgh}$$

bezeichnet man endlich die Innenwinkel DAB und ABC mit α und β und den spitzen Winkel AND zwischen den Diagonalen mit ε , so ist

$$\sin \alpha = \frac{2J}{ad+bc}, \quad \sin \beta = \frac{2J}{ab+cd}, \quad \sin \varepsilon = \frac{2J}{ac+bd};$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}, \quad \cos \beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$

$$\cos \varepsilon = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)};$$

$$\sin APD = \sin(\alpha - \beta) = \frac{2J(b^2-d^2)}{(ab+cd)(ad+bc)};$$

$$\sin CQD = \sin(\alpha + \beta) = \frac{2J(a^2-c^2)}{(ab+cd)(ad+bc)}$$

Im Folgenden werden Functionen wie

$$ab+cd, \quad ad+bc, \quad ac+bd, \quad a+b+c-d, \quad a+b-c+d, \quad a-b+c+d, \\ -a+b+c+d$$

abkürzungsweise stets mit

$(ab), (ad), (ac), \{d\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}$
bezeichnet.

1) a. Die Lote von A, B, C, D auf b, c, d, a haben die Werte:

$$h_1 = a \sin \beta = \frac{2aJ}{(ab)}, \quad h_2 = b \sin \alpha = \frac{2bJ}{(ad)}, \quad h_3 = c \sin \beta = \frac{2cJ}{(ab)},$$

$$h_4 = d \sin \alpha = \frac{2dJ}{(ad)}$$

Daraus ergibt sich

$$h_1 : h_3 = a : c \quad \text{und} \quad h_2 : h_4 = b : d \quad \text{oder} \quad c = a \frac{h_3}{h_1} \quad \text{und} \quad d = b \frac{h_4}{h_2}$$

durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a(ad)}{b(ab)}$$

ergibt sich

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a(h_1 h_4)}{b(h_1 h_2)}$$

oder

$$b = a \frac{h_2(h_1 h_4)}{h_1(h_1 h_2)}$$

folglich

$$d = b \frac{h_4}{h_2} = a \frac{h_4(h_1 h_4)}{h_1(h_1 h_2)}$$

und durch Einsetzen der Werte von b, c und d in $h_1 = \frac{2aJ}{(ab)}$ erhält man unter Berücksichtigung unserer symbolischen Schreibweise, nach der wir $h_2(h_2 h_3 + h_1 h_4) + h_3(h_3 h_4 + h_1 h_2) + h_4(h_4 h_1 + h_2 h_3) - h_1(h_1 h_2 + h_3 h_4) = \{h_1(h_1 h_2)\}$ u. s. w. setzen,

$$a = \frac{2h_1(h_2 h_3)[(h_1 h_2)]^2}{\sqrt{\{h_1(h_1 h_2)\} \{h_2(h_2 h_3)\} \{h_3(h_3 h_4)\} \{(h_4(h_4 h_1))\}}} = \frac{2h_1(h_2 h_3)[(h_1 h_2)]^2}{W}$$

$$b = \frac{2h_2(h_3 h_4)[(h_2 h_3)]^2}{W}, \quad c = \frac{2h_3(h_4 h_1)[(h_3 h_4)]^2}{W},$$

$$d = \frac{2h_4(h_1 h_2)[(h_4 h_1)]^2}{W},$$

$$J = \frac{[(h_1 h_2)(h_1 h_4)]^2}{W},$$

$$R = \frac{2[(h_1 h_2)(h_1 h_4)]^2}{W^2} \sqrt{(h_1 h_2)(h_1 h_4)[h_1 h_3[(h_1 h_2)]^2 + h_2 h_4[(h_1 h_4)]^2]}$$

b. Ganz entsprechende Formeln gelten für die von B, C, D, A auf d, a, b, c gefällten Lote:

$$h_1' = \frac{2aJ}{(ad)}, \quad h_2' = \frac{2bJ}{(ab)}, \quad h_3' = \frac{2cJ}{(ad)}, \quad h_4' = \frac{2dJ}{(ab)}$$

Es wird nämlich

$$a = \frac{2h_1'(h_1'h_2')[(h_2'h_3')]^2}{W}, \quad b = \frac{2h_2'(h_2'h_3')[(h_3'h_4')]^2}{W},$$

$$c = \frac{2h_3'(h_3'h_4')[(h_4'h_1')]^2}{W}, \quad d = \frac{2h_4'(h_4'h_1')[(h_1'h_2')]^2}{W}$$

$$J = \frac{[(h_1'h_2')(h_3'h_4')]^2}{W},$$

$$R = \frac{2[(h_1'h_2')(h_1'h_4')]^2}{W^2} \sqrt{(h_1'h_2')(h_1'h_4')[(h_1'h_3')h_1'h_4')]^2 + h_2'h_4'[(h_1'h_2')]^2}$$

wo

$$W = \sqrt{\{h_1'(h_2'h_3')\} \{h_2'(h_3'h_4')\} \{h_3'(h_4'h_1')\} \{h_4'(h_1'h_2')\}}$$

Man beachte noch die Beziehung

$$h_1 h_2 h_3 h_4 = \frac{16 abcd J^4}{[(ab)(ad)]^2} = h_1' h_2' h_3' h_4'$$

2) Für die Lote von Q auf a , von P auf b , von Q auf c und von P auf d gelten die Gleichungen

$$p_1 = \frac{2aJ}{a^2 - c^2}, \quad p_2 = \frac{2bJ}{b^2 - d^2}, \quad p_3 = \frac{2cJ}{a^2 - c^2}, \quad p_4 = \frac{2dJ}{b^2 - d^2}$$

folglich

$$c = a \frac{p_3}{p_1}, \quad d = b \frac{p_4}{p_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{a(b^2 - d^2)}{b(a^2 - c^2)} = \frac{b}{a} \frac{p_1^2(p_2^2 - p_4^2)}{p_2^2(p_1^2 - p_4^2)}$$

oder

$$b = a \frac{p_2(p_1^2 - p_3^2)}{p_1(p_2^2 - p_4^2)}, \quad d = a \frac{p_4(p_1^2 - p_3^2)}{p_1(p_2^2 - p_4^2)}$$

Setzt man die Werte für b , c und d in die Formel

$$J = \frac{1}{4} \sqrt{\{a\} \{b\} \{c\} \{d\}}$$

ein, so folgt

$$J = \frac{a^2(p_1^2 - p_3^2)}{4p_1^2(p_2^2 - p_4^2)} \sqrt{\{p_1\} \{p_2\} \{p_3\} \{p_4\}} = \frac{a^2(p_1^2 - p_3^2)}{4p_1^2(p_2^2 - p_4^2)} \cdot W$$

Durch Einsetzen der Werte von J und c in $p_1 = \frac{2aJ}{a^2 - c^2}$ ergibt sich schliesslich

$$a = \frac{2p_1(p_2^2 - p_4^2)}{W}, \quad b = \frac{2p_2(p_1^2 - p_3^2)}{W}, \quad c = \frac{2p_3(p_2^2 - p_4^2)}{W},$$

$$d = \frac{2p_4(p_1^2 - p_3^2)}{W}$$

$$J = \frac{(p_1^2 - p_3^2)(p_2^2 - p_4^2)}{W},$$

$$R = \frac{2\sqrt{(p_1 p_2)(p_1 p_4)[p_1 p_3(p_2^2 - p_4^2)^2 + p_2 p_4(p_1^2 - p_3^2)^2]}}{W^2}$$

3) Die Lote von N auf a, b, c, d haben die Werte:

$$n_1 = \frac{2abdJ}{(ab)(ad)}, \quad n_2 = \frac{2abcJ}{(ab)(ad)}, \quad n_3 = \frac{2bcdJ}{(ab)(ad)}, \quad n_4 = \frac{2acdJ}{(ab)(ad)}$$

denn es ist

$$\triangle ABN = \frac{1}{2}AN \cdot BN \cdot \sin \varepsilon = \frac{a^2bdJ}{(ab)(ad)}$$

u. s. w. Es wird

$$b = a \frac{n_3}{n_4}, \quad c = a \frac{n_3}{n_1}, \quad d = a \frac{n_3}{n_2}$$

und ebenso wie unter 3)

$$J = \frac{1}{4}a^2n_3^2 \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right) \left(\frac{1}{n_2}\right) \left(\frac{1}{n_3}\right) \left(\frac{1}{n_4}\right)} = \frac{1}{4}a^2n_3^2 W,$$

folglich

$$n_1 = \frac{2abdJ}{(ab)(ad)} = a \frac{n_1^2 n_3^2 n_2 n_4 W}{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}$$

$$a = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1 n_2 n_3^2 n_4 W}, \quad b = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1 n_2 n_3 n_4^2 W}, \quad c = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1^2 n_2 n_3 n_4 W},$$

$$d = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4)}{n_1 n_2^2 n_3 n_4 W}$$

$$J = \frac{[(n_1 n_2)(n_1 n_4)]^2}{n_1^2 n_2^2 n_3^2 n_4^2 W},$$

$$f = \frac{2(n_1 n_4)}{n_1 n_2 n_3 n_4 W} \sqrt{\frac{(n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}{n_1 n_2 n_3 n_4}},$$

$$g = \frac{2(n_1 n_2)}{n_1 n_2 n_3 n_4 W} \sqrt{\frac{(n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}{n_1 n_2 n_3 n_4}},$$

$$h = \frac{2[(n_1 n_2)(n_1 n_4)]^2 \sqrt{n_1 n_2 n_3 n_4}}{n_1^2 n_2^2 n_3^2 n_4^2 W \sqrt{(n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}}$$

$$R = \frac{2(n_1 n_2)(n_1 n_4) \sqrt{n_1 n_2 n_3 n_4 (n_1 n_2)(n_1 n_4)(n_1 n_3)}}{n_1^3 n_2^3 n_3^3 n_4^3 W^2}.$$

4) Für die 4 Lote vom Mittelpunkt M des umschriebenen Kreises auf a, b, c, d gilt:

$$\gamma_1 = R \cos ACB = \frac{a(b^2 + c^2 + d^2 - a^2) + 2bcd}{8J}$$

analog

$$\gamma_2 = \frac{b(a^2 + c^2 + d^2 - b^2) + 2acd}{8J}, \quad \gamma_3 = \frac{c(a^2 + b^2 + d^2 - c^2) + 2abd}{8J},$$

$$\gamma_4 = \frac{d(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) + 2abc}{8J}$$

und es ist

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{2}(a+b) \sqrt{\frac{\{a\}\{b\}}{\{c\}\{d\}}}, \quad \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{1}{2}(a-b) \sqrt{\frac{\{c\}\{d\}}{\{a\}\{b\}}}$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 = \frac{1}{2}(b+c) \sqrt{\frac{\{b\}\{c\}}{\{a\}\{d\}}}, \quad \gamma_3 - \gamma_2 = \frac{1}{2}(b-c) \sqrt{\frac{\{a\}\{d\}}{\{b\}\{c\}}}$$

$$\gamma_3 + \gamma_4 = \frac{1}{2}(c+d) \sqrt{\frac{\{c\}\{d\}}{\{a\}\{b\}}}, \quad \gamma_4 - \gamma_3 = \frac{1}{2}(c-d) \sqrt{\frac{\{a\}\{b\}}{\{c\}\{d\}}}$$

$$\gamma_1 + \gamma_4 = \frac{1}{2}(a+d) \sqrt{\frac{\{a\}\{d\}}{\{b\}\{c\}}}, \quad \gamma_4 - \gamma_1 = \frac{1}{2}(a-d) \sqrt{\frac{\{b\}\{c\}}{\{a\}\{d\}}}$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 = \frac{1}{2}(a+c) \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}}, \quad \gamma_3 - \gamma_1 = \frac{1}{2}(a-c) \sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{\{a\}\{c\}}}$$

$$\gamma_2 + \gamma_4 = \frac{1}{2}(b+d) \sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{\{a\}\{c\}}}, \quad \gamma_4 - \gamma_2 = \frac{1}{2}(b-d) \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2^2 - \gamma_1^2 &= \frac{1}{4}(a^2 - b^2), & \gamma_3^2 - \gamma_2^2 &= \frac{1}{4}(b^2 - c^2), & \gamma_4^2 - \gamma_3^2 &= \frac{1}{4}(c^2 - d^2), \\ \gamma_4^2 - \gamma_1^2 &= \frac{1}{4}(a^2 - d^2), & \gamma_3^2 - \gamma_1^2 &= \frac{1}{4}(a^2 - c^2), & \gamma_4^2 - \gamma_2^2 &= \frac{1}{4}(b^2 - d^2); \end{aligned}$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_3 + \gamma_4) = \frac{(a+b)(c+d)}{4} \quad (I), \quad (\gamma_1 + \gamma_4)(\gamma_2 + \gamma_3) = \frac{(a+d)(b+c)}{4} \quad (II)$$

$$(\gamma_1 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_4) = \frac{(a+c)(b+d)}{4} \quad (III)$$

$$(I) + (II) - (III) \text{ ergibt } 4(\gamma_1\gamma_3) = (ac) \quad (1)$$

$$(I) + (III) - (II) \quad \text{,,} \quad 4(\gamma_1\gamma_4) = (ad) \quad (2)$$

$$(II) + (III) - (I) \quad \text{,,} \quad 4(\gamma_1\gamma_2) = (ab) \quad (3).$$

Aus (1) und (2) folgt durch Elimination von d

$$4a(\gamma_1\gamma_3) - 4b(\gamma_1\gamma_4) = c(a^2 - b^2) = 4c(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$$

oder

$$a(\gamma_1\gamma_3) - b(\gamma_1\gamma_4) = c(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \quad (\alpha)$$

ebenso aus (1) und (3)

$$b(\gamma_1\gamma_2) - c(\gamma_1\gamma_3) = a(\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \quad (\beta)$$

aus (α) und (β) aber folgt durch Elimination von c

$$b = a \frac{(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)(\gamma_3^2 - \gamma_2^2) + (\gamma_1\gamma_3)^2}{(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_2^2 - \gamma_1^2 + (\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1\gamma_4))} = a \frac{\gamma_2(\gamma_1^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 - \gamma_2^2) + 2\gamma_1\gamma_3\gamma_4}{\gamma_1(\gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 - \gamma_1^2) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_4} \\ = \frac{N}{M}$$

aus $\gamma_2^2 - \gamma_1^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$ folgt andererseits $b^2 = a^2 - 4(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$, so dass

$$a^2 - 4(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) = a^2 \frac{N^2}{M^2}$$

oder

$$\frac{a^2}{M^2} (M^2 - N^2) = 4(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$$

wird. Da nun

$$M + N = (\gamma_1 + \gamma_2)\{\gamma_1\}\{\gamma_2\} \quad \text{und} \quad M - N = (\gamma_2 - \gamma_1)\{\gamma_3\}\{\gamma_4\}$$

also

$$M^2 - N^2 = (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)\{\gamma_1\}\{\gamma_2\}\{\gamma_3\}\{\gamma_4\} = (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)W^2$$

ist, so hat man

$$a = \frac{2[\gamma_1(\gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 - \gamma_1^2) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_4]}{W}, \\ b = \frac{2[\gamma_2(\gamma_1^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2 - \gamma_2^2) + 2\gamma_1\gamma_3\gamma_4]}{W}, \\ c = \frac{2[\gamma_3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_4^2 - \gamma_3^2) + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_4]}{W}, \\ d = \frac{2[\gamma_4(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - \gamma_4^2) + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3]}{W}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 + d\gamma_4 = 2W$$

andererseits folgt einfach aus geometrischen Gründen:

$$a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 + d\gamma_4 = 2J$$

demnach

$$J = W = \sqrt{\{\gamma_1\}\{\gamma_2\}\{\gamma_3\}\{\gamma_4\}}$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) folgt ferner:

$$f = 2\sqrt{\frac{(\gamma_1\gamma_3)(\gamma_1\gamma_4)}{(\gamma_1\gamma_2)}}, \quad g_2 = \sqrt{\frac{(\gamma_1\gamma_3)(\gamma_1\gamma_2)}{(\gamma_1\gamma_4)}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1\gamma_4)}{(\gamma_1\gamma_3)}} \\ R = \frac{2\sqrt{(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_1\gamma_4)(\gamma_1\gamma_3)}}{W}.$$

Liegt a mit den andern Seiten b, c, d in einem Halbkreis und ist grösser als jede derselben, so ist $\cos ACB$ negativ; demgemäss ist

alsdann in den vorigen Formeln γ_1 überall negativ zu setzen, ohne dass dieselben eine weitere Aenderung erleiden.

Man beachte noch die Gleichungen

$$a\gamma_2 + b\gamma_1 = \frac{(ac)(ad)}{4J} = c\gamma_4 + d\gamma_3$$

$$b\gamma_3 + c\gamma_2 = \frac{(ac)(ab)}{4J} = d\gamma_1 + a\gamma_4$$

$$a\gamma_3 + c\gamma_1 = \frac{(ab)(ad)}{4J} = b\gamma_4 + d\gamma_2$$

5) Bekanntlich ¹⁾ schneiden sich die Lote von den Mitten der Seiten des Sehnenvierecks auf die gegenüberliegenden Seiten in einem Punkte. Die Werte dieser Lote sind leicht zu berechnen Denn ist M_1 die Mitte von a , so ist

$$s_1 = PM_1 \sin APD = \left(\frac{a}{2} + \frac{d(ad)}{b^2 - d^2} \right) \frac{2J(b^2 - d^2)}{(ab)(ad)} = \frac{J[a(b^2 + d^2) + 2bcd]}{(ab)(ad)}$$

analog

$$s_2 = \frac{J[b(a^2 + c^2) + 2acd]}{(ab)(ad)}, \quad s_3 = \frac{J[c(b^2 + d^2) + 2abd]}{(ab)(ad)},$$

$$s_4 = \frac{J[d(a^2 + c^2) + 2abc]}{(ab)(ad)}$$

Mithin

$$s_1 + s_3 = \frac{J(a+c)(b+d)^2}{(ab)(ad)}, \quad s_1 - s_3 = \frac{J(a-c)(b-d)^2}{(ab)(ad)},$$

$$s_2 + s_4 = \frac{J(b+d)(a+c)^2}{(ab)(ad)}, \quad s_2 - s_4 = \frac{J(b-d)(a-c)^2}{(ab)(ad)},$$

$$\frac{s_1 + s_3}{s_2 + s_4} = \frac{b+d}{a+c}$$

oder

$$b+d = (a+c) \frac{s_1 + s_3}{s_2 + s_4}, \quad \frac{s_1 - s_3}{s_2 - s_4} = \frac{b-d}{a-c}$$

ferner

$$b-d = (a-c) \frac{s_1 - s_3}{s_2 - s_4}; \quad \frac{(s_1 + s_3)(s_2 + s_4)}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)} = \frac{(a+c)^3(b+d)^3}{(a-c)^3(b-d)^3}$$

also

$$\sqrt[3]{\frac{(s_1 + s_3)(s_2 + s_4)}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)}} = \frac{(a+c)(b+d)}{(a-c)(b-d)}$$

oder wenn man die eben gefundenen Werte von $b+d$ und $b-d$ einsetzt,

¹⁾ Kunze, n. a. O. S. 138.

folglich
$$\sqrt[3]{\frac{(s_1 + s_3)(s_2 + s_4)}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)}} = \frac{(a + c)^2 (s_1 + s_3)(s_2 - s_4)}{(a - c)^2 (s_1 - s_3)(s_2 + s_4)}$$

oder
$$\left(\frac{a + c}{a - c}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{(s_1 - s_3)^2 (s_2 + s_4)^4}{(s_1 + s_3)^2 (s_2 - s_4)^4}}$$

woraus
$$\frac{a + c}{a - c} = \sqrt[3]{\frac{(s_1 - s_3)(s_2 + s_4)^2}{(s_1 + s_3)(s_2 - s_4)^2}}$$

$$c = a \frac{\sqrt[3]{(s_1 - s_3)(s_2 + s_4)^2} - \sqrt[3]{(s_1 + s_3)(s_2 - s_4)^2}}{\sqrt[3]{(s_1 - s_3)(s_2 + s_4)^2} + \sqrt[3]{(s_1 + s_3)(s_2 - s_4)^2}} = a \frac{(s_2 + s_4)\sqrt[3]{M} - (s_2 - s_4)\sqrt[3]{N}}{(s_2 + s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2 - s_4)\sqrt[3]{N}}$$

wo M für $\sqrt[3]{\frac{s_1 - s_3}{s_2 + s_4}}$ und N für $\sqrt[3]{\frac{s_1 + s_3}{s_2 - s_4}}$ gesetzt ist; also wird

$$a + c = a \frac{2(s_2 + s_4)\sqrt[3]{M}}{(s_2 + s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2 - s_4)\sqrt[3]{N}}$$

Nun ist einerseits

$$4J = \sqrt{[(a + c)^2 - (b - d)^2][(b + d)^2 - (a - c)^2]} \\ = \sqrt{\left[(a + c)^2 - (a - c)^2 \left(\frac{s_1 - s_3}{s_2 - s_4}\right)^2\right] \left[(a + c)^2 \left(\frac{s_1 + s_3}{s_2 + s_4}\right)^2 - (a - c)^2\right]}$$

oder da

$$a - c = (a + c) \sqrt[3]{\frac{(s_1 + s_3)(s_2 - s_4)^2}{(s_1 - s_3)(s_2 + s_4)^2}} = (a + c) \frac{s_2 - s_4}{s_2 + s_4} \sqrt[3]{\frac{N}{M}} \text{ ist,}$$

$$4J = (a + c)^2 \sqrt{\left[1 - \frac{(s_1 - s_3)^2}{(s_2 + s_4)^2} \sqrt[3]{\frac{N^2}{M^2}}\right] \left[\frac{(s_1 + s_3)^2}{(s_2 + s_4)^2} - \frac{(s_2 - s_4)^2}{(s_2 + s_4)^2} \sqrt[3]{\frac{N^2}{M^2}}\right]} \\ = \frac{4a^2 W}{[(s_2 + s_4)\sqrt[3]{M} + (s_2 - s_4)\sqrt[3]{N}]^2}$$

wo

$$W = \sqrt{[(s_2 + s_4)^2 \sqrt[3]{M^2} - (s_1 - s_3)^2 \sqrt[3]{N^2}][(s_1 + s_3)^2 \sqrt[3]{M^2} - (s_2 - s_4)^2 \sqrt[3]{N^2}]}$$

andererseits folgt aus den Werten von s_1 und s_3

$$2J = as_3 + cs_1 = a \frac{(s_1 + s_3)(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} - (s_1 - s_3)(s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}}{(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} + (s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}};$$

die Gleichsetzung der Werte von J ergibt

$$a = \frac{[(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} + (s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}][(s_1 + s_3)(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} - (s_1 - s_3)(s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}]}{2W}$$

durch cyklische Vertauschung von s_1, s_2, s_3, s_4 und einige Umformungen gewinnt man die Werte

$$b = \frac{[(s_1 + s_3) \sqrt[3]{M} + (s_1 - s_3) \sqrt[3]{N}][(s_1 + s_3)(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} - (s_1 - s_3)(s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}]}{2W},$$

$$c = \frac{[(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} - (s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}][(s_1 + s_3)(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} - (s_1 - s_3)(s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}]}{2W},$$

$$d = \frac{[(s_1 + s_3) \sqrt[3]{M} - (s_1 - s_3) \sqrt[3]{N}][(s_1 + s_3)(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} - (s_1 - s_3)(s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}]}{2W}$$

Aus der zweiten der obigen Gleichungen für J folgt ohne weiteres

$$J = \frac{[(s_1 + s_3)(s_2 + s_4) \sqrt[3]{M} - (s_1 - s_3)(s_2 - s_4) \sqrt[3]{N}]^2}{4W}$$

Zu beachten sind noch die Gleichungen

$$as_1 + cs_3 = bs_2 + ds_4 \quad \text{und} \quad as_3 + cs_1 = bs_4 + ds_2 = 2J$$

6) In jedem Viereck halbieren sich die Verbindungslinien der Mitten der gegenüberliegenden Seiten und die Verbindungslinie der Diagonalenmitten in einem Punkte ¹⁾, der zugleich den Schwerpunkt der vier Ecken darstellt. Für die Lote von diesem Punkte auf c, d, a, b gelten, wie geometrisch sofort einzusehen ist, die Beziehungen:

$$k_1 = \frac{1}{2}s_1, \quad k_2 = \frac{1}{2}s_2, \quad k_3 = \frac{1}{2}s_3, \quad k_4 = \frac{1}{2}s_4$$

es gelten demnach für die k dieselben Formeln wie für die s , mit dem einzigen Unterschied, dass in den Ausdrücken für a, b, c, d der Factor 2 und im Ausdruck für J der Factor 4 im Nenner fehlt.

1) Kunze, a. a. O. S. 58.

7) Für die Gerade w_1 , welche Wkl. ANB halbiert und von a begrenzt wird, findet man leicht:

$$w_1 = \frac{a}{h(b+d)} \sqrt{bd[(b+d)^2 - h^2]}$$

oder wenn man berücksichtigt, dass

$$(b+d)^2 - h^2 = \frac{bd\{a\}\{c\}}{(ac)} \text{ ist,}$$

$$w_1 = \frac{abd}{b+d} \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{(ab)(ad)}}$$

analog die andern Halbierungslinien:

$$w_2 = \frac{abc}{a+c} \sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{(ab)(ad)}}, \quad w_3 = \frac{bcd}{b+d} \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{(ab)(ad)}}, \quad w_4 = \frac{acd}{a+c} \sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{(ab)(ad)}}$$

Also

$$c = a \frac{w_3}{w_1}, \quad d = b \frac{w_4}{w_2}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{d(a+c)}{c(b+d)} \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}}$$

ein, so erhält man eine Gleichung ersten Grades in $\frac{a^2}{b^2}$, aus der sich ergibt:

$$b = a \frac{w_2(w_1+w_3)}{w_1(w_2+w_4)} \sqrt{\frac{w_2^2 w_4^2 (w_1-w_3)^2 + w_1^2 w_3^2 (w_2+w_4)^2}{w_1^2 w_3^2 (w_2-w_4)^2 + w_2^2 w_4^2 (w_1+w_3)^2}} \\ = a \frac{w_2(w_1+w_3)}{w_1(w_2+w_4)} \sqrt{\frac{N}{M}}$$

Setzt man schliesslich in die Gleichung für w_1 erst die Werte für c und d , dann den eben gefundenen Wert von b ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$a = \frac{w_2+w_4}{2w_2w_3w_4} \sqrt{M}, \quad \text{analog} \quad b = \frac{w_1+w_3}{2w_1w_3w_4} \sqrt{N}, \quad c = \frac{w_2+w_4}{2w_1w_2w_3} \sqrt{M}, \\ d = \frac{w_1+w_3}{2w_1w_2w_3} \sqrt{N}$$

Da nun

$$\sqrt{w_1w_2w_3w_4} = \frac{4abcdJ\sqrt{abcd}}{(a+c)(b+d)(ab)(ad)}$$

ist, so wird

$$J = \frac{(a+c)(b+d)(ab)(ad)\sqrt{w_1 w_2 w_3 w_4}}{4abcd\sqrt{abcd}} = \frac{(w_1+w_3)(w_2+w_4)(w_1 w_2)(w_1 w_4)}{4w_1 w_2 w_3 w_4}$$

8) Für die Halbierungslinien der Winkel Q und P , die zu den Dreiecken ABQ , BCP , CDQ , ADP gehören, findet man:

$$u_1 = \frac{a\sqrt{(ab)(ad)\{a\}\{c\}}}{(b+d)(a^2-c^2)}, \quad u_2 = \frac{b\sqrt{(ab)(ad)\{b\}\{d\}}}{(a+c)(b^2-d^2)},$$

$$u_3 = \frac{c\sqrt{(ab)(ad)\{a\}\{c\}}}{(b+d)(a^2-c^2)}, \quad u_4 = \frac{d\sqrt{(ab)(ad)\{b\}\{d\}}}{(a+c)(b^2-d^2)}$$

also

$$c = a \frac{u_3}{u_1}, \quad d = b \frac{u_4}{u_2};$$

$$u_1 - u_3 = \frac{\sqrt{(ab)(ad)\{a\}\{c\}}}{(a+c)(b+d)}, \quad u_2 - u_4 = \frac{\sqrt{(ab)(ad)\{b\}\{d\}}}{(a+c)(b+d)};$$

$$\frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_4} = \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}} = \sqrt{\frac{(b+d)^2 - (a-c)^2}{(a+c)^2 - (b-d)^2}}$$

was durch Einsetzen der Werte von c und d eine Gleichung ersten Grades in $\frac{b^2}{a^2}$ liefert, aus der folgt

$$b^2 = a^2 \frac{u_2^2(u_1 - u_3)^2 [(u_1 + u_3)^2 + (u_2 - u_4)^2]}{u_1^2(u_2 - u_4)^2 [(u_2 + u_4)^2 + (u_1 - u_3)^2]}$$

setzt man jetzt in den obigen Wert für u_1 erst die Werte von c und d , dann den zuletzt gefundenen Wert für b^2 ein, so ergibt sich nach den gehörigen Umformungen

$$a = \frac{u_1(u_1 + u_3)(u_2^2 - u_4^2)\sqrt{(u_2 + u_4)^2 + (u_1 - u_3)^2}}{2(u_1 u_2)(u_1 u_4)};$$

analog

$$b = \frac{u_2(u_2 + u_4)(u_1^2 - u_3^2)\sqrt{(u_1 + u_3)^2 + (u_2 - u_4)^2}}{2(u_1 u_2)(u_1 u_4)},$$

$$c = \frac{u_3(u_1 + u_3)(u_2^2 - u_4^2)\sqrt{(u_2 + u_4)^2 + (u_1 - u_3)^2}}{2(u_1 u_2)(u_1 u_4)},$$

$$d = \frac{u_4(u_2 + u_4)(u_1^2 - u_3^2)\sqrt{(u_1 + u_3)^2 + (u_2 - u_4)^2}}{2(u_1 u_2)(u_1 u_4)}$$

Nun ist

$$\sqrt{u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4} = \frac{(ab)(cd)4J\sqrt{abcd}}{(a+c)(b+d)(a^2-c^2)(b^2-d^2)}$$

$$= \frac{(u_1 u_2)(u_1 u_4)4J\sqrt{u_1 u_2 u_3 u_4}}{(u_1 + u_3)(u_2 + u_4)(u_1^2 - u_3^2)(u_2^2 - u_4^2)}$$

also

$$J = \frac{(u_1 + u_3)(u_2 + u_4)(u_1^2 - u_3^2)(u_2^2 - u_4^2)}{4(u_1 u_2)(u_1 u_4)}$$

9) Die Verbindungslinien des Schnittpunktes N der Diagonalen mit den Mitten der vier Seiten sind:

$$t_1 = \frac{a}{2h} \sqrt{2b^2 + 2d^2 - h^2}, \quad t_2 = \frac{b}{2h} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - h^2},$$

$$t_3 = \frac{c}{2h} \sqrt{2b^2 + 2d^2 - h^2}, \quad t_4 = \frac{d}{2h} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - h^2}$$

also

$$c = a \frac{t_3}{t_1}, \quad d = b \frac{t_4}{t_2}$$

und es wird durch diese Substitution

$$h = \sqrt{\frac{(ab)(cd)}{(ac)}} = ab \sqrt{\frac{(t_1 t_2)(t_1 t_4)}{t_1 t_2 (a^2 t_2 t_3 + b^2 t_1 t_4)}}$$

setzt man diesen Wert in die Werte für t_1 und t_2 ein und quadriert, so gelangt man zu den beiden Gleichungen

$$4t_1^2 t_2 (t_1 t_3)(t_1 t_4) = a^2 t_2 [t_1 t_3 (t_2^2 + t_4^2) - t_2 t_4 (t_1^2 + t_3^2)] + 2b^2 t_1^2 t_4 (t_2^2 + t_4^2)$$

$$4t_1 t_2^2 (t_1 t_3)(t_1 t_4) = 2a^2 t_2^2 t_3 (t_1^2 + t_3^2) - b^2 t_1 [t_1 t_3 (t_2^2 + t_4^2) - t_1 t_4 (t_1^2 + t_3^2)]$$

aus denen durch Elimination von b^2 hervorgeht

$$a^2 = 4t_1^2 \cdot \frac{t_1 t_3 (t_2^2 + t_4^2) - t_2 t_4 (t_1^2 + t_3^2) + 2t_2 t_4 (t_2^2 + t_4^2)}{(t_1 t_2)(t_1 t_4)},$$

analog

$$b^2 = 4t_2^2 \cdot \frac{t_2 t_4 (t_1^2 + t_3^2) - t_1 t_3 (t_2^2 + t_4^2) + 2t_1 t_3 (t_1^2 + t_3^2)}{(t_1 t_2)(t_1 t_4)},$$

$$c^2 = 4t_3^2 \cdot \frac{t_1 t_3 (t_2^2 + t_4^2) - t_2 t_4 (t_1^2 + t_3^2) + 2t_2 t_4 (t_2^2 + t_4^2)}{(t_1 t_2)(t_1 t_4)},$$

$$d^2 = 4t_4^2 \cdot \frac{t_2 t_4 (t_1^2 + t_3^2) - t_1 t_3 (t_2^2 + t_4^2) + 2t_1 t_3 (t_1^2 + t_3^2)}{(t_1 t_2)(t_1 t_4)}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 4J &= \sqrt{[(a+c)^2 - (b-d)^2][(b+d)^2 - (a-c)^2]} \\
 &= \sqrt{\left[a^2 \frac{(t_1+t_3)^2}{t_1^2} - b^2 \frac{(t_2-t_4)^2}{t_2^2} \right] \left[b^2 \frac{(t_2+t_4)^2}{t_2^2} - a^2 \frac{(t_1-t_3)^2}{t_1^2} \right]} \\
 &= 4 \sqrt{\frac{(t_1 t_2)(t_1 t_4)[(t_2+t_4)^2 - (t_1-t_3)^2] \cdot (t_1 t_2)(t_1 t_4)[(t_1+t_3)^2 - (t_2-t_4)^2]}{(t_1 t_2)(t_1 t_4) \cdot (t_1 t_2)(t_1 t_4)}}.
 \end{aligned}$$

also

$$J = \sqrt{\{t_1\} \{t_2\} \{t_3\} \{t_4\}}$$

10) Die Verbindungslinien von Q und P mit den Mitten von a, b, c, d sind

$$\tau_1 = \frac{a}{2(a^2 - c^2)} \sqrt{2[(ab)]^2 + 2[(ad)]^2 - (a^2 - c^2)^2},$$

$$\tau_2 = \frac{b}{2(b^2 - d^2)} \sqrt{2[(ab)]^2 + 2[(ad)]^2 - (b^2 - d^2)^2},$$

$$\tau_3 = \frac{c}{2(a^2 - c^2)} \sqrt{2[(ab)]^2 + 2[(ad)]^2 - (a^2 - c^2)^2},$$

$$\tau_4 = \frac{d}{2(b^2 - d^2)} \sqrt{2[(ab)]^2 + 2[(ad)]^2 - (b^2 - d^2)^2}$$

also

$$c = a \frac{\tau_3}{\tau_1}, \quad d = b \frac{\tau_4}{\tau_2}$$

durch Einführung dieser Werte in τ_1 und τ_2 ergeben sich für b^2 die beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 b^2 &= \frac{\tau_2^2(\tau_1^2 - \tau_3^2)(a^2 + 4\tau_1^2)}{2\tau_1^2([\tau_1 \tau_2]^2 + [\tau_1 \tau_4]^2)} \\
 &= \frac{2a^2\tau_2^2([\tau_1 \tau_2]^2 + [\tau_1 \tau_4]^2) - 4\tau_1^2\tau_2^2(\tau_2^2 - \tau_4^2)^2}{\tau_1^2(\tau_2^2 - \tau_4^2)^2}
 \end{aligned}$$

aus denen folgt

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \frac{4\tau_1^2(\tau_2^2 - \tau_4^2)(2[\tau_1 \tau_2]^2 + 2[\tau_1 \tau_4]^2 + [\tau_1^2 - \tau_3^2]^2)}{4([\tau_1 \tau_2]^2 + [\tau_1 \tau_4]^2)^2 - (\tau_1^2 - \tau_3^2)^2(\tau_2^2 - \tau_4^2)^2} \\
 &= \frac{4\tau_1^2(\tau_2^2 - \tau_4^2)(2[\tau_1 \tau_2]^2 + 2[\tau_1 \tau_4]^2 + [\tau_1^2 - \tau_3^2]^2)}{(2([\tau_1 \tau_2]^2 + 2[\tau_1 \tau_4]^2 + [\tau_1^2 - \tau_3^2][\tau_2^2 - \tau_4^2])(2[\tau_1 \tau_2]^2 + 2[\tau_1 \tau_4]^2 - [\tau_1^2 - \tau_3^2][\tau_2^2 - \tau_4^2])} \\
 &= 4\tau_1^2 \cdot \frac{(\tau_2^2 - \tau_4^2)(2[\tau_1 \tau_2]^2 + 2[\tau_1 \tau_4]^2 + [\tau_1^2 - \tau_3^2]^2)}{(3[\tau_1 \tau_2]^2 + [\tau_1 \tau_4]^2)([\tau_1 \tau_2]^2 + 3[\tau_1 \tau_4]^2)};
 \end{aligned}$$

$$c^2 = a^2 \frac{\tau_3^2}{\tau_1^2}$$

analog

$$b^2 = 4\tau_2^2 \cdot \frac{(\tau_1^2 - \tau_3^2)^2 (2[(\tau_1\tau_2)]^2 + 2[(\tau_1\tau_4)]^2 + [\tau_2^2 - \tau_4^2]^2)}{(3[(\tau_1\tau_2)]^2 + [(\tau_1\tau_4)]^2) \cdot ([(\tau_1\tau_2)]^2 + 3[(\tau_1\tau_4)]^2)};$$

$$d^2 = b^2 \frac{\tau_4^2}{\tau_2^2}$$

Die Formel für den Inhalt kann auf dieselbe Weise wie unter 9) gefunden werden, ergibt aber keine einfache Gestalt.

11) Aus

$$\begin{aligned} \triangle ABN &= \frac{a^2bdJ}{(ab)(ad)}, & \triangle BCN &= \frac{ab^2cJ}{(ab)(ad)}, & \triangle CDN &= \frac{bc^2dJ}{(ab)(ad)}, \\ \triangle ADN &= \frac{acd^2J}{(ab)(ad)} \end{aligned}$$

(s. Nr. 3)) ergibt sich für die Radien der diesen Dreiecken umgeschriebenen Kreise:

$$\Pi_1 = \frac{a(ac)}{4J}, \quad \Pi_2 = \frac{b(ac)}{4J}, \quad \Pi_3 = \frac{c(ac)}{4J}, \quad \Pi_4 = \frac{d(ac)}{4J}$$

also

$$\Pi_1 : \Pi_2 : \Pi_3 : \Pi_4 = a : b : c : d,$$

$$b = a \frac{\Pi_2}{\Pi_1}, \quad c = a \frac{\Pi_3}{\Pi_1}, \quad d = a \frac{\Pi_4}{\Pi_1};$$

setzt man diese Werte in Π_1 ein, so folgt ohne weiteres

$$a = \Pi_1 \cdot \frac{\sqrt{\{\Pi_1\}\{\Pi_2\}\{\Pi_3\}\{\Pi_4\}}}{(\Pi_1\Pi_3)}$$

analog

$$b = \Pi_2 \cdot \frac{W}{(\Pi_1\Pi_3)}, \quad c = \Pi_3 \cdot \frac{W}{(\Pi_1\Pi_3)}, \quad d = \Pi_4 \cdot \frac{W}{(\Pi_1\Pi_3)};$$

$$J = \frac{W^3}{4[(\Pi_1\Pi_3)]^2}; \quad R = \sqrt{\frac{(\Pi_1\Pi_2)(\Pi_1\Pi_4)}{(\Pi_1\Pi_3)}}$$

12) Die Radien der den Dreiecken ABQ , BCP , CDQ , ADP umgeschriebenen Kreise sind:

$$R_1 = \frac{ahR}{a^2 - c^2}, \quad R_2 = \frac{bhR}{b^2 - d^2}, \quad R_3 = \frac{chR}{a^2 - c^2}, \quad R_4 = \frac{dhR}{b^2 - d^2}$$

also

$$c = a \frac{R_3}{R_1}, \quad d = b \frac{R_4}{R_2}; \quad R_1 + R_3 = \frac{hR}{a - c}, \quad R_2 + R_4 = \frac{hR}{b - d};$$

$$\frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_3} = \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{R_2(R_1 - R_3)}{R_1(R_2 - R_4)};$$

also

$$b = a \frac{R_2(R_1^2 - R_3^2)}{R_1(R_2^2 - R_4^2)}, \quad d = b \frac{R_4}{R_2} = a \frac{R_4(R_1^2 - R_3^2)}{R_1(R_2^2 - R_4^2)}$$

wir setzen jetzt die Werte von b, c, d in J ein und erhalten

$$4J = \frac{a^2(R_1^2 - R_3^2)}{R_1^2(R_2^2 - R_4^2)} \sqrt{\{R_1\}\{R_2\}\{R_3\}\{R_4\}} = \frac{a^2(R_1^2 - R_3^2)}{R_1^2(R_2^2 - R_4^2)} \cdot W$$

endlich führen wir die Werte von b, c, d und J ein in

$$R_1 = \frac{ahR}{a^2 - c^2} = \frac{a(ab)(ad)}{4J(a^2 - c^2)}$$

und erhalten

$$a = R_1 \cdot \frac{(R_2^2 - R_4^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)} \quad \text{analog} \quad b = R_2 \cdot \frac{(R_1^2 - R_3^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)}$$

$$c = R_3 \cdot \frac{(R_2^2 - R_4^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)} \quad d = R_4 \cdot \frac{(R_1^2 - R_3^2)W}{(R_1R_2)(R_1R_4)}$$

$$4J = \frac{(R_1^2 - R_3^2)(R_2^2 - R_4^2)W^3}{[(R_1R_2)(R_1R_4)]^2},$$

$$R = \sqrt{\frac{R_1R_3(R_2^2 - R_4^2)^2 + R_2R_4(R_1^2 - R_3^2)^2}{(R_1R_2)(R_1R_4)}}$$

13) Derjenige Kreis, welcher a von aussen, b und d von innen berührt, teilt a in zwei Abschnitte, von denen der an b liegende m_1 , der an d liegende m_1' heisse; für dieselben gilt

$$m_1 = \frac{a\{b\}}{2(a+c)}, \quad m_1' = \frac{a\{d\}}{2(a+c)}$$

entsprechend gilt für die Abschnitte von b, c und d

$$m_2 = \frac{b\{c\}}{2(b+d)}, \quad m_2' = \frac{b\{a\}}{2(b+d)}; \quad m_3 = \frac{c\{d\}}{2(a+c)}, \quad m_3' = \frac{c\{b\}}{2(a+c)};$$

$$m_4 = \frac{d\{a\}}{2(b+d)}, \quad m_4' = \frac{d\{c\}}{2(b+d)}$$

a. Es gilt

$$m_1 + m_2 - m_3 - m_4 = a - c, \quad m_2 + m_3 - m_1 - m_4 = b - d,$$

$$am_3 + cm_1 = ac, \quad bm_4 + dm_2 = bd$$

hieraus folgt leicht

$$a = \frac{1}{2}(m_2 + 2m_1 - m_4 + \sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3})$$

analog

$$b = \frac{1}{2}(m_3 + 2m_2 - m_1 + \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4})$$

$$c = \frac{1}{2}(m_4 + 2m_3 - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3})$$

$$d = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_4 - m_3 + \sqrt{(m_3 - m_1)^2 + 4m_1m_3})$$

Um die Vorzeichen der Wurzeln zu bestimmen, untersuchen wir zunächst, ob in dem Ausdruck für a die Wurzel grösser als $m_2 + 2m_1 - m_4$ sein kann; man findet leicht, dass das der Fall ist, wenn $m_1 + m_2 - m_3 - m_4 < 0$ ist, was jederzeit möglich ist; in diesem Falle kann also nur das positive Wurzelzeichen Geltung haben; dann muss aber auch im Ausdruck für c dasselbe Vorzeichen genommen werden zufolge der Gleichung $a - c = m_1 + m_2 - m_3 - m_4$. Ist jedoch $m_1 + m_2 - m_3 - m_4 > 0$, so ist im Ausdruck für c die Wurzel grösser als $m_4 + 2m_3 - m_2$, die Wurzel darf dann also wiederum nur das positive Vorzeichen erhalten und infolge dessen auch in a . Analog ist es bei b und d , so dass alle vier Wurzeln stets positiv zu nehmen sind (auch wenn $m_1 + m_2 - m_3 - m_4 = 0$, wie sofort zu sehen).

Nun wird

$$\{a\} = m_3 + 2m_4 - m_1 + \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4}$$

$$\{b\} = m_4 + 2m_1 - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3}$$

$$\{c\} = m_1 + 2m_2 - m_3 + \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4}$$

$$\{d\} = m_2 + 2m_3 - m_4 + \sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3}$$

multipliziert man $\{a\}$ mit $\{c\}$ und $\{b\}$ mit $\{d\}$, so folgt

$$J = \frac{1}{2} \sqrt{M \cdot N}$$

wo

$$M = (m_1 - m_3)(m_4 - m_2) + 4m_2m_4 + (m_2 + m_4) \sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4}$$

$$N = (m_3 - m_1)(m_4 - m_2) + 4m_1m_3 + (m_1 + m_3) \sqrt{(m_2 - m_4)^2 + 4m_1m_3}$$

b. Für die m' gelangt man auf demselben Wege zu folgenden Gleichungen:

$$a = \frac{1}{2}(m_4' + 2m_1' - m_2' + \sqrt{(m_2' - m_4')^2 + 4m_1'm_3'}) \quad \text{u. s. w.}$$

$$J = \frac{1}{2} \sqrt{M' \cdot N'}$$

$$M' = \frac{(m_1' - m_3')(m_2' - m_4') + 4m_2'm_4' + (m_2' + m_4')\sqrt{(m_1' - m_3')^2 + 4m_2'm_4'}}{2}$$

$$N' = \frac{(m_2' - m_4')(m_3' - m_1') + 4m_1'm_3' + (m_1' + m_3')\sqrt{(m_2' - m_4')^2 + 4m_1'm_3'}}{2}$$

Die m und m' stellen zugleich auch die Abschnitte vor, die von den vier inneren Berührungskreisen des Sehnenvierecks auf den Seiten gebildet werden.

Man beachte noch die Gleichung

$$m_1 m_2 m_3 m_4 = \frac{abcd J^2}{(a+c)^2 (b+d)^2} = m_1' m_2' m_3' m_4'$$

14) a. Die den Dreiecken ANB , BNC , CND , DNA eingeschriebenen Kreise bilden in diesen Dreiecken Seitenabschnitte bei N , welche die Werte haben,

$$\mu_1 = \frac{a}{2h} (b+d-h), \quad \mu_2 = \frac{b}{2h} (a+c-h), \quad \mu_3 = \frac{c}{2h} (b+d-h),$$

$$\mu_4 = \frac{d}{2h} (a+c-h)$$

demnach

$$c = a \frac{\mu_3}{\mu_1}, \quad d = b \frac{\mu_4}{\mu_2}$$

setzt man diese Werte ein in die Gleichung

$$\mu_1 + \mu_3 - \mu_2 - \mu_4 = \frac{1}{2}(b+d-a-c)$$

so erhält man

$$b = \mu_2 \frac{a(\mu_1 + \mu_3) + 2\mu_1(\mu_1 + \mu_3 - \mu_2 - \mu_4)}{\mu_1(\mu_2 + \mu_4)} \quad (\text{B})$$

folglich wird

$$h = \sqrt{\frac{(ab)(ad)}{(ac)}}$$

$$= \frac{ab}{\mu_2} \sqrt{\frac{(\mu_1 \mu_2)(\mu_1 \mu_4)}{a_1^2 \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 \left[\frac{a_1(\mu_1 + \mu_3) + 2\mu_1(\mu_1 + \mu_3 - \mu_2 - \mu_4)}{\mu_2 + \mu_4} \right]^2}}$$

nun folgt aber aus dem Wert von μ_1 auch

$$h = \frac{a(b+d)}{2\mu_1' + a} = \frac{ab \left(1 + \frac{\mu_4}{\mu_2} \right)}{2\mu_1 + a}$$

aus der Gleichsetzung der beiden Werte von h ergibt sich dann

$$(a+2\mu_1)^2 = \frac{a^2\mu_1\mu_3(\mu_2+\mu_4)^2 + \mu_2\mu_4[a(\mu_1+\mu_3) + 2\mu_1(\mu_1+\mu_3-\mu_2-\mu_4)]^2}{(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)}$$

und hieraus

$$a^2 - \frac{a}{\mu_2\mu_3\mu_4} [\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2 + \mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)] =$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2\mu_3\mu_4} [\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2 - \mu_2\mu_4(\mu_2+\mu_4)^2 + 2\mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4)] \quad (A)$$

also

$$a = \frac{\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2 + \mu_2\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4) + (\mu_2+\mu_4) \cdot W}{2\mu_2\mu_3\mu_4}, \quad c = a \cdot \frac{\mu_3}{\mu_1}$$

wo

$$W = \sqrt{\mu_1^2\mu_3^2(\mu_2-\mu_4)^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4) + \mu_2^2\mu_4^2(\mu_1-\mu_3)^2}$$

analog

$$b = \frac{\mu_2\mu_4(\mu_1-\mu_3)^2 + \mu_1\mu_3(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_4) + (\mu_1+\mu_3) \cdot W}{2\mu_1\mu_3\mu_4}, \quad d = b \cdot \frac{\mu_4}{\mu_2}$$

Um das Vorzeichen von W zu bestimmen, untersuchen wir, ob in der obigen Gleichung (A) das absolute Glied negativ werden kann. Schreiben wir dasselbe in der Form

$$\mu_1\mu_3(\mu_2-\mu_4)^2 - \mu_2\mu_4(\mu_2+\mu_4)(\mu_2+\mu_4-2\mu_1-2\mu_3)$$

so erkennt man, dass dasselbe nur negativ werden kann, wenn $\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_4) > \mu_1+\mu_3$ ist. Bilden wir nun aber die der Gleichung (A) entsprechende Gleichung in b , so wird deren absolutes Glied (abgesehen vom Factor $\frac{\mu_2}{\mu_1\mu_3\mu_4}$) sein

$$\mu_2\mu_4(\mu_1-\mu_3)^2 - \mu_1\mu_3(\mu_1+\mu_3)(\mu_1+\mu_3-2\mu_2-2\mu_4)$$

und es ist klar, dass dieser Ausdruck unter obiger Bedingung nur positiv sein kann, daher auch die Wurzel in b und folglich auch die in a , da zufolge der Gleichung (B) in a und b gleiche Vorzeichen vorkommen müssen. Demnach gilt auch in c und d das positive Wurzelzeichen.

Um J durch die μ ausdrücken, setzen wir zunächst

$$\{b\}\{d\} = (a+c)^2 - (b-d)^2 = \frac{a^2\mu_2^2(\mu_1+\mu_3)^2 - b^2\mu_1^2(\mu_2-\mu_4)^2}{\mu_1^2\mu_2^2}$$

$$= \frac{2(\mu_1\mu_2)(\mu_1\mu_4)}{\mu_1^2\mu_2\mu_3^2\mu_4} M$$

wo

$$M = \mu_2 \mu_4 (\mu_1^2 + \mu_3^2) + \mu_1 \mu_3 (\mu_1 + \mu_2) (\mu_2 + \mu_4) + (\mu_1 + \mu_3) \cdot W$$

analog

$$\{a\} \{c\} \equiv \frac{2(\mu_1 \mu_2)(\mu_1 \mu_4)}{\mu_1 \mu_2^2 \mu_3 \mu_4^2} \cdot N$$

wo

$$N = \mu_1 \mu_3 (\mu_2^2 + \mu_4^2) + \mu_2 \mu_4 (\mu_1 + \mu_3) (\mu_2 + \mu_4) + (\mu_2 + \mu_4) \cdot W$$

also

$$J = \frac{(\mu_1 \mu_2)(\mu_1 \mu_4)}{2\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \sqrt{\frac{M \cdot N}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}}$$

b. Diejenigen den Dreiecken ANB , BNC , CND , DNA angeschriebenen Kreise, welche a , b , c , d von aussen berühren, bilden auf den (verlängerten) Diagonalen Abschnitte, welche, von N aus gerechnet, die Werte haben

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{a}{2h} (b + d + h), & \mu_2' &= \frac{b}{2h} (a + c + h), & \mu_3' &= \frac{c}{2h} (b + d + h), \\ & & \mu_4' &= \frac{d}{2h} (a + c + d) \end{aligned}$$

ganz entsprechend dem Verfahren unter a. ergibt sich

$$b = \mu_2' \cdot \frac{a(\mu_1' + \mu_3') - 2\mu_1'(\mu_1' + \mu_3' - \mu_2' - \mu_4')}{\mu_1'(\mu_2' + \mu_4')},$$

$$h = \frac{ab \left(1 + \frac{\mu_4'}{\mu_2'}\right)}{2\mu_1' - a},$$

$$(2\mu_1' - a)^2 =$$

$$\frac{a^2 \mu_1' \mu_3' (\mu_2' + \mu_4')^2 + \mu_2' \mu_4' [a(\mu_1' + \mu_3') - 2\mu_1'(\mu_1' + \mu_3' - \mu_2' - \mu_4')]^2}{(\mu_1' \mu_2')(\mu_1' \mu_4')}$$

da sich die hieraus hervorgehende quadratische Gleichung von der Gleichung (A) unter a. offenbar nur im Vorzeichen von a unterscheidet, so folgt

$$a = \frac{(\mu_2' + \mu_4') W - \mu_1' \mu_3' (\mu_2' - \mu_4')^2 - \mu_2' \mu_4' (\mu_1' + \mu_3') (\mu_2' + \mu_4')}{2\mu_2' \mu_3' \mu_4'} \text{ u. s. w.}$$

$$J = \frac{(\mu_1' \mu_2') (\mu_1' \mu_4')}{2\mu_1' \mu_2' \mu_3' \mu_4'} \sqrt{\frac{M' \cdot N'}{\mu_1' \mu_2' \mu_3' \mu_4'}}$$

wo

$$M' = \mu_2' \mu_4' (\mu_1'^2 + \mu_3'^2) + \mu_1' \mu_3' (\mu_1' + \mu_2') (\mu_2' + \mu_4') - (\mu_1' + \mu_3') W,$$

$$N' = \mu_1' \mu_3' (\mu_2'^2 + \mu_4'^2) + \mu_2' \mu_4' (\mu_1' + \mu_3') (\mu_2' + \mu_4') - (\mu_2' + \mu_4') W$$

und W dieselbe Function wie oben ist.

15) a. Die den Dreiecken ABC , BCD , CDA , DAB eingeschriebenen Kreise bilden an B , C , D , A Abschnitte auf den Seiten, welche die Werte haben

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a+b-f), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(b+c-g), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(c+d-f), \\ \lambda_4 = \frac{1}{2}(a+d-g)$$

also

$$\lambda_1 - \lambda_3 = \frac{1}{2}(a+b-c-d), \quad \lambda_2 - \lambda_4 = \frac{1}{2}(b+c-a+d), \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = b-d \quad (1), \quad \lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3 = a-c \quad (2)$$

ferner

$$\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_4 = g-f = \frac{(a-c)(b-d)}{h}$$

setzt man in die letzte Gleichung die Werte von c und d aus (1) und (2) ein, so folgt

$$h = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_4}$$

ferner ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = a+b+c+d - (f+g) = a+b+c+d - \frac{(a+c)(b+d)}{h} \quad (3)$$

setzt man hier die Werte von c und d aus (1) und (2) und den Wert von h ein, so erhält man

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)[\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3) - a(\lambda_1 - \lambda_2)] \\ = b(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3) - ab(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_4) \quad (I)$$

Nun ist aber

$$4\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_4 = (a+b)(c+d) + f^2 - f(a+b+c+d) \\ + (a+d)(b+c) + g^2 - g(a+b+c+d) \\ = (a+c)(b+d) + (f+g)^2 - (f+g)(a+b+c+d)$$

oder nach Einsetzung des Wertes von $f+g$ aus (3)

$$4\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_4 = (a+c)(b+d) - (a+b+c+d)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2$$

setzt man hier wiederum die Werte von c und d aus (1) und (2) ein, so kommt

$$ab - a(\lambda_1 + \lambda_2) - b(\lambda_1 + \lambda_4) + \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_3) = 0 \quad (II)$$

Durch Elimination von ab aus (I) und (II) folgt

$$a+b = \frac{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_3) - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4} \quad (III)$$

und durch Elimination von b aus (I) und (III) schliesslich

$$a^2 - a = \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4) - \lambda_2 \lambda_4 (2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4)}{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4} = \frac{\lambda_1 \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) (\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4}$$

woraus

$$a = \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4) - \lambda_2 \lambda_4 (2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4) \pm W}{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4)}$$

analog

$$b = \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_2 \lambda_4 (2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) \mp W}{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4)}$$

$$c = \frac{\lambda_1 \lambda_3 (2\lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_3) - \lambda_2 \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_4 + 2\lambda_3) \pm W}{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4)}$$

$$d = \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_1 + 2\lambda_4) - \lambda_2 \lambda_4 (2\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_2) \mp W}{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \lambda_4)}$$

wo

$$W^2 = \lambda_1^2 \lambda_3^2 (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2 \lambda_4^2 (\lambda_2 - \lambda_4)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_1 \lambda_3) - 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4)$$

Die Formel für J wird nicht elegant.

b. Diejenigen den Dreiecken ABC , BCD , CDA , DAB angeschriebenen Kreise, welche AC und BD von aussen berühren, bilden an B , C , D , A Abschnitte, welche die Werte haben

$$\lambda_1' = \frac{1}{2}(a + b + f), \quad \lambda_2' = \frac{1}{2}(b + c + g), \quad \lambda_3' = \frac{1}{2}(c + d + f), \\ \lambda_4' = \frac{1}{2}(a + d + g)$$

Für die λ' gelangt man auf demselben Wege wie unter a. zu denselben Formeln für a , b , c , d .

16) a. Die vier dem Sehnenviereck angeschriebenen Kreise, welche a , b , c , d von aussen berühren, haben folgende Radien:

$$r_1 = \frac{2aJ}{(a+c)\{a\}}, \quad r_2 = \frac{2bJ}{(b+d)\{b\}}, \quad r_3 = \frac{2cJ}{(a+c)\{c\}}, \quad r_4 = \frac{2dJ}{(b+d)\{d\}}$$

Um a , b , c , d und J durch die r darzustellen, drücken wir zunächst die m (Nr. 13) a.) durch die r aus.

Unmittelbar ergibt sich

$$\frac{r_3 r_4}{r_1 r_2} = \frac{m_1 m_4}{m_2 m_3} \cdot \frac{c^2}{a^2}$$

aus Nr. 13) a. aber folgt durch Rationalmachen des Nenners

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= \frac{m_4 + 2m_3 - m_2 + \sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3}}{m_2 + 2m_1 - m_4 + \sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3}} \\ &= \frac{(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)(m_4 - m_2 + \sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3})}{2m_1(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)} \\ &= \frac{m_4 - m_2 + \sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3}}{2m_1} \end{aligned}$$

also

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{(m_4 - m_2)^2 + 2m_1m_3 + (m_4 - m_2)\sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3}}{2m_1^2}$$

und

$$\frac{r_3r_4}{r_1r_2} = \frac{m_4[(m_4 - m_2)^2 + 2m_1m_3 + (m_4 - m_2)\sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3}]}{2m_1m_2m_3}$$

oder, wenn man im Nenner rechts für m_1m_3 das gleiche Product r_1r_3 setzt und dann die ganze Gleichung mit der Identität $r_1r_2r_3r_4 = r_1r_3 \cdot m_2m_4$ multiplicirt,

$$r_3^2r_4^2 = \frac{1}{2}m_4^2[(m_4 - m_2)^2 + 2m_1m_3 + (m_4 - m_2)\sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3}]$$

woraus

$$r_3r_4 = \frac{1}{2}m_4(m_4 - m_2 + \sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1m_3})$$

oder, mit Beachtung der Identitäten $m_1m_3 = r_1r_3$, $m_2m_4 = r_2r_4$,

$$2r_3r_4 - m_4^2 + r_2r_4 = m_4\sqrt{m_4^2 - 2r_2r_4 + m_2^2 + 4r_1r_3}$$

folgt; quadriert man, setzt wiederum $m_2m_4 = r_2r_4$ und hebt, so bleibt

$$r_4^2(r_2 + r_3) = m_4^2(r_1 + r_4)$$

demnach

$$m_4 = r_4 \sqrt{\frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_4}} \quad \text{analog} \quad m_2 = r_1 \sqrt{\frac{r_3 + r_4}{r_1 + r_2}}$$

$$m_3 = r_2 \sqrt{\frac{r_1 + r_4}{r_2 + r_3}}, \quad m_3 = r_3 \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_3 + r_4}}$$

Nun wird

$$m_4 - m_2 = \frac{r_3r_4 - r_1r_2}{\sqrt{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3)}}, \quad m_2 + m_4 = \frac{r_1r_2 + r_3r_4 + 2r_2r_4}{\sqrt{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3)}}$$

$$m_1 - m_3 = \frac{r_1r_4 - r_2r_3}{\sqrt{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}}, \quad m_1 + m_3 = \frac{r_1r_4 + r_2r_3 + 2r_1r_3}{\sqrt{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}}$$

$$\sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2m_4} = \frac{r_1r_4 + r_2r_3 + 2r_2r_4}{\sqrt{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}}$$

$$\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_3} = \frac{r_1 r_2 + r_3 r_4 + 2r_1 r_3}{\sqrt{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3)}}$$

also erhält man aus den Formeln unter Nr. 13) a.

$$a = r_1 \left(\sqrt{\frac{r_2 + r_3}{r_3 + r_4}} + \sqrt{\frac{r_3 + r_4}{r_1 + r_2}} \right), \quad b = r_2 \left(\sqrt{\frac{r_3 + r_4}{r_1 + r_2}} + \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_2 + r_3}} \right).$$

$$c = r_3 \left(\sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_2 + r_3}} + \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_3 + r_4}} \right), \quad d = r_4 \left(\sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_3 + r_4}} + \sqrt{\frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_2}} \right)$$

$$J = \sqrt{\left(\frac{A}{N} + 2r_1 r_3 \right) \left(\frac{B}{N} + 2r_2 r_4 \right)}$$

wo

$$A = r_2 r_3^2 r_4 + r_1^2 r_2 r_4 + r_1^2 r_2 r_3 + r_1 r_3^2 r_4 + r_1^2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3^2 + 2r_1^2 r_3^2,$$

$$B = r_1 r_2^2 r_3 + r_1 r_3 r_4^2 + r_1 r_2 r_4^2 + r_2^2 r_3 r_4 + r_1 r_2^2 r_4 + r_2 r_3 r_4^2 + 2r_2^2 r_4^2,$$

$$N = \sqrt{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_4)(r_4 + r_1)}$$

bringt man in dem Ausdruck für J die Grössen unter der Wurzel auf gleichen Nenner, multiplicirt aus und vereinigt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} J^2 \cdot N^2 &= r_1^3 r_2^3 r_3^2 + 2r_1^3 r_2^3 r_3 r_4 + r_1^3 r_2^3 r_4^2 + 2r_1^3 r_2^2 r_3^3 + 7r_1^3 r_2^2 r_3^2 r_4 \\ &+ 6r_1^3 r_2^2 r_3 r_4^2 + r_1^3 r_2^2 r_4^3 + 4r_1^3 r_2 r_3^3 r_4 + 7r_1^3 r_2 r_3^2 r_4^2 + 2r_1^3 r_2 r_3 r_4^3 \\ &+ 2r_1^3 r_3^3 r_4^2 + r_1^3 r_3^2 r_4^3 + r_1^2 r_2^3 r_3^3 + 6r_1^2 r_2^3 r_3^2 r_4 + 7r_1^2 r_2^3 r_3 r_4^2 + 2r_1^2 r_2^3 r_4 \\ &+ 7r_1^2 r_2^2 r_3^3 r_4 + 16r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2 + 7r_1^2 r_2^2 r_3 r_4^3 + 7r_1^2 r_2 r_3^3 r_4^2 + 6r_1^2 r_2 r_3^2 r_4^3 \\ &+ r_1^2 r_3^3 r_4^3 + 2r_1 r_2^3 r_3^3 r_4 + 7r_1 r_2^3 r_3^2 r_4^2 + 4r_1 r_2^2 r_3 r_4^3 + 6r_1 r_2^2 r_3^3 r_4^2 \\ &+ 7r_1 r_2^2 r_3^2 r_4^3 + 2r_1 r_2 r_3^3 r_4^3 + r_2^3 r_3^3 r_4^2 + 2r_2^3 r_2^2 r_4^3 + r_2^2 r_3^3 r_4^3 \\ &+ 2(r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 r_1 + r_4 r_1 r_2)^2 \cdot N \\ &= (r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 r_1 + r_4 r_1 r_2)^2 (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_4 + r_4 r_1 + 2r_1 r_3 + 2r_2 r_4) \\ &+ 2(r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 r_1 + r_4 r_1 r_2)^2 \cdot N \\ &= (r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 r_1 + r_4 r_1 r_2)^2 (\sqrt{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3)} + \sqrt{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)})^2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} J &= (r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_3 r_4 r_1 + r_4 r_1 r_2) \cdot \frac{\sqrt{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3)} + \sqrt{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}}{N} \\ &= r_1 r_2 r_3 r_4 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(r_1 + r_4)(r_2 + r_3)}} \right) \end{aligned}$$

Ferner wird mit Hilfe der zuletzt gefundenen Formeln für a, b, c, d durch einfaches Ausmultipliciren

$$\begin{aligned}
 ac+bd &= 2r_1r_3+2r_2r_4+\frac{1}{N}(2r_1^2r_3^2+r_1^2r_3r_4+r_1r_3^2r_4+r_1r_3r_4^2+r_1^2r_2r_3 \\
 &\quad +r_1r_2^2r_3+r_1r_2r_3^2+r_2^2r_3r_4+2r_2^2r_4^2+r_2r_3^2r_4+r_2r_3r_4^2 \\
 &\quad +r_1^2r_2r_4+r_1r_2^2r_4+r_1r_2r_4^2) \\
 &= 2r_1r_3+2r_2r_4+\frac{1}{N}(N^2+[r_1r_3+r_2r_4]^2-4r_1r_2r_3r_4) \\
 &= \frac{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}{N};
 \end{aligned}$$

$$ab+cd = \frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)J}{\sqrt{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}}, \quad ad+bc = \frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)J}{\sqrt{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}}$$

folglich

$$f^2 = \frac{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}{(r_1+r_4)(r_2+r_3)}$$

$$g^2 = \frac{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}, \quad h^2 = \frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)^2J^2}{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}$$

$$R = \frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)\sqrt{(r_1r_3+r_2r_4+N)^2-4r_1r_2r_3r_4}}{4N}$$

b. Dem Sehnenviereck können vier Kreise eingeschrieben werden, so dass jeder von ihnen drei Seiten von innen berührt. Die Werte ihrer Radien sind

$$e_1 = \frac{2aJ}{(a+c)\{c\}}, \quad e_2 = \frac{2bJ}{(b+d)\{d\}}, \quad e_3 = \frac{2cJ}{(a+c)\{a\}}, \quad e_4 = \frac{2dJ}{(b+d)\{b\}}$$

In ganz derselben Weise wie unter a. gewinnt man

$$\begin{aligned}
 m_1 &= e_1 \sqrt{\frac{e_3-e_2}{e_1-e_4}}, & m_2 &= e_2 \sqrt{\frac{e_3-e_4}{e_1-e_2}}, & m_3 &= e_3 \sqrt{\frac{e_1-e_4}{e_3-e_2}}, \\
 m_4 &= e_4 \sqrt{\frac{e_1-e_2}{e_3-e_4}}
 \end{aligned}$$

Es ist hier nötig drei Fälle zu unterscheiden.

α) Es sei $e_1 > e_2$; dann muss, damit m_2 und m_4 reell werden, auch $e_3 > e_4$ sein; zugleich muss aber auch $e_3 > e_2$, $e_1 > e_4$ sein, denn wäre $e_2 > e_3$, so würde zufolge der drei gegebenen Bedingungen $e_1 > e_4$, somit m_1 und m_3 imaginär werden. Wir haben dem entsprechend zu schreiben

$$m_4 - m_2 = \frac{e_1e_4 - e_2e_3}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_4)}}, \quad m_2 + m_4 = \frac{e_1e_4 + e_2e_3 - 2e_2e_4}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_4)'}}$$

$$m_1 - m_3 = \frac{e_3 e_4 - e_1 e_2}{\sqrt{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)}}, \quad m_1 + m_3 = \frac{2e_1 e_3 - e_1 e_2 - e_3 e_4}{\sqrt{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)}},$$

$$\sqrt{(m_4 - m_2)^2 + 4m_1 m_3} = \frac{2e_1 e_3 - e_1 e_4 - e_2 e_3}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}},$$

$$\sqrt{(m_1 - m_3)^2 + 4m_2 m_4} = \frac{e_3 e_4 + e_1 e_2 - 2e_2 e_4}{\sqrt{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)}}$$

Der Zähler des vorletzten Ausdrucks ist positiv, weil er null wird, sobald man für e_4 das grössere e_3 und für e_2 das grössere e_1 einsetzt; der Zähler des letzten Ausdruckes ist positiv, weil er null wird, sobald man für e_3 das kleinere e_2 und für e_1 das kleinere e_4 einsetzt. Wir erhalten so

$$a = e_1 \left(\sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_4}} + \sqrt{\frac{e_3 - e_4}{e_1 - e_2}} \right), \quad b = e_2 \left(\sqrt{\frac{e_3 - e_4}{e_1 - e_2}} + \sqrt{\frac{e_1 - e_4}{e_3 - e_2}} \right)$$

$$c = e_3 \left(\sqrt{\frac{e_1 - e_4}{e_3 - e_2}} + \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_3 - e_4}} \right), \quad d = e_4 \left(\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_3 - e_4}} + \sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_4}} \right)$$

Die Formeln für den Inhalt und für R müssen, wie leicht festzustellen, lauten

$$J = e_1 e_2 e_3 e_4 \left(\frac{1}{e_4} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}} + \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)}} \right),$$

$$R = \frac{(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \sqrt{(e_1 e_2 + e_2 e_4 + N')^2 - 4e_1 e_2 e_3 e_4}}{4N'}$$

wo

$$N' = \sqrt{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)(e_3 - e_4)(e_1 - e_4)}$$

β) Es sei $e_1 < e_2$ und demgemäss $e_3 < e_4$, $e_2 > e_3$, $e_4 > e_1$; dann kehren sich offenbar alle unter α) entstandenen Differenzen um.

γ) Ist $e_1 = e_2$, so muss, damit m_2 endlich bleibt, auch $e_3 = e_4$ sein; dann muss aber auch $e_2 = e_3$ und $e_1 = e_4$ sein, damit m_1 und m_3 reell werden; das Sehnenviereck ist alsdann ein Quadrat.

Man beachte noch die Relationen:

$$r_1 r_3 = \frac{ac \{b\} \{d\}}{4(a+c)^2} = e_1 e_3 \quad r_2 r_4 = \frac{bd \{a\} \{c\}}{4(b+d)^2} = e_2 e_4,$$

$$r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{abcd \cdot J^2}{(a+c)^2 (b+d)^2} = e_1 e_2 e_3 e_4$$

$$\varrho_1 = r_3 \cdot \frac{a}{c} = r_1 \sqrt{\frac{(r_2 + r_3)(r_3 + r_4)}{(r_1 + r_2)(r_1 + r_4)}} \quad \text{u. s. w.}$$

$$r_1 = \varrho_1 \sqrt{\frac{(\varrho_3 - \varrho_4)(\varrho_3 - \varrho_2)}{(\varrho_1 - \varrho_4)(\varrho_1 - \varrho_2)}} \quad \text{u. s. w.}$$

17) a. Die Radien der den Dreiecken ANB , BNC , CND , DNA eingeschriebenen Kreise sind

$$\pi_1 = \frac{2abd h J}{(ab)(ad)(b+d+h)}, \quad \pi_2 = \frac{2abch J}{(ab)(ad)(a+c+h)},$$

$$\pi_3 = \frac{2bed h J}{(ab)(ad)(b+d+h)}, \quad \pi_4 = \frac{2acd h J}{(ab)(ad)(a+c+h)}$$

Um a , b , c , d und J durch die π darzustellen, drücken wir vorerst die μ (Nr. 14) a.) durch die π aus.

Beachtet man, dass

$$(b+d)^2 - h^2 = \frac{bd\{a\}\{c\}}{(ac)} \quad \text{und} \quad (a+c)^2 - h^2 = \frac{ac\{b\}\{d\}}{(ac)}$$

ist, so erkennt man leicht, dass

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \pi_1 \cdot \pi_2, \quad \mu_1 : \mu_3 = \pi_1 : \pi_3, \quad \mu_2 : \mu_4 = \pi_2 : \pi_4$$

ist, also

$$\mu_2 = \frac{\pi_1 \pi_2}{\mu_1}, \quad \mu_3 = \mu_1 \cdot \frac{\pi_3}{\pi_1}, \quad \mu_4 = \mu_2 \cdot \frac{\pi_4}{\pi_2} = \frac{\pi_4 \pi_1}{\mu_1}$$

da ferner

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \cdot \frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}},$$

so wird durch Multiplication dieser Gleichung mit $\mu_1 \mu_2 = \pi_1 \pi_2$

$$\mu_1^2 = \pi_1^2 \cdot \frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}} \quad (1)$$

Nun ergibt sich aus Nr. 14) a.

$$\{a\}\{c\} \cdot \mu_1 \mu_2^2 \mu_3 \mu_4^2 = 2(\mu_1 \mu_2)(\mu_1 \mu_4) [\mu_1 \mu_3 (\mu_2^2 + \mu_4^2) + \mu_2 \mu_4 (\mu_1 + \mu_3)(\mu_2 + \mu_4) + (\mu_2 + \mu_4) W],$$

$$\{b\}\{d\} \cdot \mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \mu_4 = 2(\mu_1 \mu_2)(\mu_1 \mu_4) [\mu_2 \mu_4 (\mu_1^2 + \mu_3^2) + \mu_1 \mu_3 (\mu_1 + \mu_3)(\mu_2 + \mu_4) + (\mu_1 + \mu_3) W]$$

dividirt man die erste Gleichung durch die zweite und führt die eben gefundenen Werte für μ_2 , μ_3 , μ_4 ein, so entsteht

$$\frac{\{a\}\{c\}\pi_1^2\pi_2\pi_4}{\{b\}\{d\}\mu_1^4\cdot\frac{\pi_3}{\pi_1}} = \frac{\pi_1\pi_3(\pi_2^2+\pi_4^2)+\frac{\pi_1^2\pi_2\pi_4}{\mu_1^2}(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+\frac{\pi_1}{\mu_1^2}(\pi_2+\pi_4)\cdot W'}{\pi_2\pi_4(\pi_1^2+\pi_3^2)+\mu_1^2\frac{\pi_2}{\pi_1}(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+\frac{1}{\pi_1}(\pi_1+\pi_3)\cdot W'}$$

wo

$$W'^2 = \mu_1^4\pi_3^2(\pi_2-\pi_4)^2 + 2\mu_1^2\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4) + \pi_1^2\pi_2^2\pi_4^2(\pi_1-\pi_3)^2$$

setzt man den letzten Wert von $\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}$ in (I) ein, so folgt

$$1 = \frac{\pi_1\pi_3\cdot\frac{\pi_3(\pi_2^2+\pi_4^2)\mu_1^2+\pi_1\pi_2\pi_4(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)+(\pi_2+\pi_4)\cdot W'}{\pi_2\pi_4\pi_3(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)\mu_1^2+\pi_1\pi_2\pi_4(\pi_1^2+\pi_3^2)+(\pi_1+\pi_3)W'}}{\pi_2\pi_4\pi_3(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)\mu_1^2+\pi_1\pi_2\pi_4(\pi_1^2+\pi_3^2)+(\pi_1+\pi_3)W'}$$

woraus

$$\begin{aligned} \mu_1^4[\pi_1^2\pi_3^2 - M(\pi_1+\pi_3)] - \mu_1^2\pi_1^2[2\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 + M(\pi_1+\pi_3-\pi_2-\pi_4)] \\ = -\pi_1^4[\pi_2^2\pi_4^2 + M(\pi_2+\pi_4)] \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \pi_1^2 \cdot \frac{2\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 + M(\pi_1+\pi_3-\pi_2-\pi_4) \pm W}{2[\pi_1^2\pi_3^2 - M(\pi_1+\pi_3)]} \\ &= \pi_1^2 \cdot \frac{\pi_2^2 + \pi_4^2 + (\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4) \mp (\pi_2+\pi_4)\cdot W}{\pi_1^2 + \pi_3^2 + (\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4) \mp (\pi_1+\pi_3)\cdot W} = \pi_1^2 \cdot \frac{A}{B} \end{aligned}$$

wo

$$M = \pi_1\pi_3(\pi_2+\pi_4) - \pi_2\pi_4(\pi_1+\pi_3),$$

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{(\pi_1-\pi_3)^2 + 2(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4) + (\pi_2-\pi_4)^2} \\ &= \sqrt{(\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4)^2 - 4(\pi_1\pi_3)} \end{aligned}$$

und A und B auch für das negative Zeichen von W stets positive Grössen sind; denn es wird alsdann

$$A+B = \pi_1^2 + \pi_3^2 + \pi_2^2 + \pi_4^2 + 2(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4) - (\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4)W$$

was stets positiv ist, weil

$$\begin{aligned} [\pi_1^2 + \pi_3^2 + \pi_2^2 + \pi_4^2 + 2(\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4)]^2 \\ = (\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4)^2 W^2 + 4(\pi_1\pi_3 + \pi_2\pi_4)^2 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Die Gleichung (II) kann offenbar nicht dazu dienen, das Vorzeichen von W zu bestimmen. Wir sind jetzt aber im Stande das Verhältniss $\frac{a}{b}$ auf doppelte Weise durch die π auszudrücken und durch Gleichsetzung beider Werte das Vorzeichen von W zu finden.

Es ist

$$\mu_1^2 = \pi_1^2 \cdot \frac{A}{B}$$

und nach (I)

$$\mu_1^2 = \pi_1^2 \cdot \frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}$$

folglich

$$\frac{A}{B} = \frac{(b+d)^2 - (a-c)^2}{(a+c)^2 - (b-d)^2}$$

berücksichtigt man nun, dass

$$c = a \frac{\pi_3}{\pi_1} \quad \text{und} \quad d = b \frac{\pi_4}{\pi_2}$$

was sich aus den Gleichungen für die π ohne weiteres ergibt, so wird

$$\frac{A}{B} = \frac{\pi_1^2(\pi_2 + \pi_4)^2 - \frac{a^2}{b^2} \pi_2^2(\pi_1 - \pi_3)^2}{\frac{a^2}{b^2} (\pi_1 + \pi_3)^2 \pi_2^2 - \pi_1^2(\pi_2 - \pi_4)^2}$$

woraus

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \sqrt{\frac{A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2}{A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2}}$$

Setzt man andererseits

$$c = a \frac{\pi_3}{\pi_1} \quad \text{und} \quad d = b \frac{\pi_4}{\pi_2}$$

ein in h , so folgt

$$h = a \sqrt{\frac{(\pi_1 \pi_2)(\pi_1 \pi_4)}{\pi_1 \pi_2 \left(\frac{a^2}{b^2} \pi_2 \pi_3 + \pi_1 \pi_4 \right)}}$$

oder mit Benutzung des eben gefundenen Wertes von $\frac{a}{b}$

$$h = \frac{a}{\pi_1} \sqrt{\frac{A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2}{A + B}}$$

Nun folgt aus

$$\pi_1 = \frac{2abdJ}{(ab)(ad)(b+d+h)} = \frac{a(b+d-h)}{2h} \sqrt{\frac{\{b\}\{d\}}{\{a\}\{c\}}}$$

weiter:

$$a = \frac{2\pi_1}{\frac{b+d}{h} - 1} \sqrt{\frac{\{a\}\{c\}}{\{b\}\{d\}}} = \frac{2\pi_1}{\frac{b}{h} \left(1 + \frac{\pi_4}{\pi_2} \right) - 1} \sqrt{\frac{A}{B}}$$

setzt man jetzt den zuletzt gefundenen Wert für h , alsdann wiederum den Wert von $\frac{a}{b}$ ein, so ergibt sich

$$a = 2\pi_1 \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{1}{(\pi_2 + \pi_4) \sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2}} - 1}$$

analog

$$b = 2\pi_2 \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{1}{(\pi_1 + \pi_3) \sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2}} - 1}$$

also

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{(\pi_1 + \pi_3) \sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2}} - 1}{(\pi_2 + \pi_4) \sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2}} - 1}$$

setzt man diesen Wert für $\frac{a}{b}$ gleich dem obigen, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{(\pi_2 + \pi_4) \sqrt{A+B} - \sqrt{A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2}}{(\pi_1 + \pi_3) \sqrt{A+B} - \sqrt{A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2}} \\ &= \frac{\pi_2 \pi_4 A [(\pi_1 + \pi_3) \sqrt{A+B} + \sqrt{A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2}]}{\pi_1 \pi_3 B [(\pi_2 + \pi_4) \sqrt{A+B} + \sqrt{A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2}]} \end{aligned}$$

folglich

$$\pi_1 \pi_3 (\pi_2 + \pi_4) \sqrt{A+B} + \pi_1 \pi_3 \sqrt{A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2} = \pi_2 \pi_4 (\pi_1 + \pi_3) \sqrt{A+B} + \pi_2 \pi_4 \sqrt{A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2}$$

oder

$$\begin{aligned} M \sqrt{2(A+B)} &= \pi_2 \pi_4 \sqrt{2[A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2]} \\ &\quad - \pi_1 \pi_3 \sqrt{2[A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2]} \quad (\text{III}). \end{aligned}$$

Nun ist zunächst

$$\sqrt{2(A+B)} = +(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \pm W)$$

denn wie man sich leicht überzeugen kann, ist stets $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 > W$; die Gleichung (III) kann aber im besondern nur dann bestehen, wenn

$$\alpha) \sqrt{2(A+B)} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 - W$$

$$\beta) \sqrt{2[A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2]} = \\ (\pi_1 + \pi_3)W - (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_1 - \pi_3)^2$$

$$\gamma) \sqrt{2[A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2]} = \\ (\pi_2 + \pi_4)W - (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_2 - \pi_4)^2$$

gesetzt wird; die Gleichung (III) verwandelt sich alsdann nämlich in die Identität

$$M(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 - W) = \pi_2 \pi_3 (\pi_1 + \pi_3) W - \pi_2 \pi_4 (\pi_1 - \pi_3)^2 \\ - \pi_2 \pi_4 (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - \pi_1 \pi_3 (\pi_2 + \pi_4) W + \pi_1 \pi_3 (\pi_2 - \pi_4)^2 \\ + \pi_1 \pi_3 (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) \\ = \pi_2 \pi_4 (\pi_1 + \pi_3) W - \pi_2 \pi_4 (\pi_1 + \pi_3)^2 - \pi_2 \pi_4 (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) \\ - \pi_1 \pi_3 (\pi_2 + \pi_4) W + \pi_1 \pi_3 (\pi_2 + \pi_4)^2 + \pi_1 \pi_3 (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) \\ = M(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 - W)$$

Die Grösse W muss demnach das negative Vorzeichen erhalten und wir bekommen

$$\mu_1 = \pi_1 \sqrt{\frac{\pi_2^2 + \pi_4^2 + (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_2 + \pi_4)W}{\pi_1^2 + \pi_3^2 + (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_1 + \pi_3)W}}$$

$$\mu_2 = \frac{\pi_1 \pi_2}{\mu_1} \quad \text{u. s. w.}$$

$$a = 2\pi_1 \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{1}{\frac{(\pi_2 + \pi_4)(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 - W)}{(\pi_2 + \pi_4)W - (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_2 - \pi_4)^2} - 1} \\ = \pi_1 \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{(\pi_2 + \pi_4)W - (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_2 - \pi_4)^2}{\pi_2^2 + \pi_4^2 + (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_2 + \pi_4)W} \\ = \pi_1 \frac{(\pi_2 + \pi_4)W - (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_2 - \pi_4)^2}{\sqrt{A \cdot B}}$$

$$c = a \frac{\pi_3}{\pi_1};$$

$$b = \pi_2 \frac{(\pi_1 + \pi_3)W - (\pi_1 + \pi_3)(\pi_2 + \pi_4) - (\pi_1 - \pi_3)^2}{\sqrt{A \cdot B}},$$

$$d = b \frac{\pi_4}{\pi_1}$$

Um J zu finden, berechnen wir

$$\{b\}\{d\} = (a+c)^2 - (b-d)^2 = \frac{a^2}{\pi_1^2} (\pi_1 + \pi_3)^2 - \frac{b^2}{\pi_2^2} (\pi_2 - \pi_4)^2$$

indem wir einsetzen:

$$a^2 = \frac{2\pi_1^2 [A(\pi_2 - \pi_4)^2 + B(\pi_2 + \pi_4)^2]}{A \cdot B},$$

$$b^2 = \frac{2\pi_2^2 [A(\pi_1 + \pi_3)^2 + B(\pi_1 - \pi_3)^2]}{A \cdot B},$$

$$\{b\} \{a\} = \frac{8(\pi_1 \pi_2)(\pi_1 \pi_4)}{A}$$

analog

$$\{a\} \{c\} = \frac{8(\pi_1 \pi_2)(\pi_1 \pi_4)}{B}$$

also

$$J = \frac{2(\pi_1 \pi_2)(\pi_1 \pi_4)}{\sqrt{A \cdot B}}$$

b. Die Radien derjenigen den Dreiecken ANB , BNC , CND , DNA angeschriebenen Kreise, welche a , b , c , d von aussen berühren, sind

$$\pi_1' = \frac{2abdJ}{(ab)(ad)(b+d-h)}, \quad \pi_2' = \frac{2abchJ}{(ab)(ad)(a+c-h)},$$

$$\pi_3' = \frac{2bcdhJ}{(ab)(ad)(a+d-h)}, \quad \pi_4' = \frac{2acdJ}{(ab)(ad)(a+c-h)}$$

Indem wir analog verfahren wie unter a., setzen wir die π' zu den μ' (Nr. 14. b)) in Beziehung und gelangen auf dieselbe Weise wie dort zu der Gleichung

$$1 = \frac{\pi_1' \pi_3' \pi_3' (\pi_2'^2 + \pi_4'^2) \mu_1'^2 + \pi_1' \pi_2' \pi_4' (\pi_1' + \pi_3') (\pi_2' + \pi_4') - (\pi_2' + \pi_4') W'}{\pi_2' \pi_4' \pi_3' (\pi_1' + \pi_3') (\pi_2' + \pi_4') \mu_1'^2 + \pi_1' \pi_2' \pi_4' (\pi_1'^2 + \pi_3'^2) - (\pi_1' + \pi_3') W'}$$

woraus

$$\mu_1'^2 = \pi_1'^2 \cdot \frac{\pi_2'^2 + \pi_4'^2 + (\pi_1' + \pi_3') (\pi_2' + \pi_4') \pm (\pi_2' + \pi_4') W'}{\pi_1'^2 + \pi_3'^2 + (\pi_1' + \pi_3') (\pi_2' + \pi_4') \pm (\pi_1' + \pi_3') W'} = \pi_1'^2 \cdot \frac{A}{B}$$

wo W' und W dieselben Functionen wie unter a. bedeuten. Ferner wird einerseits

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi_1'}{\pi_2'} \sqrt{\frac{A(\pi_2' - \pi_4')^2 + B(\pi_2' + \pi_4')^2}{A(\pi_1' + \pi_3')^2 + B(\pi_1' - \pi_3')^2}},$$

andererseits

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi_1'}{\pi_2'} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{(\pi_1' + \pi_3') \sqrt{\frac{A+B}{A(\pi_1' + \pi_3')^2 + B(\pi_1' - \pi_3')^2} + 1}}{(\pi_2' + \pi_4') \sqrt{\frac{A+B}{(A(\pi_2' - \pi_4')^2 + B(\pi_2' + \pi_4')^2) + 1}}}$$

die Gleichsetzung beider Werte ergibt diesmal

$$M\sqrt{2(A+B)} = \pi_1'\pi_3'\sqrt{2[A(\pi_2'-\pi_4')^2+B(\pi_2'+\pi_4')^2]} \\ - \pi_2'\pi_4'\sqrt{2[A(\pi_1'+\pi_3')^2+B(\pi_1'-\pi_3')^2]}$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn W positiv genommen wird. Man erhält demnach

$$a = \pi_1' \cdot \frac{(\pi_2'-\pi_4')^2 + (\pi_1'+\pi_3')(\pi_2'+\pi_4') + (\pi_2'+\pi_4') \cdot W}{\sqrt{A \cdot B}} \quad \text{u. s. w.}$$

$$J = \frac{2(\pi_1'\pi_2')(\pi_1'\pi_4')}{\sqrt{A \cdot B}}$$

wo

$$A = \pi_2'^2 + \pi_4'^2 + (\pi_1' + \pi_3')(\pi_2' + \pi_4') + (\pi_2' + \pi_4')W, \\ B = \pi_1'^2 + \pi_3'^2 + (\pi_1' + \pi_3')(\pi_2' + \pi_4') + (\pi_1' + \pi_3')W$$

Wir geben schliesslich einige Gruppen von je vier entsprechenden Stücken des Sehnenvierecks an, vermittelt deren a , b , c , d und J nicht ausgedrückt werden können, weil zwischen den vier Stücken jeder Gruppe eine Relation besteht.

1) Die Lote von A , B , C , D auf die Diagonalen sind

$$l_1 = \frac{2adJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}, \quad l_2 = \frac{2abJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}, \quad l_3 = \frac{2bcJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}, \\ l_4 = \frac{2cdJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}$$

also

$$l_1 \cdot l_3 = \frac{abcd}{4R^2} = l_2 \cdot l_4$$

2) Die Lote von P und Q auf f und g sind

$$p_1' = \frac{2bdJ}{g(b^2-d^2)}, \quad p_2' = \frac{2acJ}{f(a^2-c^2)}, \quad p_3' = \frac{2bdJ}{f(b^2-d^2)}, \\ p_4' = \frac{2acJ}{g(a^2-c^2)}$$

also

$$p_1' \cdot p_2' = \frac{4abcdJ^2}{(ac)(a^2-c^2)(b^2-d^2)} = p_3' \cdot p_4'$$

3) Es gilt:

$$\triangle ACQ = \frac{acJ(ad)}{(a^2-c^2)(ab)}, \quad \triangle BDP = \frac{bdJ(ab)}{(b^2-d^2)(ad)}$$

$$\triangle BDQ = \frac{acJ(ab)}{(a^2-c^2)(ad)}, \quad \triangle ACP = \frac{bdJ(ad)}{(b^2-d^2)(ab)}$$

Die Halbierungslinien der Winkel Q und P in diesen Dreiecken sind

$$u_1' = \frac{ac}{a^2-c^2} \sqrt{\frac{(ad)\{a\}\{c\}}{(ab)}}, \quad u_2' = \frac{bd}{b^2-d^2} \sqrt{\frac{(ab)\{b\}\{d\}}{(ad)}},$$

$$u_3' = \frac{ac}{a^2-c^2} \sqrt{\frac{(ab)\{a\}\{c\}}{(ad)}}, \quad u_4' = \frac{bd}{b^2-d^2} \sqrt{\frac{(ad)\{b\}\{d\}}{(ab)}}$$

also

$$u_1' \cdot u_2' = \frac{4abcdJ}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)} = u_3' \cdot u_4'$$

4) Die Radien der den Dreiecken ACQ , BDP , BDQ , ACP umgeschriebenen Kreise haben die Werte:

$$R_1 = R \frac{(ad)}{a^2-c^2}, \quad R_2 = R \frac{(ab)}{b^2-d^2}, \quad R_3 = R \frac{(ab)}{a^2-c^2},$$

$$R_4 = R \frac{(ad)}{b^2-d^2}$$

also

$$R_1 R_2 = R^2 \frac{(ab)(ad)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)} = R_3 R_4$$

5) a. Die vier dem Sehnenviereck angeschriebenen Kreise bilden auf den Seiten Abschnitte, welche, von Q und P aus gerechnet, die Werte haben:

$$v_1 = \frac{a\{c\}}{2(a-c)}, \quad v_2 = \frac{b\{d\}}{2(b-d)}, \quad v_3 = \frac{c\{a\}}{2(a-c)}, \quad v_4 = \frac{d\{b\}}{2(b-d)}$$

also

$$v_1 - v_3 = \frac{a+b+c+d}{2} = v_2 - v_4$$

b. Die vier dem Sehnenviereck eingeschriebenen Kreise bilden auf den Seiten Abschnitte, welche, von Q und P aus gerechnet, die Werte haben:

$$v_1' = \frac{a\{a\}}{2(a-c)}, \quad v_2' = \frac{b\{b\}}{2(b-d)}, \quad v_3' = \frac{c\{c\}}{2(a-c)}, \quad v_4' = \frac{d\{d\}}{2(b-d)}$$

also

$$v_1' - v_3' = \frac{b+d-a-c}{2} = v_4' - v_2'$$

6) a. Die Radien der den Dreiecken ABC , BCD , CDA , DAB eingeschriebenen Kreise haben die Werte:

$$M\sqrt{2(A+B)} = \pi_1'\pi_3'\sqrt{2[A(\pi_2'-\pi_4')^2+B(\pi_2'+\pi_4')^2]} \\ - \pi_2'\pi_4'\sqrt{2[A(\pi_1'+\pi_3')^2+B(\pi_1'-\pi_3')^2]}$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn W positiv genommen wird. Man erhält demnach

$$a = \pi_1' \cdot \frac{(\pi_2'-\pi_4')^2 + (\pi_1'+\pi_3')(\pi_2'+\pi_4') + (\pi_2'+\pi_4') \cdot W}{\sqrt{A \cdot B}} \quad \text{u. s. w.}$$

$$J = \frac{2(\pi_1'\pi_2')(\pi_1'\pi_3')}{\sqrt{A \cdot B}}$$

wo

$$A = \pi_2'^2 + \pi_4'^2 + (\pi_1'+\pi_3')(\pi_2'+\pi_4') + (\pi_2'+\pi_4')W, \\ B = \pi_1'^2 + \pi_3'^2 + (\pi_1'+\pi_3')(\pi_2'+\pi_4') + (\pi_1'+\pi_3')W$$

Wir geben schliesslich einige Gruppen von je vier entsprechenden Stücken des Sehnenvierecks an, vermittelt deren a, b, c, d und J nicht ausgedrückt werden können, weil zwischen den vier Stücken jeder Gruppe eine Relation besteht.

1) Die Lote von A, B, C, D auf die Diagonalen sind

$$l_1 = \frac{2adJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}, \quad l_2 = \frac{2abJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}, \quad l_3 = \frac{2bcJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}$$

$$l_4 = \frac{2cdJ}{\sqrt{(ab)(ad)(ac)}}$$

also

$$l_1 \cdot l_3 = \frac{abcd}{4R^2} = l_2 \cdot l_4$$

2) Die Lote von P und Q auf f und g sind

$$p_1' = \frac{2bdJ}{g(b^2-d^2)}, \quad p_2' = \frac{2acJ}{f(a^2-c^2)}, \quad p_3' = \frac{2bdJ}{f(b^2-d^2)},$$

$$p_4' = \frac{2acJ}{g(a^2-c^2)}$$

also

$$p_1' \cdot p_2' = \frac{4abcdJ^2}{(ac)(a^2-c^2)(b^2-d^2)} = p_3' \cdot p_4'$$

3) Es gilt:

$$\triangle ACQ = \frac{acJ(ad)}{(a^2-c^2)(ab)}, \quad \triangle BDP = \frac{bdJ(ab)}{(b^2-d^2)(ad)}$$

$$\triangle BDQ = \frac{acJ(ab)}{(a^2-c^2)(ad)}, \quad \triangle ACP = \frac{bdJ(ad)}{(b^2-d^2)(ab)}$$

Die Halbierungslinien der Winkel Q und P in diesen Dreiecken sind

$$u_1' = \frac{ac}{a^2-c^2} \sqrt{\frac{(ad)\{a\}\{c\}}{(ab)}}, \quad u_2' = \frac{bd}{b^2-d^2} \sqrt{\frac{(ab)\{b\}\{d\}}{(ad)}},$$

$$u_3' = \frac{ac}{a^2-c^2} \sqrt{\frac{(ab)\{a\}\{c\}}{(ad)}}, \quad u_4' = \frac{bd}{b^2-d^2} \sqrt{\frac{(ad)\{b\}\{d\}}{(ab)}}$$

also

$$u_1' \cdot u_2' = \frac{4abcdJ}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)} = u_3' \cdot u_4'$$

4) Die Radien der den Dreiecken ACQ , BDP , BDQ , ACP umgeschriebenen Kreise haben die Werte:

$$R_1 = R \frac{(ad)}{a^2-c^2}, \quad R_2 = R \frac{(ab)}{b^2-d^2}, \quad R_3 = R \frac{(ab)}{a^2-c^2},$$

$$R_4 = R \frac{(ad)}{b^2-d^2}$$

also

$$R_1 R_2 = R^2 \frac{(ab)(ad)}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)} = R_3 R_4$$

5) a. Die vier dem Sehnenviereck angeschriebenen Kreise bilden auf den Seiten Abschnitte, welche, von Q und P aus gerechnet, die Werte haben:

$$v_1 = \frac{a\{c\}}{2(a-c)}, \quad v_2 = \frac{b\{d\}}{2(b-d)}, \quad v_3 = \frac{c\{a\}}{2(a-c)}, \quad v_4 = \frac{d\{b\}}{2(b-d)}$$

also

$$v_1 - v_3 = \frac{a+b+c+d}{2} = v_2 - v_4$$

b. Die vier dem Sehnenviereck eingeschriebenen Kreise bilden auf den Seiten Abschnitte, welche, von Q und P aus gerechnet, die Werte haben:

$$v_1' = \frac{a\{a\}}{2(a-c)}, \quad v_2' = \frac{b\{b\}}{2(b-d)}, \quad v_3' = \frac{c\{c\}}{2(a-c)}, \quad v_4' = \frac{d\{d\}}{2(b-d)}$$

also

$$v_1' - v_3' = \frac{b+d-a-c}{2} = v_4' - v_2'$$

6) a. Die Radien der den Dreiecken ABC , BCD , CDA , DAB eingeschriebenen Kreise haben die Werte:

$$\sigma_1 = \frac{2abJ}{(ab)(a+b+f)}, \quad \sigma_2 = \frac{2bcJ}{(ad)(b+c+g)}, \quad \sigma_3 = \frac{2cdJ}{(ab)(c+d+f)},$$

$$\sigma_4 = \frac{2adJ}{(ad)(a+d+g)}$$

Wir drücken die σ durch die π aus. Indem wir beachten, dass

$$ac + bd = 2(\pi_1\pi_2)(\pi_1\pi_4) \frac{A+B}{A \cdot B}$$

also

$$f = (\pi_1\pi_4) \sqrt{\frac{2(A+B)}{A \cdot B}}, \quad g = (\pi_1\pi_2) \sqrt{\frac{2(A+B)}{A \cdot B}}$$

ist, erhalten wir

$$\sigma_1 = \frac{4\pi_1\pi_2(\pi_1\pi_4)}{\pi_1[(\pi_2+\pi_4)W - (\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4) - (\pi_2-\pi_4)^2] + \pi_2[(\pi_1+\pi_3)W - (\pi_1+\pi_3)(\pi_2+\pi_4) - (\pi_1-\pi_3)^2] + (\pi_1\pi_4)\sqrt{2(A+B)}}$$

$$= \frac{2(\pi_1\pi_4)}{\pi_3 + \pi_4 - \pi_1 - \pi_2 + W}$$

da aber

$$W^2 - (\pi_3 + \pi_4 - \pi_1 - \pi_2)^2 = 4(\pi_1\pi_4)$$

ist, so wird

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(W + \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 - \pi_4); \quad \text{analog } \sigma_2 = \frac{1}{2}(W + \pi_2 + \pi_3 - \pi_4 - \pi_1),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(W + \pi_3 + \pi_4 - \pi_1 - \pi_2), \quad \sigma_4 = \frac{1}{2}(W + \pi_1 + \pi_4 - \pi_2 - \pi_3)$$

also

$$\sigma_1 + \sigma_3 = W = \sigma_2 + \sigma_4$$

Ausserdem bemerke man

$$\sigma_1\sigma_3 = (\pi_1\pi_4), \quad \sigma_2\sigma_4 = (\pi_1\pi_2)$$

b. Die Radien derjenigen den Dreiecken ABC , BCD , CDA , DAB angeschriebenen Kreise, welche je eine Diagonale von aussen berühren, haben die Werte:

$$\sigma_1' = \frac{2abJ}{(ab)(a+b-f)}, \quad \sigma_2' = \frac{2bcJ}{(ad)(b+c-g)}, \quad \sigma_3' = \frac{2cdJ}{(ab)(c+d-f)}$$

$$\sigma_4' = \frac{2adJ}{(ad)(a+d-g)}$$

in ganz derselben Weise wie unter a. findet man:

$$\sigma_1' = \frac{1}{2}(W + \pi_3' + \pi_4' - \pi_1' - \pi_2') \quad \text{u. s. w.}$$

$$\sigma_1' + \sigma_3' = W = \sigma_2' + \sigma_4'$$

VII.

Miscellen.

1.

Zur Construction der Kegelschnittslinien.

Im Jahrgange 1886 veröffentlichte Herr Prof. Schiffner in Pola eine praktische, in ihrer Ausführung sehr einfache Construction von Punkten samt den dazugehörigen Tangenten einer durch die Achsen oder zwei conjugirte Durchmesser bestimmten Ellipse; die Ableitung derselben erfolgt mittelst analytischer Geometrie.

Eine andere, naturgemässere Ableitung (jene analytische lässt doch an keiner Stelle die Notwendigkeit des eingeschlagenen Weges erkennen) ergibt sich durch Specialisirung des Pascal'schen Satzes für den besonderen Fall auf folgende Weise.

Sind AB und CD die beiden Achsen, bzw. conjugirten Durchmesser der Ellipse, und bezeichnen wir die fünf bekannten Ecken des Pascal'schen Sechsecks mit 1, 2, 3, 4, 5, so verlegen wir 1 und 2 nach A , 3 nach C und 4 und 5 nach B . Die Seiten $\overline{12}$ und $\overline{45}$ (die Tangenten der Ellipse in A und B) schneiden sich in dem fixen Punkte III, durch den bei der getroffenen Annahme sämtliche Pascal'schen Geraden σ gehen müssen. Wegen $\overline{12} \parallel \overline{45}$ liegt der Punkt III in dieser Richtung im Unendlichen, die Pascal'schen Geraden sind somit zu CD parallel. Ziehen wir eine solche Gerade $\sigma \parallel CD$, so schneidet sie die Seiten $\overline{23}$ und $\overline{34}$ (AC und CB) des Pascal'schen Sechsecks in den Punkten IV und V, die mit 5 (B), bzw. mit 1 (A) verbunden jene zwei Seiten liefern, deren Schnittpunkt 6 ein Punkt P der Ellipse ist.

Behufs Bestimmung der Tangente t in P nehmen wir eine andere Anordnung der Ecken des Pascal'schen Sechsecks an. Wir bezeichnen A mit 1, C mit 2, 3, B mit 4 und den vorhin gefundenen Punkt P mit 5, 6. Den Schnittpunkt III' der Seiten $\overline{12}$ und $\overline{45}$ (früher

IV) mit dem Schnittpunkte V' der Seiten $\overline{34}$ und $\overline{61}$ (früher V) verbunden liefert die Pascal'sche Gerade σ' , welche mit der früheren σ offenbar identisch ist. σ schneidet die Seite $\overline{23}$ (Tangente der Ellipse in C) in dem Punkte IV' , dessen Verbindungsgerade mit 5, 6 (P) die Tangente t der Ellipse in P ist.

Der Punkt IV' , der Schnittpunkt der Pascal'schen Geraden mit der Ellipsentangente in C , wird schon bei der ersten Operation, der Bestimmung des Ellipsenpunktes P , erhalten. Dadurch wird die Anzahl der Hilfslinien auf ein Minimum reducirt.

Für die Hyperbel gestaltet sich unter derselben Voraussetzung wie bei der Ellipse die Ableitung der Construction in ähnlicher Weise wie vorhin.

Bezeichnen wir mit AB den reellen und mit CD den conjugirten imaginären Durchmesser, so verlegen wir die Ecken 1 und 2 des Pascal'schen Sechsecks nach A , 3 in den unendlich fernen Punkt einer (z. B. der zu AD parallelen) Asymptote und 4 und 5 in den zweiten Endpunkt des reellen Durchmessers AB . Es fällt dann — bei Gebrauch der früheren Bezeichnung — III mit dem unendlich fernen Punkte des imaginären Durchmessers CD zusammen, die Pascal'sche Gerade σ wird zu CD parallel und schneidet die Seiten $\overline{23}$ und $\overline{34}$ (AB und CB) in den Punkten IV und V , deren Verbindungsgeraden mit 5 (B) und 1 (A) sich in einem Punkte 6 (P) der Hyperbel schneiden.

Um die Tangente t in dem soeben erhaltenen Hyperbelpunkte P zu bestimmen, bezeichnen wir die Endpunkte A und B des reellen Durchmessers mit 1 und 2, den unendlich fernen Punkt der vorhin benutzten Asymptote mit 2, 3 und den Hyperbelpunkt P mit 5, 6. Die Schnittpunkte III' und V' sind mit den vorigen IV und V identisch, weshalb auch die jetzige Pascal'sche Gerade σ' mit der früheren σ zusammenfällt. σ' schneidet die Gerade $\overline{23}$, d. i. die Asymptote in dem Punkte IV' der mit P verbunden die gesuchte Tangente t liefert. Auch in diesem Falle erfordert die Construction eines Hyperbelpunktes samt der zugehörigen Tangente das Minimum der Hilfsmittel.

Auch für die Parabel können wir auf analogem und ebenfalls kürzestem Wege eine hübsche und zweckmässige Construction von Punkten samt den dazugehörigen Tangenten ableiten.

Es seien ein Durchmesser AB und eine demselben conjugirte Sehne CD als gegeben vorausgesetzt. Wir bezeichnen alsdann den

Parabelpunkt A des Durchmessers mit 1, 2, den einen Endpunkt C der Sehne mit 3 und den unendlich fernen Punkt des Durchmessers mit den Ecken 4 und 5 des Pascal'schen Sechsecks. Bei dieser Annahme ist der Punkt III der unendlich ferne Punkt der Sehne CD , die Pascal'schen Geraden σ sind somit zu CD parallel; jede derselben schneidet die fixen Geraden $\overline{2\ 3}$ (AC) und $\overline{3\ 4}$ (durch $C \parallel AB$) in zwei Punkten IV und V, deren Verbindungsgeraden mit 5 (dem unendlich fernen Punkte von AB), bzw. mit 1 (A), wobei die erste offenbar zum Durchmesser AB parallel sein muss, sich in einem Parabelpunkte 6 (P) schneiden.

Auch für die Bestimmung der Tangente t in dem erhaltenem Punkte P ist bereits vorgesorgt. Sie ist die Verbindungsgerade von P mit dem Schnittpunkte T der Pascal'schen Geraden und der fixen Parabeltangente τ in C , welche vorher ein für allemal auf bekannte Weise zu ermitteln ist.

Um diese Tangentenconstruction abzuleiten, bezeichnen wir A mit 1, C mit 2, 3, den unendlich fernen Punkt des Durchmessers AB mit 4 und den bereits bekannten Punkt P mit 5, 6. Bei dieser Annahme entsprechen die Punkte III' und V' den früheren IV und V, die Pascal'sche Gerade ist somit dieselbe wie vorhin und schneidet die Gerade $\overline{2\ 3}$ des Pascal'schen Sechsecks, d. i. die Tangente τ in C , in dem Punkte IV', dessen Verbindungsgerade mit P die gesuchte Tangente t ist. Der wichtige Punkt IV' ist aber offenbar bereits bei der Ermittlung des Parabelpunktes P erhalten worden.

Triest.

Karl Schober.

2.

Eine einfache Ableitung der Bedingungen, welche die Coefficienten einer Rotationsfläche zweiten Grades erfüllen müssen.

Soll die Entfernung eines Punktes von der festen Ebene

$$lx + my + nz = 0$$

eine Function seiner Entfernung vom Anfangspunkte sein (dies ist die Definition einer Rotationsfläche, deren Rotationsaxe durch den Anfangspunkt geht), so hat man:

$$lx + my + nz - \varphi(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Hieraus, durch partielle Differentiation nach x und y , sowie durch Elimination von φ' :

$$\begin{vmatrix} l + n \frac{\partial z}{\partial x} & x + z \frac{\partial z}{\partial x} \\ m + n \frac{\partial z}{\partial y} & y + z \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0;$$

$$A (ly - mx) + (lz - nx) \frac{\partial z}{\partial y} + (ny - mz) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Durch Benutzung von

$$\begin{aligned} \frac{df}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}; \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

verwandelt sich *A* in die „Bedingungsgleichung einer allgemeinen Rotationsfläche“:

$$B (mx - ly) \frac{\partial f}{\partial x} + (lz - nx) \frac{\partial f}{\partial y} + (ny - mz) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Für eine Fläche zweiten Grades sei nun der Schnitt mit der unendlich fernen Ebene:

$$C . . . a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

Diese Gleichung kann gedeutet werden als die eines Kegels durch den Anfangspunkt der Coordinaten — er hat zur vorgegebenen Fläche zweiten Grades die Beziehung, dass er parallel läuft (in den Richtungen seiner Strahlen) mit dem Asymptotenkegel der vorgegebenen Fläche. Er wird also ein Rotationskegel, wenn die vorgegebene Fläche zweiten Grades eine Rotationsfläche. Und umgekehrt ist letztere Fläche eine Rotationsfläche, sobald der Kegel *C* der Bedingung *B* genügt.

Wenden wir auf *C* die Bedingungsgleichung *B* an; wir erhalten:

$$\begin{aligned} D (mx_1 - lx_2) (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\ + (lx_3 - nx_1) (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ + (nx_2 - mx_3) (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss eine Identität sein für alle Punkte x_1, x_2, x_3 des Raumes; denn sie stellt wiederum eine Fläche zweiten Grades vor, und wird erfüllt von den Coordinaten sämtlicher Punkte des Kegels *C*, ohne doch auf die Gleichung letzten Kegels überführbar zu sein. Ein solches Verhalten ist nur möglich, wenn in *D* die Coefficienten der sämtlichen 6 Verbindungen: $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2$ einzeln verschwinden. Demnach herrschen zwischen den Grössen a_{ik} folgende 6 Beziehungen:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad a_{13}m - a_{12}n = 0 \\ 2) \quad -a_{23}l + a_{12}n = 0 \\ 3) \quad a_{23}l + a_{13}m = 0 \end{array} \right\} \text{Summe} = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{I) } (a_{33} - a_{22})l + a_{12}m - a_{13}n = 0 \\ \text{II) } a_{12}l + (a_{33} - a_{11})m - a_{23}n = 0 \\ \text{III) } a_{13}l - a_{23}m + (a_{22} - a_{11})n = 0 \end{array}$$

Das Bestehen dieser 5 Gleichungen legt den a_{ik} gewisse Bedingungen auf (eine der drei ersten Gleichungen kann weggelassen werden); die man folgendermaassen erhält: „Man wähle 2 mal eine Combination von dreien der fünf Gleichungen und eliminire aus jeder Combination die homogen vorkommenden l, m, n “

$$1, 2, \text{ III gibt } \begin{vmatrix} & a_{13} & -a_{12} \\ -a_{23} & & a_{12} \\ a_{13} & -a_{23} & a_{22} - a_{11} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$E \dots \dots a_{12} a_{13}^2 - a_{12} a_{23}^2 + a_{23} a_{13} (a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$1, 2, \text{ II gibt } \begin{vmatrix} & a_{13} & -a_{12} \\ -a_{23} & & a_{12} \\ a_{12} & a_{33} - a_{11} & -a_{23} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$F \dots \dots a_{12}^2 a_{13} + a_{12} a_{23} (a_{33} - a_{11}) - a_{13} a_{23}^2 = 0$$

$$1, 2, \text{ I gibt } \begin{vmatrix} & a_{13} & -a_{12} \\ -a_{23} & & a_{12} \\ a_{33} - a_{22} & a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$G \dots \dots a_{12} a_{13} (a_{33} - a_{22}) + a_{12}^2 a_{23} - a_{13}^2 a_{23} = 0$$

Es ist bekannt ¹⁾, dass bereits das Bestehen von zweien dieser Gleichungen genügt, um auch alle übrigen ähnlich entstandenen erfüllt sein zu lassen.

Wir unternehmen beispielsweise den Nachweis dafür, dass die Bedingungen E und F auch G mit sich bringen.

Aus E und F schliesst man durch Elimination von a_{11} :

$$a_{23}^2 \cdot a_{12} \cdot a_{13} (a_{33} - a_{22}) = 0$$

Es sei nun

1) $a_{23} = 0$, dann muss entweder auch $a_{12} = 0$, oder $a_{13} = 0$ sein (E, F)

1) Hesse, Geometrie des Raumes pagg. 255, 374, 376-378; ferner Salmon-Fiedler, Algebra der lin. Transformationen Art. 214 (unsere Bedingungen haben den directesten Zusammenhang mit jenen für die doppelte Berührung zweier Kegelschnitte, sowie mit jenen für die Existenz von zwei Doppelwurzeln einer biquadratischen Gleichung).

2) $a_{23} > 0$, $a_{12} = 0$; dann muss $a_{13} = 0$ sein (F); demnach G erfüllt

3) $a_{23} < 0$, $a_{12} > 0$, $a_{13} = 0$ ist eine unmögliche Annahme wegen E

4) $a_{33} - a_{22} = 0$ liefert nach Ausrechnung von $a_{12} \cdot E - a_{13} \cdot F$: $a_{23}^2(a_{13}^2 - a_{12}^2) = 0$; demnach entweder $a_{23} = 0$, oder $a_{13} = a_{12}$ u. s. w.

Wir erhalten zusammenfassend als Resultat: „Die Bedingungen dafür, dass eine Fläche zweiter Ordnung eine Rotationsfläche vorstelle, können als Determinanten $E, F, G \dots$ geschrieben werden. Diese Determinanten liefern das Mittel die Coordinaten l, m, n jener Ebene darzustellen, auf welcher die Rotationsaxe senkrecht steht“.

Denn aus irgend zweien der Gleichungen 1—3, I—III (welche die Bedingungen für die a_{ik} lieferten durch Elimination von l, m, n), kann man das Verhältniss $l : m : n$ berechnen, wenn eben die a_{ik} so beschaffen sind, dass sie eine Rotationsfläche C anzeigen.

Vergl. noch Salmon-Fiedler, Raumgeometrie I pag. 136, II pag. 256; Clebsch-Lindemann, Geometrie pag. 298, 138; Kummer in Crelle's Journal Bnd. 26.

München, Januar 1888.

Fritz Hofmann.

3.

Untersuchungen über eine Fläche 3. Ordnung, welche von Kreisen erzeugt wird, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen.

Wie schon in dem Artikel „Ueber den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen“ (Archiv 2. R. Tl. V. S. 442 — 448) hervorgehoben wurde, kann man für die folgenden Untersuchungen unbeschadet der Allgemeinheit das Coordinatensystem so annehmen, dass die gegebenen Punkte A und B beziehungsweise die Coordinaten $(0, 0, m)$, $(0, 0, -m)$ haben und die gegebene Gerade G durch die Gleichungen ($z = ax + b$, $y = c$) dargestellt wird. Es hat dann der Kreis K , welcher durch die Punkte A und B geht und den Punkt $C \dots (x_1, y_1, z_1)$ der Geraden G enthält, die Gleichungen:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - m^2)x_1 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - m^2)x = 0, \quad yx_1 - xy_1 = 0$$

dabei ist $y_1 = c$, $z_1 = ax_1 + b$. Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die drei Grössen x_1 , y_1 , z_1 , so erhält man als Ausdruck für die Gesamtheit der Kreise ABC die Gleichung:

$$cy^3 + cx^2y + cyz^2 - c^2(1 + a^2)x^2 - (b^2 + c^2 - m^2)y^2 - 2abcxy - cm^2y = 0$$

Sie ist vom dritten Grade, die durch sie dargestellte Fläche F ist somit von der dritten Ordnung.

Die Fläche F geht durch den Coordinatenursprung O , hat mit der yz -Ebene die Gerade AB und den Kreis

$$cy^2 + cz^2 - (b^2 + c^2 - m^2)y - cm^2 = 0$$

mit der xz -Ebene drei Gerade (von denen zwei nach AB fallen, die dritte im Unendlichen liegt) gemein, und schneidet die xy -Ebene in der Curve 3. Ordnung:

$$cy(x^2 + y^2) - c^2(1 + a^2)x^2 - (b^2 + c^2 - m^2)y^2 - 2abcxy - cm^2y = 0$$

letztere Coordinatenebene ist Symmetrieebene der Fläche.

Für $A \dots (0, 0, m)$ oder $B \dots (0, 0, -m)$ als Ursprung des Coordinatensystems ergibt sich eine Flächengleichung ohne absolute Glieder und ohne Glieder der ersten Ordnung: A und B sind also Doppelpunkte der Fläche F . Da der Kegel

$$c^2(1 + a^2)x^2 + (b^2 + c^2 - m^2)y^2 + 2abcxy = 0$$

dessen Erzeugende mit der Fläche F in A und B drei zusammenfallende Punkte gemein haben, in die zwei Ebenen

$$c(1 + a^2)x + [ab \pm \sqrt{(1 + a^2)(m^2 - c^2) - b^2}]y = 0$$

oder auch

$$c[ab \mp \sqrt{(1 + a^2)(m^2 - c^2) - b^2}]x + (b^2 + c^2 - m^2)y = 0$$

zerfällt, so sind A und B biplanare Doppelpunkte. Hieraus folgt wieder, dass die Gerade AB oder die z -Achse auf F liegt. Ausserdem wird die Fläche, nach ihrer Entstehung zu schliessen, die Gerade $G \dots (y = c, z = ax + b)$ enthalten, wie ihr auch wegen der symmetrischen Lage zur xy -Ebene die Gerade $G' \dots (y = c, z + ax + b = 0)$ angehören muss. In der Tat ergibt sich dies aus der Gleichung der Fläche durch Einsetzen von $y = c$ ebenfalls; nebenbei zeigt es sich zugleich, dass wegen $c = 0$ die unendliche Gerade G_∞ der Ebene $y = c$ den Schnitt von $y = c$ und F zur vollständigen Curve 3. Ordnung ergänzt. Die unendliche Ebene muss aber F ebenfalls nach einer Curve der 3. Ordnung schneiden: es wird also noch ein Kegelschnitt von F im Unendlichen liegen. Man findet, dass dies der imaginäre Kugelkreis J des Raumes ist. (Führt man nämlich in $F = 0$ $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ ein und setzt $w = 0$, so for-

dert dies: $y = 0$ und $y^2 + y^2 + z^2 = 0$, welche letztere Gleichung J vorstellt). Auf F liegen sonach vier Gerade: AB , G , G' und G_∞ . Jede durch eine solche Gerade gelegte Ebene schneidet F in einem Kegelschnitte. So enthalten z. B. die durch G_∞ gehenden oder zur xz -Ebene parallelen Ebenen $y = d$ die Curven 2. Ordnung C_2 :

$$c(c + a^2c - d)x^2 - cdz^2 + 2abcdx - cd^3 + (b^2 + c^2 - m^2)d^2 + cdm^2 = 0,$$

unter denen kein Kreis vorkommt, wohl aber die Doppel-Gerade AB (für $d = 0$), die zwei Geraden G und G' (für $d = c$) und eine Parabel (für $d = c + ca^2$), ferner unendlich viele Ellipsen (für $d > c(1 + a^2)$ und $d < 0$) und Hyperbeln (für $0 < d < c + ca^2$). Die Mittelpunkte aller C_2 erfüllen die gleichseitige Hyperbel

$$xy - c(1 + a^2)x - aby = 0$$

welche in ... ($x = ab$, $y = c + ca^2$) den Mittelpunkt hat, und deren Asymptoten zu den Coordinatenachsen parallel sind.

Die durch AB gelegten Ebenen schneiden, wie aus der Entstehung der Fläche hervorgeht, F in den Kreisen K . Es lässt sich nun zeigen, dass F von Ebenen, welche G oder G' enthalten, ebenfalls nach Kreisen k und k' geschnitten wird. Die Flächengleichung kann nämlich auch in der Form:

$$(y - c)(cx^2 + cy^2 + cz^2 + m^2y) = (acx + by + cz)(acx + by + cz)$$

geschrieben werden, welche F als das Erzeugniss des Ebenenbüschels $E \dots \lambda(y - c) - acx + by - cz = 0$ und des Kugelbüschels $\mathfrak{R} \dots cx^2 + cy^2 + cz^2 + m^2y - \lambda(acx + by + cz) = 0$ oder auch als das Erzeugniss des Ebenenbüschels $E' \dots \mu(y - c) - (acx + by + cz) = 0$ und des Kugelbüschels $\mathfrak{R}' \dots cx^2 + cy^2 + cz^2 + m^2y - \mu(acx + by + cz) = 0$ zu erkennen giebt. Alle Ebenen E gehen durch G , alle Ebenen E' durch G' ; die Schnitte der Fläche F mit den durch G oder G' gelegten Ebenen erscheinen somit als Kugelschnitte, sind also Kreise. Die einer gegebenen Ebene E entsprechende Kugel \mathfrak{R} aufzufinden, ist nicht schwer. E und \mathfrak{R} begegnen sich in demselben Punkte der x -Achse, denn E schneidet auf der x -Achse immer das Stück λ ab, und die entsprechende Kugel \mathfrak{R} begrenzt auf der x -Achse gleichfalls die Strecke λ . Die Kugel \mathfrak{R} geht ausserdem immer durch den Anfangspunkt O des Coordinatensystems; ihr Mittelpunkt M ist bestimmt durch ... $\left(x = \frac{\lambda a}{2}, y = \frac{\lambda b - m^2}{2c}, z = \frac{\lambda}{2}\right)$, weshalb der Auf-

riss von OM mit dem Aufrisse von G parallel ist $\left(\frac{z}{x}\right)$ ist nämlich gleich a). Ebenso lassen sich die Ebenen E' und die Kugeln \mathfrak{R}' leicht auf einander beziehen. Beide schneiden die x -Achse im Abstände $(-\mu)$ von O , E' geht immer durch G' , \mathfrak{R}' immer durch O .

Der Mittelpunkt M' von \mathfrak{R}' hat die Coordinaten:

$$x = \frac{\mu a}{2}, \quad y = \frac{\mu b - m^2}{2c}, \quad z = -\frac{\mu}{2}$$

Von den Ebenen E und E' sind jene besondere wichtig, welche zugleich die ihnen entsprechende Kugel \mathfrak{R} oder \mathfrak{R}' berühren, für die also λ oder μ so beschaffen ist, dass der Abstand (M, E) oder (M', E') gleich dem Halbmesser von \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' wird. Stellt man die diesbezügliche Bedingung aus den Gleichungen von E und \mathfrak{R} auf, so zeigt es sich, dass $\lambda = \pm m$ sein muss, und infolge dessen die durch G gehenden Ebenen

$$acx + (b \mp m)y - cz \pm mc = 0$$

die Kugeln

$$(x^2 + y^2 + z^2)c + m^2y \mp m^2(acx + by + cz) = 0$$

und daher auch die Fläche F berühren und zwar erfolgt die Berührung in den Punkten ... ($x = 0, y = 0, z = \pm m$). Die durch G' legbaren Berührungsebenen der Fläche sind zu den vorigen symmetrisch.

Die bisherigen Untersuchungen lieferten das Resultat, dass durch jeden Punkt P der Fläche F drei Kreise K, k, k' und ein Kegelschnitt C_2 gehen: K enthält die Punkte P, A und B , k gehört der Ebene $(P, G) \equiv E$ und der ihr entsprechenden Kugel \mathfrak{R} , k' der Ebene $(P, G') \equiv E'$ und der ihr entsprechenden Kugel \mathfrak{R}' an, C_2 liegt in der Ebene $y = d$. Hiervon kann man bei verschiedenen Aufgaben Anwendungen machen: bei der Construction von Schnittlinien der Fläche F mit Ebenen oder anderen Flächen, bei der Bestimmung der Berührungsebene eines Flächenpunktes P , u. a. m.

Die Flächengleichung nimmt, wenn für die Coordinaten x, y, z des Flächenpunktes P beziehungsweise die Werte $r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma$ eingeführt werden, und die Gleichung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Berücksichtigung findet, die folgende Gestalt an:

$$cr^2 \cos \beta - c^2(1 + a^2)r \cos^2 \alpha - (b^2 + c^2 - m^2)r \cos^2 \beta - 2abcr \cos \alpha \cos \beta - cm^2 \cos \beta = 0$$

Ersetzt man hierin r durch $\left(-\frac{m^2}{r_1}\right)$, dann erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes jener Punkte $P_1 \dots (x_1, y_1, z_1)$, welche auf dem Strahle OP so liegen, dass $\overline{OP} \times \overline{OP}_1 = -m^2$ ist, und zwar in einer Form, die mit der obigen Flächengleichung identisch ist. Die Punkte P_1 liegen also auch alle auf der Fläche F oder mit anderen Worten: die Fläche F ist ihre eigene Inverse für das Inversions-Centrum O und die Potenz $(-m^2)$.

Wählt man den Punkt $A \dots (0, 0, m)$ als Ursprungspunkt eines parallelen Coordinatensystems, so lautet die Flächengleichung:

$$cy^2 + cx^2y + cyz^2 - c^2(1+a^2)x^2 - (b^2+c^2-m^2)y^2 - 2abcxy + 2cmzy = 0$$

oder:

$$cr \cos \beta - c^2(1+a^2) \cos^2 \alpha - (b^2+c^2-m^2) \cos^2 \beta - 2abc \cos \alpha \cos \beta + 2cm \cos \beta \cos \gamma = 0$$

und deshalb hat die inverse Fläche von F für A als Centrum und $2p^2$ als Potenz (da $r\rho = 2p^2$ sein muss) die Gleichung:

$$2cp^2 \cos \beta - c^2(1+a^2)\rho \cos^2 \alpha - (b^2+c^2-m^2)\rho \cos^2 \beta - 2abc \rho \cos \alpha \cos \beta + 2cm \rho \cos \beta \cos \gamma = 0$$

oder in Bezug auf das alte Coordinatensystem:

$$c^2(1+a^2)x^2 + (b^2+c^2-m^2)y^2 + 2abcxy - 2cmzy + 2cm^2y - 2cp^2y = 0$$

welche einem Kegel entspricht, dessen Scheitel in $\dots \left(x=0, y=0, z = \frac{m^2-p^2}{m} \right)$ liegt. Der Symmetrieverhältnisse wegen wird man sagen können: Die Fläche F kann durch Inversion aus den zwei Kegeln

$$c^2(1+a^2)x^2 + (b^2+c^2-m^2)y^2 + 2abcxy \mp 2cmzy + 2cm^2y - 2cp^2y = 0$$

abgeleitet werden. Diese Kegel enthalten, weil sie keine Rotationskegel sind, zwei Systeme von Kreisen; letztere und die Kegel-Erzeugenden erscheinen im inversen Bilde als Kreise, somit findet das frühere Resultat von den Kreissystemen auf F seine Bestätigung.

Weil eine Ebene (die das Centrum nicht enthält) durch Inversion in eine Kugel übergeht, so folgern wir die weitere Eigenschaft, dass F längs jedes erzeugenden Kreises von einer Kugel berührt wird, nämlich der Ableitung jener Ebene, welche den inversen Kegel in der Geraden berührt, die dem entsprechenden Kreise entspricht. Die Kugel, welche das inverse Abbild einer Ebene ist, hat ihren Mittelpunkt in der Senkrechten aus dem Centrum der Ebene: die Mittelpunkte aller Kugeln, welche F längs erzeugenden Kreisen berühren, liegen deshalb auf dem Kegel aus A , dessen Mantellinien normal zu den Berührungsebenen des inversen Kegels der Fläche sind. Nachdem die Kreise K ihre Centra in der xy -Ebene haben und auf derselben senkrecht stehen, so liegen auch die Mittelpunkte der durch die K gelegten Kugeln in der xy -Ebene, weshalb die Mittelpunkte der längs erzeugenden Kreisen K berührenden Kugeln die Schnittcurve vorerwähnten Normalkegels mit der xy -Ebene bilden müssen. Die einfachste Gleichung hat der Inversions-Kegel für das Centrum A und $p = m$, nämlich

$$c^2(1+a^2)x^2 + (b^2+c^2-m^2)y^2 + 2abcxy - 2cmzy = 0$$

Die Normalen aus A zu seinen Berührungsebenen sind:

$$cm y \xi + [c^2(1 + a^2)x + abc y](\xi - m),$$

$$cm y \eta + [(b^2 + c^2 - m^2)y + abc x - cm z](\xi - m)$$

und dieselben schneiden die xy -Ebene in der Parabel P_2 :

$$\xi^2 - 2ab \xi + 2c(1 + a^2)\eta + a^2b^2 - (1 + a^2)(b^2 + c^2 - m^2) = 0$$

Die Fläche F kann somit auch als die Umhüllende aller jener Kugeln betrachtet werden, welche durch A und B gehen und ihre Mittelpunkte auf der Parabel P_2 liegen haben. P_2 ist dieselbe Parabel, deren Fusspunktcurve für den Pol O die in dem eingangs citirten Artikel besprochene Linie 3. Ordnung C_3 ist; es werden also zwischen F und C_3 nicht nur auf Grund ihrer Entstehung aus A, B, G , sondern auch im Hinblick auf die Parabel P_2 Beziehungen abgeleitet werden können.

Pola, im Februar 1888.

Fr. Schiffner.

4.

Bewels eines Dreieckssatzes.

Im Dreieck ABC halbirt die Linie CD den Winkel $ACD = \gamma$. Die Linie AO halbirt den Winkel $CAB = \beta$, also ist O der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, während M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises sein möge.

Wkl. $OAB = \beta/2$, Wkl. $BAD = BCD = \gamma/2$, also

$$\text{Wkl. } OAD = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Wkl. AOD ist als Aussenwinkel des Dreiecks AOC

$$= \frac{\beta + \gamma}{2}, \text{ also}$$

Wkl. $OAD = AOD$, also $AD = OD$ I.

Lehrsatz: Der um D mit DA beschriebene Bogen ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises. (Vgl. Spieker, Geometrie, § 126.)

Die zweite und dritte Gleichung sind nichts anderes, als Anwendungen des sog. erweiterten Pyth. Lehrsatzes auf die Dreiecke ADM und ODM .

$$MA = MD = r; \quad OE = FG = \rho; \quad OM = d; \quad FM = x.$$

Im Dreieck ADM ist $AD^2 = MA^2 + MD^2 - 2 \cdot MD \cdot MG$, oder

$$AD^2 = 2r^2 - 2r \cdot (\rho \pm x) \quad \text{II.}$$

Im Dreieck ODM ist $OD^2 = OM^2 + MD^2 \mp 2 \cdot MD \cdot MF$, oder

$$OD^2 = d^2 + r^2 \mp 2r \cdot x \quad \text{III.}$$

(Die Doppelzeichen, je nachdem F auf den Radius MD oder auf dessen Verlängerung fällt.)

Da nach I. $AD = OD$, so ist nun auch

$$2r^2 - 2r(\rho \pm x) = d^2 + r^2 \mp 2rx$$

$$r^2 - 2r\rho = d^2$$

Bonn, Juli 1888.

Prof. Dr. R. Caspar.

5.

Reduction einiger Integrale.

Zur Reduction des Integrals $\int \frac{dt}{\sqrt{t^6 + at^3 + 1}}$ hat man:

$$t^6 + at^3 + 1 = (t^2 + \beta_1 t + 1)(t^2 + \beta_2 t + 1)(t^2 + \beta_3 t + 1)$$

wobei $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$\beta^3 - 3\beta = a$$

bezeichnen. Setzt man

$$t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

so wird

$$\begin{aligned} dJ &= \frac{dt}{\sqrt{t^6 + at^3 + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{\left(1 + \frac{\beta_1}{2} \sin \varphi\right) \left(1 + \frac{\beta_2}{2} \sin \varphi\right) \left(1 + \frac{\beta_3}{2} \sin \varphi\right)}} \end{aligned}$$

Da nun

$$2 \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 + \sin \varphi} + \sqrt{1 - \sin \varphi}$$

so folgt weiter

$$dJ = \frac{1}{i} \frac{d\varphi [\sqrt{1 + \sin \varphi} + \sqrt{1 - \sin \varphi}]}{\sqrt{\left(1 + \frac{\beta_1}{2} \sin \varphi\right) \left(1 + \frac{\beta_2}{2} \sin \varphi\right) \left(1 + \frac{\beta_3}{2} \sin \varphi\right)}}$$

Wird nun

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \sin \varphi & \eta &= 1 - \sin \varphi \\ m_k &= \frac{\beta_k - 2}{\beta_k} & n_k &= \frac{\beta_k + 2}{\beta_k} \end{aligned}$$

gesetzt, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{4J}{\sqrt{\alpha}} &= \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi + \alpha)(\xi - m_1)(\xi - m_2)(\xi - m_3)}} \\ &\quad - \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta - \alpha)(\eta - n_1)(\eta - n_2)(\eta - n_3)}} \end{aligned}$$

Seien u, v, u_1, v_1 Constanten, über die wir nach Belieben verfügen können, und setzen wir

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{u + 2x'}{v + x'} & \eta &= \frac{u_1 + 2x_1'}{v_1 + x_1'} \\ p_k &= \frac{u - v m_k}{2 - m_k} & q_k &= \frac{u_1 - v_1 n_k}{2 - n_k} \end{aligned}$$

so wird, da

$$\begin{aligned} (2 - m_1)(2 - m_2)(2 - m_3) &= \frac{2 + \alpha}{\alpha} \\ (2 - n_1)(2 - n_2)(2 - n_3) &= \frac{2 - \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4J}{\sqrt{\alpha}} &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\alpha}{2 + \alpha}} \int \frac{dx'}{\sqrt{(p_1 - x')(p_2 - x')(p_3 - x')}} \\ &\quad - \sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha}} \int \frac{dx_1'}{\sqrt{(q_1 - x_1')(q_2 - x_1')(q_3 - x_1')}} \end{aligned}$$

Wendet man nun die Substitutionen

$$\begin{aligned} x' &= p_1 - 2 \frac{p_1 - p_3}{1 - \cos \theta} \\ x_1' &= q_1 - 2 \frac{q_1 - q_3}{1 - \cos \theta'} \end{aligned}$$

an, so folgt weiter

$$\frac{4}{\sqrt{\alpha}} J = 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(2+\alpha)(p_3-p_1)}} \int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\frac{p_1-p_2}{p_1-p_3} \sin^2 \frac{\theta}{2}}} - 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(2-\alpha)(q_1-q_3)}} \int \frac{d\frac{\theta'}{2}}{\sqrt{1-\frac{q_1-q_2}{q_1-q_3} \sin^2 \frac{\theta'}{2}}}$$

Zur Reduction des Integrals $\int \frac{dt}{\sqrt{t^8+at^4+1}}$ ¹⁾ hat man:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+at^4+1}} = \frac{dt}{t^2} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2+\frac{t}{t^2}\right)^2 - (2-\alpha)}}$$

setzt man $\frac{1}{t} = z$ so wird

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+at^4+1}} = - \frac{dz}{\sqrt{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2 - (2-\alpha)}}$$

Substituiren wir nun $z = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, so folgt weiter

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+at^4+1}} = - \frac{2 d\varphi \sin \varphi}{\sqrt{2+\alpha} \sqrt{1+2\frac{6-\alpha}{2-\alpha} \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi}}$$

oder wenn

$$\cos \varphi = x \quad 2\frac{6-\alpha}{2+\alpha} = \beta$$

gesetzt wird:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^8+at^4+1}} = \frac{2dx}{\sqrt{2+\alpha} \sqrt{1+\beta x^2+x^4}}$$

Die weitere Reduction liegt an der Hand.

Prag, im Juni 1887.

W. Láska.

1) Die Reduction von $\int \frac{dt}{\sqrt{\pm(1-t^8)}}$ gibt Richelot, Crelle XXXII. p. 213.

VIII.

Ueber die Schaaren von Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen.

Von

Dr. W. Schjærning in Barmen.

Capitel I.

Die Aufstellung der Flächengleichung.

Kummer (Berliner Monatsberichte 1864, S. 255) beweist den Satz:

Durch jede gegebene Curve vierten Grades kann man sechs verschiedene vierfach unendliche Schaaren von Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten legen, und lehrt gleichzeitig die Gleichung dieser Flächen aufstellen. Es ist von Interesse, diesen allgemeinen Satz auf einen speciellen Fall anzuwenden, und im Folgenden sollen einige der Resultate angegeben werden; zu denen man geführt wird, wenn man als Curve vierten Grades die Lemniskate mit der Gleichung

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2w^2(x^2 - y^2) = 0$$

wählt.

Kummer geht von folgender Form der Curvengleichung aus

$$(2) \quad \sqrt{p_0(Ap_0 + A_1q_0 + A_2r_0)} + \sqrt{q_0(Bp_0 + B_1q_0 + B_2r_0)} + \sqrt{r_0(Cp_0 + C_1q_0 + C_2r_0)} = 0$$

und verweist auf die gleichbedeutende rationale Hesse'sche Form (C. J. 49, 301):

$$(3) \quad \nabla = r^2 \Delta = F_{32}^2 F_{34}^2 + F_{23}^2 F_{14}^2 + F_{13}^2 F_{24}^2 - 2F_{23} F_{14} F_{13} F_{24} - 2F_{13} F_{24} F_{12} F_{34} - 2F_{12} F_{34} F_{23} F_{14} = 0$$

die für folgende Werte der F mit der Kummer'schen Form übereinstimmt:

$$(4) \quad \begin{array}{ll} F_{12} = Ap_0 + A_1q_0 + A_2r_0 & F_{34} = p_0 \\ F_{23} = Bp_0 + B_1q_0 + B_2r_0 & F_{14} = q_0 \\ F_{13} = Cp_0 + C_1q_0 + C_2r_0 & F_{24} = r_0 \end{array}$$

und eine Folge der Hesse'schen Determinante

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

für $F_{ik} = F_{ki}$ ist.

In die Form einer solchen symmetrischen Determinante ist also die Gleichung der Lemniskate zu bringen; dazu muss man jedoch ihre Doppeltangenten kennen (in der Determinante sind $F_{12} = 0$ u. s. w. Gleichungen von Doppeltangenten der durch sie repräsentierten Curve).

Das Problem der Doppeltangenten an Curven vierten Grades, allgemein noch ungelöst, lässt sich jedoch für Curven vom Geschlecht 0, bei denen die Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken lassen, behandeln. Bei der Lemniskate sind die Ausdrücke für die Coordinaten:

$$(6) \quad x = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \quad y = \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}$$

und die Berührungspunkte der Doppeltangenten lassen sich dann nach einem von Schvering (Mathematische Miscellen, Programm, Coesfeld 1881) angegebenen Verfahren bestimmen.

Auf unsere Form der Lemniskatengleichung angewendet, führt dies Verfahren zu den Gleichungen der folgenden vier Doppeltangenten

$$(7) \quad \begin{array}{ll} 1) \quad y - \frac{w}{2} = 0 & 3) \quad x + \frac{iw}{2} = 0 \\ 2) \quad y + \frac{w}{2} = 0 & 4) \quad x - \frac{iw}{2} = 0 \end{array}$$

mit deren Hilfe wir folgende Determinante aufstellen können:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 0 & w & y - \frac{w}{2} & ix - \frac{w}{2} \\ w & 0 & ix + \frac{w}{2} & y + \frac{w}{2} \\ y - \frac{w}{2} & ix + \frac{w}{2} & 0 & -w \\ ix - \frac{w}{2} & y + \frac{w}{2} & -w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

welche ausgerechnet unsere Lemniskatengleichung (1) ergibt.

Vergleichen wir die Glieder dieser Determinante mit den F aus (5), so können wir aus (4) die Werte der ABC für unseren Fall finden. Es wird

$$(9) \quad A = -1, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad B = -1, \quad B_3 = +1, \\ B_2 = 0, \quad C = 1, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$

Hier muss ich wieder auf Kummer (Berl. Monatsber. 1864, 255) verweisen. Er führt die elf Grössen $\beta \gamma \delta \alpha' \gamma' \delta' \alpha'' \beta'' \delta'' m n$ durch die elf Gleichungen ein

$$(10) \quad \begin{array}{lll} A = \delta & B = \delta' + \alpha' & C = \delta'' + \alpha'' \\ A_1 = m\delta + \beta & B_1 = m\delta' & C = m\delta'' + \beta'' \\ A_2 = n\delta + \gamma & B_2 = n\delta' + \gamma' & C_2 = n\delta'' \\ \alpha'\gamma + \alpha''\beta - \beta\gamma = 0 & \alpha''\gamma' + \beta''\gamma - \alpha''\beta'' = 0 \end{array}$$

und benutzt zu ihrer Berechnung die Hilfsgrösse

$$(11) \quad u = -\frac{\gamma}{\alpha''}, \quad \text{also} \quad \frac{u+1}{u} = \frac{\alpha'}{\beta}; \quad u+1 = \frac{\gamma'}{\beta''}$$

welche sich aus der kubischen Gleichung

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 2uA & , & uB - (u+1)A_1, & A_2 + uC \\ uB - (u+1)A_1 & , & -2(u+1)B_1, & B_2 - (u+1)C_1 \\ A_2 + uC & , & B_2 - (u+1)C_1, & 2C_2 \end{vmatrix} = 0$$

finden lässt. Diese kubische Gleichung führt uns bei unseren Werten der A, B, C zu

$$(13) \quad \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= -2 \\ &3 \end{aligned}$$

Im allgemeinen führt ein jeder Wert von u zu zwei Werten der durch die Gleichungen (10) definirten 11 Grössen, und es ergeben sich aus den drei Werten von u die sechs verschiedenen Flächenschaaren. In unserem Fall liefert der Wert $u = 0$ nur einen Wert der 11 Grössen, zb. $m = n = 0$ und für einzelne der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sofort unendliche Werte; dieser Fall soll einer späteren besonderen Betrachtung vorbehalten bleiben. Von den vier noch übrigen Schaaren von Flächen fallen ferner je zwei zusammen. Also:

1. „Von den sechs verschiedenen Schaaren von Flächen vierten „Grades mit sechszehn singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate hindurchgehen, fallen je zwei zusammen.“

2. „Eine dieser drei Schaaren besitzt zum Teil unendliche Coefficienten.“

Der Wert $u = -2$ liefert uns für die 11 Grössen aus (10) folgende Ausdrücke:

$$(14) \quad \begin{aligned} m &= -1 \pm i & n &= 1 \pm i \\ \beta &= -1 \pm i & \gamma &= 1 \pm i & \delta &= -1 \\ \alpha' &= -\frac{1}{2}(1 \mp i) & \gamma' &= \pm i & \delta' &= -\frac{1}{2}(1 \pm i) \\ \alpha'' &= \frac{1}{2}(1 \pm i) & \beta'' &= \mp i & \delta'' &= \frac{1}{2}(1 \mp i) \end{aligned}$$

Mit diesen Werten wird die verlangte Flächengleichung

$$(15) \quad \begin{aligned} &\sqrt{p(\beta q + \gamma r + \delta s)} + \sqrt{q(\alpha' p + \gamma' r + \delta' s)} \\ &+ \sqrt{r(\alpha'' p + \beta'' q + \delta'' s)} = 0 \end{aligned}$$

wobei noch

$$(16) \quad \begin{aligned} p &= p_0 + az \\ q &= q_0 + bz \\ r &= r_0 + cz \\ s &= p_0 + mq_0 + nr_0 + dz \end{aligned}$$

in unserem Falle

$$(17) \quad \begin{aligned} p &= -w + az \\ q &= ix - \frac{w}{2} + bz \end{aligned}$$

(17)

$$r = y + \frac{w}{2} + cz$$

$$s = \mp x + y + dz + i(-x \pm y)$$

bedeuten. a, b, c, d bleiben willkürliche Constanten. Führen wir alle diese Werte ein, so erhalten wir als Flächengleichung:

(18)

$$\sqrt{-z^2 a(b-c+d) + zw(a+b-c+d) - w^2 + i[\pm z^2 a(b+c) + zw(b+c)]}$$

$$+ \sqrt{\left\{ -x^2 \mp xz \frac{a+2c-d}{2} - z^2 \frac{b(a+d)}{2} + zw \frac{a+2b+d}{4} - \frac{w^2}{4} \right.}$$

$$\left. + i \left[-xz \frac{a-2b+d}{2} \pm z^2 \frac{b(a+2c-d)}{2} \mp zw \frac{a+2c-d}{4} \right] \right\}}$$

$$+ \sqrt{\left\{ y^2 + xz \frac{a+2c+d}{2} + z^2 \frac{c(a+d)}{2} + zw \frac{a-2c+d}{4} - \frac{w^2}{4} \right.}$$

$$\left. + i \left[\pm yz \frac{a-2b-d}{2} \pm z^2 \frac{c(a-2b-d)}{2} \pm zw \frac{a-2b-d}{4} \right] \right\}} = 0$$

und in eine rationale Form entwickelt:

(19)

$$z^4(a^2bc + a^2bd - a^2cd + a^2d^2 - 2ab^2c - ab^2d + 2abc^2 - abd^2 - ac^2d$$

$$+ acd^2 - 4b^2c^2 + 2b^2cd - 2bc^2d + bcd^2)$$

$$+ \frac{1}{2}z^3w(a^2b - a^2c - 2a^2d - 2ab^2 + 4abc - 2abd - 2ac^2$$

$$+ 2acd - 2ad^2 - 4b^2c + 4b^2d + 4bc^2 - 8bcd + 3bd^2 + 4c^2d - 3cd^2)$$

$$- \frac{1}{4}z^2w^2(a^2 - 2ab + 2ac - 6ad - 4bc + 6bd - 6cd + d^2)$$

$$+ x^2z^2(4ac - 3ad - b^2 + 2bd + c^2)$$

$$+ y^2z^2(4ab + 3ad - b^2 + c^2 + 2cd) + x^2zw(2a + b - 3c + 2d)$$

$$- y^2zw(2a + 3b - c + 2d)$$

$$- 2x^2w^2 + 2y^2w^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \pm 2xyz^2(a-b+c)(b+c)$$

$$\mp xzw^2(a+2c-d) \pm x^3z(a+2c-d)$$

$$+ x^2yz(a+2c+d) + yzw^2(a+2c+d) + y^3z(a+2c+d) \pm xy^2z(a+2c-d)$$

$$\mp xz^3(a^2b + a^2d - ab^2 - 4abc - 3ac^2 + 4acd - ad^3$$

$$+ 4b^2c - b^2d - 2bcd + bd^2 - c^2d)$$

$$+ yz^3(3a^2b + a^2d - 3ab^2 + 4abc - ac^2 + 2acd + ad^2 - 4b^2c$$

$$+ b^2d - 2bcd + bd^2 + c^2d)$$

$$\pm \frac{1}{2}xz^2w(a^2 + 6ab + 2ac - 6b^2 - 6c^2 + 8cd - d^2)$$

$$- \frac{1}{2}yz^2w(3a^2 + 2ab + 6ac + 2ad - 2b^2 + 4bd - 2c^2 + 3d^2)$$

(19)

$$\begin{aligned}
 & \mp \frac{1}{2} z^4 (a^2 b^2 + 2a^2 b d - a^2 c^2 + 2a^2 c d + 4ab^2 c + 4abc^2 + 2abcd^2 \\
 & \quad + 2acd^2 + 4b^2 cd - b^2 d^2 + 4bc^2 d + c^2 d^2) \\
 & \pm \frac{1}{2} z^3 w (a^2 b + a^2 c + 4abd + 4acd + 4b^2 c - 2b^2 d + 4bc^2 + bd^2 \\
 & \quad + 2c^2 d + cd^2) \\
 & + xz^3 (3a^2 c - a^2 d + ab^2 - 4abc + 2abd + 3ac^2 - ad^2 - b^2 d - 4bc^2 \\
 & \quad + 2bcd - c^2 d + cd^2) \\
 & \mp yz^3 (a^2 c - a^2 d + 3ab^2 + 4abc + 4abd + ac^2 + ad^2 + b^2 d + 4bc^2 \\
 & \quad + 2bcd + c^2 d + cd^2) \\
 + i & \left\{ \begin{aligned}
 & \mp \frac{1}{2} z^2 w^2 (b+c)(a-b+c+d) \pm \frac{1}{2} x^2 z^2 (a^2 + 8ac - 12bc + 4bd - d^2) \\
 & \quad \pm \frac{1}{2} y^2 z^2 (a^2 - 8ab - 12bc - 4cd - d^2) \\
 & + \frac{1}{2} xz^2 w (3a^2 - 6ab - 2ac + 2ad - 2b^2 - 2c^2 - 4cd + 3d^2) \\
 & \quad - xzw^2 (a - 2b + d) \\
 & \mp \frac{1}{2} yz^2 w (a^2 - 2ab - 6ac - 6b^2 - 8bd - 6c^2 - d^2) \\
 & \quad \pm yzw^2 (a - 2b - d) \\
 & \pm x^2 zw (a - 3b - c - d) + x^3 z (a - 2b + d) \pm x^2 yz (a - 2b - d) \\
 & \quad + xyz^2 (a^2 - 2ab + 2ac - 4bc + d^2) \\
 & \pm y^2 zw (a + b + 3c - d) \pm y^3 z (a - 2b - d) + xy^2 z (a - 2b + d)
 \end{aligned} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Der Schnitt dieser Flächen mit der Ebene $z = 0$ ist, da nur die unterstrichenen Glieder stehen bleiben, die Lemniskate.

Die beiden noch übrigen Schaaren von Flächen sind vierfach unendliche, da die Constanten a, b, c, d ganz willkürliche sind. Um die Gleichung zu einer reellen zu machen, müssen wir die Constanten complex annehmen, und haben dann zu ihrer Bestimmung aus den in a, b, c, d linearen Coefficienten der in z linearen Glieder folgende 4 Gleichungen:

Coefficient von

$$x^2 zw$$

$$y^2 zw$$

$$x^3 z, \quad xy^2 z, \quad -xzw^2$$

$$y^3 z, \quad x^2 yz, \quad yzw^2$$

Schaar I (oberes Vorzeichen):

$$2a + b - 3c + 2d + i(a - 3b - c - d) = A$$

$$(20) \quad -2a - 3b + c - 2d + i(a + b + 3c - d) = B$$

$$(20) \quad \begin{aligned} a+2c-d+i(a-2b+d) &= C \\ a+2c+d+i(a-2b-d) &= D \end{aligned}$$

Schaar II (unteres Vorzeichen):

$$\begin{aligned} 2a+b-3c+2d-i(a-3b-c-d) &= A \\ -2a-3b+c-2d-i(a+b+3c-d) &= B \\ -a-2c+d+i(a-2b+d) &= C \\ a+2c+d-i(a-2b-d) &= D \end{aligned}$$

woraus sich die Ausdrücke ergeben:

Schaar I:

Schaar II:

$$(21) \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{8} [A(1-2i) - B(1+2i)] & a &= \frac{1}{8} [A(1+2i) - B(1-2i)] \\ b &= \frac{1}{16} (-A-3B+4Ci) & b &= \frac{1}{16} (-A-3B+4Ci) \\ c &= \frac{1}{16} (-3A-B+4D) & c &= \frac{1}{16} (-3A-B+4D) \\ d &= \frac{1}{4} (-C+D)(1+i) & d &= \frac{1}{4} (C+D)(1-i) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke wird die Flächengleichung (19) reell, und zwar erhält man überraschender Weise für beide Schaaren von Flächen gleiche Ausdrücke. Ersetzt man in der gleicherweise aus beiden Ausdrucksgruppen resultierenden Gleichung noch A durch $8a$, B durch $8b$, C durch $8c$ und D durch $8d$, so ergibt sich als Gleichung der einen übrigen Flächenschaar:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2w^2 + 2y^2w^2 + 32cdxyz^2 + 2x^2z^2(-7a^2 - 6ab \\ &\quad - 3b^2 + 12c^2 + 4d^2) \\ &+ 2y^2z^2(3a^2 + 6ab + 7b^2 + 4c^2 + 12d^2) + 32acxz^2w + 32bdyz^2w \\ &\quad + 8ax^2zw + 8cx^3z + 8cxy^2z \\ &- 8cxyzw^2 + 8by^2zw + 8dy^3z + 8dx^2yz + 8dyzw^2 + 8cxz^3(-7a^2 \\ &\quad - 6ab - 3b^2 + 4c^2 + 4d^2) \\ &+ 8dyz^3(3a^2 + 6ab + 7b^2 + 4c^2 + 4d^2) + 4z^2w^2((a+b)^2 - (c^2 - d^2)) \\ &+ 4z^4((a^2 - b^2)^2 + 4(c^2 + d^2)^2 + 6(a^2d^2 - b^2c^2) - 14(a^2c^2 - b^2d^2) \\ &\quad - 12ab(c^2 - d^2)) \\ &+ 8z^3w(-a^3 - a^2b + ab^2 + b^3 + 4ac^2 + 4bd^2) \\ &= 0 \end{aligned} \right.$$

in homogenen Coordinaten. Wir haben:

3. „Die beiden Flächenschaaren, bei denen alle Bestimmungs-
„constanten endlich blieben (Satz 1. und 2.), fallen in eine zusam-
„men.“

a, b, c, d bleiben willkürliche Constanten.

Capitel II.

Die Gleichungen der singulären Ebenen und die Coordinaten der singulären Punkte.

Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein singulärer Punkt unserer Flächen, da jede durch ihn hindurch gehende Gerade die Fläche in zwei in ihm zusammenfallenden Punkten schneidet:

4. „Der reelle Doppelpunkt der Lemniskate ist ein singulärer
„Punkt der Flächen.“

Für diesen Fall können wir noch eine Betrachtung von Caylay (Proceed. of the London Math. Soc. III, 241) die Gleichung des von diesem Punkte aus der Fläche umschriebenen Kegels sechsten Grades finden. Ist nämlich die Gleichung einer Fläche vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten, deren einer der Anfangspunkt ist:

$$(23) \quad Aw^2 + 2Bw + C = 0$$

so ist die Gleichung des aus dem Anfangspunkte der Fläche umschriebenen Kegels (vgl. auch Kummer, Berl. Monatsber. 1864, 246):

$$(24) \quad AC - B^2 = 0$$

und wenn man dies aus unserer Gleichung (22) berechnet:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &x^6 + x^4y^2 - x^2y^4 - y^6 + 12cx^5z + 4dx^4yz + 8cx^3y^2z - 8dx^2y^3z \\ &\quad - 4cxy^4z - 12dy^5z \\ &+ 4x^4z^2(-2(a+b)^2 + 15c^2 + d^2) + 32cdx^3yz^2 + 8x^2y^2z^2(2(a+b)^2 \\ &\quad + 3(c^2 - d^2)) - 32cdxy^3z^2 + 4y^4z^2(-2(a+b)^2 - c^2 - 15d^2) \\ &+ 32cx^3z^3(-2(a+b)^2 + 5c^2 + d^2) + 32dx^2yz^3(2(a+b)^2 \\ &\quad + 3c^2 - d^2) + 32cxy^2z^3(2(a+b)^2 + c^2 - 3d^2) \\ &\quad + 32dy^3z^3(-2(a+b)^2 - c^2 - 5d^2) \\ &+ 16x^2z^4((a+b)^4 - 4(a+b)^2(3c^2 - d^2) + 15c^4 + 6c^2d^2 - d^4) \\ &\quad + 128cdxyz^4(2(a+b)^2 + c^2 - d^2) + 16y^2z^4(-(a+b)^4 \\ &\quad + 4(a+b)^2(c^2 - 3d^2) + c^4 - 6c^2d^2 - 15d^4) \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} +64cxz^5((a+b)^4 - 4(a+b)^2(c^2-d^2) + 3c^4 + 2c^2d^2 - d^4) \\ +64dyz^5(-(a+b)^4 + 4(a+b)^2(c^2-d^2) + c^4 - 2c^2d^2 - 3d^4) \\ +64z^6((a+b)^4(c^2-d^2) - 2(a+b)^2(c^2-d^2)^2 \\ +c^6 + c^4d^2 - c^2d^4 - d^6) = 0 \end{array} \right.$$

Dieser Kegel zerfällt für unsere Flächen in 6 singuläre Ebenen, welche durch den Anfangspunkt gehen und die Flächen längs Kegelschnitten berühren; die Gleichung des Kegels muss sich also in 6 lineare Factoren zerlegen lassen. Man findet als die Gleichungen der 6 durch den Anfangspunkt gehenden singulären Ebenen die folgenden:

$$(26) \quad \begin{array}{rcl} x - iy + 2z(a + b + c - di) & = & 0 \quad 6) \\ -x + iy + 2z(a + b - c + di) & = & 0 \quad 7) \\ x + iy + 2z(-a - b + c + di) & = & 0 \quad 8) \\ -x - iy + 2z(-a - b - c - di) & = & 0 \quad 9) \\ x + y + 2z(c + d) & = & 0 \quad 1) \\ x - y + 2z(c - d) & = & 0 \quad 13) \end{array}$$

Gleichungen, deren Product in der Tat die Kegelgleichung (25) ergibt.

Nennen wir den Anfangspunkt den singulären Punkt 1, so haben wir diese Ebenen mit 1, 6, 7, 8, 9, 13 zu bezeichnen, wie aus der folgenden, von Cayley aufgestellten Tabelle hervorgeht, aus der so-
 wol zu ersehen ist, welche singulären Ebenen durch einen singulären Punkt gehen, und welche singulären Punkte in einer singulären Ebene liegen, als auch, welche beiden singulären Ebenen durch die Verbindungslinie je zweier singulären Punkte gehen, und welche beiden singulären Punkte auf der Scheitellinie je zweier singulären Ebenen liegen.

Cayley's Tabelle.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16																									
1	*	7,8	6,8	6,7	9,13	1,6	1,7	1,8	1,9	6,13	7,13	8,13	1,13	6,9	7,9	8,9	1	9	13	8	7																				
2	7,8	*	5,8	5,7	2,5	10,14	2,7	2,8	5,14	2,10	7,14	8,14	5,10	2,14	7,10	8,10	2	10	14	7	8																				
3	6,8	5,8	*	5,6	3,5	3,6	11,15	3,8	5,15	6,15	3,11	8,15	5,11	6,11	3,15	8,11	3	11	15	6	5																				
4	6,7	5,9	5,6	*	4,5	4,6	4,7	12,16	5,16	6,16	7,16	4,12	5,12	6,12	7,12	4,16	4	12	16	5	6																				
5	9,13	2,5	3,5	4,5	*	3,4	4,7	2,3	5,9	2,13	3,13	4,13	5,13	2,9	3,9	4,9	5	13	9	4	3																				
6	1,6	10,14	3,6	4,6	3,4	*	2,4	1,3	1,14	6,10	3,14	4,14	1,10	2,9	3,9	4,9	6	14	10	3	4																				
7	1,7	2,7	11,15	2,4	1,4	*	1,4	1,2	1,15	2,15	7,11	8,11	1,11	2,11	7,15	8,11	7	15	11	2	1																				
8	1,8	2,8	3,8	12,16	2,4	1,4	*	1,2	1,16	2,16	7,11	8,12	1,12	2,12	3,12	8,16	8	16	12	1	2																				
9	1,9	5,14	15,16	5,9	*	1,3	1,2	1,16	15,16	14,16	14,16	14,15	1,5	9,14	9,15	9,16	9	16	12	1	5																				
10	6,13	2,10	6,15	2,13	2,13	6,10	2,15	2,16	15,16	*	13,16	13,15	10,13	2,6	10,15	10,16	10	2	6	15	16																				
11	7,13	7,14	3,11	7,11	3,13	3,14	4,15	3,16	14,16	13,16	*	13,14	11,13	11,14	3,7	11,16	11	3	7	14	13																				
12	8,13	8,14	8,15	4,12	4,13	4,14	4,15	8,12	14,15	13,15	13,14	*	12,13	12,14	12,15	4,8	12	4	8	13	14																				
13	1,13	5,10	5,11	5,12	5,13	1,10	1,11	1,12	1,5	10,13	11,13	12,13	*	11,12	10,12	10,11	13	5	1	12	11																				
14	6,9	2,14	6,11	6,12	2,9	6,14	2,11	2,12	9,14	2,6	11,14	12,14	*	9,12	*	9,10	14	6	2	11	12																				
15	7,9	7,10	3,15	7,12	3,9	3,10	7,15	3,12	9,15	10,15	3,7	11,15	11,12	9,12	*	9,10	15	7	3	10	9																				
16	8,9	8,10	8,11	4,16	4,9	4,10	4,11	8,16	9,16	10,16	11,16	4,8	10,11	9,10	*	16	8	4	9	10	11																				

Auf der Schnittlinie von je zwei singulären Ebenen liegen zwei singuläre Punkte; unsere 6 singulären Ebenen, unter die wir die Zahlen 1, 6, 7, 8, 9, 13, wie oben hinter ihren Gleichungen angegeben, verteilen wollen, besitzen 15 Schnittlinien. Jede Schnittlinie enthält den singulären Punkt 1, also können wir die Coordinaten der 15 anderen singulären Punkte dadurch finden, dass wir die Gleichungen je zweier Ebenen mit der Flächengleichung combiniren. Die Nummer des gefundenen singulären Punktes finden wir aus der Cayleyschen Tabelle, z. B. liefert die Schnittlinie der Ebenen 6 und 7 den singulären Punkt 4.

Aus den Coordinaten endlich von drei in derselben singulären Ebene liegenden singulären Punkten lässt sich mit leichter Mühe die Gleichung der betreffenden singulären Ebene bilden, und es sollen daher im Folgenden nur die Coordinaten der singulären Punkte und die Gleichungen der singulären Ebenen in tabellarischer Form zusammengestellt werden.

Tabelle der singulären Ebenen.

Nr.	Gleichung.
1	$x+y+2z(c+d) = 0$
2	$2y+z(3a+b+4d) -1 = 0$
3	$2ix + z(a+3b+4ic) +1 = 0$
4	$z(a-b+2ai+2bi) -1 = 0$
5	$-x+iy+z(-a+b-2c+2di)+1 = 0$
6	$x-iy+2z(a+b+c-di) = 0$
7	$-x+iy+2z(a+b-c+di) = 0$
8	$x+iy+2z(-a-b+c+di) = 0$
9	$-x-iy+2z(-a-b-c-di) = 0$
10	$-x-iy+z(-a+b-2c-2di)+1 = 0$
11	$x+iy+z(-a+b+2c+2di)+1 = 0$
12	$x-iy+z(-a+b+2c-2di)+1 = 0$
13	$x-y+2z(c-d) = 0$
14	$2y+z(-3a-b+4d) +1 = 0$
15	$2ix + z(-a-3a+4ci) -1 = 0$
16	$z(a-b-2ai-2bi) -1 = 0$

Tabelle der singulären Punkte.

Nr.	Aus der Schnittlinie der Ebenen.	x	y	z
1	Anfangspunkt.	0	0	0
2	7,8	$\frac{2a+2b-2c}{3a+b}$	$\frac{-2d}{3a+b}$	$\frac{1}{3a+b}$
3	6,8	$\frac{2c}{a+3b}$	$\frac{2ai+2bi+2d}{a+3b}$	$-\frac{1}{a+3b}$
4	6,7	∞i	∞	
		unendlich ferner Kreispunkt I der xy ebene.		
5	9,13	$\frac{-a-b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
6	1,6	$\frac{-a-b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
7	1,7	$\frac{a+b-ai-bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
8	1,8	$\frac{a+b+ai+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
9	1,9	$\frac{-a-b-ai-bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
10	6,13	$\frac{-a-b-ai-bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
11	7,13	$\frac{a+b+ai+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi}$	$\frac{1}{a-b-2ai-2bi}$
12	8,13	$\frac{a+b-ai-bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi}$	$\frac{1}{a-b+2ai+2bi}$
13	1,13	$\frac{-2c}{a-b}$	$\frac{-2d}{a-b}$	$\frac{1}{a-b}$
14	6,9	$\frac{-2a-2b-2c}{3a+b}$	$\frac{-2d}{3a+b}$	$\frac{1}{3a+b}$
15	7,9	$\frac{2c}{a+3b}$	$\frac{-2ai-2bi+2d}{a+3b}$	$-\frac{1}{a+3b}$
16	8,9	$-\infty i$	∞	
		unendlich ferner Kreispunkt J der xy ebene.		
Nr.	Ebenen.	x	y	z

Aus diesen Tabellen, wenn wir dabei die Cayleysche Tabelle mit in Betracht ziehen, können wir folgende Sätze ableiten, bei denen die Einschränkung nicht erst stets erwähnt werden soll, dass sie nur für diejenige Flächenschaar gelten, in welche die vier mit nur endlichen Bestimmungsconstanten zusammengefallen sind.

5a. „Die Flächen vierter Ordnung mit sechszehn singulären Punkten, welche eine Lemniskate als gemeinschaftliche Schnittcurve haben, besitzen 4 reelle und 12 imaginäre singuläre Punkte.“

5b. „Die Flächen vierter Ordnung mit sechszehn singulären Punkten, welche eine Lemniskate als gemeinschaftliche Schnittcurve haben, besitzen 4 reelle und 12 imaginäre singuläre Ebenen.“

6a. „In 12 der singulären Ebenen liegen 2 reelle singuläre Punkte; in den übrigen 4 singulären Ebenen, die sämtlich imaginär sind, liegt überhaupt kein reeller singulärer Punkt.“

6b. „Durch 12 der singulären Punkte gehen 2 reelle singuläre Ebenen; durch die übrigen 4 singulären Punkte, die sämtlich imaginär sind, geht überhaupt keine reelle singuläre Ebene.“

Es sind also sowol die vier singulären Punkte 1, 2, 13, 14, als auch die vier singulären Ebenen 1, 2, 13, 14 reell, während die übrigen paarweise conjugirt imaginär sind.

Die singulären Punkte 4 und 16 sind die Kreispunkte im Unendlichen der xy ebene als solche also auch Doppelpunkte der Lemniskate, daher:

7. „Auch die beiden imaginären Doppelpunkte der Lemniskate, die Kreispunkte im Unendlichen der xy ebene, sind singuläre Punkte der Flächen.“

Capitel III.

Die vierundzwanzig Kernpunkte.

Betrachten wir die Gleichungen der vier reellen singulären Ebenen 1, 2, 13, 14 genauer, so sehen wir, dass diese vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten sind

$$x = -\frac{2c}{3a+b}, \quad y = -\frac{2d}{3a+b}, \quad z = \frac{1}{3a+b}$$

und den wir einen „Kernpunkt“ der Flächen nennen wollen. Er hat noch die Eigentümlichkeit, die Strecke zwischen den beiden singulären

Punkten 2 und 14 zu halbiren. Auch die übrigen 12 singulären Ebenen liefern, zu je 4 zusammengefasst, drei solche Kernpunkte, in denen sich die betreffenden vier Ebenen schneiden, und zwar

$$7) 8) 11) 12) \quad x = \frac{-2a-2b+2c}{a+3b}, \quad y = \frac{2d}{a+3b}, \quad z = -\frac{1}{a+3b}$$

$$5) 6) 9) 10) \quad x = \frac{2a+2b+2c}{a+3b}, \quad y = \frac{2d}{a+3b}, \quad z = -\frac{1}{a+3b}$$

3) 4) 15) 16) sind sämtlich der y axe parallel, haben also im Unendlichen einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Wir nehmen sämtliche Combinationen von vier Ebenen vor, von denen nicht drei durch denselben singulären Punkt gehen. Es sind im Ganzen 60 solcher Combinationen, die wir folgendermassen in 15 Gruppen teilen (der Grund für die durch Klammern angedeutete Zusammengehörigkeit je zweier Systeme wird später erhellen).

Gruppe A	Gruppe B	Gruppe C	Gruppe D
{ 1 2 13 14 { 3 4 15 16	{ 1 4 5 8 { 10 11 14 15	{ 1 2 5 6 { 11 12 15 16	{ 1 2 9 10 { 3 4 11 12
{ 5 6 9 10 { 7 8 11 12	{ 2 3 6 7 { 9 12 13 16	{ 3 4 7 8 { 9 10 13 14	{ 5 6 13 14 { 7 8 15 16

Gruppe E	Gruppe F	Gruppe G	Gruppe H
{ 1 3 5 7 { 10 12 14 16	{ 1 3 9 11 { 2 4 10 12	{ 1 3 13 15 { 2 4 14 16	{ 1 4 9 12 { 2 3 10 11
{ 2 4 6 8 { 9 11 13 15	{ 5 7 13 15 { 6 8 14 16	{ 5 7 9 11 { 6 8 10 12	{ 5 8 13 16 { 6 7 14 15

Gruppe J	Gruppe K	Gruppe L	Gruppe M
{ 1 4 13 16 { 2 3 14 15	{ 1 6 11 16 { 2 5 12 15	{ 1 6 12 15 { 2 5 11 16	{ 1 7 10 16 { 3 5 12 14
{ 5 8 9 12 { 6 7 10 11	{ 3 8 9 14 { 4 7 10 13	{ 3 8 10 13 { 4 7 9 14	{ 2 8 9 15 { 4 6 11 13

Gruppe N	Gruppe O	Gruppe P
{ 1 7 12 14 { 3 5 10 16	{ 1 8 10 15 { 4 5 11 14	{ 1 8 11 14 { 4 5 10 15
{ 2 8 11 13 { 4 6 9 15	{ 2 7 9 16 { 3 6 12 13	{ 2 7 12 13 { 3 6 9 16

Bei näherer Untersuchung finden wir, dass in Gruppen A, B, G, H, K, M die jedesmal in einem System vereinigten vier Ebenen

sich in einem Punkte schneiden, während das bei den Systemen der übrigen Gruppen nicht der Fall ist. Wir erhalten also 24 Kernpunkte und den Satz:

8a. „Ausser 16 mal zu je 6 in den 16 singulären Punkten der „Flächen schneiden sich die 16 singulären Ebenen noch 24 mal zu „je 4 in 24 anderen Punkten, den 24 Kernpunkten der Flächen.“

Die Coordinaten der Kernpunkte, die wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1$ u. s. f. bezeichnen, sind folgende:

Gruppe A: (1, 2, 13, 14) $\alpha \quad x = \frac{-2c}{3a+b} \quad y = \frac{-2d}{3a+b} \quad z = \frac{1}{3a+b}$

(3, 4, 15, 16) β Im Unendlichen. Richtung der y axe.

(5, 6, 9, 10) $\gamma \quad x = \frac{2a+2b+2c}{a+3b} \quad y = \frac{2d}{3a+b}$
 $z = -\frac{1}{a+3b}$

(7, 8, 11, 12) $\delta \quad x = \frac{-2a-2b+2c}{a+3b} \quad y = \frac{2d}{a+3b}$
 $z = -\frac{1}{a+3b}$

Gruppe B: (1, 4, 5, 8) $\alpha_1 \quad x = \frac{a+b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$
 $y = \frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \quad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$

(10, 11, 14, 15) $\beta_1 \quad x = \frac{-ai-bi-2c}{a-b} \quad y = \frac{a+b-2d}{a-b}$
 $z = \frac{1}{a-b}$

(2, 3, 6, 7) $\gamma_1 \quad x = \frac{i}{2} \quad y = \frac{1}{2} \quad z = 0$

(9, 12, 13, 16) $\delta_1 \quad x = \frac{-a-b+ai+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$
 $y = \frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \quad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$

Gruppe G: (1, 3, 13, 15) $\alpha_2 \quad x = \frac{2c}{a+3b} \quad y = \frac{2d}{a+3b} \quad z = -\frac{1}{a+3b}$

(2, 4, 14, 16) β_2 Im Unendlichen. Richtung der x axe.

$$(5, 7, 9, 11) \quad \gamma_2 \quad x = \frac{-2c}{3a+b} \quad y = \frac{2ai+2bi-2d}{3a+b} \\ z = \frac{1}{3a+b}$$

$$(6, 8, 10, 12) \quad \delta_2 \quad x = \frac{-2c}{3a+b} \quad y = \frac{-2ai-2bi-2d}{3a+b} \\ z = \frac{1}{3a+b}$$

Gruppe H: (1, 4, 9, 12) $\alpha_3 \quad x = \frac{-a-b-ai-2c}{a-b+2ai+2bi}$
 $y = \frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \quad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$

$$(2, 3, 10, 11) \quad \beta_3 \quad x = \frac{ai+bi-2c}{a-b} \quad y = \frac{-a-b-2d}{a-b} \\ z = \frac{1}{a-b}$$

$$(6, 7, 14, 15) \quad \gamma_3 \quad x = -\frac{i}{2} \quad y = -\frac{1}{2} \quad z = 0$$

$$(5, 8, 13, 16) \quad \delta_3 \quad x = \frac{a+b-ai-bi-2c}{a-b-2ai-2bi} \\ y = \frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \quad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$$

Gruppe K: (1, 6, 11, 16) $\alpha_4 \quad x = \frac{-a-b+ai+bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$
 $y = \frac{a+b-ai-bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \quad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$

$$(2, 5, 12, 15) \quad \beta_4 \quad x = \frac{-ai-bi-2c}{a-b} \quad y = \frac{-a-b-2d}{a-b} \\ z = \frac{1}{a-b}$$

$$(3, 8, 9, 14) \quad \gamma_4 \quad x = \frac{i}{2} \quad y = -\frac{1}{2} \quad z = 0$$

$$(4, 7, 10, 13) \quad \delta_4 \quad x = \frac{a+b+ai+bi-2c}{a-b+2ai+2bi} \\ y = \frac{a+b+ai+bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \quad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$$

$$\text{Gruppe } M: (1, 7, 10, 16) \quad \alpha_5 \quad x = \frac{a+b-ai-bi-2c}{a-b-2ai-2bi}$$

$$y = \frac{-a-b+ai+bi-2d}{a-b-2ai-2bi} \quad z = \frac{1}{a-b-2ai-2bi}$$

$$(3, 5, 12, 14) \quad \beta_5 \quad x = \frac{ai+bi-2c}{a-b} \quad y = \frac{a+b-2d}{a-b}$$

$$z = \frac{1}{a-b}$$

$$(2, 8, 9, 15) \quad \gamma_5 \quad x = -\frac{i}{2} \quad y = \frac{1}{2} \quad z = 0$$

$$(4, 6, 11, 13) \quad \delta_5 \quad x = \frac{-a-b-ai-bi-2c}{a-b+2ai+2bi}$$

$$y = \frac{-a-b-ai-bi-2d}{a-b+2ai+2bi} \quad z = \frac{1}{a-b+2ai+2bi}$$

Fassen wir die Reellitätsverhältnisse ins Auge, so ergibt sich

9a. „Von den 24 Kernpunkten sind 6 reell.“

Die vier Kernpunkte $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ und ebenso die beiden im Unendlichen liegenden Kernpunkte β und β_2 sind in ihrer Lage vollkommen unabhängig von den willkürlichen Constanten a, b, c, d , also Fixpunkte unserer Flächen; die beiden unendlich fernen Kernpunkte gehören, weil in der Richtung der x - und y -xe liegend, ebensowol der xy -ebene an als die 4 übrigen, also:

10. „Es giebt in der xy -ebene sechs feste Punkte, in welchen „sich für jede Fläche unserer vielfach unendlichen Schaar je vier „singuläre Ebenen schneiden“

Gehen wir auf die in Gleichung (7) des ersten Capitels angeführten Doppeltangenten unserer Lemniskate zurück und setzen in ihnen beim Uebergang von homogenen zu Cartesischen Coordinaten $w = 1$, so sehen wir, dass die 6 in der xy -ebene liegenden Fixpunkte nichts anderes sind als die Durchschnittspunkte der Doppeltangenten der Lemniskate, und zwar

$$\gamma_2 \text{ von 1) und 4);} \quad \gamma_3 \text{ von 2) und 4);} \quad \beta \text{ von 3) und 4)}$$

$$\gamma_5 \text{ von 1) und 3);} \quad \gamma_4 \text{ von 2) und 3);} \quad \beta_2 \text{ von 1) und 2)}$$

11. „Diese 6 Fixpunkte sind die 6 Durchschnittspunkte der 4 „Doppeltangenten an die zu Grunde gelegte Lemniskate.“

Dass die singulären Ebenen der Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten aus jeder beliebigen Ebene die Doppeltangenten

ihrer Schnittcurve mit der Fläche ausschneiden, darauf hat schon Kummer hingewiesen (Berl. Monatsber. 1864, 256); und wir finden hier eine Bestätigung seiner Bemerkung; denn setzen wir in den Gleichungen der singulären Ebenen $z = 0$, so zeigt sich:

12. „Es schneiden aus die singulären Ebenen 2, 3, 14, 15 aus der xy -ebene der Reihe nach die Doppeltangenten 1, 4, 2, 3.“

Die beiden reellen Doppeltangenten 1) und 2) werden also auch von den reellen singulären Ebenen 2 und 14 ausgeschnitten; die beiden anderen reellen singulären Ebenen 1 und 13 schneiden aus der xy -ebene die beiden reellen Wendetangenten der Lemniskate aus.

13. „Die vier reellen singulären Ebenen der Flächen schneiden aus der xy -ebene die beiden reellen Doppeltangenten und die beiden reellen Wendetangenten der Lemniskate aus.“

Die beiden im Unendlichen liegenden Kernpunkte kann man bei der Unbestimmtheit ihrer z -Coordinate auch statt der Ebene $z = 0$ den beiden Ebenen $z = \frac{1}{3a + b}$ und $z = -\frac{1}{a + 3b}$ zuteilen; dann ergibt sich bei der Betrachtung der z -Coordinaten aller Kernpunkte der Satz:

14. „Die 24 Kernpunkte liegen zu je vieren in der xy -ebene und 5 ihr parallelen Ebenen.“

Zu erinnern ist hierbei, dass auch in jeder singulären Ebene 6 Kernpunkte liegen; z. B. in der singulären Ebene 1 die Kernpunkte $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$.

In den Gruppen A bis P waren sämtliche Systeme von je 4 Ebenen, von denen nicht 3 durch denselben singulären Punkt gehen, aufgeführt. In den 4 zu einem solchen System gehörigen Ebenen liegen nun jedesmal 12 singuläre Punkte; es giebt also jedesmal 4 singuläre Punkte, welche auf keiner der vier Ebenen des Systems liegen. Die diesen 4 Punkten in der Zahlenbezeichnung entsprechenden singulären Ebenen gehen nur dann durch einen Punkt, wenn die ursprünglichen vier Ebenen durch einen Punkt gehen, und schneiden sich in 4 Punkten, wenn die ursprünglichen 4 Ebenen sich in 4 Punkten schneiden. Beispielsweise schneiden sich die 4 Ebenen 2, 3, 6, 7 im Punkte γ_1 . Es liegen auf ihnen die singulären Punkte:

auf 2:	2	10	14	7	8	5
- 3:	3	11	15	6	5	8
- 6:	6	14	10	3	4	1
- 7:	7	15	11	2	1	4

In keiner dieser 4 Ebenen liegt einer der vier Punkte 9, 12, 13, 16; es gehen also die 4 Ebenen 9, 12, 13, 16 durch einen Punkt (δ_1). Rückwärts kommt man von dem System 9, 12, 13, 16 wieder auf das System 2, 3, 6, 7. Je zwei solche sich entsprechenden Systeme gehören zu derselben Gruppe und sind in der Tabelle der Gruppen bereits durch eine Klammer zusammengefasst (siehe ferner Cap. VII, S. 141).

Capitel IV.

Das Kerntetraeder.

Durch je drei Kernpunkte einer Gruppe, zunächst der Gruppen *B, H, K, M* legen wir eine Ebene. In jeder solchen Ebene liegen dann noch zwei fernere Kernpunkte. Wir erhalten so die Ebenen:

$$\begin{aligned}
 [\alpha_1\beta_1\delta_1\beta_3\gamma_3]: & \quad -ix+y+z(-a+b-2ci+2d)+1=0 \\
 [\alpha_3\beta_3\delta_3\beta_1\gamma_1]: & \quad ix-y+z(-a+b+2ci-2d)+1=0 \\
 [\alpha_4\beta_4\delta_4\beta_3\gamma_5]: & \quad -ix-y+z(-a+b-2ci-2d)+1=0 \\
 [\alpha_6\beta_6\delta_6\beta_4\gamma_4]: & \quad ix+y+z(-a+b+2ci+2d)+1=0 \\
 [\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_3\delta_3]: & \quad 2x+2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c+4d)-1-i=0 \\
 [\alpha_3\beta_3\gamma_3\alpha_1\delta_1]: & \quad -2x-2y+z(-a-3b+3ai+bi-4c-4d)-1-i=0 \\
 [\alpha_4\beta_4\gamma_4\alpha_6\delta_6]: & \quad -2x-2y+z(-a-3b-3ai-bi-4c-4d)-1+i=0 \\
 [\alpha_6\beta_6\gamma_6\alpha_4\delta_4]: & \quad 2x+2y+z(-a-3b-3ai-bi+4c+4d)-1+i=0 \\
 [\alpha_1\gamma_1\delta_1\beta_3\gamma_3]: & \quad ix+y+2z(a+b+ci+d)=0 \\
 [\alpha_3\gamma_3\delta_3\beta_1\gamma_1]: & \quad ix+y+2z(-a-b+ci+d)=0 \\
 [\alpha_4\gamma_4\delta_4\beta_5\gamma_5]: & \quad ix-y+2z(a+b+ci-d)=0 \\
 [\alpha_6\gamma_6\delta_6\beta_4\gamma_4]: & \quad ix-y+2z(-a-b+ci-d)=0 \\
 [\beta_1\gamma_1\delta_1\alpha_3\delta_3]: & \quad -2x+2y+z(-a-3b-3ai-bi-4c+4d)-1+i=0 \\
 [\beta_3\gamma_3\delta_3\alpha_1\delta_1]: & \quad 2x-2y+z(-a-3b-3ai-bi+4c-4d)-1+i=0 \\
 [\beta_4\gamma_4\delta_4\alpha_6\delta_6]: & \quad 2x-2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c-4d)-1-i=0 \\
 [\beta_6\gamma_6\delta_6\alpha_4\delta_4]: & \quad -2x+2y+z(-a-3b+3ai+bi-4c+4d)-1-i=0
 \end{aligned}$$

Es liegen also in einer Ebene die Kernpunkte

$$\begin{array}{llllll}
 \alpha_1\delta_1\beta_3\gamma_3 & \text{sowol mit } \alpha_3 & \text{als mit } \delta_3 & \text{als mit } \beta_1 & \text{als mit } \gamma_1; \\
 \alpha_3\delta_3\beta_1\gamma_1 & \text{,, ,, } \alpha_1 & \text{,, } \delta_1 & \text{,, } \beta_3 & \text{,, } \gamma_3; \\
 \alpha_4\delta_4\beta_5\gamma_5 & \text{,, ,, } \alpha_6 & \text{,, } \delta_6 & \text{,, } \beta_4 & \text{,, } \gamma_4; \\
 \alpha_6\delta_6\beta_4\gamma_4 & \text{,, ,, } \alpha_4 & \text{,, } \delta_4 & \text{,, } \beta_6 & \text{,, } \gamma_6.
 \end{array}$$

Da nun z. B. die 4 Punkte $\alpha_1\alpha_3\delta_1\delta_3$ nicht in einer Ebene liegen, so müssen jedesmal die 4 Punkte

$$\begin{cases} \alpha_1 \delta_1 \beta_3 \gamma_3 : C \\ \alpha_3 \delta_3 \beta_1 \gamma_1 : D \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_4 \delta_4 \beta_5 \gamma_5 : E \\ \alpha_5 \delta_5 \beta_4 \gamma_4 : F \end{cases}$$

in einer geraden Linie liegen, und es ist zunächst schon ersichtlich, dass die durch eine Klammer verbundenen Paare von Geraden sich nicht schneiden. Die Geraden mögen, wie oben angegeben, C, D, E, F heissen. Jede derselben ist als Schnittlinie von 4 der obigen Ebenen gegeben.

Es schneiden sich nun C und D nicht, und E und F nicht; dagegen schneiden sowohl C als D beide Geraden E und F. Wir erhalten also 4 Punkte, in deren jedem sich 8 der obigen Ebenen schneiden, und deren Coordinaten sind:

$$\text{Punkt C, E} = \text{(I): } x = \frac{-2ai - 2bi + 2c}{a + 3b}, \quad y = \frac{2d}{a + 3b}, \quad z = -\frac{1}{a + 3b}$$

$$\text{Punkt C, F} = \text{(II): } x = \frac{-2c}{3a + b}, \quad y = \frac{-2a - 2b - 2d}{3a + b}, \quad z = \frac{1}{3a + b}$$

$$\text{Punkt D, E} = \text{(III): } x = \frac{-2c}{3a + b}, \quad y = \frac{2a + 2b - 2d}{3a + b}, \quad z = \frac{1}{3a + b}$$

$$\text{Punkt D, F} = \text{(IV): } x = \frac{2ai + 2bi + 2c}{a + 3b}, \quad y = \frac{2d}{a + 3b}, \quad z = -\frac{1}{a + 3b}$$

Von je 4 in einer Geraden liegenden Kernpunkten gehören jedesmal 2 zu einer der Gruppen B, H, K, M und die beiden anderen zu der dieser entsprechenden Gruppe, wobei B und H, K und M einander entsprechen. Jetzt stellen wir auch die Gruppen A und G anders zusammen:

1	2	13	14		1	3	13	15
3	4	15	16		2	4	14	16
				und				
5	7	9	11		5	6	9	10
6	8	10	12		7	8	11	12

und wir sehen bei einem Blick auf die in der Tabelle der Kernpunkte zusammengestellten Ordinaten, dass die Punkte (1, 2, 13, 14), (5, 7, 9, 11), (6, 8, 10, 12) auf einer Geraden A mit den Gleichungen

$$x + \frac{2c}{3a + b} = 0, \quad z - \frac{1}{4a + b} = 0$$

und die Punkte (1, 3, 13, 15), (5, 6, 9, 10), (7, 8, 11, 12) auf einer Geraden B mit den Gleichungen

$$y - \frac{2d}{a+3b} = 0, \quad z + \frac{1}{a+3b} = 0$$

liegen. Die erste dieser Geraden ist der y -axe parallel, und da dies auch die vier in dem unendlich fernen Kernpunkte (3, 4, 15, 16) sich schneidenden Ebenen sind, liegt auch dieser Punkt auf der Geraden. Ebenso liegt der Punkt (2, 4, 14, 16) auf der zur x -axe parallelen Geraden B. Also:

15a. „Die 24 Kernpunkte liegen zu je 4 in 6 geraden Linien.“

Es schneiden sich nun die Geraden A und B untereinander nicht, wol aber schneidet jede von beiden alle 4 Geraden C, D, E, F, und zwar in den Punkten (I), (II), (III), (IV) der vorigen Seite:

16a. „Diese 6 Geraden bilden ein Tetraeder.“

In diesem Tetraeder sind A und B, C und D, E und F Gegenkanten, (I), (II), (III), (IV) die Eckpunkte. Die Gleichungen der Seitenflächen sind:

[I] durch (II), (III), (IV):	$2ix + z(-3a - b + 4ci) + 1 = 0$
[II] durch (III), (IV), (I):	$2y + z(-a - 3b + 4d) - 1 = 0$
[III] durch (IV), (I), (II):	$2y + z(a + 3b + 4d) + 1 = 0$
[IV] durch (I), (II), (III):	$2ix + z(3a + b + 4ci) - 1 = 0.$

Das Tetraeder heisse das Kerntetraeder unserer Flächen. Es folgen die Sätze:

17. „Zwei der Seitenflächen dieses Kerntetraeders sind der x -axe, die beiden andern der y -axe parallel.“

18. „Im Kerntetraeder sind reell:

- 1) „Zwei Gegenkanten (A) und (B)“
- 2) „die in der einen von ihnen (A) liegenden Eckpunkte „(II) und (III)“
- 3) „die durch die andere von ihnen (B) gehenden Seitenflächen [III] und [II].“

19) „Von den beiden reellen Gegenkanten des Kerntetraeders „ist die eine der x -axe, die andere der y -axe parallel.“

Aus den Coordinaten der Kernpunkte lässt sich ferner noch nachweisen:

20a. „Die 4 auf einer Kante des Kerntetraeders liegenden „Kernpunkte besitzen ein constantes Doppelverhältniss, das für die

„der x - und y -axe parallelen Kanten den Wert -1 , für die übrigen „den Wert $+2$ besitzt.“

Es werde noch die Bemerkung angefügt:

21a. „In jeder Seitenfläche des Kerntetraeders liegen 12 Kernpunkte.“

und darauf hingewiesen, dass jede der 6 parallelen Ebenen, in welchen nach Satz 14. die Kernpunkte liegen, jede der Tetraederkanten in einem Kernpunkte schneidet; also:

22. „Die Schnittpunkte der 6 Tetraederkanten mit der xy -„ebene sind die 6 Fixpunkte unserer Flächen.“

Capitel V.

Die vierundzwanzig Kernebenen.

Bei dem reciprok polaren Verhalten der singulären Ebenen und singulären Punkte der Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten liegt die Vermutung nahe, es werden, ebenso wie sich von unseren singulären Ebenen 24mal je 4 in einem Punkte schnitten, auch die entsprechenden singulären Punkte 24mal zu je 4 in einer Ebene liegen. Und in der Tat zeigt sich, dass, wenn diesmal die Zahlen in den Gruppen A bis P die singulären Punkte bedeuten, jedesmal vier zu einem System vereinigte Punkte in den Gruppen A, B, G, H, K, M in einer Ebene liegen, während das für die übrigen nicht der Fall ist:

8b. „Ausser 16 mal zu je 6 in den 16 singulären Ebenen liegen „die 16 singulären Punkte noch 24mal zu je 4 in 24 anderen Ebenen, den 24 Kernebenen unserer Flächen.“

Die Gleichungen der Kernebenen sind:

$$\begin{array}{l}
 A \left\{ \begin{array}{ll} [1, 3, 13, 15]: & x+2cz = 0 \\ [2, 4, 14, 16]: & z(3a+b)-1 = 0 \\ [5, 6, 9, 10]: & 2x+z(3a+b+4c)-1 = 0 \\ [7, 8, 11, 12]: & 2x+z(-3a-b+4c)+1 = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 B \left\{ \begin{array}{ll} [1, 2, 13, 14]: & y+2dz = 0 \\ [3, 4, 15, 16]: & z(a+3b)+1 = 0 \\ [5, 7, 9, 11]: & 2iy+z(a+3b+4di)+1 = 0 \\ [6, 8, 10, 12]: & 2iy+z(-a-3b+4di)-1 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$C \left\{ \begin{array}{l} [1, 4, 5, 8]: ix+y+2z(a+b+ci+d) = 0 \\ [9, 12, 13, 16]: ix-y+z(a-b+2ci-2d)-1 = 0 \\ [2, 3, 10, 11]: 2x-2y+z(-a-3b-3ai-bi+4c-4d) \\ \qquad \qquad \qquad -1+i = 0 \\ [6, 7, 14, 15]: 2x+2y+z(a+3b-3ai-bi+4c+4d) \\ \qquad \qquad \qquad +1+i = 0 \end{array} \right.$$

$$D \left\{ \begin{array}{l} [1, 4, 9, 12]: ix+y+2z(-a-b+ci+d) = 0 \\ [5, 8, 13, 16]: ix-y+z(-a+b+2ci-2d)+1 = 0 \\ [2, 3, 6, 7]: 2x+2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c+4d) \\ \qquad \qquad \qquad -1-i = 0 \\ [10, 11, 14, 15]: 2x-2y+z(a+3b+3ai+bi+4c-4d) \\ \qquad \qquad \qquad +1-i = 0 \end{array} \right.$$

$$E \left\{ \begin{array}{l} [1, 6, 11, 16]: ix-y+2z(a+b+ci-d) = 0 \\ [4, 7, 10, 13]: ix+y+z(a-b+2ci+2d)-1 = 0 \\ [2, 8, 9, 15]: 2x+2y+z(-a-3b-3ai-bi+4c+4d) \\ \qquad \qquad \qquad -1+i = 0 \\ [3, 5, 12, 14]: 2x-2y+z(a+3b-3ai-bi+4c-4d) \\ \qquad \qquad \qquad +1+i = 0 \end{array} \right.$$

$$F \left\{ \begin{array}{l} [1, 7, 10, 16]: ix-y+2z(-a-b+ci-d) = 0 \\ [4, 6, 11, 13]: ix+y+z(-a+b+2ci+2d)+1 = 0 \\ [2, 5, 12, 15]: 2x-2y+z(-a-3b+3ai+bi+4c-4d) \\ \qquad \qquad \qquad -1-i = 0 \\ [3, 8, 9, 14]: 2x+2y+z(a+3b+3ai+bi+4c+4d) \\ \qquad \qquad \qquad +1-i = 0 \end{array} \right.$$

9b. „Von den 24 Kernebenen sind 6 reell.“

Vergleichen wir die Gleichungen der Kernebenen mit denen der im Beginn des vorigen Capitels aufgestellten Ebenen, so sehen wir, dass sie mit diesen identisch sind. Es folgen daraus weiter die Sätze:

15b. „Die 24 Kernebenen schneiden sich zu 4 in 6 geraden „Linien.“

16b. „Diese 6 geraden Linien bilden ein Tetraeder.“

23. „Das Tetraeder aus den singulären Ebenen ist mit dem „Tetraeder aus den singulären Punkten identisch (Kerntetraeder).“

21b. „In jedem Eckpunkte des Kerntetraeders schneiden sich „12 Kernebenen.“

24a. „In jeder Kernebene liegen 5 Kernpunkte.“

24b. „Durch jeden Kernpunkt gehen 5 Kernebenen.“

25. „Durch den Coordinatenanfang gehen 6 Kernebenen, deren jede eine Kante des Kerntetraeders enthält.“

26. „Die 4 in einer Kante des Kantentetraeders sich schneidenden Kernebenen schneiden die Gegenkante in deren 4 Kernpunkten.“

20b. „Die 4 in einer Kante des Kerntetraeders sich schneidenden Kernebenen besitzen ein constantes Doppelverhältniss, das für die der x - und y -axe parallelen Kanten den Wert -1 , für die übrigen den Wert $+2$ besitzt.“

Capitel VI.

Die sechs in einer singulären Ebene liegenden singulären Punkte.

Setzen wir in unserer Flächengleichung (22) $w = 1$, und eliminieren aus ihr und der Gleichung einer unserer singulären Ebenen eine Unbekannte, so erhalten wir die Gleichung der Projection auf eine der Coordinatenebenen der Schnittcurve der singulären Ebene mit der Fläche. Da die singulären Ebenen die Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten längs eines Kegelschnitts berühren, müssen wir die Gleichung eines doppelt zählenden Kegelschnitts erhalten. Beispielsweise hat die Projection der Schnittcurve der singulären Ebene 1 mit der Fläche auf die yz -ebene die Gleichung:

$$(2y^2 + 8dyx - 2x^2(a^2 - b^2 + 4d^2) + 2z(a + b))^2 = 0$$

und es genügen dieser Gleichung auch die Coordinaten der singulären Punkte 1, 6, 7, 8, 9, 13.

Wir fassen die in der singulären Ebene 1 liegenden 6 singulären Punkte 1, 6, 7, 8, 9, 13 näher ins Auge. Ihre 15 Verbindungslinien können wir auf folgende 15 Arten zu je dreien zusammenstellen:

1, 6; 7, 8; 9, 13	1, 7; 6, 13; 8, 9 : α_5
1, 6; 7, 9; 8, 13	1, 8; 6, 7; 9, 13 : α_1
1, 6; 7, 13; 8, 9 : α_4	1, 8; 6, 9; 7, 13
1, 7; 6, 8; 9, 13	1, 8; 6, 13; 7, 9
1, 7; 6, 9; 8, 13	1, 9; 6, 7; 8, 13 : α_3

1, 9;	6, 8;	7, 13
1, 9;	6, 13;	7, 8
1, 13;	6, 7;	8, 9
1, 13;	6, 8;	7, 9 : α_2
1, 13;	6, 9;	7, 8 : α

Jede Verbindungslinie zweier singulären Punkte ist die Schnittlinie zweier singulären Ebenen; aus der im Capitel II. mitgetheilten Cayleyschen Tabelle ist zu entnehmen, welche beiden singulären Ebenen das jedesmal sind. Für jede Zusammenstellung von drei Verbindungslinien findet man 4 singuläre Ebenen, und zwar sind diese in den unterstrichenen Fällen solche 4 singulären Ebenen, die sich in einem Punkte, also einem Kernpunkte schneiden. Die Kernpunkte sind der Reihe nach $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha$. Wir können also auf 6 verschiedene Weisen die 6 singulären Punkte in der singulären Ebene 1 so zusammenstellen, dass die 3 Verbindungslinien von je zwei Punkten einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben. Ist dies aber der Fall, so ist das Sechseck, in welchem je zwei verbundene Punkte gegenüberliegende Eckpunkte sind, einem Kegelschnitt umschrieben, also ein Brianchonsches Sechseck, und der gemeinschaftliche Schnittpunkt seiner Diagonalen heisst dann ein Brianchonscher Punkt. Für jeden Brianchonschen Punkt lassen sich aber aus den 6 Eckpunkten 4 verschiedene Sechsecke bilden, die Kegelschnitten umschrieben sind; unsere 6 singulären Punkte in der singulären Ebene 1 lassen sich also auf 24 verschiedene Weisen zu einem Brianchonschen Sechseck zusammensetzen. Dasselbe Verhalten zeigen auch die jedesmal 6 singulären Punkte in den übrigen singulären Ebenen; wir erhalten also die Sätze:

27a. „Die 6 in einer singulären Ebene liegenden singulären Punkte liegen nicht nur in einem Kegelschnitte, sondern bilden auch ein Brianchonsches Sechseck, und zwar schneiden sich unter ihren 15 Verbindungslinien 6 mal je 3 in einem Punkte. — Wir erhalten also in jeder singulären Ebene 24 Kegelschnitte, um welche sich aus den 6 singulären Punkten in derselben Ebene ein Brianchonsches Sechseck bilden lässt, und 6 Brianchonsche Punkte.“

28a. „Die 6 Brianchonschen Punkte in jeder singulären Ebene sind mit den 6 in derselben Ebene liegenden Kernpunkten identisch.“

Betrachten wir nun die Lage der 6 Kernpunkte $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ in der singulären Ebene 1. Es stellt sich heraus, dass stets in einer Geraden liegen die Punkte

α	α_1	α_4
α	α_3	α_5
α_1	α_2	α_6
α_2	α_3	α_4

oder, dass die 6 Punkte in den Ecken eines vollständigen Vierseits liegen, wobei α und α_2 , α_1 und α_3 , α_4 und α_5 Gegenecken sind. Auch dies Resultat können wir auf die übrigen singulären Ebenen ausdehnen:

29a. „Die 6 Brianchonschen Punkte (Kernpunkte) in jeder singulären Ebene sind die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits.“

Wir hatten oben die Gruppen A und G , B und H , K und M als entsprechende bezeichnet. Es liegt nun in jeder singulären Ebene je ein Kernpunkt aus jeder Gruppe, und die beiden Kernpunkte aus entsprechenden Gruppen sind Gegenecken des Vierseits.

Die beiden Kernpunkte aus entsprechenden Gruppen haben aber noch besondere Eigenschaften; wie aus der Tabelle für die singuläre Ebene 1 auf voriger Seite sich ergibt, liegen sie mit 2 singulären Punkten auf derselben geraden Linie. Auch dies lässt sich verallgemeinern:

30. „In jeder singulären Ebene liegt ein Kernpunkt aus jeder „Gruppe.“

31. „Die beiden Kernpunkte aus entsprechenden Gruppen sind „Gegenecken des vollständigen Vierseits.“

32. „Die 6 singulären Punkte jeder singulären Ebene liegen zu „je zweien auf den 3 Diagonalen des durch die 6 Kernpunkte in „derselben Ebene bestimmten vollständigen Vierseits.“

Wie die 4 in einer Kante des Kerntetraeders liegenden 4 Kernpunkte haben nun auch die 4 in einer Diagonale liegenden ausgezeichneten Punkte ein constantes Doppelverhältniss, und zwar können wir den Satz aufstellen:

33. „Die in jeder Diagonale eines der vollständigen Vierseite „liegenden beiden singulären Punkte und beiden Kernpunkte be- „sitzen ein constantes Doppelverhältniss, das für die zur x - und y - „axe parallelen Diagonalen den Wert -1 , für die übrigen den Wert „ $+2$ hat.“

Die Punkte, die so ein constantes Doppelverhältniss besitzen, sind in der singulären Ebene

1:	1	13	α	α_2	6	7	α_1	α_3	8	9	α_4	α_5
2:	2	14	α	β_2	5	8	γ_1	β_3	7	10	β_4	γ_5
3:	3	15	β	α_2	5	8	γ_1	β_3	6	11	γ_4	β_5
4:	4	16	β	β_2	6	7	α_1	α_3	5	12	δ_4	δ_5
5:	5	9	γ	γ_2	2	3	α_1	δ_3	4	13	β_4	β_5
6:	6	10	γ	δ_2	1	4	γ_1	γ_3	3	14	α_4	δ_5
7:	7	11	δ	γ_2	1	4	γ_1	γ_3	2	15	δ_4	α_5
8:	8	12	δ	δ_2	2	3	α_1	δ_3	1	16	γ_4	γ_5
9:	9	5	γ	γ_2	14	15	δ_1	α_3	1	16	γ_4	γ_5
10:	10	6	γ	δ_2	13	16	β_1	β_3	2	15	δ_4	α_5
11:	11	7	δ	γ_2	13	16	β_1	β_3	3	14	α_4	δ_5
12;	12	8	δ	δ_2	14	15	δ_1	α_3	4	13	β_4	β_5
13:	13	1	α	α_2	10	11	δ_1	δ_3	5	12	δ_4	δ_5
14:	14	2	α	β_2	9	12	β_1	γ_3	6	11	γ_4	β_5
15:	15	3	β	α_2	9	12	β_1	γ_3	7	10	β_4	γ_5
16:	16	4	β	β_2	10	11	δ_1	δ_3	8	9	α_4	α_5

Nur die Gerade 2 14 $\alpha \beta_2$ ist der x -axe, und 3 15 $\beta \alpha_2$ der y -axe parallel.

Wir können zu den in diesem Capitel aufgeführten Sätzen die reciprok polaren Sätze aufstellen, ausgehend von den 6 durch einen singulären Punkt gehenden singulären Ebenen. Es mögen nur folgende Sätze angeführt werden:

27b. „Die 6 durch einen singulären Punkt gehenden singulären „Ebenen umhüllen nicht nur einen Kegel zweiten Grades, sondern „sie lassen sich auch auf 6 verschiedene Arten so in drei Paare „ordnen, dass die beiden Ebenen jedes Paares Gegenseiten in einer „einem Kegel zweiten Grades von der Spitze aus eingeschriebenen „sechseitigen Pyramide sind. Da sich nun für jede solche Anord- „nung 4 verschiedene einem Kegel zweiten Grades eingeschriebene „Pyramiden finden lassen, und da sich für jeden Kegel nach dem „Pascalschen Satze die drei Paar Gegenebenen in drei Geraden „schneiden, welche in einer Ebene liegen (Pascalsche Ebene), so er- „halten wir aus jedem singulären Punkte 24 Kegel zweiten Grades, „in welche sich aus den singulären Ebenen sechseitige Pyramiden „einschreiben lassen, und 6 Pascalsche Ebenen.“

28b. „Die 6 Pascalschen Ebenen durch jeden singulären Punkt „sind mit den 6 Kernebenen durch denselben Punkt identisch.“

29b. „Eine beliebige Ebene schneidet diese 6 Pascalschen Ebenen (Kernebenen) durch jeden singulären Punkt in einem vollständigen Viereck.“

Capitel VII.

Die Flächen sind Tetraedroide. — Schluss.

Das Tetraedroid, ein von Cayley entdeckter Specialfall der allgemeinen Kummerschen Fläche, hat folgende besonderen Eigenschaften:

1) nach Cayley (*Liouville's Journ.* Bd. 11, S. 291; 1846): Die vier Seitenflächen eines gewissen Tetraeders schneiden das Tetraedroid in Curven vierter Ordnung, die in zwei Kegelschnitte zerfallen; die Schnittpunkte je zweier solchen Kegelschnitte in jeder der 4 Tetraederebenen sind singuläre Punkte der Fläche. Die Kegel, die der Fläche von den Eckpunkten des Tetraeders aus umschrieben werden, sind Kegel vierten Grades, die in zwei Kegel zweiten Grades zerfallen, und die jedesmal 4 Ebenen, welche diese beiden Kegel berühren, also zusammen 16, sind singuläre Tangentialebenen der Fläche.

2) Aus dem letzten Satze geht hervor, dass die singulären Ebenen sich zu je vieren in den Eckpunkten des Tetraeders schneiden müssen. und ferner folgt aus 1), dass die 16 singulären Ebenen zu je vieren in die Seitenflächen des Tetraeders rücken müssen. (vgl. Rohn, *Math. Ann.* 18, 131).

3) nach Klein (*Math. Ann.* 2, 217): Die 6 singulären Punkte in jeder singulären Ebene bilden ein Brianchonsches Sechseck.

Von diesen Forderungen ist bereits bewiesen, dass die 6 singulären Punkte ein Brianchonsches Sechseck bilden, und zwar lassen sie sich bei unseren Flächen auf 6 verschiedene Weisen zu einem solchen verbinden (Cap. VI).

Ferner ist gezeigt worden, dass sich die 16 singulären Ebenen auf 6 verschiedene Weisen zu je vieren in den Eckpunkten eines Tetraeders schneiden (Cap. III.), in dessen Seitenflächen zu je vieren die 16 singulären Punkte liegen (Cap. V.); die Eckpunkte dieser 6 Tetraeder sind in unserer Tabelle der Kernpunkte zusammengestellt; die 4 Eckpunkte jedes Tetraeders gehören zu einer Gruppe. Die Seitenflächen dieser 6 Tetraeder sind unsere Kernebenen, die jedoch im Cap. V. anders zusammengestellt sind; die Seitenflächen eines Tetraeders sind so zu finden, dass z. B. für das durch die 4 Kern-

punkte der Gruppe A bestimmte Tetraeder dem Eckpunkte (1, 2, 13, 14) die Seitenfläche [3, 4, 15, 16] gegenüberliegt, dem Eckpunkte (3, 4, 15, 16) die Seitenfläche [1, 2, 13, 14], dem Eckpunkte (5, 6, 9, 10) die Seitenfläche [7, 8, 11, 12] und dem Eckpunkte (7, 8, 11, 12) die Seitenfläche [5, 6, 9, 10]; kurz so, dass beim Uebergange von Eckpunkten zu den gegenüberliegenden Seitenflächen und umgekehrt für das eine System das mit ihm in den Gruppen des Cap. III durch eine Klammer verbundene gesetzt wird.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die Kernebenen die Flächen Curven vierten Grades schneiden, welche in zwei Kegelschnitte zerfallen, und dass die 4 Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte singuläre Punkte der Flächen sind. Dass dann auch die der Fläche aus den Kernpunkten umschriebenen Kegel in zwei Kegel zweiten Grades zerfallen, und dass die Ebenen, welche zwei solche Kegel zweiten Grades berühren, singuläre Ebenen der Flächen sind, geht dann aus dem reciprok polaren Verhalten der singulären Punkte und singulären Ebenen, sowie der Kernpunkte und Kernebenen hervor.

Das Zerfallen der Schnittcurven der Flächen mit den Kernebenen lässt sich auf folgende Weise zeigen: Jeder singuläre Punkt muss in der Schnittcurve einer durch ihn gehenden Ebene mit der Fläche ein Doppelpunkt sein. Unsere Kernebenen gehen nun jede durch vier singuläre Punkte unserer Flächen. Es muss also die Schnittcurve auf einer Kernebene 4 Doppelpunkte haben. Da unsere Flächen als Flächen vierter Ordnung von einer Ebene nur in Curven vierter Ordnung geschnitten werden, Curven vierter Ordnung aber, wenn sie nicht zerfallen sollen, und drei Doppelpunkte haben dürfen, so zerfallen die Schnittcurven auf den Kernebenen, und, da sie vier Doppelpunkte haben sollen, notwendig in 2 Kegelschnitte, deren Schnittpunkte die 4 in der Kernebene liegenden singulären Punkte sind. Unsere Flächen besitzen daher alle angeführten Eigenschaften der Tetraedroide; also:

34. „Die Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten, welche durch eine Lemniskate gehen, sind Tetraedroide.“

35. „Es giebt jedoch nicht nur ein, sondern 6 Tetraeder, auf welche sich alle von Cayley angeführten Eigenschaften des Tetraedroids beziehen lassen.“

36. „Nur eins dieser Tetraeder ist völlig reell.“

37. „Ein jedes dieser 6 Tetraeder hat 4 Kernpunkte zu Eckpunkten und 4 Kernebenen zu Seitenflächen.“

Es lässt sich zeigen, dass zwar die Seitenflächen der 6 Tetraeder die Flächen in zerfallenden Curven schneiden, dass aber die Seitenflächen unseres Kerntetraeders diese Eigenschaft nicht besitzen.

Es sei noch die Bemerkung angefügt, dass bei jedem der 6 Tetraeder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ein Paar Gegenkanten (α, δ und β, γ) mit einem Paar Kanten des Kerntetraeders in dieselben Geraden fällt.

38. „In jedem dieser 6 Tetraeder fallen zwei gegenüberliegende „Kanten mit je 2 Gegenkanten des Kerntetraeders in dieselben geraden Linien.“

39. „In jeder Kante des Kerntetraeders oder in ihrer Verlängerung liegt je eine Kante von zwei verschiedenen der 6 Tetraeder.“

Es würde wenig Mühe machen, noch weitere Eigenschaften der betrachteten Flächen aufzufinden; es möge hier der gelieferte Nachweis genügen, dass unsere Flächen einen Specialfall des Cayleyschen Tetraedroids darstellen. Ist schon die Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen bei der allgemeinen Kummerschen Fläche eine merkwürdige (vgl. Reye, Acta mathem. Bd. I), und geht das Tetraedroid schon in der Mannigfaltigkeit seiner Eigenschaften weit darüber hinaus, so sind doch die Beziehungen zwischen den singulären Punkten und Ebenen der hier betrachteten Flächen noch bei weitem merkwürdiger, um so mehr, als man nicht aus den Augen verlieren möge, dass alle diese Beziehungen für alle Flächen einer vierfach unendlichen Schaar gelten, Flächen, die nur durch eine allen gemeinsame Schnittcurve, die zu Grunde gelegte Lemniskate, einen Zusammenhang mit einander haben.

November 1887.



IX.

Die sphärische Curve vierter Ordnung als
Einhüllende von Kreisschaaren.

Von

Emanuel Czuber.

Im 29. Bande der Zeitschr. für Mathem. u. Phys. ¹⁾ hat Prof. J. Thomae eine Reihe von Problemen der Cyklographie nach einem Verfahren behandelt, welches sich durch grosse Anschaulichkeit auszeichnet ²⁾. Das ebene Kreissystem wird mit Hilfe der stereographischen Projection auf eine Kugel abgebildet und das sphärische Kreissystem auf den Raum, indem jedem Kreise desselben der Pol seiner Ebene bezüglich der Kugel als Abbild zugeordnet wird. Eine Configuration von Punkten im Raume führt dann zunächst zu einer Configuration von Kreisen auf der Kugel und aus dieser ergibt sich durch stereographische Projection eine Configuration von Kreisen in der Ebene.

In den folgenden Blättern soll nur die Beziehung zwischen der räumlichen Abbildung und dem sphärischen Kreissystem im Auge behalten und dazu benutzt werden, um mit ihrer Hilfe die Eigenschaften der sphärischen Curve vierter Ordnung nachzuweisen; die gewonnenen Resultate können dann durch collineare Transformation leicht auf die allgemeine Curve vierter Ordnung erster Species übertragen werden.

1) Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum.

2) Vgl. Dr. W. Fiedler's Cyklographie, pag. 242 fig.

Bevor auf den eigentlichen Gegenstand eingegangen wird, sollen die allgemeinen Ergebnisse des angewandten Abbildungsverfahrens in einer dem vorliegenden Zwecke entsprechenden Form zusammengestellt werden.

§. 1.

1. Es sei K die Kugel, P ein Punkt des Raumes, K der ihm zugeordnete Kreis. Liegt P ausserhalb, innerhalb, auf K , so ist K beziehungsweise reell, imaginär, ein Nullkreis. Einem unendlich fernen P entspricht ein grösster Kreis; fällt P in den Mittelpunkt von K , so geht K in den unendlich fernen imaginären Kugelkreis über. Ein imaginärer Kreis soll durch jenen reellen Kreis vertreten werden, welcher P zum Mittelpunkte hat. Der Kürze halber möge P der Pol zu K heissen.

2. Es seien P, P_1 zwei Punkte im Raume, p die sie verbindende Gerade. Die zugeordneten Kreise K, K_1 haben die reciproke Polare q von p in Bezug auf K zur Potenzaxe; sie schneiden sich reell, imaginär, berühren sich, jenachdem p die Kugel imaginär, reell schneidet oder sie berührt. Sind die Punkte P, P_1 conjugirt bezüglich K , so schneiden sich K, K_1 orthogonal; ist einer dieser Kreise imaginär, so wird sein reeller Vertreter von dem andern diametral geschnitten.

3. Es seien P_1, P_2, P_3 drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, P die durch sie bestimmte Ebene, p_1, p_2, p_3 die Geraden durch P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 . Die zugeordneten Kreise K_1, K_2, K_3 bilden drei Paare mit den Potenzaxen q_1, q_2, q_3 und haben den Pol P von P in Bezug auf K zum Potenzcentrum. Der Kreis K , welcher durch P abgebildet wird, ist ihr gemeinsamer Orthogonalkreis; er geht in einen Nullkreis über, wenn P die Kugel berührt; wird er imaginär, so ist sein reeller Vertreter gemeinsamer Diametralkreis von K_1, K_2, K_3 .

4. Die einfach unendliche Gesamtheit von Kreisen, welche den Punkten einer Linie entsprechen, werde als Kreisschaar bezeichnet.

Die einer Geraden p zugeordnete oder die lineare Kreisschaar nennt man ein Kreisbüschel, die Gerade q ist seine Potenzaxe, während p als Polaraxe bezeichnet werden soll. Jenachdem p die Kugel imaginär, reell schneidet oder berührt, ist das Kreisbüschel ein solches mit Grundpunkten, mit Grenzpunkten oder ein Berührungsbüschel.

Zwei Kreisbüschel, deren Polaraxen p , q reciprok sind in Bezug auf K , heissen conjugirte Kreisbüschel; weil jeder Punkt von p zu jedem Punkt von q conjugirt ist, so schneidet jeder Kreis des einen Büschels jeden des andern rechtwinklig, daher die zweite Benennung Orthogonalkreisbüschel. Von zwei conjugirten Büscheln hat das eine Grundpunkte, das andere Grenzpunkte und beide Punktepaare fallen zusammen, oder es sind beide Büschel Berührungsbüschel.

Die einer Curve C zugeordnete oder allgemeine Kreisschaar hat C zur Polarcurve, die Rückkehrkante C^* der reciproken developpabeln Regelfläche F^* zur Potenzcurve in dem Sinne, dass jeder Punkt von C^* Potenzcentrum für drei benachbarte Kreise der Schaar ist*). Der Durchschnitt von F^* und K , die sphärische Curve T , ist die Einhüllende der Kreisschaar. Sie kann auch als Ort der Grundpunkte, resp. Grenzpunkte der Kreisbüschel erklärt werden, welche den Tangenten von C entsprechen, und erscheint nach dieser Auffassung als Selbstschattengrenze der Kugel bei Beleuchtung derselben durch C .

Ist die Polarcurve C eine Plancurve und P ihre Ebene, dann reducirt sich C^* auf einen Punkt, den Pol P^* von P in Bezug auf K , welcher das Potenzcentrum der Kreisschaar bildet; die Fläche F^* geht sonach in eine Kegelfläche mit P^* als Scheitel über. Aus diesem Grunde möge eine Kreisschaar mit ebener Polarcurve als konische Kreisschaar bezeichnet werden.

Bei der linearen Kreisschaar, wo C durch die Polaraxe p vertreten ist, degeneriren C^* und F^* in die Gerade q , die Einhüllende T in dasjenige (reelle oder imaginäre) Punktepaar, welches q mit K gemein hat.

5. Die zweifach unendliche Gesamtheit von Kreisen, welche die Punkte einer Fläche zu Bildern haben, werde Kreisnetz genannt.

Das einer Ebene P zugeordnete oder planare Kreisnetz wird als Kreisbündel bezeichnet; P ist seine Polarebene, ihr Pol P^* das Potenzcentrum. P schneidet K entweder reell, imaginär oder berührt sie; im ersten Falle ist der dem Bündel nicht angehörende Kreis K , welchen P mit K gemein hat, gemeinsamer Orthogonalkreis, im zweiten Falle ist sein reeller Vertreter,

*) Die Potenz kann auch, wie beim Kreisbüschel, constant bleiben, wenn die Tangentendevoloppable von C einer zu K concentrischen Kugel umschrieben ist.

gleichzeitig der kleinste Kreis des Bündels, gemeinsamer Diametralkreis der Kreise des Bündels; im dritten Falle zieht sich der Orthogonalkreis in einen Nullkreis zusammen, durch welchen alle Kreise des Bündels hindurchgehen.

Einer krummen Fläche F entspricht das allgemeine Kreisnetz. F ist seine Polarfläche, die in Bezug auf K reciproke Fläche F^* seine Potenzfläche in dem Sinne, als jeder Punkt derselben Potenzcentrum für eine Schaar unendlich benachbarter Kreise des Netzes ist*). In dem speciellen Falle des planaren Netzes ist F durch P , F^* durch P^* vertreten.

Aus einem Kreisnetz wird eine Kreisschaar herausgehoben, indem man seiner Polarfläche eine Curve aufschreibt und diese als Polarcurve ansieht. Ein planares Kreisnetz enthält nur lineare und konische Kreisschaaren; es lässt sich insbesondere auf zweifach unendlichviele Arten in Kreisbüschel zerlegen entsprechend den ∞^2 Strahlenbüscheln, welche in seiner Polarebene verzeichnet werden können. Im allgemeinen Kreisnetz treten allgemeine und konische Kreisschaaren auf, lineare nur dann, wenn seine Polarfläche gerade Linien enthält.

6. Die dreifach unendliche Gesamtheit von Kreisen, welche den unendlichen Raum zur Abbildung haben, heisst sphärisches Kreissystem.

§. 2.

7. Die Einhüllende einer konischen Kreisschaar, deren Polarcurve eine Kegelschnittlinie ist, ist eine sphärische Curve vierter Ordnung T^4 , als Durchschnitt eines Kegels zweiter Ordnung mit der Kugel.

In der Figur Taf. III., welche die folgenden Untersuchungen erläutern soll, dient die Ebene P_0 des Polarkegelschnitts C_0 als Bildebene, ihr Pol in Bezug auf K , zugleich die Spitze jenes Kegels und Potenzcentrum der Kreisschaar, als Projectionscentrum; der durch P_0 aus K geschnittene Kreis K_0 begrenzt zugleich die Projection der Kugel. Da die Entfernung des Projectionscentrums von der Bildebene bei den folgenden Betrachtungen keine Rolle spielt, so genügt die Angabe seiner Orthogonalprojection P_0' , welche mit dem Mittelpunkt von K_0 zusammenfällt.

*) Die Potenz bleibt hier, wie beim Kreisbündel, constant, wenn F eine mit K concentrische Kugel ist.

Die Polaren der Punkte von C_0 in Bezug auf K_0 sind die Spuren der Berührungsebenen, die Pole der Tangenten von C_0 in Bezug auf K_0 die Spuren der Kanten des Kegels $P_0 T^4$, mit andern Worten: als Spur dieses der Curve doppelt umschriebenen Kegels, zugleich als Projection von T^4 in P_0 ergibt sich der zur Polarcurve C_0 in Bezug auf K_0 reciproke Kegelschnitt \mathcal{C}_0 , u. zw. soweit er innerhalb K_0 liegt, dem reellen, und soweit er ausserhalb K_0 liegt, dem imaginären Teil von T^4 entsprechend.

Es sei P_1 ein solcher Punkt in P_0 , welchem in Bezug auf K_0 und \mathcal{C}_0 dieselbe Gerade p_{01} als Polare zugeordnet ist; dann ist $P_0 p_{01}$ die Polarebene von P_1 sowol bezüglich der Kugel als auch bezüglich des Kegels $P_0 \mathcal{C}_0$, trennt somit die Schnittpunkte eines jeden aus P_1 gezogenen Strahls mit den beiden Flächen harmonisch von P_1 ; geht also ein solcher Strahl durch einen beiden Flächen gemeinschaftlichen, d. h. durch einen Punkt von T^4 , so muss er noch einen zweiten derartigen Punkt enthalten. Mithin ist P_1 der Scheitel eines der Curve T^4 doppelt umschriebenen Kegels, der ebenso wie der Kegel aus P_0 von zweiter Ordnung ist, weil jede durch P_1 gelegte Ebene vier Punkte der Curve und daher zwei doppelt projectirende Strahlen enthält. Die Berührungsebenen dieses neuen Kegels schneiden aus der Kugel eine zweite durch T^4 eingehüllte konische Kreisschaar aus, deren Polarcurve ein in der Ebene $P_0 p_{01}$ oder P_1 gelegener Kegelschnitt C_1 und deren Potenzcentrum P_1 ist.

Da nun zwei Kegelschnitte in einer Ebene im allgemeinen drei Punkte von der Beschaffenheit besitzen, wie sie bei P_1 vorausgesetzt wurde, nämlich die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks, so gibt es ausser dem ursprünglichen Kegel aus P_0 noch drei T^4 doppelt umschriebene Kegel zweiter Ordnung. Die Scheitel dieser vier Kegel, $P_0 P_1 P_2 P_3$, und die Ebenen $P_1 P_2 P_3$, welche die Seiten jenes Polardreiecks mit P_0 bestimmen, im Verein mit P_0 bilden Ecken und Seitenflächen eines Polartetraeders der Kugel, das sie wie mit dem Kegel aus P_0 auch mit den drei andern gemein hat. Fasst man die Resultate zusammen, so ergibt sich der Satz:

„Der sphärischen Curve T^4 lassen sich im allgemeinen vier „Kegel zweiter Ordnung doppelt umschreiben, oder, was dasselbe „ist, sie hüllt vier konische Kreisschaaren ein; die Scheitel jener „Kegel oder die Potenzcentra dieser Schaaren sind die Ecken eines „bestimmten Polartetraeders der Kugel, dessen Seitenebenen die „Polarkegelschnitte der Kreisschaaren enthalten.“

Wir werden dieses Tetraeder das **Fundamentaltetraeder** von T^4 nennen. Dem obigen ist leicht zu entnehmen, wie dasselbe

durch die Annahme von C_0 bestimmt ist; die Ebene P_0 von C_0 und ihr Pol P_0 in Bezug auf K bilden eine Ecke und die ihr gegenüberliegende Seitenfläche, die andern Ecken und Seitenflächen liefert das gemeinsame Polardreieck von \mathcal{C}_0 und K_0 , welches identisch ist mit dem von C_0 und K_0 , weil C_0 und \mathcal{C}_0 reciprok sind in Bezug auf K_0 .

Die Kreise K_0, K_1, K_2, K_3 , welche die Seitenebenen des Fundamentaltetraeders aus K ausschneiden, sind Orthogonalkreise der zugehörigen Schaaren der T^4 doppelt berührenden Kreise und stehen in solcher Beziehung zu einander, dass jeder von ihnen der gemeinsame Orthogonalkreis der drei andern ist; für den imaginären unter ihnen übernimmt der reelle Vertreter die Rolle eines Diametralkreises.

8. Legt man durch eine Kante des Fundamentaltetraeders, z. B. durch $P_0 P_2$, eine Ebene, deren Spur ϵ sein möge, so schneidet sie aus der Kugel einen Kreis K und aus T^4 vier Punkte $1\ 1^* 2\ 2^*$; zwei Seitenpaare des durch die letzteren bestimmten vollständigen Vierecks schneiden sich in den Punkten P_0, P_2 , der Schnittpunkt des dritten Seitenpaars als Pol der Geraden $P_0 P_2$ in Bezug auf den Kreis K liegt dort, wo seine Ebene die reciproke Tetraederkante p_{02} schneidet, in M . „Es gibt also ausser den bereits erkannten vier „Schaaren ausgezeichneter Bisecanten von T^4 , welche durch die „Ecken des Fundamentaltetraeders gehen, noch drei weitere, welche „gegenüberliegende Kanten desselben gleichzeitig schneiden.“

Durch einen Punkt A von T^4 geht aus jeder der sieben Schaaren eine Bisecante; die nach den Ecken des Fundamentaltetraeders laufenden bestimmen auf der Curve vier Punkte, welche wir mit B_0, B_1, B_2, B_3 bezeichnen wollen, so dass B_0 auf AP_0 liegt u. s. f.; die drei übrigen, welche die reciproken Kantenpaare schneiden, bestimmen drei Curvenpunkte, welche E_1, E_2, E_3 heissen mögen. Der Zusammenhang zwischen beiden Gruppen besteht darin, dass die Bisecanten der ersten Gruppe ein vollständiges Vierkant mit dem Scheitel A und die Bisecanten der zweiten Gruppe sein Diagonaldreikant bilden. Das Polargebilde ist ein vollständiges Vierseit mit Diagonalen und liegt in der Polarebene von A , d. i. in der in diesem Punkte an die Kugel gelegten Tangentialebene A^* ; seine Seiten, als reciproke Polaren der durch A gehenden Kegelkanten, sind Tangenten der vier Polarkegelschnitte, ergeben sich demnach als Durchschnitt der Ebene A^* mit dem Fundamentaltetraeder; die Ecken des Vierseits liegen in den Kanten dieses Tetraeders.

Betrachten wir ferner die Berührungsebenen der vier Kegel in A ; ihre Pole sind Punkte der Polarkegelschnitte, nämlich die Be-

rührungspunkte der Seiten des vorerwähnten Vierseits, und liegen, da die vier Berührungsebenen die Curventangente a in A gemeinsam haben, in der reciproken Polare a^* von a und sind die Schnittpunkte derselben mit den Seitenflächen des Fundamentaltetraeders.

Nun bilden die Ebenen A^* in ihrer Gesamtheit die Berührungsebenen und die Geraden a^* die geradlinigen Erzeugenden der der Kugel längs T^4 umschriebenen Developpabeln; wir haben also den Satz:

„Die der Kugel längs T^4 umschriebene Developpable durchschneidet die Seitenflächen des Fundamentaltetraeders in den Polarkegelschnitten der vier Kreisschaaren, welche durch T^4 eingehüllt werden.“

Die angestellte Betrachtung zeigt eine bemerkenswerte Zuordnung der Tangenten und Punkte der vier Polarkegelschnitte; führt man an einen derselben eine beliebige Tangente, so gehören zu ihr zweimal drei Tangenten der drei übrigen, welche in den durch die erste Tangente an die Kugel gelegten Berührungsebenen liegen; und die Berührungspunkte eines solchen Tangentenvierseits gehören einer Geraden, einer Tangente der Kugel, an.

9. Aus einer Tangente t von C_0 , Fig. 1., entspringen zwei Punkte von T^4 , QQ^* , in einer Kante des Kegels aus P_0 ; die den Kegel längs dieser Kante berührende Ebene hat zur Spur die Tangente t von C_0 , welche dem Berührungspunkt T von t reciprok zugeordnet ist; die Berührungsebenen der Kugel in den Punkten QQ^* aber haben ihre gemeinsame Spur in t . Die Durchschnittslinien des letztern Ebenenpaares mit der erstgedachten Ebene sind nun die Tangenten τ, τ^* von T^4 in Q, Q^* und der Schnittpunkt D von t und t auch ihr Schnittpunkt. Da dieselbe Betrachtung auch an jeden der drei andern Polarkegelschnitte angeknüpft werden kann, so lässt sich das Resultat folgendermassen aussprechen:

„Jede zwei Tangenten von T^4 , deren Berührungspunkte auf einerlei Kante eines der doppelt umschriebenen Kegel liegen, schneiden sich in einem Punkte der seinem Scheitel gegenüberliegenden Seitenebene des Fundamentaltetraeders; ebenso werden sich die Schmiegungebenen solcher Punkte in derselben Ebene durchschneiden; die developpable Fläche von T^4 besitzt also in jeder Seitenebene des Fundamentaltetraeders einen Selbstdurchschnitt oder eine Doppelcurve.“

Anders ausgedrückt: Die Tangente irgend eines Punktes A von T^4 wird in den vier Punkten, wo sie die Seitenflächen des Funda-

mentaltetraeders durchdringt, von vier andern Tangenten der Curve geschnitten, deren Berührungspunkte B_0, B_1, B_2, B_3 in den aus A nach den Ecken des Fundamentaltetraeders gezogenen Geraden liegen. (Vgl. Nr. 8).

Die Lagenbeziehung von T^4 gegen eine Ecke P_i und die gegenüberliegende Seitenfläche P_i des Fundamentaltetraeders lässt sich nun so charakterisiren, dass die Punkte der Curve paarweise auf Strahlen aus P_i liegen, dass die Tangenten und Schmiegungebenen eines solchen Punktpaars in P_i sich schneiden, dass endlich jedes Punktpaar durch die Ebene P_i von P_i harmonisch getrennt wird; ihren zusammenfassenden Ausdruck findet sie in dem Satze, „dass „ T^4 involutorisch-collinear zu sich selbst ist in Bezug auf jede Ecke „des Fundamentaltetraeders als Collineationscentrum und die gegen- „überstehende Seitenfläche als Collineationsebene.“

Wir kehren zu den oben nachgewiesenen Doppelcurven der Tangentenfläche von T^4 zurück. Die in der Ebene P_0 befindliche, Fig. 1., hat sich als Ort des Durchschnittspunktes D der Tangenten t und t von C_0 und \mathcal{C}_0 ergeben; diese Tangenten sind vermöge des Umstandes, dass t die Polare des Berührungspunktes von t in Bezug auf K_0 ist, einander eindeutig zugeordnet. Wenn aber die Tangenten zweier Curven zweiter Classe projectivisch auf einander bezogen sind, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Tangenten auf einer Curve vierter Ordnung. „Die vier Doppelcurven der developpabeln Fläche von T^4 sind also Curven vierter Ordnung.“

Den Tangenten $t_{00}, t_{01}, t_{02}, t_{03}$, welche C_0 und K_0 zugleich berühren, entsprechen in dem eben erläuterten Sinne diejenigen Tangenten $t_{00}, t_{01}, t_{02}, t_{03}$ von \mathcal{C}_0 , deren Berührungspunkte die Schnittpunkte $S_{00}, S_{01}, S_{02}, S_{03}$ von \mathcal{C}_0 und K_0 , zugleich Schnittpunkte von T^4 mit P_0 sind; diese Punkte gehören daher der Doppelcurve auch an, und wir haben den weiteren Satz:

„Diejenigen Punkte, welche T^4 mit der Oberfläche des Fundamentaltetraeders gemeinsam hat, sind zugleich Punkte der Doppelcurve der Tangentenfläche von T^4 .“

Den Punkten S_{00}, S_{01}, \dots von T^4 kommt noch eine weitere Eigentümlichkeit zu. Die ihnen zugehörigen Tangenten von T^4 sind Kanten des Kegels P_0 und zwar diejenigen, welche den Tangenten t_{00}, t_{01}, \dots reciprok entsprechen; legt man an den Kegel längs einer solchen Kante, etwa $P_0 S_{00}$, die Tangentialebene, so enthält sie ausser ihr noch die benachbarte Kegelkante und die in den Schnittpunkten der letzteren mit T^4 an diese gezogenen Tangenten, welche ihre gemeinsame Projection in t_{00} haben und in dem S_{00} benachbarten

Punkte der Doppelcurve D_0 in P_0 sich schneiden, enthält also drei aufeinanderfolgende Tangenten und vier aufeinanderfolgende Punkte von T^4 . Eine solche Ebene bezeichnet man als stationäre Schmiegungeebene der Curve oder als Inflexionstangentialebene ihrer Tangentendevoloppabeln. Daher der Satz: „Die Schnittpunkte von T^4 mit der Oberfläche des Fundamentaltetraeders, zugleich jene Punkte, welche die Curve mit den Doppelcurven ihrer Developpabeln gemein hat, sind Punkte der stationären Osculationsebenen von T^4 oder der Inflexionstangentialebenen ihrer Developpabeln.“ Die Anzahl solcher Punkte, die imaginären wie die reellen gezählt, ist $4 \times 4 = 16$.

Hieraus lässt sich eine weitere Eigenschaft der Doppelcurven ableiten. Den Tangenten t^* , t^{**} von C_0 , welche in P_1 sich schneiden, deren Berührungspunkte T^* , T^{**} also in der Gegenseite p_{01} des Polardreiecks $P_1P_2P_3$ liegen, entsprechen, da dieses Polardreieck C_0 und \mathcal{C}_0 gemeinschaftlich zukommt, die Tangenten t^* , t^{**} von \mathcal{C}_0 , welche gleichfalls in P_1 sich schneiden und in p_{01} ihre Berührungspunkte haben. In P_1 sind also die Schnittpunkte zweier Paare zugeordneter Tangenten, t^* und t^* , t^{**} und t^{**} , vereint, P_1 ist also ein Doppelpunkt der in P_0 enthaltenen Doppelcurve D_0 . Tangenten der durch ihn gehenden Curvenäste sind die gemeinsame Spur der Schmiegungeebenen in S_{10} , S_{11} einer- und in S_{12} , S_{13} andererseits, und da diesen Ebenen in Bezug auf die Tangentenfläche von T^4 der Charakter von Wendetangentialebenen zukommt, so liefern sie für jeden ebenen Durchschnitt dieser Fläche, also auch für die Doppelcurve D_0 Inflexionstangenten. Dieselbe Betrachtung lässt sich auch für P_2 und P_3 (wenn auch für letzteren Punkt mit imaginären Elementen) durchführen, so dass man den Satz aussprechen kann:

„Jede der vier Doppelcurven der Developpabeln von T^4 besitzt in den Eckpunkten des Fundamentaltetraeders, welche ihrer Ebene angehören, Doppelpunkte mit Inflexionstangenten.“

Von den Doppelcurven gehören nur die ausserhalb der Kugel liegenden Teile dem reellen T^4 an, und diese werden von denjenigen Tangenten von C_i (und den ihnen zugeordneten von \mathcal{C}_i) erzeugt, welche K_i oder die Kugel nicht schneiden. Gehen wir in Fig. 1 von einer Tangente (t) aus, welche K_0 schneidet, deren Berührungspunkt (T) aber ausserhalb K_0 liegt, so befinden sich auf dem reellen Kugelkreise, dessen Pol (T) ist, zwei imaginäre Punkte von T^4 , deren reelle Verbindungslinie die zu (t) reciproke Kegelkante ist, und deren imaginäre Tangenten sich in dem reellen Punkte (D) des parasitischen Teils von D_0 schneiden. Wenn nun (T) insbesondere mit einem der Schnittpunkte F_{00} , F_{01} , F_{02} , F_{03} von C_0 und K_0 , z. B. mit

F_{00} zusammenfällt, so rückt auch (D) nach F_{00} und jede der beiden imaginären Curventangenten, die sich hier schneiden, hat demnach mit der Kugel drei Punkte gemein — zwei Nachbarpunkte von T^4 und F_{00} —, muss daher ganz in der Kugeloberfläche liegen, d. h. die imaginären Inflexionstangenten der Kugel in den Punkten F_{00}, F_{01}, \dots sind zugleich imaginäre Tangenten von T^4 . Wir sprechen dies in dem Satze aus: „Die imaginären Inflexionstangenten der Kugel in jenen Punkten, wo sie den Polarkegelschnitten der vier durch T^4 eingehüllten Kreisschaaren begegnet, sind zugleich Tangenten von T^4 .“ Diese 16 Punkte liegen zu je vier in den Orthogonalkreisen jener Kreisschaaren.

10. Legt man durch einen ausserhalb T^4 beliebig angenommenen Punkt M ein Ebenenbündel, so ist in jeder Ebene desselben durch die vier Punkte von T^4 , welche ihr angehören, und durch den Punkt M ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt; der Ort all dieser Kegelschnitte ist eine durch T^4 und M gehende Fläche zweiter Ordnung. Mit jedem neuen Punkte ergibt sich im allgemeinen eine neue Fläche, und die Gesamtheit aller wird ein Flächenbüschel zweiter Ordnung, T^4 seine Basiscurve genannt. Es ist eine Gesamtheit von einfach unendlicher Mächtigkeit, weil jede Fläche zweifach unendlich viele Punkte des Raumes aufnimmt.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass das Fundamentaltetraeder von T^4 für jede Fläche des Büschels ein Polartetraeder ist, mit andern Worten: „Das Fundamentaltetraeder der Basiscurve T^4 des Flächenbüschels zweiter Ordnung ist gemeinsames Polartetraeder aller Flächen des Büschels.“ Umgekehrt: Der Durchschnitt der Kugel mit einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung ist eine Curve vierter Ordnung und das den beiden Flächen gemeinsame Polartetraeder ihr Fundamentaltetraeder.

Um eine von den Regelflächen des Büschels durch T^4 zu erhalten, lege man durch eine beliebige Bisecante der Curve ein Bündel von Ebenen; diese bestimmen mit der Curve eine Schaar neuer Bisecanten, zugleich die eine Regelschaar einer durch T^4 gehenden Regelfläche zweiter Ordnung, während die Axe des Ebenenbüschels der andern Regelschaar angehört. Nur wenn die ursprünglich gewählte Bisecante durch eine Ecke des Fundamentaltetraeders geht, wird die aus ihr abgeleitete Fläche entwickelbar und besitzt nur eine Kegelschaar. „Die Kegel aus den Ecken des Fundamentaltetraeders sind also die einzigen entwickelbaren Flächen, welche in dem Bündel zweiter Ordnung auftreten.“

11. Der Darstellung von T^4 als Einhüllende von Kreisschaaren

möge ihre Erzeugung durch projectivische Kreisbüschel gegenüber gestellt werden.

Ein Kreisbüschel steht mit der geraden Punktreihe, durch welche es auf den Raum abgebildet wird, in eindeutiger Beziehung. Wenn daher zwei gerade Punktreihen p, p^* projectivisch auf einander bezogen sind, so gilt dies auch bezüglich der ihnen zugeordneten Kreisbüschel, welche als projectivische Kreisbüschel bezeichnet werden mögen.

Indem wir uns mit der Frage nach dem Ort des Schnittpunktes entsprechender Kreise oder dem Erzeugniss zweier projectivischen Kreisbüschel einer Kugel beschäftigen, haben wir zu unterscheiden, ob die zugeordneten Punktreihen p, p^* in perspectivischer oder in allgemeiner Lage sich befinden.

Sind P, P^* zwei homologe Punkte von p, p^* ; K, K^* die entsprechenden Kreise, so sind die Schnittpunkte Q, Q^* von K, K^* Punkte des gesuchten Ortes. Da nun die Geraden PP^*, QQ^* conjugirt sind bezüglich der Kugel, so kann man den Satz aussprechen:

„Das Erzeugniss zweier projectivischen Kreisbüschel auf einer Kugel ist gleichbedeutend dem Durchschnitt der Kugel mit derjenigen Fläche, welche dem Strahlensystem polarreciprok ist, das die den Kreisbüscheln zugeordneten Punktreihen bestimmen.“

a) Befinden sich die Punktreihen in perspectivischer Lage, so ist das durch sie bestimmte Strahlensystem ein Strahlenbüschel, das polarreciproke Gebilde eine Ebene. Daraus folgt:

„Der Ort des Schnittpunktes entsprechender Kreise zweier projectivischen Kreisbüschel einer Kugel, welche einen Kreis selbstentsprechend gemein haben, ist ein zweiter Kreis, welcher mit den beiden Büscheln ein- und demselben Kreisbündel angehört.“

b) Befinden sich die Punktreihen in allgemeiner Lage, so wird das durch sie bestimmte Strahlensystem von einem Kegelschnitt eingehüllt, wenn die Träger p, p^* sich schneiden, und es erfüllt eine windschiefe Regelfläche zweiter Ordnung, wenn sie sich kreuzen; im ersten Falle ist das reciproke Gebilde ein Kegel, im zweiten Falle eine windschiefe Regelfläche zweiter Ordnung. Es ergibt sich also der Satz:

„Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Kreise aus zwei projectivischen Kreisbüscheln einer Kugel in allgemeiner Lage ist eine Curve vierter Ordnung T^4 .“

§. 3.

12. Den allgemeinen Betrachtungen über die sphärische Curve vierter Ordnung soll nun eine Untersuchung ihrer Formen angeschlossen werden als Correlat der verschiedenen Beziehungen, in welche eine Kegelschnittlinie zur Kugel treten kann. Zwar werden, da dem früheren zufolge einer solchen Raumcurve im allgemeinen vier Kegelschnitte zugeordnet sind, an demselben Falle mehrere derartige Beziehungen zugleich erscheinen; doch die Zusammenstellung dieser Combinationen soll der Untersuchung der Einzelfälle nachgestellt werden.

Im folgenden bezeichnen wir den Polarkegelschnitt mit C , seine Ebene mit P , ihren Pol in Bezug auf K mit P , den von ihr ausgeschnittenen Kugelkreis mit K , endlich den zu C in Bezug auf K reciproken Kegelschnitt mit \mathcal{C} .

I. Die Ebene P schneidet die Kugel imaginär. Da ihr Pol P innerhalb der Kugel liegt, so besteht T^4 aus zwei getrennten geschlossenen Curvenästen. Das Fundamentaltetraeder ist vollständig reell, weil das gemeinsame Polardreieck von C und dem imaginären K es ist, alle vier doppelt projicirenden Kegel von T^4 sind also reell. Mit P und einer zweiten Ebene des Fundamentaltetraeders, derjenigen, welche dem innerhalb \mathcal{C} (und C) gelegenen Eckpunkte desselben zugeordnet ist, gibt die Curve keine, dagegen mit den beiden andern je vier reelle Schnittpunkte, besitzt also acht reelle stationäre Schmiegungebenen.

Liegt der Mittelpunkt von K in einer Axe von C , so rückt eine Ecke des Fundamentaltetraeders in Richtung der andern Axe von C ins unendliche und die gegenüberliegende Seitenfläche verwandelt sich in die zu dieser Richtung conjugirte Diametralebene der Kugel; von den vier doppelt projicirenden Kegeln geht einer in einen Cylinder über, mit andern Worten, T^4 wird in Bezug auf eine Diametralebene der Kugel orthogonal-symmetrisch.

Bei concentrischer Lage von C und K bilden der Mittelpunkt und die unendlich fernen Axenpunkte von C das gemeinsame Tripel conjugirter Punkte, zwei der doppelt projicirenden Kegel verwandeln sich in Cylinder, T^4 wird bezüglich zweier zu einander normaler Diametralebenen der Kugel orthogonal-symmetrisch.

Entfernt P sich ins unendliche, so fällt P mit dem Centrum der Kugel zusammen, und T^4 wird ein sphärischer Kegelschnitt, der in Bezug auf drei gegenseitig rechtwinklig sich schneidende Diametralebenen der Kugel orthogonale Symmetrie aufweist; diese drei Ebe-

nen im Verein mit der unendlich fernen bilden sein Fundamental-tetraeder.

Findet zwischen C und K doppelte (ideelle) Berührung statt, so besitzen beide unzählich viele gemeinsame Polardreiecke mit einer gemeinschaftlichen Ecke P_1 und Gegenseite p_1 ; also entsprechen auch T^4 unendlich viele Fundamentaltetraeder, welche eine Ecke (P_1) und die ihr conjugirte Seitenfläche (Pp_1) sowie ein Paar Gegenkanten gemein haben, von welch' letzteren die eine durch P geht und die andere in P liegt. Ausser den beiden doppelt umschriebenen Kegeln aus P und P_1 gibt es unendlich viele, deren Scheitel die Gerade p_1 erfüllen; diese fallen in ein Ebenenpaar durch p_1 zusammen, T^4 zerfällt also in zwei ebene Schnitte oder Kreise der Kugel, welche zwei (imaginäre) Punkte von p_1 mit einander gemein haben (Doppelpunkte von T^4). In Bezug auf die zu p_1 senkrechte Diametralebene der Kugel besteht orthogonale Symmetrie, weil der vorliegende Fall in dem zuerst angeführten Sonderfalle inbegriffen ist. — Die vorstehende Bedingung ist u. a. auch erfüllt, wenn C ein mit K concentrischer Kreis ist; weil dann p_1 ins unendliche rückt, so löst sich T^4 in zwei Parallelkreise auf, und in Bezug auf alle Ebenen durch PP_1 besteht orthogonale Symmetrie. Wird überdies P zur unendlich fernen Ebene, so zerfällt T^4 in zwei gleiche Parallelkreise, welche einen Sonderfall des sphärischen Kegelschnittes repräsentiren.

II. Die Ebene P schneidet die Kugel reell. Zwischen C und dem reellen Kreise K können nachstehende Beziehungen eintreten.

a) C und K haben weder reelle Punkte noch Tangenten gemeinsam. Dies findet statt, wenn eine dieser Linien die andere einschliesst. Wird C von K eingeschlossen, so ist T^4 vollständig imaginär; findet das umgekehrte statt, so weist T^4 dieselben Eigenschaften auf wie im Falle I. Orthogonale Symmetrie in Bezug auf eine oder auf zwei zu einander normale Diametralebenen der Kugel ergibt sich, wenn der Mittelpunkt von K einer oder beiden Axen von C angehört, und sie besteht noch in Bezug auf eine zweite, respective dritte Diametralebene, wenn K ein grösster Kreis ist.

b) C und K haben keine reellen Punkte, aber vier reelle Tangenten gemeinsam. Dies tritt ein, wenn beide Linien sich gegenseitig ausschliessen. T^4 zeigt dieselben Eigenschaften wie im Falle I. Einfache Orthogonalsymmetrie ergibt sich, wenn der Mittelpunkt von K auf einer Axe von C liegt; zweifache Symmetrie, wenn überdies P eine Diametralebene der Kugel ist; T^4 ist endlich dreifach symmetrisch oder ein sphärischer Kegelschnitt, wenn C eine mit der Kugel concentrische Hyperbel ist.

c) C und K haben vier reelle Punkte und Tangenten gemeinsam. Dieser Fall liegt der Fig. 1 zu Grunde. T^4 zeigt dieselben Merkmale wie im Falle I., die Bedingungen der Symmetrie sind die nämlichen wie in II. a)

d) C und K haben vier reelle Punkte, aber keine Tangenten gemeinsam. Dies findet nur statt, wenn C eine Hyperbel ist, und da unter obiger Voraussetzung alle ihre Tangenten den Kreis K schneiden, so ist T^4 vollständig imaginär.

e) C und K haben zwei reelle Punkte und Tangenten gemeinsam. Dieselbe Beziehung besteht auch zwischen \mathcal{C} und K , T^4 ist demnach eine einfach zusammenhängende Curve; von ihrem Fundamentaltetraeder sind nur zwei Ecken und die conjugirten Seitenebenen reell, weil an dem C und K gemeinsamen Polardreieck nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite reell ist. Dementsprechend besitzt T^4 nur zwei doppelt umschriebene Kegeln und, da jede der reellen Seitenebenen des Fundamentaltetraeders zwei reelle Punkte der Curve enthält, vier reelle stationäre Osculationsebenen. Gehört der Mittelpunkt von K einer Axe von C an, so ist T^4 orthogonal-symmetrisch in Bezug auf eine, und ist ausserdem K ein grösster Kreis, in Bezug auf zwei zu einander normale Diametralebenen der Kugel.

Fasst man die bisher gewonnenen Resultate mit Ausserachtlassung der Fälle, wo ein Zerfall in niedere Curven stattfindet, zusammen, so ergibt sich folgendes: „Die sphärische Curve vierter Ordnung besteht entweder aus zwei getrennten, geschlossenen Aesten oder bildet eine einfache, geschlossene Linie. — Im ersten Falle ist ihr Fundamentaltetraeder vollständig reell; seine Ecken sind die Scheitel von vier der Curve doppelt umschriebenen Kegeln zweiter Ordnung, und seine Seitenflächen enthalten vier ihrer Tangentendevoloppabeln doppelt eingeschriebene Curven vierter Ordnung; von den 16 stationären Schmiegungebenen sind acht reell. — Im zweiten Falle sind nur zwei Ecken und die gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders reell; dementsprechend sind auch nur zwei von den doppelt umschriebenen Kegeln und zwei von den doppelt eingeschriebenen Curven wirklich vorhanden; die Zahl der reellen stationären Schmiegungebenen reducirt sich auf vier“. — An der zweitheiligen Curve sind von den aufgezählten Beziehungen zwischen Polarkegelschnitt und Kugel die Fälle I., II. a), II. b), II. c) vereinigt; der einteiligen Curve entspricht in beiden reellen Seitenebenen ihres Fundamentaltetraeders der Fall II. e).

Den verschiedenen Fällen der Berührung von C und K möge eine allgemeine Bemerkung vorangestellt werden.

Wie in Nr. 9 erläutert worden, führt eine Tangente t von C im allgemeinen zu zwei Punkten Q, Q^* von T^4 , und die Polarebene ihres Berührungspunktes T bezüglich der Kugel schneidet aus den beiden durch t an die Kugel gelegten Berührungsebenen die Tangenten τ, τ^* von T^4 in Q, Q^* aus.

Berührt t gleichzeitig den Kreis K , so fallen die Punkte Q, Q^* zwar zusammen, haben aber eine bestimmte Verbindungsgerade, die Schnittlinie der Polarebene von T mit der einzigen durch t bestimmten Berührungsebene der Kugel; diese Schnittlinie ist die Tangente von T^4 in dem Punkte (QQ^*) . Es sind die Punkte der stationären Osculationsebenen, welche auf solche Weise entstehen.

Wenn aber in diesem letztern Falle die Berührungspunkte von t mit C und K in einen Punkt P_1 zusammenfallen, dann wird die Verbindungslinie der in P_1 vereinigten Punkte Q, Q^* unbestimmt, weil die beiden Ebenen, durch welche sie vorhin bestimmt war, nunmehr auch zu einer Ebene vereinigt sind. Dieser Umstand charakterisirt den Berührungspunkt P_1 von C und K als einen Doppelpunkt von T^4 .

Bezüglich der Art der Berührung von C und K sind nun mehrere Fälle zu unterscheiden.

f) Zwischen C und K bestehe einfache (zweipunktige) Berührung. Eine ebensolche Beziehung besteht dann auch zwischen \mathcal{C} und K , so dass alle drei Linien den doppelt zu zählenden Berührungspunkt P_1 gemeinschaftlich haben. Im übrigen sind folgende Unterfälle zu bemerken.

f₁) Wird C von K eingeschlossen, oder haben beide Linien ausser dem Berührungspunkt und der Tangente in demselben noch zwei Punkte aber keine Tangenten mehr gemeinsam — eine Beziehung, welche sich nur bei der Hyperbel ergeben kann, wenn K sie äusserlich berührt —, so schneiden alle Tangenten von C , mit Ausnahme jener in P_1 , den Kreis K , in Folge dessen reducirt sich der reelle Teil von T^4 auf den Doppelpunkt P_1 .

f₂) Wird K von C eingeschlossen, oder haben beide Linien ausser P_1 und der Tangente daselbst noch zwei Punkte und zwei Tangenten gemeinsam (innere Berührung), so liegen die der Tangente in P_1 beiderseits benachbarten Tangenten von C ausserhalb K , ihre reciproken Polaren schneiden die Kugel reell; demnach vereinigen sich in dem Doppelpunkte zwei Aeste der Curve zu einem Knoten, T^4 besitzt dort zwei verschiedene Tangenten. Die Lage der Curvenäste ist in den beiden oben getrennten Fällen verschieden; im ersten liegt je einer auf jeder Seite von P , im andern Falle erstreckt sich

ein Ast jeder Art zu beiden Seiten dieser Ebene. Sowie von dem C und K gemeinsamen Polardreieck zwei Ecken in P_1 und die ihnen gegenüberliegenden Seiten in der zugehörigen Tangente vereinigt, während die dritte Ecke und Seite reell vorhanden sind — erstere in der Tangente in P_1 liegend, letztere durch P_1 gehend —, fallen auch zwei Ecken des Fundamentaltetraeders von T^4 mit P_1 und die conjugirten Seitenflächen mit der zugehörigen Tangentialebene P_1 der Kugel zusammen, und es existirt ausser P und P noch eine Ecke und die ihr entsprechende Seitenfläche — erstere in P_1 liegend, letztere durch P_1 gehend. Hieraus ergibt sich, dass auch zwei der doppelt umschriebenen Kegel zweiter Ordnung vereinigt sind zu einem Kegel mit dem Doppelpunkt als Scheitel, der jedoch nur im übertragenen Sinne als doppelt projicirend zu bezeichnen ist, indem jede seiner Kanten drei Punkte der Curve enthält, wovon allerdings zwei jedesmal im Doppelpunkt vereinigt sind; es verbleiben daher nur zwei doppelt umschriebene Kegel im eigentlichen Sinne. Die ihren Scheiteln gegenüberliegenden Seitenflächen des Fundamentaltetraeders schneiden T^4 ausser im Doppelpunkte in je zwei weiteren Punkten, die eine reell, die andere imaginär, die Curve besitzt also vier stationäre Schmiegungeebenen, wovon im vorliegenden Falle nur zwei reell sind. In der Ebene P_1 könnte von einer Doppelcurve der Tangentenfläche von T^4 nur dann die Rede sein, wenn man jede in ihr durch P_1 gezogene Gerade als Tangente der Curve auffassen wollte. Um die Natur der eigentlichen Doppelcurven in den andern zwei Seitenebenen des Fundamentaltetraeders zu erkennen, beachten wir die Aenderung, welche ihre Entstehung dem allgemeinen Falle (Nr. 9) gegenüber erleidet. Seien T' , T'' die beiden benachbarten, zu P_1 vereinigten Punkte, welche C und K gemeinschaftlich sind; wenn der Berührungspunkt T' der variablen Tangente t , den Kegelschnitt C durchlaufend, in die Lage T' kommt, so fällt t in die Verbindungslinie $T'T''$; die Polare t' von T' in Bezug auf den Kreis K , d. i. die Tangente des letzteren im Punkte T' , ist dieselbe Gerade $T'T''$; folglich sind in der gemeinsamen Tangente in P_1 zwei entsprechende Tangenten von C und \mathcal{C} vereinigt, sie sondert sich als Ort erster Ordnung von dem Orte vierter Ordnung ab, so dass der übrige Bestandteil des Ortes des Schnittpunktes von t und t' eine Curve dritter Ordnung ist; und nur diese ist als Durchschnitt der Tangentenfläche von T^4 mit der Ebene von C und K anzusehen, da die abgesonderte Gerade keine eigentliche Tangente der Curve ist. In den beiden Seitenflächen des Fundamentaltetraeders, welche den Scheiteln der eigentlichen doppelt umschriebenen Kegel conjugirt sind, hat also die Tangentenfläche von T^4 Doppelcurven dritter Ordnung.

f₃) Haben C und K ausser dem Berührungspunkte P_1 und der Tangente in demselben keine weiteren Punkte, dagegen noch zwei Tangenten gemeinschaftlich (äussere Berührung), so treffen die der Tangente in P_1 beiderseits benachbarten Tangenten von C den Kreis K in reellen Punkten, ihre reciproken Polaren schneiden also die Kugel imaginär, so dass es in der Umgebung von P_1 keine reellen Punkte von T^4 gibt; P_1 ist in diesem Falle ein isolirter Doppelpunkt der Curve; ausser ihm besitzt sie einen reellen geschlossenen Ast, welcher die Ebene P in zwei Punkten schneidet. Bezüglich der Elemente des Fundamentaltetraeders, der doppelt umschriebenen Kugel und der Doppelcurven der Tangentenfläche ergeben sich die nämlichen Resultate wie im vorangehenden Falle, nur dass jetzt beide Ebenen der eigentlichen Doppelcurven T^4 ausser im Doppelpunkt in zwei reellen Punkten schneiden, so dass alle vier stationären Osculationsebenen reell sind.

Die unter f₂) und f₃) betrachteten Formen von T^4 werden orthogonal symmetrisch in Bezug auf eine Diametralebene der Kugel, wenn P_1 mit einem Scheitel von C zusammenfällt, oder wenn K ein Hauptkreis der Kugel ist; trifft beides zusammen, so weist T^4 in Bezug auf zwei zu einander normale Diametralebenen orthogonale Symmetrie auf.

g) K sei ein Krümmungskreis von C (dreipunktige Berührung). Dann osculirt K auch \mathcal{C} , alle drei Curven haben den dreifach zu zählenden Berührungspunkt P_1 gemeinschaftlich. Die der gemeinsamen Tangente in diesem Punkte einerseits benachbarten Tangenten von C schneiden K reell, die andererseits benachbarten schneiden ihn imaginär — die Grenze zwischen beiden Tangentengruppen ist die ausser der Berührungstangente noch vorhandene gemeinsame Tangente von C und K ; in Folge dessen besitzt T^4 nur zu einer Seite des Doppelpunktes einen reellen Ast. \mathcal{C} hat mit K ausser dem dreifach zählenden P_1 noch einen vierten Punkt gemeinschaftlich, von T^4 fallen also in die Ebene P der Doppelpunkt, ferner der einzige ihm benachbarte Punkt der Curve und ein vierter Punkt in endlicher Entfernung von jenen; die beiden zuerst genannten bestimmen die einzige in P liegende und doppelt zu zählende Tangente von T^4 in P_1 , welche mit der Berührungstangente von C und K zusammenfällt; der letztgenannte Punkt führt zu einer stationären Osculationsebene von T^4 . Hieraus ergibt sich, dass P_1 im vorliegenden Falle ein stationärer Punkt der Curve ist. Das gemeinsame Polardreieck von C und K reducirt sich auf den Punkt P_1 als Vereinigung aller drei Ecken und die zugehörige Tangente als Vereinigung aller drei Seiten; in gleicher Weise sind in P_1 drei Ecken und in der zugehörigen Tangentialebene P_1 der Kugel drei Seitenflächen des

Fundamentaltetraeders von T^4 vereinigt, P und P bilden die vierte Ecke und die ihr conjugirte Seitenfläche. Mithin fallen auch drei der doppelt umschriebenen Kegel zweiter Ordnung in einen Kegel mit dem Rückkehrpunkt als Scheitel zusammen, der aber nur im uneigentlichen Sinne ein doppelt projicirender ist, da jede seiner Kanten drei Punkte der Curve enthält, wovon jedesmal zwei im Scheitel vereinigt sind; es verbleibt also nur ein doppelt umschriebener Kegel zweiter Ordnung im eigentlichen Sinne, der aus P , ebenso gibt es nur einen Punkt mit stationärer Osculationsebene, den bereits erwähnten in P . Von einer Doppelcurve der Tangentenfläche von T^4 in P_1 könnte wieder nur im übertragenen Sinne die Rede sein wie im Falle f_2). Um die Natur der Doppelcurve in P zu erkennen, verfolgen wir ihre Entstehung und bezeichnen zu diesem Zwecke mit T' , T'' , T''' die drei benachbarten, zu P_1 vereinigten Punkte, welche C und K gemeinschaftlich sind; dasselbe Resultat, welches sich im Falle f_2) ergab, wenn der variable Punkt T mit T' zusammenfiel, wiederholt sich hier nochmals, wenn T die Lage T'' annimmt; demnach sind in der gemeinsamen Tangente in P_1 zwei Paare entsprechender Tangenten von C und \mathcal{C} coincidirend, sie sondert sich, weil doppelt gezählt, als Ort zweiter Ordnung von dem Orte vierter Ordnung ab, so dass der übrige Teil des Ortes des Schnittpunktes von t und t eine Kegelschnittslinie ist. In der Seitenfläche des Fundamentaltetraeders, welche dem Scheitel des einzigen eigentlichen doppelt umschriebenen Kegels conjugirt ist, besitzt also die Tangentenfläche von T^4 einen Doppelkegelschnitt. Ihr Durchschnitt mit der Ebene P setzt sich aus diesem und der abgesonderten Geraden zusammen, da letztere eine Tangente der Curve ist.

Für die orthogonale Symmetrie von T^4 gibt es im gegenwärtigen Falle nur eine Bedingung: K muss ein Hauptkreis der Kugel sein.

Es ist leicht, die Entstehung der vorliegenden Form von T^4 aus jener mit dem Doppelpunkt als Knoten zu verfolgen; wenn in dem zweiten unter f_2) gedachten Falle einer der beiden Schnittpunkte von C und K dem Berührungspunkte P_1 beständig sich nähert, so zieht die eine Curvenschleife sich immer mehr zusammen und verschwindet im Augenblicke der Vereinigung jener Punkte; gleichzeitig fallen die beiden Tangenten im Curvenknoten in eine Gerade von P , nämlich in die Berührungstangente in P_1 .

h) K sei ein doppelt berührender Kreis von C . Entweder wird C von K ein- oder ausgeschlossen, oder C schliesst den Kreis K ein. Im ersten Falle, der nur bei reeller Berührung eintreten kann, sind alle Tangenten von C Secanten von K — ausgenommen die beiden gemeinsamen —, mithin ist T^4 bis auf die beiden Berührungs-

punkte als Doppelpunkte imaginär. Im zweiten Falle kann die Berührung reell oder ideell sein; die Berührungspunkte P_1, P_1^* sind (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte von T^4 . Ihrer immer reellen Verbindungslinie kommt in Bezug auf C, K und \mathcal{C} derselbe Pol P^* zu, und alle drei Kegelschnitte haben unzählig viele gemeinsame Polardreiecke mit der gemeinschaftlichen Ecke P^* und Seite $\overline{P_1 P_1^*}$; mithin gehören auch zu T^4 unzählig viele Fundamentaltetraeder mit dem gemeinsamen Eckenpaar P, P^* , Kantenpaar $\overline{PP^*}, \overline{P_1 P_1^*}$ und Ebenenpaar P, P^* , die Curve besitzt ausser den beiden doppelt umschriebenen Kegeln aus P, P^* noch unzählig viele, deren Scheitel die Gerade $\overline{P_1 P_1^*}$ erfüllen, d. h. sie zerfällt in zwei Kreise, deren Ebenen sich in der Verbindungslinie der Doppelpunkte schneiden. Auf dieses Ebenenpaar und seine zweifach zu zählende Schnittlinie reducirt sich auch die Tangentenfläche, resp. ihr Selbstdurchschnitt.

Hieraus geht hervor, dass „durch zwei Kreise K_1, K_2 einer „Kugel zwei Kegel zweiter Ordnung hindurchgehen; ihre Scheitel „ P, P^* liegen in der reciproken Polare der Schnittlinie der Kreise „ebenen“. Ist die Berührung zwischen C und K reell, so schneiden sich die Kreise K_1, K_2 in reellen Punkten, und die zugehörigen Kegelscheitel liegen ausserhalb der Kugel; bei ideeller Berührung sind die Schnittpunkte der Kreise imaginär, und von den Kegelscheiteln liegt der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Kugel. Wenn K ein grösster Kreis der Kugel ist, oder wenn K den Kegelschnitt (die Ellipse) C in den Scheitelpunkten (der kleinen Axe) berührt, so verwandelt sich einer der Kegel in einen Cylinder, und trifft beides zu, so gehen beide Kegel in zu einander normale Cylinder über.

i) K osculire C in einem Scheitel (vierpunktige Berührung). Da dieser Fall aus dem der doppelten reellen Berührung dadurch hervorgeht, dass die Berührungspunkte P_1, P_1^* einander näher rückend schliesslich zusammenfallen und mit dem Pol P^* ihrer Verbindungslinie sich vereinigen, so ändert sich das dort gefundene Resultat nur insoweit, als die Kreise, in welche T^4 zerfällt, sich nun berühren. Von den eigentlichen doppelt umschriebenen Kegeln bleibt nur einer übrig, der aus P , während der Kegel aus P^* , der in ein Ebenenpaar degenerirt, als doppelt projicirend nur im uneigentlichen Sinne bezeichnet werden könnte, da jede seiner Kanten drei Punkte des Gesamtdurchschnitts (wovon zwei jedesmal im Scheitel zusammenfallen) enthält. „Durch zwei einander berührende Kreise einer Kugel „geht also nur ein Kegel zweiter Ordnung; sein Scheitel liegt in „der reciproken Polare der gemeinsamen Tangente.“ Ist K ein Hauptkreis der Kugel, so verwandelt sich der Kegel in einen Cylinder.

III. Die Ebene P berührt die Kugel. Der Berührungspunkt ist ihr Pol P und als solcher Scheitel desjenigen Kegels, dessen Durchschnitt mit der Kugel die Curve T^4 ist. Da nun jede in P durch P gezogene Gerade hier mit der Kugel sowol als mit dem Kegel zwei zusammenfallende Punkte gemein hat, so ist P ein Doppelpunkt von T^4 . Je nach der Lage von P gegen C sind folgende Fälle zu unterscheiden.

a) P liegt ausserhalb C . Die reciproken Polaren der beiden durch ihn an C geführten Tangenten berühren die Kugel und T^4 in P , der Doppelpunkt ist ein Knotenpunkt der Curve. Das Tripel conjugirter Strahlen, welches P (als Nullkreis) und C gemeinsam ist, besteht aus der Polare p des Punktes P und aus den Axen der Strahleninvolution in P , beides auf C bezogen; die in p liegenden Ecken dieses Dreieckes sind die Scheitel der eigentlichen T^4 doppelt umschriebenen Kegel zweiter Ordnung, und da eine ausserhalb, die andere innerhalb C liegt, so schneidet eine der zugehörigen Seitenebenen des Fundamentaltetraeders die Curve ausser im Doppelpunkt in zwei reellen, die andere in zwei imaginären Punkten, den vier Punkten stationärer Osculationsebenen. Gehört P einer Axe von C an, so wird T^4 orthogonal symmetrisch in Bezug auf eine Diametralebene der Kugel, und ist C eine Hyperbel und P ihr Mittelpunkt, so besteht orthogonale Symmetrie in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Diametralebenen.

b) P liegt innerhalb C . Sowie die Tangenten aus P an C , so werden jetzt auch die Tangenten von T^4 in P imaginär, P ist also ein isolirter Doppelpunkt der Curve. Bezüglich der doppelt umschriebenen Kegel besteht dem vorigen Falle gegenüber der Unterschied, dass nun die Scheitel beider ausserhalb C liegen, woraus weiter folgt, dass jetzt alle vier stationären Osculationsebenen reell sind. Für einfache Orthogonalsymmetrie gilt dieselbe Bedingung, wie unter a); soll zweifache Symmetrie auftreten, so muss C eine Ellipse und P ihr Mittelpunkt sein.

Ein besonderer Fall ergibt sich, wenn P mit einem Brennpunkte von C zusammenfällt. Da unter dieser Voraussetzung das Strahlensystem in P in Bezug auf C ein rechtwinkliges ist, so haben P und C unzählig viele Polardreiecke gemeinsam, welchen P als Ecke und die zugehörige Directrix von C als Seite gemeinschaftlich ist; aus allen Punkten der letzteren wird also T^4 durch Kegel zweiter Ordnung projicirt, d. h. die Curve zerfällt in zwei Plancurven, deren Ebenen sich in jener Directrix schneiden; die eine dieser Ebenen ist P selbst und bestimmt mit der Kugel den Doppelpunkt (Nullkreis), die andere einen Kreis. Alle T^4 doppelt umschriebenen Kegel dege-

neriren im vorliegenden Falle in ein Ebenenpaar, als eigentlicher Kegel zweiter Ordnung verbleibt nur der (dreifach projicirende) aus P . — Der Zusammenhang dieses Sonderfalles mit dem Falle II. h) erhellt aus der Bemerkung, dass die Brennpunkte eines Kegelschnitts die kleinsten unter den reellen Kreisen sind, welche ihn doppelt (ideell) berühren.

c) P liegt in C . Die beiden durch P an C gehenden und ebenso die beiden Tangenten von T^4 im Doppelpunkte fallen in eine zusammen, letzterer erscheint dadurch als Rückkehrpunkt charakterisirt. Von dem Polardreieck, welches P als Nullkreis und C gemeinsam ist, sind zwei Ecken und Seiten in P , resp. in der zugehörigen Tangente von C vereinigt; dritte Seite ist die Normale von C in P , dritte Ecke ihr Pol in Bezug auf C ; nur aus letzterem Punkte wird T^4 durch einen Kegel zweiter Ordnung doppelt projicirt, und die ihm conjugirte Seitenebene des Fundamentaltetraeders hat mit der Curve ausser dem stationären und den ihm unendlich nahen Punkte als vierten den Punkt der einzigen stationären Osculationsebene gemein. Die Curve wird in Bezug auf diese letztgenannte Ebene orthogonal symmetrisch, wenn P in einen Scheitel von C fällt.

Hiermit sind alle Beziehungen zwischen dem Polarkegelschnitt C und der Kugel erschöpft; es bleibt nur übrig, die weiter gewonnenen Resultate zusammenzufassen.

„Die sphärische Curve vierter Ordnung kann, so lange sie nicht „in niedere Curven zerfällt, einen Doppelpunkt oder einen Rückkehr- „punkt besitzen. — In dem Polartetraeder der Curve mit Doppelpunkt „fallen zwei Ecken und Ebenen mit dem Doppelpunkt, resp. mit der „zugehörigen Tangentialebene der Kugel zusammen; aus den beiden „andern Ecken wird die Curve durch Kegel zweiter Ordnung doppelt „projicirt, und in den diesen Ecken conjugirten Seitenebenen besitzt „ihre Tangentenfläche Doppelcurven dritter Ordnung; der Doppel- „punkt selbst ist Scheitel eines die Curve dreifach projicirenden „Kegels zweiter Ordnung; stationäre Schmiegungeebenen sind in der „Anzahl vier vorhanden, davon nur zwei reell, wenn der Doppelpunkt „ein Knotenpunkt, und alle vier, wenn er isolirt ist. — In dem „Polartetraeder der Curve mit stationärem Punkt fallen drei Ecken „und Ebenen mit dem Rückkehrpunkt, resp. mit der zugehörigen „Tangentialebene der Kugel zusammen; aus der vierten Ecke wird die „Curve durch einen Kegel zweiter Ordnung doppelt projicirt und in „der ihr conjugirten Seitenebene besitzt ihre Tangentenfläche einen „Doppelkegelschnitt; der stationäre Punkt selbst ist Scheitel eines „die Curve dreifach projicirenden Kegels zweiter Ordnung; die Zahl „der stationären Osculationsebenen beträgt eins.“

An der Curve mit einem Knotenpunkt sind die beiden in II. f₂) unterschiedenen Fälle mit dem Falle III. a) vereinigt; an der Curve mit isolirtem Doppelpunkt erscheint der Fall II. f₃) zweimal verbunden mit III. b); an der Curve mit Rückkehrpunkt ist II. g) mit III. c) combinirt.

„Mit dem Auftreten von zwei Doppelpunkten zerfällt die Curve „in zwei Kreise. So lange die Doppelpunkte imaginär oder reell „und verschieden sind, gibt es zwei Kegel zweiter Ordnung, welche „durch beide Kreise gehen; sind sie reell und zusammenfallend, so „verschwindet einer der beiden Kegel; in dem Falle endlich, wo „einer der Kreise sich auf einen Punkt zusammenzieht und welcher „sowol als specielle Form der Curve mit isolirtem Doppelpunkt als „der Curve mit zwei imaginären Doppelpunkten angesehen werden „kann, verschwinden beide Kegel“ (in dem einen) „oder sie fallen zusammen“ (in dem andern Sinne).

Bei zwei Kreisen mit reellen Schnittpunkten tritt der Fall II. h) (reelle Berührung) zweimal auf; bei zwei Kreisen mit imaginären Schnittpunkten ist der Fall II. h) (ideelle Berührung) mit dem letzten Sonderfall von I. verbunden; zwei Kreisen endlich, wovon der eine ein Nullkreis, entspricht der Sonderfall von III. b).

VII.

Dichte der Sehnen von Flächen und ebenen Curven.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Dichte der Sehnen einer Fläche in einem Punkte.

Nimmt man an, dass von allen gleich grossen Stücken einer Fläche gleichviel Gerade nach irgend einem Punkte gehen, so wird die Menge der Sehnen, welche zwei Flächenstücke verbinden, durch das Product der Flächenstücke gemessen und sei demselben überall gleich gesetzt.

Sei F eine geschlossene convexe Fläche, (F) und $(F)_0$ zwei unendlich kleine Stücke derselben, O ein Punkt im Innern von F und Mittelpunkt einer Kugel K vom unendlich kleinen Radius ε . Mögen ferner (F) und $(F)_0$ in der gegenseitigen Beziehung stehen, dass alle Sehnen zwischen beiden durch K gehen. Dann ist die Menge der durch K gehenden Sehnen $= (F)(F)_0$. Dieses Product hat die Aequatorfläche von K , das ist $2R\varepsilon^2$, zum Factor. Dividirt man es durch denselben, so drückt der Grenzwert des Quotienten bei verschwindendem ε die Grösse aus, welche wir Dichte der Sehnen im Punkte O nennen, unter Beschränkung der Fläche auf die zwei Stücke.

Ist nun $(F) = \partial^2 F$ ein Flächenelement, und man integrirt den Ausdruck über die ganze Fläche, so erhält man die doppelte Dichte in O ohne Beschränkung

$$2D = \iint \partial^2 F \lim \frac{(F)_0}{2R\varepsilon^2} \quad (1)$$

doppelt, sofern jede Sehne zweimal mit vertauschten Enden auftritt.

Sei O Anfang der xyz und für positive ρ

$$x = \rho \cos \vartheta \cos \varphi; \quad y = \rho \cos \vartheta \sin \varphi; \quad z = \rho \sin \vartheta \quad (2)$$

dann hat die Polargleichung von F die Form

$$\rho = \rho(\vartheta, \varphi)$$

Gegenpunkte auf F mögen die Endpunkte einer Sehne heissen, die durch O geht. Man erhält den Gegenpunkt P_0 des Punktes P , dessen Coordinaten (2) sind, durch Substitution von $-\vartheta$ für ϑ und $\varphi + 2R$ für φ . Setzt man also

$$\rho_0 = \rho(-\vartheta, \varphi + 2R)$$

so werden die Coordinaten von P_0

$$x_0 = -\rho_0 \cos \vartheta \cos \varphi; \quad y_0 = -\rho_0 \cos \vartheta \sin \varphi; \quad z_0 = -\rho_0 \sin \vartheta$$

Beschreibt man einen Kegel, dessen Spitze in P , und der K berührt, so begrenzt dieser auf F das Stück $(F)_0$ entsprechend dem Punkte P . Lässt man den Kegel von zwei zu PP_0 in O und P_0 normalen Ebenen schneiden, so ist erstere Schnittfläche (mit Vernachlässigung Unendlichkleiner höherer Ordnung) $= 2R\rho^2$, daher letzterer

$$= 2R\rho^2 \left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho} \right)^2$$

Dieser ist als Projection von $(F)_0$

$$= (F)_0 \cos \omega_0$$

wo ω_0 den Winkel zwischen der Sehne und der Flächennormale bezeichnet. Führt man den hieraus fließenden Wert von $(F)_0$ in Gl. (1) ein, so kommt:

$$2D = \iint \left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\cos \omega_0}$$

Bezeichnen p, q, r die Richtungscosinus der Flächennormale in P , so ist

$$pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}; \quad qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{vmatrix}; \quad rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

Die Quadratsumme gibt:

$$\begin{aligned} t^2 &= \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right)^2 + \dots \right\} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \dots \right\} - \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \dots \right)^2 \\ &= \left\{ \rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \right)^2 \right\} \left\{ \rho^2 \cos^2 \vartheta + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 \\ &= \rho^2 \cos^2 \vartheta \left\{ \rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi \cos \vartheta} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Ferner ist in P

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{px + qy + rz}{\rho} = \frac{1}{\rho t} \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\rho^2}{t} \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\rho^2}{t} \cos \vartheta \end{aligned} \tag{4}$$

Macht man von beiden Resultaten Anwendung auf P_0 , so ist nur t_0 für t und ρ_0 für ρ zu schreiben. Bekanntlich ist

$$\partial^2 F = t \partial \vartheta \partial \varphi$$

und zwar müssen hier, wo O ein innerer Punkt ist, ϑ und φ alle Richtungen durchlaufen, d. h. φ von 0 bis $4R$, ϑ von $-R$ bis R variiren. Nach Einsetzung der erhaltenen Werte findet man:

$$D = \frac{1}{2} \int \int \left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho \rho_0} \right)^2 \frac{t_0 \partial \vartheta \partial \varphi}{\cos \vartheta} \tag{5}$$

oder

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int_{-R}^R \cos \vartheta \partial \vartheta \int_0^{4R} \frac{(\rho + \rho_0)^2}{\rho \rho_0} \partial \varphi \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi \cos \vartheta} \right)^2} \\ &\quad \times \sqrt{\rho_0^2 + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi \cos \vartheta} \right)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

§. 2. Dichte der Sehnen einer ebenen Curve in einem Punkte.

Die vorstehende Untersuchung ändert sich nur wenig, wenn an die Stelle der Fläche F die geschlossene convexe ebene Curve S tritt, welche den Punkt O , Mittelpunkt des Kreises K vom Radius ϵ und Anfang der xy , umschliesst. Sei für den Curvenpunkt P

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi$$

und die Polargleichung der Curve

$$\rho = \rho(\varphi)$$

mithin die Coordinaten des Gegenpunkts P_0

$$x_0 = -\rho_0 \cos \varphi; \quad y_0 = -\rho_0 \sin \varphi$$

$$\rho_0 = \rho(\varphi + 2R)$$

Die zwei Tangenten von P aus an K begrenzen auf S das Stück $(S)_0$, d. i. den Bezirk aller in P beginnenden durch K gehenden Sehnen. Zwei Normalen zu PP_0 durch O und P_0 von einer Tangente bis zur andern gezogen haben die Werte

$$2\varepsilon, \quad 2\varepsilon \frac{\rho + \rho_0}{\rho}$$

Letztere ist als Projection von $(S)_0$

$$= (S)_0 \cos \omega_0$$

wo ω_0 den Winkel zwischen der Sehne PP_0 und der Normale von S in P_0 bezeichnet.

Die Sehnenmenge ist durch den Durchmesser 2ε von K zu dividiren; dann wird die doppelte Dichte in O

$$2D = \int \partial S \frac{(S)_0}{2\varepsilon} = \int \frac{\rho + \rho_0}{\rho} \frac{\partial S}{\cos \omega_0} \tag{7}$$

Im Punkte P ist

$$\cos \omega = \frac{x \frac{\partial y}{\partial S} - y \frac{\partial x}{\partial S}}{\rho} = \frac{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial S}}{\rho}$$

$$\partial S^2 = \rho^2 + \rho^2 \partial \varphi^2$$

also

$$\cos \omega_0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

Dies in Gl. (7) eingeführt gibt:

$$D = \frac{1}{2} \int_0^{4R} \frac{\rho + \rho_0}{\rho \rho_0} \partial \varphi \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2} \sqrt{\rho_0^2 + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \varphi}\right)^2} \tag{8}$$

§. 3. Anwendung auf die Kugel.

Sei F eine Kugel vom Radius 1. Die z Axe können wir durch ihren Mittelpunkt legen, so dass dessen Coordinaten 0, 0, $-h$ sind. Dann ist die Gleichung der Kugel:

$$x^2 + y^2 + (z + h)^2 = 1 \quad \text{oder}$$

$$\rho^2 + 2h\rho \sin \vartheta + h^2 = 1$$

woraus:

$$\rho + h \sin \vartheta = \pm \sqrt{1 - h^2 \cos^2 \vartheta}$$

$$(\rho + h \sin \vartheta) \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} = -h\rho \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} = \mp \frac{h \rho \cos \vartheta}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \vartheta}}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$$

$$\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta}\right)^2 = \frac{\rho^2}{1 - h^2 \cos^2 \vartheta}$$

$$\rho + \rho_0 = \pm 2 \sqrt{1 - h^2 \cos^2 \vartheta}$$

Dies in Gl. (6) eingeführt gibt:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int_{-R}^R \cos \vartheta \, \delta \vartheta \int_0^{4R} \frac{4(1 - h^2 \cos^2 \vartheta)}{\rho \rho_0} \frac{\rho}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \vartheta}} \frac{\rho_0 \, \delta \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \vartheta}} \\ &= 2 \int_{-R}^R \cos \vartheta \, \delta \vartheta \int_0^{4R} \delta \varphi = 16 R \end{aligned} \quad (9)$$

Die Dichte der Sehnen einer Kugel ist also in allen innern Punkten dieselbe.

§. 4. Anwendung auf den Kreis.

Die Polargleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $x = 0$, $y = -h$ hat, ist

$$\rho^2 + 2h\rho \sin \varphi + h^2 = 1$$

Hieraus folgen, wie bei der Kugel, die Werte:

$$\rho + \rho_0 = 2 \sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi}; \quad \rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2}{1 - h^2 \cos^2 \varphi}$$

und man erhält nach deren Einsetzung in Gl. (8):

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int_0^{4R} \frac{2 \sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi}}{\rho \rho_0} \frac{\rho}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi}} \frac{\rho_0 \, \delta \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi}} \\ &\quad - \int_0^{4R} \frac{\delta \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi}} = 4K(h) \end{aligned} \quad (10)$$

d. i. gleich der ganzen Periodenlänge der elliptischen Functionen für den Modul h .

Liegt O auf dem Kreise selbst, so ist $h = 1$ und D logarithmisch unendlich. Liegt O im Mittelpunkte, ist also $h = 0$, so ist D gleich dem ganzen Kreise.

Zwischen der Kugel und dem Kreise findet demnach der bemerkenswerte Unterschied statt, dass die Sehrendichte innerhalb ersterer

constant ist, innerhalb des letztern vom Mittelpunkt nach dem Kreise hin beständig und ins unendliche wächst.

§. 5. Secantendichte in einem äussern Punkte.

Ist O ein äusserer Punkt, so hat nur ϱ_0 die umgekehrte Lage, in den Formeln (6) (8) tritt also $\varrho - \varrho_0$ an die Stelle von $\varrho + \varrho_0$, doch ist in beiden Fällen die Länge der Sehne dafür zu setzen. Allein dies hat die weitere Folge, dass der Radiusvector dieselben Richtungen (ϑ, φ) zweimal durchläuft, erst für $\varrho > \varrho_0$, dann für $\varrho < \varrho_0$, dass sich demgemäss die Fläche F durch eine Linie $\varrho = \varrho_0$, oder die Curve S durch 2 Punkte $\varrho = \varrho_0$ in 2 Teile teilt, deren jeder für sich die den Secanten entsprechenden ϑ und φ vollständig ergibt. Hiernach bestimmt die Gleichung $\varrho = \varrho_0$ eine Grenze der Integrale nach ϑ und φ , und zwar genügt es dieselbe nur von der einen Seite ($\varrho > \varrho_0$) aus zu erreichen, damit die Integrale (6) (8) das einfache D darstellen.

Um eine einheitliche Form der Integrale zu gewinnen, braucht man nur eine Secante zur z Axe in §. 1., resp. zur y Axe in §. 2. zu nehmen, erst nach ϑ von $-R$ bis ϑ_1 , (bestimmt durch $\varrho = \varrho_0$), dann nach φ von 0 bis $4R$ in §. 1., resp. nach φ von einem Werte $\varphi = \varphi_1$ bis zum andern im §. 2. zu integrieren.

Für eine Kugel wird $\varrho = \varrho_0$, wenn $\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \vartheta} = 0$ ist, daher hat man:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{h}; \quad \sin \vartheta_1 = -\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}}$$

$$D = 4 \int_{-R}^{\vartheta_1} \cos \vartheta \, \partial \vartheta \int_0^{4R} \partial \varphi = 16R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}}\right)$$

Dies geht stetig in den Wert $16R$ für innern Punkt über, wenn h bis 1 abnimmt, nimmt aber beständig ab und verschwindet, wenn h ins unendliche wächst.

Für einen Kreis wird $\varrho = \varrho_0$, wenn $\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi} = 0$ ist. Setzt man den einen genügenden Wert $\varphi = R - \varphi_1$, so wird der andre $\varphi = R + \varphi_1$, und man hat:

$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{h}$$

$$D = 2 \int_{R-\varphi_1}^{R+\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi}} = 2 \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= 4 \int_0^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}}$$

oder, wenn $h \sin \varphi = \sin \psi$:

$$D = \frac{4}{h} \int_0^1 \frac{\partial \sin \psi}{\cos \psi \cos \varphi} = \frac{4}{h} K \left(\frac{1}{h} \right) \quad (11)$$

D geht also bei Annäherung von h an 1 in $\log \infty$ über und verschwindet, wenn h unendlich wird.

Ueberdies ist bei Vergleichung mit Gl. (10) die Relation bemerkenswert:

$$D \left(\frac{1}{h} \right) = h D(h) \quad (12)$$

gültig für jedes h , oder in Worten:

„Stehen die Entfernungen zweier Punkte vom Mittelpunkte eines „Kreises in reciprokem Verhältniss zu dessen Radius, so verhält sich „die Sehnen-(Secanten-)Dichte im einen zur Secanten-(Sehnen-)Dichte „im andern wie der Radius zu der erstern Entfernung.“

Oder noch kürzer:

„Das Product der Sehnendichte und der Quadratwurzel aus dem „Abstände vom Mittelpunkte ist zwei reciprok liegenden Punkten „gemeinsam.“

§. 6. Sehnendurchgangsraum in ellipsoidaler Gestalt.

Zur Ermittlung der Sehnendichte in einem Punkte haben wir statt desselben eine Kugel betrachtet und diese in den Punkt zusammenschwinden lassen. Man kann nun fragen, ob das Resultat dadurch verändert wird, wenn man einen andern Körper in jenen Punkt zusammenschwinden lässt.

Wir wollen uns auf Untersuchung des Falles beschränken, wo statt der Kugel K das Ellipsoid

$$\left(\frac{\xi_1}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{\zeta_1}{\gamma} \right)^2 = 1 \quad (13)$$

den Raum begrenzt, durch welchen alle Sehnen gehen müssen.

Sei O Mittelpunkt jenes Ellipsoids E und Anfang der Coordinaten xyz , $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$, die Axen von E zugleich Axen der xyz und $\xi_1\eta_1\zeta_1$, die Sehne POP_0 Axe der ζ bei der Beziehung der Systeme, dass

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta \\ \eta_1 &= b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta \\ \zeta_1 &= c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ist, und zwar liege der Punkt P mit den Coordinaten xyz auf der Fläche F , während $(\xi\eta\zeta)$ und $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ denselben variablen Punkt nahe bei O bezeichnen.

Die nächste und bis zum Ziele führende Aufgabe ist es nun, den Flächeninhalt des Schnittes einer normal zu OP durch O gehenden Ebene mit dem Kegel zu berechnen, der seine Spitze in P hat und E längs einer geschlossenen Linie berührt. Statt des Kegels kann man ohne Einfluss üübenden Fehler auch einen berührenden Cylinder von der Axenrichtung OP setzen.

Eine Parallele mit OP

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}$$

schneidet E in 2 Punkten bestimmt durch die Gleichung

$$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0 \tag{15}$$

in welche Gl. (13) übergeht, wenn man sie nach Substitution der Werte (14) nach Potenzen von ξ ordnet, und zwar ist

$$A = \frac{(a_1\xi + a_2\eta)^2}{\alpha^2} + \dots - 1; \quad B = a \frac{a_1\xi + a_2\eta}{\alpha^2} + \dots; \quad C = \frac{a^2}{\alpha^2} + \dots$$

Die Gerade berührt E , wenn die 2 Wurzeln der Gl. (15) zusammenfallen, wenn also

$$B^2 - AC = 0$$

ist. Dies gibt:

$$\left(\frac{a_2\xi - a_1\eta}{\beta\gamma}\right)^2 + \dots = C \tag{16}$$

Der Abstand der so bestimmten Parallele von O , d. i. $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, ist ein Maximum oder Minimum, wenn zugleich

$$\xi\partial\xi + \eta\partial\eta = 0$$

und nach Gl. (16)

$$\frac{a_2\xi - a_1\eta}{\beta\gamma} \frac{a_2\partial\xi - a_1\partial\eta}{\beta\gamma} + \dots = 0$$

ist, woraus durch Elimination von $\partial\xi, \partial\eta$:

$$\frac{a_2\xi - a_1\eta}{\beta\gamma} \frac{a_1\xi + a_2\eta}{\beta\gamma} + \dots = 0 \tag{17}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$L = \alpha^2 a_1^2 + \dots; \quad M = \alpha^2 a_1 a_2 + \dots; \quad N = \alpha^2 a_2^2 + \dots$$

$$G = L + N; \quad H = -L + N; \quad R = H^2 + 4M^2$$

so lautet Gl. (17) entwickelt:

$$M(\xi^2 - \eta^2) + H\xi\eta = 0$$

woraus:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{H \pm \sqrt{R}}{2M} \tag{18}$$

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2} = \frac{\sqrt{R \pm H}}{2M^2} \sqrt{R} \quad (19)$$

Entsprechen dem grössten $\xi^2 + \eta^2$ die Werte $\xi' \eta'$, dem kleinsten $\xi'' \eta''$, so ist der Flächeninhalt der Basis des Cylinders

$$Q = 2R \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2}$$

das ist nach Gl. (19)

$$Q = 2R \xi' \xi'' \frac{\sqrt{R}}{2M^2} \sqrt{R - H^2} = \frac{2R \xi' \xi'' R}{M} \quad (20)$$

Die ξ werden durch Gl. (16) bestimmt, welche entwickelt lautet:

$$N\xi^2 - 2M\xi\eta + L\eta^2 = C\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Eliminirt man η mittelst Gl. (18), so erhält man nach einigen Transformationen:

$$\xi^2(G \mp \sqrt{R})(\sqrt{R} \pm H) \frac{\sqrt{R}}{4M^2} = C\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Multiplicirt man diese 2 Gleichungen, welche dem obigen Maximum und Minimum entsprechen, so kommt:

$$(\xi' \xi'')^2 \frac{G^2 - R}{4M^2} R = (C^2 \alpha^2 \beta^2 \gamma^2)^2$$

Hiernach und nach (20) wird

$$Q = \frac{4R C \alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{\sqrt{G^2 - R}} \quad (21)$$

Nun findet man:

$$\begin{aligned} G^2 - R &= 4(LN - M^2) = 4 \begin{vmatrix} \alpha^2 a_1^2 + \dots & \alpha^2 a_1 a_2 + \dots \\ \alpha^2 a_1 a_2 + \dots & \alpha^2 a_2^2 + \dots \end{vmatrix} \\ &= 4\beta^2\gamma^2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}^2 + \dots = 4\beta^2\gamma^2 a^2 + \dots = 4C^2 \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \end{aligned}$$

so dass Gl. (21) sich reducirt auf

$$Q = 2R \alpha \beta \gamma \sqrt{C} = \frac{1}{2} E \sqrt{C}$$

Die geometrische Bedeutung von C findet man aus Gl. (15) für $\xi = \eta = 0$, wo sie entsprechend der Geraden PP_0 lautet:

$$C\xi^2 = 1$$

Hier ist 2ξ der Durchmesser von E , welcher in die Sehne PP_0 fällt. Bezeichnet man ihn mit δ . so wird

$$\sqrt{C} = \frac{2}{\delta}$$

$$Q = \frac{3}{2} \frac{E}{\delta}$$

Dieses Q tritt an die Stelle des Kugeläquators $2R\varepsilon^2$; von da an ist die ganze Rechnung wie bei der Kugel, die übrigen Factoren unter dem Integralzeichen in (5) sind unabhängig von der Gestalt des Sehnedurchgangsraums. Man hat also die aus P ausgehende Sehnenmenge durch Q zu dividiren, oder das Element des Integrals mit der centralen Durchgangslänge zu multipliciren, am Schlusse das Integral durch $\frac{3}{2}$ des Durchgangsraumes zu dividiren, um bei Anwendung des Ellipsoids die gleiche Sehnedichte zu finden wie bei der Kugel.

Es hat sich ergeben, dass ein anderer Wert der Sehnedichte beim Ellipsoid nicht resultirt, dass vielmehr nur ein allgemeineres und complicirtes Messungsgesetz zugrunde gelegt werden muss.

§. 7. Sehnedichte der Tetraederfläche.

Um von der Formel (1) auf das Tetraeder Anwendung zu machen, müssen zuerst die Seiten in solche Stücke geteilt werden, dass jeder Teil der einen Seite alle Punkte enthält, deren Gegenpunkte einen Teil einer andern Seite ausfüllen. Diese Abgrenzung erhält man leicht auf folgende Weise.

Seien $A_1A_2A_3A_4$ die Eckpunkte eines Tetraeders, innerhalb dessen O liegt, ferner $B_1B_2B_3B_4$ die Gegenpunkte der Ecken A . Eine leichte Betrachtung zeigt, dass auf jedem Pare von Gegenkanten ein einziges Par Gegenpunkte liegt. So liegt auf der Kante A_2A_3 der Punkt C_{23} , auf der Gegenkaute A_1A_4 der Gegenpunkt C_{14} . Analog seien die 4 übrigen Gegenpunkte bezeichnet.

Jetzt hat man im Dreieck $A_2A_3A_4$ die 4 Punkte

$$A_2 \ C_{23} \ B_1 \ C_{24} \ \text{mit den bezüglichen Gegenpunkten}$$

$$B_2 \ C_{14} \ A_1 \ C_{13}$$

im Dreieck $A_1A_3A_4$. Wie leicht erhellt, sind dann die Vierecke $A_2C_{23}B_1C_{24}$ und $B_2C_{14}A_1C_{13}$ einander derart zugeordnete Bezirke, dass jeder Punkt des einen seinen Gegenpunkt im andern hat. Sie sind nämlich Schnitte zweier Scheitelpyramiden, deren Spitze O ist. Zieht man die Geraden B_1C_{34} , B_1C_{24} , B_1C_{23} , so teilen diese das Dreieck $A_2A_3A_4$ in 3 Vierecke, welche ihre zugeordneten Vierecke einzeln auf den 3 übrigen Tetraederseiten haben.

Es genügt nun ein solches zugeordnetes Par von Bezirken zu betrachten, und zwar wollen wir die Vierecke noch durch die Diagonalen B_1A_2 und B_2A_1 in Dreiecke teilen, und nur das Dreieckspaar $B_1A_2C_{23}$, $B_2A_1C_{14}$ untersuchen.

Sei O Anfang der xyz und die Coordinaten der A, B, C mit den gleichen Indices, die der B ausserdem mit einem Strich x', y', z' , die der C mit 2 Strichen x'', y'', z'' bezeichnet. Ferner sei in Determinanten, deren 3 Reihen sich auf x, y, z gleicherweise beziehen, nur die erste Reihe ausgeschrieben, und zur Abkürzung gesetzt:

$$a_1 = |x_2x_3x_4|; \quad a_2 = |x_1x_4x_3|; \quad a_3 = |x_4x_1x_2|; \quad a_4 = |x_3x_2x_1|$$

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

so dass identisch

$$a_1W_1 + a_2W_2 + a_3W_3 + a_4W_4 = \begin{vmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (22)$$

ist. Aus den gegebenen A sind nun zuerst die B und C zu bestimmen. Man hat:

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{z_1'}{z_1} = \mu$$

daher, sofern B_1 in der Ebene $A_2A_3A_4$ liegt:

$$|x_3 - x_2 \quad x_4 - x_2 \quad \mu x_1 - x_2| = 0$$

oder

$$\mu(a_2 + a_3 + a_4) - a_1 = 0$$

$$\mu = -\frac{a_1}{a - a_1}; \quad x_1' = -\frac{a_1x_1}{a - a_1}; \quad \text{etc.}$$

Ferner ist

$$\frac{x_{14}''}{x_{23}''} = \frac{y_{14}''}{y_{23}''} = \frac{z_{14}''}{z_{23}''} = w$$

und sofern C_{23} auf A_2A_3 , C_{14} auf A_1A_4 liegt,

$$\begin{aligned} x_{23}'' &= x_2 + (x_3 - x_2)\pi \\ x_{14}'' &= x_1 + (x_4 - x_1)\nu \end{aligned} \quad (23)$$

woraus:

$$x_1 + (x_4 - x_1)\nu = wx_2 + w(x_3 - x_2)\pi$$

Eliminirt man ν und w zwischen den 3 Analogon, so kommt:

$$|x_1 \quad x_4 \quad x_2 + (x_3 - x_2)\pi| = 0$$

oder

$$\pi = \frac{a_3}{a_2 + a_3} \tag{24}$$

daher nach Gl. (23)

$$x_{23}'' = \frac{a_2 x_2 + a_3 x_3}{a_2 + a_3}$$

und nach Analogie

$$x_{14}'' = \frac{a_1 x_1 + a_4 x_4}{a_1 + a_4}$$

Beides durch einander dividirt gibt, mit Beachtung, dass nach Gl. (22) die Summe der Zähler = 0 ist:

$$w = -\frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_4}$$

Sei jetzt P mit den Coordinaten xyz ein innerer Punkt des Dreiecks $B_1 A_2 C_{23}$, P_0 mit den Coordinaten $x_0 y_0 z_0$ der Gegenpunkt, welcher innerhalb $B_2 A_1 C_{14}$ liegen muss. Wir ziehen die Transversale $B_1 P Q$, wo Q mit den Coordinaten $x' y' z'$ auf $A_2 A_3$ liegt. Dann ist:

$$\begin{aligned} x' &= x_2 + (x_3 - x_2)u \\ x &= x_1' + (x' - x_1')v \end{aligned}$$

woraus:

$$x = \mu x_1 + (x_2 - \mu x_1)v + (x_3 - x_2)uv \tag{25}$$

Damit das so bestimmte P das Dreieck $B_1 A_2 C_{23} = \mathcal{A}$ erzeugt, hat u von 0 bis π und v von 0 bis 1 zu variiren.

Zur Berechnung des Flächenelementes $t \partial u \partial v$ hat man:

$$t^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \dots \right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \dots \right] - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \dots \right)^2$$

und findet:

$$t = \sqrt{ln - m^2} v \tag{26}$$

wo

$$\begin{aligned} l &= (x_2 - \mu x_1)^2 + \dots; & n &= (x_3 - x_2)^2 + \dots \\ m &= (x_2 - \mu x_1)(x_3 - x_2) + \dots \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Der Gegenpunkt P_0 wird bestimmt durch

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{z_0}{z} = -\frac{\varrho_0}{\varrho} = -\lambda$$

$$| x_3 - x_1 \quad x_4 - x_1 \quad \lambda x + x_1 | = 0 \tag{27}$$

Dies gibt:

$$\begin{aligned} | x_3 \quad x_4 \quad x_1 | &= -a_2 = \\ -\lambda | x_3 - x_1 \quad x_4 - x_1 \quad \mu x_1 (1-v) + x_2 (1-u)v + x_3 uv | \\ &= \lambda \{ a_2 \mu (1-v) - (a - a_2) (1-u)v + a_2 uv \} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1}{\frac{a}{a_2} (1-u)v - \mu(1-v) - v}$$

Demnach ist die Sehrendichte

$$D = \Sigma \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 v dv \int_0^\pi \frac{(1+\lambda)^2}{\cos w_0} \partial u$$

Die Richtungs-cosinus von PP_0 sind:

$$\frac{x}{\rho}, \quad \frac{y}{\rho}, \quad \frac{z}{\rho}$$

die der Normale der Ebene $A_1A_3A_4$ sind constant und verhalten sich wie die Coefficienten von x_0, y_0, z_0 in der Gleichung

$$| x_3 - x_1 \ x_4 - x_1 \ x_0 - x_1 | = 0$$

deren Quadratsumme

$$h^2 = [(x_3 - x_1)^2 + \dots] [(x_4 - x_1)^2 + \dots] - [(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) + \dots]^2$$

ist. Daher hat man:

$$\cos w_0 = \frac{1}{\rho h} | x_3 - x_1 \ x_4 - x_1 \ x_0 - x_1 |$$

das ist nach Gl. (27)

$$\cos w_0 = \frac{a_2}{\rho h \lambda}$$

und die Dichte der Sehnen der ganzen Tetraederfläche in O ist

$$D = \Sigma \frac{h}{a_2} \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 v dv \int_0^\pi \rho \lambda (1 + \lambda)^2 \partial u \tag{28}$$

Die Summe erstreckt sich über die 12 Paare zugeordneter Elementardreiecke der Oberfläche.

Hier ist

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Setzt man

$$s_k = x_k^2 + \dots; \quad s_{kh} = x_k x_h + \dots$$

$$L_1 = s_1 \mu^2 + 2(s_{12} - s_1 \mu) \mu v + (s_2 - 2s_{12} \mu + s_1 \mu^2) v^2$$

$$M_1 = s_{13} - s_{12} + (s_{23} - s_2 - s_{13} + s_{12}) v$$

$$N_1 = s_2 - 2s_{23} + s_3$$

$$L = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{N_1^2}; \quad M = \frac{M_1}{N_1}; \quad N = \sqrt{N_1}$$

so wird

$$e^2 = L_1 + 2M_1 uv + N_1 u^2 v^2 = N^2 [(uv + M)^2 + L]$$

Sei nun

$$e = N(\sigma - uv - M)$$

woraus

$$uv + M = \frac{\sigma^2 - L}{2\sigma}; \quad \partial u = \frac{\sigma^2 + L}{2\sigma^2 v} \partial \sigma; \quad e = N \frac{\sigma^2 + L}{2\sigma}$$

ferner

$$H = v + M + a_2 \frac{(\mu - 1)v - \mu}{a}; \quad G^2 = L + H^2$$

dann wird

$$\lambda = \frac{2a_2}{a} \frac{\sigma}{G^2 - (\sigma - H)^2}$$

und Gl. (28) lautet nun:

$$D = \frac{1}{2a} \Sigma N h \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 \partial v \int_0^\pi \left\{ 1 + \frac{2a_2}{a} \frac{\sigma}{G^2 - (\sigma - H)^2} \right\}^2 \times \frac{\left(\sigma + \frac{L}{\sigma} \right)^2 \partial \sigma}{G^2 - (\sigma - H)^2}$$

Führt man die Integration nach σ aus, so erhält man:

$$D = \frac{1}{2a} \Sigma N h \sqrt{ln - m^2} \int_0^1 \partial v \left[U + V \log \sigma + V_1 \log \frac{G - H + \sigma}{G + H - \sigma} \right]_0^\pi$$

wo U die rationale Function von σ

$$U = -\frac{\sigma^2 + L}{\sigma} + \frac{V_2 + V_3 \sigma}{L + 2H\sigma - \sigma^2} + \frac{V_4 + V_5 \sigma}{(L + 2H\sigma - \sigma^2)^2}$$

und die V folgende 6 rationale Functionen von v sind:

$$V = -2H + \frac{4a_2}{a}; \quad V_1 = 2G - \frac{4a_2}{a} \frac{H}{G} + \frac{a_2^2}{a^2} \frac{L}{G^3}$$

$$V_2 = \frac{2a_2}{a} \left(4L - \frac{L + 2G}{G^2} H \right); \quad V_3 = \frac{2a_2}{a} \left(4H - \frac{a_2}{a} \frac{G^2 + H^2}{G^2} \right)$$

$$V_4 = \frac{4a_2^2}{a^2} LH; \quad V_5 = \frac{4a_2^2}{a^2} (G^2 + H^2)$$

Die Grenzen von

$$\sigma = uv + M + \sqrt{(uv + M)^2 + L}$$

sind:

$$\sigma_0 = M + \sqrt{M^2 + L}; \quad \sigma_1 = \pi v + M + \sqrt{(\pi u + M)^2 + L}$$

Beide irrationale Quadratwurzeln aus Functionen 2. Grades von v lassen sich einzeln rational machen, da sie in gesonderten Termen vorkommen. Daher besteht das unbestimmte Integral aus rationalen Functionen von v und je einer jener Quadratwurzeln, aus Logarithmen solcher und aus Functionen von der Form

$$\int \frac{\partial \tau}{\tau} \log(1 \pm \tau)$$

für welche Legendre Tafeln berechnet hat.

XI.

Die Polaren der algebraischen Curven.

Von

Rudolf Gaertner.

I. Die geraden Polaren.

§ 1. Legt man durch einen Pol eine Gerade und betrachtet den Pol als Nullpunkt derselben, so wird jeder Punkt der Polgeraden durch seine Polferne und deren positive oder negative Richtung bestimmt.

A. Ist ein Punkt der Polgeraden durch seine Polferne r_1 gegeben, während in Bezug auf denselben die Lage eines anderen Punktes bestimmt werden soll, so muss dessen Polferne g durch die gegebene Polferne r_1 ausgedrückt werden. Dies geschieht durch die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = k$$

worin k jede numerische Grösse zwischen 0 und $\pm \infty$ bedeutet. Wir sind gewohnt die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = k$$

so zu deuten, dass k diejenige Zahl ist, welche anzeigt wie oft r_1 in g enthalten ist und nennen diese Operation dividiren, d. h. teilen. Diese Teilung wird sich auf der Polgeraden durch die Abstände der Punkte sichtbar kennzeichnen.

Wir nennen

$$\frac{g}{r_1} = k$$

eine Teilung nach erster Ordnung.

Für die Betrachtung der Polaren ist die Bedingung

$$\frac{g}{r_1} = 1$$

von grosser Bedeutung. Wir nennen sie die Polarbedingung und geben ihr in Folgendem je nach Bedarf die Form *

$$g = r_1 \quad \text{oder} \quad \frac{g}{r_1} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{g - r_1}{r_1} = 0$$

Die Polarbedingung lässt sich auf harmonische Teilung zurückführen. Nehmen wir an, der durch die Polferne r_1 gegebene Punkt sei aus zwei Punkten entstanden, welche von gleicher oder entgegengesetzter Richtung kommend aufeinander gefallen sind, so zeigte sich stets ein dem Pol conjugirter Punkt, so lange die beiden Punkte eine sichtbare Entfernung hatten. Im Moment des Zusammenfallens verschwindet auch der conjugirte Punkt in dem durch die Polferne r_1 gegebenen Punkte.

Es sei noch bemerkt, dass die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = 0 \quad \text{oder} \quad g = 0$$

den Pol bezeichnet.

B. Sind zwei Punkte der Polgeraden durch ihre Polfernen r_1 und r_2 gegeben, so kann die Lage eines dritten Punktes durch die Polfernen der beiden gegebenen Punkte bestimmt werden.

In Bezug auf den einen gegebenen Punkt besteht die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} = k_1$$

in Bezug auf den anderen

$$\frac{g}{r_2} = k_2$$

durch Addition beider Gleichungen entsteht die Beziehung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = k_1 + k_2$$

Es hindert nichts daran $k_1 + k_2 = k$ zu setzen, da wir $k_1 + k_2$ algebraisch addiren können. Es entsteht die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = k$$

Dieselbe bestimmt bei gegebenem k die Lage eines Punktes in Be-

zug auf zwei gegebene. Sie zeigt daher auch die Teilung einer Polgeraden an.

Wir nennen

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = k$$

eine Teilung nach zweiter Ordnung.

Die Polarbedingung ergibt:

$$\frac{g}{r_1} = 1$$

Durch Addition entsteht die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = 2$$

Dieselbe bezeichnet die harmonische Teilung einer Polgeraden. Man kann dafür schreiben

$$\frac{g}{r_1} - 1 + \frac{g}{r_2} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{g - r_1}{r_1} = \frac{r_2 - g}{r_2}$$

d. i. die harmonische Teilung einer Polgeraden.

C. Die Lage eines Punktes in Bezug auf drei gegebene Punkte wird durch die Gleichung bedingt

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \frac{g}{r_3} = k$$

Sie ist entstanden durch Addition der beiden Gleichungen

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = k \quad \text{und} \quad \frac{g}{r_3} = k_3$$

Wir nennen

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \frac{g}{r_3} = k$$

eine Teilung nach dritter Ordnung.

Die Polarbedingung ergibt:

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \frac{g}{r_3} = 3$$

D. Allgemein wird die Lage eines Punktes in Bezug auf n gegebene Punkte durch die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \frac{g}{r_3} + \dots + \frac{g}{r_n} = k$$

bestimmt. Dieselbe giebt auch die Teilung nach n ter Ordnung an.

Die Polarbedingung ergibt:

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \dots + \frac{g}{r_n} = n$$

§ 2. Alle bisher genannten Teilungen sind eindeutig oder ersten Grades, weil sie nur einen Punkt bestimmen.

Fällt der gesuchte Punkt mit einem der gegebenen Punkte zusammen, so tritt eine Teilung nach nächst niedriger Ordnung ein.

Diese Betrachtung führt auf den allgemeinen Satz:

1. Fallen von n gegebenen Punkten m Punkte mit dem gesuchten Punkt zusammen, so wird die Polgerade nach $(n - m)$ ter Ordnung geteilt.

Legen wir die speciellen Teilungen, welche die Polarbedingung ergab, zu Grunde und setzen $m = n - 2$, so lautet der Satz:

- 1a. Fallen von n gegebenen Punkten $n - 2$ Punkte mit dem gesuchten Punkt zusammen, so wird die Polgerade harmonisch geteilt.

Der Beweis beider Sätze erhellt daraus, dass für Satz 1. m Polfernen, für Satz 1a. $n - 2$ Polfernen gleich g gesetzt werden, z. B.

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + (n - 2) \frac{g}{g} = n \quad \text{d. h.} \quad \frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + n - 2 = n \quad \text{oder}$$

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = 2$$

d. i. die harmonische Teilung einer Polgeraden.

§ 3. Die auf einer Polgeraden gegebenen n Punkte sollen einer Curve n ter Ordnung angehören. Drehen wir die Polgerade im Pol, welcher Coordinatenaufgangspunkt ist, so gleiten die n gegebenen Punkte auf der Curve n ter Ordnung, während der gesuchte Punkt bei gegebenem numerischen Factor k_a eine Curve beschreibt, deren Polargleichung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_1} + \dots + \frac{g}{r_n} = k_a$$

ist, vorausgesetzt, dass alle Polgeraden derselben durch k_a gegebenen Teilung unterworfen sind.

Im Folgenden soll abgeleitet werden, dass die Gleichung

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \dots = k$$

in Bezug auf jede algebraische Curve einen Büschel paralleler Strahlen bedeutet.

§ 4. Zwischen den Polfern einer Curve n ter Ordnung bestehen Beziehungen, gleich denen der Wurzeln einer Gleichung n ten Grades. Einige Beispiele sollen dies anschaulich machen.

Die allgemeine Gleichung einer Curve zweiter Ordnung ist

$$f^2xy + f'xy + c = 0$$

Es sei erwähnt, dass in jedem Gliede der durch f^2xy bezeichneten Summe n ten Grades die Summe der Exponenten der veränderlichen Grössen gleich n ist. Bringen wir eine derartige Summe auf Polarcordinatensystem, so besteht die Gleichung

$$f^2xy = r^n f^2\varphi$$

Die allgemeine Gleichung der Curve zweiter Ordnung lautet daher im Polarcordinatensystem:

$$r^2 + r \frac{f'\varphi}{f^2\varphi} + \frac{c}{f^2\varphi} = 0$$

Wurzeln dieser Gleichung sind die Polfern der Curve zweiter Ordnung r_1 und r_2 . Es bestehen zwei Beziehungen der Polfern:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{f^2\varphi}$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{f'\varphi}{f^2\varphi}$$

Durch Division beider Beziehungen entsteht

$$g = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = -\frac{c}{f'\varphi}$$

d. i. eine gerade Linie. Da der numerische Factor k weder den Grad noch die Richtung verändern kann, so bedeutet

$$g = k \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = -k \frac{c}{f'\varphi}$$

einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Gleichung im rechtwinkligen Coordinatensystem lautet:

$$f'xy + kc = 0$$

die Gleichung

$$g = k \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

lässt sich auch schreiben:

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} = k$$

Die allgemeine Gleichung der Curve dritter Ordnung ist:

$$r^3 + r^2 \frac{f^2 \varphi}{f^3 \varphi} + r \frac{f' \varphi}{f^3 \varphi} + \frac{c}{f^3 \varphi} = 0$$

Die Beziehungen der Polfernen r_1 , r_2 und r_3 sind:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 &= -\frac{c}{f^3 \varphi} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= \frac{f' \varphi}{f^3 \varphi} \\ r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{f^2 \varphi}{f^3 \varphi} \end{aligned}$$

Nur die Division der ersten beiden Polfernenbeziehungen ergibt den ersten Grad. Die Gleichung

$$g = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} = -\frac{c}{f' \varphi}$$

bezeichnet also eine gerade Linie.

$$g = k \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$$

bedeutet also einen Parallelstrahlenbüschel. Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \frac{g}{r_3} = k$$

Die Beziehungen der Polfernen einer Curve vierter Ordnung sind:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 &= -\frac{c}{f^4 \varphi} \\ r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 &= -\frac{f' \varphi}{f^4 \varphi} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 &= \frac{f^2 \varphi}{f^4 \varphi} \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= -\frac{f^3 \varphi}{f^4 \varphi} \end{aligned}$$

Nur die Division der ersten beiden Polfernenbeziehungen ergibt den ersten Grad.

$$g = k \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4}$$

bedeutet ein Parallelstrahlenbüschel. Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \frac{g}{r_3} + \frac{g}{r_4} = k$$

§ 5. Ich stello den allgemeinen Grundsatz der Polaren auf:

Die Polare ist der Ort desjenigen Punktes einer im Pol rotirenden Geraden, welcher in Bezug auf sämtliche Polfernen einer gegebenen Curve in jedem Moment die Polarbedingung erfüllt.

Die Gleichungen der geraden Polaren erhalten wir demnach, wenn wir in die Gleichungen der Parallelstrahlenbüschel an Stelle von k die durch Polarbedingung gewonnenen charakteristischen Zahlen der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... n setzen. Die Gleichungsformen der geraden Polare einer Curve sind demnach:

$$1) \quad \frac{g}{r_1} + \frac{g}{r_2} + \dots + \frac{g}{r_n} = n$$

$$2) \quad g - n \frac{r_1 r_2 \dots r_n}{r_1 r_2 \dots r_{n-1} + r_1 r_3 \dots r_n + \dots + r_2 r_3 \dots r_n} = 0$$

$$3) \quad g + n \frac{c}{f'_{xy}} = 0$$

$$4) \quad f'_{xy} + nc = 0 = 0$$

Die Curve n ter Ordnung, für welche diese Polare gilt, hat die Gleichung:

$$f^{n_{xy}} + f^{n-1_{xy}} + \dots + f^2_{xy} + f'_{xy} + c = 0$$

§ 6. Setzen wir in der Gleichung 2) der Polare einer Curve n ter Ordnung eine beliebige Polferne gleich null, so wird der Zähler zu null, während im Nenner derjenige Summand stehen bleibt, welcher diese Polferne nicht enthält. Es wird also $g = 0$ d. i. derjenige Strahl des Parallelstrahlenbüschels welcher durch den Pol (Coordinatenanfang) geht. Wir schliessen daraus:

Ist der Pol ein Punkt der Curve, so geht die Polare durch den Pol.

Für die geraden Polaren gelten alle Sätze, welche im § 2. genannt sind. Sie lauten:

1. Geht eine gerade Polare durch beliebig viele m fache Punkte einer Curve n ter Ordnung, so werden die Polgeraden, welche durch diese m fachen Punkte gehen nach $(n - m)$ ter Ordnung geteilt.

Für $m = n - 2$ ist die Teilung eine harmonische:

1a. Geht eine gerade Polare durch beliebig viele $n - 2$ fache Punkte einer Curve n ter Ordnung, so werden die Polgeraden, welche durch diese $(n - 2)$ fachen Punkte gehen, harmonisch geteilt.

Betrachten wir die Tangente einer Curve n ter Ordnung als Polare und ihren Berührungspunkt als zweifachen Punkt der Curve, so muss diejenige Polgerade, welche durch den Berührungspunkt geht, nach $(n - 2)$ ter Ordnung geteilt sein. Dies ist nur möglich, wenn der Pol auf der Tangente selbst liegt, da diese allein ausser dem Berührungspunkte $n - 2$ Schnittpunkte mit der Curve zeigt. Die Polare geht aber nur durch den Pol, wenn der Pol ein Punkt der Curve ist, d. h.:

2. Ist der Pol ein Punkt der Curve, so ist die Tangente im Pol seine Polare.

II. Die Polaren im allgemeinen.

Die Gleichung jeder Polare drückt eine Teilung aus, nämlich diejenige Teilung, welcher sämtliche Polgeraden durch Curve und Polare unterworfen sind. Die Ordnung der Polare — die m te Ordnung ist zu unterscheiden von der m ten Polare — giebt den Grad der Teilung an. Der Teilung m ten Grades genügen m Punkte, sie ist m deutig.

Es wäre zu weitläufig jede neue Teilung, d. h. die Polaren jeder Ordnung aus Punktbestimmungen abzuleiten. Daher schlagen wir jetzt einen allgemeinen Weg ein.

Wir bestimmen in Folgendem den Ort desjenigen Punktes, der allen Polarbedingungen in Bezug auf eine gegebene Curve genügt.

A. Die geraden Polaren.

Sie müssen den Charakter einer Geraden zeigen, d. h. es ist

$$g + k \frac{c}{f' \varphi} = 0$$

Die Beziehungen der Polfernen jeder algebraischen Curve führen stets auf diese Gleichung.

Den Wert für $\frac{c}{f' \varphi}$ erhalten wir durch Division zweier Polfernenbeziehungen derjenigen Curve, in Bezug auf welche die Polare be-

stimmt werden soll. Der numerische Factor k ergibt sich nach dem Polaren-Princip dadurch, dass wir sämtliche Polfernen der Curve gleich g setzen z. B.

Die Polare einer Curve vierter Ordnung hat die Gleichung

$$g - k \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4} = 0$$

Polarbedingung ist

$$r_4 = r_3 = r_2 = r_1 = g$$

Es wird

$$k = 4$$

daher ist die Gleichung der Polare:

$$g + 4 \frac{c}{f'_{\varphi}} = 0 \quad \text{oder} \quad f'_{xy} + 4c = 0$$

B. Die Polaren zweiter Ordnung.

Ihre allgemeine Gleichung lautet:

$$g^2 + k_1 g \frac{f'_{\varphi} c}{f'^2_{\varphi}} + k_2 \frac{c}{f'^2_{\varphi}} = 0$$

Wir wollen diese Gleichung aus der allgemeinen Curve dritter Ordnung ableiten.

Die drei Bedingungen der Polfernen einer Curve dritter Ordnung lassen nur in zwei Fällen die Entstehung von Curven zweiter Ordnung zu, diese sind:

$$1. \quad g = k_1 \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = -k_1 \frac{f'_{\varphi}}{f'^2_{\varphi}} \quad \text{oder} \quad 1. \quad g^2 + k_1 g \frac{f'_{\varphi}}{f'^2_{\varphi}} = 0$$

$$2. \quad g^2 = k_2 \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = k_2 \frac{c}{f'^2_{\varphi}} \quad \text{oder} \quad 2. \quad g^2 - k_2 \frac{c}{f'^2_{\varphi}} = 0$$

Die Gleichung

$$g^2 + k_1 g \frac{f'_{\varphi}}{f'^2_{\varphi}} + \lambda \left(g^2 - k_2 \frac{c}{f'^2_{\varphi}} \right) = 0$$

in welcher λ einen beliebigen endlichen Factor bedeutet, bezeichnet alle Curven zweiter Ordnung, welche in dem Falle, wo k_1 und k_2 bestimmte Grössen sind, durch die gemeinsamen Schnittpunkte der beiden Curven 1. und 2. gehen, daher auch die Coefficienten der veränderlichen Grössen beider Curven zweiter Ordnung — d. h. numerische Grössen und Constanten, welche wir bisher nie betrachtet haben — in irgend einer Weise vereinen werden. Die Gleichung lässt sich schreiben:

$$g^3 + \frac{k_1}{\lambda+1} g \frac{f' \varphi}{f^2 \varphi} - \frac{\lambda k_2}{\lambda+1} \frac{c}{f^2 \varphi} = 0$$

Es ist klar, dass nur zwei numerische Factoren zu bestimmen sind. Die Vorzeichen derselben haben zunächst keine Bedeutung. Sie ergeben sich durch die Bestimmungen von selbst. In gleicher Weise lässt sich die Polare zweiter Ordnung aus jeder Curve beliebiger Ordnung ableiten. Die Polare zweiter Ordnung hat daher die allgemeine Form:

$$g^2 + k_1 g \frac{f' \varphi}{f^2 \varphi} + k_2 \frac{c}{f^2 \varphi} = 0$$

Die Werte für $\frac{f' \varphi}{f^2 \varphi}$ und $\frac{c}{f^2 \varphi}$ ergeben die Beziehungen der Polaren derjenigen Curve, für welche die Polare bestimmt werden soll.

Die numerischen Factoren werden durch die Polarbedingung bestimmt.

a) z. B. die erste Polare der Curve dritter Ordnung

$$\frac{f' \varphi}{f^2 \varphi} = -\frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \quad \text{und} \quad \frac{c}{f^2 \varphi} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$$

Setzen wir diese Werte in die allgemeine Gleichung der Polare, so wird

$$g^2 - k_1 g \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} + k_2 \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 0$$

Legen wir den Pol auf die Curve, so wird z. B. $r_3 = 0$. Es entsteht die Gleichung

$$g - k_1 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0$$

Die Polarbedingung $r_2 = r_1 = g$ ergibt $k_1 = 2$. Wir können in Folgendem bei schon bekannten Gleichungen die in denselben enthaltenen numerischen Factoren wählen, da eine neue Bestimmung derselben stets die alten Resultate erzielen wird. Es bleibt für die gesuchte Polare:

$$g^2 - 2g \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} + k_2 \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 0$$

Polarbedingung ist $r_1 = r_2 = r_3$. Es wird $k_2 = 3$

Die Gleichungen der ersten Polare einer Curve dritter Ordnung sind also:

$$1) \quad g^2 - 2g \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} + 3 \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \quad \text{oder}$$

$$2) \quad g^2 + 2g \frac{f' \varphi}{f^2 \varphi} + 3 \frac{c}{f^2 \varphi} = 0 \quad \text{oder}$$

$$3) \quad f^2 xy + 2f' xy + 3c = 0$$

Setzen wir zwei beliebige Polfernen gleich g , so genügt diese Bedingung ebenfalls der Gleichung 1). Die Polare geht daher durch den Doppelpunkt und den dreifachen Punkt der Curve, wenn solche vorhanden sind.

b) Die zweite Polare der Curve vierter Ordnung.

Ihre Gleichung ist:

$$g^2 - k_1 g \frac{r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4} + k_2 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 + \dots r_3 r_4} = 0$$

Man setze $r_4 = 0$. Es wird

$$g - k_1 \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} = 0$$

ist schon bekannt. Es ist $k_1 = 3$. Die Gleichung der Polare bekommt die Form:

$$g^2 - 3g \frac{r_1 r_2 r_3 + \dots r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 + \dots r_3 r_4} + k_2 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 + \dots r_3 r_4} = 0$$

Polarbedingung ist $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = g$. Dieselbe ergibt

$$k_2 = 6$$

Die zweite Polare einer Curve vierter Ordnung hat also die Gleichungen:

$$1) \quad g^2 - 3g \frac{r_1 r_2 r_3 + \dots r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 + \dots r_3 r_4} + 6 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 + \dots r_3 r_4} = 0$$

$$2) \quad g^2 + 3g \frac{f' \varphi}{f^2 \varphi} + 6 \frac{c}{f^2 \varphi} = 0$$

$$3) \quad f^2 xy + 3f' xy + 6c = 0$$

Setzt man in Gleichung 1) drei beliebige Polfernen gleich g , so genügt diese Bedingung ebenfalls der Gleichung der Polare d. h.

Die zweite Polare einer Curve vierter Ordnung geht durch alle dreifachen Punkte der Curve und den vierfachen, wenn die Curve in einen Büschel von vier Strahlen zerfällt.

C. Die Polaren dritter Ordnung

Ihre allgemeine Form ist

$$g^3 + k_1 g^2 \frac{f^2 \varphi}{f^3 \varphi} + k_2 g \frac{f' \varphi}{f^3 \varphi} + k_3 \frac{c}{f^3 \varphi} = 0$$

Die Werte von $\frac{f^2 \varphi}{f^3 \varphi}$, $\frac{f' \varphi}{f^3 \varphi}$ und $\frac{c}{f^3 \varphi}$ ergeben die Beziehungen der Polfernen der zu Grunde gelegten Curve. Die numerischen Factoren k_1 , k_2 und k_3 werden durch Polarbedingungen bestimmt.

z. B. Die erste Polare einer Curve vierter Ordnung lautet:

$$g^3 - k_1 g^2 \frac{r_1 r_2 + \dots + r_3 r_4}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} + k_2 g \frac{r_1 r_2 r_3 + \dots + r_2 r_3 r_4}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} - k_3 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} = 0$$

Wir müssten jetzt $r_4 = r_3 = 0$ setzen, d. h. der Pol läge auf einem Doppelpunkt der Curve. Schneller führt es jedoch zum Ziel, wenn wir nur $r_4 = 0$ setzen. Es wird

$$g^2 - k_1 g \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} + k_2 \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 0$$

Diese Gleichung ist bekannt. Man wähle die bekannten numerischen Factoren. Es wird

$$g^3 - 2g^2 \frac{r_1 r_2 + \dots + r_3 r_4}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} - 3g \frac{r_1 r_2 r_3 + \dots + r_2 r_3 r_4}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} - k_3 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} = 0$$

Die Polarbedingung $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ ergibt $k_3 = 4$. Es entsteht die Gleichung der Polare:

$$f^3 xy + 2 f^2 xy + 3 f xy + 4c = 0$$

Setzt man je drei oder je zwei Polfernen gleich g , so genügt jede dieser Bedingungen der Gleichung der Polare d. h.:

Die Polare geht durch alle zwei-, drei- und vierfachen Punkte der Curve.

D. Die Curve fünfter Ordnung und ihre Polaren.

Die allgemeine Gleichung der Curve ist:

$$r^5 + r^4 \frac{f^4 \varphi}{f^5 \varphi} + r^3 \frac{f^3 \varphi}{f^5 \varphi} + r^2 \frac{f^2 \varphi}{f^5 \varphi} + r \frac{f' \varphi}{f^5 \varphi} + \frac{c}{f^5 \varphi} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{1te Polare: } g^4 - 2g^3 \frac{r_1 r_2 + \dots}{r_1 + \dots} + 3g^2 \frac{r_1 r_2 r_3 + \dots}{r_1 + \dots} - 4g \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 + \dots}{r_1 + \dots} \\ + 5 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5} = 0 \end{aligned}$$

Setzt man sämtliche 5 Polfernien oder je 4, oder je 3, oder je 2 Polfernien gleich g , so entsteht die Gleichung $0 = 0$. Jede dieser Bedingungen genügt also der Gleichung der ersten Polare.

$$\begin{aligned} \text{2te Polare: } g^3 - 3g^2 \frac{r_2 r_2 r_3 + \dots}{r_1 r_2 + \dots} + 6g \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 + \dots}{r_1 r_2 + \dots} \\ - 10 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5}{r_1 r_2 + \dots r_4 r_5} = 0 \end{aligned}$$

Dieser Gleichung genügt jede der Bedingungen, welche entsteht, wenn man alle 5, oder je 4, oder je 3 Polfernien gleich g setzt.

$$\text{3te Polare: } g^2 - 4g \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 + \dots}{r_1 r_2 r_3 + \dots} + 10 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5}{r_1 r_2 r_3 + \dots r_3 r_4 r_5} = 0$$

Setzt man alle 5 Polfernien oder je 4 gleich g , so genügt jede dieser Bedingungen der Polarengleichung.

$$\text{4te Polare: } g - 5 \frac{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5}{r_1 r_2 r_3 r_4 + \dots r_2 r_3 r_4 r_5} = 0$$

Dieser Gleichung genügt nur die Polarbedingung für alle fünf Polfernien. Wir erhalten den allgemeinen Satz:

1. Die k te Polare geht durch alle vielfachen Punkte einer Curve, deren Anzahl gleich und grösser ist als $k+1$.

Aus diesem Satze folgt:

2. Die erste Polare jeder Curve geht durch alle Punkte, in welchen die Polgeraden Tangenten an die Curve werden. (Es sind nämlich je zwei Polfernien gleich g).

E. Die Gleichungen der Curve fünfter Ordnung und ihrer Polaren auf rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen lauten:

$$\begin{aligned} \text{Curve: } & 1f^0xy + 1f^1xy + 1f^2xy + 1f^3xy + 1f^4xy + 1c = 0 \\ \text{1te Polare: } & 1f^4xy + 2f^3xy + 3f^2xy + 4f^1xy + 5c = 0 \\ \text{2te Polare: } & 1f^3xy + 3f^2xy + 6f^1xy + 10c = 0 \\ \text{3te Polare: } & 1f^2xy + 4f^1xy + 10c = 0 \\ \text{4te Polare: } & 1f^1xy + 5c = 0 \end{aligned}$$

Jede Gleichung ist aus der vorhergehenden durch dieselbe Operation entstanden. Die erste Polare zeigt diese Operation an. Wir nennen diese Operation Polarisation oder polarisieren. Eine Gleichung polarisieren heisst:

Die gegebene Gleichung mit Ausnahme des höchsten Grades der veränderlichen Grössen abschreiben und den fallenden Potenzen der

veränderlichen Grössen die steigenden Factoren der Zahlenreihe 1, 2, 3 u. s. w. geben. Jede homogene Summe behält ein- und denselben Factor. Den höchsten Factor bekommen die von veränderlichen Grössen freien Summanden.

Die k te Polare einer Curve zu bestimmen heisst die Gleichung der Curve k mal zu polarisiren.

Beispiel: Die gerade Polare einer Curve 6ter Ordnung zu bestimmen.

Curve: $f^6xy + f^5xy + f^4xy + f^3xy + f^2xy + f^1xy + c = 0$

1te Polare: $1f^5xy + 2f^4xy + 3f^3xy + 4f^2xy + 5f^1xy + 6c = 0$

$1.2f^4xy + 2.3f^3xy + 3.4f^2xy + 4.5f^1xy + 5.6c = 0$

2te Polare: $f^4xy + 3f^3xy + 6f^2xy + 10f^1xy + 15c = 0$

3te Polare: $f^3xy + 4f^2xy + 10f^1xy + 20c = 0$

4te Polare: $f^2xy + 5f^1xy + 15c = 0$

5te Polare: $f^1xy + 6c = 0$

F. Es gibt noch eine zweite Art die Gleichungen der Polaren zu bestimmen. Aus den angeführten Beispielen ersehen wir, dass die k te Polare eine ganz bestimmte Zahlenreihe für sich als Factorenreihe in Anspruch nimmt.

a) Die erste Polare hat zur Factorenreihe die arithmetische Reihe erster Ordnung, deren m tes Glied $\frac{m}{1!}$ ist.

b) Die zweite Polare hat zur Factorenreihe die arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren m tes Glied $\frac{m \cdot (m+1)}{2!}$ ist.

c) Die dritte Polare hat zur Factorenreihe die arithmetische Reihe dritter Ordnung, deren m tes Glied $\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2)}{3!}$ ist.

Es ist leicht einzusehen, dass das m te Glied der k ten Polare einer Curve n ter Ordnung lautet:

$$\frac{m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \dots (m+k-1)}{k!} f^{n-k-m+1}xy$$

Jedenfalls ist die Methode der Polarisation für die Bestimmung einer Polargleichung vorzuziehen.

G. Die Betrachtung der Polargleichungen, in welchen die Polfernen der Curven enthalten sind, zeigt an, dass die m letzten Glieder einer Polargleichung zu null werden, wenn der Pol ein

m facher Punkt einer Curve ist. Es bleibt eine Polarengleichung übrig, in der ebenfalls m Radienvectoren der Polare gleich null gesetzt werden können. Daraus folgt:

1. Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve, so ist er auch ein m facher Punkt jeder Polare.

2. Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve n ter Ordnung, so werden sämtliche Polgeraden durch die Curve und ihre k te Polare (in diesem Falle jede Polare) nach $(n-m)$ ter Ordnung geteilt. — Es entsteht also die Gleichung der k ten Polare einer Curve $(n-m)$ ter Ordnung. —

Der Grad der Teilung verändert sich in gleicher Weise. Er wird durch die Ordnung der Polare angegeben. In dem Falle, wo $k = n - m - 1$ ist, wird die Teilung jeder Polgeraden eindeutig, weil alsdann nur die ersten beiden Glieder jeder Polarengleichung bestehen bleiben, und die numerischen Factoren derselben in den Gleichungen der geraden Polaren mit denselben Functionen der Polfernen verbunden auftreten.

Setzt man $k = n - m - 1$ (d. h. die Teilung wird eindeutig) und $m = n - 2$, so heisst das Gesetz 2.:

2a. Ist der Pol ein $n-2$ facher Punkt der Curve n ter Ordnung, so wird jede Polgerade in ihren Schnittpunkten mit Curve und erster Polare harmonisch geteilt.

Die $(n-m)$ te Polare ist m ter Ordnung. Ein m facher Punkt einer Curve m ter Ordnung ist nur möglich, wenn die Curve in einen Büschel von m Strahlen zerfällt. Es folgt also nach Satz 1.:

Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve n ter Ordnung, so zerfällt die $(n-m)$ te Polare in einen Büschel von m Strahlen, deren Mittelpunkt der Pol ist. Wenn der Pol ein Punkt der Curve ist, so wird seine gerade Polare Tangente im Pol (früher abgeleitet). Also hat ein m facher Punkt m Tangenten zu Polaren. Es folgt daraus:

3. Ist der Pol ein m facher Punkt einer Curve n ter Ordnung, so ist seine $(n-m)$ te Polare der Tangentenbüschel des m fachen Punktes.

XII.

Ueber die Lage der Mondsichel gegen den
Horizont des Beobachters.

Von

Emil Oekinghaus.

Wenn man in einer mond hellen Nacht den Mond in einer seiner Lichtphasen etwa zur Zeit des ersten oder letzten Viertels beobachtet, indem man sich die Lage merkt, welche die die Spitzen der Sichel verbindende Linie gegen den Horizont des Beobachters einnimmt, so erkennt man, dass die Neigung dieser Linie nicht constant bleibt, sondern im Laufe der Nacht sich langsam ändert. Während zu bestimmter Stunde die Mondsichel fast senkrecht am hohen Himmel zu stehen scheint, neigt sie sich untergehend mehr und mehr nach einer fast wagerechten Richtung hin, einem goldenen Kahn vergleichbar, der durch blaue Wellen schwimmt.

Wir wollen im Nachfolgenden versuchen, der veränderlichen Neigung der Mondsichel gegen den Horizont einen mathematischen Ausdruck zu geben.

Zunächst bemerkt man, dass dieser Winkel von der Stellung des Mondes gegen die Erde und die Sonne abhängt.

Man hat also den Lichtkegel oder auch wegen der Parallelität der Sonnenstrahlen den Lichtcylinder einzuführen, womit die Sonne den Mond einhüllt und die Gleichung der Ebene aufzustellen, welche durch den Mondmittelpunkt geht und den Cylinder senkrecht schneidet. Dasselbe gilt hinsichtlich der Ebene, welche die Achse des Kegels vom Auge zum Monde in dessen Mittelpunkt senkrecht schneidet. Der Durchschnitt beider Ebenen ist die Linie, welche die Sichelspitzen des Mondes verbindet, und deren Projection auf die Himmelskugel das Auge wahrnimmt.

Ferner hat man die Gleichung der Ebene aufzustellen, welche durch den Standort des Beobachters geht und die Oberfläche der Erde in diesem Punkte berührt, also die Tangentialebene oder den Horizont. Der Winkel, den der Durchschnitt der beiden ersten Ebenen mit dem Horizont einschliesst, ist zunächst die gesuchte Grösse, welche in Folge der Rotation der Erde eine Function der Zeit ist.

Endlich sind noch die variablen Coordinaten auf ein gemeinsames Coordinatensystem zu beziehen, die Transformationen derselben von Ekliptik und Horizont auf den Aequator als Fundamentelebene einzuführen, wobei man die Länge der Sonne, die Rectascension und Declination des Mondes nebst der Sternzeit im mittleren Mittag den Ephemeriden des Normalmeridians zu entnehmen hat.

§ 1.

Den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen wir zunächst in die Sonne und nehmen die Ekliptik zur xy -Ebene. Fig. 1.

Die X -Achse gehe durch den Frühlings- oder Widderpunkt \mathcal{T} , in welchem die Sonne am 21. März steht. Die Entfernung des Mondes von der Sonne sei ϱ , die Richtungswinkel von ϱ seien $\alpha\beta\gamma$, alsdann ist die Gleichung der Ebene EF , welche von der Sonne aus gesehen die Lichtgrenze auf dem Monde bestimmt

$$x_2 \cos \alpha + y_2 \cos \beta + z_2 \cos \gamma = \varrho$$

Wir verlegen jetzt das Coordinatensystem in den Mittelpunkt der Erde. Bezeichnen wir noch die Entfernung desselben von der Sonne mit R und die Länge der letzteren mit Θ , so hat man für die neuen Coordinaten

$$x_2 = x_1 - R \cos \Theta$$

$$y_2 = y_1 - R \sin \Theta$$

$$z_2 = z_1$$

Es ist aber

$$\cos \alpha = \frac{x_2}{\varrho}, \quad \cos \beta = \frac{y_2}{\varrho}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2}{\varrho}$$

ferner

$$x_2 = -R \cos \Theta + r \cos \beta \cos \lambda$$

$$y_2 = -R \sin \Theta + r \cos \beta \sin \lambda$$

$$z_2 = r \sin \beta$$

Demnach wird die Gleichung für die Lichtgrenze

$$(x_1 - R \cos \Theta)(-R \cos \Theta + r \cos \beta \cos \lambda) \\ + (y_1 - R \sin \Theta)(-R \sin \Theta + r \cos \beta \sin \lambda) + z_1 r \sin \beta = \varrho^2$$

Diese für die Ekliptik geltenden Coordinaten haben wir noch auf den Aequator zu transformiren. Die Schiefe der Ekliptik sei ε , die bekannten Transformationen sind dann

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\y_1 &= y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon \\z_1 &= z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon\end{aligned}$$

demnach wird die obige Gleichung durch Einsetzung dieser Ausdrücke zu

$$\begin{aligned}(x - R \cos \Theta)(-R \cos \Theta + r \cos \beta \cos \lambda) \\+ (y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon - R \sin \Theta)(-R \sin \Theta + r \cos \beta \sin \lambda) \\+ (z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) r \sin \beta = \varrho^2\end{aligned}$$

Bemerken wir noch, dass die Reduction der ekliptischen Coordinaten $\alpha\beta$ auf äquatoriale $\alpha\delta$, welche die Rectascension und Declination des Mondes bezeichnen, durch

$$\begin{aligned}\cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \\ \sin \beta &= -\cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon\end{aligned}$$

bestimmt ist, und dass die Entfernung von Sonne und Mond durch

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta \cos (\lambda - \Theta)$$

dargestellt werden kann, so folgt nach Einführung dieser Formeln in die obige Gleichung der Lichtgrenze

$$\begin{aligned}x(-R \cos \Theta + r \cos \delta \cos \alpha) + y(-R \cos \varepsilon \sin \Theta + r \sin \alpha \cos \delta) \\+ z(-R \sin \varepsilon \sin \Theta + r \sin \delta) = R^2 - Rr \cos \beta \cos (\lambda - \Theta)\end{aligned}$$

Die variablen Coordinaten xyz beziehen sich also jetzt auf das durch die Erde gelegte Äquatorialsystem, dessen X-Achse durch den Widderpunkt geht.

§ 2.

Wir haben jetzt die Gleichung der Ebene GH zu bestimmen, welche durch den Mondmittelpunkt geht, und die Grenze der Sichtbarkeit des beleuchteten Theils des Mondes, von der Erde aus gesehen, bestimmt. Wir nehmen der Einfachheit wegen auch hier eine cylinderförmige Umhüllung an, da die Grösse und Entfernung der betrachteten Weltkörper solche Annahme gestatten. Das zuletzt benutzte Coordinatensystem gilt auch hier, die Entfernung des Mondes von der Erde sei r , die Stellungswinkel $\alpha'\beta'\gamma'$, und die Gleichung der Ebene der Sichtbarkeit ist

$$x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma' = r$$

Da aber

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \cos \delta, \quad \cos \beta' = \cos \delta \cos \alpha, \quad \cos \gamma' = \sin \delta$$

so ist die Gleichung

$$x \cos \alpha \cos \delta + y \sin \alpha \cos \delta + z \sin \delta = r$$

Der Durchschnitt beider Ebenen ist demnach nach bekannten Methoden bestimmt, und es bedarf nur noch der Gleichung der Horizontalebene des Beobachtungsortes, um alsdann die Neigung des Durchschnitts, welcher die Sichelspitzen des Mondes enthält, gegen diese Tangentialebene zu berechnen. Die Gleichung der letztern, die Erde als Kugel vom Radius a genommen ist

$$xx' + yy' + zz' = a^2$$

Darin bedeuten $x'y'z'$ die Coordinaten des Beobachtungsortes C , xyz die variablen in Bezug auf den Aequator als Fundamentalebene.

Um diese Gleichung für unsere Zwecke einzurichten, haben wir den astronomischen Begriff der Sternzeit einzuführen.

Aus der Fig. 1. ist nun folgendes leicht zu erkennen:

Die Erde rotirt in der Richtung des Pfeiles von Westen nach Osten um ihre Achse. Die Zeit, welche verfließt, bis der Meridian PQ , dessen Ebene durch den Widderpunkt geht, bei seiner Drehung wieder in die ursprüngliche Lage gelangt, heisst Sterntag und ist derselbe kürzer, als der mittlere Sonnentag.

Hat ein Stern die Rectascension α , so wird derselbe um $\frac{\alpha}{15}$ Stunden Sternzeit für den Ort B auf dem genannten Meridian culminiren. Für das Studium dieser Verhältnisse ist es gut, die wirkliche und scheinbare Bewegung mit einander zu combiniren. Denken wir uns die Erde in O am 21. März, so geht die Sonne um 0^h Sternzeit durch den Meridian, infolge der Bewegung der Erde um die Sonne culminirt sie den nächstfolgenden später und am 23. September, an welchem Tage ihre Rectascension 180^0 beträgt, culminirt sie um 12^h Sternzeit.

Wir wollen nun den Ort B , für welchen nach der Figur der Frühlingspunkt culminirt und 0^h Sternzeit hat, auf seiner Bewegung bis C begleiten. Die bis dahin verflossene Sternzeit sei τ , die geographische Breite des Ortes oder die Polhöhe sei φ , alsdann werden die Coordinaten $x'y'z'$ des jetzt fixirten Ortes in C gleich

$$x' = a \cos \varphi \cos \tau, \quad y' = a \cos \varphi \sin \tau, \quad z' = a \sin \varphi$$

sein.

Die durch C gelegte Tangentialebene hat demnach die Gleichung

$$x \cos \varphi \cos \tau + y \cos \varphi \sin \tau + z \sin \varphi = a$$

und damit haben wir alle erforderlichen Gleichungen zur Rechnung fertig.

Da indessen τ Sternzeit bedeutet, so haben wir zur Verwandlung dieser Zeit in mittlere Sonnenzeit noch folgendes einzuschalten.

Ist der Meridian PQ , dessen Ebene den Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkt enthält, soweit fortgerückt, dass die mittlere Sonne in ihm erscheint, so nennt man die verflossene Zeit die Sternzeit L im mittleren Mittag und ist dieselbe gleich der mittleren Länge der Sonne. Von diesem Zeitpunkt an zählt man die Stunden bis zum nächsten Mittag und zwar von 0^h bis 24^h . Rückt von diesem Punkte der Meridian bis C und ist hierzu die Sternzeit t' erforderlich, so ist $\tau = L + t'$ und da die Sternzeit noch in mittlere Zeit t verwandelt werden muss, so ist, da $366,242$ Sterntage $= 365,212$ mittlere Tage sind,

$$\tau = L + t \frac{24^h + 3^m 56^s,555}{24}$$

worin t die mittlere Sonnenzeit am Beobachtungsorte C ist.

Die Gleichung der Tangentialebene in C ist also jetzt

$$x \cos \varphi \cos (L + kt) + y \cos \varphi \sin (L + kt) + z \sin \varphi = a$$

§ 3.

Um nun die Neigung ω des Durchschnitts der beiden ersten Ebenen gegen die letztere zu finden, haben wir aus ihren Gleichungen

$$\begin{aligned} x(-R \cos \Theta + r \cos \delta \cos \alpha) + y(-R \cos \varepsilon \sin \Theta + r \sin \alpha \cos \delta) \\ + z(-R \sin \varepsilon \sin \Theta + r \sin \delta) = r^2 - Rr \cos \beta \cos (\lambda - \Theta) \\ x \cos \alpha \cos \delta + y \sin \alpha \cos \delta + z \sin \delta = r \end{aligned}$$

die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebenen der xy und ax aufzustellen, welche durch Elimination der z , bez. y aus ihnen hervorgehen. Sie sind

$$\begin{aligned} xR(-\cos \Theta \sin \delta + \sin \Theta \sin \varepsilon \cos \alpha \cos \delta) \\ + yR(-\sin \Theta \cos \varepsilon \sin \delta + \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta) \\ - Rr(-\cos \beta \sin \delta \cos (\Theta - \lambda) + \sin \varepsilon \sin \Theta) \times \\ xR \cos \delta (-\cos \Theta \sin \alpha + \sin \Theta \cos \alpha \cos \varepsilon) \\ - zR(\sin \Theta \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta - \sin \Theta \cos \varepsilon \sin \delta) \\ = Rr(-\cos \beta \cos \delta \sin \alpha \cos (\Theta - \lambda) + \cos \varepsilon \sin \Theta) \end{aligned}$$

oder kurz

$$y = B_1 x + b_1$$

$$z = C_1 x + c_1$$

$$B' = - \frac{\cos \Theta \sin \delta - \sin \Theta \sin \varepsilon \cos \alpha \cos \delta}{\sin \Theta \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta}$$

$$C' = \frac{\cos \Theta \sin \alpha \cos \delta - \sin \Theta \cos \alpha \cos \delta \cos \varepsilon}{\sin \Theta \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta}$$

Nach den Methoden der analytischen Geometrie des Raumes ist der Winkel ω , den die Gerade

$$y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

mit der Ebene

$$Ax + By + Cz = D$$

einschliesst, gegeben durch die Formel

$$\sin \omega = \frac{A + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}}$$

Substituieren wir hierin die eben aufgestellten Ausdrücke, so folgt

$$\begin{aligned} \sin \omega = & \{ \sin \varphi \cos \delta (-\cos \Theta \sin \alpha + \sin \Theta \cos \alpha \cos \varepsilon) \\ & - \cos \varphi \sin \Theta \cos \tau (\cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta) \\ & + \cos \varphi \sin \tau (\cos \Theta \sin \delta - \sin \Theta \sin \varepsilon \cos \alpha \cos \delta) \}: \\ & \sqrt{ \{ \sin^2 \Theta (\cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta)^2 + (\sin \Theta \sin \varepsilon \cos \alpha \cos \delta - \cos \Theta \sin \delta)^2 \\ & + (\cos \Theta \sin \alpha \cos \delta - \sin \Theta \cos \alpha \cos \varepsilon \cos \delta)^2 \} } \end{aligned}$$

Benutzt man nun, um die Formel zu vereinfachen, die Formeln

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon$$

$$\sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \sin \varepsilon$$

so verwandelt sich die Wurzel in

$$\sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos (\Theta - \lambda)^2}$$

wie man finden wird, wenn man den Wurzel Ausdruck durch den identischen

$$1 - 2 \cos \beta \cos (\Theta - \lambda) (\cos \Theta \cos \alpha \cos \delta + \sin \Theta \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \delta) + \cos \beta^2 \cos (\Theta - \lambda)^2$$

ersetzt.

Daher ist auch

$$\begin{aligned} & - \cos \Theta (\sin \varphi \cos \delta \sin \alpha - \cos \varphi \sin \delta \sin \tau) \\ & + \sin \Theta \cos \varepsilon (\sin \varphi \cos \delta \cos \alpha - \cos \varphi \sin \delta \cos \tau) \\ & + \sin \Theta \cos \varphi \cos \delta \sin \varepsilon \sin (\alpha - \tau) \end{aligned}$$

$$\sin \omega = \frac{\quad}{\sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos (\Theta - \lambda)^2}}$$

Ist die Rectascension des Mondes gleich der Sternzeit des Ortes, also $\alpha = \tau$, so wird für die Culmination

$$\sin \omega = \frac{\sin(\varphi - \delta)(\sin \alpha \cos \Theta - \cos \alpha \sin \Theta \cos \varepsilon)}{\sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos(\Theta - \lambda)^2}}$$

Ist noch $\varphi = \delta$, so wird $\omega = 0$, die Sichelgerade des Mondes erscheint parallel dem Horizont, was unmittelbar klar ist, da alsdann der Mond im Zenith des Ortes steht.

Im allgemeinen Fall hat man für $\omega = 0$ die Bedingung

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \varphi \cos \delta \sin \alpha - \cos \varphi \sin \delta \sin \tau}{\sin \varphi \cos \delta \cos \alpha \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \delta \cos \varepsilon \cos \tau + \cos \varphi \cos \delta \sin \varepsilon \sin(\alpha - \tau)}$$

Setzt man in der Hauptformel $\varphi = 90^\circ$, also für den Pol, so verschwindet die Zeit aus derselben und es ist

$$\sin \omega = \frac{\cos \delta (\sin \alpha \cos \Theta - \cos \alpha \sin \Theta \cos \varepsilon)}{\sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos(\Theta - \lambda)^2}}$$

§ 4.

Der Winkel ω stellt die wirkliche Neigung der die Sichelspitzen des Mondes verbindenden Geraden gegen die Horizontalebene dar. Wir beobachten indessen diesen Winkel nicht direct, sondern vielmehr seine Projection an der Himmelskugel oder dem Fixsternhimmel. Daher haben wir noch den Neigungswinkel der Projection der Sichelgeraden gegen den Horizont zu berechnen. Es ist der Winkel, den die durch die Erde und die Gerade gelegte Ebene mit dem Horizont einschliesst.

Da die Gleichung dieser Geraden, d. i. der Sichelsehne, nach dem vorigen bekannt ist, so lässt sich auch die durch sie und den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte Ebene nach bekannten Methoden leicht ermitteln.

Sind nämlich die Coordinaten eines gegebenen Punktes fgh und die Projectionen einer Geraden

$$y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

so ist die Gleichung der durch sie gelegten Ebene

$$(B_1(c_1 - h) - C_1(b_1 - g))(x - f) - (C_1 f + c_1 - h)(y - g) + (B_1 f + b_1 - g)(z - h) = 0$$

und weil in unserm Falle $f = g = h = 0$ ist

$$(B_1 c_1 - C_1 b_1)x - c_1 y + b_1 z = 0$$

Die Werte B_1, C_1, b_1, c_1 sind aus § 3 bekannt, führen wir sie hier ein, so zeigt sich nach einigen Transformationen, dass sich ein Factor $\sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha$ ganz forthebt, und die Gleichung der durch die Erde und die Mondsichelspitzen geführten Ebene ist

$$\begin{aligned} &x(\cos \Theta - \cos \alpha \cos \delta \cos \beta \cos(\Theta - \lambda)) \\ &+ y(\cos \varepsilon \sin \Theta - \sin \alpha \cos \delta \cos \beta \cos(\Theta - \lambda)) \\ &+ z(\sin \varepsilon \sin \Theta - \sin \delta \cos \beta \cos(\Theta - \lambda)) = 0 \end{aligned}$$

Nach den vorhergegangenen Erklärungen ist noch die Neigung dieser Ebene gegen die Horizontalebene des Beobachters

$$x \cos \varphi \cos \tau + y \cos \varphi \sin \tau + z \sin \varphi = a$$

aufzustellen.

Nun ist aber der Neigungswinkel ψ der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \end{aligned}$$

durch die Formel

$$\cos \psi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)}}$$

bekannt.

Führen wir hierin die obigen Ausdrücke ein, so resultirt zunächst

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \\ &\frac{\{\cos \Theta \cos \varphi \cos \tau + \sin \Theta \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \tau + \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \varphi \\ &\quad - \cos \beta \cos(\Theta - \lambda)(\sin \varphi \sin \delta + \cos \delta \cos \varphi \cos(\alpha - \tau))\}}{\sqrt{\{1 - 2 \cos \beta \cos(\Theta - \lambda)(\cos \Theta \cos \alpha \cos \delta + \sin \Theta \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \delta \\ &\quad + \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \delta) + \cos \beta^2 \cos(\Theta - \lambda)^2\}}} \end{aligned}$$

Das Radical ist nach früheren $= \sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos(\Theta - \lambda)^2}$.

Daher ist

$$\cos \psi = \frac{\cos \Theta \cos \varphi \cos \tau + \sin \Theta \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \tau + \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \varphi - \cos \beta \cos(\Theta - \lambda)(\sin \varphi \sin \delta + \cos \delta \cos \varphi \cos(\alpha - \tau))}{\sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos(\Theta - \lambda)^2}}$$

Dies ist aber noch nicht die definitive Endformel. Es ist ψ zwar der Winkel zwischen dem Horizont und dem durch die Sichelspitzen gelegten grössten Kreise auf der Himmelskugel, aber es kommt weniger auf diesen als auf diejenigen an, welchen die Projection der Sichelspitzengeraden auf die Himmelskugel mit dem durch den Mond gelegten Parallelkreis macht, wie ihn das Auge bildet. Wir ziehen demnach von der obern Spitze der Mondsichel nach der untern eine

Linie und von der untern Spitze einen Parallelkreis und fragen nach dem Winkel ω' zwischen dieser Linie und dem Höhenparallel.

Die Höhe des Mondes sei h , der Winkel zwischen h und der Mondsehne sei λ , alsdann folgt aus dem sphärischen Dreieck

$$\cos \psi = \cos h \sin \lambda \quad \text{Fig. 2)}$$

Da aber in dem kleinen Dreieck am Monde $\lambda = 90^\circ - \omega'$ ist, so wird die Relation zu

$$\cos \psi = \cos h \cos \omega'$$

woraus

$$\cos \omega' = \frac{\cos \psi}{\cos h}$$

und die definitive Formel wird nunmehr

$$\cos \omega' = \frac{\cos \Theta \cos \varphi \cos \tau + \sin \Theta \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \tau + \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \varphi - \cos \beta \cos (\Theta - \lambda) (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\alpha - \tau))}{\pm \cos h \sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos (\Theta - \lambda)^2}}$$

und es drückt also ω' nicht die wirkliche Neigung ω der Mondsehne gegen den Horizont, welche wir vorhin berechnet haben, sondern die scheinbare Neigung derselben und zwar gegen den Höhenparallel aus, wie ihn das projicirende Auge wahrnimmt.

§ 5.

Die soeben gefundene Formel für $\cos \omega'$ ist nun einer sehr interessanten Transformation fähig, welche den Ausdruck zur Rechten ausserordentlich vereinfacht.

Es wird sich zeigen, dass die einzelnen Glieder desselben einer geometrischen Deutung fähig sind,

Wir haben, um dies deutlich zu zeigen, in der Figur 3. die 3 Hauptebenen der Ekliptik, des Aequators und des Horizontes gezeichnet; die beiden ersten schneiden sich in der X -Achse, welche den Widderpunkt T enthält. Die Sonne befindet sich im Punkte S der Ekliptik und hat, von der Erde aus gesehen, welche wir im Koordinatenanfangspunkt denken, die Länge θ und die Höhe H . Der Bogen grössten Kreises zwischen ihr und dem Monde sei σ , dessen Länge und Breite λ, β , Rectascension und Declination $\alpha \delta$ ist.

Durch den Pol des Aequators und den Mond legen wir einen grössten Kreis, ebenso durch den Pol und das Zenith Z des Beobachtungsortes einen zweiten, diese schliessen, wie man sofort erkennt, den Winkel $\tau - \alpha$ mit einander ein, welches der Stundenwinkel des Mondes in Sternzeit ist.

Der Wurzel Ausdruck $\pm \sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos(\Theta - \lambda)^2}$ ist nunmehr leicht zu deuten. Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck zwischen Sonne, Mond, der Ekliptik und der Mondbreite β folgt unmittelbar

$$\cos \sigma = \cos \beta \cos(\lambda - \Theta)$$

daher ist

$$\sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos(\Theta - \lambda)^2} = \sin \sigma$$

Wir betrachten jetzt das Dreieck zwischen Mond, Pol und Zenith. Die 3 Seiten sind $90^\circ - \delta$, $90^\circ - \varphi$, $90^\circ - h$, der letzten Seite liegt der Winkel $\tau - \alpha$ gegenüber. Demnach hat man

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(\tau - \alpha)$$

Derselbe Ausdruck kommt in der Formel für $\cos \omega'$ vor, letztere wird demnach durch Einsetzen der beiden obigen Relationen zu

$$-\cos \omega' \cos h \sin \sigma = \cos \Theta \cos \varphi \cos \tau + \sin \Theta \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \tau \\ + \sin \Theta \sin \varepsilon \sin \varphi - \cos \beta \sin h \cos(\Theta - \lambda)$$

woraus

$$\cos \beta \cos(\Theta - \lambda) \sin h - \cos \omega' \cos h \sin \sigma \\ = \cos \varphi (\cos \Theta \cos \tau + \sin \Theta \sin \tau \cos \varepsilon) + \sin \varphi \sin \Theta \sin \varepsilon$$

In dieser Formel können wir $\cos \beta \cos(\Theta - \lambda)$ durch $\cos \sigma$ ersetzen und haben demnach

$$\cos \sigma \sin h - \sin \sigma \cos h \cos \omega' = \cos \varphi (\cos \Theta \cos \tau + \sin \Theta \sin \tau \cos \varepsilon) \\ + \sin \varphi \sin \Theta \sin \varepsilon$$

Beide Seiten der Gleichung haben wir nun auf eine Form gebracht, welche eine Verwandtschaft ihrer Glieder mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie erkennen lässt. Wir erinnern deshalb daran, dass in jedem sphärischen Dreieck, dessen Seiten abc und Winkel ABC sind, folgende Formeln gelten:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

Um den eingeklammerten Ausdruck in der Hauptformel geometrisch zu deuten, ziehen wir vom Pol des Aequators durch's Zenith einen Meridian bis zum Durchschnitt H des Aequators, verbinden diesen Punkt durch den Bogen ϱ mit der Sonne S und wenden auf das Dreieck zwischen HST die 2. sphärische Relation an, wodurch man erhält

$$\cos \varrho = \cos \Theta \cos \tau + \sin \Theta \sin \tau \cos \varepsilon$$

Die Hauptformel wird nun zur folgenden

$$\cos \sigma \sin h - \sin \sigma \cos h \cos \omega' = \cos \varphi \cos \varrho + \sin \varphi \sin \Theta \sin \varepsilon$$

Um die rechte Seite mit der entsprechenden sphärischen Formel homogen zu machen, benutzen wir die obige 1. Relation oder den Sinussatz, führen aber statt des Winkels bei H in dem Dreiecke HST seinen Complementärwinkel, also den Winkel zwischen ϱ und dem Meridian PH ein, welcher ν heissen möge. Alsdann ist

$$\sin \theta \sin \varepsilon = \sin \varrho \cos \nu$$

Die Formel wird nun

$$\cos \sigma \sin h - \sin \sigma \cos h \cos \omega' = \cos \varphi \cos \varrho + \sin \varphi \sin \varrho \cos \nu$$

Der Ausdruck zur Rechten ist leicht zu interpretiren; er ist der Cosinus des Bogens zwischen Sonne und Zenith, wie aus der Betrachtung des Dreiecks zwischen SZH hervorgeht. Führen wir also die Zenithdistanz Z der Sonne in die Formel ein, so resultirt

$$\cos Z = \cos \sigma \sin h - \sin \sigma \cos h \cos \omega'$$

Endlich betrachten wir noch zur Charakterisirung dieses Ausdrucks das Dreieck zwischen Sonne, Mond und Zenith und erhalten aus der sphärischen Relation

$$\cos Z = \cos \sigma \sin h - \sin \sigma \cos h \cos (\sigma h)$$

in Verbindung der vorhergehenden den interessanten Nachweis, dass der gesuchte Winkel ω' der Grösse nach gleich ist dem Winkel zwischen dem Bogen σ des grössten Kreises zwischen Sonne und Mond und der Höhe h des letztern. Der Winkel ω bezeichnet aber die Lage der Mondsichel gegen den Höhenparallel. Demnach hat man nur durch den Mond eine Linie senkrecht zu diesem Bogen σ zwischen Sonne und Mond zu legen und erhält damit die Lage und Richtung der Mondsichel.

Sind beide Gestirne zugleich sichtbar über dem Horizont, so bestätigt die Uebereinstimmung dieses theoretischen einfachen Resultats mit dem blossen Augenschein die Richtigkeit der Rechnung. Um den Bogen σ des grössten Kreises zu erhalten, muss man sich durch seinen Standpunkt und Sonne und Mond eine Ebene und ihren Durchschnitt an der Himmelskugel denken; dieser Bogen wird stets auf der Sichel oder Sichelsehne senkrecht sein, wo auch der Mond am Himmel stehen mag.

Will man den Winkel ω' durch Rechnung finden, so ergibt er sich aus der Formel

$$\cos \omega' = \frac{\cos \beta \cos (\lambda - \Theta) \sin h - \sin H}{\cos h \sqrt{1 - \cos \beta^2 \cos (\lambda - \Theta)^2}}$$

in welcher H die Höhe der Sonne ist. Der Winkel ist also wesentlich von der Höhe der Sonne und des Mondes abhängig, welche bekanntlich durch die Formeln

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\tau - \alpha)$$

$$\sin H = \sin \varphi \sin D + \cos \varphi \cos D \cos t$$

berechnet werden können.

Aus dem Gang der Auflösung der jetzt gelösten Aufgabe geht hervor, dass dieselbe als ein gutes Mittel zur Anwendung der elementaren Sätze aus der analytischen Geometrie des Raumes betrachtet werden kann, da die vorzüglichsten der in dieser Disciplin enthaltenen Lehrsätze darin zur Anwendung kommen. So die Transformationen der Coordinaten von der Ekliptik auf den Aequator, die Aufstellung der Gleichungen verschiedener Ebenen in heliocentrischer und geocentrischer Lage, die Berechnung des Durchschnitts derselben und ihre Neigung gegen eine Tangentialebene einer rotirenden Kugel, das Legen einer Ebene durch eine Gerade und die Darstellung ihres Neigungswinkels gegen eine Horizontalebene, die an der Drehung der Kugel teilnimmt, die Projection eines Winkels auf die Himmelskugel, die geometrische Interpretation analytischer Ausdrücke etc.

Obgleich die Bedeutung der Aufgabe eine untergeordnete ist, so gewinnt sie durch die Einführung und Anwendung astronomischer Begriffe, die erst dann zur Klarheit kommen, wenn man es unternimmt, ein schwieriges oder leichteres Problem selbständig durchzuführen. Da die mathematischen Principien in ihrer Anwendung auf astronomische Aufgaben eine so interessante und anschauliche Seite gewinnen, so dürfte die vorliegende Arbeit auch als eine gute und ansprechende Studie zur Einführung in diese schöne Wissenschaft dienen, die jeden, der sich ernstlich mit ihr beschäftigt, in so hohem Grade zu fesseln versteht.

Gräfrath, April 1887.

XIII.

Die ebenen und die sphärischen cykloidalen Curven.

Von

H. Ekama.

Die sphärischen cykloidalen Curven sind, so weit mir bekannt ist, bis jetzt nicht analytisch betrachtet. Hauptsächlich habe ich gesucht die Punkte von Uebereinstimmung und von Unterschied zwischen den ebenen und den sphärischen cykloidalen Curven zu finden, und darum werde ich mit der Betrachtung der ebenen Curven beginnen. Dieses ist auch nötig, weil die folgende Ableitung in vielen Hinsichten sich von jener, welche gewöhnlich gegeben wird, unterscheidet.

I.

Die cykloidale Curve ist die Bahn, welche ein Punkt, der fest mit einem Kreise verbunden ist, durchläuft, wenn dieser Kreis ohne zu gleiten einen anderen Kreis entlang sich wälzt. Berühren die beiden Kreise einander auswendig, so entsteht eine Epicykloide; berühren sie einander inwendig, so ist die Bahn eine Hypocykloide. Der Punkt kann ausserhalb oder innerhalb des sich wälzenden Kreises gelegen sein.

Sei (Fig. 1.) der Radius $OC = b$ und der Radius $MC = a$, während $BD = c$ ist. Der Winkel BMO sei θ , also ist in $\triangle MOB$

$$r^2 = (a + b)^2 + (a + c)^2 - 2(a + b)(a + c) \cos \theta \quad (1)$$

$$\text{arc } AC = \text{arc } DC \therefore \text{Winkel } AOC = \frac{a}{b} \theta$$

$$\begin{aligned}
 a + c : \sin x &= a + b : \sin(x + \theta) \\
 \operatorname{tg} x &= \frac{(a + c) \sin \theta}{(a + b) - (a + c) \cos \theta} = \operatorname{tg} \left(\frac{a}{b} \theta - \varphi \right) \\
 \therefore \varphi &= \frac{a}{b} \theta - \operatorname{arctg} \frac{(a + c) \sin \theta}{(a + b) - (a + c) \cos \theta} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Für a negativ findet man die Hypocykloide; auch c kann negativ sein, wenn der Punkt innerhalb des sich wälzenden Kreises liegt.

Wenn ein Punkt sich mit einer constanten Geschwindigkeit einen Kreis entlang bewegt und der Mittelpunkt dieses Kreises längs einem anderen Kreise, so entsteht auch eine cykloidale Curve.

Sei der Radius des feststehenden Kreises B und der des sich bewegenden Kreises A . Das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten sei $m : n$, so ist Wkl. $MOH = m\eta$ und Wkl. $GMB = n\eta$ (Fig. 2. u. 3.).

Sind die Bewegungen gleich gerichtet (Fig. 2.), so ist Wkl. $OMB = (n - m)\eta$; sind sie einander entgegengesetzt (Fig. 3.), so ist er $= (n + m)\eta$. OB sei r und Wkl. $BOH = \varphi$, so ist in $\triangle OBM$

$$r^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(n \mp m)\eta$$

und

$$\operatorname{tg} x = \frac{A \sin(n \mp m)\eta}{B - A \cos(n \mp m)\eta}$$

aber

$$\pm x = m\eta - \varphi \quad \therefore \operatorname{tg}(m\eta - \varphi) = \pm \frac{A \sin(n \mp m)\eta}{B - A \cos(n \mp m)\eta}$$

Sei

$$(n \pm m)\eta = \pm \theta$$

so wird

$$r^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

und

$$\operatorname{tg} \left(\frac{m}{n \mp m} \theta \mp \varphi \right) = \frac{A \sin \theta}{B - A \cos \theta}$$

$$\therefore \varphi = \pm \frac{m}{n \mp m} \theta - \operatorname{arctg} \frac{\pm A \sin \theta}{B - A \cos \theta}$$

Diese Curve ist also eine Cykloide, bei welcher ist:

$$a + c = \pm A; \quad a + b = B \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n \mp m}$$

Soll der Punkt auf dem rollenden Kreise liegen, so ist $c = 0$, dann findet man

$$A : B = m : n$$

das heisst, die Radii der Kreise müssen den Geschwindigkeiten umgekehrt proportional sein.

Sind a und b unter einander messbare Linien, so sei ihr Verhältniss p/q , wo p und q zwei Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben, sind. Die Curve ist dann geschlossen. Aus den Formeln sieht man, dass r dieselbe bleibt, wenn Θ um einige mal 2π zunimmt. Die Anomalie wächst jedesmal um $p/q 2\pi$ und folglich wird der eine Kreis p mal um den anderen wälzen müssen, um in den Anfangspunkt zurückzukommen. Die Curve besteht aus q congruenten Teilen.

Diese verschiedene Teile werden einander schneiden, und wir werden jetzt den Ort der Doppelpunkte bestimmen.

Sollen für zwei Punkte die Radienvectoren einander gleich sein, so muss $\cos \Theta = \cos \Theta'$ sein

$$\therefore \Theta' = 2l\pi - \Theta$$

und sollen die Anomalien gleich sein, so muss sein

$$\text{folglich} \quad \text{tg} \left(\frac{p}{q} \Theta - \varphi \right) = \text{tg} \left(\frac{p}{q} \Theta' - \varphi \right) = \text{tg} \left\{ \frac{p}{q} (2l\pi - \Theta) - \varphi \right\}$$

$$p/q(2l\pi - \Theta) - \varphi = k\pi - p/q\Theta + \varphi$$

$$\therefore \varphi = \frac{2pl - qk}{q} \frac{1}{2}\pi = \frac{2E\pi}{4q}$$

E kann alle Werte haben von 0 bis $2q$, und die Doppelpunkte sollen liegen auf den Linien, welche den feststehenden Kreis in $2q$ gleiche Sectoren teilen. Die Zahl der Doppelpunkte, welche auf jeder Linie gelegen sind, hängt ausgenommen von p auch von a , b und c ab.

Diese Linien sind auch Linien von Symmetrie. Für φ und $-\varphi$ finden wir dieselben Werte von Θ , welche aber ein verschiedenes Zeichen haben, jedoch bleiben die Radienvectoren dann dieselben.

Bringen wir den Anfangspunkt der Anomalie auf die nächste Linie der Doppelpunkte über, und setzen wir e für $a+b$ und f für $a+c$.

Nun ist

$$\varphi = \varphi' + \frac{p}{q} \pi$$

$$\text{Sei} \quad \text{tg} \left(\frac{p}{q} \Theta - \varphi - \frac{p}{q} \pi \right) = \text{tg} \left\{ \frac{p}{q} (\Theta - \pi) - \varphi \right\} = \frac{f \sin \Theta}{e - f \cos \Theta}$$

$$\Theta - \pi = \eta$$

$$\therefore \operatorname{tg} \left\{ \frac{p}{q} \eta - \varphi \right\} = - \frac{f \sin \eta}{e + f \cos \eta}$$

also

$$\varphi = p/q \eta + \frac{f \sin \eta}{e + f \cos \eta}$$

und

$$r^2 = e^2 + f^2 + 2ef \cos \eta$$

Für φ und $-\varphi$ genügen dieselben Werte von η mit verschiedenem Zeichen, jedoch die Radienvectoren bleiben dieselben.

Die Curve kann bloss durch den Coordinatenanfangspunkt gehen für

$$e = f^1)$$

also ist

$$r = 2f \cos^{1/2} \eta$$

und

$$\operatorname{tg}(\varphi - p/q \eta) = \operatorname{tg}^{1/2} \eta$$

folglich

$$\varphi - p/q \eta = 1/2 \eta \quad \therefore \quad \varphi = \frac{q + 2p}{2q} \eta$$

und

$$r = 2f \cos \frac{q}{2p + q} \eta \tag{3}$$

Aus (1) folgt

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{ef \sin \theta}{r}$$

und aus (2)

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{a}{b} - \frac{ef \cos \theta - f^2}{r^2}$$

also

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{bef \sin \theta}{ar^2 - bef \cos \theta + bf^2} = \frac{bf \sin \theta}{ae + f^2 - (2a + b)f \cos \theta} = \operatorname{tg} \text{Wkl. } OBC$$

In $\triangle OCB$ ist:

$$OC : r = \sin OBC : \sin(OBC + x)$$

$$OC : r = 1 : \cos x + \sin x \operatorname{cotg} OBC$$

$$OC = \frac{r}{\cos x \left\{ 1 + \frac{ae + f^2 - (2a + b)f \cos \theta}{b(e - f \cos \theta)} \right\}}$$

$$OC = \frac{b(e - f \cos \theta)}{r \cos x}$$

und

$$r \cos x = e - f \cos \theta;$$

also ist

$$OC = b$$

1) Durège, Schlöm. Zeitschr. für Mathem. und Phys. Teil IX. Seite 209.

was uns lehrt, dass die Normale der cykloidalen Curve immer durch den Berührungspunkt der beiden Kreise geht.

Liegt der Punkt auf dem sich bewegenden Kreise, so ist die Curve die gemeine Epi- oder Hypocykloide. Die Formeln (1) und (2) werden

$$r^2 = a^2 + (a+b)^2 - 2a(a+b) \cos \theta \quad (4)$$

und

$$\varphi = \frac{a}{b} \theta - \operatorname{arctg} \frac{a \sin \theta}{(a+b) - a \cos \theta} \quad (5)$$

Der Winkel ODB (Fig. 4.) wird $\frac{1}{2}\theta$.

Die Tangente an die Curve gezogen geht immer durch den Punkt des sich wälzenden Kreises, der diametral dem Berührungspunkt gegenüber gelegen ist.

Bestimmen wir die Fusspunktlinie¹⁾ der Epicykloide

$$\text{Wkl. } OPD = \frac{1}{2}\theta$$

Sei

$$\theta = \pi - \eta$$

In $\triangle OPD$ ist

$$OP = \rho = (2a+b) \sin \frac{1}{2}\theta = (2a+b) \cos \frac{1}{2}\eta$$

$$\text{Wkl. } POD = \chi = \frac{1}{2}\eta + \frac{a}{b}\eta = \frac{2a+b}{2b}\eta$$

folglich

$$\rho = (2a+b) \cos \frac{b\chi}{b+2a}$$

Also ist die Fusspunktlinie die Curve, welche die Formel (3) giebt.

Diese Curve ist auch der geometrische Ort der Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Coordinatenanfangspunkt auf die Normalen der Epicykloide nieder gelassen sind.

Wir haben in $\triangle OCK$

$$OK = \sigma = b \cos \frac{1}{2}\theta$$

$$\text{Wkl. } AOK = \chi = \frac{1}{2}\theta + \frac{a}{b}\theta = \frac{b+2a}{2b}\theta$$

folglich

$$\sigma = b \cos \frac{b}{2a+b} \chi$$

Der Teil der Normale, welcher innerhalb des sich bewegenden Kreises liegt, ist

¹⁾ Eckardt, Schlöm. Zeitsch. für Math. und Phys. Teil XV. Seite 132.

$$N = 2a \sin \frac{1}{2}\theta \quad (6)$$

Dieser Wert ist unabhängig vom Radius des feststehenden Kreises.

In $\triangle COE$ ist

$$t : b = \sin(90^\circ - \frac{1}{2}\theta) : \sin OEC$$

$$\text{Wkl. } OEC = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\theta - AOE + \frac{a}{b} \theta = 90^\circ - \psi + \frac{2a+b}{2b} \theta$$

in welcher Formel Wkl. $AOC = \psi$ ist, und t und ψ die Polarcoordinaten der Normale sind. Die Gleichung wird also

$$t \cos \left(\frac{2a+b}{2b} \theta - \psi \right) = b \cos \frac{1}{2}\theta$$

In einem anderen Punkte der Epicycloide ist

$$t \cos \left(\frac{2a+b}{2b} \theta' - \psi \right) = b \cos \frac{1}{2}\theta'$$

Den Schnittpunkt der beiden Normalen findet man, indem man t und ψ bestimmt.

$$\frac{b \cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \left(\frac{2a+b}{2b} \theta - \psi \right)} = \frac{b \cos \frac{1}{2}\theta'}{\cos \left(\frac{2a+b}{2b} \theta' - \psi \right)}$$

oder

$$\text{tg } \psi = - \frac{\sec \frac{1}{2}\theta \cos \frac{2a+b}{2b} \theta - \sec \frac{1}{2}\theta' \cos \frac{2a+b}{2b} \theta'}{\sec \frac{1}{2}\theta \sin \frac{2a+b}{2b} \theta - \sec \frac{1}{2}\theta' \sin \frac{2a+b}{2b} \theta'}$$

Um den Krümmungsmittelpunkt zu finden, lassen wir die beiden Punkte sich nähern die Epicycloide entlang, so wird

$$\text{tg } \psi = - \frac{D \left(\sec \frac{1}{2}\theta \cos \frac{2a+b}{2b} \theta \right)}{D \left(\sec \frac{1}{2}\theta \sin \frac{2a+b}{2b} \theta \right)} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}\theta - \frac{2a+b}{b} \text{tg } \frac{2a+b}{2b} \theta}{\frac{2a+b}{b} + \text{tg } \frac{1}{2}\theta \text{tg } \frac{2a+b}{2b} \theta}$$

$$\therefore \text{tg } \frac{1}{2}\theta = \frac{2a+b}{b} \text{tg} \left(\frac{2a+b}{2b} \theta - \psi \right)$$

also

$$t^2 = b^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta \sec^2 \left(\frac{2a+b}{2b} \theta - \psi \right) = b^2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta \left(1 + \frac{b^2}{(2a+b)^2} \text{tg}^2 \frac{1}{2}\theta \right)$$

oder

$$t^2 = \frac{b^4}{(2a+b)^2} + \frac{4ab^2(a+b)}{(2a+b)^2} \cos^2 \frac{1}{2}\theta$$

$$\therefore t^2 = \left(\frac{b(a+b)}{2a+b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2a+b}\right)^2 + 2 \frac{b(a+b)}{2a+b} \frac{ab}{2a+b} \cos \theta$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}\theta - \psi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2a+b}{2b}\theta - \psi - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{\frac{b}{2a+b} \operatorname{tg}^{1/2}\theta - \operatorname{tg}^{1/2}\theta}{1 - \frac{b}{2a+b} \operatorname{tg}^{21/2}\theta}$$

$$\therefore \operatorname{tg}\left(\frac{a}{b}\theta - \psi\right) = -\frac{2a \operatorname{tg}^{1/2}\theta}{2a+b \sec^{21/2}\theta} = -\frac{a \sin \theta}{b + 2a \cos^{21/2}\theta}$$

und

$$\psi = \frac{a}{b}\theta - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-a \sin \theta}{(b+a) + a \cos \theta}$$

Diese Formeln stimmen mit den Formeln (4) und (5) überein. Die Evolute der Epicycloide ist also auch eine Epicycloide, jedoch war der beschreibende Punkt beim Anfang der Bewegung so weit möglich vom Coordinatenanfangspunkt entfernt. Der Radius des sich wälzenden Kreises der Evolute ist $\frac{ab}{2a+b}$ und jener des feststehenden Kreises $\frac{b^2}{2a+b}$.

Umgekehrt wird die Evolvente einer Epicycloide auch eine Epicycloide sein, bei welcher der Radius des feststehenden Kreises $b+2a$, jener des bewegenden Kreises $\frac{a}{b}(2a+b)$ ist.

Wir finden auf diese Weise fortschreitend eine unendlich grosse Anzahl von Epicycloiden, von welchen jede folgende die Evolvente der vorhergehenden ist, während die Radii der bewegenden und der feststehenden Kreise zwei geometrische Reihen bilden, deren Progression $\frac{b}{2a+b}$ ist.

Der Krümmungsradius wird für einen Punkt der Epicycloide sein

$$2a \sin^{1/2}\theta + \frac{2ab}{2a+b} \cos^{1/2}\theta'$$

oder

$$\theta - \theta' = 180^\circ$$

folglich ist der Krümmungsradius $\frac{4a(a+b)}{2a+b} \sin^{1/2}\theta$.

Der Krümmungsradius in einem Punkte der Evolvente wird $\frac{4a(a+b)}{b} \sin^{21/2}\theta$ sein, und dieses ist die halbe Länge eines Epicycloidenbogens, wenn $\theta = 180^\circ$ ist.

Also ist die Länge

$$= \frac{8a(a+b)}{b} \quad (7)$$

Für die Hypocykloide werden wir die übereinkünftigen Formeln finden, wenn wir $-a$ für a substituiren.

Bestimmen wir die Oberfläche, welche von dem feststehenden Kreise und von dem Epicykloidenbogen eingeschlossen ist.

folglich ist $\text{arc } CC' = \text{arc } B'D' = \text{arc } BD$

$$\text{Wkl. } COC' = \text{Wkl. } BOB'$$

also

$$\text{arc } BB' = r(\pi - \theta) \frac{a}{b}$$

und die Oberfläche $AC'B'D'B$ wird sein

$$a/b \int_0^\pi (\pi - \theta) r \, d\theta$$

Aber aus der Formel (4) folgt

also ist die Oberfläche $r \, d\theta = a(a+b) \sin \theta$

$$O = \frac{a^2(a+b)}{b} \int_0^\pi (\pi - \theta) \sin \theta \, d\theta$$

Sei

$$\pi - \theta = \varepsilon$$

so wird

$$O = \frac{a^2(a+b)}{b} \int_0^\pi \varepsilon \sin \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{a^2(a+b)}{b} \left[-\varepsilon \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \right]_0^\pi$$

und

$$O = \pi \frac{a^2(a+b)}{b} \quad (8)$$

Die ganze Oberfläche ist:

$$2\pi \frac{a^2(a+b)}{b} + \pi a^2 = \pi \frac{a^2(3b+2a)}{b} \quad (9)$$

Für die Oberfläche, durch den feststehenden Kreis und durch einen Hypocykloidenbogen eingeschlossen, finden wir $\pi \frac{a^2(3b-2a)}{b}$.

Die Summe der beiden Oberflächen ist $6\pi a^2$ (10), was uns lehrt,

dass die Oberfläche umgeben von einem Hypo- und einem Epi-cykloidenbogen, welche auf demselben feststehenden Kreis beschrieben sind, während die Radii der sich wälzenden Kreise gleich gross sind, immer 6 Mal der Oberfläche des bewegten Kreises gleich ist.

II.

Wenn zwei Kegel einen gemeinschaftlichen Gipfel haben und der eine wälzt sich ohne zu gleiten um den anderen, so wird jeder Punkt, der fest mit dem bewegten Kegel verbunden ist, eine Curve beschreiben, welche auf der Oberfläche einer Kugel gelegen ist, deren Radius der Abstand des Punktes von dem gemeinschaftlichen Gipfel ist. Dieselbe Curve ist auch die Bahn eines Punktes einer Kegeloberfläche, wenn der Kegel sich mit einer constanten Geschwindigkeit um seine Achse dreht, und diese Achse sich auch mit einer constanten Geschwindigkeit über die Oberfläche eines anderen Kegels bewegt, während die beiden Gipfel zusammen fallen.

Um die Gleichungen der Curve zu finden, lassen wir sie auf die erstgenannte Weise entstehen.

Sei der Winkel des feststehenden Kegels b und jener des sich wälzenden a (Fig. 5.), so ist $OM = a + b = e$, und nennen wir den Winkel, welchen die Linie vom Gipfel nach dem Punkte hin mit der Achse des bewegten Kegels macht, f .

Weiter sei Wkl. $AOB = \varphi$ und $OB = \xi$

$$\text{Wkl. } BMC = \theta \therefore \text{Wkl. } AOM = \theta \frac{\sin a}{\sin b} = \eta$$

Aus $\triangle BOM$ folgt

$$\cos \xi = \cos e \cos f + \sin e \sin f \cos \theta \tag{1) 1)}$$

und

$$\cot f \sin e = \sin \theta \cot g \chi + \cos e \cos \theta$$

$$\chi = \eta - \varphi$$

also

$$\varphi = \theta \frac{\sin a}{\sin b} - \text{arctg} \frac{\sin f \sin \theta}{\cos f \sin e - \cos e \sin f \cos \theta} \tag{2)}$$

Wälzt sich der eine Kegel innerhalb des anderen, so findet man die übereinstimmenden Formeln, indem man $-a$ für a substituirt.

Sind $\sin a$ und $\sin b$ zwei unter einander messbare Grössen, deren Verhältniss p/q ist, so kann man auf dieselbe Weise, wie dieses für die ebenen cykloidalen Curven gethan ist, zeigen, dass die Curve aus

1) Die Formeln, welche bei den ebenen und bei den sphärischen Cykloiden, durch dieselben arabischen Ziffern angegeben sind, stimmen mit einander überein.

q congruenten Teilen besteht. Bestimmt man den geometrischen Ort der Doppelpunkte, so findet man auf analoge Weise, dass die Doppelpunkte gelegen sind auf den grossen Kreisen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehend die Kugeloberfläche in $2q$ gleiche Sektoren teilen. Auch können wir beweisen, dass diese Kreise Symmetrielinien sind.

Die Curve kann bloss durch den Coordinatenanfangspunkt gehen, wenn $e = f$ ist; rechnen wir die Anomalie von der nächsten Symmetrielinie, so ist $\varphi = \varphi' + p/q \pi$

$$\operatorname{tg} \left\{ p/q \theta - \varphi - p/q \pi \right\} = \operatorname{tg} \left\{ p/q (\theta - \pi) - \varphi \right\} = \frac{\sin \theta}{\cos f (1 - \cos \theta)}$$

Setzen wir $\theta - \pi = \eta$, so wird:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{p}{q} \eta - \varphi \right) = - \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \eta}{\cos f} \tag{3}$$

Und

$$\cos \xi = \cos^2 f - \sin^2 f \cos \eta$$

folglich

$$\sin \frac{1}{2} \xi = \sin f \cos \frac{1}{2} \eta \tag{3}$$

Aus diesen beiden Formeln kann η nicht eliminirt werden, wie bei den ebenen Cykloiden.

Die Formel eines grossen Kreises auf der Kugel wird in sphärischen Polarcoordinaten sein:

$$\cotg \xi = \sin (p + \varphi) \operatorname{tg} A \tag{1}$$

Hierin sind ξ und φ die Coordinaten, während A der Winkel ist, welchen der Kreis macht mit einem anderen, dessen Pol der Coordinatenanfangspunkt ist, und p der Bogen des letztgenannten Kreises ist zwischen dem Schnittpunkte und dem Punkte, wo $\varphi = 0$ ist.

Wir müssen den Normalkreis bestimmen, d. h. den Kreis, welcher senkrecht auf einem Elemente der Curve steht, oder den Kreis, nach welchem die Normalebene die Kugel schneidet.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$(x_1 - x) dx + (y_1 - y) dy + (z_1 - z) dz = 0$$

Für Punkte des Kreises muss sein:

$$x = R \sin \xi \cos \varphi \quad y = R \sin \xi \sin \varphi \quad \text{und} \quad z = R \cos \xi$$

$$x_1 = R \sin \xi' \cos \varphi' \quad y_1 = R \sin \xi' \sin \varphi' \quad \text{und} \quad z_1 = R \cos \xi'$$

während ξ' und φ' die Coordinaten des Elementes sind. Nun ist

$$1 = - R \sin \xi \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx} + R \cos \xi \cos \varphi \frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = R \cos \varphi \sin \xi \frac{d\varphi}{dx} + R \cos \xi \sin \varphi \frac{d\xi}{dx} \quad \frac{dz}{dx} = - R \sin \xi \frac{d\xi}{dx}$$

Durch Substitution in die Formeln der Normalebene finden wir:

$$R^2 \left\{ \sin \xi' \cos \varphi' - \sin \xi \cos \varphi \right\} \left\{ \cos \xi \cos \varphi \frac{d\xi}{dx} - \sin \xi \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx} \right\} \\ + R^2 \left\{ \sin \xi' \sin \varphi' - \sin \xi \sin \varphi \right\} \left\{ \cos \varphi \sin \xi \frac{d\varphi}{dx} + \cos \xi \sin \varphi \frac{d\xi}{dx} \right\} \\ - R^2 \sin \xi \frac{d\xi}{dx} \left\{ \cos \xi' - \cos \xi \right\} = 0$$

also

$$\frac{d\varphi}{d\xi} \sin(\varphi' - \varphi) = -\cotg \xi \cos(\varphi' - \varphi) + \cotg \xi'$$

Sei nun der Kreis $\cotg \xi = \sin(p + \varphi) \operatorname{tg} A$

so ist auch $\cotg \xi' = \sin(p + \varphi') \operatorname{tg} A$

durch Substitution:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} \sin(\varphi' - \varphi) = -\cos(\varphi' - \varphi) \sin(p + \varphi) \operatorname{tg} A + \sin(p + \varphi') \operatorname{tg} A$$

oder
$$\frac{d\varphi}{d\xi} = -\operatorname{tg} A \cos(\varphi + p) \tag{II}$$

Die Elimination von $(p + \varphi)$ aus (I) und (II) giebt

$$\cotg^2 \xi + \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 A \tag{III}$$

Jetzt kann auch p gefunden werden.

Gebrauchen wir dieses für die sphärische Cykloide.

Aus (1) folgt
$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\sin f \sin e \sin \theta}{\sin \xi}$$

und aus (2)
$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\sin a}{\sin b} + \frac{\cos e - \cos f \cos \xi}{\sin^2 \xi}$$

also

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\sin^2 \xi \sin a + \sin b (\cos e - \cos f \cos \xi)}{\sin b \sin \xi \sin e \sin f \sin \theta}$$

Diesen Wert substituiren wir in die Formel (III), und nach Reduction finden wir:

$$\operatorname{tg}^2 A \sin^2 b \sin^2 \xi \sin^2 e \sin^2 f \sin^2 \theta = \cos^2 \xi \sin^2 b \sin^2 e \sin^2 f \sin^2 \theta \\ + \{\sin^2 \xi \sin a + \sin b\} \{\cos e - \cos f \cos \xi\}^2$$

Nun ist $\sin^2 e \sin^2 f \sin^2 \theta = \sin^2 \xi + 2 \cos \xi \cos e \cos f - \cos^2 e - \cos^2 f$

Also durch Substitution

$$\operatorname{tg}^2 A \sin^2 b \sin^2 f \sin^2 \theta = \{\sin^2 b - \sin^2 a\} \cos^2 \xi - 2 \sin b \cos f \cos \xi \times \\ (\sin a + \sin b \cos e) + (\sin a + \sin b \cos e)^2$$

Und da $\cos \xi = \cos(e - f) - 2 \sin e \sin f \sin^2 \frac{1}{2} \theta$

finden wir

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 A = (\sin^2 a - \sin^2 b) + \sin a \cos a \operatorname{cosec} f \cos f \sec^2 \frac{1}{2} \theta \\ + \frac{1}{4} \sec^2 c \operatorname{cosec}^2 f \sec^2 \frac{1}{2} \theta \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} \theta \end{aligned}$$

Für den Normalkreis haben wir gefunden

$$\cos \xi = \sin(p + \varphi) \operatorname{tg} A$$

für $\xi = b$ ist

$$\sin(p + \varphi) = \frac{\cos b}{\operatorname{tg} A} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2(p + \varphi) = \frac{\cos^2 b}{\operatorname{tg}^2 A - \cos^2 b}$$

folglich

$$\operatorname{tg}^2(p + \varphi) = \frac{\sin^2 \theta \sin^2 f \cos^2 b}{\sin^2 f \cos^2 a \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \sin a \cos a \sin f \cos f + \sin^2 c}$$

Aber $c = f - a$; also

$$\operatorname{tg}(p + \varphi) = \frac{\sin \theta \sin f \cos b}{\cos f \sin a - \sin f \cos a \cos \theta}$$

oder

$$\sin a \operatorname{cotg} f = \sin \theta \cos b \operatorname{cotg}(p + \varphi) + \cos a \cos \theta$$

Sei

$$\cos b \operatorname{cotg}(p + \varphi) = \operatorname{cotg} \varepsilon$$

so ist ε der Winkel in einem Dreieck, von welchem a und f die Seiten sind, und θ der durch diese Seiten eingeschlossene Winkel ist. ε muss der Seite f gegenüber liegen. Dieses ist der Fall in $\triangle BCM$ (Fig. 6.), während in $\triangle DOC$ $\operatorname{tg}(p + \varphi) = -\operatorname{tg}(180^\circ - \varepsilon) \cos b$ ist.

Hieraus folgt, dass bei den sphärischen Cykloiden der Normalkreis immer durch den Berührungspunkt der beiden kleinen Kreise auf der Kugel geht.

Liegt der Punkt in der Oberfläche des sich wälzenden Kegels, so ist $f = a$ und die Formeln (1) und (2) werden:

$$\cos \xi = \cos a \cos(a + b) + \sin a \sin(a + b) \cos \theta \quad (4)$$

und

$$\varphi = \theta \frac{\sin a}{\sin b} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin a \sin \theta}{\cos a \sin(a + b) - \cos(a + b) \sin a \cos \theta} \quad (5)$$

Der Teil des Normalkreises, der innerhalb des sich wälzenden Kegels liegt, ist bestimmt durch die Formel

$$\sin \frac{1}{2} N = \sin a \sin \frac{1}{2} \theta \quad (6)$$

unabhängig von dem Winkel des feststehenden Kegels.

Der Tangentkreis, d. h. der grosse Kreis auf der Kugel, welcher ein Element mit der Curve gemein hat, wird senkrecht zur Normalenebene stehen, folglich wird er nicht, wie bei den ebenen cykloidalen Curven durch den Punkt des bewegten Kreises gehen, der so weit möglich von dem Coordinatenanfangspunkt liegt.

Man sieht hieraus, dass bei den ebenen Cykloiden die Eigenschaft der Normale wichtiger ist, als jene der Tangente. Dieses folgt auch daraus, dass, wenn der Punkt nicht auf dem bewegten Kreise gelegen ist, die Eigenschaft der Normale bestehen bleibt, doch die der Tangente wegfällt.

Die Frage, ob bei den sphärischen cykloidalen Curven eine Eigenschaft besteht, welche übereinstimmt mit der der Tangente der ebenen cykloidalen Curven, würde nicht ohne Grund sein.

Bringen wir durch M (Fig. 7.) einen grossen Kreis senkrecht zur Normalebene PC , so ist $BC = \frac{1}{2}N$ und $\sin \frac{1}{2}N = \sin a \sin \frac{1}{2}\theta$. Nun ziehen wir durch den Punkt B der Cykloide einen kleinen Kreis, dessen Ebene parallel ist mit jener des grossen Kreises, welcher durch M gezogen ist, so schneidet dieser den sich wälzenden Kreis noch in einem Punkte E .

Bringt man nun durch E und M grosse Kreise senkrecht zu dem grossen Kreise CD , so schneiden diese einander und den Normalkreis in P , dem Pole des Kreises CD . Es ist

$$BC = FM = ED = \frac{1}{2}N$$

$$EM = BM = a$$

also

$$\triangle BCM \cong DME$$

weil beide Dreiecke rechtwinklig sind, folglich

$$\text{Wkl. } BMC = \text{Wkl. } EMD = \frac{1}{2}\theta$$

also

$$\text{Wkl. } BME = 180^\circ - \theta$$

dieses lehrt uns, dass E der Punkt des sich wälzenden Kreises ist, der so weit möglich von dem feststehenden Kreise entfernt liegt. Ziehen wir also durch den Punkt der cykloidalen Linie einen kleinen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Normalebene steht, so wird dieser durch den Punkt des sich wälzenden Kreises gehen, der so weit möglich von dem andern Kreise entfernt ist.

Wird der Radius der Kugel unendlich gross, so gehen der kleine Kreis BE und der Tangentkreis in dieselbe gerade Linie über, namentlich in die Tangente, in dem Punkte B an die ebenen Cykloide gezogen.

Weil der Tangentkreis nicht der genannten Eigenschaft genügt, wird die Evolute der sphärischen Cykloide nicht wieder eine sphärische Cykloide sein.

Ist $b = a$, so muss der eine Kegel sich ausserhalb des anderen wälzen, und so ist

$$\cos \xi = \cos a \cos 2a + \sin a \sin 2a \cos \theta$$

und

$$\cot(\theta - \varphi) = \frac{\sin a \sin \theta}{\sin 2a \cos a - \cos 2a \sin a \cos \theta}$$

Diese Curve wird mit der Kardioiden übereinstimmen; aber während alle ebenen Kardioiden gleichförmig sind, ist dies bei den sphärischen Kardioiden nicht der Fall; diese hängen doch von zwei Grössen ab, namentlich von dem Radius der Kugel und von dem Winkel der Kegel.

Ein anderer einfacher Fall, den wir betrachten wollen, ist, dass der feststehende Kegel eine Ebene wird. Dieser Fall stimmt mit der gemeinen ebenen Cykloide überein.

Nun ist

$$b = 90^\circ$$

also

$$\cos \xi = -\sin 2a \sin^2 \frac{1}{2} \theta$$

und

$$\varphi = \theta \sin a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin a \sin \theta}{1 - 2 \sin^2 a \sin^2 \frac{1}{2} \theta} \quad (\text{IV})$$

Die Formel für den Normalkreis wird sein

$$\operatorname{cotg} \xi = \sin(p + \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \cos a$$

Bestimmen wir jetzt p . Dazu haben wir:

$$\sin(p + \varphi) = \frac{\operatorname{cotg} \xi \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \theta}{\cos a}$$

$$\operatorname{cosec}^2(p + \varphi) = \frac{\cos^2 a \sin^2 \xi}{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 \xi} = 1 + \operatorname{cotg}^2(p + \varphi)$$

$$\operatorname{cotg}(p + \varphi) = \pm \frac{1 - 2 \sin^2 a \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{\sin a \sin \theta}$$

folglich nach (IV)

$$p + \varphi = -(\theta \sin a - \varphi) \quad \text{oder} \quad p = -\theta \sin a$$

Dieses war zu erwarten, weil der Normalkreis durch den Punkt gehen muss, worin der sich wälzende Kreis die Ebene berührt. Der Normalkreis ist in diesem Falle also

$$\operatorname{cotg} \xi = \sin(\varphi - \theta \sin a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \cos a$$

Setzen wir endlich den Fall, dass $a = 90^\circ$ ist; nun bewegt sich ein Kreis auf solche Weise, dass sein Mittelpunkt in dem Gipfel eines Kegels liegt und seine Ebene die Kegeloberfläche berührt.

Nun ist

$$\cos \xi = \cos b \cos \theta$$

und

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{\sin b} - \varphi\right) = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sin b}$$

Weiter finden wir

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{cotg} b$$

und der Winkel α , den der Normalkreis mit dem sphärischen Radius des feststehenden Kreises macht, gleich 90° . Der sich bewegende Kreis ist also zugleich Normalkreis für die jetzt entstandene sphärische Cykloide.

Die Gleichung des Normalkreises ist also

$$\operatorname{cotg} \xi = \operatorname{cotg} b \sin(p + \varphi)$$

Hierin muss p noch bestimmt werden. Man hat:

$$\operatorname{cotg}(p + \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sin b} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{\sin b} - \varphi\right)$$

folglich

$$p = 90^\circ - \frac{\theta}{\sin b}$$

Also ist die Formel des Normalkreises

$$\operatorname{cotg} \xi = \operatorname{cotg} b \cos\left(\varphi - \frac{\theta}{\sin b}\right)$$

Für ein anderes Element soll sein

$$\operatorname{cotg} \xi = \operatorname{cotg} b \cos\left(\varphi - \frac{\theta'}{\sin b}\right)$$

Der Schnittpunkt der Normale wird gegeben durch

$$\cos\left(\varphi - \frac{\theta}{\sin b}\right) = \cos\left(\varphi - \frac{\theta'}{\sin b}\right)$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \frac{\theta}{\sin b} - \cos \frac{\theta'}{\sin b}}{\sin \frac{\theta}{\sin b} - \sin \frac{\theta'}{\sin b}}$$

Nähern sich die Punkte die Curve entlang, so wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{D \cos \frac{\theta}{\sin b}}{D \sin \frac{\theta}{\sin b}} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{\sin b}$$

folglich

$$\varphi = \frac{\theta}{\sin b}$$

und also auch

$$\xi = b$$

Dieses lehrt uns, dass in diesem Falle der feststehende kleine Kreis die Evolute dieser sphärischen Cykloide ist, oder umgekehrt diese Cykloide die sphärische Evolvente eines kleinen Kreises der Kugel ist. Diese Curve stimmt mit der ebenen Evolvente eines Kreises überein, denn diese können wir doch auch wie eine Cykloide betrachten, weil sie der Weg eines Punktes ist, der auf einer geraden Linie, welche um einen Kreis wälzt, liegt.

Jetzt wollen wir die Länge eines sphärischen Cykloidenbogens bestimmen. Bei dem gebrauchten Systeme von sphärischen Polar-coordinaten ist:

$$ds = R \sqrt{\{d\xi^2 + \sin^2 \xi d\varphi^2\}}$$

Substituiren wir hierin die gefundenen Werte für $\frac{d\xi}{d\theta}$ und $\frac{d\varphi}{d\theta}$, so ist:

$$ds = R d\theta \sqrt{\left[\frac{\sin^2 a \sin^2(a+b) \sin^2 \theta}{\sin^2 \xi} + \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b \sin^2 \xi} \right. \\ \left. \{ \sin^2 \xi - \sin^2 b + 2 \cos a \sin(a+b) \sin b \sin^{1/2} \theta \}^2 \right]}$$

$$ds = \frac{R}{\sin b \sin \xi} d\theta \sqrt{[\sin^2 b \{ \sin^2 a - \cos^2(a+b) - \cos^2 \xi \\ + 2 \cos \xi \cos a \cos(a+b) \} + \{ \sin a \cos^2 b - \sin a \cos^2 \xi - (\cos \xi - \cos b) \cos a \sin b \}^2]}$$

$$\therefore ds = \frac{R d\theta}{\sin b} \sqrt{\{- \cos^2 \xi \sin^2 a - 2 \cos \xi \sin b \cos a \sin a + \sin^2 a \cos^2 b \\ + 2 \sin a \cos a \sin b \cos b\}}$$

$$= \frac{R}{\sin b} d\theta \sqrt{[-\{\cos \xi \sin a + \sin b \cos a\}^2 + \sin^2(a+b)]}$$

$$= \frac{R}{\sin b} d\theta \sqrt{[-\{\sin(a+b) - 2 \sin^2 a \sin(a+b) \sin^{1/2} \theta\}^2 + \sin^2(a+b)]}$$

also

$$ds = \frac{2R \sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} \sin^{1/2} \theta d\theta \sqrt{\cotg^2 a + \cos^2 1/2 \theta}$$

Die Länge eines sphärischen Cykloidenbogens ist also

$$L = \frac{2R \sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} \int_0^{2\pi} \sin^{1/2} \theta d\theta \sqrt{\cotg^2 a + \cos^2 1/2 \theta}$$

Sei

$$\cos^{1/2} \theta = y \quad \therefore -\sin^{1/2} \theta d\theta = 2dy$$

und

$$L = \frac{4R \sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} \int_0^1 dy \sqrt{\cotg^2 a + y^2}$$

Nun ist

$$\int dy \sqrt{\cotg^2 a + y^2} = \frac{1}{2} y \sqrt{\cotg^2 a + y^2} + \frac{1}{2} \cotg^2 a l(y + \sqrt{\cotg^2 a + y^2})$$

also

$$\int_0^1 dy \sqrt{\cotg^2 a + y^2} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} a + \frac{1}{2} \cotg^2 a l \frac{1 + \operatorname{cosec} a}{\cotg a}$$

und

$$L = \frac{2R \sin(a+b)}{\sin b} \left\{ \sin a + \cos^2 a l \frac{1 + \sin a}{\cos a} \right\} \quad (7)$$

Für $a = 90^\circ$ wird

$$L = 2R \cotg b$$

Den Teil der Kugeloberfläche, der eingeschlossen ist durch den feststehenden Kreis und durch den Cykloidenbogen, finden wir auf die folgende Weise. (Fig. 8.)

$$\operatorname{arc} AC = \operatorname{arc} BC \quad \text{und} \quad \operatorname{arc} AC' = \operatorname{arc} CD$$

also

$$\operatorname{arc} CC' = \operatorname{arc} BD$$

folglich ist

$$\operatorname{arc} CC' = (\pi - \theta) R \sin a$$

Der Winkel COC' ist nun $(\pi - \theta) \frac{\sin a}{\sin b}$, aber

$$\text{Wkl. } COC' = \text{Wkl. } BOB'$$

folglich ist

$$\operatorname{arc} BB' = R(\pi - \theta) \frac{\sin a}{\sin b} \sin \xi$$

die Oberfläche eines unendlich schmalen Streifens BB' wird dann sein

$$R^2 \frac{\sin a}{\sin b} (\pi - \theta) \sin \xi d\xi$$

Und die Oberfläche O' der Figur $AD'B'C'$

$$= R^2 \frac{\sin a}{\sin b} \int_0^\pi (\pi - \theta) \sin \xi d\xi$$

Wir haben gefunden

$$\sin \xi d\xi = \sin(a+b) \sin a \sin \theta d\theta$$

also ist

$$O' = R^2 \frac{\sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} \int_0^\pi (\pi - \theta) \sin \theta d\theta$$

Sei

$$\pi - \theta = \epsilon$$

so ist

$$O' = R^2 \frac{\sin^2 a}{\sin b} \sin(a+b) \int_0^\pi \varepsilon \sin \varepsilon d\varepsilon$$

die Integration giebt

$$O' = \pi R^2 \frac{\sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} \quad (8)$$

Die gesuchte Oberfläche O ist gleich an zweimal die Oberfläche der Figur $AD'B'C'$ vermehrt um die Oberfläche des Kugelsegmentes $C'B'D'$. Folglich

$$O = 2\pi R^2 \frac{\sin^2 a \sin(a+b)}{\sin b} + 2\pi R^2 (1 - \cos a) \quad (V)$$

$$= 2\pi R^2 \frac{1 - \cos a}{\sin b} \left\{ (1 + \cos a) \sin(a+b) + \sin b \right\}$$

$$= 2\pi R^2 (1 - \cos a) \left\{ \frac{\sin a}{\operatorname{tg} b} (1 + \cos a) + (\cos^2 a + \cos a + 1) \right\} \quad (9)$$

Wälzt sich der eine Kegel innerhalb des anderen, so wird (V)

$$2\pi R^2 \frac{\sin^2 a \sin(b-a)}{\sin b} + 2\pi R^2 (1 - \cos a)$$

Und also ist die Oberfläche der Kugel, die durch die beiden Cykloidenbogen eingeschlossen ist

$$2\pi R^2 \left\{ \frac{\sin^2 a}{\sin b} (2 \sin b \cos a) + 2(1 - \cos a) \right\} = 4\pi R^2 (1 - \cos^2 a) \quad (10)$$

Ist $b = 90^\circ$, so ist die Oberfläche, durch die Cykloidenbogen und den Kreis eingeschlossen, nach (9)

$$2\pi R^2 (1 - \cos a) \{ \cos^2 a + \cos a + 1 \} = 2\pi R^2 (1 - \cos^3 a)$$

Ist $a = 90^\circ$, so ist die eingeschlossene Kugeloberfläche gleich

$$2\pi R^2 \{ \cotg b + 1 \}$$

Bei der sphärischen Kardioide, wo $a = b$, wird die Oberfläche

$$2\pi R^2 (1 - \cos a) \{ 2 \cos^2 a + 2 \cos a + 1 \}$$

Fügen wir hierzu die Oberfläche, welche der feststehende Kegel aus der Kugel schneidet, so finden wir für die ganze Oberfläche der sphärischen Kardioide

$$4\pi R^2 (1 - \cos^3 a)$$

Amersfoort, November 1887.

XIV.

Potential einer elliptischen Walze.

Von

Ulrich Bigler.

Fortsetzung von T. VI. Nr. XIII.

Dritter Teil.

VI. Potential der elliptischen Walze von der Dichtigkeit 1,
umschlossen von

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} < 1, \quad 0 < Z < c,$$

in Bezug auf den Punkt (x, y, z) . $(z > c)$.

§ 16. Ableitung des Potentials.

Das Potential der unendlich dünnen Scheibe $h < Z < h + dh$ sei Rdh . Wenn $\bar{W}^2 = 1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{(z-h)^2}{u}$ und

$$U^2 = (A+u)(B+u)u \quad (U, \bar{W} \text{ pos. für } u > t), \quad \text{so ist}$$

$$R = 2\sqrt{AB} \int_t^\infty \frac{\bar{W}}{U} \cdot \frac{du}{U}$$

und es gilt $\int_0^c Rdh$ zu berechnen. Die Umkehrung der Folge der

Integration bereitet einige Schwierigkeit. Die Werte von t und \bar{W} , die zu $h = 0$ gehören, seien mit t_0, W_0 and diejenigen, die zu $h = c$ gehören, mit t_1, W_1 bezeichnet. Die Differentiation der Gleichung $\bar{W}^2(t) = 0$ gibt

$$\left(\frac{x^2}{(A+t)^2} + \frac{y^2}{(B+t)^2} + \frac{(z-h)^2}{t^2} \right) dt + 2 \frac{z-h}{t} \cdot dh = 0$$

und zeigt, da $\frac{z-h}{t}$ pos. ist, dass t sinkt, während h steigt; also

$$t_1 < t < t_0$$

Ich betrachte nun h als Function von t und erhalte

$$V = \int_{t_1}^{t_0} R \left(-\frac{\partial h}{\partial t} \right) dt = 2 \sqrt{AB} \int_{t_1}^{t_0} \left(\int_t^{\infty} \frac{\bar{W}}{U} du \right) \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial t} \right) dt$$

Man denke sich ein rechtwinkliges Coordinatensystem Fig. 21. Auf der Abscissenaxe werden die u und auf der Ordinatenaxe die t abgetragen. Die dritte räumliche Coordinate im Punkte (t, u) stelle den Wert des Integranden dar; die Integration nach u erstreckt sich über einen unendlich schmalen Streifen \overline{FG} , der im Punkte F auf der Halbirungslinie des rechten Winkels beginnt und sich bis in den Horizont erstreckt. Die Integration nach t summirt alle diese Streifen von $t = t_1$ bis $t = t_0$, also von A bis B . Das Doppelintegral dehnt sich also über das Trapez $ADEB$ aus. Zum Zwecke der Umkehrung der Folge der Integration teile ich dieses Trapez in zwei Teile ein. Der erste Teil umfasst das Dreieck ABC und der zweite das Rechteck $BCDE$. Integriren wir zuerst nach t , so läuft diese Variable im ersten Teile von t_1 bis u und im zweiten von t_1 bis t_0 , während die Variable u im ersten Teile von t_1 bis t_0 und im zweiten von t_0 bis $+\infty$ läuft. Es ist demnach

$$V = 2 \sqrt{AB} \left[\int_{t_1}^{t_0} \left(\int_{t_0}^u \bar{W} \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial t} \right) dt \right) \cdot \frac{du}{U} + \int_{t_0}^{\infty} \left(\int_{t_1}^{t_0} \bar{W} \left(-\frac{\partial h}{\partial t} \right) dt \right) \cdot \frac{du}{U} \right]$$

Das erste innere Integral ist $\int_{h_0}^c \bar{W} dh$, wenn als untere Grenze

h_0 derjenige Wert von h genommen wird, für welchen \bar{W} verschwindet, der also durch die Gleichung

$$(z - h_0)^2 = u \left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} \right)$$

bestimmt wird. Man setze nun

$$P(u) = u \left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} \right)$$

so dass

$$u \bar{W}^2 = P(u) - (z-h)^2$$

wird. Das Integral

$$\int \bar{W} dh = \int \frac{\sqrt{P(u) - (z-h)^2}}{\sqrt{u}} dh$$

führt also zu Kreisbogen. Es ist

$P(t) = (z-h)^2$ und weil $z-h$ positiv, so ist

$$\sqrt{P(t)} = z-h, \quad \sqrt{P(t_1)} = z-c, \quad \sqrt{P(t_0)} = z$$

(Die Function $P(u)$ nimmt ferner mit wachsendem u zu). Wenn daher

$$\frac{P(t)}{P(u)} = \cos^2 \varphi, \quad \frac{\sqrt{P(t)}}{\sqrt{P(u)}} = \cos \varphi$$

folglich

$$\bar{W} \sqrt{u} = \sqrt{P(u)} \sin \varphi$$

gesetzt wird, so ist

$$dh = \sqrt{P(u)} \sin \varphi d\varphi$$

und

$$\begin{aligned} \int \bar{W} dh &= \frac{P(u)}{\sqrt{u}} \int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{P(u)}{2\sqrt{u}} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= \left[\frac{P(u)}{2\sqrt{u}} \varphi - \frac{z-h}{2} \bar{W} \right] \end{aligned}$$

Wenn $h = h_0$, so ist $\bar{W} = 0$, folglich auch $\varphi = 0$. Wenn $h = c$, so sei $\varphi = \theta_1$, und wenn $h = 0$, sei $\varphi = \theta_0$. Also ist

$$\int_{t_1}^u \bar{W} \left(-\frac{\partial h}{\partial t} \right) dt = \frac{P(u)}{2\sqrt{u}} \theta_1 - \frac{z-c}{2} W_1$$

ebenso

$$\int_{t_1}^{t_0} \bar{W} \left(-\frac{\partial h}{\partial t} \right) dt = \frac{P(u)}{2\sqrt{u}} (\theta_1 - \theta_0) - \frac{z-c}{2} W_1 + \frac{z}{2} W_0$$

Man hat also

$$\begin{aligned} V = \sqrt{AB} \left[\int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \theta_1 - (z-c) W_1 \right) \frac{du}{U} \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} (\theta_1 - \theta_0) - (z-c) W_1 + z W_0 \right) \cdot \frac{du}{U} \right] \end{aligned}$$

Man versuche, die auf die untere Grundfläche ($h = 0$) und auf die obere ($h = c$) bezüglichen Ausdrücke von einander zu trennen. Wenn u sehr gross wird, so nähert sich $\cos \varphi$ dem Werte $\frac{z-h}{\sqrt{u}}$, also φ dem Werte $\frac{\pi}{2} - \frac{z-h}{\sqrt{u}}$. Das Integral $\int \frac{P(u)}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{U}$ verhält sich für ein sehr grosses u wie $\int \frac{du}{u}$, kann also nicht bis zu $u = \infty$ geführt werden. Wegen dieser Divergenz der einzelnen Integrale muss die Zerlegung des Pot. V in Einzelintegrale mit Vorsicht geschehen. Das Integral

$$\int_i^{\infty} \frac{P(u)}{U\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) du$$

convergiert an der untern Grenze wie

$$\int_i^{\infty} \frac{du}{(u)^{\frac{3}{2}}} = -2 \left\{ \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

Man kann also schreiben:

$$V = \sqrt{AB} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{t_1}^{t_0} \frac{P(u)}{U\sqrt{u}} du + \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + zW_0 \right) \cdot \frac{du}{U} \\ - \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) + (z-c)W_1 \right) \cdot \frac{du}{U}$$

Das Integral des ersten Termes, unbestimmt gefasst, ist

$$\int \left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} \right) \cdot \frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)}} = 2L(u), \text{ wo}$$

$$L(u) = \log \left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u} \right) - \frac{x^2}{A-B} \sqrt{\frac{B+u}{A+u}} + \frac{y^2}{A-B} \sqrt{\frac{A+u}{B+u}}$$

Der erste Term ist also $\pi\sqrt{AB}(L(t_0) - L(t_1))$. Das Potential der elliptischen Walze ist nun für $z > c$ durch den Ueberschuss einer Function von z über dieselbe Function von $z - c$ (wenn x, y fest bleiben) dargestellt:

$$V = \sqrt{AB} \left[\pi L(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + zW_0 \right) \cdot \frac{du}{U} \right] \\ - \sqrt{AB} \left[\pi L(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) + zW_1 \right) \cdot \frac{du}{U} \right]$$

Man kann diesen, Ausdruck durch $F(z) - F(z - c)$ wieder geben, wenn man die Function $F(z)$, zunächst für ein pos. z , auf folgende Weise definiert.

Es sei

$$W^2 = 1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u}$$

identisch mit $\frac{(u-t)(u-t')(u-t'')}{(A+u)(B+u)u}$, wo $t > 0 > t' > -B > -t'' > -A$.

$$U^2 = (A+u)(B+u)u,$$

$$P(u) = u \left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} \right)$$

identisch mit $\frac{u(u-t)(u-t'')}{(A+u)(B+u)}$, $\sqrt{P} \cos \eta = W \sqrt{u}$,

$$\sqrt{P} \sin \eta = z$$

Wenn u pos. und grösser als t , so seien U, W, \sqrt{P} pos., $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. Endlich sei

$$\log(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}) - \frac{x^2}{A-B} \sqrt{\frac{B+u}{A+u}} + \frac{y^2}{A+B} \sqrt{\frac{A+u}{B+u}} = L(u)$$

dann ist

$$F(z) = \sqrt{AB} \left[\pi L(t) + \int_0^\infty \left(\frac{P(u)}{\sqrt{u}} \eta + z W \right) \cdot \frac{du}{U} \right]$$

(Die Function $F(z)$ ist nun diejenige Function, von welcher Herr Hattendorff in seinem Buche über Schwere, Elektrizität und Magnetismus bemerkt, dass sie sich durch ein einfaches Integral nicht darstellen lasse). Auf dem u Felde nehmen wir zwei Uebergangslinien an. Die erste verbinde den Verzweigungspunkt t mit dem Ostpunkte und die zweite die Verzweigungspunkte t'' und t' . Auf dem südlichen Rande der ersten Uebergangsl. seien $\sqrt{P(u)}, W, U, \eta$ pos. Um die Differentiation bedeutend zu erleichtern, verwandle ich die Function $F(z)$ in ein Schlingenintegral, das den Term $L(t)$ in sich aufgenommen hat. Weil

$$\int \frac{P(u)}{U\sqrt{u}} du = 2L(u), \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -\frac{1}{2} \frac{P'(u)z}{P(u)W\sqrt{u}}$$

so ist

$$\int \frac{P}{U\sqrt{u}} \eta du = \{2\eta L(u)\} + \int L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} du$$

In $u = t$ ist $\eta = \frac{\pi}{2}$, und in $u = \infty$ ist $\eta = \frac{\pi}{\sqrt{u}}$, $L(u) = \frac{1}{2} \log u$,
folglich

$$L(u) \cdot \eta = 0$$

Daher ist

$$\int_t^{\infty} \frac{P}{U\sqrt{u}} \eta du = -\pi L(t) + \int_t^{\infty} L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} du$$

folglich

$$F(z) = \sqrt{AB} \int_t^{\infty} \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U} \right) du$$

Ein ganzer Umlauf, der weder 0 noch s einschliesst, um t führt W ,
folglich auch den Integrand in sein entgegengesetztes über.

Man kann also aus dem Ostpunkte um t eine rechtläufige Schlinge
legen, die 0 und s draussen lässt und auf der Realitätslinie östlich
von t auf dem Südrande der Uebergangslinie W zugleich mit du
pos. annehmen. Für einen solchen Weg ist

$$F(z) = \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) dn$$

§ 17. Nähere Betrachtung der Function $F(z)$.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich A) mit der Function $F(z)$ selbst,
B) mit ihren ersten Abgeleiteten und C) mit ihrem Differential-
parameter zweiter Ordnung.

A) Die Function $F(z)$.

- a) Fortsetzung der Function $F(z)$ aus der Gegend, wo z pos.
ist, in die Gegend hinüber, wo z neg. ist, während x , y
ungeändert bleiben.

2) $s > 0$, d. h. der Punkt $(x, y, 0)$ liegt ausserhalb der Ellipse.

Die aus der Gleichung $W^2 = 0$ hervorgehende Differentialgl.

$$\left(\frac{x^2}{(A+t)^2} + \frac{y^2}{(B+t)^2} + \frac{z^2}{t^2} \right) dt - 2 \frac{z}{t} dz = 0 \quad (\text{gilt auch für } t', t'')$$

zeigt, dass, wenn z pos., dz neg. ist, dann dt neg. und dt' , dt'' pos.
sind. Wenn also z auf 0 sinkt, so sinkt t auf s herab und t' und
 t'' steigen resp. zu 0 und s'' auf. Der Schlingenweg, der im letzten
Ausdrucke für $F(z)$ die Realitätslinie zwischen s und t durchschnei-

den soll, kann zuletzt nicht mehr zwischen durch. Da nämlich $\frac{P'}{P}$ den Term $\frac{1}{u-s}$ enthält und

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}.$$

ist, so wird $\int L(u) \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$ unstetig wie $\text{Const} \times \int \frac{du}{(u-s)^{\frac{3}{2}}}$ d. h.

wie $\frac{\text{Const}}{\sqrt{(u-s)}}$ und ein Teil des Ausdruckes für $F(z)$ nimmt die Form

$0 \times \infty$ an. Um diesen Uebelstand schon, wenn z noch pos. ist, abzuwehren, verbinde man die rechtläufige Schlinge um t mit einem kleinen rechtläufigen Kreise um s zu einer vom Ostpunkte aus um s und t gelegten Schlinge, welche die Realitätsl. zwischen 0 und s durchschneidet, und addire das auf einen rückläufigen Kreis um s bezügliche Integral. Zunächst soll dieses letzte Integral berechnet werden. Weil W auf dem Wege nach dem Ostpunkte hin pos. ist, so ist es zwischen 0 und t , also auch in s , südlich lateral.

$$W^2(s) = 1 - \Sigma \frac{x^2}{A+s} = -\frac{z^2}{s}$$

also

$$W(s) = -i \frac{z}{\sqrt{s}};$$

in $u = s$ ist

$$\frac{zL(u)}{W\sqrt{u}} = -\frac{L(s)}{i}$$

Von $\frac{P'}{P}$ kommt nur der Term $\frac{1}{u-s}$ in Betracht. Also ist hier

$$\int L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} du = 2\pi L(s)$$

folglich

$$F(z) = \sqrt{AB} \pi L(s) + \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Weg eine rückläufige Schlinge aus dem Ostpunkte um s und t ; die Realitätsl. wird nur einmal zwischen 0 und s durchschnitten; östlich von t können Hinweg und Rückweg in die Realitätsl. fallen und W ist dann auf dem Rückwege pos.)

Dieser Ausdruck gestattet nun den Durchgang von z durch 0. Wenn x und y fest bleiben und nur z fortwährend abnimmt, so bleibt s , daher auch der Integrationsweg, unverändert. In jeder Stelle dieses Weges bleiben $\frac{P'}{P}$ und U und L unverändert; nur W variirt,

geht aber nie durch 0 und kehrt daher, wenn z in seinem entgegengesetzten Werte angelangt ist, auf denselben Wert zurück. Man hat also

$$F(-z) = \sqrt{AB} \pi L(s) - \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Weg wie oben)

folglich

$$F(z) + F(-z) = 2 \sqrt{AB} \pi L(s)$$

also

$$F(0) = \sqrt{AB} \pi L(s)$$

3) $s < 0$, d. h. der Punkt $(x, y, 0)$ liegt innerhalb der Ellipse.

Wenn z von einem pos. Werte auf null herabsinkt, so sinkt t auf 0 und t', t'' steigen resp. zu s, s'' auf. Der Integrationsweg der Gleichung

$$F(z) = \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um t allein) ist zuletzt nicht mehr im Stande zwischen 0 und t hindurchzugehen. Man erweitere ihn daher zu einer Schlinge, welche die Realitätsl. nur einmal, nämlich zwischen s und 0, durchschreitet und während der ganzen Zeit, wo z abnehmend durch 0 hindurch geht, fest bleibt, und addire zum neuen Integrale dasjenige längs eines kleinen rückläufigen Kreises um 0 allein. Dieses Integral um 0 soll berechnet werden. W ist zwischen 0 und t südlich lateral, kann also durch

$-i \frac{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}$ dargestellt werden. Von

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

kommt nur der Term $\frac{1}{u}$ in Betracht. $\frac{zL(u)}{W\sqrt{u}}$ wird

$$iL(0) \frac{z\sqrt{AB}}{\sqrt{t't''}} = iL(0)$$

oder einfacher

$$\frac{zL(u)}{W\sqrt{u}} = \frac{izL(u)}{\sqrt{z^2 + u \left(\frac{x^2}{A+u} + \frac{y^2}{B+u} - 1 \right)}}$$

wird $iL(0)$ und gibt mit $\frac{du}{u}$ multipl. und integriert $2\pi L(0)$;

gibt

$$z \frac{W}{U} = -iz \frac{\sqrt{(z^2 - P)}}{\sqrt{(A+u)(B+u)}}, \frac{1}{u}$$

$$\frac{-iz^2}{\sqrt{AB}} \int \frac{du}{u} = -\frac{2\pi z^2}{\sqrt{AB}}$$

Man bekommt so für ein pos. z :

$$F(z) = \pi \sqrt{AB} L(0) - \pi z^2 + \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Schlinge aus dem Ostpunkte um null und t , welche die Realitätslinie im Endlichen nur einmal, nämlich zwischen s und ∞ passiert. Wenn östlich von t ein Teil des Weges in die Realitätslinie verschoben wird, so sei W gleichartig mit du ; es ist dann gleichgültig, ob die Schlinge rechtläufig oder rückläufig sei). Weil der Weg festliegt, während z sich bewegt und in seinen entgegengesetzten Wert übergeht, und weil dann W zu seinem früheren Werte zurückkehrt, so geht jedes Element des Integrals in seinen entgegengesetzten Wert über, wenn z in seinem entgegengesetzten Werte angelangt ist.

$$F(-z) = \pi \sqrt{AB} L(0) - \pi z^2 - \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Weg wie bei $F(z)$)

folglich

$$F(z) + F(-z) = 2\pi (\sqrt{AB} L(0) - z^2)$$

also

$$F(0) = \pi \sqrt{AB} L(0)$$

- b) Die Function $F(z)$ ist im Raume nicht eindeutig; denn sie kehrt nach einem Umlaufe um die Grundcurve, der ihre Ebene das eine Mal innerhalb, das andere Mal ausserhalb schneidet, nicht mehr auf ihren früheren Wert zurück. Die Grundcurve ist eine Unstetigkeitscurve der Function.

Man wähle 4 Punkte (bei denen die zwei ersten Coord. pos. sind) $(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, -z_1)$ mit pos. z_1 und $(x_2, y_2, z_2), (x_2, y_2, -z_2)$ mit neg. z_2 . Es wird hinreichen, sie nur mit den dritten Coordinaten zu bezeichnen. Man führe die Function oberhalb der Ebene $z = 0$ vom ersten Punkte zum dritten, durch die Ebene hindurch zum vierten, unterhalb zum zweiten und endlich durch die Ebene hindurch zum ersten Punkte zurück. Wenn die Function $\bar{F}(z)$ geradezu durch das Integral $\frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$ (Schlinge um t , welche die Realitätslinie zwischen t und s schneidet) dargestellt werden kann, so soll sie ihr Zeichen $F(z)$ behalten. Wenn aber ihre

Fortsetzung nur mittelbar ausgedrückt werden kann, so soll sie mit $F(z)$ bezeichnet sein. Auf dem Wege vom Punkte (z_1) zum Punkte (z_2) bleibt derselbe Integralausdruck; die Function $F(z_1)$ geht in $F(z_2)$ über. Hat der bewegte Punkt von oben nach unten die Grundebene durchschnitten und ist in $(-z_2)$ angelangt, so ist

$$\bar{F}(-z_2) = 2\pi\sqrt{AB}L(0)_2 - 2\pi z_2^2 - F(z_2)$$

Auf dem Wege unterhalb der Ebene nach $(-z_1)$ geht dieser Ausdruck fort, ohne eine Aenderung zu bedürfen,

$$\bar{F}(-z_1) = 2\pi\sqrt{AB}L(0)_1 - 2\pi z_1^2 - F(z_1)$$

Auf dem letzten Wege von unten nach oben zu (z_1) zurück bleibt $L(0)$ während der ganzen senkrecht aufsteigenden Bewegung sich gleich, z_1^2 sinkt auf 0 und steigt zu z_1^2 auf; $F(z_1)$ endlich wird zu $2\pi\sqrt{AB}L(s_1) - F(z_1)$; also ist

$$F(z_1) = F(z_1) + 2\pi\sqrt{AB}(L(0) - L(s_1)) - 2\pi z_1^2$$

oder

$$\bar{F}(z) = F(z) + 2\pi\sqrt{AB}(L(0) - L(s)) - 2\pi z^2$$

wo s die grössere Wurzel der Gleichung $\frac{P(u)}{u} = 0$ ist, mag diese positiv oder negativ sein. Die Function $F(z)$ ist also im Raume mehrdeutig; denn man kann die Grundcurve mehrmals umlaufen, wodurch immer das Hinzutreten des Termes $2\pi\sqrt{AB}(L(0) - L(s)) - 2\pi z^2$ bedingt wird. In allen Punkten des Raumes, welche der Gleichung $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ genügen, ist

$$\bar{F}(z) = F(z) - 2\pi z^2$$

d. h. ein Umlauf von einem solchen Punkte aus in der angegebenen Richtung um die Grundcurve bewirkt das Hinzutreten des Termes $-2\pi z^2$ zu der ursprünglichen Function.

c) Ueber den Wert von $F(z)$ in sehr grosser Ferne.

1) s und t sind beide sehr gross.

($t - s$ endlich oder auch sehr gross.)

Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass $x^2 + y^2$ sehr gross ist und dass z endlich oder sehr gross sein kann. Man lege der Rechnung die Integralform

$$F(z) = \frac{1}{2}\sqrt{AB} \int \left(L(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Schlinge um t allein) zu Grunde, lasse einstweilen den Factor $\frac{1}{2}\sqrt{AB}$

weg und denke sich den Weg mit Ausnahme eines kleinen Kreises um ϵ östlich davon bis zum Ostpunkte in die Realitätslinie verlegt.

$$L(u) = -\frac{x^2}{A-B} \left(1 + \frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{A}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{A-B} \left(1 + \frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{B}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} + \log \left[\sqrt{u} \left(\left(1 + \frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{A}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{B}{u} - \frac{1}{8} \frac{B^2}{u^2} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{A}{u} + \frac{3}{8} \frac{A^2}{u^2} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{A-B}{u} + \frac{1}{8} (A-B) \cdot \frac{3A+B}{u^2} + \dots \end{aligned}$$

folglich

$$\left(1 + \frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{B}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{A-B}{u} - \frac{1}{8} (A-B) \cdot \frac{A+3B}{u^2} + \dots$$

Der algebraische Teil von $L(u)$ wird

$$\frac{y^2 - x^2}{A-B} + \frac{x^2 + y^2}{2u} - \frac{(3A+B)x^2 + (A+3B)y^2}{8u^2}$$

Im log. Teile ist

$$\left(1 + \frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 + \frac{A+B}{4u} + \dots\right)$$

(man braucht nicht höher zu steigen). Der log. Teil ist also

$$\frac{1}{2} \log u + \frac{A+B}{4u}$$

daher

$$L(u) = \frac{y^2 - x^2}{A-B} + \frac{1}{2} \log u + \frac{x^2 + y^2}{2u} + \frac{A+B}{4u} - \frac{(3A+B)x^2 + (A+3B)y^2}{8u^2} + \dots$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{u+A} - \frac{1}{u+B} = \frac{1}{u-s} + \left(\frac{1}{u-s''} - \frac{1}{u} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+A} \right) + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+B} \right) = \frac{1}{u-s} + \frac{s''}{u^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s''}{u}}$$

$$+ \frac{A}{u^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A}{u}} + \frac{B}{u^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B}{u}}$$

$$= \frac{1}{u-s} + \frac{s'' + A + B}{u^2} + \frac{s''^2 - A^2 - B^2}{u^3} + \dots$$

Weil u bei t beginnt, und beide s und t von gleicher Ordnung mit $x^2 + y^2$ sind, so sind im Anfange wenigstens u und s von derselben Ordnung; man kann daher $\frac{1}{u-s}$ nicht entwickeln.

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t')(u-t'')}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(u-t)}}$$

Man kann auch $\frac{1}{\sqrt{u-t}}$ nicht entwickeln, weil u bei t beginnt. Dagegen ist

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{A}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{B}{u}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{A}{u} - \frac{1}{8} \frac{A^2}{u^2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{B}{u} - \frac{1}{8} \frac{B^2}{u^2} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{A+B}{2u} - \frac{(A-B)^2}{8u^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t'}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t''}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t'}{u} + \frac{3}{8} \frac{t'^2}{u^2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t''}{u} + \frac{3}{8} \frac{t''^2}{u^2} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{t'+t''}{2u} + \frac{3t'^2 + 2t't'' + 3t''^2}{8u^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{W\sqrt{u}} &= \frac{1}{\sqrt{(u-t)}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (A+B+t'+t'') \cdot \frac{1}{u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} (3t'^2 + 2t't'' + 3t''^2 + 2(A+B)(t'+t'') - (A-B)^2) \cdot \frac{1}{u^2} \right\} \end{aligned}$$

Innerhalb der Klammer $\{ \}$ bezeichne man den Coefficienten von $\frac{1}{u^2}$ mit $\frac{1}{8} T$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{P'}{PW\sqrt{u}} &= \frac{1}{(u-s) \cdot \sqrt{(u-t)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t'+t''+A+B}{u(u-s)\sqrt{(u-t)}} + \frac{s''+A+B}{u^2 \cdot \sqrt{(u-t)}} \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{T}{u^2(u-s)\sqrt{(u-t)}} + \frac{1}{2} (s''(2s''+t'+t''+A+B) \\ &\quad + (A+B)(t'+t'') - (A-B)^2) \cdot \frac{1}{u^3 \sqrt{(u-t)}} + \dots \end{aligned}$$

Weil die vorkommenden Integranden westlich von t nur in s und null unstetig und zwar rational unstetig werden, so kann man den Weg westlich von null schliessen. Wenn die Schlinge um t rechteckig war, so ist $\sqrt{u-t}$ westlich von t in der Realitätslinie südlich lateral $= -i\sqrt{(t-u)}$ und die geschlossene Curve um 0 und s wird rechteckig. Sie zerfällt in einen kleinen Kreis um null allein und in einen um s allein, wenn beide Pole vorkommen. Die Verwand-

lung von t, s, t', s', t'', s'' in die Coordinaten geschieht so. Multipliziert man die Gleichung

$$1 = \frac{x^2}{A+t} + \frac{y^2}{B+t} + \frac{z^2}{t}$$

mit t und entwickelt dann, so erhält man

$$t = r^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{t} + \frac{A^2x^2 + B^2y^2}{t^2} + \dots$$

und wenn man bei der zweiten Ordnung stehen bleibt

$$t = r^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{r^2} + \dots$$

(Das folgende Glied beträgt $\left(\frac{A^2x^2 + B^2y^2}{r^4} + \frac{(Ax^2 + By^2)^2}{r^6}\right)$)

Setzt man hierin $z = 0$, so ergibt sich

$$s = x^2 + y^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{x^2 + y^2} + \dots$$

$$t - s = s^2 \left(1 + \frac{Ax^2 + By^2}{r^2(x^2 + y^2)} + \dots\right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{(t-s)}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{r^2(x^2 + y^2)} + \dots$$

Aus der Gleichung

$$(u+A)(u+B)u - x^2(u^2 + Bu) - y^2(u^2 + Au) - z^2(A+u)(B+u) = (u-t)(u-t')(u-t''),$$

ergab sich

$$t + t' + t'' + A + B = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

also

$$t' + t'' = \frac{Ax^2 + By^2}{r^2}$$

Wenn $z = 0$ wird, so wird (im vorliegenden Falle $s > 0$) $t' = 0$ $t'' = s''$, also

$$s'' + A + B = \frac{Ax^2 + By^2}{x^2 + y^2} + \dots$$

Mit Vernachlässigung der Ordnung $\frac{1}{r^6}$ ist daher

$$\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} = \frac{z}{(u-s)\sqrt{u-t}} + \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{r^2} \cdot \frac{z}{u(u-s)\sqrt{u-t}} + \frac{Ax^2 + By^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{z}{u^2\sqrt{(u-t)}} + \dots$$

Zugleich sind

$$\int \frac{z du}{(u-s)\sqrt{u-t}} = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{r^2(x^2 + y^2)} + \dots \right)$$

$$\int \frac{z du}{u(u-s)\sqrt{u-t}} = \frac{2\pi}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z}{r} \right) + \dots$$

$$\int \frac{z du}{u^2 \sqrt{u-t}} = 2\pi \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{r^3} + \dots$$

also

$$\int \frac{{}_z P'}{PW \sqrt{u}} du = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{r^2(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{r^2(x^2 + y^2)} \left(1 - \frac{z}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{z}{r^3} \right) + \dots$$

= 2\pi mit einem Fehler von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$

Dieses Integral ist mit $\frac{1}{2} \sqrt{AB} \frac{y^2 - x^2}{A - B}$ zu multipliciren. Bei den noch übrigen Termen des Ausdruckes für $F(z)$ kann man sich mit der niedrigsten Ordnung begnügen. Weil

$$\frac{W}{U} = \frac{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}{(A+u)(B+u)u}$$

für ein sehr grosses t zu $\frac{\sqrt{u-t}}{u^2} + \dots$ wird, so ist

$$\int z \frac{W}{U} du = +iz \int \sqrt{t-u} \cdot \frac{du}{u^2}$$

(Weg ein kleiner rechläufer Kreis um 0)

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \frac{z}{r} + \dots$$

Der Term $\frac{1}{2} \log(4u)$ in der Entwicklung von $L(u)$, der mit $\frac{{}_z P'}{PW \sqrt{u}} du$ zu multipliciren ist, verlangt noch die Kenntniss des In-

tegrals $\frac{1}{2} \int \frac{z \log(4u) \cdot du}{(u-s)\sqrt{(u-t)}}$ (Weg eine rechläufer Schlinge aus dem

Ostpunkte um den Pol t). Indem $\sqrt{u-t}$ westlich von t in der Realitätslinie den südlich lateralen Wert $-i\sqrt{t-u}$ bekommt, kann man den Weg in einen kleinen rückläufigen Kreis um s und eine aus dem Westpunkte um null geworfene rückläufige Schlinge verwandeln. Mit Ausnahme eines kleinen negativen Kreises um null schiebe man hinweg und herweg dieser Schlinge in die Realitätslinie. Das Integral wird

$$- \frac{1}{2i} \int \frac{z \log(4u)}{\sqrt{(t-u)} \cdot u-s} du \quad (\text{Weg ein kleiner rückläufiger Kreis um } s)$$

$$+ \frac{1}{2i} \int \frac{z \log(4u)}{(s-u)\sqrt{(t-u)}} du \quad (\text{Weg eine rückl. Schlinge a. d. Westp. um } 0).$$

Wir wollen das Integral mit J bezeichnen und setzen

$$J = I + II$$

Nun ist

$$I = \pi \log(4s) \cdot \frac{z}{\sqrt{(t-s)}} = \pi \log 4(x^2 + y^2) + \dots = \pi \log 4(r^2 - z^2) + \dots$$

In II verhält sich das Integral längs des kleinen Kreises vom Radius ρ wie

$$\int f \log(4u) du = \{u \log 4u - u\} = 2i\pi\rho$$

und verschwindet zugleich mit ρ . Auf dem geradlinigen Hinwege $-\rho \dots -N$ ist $\log(4u)$ um $2i\pi$ grösser als an den entsprechenden Stellen des Herweges. Ersetzt man u durch $-u$, so hat man also

$$II = \pi \int_{\rho}^N \frac{z du}{(s+u)\sqrt{(t+u)}}, \text{ wo man } \rho = 0 \text{ setzen darf.}$$

Es sei $t+u = (t-s)v^2$, $a^2 = \frac{t}{t-s}$, a pos.; dann geht v von a nach N . Das Integral wird

$$II = \frac{\pi z}{\sqrt{(t-s)}} \int_a^{\infty} \frac{2dv}{v^2-1} = \frac{\pi z}{\sqrt{(t-s)}} \log \frac{a+1}{a-1} = \pi \log \frac{r+z}{r-z} + \dots$$

und

$$I + II = 2\pi \log(2(r+z)) + \dots$$

Ferner ist

$$\frac{x^2+y^2}{2} \int \frac{z du}{u(u-s)\sqrt{(u-t)}} = \pi \left(1 - \frac{z}{r}\right) + \dots$$

was mit $\int z \frac{W}{U} du$ zusammen die Summe π bildet. Es ergibt sich

$$F(z) = \pi \sqrt{AB} \left[\frac{y^2-x^2}{A-B} + \log(2(r+z)) + \frac{1}{2} \right]$$

mit einem Fehler von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$. Diese Schätzung gilt nur, wenn z pos. ist; aber z darf endlich werden und bis auf 0 herab sinken; denn $\frac{z}{\sqrt{(t-s)}}$ behält auch in diesem Falle noch den Wert 1.

Für ein sehr grosses neg. z ist aber die Gleichung

$$F(-z) = 2\pi \sqrt{AB} L(s) - F(z)$$

anzuwenden. Wenn man die Ordnung $\frac{1}{r^2}$ vernachlässigt, so kann man im Terme $\log 4s$ des Ausdruckes für $L(s)$ geradezu s durch $x^2 + y^2$ ersetzen und hat dann

$$2L(s) = 2 \frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log(4(x^2 + y^2)) + 1$$

Da

$$\log \frac{4(x^2 + y^2)}{2(r + s)} = \log(2(r - s))$$

ist, so ergibt sich für ein sehr grosses negatives z die Gleichung

$$F(-z) = \pi \sqrt{AB} \left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log(2(r - s)) + \frac{1}{2} \right]$$

welche sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass z durch $-z$ ersetzt ist. Jene Gleichung gilt also sowol für neg. als für pos. Werte von z , so lange als s sehr gross ist.

Vorhin ergab sich

$$\frac{1}{2} \int \frac{z \log(4u) du}{(u - s) \sqrt{u - t}} = \frac{\pi z}{\sqrt{(t - s)}} \left(\log 4s + \log \frac{\sqrt{t} + \sqrt{(t - s)}}{\sqrt{t} - \sqrt{(t - s)}} \right)$$

da aber

$$\frac{s}{\sqrt{t} - \sqrt{(t - s)}} = \sqrt{t} + \sqrt{(t - s)}$$

so hat man

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{z \log(4u) du}{(u - s) \sqrt{(u - t)}} &= \frac{1}{2} \int \frac{z \log(4u) du}{(u - s) \sqrt{(u - t)}} \\ &= \frac{2\pi z}{\sqrt{(t - s)}} \log [2(\sqrt{t} + \sqrt{(t - s)})] \end{aligned}$$

eine streng richtige Gleichung, die nur $t > 0$, $t > s$ voraussetzt. Wenn $s = 0$ wird, so hat man

$$\frac{1}{2} \int \frac{z \log(4u) du}{u \cdot \sqrt{(u - t)}} = \frac{2\pi z}{\sqrt{t}} \log(4\sqrt{t})$$

Diese Gleichung, der man im folgenden bedarf, ist so auf leichtem Wege gefunden worden, als wenn man sie unmittelbar bewiesen hätte.

3) Nur t ist sehr gross; s ist endlich und kann positiv oder negativ sein.

z allein ist also sehr gross, aber x und y sind endlich. Der Punkt $(x, y, 0)$ kann also sowol innerhalb als ausserhalb der Grund-

ellipse liegen. Wenn man alles weglässt, was im Endergebniss nur zur Ordnung $\frac{1}{z^2}$ etwas beiträgt, so hat man

$$L(u) = \frac{1}{2} \log 4u + \frac{y^2 - x^2}{A - B}, \quad \frac{P'}{P} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{(u-t)}}, \quad \frac{W}{U} = \frac{\sqrt{(u-t)}}{u^2}$$

folglich

$$F(z) = \frac{1}{2} \sqrt{AB} \left[\frac{1}{2} \int \frac{z \log(4u)}{u \sqrt{(u-t)}} du + \frac{y^2 - x^2}{A - B} \int \frac{z du}{u \sqrt{(u-t)}} + \int \frac{z \sqrt{(u-t)}}{u^2} du \right] \\ = \pi \sqrt{AB} \left(\log 4z + \frac{y^2 - x^2}{A - B} + \frac{1}{2} \right)$$

Weil jetzt

$$r = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} + \dots, \quad r + z = 2z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{4z^2} + \dots \right)$$

folglich

$$\log(2(r+z)) = \log(4z) + \frac{x^2 + y^2}{4z^2} + \dots$$

sich von $\log(4z)$ nur um ein kleines von der Ordnung $\frac{1}{z^2}$ unterscheidet, so ist dieses Ergebniss schon in der Gleichung

$$F(z) = \pi \sqrt{AB} \left(\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 2(r+z) + \frac{1}{2} \right)$$

enthalten. Dennoch gilt die Gleichung nur für ein pos. sehr grosses z , was schon der Term $\log(4z)$ klar macht. Für ein neg. sehr grosses $-z$ muss man die Gleichung

$$F(-z) = 2\pi \sqrt{AB} L(s) - F(z)$$

wenn s pos., aber endlich (also gar nicht $-x^2 + y^2$), oder die Gl.

$$F(-z) = 2\pi \sqrt{AB} L(0) - 2\pi z^2 - F(z)$$

wenn s neg. (aber grösser als $-B$) ist, anwenden.

B) Die ersten Abgeleiteten der Function $F(z)$.

a) $z > 0$.

$$F(z) = \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int \left(L(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Weg eine rechteckige Schlinge aus dem Ostp. um den Pol t).

Es ist

$$\frac{\partial L(u)}{\partial x} = -\frac{2x}{A-B} \sqrt{\frac{B+u}{A+u}}, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{x}{A+u} \cdot \frac{1}{W}$$

und nach Seite 229

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{xz}{A+u} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW}$$

und weil

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}}$$

so ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \right) = -2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} = -2xz \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A+u} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW} \right)$$

folglich auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(L(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) &= -\frac{2x}{A-B} \sqrt{\frac{B+u}{A+u}} \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \\ &\quad - 2xz L(u) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A+u} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW} \right) - \frac{xz}{A+u} \cdot \frac{1}{WU} \end{aligned}$$

Weil

$$L'(u) = \frac{1}{2} \frac{P}{U\sqrt{u}}$$

so ist

$$-2xz L(u) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A+u} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW} \right) = 2xz \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{L(u)}{A+u} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW} \right) + \frac{xz}{A+u} \cdot \frac{1}{WU}$$

und weil $\frac{L(u)}{A+u} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW}$ im Ostpunkte wie $\frac{1}{2} \frac{\log u}{u^{\frac{3}{2}}}$ verschwindet, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial x} &= -\frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{xz} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du \quad (\text{Weg eine Schlinge}) \\ &= -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial y} &= \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{yz} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du \quad (\text{Weg eine Schlinge}) \\ &= \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du \end{aligned}$$

Weil

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{W\sqrt{u}}, \quad \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} = -2 \frac{\partial \eta}{\partial u}$$

so ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{W\sqrt{u}} \right)$$

und weil

$$L'(u) = \frac{1}{2} \frac{P}{U\sqrt{u}}$$

so ist auch

$$-2L(u) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{W\sqrt{u}} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{L(u)}{W\sqrt{u}} \right) + \frac{P}{WUu}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{zW}{U} \right) = \frac{W}{U} - \frac{z^2}{WUu}$$

somit auch

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(L(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{L(u)}{W\sqrt{u}} \right) + \frac{P-z^2}{WUu} + \frac{W}{U}$$

Weil $\frac{L(u)}{W\sqrt{u}}$ im Ostpunkte wie $\frac{1}{2} \frac{\log u}{\sqrt{u}}$ verschwindet und weil

$$P - z^2 = uW^2$$

ist, so erhält man schliesslich

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sqrt{AB} \int \frac{W}{U} du = 2\sqrt{AB} \int_i^\infty \frac{W}{U} du$$

Der Punkt $(x, y, 0)$ liege ausserhalb der Randellipse. Weil $t-s$ zugleich mit z verschwindet, so kann der Weg nicht mehr zwischen s und t durchgehen, noch auch in t beginnen, weil da das Integral unendlich wird wie $\frac{1}{\sqrt{u-s}}$. Bei $\frac{\partial F}{\partial z}$ dagegen kann man den geraden Weg gebrauchen. Um nun auch für die Abgeleiteten nach x und y Ausdrücke zu erhalten, welche von diesen Schwierigkeiten befreit sind, schalte ich in den Schlingenweg einen rechtläufigen Kreis um den Pol s ein und subtrahire den entsprechenden Wert vom neuen Integral. Von dem Factor $\frac{P'}{P}$ kommt nur der Term $\frac{1}{u-s}$ in Betracht, und W ist zwischen t und 0 , also auch in s , südlich lateral. Also

$$W^2 = 1 - \frac{x^2}{A+s} - \frac{y^2}{B+s} - \frac{z^2}{s} = -\frac{z^2}{s}, \quad W = -i \frac{z}{\sqrt{s}}$$

Folglich

$$\int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} \cdot du \quad (\text{Weg ein kl. rechtl. Kreis um } s)$$

$$= -\frac{2\pi}{z} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$$

somit auch

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B} \cdot x \frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{xz} \frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}} \cdot \frac{P' du}{PW\sqrt{u}}$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. allein um t und s)

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B} \cdot y \frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{yz} \frac{\sqrt{(A+u)}}{\sqrt{(B+u)}} \cdot \frac{P' du}{PW\sqrt{u}}$$

(Weg wie bei $\frac{\partial F(z)}{\partial x}$)

Weil nun diese Integrale ohne den Factor z auch für $z=0$ oder $t=s$ einen endlichen Wert behalten, so folgt aus diesen Ausdrücken, dass

$$\frac{\partial F(0)}{\partial x} = -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B} x \cdot \frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}}, \quad \frac{\partial F(0)}{\partial y} = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B} y \cdot \frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}}$$

$$\frac{\partial F(0)}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_0^\infty \frac{W}{U} du = 2\sqrt{AB} \int_0^\infty \frac{\sqrt{P}}{U\sqrt{u}} du$$

Die letzten Ausdrücke für $\frac{\partial F(0)}{\partial x}$ und $\frac{\partial F(0)}{\partial y}$ erhält man auch aus der Formel

$$F(0) = \pi\sqrt{AB} L(s)$$

Liegt der Punkt $(x, y, 0)$ innerhalb der Grundellipse, so ist s neg.; nähert sich nun z dem Werte 0, so sinkt t auch auf 0 herab, und der Integrationsweg kann in diesem Falle nicht mehr zwischen t und 0 hindurch. Man schalte deshalb in die Schlinge einen kleinen rechtl. Kreis um 0 ein und subtrahire von dem neuen Integrale den Wert längs dieses Kreises. W ist zwischen 0 und s südlich lateral, kann also durch $-i \frac{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}}{\sqrt{(A+u)(B+u)u}}$ dargestellt werden. Von

$$\frac{P}{P'} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

kommt nur der Term $\frac{1}{u}$ in Betracht. Man erhält

$$-\frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{xz} \frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du \quad (\text{Weg ein kleiner rechtl. Kreis}$$

$$\text{um null}) = \frac{2\pi Bx}{A-B}, \quad \text{folglich ist auch}$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\pi Bx}{A-B} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{xz} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um die Pole t und 0)

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\pi Ay}{A-B} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{yz} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$$

(Weg wie bei $\frac{\partial F}{\partial x}$)

Für $z = 0$ ergeben sich aus diesen Ausdrücken folgende Formeln:

$$\frac{\partial F(0)}{\partial x} = -\frac{2\pi Bx}{A-B}, \quad \frac{\partial F(0)}{\partial y} = \frac{2\pi Ay}{A-B}$$

auch ist

$$\frac{\partial F(0)}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_0^\infty \frac{\sqrt{P}}{U\sqrt{u}} du$$

Die Ausdrücke für $\frac{\partial F(0)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(0)}{\partial y}$ ergeben sich auch aus der Formel

$$F(0) = \pi\sqrt{AB} L(0)$$

b) $z < 0, z > 0$

$$F(-z) = 2\sqrt{AB} \pi L(z) - F(z)$$

Weil

$$L'(u) = \frac{1}{2} \frac{P}{U\sqrt{u}}, \quad P(s) = 0$$

also auch

$$L'(s) = 0$$

so folgt

$$\frac{\partial L(s)}{\partial x} = -\frac{2x}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$$

und demnach

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial x} = -\frac{4\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{xz} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um den Pol t)

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial y} = \frac{4\pi y \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int_{yz} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$$

(Weg wie bei $\frac{\partial F(-z)}{\partial x}$)

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial z} = -\sqrt{AB} \int \frac{W}{U} du = -2\sqrt{AB} \int_1^{\infty} \frac{W}{U} du$$

Wenn

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \overset{\cdot}{F}(z), \quad \frac{\partial F(-z)}{\partial(-z)} = \overset{\cdot}{F}(-z)$$

gesetzt wird, so folgt aus obigen Formeln, dass

$$\overset{\cdot}{F}(-z) = \overset{\cdot}{F}(z)$$

ist.

$$c) \quad z < 0, \quad s < 0.$$

Für diesen Fall ist

$$F(-z) = 2\pi(\sqrt{AB} L(0) - z^2) - F(z)$$

Weil

$$L(0) = \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) + \frac{Ay^2 - Bx^2}{(A-B)\sqrt{AB}}$$

so folgt

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial z} = -\frac{4\pi x B}{A-B} + \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int z^2 \frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$$

(Weg wie oben)

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial y} = \frac{4\pi y A}{A-B} - \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int y^2 \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial F(-z)}{\partial z} = -4\pi z - \sqrt{AB} \int \frac{W}{U} du$$

$$= -4\pi z - \sqrt{AB} \int_1^{\infty} \frac{W}{U} du$$

also ist

$$\overset{\cdot}{F}(z) - \overset{\cdot}{F}(-z) = -4\pi z$$

d) Die Grundcurve ist eine Unstetigkeitslinie für die ersten Abgeleiteten der Function $F(z)$. Denn sie kehren nach einem Umlaufe um dieselbe nicht mehr auf ihren früheren Wert zurück.

Man wähle wie früher 4 Punkte (x_1, y_1, z_1) , $(x_1, y_1, -z_1)$ mit pos. s_1 , und (x_2, y_2, z_2) , $(x_2, y_2, -z_2)$ mit neg. s_2 und führe die Functionen vom ersten zum dritten, durch die Ebene hindurch zum vierten, dann zum zweiten und zurück zum ersten Punkte. Wenn die Functionen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ durch die Integrale

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{xz}^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du \\
 & \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{yz}^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du, \quad 2\sqrt{AB} \int_{i}^{\infty} \frac{W}{U} du
 \end{aligned}$$

dargestellt werden können, so sollen sie mit $F_x(z)$, $F_y(z)$, $F_s(z)$ bezeichnet werden. Wenn aber ihre Fortsetzungen nur mittelbar ausgedrückt werden können, so sollen sie mit einem Striche versehen werden. Auf dem Wege vom Punkte z_1 bis zum Punkte z_2 gehen die Functionen $F_x(z_1)$, $F_y(z_1)$, $F_s(z_1)$ in $F_x(z_2)$, $F_y(z_2)$, $F_s(z_2)$ über. Hat der bewegte Punkt die Grundebene passirt und ist in $(-z_2)$ angelangt, so ist

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_x(-z_2) &= -\frac{4\pi x_2 B}{A-B} - F_x(z_2), \quad \bar{F}_y(-z_2) = \frac{4\pi y_2 A}{A-B} - F_y(z_2) \\
 \bar{F}_s(-z_2) &= -4\pi z_2 - F_s(z_2)
 \end{aligned}$$

Auf dem Wege zum Punkte $(-z_1)$ erfahren diese Ausdrücke keine Aenderung in ihrer Form. Für den Punkt $(-z_1)$ erhält man

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_x(-z_1) &= -\frac{4\pi x_1 B}{A-B} - F_x(+z_1), \quad \bar{F}_y(-z_1) = \frac{4\pi y_1 A}{A-B} - F_y(+z_1) \\
 \bar{F}_s(-z_1) &= -4\pi z_1 - F_s(+z_1)
 \end{aligned}$$

Kehrt nun schliesslich der Bezugspunkt durch die Ebene $z = 0$ zum Ausgangspunkte zurück, so gehen die Functionen $F_x(z_1)$, $F_y(z_1)$, $F_s(z_1)$ resp. in

$$4\pi x_1 \sqrt{AB} \frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}} - F_x(z_1), \quad \frac{4\pi y_1 \cdot \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}} - F_y(z_1),$$

$-F_s(z_1)$ über, so dass schliesslich die Abgeleiteten bei ihrer Ankunft im Ausgangspunkte folgende Werte annehmen:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_x(z_1) &= F_x(z_1) + \frac{4\pi x_1 \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}} - \frac{4\pi x_1 B}{A-B} \\
 \bar{F}_y(z_1) &= F_y(z_1) - \frac{4\pi y_1 \cdot \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{(A+s)}}{\sqrt{(B+s)}} + \frac{4\pi y_1 A}{A-B} \\
 \bar{F}_s(z_1) &= F_s(z_1) - 4\pi z_1
 \end{aligned}$$

Diese letzten Werte ergeben sich auch aus der Formel:

$$\bar{F}(z_1) = F(z_1) + 2\pi \sqrt{AB} (L(0) - L(s_1)) - 2\pi z_1^2$$

e) Darstellung der ersten Abgeleiteten der Function $F(x)$ durch elliptische Integrale.

Wenn

$$W^2 = 1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u}, \quad U^2 = (A+u)(B+u)u$$

also

$$R^2 = (u-t)(u-t')(u-t''), \quad t > 0 > t' > -B > t'' > -A$$

$$W = \frac{R}{U}$$

wenn ferner

$$P = uW^2 + z^2 = \frac{u(u-s)(u-s'')}{(A+u)(B+u)}, \quad s > -B > -s'' > -A$$

also

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

dann sind für ein pos. z die Abgeleiteten

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot x \int_t^\infty \frac{\sqrt{(B+u)}}{\sqrt{(A+u)}} \cdot \frac{zP' du}{PW\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot y \int_t^\infty \frac{\sqrt{(A+u)}}{\sqrt{(B+u)}} \cdot \frac{zP' du}{PW\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_t^\infty \frac{W}{U} du$$

Aus den zwei Gleichungen

$$\frac{x^2}{A+s} + \frac{y^2}{B+s} = 1, \quad \frac{x^2}{A+t} + \frac{y^2}{B+t} + \frac{z^2}{t} = 1$$

ergibt sich durch Subtraction die Gleichung

$$(t-s) \left(\frac{x^2}{(A+s)(A+t)} + \frac{y^2}{(B+s)(B+t)} \right) = \frac{z^2}{t}$$

ebenso hat man

$$(s-t') \left(\frac{x^2}{(A+s)(A+t')} + \frac{y^2}{(B+s)(B+t')} \right) = \frac{z^2}{(-t')}$$

$$(s''-t'') \left(\frac{x^2}{(A+s'')(A+t'')} + \frac{y^2}{(B+s'')(B+t'')} \right) = \frac{z^2}{(-t'')}$$

Weil nun x^2, y^2, z^2 überall durch pos. Werte dividirt sind, so sind auch $t-s, s-t', s''-t''$ pos. Man hat daher

$$t > s > t' > -B > s'' > t'' > -A$$

$(B+u) \cdot \frac{P'}{P}$ ist rational, $\frac{z du}{R}$ ist das Differential eines elliptischen Integrals erster Art. Man bringe zunächst dieses auf die Normalform. Weil

$$\frac{u-t'}{t-t'} = 1 + \frac{u-t}{t-t'}, \quad \frac{u-t''}{t-t''} = 1 + \frac{t-t'}{t-t''} \cdot \frac{u-t}{t-t'}$$

und weil $\frac{u-t}{t-t'}$ von 0 an alle pos. Werte durchläuft, so kann man unter Annahme eines nördlich lateralen Argumentes v , das von 0 nach L geht, als algebraischen Modul $k = \frac{\sqrt{(t-t')}}{\sqrt{(t-t'')}}$ setzen. (Diese

Wahl des Moduls gewährt nämlich in der Nachbarschaft der Grundellipse, wo die grössten Schwierigkeiten auftreten, den Vorteil, dass er sehr klein ist.)

$$\frac{\sqrt{(u-t)}}{\sqrt{(t-t'')}} = \frac{Sv}{i}, \quad \sqrt{(u-t')} = \sqrt{(t-t')} Cv, \quad \sqrt{(u-t'')} = \sqrt{(t-t'')} Dv,$$

$$R = \frac{1}{i} (t-t') \sqrt{(t-t'')} Sv Cv Dv$$

und weil

$$u = t - (t-t') S^2 v$$

also

$$du = -2(t-t') Sv Cv Dv dv$$

so ist

$$\frac{z du}{R} = \frac{2z}{\sqrt{(t-t'')}} \cdot \frac{dv}{i}$$

also

$$\int_0^\infty \frac{z du}{R} = \frac{2z}{\sqrt{(t-t'')}} K$$

wenn $L = iK$.

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} xz \int_0^\infty \left(1 + \frac{R+s}{u-s} + \frac{B}{u} + \frac{B+s''}{u-s''} + \frac{A-B}{A+u}\right) \cdot \frac{du}{R}$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} yz \int_0^\infty \left(1 + \frac{A+s}{u-s} + \frac{A}{u} + \frac{A+s''}{u-s''} - \frac{A-B}{B+u}\right) \cdot \frac{du}{R}$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{E+u} - \frac{z^2}{u}\right) \cdot \frac{du}{R}$$

Man hat also nur fünf vollständige elliptische Integrale dritter Art zu berechnen.

Berechnung von $\int_t^{\infty} \frac{z}{u-s} \cdot \frac{du}{R}$.

Weil $u-s = t-s - (t-t')S^2v$ und $t-s < t-t' < t-t''$, so ist es passend $u-s = (t-t')(S^2\alpha - S^2v)$ zu setzen; dann sind

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{(t-t')}}, \quad C\alpha = \frac{\sqrt{(s-t')}}{\sqrt{(t-t')}}, \quad D\alpha = \frac{\sqrt{(s-t'')}}{\sqrt{(t-t'')}}$$

alle drei pos. und $0 < \alpha < K$.

$$\text{Integral} = \frac{2z}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}} \cdot \frac{1}{i} \int_0^L \frac{dv}{(S^2\alpha - S^2v)}$$

Auf dieses Integral wende man die bekannte Formel

$$\int_0^L \frac{S\alpha C\alpha D\alpha}{S^2\alpha - S^2x} \cdot \frac{dx}{i} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\alpha}{2K} - K' Z\alpha$$

an.

$$S\alpha C\alpha D\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)(s-t')(s-t'')}}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}}$$

und weil

$$\frac{(s-t)(s-t')(s-t'')}{(A+s)(B+s)s} = 1 - \frac{x^2}{A+s} - \frac{y^2}{B+s} - \frac{z^2}{s} = -\frac{z^2}{s}$$

so ist

$$\sqrt{(t-s)(s-t')(s-t'')} = z\sqrt{(A+s)(B+s)}$$

somit

$$S\alpha C\alpha D\alpha = \frac{z\sqrt{(A+s)(B+s)}}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}}$$

also

$$\text{Integral} = \frac{2}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \int_0^L \frac{S\alpha C\alpha D\alpha}{S^2\alpha - S^2v} \cdot \frac{dv}{i}$$

oder also auch

$$\text{Integral} = \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \left(\pi - \frac{\pi\alpha}{K} - 2K' Z\alpha \right)$$

Wenn $\alpha' = K - \alpha$, also $S\alpha' = \frac{\sqrt{(t-t'')(s-t')}}{\sqrt{(t-t')(s-t'')}}$, so ist

$$\text{Integral} = \left| \frac{2K'z}{(s-t'')\sqrt{(t-t'')}} + \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \left(\frac{\pi\alpha'}{K} + 2K' Z\alpha' \right) \right|$$

Berechnung von $\int \frac{z}{u} \cdot \frac{du}{R}$

Man braucht nur in der vorigen Rechnung 0 an die Stelle von s treten zu lassen und setze daher

$$S\beta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}} \quad C\beta = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{(t-t')}} \quad D\beta = \frac{\sqrt{-t'}}{\sqrt{(t-t'')}} \\ 0 < \beta < K$$

$$S\beta C\beta D\beta = \frac{\sqrt{t t' t''}}{(t-t') \sqrt{(t-t'')}} = \frac{z \sqrt{AB}}{(t-t') \sqrt{(t-t'')}}$$

Es ist daher

$$\text{Integral} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\pi - \frac{\pi\beta}{K} - 2K' Z\beta \right) \\ = - \frac{2K' z}{(-t') \sqrt{(t-t'')}} + \frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\frac{\pi\beta'}{K} + 2K' Z\beta' \right)$$

wenn

$$\beta' = K - \beta$$

folglich

$$S\beta' = \frac{\sqrt{(-t')(t-t'')}}{\sqrt{(-t'')(t-t')}}$$

Berechnung von $\int \frac{z}{u-s''} \cdot \frac{du}{R}$

Weil $u-s'' = t-s'' - (t-t')S^2v$ und $t-t' < t-s'' < t-t''$, also zwar $\frac{t-t'}{t-s''} < 1$, aber $\frac{1}{k^2} \cdot \frac{t-t'}{t-s''} = \frac{t-t''}{t-s''} > 1$, so bekommt der Parameter a , wenn man $u-s'' = (t-s'')(1-k^2 S^2 a S^2 v)$ setzt, die Form $K + iy$, wo $0 < \gamma < K'$ und

$$S_a = \frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(t-s'')}} \quad C_a = -i \frac{\sqrt{(s''-t'')}}{\sqrt{(t-s'')}} \quad D_a = \frac{\sqrt{(t'-s'')}}{\sqrt{(t-s'')}}$$

also

$$S_{iy} = i \frac{\sqrt{(s''-t'')}}{\sqrt{(t'-s'')}} \quad C_{iy} = \frac{\sqrt{(t'-t'')}}{\sqrt{(t'-s'')}} \quad D_{iy} = \frac{\sqrt{(t'-t'')(t-s'')}}{\sqrt{(t-t')(t'-s'')}}$$

$$\text{Integral} = \frac{2z}{(t-s'') \sqrt{(t-t'')}} \int_0^L \frac{D^2_{iy}}{D^2_{iy} - k^2 C^2_{iy} S^2 v} \cdot \frac{dv}{i}$$

Auf dieses Integral wenden wir die Formel

$$\int_0^L \frac{Siy \cdot Diy}{iCiy} \cdot \frac{t^2}{D^2iy - k^2 C^2iy S^2v} \cdot \frac{dv}{i} = K' \left(\frac{Siy \cdot Diy}{iCiy} - \frac{Ziy}{i} \right) - \frac{\pi\gamma}{2K}$$

an. Weil

$$\frac{iCiy \cdot Diy}{t^2 Siy} = \frac{t - t''}{t' - t''} \cdot \frac{(t' - t'') \sqrt{(t - s'')}}{\sqrt{(t - t'')(t' - s'')(s'' - t'')}} = \frac{\sqrt{(t - t'')(t - s'')}}{\sqrt{(t' - s'')(s'' - t'')}}$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{2z}{(t - s'') \sqrt{(t - t'')}} \cdot \frac{iCiy \cdot Diy}{t^2 Siy} &= \frac{2z}{\sqrt{(t - s'')(t' - s'')(s'' - t'')}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(A + s'')(-B - s'')}} \end{aligned}$$

also

$$\text{Integral} = \frac{2K'z}{(t - s'') \sqrt{(t - t'')}} - \frac{1}{\sqrt{(A + s'')(-B - s'')}} \cdot \left(\frac{\pi\gamma}{K} + 2K' \frac{Ziy}{i} \right)$$

$$\text{Berechnung von } \int_0^{\infty} \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R}$$

Weil

$$A + u = A + t - (t - t') S^2v = A + t - (t - t'') k^2 S^2v$$

und $A + t > t - t''$, so kann man

$$A + u = (A + t) (1 - k^2 S^2\delta S^2v)$$

setzen, wo

$$S\delta = \frac{\sqrt{t - t''}}{\sqrt{A + t}}, \quad C\delta = \frac{\sqrt{A + t''}}{\sqrt{A + t}}, \quad D\delta = \frac{\sqrt{A + t'}}{\sqrt{A + t}}, \quad 0 < \delta < K$$

Wir wenden nun auf unser Integral die Formel

$$\int_0^L \frac{Ca Da}{Sa} \cdot \frac{dx}{1 - k^2 S^2a S^2x} = L \frac{Ca Da}{Sa} - \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi a}{2K} + LZa$$

an. Weil

$$\frac{S\delta}{C\delta D\delta} = \frac{\sqrt{(t - t'')(A + t)}}{\sqrt{(A + t')(A + t'')}} = \frac{(A + t) \cdot \sqrt{(t - t'')}}{x \sqrt{A(A - B)}}$$

so ist

$$\text{Integral} = \frac{2K'}{(A+t)\sqrt{(t-t'')}} + \frac{1}{x\sqrt{A(A-B)}} \left(-\pi + \frac{\pi\delta}{K} + 2K'Z\delta \right)$$

Wenn $\delta' = k - \delta$, also

$$S\delta' = \frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(A+t)}}$$

so ist

$$Z\delta = k^2 S\delta S\delta' - Z\delta' = \frac{(t-t')\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(t-t'')(A+t)(A+t')}} - Z\delta'$$

also

$$\text{Integral} = \frac{2K'}{(A+t')\sqrt{(t-t'')}} - \frac{\frac{\pi\delta'}{K} + 2K'Z\delta'}{x\sqrt{A(A-B)}}$$

Berechnung von $\int_t^\infty \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{B}$

$$B+u = B+t - (t-t')S^2v = B+t - (t-t'') \cdot k^2 S^2v$$

Weil $t-t'' > B+t > t-t'$, so liegt, wenn

$$B+u = (B+t)(1 - k^2 S^2 a S^2 v)$$

der Parameter a zwischen K und $K+L$. Nun ist

$$Sa = \frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(B+t)}}, \quad Ca = -i \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t}}, \quad Da = \frac{\sqrt{B+t'}}{\sqrt{B+t}}$$

Setzt man $a = K+i\varepsilon$, wo $0 < \varepsilon < K'$, so ist

$$Si\varepsilon = i \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{B+t}}, \quad Ci\varepsilon = \frac{\sqrt{(t-t'')}}{\sqrt{(B+t)}}, \quad Di\varepsilon = \frac{\sqrt{(t-t'')(B+t)}}{\sqrt{(t-t'')(B+t)}}$$

$$B+u = \frac{(t-t'')(B+t)}{t-t''} (D^2i\varepsilon - k^2 C^2i\varepsilon S^2v) \quad \text{und}$$

$$\text{Integral} = \frac{2}{i} \cdot \frac{t-t''}{(B+t)(t-t'')} \int_0^L \frac{dv}{D^2i\varepsilon - k^2 C^2i\varepsilon S^2v}$$

Weil

$$i^2 \frac{Si\varepsilon \cdot Di\varepsilon}{i Ci\varepsilon} = \frac{(t-t'') \cdot \sqrt{(B+t)(-B-t'')}}{\sqrt{(B+t)} \cdot (t-t'')^{\frac{3}{2}}}$$

so ist auch

$$\text{Integral} = \frac{2}{\sqrt{(B+t)(B+t')(-B-t'')}} \int_0^L \frac{Si\varepsilon \cdot Di\varepsilon}{i Ci\varepsilon} \cdot \frac{1}{D^2 i\varepsilon - k^2 S^2 i\varepsilon S^2 v} \cdot \frac{dv}{i}$$

$$= \frac{2K'}{(B+t')\sqrt{(t-t')}} - \frac{\frac{\pi}{K}\varepsilon + 2\frac{Zi\varepsilon}{i} \cdot K'}{y\sqrt{B(A-B)}}$$

Es ist also

$$\int_i \frac{z du}{R} = \frac{2z}{\sqrt{(t-t')}} \cdot K'$$

$$\int_i \frac{z}{u-s} \cdot \frac{du}{R} = \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{K} \alpha - 2K' Z\alpha \right)$$

$$\int_i \frac{z}{u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{K} \beta - 2K' Z\beta \right)$$

$$\int_i \frac{z}{u-s''} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2K'z}{(t'-s'') \cdot \sqrt{(t-t')}} - \frac{1}{\sqrt{(A+s'')(-B-s'')}} \times$$

$$\left(\frac{\pi}{K} \gamma + 2K' \frac{Zi\gamma}{i} \right)$$

$$\int_i \frac{1}{A+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2K'}{(A+t')\sqrt{(t-t')}} - \frac{\pi \frac{\delta'}{K} + 2K' Z\delta'}{x\sqrt{A(A-B)}}$$

$$\int_i \frac{1}{B+u} \cdot \frac{du}{R} = \frac{2K'}{(B+t')\sqrt{(t-t')}} - \frac{1}{y\sqrt{(A-B)B}} \left(\frac{\pi\varepsilon}{K} + 2K' \frac{Zi\varepsilon}{i} \right)$$

wenn

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{(t-t')}} \quad S\beta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}} \quad Si\gamma = i \frac{\sqrt{(s''-t')}}{\sqrt{(t'-t')}}$$

$$S\delta' = \frac{\sqrt{(A+t')}}{\sqrt{(A+t')}} \quad Si\varepsilon = i \frac{\sqrt{-B-t''}}{\sqrt{(B+t')}}$$

gesetzt wird. Aus diesen Formeln folgt

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{ABx}}{A-B} \left[\pi \left(\frac{\sqrt{(B+s)}}{\sqrt{(A+s)}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \right) + \frac{\pi}{K} \left(-\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \alpha - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \beta \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}} \cdot \gamma - \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{z}{x} \cdot \delta' \right] + \frac{2K'z}{\sqrt{(t-t')}} \left(\frac{B+t'}{t'-s''} + \frac{A-B}{A+t'} \right)$$

$$+2K' \left(-\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} Z\alpha - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} Z\beta + \frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}} \frac{Zi\gamma}{i} - \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{z}{x} \cdot Z\delta' \right)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial y} = & \frac{2\sqrt{AB}y}{A-B} \left[\pi \left(\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \right) + \frac{\pi}{K} \left(-\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} \alpha - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \beta \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{A+s''}}{\sqrt{-B-s''}} \gamma + \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{z\varepsilon}{y} \right) + \frac{2K'z}{\sqrt{(t-t')}} \left(\frac{A+t'}{t'-s''} - \frac{A-B}{B+t'} \right) \right. \\ & \left. + 2K' \left(-\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} Z\alpha - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} Z\beta - \frac{\sqrt{A+s''}}{\sqrt{-B-s''}} \cdot \frac{Zi\gamma}{i} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{Zi\varepsilon}{i} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial z} = & 2\sqrt{AB} \left[\frac{2K'}{\sqrt{(t-t')}} \left(1 - \frac{x^2}{A+t'} - \frac{y^2}{B+t'} \right) - \frac{\pi z}{\sqrt{AB}} \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{K} \left(\frac{z}{\sqrt{AB}} \beta + \frac{x}{\sqrt{A(A-B)}} \delta' + \frac{y}{\sqrt{B(A-B)}} \cdot \varepsilon \right) \right. \\ & \left. + 2K' \left(\frac{z}{\sqrt{AB}} Z\beta + \frac{x}{\sqrt{A(A-B)}} Z\delta' + \frac{y}{\sqrt{B(A-B)}} \cdot \frac{Zi\varepsilon}{i} \right) \right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial z} = & \frac{2\pi}{K} \left(\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}} x\delta' + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \cdot y\varepsilon + z\beta \right) \\ & - 2\pi z + 4K' \left(\frac{\sqrt{AB} \cdot z^2}{t' \cdot \sqrt{(t-t')}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}} \cdot xZ\delta' \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \cdot y \frac{Zi\varepsilon}{i} + zZ\beta \right) \end{aligned}$$

f) Angenäherte Ausdrücke für $\frac{\partial F(z)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(z)}{\partial y}$, $\frac{\partial F(z)}{\partial z}$ in der Nachbarschaft der Focalellipse.

Man wähle in der Focalellipse einen Punkt (x_0, y_0, z_0) , wo x_0, y_0 pos. sein mögen. Ausser der Gleichung

$$\frac{x_0^2}{A} + \frac{y_0^2}{B} = 1$$

genüge er noch der Gleichung

$$\frac{x_0^2}{A+\sigma} + \frac{y_0^2}{B+\sigma} = 1$$

wo

$$x_0 = \frac{\sqrt{A(A+\sigma)}}{\sqrt{A-B}}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{B(-B-\sigma)}}{\sqrt{A-B}}$$

und die Abstände der an die Ellipse und Hyperbel gezogenen Tangenten vom Mittelpunkte $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}$, $\frac{\sqrt{(A+\sigma)(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma}}$ sind. Bedeutet η den Winkel, den die nach aussen gerichtete Normale der Ellipse im Punkte (x_0, y_0) mit der x Axe bildet, so sind

$$\cos \eta = \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}, \quad \sin \eta = \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}$$

Der benachbarte Punkt (x, y, z) befinde sich in der durch $(x_0, y_0, 0)$ senkrecht zur Tangente der Ellipse gelegten Ebene und sei um r von diesem Punkte entfernt. Der kurze Strahl r bilde mit der genannten Normale den Winkel θ . Dann ist

$$x = x_0 + r \cos \eta \cos \theta, \quad y = y_0 + r \sin \eta \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

Die Abstände des Mittelpunktes von den Tangenten der Ellipse und Hyperbel im Punkte (x_0, y_0) seien mit p und p'' bezeichnet, so dass

$$p = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}}, \quad p'' = \frac{\sqrt{(A+\sigma)(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma}}$$

Ferner sei

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{(-\sigma)}$$

Ich stelle einige bekannte Gleichungen und Ergebnisse von Nebenrechnungen voran, damit die Hauptrechnung weniger unterbrochen werde.

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{B^2} = \frac{1}{p^2}, \quad \frac{x_0^2}{(A+\sigma)^2} + \frac{y_0^2}{(B+\sigma)^2} = \frac{1}{p''^2} = \frac{-\sigma}{(A+\sigma)(-B-\sigma)}$$

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{B^2} = \frac{1}{p^2 C}, \quad \frac{x_0 \cos \eta}{A} + \frac{y_0 \sin \eta}{B} = \frac{1}{p}, \quad \frac{x_0 \cos \eta}{A+\sigma} + \frac{y_0 \sin \eta}{B+\sigma} = 0$$

$$\frac{x_0 \cos \eta}{A^2} + \frac{y_0 \sin \eta}{B^2} = \frac{1}{pC}, \quad \frac{\cos^2 \eta}{A} + \frac{\sin^2 \eta}{B} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{\cos^2 \eta}{A+\sigma} + \frac{\sin^2 \eta}{B+\sigma} = -\frac{1}{(-\sigma)}$$

Die Differenz $\sigma - s''$ soll durch Subtraction der zwei Gleichungen

$$\frac{x^2}{A+s''} + \frac{y^2}{B+s''} = 1, \quad \frac{x_0^2}{A+\sigma} + \frac{y_0^2}{B+\sigma} = 1$$

berechnet werden. Man hat

$$\left(\frac{x^2}{A+s''} + \frac{y^2}{B+s''} - \frac{x^2}{A+\sigma} - \frac{y^2}{B+\sigma} \right) + \left(\frac{x^2-x_0^2}{A+\sigma} + \frac{y^2-y_0^2}{B+\sigma} \right) = 0$$

oder

$$(\sigma - s'') \cdot \left(\frac{x^2}{(A+\sigma)(A+s'')} + \frac{y^2}{(B+\sigma)(B+s'')} - \frac{r^2 \cos^2 \theta}{(-\sigma)} \right)$$

Also ist $\sigma - s''$ klein von der Ordnung r^2 und wenn man sich mit dieser Ordnung begnügt, kann man den Factor $\sigma - s''$ durch

$$\frac{x_0^2}{(A+\sigma)^2} + \frac{y_0^2}{(B+\sigma)^2} = \frac{-\sigma}{(A+\sigma)(-B-\sigma)}$$

ersetzen und bekommt

$$\sigma - s'' = \frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2} r^2 \cos^2 \theta + \dots$$

Die Differenz $s'' - t''$ soll durch Subtraction der zwei Gleichungen

$$\frac{x^2}{A+t''} + \frac{y^2}{B+t''} + \frac{z^2}{t''} = 1, \quad \frac{x^2}{A+s''} + \frac{y^2}{B+s''} = 1$$

berechnet werden. Man findet:

$$(s'' - t'') \cdot \left(\frac{x^2}{(A+s'')(A+t'')} + \frac{y^2}{(B+s'')(B+t'')} \right) = \frac{z^2}{(-t'')}$$

Diese Gleichung zeigt, dass $s'' - t''$ von der Ordnung r^2 ist. Begnügt man sich mit dieser Ordnung, so kann der Factor von $s'' - t''$ durch

$\frac{-\sigma}{(A+\sigma)(-B-\sigma)}$ und die rechte Seite durch $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{(-\sigma)}$ ersetzt werden. Es ergibt sich

$$s'' - t'' = \frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2} r^2 \sin^2 \theta$$

also

$$\sigma - t'' = \frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2} r^2$$

Die Grösse s wird durch Subtraction der zwei Gleichungen

$$\frac{x_0^2}{A} + \frac{y_0^2}{B} = 1, \quad \frac{x^2}{A+s} + \frac{y^2}{B+s} = 1$$

gefunden. Es ist

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{x^2}{A+s} - \frac{y^2}{B+s} = \frac{x^2 - x_0^2}{A} + \frac{y^2 - y_0^2}{B}$$

$$s \cdot \left(\frac{x^2}{A(A+s)} + \frac{y^2}{B(B+s)} \right) = 2r \cos \theta \left(\frac{x_0 \cos \eta}{A} + \frac{y_0 \sin \eta}{B} \right)$$

$$+ r^2 \cos^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \eta}{A} + \frac{\sin^2 \eta}{B} \right) = \frac{2r \cos \theta}{p} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{C}$$

Man muss nun auch den Factor von s auf zwei Ordnungen entwickeln. Es ist

$$\frac{x_0^2 + 2x_0 \cos \eta \cdot r \cos \theta + r^2 \cos^2 \eta \cos^2 \theta}{A^2} \left(1 - \frac{s}{A} + \dots \right)$$

$$+ \frac{y_0^2 + 2y_0 \sin \eta \cdot r \cos \theta + r^2 \sin^2 \eta \cos^2 \theta}{B^2} \left(1 - \frac{s}{B} + \dots \right)$$

$$= \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{B^2} + 2r \cos \theta \left(\frac{x_0 \cos \eta}{A^2} + \frac{y_0 \sin \eta}{B^2} \right) - s \left(\frac{x_0^2}{A^3} + \frac{y_0^2}{B^3} \right)$$

$$- 2rs \cos \theta \cdot \left(\frac{x_0 \cos \eta}{A^3} + \frac{y_0 \sin \eta}{B^3} \right) = \frac{1}{p^2} + \frac{2r \cos \theta}{pC} - \frac{s}{p^2 C} - \frac{2rs \cos \theta}{M}$$

In tiefster Näherung ist daher

$$s = 2pr \cos \theta + \dots$$

Der Factor ist also $\frac{1}{p^2}$ mit einem Fehler zweiter Ordnung. Also ist

$$s = 2pr \cos \theta + \frac{p^2}{C} \cdot r^2 \cos^2 \theta + \dots$$

Zweigliedrige Berechnung von t, t' .

Es gelten die fünf Gleichungen:

$$t + t' + t'' = x^2 + y^2 + z^2 - (A + B),$$

$$t'' \cdot (t + t') + t t'' = AB - Bx^2 - Ay^2 - (A + B)z^2, \quad t t' t'' = ABz^2,$$

$$s + s'' = x^2 + y^2 - (A + B), \quad s s'' = AB - Bx^2 - Ay^2$$

Aus der ersten und vierten ergibt sich

$$t + t' - s = s'' - t'' + z^2$$

(klein zweiter Ordg.); die dritte gibt

$$t t' = - \frac{ABz^2}{(-t'')}$$

Aus dem obigen Werte von $s'' - t''$ folgt

$$s'' - t'' + z^2 = \frac{p^2 r^2 \sin^2 \theta}{C}$$

folglich

$$\frac{t+t'}{2} = pr \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{p^2}{C} r^2$$

Ferner ist

$$t' = \frac{-ABz^2}{-\sigma + (\sigma - t'')} = \frac{-ABz^2}{-\sigma} \left(1 - \frac{\sigma - t''}{-\sigma} + \dots \right)$$

Weil aber $s - t''$ klein zweiter Ordnung ist, so kommt $\frac{\sigma - t''}{-\sigma}$ nicht mehr in Betracht. Man hat

$$t' = -p^2 r^2 \sin^2 \theta + r^3 \cdot 0 + \dots$$

Das vorige gibt

$$\left(\frac{t+t'}{2} \right)^2 = p^2 r^2 \cos^2 \theta + \frac{p^3}{C} r^3 \cos \theta + \dots$$

und wenn man t' subtrahirt, so erhält man

$$\left(\frac{t-t'}{2} \right)^2 = p^2 r^2 + \frac{p^3}{C} r^3 \cos \theta + \dots$$

$$\frac{t-t'}{2} = pr + \frac{1}{2} \frac{p^2 r^2}{C} \cos \theta + \dots$$

Weil

$$\frac{t+t'}{2} = pr \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{p^2 r^2}{C} + \dots$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$t = pr(1 + \cos \theta) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{pr}{C} + \dots \right)$$

$$t' = -pr(1 - \cos \theta) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{pr}{C} + \dots \right)$$

Berechnung der Parameter.

Zweigliedrige Entwicklungen hat man nur bei den Parametern α , β , δ' , ε nötig; denn γ ist schon klein erster Ordnung. Auch k^2 braucht man nur eingliedrig zu kennen. Man hat

$$k^2 = \frac{t-t'}{t-t''} = \frac{2pr}{-\sigma} + \dots, \quad 2K' = \log \frac{16}{k^2} = \log \frac{8(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{AB} \cdot r} = A$$

Wenn

$$Sr = \sin \varphi$$

so ist

$$x = \frac{2K}{\pi} \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 \\ \times k^{2n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{2 \cdot 4 \dots 2\lambda}{3 \cdot 5 \dots (2\lambda+1)} \sin^{2\lambda} \varphi$$

Für den vorliegenden Zweck dient

$$x = \frac{2K}{\pi} \cdot \varphi - \frac{1}{4} k^2 \sin \varphi \cos \varphi + \dots$$

Weil

$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{1}{4} k^2 + \dots$$

also

$$\frac{E}{K} x = \varphi - \frac{1}{4} k^2 (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \dots$$

und weil

$$E(\varphi) = \varphi - \frac{1}{4} k^2 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + \dots$$

so ist

$$Zx = \frac{1}{2} k^2 \sin \varphi \cos \varphi + \dots$$

Berechnung von α .

$$S\alpha = \frac{\sqrt{(t-s)}}{\sqrt{(t-t')}}$$

Da

$$t-s = pr (1 - \cos \theta) \left(1 + \frac{1}{4} \frac{pr}{C} (1 + 2 \cos \theta) + \dots \right)$$

$$t-t' = 2pr \left(1 + \frac{1}{4} \frac{pr}{C} \cos \theta + \dots \right)$$

so ist

$$S\alpha = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \frac{pr}{C} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \dots \right) = \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{pr \sin \theta}{C} + \dots$$

und sei $= \sin \varphi$, dann ist

$$\varphi = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \frac{pr \sin \theta}{C} + \dots$$

also

$$\alpha = \frac{K}{\pi} \theta + \frac{1}{4} \cdot \frac{pr \sin \theta}{C} - \frac{1}{4} \cdot \frac{pr}{-\sigma} \sin \theta + \dots \\ = \frac{K}{\pi} \theta + \frac{1}{4} p \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{2}{\sigma} \right) \cdot r \sin \theta + \dots$$

$$Z\alpha = \frac{1}{2} \frac{pr \sin \theta}{-\sigma} + \dots$$

Berechnung von β .

$$S\beta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t-t')}}$$

Weil

$$t = pr(1 + \cos\theta) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{pr}{C} + \dots\right)$$

$$t - t' = 2pr \left(1 + \frac{1}{2} \frac{pr}{C} \cos\theta\right)$$

so ist

$$\frac{t}{t - t'} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{pr}{C} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} + \dots\right)$$

folglich

$$S\beta = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{pr \sin \theta}{C} + \dots \quad \text{sei } = \sin \varphi$$

daher

$$\varphi = \frac{\pi - \theta}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{pr \sin \theta}{C} + \dots$$

$$\beta = K - \frac{K}{\pi} \cdot \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{pr \sin \theta}{C} - \frac{1}{2} \cdot \frac{pr \sin \theta}{-\sigma} + \dots$$

$$= K - \frac{K}{\pi} \theta + \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{2}{\sigma} \right) \cdot r \sin \theta + \dots$$

$$Z\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{pr \sin \theta}{-\sigma} + \dots$$

Berechnung von γ . Bei

$$Siy = i \frac{\sqrt{s'' - t''}}{\sqrt{(t' - s'')}}$$

kann man geradezu

$$\gamma = \frac{\sqrt{s'' - t''}}{\sqrt{(t' - s'')}} + \dots$$

setzen, wo

$$s'' - t'' = \frac{(A + \sigma)(-B - \sigma)}{\sigma^2} \cdot r^2 \sin^2 \theta + \dots$$

$$t' - s'' = -\sigma + \dots$$

also

$$\gamma = \frac{\sqrt{(A + \sigma)(-B - \sigma)}}{(-\sigma)^{\frac{1}{2}}} \cdot r \sin \theta + \dots$$

$Z\gamma$ ist klein zweiter Ordnung.

Berechnung von δ' .

$$S\delta' = \frac{\sqrt{(A + t'')}}{\sqrt{(A + t')}} = \sin \varphi$$

Weil

$$A + t'' = A + \sigma + 0 \cdot r + \dots$$

$$A + t' = A - pr \cdot (1 - \cos \theta) + \dots$$

so ist

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{pr}{A} (1 - \cos \theta) + \dots \right)$$

Wenn

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A}}$$

so ist

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A}}, \quad i\alpha = \log \frac{\sqrt{-\sigma} + i\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A}}$$

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{pr}{A} (1 - \cos \theta) + \dots &= \alpha + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A}} \\ &\quad \times \frac{r}{-\sigma} (1 - \cos \theta) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta' &= \frac{2K}{\pi} \alpha + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{r}{-\sigma} (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{AB} \cdot r \cdot \sqrt{-\sigma(A+\sigma)}}{\sqrt{(-\sigma)^3} \cdot A} \\ &\quad + \dots = \frac{2K}{\pi} \alpha - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{r \cos \theta}{-\sigma} + \dots \end{aligned}$$

$$Z\delta' = \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{r}{-\sigma} + \dots$$

Berechnung von ε .

$$i \sin \chi = \operatorname{Si} \varepsilon = \frac{i \sqrt{-B-t'}}{\sqrt{B+t'}}$$

$$\sin \chi = \frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{pr}{B} (1 - \cos \theta) + \dots \right)$$

Setzt man

$$b = \log \frac{\sqrt{-\sigma} + \sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}}$$

so ist

$$\sin \chi = \sin b + \cos b \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{pr}{B} (1 - \cos \theta)$$

wo

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{p}{B} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{-\sigma}$$

Also ist

$$\chi = b + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{r}{-\sigma} (1 - \cos \theta) + \dots$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{2K}{\pi} b + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{r}{-\sigma} \cdot (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{AB} \cdot r}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \\
 \times \frac{\sqrt{-\sigma(-B-\sigma)}}{B} &= \frac{2K}{\pi} \cdot b - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{r \cos \theta}{-\sigma} \\
 \frac{Z(is)}{i} &= \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{r}{-\sigma}
 \end{aligned}$$

Wendet man diese Näherungswerte auf die Berechnung von $\frac{\partial F(z)}{\partial x}$ an, so ist

$$\begin{aligned}
 \pi \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \right) &= \pi \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \left(2 + \frac{1}{2} \frac{A-B}{AB} s + \dots \right) \\
 &= \frac{2\pi\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{\pi}{A} \frac{A-B}{\sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta + \dots \\
 - \frac{\pi}{K} \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \cdot \alpha + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \beta \right) &= - \frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2} \frac{A-B}{AB} \alpha s + \dots \right) \\
 &= - \pi \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} - \frac{B}{\sqrt{-\sigma}} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{2}{\sigma} \right) \cdot r \sin \theta - \frac{A-B}{A\sqrt{-\sigma}} \cdot \theta r \cos \theta + \dots \\
 \frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}} \cdot \gamma &= 2 \cdot \frac{-B-\sigma}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \cdot r \sin \theta + \dots = \frac{B}{\sqrt{-\sigma}} \left(\frac{2}{B} + \frac{2}{\sigma} \right) \\
 &\quad \times r \sin \theta + \dots \\
 - \frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{z}{x} \cdot \delta' &= - 2 \cdot \frac{A-B}{A\sqrt{A+B}} \cdot \alpha r \sin \theta + \dots
 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
 \pi \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \right) &- \frac{\pi}{K} \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \alpha + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \beta \right) \\
 + \frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{-B-s''}}{\sqrt{A+s''}} \gamma &- \frac{\pi}{K} \cdot \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{z\delta'}{x} \\
 &= \frac{\pi\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{A-B}{A\sqrt{-\sigma}} (\pi - \theta) \cdot r \cos \theta + \frac{A-B}{A\sqrt{-\sigma}} \\
 &\quad \times r \sin \theta \left(1 - 2\alpha \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Was innerhalb der grossen Klammer mit $2K'$ multiplicirt ist, ist von der Ordnung r , weshalb man eingliedrig rechnen kann.

$$\frac{z}{\sqrt{(t-t')}} \cdot \left(\frac{B+t'}{t'-s''} + \frac{A-B}{A+t'} \right) = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{-\sigma}} \left(\frac{B}{-\sigma} + \frac{A-B}{A} \right) + \dots$$

$\frac{Zi\gamma}{i}$ und $zZ\delta'$ sind von der zweiten Ordnung und kommen nicht in Betracht.

$$-\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \cdot Z\alpha - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} Z\beta = -\frac{Br \sin \theta}{(-\sigma)^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

Der Factor von $2K' = A$ ist also

$$\frac{A-B}{A \sqrt{-\sigma}} r \sin \theta + \dots$$

Fasst man die Teile zusammen und multiplicirt mit $-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} x$, so bekommt man

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{2\pi B}{A-B} x - \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}} x_0 \left[r \sin \theta \left(A+1 - \frac{2a\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) + (\pi - \theta) r \cos \theta \right]$$

Weil

$$x = x_0 \left(1 + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}} \cdot r \cos \theta \right)$$

so geht der Factor $\pi - \theta$ von $r \cos \theta$ in $\frac{\pi A}{A-B} - \theta$ über. Ferner ist

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}} x_0 = \cos \eta$$

Man hat also

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -2\pi \cdot \frac{B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - 2 \cos \eta \left[r \sin \theta \left(A+1 - \frac{2a\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) + r \cos \theta \cdot \left(\frac{\pi \cdot A}{A-B} - \theta \right) \right]$$

wo

$$\cos \eta = \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}$$

$$i\alpha = \log \left(\frac{\sqrt{-\sigma} + i\sqrt{A+\sigma}}{\sqrt{A}} \right)$$

Ohne neue Rechnung, durch blosse Vertauschung von A mit B , kann man hieraus $\frac{\partial F(z)}{\partial y}$ bekommen. Nur die Vorzeichen erfordern einige

Vorsicht. $-\sigma$ liegt immer zwischen A und B , welches von beiden Halbaxenquadraten auch das grössere sein mag. Man darf also

$$-\sigma = A - C \cos^2 \zeta, \quad A - B = C$$

setzen. Dann ist

$$\frac{\sqrt{A + \sigma}}{\sqrt{A - B}} = \cos \zeta$$

und kann auf einem pos. Werte festgehalten werden, während C (aus dem pos. Zustande in den neg.) durch null geht, muss also, wenn man nach geschehenem Durchgange B für A und A für B schreibt, durch $\frac{\sqrt{-B - \sigma}}{\sqrt{A - B}}$ dargestellt und pos. verstanden werden.

Aus $-\frac{2\pi B \sqrt{A}}{A - B} \cdot \frac{\sqrt{A + \sigma}}{\sqrt{A - B}}$ wird also

$$\frac{2\pi A \sqrt{B}}{A - B} \cdot \frac{\sqrt{-B - \sigma}}{\sqrt{A - B}}$$

und aus $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{A + \sigma}}{\sqrt{A - B}}$ wird

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{-B - \sigma}}{\sqrt{A - B}} = \sin \eta$$

Dem Ausdrucke $-\frac{2a \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A + \sigma}}$ gebe man die Gestalt

$$-2 \sqrt{-\sigma} \cdot \frac{1}{i \sqrt{(A + \sigma)}} \log \left(\frac{\sqrt{-\sigma} + i \sqrt{A + \sigma}}{\sqrt{A}} \right)$$

Es ist dann gleichgültig, ob man $i \sqrt{A + \sigma}$ durch $\sqrt{-B - \sigma}$ oder durch $-\sqrt{-B - \sigma}$ ersetzt, weil

$$-\frac{1}{\sqrt{-B - \sigma}} \log \left(\frac{\sqrt{-\sigma} - \sqrt{-B - \sigma}}{\sqrt{B}} \right) = \frac{1}{\sqrt{-B - \sigma}} \log \left(\frac{\sqrt{-\sigma} + \sqrt{-B - \sigma}}{\sqrt{B}} \right)$$

ist. Der Ausdruck geht also in

$$-\frac{2\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B - \sigma}} \log \frac{\sqrt{-\sigma} + \sqrt{-B - \sigma}}{\sqrt{B}} = -\frac{2b \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B - \sigma}}$$

über, und man bekommt

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{2\pi A \sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - 2 \sin \eta \left[r \sin \theta \left(A+1 - \frac{2b \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) - r \cos \theta \left(\frac{\pi B}{A-B} + \theta \right) \right]$$

wo

$$\sin \eta = \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}, \quad b = \log \frac{\sqrt{-\sigma} + \sqrt{-B-\sigma}}{\sqrt{B}}$$

Bei der Berechnung von $\frac{\partial F(z)}{\partial z}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{K} \left(\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}} x\delta' + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} yz \right) &= 4 \frac{\sqrt{B} xa + \sqrt{A} yb}{\sqrt{A-B}} \\ &\quad - 2 \frac{B(A+\sigma)}{A-B} \cdot \frac{r \cos \theta}{-\sigma} - 2 \frac{A(-B-\sigma)}{A-B} \cdot \frac{r \cos \theta}{-\sigma} \\ &= 4 \frac{\sqrt{B} \cdot xa + \sqrt{A} \cdot yb}{\sqrt{A-B}} - 2r \cos \theta \end{aligned}$$

$$2z \left(\frac{\pi}{K} \beta - \pi \right) = -2\theta \cdot r \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{AB} \cdot z^2}{t' \sqrt{(t-t')}} &= - \frac{\sqrt{AB} \cdot r^2 \sin^2 \theta}{pr \cdot (1 - \cos \theta) \cdot \sqrt{-\sigma}} = -r(1 + \cos \theta) \\ \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}} \cdot xZ\delta' &= \frac{B \cdot (A+\sigma)}{A-B} \cdot \frac{r}{-\sigma} \\ \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \cdot yZi\epsilon &= \frac{A(-B-\sigma)}{A-B} \cdot \frac{r}{-\sigma} \\ \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A-B}} \cdot xZ\delta' + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A-B}} \cdot yZi\epsilon &= r \end{aligned}$$

 $zZ\beta$ kommt nicht in Betracht. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial z} &= 4 \frac{\sqrt{B} \cdot xa + \sqrt{A} \cdot yb}{\sqrt{A-B}} - 2r \cos \theta (A+1) - 2r\theta \sin \theta \\ &= 4 \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \left(a \sqrt{A+\sigma} + b \sqrt{-B-\sigma} \right) \\ &\quad + 2r \cos \theta \left(-A-1 + 2 \cdot \frac{aB \sqrt{A+\sigma} + bA \sqrt{-B-\sigma}}{(A-B) \cdot \sqrt{-\sigma}} \right) \\ &\quad - 2r \sin \theta \cdot \theta \end{aligned}$$

Man soll nun $\frac{\partial F(z)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(z)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(z)}{\partial z} dz$ integrieren, indem man σ festhält und nur r, θ variieren lässt. Man setze

$$\chi = r \cos \theta, \quad \psi = r \sin \theta$$

also

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\psi}{\chi}$$

$$A = \log \frac{8(-\sigma)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{AB}} - \frac{1}{2} \log(\chi^2 + \psi^2)$$

Weil

$$dx = \cos \eta \cdot d\chi, \quad dy = \sin \eta \cdot d\chi, \quad dz = d\psi$$

so hat man

$$M = \frac{\partial F(z)}{\partial x} \cos \eta + \frac{\partial F(z)}{\partial y} \sin \eta$$

zu berechnen. Es sei dann noch

$$N = \frac{\partial F(z)}{\partial z}$$

so dass $Md\chi + Nd\psi$ zu integrieren sein wird. In der nullten Ordnung hat man

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi\sqrt{AB}}{(A-B)^2\sqrt{-\sigma}} \cdot \left(-B \cdot (A + \sigma) - A(B + \sigma) \right) \\ & = - \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \end{aligned}$$

In der ersten Ordnung hat man vorweg ohne Mühe $2\chi\theta - 2\psi(A+1)$ dann

$$\begin{aligned} & 4\psi \left(a \cos^2 \eta \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} + b \sin^2 \eta \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) \\ & = 4\psi \frac{aB\sqrt{A+\sigma} + bA\sqrt{-B-\sigma}}{(A-B)\sqrt{-\sigma}} \end{aligned}$$

und

$$- 2\pi\chi \cdot \left(\frac{A}{A-B} \cos^2 \eta - \frac{B}{A-B} \sin^2 \eta \right) = - 2\pi\chi \cdot \frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma \cdot (A-B)^2}$$

Also

$$\begin{aligned} M = & - \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \\ & + \psi \cdot \left(-2A - 2 + 4 \cdot \frac{B a \operatorname{tg} a + A b \operatorname{tg} b}{A-B} \right) \\ & + \chi \cdot \left(2\theta - 2\pi \frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma \cdot (A-B)^2} \right) \end{aligned}$$

$$N = \frac{4\sqrt{AB}}{A-B} \left(a\sqrt{A+\sigma} + b\sqrt{-B-\sigma} \right) + \chi \cdot \left(-2A - 2 + 4 \cdot \frac{B \operatorname{tg} a + A b \operatorname{tg} b}{A-B} \right) - \psi \cdot 2\theta$$

Die meisten Terme $Md\chi + Nd\psi$ können unmittelbar integriert werden; nur $-2A(\psi d\chi + \chi d\psi) + 2\theta(\chi d\chi - \psi d\psi)$ erfordert die Methode der partiellen Integration. Beachtet man, dass

$$-2A = \log \frac{AB}{(-4\sigma)^3} + \log pq, \quad \theta = \frac{1}{2i} \log \frac{p}{q}$$

wenn

$$p = \chi + i\psi, \quad q = \chi - i\psi$$

dass also das vorliegende Differential

$$\begin{aligned} &= d.(-2A \cdot \chi\psi + \theta \cdot (\chi^2 - \psi^2)) - \frac{1}{2i} \left(2i\chi\psi \left(\frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\chi^2 - \psi^2) \left(\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} \right) \right) \\ &= d. \left(-2A \chi\psi + \theta (\chi^2 - \psi^2) \right) - \frac{1}{2i} \left(p^2 \frac{dp}{p} - q^2 \frac{dq}{q} \right) \end{aligned}$$

wo

$$- \frac{1}{2i} \left(p^2 \frac{dp}{p} - q^2 \frac{dq}{q} \right) = - \frac{1}{4i} d. (p^2 - q^2) = - d. (\chi\psi)$$

ist, so erkennt man, dass das vorliegende Differential

$$= d. [(-2A - 1)\chi\psi + \theta(\chi^2 - \psi^2)]$$

ist. Integrationsconstante ist der Wert von $F(z)$ im Punkte (x_0, y_0) der Ellipse. Hier ist aber

$$\begin{aligned} F(0) = \pi \sqrt{AB} L(0) &= \left(\log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{x_0^2}{A-B} \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_0^2}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \right) \cdot \pi \sqrt{AB} \\ &= \left(\log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2} \right) \cdot \pi \sqrt{AB} \end{aligned}$$

Endlich ist mit einem Fehler von der Ordnung $r^3 \log r$ die Function

$$\begin{aligned} F(z) &= \pi \sqrt{AB} \left(\log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2} \right) \\ &\quad - \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \cdot r \cos \theta \end{aligned}$$

$$+ \frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A-B} (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) \cdot r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta \left(\log \frac{ABr^2}{(-4\sigma)^3} - 3 \right. \\ \left. + 4 \frac{Ba \operatorname{tang} a + Ab \operatorname{tang} b}{A-B} \right) + r^2 \theta \cos 2\theta - \pi \cdot \frac{AB(A+B+2\sigma)}{-\sigma(A-B)^2} \cdot r^2 \cos^2 \theta$$

Wir machen eine kleine Probe. Wenn σ und r fest bleiben, aber θ um 2π wächst, so nimmt dieser Näherungswert von $F(z)$ um $2\pi r^2 \cos 2\theta$ zu. Im allgemeinen nimmt aber $F(z)$ nach einem Umlaufe um die Ellipse um

$$2\pi \sqrt{AB} (L(0) - L(s)) - 2\pi z^2$$

zu, wenn

$$L(u) = \log \left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u} \right) - \frac{x^2}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} + \frac{y^2}{A-B} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}}$$

Es soll nun untersucht werden, ob für ein kleines r dieser Zuwachs mit seinem vorigen Näherungswerte übereinstimme. Substituiert man

$$x^2 = \frac{(A+s)(A+s'')}{A-B}, \quad y^2 = \frac{(B+s)(-B-s'')}{A-B}$$

so wird

$$L(0) = \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2} \cdot \left(\frac{(A+s)(A+s'')}{A} + \frac{(B+s)(-B-s'')}{B} \right) \\ = \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \sqrt{AB} \cdot \frac{A+B+2s''}{(A-B)^2} - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2} \cdot \left(2 + \frac{A+B}{AB} s'' \right) s$$

und

$$L(s) = \log(\sqrt{A+s} + \sqrt{B+s}) - \frac{\sqrt{(A+s)(B+s)}}{(A-B)^2} (A+B+2s'')$$

folglich

$$\frac{\partial L(s)}{\partial s} = - \frac{2AB + (A+B)s'' + (A+B+2s'')s}{(A-B)^2 \cdot \sqrt{(A+s)(B+s)}}$$

und wenn man nach s entwickelt

$$\frac{\partial L(s)}{\partial s} = - \frac{2AB + (A+B)s''}{(A-B)^2 \sqrt{AB}} + \frac{1}{2} \frac{s''}{(AB)^{\frac{3}{2}}} \cdot s + \dots$$

also

$$L(s) = \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \sqrt{AB} \cdot \frac{A+B+2s''}{(A-B)^2} - \frac{2AB + (A+B)s''}{(A-B)^2 \sqrt{AB}} s \\ + \frac{1}{4} \cdot \frac{s''}{(AB)^{\frac{3}{2}}} \cdot s^2 + \dots$$

Demnach ist

$$L(0) - L(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{s''}{(AB)^{\frac{1}{2}}} \cdot s^2 + \dots$$

Man darf nun $s'' = \sigma$ und

$$s^2 = 4 \frac{AB}{-\sigma} \cdot r^2 \cos^2 \theta$$

setzen und hat

$$L(0) - L(s) = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{AB}}$$

folglich

$$2\pi \sqrt{AB} (L(0) - L(s)) = 2\pi s^2 = 2\pi r^2 \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2\pi r^2 \cos 2\theta$$

also wie oben.

g) Ueber den Wert der ersten Abgeleiteten der Function $F(s)$ in unendlicher Form.

a') t und s sind beide sehr gross und $z > 0$.

Weil s sehr gross ist, so muss auch $x^2 + y^2$ sehr gross sein; z hingegen kann endlich oder sehr gross sein. Ich lege der Rechnung das Integral

$$= \int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{(A+u)}} \cdot \frac{P' du}{PW\sqrt{u}} \quad (\text{Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ost- punkte um } t \text{ allein})$$

zu Grunde. Es ist

$$\frac{1}{W\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}$$

$$P = \frac{u(u-s)(u-s'')}{(A+u)(B+u)}, \quad \frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} + \frac{1}{u+A} - \frac{1}{u+B}$$

also

$$J = \int \frac{u+B}{\sqrt{(u-t')(u-t'')}} \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{u+A} - \frac{1}{u+B} \right) \times \frac{du}{\sqrt{(u-t)}}$$

und weil im Integrale nur sehr grosse Werte von u in Betracht kommen, so ist auch

$$J = \int \left(1 + \frac{2B + t' + t''}{2u} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{u-s} + \frac{s'' + A + B}{u^2} + \dots \right) \times \frac{du}{\sqrt{(u-t)}}$$

oder auch

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{u-s} \frac{du}{\sqrt{(u-t)}} + \frac{2B + t' + t''}{2s} \int \left(\frac{1}{u-s} - \frac{1}{u} \right) \cdot \frac{du}{\sqrt{(u-t)}} \\ &\quad + (s'' + A + B) \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(u-t)}} \\ &= \left(1 + \frac{2B + t' + t''}{2s} \right) \cdot \frac{1}{i} \int (t-u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{u-s} \\ &\quad \text{(Weg ein kleiner rechtl. Kreis um den Pol } s) \\ &\quad + (s'' + A + B) \int (t-u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{u^2} \quad \text{(Weg ein kleiner rechtl. Kreis um den Pol null)} \\ &\quad - \frac{2B + t' + t''}{2is} \int (t-u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{u} \quad \text{(Weg ein kleiner rechtl. Kreis um den Pol null)}. \end{aligned}$$

Nach einem Lehrsatz von Cauchy erhält man nun

$$\begin{aligned} J &= \left(1 + \frac{2B + t' + t''}{2s} \right) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{(t-s)}} + (s'' + A + B) \cdot \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{2B + t' + t''}{s} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{t}} \\ &= \left(2 + \frac{2B + t' + t''}{s} \right) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{(t-s)}} + (ss'' - t(t' + t'') + (A+B)s - 2Bt) \cdot \frac{\pi}{st^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$t = t \cdot \left(\frac{x^2}{A+t} + \frac{y^2}{B+t} + \frac{z^2}{t} \right)$$

rechts nach fallenden Potenzen des grossen t entwickelt, gibt

$$t = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{t} + \dots$$

also, wenn man

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

setzt und sich mit zwei Termen begnügt

$$t = r^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{r^2} + \dots$$

Die Gleichung

$$s = z \left(\frac{x^2}{A+z} + \frac{y^2}{B+z} \right)$$

ebenso behandelt, gibt

$$s = x^2 + y^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{x^2 + y^2} + \dots$$

also

$$t - s = z^2 \left(1 + \frac{Ax^2 + By^2}{(x^2 + y^2) \cdot r^2} + \dots \right)$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{(t-s)}} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{(x^2 + y^2) \cdot r^2} + \dots \right)$$

Man ziehe ferner die fünf streng richtigen Gleichungen

$$t + t' + t'' = r^2 - (A + B), \quad t(t' + t'') + t't'' = -(A + B)r^2 + Ax^2 + By^2$$

$$t't'' = ABz^2, \quad s + s'' = x^2 + y^2 - (A + B), \quad ss'' = -Bx^2 - Ay^2 + AB$$

zu Rate. Die erste gibt

$$2B + t' + t'' = r^2 - t - (A - B)$$

oder angenähert

$$= \frac{Ax^2 + By^2}{r^2} - (A - B) + \dots$$

demnach ist

$$\left(2 + \frac{2B + t' + t''}{s} \right) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{(t-s)}} = \frac{\pi}{z} \left(\frac{A-B}{x^2 + y^2} \right)$$

Aus der zweiten und fünften Gleichung folgt ferner

$$ss'' - t(t' + t'') = (A + B)z^2 + AB - t't''$$

also mit Hilfe von Gleichung drei

$$= (A + B)z^2 + AB \left(1 - \frac{z^2}{t} \right)$$

oder annähernd

$$ss'' - t(t' + t'') = (A + B)z^2 + AB \cdot \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \dots$$

Ferner ist

$$(A + B)s - 2Bt = (A - B)(x^2 + y^2) - 2Bz^2$$

Man erhält also

$$ss'' - t(t' + t'') + (A + B)s - 2Bt = (A - B)r^2 + \dots$$

und endlich ist

$$J = \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{A-B}{x^2 + y^2} + (A - B) \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2) \cdot r} + \dots \right)$$

Der Näherungswert von $\frac{\partial F(s)}{\partial x}$ in dem Gebiete des Unendlichen, wo s und t sehr gross sind, ist demnach

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{\pi\sqrt{AB}}{A-B} \cdot xz \left(2 - \frac{A-B}{x^2+y^2} + (A-B) \frac{z}{(x^2+y^2) \cdot r} + \dots \right)$$

Ebenso findet man

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{\pi\sqrt{AB}}{A-B} yz \left(2 + \frac{A-B}{x^2+y^2} + (A-B) \frac{z}{(x^2+y^2) \cdot r} + \dots \right)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \pi\sqrt{AB} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{Ax^2 + By^2}{r^3} + \dots \right)$$

Ist z neg., t und s aber pos. sehr gross, so muss man die Formel

$$F(\dots z) = 2\pi\sqrt{AB} L(s) - F(z)$$

anwenden.

b'. Nur t ist sehr gross.

Die Coordinate z ist sehr gross, s ist endlich und kann pos. oder neg. sein, $x^2 + y^2$ ist endlich. Der Punkt $(x, y, 0)$ liegt also innerhalb der Ellipse oder ausserhalb derselben in endlicher Entfernung.

Wenn

$$J = \int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du \quad \text{(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp allein um den Pol } t)$$

so erhält man auf gleiche Weise wie oben

$$J = \int \left(1 + \frac{2B+t'+t''}{2u} + \dots \right) \left(\frac{1}{u} + \frac{s+s''+A+B}{u^2} + \dots \right) \cdot \frac{du}{\sqrt{(u-t)}}$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} + \frac{2B+t'+t''}{2u^2} + \frac{s+s''+A+B}{u^2} + \dots \right) \cdot \frac{du}{\sqrt{(u-t)}}$$

$$= \frac{1}{i} \int (t-u)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{u} \quad \text{(Weg ein rechtl. Kreis allein um den Pol null)}$$

$$+ \left(\frac{2B+t'+t''}{2} + s+s''+A+B \right) \cdot \frac{1}{i} \int (t-u)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2}$$

(Weg ein rechtl. Kreis allein um den Pol null).

Nach Cauchy erhält man

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{t}} + \left(\frac{2B + t' + t''}{2} + s + s'' + A + B \right) \cdot \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}} \left(2t + \frac{2B + t' + t''}{2} + s + s'' + A + B \right)$$

und mit Hilfe obiger fünf Relationen zwischen t und den s erhält man hieraus

$$J = \frac{\pi}{t^{\frac{3}{2}}} \left(2t + \frac{r^2 - t - (A - B)}{2} + x^2 + y^2 \right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{A - B}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 + y^2}{t^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Nun ist

$$t^{-\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = z^{-1} \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{x^2 + y^2}{2z^3} + \dots$$

$$t^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^3} - \frac{3(x^2 + y^2)}{2z^5} + \dots$$

demnach

$$\frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{z^3} - \frac{x^2 + y^2}{z^5} + \dots$$

$$- \frac{A - B}{2t^{\frac{3}{2}}} = - \frac{(A - B)}{2z^3} + \frac{3(A - B) \cdot (x^2 + y^2)}{4z^5}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 + y^2}{z^3} - \frac{3(x^2 + y^2)^2}{2z^5} + \dots$$

somit

$$J = \pi \cdot \left(\frac{2}{z} - \frac{A - B}{2z^3} + \dots \right)$$

und

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = - \frac{\sqrt{AB} \cdot \pi x}{A - B} \left(2 - \frac{A - B}{2z^3} + \dots \right)$$

Ebenso findet man

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \frac{\sqrt{AB} \cdot \pi y}{A - B} \left(2 + \frac{A - B}{2z^3} + \dots \right)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \pi \sqrt{AB} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ax^2 + By^2}{z^5} + \dots \right)$$

Diese Formeln gelten zunächst nur für ein pos. s . Ist z neg., so muss man bei pos. z die Formel

$$F(-z) = 2\pi\sqrt{AB}L(s) - F(z)$$

und bei neg. s die Formel

$$F(-z) = 2\pi(\sqrt{AB}L(0) - z^2) - F(z)$$

anwenden.

C) Berechnung des Differentialparameters zweiter Ordnung der Function $F(z)$.

a) $z > 0$.

Aus der Formel

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{AB}}{A-B}xz \int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um t allein)

folgt

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xzP'}{PW\sqrt{u}} \right) du \quad (\text{Weg wie vorhin})$$

Weil

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xP'}{PW\sqrt{u}} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{xz\sqrt{u}}{(A+u)PW} \right)$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xzP'}{PW\sqrt{u}} \right) &= \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \\ &\quad - 2x^2z \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{\sqrt{u}}{(A+u)PW} \right) \\ &\quad + 2x^2z \cdot \frac{1}{2} \frac{A-B}{(A+u)\sqrt{(A+u)(B+u)}} \cdot \frac{\sqrt{u}}{(A+u)PW} \\ &= -2x^2z \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{u(B+u)}}{(A+u)^{\frac{3}{2}}PW} \right) + \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \\ &\quad + (A-B)z \cdot \frac{x^2}{(A+u)^2} \cdot \frac{u}{PWU} \end{aligned}$$

Weil nun der Ausdruck unter dem Ableitungszeichen im Ostpunkte verschwindet, so erhält man

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} = - \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}} \int \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} du$$

$$- \sqrt{AB} \int \frac{x^2}{(A+u)^2} \cdot \frac{zu}{PWU} du$$

und hieraus

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} du$$

$$- \sqrt{AB} \int \frac{y^2}{(B+u)^2} \cdot \frac{zu}{PWU} du$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und beachtet, dass

$$\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} = \frac{A-B}{\sqrt{(A+u)(B+u)}} = \frac{(A-B) \cdot \sqrt{u}}{U}$$

und

$$\frac{x^2}{(A+u)^2} + \frac{y^2}{(B+u)^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{P}{u} \right) = \frac{P'}{u} - \frac{P}{u^2}$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} = \sqrt{AB} \int \frac{zP'}{PWU} du$$

$$- \sqrt{AB} \int \left(\frac{zP'}{PWU} - \frac{z}{WUu} \right) du$$

oder

$$\frac{d^2 F(z)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial^2 y} = \sqrt{AB} z \int \frac{du}{WUu}$$

und weil nun

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = - \sqrt{AB} z \int \frac{du}{WUu}$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = 0$$

Diese Ableitung ist aber nur so lange zulässig, als die Integrale für die ersten Abgeleiteten bestimmte Werte darstellen. Das ist aber für $z = 0$ nicht mehr der Fall, weil dann der Integrationsweg nicht mehr zwischen t und s hindurch kann, ohne dass ein Teil des Integrals unendlich wird. Mit dem Factor z stellen sich demnach die Ausdrücke für die ersten Abgeleiteten unter der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$ dar. Es ist nun

$$F(z) = \sqrt{AB} \cdot \pi L(s) + \frac{1}{2} \int \left(L(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + z \frac{W}{U} \right) du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um t und s allein)

oder

$$F(z) = \sqrt{AB} \cdot \pi L(s) + \bar{F}(z)$$

wenn $\bar{F}(z)$ obiges Integral bezeichnet. Weil nun dieses Integral auch für $z = 0$ seine Bedeutung nicht verliert, so lange als $s > 0$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{F}(z)}{\partial z^2} = 0$$

auch für $z = 0$ gültig, so lange $s > 0$ ist. Weil

$$L'(u) = \frac{1}{2} \frac{P}{U\sqrt{u}}, \quad P(s) = 0$$

so ist auch

$$L'(s) = 0$$

folglich

$$\frac{\partial L(s)}{\partial x} = -\frac{2x}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$$

und weil ferner

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A-B}{A+s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}}$$

so ist auch

$$\frac{\partial^2 L(s)}{\partial x^2} = -\frac{2}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{x}{A+s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 L(s)}{\partial y^2} = \frac{2}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} - \frac{y}{B+s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}$$

Um addiren zu können, ist nur noch nötig zu wissen, was

$$\frac{x}{A+s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{y}{B+s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

ist. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{A+s} + \frac{y^2}{B+s} = 1$$

gibt

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2p^2 x}{A+s}, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{2p^2 y}{B+s}$$

also

$$\frac{x}{A+s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{y}{B+s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} = 2p^2 \left(\frac{x^2}{(A+s)^2} + \frac{y^2}{(B+s)^2} \right) = 2$$

folglich ist

$$\frac{\partial^2 L(s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L(s)}{\partial y^2} = \frac{2}{A-B} \left(\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} - \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \right) - \frac{2}{\sqrt{(A+s)(B+s)}} = 0$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = 0$$

ist somit auch für $z = 0$ richtig, so lange als $s > 0$ ist. Der Beweis kann auch auf folgende Weise geführt werden:

Ist $s > 0$, so hat man

$$F(0) = \sqrt{AB} \cdot \pi L(s)$$

also

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(0)}{\partial y^2} = \sqrt{AB} \pi \left(\frac{\partial^2 L(s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L(s)}{\partial y^2} \right) = 0$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = -\sqrt{AB} z \int \frac{du}{WUu} \quad (\text{Weg eine Schlinge aus dem Ostp. um } t \text{ allein})$$

und weil dieses Integral auch für $z = 0$ einen bestimmten Wert behält, so lange als $s > 0$ ist, so ist auch $\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2}$ für $z = 0$ gleich null und somit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = 0$$

auch für $z = 0$ richtig. Liegt der Punkt $(x, y, 0)$ innerhalb der Focalellipse, so setze man

$$F(z) = \pi \sqrt{AB} L(0) - \pi z^2 + \frac{1}{2} \sqrt{AB} \int L(u) \cdot \left(\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U} \right) du$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostp. um t und 0 allein)

oder

$$F(z) = \pi \sqrt{AB} L(0) - \pi z^2 + F_1(z)$$

also

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = \pi_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\sqrt{AB} L(0) - z^2 \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_1(z)$$

Weil nun die Function $F_1(z)$ auch für $z = 0$ in dem Falle einen bestimmten Wert behält, wo $s < 0$ ist, so ist die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F_1(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1(z)}{\partial z^2} = 0$$

auch für $z = 0$ richtig. Ferner ist

$$L(0) = \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) + \frac{Ay^2 - Bx^2}{(A - B)\sqrt{AB}}$$

also

$$\frac{\partial^2 L(0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L(0)}{\partial y^2} = \frac{2}{\sqrt{AB}}$$

folglich auch

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sqrt{AB} L(0) - z^2) = 0$$

somit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = 0$$

auch für $z = 0$ richtig, wenn $s < 0$ ist. Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Betrachtung:

Es ist

$$F(0) = \pi \sqrt{AB} L(0)$$

also

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(0)}{\partial y^2} = 2\pi$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} &= -\sqrt{AB} z \int \frac{du}{WUu} \quad (\text{Weg eine Schlinge um } t \text{ allein}) \\ &= -2\pi - \sqrt{AB} z \int \frac{du}{WUu} \quad (\text{Weg eine Schlinge um } t \text{ und } 0 \text{ allein}) \end{aligned}$$

Weil nun dieses Integral für $z = 0$ verschwindet, so ist

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial z^2} = -2\pi$$

somit auch

$$\frac{\partial^2 F(0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(0)}{\partial z^2} = 0$$

b) $z < 0$.Liegt der Punkt $(x, y, 0)$ ausserhalb der Grundfläche, so ist

$$F(-z) = 2\pi \sqrt{AB} \times L(z) - F(z)$$

also, wenn

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \square$$

gesetzt wird

$$\square F(-z) = 2\pi \sqrt{AB} \square L(z) - \square F(z) \\ = 0$$

Liegt hingegen der Punkt $(x, y, 0)$ innerhalb der Grundellipse, so hat man

$$F(-z) = 2\pi (\sqrt{AB} L(0) - z^2) - F(z)$$

also

$$\square F(-z) = 2\pi \cdot \square (\sqrt{AB} L(0) - z^2) - \square F(z) \\ = 0$$

Der Differentialparameter zweiter Ordnung der Function $F(z)$ ist also im ganzen Raume null mit Ausnahme der Unstetigkeitscurve

$$\left(z = 0, \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1 \right).$$

§ 18. Betrachtung des Potentials der elliptischen Walze.

a) Das Potential.

a) Der Bezugspunkt liege oberhalb der obern Grundfläche.

$$V = F(z) - F(z - c)$$

$$= \sqrt{AB} \int_0^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot z P'}{P W_0 \sqrt{u}} + \frac{z W_0}{U} \right) du$$

$$- \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) (z - c) \cdot P'}{P W_1 \sqrt{u}} + \frac{(z - c) W_1}{U} \right) du$$

Sind t und s sehr gross, so hat man

$$F(z) = \pi \sqrt{AB} \left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 2(r + z) + \frac{1}{2} \right]$$

$$F(z - c) = \pi \sqrt{AB} \left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 2(r_1 + z - c) + \frac{1}{2} \right]$$

also

$$V = \pi \sqrt{AB} (\log(r+z) - \log(r'+z-c))$$

Wenn z sehr gross ist, so kann man c als Differential von z betrachten und hat

$$V = \pi \sqrt{AB} c \frac{\partial}{\partial z} \cdot \log(r+z) = \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r}$$

Ist aber z endlich, so hat man

$$r_1^2 = r^2 - (2cz - c^2) = r^2 \left(1 - \frac{2cz - c^2}{r^2}\right)$$

$$r_1 = r - \frac{2cz - c^2}{2r}$$

$$\begin{aligned} r_1 + z - c &= r + z - \frac{2c(r+z) - c^2}{2r} = (r+z) \left(1 - \frac{c}{r} + \frac{c^2}{2r(r+z)}\right) \\ &= (r+z) \left(1 - \frac{c}{r}\right) \end{aligned}$$

wenn man den Term $\frac{c^2}{2r(r+z)}$ vernachlässigt. Es ist somit

$$V = \pi \sqrt{AB} \left(\log(r+z) - \log(r+z) - \log\left(1 - \frac{c}{r}\right) \right) = \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r}$$

Ist nur t sehr gross, s also endlich, so folgt aus den Gleichungen

$$F(z) = \pi \sqrt{AB} \left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 4z + \frac{1}{2} \right]$$

$$F(z-c) = \pi \sqrt{AB} \left[\frac{y^2 - x^2}{A - B} + \log 4(z-c) + \frac{1}{2} \right]$$

dass

$$V = \pi \sqrt{AB} \left(\log 4z - \log 4z \left(1 - \frac{c}{z}\right) \right) = \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r}$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(s)$$

$$= \sqrt{AB} \int_0^\infty \left(\frac{L(u) c P'}{P W_0 \sqrt{u}} + \frac{c W_0}{U} \right) du - \pi \sqrt{AB} L(s)$$

Wenn t und s sehr gross sind, so hat man

$$L(s) = \frac{y^2 - x^2}{A - B} + \frac{1}{2} \cdot \log 4s + \frac{x^2 + y^2}{2s} + \dots$$

Obgleich

$$s = x^2 + y^2 - \frac{Ax^2 + By^2}{x^2 + y^2} + \dots$$

so begeht man doch nur einen Fehler von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ wenn man s durch $x^2 + y^2$ ersetzt, wodurch man erhält

$$L(s) = \frac{y^2 - x^2}{A - B} + \frac{1}{2} \log 4(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}$$

somit

$$\begin{aligned} V &= \pi \sqrt{AB} \left[\log 2(r + c) - \frac{1}{2} \log 4(x^2 + y^2) \right] \\ &= \pi \sqrt{AB} \left[\log(r + c) - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right] \end{aligned}$$

Weil

$$x^2 + y^2 = r^2 - c^2$$

so ist

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \dots \right)$$

also

$$\log(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \log r - \frac{c^2}{2r^2}, \quad \log(r + c) = \log r + \frac{c}{r}$$

und

$$V = \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r}$$

c) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche innerhalb der Randellipse.

$$\begin{aligned} V &= F(c) - \pi \sqrt{AB} L(0) \\ &= \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot c P'}{P W_0 \sqrt{u}} + \frac{c W_0}{U} \right) du - \pi \sqrt{AB} L(0) \end{aligned}$$

d) Der Bezugspunkt liege in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse oberhalb der obern Grundfläche.

$$\begin{aligned} V &= F(z) - \pi \sqrt{AB} L(0) + \frac{2\pi \sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{2AB + (A + B)\sigma}{(A - B)^2} \cdot r_1 \cos \theta \\ &\quad - \frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A - B} \cdot (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) \cdot r_1 \sin \theta - r_1^2 \sin 2\theta \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\log \frac{ABr_1^2}{(-4\sigma)^3} - 3 + 4 \frac{Batga + Abtg b}{A - B} \right) - r_1^2 \theta \cos 2\theta$$

$$+ \pi \frac{AB(A + B + 2\sigma)}{-\sigma \cdot (A - B)^2} \cdot r_1^2 \cos^2 \theta$$

Liegt der Bezugspunkt auf der Randellipse, so ist also

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(0)$$

e) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze auf einer mit den Grundflächen || Ebene, welche zwischen denselben hindurch geht.

Weil in diesem Falle $z - c$ neg. ist, so ersetze man $F(z - c)$ durch $2\pi \sqrt{AB} L(s) - F(c - z)$ und erhält

$$V = F(z) + F(c - z) - 2\pi \sqrt{AB} L(s)$$

oder

$$V = \sqrt{AB} \int_{i_0}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot z P'}{P W_0 \sqrt{u}} + z \frac{W_0}{U} \right) du$$

$$+ \sqrt{AB} \int_{i_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot (c - z) P'}{P W_1 \sqrt{u}} + \frac{(c - z) W_1}{U} \right) du - 2\pi \sqrt{AB} L(s)$$

Sind t und s sehr gross, so geht diese Formel in

$$V = \pi \sqrt{AB} \left[\log(r + z) + \log(r_1 + c - z) - \log(x^2 + y^2) \right]$$

über. Es ist

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = (r + z)(r - z), \quad r_1 = r + \frac{c^2 - 2cz}{2r}$$

also

$$r_1 + c - z = r - z + \frac{c}{r}(r - z) + \frac{c^2}{2r} = (r - z) \left(1 + \frac{c}{r} + \frac{c^2}{2r(r - z)} \right)$$

folglich

$$\log \left(\frac{r_1 + c - z}{r - z} \right) = \frac{c}{r}$$

und demnach

$$V = \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r}$$

i) Der Bezugspunkt liege auf der untern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(s)$$

$$= \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot cP'}{PW_1 \sqrt{u}} + \frac{cW_1}{U} \right) du - \pi \sqrt{AB} L(s)$$

ρ) Der Bezugspunkt liege unterhalb der untern Grundfläche.

$$V = F(c-z) - F(-z)$$

$$V = \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot (c-z)P'}{PW_1 \sqrt{u}} + \frac{(c-z)W_1}{U} \right) du \\ - \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot (-z)P'}{PW_0 \sqrt{u}} + \frac{(-z)W_0}{U} \right) du$$

Vermöge der Continuität gilt diese Gleichung auch, wenn sich der Bezugspunkt unter der Ebene der untern Grundfläche in dasjenige Gebiet des Raumes begibt, wo s neg. ist. Für einen Punkt der untern Grundfläche innerhalb der Randellipse ist demnach

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(0)$$

und für einen Punkt in der Nähe der Randellipse erhält man eine ähnliche Formel wie bei δ.

τ) Der Bezugspunkt liege im Innern der Walze.

Eine durch den Bezugspunkt mit den Grundflächen parallel gelegte Ebene teilt die Walze in zwei Walzen. Für jede derselben liegt der Bezugspunkt nicht innerhalb, sondern nur auf einer Grundfläche, weshalb die Function V angewendet werden kann, wie wenn der Bezugspunkt ausserhalb der betreffenden Walze läge. Bei der obern Walze hat das Potential den Wert $-F(0) + F(c-z)$ und bei der untern $F(z) - F(0)$. Die Summe beider ist der Wert des Potentials der ganzen Walze für einen inneren Punkt, welches mit V bezeichnet werden soll. Weil s neg. ist, so ist

$$F(0) = \pi \sqrt{AB} L(0)$$

also

$$V = F(z) + F(c-z) - 2\pi \sqrt{AB} L(0) \\ = \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot zP'}{PW \sqrt{u}} + \frac{zW_0}{U} \right) du \\ + \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot (c-z)P'}{PW_1 \sqrt{u}} + \frac{(c-z)W_1}{U} \right) du - 2\pi \sqrt{AB} L(0)$$

Derselbe ist innerhalb der Walze eindeutig und unterscheidet sich von V . Denn führt man V durch die obere Grundfläche in die Walze, so ist

$$V = V' + 2\pi(c-z)^2$$

geschieht es durch die untere Grundfläche, so ist

$$V = V' + 2\pi + z^2$$

i) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze zwischen den beiden Grundflächen und in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse.

Weil hier das Potential die Form

$$V = F(z) + F(c-z) - 2\pi\sqrt{AB}L(s)$$

hat, so hat man noch $L(s)$ für einen Punkt in der Nähe der Randellipse zu entwickeln. Nach Seite 269 ist für diesen Fall

$$L(s) = \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2} \cdot (A+B+2s'') \\ - \frac{1}{(A-B)^2 \sqrt{AB}} \cdot (2AB + (A+B)s'') \cdot s + \frac{1}{4} \cdot \frac{s''}{(AB)^{\frac{3}{2}}} \cdot s^2 + \dots$$

ferner ist nach Seite 257

$$s'' = \sigma - \frac{(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)^2} \cdot r^2 \cos^2\theta + \dots$$

und nach Seite 258

$$s = 2pr \cos\theta + \frac{p^2 r^2 \cos^2\theta}{C}$$

wo

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{(-\sigma)}$$

Setzt man nun diese Werte in den Ausdruck für $L(s)$ ein und vernachlässigt die dritte Ordnung, so erhält man

$$L(s) = \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2} \cdot (A+B+2\sigma) \\ - \frac{2}{(A-B)^2 \sqrt{-\sigma}} \cdot (2AB + (A+B)\sigma) \cdot r \cos\theta \\ + \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2} \cdot \frac{1}{(-\sigma)} \cdot \left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)} - \frac{(A-B)^2 \cdot (-\sigma)}{AB} \right. \\ \left. - \frac{2AB + (A+B)\sigma}{C} \right) \cdot r^2 \cos^2\theta + \dots$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
 V = & -\pi \sqrt{AB} \left(\log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2} (A+B+2\sigma) \right) \\
 & + \frac{2\pi \sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \cdot r_1 \cos \theta \\
 & - \frac{4\sqrt{-\sigma AB}}{A-B} \cdot (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) r_1 \sin \theta \\
 & - r_1^2 \sin 2\theta \left(\log \frac{AB r_1^2}{(-4\sigma)^3} - 3 + \frac{Ba \operatorname{tang} a + Ab \operatorname{tang} b}{A-B} \right) - r_1^2 \theta \cos 2\theta \\
 & - \frac{2\pi AB}{(A-B)^2 (-\sigma)} \cdot \left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)} - \frac{(A-B)^2 (-\sigma)}{AB} \right. \\
 & \left. - \frac{2AB + (A+B)\sigma}{C} + \frac{A+B+2\sigma}{2} \right) \cdot r_1^2 \cos^2 \theta \\
 & + \sqrt{AB} \int_{i_0}^{\infty} \left(\frac{L(u)}{I \cdot W_0 \sqrt{u}} + \frac{z W_0}{U} \right) du
 \end{aligned}$$

f) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze in unmittelbarer Nähe der oberen Randellipse.

Das Potential für einen innern Punkt hat die Form

$$V_1 = F(z) + F(c-z) - 2\pi \sqrt{AB} L(0)$$

und demnach muss $L(0)$ entwickelt werden. Nach Seite 270 ist

$$L(0) = L(s) + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{AB}}$$

also auch gleich

$$\begin{aligned}
 L(0) = & \log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2} \cdot (A+B+2\sigma) \\
 & - \frac{2}{(A-B)^2 \cdot \sqrt{-\sigma}} (2AB + (A+B)\sigma) \cdot r \cos \theta \\
 & - \frac{\sqrt{AB}}{(A-B)^2 \cdot (-\sigma)} \cdot \frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)} \\
 & - \frac{2AB + (A+B)\sigma}{C} \cdot r^2 \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

mithin ist

$$\begin{aligned}
 V_1 = & -\pi \sqrt{AB} \left(\log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2} \right) \\
 & + \frac{2\pi \sqrt{AB}}{-\sigma} \left(\frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \right) \cdot r_1 \cos \theta - 4 \cdot \frac{\sqrt{-\sigma AB}}{A-B} \\
 & \times (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) \cdot r_1 \sin \theta - r_1^2 \sin 2\theta \left(\log \frac{AB r_1^2}{(-4\sigma)^3} - 3 \right. \\
 & \left. + 4 \frac{Ba \operatorname{tang} a + Ab \operatorname{tang} b}{A-B} \right) - r_1^2 \theta \cos 2\theta \\
 & - \frac{2\pi AB}{(A-B)^2 \cdot (-\sigma)} \cdot \left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)} - \frac{2AB + (A+B)\sigma}{C} \right. \\
 & \left. + \frac{A+B+2\sigma}{2} \right) \cdot r_1^2 \cos^2 \theta + \sqrt{AB} \cdot \int_{i_0}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot z P'}{P W_0 \sqrt{u}} + \frac{z W_0}{U} \right) du
 \end{aligned}$$

i) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze zwischen den beiden Grundflächen in unmittelbarer Nähe der untern Raudellipse.

Weil auch hier V die Form $F(z) + F(c-z) - 2\pi \sqrt{AB} L(s)$ hat, so folgt aus den Formeln bei i) unmittelbar

$$\begin{aligned}
 V = & -\pi \sqrt{AB} \left(\log(\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB} \cdot (A+B+2\sigma)}{(A-B)^2} \right) \\
 & + \frac{2\pi \sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot \frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \cdot r \cos \theta \\
 & + \frac{4 \sqrt{-\sigma AB}}{A-B} (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta \\
 & \times \left(\log \frac{AB r^2}{(-4\sigma)^3} - 3 + 4 \cdot \frac{Ba \operatorname{tang} a + Ab \operatorname{tang} b}{A-B} + r^2 \theta \cos 2\theta \right. \\
 & - \frac{2\pi AB}{(A-B)^2 (-\sigma)} \left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)} - \frac{(A-B)^2 (-\sigma)}{AB} \right. \\
 & \left. - \frac{2AB + (A+B)\sigma}{C} + \frac{A+B+2\sigma}{2} \right) \times r^2 \cos^2 \theta \\
 & + \sqrt{AB} \int_{i_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) (c-z) \cdot P'}{P W_1 \sqrt{u}} + \frac{(c-z) W_1}{U} \right) du
 \end{aligned}$$

m) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze in unmittelbarer Nähe der untern Randellipse.

Aus den Formeln bei ') folgt, dass

$$\begin{aligned}
 V = & -\pi \sqrt{AB} \left(\log \sqrt{A + \sqrt{B}} - \frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2} \right) \\
 & + \frac{2\pi \sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \cdot r \cos \theta \\
 & + \frac{4 \sqrt{-\sigma AB}}{A-B} (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) \cdot r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta \\
 & \times \left(\log \frac{ABr^2}{(-4\sigma)^3} - 3 + 4 \cdot \frac{Ba \operatorname{tang} a + Ab \operatorname{tang} b}{A-B} + r^2 \theta \cos 2\theta \right. \\
 & - \frac{2\pi AB}{(A-B)^2(-\sigma)} \cdot \left(\frac{2(A+\sigma)(-B-\sigma)}{(-\sigma)} - \frac{2AB + (A+B)\sigma}{C} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{A+B+2\sigma}{2} \right) \cdot r^2 \cos^2 \theta + \sqrt{AB} \int_{i_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot (c-z) P'}{PW_1 \sqrt{u}} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(c-z) W_1}{U} \right) du
 \end{aligned}$$

n) Der Bezugspunkt liege auf der untern Randellipse.

Aus obigen Formeln folgt

$$\begin{aligned}
 V = & -\pi \sqrt{AB} \left(\log (\sqrt{A} + \sqrt{B}) - \frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2} \right) \\
 & + \sqrt{AB} \int_{i_1}^{\infty} \left(\frac{L(u) \cdot (c-z) \cdot P'}{PW_1 \sqrt{u}} + \frac{(c-z) \cdot W_1}{U} \right) du
 \end{aligned}$$

o) Der Bezugspunkt liege unterhalb der untern Grundfläche in unmittelbarer Nähe der Randellipse.

$$\begin{aligned}
 V = & -\pi \sqrt{AB} \left(\log \sqrt{A + \sqrt{B}} - \frac{\sqrt{AB}(A+B+2\sigma)}{(A-B)^2} \right) \\
 & + \frac{2\pi \sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \frac{2AB + (A+B)\sigma}{(A-B)^2} \cdot r \cos \theta \\
 & + \frac{4 \sqrt{-\sigma AB}}{A-B} (a \operatorname{tang} a + b \operatorname{tang} b) r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\log \frac{ABr^2}{(-4\sigma)^2} - 3 + 4 \cdot \frac{Ba \operatorname{tg} a + Ab \operatorname{tg} b}{A - B} \right) \cdot r^2 \theta \cos 2\theta \\ & + \pi \cdot \frac{AB(A + B + 2\sigma)}{-\sigma(A - B)^2} r^2 \cos^2 \theta + \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{L(u)(c - z) \cdot P'}{PW_1 \sqrt{u}} \right. \\ & \left. + \frac{(c - z) W_1}{U} \right) du \end{aligned}$$

Die Formel, welche Herr Röhlig in Berlin für das Potential der Walze angibt (J. v. Crelle, Bd. 61, S. 182), hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} P = \frac{b}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot X(b \sin \varphi - y, a \cos \varphi - x, c + z) \cdot d\varphi \\ + \frac{b}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot X(b \sin \varphi - y, a \cos \varphi - x, c - z) \cdot d\varphi \end{aligned}$$

a und b sind die Halbaxen der Randellipse, c ist die Höhe der Walze und der Function X wird durch die Formel

$$X(\alpha, \beta, \gamma) = \beta \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma} + \gamma \log \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta} - 2\alpha \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta \gamma}{\alpha \varrho}$$

wo $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, definirt.

Herr Hattendorff äussert sich in seinem neu erschienenen Werke über „Schwere, Electricität und Magnetismus“ folgendermassen: „Die Untersuchung (des Potentials der ellipt. Walze) lässt sich auf eine einfachere zurückführen. Man betrachte einen Cylinder, der mit dem gegebenen die krumme Oberfläche gemein hat, aber keine Endflächen besitzt, also von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ sich erstreckt. In seinem Innern sei die Dichtigkeit $= -\frac{1}{2}\rho$ von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und $= +\frac{1}{2}\rho$ von $x = 0$ bis $x = +\infty$. Auch hier soll die im Punkte (x, y, z) concentrirte pos. Masseneinheit angezogen werden von einer pos. Masse, dagegen abgestossen werden von einer neg. Masse. Man denke sich, die Potentialfunction dieser Masse sei bekannt, nämlich $F(x, y, z)$. Dann ist, wie man leicht sieht, $F(x - a, y, z)$ die Potentfalfunction, die von demselben Cylinder herrührt, wenn die Dichtigkeit $= -\frac{1}{2}\rho$ ist von $x = -\infty$ bis $x = +a$, und $= +\frac{1}{2}\rho$ von $x = +a$ bis $x = +\infty$. Durch Superposition erhält man

$$F(x, y, z) - F(x - a, y, z)$$

als Potentialfunction für den Fall, dass im Innern des Cylinders

die Dichtigkeit = 0 ist von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und von $x = a$ bis $x = +\infty$, dagegen ρ von $x = 0$ bis $x = a$. Dieser Fall ist der unserer Aufgabe.“ Ferner Seite 104: „Die Potentialfunction $F(x, y, z)$ kann man durch ein einfaches Integral nicht ausdrücken, wol aber jede der Kraft-Componenten X, Y, Z .“ Der Sinn dieser Behauptung kann nicht der sein, dass man die Function nicht durch einen einzigen Term, der ein einfaches Integral ist, sondern nur durch mehrere solche Terme darstellen könne; vielmehr muss die Behauptung bedeuten, dass man zur Darstellung der Function ein mehrfaches Integral bedürfe. Dann aber ist die Behauptung leicht zu widerlegen.

Ich will Herrn Hattendorffs X, Y, Z der Reihe nach mit (III), (I), (II) bezeichnen und seine $y, z, x, \beta^2, \gamma^2, a, s', t, \sigma', \sigma, \rho$ der Reihe nach mit $x, y, z, A, B, c, u, P, s, t, 1$ ersetzen. Sein σ' kommt mit unserem s nur so lange überein, als s pos. ist. Wenn s neg. ist, so ist sein $\sigma' = 0$. Sein $\sqrt{(t-x^2)}$ ist unser $W\sqrt{u}$ und

$$\text{statt seines } \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}} \text{ haben wir } \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(A+u)(B+u)}} \\ = \frac{\sqrt{AB}\sqrt{u}}{U}$$

$$(III) = X = \frac{\partial \bar{F}(x, y, z)}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W}{U} du = \frac{\partial F(z)}{\partial z}$$

$$(I) = Y = \frac{\partial \bar{F}(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} xz \int_t^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{du}{W\sqrt{u}} \\ + \frac{2\pi\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{x\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \\ = \frac{\partial F(z)}{\partial x} + \frac{2\pi\sqrt{AB}x}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} \\ = \frac{\partial F(x)}{\partial x} - \pi\sqrt{AB} \frac{\partial L(s)}{\partial x}$$

$$(II) = Z = \frac{\partial \bar{F}(x, y, z)}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot yz \int_t^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{du}{W\sqrt{u}} \\ - \frac{2\pi\sqrt{AB}y}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}}$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial y} - \frac{2\pi\sqrt{AB}y}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}}$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial y} - \pi\sqrt{AB} \frac{\partial L(s)}{\partial y}$$

somit

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial \bar{F}(x, y, z)}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{F}(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{F}(x, y, z)}{\partial x} dx$$

$$= \frac{\partial F(z)}{\partial z} dz + \frac{\partial F(z)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(z)}{\partial x} dx$$

$$- \pi\sqrt{AB} \left(\frac{\partial L(s)}{\partial y} + \frac{\partial L(s)}{\partial x} \right)$$

Diese Formeln gelten zunächst nur, wenn z und s pos. sind. Wenn aber z pos. und s neg. ist, so sind die Zusätze bei (I), (II) resp. $\frac{2\pi Bx}{A-B}$, $-\frac{2\pi Ay}{A-B}$. Demnach ist die Hattendorff'sche Potentialfunction im ersten Falle

$$\bar{F}(x, y, z) = F(z) - \pi\sqrt{AB} L(s)$$

und im zweiten Falle

$$\bar{F}(x, y, z) = F(z) - \pi\sqrt{AB} L(0)$$

Hieraus folgt

$$\square \bar{F}(x, y, z) = \square F(z) - \pi\sqrt{AB} \square L(s)$$

$$= 0 \quad \text{und}$$

$$\square \bar{F}(x, y, z) = \square F(z) - \pi\sqrt{AB} \square L(0)$$

$$= -2\pi$$

was der Dichtigkeit $\frac{1}{2}$ entspricht.

Ist aber z neg. und s pos., so erhält man

$$\bar{F}(x, y, z) = \pi\sqrt{AB} L(s) - F(-z)$$

und begibt sich schliesslich der Bezugspunkt in das Gebiet des Raumes, wo auch s neg. ist, so folgt

$$\bar{F}(x, y, z) = \pi\sqrt{AB} L(0) - F(-z)$$

also auch

$$\square \bar{F}(x, y, z) = \pi\sqrt{AB} \square L(s) - \square F(-z)$$

$$= 0 \quad \text{und}$$

$$\square \bar{F}(x, y, z) = \pi\sqrt{AB} \square L(0) - \square F(-z)$$

$$= 2\pi$$

was der Dichtigkeit $-\frac{1}{2}$ entspricht.

b) Ueber die Darstellung des Potentials der ellipt. Walze durch elliptische Integrale.

Schon Herr Röhlig bemerkt (Crelle, Bd. 61, S. 185), dass sich das Potential der Walze nicht lauter durch ellipt. Integrale erster, zweiter und dritter Art darstellen lasse, dass vielmehr neben denselben noch Integrale auftreten, die den Grad der elliptischen übersteigen. Auch dieses zeigen unsere Formeln.

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u}$$

$$\frac{P'}{PW\sqrt{u}} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-s} + \frac{1}{u-s''} - \frac{1}{A+u} - \frac{1}{B+u} \right) \times \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}}$$

also

$$\frac{L(u) \cdot P'}{PW\sqrt{u}} = \log(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}) \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{\sqrt{(A+u)(B+u)}}{R} - \frac{x^2}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{B+u}{R} + \frac{y^2}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} \cdot \frac{A+u}{R}$$

folglich

$$F(z) = \sqrt{AB} z \int_{t_0}^{\infty} \left[\log(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}) \cdot \frac{P' \sqrt{(A+u)(B+u)}}{P} - \frac{x^2(B+u)}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} + \frac{y^2(A+u)}{A-B} \cdot \frac{P'}{P} + \left(1 - \Sigma \frac{x^2}{A+u} \right) \right] \cdot \frac{du}{R}$$

Sondert man in diesem Ausdrucke den log. Teil ab, so lässt sich jeder Term des Restes in elliptische Integrale verwandeln, und das Integral

$$\int_i^{\infty} \frac{a+u}{b+u} \cdot \frac{du}{R} = \int_i^{\infty} \frac{du}{R} + (a-b) \int_i^{\infty} \frac{1}{b+u} \cdot \frac{du}{R}$$

bildet die allgemeine Formel der zu verwandelnden Integrale. Diese Verwandlung hier auszuführen, hat wenig Interesse, weil die auftretenden Formeln doch eine sehr compl. Gestalt haben werden. Es wird genügen, gezeigt zu haben, dass in der Function $F(z)$, also auch im Potential der Walze, neben ellipt. Integralen auch noch Integrale höherer Art auftreten, und dass sich ferner die zu verwandelnden ellipt. Integrale auf Formen zurück führen lassen, die bei der Betrachtung des Potentials des Ringes und der Scheibe schon verwandelt worden sind. *)

*) Arch. d. Math. u. Ph. 2. Reihe, T. III. u. IV.

c) Die Kraftkomponenten der elliptischen Walze.

a) Der Bezugspunkt liege oberhalb der obern Grundfläche.

Wir hatten

$$V = F(z) - F(z - c)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial F(z)}{\partial x} - \frac{\partial F(z - c)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\sqrt{AB}}{A - B} x \left[\int_{t_1}^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{(z-c) \cdot P'}{W_1 P} du - \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{z P'}{P W_0} du \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2\sqrt{AB}}{A - B} y \left[\int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{z P'}{P W_0} du - \int_{t_1}^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{(z-c) \cdot P'}{P W_1} du \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \cdot \left[\int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du - \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \right]$$

Begibt sich nun der Bezugspunkt in das Gebiet des Unendlichen, wo t und s sehr gross sind ($z - c$ kann endlich od. sehr gross sein), so erhält man aus den Formeln auf Seite 273

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\pi \sqrt{AB} x}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{z - c}{r'} - \frac{z}{r} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\pi \sqrt{AB} y}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{z - c}{r'} - \frac{z}{r} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\pi \sqrt{AB} \cdot \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$$

Ist nun z sehr gross, so kann man $-c$ als Differential von z ansehen; folglich ist

$$\frac{z - c}{r'} - \frac{z}{r} = -c \frac{\partial \left(\frac{z}{r} \right)}{\partial z} = -c \cdot \frac{r^2 - z^2}{r^3} = -c \cdot \frac{x^2 + y^2}{r^3}$$

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = -c \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -c \cdot \frac{z}{r^3}$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\pi \sqrt{AB} cx}{r^3} = - \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r^2} \cdot \cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\pi \sqrt{AB} cy}{r^3} = - \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r^2} \cdot \cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{\pi \sqrt{AB} cz}{r^3} = - \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r^2} \cdot \cos(rz)$$

Ist hingegen $z \rightarrow c$, also auch s endlich, so ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{z-c}{r'} - \frac{z}{r} \right) &= ((z-c)(x^2+y^2+z^2-2cz+c^2)^{-\frac{1}{2}} - z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{z}{r} \left(\left(1 - \frac{c}{z}\right) \left(1 + \frac{c^2 - 2cz}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{z}{r} \left(\left(1 - \frac{c}{z}\right) \left(1 + \frac{cz}{r^2}\right) - 1 \right) = \frac{z}{r} \left(-\frac{c}{z} + \frac{cz}{r^2} \right) \\ &= \frac{c}{r^2} (c^2 - r^2) = - \frac{c}{r^2} (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) &= \left(\frac{1}{r} - (x^2+y^2+z^2-2cz+c^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{cz}{r^2}\right) \right) \\ &= - \frac{cz}{r^2} \end{aligned}$$

Man erhält also wieder

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= - \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r^2} \cdot \cos(rx), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r^2} \cdot \cos(ry) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= - \frac{\pi \sqrt{AB} c}{r^2} \cdot \cos(rz) \end{aligned}$$

Liegt der Bezugspunkt in dem Gebiete des Unendlichen, wo nur t sehr gross ist, s also endlich bleibt, so erhält man nach den Formeln auf Seite 274

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= - \frac{\pi \sqrt{AB} x}{2} \left(\frac{1}{(z-c)^2} - \frac{1}{z^2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= - \frac{\pi \sqrt{AB} y}{2} \left(\frac{1}{(z-c)^2} - \frac{1}{z^2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \pi \sqrt{AB} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \end{aligned}$$

Weil nun z sehr gross ist, so kann man c als Differential von z betrachten. Es ist also

$$z = r, \quad \frac{1}{(z-c)^2} - \frac{1}{z^2} = -c \frac{\partial \left(\frac{1}{z^2} \right)}{\partial z} = \frac{2c}{z^3}$$

folglich

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\pi \sqrt{AB} cx}{r^3} = - \frac{\pi \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\pi \sqrt{AB} cy}{r^3} = - \frac{\pi \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{\pi \sqrt{AB} cz}{r^3} = - \frac{\pi \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(rz)$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(s)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} xc \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{2\pi y \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} yc \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2 \sqrt{AB} \cdot \left[\int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du - \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \right]$$

Rückt der Bezugspunkt auf der Ebene in's Unendliche, so erhält man annähernd

$$\begin{aligned} \frac{2\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} &= \frac{2\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \left(1 - \frac{A-B}{2s} + \dots \right) \\ &= \frac{2\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \left(1 - \frac{A-B}{2(x^2 + y^2)} \right) \end{aligned}$$

und

$$-\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} x c \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$= -\frac{\pi \sqrt{AB} x}{A-B} \left(2 - \frac{A-B}{x^2+y^2} + \frac{(A-B)c}{(x^2+y^2)r} \right)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi \sqrt{AB} cx}{(x^2+y^2)r} = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\pi \sqrt{AB} cy}{(x^2+y^2)r} = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\pi \sqrt{AB} c^2}{r^3} = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(rz)$$

c) Der Bezugspunkt liege in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse oberhalb der obern Grundfläche.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + 2\cos\eta \left[r_1 \sin\theta \left(A_1 + 1 - 2a \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) \right. \\ \left. + r_1 \cos\theta \left(\frac{\pi A}{A-B} - \theta \right) \right] - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} x z \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + 2\sin\eta \left[r_1 \sin\theta \left(A_1 + 1 - 2b \frac{\sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) \right. \\ \left. - r_1 \cos\theta \left(\frac{\pi B}{A-B} + \theta \right) \right] + \frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}} \int_{t_0}^{\infty} y z \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4\sqrt{AB}}{A-B} (a \sqrt{A+\sigma} + b \sqrt{B+\sigma}) \\ - 2r_1 \cos\theta \left(-A_1 - 1 + 2 \frac{aB \sqrt{A+\sigma} + bA \sqrt{-B-\sigma}}{(A-B) \cdot \sqrt{-\sigma}} \right) \\ + 2r_1 \sin\theta + 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du$$

d) Der Bezugspunkt liege auf der obern Randellipse.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} x c \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} y c \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4\sqrt{AB}}{A-B} (a\sqrt{A+\sigma} + b\sqrt{B+\sigma}) + 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du$$

e) Der Bezugspunkt liege auf der obern Grundfläche innerhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(s)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi x B}{A-B} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \int_{t_1}^{\infty} x c \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi y A}{A-B} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \int_{t_0}^{\infty} y c \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du - 2\sqrt{AB} \int_0^{\infty} \frac{W_1}{U} du$$

f) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze auf einer zwischen den beiden Grundflächen hindurch gehenden und mit denselben
 | Ebene.

Es ist

$$V = F(z) + F(c-z) - 2\pi \sqrt{AB} L(s)$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \int_{t_0}^{\infty} x z \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$- \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \int_{t_1}^{\infty} (x \cdot (c-z)) \cdot \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4\pi y \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \int_{t_0}^{\infty} y^2 \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$+ \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \cdot \int_{t_1}^{\infty} y(c-z) \cdot \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du - 2\sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du$$

Lässt man auch hier den Bezugspunkt in's Unendliche rücken, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \left(1 - \frac{A-B}{2s} + \dots \right)$$

$$- \frac{\pi \sqrt{AB} x}{A-B} \left(2 - \frac{A-B}{x^2+y^2} + \frac{(A-B) \cdot z}{r \cdot (x^2+y^2)} + \dots \right)$$

$$- \frac{\pi \sqrt{AB} x}{A-B} \left(2 - \frac{A-B}{x^2+y^2} + \frac{(A-B)(c-z)}{r \cdot (x^2+y^2)} + \dots \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi \sqrt{AB} x}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{z}{r} + \frac{c-z}{r_1} \right) = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = +\frac{\pi \sqrt{AB} y}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{z}{r} + \frac{c-z}{r_1} \right) = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \pi \sqrt{AB} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cdot \cos(rz)$$

g) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze auf einer zwischen den beiden Grundflächen hindurch gehenden und mit denselben
| Ebene.

Weil

$$V_1 = F(z) + F(c-z) - 2\pi \sqrt{AB} L(0)$$

so folgt

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{4\pi x B}{A-B} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} xz \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$- \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x \cdot (c-z) \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial y} &= -\frac{4\pi yA}{A-B} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} yz \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0\sqrt{u}} du \\ &\quad + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} y \cdot (c-z) \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1\sqrt{u}} du \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} &= 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du - 2\sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \end{aligned}$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der untern Grundfläche ausserhalb der Randellipse.

Aus der Formel

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(s)$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{2\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} xc \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1\sqrt{u}} du \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{2\pi y \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} yc \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1\sqrt{u}} du \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du - 2\sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \end{aligned}$$

Rückt der Bezugspunkt auf der Ebene in's Unendliche, so erhält man wie früher

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cos(rx)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cos(ry)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\pi c \sqrt{AB}}{r^2} \cos(rz)$$

i) Der Bezugspunkt liege ansserhalb der Walze zwischen den beiden Grundflächen und in unmittelbarer Nähe der untern Randellipse.

Nach f) haben wir noch den Ausdruck $\frac{4\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}}$ für ein kleines s zu entwickeln.

$$\begin{aligned} (B+s)^{\frac{1}{2}} \cdot (A+s)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{B^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{s}{2B} + \dots\right) \left(1 - \frac{s}{2A} + \dots\right) \\ &= \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \cdot \left(1 + s \frac{(A-B)}{2AB}\right) \end{aligned}$$

nach Seite 258 ist aber

$$s = 2pr \cos \theta - \frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta$$

somit

$$\frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \cdot \left(1 + \frac{A-B}{\sqrt{-\sigma}AB} \cdot r \cos \theta\right)$$

also

$$\frac{4\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} = \frac{4\pi x B}{A-B} \cdot \left(1 + \frac{A-B}{\sqrt{-\sigma}AB} \cdot r \cos \theta\right)$$

Nun ist

$$x = x_0 + r \cos \eta \cos \theta$$

(nach der auf Seite 255 angegebenen Erklärung). Ferner

$$\cos \eta = \frac{\sqrt{B(A+\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}} x_0$$

also

$$x = x_0 \left(1 + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}} \cdot r \cos \theta\right)$$

somit

$$\begin{aligned} \frac{4\pi x \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{B+s}}{\sqrt{A+s}} &= \frac{4\pi x_0 B}{A-B} \left(1 + \frac{A}{\sqrt{-\sigma}AB} r \cos \theta\right) \\ &= \frac{4\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{A}{\sqrt{-\sigma}AB} r \cos \theta\right) \end{aligned}$$

Man erhält demnach

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi A \sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta \\ &- 2 \cos \eta \left[r \sin \theta \left(A+1 - \frac{2a \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) + r \cos \theta \left(\frac{A\pi}{A-B} - \theta \right) \right] \\ &- \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x(c_i - z) \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \left(1 - \frac{A-B}{\sqrt{-\sigma AB}} \cdot r \cos \theta \right)$$

also

$$\frac{4\pi y \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} = \frac{4\pi y A}{A-B} \left(1 - \frac{A-B}{\sqrt{-\sigma AB}} \cdot r \cos \theta \right)$$

und weil

$$y = y_0 + r \sin \eta \cos \theta,$$

$$\sin \eta = \frac{\sqrt{A(-B-\sigma)}}{\sqrt{-\sigma(A-B)}}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{B(-B-\sigma)}}{\sqrt{A-B}}$$

also

$$\sin \eta = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}} \cdot y_0$$

$$y = y_0 \left(1 - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}} r \cos \theta \right) = \frac{\sqrt{B(-B-\sigma)}}{\sqrt{A-B}} \left(1 + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}} \cdot r \cos \theta \right)$$

so ist auch

$$\begin{aligned} \frac{4\pi y \sqrt{AB}}{A-B} \cdot \frac{\sqrt{A+s}}{\sqrt{B+s}} &= \frac{4\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} \\ &\times \left(1 + \left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{-\sigma B}} - \frac{A-B}{\sqrt{-\sigma AB}} \right) r \cos \theta \right) \\ &= \frac{4\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi B \sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} = & - \frac{2\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi B \sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta \\ & - 2 \sin \eta \left[r \cos \theta \left(A+1 - \frac{2b \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) - r \cos \theta \left(\frac{\pi B}{A-B} + \theta \right) \right] \\ & + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{i_1}^{\infty} y \cdot (c-z) \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} = & \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \left(a \sqrt{A+\sigma} + b \sqrt{-B-\sigma} \right) \\ & + 2r \cos \theta \left(-A-1 + 2 \cdot \frac{aB \sqrt{A+\sigma} + bA \sqrt{-B-\sigma}}{(A-B) \sqrt{-\sigma}} \right) \\ & - 2r \sin \theta \cdot \theta - 2\sqrt{AB} \int_{i_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \end{aligned}$$

t) Der Bezugspunkt liege innerhalb der Walze in unmittelbarer Nähe der untern Randellipse.

Weil hier

$$V_1 = F(z) + F(c-z) - 2\pi \sqrt{AB} L(0)$$

so hat man noch $\frac{4\pi x B}{A-B}$ und $-\frac{4\pi x A}{A-B}$ für einen solchen Punkt zu berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{4\pi Bx}{A-B} = & \frac{4\pi B}{A-B} x_0 \left(1 + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}} \cdot r \cos \theta \right) \\ = & \frac{4\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{-\sigma A}} \cdot r \cos \theta \right) \\ = & \frac{4\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi B \sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

und

$$-\frac{4\pi y A}{A-B} = -\frac{4\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi A \sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta$$

Für die Abgeleiteten ergeben sich nun folgende Werte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi B \sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta \\ &\quad - 2 \sin \eta \left[r \sin \theta \left(A+1 - \frac{2a \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) + r \cos \theta \frac{\pi A}{A-B} - \theta \right] \\ &\quad - \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x(c-z) \cdot \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= - \frac{2\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi A \sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot r \cos \theta \\ &\quad - 2 \sin \eta \left[r \sin \theta \left(A+1 - \frac{2b \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) - r \cos \theta \left(\frac{\pi B}{A-B} + \theta \right) \right] \\ &\quad + \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} y(c-z) \cdot \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{4 \sqrt{AB}}{A-B} \left(a \sqrt{A+\sigma} + b \sqrt{-B-\sigma} \right) \\ &\quad + 2r \cos \theta \left(-A-1 + 2 \cdot \frac{aB \sqrt{A+\sigma} + bA \sqrt{-B-\sigma}}{(A-B) \sqrt{-\sigma}} \right) \\ &\quad - 2r \sin \theta \cdot \theta - 2 \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \end{aligned}$$

1) Der Bezugspunkt liege auf der untern Randellipse.

Aus den Formeln bei i) oder f) folgt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x \cdot c \cdot \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{2\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} y \cdot c \cdot \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{4 \sqrt{AB}}{A-B} \left(a \sqrt{A+\sigma} + b \sqrt{-B-\sigma} - 2 \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \right)$$

m) Der Bezugspunkt liege auf der untern Grundfläche innerhalb der Randellipse.

$$V = F(c) - \pi \sqrt{AB} L(0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi xB}{A-B} - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x \cdot c \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi yA}{A-B} + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} y \cdot c \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_0^{\infty} \frac{W_0}{U} du - 2\sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du$$

n) Der Bezugspunkt liege unterhalb der untern Grundfläche.

$$V = F(c-z) - F(-z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = & \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} x(-z) \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du \\ & - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x(c-z) \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} = & -\frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} y(-z) \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du \\ & + \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} y(c-z) \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du - 2\sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du$$

o) Der Bezugspunkt liege unterhalb der untern Grundfläche in unmittelbarer Nähe der Randellipse.

In den früheren Ausdrücken für die Näherungswerte ersetze man θ durch $-\theta$; man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} \\ &+ 2 \cos \eta \left[r \cos \theta \left(\frac{\pi A}{A-B} + \theta \right) - r \sin \theta \left(A+1 - 2 \cdot \frac{a \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) \right] \\ &- \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x(c-z) \cdot \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= - \frac{2\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} \\ &- 2 \sin \eta \left[r \cos \theta \left(\frac{\pi B}{A-B} - \theta \right) + r \sin \theta \left(A+1 - 2 \cdot \frac{b \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) \right] \\ &+ \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} y \cdot (c-z) \cdot \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{CW_1 \sqrt{u}} du \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{4 \sqrt{AB}}{A-B} \left(a \sqrt{A+\sigma} - b \sqrt{-B-\sigma} \right) \\ &+ 2r \cos \theta \left(-A-1+2, \frac{aB \sqrt{A+\sigma} + bA \sqrt{-B-\sigma}}{(A-B) \sqrt{-\sigma}} \right) \\ &- 2r \cdot \sin \theta \cdot \theta - 2 \sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{W_1}{U} du \end{aligned}$$

p) Der Bezugspunkt liege ausserhalb der Walze zwischen den beiden Grundflächen in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi A \sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} \cdot r_1 \cos \theta \\ &- 2 \cos \eta \left[r_1 \cos \theta \left(\frac{A\pi}{A-B} + \theta \right) - r_1 \sin \theta \left(A_1+1 - \frac{2a \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) \right] \\ &- \frac{2 \sqrt{AB}}{B-B} \int_{t_0}^{\infty} xz \cdot \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi A \sqrt{B-B-\sigma}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi B \sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} \cdot r_1 \cos \theta$$

$$+ 2 \sin \eta \left[s_1 \cos \theta \left(\frac{B\pi}{A-B} + r_1 \sin \theta \left(A_1 + 1 - \frac{2b \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) \right) \right]$$

$$+ \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} yz \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4 \sqrt{AB}}{A-B} \left(a \sqrt{A+\sigma} + b \sqrt{-B-\sigma} \right)$$

$$- 2r_1 \cos \theta \left(-A_1 - 1 + 2 \frac{aB \sqrt{A+\sigma} + bA \sqrt{-B-\sigma}}{(A-B) \sqrt{-\sigma}} \right)$$

$$+ 2r_1 \sin \theta \cdot \theta + 2 \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du$$

q) Der Bezugspunkt liege in unmittelbarer Nähe der obern Randellipse innerhalb der Walze.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi B \sqrt{A(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\pi B \sqrt{B(A+\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} r_1 \cos \theta$$

$$- 2 \cos \eta \left[r_1 \cos \theta \left(\frac{\pi A}{A-B} + \theta \right) - r_1 \sin \theta \left(A_1 + 1 - \frac{2a \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{A+\sigma}} \right) \right]$$

$$- \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} xz \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\pi A \sqrt{B(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\pi B \sqrt{A(-B-\sigma)}}{(A-B)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-\sigma}} r_1 \cos \theta$$

$$+ 2 \sin \eta \left[r_1 \cos \theta \left(\frac{\pi B}{A-B} - \theta \right) + r_1 \sin \theta \left(A_1 + 1 - \frac{2b \sqrt{-\sigma}}{\sqrt{-B-\sigma}} \right) \right]$$

$$+ \frac{2 \sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^{\infty} yz \frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4 \sqrt{AB}}{A-B} \left(a \sqrt{A+\sigma} + b \sqrt{-B-\sigma} \right)$$

$$-2r_1 \cos \theta \left(-A_1 - 1 + 2 \frac{aB \sqrt{A+\sigma} + bA \sqrt{-B-\sigma}}{(A-B) \sqrt{-\sigma}} \right) \\ + 2r_1 \sin \theta \cdot \theta + 2 \sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{W_0}{U} du$$

d) Berechnung des Differentialparameters zweiter Ordnung der Function V .

Wir haben früher bewiesen, dass $\square F(z)$ im ganzen Raume verschwindet mit Ausnahme der zu dieser Function gehörenden Unstetigkeitscurve $\left(z = 0, \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1 \right)$. Weil nun

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \frac{\partial F(z-c)}{\partial z}, \quad \frac{\partial F(c-z)}{\partial z} = - \frac{\partial F(c-z)}{\partial(c-z)} \\ \frac{\partial^2 F(c-z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F(c-z)}{\partial(c-z)^2}$$

so verschwinden auch $\square F(c-z)$ und $\square F(z-c)$ im ganzen Raume mit Ausnahme der Unstetigkeitscurve $\left(z = 0, \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1 \right)$; weil ferner

$$\square L(s) = 0, \quad 2\pi \square (\sqrt{AB} L(0) - (z-c)^2) = 0$$

so verschwindet $\square V$ im ganzen Raume mit Ausnahme der bezeichneten Unstetigkeitscurve. Bezeichnet nun V_1 das Potential für einen inneren Punkt, so ist

$$V = V_1 + 2\pi(c-z)^2, \quad V = V_1 + 2\pi z^2 \\ V = V_1 + 2\pi \sqrt{AB} (L(0) - L(s))$$

je nachdem man den Bezugspunkt durch die obere oder untere Grundfläche oder durch die Seitenfläche in die Walze hinein führt.

Weil nun überall $\square V = 0$ ist, so folgt

$$\square (V_1 + 2\pi(c-z)^2) = 0$$

oder

$$\square V_1 = -4\pi$$

was der Dichtigkeit 1 entspricht.

Ich will hier noch zeigen, dass durch die Einführung der Function

$$M(u) = L(u) + \frac{x^2 - y^2}{A - B}$$

statt $L(u)$ die auftretenden Formeln eine solche Gestalt erhalten, dass der Uebergang zum Kreiscylinder unmittelbar, also ohne Grenzprocess vollzogen werden kann. Weil

$$L(u) = M(u) - \frac{x^2 - y^2}{A - B}$$

so ist

$$\begin{aligned} F(z) &= \sqrt{AB} \int_i^\infty \left(\left(M(u) - \frac{x^2 - y^2}{A - B} \right) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U} \right) du \\ &= \sqrt{AB} \int_i^\infty \left(M(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U} \right) du \\ &\quad - \sqrt{AB} \frac{x^2 - y^2}{A - B} \int_i^\infty \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} du \end{aligned}$$

Nun war

$$-\frac{2\partial\eta}{\partial u} = \frac{P'z}{PW\sqrt{u}}$$

also

$$\int_i^\infty \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \cdot du = -2 \int_i^\infty \frac{\partial\eta}{\partial u} du = \left[-2\pi \right]_i^\infty = \pi$$

und somit

$$F(z) = \sqrt{AB} \int_i^\infty \left(M(u) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U} \right) du - \pi \sqrt{AB} \cdot \frac{x^2 - y^2}{A - B}$$

also

$$\begin{aligned} \text{I } V = F(z) - F(z - c) &= \sqrt{AB} \int_{i_0}^\infty \left(M(u) \cdot \frac{zP'}{PW_0\sqrt{u}} + \frac{zW_0}{U} \right) du \\ &\quad - \sqrt{AB} \int_{i_1}^\infty \left(M(u) \cdot \frac{(z-c)P'}{PW_1\sqrt{u}} + \frac{(z-c)W_1}{U} \right) du \end{aligned}$$

Weil nun

$$M(u) = \log \left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u} \right) + \frac{x^2}{A-B} \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{y^2}{A-B} \left(\frac{\sqrt{A+u}}{\sqrt{B+u}} - 1 \right) = \log \left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u} \right) \\
 & + \frac{x^2}{A-B} \left(\frac{\sqrt{A+u} - \sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right) + \frac{y^2}{A-B} \left(\frac{\sqrt{A+u} - \sqrt{B+u}}{\sqrt{B+u}} \right) \\
 & = \log \left(\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u} \right) + \frac{1}{\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u}} \\
 & \times \left(\frac{x^2}{\sqrt{A+u}} + \frac{y^2}{\sqrt{B+u}} \right)
 \end{aligned}$$

so gestattet die Formel I unmittelbar den Uebergang zum Kreis-
cylinder. Ferner ist

$$\frac{\partial M(u)}{\partial x} = \frac{2x}{A-B} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \right) = - 2xz \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{(A+u)} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW} \right)$$

folglich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(M(u) \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + \frac{zW}{U} \right) &= \frac{2x}{A-B} \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} \\
 & - 2xz M(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{(A+u)} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW} \right) - \frac{zx}{A+u} \cdot \frac{1}{UW} \\
 & = \frac{2x}{A-B} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right) \cdot \frac{zP'}{PW\sqrt{u}} + 2xz \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{M(u)}{(A+u)} \cdot \frac{\sqrt{u}}{PW} \right)
 \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = \frac{\sqrt{AB}}{A-B} \int z x \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right) \cdot \frac{P' du}{PW\sqrt{u}} - \frac{2\pi x \sqrt{AB}}{A-B}$$

(Weg eine rechtl. Schlinge aus dem Ostpunkte um t allein)

oder

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_t^\infty z x \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right) \cdot \frac{P'}{PW\sqrt{u}} du - \frac{2\pi x \sqrt{AB}}{A-B}$$

somit

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_0}^\infty z x \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}} \right) \cdot \frac{P'}{PW_0\sqrt{u}} du$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \int_{t_1}^{\infty} x(z-c) \left(1 - \frac{\sqrt{B+u}}{\sqrt{A+u}}\right) \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du \\
& = 2\sqrt{AB} \int_{t_0}^{\infty} \frac{xz}{\sqrt{A+u} (\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u})} \cdot \frac{P'}{PW_0 \sqrt{u}} du \\
& - 2\sqrt{AB} \int_{t_1}^{\infty} \frac{x(z-c)}{\sqrt{A+u} (\sqrt{A+u} + \sqrt{B+u})} \cdot \frac{P'}{PW_1 \sqrt{u}} du
\end{aligned}$$

Auch in dieser Formel kann man sogleich $A = B$ setzen, um den entsprechenden Ausdruck für den Kreiscylinder zu erhalten.

Bern, den 22. Febr. 1884.

XV.

Ueber Cassinische Curven.

Von

Ulrich Bigler.

Ich betrachte zunächst die Abbildung der Function $F = t^2 - 1$. Das Bild der t Ebene ist eine zweiblättrige Ebene, die durch die beiden Verzweigungspunkte -1 und ∞ mit einander verbunden sind und sich längs der Uebergangslinie von -1 bis zum Westpunkte des Horizontes gegenseitig durchdringen. Isophasen nenne ich solche Curven auf der t Ebene, längs welchen die Function die gleiche Phase behält. Isotimen sollen solche Curven bezeichnen, längs welchen der absolute Wert der Function constant bleibt. Ich setze nun

$$re^{i\zeta} = t - 1, \quad se^{i\eta} = t + 1$$

dann ist

$$F = rse^{i(\zeta+\eta)}, \quad F' = rse^{-i(\zeta+\eta)}$$

Für eine Isotime muss nun $sr = \text{Const} = a$ sein. Bezeichnen nun x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der t Ebene, so ist

$$r^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad s^2 = (x+1)^2 + y^2$$

und man erhält für eine Isolime, die dem absoluten Werte a entspricht, die Gleichung

$$1) \quad (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = r^2 s^2 = a^2$$

$a = 1$ gibt die Lemniskate mit den Polen 1 und -1 ; $a < 1$ gibt zwei getrennte Curven, die die Nullpunkte der Function umgeben und innerhalb der Lemniskatenschleifen liegen; $a > 1$ gibt eine geschlossene Curve, die die Lemniskate umgibt.

Setzt man $\zeta + \eta = \text{Const} = \alpha$, so erhält man auf dem t Felde die Isophasen. In diesem Falle ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{tg } \zeta + \text{tg } \eta}{1 - \text{tg } \zeta \text{tg } \eta} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1}$$

somit die Gleichung einer Isophase

$$2) \quad (x^2 - y^2) \sin \alpha - 2xy \cos \alpha = \sin \alpha$$

Durch die Substitution

$$\begin{aligned} x &= \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) t - \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) u \\ y &= \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) t + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) u \end{aligned}$$

verwandelt sich diese Gleichung in

$$3) \quad t^2 - u^2 = \sin \alpha$$

Die Isophasen sind also gleichseitige Hyperbeln mit den Halbaxenquadraten $\sin \alpha$. Wird der Winkel, den die t Axe mit der x Axe bildet, mit θ bezeichnet und die Entfernung des Brennpunktes vom Ursprunge mit c , so hat man

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad \cos \theta = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad c = \sqrt{2 \sin \alpha}$$

somit die Coordinaten des Brennpunktes der gleichseitigen Hyperbel

$$t' = \sqrt{\sin \alpha} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad u' = \sqrt{\sin \alpha} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

Wird aus diesen beiden Gleichungen der Winkel α eliminirt, so erhält man für die Coordinaten der Brennpunkte die Gleichung:

$$4) \quad (t'^2 + u'^2 + 1)^2 - 4u'^2 = 1$$

Aus dieser Formel erkennt man nun, dass die Brennpunkte auf der Isotime, die dem abs. Werte t entspricht, also auf der Lemniskate liegen. Aus Gleichung 2) erkennt man auch, dass sich alle Hyperbeln in den Punkten $+1$ und -1 schneiden. Wenn $F = N^2 - t^2 - 1$ gesetzt wird, wo N eine pos. sehr grosse Zahl bedeutet, so sei im Ostpunkte des ersten Blattes der F Ebene $t = N$ und im gleichen Punkte des zweiten Blattes $t = -N$. Das Innere der östl. Lemniskatenschleife bildet sich in das Innere des Einheitskreises des ersten Blattes ab, während sich das Innere der westl. Schleife in das Innere des Einheitskreises des zweiten Blattes abbildet. Ferner ist das Aeusserere des Einheitskreises des ersten Blattes Bild desjenigen Theiles

der t Ebene, der östlich der lateralen Axe und ausserhalb der Lemniskatenschleife liegt. Ebenso ist das Aeusserere des Einheitskreises des zweiten Blattes Bild des Aeusseren der westl. Lemniskatenschleife, das westl. der lateralen Axe liegt. Die Realitätslinie des t Feldes vom Punkte 1 an bis zum Ostpunkte gibt als Bild den östl. Teil der Realitätslinie des ersten Blattes der F Ebene. Läuft ferner t von 1 bis null, dann auf der lateralen Axe bis zum Nordpunkte, so durchläuft die Function F von null an die westl. Hälfte der Realitätslinie des ersten Blattes. Bewegt sich ferner t vom Punkte -1 aus nach dem Westpunkte, so durchläuft F den östlichen Teil der Realitätslinie des zweiten Blattes, während der westl. Teil derselben Realitätslinie Bild der Realitätslinie des t Feldes von -1 bis null und der südl. Hälfte der lateralen Axe ist. Ferner bildet sich die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ auf der lateralen Axe der F Ebene ab und zwar der östl. Zweig im obern Blatte und der westl. Zweig im untern Blatte.

Im Folgenden sollen die Isotimen oder die Cassinischen Curven noch näher betrachtet werden und zwar zunächst für den Fall $a < 1$ und dann für den Fall $a > 1$. Zur Abkürzung setze ich:

$$\sin am u = S(u), \quad \cos am u = C(u), \quad \Delta am u = D(u)$$

I. $a < 1$.

Es ist

$$F = t^2 - 1 = (x + iy)^2 - 1$$

Ich setze nun

$$(x + iy)^2 = D^2u, \quad (x - iy)^2 = D^2v$$

somit

$$F = -k^2 S^2u, \quad F' = -k^2 S^2v$$

und demnach

$$5) \quad F \cdot F' = k^4 S^2u S^2v = a^2$$

Setzt man nun $k = a$, so folgt aus Gleichung 5)

$$5') \quad Su \cdot S'v = -\frac{1}{k}$$

und vermöge der Formel

$$S(L-x) Sx = -\frac{1}{k}$$

kann man nun auf $u + v = L$ schliessen. Ich setze nun

$$u = \frac{L}{2} - z, \quad v = \frac{L}{2} + z$$

und finde so

$$x + iy = D\left(\frac{L}{2} - z\right), \quad x - iy = D\left(\frac{L}{2} + z\right)$$

folglich

$$6) \quad x = \sqrt{1+k} \cdot \frac{Dz}{1+kS^2z}, \quad y = \sqrt{1+k} \cdot \frac{kSz Cz}{1+kS^2z}$$

Setzt man hier $z = 0$, so folgt

$$x = \sqrt{1+k}, \quad y = 0$$

setzt man ferner $z = K$, so ergibt sich

$$x = \sqrt{1-k}, \quad y = 0$$

Setze ich ferner $z = 2K - z'$, so ist

$$x = \sqrt{1+k} \cdot \frac{Dz'}{1+kS^2z'} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{1+k} \cdot \frac{kSz' Cz'}{1+kS^2z'}$$

Um also den Teil der Curve zu erhalten, der innerhalb der östl. Schleife der Lemniskate liegt, muss man z von null bis $2K$ laufen lassen. Den andern Teil der Curve, der innerhalb der westl. Lemniskatenschleife liegt, erhält man, wenn z von $2L$ an bis zu $2L+2K$ wächst. Die Länge des Strahles, der einen Punkt der Curve mit dem Ursprunge verbindet, sei mit r bezeichnet. Weil nun $r^2 = x^2 + y^2$ ist, so folgt aus Gleichung 6) sofort

$$7) \quad r = \sqrt{1+k} \cdot \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}}$$

Das Curvelement kann nach Grösse und Richtung durch $dx + i dy$ dargestellt werden. Nun ist aber

$$dx + i dy = dD\left(\frac{L}{2} - z\right) = k^2 S\left(\frac{L}{2} - z\right) C\left(\frac{L}{2} - z\right) dz$$

folglich

$$\begin{aligned} & (dx + i dy)(dx - i dy) \\ &= k^4 S\left(\frac{L}{2} - z\right) C\left(\frac{L}{2} + z\right) S\left(\frac{L}{2} + z\right) C\left(\frac{L}{2} - z\right) dz^2 \end{aligned}$$

Weil aber

$$kS\left(\frac{L}{2} - z\right) C\left(\frac{L}{2} + z\right) = iD\left(\frac{L}{2} - z\right)$$

so ist auch

$$ds^2 = k^2 D\left(\frac{L}{2} - z\right) D\left(\frac{L}{2} + z\right) dz^2$$

oder auch

$$8) \quad ds = k r dz$$

Um das Azimut des Curvelementes zu erhalten, bezeichne ich die Phase von $C\left(\frac{L}{2} - z\right)$ mit χ und schreibe

$$\text{Phase} \left(C\left(\frac{L}{2} - z\right) \right) = \chi$$

also ist

$$\text{Phase} \left(C\left(\frac{L}{2} + z\right) \right) = -\chi$$

Aus der Formel

$$kS\left(\frac{L}{2} - z\right) C\left(\frac{L}{2} + z\right) = iD\left(\frac{L}{2} - z\right)$$

folgt ferner, dass

$$\text{Phase} \left(S\left(\frac{L}{2} - z\right) \right) = \frac{\pi}{2} + \varphi + \chi$$

ist, wenn das Azimut des Leitstrahles r mit φ bezeichnet wird. Man hat somit

$$9) \quad \text{Phase} (ds) = \frac{\pi}{2} + \varphi + 2\chi$$

Weil

$$C\left(\frac{L}{2} - z\right) = \sqrt{\frac{1+k}{k}} \cdot \frac{Cz + iSz Dz}{1+kS^2z}$$

$$D\left(\frac{L}{2} - z\right) = \sqrt{1+k} \cdot \frac{Dz + ikSz Cz}{1+kS^2z}$$

so erhält man für die Tangenten von φ und χ die Ausdrücke

$$\text{tg } \chi = \frac{Sz Dz}{Cz}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{kSz Cz}{Dz}$$

Ist nun $z = 0$, so ist $\chi = 0$ und $\varphi = 0$, somit

$$\text{Phase} (ds) = \frac{\pi}{2}$$

Ist $z = K$, so ergibt sich

$$\chi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

folglich

$$\text{Phase} (ds) = \frac{3\pi}{2}$$

Die Curve schneidet also die Abscissenaxe rechtwinklig. Im Punkte

$z = \frac{K}{2}$ ist $\chi = \frac{\pi}{4}$ somit

$$\text{Phase} (ds) = \pi + \varphi$$

Der Leitstrahl r , der nach diesem Punkte hinget, ist somit Tan-

gente an die Curve, und seine Länge r'' ist nach Formel 7) gleich \sqrt{l} . Die Tangente des Polarwinkels φ wächst also von null bis zu dem Werte $\frac{\sqrt{1-l}}{\sqrt{1+l}}$ und sinkt von hier aus wieder auf null herab, um nachher in's Negative über zu gehen. In $K-z$ hat die Tangente von φ den gleichen Wert, wie im Punkte z ; somit entsprechen den beiden Schnittpunkten des Leitstrahles r mit der Curve die Werte $K-z$ und z . Werden die Längen mit r und r' bezeichnet, so hat man

$$10) \quad r r' = l = r''^2$$

also gleich dem Quadrat der Tangente, die vom Ursprunge aus an die Curve gelegt wird. Weil ferner für den Punkt $K-z$

$$\operatorname{tg} \chi' = \operatorname{cotg} \chi$$

also

$$\chi' = \frac{\pi}{2} - \chi$$

ist, so hat man als Phase des Curvenelementes im Punkte $K-z$

$$\text{Phase } (ds) = \frac{3\pi}{2} + \varphi - 2\chi$$

Die beiden Tangenten in den Punkten z und $K-z$ bilden also mit der Sehne als Basis ein gleichschenkliges Dreieck.

Aus Formel 8) folgt sogleich

$$11) \quad s = k \sqrt{1+k} \int_0^s \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}} dz$$

Weil aber

$$\sqrt{1+k} = \sqrt{\frac{1+l}{2}} + \sqrt{\frac{1-l}{2}}, \quad -k = -2 \sqrt{\frac{1+l}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-l}{2}}$$

so kann man der Formel 11) auch folgende Gestalt geben:

$$12) \quad s = k \left(\sqrt{\frac{1+l}{2}} \int_0^s \frac{1-(1-l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}} dz + \sqrt{\frac{1-l}{2}} \int_0^s \frac{1-(1+l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}} dz \right)$$

Ich setze nun

$$T = \sqrt{\frac{1+l}{2}} \int_0^z \frac{1-(1-l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}} dz$$

$$U = \sqrt{\frac{1-l}{2}} \int_0^z \frac{1-(1+l)S^2}{\sqrt{1-k^2S^4}} dz$$

Um das Integral T umzuformen, setze ich

$$t = \frac{1-(1+l)S^2}{D}$$

dann ist

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -(1+l)^2 \frac{SC}{D^2} (1-(1-l)S^2)$$

also

$$dz = -\frac{1}{(1+l)^2} \cdot \frac{D^2}{SC} \cdot \frac{dt}{1-(1-l)S^2}$$

$$\sqrt{1-t^2} = (1+l) \frac{SC}{D}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1+l}{2}}}{\sqrt{1-\frac{1-l}{2}t^2}} = \frac{Dz}{\sqrt{1-k^2S^4}}$$

folglich

$$dT = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \left(1-\frac{1-l}{2}t^2\right)}}$$

Um das Integral U auf ähnliche Art umzuformen, setze man

$$u = \frac{1-(1-l)S^2}{D}$$

man findet

$$dU = -\frac{1}{2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1-u^2) \left(1-\frac{1+l}{2}u^2\right)}}$$

Nun müssen noch die Grenzen für die neuen Variablen t und u bestimmt werden. Ist $z = 0$, so ist $t = 1$, und ist $z = \frac{K}{2}$, so ist $t = 0$.

Weil ferner für das Intervall $0 < z < K$ mit wachsendem z die Variable t beständig abnimmt, so sinkt t von 1 an fortwährend bis auf null herab, während z von null an bis auf $\frac{K}{2}$ wächst. Ebenso

ist für $z = 0$ auch $u = 1$, und für $z = \frac{K}{2}$ ist $u = \frac{2\sqrt{l}}{1+l}$. In dem Intervalle $0 < z < \frac{K}{2}$ ist aber auch du beständig neg., wenn dz pos. ist. Läuft also z von null bis $\frac{K}{2}$, so sinkt u von 1 an fortwährend bis auf $\frac{2\sqrt{l}}{1+l}$ herab. Die Länge des Bogens, der von $z = 0$ bis $z = \frac{K}{2}$ reicht, ist demnach

$$13) \quad s = \frac{k}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(u-t^2) \left(1 - \frac{1-l}{2} t^2\right)}} + \frac{k}{2} \int_{\frac{2\sqrt{l}}{1+l}}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2) \left(1 - \frac{1+l}{2} u^2\right)}}$$

Lässt man z von $\frac{K}{2}$ bis K wachsen, so ist dt beständig neg.; t nimmt also von null aus fortwährend ab und erreicht schliesslich den Wert -1 . Anders ist es mit u . Der Punkt $z = \frac{K}{2}$ ist für u ein Minimum, und während z von $\frac{K}{2}$ auf K steigt, nimmt auch u von $\frac{2\sqrt{l}}{1+l}$ bis auf 1 fortwährend zu. Die Länge des Bogens, der vom Punkte $\frac{K}{2}$ bis zum Punkte k reicht, ist also

$$14) \quad s' = \frac{k}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \left(1 - \frac{1-l}{2} t^2\right)}} - \frac{k}{2} \int_{\frac{2\sqrt{l}}{1+l}}^1 \frac{du}{\sqrt{(u-u^2) \left(1 - \frac{1+l}{2} u^2\right)}}$$

Aus 13) und 14) folgt nun

$$15) \quad s + s' = kK \left(\sqrt{\frac{1-l}{2}} \right)$$

somit der Umfang der Curve, den ich mit U bezeichnen will,

$$16) \quad U = 2kK \left(\sqrt{\frac{1-l}{2}} \right)$$

Ist nun $a = k$ sehr klein, so folgt aus 16)

$$16') \quad U = 2 \left(\frac{a}{2} \right) \pi$$

also gleich dem Umfange eines Kreises, dessen Radius $\frac{a}{2}$ ist.

Wir wollen noch den Inhalt der von der Curve umschlossenen Fläche berechnen. Vom Ursprunge aus ziehe man unter dem Azimute φ einen Strahl, der die Curve in den Punkten $K-z$ und z schneidet. Werden die Abschnitte resp. mit r' und r bezeichnet, so kann ein Flächenstück \mathfrak{S} durch folgendes Integral dargestellt werden:

$$17) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} \int_0^s \left(r^2 \frac{d\varphi}{dz} - r'^2 \frac{d\varphi}{dz} \right) dz$$

Ich setze nun

$$\Omega(z) = r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

also

$$\Omega(K-z) = - \frac{r'^2 \partial \varphi}{\partial (k-z)}$$

folglich

$$18) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^s (\Omega(z) + \Omega(K-z)) dz$$

Es ist nun

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\frac{\partial \operatorname{tg} \varphi}{\partial z}}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \varphi}{\partial z} = \frac{D^4 - l^2}{kD^2} = \frac{k(C^2 - S^2 D^2)}{D^2}$$

somit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{k(C^2 - S^2 D^2)}{D^2 + k^2 S^2 C^2} = k \cdot \frac{C^2 - S^2 D^2}{1 - k^2 S^4}$$

und demnach

$$\Omega(z) = k(1+k) \cdot \frac{C^2 - S^2 D^2}{(1+kS^2)^2}$$

folglich auch

$$\Omega(K-z) = -k(1-k) \cdot \frac{C^2 - S^2 D^2}{(1-k^2 S^2)^2}$$

Aus diesen zwei Formeln ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \Omega(z) + \Omega(K-z) &= 2k^2 \left(\frac{C^2 - S^2 D^2}{1 - k^2 S^4} \right)^2 = 2k^2 C^2(2z) \\ &= 2(D^2(2z) - l^2) \end{aligned}$$

also ist auch

$$19) \quad \mathfrak{S} = \int_0^s (D^2(2z) - l^2) dz = \frac{1}{2} E \operatorname{am} 2z - l^2 z$$

Um die Hälfte des Inhaltes der Fläche zu erhalten, muss man

$z = \frac{K}{2}$ setzen, und die Multiplication mit 2 gibt dann schliesslich den vollen Inhalt. Bezeichne ich denselben mit J , so ist

$$20) \quad J = E - l^2 K$$

Aus den Formeln

$$E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_1^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n} \right)^2 k^{2n} \right)$$

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n} \right)^2 k^{2n} \right)$$

erkennt man leicht, dass

$$E - l^2 K = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{2n}{(2n-1)^2} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n} \right)^2 k^{2n}$$

ist, also für ein kleines k oder a hat man

$$20') \quad J = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

Zu der Formel 20) kann man auch auf folgendem Wege gelangen:

$\frac{r^2 d\varphi}{2}$ ist der Inhalt eines infinitesimalen Sectors, der seine Spitze im Ursprunge hat. Also

$$d\mathfrak{S} = \frac{r^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

folglich

$$21) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} \int_0^s r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{k(1+k)}{2} \int_0^s \frac{(1-2s^2+k^2s^4)}{(1+ks^2)^2} dz$$

Ich setze nun

$$1 + kS^2 = p$$

also

$$\frac{k(1+k)}{2} \frac{(1-2S^2+k^2S^4)}{(1+kS^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + k(1+k) \right)$$

Ferner ist

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log p}{\partial z} = \frac{k SCD}{p}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kSCD}{p} \right) &= p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{kSCD}{p} \right)^2 = p \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{(1+k)^2}{p^2} + \frac{2(1+k)^2}{p} \right. \\ &\quad \left. - ((1+k) + k) + kp \right) \\ &= \frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + kp \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{k(1+k)}{2} \frac{(1-2S^2+k^2S^4)}{(1+kS^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kSCD}{p} \right) - kp + k(1+k) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kSCD}{p} \right) + D^2 - l^2 \right)$$

und somit ist

$$22) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} \left(\frac{kSCD}{1+kS^2} + E \operatorname{am} z - l^2 z \right)$$

Setzt man in dieser Formel $z = K$ und multipl. mit 2, so folgt

$$23) \quad J = E - l^2 K$$

II. $a > 1$

In diesem Falle setze ich

$$(x+iy)^2 = C^2 u, \quad (x-iy)^2 = C^2 v$$

somit

$$F = -S^2 u, \quad F' = -S^2 v$$

folglich

$$24) \quad F \cdot F' = S^2 S^2 v = a^2$$

Weil nun $a > 1$ ist, so setze ich $k = \frac{1}{a}$ und erhalte aus 24)

$$24') \quad Su \cdot Sv = -\frac{1}{k}$$

Wie im ersten Falle, wo $a < 1$ war, nehme ich auch hier an, dass $u+v = L$ sei, und setze

$$u = \frac{L}{2} - z, \quad v = \frac{L}{2} + z$$

somit

$$x+iy = C \left(\frac{L}{2} - z \right), \quad x-iy = C \left(\frac{L}{2} + z \right)$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun

$$25) \quad x = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} \frac{Cz}{1+kS^2}, \quad y = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{Sz Dz}{1+kS^2 z}$$

und aus diesen Werten für x und y erkennt man sogleich, dass z von null bis $4k$ laufen muss, damit der Punkt (x, y) die ganze Curve beschreibe. Dieselbe wird ferner durch die beiden Axen in 4 congruente Teile geteilt. $z = 0$ und $z = 2K$ geben die Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, während $z = K$ und $z = 3K$ diejenigen mit der Ordinatenaxe geben. Aus Gleichung 25) folgt

$$26) \quad r = \frac{\sqrt{1+k} \sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{k} \sqrt{1+kS^2}}$$

Wird der Strahl nach dem Punkte $K-z$ mit r' bezeichnet, so folgt aus 26), dass

$$26') \quad r' = \frac{\sqrt{1-k} \sqrt{1+kS^2}}{\sqrt{k} \sqrt{1-kS^2}}$$

und für den Strahl r'' nach dem Punkte $z - \frac{K}{2}$ erhält man

$$r'' = \sqrt{\frac{l}{k}}$$

folglich

$$27) \quad rr' = \frac{l}{k} = r''^2$$

Um das Curvenelement zu erhalten, gehe ich von der Formel

$$x + iy = C \left(\frac{L}{2} - z \right)$$

aus. Es ist

$$dx + i dy = dC \left(\frac{L}{2} - z \right) = S \left(\frac{L}{2} - z \right) \left(D \left(\frac{L}{2} - z \right) dz \right)$$

somit

$$\begin{aligned} d(x + i dy)(dx - i dy) &= -S \left(\frac{L}{2} + z \right) D \left(\frac{L}{2} - z \right) S \left(\frac{L}{2} - z \right) \\ &\quad D \left(\frac{L}{2} + z \right) dz^2 \\ &= C \left(\frac{L}{2} - z \right) C \left(\frac{L}{2} - z \right) dz^2 \end{aligned}$$

folglich ist

$$28) \quad ds = r dz$$

Aus dieser Formel folgt nun sogleich

$$29) \quad s = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} \int_0^z \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}} dz$$

also der ganze Umfang

$$29') \quad U = 4 \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} \int_0^K \frac{\sqrt{1-kS^2}}{\sqrt{1+kS^2}} dz$$

oder nach früherem

$$30) \quad U = \frac{4}{k} K \left(\sqrt{\frac{1-l}{2}} \right)$$

Ist a sehr gross, so folgt aus dieser Formel

$$30') \quad U = 2\sqrt{a} \pi$$

Wird der Winkel, den der Leitstrahl r mit der Abscissenaxe bildet, mit φ bezeichnet und der Inhalt eines Sectors der Fläche mit \mathfrak{S} , so ist

$$d\mathfrak{S} = \frac{r^2}{2} d\varphi$$

somit

$$31) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} \int_0^s r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

Aus der Formel

$$x + iy = C \left(\frac{L}{2} - z \right)$$

erkennt man sofort, dass

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S_z D_z}{C_z}$$

ist, somit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1 - 2k^2 S^2 + k^2 S^4}{1 - k^2 S^4}$$

folglich

$$32) \quad \mathfrak{S} = \frac{1+k}{2k} \int_0^s \frac{1 - 2k^2 S^2 + k^2 S^4}{(1 + kS^2)^2} dz$$

Ich setze nun wieder

$$1 + kS^2 = p$$

somit

$$(1+k) \frac{1 - 2k^2 S^2 + k^2 S^4}{(1 + kS^2)^2} = \frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + (1+k)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kSCD}{p} \right) = \frac{2(1+k)^2}{p^2} - \frac{2(1+k)^2}{p} + kp$$

folglich

$$33) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2k} \int_0^s \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kSCD}{p} \right) + D^2 \right) dz$$

$$34) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2h} \left(\frac{kSCD}{1+kS^2} + E \operatorname{am} z \right)$$

Um den vollen Inhalt zu erhalten, muss $z = K$ gesetzt und mit 4 multiplicirt werden; also

$$35) \quad J = \frac{2E}{k}$$

Das Integral $\int_0^s \frac{1 - 2k^2 S^2 + k^2 S^4}{(1 + kS^2)^2} dz$ steht mit der Gleichung des Periodenverhältnisses in Zusammenhang.

$$z' = (1+k)z, \quad K' = (1+k)K, \quad L' = \frac{1+k}{2}L, \quad S' = \frac{(1+k)S}{1+kS^2}$$

$$C' = \frac{CD}{1+kS^2}, \quad D' = \frac{1-kS^2}{1+kS^2}$$

$$\frac{1+k}{2}(L'+D'^2) = \frac{\frac{1}{2}}{(1+kS^2)^2} ((1-k)(1+kS^2)^2 + (1+k)(1-kS^2)^2)$$

$$= \frac{1-2k^2S^2+k^2S^4}{(1+kS^2)^2}$$

folglich ist

$$\int_0^z \frac{1-2k^2S^2+k^2S^4}{(1+kS^2)^2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{z'} (L'+D'^2) dz'$$

Für den Zweck der Integration ist damit aber nichts gewonnen; denn um E' am (z') in den auf k und z bezüglichen Functionen auszudrücken, muss man doch dieselbe Rechnung vornehmen, die wir oben durchlaufen haben.

XVI.

Einige Sätze über geometrische Orte und Enveloppen bei Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen.

Von

Josef Heller,

k. k. Professor an der Staatsoberrealschule in Linz a. Donau.

Im 69. Teile dieser Blätter, Seite 30 u. s. f. hat Max Greiner „über den Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schar oder eines Büschels“ unter I(10) und II(6) zwei Sätze analytisch nachgewiesen, denen sich mit Rücksicht auf das dualistische Entsprechen von Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen einerseits und Punkten und Geraden andererseits sofort zwei entsprechende ebenso allgemeine Sätze an die Seite stellen lassen. Im Folgenden sind die von Greiner bewiesenen Sätze mit 1 a und 2 a bezeichnet, und werden denselben die nach den Gesetzen der Dualität davon abgeleiteten Sätze ohne weiteres gegenüber gestellt; wir erhalten demnach:

1 a) „Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem gegebenen Punkte P an die Kegelschnitte einer Schar gezogen werden können, ist eine Curve 3. Ordnung, welche die sechs Schnittpunkte der vier gemeinsamen Tangenten (Grundtangenten) der

1 b) „Die Enveloppe aller Tangenten, die in den Schnittpunkten einer Geraden g mit den Kegelschnitten eines Büschels an diese gezogen werden, ist eine Curve dritter Classe, welcher die sechs Verbindungslinien der vier gemeinsamen Punkte (Grundpunkte) als Tangenten und die gegebene

„Kegelschnittschar enthält und
„den Punkt P zum Doppelpunkte
„hat.“

„Gerade g als Doppeltangente
„angehören.“

2 a) „Der geometrische Ort der
„Berührungspunkte aller Tangen-
„ten, die von einem gegebenen
„Punkte P an die Kegelschnitte
„eines Büschels gelegt werden
„können, ist eine Curve dritter
„Ordnung, welche die vier Grund-
„punkte des Kegelschnittbüschels
„und den gegebenen Punkt P
„enthält.“

2 b) „Die Enveloppe der in den
„Schnittpunkten einer gegebenen
„Geraden g mit den Kegelschnitten
„einer Schar an diese gelegten
„Tangenten ist eine Curve dritter
„Classe, welcher die vier Grund-
„tangente der Kegelschnittschar
„und die gegebene Gerade als
„Tangenten angehören.“

Aus den vorstehenden vier Sätzen lassen sich nun sehr leicht neue Sätze dadurch finden, dass man dem Punkte P , beziehungsweise der] Geraden g eine besondere Lage zuweist, wie dies im Folgenden ausgeführt werden soll, und wollen wir uns bei diesen Erörterungen der Synthesis bedienen, weil wir auf diesem Wege schneller zum Ziele zu gelangen glauben.

Nehmen wir z. B. an, der Punkt P , von welchem aus an alle Kegelschnitte einer Schar Tangenten gezogen werden sollen, liege auf einer der vier gemeinsamen Grundtangente, so fällt stets mit diesen Grundtangente eine von den beiden vom Punkte P an jeden Schar-Kegelschnitt möglichen Tangente zusammen, und da ferner jeder Kegelschnitt der Schar die gedachte Grundtangente in einem andern Punkte berührt, so erfüllen die unendlich vielen Berührungspunkte die ganze Gerade; dieselbe gehört also als Träger einer Punktreihe der im Satze 1 a) definirten Curve dritter Ordnung an. — Diese Curve degenerirt demnach in diesem Falle in eine Gerade als Gebilde erster Ordnung und einen Kegelschnitt

Nehmen wir an, die Gerade g , in deren Schnittpunkten mit den Kegelschnitten eines Büschels Tangente an diese errichtet werden sollen, gehe durch einen der vier gemeinsamen Grundpunkte, so fällt stets mit diesem Grundpunkte einer der beiden möglichen Schnittpunkte dieser Geraden g mit den einzelnen Büschelkegelschnitten zusammen, und da alle Kegelschnitte des Büschels durch diesen Punkt gehen, ohne sich zu berühren, so schneiden sich in demselben unendlich viele Tangente. Dieser Punkt gehört also als Träger eines Strahlenbüschels der im Satze 1 b) definirten Curve dritter Classe an. Diese Curve degenerirt demnach in diesem Falle in einen Punkt als Gebilde erster Classe und

als Gebilde zweiter Ordnung. — Da auf der gedachten Grundtangente schon 3 Schnittpunkte der vier Grundtangente liegen, so werden die drei anderen auf den Kegelschnitten zu suchen sein; somit folgt:

3a) „Die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem Punkte P , der auf einer Grundtangente einer Kegelschnittschar liegt an die einzelnen Kegelschnitte der Schar gezogen werden, liegen auf einem Kegelschnitte, welcher durch die drei Schnittpunkte der drei anderen Grundtangente, sowie auch durch den Punkt P hindurchgeht.“

Liege ferner der Punkt P , von welchem aus an alle Kegelschnitte eines Büschels Tangente gezogen werden sollen, auf einer Verbindungslinie zweier Grundpunkte, so ist auch sofort klar, dass diese Verbindungslinie als Träger einer Punktreihe dem geometrischen Orte der Berührungspunkte angehören muss; denn diese Gerade ist als ein Teil eines in ein Geradenpaar degenerirenden Büschelkegelschnittes zu betrachten, und jeder Punkt dieser Geraden kann als Berührungspunkt gelten. Die im Satze 2a) definirte Curve dritter Ordnung degenerirt demnach auch in diesem Falle in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wobei nur auf dem letzteren die eigentlichen Berührungspunkte liegen, während die Gerade keinen einzigen Berührungspunkt eines

einen Kegelschnitt als Gebilde zweiter Classe. Da durch den gedachten Grundpunkt schon 3 Verbindungslinien der vier Grundpunkte gehen, so werden die drei anderen Tangente an den Kegelschnitt sein; daher folgt:

3b) „Die Tangente, welche in den Schnittpunkten einer Geraden g , die durch einen Grundpunkt eines Kegelschnittbüschels hindurchgeht, mit den einzelnen Kegelschnitten des Büschels an diese gezogen werden, umhüllen einen Kegelschnitt, welcher von den drei Verbindungslinien der drei anderen Grundpunkte, sowie auch von der Geraden g berührt wird.“

Gehe ferner die Gerade g in deren Schnittpunkten mit den Kegelschnitten einer Schar an diese Tangente gezogen werden sollen, durch einen Schnittpunkt zweier Grundtangente hindurch, so folgt sogleich, dass wieder dieser Schnittpunkt als Träger eines Strahlenbüschels der Enveloppe der Tangente angehören muss; denn dieser Punkt ist als ein Teil eines in ein Punktepaar degenerirenden Scharkegelschnittes zu betrachten, und jeder durch diesen Punkt gezogene Strahl kann als Tangente gelten. Die im Satze 2b) definirte Curve dritter Classe degenerirt demnach auch in diesem Falle in einen Punkt und einen Kegelschnitt, wobei nur der letztere von den eigentlichen Tangente umhüllt wird, während durch den Punkt keine einzige

eigentlichen Kegelschnitts, sondern nur aus Punkten eines in ein Geradenpaar degenerirenden Kegelschnittes des Büschels besteht.

Mit Rücksicht auf den Satz 2a) ergibt sich demnach:

4a) „Die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem Punkte P der auf der Verbindungslinie zweier Grundpunkte liegt, an die Kegelschnitte eines Büschels gezogen werden, liegen auf einem Kegelschnitte, welcher durch die beiden anderen Grundpunkte hindurchgeht.“

Tangente eines eigentlichen Kegelschnittes der Schar hindurchgeht, sondern nur Strahlen, die als Tangenten eines in ein Punkt-paar degenerirenden Kegelschnittes der Schar gelten können.

Mit Rücksicht auf den Satz 2b) ergibt sich demnach:

4b) „Die Tangenten, welche in den Schnittpunkten einer Geraden g , welche durch den Schnittpunkt zweier Grundtangenten hindurchgeht, mit den Kegelschnitten einer Schar an diese gezogen werden, umhüllen einen Kegelschnitt, welcher von den beiden anderen Grundtangenten berührt wird.“

Andere Sätze ergeben sich aus den Sätzen 1) und 2), wenn man den Punkt P beziehungsweise die Gerade g unendlich fern annimmt und bedenkt, dass die beiden Berührungspunkte der Tangenten an einen Kegelschnitt, die von einem unendlich fernen Punkte ausgehen, auf einem Durchmesser liegen, und dass andererseits Tangenten an einen Kegelschnitt, deren Berührungspunkte unendlich weit liegen, Asymptoten genannt werden. So können die Sätze 1a) und 2a) unter der Voraussetzung, dass der Punkt P unendlich fern liege, in den folgenden Satz zusammengefasst werden:

5) „Die Endpunkte aller Durchmesser der Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schar, welche derselben Sehnenrichtung conjugirt sind, liegen auf einer Curve dritter Ordnung; der dieser Sehnenrichtung zugehörige unendlich ferne Punkt ist bei der Kegelschnittschar ein Doppelpunkt der Curve.“

Ferner ergeben die Sätze 1b) und 2b) unter der Voraussetzung, dass die Gerade g mit der unendlich fernen Geraden der Ebene zusammenfällt, folgenden Satz:

6) „Die Asymptoten der Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schar umhüllen eine Curve dritter Classe; beim Kegelschnitt-

„büschel ist die unendlich ferne Gerade für diese Curve eine Doppeltangente.“

Der letzte Satz wurde, jedoch nur für Kegelschnittbüschel, auch von M. Trebitscher auf einem anderen Wege gefunden ¹⁾.

Linz, im Februar 1887.

1) Sitzungsberichte der k. k. Akad. d. Wissensch. in Wien. LXXXI. Band. II. Abth. Seite 1080 u. f.

Vergleiche ferner J. Heller: Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen. Linz 1887. Selbstverlag.

XVII.

Ueber Kraftlinien der Anziehung von Linien.

Von

R. Hoppe.

Kraftlinie (auch wol statische Bahn) eines Punktes heisst diejenige Linie, deren Tangente die Richtung der auf den Berührungspunkt wirkenden Kraft darstellt. Sie lässt sich daher denken als die Bahn eines Punktes, der ohne Beharrung in jedem Augenblicke der Kraft folgt.

Besteht die Kraft in der Anziehung eines Gebildes, so geht durch jeden Punkt des Raumes eine, und im allgemeinen nur eine Kraftlinie; letzteres erleidet nur Ausnahmen in Punkten des Gleichgewichts. Durch die Gesamtheit der Kraftlinien einer bestimmten Anziehung wird demnach der Raum in ein System unverzweigter, weder sich noch einander schneidender Linien geordnet, die nur in gewissen Gleichgewichtspolen zusammenlaufen können.

Das Kraftliniensystem bestimmt die Anziehung nur einseitig; durch eine Schar transversaler Flächen würde man die ganz unbestimmt bleibende Intensität darstellen können, worauf ich nicht eingehe.

Das Folgende behandelt nur Beispiele ebener Kraftliniensysteme der Newton'schen Anziehung ebener Linien.

§. 1.

Die anziehende Linie sei eine begrenzte Gerade. Sie sei Axo der x , ihre Mitte Anfang der xy , ihre Grenzen $x = \pm a$, die Coordinaten des angezogenen Punktes x, y . Da das gesuchte System symmetrisch zu beiden Axen ist, so können wir x und y positiv annehmen.

Bezeichnet ∂s das Element einer beliebigen Linie, $\rho\varphi$ dessen Polarcoordinaten in Bezug auf ein beliebiges Centrum, und h den

Abstand des Centrums von der Tangente der Linie, so ist das doppelte Dreieck zwischen ∂s und dem Centrum

$$= h \partial s = \rho^2 \partial \varphi$$

woraus:

$$\frac{\partial s}{\rho^2} = \frac{\partial \varphi}{h}$$

Diese Grösse drückt, wenn man die Anziehung der Linieneinheit in der Entfernung $1 = 1$ setzt, die Anziehung von ∂s auf das Centrum, und

$$\frac{\partial \varphi \cos \varphi}{h}, \quad \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{h}$$

deren Componenten aus. Ist nun die Linie gerade, so ist h constant, daher erhält man nach Integration die Componenten der Anziehung der ganzen Linie:

$$X = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_1}{h}, \quad Y = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi}{h} \quad (1)$$

wo φ, φ_1 den Enden entsprechen, $\varphi > \varphi_1$ und $h > 0$ ist.

In unserm Falle ist (xy) das Centrum, und $h = y$, ferner

$$\cos \varphi = \frac{+a-x}{\rho}; \quad \sin \varphi = \frac{-y}{\rho}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{-a-x}{\rho_1}; \quad \sin \varphi_1 = \frac{-y}{\rho_1}$$

woraus:

$$x = a \frac{\cot \varphi_1 + \cot \varphi}{\cot \varphi_1 - \cot \varphi}; \quad y = \frac{2a}{\cot \varphi_1 - \cot \varphi}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \cot \varphi - \partial \cot \varphi_1}{\cot \varphi_1 \partial \cot \varphi - \cot \varphi \partial \cot \varphi_1}$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung der Kraftlinie $Y \partial x - X \partial y = 0$ ein, so geht sie nach Division durch den positiven Factor $1 - \cos(\varphi - \varphi_1)$ über in

$$\frac{\partial \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\partial \varphi_1}{\sin \varphi_1} = 0$$

Das Integral ist:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = c \quad (2)$$

und zwar ist, weil φ und φ_1 zwischen $2R$ und $4R$ liegen, c stets positiv. Rational ausgedrückt in x, y lautet die Gleichung des Kraftliniensystems:

$$\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2 \frac{x^2}{a^2} - \frac{(1+c)^2}{4c} \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (3)$$

Die Excentricität dieser Hyperbeln ist $= a$. Bei Substitution von

$\frac{1}{c}$ für c bleibt die Gleichung unverändert; daher ist das System schon vollständig, wenn c von 0 bis 1 variirt. Dann variirt die Haupthalbaxe von a bis 0, die Nebenhalfaxe von 0 bis a . Das Resultat ist der Satz:

„Die Kraftlinien der Anziehung einer begrenzten Geraden bilden ein System confocaler Hyperbeln, deren Brennpunkte in den Endpunkten der Geraden liegen“.

Die Hyperbeln erzeugen bei Variation von c die ganze Ebene, anfangend in den Verlängerungen der Geraden und endigend in der halbirenden Normale.

Ist die Gerade nach positiver Seite hin unbegrenzt, so setze man $x - a$ statt x , dann $\frac{c}{4a}$ statt c , dann $a = \infty$. Gl. (3) geht über in

$$y^2 = c^2 - 2cx$$

und stellt ein System confocaler Parabeln dar, deren Brennpunkt im Anfang der Geraden liegt. Wächst c von 0 bis ∞ , so erzeugt die Parabel die ganze Ebene, beginnend in der negativen Verlängerung der Geraden und zustrebend der Normale $x = \infty$.

Ist die Gerade nach beiden Seiten unbegrenzt, so bilden offenbar ihre Normalen das Kraftliniensystem.

§. 2.

Der Fall, wo die anziehende Linie gerade ist, scheint mir der einzige zu sein, für welchen die Berechnung des Kraftliniensystems sich ausführen, d. h. die Gleichung $Y\partial x = X\partial y$ sich integriren lässt.

Die Kraftlinien eines anziehenden Kreises sind offenbar seine Radien, bieten mithin kein Problem dar.

Dennoch kann man auch an andern Kraftliniensystemen einige Bemerkungen machen.

Von selbst leuchtet ein, dass jede Gerade, die Teil eines anziehenden Gebildes ist, in jedem ihrer Punkte, mit Ausnahme ihrer Endpunkte, von einer Kraftlinie normal geschnitten wird. Dass von Curven im allgemeinen dasselbe gilt, möchte wol nicht unmittelbar einleuchten.

Sei ein Punkt unendlich nahe der anziehenden Curve s , die von ihm darauf gefällte Normale Axe der y , die Tangente im Fusspunkte Axe der x , also 0, y die Coordinaten jenes Punktes, x_1, y_1 die eines

um s vom Anfang abstehenden Punktes. Bezeichnen $u, u', u'' \dots$ die Krümmung und deren Differentialquotienten nach s im Anfang, so erhält man durch Reihenentwicklung:

$$x_1 = s - \frac{u^2}{6} s^3 - \frac{1}{8} uu' s^4 + \dots$$

$$y_1 = \frac{u}{2} s^2 - \frac{u'}{6} s^3 + \dots$$

Ist ρ der Abstand der Punkte $(0, y)$ und (x_1, y_1) , und man setzt:

$$\sigma^2 = s^2 + y^2$$

so findet man:

$$\rho^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{u^2}{12} \frac{s^2}{\sigma^2} - \frac{uu'}{12} \frac{s^3}{\sigma^2} + \dots - u \frac{s^2 y}{\sigma^2} + \dots \right)$$

woraus:

$$\rho^{-3} = \sigma^{-3} \left(1 + \frac{u^2}{8} \frac{s^2}{\sigma^2} + \frac{uu'}{8} \frac{s^3}{\sigma^2} + \dots + \frac{3}{2} u \frac{s^2 y}{\sigma^2} + \dots \right)$$

$$\frac{x_1}{\rho^3} = \frac{s}{\sigma^3} \left(1 - \frac{u^2}{6} \frac{s^2}{\sigma^2} - \frac{uu'}{8} \frac{s^3}{\sigma^2} + \frac{u^2}{8} \frac{s^4}{\sigma^2} + \frac{uu'}{8} \frac{s^5}{\sigma^2} + \frac{3u}{2} \frac{s^2 y}{\sigma^2} + \dots \right)$$

$$\frac{y_1 - y}{\rho^3} = \frac{u}{2} \frac{s^2}{\sigma^3} + \frac{u'}{6} \frac{s^3}{\sigma^3} + \frac{u^3}{16} \frac{s^6}{\sigma^5} + \frac{u^2 u'}{12} \frac{s^7}{\sigma^5} - \frac{y}{\sigma^3} + \dots$$

$$X = \int_{-s}^s \frac{x_1}{\rho^3} \partial s = \frac{uu'}{4} y^2 \left(\frac{4\sigma^2 - y^2}{\sigma^3} - \log \frac{\sigma + s}{\sigma - s} \right)$$

$$Y = \int_{-s}^s \frac{y_1 - y}{\rho^3} \partial s = -u \left(\frac{s}{\sigma} - \log \frac{\sigma + s}{\sigma - s} \right) - \frac{2s}{y\sigma}$$

Hier bedeuten $\pm s$ die Grenzen des anziehenden Bogens. Ist nun s unendlich klein und $\frac{y}{s}$ gleichfalls, so ist $\lim \frac{s}{\sigma} = 1$, und die Hauptwerte sind:

$$X = uu' y^2 \left(s - \frac{R}{8} \right); \quad Y = -\frac{2}{y}$$

und längs der Kraftlinie hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Y}{X} = -\frac{2}{uu' \left(1 - \frac{R}{8} \right) y^3} = \infty$$

wofern u, u' endlich sind. Bei verschwindendem y hat also die Anziehung normale Richtung gegen die Curve, und dies Resultat ändert sich nicht, wenn man die Curve nach beiden Seiten beliebig verlängert, weil dann das unendlich kleine X nur endlich wird, während das unendlich grosse Y unendlich gross bleibt.

Hiermit ist bewiesen, dass jede anziehende Linie von ihren Kraftlinien normal geschnitten wird mit Ausnahme derer, die durch gewisse Punkte gehen. Ausgenommen können sein Doppelpunkte und Punkte, in denen der Krümmungsradius null ist, insbesondere Rückkehrpunkte.

In Betreff der Doppelpunkte leuchtet ein, dass eine Symmetriaxe einer anziehenden Figur stets deren Kraftlinie ist. Demnach ist auch die Halbierungslinie eines Winkels von gleichen Schenkeln Kraftlinie dieses Winkels, und somit ein Beispiel einer Kraftlinie, welche die anziehenden Schenkel unter schiefen Winkeln schneidet, während in einem dem Scheitel noch so nahen Punkte eines Schenkels normaler Schnitt stattfindet. Da die Wirkung endlich ferner Teile der Figur auf einen dem Scheitel unendlich nahen Punkt gegen die der unendlich nahen Teile verschwindet, so folgt, dass die Anfangsrichtung der von einem Doppelpunkt einer Curve ausgehenden Kraftlinie den Winkel zwischen den Tangenten der zwei Curvenzweige halbirt. Der Durchschnittspunkt zweier Linien, als Scheitel von zwei Par Scheitelwinkeln, ist demnach auch Schnittpunkt zweier Kraftlinien, die sich unter rechten Winkeln treffen.

§. 3.

Curvenpunkte, in denen der Krümmungsradius null ist, sind Endpunkte oder Rückkehrpunkte. In beiden Fällen ergibt sich unabhängig vom Krümmungsradius, der auch endlich oder unendlich gross sein kann, dass die den Endpunkt oder Rückkehrpunkt treffende Kraftlinie eine Verlängerung der Curve in gleicher Richtung bildet.

Sei nämlich O ein Endpunkt der Curve s , P ein Punkt ausserhalb der Endtangente T und OS ein Bogen von s ; dann liegt S für alle hinreichend kleinen OS auf derselben Seite der Geraden OP . Ist nun $OP = r$ unendlich klein, $OS = \mu r$, und μ endlich, so ist auch $PS : r$ endlich, daher die von P ausgehende Kraftlinie PL innerhalb des Winkels $OPS = \sigma$ enthalten, und zwar Wkl. $OPL = \lambda$ endlich. Wächst jetzt OS , so wächst im Anfang σ und ebensolange λ . Erreicht σ ein Maximum bei $S \equiv S_1$, so ist OS_1 endlich, mithin $OS_1 : r = \mu_1$ unendlich gross. Ist die Curve s in O und S_2 begrenzt, so verschwindet die Anziehung ihres Restes $S_1 S_2$ gegen die von OS , also auch gegen die von OS_1 , und λ bleibt bis $S \equiv S_2$ endlich. Im Fall σ kein Maximum hat, findet dasselbe ohnedas statt. Folglich kann PL den Punkt O nicht erreichen und muss s in einem andern Punkte treffen. Dies gilt für alle Nachbarpunkte von O , die nicht

auf T liegen, so dass nur die Verlängerung der Endtangente als einzig mögliche Ausgangsrichtung der Kraftlinie aus O übrig bleibt.

Ist die Curve nach S_2 hin unbegrenzt, so hat ihre Anziehung auf P nicht immer eine bestimmte Richtung. Soll eine solche existieren, so muss bei unendlichem Wachsen von OS_2 sich λ nur unendlich wenig ändern. Das Resultat besteht also fort.

Bei Rückkehrpunkten lässt sich die vorstehende Betrachtung auf beide Curvenzweige anwenden und ergibt dasselbe.

§. 4.

Der Mittelpunkt eines Kreises ist Gleichgewichtspunkt der Anziehung des ganzen Kreises und Schnittpunkt aller Kraftlinien. Untersuchen wir in beiden Beziehungen die Anziehung eines Kreisbogens.

Der Radius sei a , der Mittelpunkt Anfang der xy , die Symmetrieaxe des Bogens $2a\beta$ Axe der x . Seien $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ die Coordinaten des angezogenen Punkts, ρ sein Abstand vom Bogenelement $a \partial \vartheta$. Dann sind die Componenten der Anziehung des so begrenzten Kreisbogens:

$$X = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{(a \cos \vartheta - r \cos \varphi) a \partial \vartheta}{\rho^3}; \quad Y = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{(a \sin \vartheta - r \sin \varphi) a \partial \vartheta}{\rho^3}$$

und zwar ist

$$\rho^2 = a^2 - 2ar \cos(\vartheta - \varphi) + r^2$$

Ist r unendlich klein, so hat man nach Entwicklung auf 1. Ordnung:

$$\rho^{-3} = a^{-3} \left[1 + \frac{3r}{a} \cos(\vartheta - \varphi) + \dots \right]$$

Führt man dies mit Vernachlässigung höherer Potenzen von r ein, so ergibt die Integration:

$$X = \frac{1}{2a^2} \{ 4a \sin \beta + (2\beta + 3 \sin 2\beta) x \}$$

$$Y = \frac{1}{2a^2} (2\beta - 3 \sin 2\beta) y$$

Hieraus ersieht man, dass ein Gleichgewichtspunkt existirt, nahezu für

$$x = -\frac{4a \sin \beta}{2\beta + 3 \sin 2\beta}; \quad y = 0 \quad (4)$$

wofern dieser Bruch hinreichend klein ist. Für $\beta < R$ ist er nie $< \frac{1}{2}$; überdies ist der Fall nur denkbar, wenn $x > a \cos \beta$ ist, woraus: $\beta > R$. Demnach muss $2R - \beta$ hinreichend klein sein.

In unendlicher Nähe des Mittelpunkts findet man die Gleichung der Kraftlinien, als Integral der Gleichung $Y\partial x - X\partial y = 0$:

$$y = c \left\{ 1 + \frac{2\beta + 3 \sin 2\beta}{4 \sin \beta} \frac{x}{a} \right\} \frac{2\beta - 3 \sin 2\beta}{2\beta + 3 \sin 2\beta} \quad (5)$$

Für $x = 0$ wird $y = c$; folglich drückt c den seitlichen Abstand aus, in welchem die Kraftlinie (c) am Mittelpunkte vorbeigeht. Allein die Kraftlinie $c = 0$, das ist die Symmetrieaxe

$$y = 0$$

geht durch den Mittelpunkt.

Ferner ersieht man aus Gl. (5), dass alle der x Axe nahen Kraftlinien durch den Gleichgewichtspunkt (4) gehen.

Eine einfache Betrachtung zeigt ausserdem, dass jeder Punkt ($0 > x > -a$, $y = 0$) Gleichgewichtspunkt der Anziehung eines durch $\vartheta = \pm \beta$ begrenzten Kreisbogens sein muss, wo $\cos \beta$ zwischen $\frac{x}{a}$ und -1 enthalten ist. Denn für $\cos \beta > \frac{x}{a}$ liegt die ganze Figur auf der positiven Seite, ist also X positiv, für $\beta = 2R$ aber ist X negativ.

Die Bestimmung von x erfordert die Auflösung der folgenden transcendenten Gleichung. Setzt man

$$\vartheta = 2am u, \quad \text{Modul } k = \frac{2\sqrt{-ax}}{a-x}, \quad k' = \frac{a+x}{a-x}$$

$$\beta = 2amb$$

so wird

$$X = \frac{2aB}{x(a+x)}; \quad B = el b - k'b - k^2 sn b sn c b$$

(el bedeutet das Integral 2. Gattung, $sn c$ die Complementarfunction von sn).

Durch $B = 0$ wird x als Function von β bestimmt, von der man jedoch weiss, dass bei beständig von 0 bis $-a$ abnehmendem x zu Anfang und zu Ende $\beta = 2R$ ist, folglich ein Minimum $\beta = \beta_0$ hat, so dass für $\beta < \beta_0$ kein Gleichgewichtspunkt, für $\beta > \beta_0$ deren zwei existiren. Die Berechnung von β_0 verspare ich für einen spätern Aufsatz.



XVIII.

Die Lemniskate.

Von

Emil Oekinghaus.

Während Kreis und Kegelschnitte vermöge ihrer hervorragenden Bedeutung in der Curventheorie von jeher die Aufmerksamkeit der Mathematiker an sich gefesselt haben und mit besonderer Vorliebe untersucht worden sind, kann von der Lemniskate nicht gerade dasselbe behauptet werden, obschon das Entstehungsgesetz dieser Curve auf ganz besondere Eigenschaften derselben schliessen lassen musste.

Der Hauptgrund dieser Erscheinung mag wol der sein, dass die Curve, als vom vierten Grade, den bisherigen Auflösungsverfahren ihrer Gleichungen sich nicht zugänglich zeigte, da diese zwar einer analytischen, nicht aber einer geometrischen Interpretation unterzogen werden können, was doch für das volle Verständnis einer Curve erforderlich ist.

Die Lemniskate ist als eine Art von Grenzfall zweier verschiedenen Curvensysteme anzusehen, indem sie einerseits den Cassinischen Linien, andererseits den Fusspunktcuren der Kegelschnitte angehört. Aus dieser bevorzugten Stellung lässt sich schon a priori erkennen, dass in ihr die Eigenschaften beider Gattungen sich vereinigt finden werden. Es kommt also nur noch auf die zweckmässigste Methode an, um sich erfolgreichen Eingang in diese Curve zu verschaffen.

Indem wir uns nun fast ausschliesslich derjenigen Methoden bedienen, welche wir in früheren Abhandlungen entwickelt haben, glauben wir, dass die daraus hervorgegangenen Resultate sämtlich neu sind und wegen ihrer Vielseitigkeit einiger Aufmerksamkeit wol wert erscheinen.

Wir geben zuerst die Beziehungen der Lemniskate zu einer sie schneidenden Geraden, betrachten den Fall der Tangente und der Brennpunktsgersten genauer und stellen wegen ihrer Verwandtschaft zum Kreise die Bedeutung der Focal-Polar- und Scheitelwinkel unter steter Berücksichtigung der allgemeinen Curven eingehend dar.

Ebenso entwickeln wir unter Anwendung der Cosinusresolventen die Relationen zwischen Curve und Kreis, vergleichen sie mit denen der Kegelschnitte, namentlich der gleichseitigen Hyperbel und führen alsdann die Linien gleicher Producte oder Potenzen ein.

Die auf die Rectification der Lemniskaten sich beziehenden hyperelliptischen Integrale haben wir mittelst einer Transformation einer geometrischen Discussion zugänglich gemacht und die daraus hervorgehenden Sätze und Relationen mit analogen aus der Theorie der isogonalen Verwandtschaft in interessante Verbindung gebracht. Die hierauf bezüglichen Reihenentwickelungen zeichnen sich durch besondere Einfachheit aus, was seinen Grund in der Wahl einer Variablen hat, die sich vor allen übrigen durch ihre leichte Verwendung empfahl.

Ferner ermöglicht die Curve in Verbindung mit den Kegelschnitten eine geometrische Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale der 1. Art, und bei der Einführung der elliptischen Integralfunctioren ergeben sich mannigfache anregende Sätze über Rectificationsverhältnisse auf allgemeinsten Grundlage, die einer weiteren Durchbildung und Verwertung fähig sind.

Von besonderem Werte dürften die conformen Abbildungen neu eingeführter, den Lemniskaten verwandter Curven sein, indem sie in geometrischer Hinsicht manches neue bieten und sich auch den Principien der Theorie der isogonalen Verwandtschaften in anschmiegender Form unterwerfen.

Im Anschluss daran begründen wir eine neue Curvengattung, die der Ionoiden, welche als eine Art von Geschwindigkeitscurven dem Hamilton'schen Hodograph in etwa verwandt sind und die Bewegungsverhältnisse der einen Curve auf die ihr verwandte in elegantester Art übertragen lassen.

Wir geben Anwendung davon in der Central- und Wurfbe-
wegung, in der Bewegung auf der Cykloide, der Trochoide, dem Kreise und der Ellipse, sowie auch in den elliptischen Schwingungen. Sie zeigen die Bedeutung der Lemniskaten in neuem Lichte.

Zum Beschluss haben wir noch der Curve einen Abschnitt gewidmet, in welchem wir vermittelst derselben eine geometrische Construction der Wurzeln der Gleichungen 4. Grades herleiten.

§ 1.

Die Gleichungen der Lemniskaten.

Die allgemeine Gleichung der Lemniskaten oder Cassinischen Linien in rechtwinkligen Coordinaten ist

$$1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 = q^4$$

Diese Curven sind vom vierten Grade und stellen den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte dar, für welche das Product der Leitstrahlen mn nach den Brennpunkten $\pm c$ eine constante Grösse q^2 ist.

In Polarcoordinaten würde die Gleichung sein

$$2) \quad r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + c^4 = q^4$$

Nicht unerwähnt wollen wir lassen, dass die Gleichung auch in folgender neuen Form sich darstellen lässt:

$$3) \quad \sqrt{\frac{q^4}{4c^2} + x^2} \pm \sqrt{\frac{q^4}{4c^2} - y^2} = c$$

Die Leitstrahlen mn mögen den Winkel Θ miteinander einschliessen. Nun ist aber für jedes Dreieck, dessen Basis $2c$, dessen Mittellinie r , und dessen Winkel an der Spitze Θ ist, leicht die folgende Formel zu beweisen:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{2cr \sin \varphi}{r^2 - c^2}$$

woraus

$$\cos \Theta = \frac{r^2 - c^2}{\sqrt{r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + c^4}}$$

folgt. φ ist die Neigung von r gegen c .

Daher ist für die Lemniskate im allgemeinen die folgende Relation gültig

$$4) \quad r^2 = c^2 + q^2 \cos \Theta$$

wonach zwischen dem Radiusvector r und dem Focalwinkel Θ eine sehr einfache Beziehung besteht, die uns später von grossen Nutzen sein wird. Den Krümmungshalbmesser erhält man aus

$$\varrho = \frac{q^2 r}{c^2 \cos 2\varphi + r^2}$$

Für die Brennstrahlen $m n$ findet man leicht

$$5) \quad m\sqrt{2} = \sqrt{r^2 + c^2 + q^2} + \sqrt{r^2 + c^2 - q^2}$$

$$n\sqrt{2} = \sqrt{r^2 + c^2 + q^2} - \sqrt{r^2 + c^2 - q^2}$$

oder

$$6) \quad \frac{m}{n} = \sqrt{c^2 + q^2 \cos \frac{1}{2}\Theta^2} + \sqrt{c^2 - q^2 \sin \frac{1}{2}\Theta^2}$$

und die Abhängigkeit zwischen Θ und φ drückt sich durch die Formel

$$7) \quad \frac{2c}{q^2} \sin \varphi = \frac{\sin \Theta}{\sqrt{c^2 + q^2 \cos \Theta}}$$

aus. Der Winkel zwischen Normale und Vector r sei h , so ist

$$8) \quad \sin h = \frac{c^2}{q^2} \sin 2\varphi$$

Für die Lemniskate im engeren Sinne werden diese Relationen einfacher. Die Polargleichung wird für $c = q$

$$9) \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a^2 = 2c^2$$

worin $\pm a$ die Scheitelradien der Curve bezeichnen. Man kann sie auch durch

$$9) \quad r = a \cos \frac{1}{2}\Theta$$

ersetzen, woraus

$$\cos 2\varphi = \cos \frac{1}{2}\Theta^2 \quad \text{folgt.}$$

Aus der Formel für den Winkel zwischen Normale und r folgt, dass er das Doppelte des Polarwinkels ist.

Die Brennstrahlen sind

$$10) \quad m\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + r^2} + r$$

$$n\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + r^2} - r$$

Bemerkenswert ist noch, dass die Halbirungsgerade von Θ mit r den Winkel φ einschliesst. Bezeichnet man daher die Winkel zwischen Normale und m, n mit $\varepsilon, \varepsilon'$, so ist

$$11) \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\Theta + \varphi$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\Theta - \varphi$$

Schliessen ferner mn mit der positiven Achse die Winkel γ, γ_1 ein, so folgt

$$12) \quad \begin{aligned} \gamma &= 2\varphi + \frac{1}{2}\Theta \\ \gamma_1 &= 2\varphi - \frac{1}{2}\Theta \end{aligned}$$

Aus dieser Relation entspringen einige Sätze über Focal- und Centriwinkel, die wir andeuten wollen.

Für 2 beliebige Punkte $P_1 P_2$, oder $\varphi_1 \Theta_1 \gamma_1$ und $\varphi_2 \Theta_2 \gamma_2$ bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2\varphi_1 + \frac{1}{2}\Theta_1 \\ \gamma_1' &= 2\varphi_1 - \frac{1}{2}\Theta_1 \\ \gamma_2 &= 2\varphi_2 + \frac{1}{2}\Theta_2 \\ \gamma_2' &= 2\varphi_2 - \frac{1}{2}\Theta_2 \end{aligned}$$

Durch Subtraction folgt, wenn $\gamma_1 - \gamma_2 = \alpha$ etc:

$$\alpha = 2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$\beta = 2(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2)$$

also

$$\alpha + \beta = 4(\varphi_1 - \varphi_2) = 4\delta$$

oder

$$13) \quad \delta = \frac{1}{4}(\alpha + \beta)$$

Hierbei muss auf die Lage der Sehne $P_1 P_2$ gegen die Focallinie $2c$ Rücksicht genommen werden:

1. Fall. Die Sehne trifft verlängert keinen Punkt der Focallinie $2c$. Dann folgt:

Der Centriwinkel ist gleich dem 4ten Teil der Summe der beiden Focalwinkel, welche mit ihm auf gleichem Bogen stehen.

2. Fall. Die Sehne schneidet verlängert $2c$:

Der Centriwinkel ist gleich dem 4ten Teil der Differenz der beiden Focalwinkel, welche mit ihm auf gleichem Bogen stehen.

3. Fall. Die Sehne geht durch einen Brennpunkt:

Der Centriwinkel ist gleich dem 4ten Teil des Focalwinkels, welcher mit ihm auf gleichem Bogen steht.

§ 2.

Die Lemniskate und die Gerade.

Die Gerade habe gegen die Achse die Neigung τ und vom Centrum den Abstand h . Vermöge der Formeln

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad h = r \sin(\varphi - \tau)$$

erhält man durch Elimination von r

$$14) \quad \operatorname{tg} \varphi^4 (h^2 + 2c^2 \cos \tau^2) - 2c^2 \sin 2\tau \operatorname{tg} \varphi^3 + 2(h^2 - c^2 \cos 2\tau) \operatorname{tg} \varphi^2 + 2c^2 \sin 2\tau \operatorname{tg} \varphi + h^2 - 2c^2 \sin \tau^2 = 0$$

Die nachfolgende Untersuchung derselben gründet sich auf die in § 12. unserer Abhandlung: Trig. Aufl. biquadr. Gleichungen gegebenen Formeln.

Die Gleichung hat die Gestalt

$$\operatorname{tg} \varphi^4 - A \operatorname{tg} \varphi^3 + B \operatorname{tg} \varphi^2 + A \operatorname{tg} \varphi + D = 0$$

Wir berechnen zunächst

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{2A}{1 - B + D}$$

und finden

$$15) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\tau + 360^\circ$$

d. i.

Die Summe der Winkel, welche die Radien nach den Schnittpunkten von Gerade und Lemniskate mit der Achse bilden, ist gleich dem doppelten Neigungswinkel der Geraden $+360^\circ$.

Für parallele Geraden bleibt demnach die Summe constant.

Die Cosinusresolvente ist:

$$16) \quad \cos \omega^3 - \left(\frac{2h^2}{c^2} + \cos 2\tau \right) \cos \omega^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

deren Wurzeln

$$\omega_1 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$$

$$17) \quad \omega_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4$$

$$\omega_3 = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4$$

sind.

Um die geometrische Bedeutung derselben zu gewinnen, wollen wir die kubische Gleichung auf anderem Wege darstellen.

Von einem Punkte $R(\alpha)$ ziehen wir eine Secante durch die Curve, welche mit R den Winkel δ einschliesst.

Die von $R(\alpha)$ aus gerechneten Secantenabschnitte bezeichnen wir mit x . Man findet

$$18) \quad x^4 - 4R \cos \delta x^3 + 2(R^2 + 2R^2 \cos \delta^2 - c^2 \cos 2(\alpha - \delta))x^2 - 4R(R^2 \cos \delta - c^2 \cos(2\alpha - \delta))x + R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha = 0$$

woraus beiläufig folgt, dass die Summe der Secanten für 2 mit R denselben Winkel δ einschliessenden Geraden dieselbe ist.

Wir verlegen jetzt $R(\alpha)$ in die Mitte einer Sehne zwischen $x_1 x_2$, so dass also $x_1 + x_2 = 0$ ist. Indem wir die in der Theorie der Gleichungen bekannte Reducente $a^2 d - abc + c^2 = 0$ benutzen und auf die obige Gleichung anwenden, finden wir

$$19) \quad R^4 - R^2 c^2 \frac{\cos(\alpha - \delta)}{\cos \delta^2} + \frac{c^4}{4 \cos \delta^4} \cos(2\alpha - \delta) \cos(2\alpha - 3\delta) = 0$$

Also ist

$$20) \quad R^2 = \frac{c^2}{2 \cos \delta^2} (\cos 2(\alpha - \delta) \pm \sin \delta)$$

nun ist aber

$$\alpha - \delta = \tau, \quad \sin \delta = \frac{h}{R}$$

daher geht die letzte Formel in

$$21) \quad R^3 - R(h^2 + \frac{1}{2}c^2 \cos 2\tau) - \frac{c^2 h}{2} = 0$$

über, woraus

$$22) \quad R_1 + R_2 + R_3 = 0$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Die Mitten je zweier entsprechenden Sehnen haben vom Centrum gleichen Abstand; so dass ein concentrischer Kreis, der durch die Mitte der einen Sehne geht, auch die Mitte der andern trifft.

Ferner ist die Summe je zweier dieser Strecken $R_1 + R_2$ gleich der dritten R .

Endlich bemerken wir noch, dass die Secante für

$$R^2 = r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

in die Tangente übergeht, und aus der bezüglichen Formel 20) eine Relation $\delta = 90^\circ - 2\varphi$ hervorgeht; da aber $\delta = \varphi - \tau$ ist, so folgt die Beziehung

$$23) \quad \tau = 3\varphi - 90^\circ$$

womit das Tangentenproblem seine Lösung erhält.

Wir halten es für nützlich, nachzusehen, ob die oben abgeleiteten Resultate auch für die Cassinischen Linien gültig sind.

Die Gleichungen ändern sich dann um in

$$24) \quad x^4 - 4R \cos \delta x^3 + 2(R^2 + 2R^2 \cos \delta^2 - c^2 \cos 2(\alpha - \delta))x^2 \\ - 4R(R^2 \cos \delta - c^2 \cos(\alpha - \delta))x + R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4 - q^4 = 0$$

$$25) \quad R^4 - R^2 c^2 \frac{\cos 2(\alpha - \delta)}{\cos \delta^2} + \frac{c^4}{4 \cos \delta^4} \cos(2\varphi - \delta) \cos 2\varphi - 3\delta \\ + \frac{q^4 - c^4}{4 \cos \delta^2} = 0$$

$$26) \quad \frac{R^2}{c^2} = \frac{\cos 2(\alpha - \delta) \pm \sqrt{1 - \frac{q^4}{c^4} \cos \delta^2}}{2 \cos \delta^2}$$

$$27) \quad R^6 - R^4(2h^2 - c^2 \cos 2\alpha) + \frac{1}{4}((2h^2 - c^2 \cos 2\alpha)^2 + q^4 - c^4)R^2 \\ - \frac{q^4 h^2}{4} = 0$$

Diese Gleichung ist bikubisch. Da R als Mittellinie nach 6 Secantenteilen oder Sehnen gezogen werden kann, so entsprechen sich auch hier 2 Sehnen derart, dass ihre Mitten vom Mittelpunkt O gleiche Entfernung haben, wodurch das vorhin Gesagte verallgemeinert ist.

Kehren wir nun wieder zu unserer Lemniskate zurück und bezeichnen wir mit ω den Winkel zwischen R und der Normalen h , wodurch

$$R \cos \omega = h$$

so führt die Substitution von $R = \frac{h}{\cos \omega}$ in die Gleichung 21) auf die folgende:

$$\cos \omega^3 - \left(\frac{2h^2}{c^2} + \cos 2\tau \right) \cos \omega^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

welche mit der frühern identisch ist. Mithin sind ihre Wurzeln

$$28) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \\ \omega_2 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \\ \omega_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 \end{aligned}$$

geometrisch definiert.

Interessant ist, dass noch eine dritte Betrachtung zu derselben Gleichung 3. Grades führt.

Ein mit der Lemniskate concentrischer Kreis vom Radius h werde von einer Geraden tangirt. Von ihren Schnittpunkten mit der Curve ziehen wir Tangenten an den Kreis, welche mit der Achse die Winkel ϑ_1, ϑ_2 etc. einschliessen.

Zunächst ist

$$h = r \sin(\varphi - \tau)$$

oder

$$h^2 = a^2 \cos 2\varphi \sin(\varphi - \tau)^2$$

Da aber

$$\varphi - \tau = \vartheta - \varphi$$

also

$$2\varphi = \vartheta + \tau$$

ist, so kann aus

$$h^2 = c^2 \cos 2\varphi - c^2 \cos 2\varphi \cos(2\varphi - 2\tau)$$

2φ eliminirt werden.

Man erhält

$$a + b \sin \vartheta + \cos \vartheta + d \sin 2\vartheta + e \cos 2\vartheta = 0$$

worin

$$a = \cos 2\tau + 2\frac{h^2}{c^2}$$

$$b = 2 \cos \tau$$

$$c = -2 \cos \tau$$

$$d = 0$$

$$e = 1$$

und damit wird die Resolvente nach früher entwickelten Principien

$$\cos \omega^3 - \left(\cos 2\tau + \frac{2h^2}{c^2} \right) \cos \omega^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

29)

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4) \text{ etc.}$$

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = 360^\circ$$

Hieraus folgt:

Die 4 Berührungspunkte der Tangenten schliessen ein Kreisviereck ein, dessen Seiten- und Diagonalenpaare die Winkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ mit einander bilden, welche wir eben definirt haben.

Bei genauer Durchsicht dieser Bestimmungen wird man erkennen, dass die Winkel zwischen der 1. und 2., ebenso zwischen der 3. und 4. in einfachen Beziehungen zu einander stehen.

§ 3.

Wir fanden oben für R die Gleichung

$$R^2 = \frac{c^2}{2 \cos \delta^2} (\cos 2(\alpha - \delta) \pm \sin \delta)$$

Die Strecke R halbirt die Sehne der Lemniskate und bildet mit ihr den Winkel δ , Daher existiren für 2 parallele Sehnen 2 Werte, R und R' , welche denselben Polarwinkel α haben, und welche durch die Relationen

$$30) \quad \begin{aligned} R^2 + R'^2 &= \frac{c^2}{\cos \delta^2} \cos 2(\alpha - \delta) \\ R^2 - R'^2 &= \frac{c^2}{\cos \delta^2} \sin \delta \end{aligned}$$

verbunden sind.

Wir erwähnen hier, dass auch die allgemeinen Formeln der Cassinischen Curven auf analoge Beziehungen führen.

Die Wurzeln der Hauptgleichung lassen sich wegen $x_1 + x_2 = 0$ leicht combiniren und so wird, wenn wir statt x jetzt $s = \frac{S}{2}$ setzen, folgendes System bestehen:

$$31) \quad \begin{aligned} s_3 + s_4 &= 4R \cos \delta \\ \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} &= \frac{4(R^2 \cos \delta - c^2 \cos(2\alpha - \delta))}{R(R^2 - a^2 \cos 2\alpha)} \\ s^2 s_3 s_4 &= R^2 (a^2 \cos 2\alpha - R^2) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha - \frac{S^2}{a^2} \cos \delta^2 &= \pm \sin \delta \\ s_3 s_4 &= \frac{R^2 \cos \delta (a^2 \cos 2\alpha - R^2)}{c^2 \cos(2\alpha - \delta) - R^2 \cos \delta} \end{aligned}$$

Die den Strecken RR' bezüglichen Sehnen seien SS_1 , dann folgen aus den letzten Formeln

$$32) \quad \begin{aligned} \frac{S^2}{4} &= c^2 \frac{\cos(2\alpha - \delta)}{\cos \delta} - R^2 \\ S^2 + S'^2 &= \frac{2a^2 \cos 2\alpha}{\cos \delta^2} \\ S^2 - S'^2 &= 4(R^2 - R'^2) \end{aligned}$$

also

$$R^2 + s^2 = R'^2 + s'^2$$

welche Formel die Abhängigkeit der entsprechenden R und s ausdrückt. Geht die Secante in die Tangente über, wie also $s = 0$, so resultirt

$$s'^2 = R^2 - R'^2$$

$$R'^2 = - \frac{c^2 \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin 2\alpha^2}$$

33)

$$s'^2 = \frac{c^2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha^2}$$

Man kann, wenn man eine Sehne von constanter Länge S die Lemniskate durchwandern lässt, nach der Curve fragen, welche ihre Mitte beschreibt. Die Frage läuft darauf hinaus, eine Gleichung für $R(\alpha)$ aufzustellen, die nach dem Vorstehenden auf mehrfache Art abgeleitet werden kann. Man findet nach einigen Rechnungen

$$((R^2 + s^2)^2 - a^2(R^2 - s^2)\cos 2\alpha)((R^2 + s^2)^2 - a^2(R^2 + s^2)\cos 2\alpha + c^4) = a^4 s^4 \sin^2 2\alpha$$

34)

oder

$$(R^4 + 2R^2(s^2 - c^2\cos 2\alpha) + s^4 + \frac{1}{4}c^4)^2 = c^4(\frac{1}{4}c^4 - c^2s^2\cos 2\alpha + 4s^4)$$

welche für $\alpha = 0$ zwei Werte liefert, wovon der 2te auf $R^2 + s^2 = c^2$ führt. Ist speciell $S = c$, lässt man also die halbe Focallänge die Lemniskate durchwandern, so ist die Curvengleichung ihrer Mitte

$$35) \quad \frac{R^2}{c^2} = \frac{3}{4} - 2 \sin \alpha^2 \pm \sqrt{\sin \alpha (1 - \sin 3\alpha)}$$

Wir wollen hier noch darauf aufmerksam machen, dass in

$$36) \quad \cos 2\alpha - \frac{S^2}{a^2} \cos \delta^2 = \pm \sin \delta$$

S unverändert bleibt, wenn $180 - \delta$ statt δ gesetzt wird. Daraus folgt, dass für jeden Radiusvector $r(\alpha)$ der Lemniskate zwei gleiche Sehnen gezogen werden können, die er halbirt und mit ihnen gleiche Winkel einschliesst. Die entsprechenden sehnenhalbirenden Strecken bezeichnen wir wieder mit $R_1 R_2$, so wird man haben

$$37) \quad R^2 + R_1^2 + \frac{1}{2}S^2 = r^2$$

$$R^2 - R_1^2 = a^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \delta$$

Die bisher entwickelten Formeln sind demnach mannigfacher Deutung fähig und brauchen nur transformirt zu werden, um neue Eigenschaften der Lemniskate hervorgehen zu lassen. Eliminiren wir z. B. aus den Gleichungen

$$\cos 2\alpha - \frac{S^2}{a^2} \cos \delta^2 = \pm \sin \delta$$

$$\frac{S^2}{4} = c^2 \frac{\cos(2\varphi - \delta)}{\cos \delta} - R^2$$

α , so folgt

$$R^4 - 2R^2 s^2 \cos 2\delta + s^4 = \pm a^2 (R^2 - s^2) \sin \delta$$

oder die Gleichung

$$38) \quad 4R^2 s^2 \sin \delta^2 \mp a^2 (R^2 - s^2) \sin \delta + (R^2 - s^2)^2 = 0$$

worin R und s als constant, δ als variabel betrachtet werden kann, und demnach 2 Wurzeln bestimmt.

Nun folgt aber aus dem Lemniskatendreieck, dessen Basis $= 2s$, dessen Mittellinie R , und dessen Winkel an der Spitze Θ ist, die Formel

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{2Rs \sin \delta}{R^2 - s^2}$$

also

$$\cos \Theta^2 = \frac{(R^2 - s^2)^2}{R^4 - 2R^2 s^2 \cos 2\delta + s^4}$$

Die vorhergehende Relation mit der letzten verbunden, liefert

$$\cos \Theta^2 = \frac{R^2 - s^2}{a^2 \sin \delta}$$

mithin auch

$$39) \quad \sin 2\Theta = \frac{RS}{c^2}$$

Das einer Lemniskate einbeschriebene Parallelogramm, welches die Seiten $2R$ und S besitzt, hat demnach die Eigenschaft, dass bei constant bleibendem Diagonalenwinkel das Product der beiden Seiten constant bleibt.

Wie aus der Gleichung dieses Winkels

$$40) \quad \operatorname{tg} \Theta^2 - \frac{a^2}{2Rs} \operatorname{tg} \Theta + 1 = 0$$

folgt, sind die zusammengehörigen Werte $\Theta_1 + \Theta_2 = 90^\circ$.

§ 4.

Wir stellen jetzt eine Gleichung für die Focalwinkel Θ auf, welche die Leitstrahlen nach den 4 Schnittpunkten von Gerade und Lemniskate einschliessen. Aus den Formeln

$$h = a \sin(\varphi - \tau) \cos \frac{1}{2} \Theta, \quad \cos 2\varphi = \cos \frac{1}{2} \Theta^2$$

folgt zunächst

$$41) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^4 - \frac{2c}{h} \cos \tau \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^3 + \left(\frac{c^2}{h^2} \cos 2\tau + 2 \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2 - \frac{2c}{h} \cos \tau \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta + 1 - \frac{a^2}{h^2} \sin^2 \tau = 0$$

und ferner

$$42) \quad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 360^\circ$$

wonach die 4 Focalwinkel zusammen 4R bilden.

Ferner verbinden wir die Schnittpunkte mit einem Brennpunkte durch Strahlen, welche mit der Geraden die Winkel ψ einschliessen. Vermittelst der Elimination von r und φ aus

$$h = r \sin(\varphi - \tau)$$

$$\frac{c}{r} = \frac{\sin(\psi + \varphi - \tau)}{\sin(\psi - \tau)}$$

ergibt sich wie oben, dass

$$43) \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 180^\circ$$

Wir setzen für $180^\circ - \psi_1$ den Ausdruck A und bezeichnen mit β bestimmte Brennpunktswinkel, hervorgehend aus

$$\beta_2 = A + \psi_2$$

$$\beta_3 = A + \psi_3$$

$$\beta_4 = A + \psi_4$$

$$44) \quad \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 4A$$

Man beachte nun, dass in der Lemniskate zu jedem Peripheriewinkel A drei Brennpunktswinkel gehören, welche auf Bogen stehen, die von A gebildet sind. Die vorhin gegebenen Ableitungen führen also zu ähnlichen Sätzen, wie sie in der Kreislehre vorkommen und die letzte Relation würde, in analogem Sinne ausgesprochen, wie folgt lauten:

Jeder Peripheriewinkel einer Lemniskate, von dem ein Schenkel durch einen Brennpunkt geht, ist der 4te Teil der Summe der zugehörigen Focalwinkel.

Ziehen wir durch den Scheitel von A eine zweite Gerade, für welche also

$$\beta_2' + \beta_3' + \beta_4' = 4A'$$

ist, so gelangt man vermittelst Subtraction zum folgenden allgemeinen Satz:

Jeder Peripheriewinkel einer Lemniskate ist der 4te Teil der Summe der 3 Focalwinkel, welche mit ihm auf entsprechenden Bogen stehen.

Dieser Satz ist um so interessanter, als er allgemein für alle Lemniskaten gilt. Um dies zu beweisen, legen wir durch die Casinische Curve eine Gerade, deren Entfernung vom Mittelpunkt h ist, dann bestehen nach früherem die Formeln

$$\begin{aligned} h &= r \sin(\varphi - \tau) \\ r^2 &= c^2 + q^2 \cos \Theta \\ \frac{2c}{q^2} \sin \varphi &= \frac{\sin \Theta}{\sqrt{c^2 + q^2 \cos \Theta}} \end{aligned}$$

woraus, wenn wir die 2. typische Gleichungsform benutzen,

$$h^2 - c^2 \cos^2 \tau - h \frac{q^2}{c} \cos \tau \sin \Theta + \frac{q^4}{4c^2} \sin^2 \Theta - q^2 \sin^2 \tau \cos \Theta$$

hervorgeht. Wegen $d = 0$ ist wieder

$$45) \quad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 360^\circ$$

Bezeichnen wir endlich wieder mit ψ die Winkel zwischen den Brennstrahlen und der Geraden und beachten

$$\begin{aligned} xy &= q^2 \\ \frac{q^4}{y^2} &= 4c^2 + y^2 - 4cy \cos(\varphi - \tau) \\ y \sin \psi &= h + c \sin \tau \end{aligned}$$

so führt die Elimination von h auf eine Gleichung, die ebenfalls die Beziehung

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 180^\circ$$

also auch

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = A$$

hervorgehen lässt.

Durch analoge Transformationen wie oben gehen daher aus diesen Ableitungen dieselben Sätze für die Lemniskaten oder Casinischen Linien hervor, so dass in diesen Curven jeder Peripheriewinkel A der 4te Teil der Summe der 3 Focalwinkel ist, welche auf den durch A bestimmten zugehörigen Bogen stehen.

Wir haben bisher stillschweigend für einen bestimmten Brennpunkt die Focalwinkel im Auge gehabt, so dass noch untersucht

werden muss, ob auch für den 2ten die obigen Sätze massgebend sind. Um nun nachzuweisen, dass beide vertauschbar sind, zeichnen wir eine Cassinische Curve und ziehen eine Secante durch dieselbe, welche sie in 4 Punkten schneiden möge. Die vom 1. Brennpunkt zu den Schnittpunkten gezogenen Leitstrahlen mögen mit der Geraden die Winkel ψ einschliessen. Ferner ziehen wir eine 2. Secante, welche mit der 1. den Winkel ε bildet, und nennen die analogen Winkel zwischen den entsprechenden Leitstrahlen und der 2. Geraden φ .

Die beiden Secanten schneiden 4 Bogen ab, wir bezeichnen ihre Brennpunktswinkel für den 1. Brennpunkt mit f , für den 2. mit g , so entsteht folgendes System:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varepsilon + \varphi_1 + f_1 \\ \psi_2 &= \varepsilon + \varphi_2 - f_2 \\ \psi_3 &= \varepsilon + \varphi_3 - f_3 \\ \psi_4 &= \varepsilon + \varphi_4 - f_4 \end{aligned}$$

$$46) \quad \frac{\quad}{180^\circ = 4\varepsilon + 180^\circ - \Sigma f}$$

Die Leitstrahlen vom 2. Brennpunkt nach den Schnittpunkten beider Secanten mögen mit ihnen und zwar mit der ersten die Winkel σ , mit der 2ten ϱ einschliessen, man findet durch Betrachtung der Dreiecke:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varepsilon + \sigma_1 + g_1 \\ \varrho_2 &= \varepsilon + \sigma_2 + g_2 \\ \varrho_3 &= \varepsilon + \sigma_3 + g_3 \\ \varrho_4 &= \varepsilon + \sigma_4 - g_4 \end{aligned}$$

$$47) \quad \frac{\quad}{180^\circ = 4\varepsilon + 180^\circ + \Sigma g}$$

Mithin folgt aus beiden Systemen

$$48) \quad \Sigma f = \Sigma g \quad \text{oder:}$$

Die Summe der Focalwinkel ist für beide Brennpunkte dieselbe. Die von 2 Geraden auf der Curve abgeschnittenen 4 Bogen bestimmen demnach für den einen Brennpunkt 4 Focalwinkel f , für den 2. die analogen g , mit einander verknüpft durch

$$49) \quad -f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = -g_1 - g_2 - g_3 + g_4$$

Die Secantengleichung wollen wir noch einer kurzen Betrachtung unterziehen.

Die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 4R \cos \delta x^3 + 2(R^2 + 2R^2 \cos \delta^2 - c^2 \cos 2(\alpha - \delta))x^2 - 4R(R^2 \cos \delta - c^2 \cos(2\alpha - \delta))x + R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha = 0$$

identificiren wir mit

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

indem wir versuchen wollen, ob die Lemniskate eine geometrische Construction der Wurzeln dieser Gleichung ermöglicht. Wir haben also 1) gleichzusetzen $A = 4R \cos \delta$ etc. und 2) die R, α, δ, a aus den Constanten zu entwickeln. Wir schreiben die Resultate gleich hier nieder. Man hat zu berechnen

$$6R^2 = B + \sqrt{B^2 - 3AC + 12D}$$

wobei man bemerken möge, dass die quadratische Invariante unter dem Wurzelzeichen erscheint. Ferner ist

$$\cos \delta = \frac{A}{4R}$$

50)

$$\cot 2\varphi = \operatorname{tg} \alpha = \frac{(R^4 - D) \sin \delta}{-\frac{1}{2}CR + (R^4 + D) \cos \delta}, \quad a^2 = \frac{R^4 - D}{R^2 \cos 2\varphi}$$

Unter bestimmten Bedingungen ist demnach die geometrische Construction durchführbar, da sämtliche Beziehungen $R(\alpha), \delta, a$ aus den Constanten berechnet sind. Für kubische Gleichungen

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

ist zu berechnen

$$6R^2 = B + \sqrt{B^2 - 3AC}$$

51)

$$\cos \delta = \frac{A}{4R}, \quad \cot 2\varphi = \frac{R^3 \sin \delta}{-\frac{1}{2}C + R^3 \cos \delta}, \quad a^2 = \frac{R^2}{\cos 2\varphi}$$

Hier wird R zum Vector r der Lemniskate.

Für reducirte kubische Gleichungen unter der Form

$$x^3 + Bx + C = 0$$

würde noch zu erwähnen sein, dass die Relationen in

$$52) \quad r^2 = \frac{1}{3}B, \quad \delta = 90^\circ, \quad \cot 2\varphi = \frac{2r^3}{C}, \quad a^2 = \frac{r^2}{\cos 2\varphi}$$

übergehen. Die Gerade steht jetzt auf dem Radiusvector r senkrecht.

Wir wollen eine Anwendung hiervon machen.

In der Kometentheorie ist bekanntlich die Anomalie Θ des Kometen durch eine kubische Gleichung mit der Zeit t verknüpft, welche der Himmelskörper seit seinem Perihel zum Durchlaufen eines Bogens bedarf. Sie ist

$$53) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^3 + 3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta = \frac{6kt \sqrt{1+m}}{p^{\frac{3}{2}}}$$

Wir brauchen demnach in der vorhergehenden Gleichung nur

$$x = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta$$

einzuführen, so wird

$$r^2 - r'^2 = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{t}{c}, \quad \text{wo } c = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{3k} \text{ ist.}$$

Die Lemniskate löst also in einfachster Weise das Kometenproblem, nämlich aus der seit dem Periheldurchgang verflossenen Zeit die entsprechende Anomalie oder den Ort des Kometen zu finden, welche Aufgabe wir schon früher in den „Eigenschaften der Lemniskate“ auf anderem Wege gelöst haben.

§ 5.

Die Lemniskate und die Tangente.

Wie schon früher bewiesen, steht mit der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi^4 - A \operatorname{tg} \varphi^3 + B \operatorname{tg} \varphi^2 + A \operatorname{tg} \varphi + D = 0$$

die Relation

$$56) \quad \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)} = - \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)}$$

oder kurz

$$\frac{\cos \delta}{\cos \delta'} = - \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'}$$

in Verbindung.

Da aber allgemein

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\tau + 360^\circ$$

ist und für die Tangente $\varphi_1 + \varphi_2$ in 2φ übergeht, so geht unter Benutzung von $\tau = 3\varphi - 90^\circ$ die Relation in

$$\varphi_3 + \varphi_4 = 180^\circ - 4\varphi$$

über, worin alle Winkel als spitz angenommen sind.

Es ist aber $\delta = 0$, also

$$\cos(\varphi_3 - \varphi_4) = \frac{\sin 4\varphi}{\sin 2\varphi} = 2 \cos 2\varphi$$

Bezeichnen wir $\varphi_4 - \varphi_3$ mit ψ . so folgt also noch

$$57) \quad \cos \psi = 2 \cos 2\varphi$$

Da ferner die Secantengleichung wegen $\delta = 90^\circ - 2\varphi$ in die der Tangente übergeht, und $s_1 = s_2 = \text{null}$ wird, so ist noch

$$s_3 + s_4 = 4r \sin 2\varphi, \quad s_3 s_4 = 3r^2$$

also

$$58) \quad s_4 - s_3 = 2r \sin \psi = d$$

Diese Beziehung führt auf eine Kreisrelation, wenn man $s_4 - s_3 = d$ als Sehne, r als Radius und ψ als Peripheriewinkel betrachtet.

Die bezüglichen Radienvectoren r_3, r_4 haben die leicht abzuleitenden Gleichungen

$$r_3 r_4 = \frac{r^4}{c^2} = c^2 \cos \psi^2$$

59)

$$r_3^2 + r_4^2 = -4r^2 \cos 4\varphi$$

Die Mittellinie der Sehne d nach dem Centrum der Lemniskate ist gleich r , wie aus der letzten Formel hervorgeht, und schliesst mit der Achse den Winkel $180^\circ - 5\varphi$ ein.

Man bemerkt sofort, dass das Kreiscentrum auf der Lemniskate liegt und die Coordinaten $r(\varphi)$ besitzt.

Hieraus geht eine sehr elegante Auflösung des Tangentenproblems hervor. Um von einem Lemniskatenpunkte die beiden reellen Tangenten an dieselbe zu ziehen, verbinden wir ihn mit der Mitte O der Curve durch den Vector r_3 oder r_4 , errichten in der Mitte dieses Vectors eine Verticale bis zu den beiden Durchschnitten mit der Curve, verlängern die diesen entsprechenden Vektoren r bis zum 2. Durchschnitt mit der Lemniskate; dann sind diese Schnittpunkte die gesuchten Berührungspunkte beider Tangenten.

Des Brennpunkts wegen existiren eigentlich in diesem speciellen Falle 4 Tangenten, von welchen wir die beiden reellen so eben kennen gelernt und construiert haben. Dass auch imaginäre bestehen, lässt sich am besten durch eine allgemeinere Untersuchung dartun, die sich auf den Fall bezieht, dass die Tangenten von einem beliebigen Punkte an die Curven gezogen werden. Derselbe habe die Polarcoordinaten $R(\alpha)$. Dass höchstens 4 reelle Tangenten

existiren, übersieht man leicht. Dass ebenfalls imaginäre auftreten, geht aus den folgenden Beziehungen hervor

$$R = \frac{r \cos 2\varphi}{\cos(3\varphi - \alpha)}, \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad R^2 = \frac{a^2 \cos 2\varphi^3}{\cos(3\varphi - \alpha)^2}$$

welche wir nach Potenzen von $\cos 2\varphi$ entwickeln. Der Abkürzung wegen setzen wir $\cos 2\varphi = x$ und $\frac{c^2}{R^2} = k$; man hat

$$60) \quad (k^2 - 2k \cos 2\alpha + 1)x^6 + \frac{3}{2}(k \cos 2\alpha - 1)x^4 - \frac{1}{2}(k - \cos 2\alpha)x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{8}\cos 2\alpha \cdot x + \frac{1}{16}\cos 2\alpha^2 = 0$$

eine Gleichung 6. Grades, welche in die vom 4. übergeht, wenn

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\alpha + c^4 = q^4$$

gesetzt wird. Der betreffende Punkt $R(\alpha)$ liegt alsdann in der Curve, und die Tangentengleichung wird zu

$$61) \quad x^4 + 2 \cos 2\alpha \cdot x^3 - \cos 2\alpha \cdot x + \frac{1}{4} \cos 2\alpha^2 = 0$$

deren Auflösung wir oben auf constructivem Wege mitgeteilt haben. Während also die analytische Auflösung dieser Gleichung Schwierigkeiten haben würde, zeigt die geometrische keine solche.

Interessant ist, dass letzte Gleichung durch die Parabel gelöst werden kann.

In der Directrix der Parabel wählen wir einen Punkt, dessen Entfernung R vom Brennpunkt mit der Achse den Winkel 2α einschliesst, und betrachten ihn als Centrum eines durch den Brennpunkt gehenden Kreises. Letzterer schneidet die Parabel in 2 Punkten, deren Leitstrahlen mit R die gesuchten Winkel 2φ einschliessen. Wie man nämlich findet, ist die auf den Kreis und Parabel sich beziehende Gleichung identisch mit derjenigen der Tangenten für die Lemniskate.

Die allgemeine Gleichung dieses Tangentenproblems ist wegen des 6. Grades nicht algebraisch lösbar. Doch ist zu bemerken, dass sich leicht Combinationen zu 4 Wurzeln in mehrfacher Art finden lassen, wenn die Bedeutung der Coefficienten dieser Gleichung berücksichtigt wird.

Die Verhältnisse werden geometrisch discutirbar, wenn von einem in der X - oder Y -Ache liegenden Punkte Tangenten an die Lemniskate gezogen werden sollen. Die Auflösung dieser Specialfälle haben wir schon früher gegeben und damit auch die Bedeutung der Curve

für die Auflösung der reducirten kubischen Gleichungen aller 3 Arten nachgewiesen. Die in den „Eigenschaften der Lemniskate“ entwickelten Sätze können als Fortsetzung des oben Aufgestellten betrachtet werden und verweisen wir darauf.

Hinsichtlich der Resolvente

$$\cos \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4)^2 - \left(\cos 2\tau + \frac{2h^2}{c^2} \right) \cos \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4)^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

ist zu bemerken, dass dieselbe für den Fall der Tangente leicht anzugebende Wurzeln besitzt. Da $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ ist, so folgt

$$\cos 2\vartheta = \cos(\vartheta_3 + \vartheta_4) = -\frac{1}{3} \left(\cos 2\tau + \frac{2h^2}{c^2} \right)$$

$$\cos \frac{1}{2}(\vartheta_3 - \vartheta_4) = \frac{2}{3} \left(\cos 2\tau + \frac{2h^2}{c^2} \right)$$

also aus beiden

$$\cos \frac{1}{2}(\vartheta_3 - \vartheta_4) = -2 \cos(\vartheta_3 + \vartheta_4) = -2 \cos 2\vartheta$$

Da aber

$$\vartheta = 90^\circ - \varphi$$

ist, so folgt

$$\cos \frac{1}{2}(\vartheta_3 - \vartheta_4) = 2 \cos 2\varphi = \cos \psi$$

oder

$$\vartheta_4 - \vartheta_3 = 2\psi$$

Nun ist aber $\vartheta_4 - \vartheta_3$ der Winkel zwischen den Tangenten, welche von dem 3. und 4. Schnittpunkt der die Lemniskate berührenden Geraden an den letztern tangirenden Kreis vom Mittelpunkt O gezogen werden, also doppelt so gross als der Winkel zwischen den Radienvectoren $r_3 r_4$.

Wir wollen an dieser Stelle eine Methode mittheilen, welche in einfacher und eleganter Art zu einer Construction der Lemniskate führt.

In der Y -Achse wählen wir einen Punkt zum Centrum eines Kreises, der durch den Mittelpunkt O der Lemiskate geht und demnach die Curve in noch 2 Punkten schneidet. R bezeichne die Entfernung des Centrums von O . Wir wollen den Focalwinkel Θ berechnen, der zu den Schnittpunkten gehört, und haben also die Formeln

$$r = 2R \sin \varphi$$

$$r = a \cos \frac{1}{2}\Theta$$

$$\sqrt{2} \sin \varphi = \sin \frac{1}{2} \Theta$$

zu benutzen.

Man erhält ohne Mühe die Relation

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta = \pm \frac{c}{R}$$

Dieselbe führt uns zu folgender Construction der Lemniskate:

In der Y -Achse wählen wir einen beliebigen Punkt als Centrum eines Kreises, der durch die beiden Brennpunkte geht und die Y -Achse in den Punkten R und R' schneidet. Diese Punkte seien Centra zweier durch den Mittelpunkt der Lemniskate gehenden Kreise, welche beide den Focalkreis in 4 Punkten schneiden. Diese Punkte gehören der gesuchten Lemniskate an.

§ 6.

Die Gerade durch einen Brennpunkt.

Die Formeln nehmen für diese specielle Lage sehr einfache und elegante Ausdrücke an, die wir noch erwähnen wollen.

Wir knüpfen zugleich an ein Gleichungssystem an, welches wir schon früher entwickelt haben und aus der Gleichung 4. Grades

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

abgeleitet werden kann.

Wie aus den „Beiträgen zur Theorie der Gleichungen 4. Grades“ zu ersehen ist, bestehen die Relationen

$$62) \quad \begin{aligned} \sqrt{x_1 - h} + \sqrt{x_2 - h} + \sqrt{x_3 - h} + \sqrt{x_4 - h} &= 0 \\ \sqrt{\sqrt{x_1 - h} + h_1} + \sqrt{\sqrt{x_2 - h} + h_1} + \sqrt{\sqrt{x_3 - h} + h_1} \\ &+ \sqrt{\sqrt{x_4 - h} + h_1} = 0 \end{aligned}$$

$$63) \quad h = -\frac{a^4 - 8a^2b + 16b^2 - 64d}{8(a^3 - 4ab + 8c)}$$

$$h' = \frac{3a^2 - 8b}{16\sqrt{\frac{1}{8}(a^3 - 4ab + 8c)}}$$

Wir nehmen mit der Hauptgleichung eine lineare Variation

$$x = y + h$$

vor, führen sie auch in den übrigen Functionen durch und ziehen noch die Resolvente für den Typus

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = y$$

nämlich

$$64) \quad y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (a^2d - 4bd + c^2) = 0$$

in den Bereich dieser Variationen, indem wir also statt x den Wert $y + h$ setzen und die Constanten $abcd$ demgemäss aus der transformirten Gleichung zu berücksichtigen haben.

Der Ausdruck von h und demnach die Relation 62) soll jetzt mit der vorletzten Resolvente verknüpft werden mit der Bestimmung $h = 0$. Es wird eine Gleichung 4. Grades hervorgehen, welche auf eine quadratische reducirt werden kann. Man hat schliesslich folgendes Resultat:

Mit jeder biquadratischen Gleichung ist eine Relation

$$64) \quad \sqrt{(x_1 - h)(x_2 - h) + (x_3 - h)(x_4 - h)} \\ + \sqrt{(x_1 - h)(x_3 - h) + (x_2 - h)(x_4 - h)} \\ + \sqrt{(x_1 - h)(x_4 - h) + (x_2 - h)(x_3 - h)} = 0$$

verknüpft, deren h aus der quadratischen Gleichung

$$h^2 - \frac{a}{2}h + \frac{b}{6} \pm \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - 3ac + 12d} = 0$$

hervorgehen.

Analog findet man

$$65) \quad \sqrt{(x_1 + x_2 - 2k)(x_3 + x_4 - 2k)} + \sqrt{(x_1 + x_3 - 2k)(x_2 + x_4 - 2k)} \\ + \sqrt{(x_1 + x_4 - 2k)(x_2 + x_3 - 2k)} = 0$$

$$k^2 - \frac{a}{2}k + \frac{b}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{b^2 - 3ac + 12d} = 0$$

u. a. m.

Die Gleichung der Geraden durch den Brennpunkt ist

$$x^4 - 4cx^2 + 4c^3 \cos \tau x - c^4 = 0$$

oder auch

$$y^4 - 4c \cos \tau y^3 + 4c^2 y^2 - c^4 = 0$$

worin τ die Neigung der Geraden gegen die Achse ist.

Man findet folgende Relationen

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x_1 x_2 + x_3 x_4} + \sqrt{x_1 x_3 + x_2 x_4} + \sqrt{x_2 x_3 + x_1 x_4} = 0 \\
 & \sqrt{y_1 y_2 - y_3 y_4} + \sqrt{y_1 y_3 - y_2 y_4} + \sqrt{y_2 y_3 - y_1 y_4} = 0 \\
 & \sqrt{x_1 x_2 - y_1 y_2} + \sqrt{x_1 x_3 - y_1 y_3} + \sqrt{x_2 x_4 - y_2 y_4} = 0 \\
 66) & \sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau} - x_1} + \sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau} - x_2} + \sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau} - x_3} = \sqrt{\frac{5c}{4\cos\tau} - x_4} \\
 & \hspace{15em} x_4 \text{ neg.} \\
 & \sqrt{1 - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4y_4}} = \sqrt{1 - \frac{y_1 + y_2 + y_4}{4y_3}} + \sqrt{1 - \frac{y_1 + y_3 + y_4}{4y_2}} \\
 & \hspace{15em} + \sqrt{1 - \frac{y_2 + y_3 + y_4}{4y_1}} \quad y_4 \text{ neg.}
 \end{aligned}$$

u. a. m., welche auf die Cassinischen Linien ausgedehnt werden können.

Interessant ist noch folgende Bemerkung.

Aus

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -c^4 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 + x_3 = -x_4 \quad \text{folgt}$$

$$67) \quad c^2 = \sqrt{x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)}$$

Wie aus der Geometrie des Kreises bekannt ist, bedeutet hier c^2 den Inhalt des Dreiecks, welches 3 sich von aussen berührende Kreise von den Radien x_1, x_2, x_3 mit ihren Seiten $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x$ bilden. Für variable x bleibt der Inhalt demnach constant.

Eine andere Beziehung zwischen den Focallinien xy geht aus

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} = 0$$

hervor.

Führt man in dieselbe für $y_3 + y_4$ den Wert $4c \cos \tau - y_1 - y_2$ ein, so folgt

$$\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{4c \cos \tau - y_1 - y_2}{c^4} y_1 y_2$$

oder

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2) (y_1 + y_2) = 4c \cos \tau y_1 y_2$$

und da

$$x_2^2 = y_2^2 + 4c^2 - 4c y_2 \cos \tau$$

so erhält man durch Elimination von $\cos \tau$

$$68) \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_1^2 + x_2^2 = 4c^2$$

als die gesuchte Beziehung zwischen den 2 Brennstrahlen, welche sich auch noch auf die Cassinischen Linien erweitern lässt.

Ferner leiten wir für die Gerade eine Gleichung ab, deren Unbekannte $\cos 2\varphi = \frac{r^2}{a^2}$ ist. Man findet

$$\cos 2\varphi^4 - 2 \cos 2\tau \cos 2\varphi^3 + \cos 2\tau \cos 2\varphi^2 - 2 \sin \tau^2 \cos 2\varphi + \sin \tau^4 = 0$$

welche die Eigenschaft besitzt, dass sie die Gleichung der Wurzelquadrate für

$$r^4 - 2a \cos \tau r^3 + a^2 r^2 - a^4 \sin \tau^2 = 0$$

ist, sodass auch hier eine Formel

$$69) \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 0$$

auftritt, deren r_4 als kleinster Wert negativ zu nehmen ist.

Diese Ableitung ist nur ein specieller Fall einer allgemeineren, welche wir nachher geben.

Man kann zur Ableitung neuer Relationen sich auch der Methode der Differentiation bedienen, die sich für die Gerade durch den Brennpunkt besonders empfiehlt.

Wir wollen sie kurz an einem allgemeineren Fall skizziren.

Aus der Secantengleichung folgt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4R \cos \delta$$

Wir nehmen $R(\alpha)$ als fest, die x nebst δ veränderlich an, so dass aus der Relation

$$\Sigma dx = -4R \sin \delta d\delta \quad \text{folgt.}$$

Indem wir nun die beiden einander unendlich nahen Secanten betrachten, deren Winkel $d\delta$ ist, so ergibt sich aus dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck an der Lemniskate, dass

$$dx = x d\delta \cot \text{f}$$

sein wird, worin f den Winkel zwischen der Tangente des Lemniskatenpunktes und der Secanten bedeutet, daher folgt auch

$$\Sigma x \cot \text{f} = -4R \sin \delta$$

In dieser Hinsicht kann man auch das von δ unabhängige Product $x_1 x_2 x_3 x_4$ logarithmisch differentiiren.

Man findet

$$\cot f_1 \cot f_2 \cot f_3 \cot f_4 = 0$$

u. a. m.

§ 7.

Wir ziehen durch den Mittelpunkt der Lemniskate einen Durchmesser $2r'$ und verbinden seine Endpunkte mit einem Peripheriepunkte $r(\varphi)$ durch Sehnen, welche einen Winkel $180^\circ - S$ mit einander einschliessen. Dann ist allgemein

$$\begin{aligned} \text{tg } S &= \frac{2rr' \sin(\varphi - \varphi')}{r'^2 - r^2} \\ &= \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi \cos 2\varphi_1} \sin(\varphi - \varphi_1)}{\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_1} \\ 70) \quad \text{tg } S &= \frac{\sqrt{\cos 2\varphi \cos 2\varphi_1}}{\sin(\varphi + \varphi_1)} \\ \cos S &= \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')} \end{aligned}$$

Wir müssen uns nun auf die Formeln in § 12. unserer Abhandlung über die trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen beziehen und schreiben der Vollständigkeit wegen noch die bez. Gleichungen nieder:

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi^4 - 2 \sin 2\tau \cdot \sin 2\varphi^3 - \left(\cos 2\tau + \frac{4h^2}{a^2} \cos 2\tau \right) \sin 2\varphi^2 \\ + 2 \sin 2\tau \cdot \sin 2\varphi + \frac{h^2}{c^4} + \frac{2h^2}{c^2} \sin 2\tau - \sin 2\tau^2 = 0 \\ 71) \quad \cos 2\varphi^4 - 2 \cos 2\tau \cos 2\varphi^3 + \left(\cos 2\tau^2 + \frac{4h^2}{a^2} \cos 2\tau \right) \cos 2\varphi^2 - \frac{2h^2}{c^2} \cos 2\varphi \\ + \frac{h^4}{c^4} = 0 \end{aligned}$$

die aus der Gleichung für $\text{tg } \varphi$ hervorgehen.

Wir fanden am genannten Ort die Relation

$$72) \quad \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = - \frac{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)}$$

die uns gleich von Nutzen sein wird.

Aus der Formel für $\cos S$ folgt

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \cos S}{\operatorname{tg} \varphi \cos S - 1}$$

Da nun

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sin(\varphi - \varphi' + A)}{\sin A}$$

wo A der Winkel zwischen der Sehne von rr_1 und r' ist, so folgt

$$\operatorname{tg} S = \frac{2 \sin A \sin(\varphi - \varphi' + A)}{\sin(\varphi - \varphi' + 2A)}$$

woraus

$$\cos A + \sin A \cot(\varphi - \varphi' + A) = 2 \sin A \cot S$$

Da ferner

$$\frac{r^2}{r'^2} = \sin^2 A + \sin^2 A \cot^2(\varphi - \varphi' + A)$$

so kann $\varphi - \varphi' + A$ aus den letzten Gleichungen eliminiert werden, wodurch man erhält

$$\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi'} = 1 - 2 \sin 2A \cot S + 4 \sin^2 A \cot^2 S$$

oder da

$$\cos 2\varphi' = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi'^2}{1 + \operatorname{tg} \varphi'^2}$$

und $\operatorname{tg} \varphi'$ bekannt ist, so führt das Schlussresultat auf die Formel

$$73) \quad A - B = 90^\circ - 2\varphi$$

worin B den andern Winkel an der Basis $2r'$ des Lemniskatendreiecks bedeutet. Für einen zweiten Punkt erhält man

$$A' - B' = 90^\circ - 2\varphi'$$

Aus der Subtraction resultirt der Satz:

Der Centriwinkel ist gleich der halben Summe der Peripheriewinkel nach den Endpunkten eines Durchmessers.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes haben wir für die Cassinischen Curven schon früher nachgewiesen. S. Geom. Unters. etc.

Da

$$\cos S = \cos(A + B) = \frac{\cos(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')}$$

ist und auch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \cos S}{\operatorname{tg} \varphi' \cos S - 1}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(90^\circ - A + B) = \frac{1}{2}(90^\circ - S + 2B)$$

so gewinnen wir eine Gleichung für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}S$, nämlich

$$74) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^3 + \cot B \operatorname{tg} \frac{1}{2} S^2 - \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \operatorname{tg} \varphi'} \cot B \operatorname{tg} \frac{1}{2} S + \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1} = 0$$

woraus nach bekannter Methode

$$75) \quad S_1 + S_2 + S_3 = 90^\circ + 2B - 2\varphi'$$

Hieraus folgt:

Zieht man von einem Punkte B' der Lemniskate einen mit der Achse den Winkel φ' einschliessenden Durchmesser $2r' = B'A$ und noch eine Secante $B'S_3 S_2 S_1$, welche mit r' den Winkel B einschliesst, und verbindet die 3 Schnittpunkte $S_1 S_2 S_3$ mit A durch Sehnen, wodurch entsprechende Winkel $S_1 S_2 S_3$ entstehen, so ist die Summe dieser Winkel gleich $90^\circ + 2B - 2\varphi'$.

Nun ist aber (a. a. O.)

$$\cos \delta \sin(\sigma - \sigma') = \sin \sigma$$

$$\sigma + \sigma' = 2\tau + 360^\circ$$

75)

$$\frac{\sin \sigma}{\cos \delta} = \sin(\sigma - \sigma')$$

oder

$$\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sin 2(\sigma - \tau)$$

Daher folgt bei Berücksichtigung der Vorzeichen

$$76) \quad 2(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\tau = 90^\circ + S$$

Diese Relation gilt für jedes Lemniskatendreieck, von welchem 2 Seiten durch $r_1(\varphi_1)$, $r_2(\varphi_2)$, ihr Winkel durch $\varphi_2 - \varphi_1$ bezeichnet sind. Ihre Mittellinie nach der 3. Seite schliesst mit dieser den Winkel S ein, und diese Seite hat gegen die Achse die Neigung τ . Aus dieser Formel lassen sich manche Folgerungen ziehen, z. B., wenn das Dreieck ein rechtwinkliges wird, und führen auf Sätze, welche wir schon früher in den „Eigenschaften der Lemniskate“ entwickelt haben.

Haben allgemein in dem Dreieck $AB'S$ die Seiten AS und SB' die Neigungswinkel τ bez. τ' gegen die Achse, so besteht die Relation

$$\sin 2(\sigma - \tau) = \sin 2(\sigma - \tau') = \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi_1)}$$

woraus folgt

$$77) \quad \sigma = 45^\circ + \frac{\tau + \tau'}{2} = \varphi_1 + \varphi_2$$

woraus eine interessante Beziehung $\tau = -\tau'$ folgt, wenn

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 45^\circ \text{ ist.}$$

§ 8.

Die Lemniskate und der Kreis.

Wie schon aus der Geometrie der Geraden geschlossen werden kann, wird die Verbindung von Lemniskate und Kreis nicht weniger reich sein an bemerkenswerten Sätzen und Gleichungen, womit wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Aus der Formel

$$\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = -\frac{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)}$$

folgt noch nach 70)

$$\begin{aligned} 78) \quad \cos S &= -\cos S' \\ S + S' &= 180^\circ \end{aligned}$$

woraus ein schon früher abgeleiteter Satz von neuem bewahrheitet wird, nämlich:

Die Mitten correspondirender Sehnen sind vom Mittelpunkt der Lemniskate gleich weit entfernt.

Infolge der Sinusgleichung

$$\sin 2\varphi^4 - A \sin 2\varphi^3 + B \sin 2\varphi^2 + A \sin 2\varphi + D = 0$$

erhält man

$$\Sigma_1^4 \sin 2\varphi + \Sigma_1^4 \sin 2\varphi \sin 2\varphi \sin 2\varphi$$

woraus

$$\frac{1 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2}{1 + \sin 2\varphi_3 \sin 2\varphi_4} = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)^2}$$

Aus diesem Ausdruck folgt nach etlichen Umformungen

$$\frac{\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2}{\cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)^2} = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)^2}$$

Ferner ist

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 \cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4 = D' = \frac{h^4}{c^4}$$

also

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 = \frac{D'}{\cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4}$$

Führt man hierin für $\cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4$ den vorhin gefundenen Wert ein, so folgt

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 = \frac{h^2 \cos \delta}{c^2 \cos \delta'} = -\frac{h^2 \sin \sigma}{c^2 \sin \sigma'}$$

Wir legen nun durch 2 Schnittpunkte der Geraden und den Mittelpunkt der Lemniskate einen Kreis vom Radius ρ und benutzen die bekannte Kreisrelation $r_1 r_2 = 2h\rho$, wo h die Höhe vom Mittelpunkt der Lemniskate auf die Sehne s ist.

Bemerken wir, dass

$$\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{a^4}$$

ist, so folgt aus Obigem

$$79) \quad \frac{c^2}{\rho^2} = \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} = - \frac{\sin \sigma'}{\sin \sigma}$$

Für die beiden andern Schnittpunkte besteht die analoge

$$\frac{c^2}{\rho'^2} = \frac{\cos \delta}{\cos \delta'}$$

und ihr Product führt auf

$$80) \quad \rho\rho' = c^2$$

oder das Product der Radien der beiden Kreise, welche durch entsprechende Punkte der Geraden hindurchgehen und den Mittelpunkt der Curve enthalten, ist constant.

Aus

$$\frac{\cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)^2} = \frac{\cos 2\varphi_3 \cos 2\varphi_4}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)^2}$$

folgt

$$\frac{r_1 r_2}{\cos \delta} = \frac{r_3 r_4}{\cos \delta'} \quad \text{oder} \quad \frac{2h\rho}{\cos \delta} = \frac{2h\rho'}{\cos \delta'}$$

also

$$\frac{\rho}{\cos \delta} = \frac{\rho'}{\cos \delta'}$$

und, da noch

$$\text{auch} \quad s = 2\rho \sin \delta, \quad s' = 2\rho' \sin \delta'$$

$$81) \quad \frac{s}{s'} = \frac{\sin 2\delta}{\sin 2\delta'}$$

Wir wollen noch die Lage beider zugehörigen Kreise untersuchen und stellen zu dem Ende die allgemeinen Gleichungen für Lemniskate und Kreis auf. Das Centrum des letztern habe die Coordinaten $R(\alpha)$. Der Radius sei s , die Polarwinkel φ .

Man findet

$$\begin{aligned} & \text{tg } \varphi^4 ((R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4R^2 a^2 \sin^2 \alpha) + 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \text{tg } \varphi^3 \\ & + (2(R^2 - s^2) - 2a^4 + 4R^2 a^2 \cos 2\alpha) \text{tg } \varphi^2 - 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \text{tg } \varphi \\ & + (R^2 - s^2 + a^2)^2 - 4R^2 a^2 \cos^2 \alpha = 0 \end{aligned}$$

und man bemerke, dass bis auf das Vorzeichen die Coefficienten von $\operatorname{tg} \varphi^3$ und $\operatorname{tg} \varphi$ übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
 & \cos 2\varphi^4 (R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4) - 2s^2 (c^2 - R^2 \cos 2\alpha) \cos 2\varphi^3 \\
 & + \left(\left(\frac{R^2 - s^2}{a} \right)^2 (c^2 - R^2 \cos 2\alpha) + s^4 - R^4 \sin 2\alpha^2 \right) \cos 2\varphi^2 \\
 & - s^2 \left(\frac{R^2 - s^2}{a} \right)^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \left(\frac{R^2 - s^2}{a} \right)^4 = 0 \\
 83) \quad & \sin 2\varphi^4 (R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4) + 2R^2 s^2 \sin 2\alpha \sin 2\varphi^3 \\
 & + \sin 2\varphi^2 \left((2c^2 - R^2 \cos 2\alpha + \left(\frac{R^2 - s^2}{a} \right)^2) (R^2 \cos 2\alpha - c^2) \right. \\
 & \left. + s^4 - R^4 \sin 2\alpha^2 \right) - 2R^2 s^2 \sin 2\alpha \sin 2\varphi \\
 & + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{R^2 - s^2}{a} \right)^2 + c^2 - R^2 \cos 2\alpha \right)^2 - s^4 = 0
 \end{aligned}$$

und auch in der letzten Gleichung ist der Coefficient von $\sin 2\varphi^3$ gleich dem von $\sin 2\varphi$.

Daher lassen sich die in der genannten Abhandlung über die Trigonometr. Aufl. biquadr. Gl. mitgetheilten Gleichungssysteme direct in einfachster Art verwenden. So findet man

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) &= - \frac{R^2 \sin 2\alpha}{c^2 - R^2 \cos 2\alpha} \\
 R^2 \sin 2\alpha &= -q^2 \sin U \\
 c^2 - R^2 \cos 2\alpha &= q^2 \cos U \\
 84) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= U \\
 q^4 &= R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4 \\
 q^2 &= - \frac{R^2}{\cos \delta} \\
 R^2 \sin(U - 2\alpha) &= c^2 \sin U \\
 \cos \delta \sin(2\sigma - U) &= \frac{s^2}{q^2} \sin \sigma \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

und die Resolvente

$$\begin{aligned}
 85) \quad \cos \omega^3 - \left(\cos U + \frac{(R^2 - s^2)^2}{a^2 q^2} \right) \cos \omega^2 + \left(\frac{s^4}{q^4} - 1 \right) \cos \omega \\
 - \left(\frac{s^4}{q^4} - 1 \right) \cos U + \frac{(R^2 - s^2)^2}{a^2 q^2} = 0 \\
 \omega_1 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \\
 \omega_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \\
 \omega_3 = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4
 \end{aligned}$$

Um nun zu den beiden Kreisen zurückzukehren, machen wir von der Formel

$$R^2 \sin(U - 2\alpha) = c^2 \sin U$$

Gebrauch.

Da beide Kreise durch 0 hindurchgehen, so geht sie in

$$\sin(\sigma - 2\alpha) = \frac{c^2}{\rho^2} \sin \sigma$$

über. Wir fanden aber schon oben die Formel

$$\frac{\sin \sigma'}{\sin \sigma} = \frac{c^2}{\rho^2}$$

Demnach ist

$$\sin(\sigma - 2\alpha) = \sin \sigma'$$

woraus wegen

$$\sigma + \sigma' = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 360^\circ + 2\tau$$

für den einen Kreis

$$\sigma - 2\alpha = 180^\circ - \sigma + 2\tau$$

oder

$$\tau + \alpha + 90^\circ = \sigma$$

und

$$\tau + \alpha' + 90^\circ = \sigma'$$

für den andern.

Anhang.

Die geometrische Construction der Wurzeln der Gleichungen

4. Grades vermittelt der Cassinischen Linie.

Von einem Punkte $R\varphi$ ziehen wir eine Secante durch die Cassinische Linie, welche mit R den Winkel δ einschliesst und bezeichnen ihre durch die Curve gebildeten Teile mit $x_1 x_2 x_3 x_4$. Sie sind Wurzeln der folgenden Gleichung

$$x^4 - 4R \cos \delta x^3 + (2R^2 + 4R^2 \cos \delta^2 - 2c^2 \cos 2(\varphi - \delta))x^2 - 4(R^3 \cos \delta - c^2 R \cos(2\varphi - \delta))x + R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 - q^4 = 0$$

Man kann dieselbe zur geometrischen Auflösung der biquadratischen Gleichung

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

verwerten, was wir zeigen wollen.

Die Identität beider ist an die folgenden Relationen geknüpft:

$$A = 4R \cos \delta$$

$$B = 2R^2 + 4R^2 \cos \delta^2 - 2c^2 \cos 2(\varphi - \delta)$$

$$C = 4R^3 \cos \delta - 4c^2 R \cos(2\varphi - \delta)$$

$$D = R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 - q^4$$

Aus diesen ist c , q , R , φ , δ durch $A B C D$ auszudrücken, wobei also eine dieser Grössen willkürlich genommen werden kann. Wir bilden die kubische Variante und die quadratische Invariante der biquadratischen Gleichung und erhalten

$$A^3 - 4AB + 8C = 32c^2 R \sin \delta \sin 2(\varphi - \delta)$$

$$B^2 - 3AC + 12D = (6R^2 - B)^2 + 12(c^4 - q^4)$$

Vermöge der Relationen von A und D kann man δ und 2φ eliminieren, und das Resultat ist

$$(A^3 - 4AB + 8C)^2 = (16R^2 - A^2)(64c^4 - (A^2 - 4B)^2 - 16R^2(A^2 - 4B) - 64R^4)$$

woraus für R^2 die kubische Gleichung folgt:

$$64R^6 + 4(3A^2 - 16B)R^4 - 4(A^2B - 4B^2 + 16c^4)R^2 + 4A^2c^4 + A^3C - 4ABC + 4C^2 = 0$$

Ferner folgt aus den 4 Hauptgleichungen

$$3R^4 - 2R^2 + \frac{1}{4}AC - D + c^4 - q^4 = 0$$

und da

$$D + q^4 - c^4 = R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi$$

ist, so folgt auch

$$R^4 - \frac{B}{2} R^2 + c^2 R^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{8}AC = 0$$

Man bemerke, dass man aus den Gleichungen für R^2 diesen Ausdruck eliminieren kann, wodurch man eine Beziehung zwischen den die Curve bestimmenden Grössen c und q erhält.

Dadurch, dass eine Grösse c oder q willkürlich bleibt, ist eine grosse Verschiedenheit der Curven möglich, die es gestattet, die für die Construction bequemste auszuwählen.

Den Winkel δ erhält man aus

$$\cos \delta = \frac{A}{4R}$$

ferner ist

$$q^4 = 3R^4 - BR^2 + \frac{1}{4}AC - D + c^4$$

und endlich

$$\cos 2\varphi = \frac{R^4 - D + c^4 - q^4}{2c^2 R^2}$$

Man kann übrigens die Auflösung der kubischen Gleichung umgehen, da es einerlei ist, R als Function von c oder c als Function von R anzusehen. Doch wollen wir versuchsweise auf die Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

die kubische Gleichung anwenden. Sie ist

$$R^6 - \frac{65}{4}R^4 + \left(\frac{175}{2} - c^4\right)R^2 - \frac{25}{4}(25 - c^4) = 0$$

Wählen wir z. B. $c = 2$, so wird sie zu

$$R^6 - \frac{65}{4}R^4 + \frac{143}{2}R^2 - \frac{225}{4} = 0$$

und ihre Wurzeln sind $R_1 = 1$, $R_2 = \frac{5}{2}$, $R_3 = 3$. Die erste Wurzel ist unbrauchbar. Die 2te liefert $q^4 = \frac{247}{16}$, $\cos \delta = 1$, $\cos 2\varphi = \frac{5}{16}$ wonach die Curve aus 2 Ovalen besteht. Da $\delta = 0$ ist, so geht die Secante durch das Centrum, und die Schnittpunkte begrenzen die Strecken 1, 2, 3, 4. Die 3. Wurzel liefert $q^4 = 45$, $\cos \delta = \frac{5}{8}$ und es ist $\varphi = \delta$. Die Secante läuft also jetzt der X -Achse parallel und schneidet die aus einem geschlossenen Ganzen bestehende Curve in Strecken, welche wieder die Wurzeln 1, 2, 3, 4 bestimmen.

Man kann übrigens auch in der obigen Gleichung für R^2 das Absolutglied verschwinden lassen, was in dem angeführten Beispiel für $c^2 = 5$ eintritt. Aus der Gleichung

$$R^4 - \frac{65}{4}R^2 + \frac{125}{2} = 0$$

folgen dann die Wurzeln $R_1^2 = 10$, $R_2^2 = \frac{25}{4}$. Damit sind verbunden im ersten Fall $q^4 = 76$, $\cos \delta = \sqrt{\frac{5}{8}}$, $\cos 2\varphi = \frac{1}{4}$, also $\varphi = \delta$, wonach die Curve ein Ganzes bildet; und im 2. Fall $q^4 = \frac{391}{16}$, $\cos 2\varphi = \frac{1}{4}$, $\delta = 0$, wonach die Curve aus 2 Ovalen besteht. Im übrigen sind also die Verhältnisse wie früher.

Das durchgeführte Beispiel lässt erkennen, dass die Cassinische Linie den Curven zugerechnet werden kann, welche eine geometrische Construction der Wurzeln von Gleichungen 4. Grades ermöglichen.

Wie schon gesagt, ist es nicht gerade notwendig, eine kubische Gleichung zu diesem Zwecke aufzulösen, denn wir können den Formelapparat auch in folgender Art aufstellen:

$$R^2 = \frac{1}{3}B + \frac{1}{6}\sqrt{B^2 - 3AC + 12D - 12(c^4 - q^4)}$$

$$c^4 = \frac{1}{64} \frac{(A^3 - 4AB + 8C)^2}{16R^2 - A^2} + \frac{1}{64} (A^2 - 4B + 8R^2)^2$$

$$\cos 2\varphi = \frac{R^4 - D + c^4 - q^4}{2c^2 R^2}$$

$$\cos \delta = \frac{A}{4R}$$

In der ersten Gleichung kann man über $c^4 - q^4$ so disponiren, dass der Wurzel Ausdruck ein vollständiges Quadrat wird, wobei man allerdings $c^4 - q^4$ so zu wählen hat, dass φ oder δ nicht unmöglich wird. Diese Differenz steht, wie man sieht, in Wechselbeziehung zur quadratischen Invariante

$$J = 12(B^2 - 3AC + 12D)$$

Ist $c = q$, so wird die Curve zur Lemniskate, welche aber ein specielles Interesse hat.

Benutzen wir wieder die Gleichung

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

so ist jetzt

$$R^2 = \frac{35}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13 + 12(q^4 - c^4)}$$

Wählen wir $q^4 - c^4 = 3$, so ist $R^2 = 7$, $c^2 = 2$, $q^4 = 7$, $\cos 2\varphi = \frac{11}{14}$, $\varphi = \delta$. Setzen wir dagegen $c^4 - q^4$, so folgt $R^2 = \frac{19}{3}$, $c^2 = \frac{4}{3}$, $q^4 = \frac{13}{9}$, $\cos 2\varphi = \frac{37}{38}$, $\varphi = \delta$, u. s. w. Aus allen Fällen dieser Art folgen die Wurzeln 1, 2, 3, 4. Aus diesen Ableitungen erhellt zur Genüge, in wie weiten Grenzen die Cassinische Linie den gestellten Bedingungen genügt.

Ausserdem umfasst sie alle Fälle. Um dies nachzuweisen, wollen wir eine Gleichung 4. Grades mit 3 gleichen Wurzeln voraussetzen. Bekanntlich erscheint dann die biquadratische Invariante J .

Es sei $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Ist etwa $q^4 - c^4 = \frac{3}{4}$, so wird $R^2 = 2$, $c^4 = \frac{11}{28}$, $q^4 = \frac{8}{7}$, $\cos 2\varphi = \frac{5}{8}\sqrt{\frac{7}{11}}$, $\cos \delta = \frac{5}{8}\sqrt{2}$. Alle diese Werte sind reell. Demnach schneidet die Curve von der Secante 3 gleiche Strecken $= 1$ ab,

was nur dann möglich ist, wenn die Secante zu einer Tangente in einem Wendepunkt wird.

Selbst der Fall mit 4 gleichen Wurzeln ist durch diese Curve lösbar. Legt man z. B. die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

zu Grunde, so hat man $R^2 = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}(q^4 - c^4)}$, ferner ist $c^2 = R^2 - 1$, also $2c^2 = q^2$ oder $c = \frac{q}{\sqrt{2}}$.

Bekanntlich hat die Cassinische Linie eine der Ellipse ähnliche Gestalt, wenn $c < \frac{q}{\sqrt{2}}$ und eine eingedrückte Form, wenn $c < \frac{q}{\sqrt{2}}$. Im Uebergangsfall werden also, wenn die Secante zur Tangente ein Scheitelpunkt der kleinen Achse wird, die 4 Schnittpunkte der erstern zum Berührungspunkt der letztern zusammenfallen, woraus die Gleichheit aller Wurzeln resultirt.

Der letzte Fall $c = \frac{q}{\sqrt{2}}$ hat noch ein weiteres Interesse.

Ziehen wir nämlich von einem Punkte der y -Achse der allgemeinen Curve eine Tangente an sie und bezeichnen den entsprechenden Focalwinkel des Berührungspunktes mit Θ , mit u die y -Ordinate, so erhält man nach einigen Entwicklungen die Gleichung

$$q^2 - c^2) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^4 - \frac{n}{c} (2c^2 - q^2) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^3 - \frac{n}{c} (2c^2 + q^2) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta + c^2 + q^2 = 0$$

welche für $2c^2 = q^2$ übergeht in

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^4 - 4 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta + 3 = 0$$

woraus hervorgeht, dass Gleichungen von der Form

$$x^4 - p10 + 3 = 0$$

mit einer bestimmten Cassinischen Linie in Beziehung gebracht werden können.

XIX.

Ueber eine besondere Art von Reihen.

Von

Franz Rogel.

Wenn $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ eine convergente Potenzreihe ist, und $a_n = \varphi(n)$, so kann von derselben eine neue durch Entwicklung von $\sum_1^{\infty} f(x^n)$ nach steigenden Potenzen von x entstehende Potenzreihe abgeleitet werden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \\ f(x^2) &= \quad \quad a_1x^2 \quad \quad + a_2x^4 + \dots \\ f(x^3) &= \quad \quad \quad \quad a_1x^3 \quad \quad + \dots \\ f(x^4) &= \quad \quad \quad \quad \quad \quad a_1x^4 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und d. h. Summierung:

$$\sum_1^{\infty} f(x^n) = a_1x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_3)x^3 + (a_1 + a_2 + a_4)x^4 + \dots$$

Jeder Coefficient c_n ist die Summe von Functionen $\Sigma\varphi(d)$, in welchen d alle Divisoren des zugehörigen Exponenten n zu durchlaufen hat; so ist

$$c_4 = \Sigma\varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(4) = a_1 + a_2 + a_4.$$

Es besteht somit jeder Coefficient c_n aus so vielen Gliedern, als der Index n Divisoren d besitzt.

Aus der Convergenz der Potenzreihe für $f(x)$ folgt nicht unmittelbar jene der abgeleiteten Reihe; letztere wird bezüglich ihres Convergencebereiches speciell untersucht werden müssen.

Liegt der Ableitung die Maclaurin'sche Reihe zu Grunde, so ist das allgemeine Glied der neuen Reihe offenbar

$$c_n x^n = \sum_d \frac{f^{(d)}(0)}{d!} \cdot x^n$$

wo für d sämtliche Divisoren von n der Reihe nach (die Einheit und n inbegriffen) zu setzen sind.

Eine Repräsentantur dieser Art Reihen, deren Coefficienten also zahlentheoretische Functionen des Index sind, ist die berühmte Lambert'sche Reihe, welche aus der geometrischen Reihe hervorgeht.

Andere, durch ihre Summirbarkeit sich auszeichnende Reihen wären folgende:

1. Wenn

$$f(x) = \log \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (-1 < x < +1)$$

als Stammreihe gewählt wird, so ist

$$\sum_1^{\infty} \left(\log \frac{1}{1-x^n} \right) = x + (1 + \frac{1}{2})x^2 + (1 + \frac{1}{3})x^3 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^4 + (1 + \frac{1}{3})x^5 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})x^6 + \dots$$

die abgeleitete, für jedes x $\begin{matrix} > -1 \\ < +1 \end{matrix}$ convergente Reihe. Jeder Coefficient c_n ist hier die Summe sämtlicher reciproker Divisoren d des Index n , nämlich

$$c_n = \sum \left(\frac{1}{d} \right)$$

Sind a, b, c die sämtlichen, in $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ aufgehenden Primzahlen, so besteht dann jeder Coefficient c_n aus $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots$ Gliedern; ist n selbst eine Primzahl, so ist die Glieder-Anzahl = 2 und $c_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Für unendlich grosse Primzahlen nimmt c_n den Wert = 1 an. Wenn dagegen n eine unendlich grosse Potenz einer Primzahl p ist, also $n = p^\infty$, so ist der Coefficient

$$c_n = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots = \frac{p}{p-1}$$

Besonderer Erwähnung verdient der Fall, in welchem n das Product unendlich hoher Potenzen von unendlich vielen unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen $2.3.5.7.11 \dots$ ist, denn hier ist dann

$$c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$$

gleich der harmonischen Reihe 1ter Ordnung, für welche die Beziehung gilt:

$$\lim \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right\} = K (= 0.57721 \dots)$$

beiderseits mit x^n multiplicirt, kommt

$$\lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n - \lim (x^n \cdot \log n) = \lim K \cdot x^n$$

da nun

$$\lim (x^n \log n)_{n=\infty} = - \left. \frac{x^n}{n \log x} \right\}_{n=\infty} = x^n \}_{n=\infty} = 0 \{ -1 < x < +1 \}$$

und $\lim Kx^n$ ebenfalls $= 0$ ist, so ist auch

$$c_n x^n = \lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n = 0$$

was zwar nur eine Folge der Convergenz dieser Reihe ist, wegen den schwankenden Werten der Coefficienten aber besonderer Erwähnung verdient.

Werden die sämtlichen c_n betrachtet, welche den zwischen zweien unmittelbar aufeinander folgenden Primzahlen p und $p' > p$ liegenden Zahlen entsprechen, so leuchtet ein, das c_p und $c_{p'}$ kleiner sein werden als alle c_n , wenn n zwischen p und p' liegt und kleiner als c_{p-1} und $c_{p'+1}$, weil $p-1$ und $p'+1$ gerade Zahlen sind, somit $\frac{1}{2}$ in c_{p-1} und $c_{p'+1}$ als Summand enthalten sein muss.

Die Coefficienten c_p sind daher Minima, wenn p Primzahl ist; zwischen diesen Minimalwerten, deren grösster $c_2 = 1 + \frac{1}{2}$ ist und welche selbst eine beständig abnehmende Reihe bilden, schwanken — oscilliren die übrigen Werte c_n . Die Schwankungen werden mit zunehmenden n immer grösser.

Eine bemerkenswerte Umwandlung erfährt diese Reihe, wenn sie nach den Gliedern der harmonischen Reihe $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$ geordnet wird; es ist dann:

$$\begin{aligned}
 R(x) &= \sum_1^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} = x + (1 + \frac{1}{2})x^2 + (1 + \frac{1}{3})x^3 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^4 + \dots \\
 &= \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{1-x^3} + \dots + \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n} + \dots \\
 &= \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (-1 < x < 1)
 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$R(x) = \sum_1^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} = -\log \prod_1^{\infty} (1-x^n);$$

die Factorenfolge nach Unionen, Amben, Ternen etc. der als Exponenten von x fungirenden ganzen Zahlen entwickelt, giebt:

$$\begin{aligned}
 \prod_1^{\infty} (1-x^n) &= (1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)\dots = 1 - \sum x^n + \sum x^m \cdot x^n - \sum x^m \cdot x^n \cdot x^p + \dots \\
 &= 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} + \dots
 \end{aligned}$$

daher

$$R(x) = -\log \left\{ \sum \left[(-1)^n \prod_1^n \left(\frac{x^r}{1-x^r} \right) \right] \right\}$$

Nach Euler (Introd in Anal. inf. I. 16) wird jede Potenz x^n in $\prod_1^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$ so oft hervorgebracht, als sich der Exponent n aus den ganzen Zahlen durch Addition hervorbringen lässt; es ist:

$$\prod_1^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots$$

demnach lässt sich der Satz aussprechen:

„Der natürliche Logarithmus der Reihe, in welcher jeder Coefficient anzeigt, auf wie viel Arten der zugehörige Exponent aus den ganzen Zahlen durch Addition gebildet werden kann, ist eine Reihe, deren Coefficienten die Summen der reciproken Divisoren der correspondirenden Exponenten sind.“

Da ferner

$$\begin{aligned}
 \prod (1-x^n) &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + + - - \dots \\
 &= \sum_0^{\infty} (-1)^n x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}
 \end{aligned}$$

ist, so gilt auch:

$$R(x) = -\log \left\{ \sum (-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}} \right\}$$

Werden von $R(x)$ die Glieder mit ungeradem Exponenten zu einer neuen Reihe

$$R'(x) = \frac{1}{2} \sum \log \left(\frac{1+x^{2\nu+1}}{1-x^{2\nu+1}} \right)$$

vereinigt, so lässt sich letztere mit Hilfe der elliptischen Functionen summiren.

Es ist nämlich,

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

vorausgesetzt,

$$\begin{aligned} R'(q) &= q + (1 + \frac{1}{3})q^3 + (1 + \frac{1}{3})q^5 + (1 + \frac{1}{3})q^7 + (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})q^9 + \dots \\ &= \log \left\{ \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \cdot \sqrt{\frac{1+q^3}{1-q^3}} \cdot \sqrt{\frac{1+q^7}{1-q^7}} \dots \right\} \end{aligned}$$

ferner

$$k' = \Pi \left(\frac{1 - q^{2h-1}}{1 + q^{2h-1}} \right)^4$$

(Durège, S. 227 (16)), daher

$$R'(q) = \log \frac{1}{\sqrt{k'}}$$

k' ist der complementäre Modulus $= \frac{\frac{1}{2} - q + q^4 - q^9 + q^{16} - \dots}{\frac{1}{2} + q + q^4 + q^9 + q^{16} + \dots}$, daher gilt auch:

$$\log \sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{2} + q + q^4 + q^9 + q^{16} + \dots}{\frac{1}{2} - q + q^4 - q^9 + q^{16} + \dots} \right\}} = q + (1 + \frac{1}{3})q^3 + (1 + \frac{1}{3})q^5 + (1 + \frac{1}{3})q^7 + (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})q^9 + \dots$$

Durch letztern Ausdruck wird die Reihe $R'(q)$, in welcher die Coefficienten von den Teilern des zugehörigen Exponenten abhängen, dargestellt durch den Quotienten zweier Potenz-Reihen, deren Exponenten die Quadrate der natürlichen Zahlen sind.

2. Sei

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots = S_n$$

so ist das Product $S_{m+n} S_n$ zweier harmonischen Reihen, geordnet

nach den n ten Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen, auch eine Reihe in welcher z. B. das Glied $\frac{1}{a^n}$ den Coefficienten $\Sigma \frac{1}{d^m}$ besitzt, wo d wieder sämtliche Teiler von a zu durchlaufen hat. Denn es ist:

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \dots$$

$$\frac{S_n}{2^{m+n}} = \frac{1}{2^m \cdot 2^n} + \frac{1}{2^m \cdot 4^n} + \frac{1}{2^m \cdot 6^n} + \dots$$

$$\frac{S_n}{3^{m+n}} = \frac{1}{3^m \cdot 3^n} + \frac{1}{3^m \cdot 6^n} + \dots$$

$$\frac{S_n}{4^{m+n}} = \frac{1}{4^m \cdot 4^n} + \dots$$

$$\frac{S_n}{5^{m+n}} = \frac{1}{5^m \cdot 5^n} + \dots$$

$$\frac{S_n}{6^{m+n}} = \frac{1}{6^m \cdot 6^n} + \dots$$

.....

daher

$$S_n \left(\frac{1}{1^{m+n}} + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \dots \right) = S_n \cdot S_{m+n} = R_n$$

$$= \frac{1}{1^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m}}{2^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m}}{3^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m}}{4^n} + \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{5^m}}{5^n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{6^m}}{6^n} + \dots$$

Die Glieder dieser Reihe sind Functionen $\psi(m)$, welche der Bedingung

$$\psi(m') \psi(m'') = \psi(m' \cdot m'')$$

für ganze m genügen; darum lässt sich die Reihe R_n auch in Form eines unendlichen Productes anschreiben; es ist

$$R_n = \prod_p \left[1 + \frac{1 + \frac{1}{p^m}}{p^n} + \frac{1 + \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{2m}}}{p^{2n}} + \frac{1 + \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{2m}} + \frac{1}{p^{3m}}}{p^{3n}} + \dots \right]$$

unter p Primzahlen verstanden. Die Summe der eingeklammerten Reihe ist

somit ist

$$= \frac{p^{m+n}}{p^{m+n}-1} \cdot \frac{p^n}{p^n-1}$$

$$R_n = \prod_2^{\infty} \frac{p^{2n+m}}{(p^{m+n}-1)(p^n-1)}$$

Bei geraden m und a ist R_n durch die Bernoulli'schen Zahlen ausdrückbar; z. B. ist für $m=2$, $n=2$

$$R_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}}{2^2} + \frac{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2}}{3^2} + \frac{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}}{4^2} + \dots$$

$$= \frac{2B_1\pi^2}{2!} \cdot \frac{2^3B_3\pi^4}{4!} = \frac{\pi^6}{540}$$

Wenn $m=0$ ist, verwandelt sich R_n in das Quadrat S_n^2 und der Coefficient $\Sigma \frac{1}{a^m} = \Sigma \frac{1}{a^0}$ des Gliedes mit dem Nenner a^n wird gleich der Anzahl der Teiler von a ; es ist nämlich

$$S_n^2 = \frac{1}{1^n} + \frac{2}{2^n} + \frac{2}{3^n} + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{5^n} + \frac{4}{6^n} + \dots;$$

es hat z. B. das Glied $\frac{1}{6^n}$ den Zähler 4, weil 6 4 Divisoren: 1. 2. 3. und 6. besitzt. Es treten also hier ganz dieselben Coefficienten wie bei der Lambert'schen Reihe auf. In Form einer unendlichen Factorenfolge geschrieben ist:

$$S_n^2 = \prod_2^{\infty} \frac{p^{2n}}{(p^n-1)^2} = \frac{2^{2n}}{(2^n-1)^2} \cdot \frac{3^{2n}}{(3^n-1)^2} \cdot \frac{5^{2n}}{(5^n-1)^2} + \dots$$

3. Bekanntlich ist:

$$x = \frac{1^0}{1} x e^{-x} + \frac{2^2}{2!} x^2 e^{-2x} + \frac{3^2}{3!} x^3 e^{-3x} + \dots \begin{cases} x=0 \\ x < 1 \end{cases}$$

der Reihe nach x , x^2 , x^3 , ... für x gesetzt, sämtliche Reihen addirt und nach aufsteigenden Potenzen von x geordnet giebt das Resultat:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1^0}{1} e^{-x} \cdot x + \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^2} + \frac{1^1}{2!} e^{-2x} \right) x^2 + \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^3} + \frac{3^2}{3!} e^{-3x} \right) x^3$$

$$+ \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^4} + \frac{1}{2!} e^{-2x^2} + \frac{4^3}{4!} e^{-4x} \right) x^4 + \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^5} + \frac{5^4}{5!} e^{-5x} \right) x^5$$

$$+ \left(\frac{1^0}{1} e^{-x^6} + \frac{2^1}{2!} e^{-2x^3} + \frac{3^2}{3!} e^{-3x^2} + \frac{6^5}{6!} e^{-6x} \right) x^6 + \dots$$

Der Coefficient irgend eines Gliedes x^n besteht nun wieder aus ebenso vielen Gliedern als n Divisoren besitzt; letztere treten sowohl als Coefficienten als auch als Exponenten des selbst als Exponent von e erscheinenden Argumentes x auf, so zwar, dass immer Exponent und Coefficient das constante Produkt $= n$ geben. Die Divisoren von n erscheinen ferner vollzählig als Coefficienten von der Form $\frac{d^{d-1}}{d!}$ der Exponentiellen e . Das allgemeine Glied dieser als Coefficient der Potenz x^n fungirenden endlichen Reihe ist demnach:

$$\frac{d^{d-1}}{d!} e^{-dx^d},$$

wenn d ein Divisor von n ist, und der ganze Coefficient von schreibt sich daher:

$$\sum_1^n \left(\frac{d^{d-1}}{d!} e^{-px^d} \right)$$

wo für d sämtliche Teiler von n zu setzen sind.

Ist n eine Primzahl p , so hat x^p den nur aus 2 Teilen bestehenden Coefficienten

$$\frac{1^0}{1!} e^{-x^p} + \frac{p^{p-1}}{p!} e^{-px}$$

ist hingegen n eine unendlich grosse Potenz einer einzigen Primzahl p , so ist der Coefficient von x^{p^v} ($v = \infty$) selbst eine unendliche Reihe:

$$\frac{1^0}{1!} e^{-x^{p^v}} + \frac{p^{p-1}}{p!} e^{-px^{p^{v-1}}} + \frac{p^{2(p-1)}}{(p^2)!} e^{-p^2x^{p^{v-2}}} + \dots$$

$$\dots + \left. \frac{p^{v(p-1)}}{(p^v)!} e^{-p^v x} \right\}_{v=\infty}$$

in welcher die Coefficienten und Exponenten von e nach einem leicht erkennbaren Gesetze fortschreiten.

Mittelst der Reihe für $x \left(\begin{smallmatrix} = 0 \\ < + 1 \end{smallmatrix} \right)$ lässt sich aber offenbar jede in eine Potenzreihe entwickelbare Function $f(x)$ auch in eine solche Reihe verwandeln, in welcher die Coefficienten der Potenzen von x Summen $\sum_1^n \varphi(d)$ von Functionen der Teiler des Exponenten n sind, und daher aus ebenso vielen Teilen bestehen, als n Divisoren aufweist.

So ist z. B.

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{1-x} &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \\ &= \frac{1^0}{1!} x e^{-x} + \left(\frac{2^1}{2!} e^{-2x} + \frac{1}{2} \frac{1^0}{1!} e^{-x^2} \right) x^2 + \left(\frac{3^2}{3!} e^{-3x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^0}{1!} e^{-x^3} \right) x^3 \\ &\quad + \left(\frac{4^3}{4!} e^{-4x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^1}{2!} e^{-2x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1^0}{1!} e^{-x^4} \right) x^4, \dots, \end{aligned}$$

Hier ist

$$\varphi(d) = \frac{d}{n} \cdot \frac{d^{d-1}}{d!} e^{-dx} \frac{n}{d} = \frac{1}{n} \frac{d^d}{d!} e^{-dx} \frac{n}{d}$$

ebenso

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1^0}{1!} e^{-x} \cdot x + \left(\frac{2^1}{2!} e^{-2x} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1^0}{1!} e^{-x^2} \right) x^2 \\ &\quad + \left(\frac{3^2}{3!} e^{-3x} + \frac{1}{3!} \frac{1^0}{1!} e^{-x^3} \right) x^3 + \left(\frac{4^3}{4!} e^{-4x} + \frac{1}{2!} \frac{2^1}{2!} e^{-2x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1^0}{1!} e^{-x^4} \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

Der Coefficient von x^n ist in dieser Reihe:

$$\sum_1^n \frac{1}{\left(\frac{n}{d}\right)!} \frac{d^{d-1}}{d!} e^{-dx} \frac{n}{d}$$

wo sich die Summirung wieder auf alle Divisoren d des Exponenten n erstreckt.

Salzburg, Juli 1887.

XX.

Die Bestimmung der Anzahl Primzahlen, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl sind.

Von

Franz Rogel.

Im 46. Bande des geschätzten Archives berechnet K. E. Hoffmann die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze m mittelst der Function $\varphi(m)$ und einer Grösse μ , die auf rein empirischem Wege unter Beihilfe die Rechnung abkürzender Kunstgriffe aus der Primzahlentafel durch Abzählen gefunden wird; die Inanspruchnahme der letzteren erstreckt sich auf Primzahlen, welche weit über \sqrt{m} liegen.

Diese Lösungsart, welche dem praktischen Rechner einen sehr rasch zum Ziele führenden Weg zeigt, lässt daher, eben wegen des Auftretens dieser Grösse μ , die Frage nach der Form der Abhängigkeit der gesuchten Anzahl von der gegebenen Zahl m und sonstiger Einfluss nehmender Grössen (den Primzahlen $< \sqrt{m}$) völlig offen. Dieselbe soll nun durch die im nachfolgenden entwickelte, rein rechnerisch vorgehende Methode beantwortet werden. Die Benutzung der Primzahlentafel wird hiebei auf ein Minimum, nämlich auf die Aufsuchung der Primzahlen $< \sqrt{m}$, beschränkt.

Die Untersuchung, ob eine vorgelegte Zahl m Primzahl ist oder nicht, führt zu der Erkenntniss, dass hiezu versuchsweise Theilungen dieser Zahl nur durch die Primzahlen von $p_2 - 2$ angefangen bis

zur grössten noch vor \sqrt{m} liegenden Primzahl p_n erforderlich und hinreichend sind ¹⁾).

Daraus folgt unmittelbar, dass die Primzahlen-Menge \mathfrak{A}_m auch nur von diesen Primzahlen $p_2, p_3 \dots p_{n-1}, p_n < \sqrt{m}$ ($\sqrt{m} < p_{n+1}$) neben der Zahl m selbst abhängen wird.

Bedeutet nun das Symbol $\left(\frac{m}{p}\right)$ die grösste im Bruche $\frac{m}{p}$ enthaltene ganze Zahl, so dass

$$\left(\frac{m}{p}\right) < \frac{m}{p} < \left(\frac{m}{p}\right) + 1$$

ist, dann stellt

$$\left(\frac{m}{p_r}\right) \quad (r = 2, 3, \dots, n-1, a)$$

die Anzahl aller nicht über m liegenden gegen p_r relativen Primzahlen vor.

Die Summe $\sum_{r=2}^{r=n} \left(\frac{m}{p_r}\right)$ giebt jedoch nicht die Anzahl aller gegen $P_n = p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n$ relativen Primzahlen $\left(\leq m\right)$; denn alle durch zwei oder mehrere der Primzahlen $p_2 \dots p_n$ zugleich teilbaren Zahlen $\leq m$ werden in derselben mehrmals gezählt. Zahlen von der Form $C_q(p)$ (Combinations der q ten Classe ohne Wiederholung der Elemente $p_2 \dots p_n$) erscheinen q mal: ebenso oft wie überhaupt alle Zahlen, welche aus q Primzahlen zusammengesetzt sind.

Um nun die Anzahl aller gegen P_n relativen Primzahlen $\leq m$ zu finden, kann das folgende inductive Verfahren eingeschlagen werden.

In der Summe $\left(\frac{m}{p_2}\right) + \left(\frac{m}{p_3}\right)$ kommen alle durch $P_3 = p_2 \cdot p_3$ ($= 2 \cdot 3 = 6$) teilbaren Zahlen $\leq m$ zweimal vor; daher giebt $\left(\frac{m}{p_2}\right) - \left(\frac{m}{p_3}\right) - \left(\frac{m}{p_2 \cdot p_3}\right)$ die Anzahl aller gegen P_3 relativen Primzahlen $\leq m$.

1) J. Frischauf, Vorlesungen über Zahlentheorie.

Die Summe $\binom{m}{p_2} + \binom{m}{p_3} + \binom{m}{p_4}$ enthält alle durch $p_2 p_3$, $p_3 p_4$ und $p_2 p_4$ teilbaren Zahlen doppelt; die Differenz

$$\binom{m}{p_2} + \binom{m}{p_3} + \binom{m}{p_4} - \binom{m}{p_2 p_3} - \binom{m}{p_2 p_4} - \binom{m}{p_3 p_4}$$

daher nur einmal, dagegen sind die durch $p_2 p_3 p_4$ teilbaren Zahlen in den positiven Gliedern zusammen $\binom{3}{1}$ mal in den negativen ebenfalls $\binom{3}{2}$ mal, im ganzen also $\binom{3}{1} - \binom{3}{2} = 0$ mal gezählt

Es muss daher zu dieser Differenz $\binom{m}{p_2 p_3 p_4}$ addirt werden um sodann in

$$\binom{m}{p_2} + \binom{m}{p_3} + \binom{m}{p_4} - \binom{m}{p_2 p_3} - \binom{m}{p_2 p_4} - \binom{m}{p_3 p_4} + \binom{m}{p_2 p_3 p_4}$$

die Menge aller gegen $P_4 = p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$ relativen Primzahlen zu erhalten, wofür man auch abgekürzt schreiben kann:

$$\sum_2^4 \binom{m}{C_1 p} - \sum_2^4 \binom{m}{C_2 p} - \sum_2^4 \binom{m}{C_3 p}$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erscheint für die Anzahl aller gegen $P_n = p_2 \cdot p_3 \dots p_{n-1} \cdot p_n$ relativen Primzahlen $\leq m$ eine Summe von der Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = \sum_2^n \binom{m}{C_1 p} - \sum_2^n \binom{m}{C_2 p} + \dots + (-1)^{r+1} \sum_2^n \binom{m}{C_r p} \pm \dots \\ + (-1)^{n+1} \sum_2^r \binom{m}{C_n p} \end{aligned}$$

Die Zeiger beim Summenzeichen bedeuten, dass die Combinationen, welche als Teiler auftreten, aus den Elementen von p_2 bis p_n zu bilden sind.

Um die Summe $\sum_2^n \binom{m}{C_r p}$ zu erhalten, muss m durch sämtliche Combinationen der r ten Classe ohne Wiederholung dividirt und die ganzen Quotienten addirt werden.

Irgend eine Zahlform $p_2^\alpha p_3^\beta \dots p_{r+1}^\gamma \cdot m'$ ($m' \infty P_n$) welche aus r Primzahlen aus der Reihe $p_2 \dots p_n$ gebildet ist, kommt in \mathfrak{S} wirklich nur einmal vor; denn in der ersten Partial-Summe in

1) nämlich in $\sum_2^n \binom{m}{C_1 p_r}$, ist für $\binom{r}{1}$ mal, in der zweiten $-\binom{r}{2}$, ... in der $(r-1)$ ten $(-1)^r \binom{r}{r-1}$ und in der r ten $(-1)^{r+1} \binom{r}{r}$ mal, im ganzen daher

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - + \dots + (-1)^r \binom{r}{1} + (-1)^{r+1} = 1 \text{ mal}$$

enthalten.

Dass die Combinationen der Primzahlen $p_2 \dots p_n$, welche hier als Teiler auftreten, nicht grösser als m sein sollen, ist überflüssig besonders zu bedingen, da ja in diesem Falle $\binom{m}{p} = 0$ wird ($p > m$).

Durch diese successiven Teilungen werden aber die Primzahlen $p_2, p_3 \dots p_{n-1}, p_n < \sqrt{m} < p_{n+1}$ selbst ausgeschieden; indem man ihre Anzahl $n-1$ restituirt, ergibt sich als Ausdruck für die Anzahl aller Primzahlen, welche nicht grösser als m sind:

$$2] \quad \mathfrak{A}_m = m - \mathfrak{S} + n - 1$$

oder

$$3] \quad \mathfrak{A}_m = m - \sum_2^n \binom{m}{C_1 p} + \sum_2^n \binom{m}{C_2 p} - \sum_2^n \binom{m}{C_3 p} + \dots \\ \dots + (-1)^n \sum_2^n \binom{m}{C_n p} + n - 1$$

$m - \mathfrak{S}$ kann symbolisch auch in folgende Form gebracht werden:

$$4] \quad m - \mathfrak{S} = [m] \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_{n-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \\ = [m] \prod_{n=2}^n \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

Das eingeklammerte m zeigt an, dass nach vollzogener Multiplication der Factorenfolge jedes Glied mit $[m]$ noch vor der Reduction zu multipliciren und dann

$$[m] \frac{1}{s C_r p} = \binom{m}{s C_r p}$$

zu setzen ist; $s C_r p$ bedeutet hier die s te Combination der r ten Classe ohne Wiederholung der Elemente $p_2 \dots p_n$.

Die Aehnlichkeit dieses Ausdruckes 4] mit jenen für die Anzahl

$\varphi(m)$ ¹⁾ aller zu $m = a^\alpha \cdot b^\beta \dots k^\chi \cdot l^\lambda$ relativen Primzahlen ist unverkennbar; es ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{l}\right) \\ &= m \prod_{p=a}^{p=l} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

Durch Substitution von $m = \mathfrak{S}$ aus 4] in 2] wird

$$4) \quad \mathfrak{A}_m = [m] \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) + n - 1$$

Eine von dieser verschiedene für praktische Zwecke bedeutsame Form für \mathfrak{A}_m wird mit Benutzung der Gleichung

$$\binom{m}{ab} = \binom{\binom{m}{a}}{b}$$

erhalten. In seiner ursprünglichen Form ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m &= m - \binom{m}{p_2} - \binom{m}{p_3} - \binom{m}{p_4} - \dots \\ &\quad + \binom{m}{p_2 p_3} + \binom{m}{p_2 p_4} + \binom{m}{p_3 p_4} + \dots \\ &\quad - \binom{m}{p_2 p_3 p_4} - \frac{m}{p_2 p_3 p_5} - \dots \\ &\quad + \binom{m}{p_2 p_3 p_4 p_5} + \dots \\ &\quad - \dots \dots \dots \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + n - 1 \end{aligned}$$

Da die Ordnung der Glieder ohne jeden Einfluss auf die Grösse von \mathfrak{A}_m ist, so gilt auch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m &= m - \binom{m}{p_2} \\ &\quad - \binom{m}{p_3} + \binom{m}{p_2 p_3} \\ 4') \quad &\quad - \binom{m}{p_4} + \binom{m}{p_2 p_4} + \binom{m}{p_3 p_4} - \binom{m}{p_2 p_3 p_4} \\ &\quad - \dots \dots \dots \\ &\quad + n - 1 \end{aligned}$$

1) G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie.

Diese veränderte Ausdrucksweise entspricht einem Satze der Combinationslehre; \mathfrak{A}_m wird dadurch nicht geändert. Nun geht daraus deutlich hervor, dass die zweite Zeile aus der ersten durch Teilung mit $-p_2$, die 3te aus der 2ten durch Teilung mit $-p_3$, allgemein die r te Zeile aus der $(r-1)$ ten Zeile durch Teilung mit $-p_{r+1}$ entsteht. Diese Wahrnehmung zum Ausdruck gebracht, wird

$$5] \quad \mathfrak{A}_m = m - \left(\frac{m}{p_2}\right) - \left(\frac{m - \left(\frac{m}{p_2}\right)}{p_3}\right) \\ - \left(\frac{m - \left(\frac{m}{p_2}\right) - \left(\frac{m - \left(\frac{m}{p_2}\right)}{p_3}\right)}{p_4}\right) - + \dots, n-1$$

wo die Bruchformen, besondere Arten von aufsteigenden Kettenbrüchen ¹⁾, so zu verstehen sind, dass Glied für Glied des Zählers besonders zu teilen ist, weil im allgemeinen

$$\frac{a+b+c+\dots}{p} \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} \left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{b}{p}\right) + \left(\frac{c}{p}\right) + \dots \text{ ist.}$$

Das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder ist ein leicht erkennbares. Die wirkliche Ausführung für ein specielles m giebt sich bedeutend einfacher, als das complicirte Aussehen dieser Formel erwarten lässt.

Beispiel.

$$m = 359; p_n = 17 < \sqrt{359} < 19 (= p_{n+1}); n = 8.$$

Die Teilerreihe $p_2 \dots p_n$ ist = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Der Mechanismus der Rechnung ist folgender:

In Ausführung der in 4] angedeuteten Operationen werden eine entsprechende Anzahl von Columnen, alternirend mit $+$ und $-$ bezeichnet, zur Aufnahme der Quotienten aufgestellt. Zunächst durch $-p_2 = -2$ geteilt wird $\left(\frac{359}{-2}\right) = -179$ in die mit $-$ gekennzeichnete Colonne eingetragen, wodurch schon die erste Zeile abgeschlossen ist; dieselbe wird nun durch $-p_3 = -3$ Glied für Glied geteilt und die Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichen in die gleichbezeichnete Colonne eingestellt. Das Verfahren wiederholt sich für alle Teiler und alle Zeichen bis zum letzten, hier $p_n = 17$.

1) Kuntze und Schlömilch III. Bd. 64.

Die Addition mit Hinzufügung von $n - 1 = 7$ ergibt $\mathfrak{A}_m = 73$.

Zur bessern Uebersicht wurden 5 Columnen aufgestellt; es würden jedoch zwei, für + und - vollkommen genügen.

Teiler	+	-	+	-	+	
	359					
2		179				
3		119	59			
5		71	35			
			23	11		
7		51	25	8		
			17			
			10	5		
				3		1
11		32	16	5		
			10	3		
			6	2		
			4	2		
				1		1
13		27	13	4		
			9	2		
			5	1		
			3	1		
			2	1		
				1		
17		21	10	3		
			7	2		
			4	1		
			3	1		
			1	1		
			1			
Zusammen	+359	-500	+263	-58	+2	= 66

$$n - 1 = 7$$

$$\mathfrak{A}_{359} = 73$$

Ist die Zahl m eine zusammengesetzte, etwa von der Form

$$m = p_2^a p_3^b \dots p_r^e$$

so bietet die Kenntniss von $\varphi(m)$ für diese Art der rechnerischen Ausführung einen kaum nennenswerten Vorteil, da die Teilsumme

in 4') ja aus sämtlichen vorhergehenden Gliedern bestimmt werden, die Ermittlung von $\binom{m}{p_2}$ bis $\binom{m}{p_r}$ daher immer vorzunehmen ist.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass dieser Algorithmus der Combinationen mit Wiederholung nicht bedarf.

Da 359 selbst eine Primzahl ist, so kann man sagen, dass es 73 Primzahlen giebt, welche nicht grösser als 359 sind.

Salzburg im Januar 1887.

XXI.

Neues über Vier- und Vielecke.

Von

B. Sporer.

I. Teil.

I. (Fig. 1.)

A, B, C und D seien irgend 4 Punkte der Ebene, M, N und P die Brennpunkte der Parabeln, welche die Linien AB, AC, BD, BC resp. AB, AD, BC, CD und AD, AC, BC, BD berühren. Die Gegenseitenpaare des Vierecks AB, CD, AC, BD und AD, BC mögen sich ferner in den Punkten F, E, G schneiden.

Berücksichtigen wir nun, dass, wenn wir von F, E und G Lote auf die 4 Linien EC, AD, DB und BC fällen und deren Fusspunkte der Reihe nach verbinden, die Inhalte der dadurch entstandenen 3 Figuren verschwinden, so ergibt sich uns, dass für jeden Punkt des Kreises durch P, E und G die Vierecke der Fusspunkte der Lote auf die Seiten des gewönl. Vierecks $ACBD$ einen verschwindenden Inhalt haben (Vergl. J. Steiners Abhandl über Fusspunkturen ges. W. B. 2 p. 121.) Diese Eigenschaft der Punkte des Kreises durch P, E und G lässt sich nun auch noch anders ausdrücken. Soll nämlich für irgend einen Punkt des Kreises der Inhalt der Fusspunktcurve verschwinden, so ist dies identisch mit dem Umstande, dass die Verbindungslinien der Fusspunkte der Lote von diesem Punkt auf die Gegenseiten des gewönl. Vierecks $ACBD$ unter sich parallel werden, oder, mit andern Worten, wir erhalten den Satz:

Fällen wir von irgend einem Punkte des durch P, E und G gelegten Kreises Lote auf die Seiten des gewönl. Vierecks $ACBD$

und verbinden die auf den Gegenseiten gelegenen Fusspunkte mit einander, so sind diese Verbindungslinien unter sich parallel.

Erwägen wir ferner, dass die Kreise durch die Punkte G , F und N , E , F und M analoge Eigenschaften in Bezug auf die Vierecke $ABCD$ und $ABDC$ besitzen, so ergibt sich uns sofort, dass die 3 durch P , E , G ; G , F , N und E , F , M gelegten Kreise sich in einem und demselben Punkte y treffen, und dass, wenn wir auf die 6 Seiten des vollst. Vierecks $ABCD$ Lote von y fällen, die Verbindungslinien der Fusspunkte auf den Gegenseitenpaaren unter sich parallel werden. Zugleich ergibt sich, dass es im allgemeinen nur einen einzigen Punkt geben wird, der die letzt erwähnte Eigenschaft in Bezug auf ein volles Viereck besitzt.

Fassen wir die entwickelten Eigenschaften zusammen, so erhalten wir den Satz:

„Die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks lassen sich 3 mal „zu 2 Paaren von Gegenseiten anordnen, welche je eine Parabel be- „rühren. Legen wir durch die Brennpunkte der Parabeln und die „Schnittpunkte der zugehörigen Gegenseitenpaare Kreise, so ergeben „uns 3 sich in einem Punkte schneidende Kreise und fällen wir von „dem gemeinsamen Punkte der Kreise Lote auf die sechs Seiten des „Vierecks, so liegen deren Fusspunkte auf den Gegenseitenpaaren „auf parallelen Linien, und im allgemeinen besitzt nur dieser Punkt „in Bezug auf das Viereck die erwähnte Eigenschaft“

II.

Legen wir ferner durch P , A und B einen Kreis, so bildet dieser mit der Linie AB einen Winkel $= CGD + CED - 2R$, da ein durch B , D , G gehender Kreis durch P gehen muss, also Wkl. $DPB =$ Wkl. CGD und ebenso Wkl. $APD =$ Wkl. CED ist. Ebenso bildet der durch A , M und D gelegte Kreis mit der Linie AD einen Winkel $= -CFB - CEB + 2R$. Daraus folgt aber, dass die beiden Kreise durch A , B , P und A , D , M in A sich unter einem Winkel

$$\begin{aligned} \alpha &= 4R + BAD - CFB - CEB - CGD - CED \\ &= 2R + BAD - CFB - CGD \end{aligned}$$

durchschneiden.

Ebenso finden wir, dass die Winkel β und γ , unter denen sich die Kreise durch A , M , D ; D , N , B und A , B , P in D . und B durchschneiden, sind:

$$\beta = 2R + ADB - AGC - CEB$$

$$\gamma = 2R + DBA - AFC - CED$$

Aus den Werten für α , β , γ folgt nun sofort die Relation:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

Schneiden sich nun aber 3 Kreise unter Winkeln, deren Summe $= 2R$ ist, so gehen sie durch einen und denselben Punkt. Die Kreise durch P, A, B ; A, M, D und D, N, B gehen somit durch einen Punkt. Berücksichtigen wir ferner, dass in Bezug auf die Dreiecke ACB , ADC und BCD analoge Eigenschaften wie für das Dreieck ADB gelten, so erhalten wir den Satz:

„Legen wir durch die Brennpunkte der (in I. erwähnten) Parabeln und die Endpunkte der Seiten des Vierecks, die nicht Tangenten der Parabel sind, Kreise, so erhalten wir sechs Kreise, welche sich viermal zu dreien in einem Punkte schneiden.“

III. (Fig. 2.)

Wir haben in I. bemerkt, dass im allgemeinen in Bezug auf ein Viereck nur ein Punkt y existirt, der die in I. erwähnten Eigenschaften besitzt; es giebt jedoch eine bestimmte Lage der 4 Punkte A, B, C und D , wo dies nicht mehr der Fall ist, dann nämlich, wenn jeder der 4 Punkte Höhenschnitt des Dreiecks der 3 übrigen Punkte ist.

In diesem Falle liegen nämlich die Punkte P, M, N, E, F und G auf einem Kreise, indem P mit F , M mit G und N mit E zusammenfallen. Der Punkt y selbst wird auf diesem Kreise unbestimmt, oder mit andern Worten, jeder Punkt des durch E, F und G gehenden Kreises hat die erwähnte Eigenschaft. Nun wird aber der Kreis durch die Punkte E, F und G zum gemeinschaftlichen Feuerbach'schen Kreise, der aus je 3 der 4 Punkte A, B und D gebildeten Dreiecke, d. h. wir erhalten den Satz:

„Fällen wir von irgend einem Punkte des Feuerbach'schen Kreises eines Dreiecks Lote auf die Seiten und Höhen des Dreiecks und verbinden jeden Fusspunkt dieser Lote auf den Seiten mit dem Fusspunkt des Lotes auf der zugehörigen Höhe, so sind diese 3 Verbindungslinien unter sich parallel.“

IV.

Die vorhin erwähnte Lage der 4 Punkte A, B, C und D bietet auch in anderer Beziehung noch Interesse.

„Fällen wir nämlich von irgend einem Punkte auf die Seiten eines vollständigen Vierecks Lote und verbinden die auf den Gegenseiten gelegenen Fusspunkte derselben, so werden sich die dadurch entstehenden 3 Verbindungslinien im allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden. Haben jedoch die 4 Punkte *A, B, C* und *D* die in III. erwähnte Lage zu einander, so dass also jeder der Höhen-schnitt des Dreiecks der 3 andern ist, so ist dies stets der Fall, der Punkt möge eine Lage haben, welche er wolle.

Sind nämlich von dem Punkte *P* auf die Seiten eines solchen Vierecks die Lote *PH, PJ, PK, PO, PM* und *PN* gefällt und die Fusspunkte dieser Lote auf den Gegenseiten mit einander verbunden, also die Linien *HO, JK* und *NM* gezogen und ziehen wir ferner *PE, PF* und *PG* und durch *E, F* und *G* parallele Linien *EW, FV* und *GU* mit *HO, JK* und *MN*, so bilden die ersten 3 Linien mit den Linien *PE, PF* und *PG* dieselben Winkel wie die letzteren drei. Bedenken wir nun, dass *CE, CG* und *CF* die Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks *EFG* sind und dass, da *EP, FP* und *GP* sich in einem Punkte schneiden,

$$\frac{\sin PGE}{\sin UGF} \cdot \frac{\sin PEF}{\sin PEG} \cdot \frac{\sin PFG}{\sin PFE} = -1$$

ist, so finden wir, dass auch

$$\frac{\sin UGE}{\sin UGF} \cdot \frac{\sin WEF}{\sin WEG} \cdot \frac{\sin VFG}{\sin VFE} = -1$$

ist, oder dass sich die durch *E, F* und *G* mit den Linien *HO, JK, MN* gezogenen Parallelen *EW, FV* und *GU* ebenfalls in einem Punkte *Q* treffen. Hieraus folgt aber sofort, dass sich die Linien *HO, JK* und *MN* im Halbierungspunkte *L* von *PQ* schneiden, womit die Behauptung bewiesen ist.

Zugleich ergibt sich daraus, dass die Punkte *P* und *Q* sich gegenseitig entsprechen.

II. Teil.

V. (Fig. 3.)

Sind wieder 4 Punkte gegeben, und fällen wir von einem der Punkte *D* auf die Seiten des Dreiecks der drei andern Punkte *ABC* die Lote *DE, DF* und *DG*, und legen wir durch die Punkte *E, G* und *F* einen Kreis, so wird, da Wkl. *DGE* = Wkl. *DCE* und Wkl. *DGF* = Wkl. *DAF* ist:

$$\text{Wkl. } EGF = \text{Wkl. } DCB + \text{Wkl. } DAB$$

Andererseits ist aber, wenn wir durch E und die Halbierungspunkte von DC und DB einen Kreis legen, $HE = CH$, also Wkl. $DHD = 2 \cdot HCE$ und Wkl. $DHJ = \text{Wkl. } DCB$ und somit Wkl. $JHE = \text{Wkl. } DCB$. Ebenso wird, für einen Kreis durch F , J und den Halbierungspunkt K von AD , Wkl. $FKJ = \text{Wkl. } DAF$. Fassen wir diese Resultate mit Worten zusammen, so finden wir also, dass ein Kreis durch EFG der Peripheriewinkel über dem Bogen EF so gross ist als die Summe der Peripheriewinkel über den Bögen EJ und JF der Kreise durch HEJ und JFK , oder dass die 3 erwähnten Kreise sich in einem und demselben Punkte x treffen.

Berücksichtigen wir ferner, dass die Kreise durch H , F , J und J , F , K die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke BCD und ABD sind, so erhalten wir den Satz:

„Sind 4 Punkte gegeben. und fällen wir von jedem der Punkte „Lote auf die Seiten des Dreiecks der 3 andern und legen durch deren Fusspunkte Kreise, so erhalten wir 4 Kreise, welche sich „in einem und demselben Punkte, dem Schnittpunkt der 4 Feuerbach'schen Kreise der 4 Dreiecke, welche man aus je 3 der 4 „Punkte bilden kann, schneiden“.

Oder:

„Sicht man jeden von 4 Punkten als Brennpunkt eines Kegelschnitts an, der die Seiten des Dreiecks der 3 übrigen Punkte berührt, so schneiden sich die über den Hauptachsen der Kegelschnitte „beschriebenen Kreise in einem Punkte, dem gemeinsamen Punkte „der 4 Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke, die man aus je 3 der „4 Punkte bilden kann“. (Vergl. des Verfassers Mitt. im württ. Korrespbl. für Gelehrten- und Realschulen 1885.)

VI. (Fig. 2.)

Sind wieder 4 Punkte derart gegeben, dass jeder der Höhenschnitt des Dreiecks der 3 übrigen ist und nehmen wir irgend einen fünften Punkt P an, so bildet dieser mit den 4 ersten Punkten A , B , C , D im ganzen 10 Dreiecke. Da nun die Dreiecke, welche wir aus je 3 der 4 Punkte A , B , C , D bilden können, einen gemeinsamen Feuerbach'schen Kreis haben, so folgt daraus sofort, dass die Feuerbach'schen Kreise aller dieser 10 Dreiecke, die je 3 der Punkte A , B , C , D und P bilden, durch einen und denselben Punkt x gehen müssen. Füllen wir nun von P etwa auf die Seiten des Dreiecks ABD Lote PH , PK , PN und legen durch deren Fusspunkte H , K

und N einen Kreis, so geht dieser nach V. ebenfalls durch x . Daraus erhalten wir den Satz:

„Sind irgend 4 Punkte so gegeben, dass jeder Höhenschnitt des „Dreiecks der 3 übrigen ist, und fällen wir von irgend einem 5ten „Punkt Lote auf die Seiten der Dreiecke, welche wir aus je drei „der 4 ersten Punkte bilden können, und legen durch die Fusspunkte „der Lote auf den Seiten jedes solchen Dreiecks Kreise, so schnei- „den sich dieselben in einem Punkte des Feuerbach'schen Kreises „der 4 Dreiecke.“

Oder:

„Sind 4 Punkte derart gegeben, dass jeder Höhenschnitt des „Dreiecks der 3 übrigen ist, und sieht man irgend einen 5ten „Punkt als Brennpunkt eines Kegelschnitts an, der die Seiten eines „Dreiecks aus 3 der gegebenen Punkte berührt, so erhält man 4 „Kegelschnitte derart, dass die über den Hauptachsen derselben be- „schriebenen Kreise sich in einem Punkte schneiden, der auf dem „gemeinsamen Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke liegt, die man „aus je 3 der geg. 4 Punkte bilden kann.“

VII.

Fällen wir ferner auf die Seiten der 4 Dreiecke, die sich aus je 3 der 4 Punkte A, B, C, D bilden lassen, von einem Punkte P Lote und legen wir durch die Fusspunkte der Lote, welche auf den Seiten eines Dreiecks liegen, Kreise, so erhalten wir 4 solche Kreise. Sind die Fusspunkte der Lote die Punkte E, F, G, H, J, K , so erhalten wir die Kreise durch E, F, G ; F, J, H ; J, G, K und E, H, K . Nun ist aber der Peripheriwinkel über dem Bogen JG des Kreises durch J, G und K , also der Winkel

$$\begin{aligned} JGK &= \text{Wkl. } JKP - \text{Wkl. } GKP \\ &= \text{Wkl. } JDP - \text{Wkl. } GCP \end{aligned}$$

und ebenso der Peripheriewinkel über dem Bogen GF des Kreises durch F, G, E , also

$$\begin{aligned} \text{Wkl. } GEF &= \text{Wkl. } GEP + \text{Wkl. } PEF \\ &= \text{Wkl. } GCP + \text{Wkl. } PBF. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Wkl. } JGK + \text{Wkl. } GEF &= \text{Wkl. } JDP + \text{Wkl. } PBF \\ &= \text{Wkl. } JHP + \text{Wkl. } PHF \\ &= \text{Wkl. } JHF \end{aligned}$$

Der Peripheriewinkel über dem Bogen JF des Kreises durch J, F, H ist also so gross als die Summe der Peripheriewinkel über den Bögen JG und GF der Kreise durch J, G, K und durch E, F, G . Daraus folgt aber, dass die erwähnten Kreise durch einen und denselben Punkt gehen, oder mit andern Worten, wir erhalten den Satz:

„Ordnen wir 4 Punkte viermal zu dreien und fällen von irgend einem 5ten Punkt Lote auf die Seiten des Dreiecks von je dreien dieser Punkte und legen durch deren Fusspunkte Kreise, so erhalten wir 4 sich in einem Punkte schneidende Kreise.“

Oder:

„Sehen wir irgend einen Punkt als Brennpunkt der Kegelschnitte an, welche die Seite der aus je 3 von 4 Punkten gebildeten Dreiecke berühren, so schneiden sich die über den Hauptachsen der Kegelschnitte beschriebenen Kreise in einem und demselben Punkte.“

VIII.

Wir haben, indem wir den Satz des vorigen Paragraphen bewiesen haben, zugleich den Beweis eines andern bekannten Satzes gegeben, den Beweis des Satzes nämlich:

Legt man durch die übrigen Schnittpunkte von je dreien von 4 Kreisen durch einen Punkt wieder Kreise, so erhalten wir 4 neue Kreise, die ebenfalls durch einen Punkt gehen.

Ziehen wir nämlich von dem gemeinsamen Punkt der 4 Kreise die Durchmesser derselben, so gehen die 6 Verbindungslinien der Endpunkte derselben durch die 6 weitem Schnittpunkte der 4 ersten Kreise, woraus sich die Figur des vorigen Abschnitts sofort ergibt.

Um zu einem weiteren Satz, über das Kreisviereck wenigstens zu kommen, wollen wir die gegenseitige Lage der 8 Mittelpunkte der oben erwähnten Kreise näher untersuchen. Zu diesem Zwecke beschreiben wir über den Linien PA, PB, PC und PD Kreise um die Figur der 8 Kreise vollständig zu erhalten (Fig. 4.)

Ziehen wir nun LR, OL, LM und LN , so stehen LR senkr. auf JG , LM senkr. auf PF , LN senkr. auf FG und LO senkr. auf PJ .

Daraus folgt sofort, dass Wkl. $OLM = RLN$ ist, da ja Wkl. $JPF =$ Wkl. JGF ist. Nun gehören jedoch die Mittelpunkte R, L und N 3 Kreisen durch G , und die Mittelpunkte O, L, M 3 Kreisen durch P an. Da für die andern Punkte Analoges gültig ist,

so können wir daraus schliessen, dass die Verbindungslinien der Mittelpunkte von 4 in einem Punkte sich schneidenden Kreisen denselben Winkel mit einander bilden, wie die Verbindungslinien der Mittelpunkte von 4 durch einen andern Punkt gehenden Kreisen. Liegen insbesondere die Mittelpunkte von irgend 4 solchen Kreisen auf einem Kreise, so ist dies mit den Mittelpunkten von jeden solchen der Fall. Daraus folgt der Satz:

„Liegen die 4 (in Abschnitt 7. erwähnten) Punkte A , B , C und D auf einem Kreise, so liegen auch die Mittelpunkte der 4 Fusspunktskreise auf einem Kreise, und überdies liegen je 2 der letzteren Mittelpunkte mit je 2 der Halbierungspunkte der Strecken AB , PA , PB , PC und PD auf einem Kreise.“

Liegen nämlich die Halbierungspunkte der Strecken PA , PB , PC und PD auf einem Kreise, so ist dies auch mit den Punkten A , B , C , D selbst der Fall und umgekehrt.

IX. (Fig. 5.)

Bevor wir nun auf die Vielecke und Vielseite übergehen, wollen wir einen Satz beweisen, der es uns ermöglicht, ohne weitere grosse Schwierigkeit zwei analoge Sätze auszusprechen, von denen der eine sich auf das Vieleck, der andere auf das Vielseit bezieht

Sind nämlich 5 durch einen Punkt A gehende Kreise gegeben, so können wir dieselben zehnmal zu dreien anordnen und durch die übrigen von A verschiedenen 3 Schnittpunkte je dreier dieser 5 Kreise wieder Kreise legen. Dies giebt 10 neue Kreise, welche nach dem vorigen Abschnitt sich 5 mal zu 4 in einem Punkte schneiden werden.

Sind nun die übrigen Schnittpunkte der durch A gehenden Kreise die Punkte A , B , C , D , E , F , G , H , J , K und L , so können wir nun von einem dieser Punkte etwa F ausgehen und den Punkt F und 4 von den 5 durch diesen Punkt gehenden Kreisen betrachten, also etwa den durch F , C , H , J und A gehenden Kreis ausschliessen. Die 5 Punkte, in welchen sich die 10 nicht durch A gehenden Kreise je zu 4 treffen, seien ferner U , W , X , Y und Z . Nun schneiden sich die Kreise $FCBZY$, $FGHVZ$ und $FKJVY$ ausser in F noch in den Punkten V , Y und Z ; die Kreise $ABFGK$, $FCBZG$, $FGHVZ$ in B , G und Z ; die Kreise $ABFGK$, $FCBZY$ und $FKJVY$ in B , K und Y und die Kreise $ABFGK$, $FKJVY$, $FGHVZ$ in K , G und V . Legen wir nun durch V , Y , Z ; B , G , Z ; B , K , Y und G , K , V Kreise, so müssen sich diese in einem und demselben Punkte

treffen. Nun schneiden sich aber die 3 letzteren in dem Punkte X , woraus sofort folgt, dass ein durch V , Y und Z gelegter Kreis auch durch X und ebenso auch durch W gehen muss. Wir erhalten also den Satz:

Gehen 5 Kreise durch einen Punkt und legen wir durch die übrigen Schnittpunkte von je dreien einen Kreis, so erhalten wir 10 neue Kreise, welche 5 mal zu 4 durch einen Punkt gehen, und diese 5 Punkte selbst liegen wieder auf einem Kreise.

Anbei sei es uns gestattet, noch auf eine gewisse Reciprocität zwischen den auftretenden Kreisen und Punkten aufmerksam zu machen. In Abschnitt VII. traten 8 Kreise und 8 Punkte auf, auf jedem Kreise lagen 4 Punkte und durch jeden Punkt giengen 4 Kreise. Hier treten nun im ganzen 16 Kreise und 16 Punkte auf, auf jedem Kreise selbst liegen 5 Punkte und durch jeden Punkt gehen 5 Kreise.

Geht nun durch A noch ein sechster Kreis, so lassen sich diese 6 Kreise 6 mal zu 5 anordnen. Dies giebt 6 Kreise $K^{(V)}$, welche dem obigen Kreis durch V , W , X , Y , Z entsprechen. Durch analoge Schlüsse wie oben, könnten wir nun beweisen, dass diese 6 Kreise $K^{(V)}$ durch einen und denselben Punkt $P^{(VI)}$ gehen. Davon ausgehend wieder, dass zu 7 Kreisen 7 Punkte $P^{(VI)}$ gehören, die alle auf einem Kreise $K^{(VII)}$ liegen u. s. f. in inf., wir wollen jedoch den weitem Beweis hiefür auf eine etwas andere Art geben.

Um nämlich den durch die Punkte V , W , X , Y , Z gehenden Kreis zu construiren, haben wir nur nötig irgend einen Schnittpunkt der 5 Kreise durch A , etwa den Punkt F festzuhalten und die durch F gehenden Kreise zu construiren. Dadurch erhalten wir 3 Kreise, welche sich noch in 3 weiteren Punkten, den Punkten V , Y , Z des Kreises durch V , W , X , Y , Z schneiden. Tritt noch ein solcher Kreis durch A hinzu, so kommt durch F ebenfalls ein weiterer Kreis hinzu. Dadurch sind nun 4 Kreise $K^{(V)}$ bestimmt, welche sich nach dem Obigen in einem Punkte schneiden. Wählen wir einen andern Punkt als F , so erhalten wir ebenfalls wieder 4 Kreise $K^{(V)}$, die durch einen Punkt gehen. Daraus folgt jedoch ohne weiteres, dass alle 6 Kreise $K^{(V)}$ durch einen Punkt $P^{(VI)}$ gehen.

Tritt ein siebenter Kreis durch A hinzu, so tritt zu den 4 durch F gehenden, noch ein fünfter Kreis, zu diesen 5 gehört jedoch ein Kreis mit 5 Punkten $P^{(VI)}$; wählen wir statt F wieder einen andern Punkt, so erhalten wir wieder einen Kreis mit 5 Punkten $P^{(VI)}$, woraus folgt, dass überhaupt alle 7 Punkte $P^{(VI)}$ auf einem Kreise $K^{(VII)}$ liegen u. s. w. in inf.

Was die Anzahl der auftretenden Kreise betrifft, so finden wir, dass dieselbe sich bei jedem weitem Kreis verdopplt. Ebenso ist dies mit den Punkten der Fall. Wir erhalten also folgenden Satz:

„Legen wir durch die übrigen Schnittpunkte von je dreien von „4 durch einen Punkt gehenden Kreisen wieder Kreise, so erhalten „wir 4 Kreise $K^{(III)}$, die sich in einem Punkte $P^{(IV)}$ treffen. Fünf „Kreise lassen sich fünfmal zu 4 anordnen, dazu gehören 5 Punkte „ $P^{(IV)}$ auf einem Kreise $K^{(V)}$. Sechs Kreise durch einen Punkt lassen „sich sechsmal zu fünf anordnen. Dies giebt 6 Kreise $K^{(V)}$ „durch einen Punkt $P^{(VI)}$ u. s. w. in inf.“

„Ist die Figur vollständig construiert, so treten im ganzen 2^{n-1} „Kreise und 2^{n-1} Punkte auf. Auf jedem Kreise liegen n Punkte, „und durch jeden Punkt gehen n Kreise.“

X.

Der obige Satz ermöglicht es, uns sofort einen andern aufzustellen, der sich auf das vollständige Vieleck bezieht, nämlich den Satz:

„Fällen wir von irgend einem festen Punkte P Lote auf die „Seiten der Dreiecke, welche je 3 von 4 Punkten bilden, und be- „schreiben wir durch die Fusspunkte der Lote, welche auf den Seiten „jedes solchen Dreiecks liegen, Kreise, so schneiden sich die 4 sich „ergebenden Kreise in einem Punkte $P^{(IV)}$. Tritt ein fünfter Punkt „hinzu, so können wir diese 5 Punkte 5 mal zu 4 anordnen und „erhalten in Bezug auf P 5 Punkte $P^{(IV)}$ auf einem Kreise $K^{(V)}$. „Sechs Punkte geben 6 Kreise $K^{(V)}$ durch einen Punkt $P^{(VI)}$ u. s. w. „in inf.“

Beschreiben wir nämlich über den Linien, welche den Punkt P mit den geg. Punkten verbinden, Kreise, so ergibt sich uns sofort die Figur zu Abschnitt IX., woraus der Satz folgt.

XI.

Aus Abschnitt IX. lässt sich ferner ein anderer Satz ableiten, der einer Notiz in Salmon-Fiedler anal. Geom. d. Eb. 4. Aufl. Anm. 70. p 687 von Clifford in den „Educat. Times“ Dec. 1870 veröffentlicht wurde ¹⁾. Durch circulare Inversion erhalten wir näm-

1) Der Beweis Clifford ist dem Verfasser nicht bekannt. Obgleich der

lich, wenn das Centrum der Inversion in einen der gemeinsamen Punkte des Kreissystems des Abschnitts IX. verlegt wird, sofort den Satz:

„Vier Linien bilden 4 Dreiecke; die Umkreise dieser Dreiecke schneiden sich in einem Punkte $P^{(IV)}$. Zu fünf Linien gehören 5 Punkte $P^{(V)}$ auf einem Kreise $K^{(V)}$, zu sechs Linien 6 Kreise $K^{(VI)}$ durch einen Punkt $P^{(VI)}$ u. s. w. in inf.“

Auf ähnliche Art wie der Satz in Abschnitt X., lässt sich obiger Satz ebenfalls ableiten.

XII.

Wir sind in den letzten Abschnitten auf eine interessante Verwandtschaft gestossen, die zwischen Vielecken und Vielseiten existirt, und zwar beruht dieselbe auf Eigenschaften der circularen Inversion, welche uns gewissermassen gestattet von einem n -eck auf ein n -seit überzugehen. An Stelle des n -ecks können wir zunächst n durch einen Punkt gehende Kreise setzen. Die 2ten n -Endpunkte, der durch den gemeinsamen Punkt der Kreise gehenden Durchmesser lieferten die Ecken des n -ecks, während die Fusspunkte der Lote von dem Punkt auf die Seiten des n -ecks den Schnittpunkten der Seiten des a -seits entsprechen.

Dadurch sind wir öfters in die Lage versetzt, einen Satz der sich auf ein n -eck bezieht, auf ein n -seit zu übertragen und umgekehrt.

Die Anwendbarkeit dieses Umstandes wollen wir noch an zwei bekannten Sätzen über das Vierseit und Fünfseit zeigen. In jedem Vierseit schneiden sich die über den Diagonalen beschriebenen Kreise in zwei Punkten Q_1 und Q_2 . Dieser Satz auf das Viereck übertragen, lautet:

Fällen wir von irgend einem Punkte P auf 2 Gegenseiten eines Vierecks Lote und legen durch deren Fusspunkte einen Kreis K , der den Kreis durch diese Fusspunkte und P rechtwinklig durchschneidet, und verfahren wir mit den anderen Gegenseitenpaaren ebenso, so erhalten wir 3 Kreise K , welche sich in 2 Punkten Q_1 und Q_2 (reellen oder imaginären) schneiden.

Satz eigentlich nicht zu der Abhandlung gehört, glaubte der Verfasser diesen Satz hier dennoch anführen zu sollen.

Ist insbesondere das Viereck derart beschaffen, dass jeder Punkt Höhenschnitt des Dreiecks der andern ist, so ergibt sich uns der im Abschnitt IV. entwickelte Satz.

Tritt ein 5ter Punkt hinzu, so können wir dieselben 5 mal zu 4 ordnen und erhalten 10 Punkte Q , welche dem Gauss-Bodermiller'schen Satze über über das Fünfeit entsprechend auf einem Kreise liegen.

Weingarten, (Württ.) im Januar 1886.

XXII.

Sechs Beweise für den die elliptischen Integrale
erster Gattung betreffenden Additionssatz.

Von

Ulrich Bigler.1^o) Nach Riemannischen Begriffen.

Wenn S, y rechtwinklige Coordinaten eines Punktes in der Ebene bedeuten (es ist die geometrische Ebene, nicht die Hülfebene, die man oft zur Versinnlichung der imaginären Zahlen anwendet), so ist

$$(1 - S)y^2 = (1 + S)(1 - k^2 S^2)$$

die Gleichung einer ebenen Curve dritten Grades. (Sie wird durch die Abscissenaxe $y = 0$ in zwei symmetrische Hälften geteilt und besteht für die sinnliche Anschauung aus drei getrennten Stücken. Das mittelste Stück liegt zwischen den Geraden $S = -1$ und $S = 1$, berührt jene auf der Abscissenaxe und hat diese zur Wendungsasymptote; es enthält die zwei noch übrigen reellen Wendepunkte und wird von jeder reellen Geraden reell geschnitten. Die zwei andern Stücke entsprechen den Gebieten $S < -\frac{1}{k}$, $S > \frac{1}{k}$, berühren

die Geraden $S = -\frac{1}{k}$ und $S = \frac{1}{k}$ auf der Abscissenaxe und liegen in den von der Abscissenaxe halbirtten Scheitelwinkeln der zwei gewöhnlichen Asymptoten $y = k(S + 1)$, $y = -k(S + 1)$; sie werden nicht von jeder reellen Geraden reell geschnitten, z. B. nicht von der Geraden $S = 0$, und machen für die analytische oder geometrisch-perspectivische Betrachtung ein einziges Stück aus, wie die zwei Zweige einer Hyperbel (das sogenannte Oval). ($S = 0, y = 1$)

ist ein Punkt der Curve; die Differentialgleichung der Curve wird hier zu $dy = dS$, folglich ist $y = 1 + S$ die Gleichung der Tangente in diesem Punkte. Substituirt man diesen Wert von y in die Gleichung der Curve, so erhält man $S^2(1 + S) = 0$. Der potenzierte Factor S^2 zeigt die Berührung an, der einfache Factor $1 + S$ einen einfachen Durchschnitt im Punkte $(S = -1, y = 0)$.

$\int \frac{dS}{(1-S)y}$ im Punkte $(S = 0, y = 1)$ begonnen ist das elliptische Normalintegral erster Gattung, Argument der mit S bezeichneten elliptischen Function $\sin. am.$ Als rationale Function der zwei Coordinaten S und y hat $\frac{1}{(1-S)y}$ in jedem Punkte der Curve einen einzigen Wert. Daher hat auch das Integral immer einen einfach bestimmten Wert, der durch den Weg bedingt ist, den der laufende Punkt auf der Curve zurück gelegt hat. Das Oval wollen wir von der Betrachtung, die ganz im Reellen verweilen soll, ausscheiden. Wenn der laufende Punkt von $(S = 0, y = 1)$ aus nach der Seite hinget, wo S und y zugleich wachsen, so kommt er endlich in die Nähe der Wendungasymptote, wo $1 - S$ positiv sehr klein und y positiv sehr gross ist; der Wert des Integrals geht gegen die Grenzen K hin und erreicht dieselbe, wenn $S = 1, y = \infty$ geworden sind. Dann erscheint der laufende Punkt wieder in der Nähe der Asymptote, da wo $1 - S$ positiv sehr klein und y negativ sehr gross ist; S muss nun abnehmen, während y wächst, und weil dS und y zugleich negativ sind, so sind die Incremente des Integrales positiv und bekommen in umgekehrter Ordnung dieselben Werte wie früher. Wenn der laufende Punkt in $(S = 0, y = -1)$ angelangt ist, so beträgt folglich das Integral $2K$. Jetzt wird S negativ und wenn man die bekannte Quadratwurzel als Ausdruck für $(1-S)y$ herstellt, so ist leicht zu zeigen, dass wenn der laufende Punkt in $(S = -1, y = 0)$ anlangt, das Integral den Wert $3K$ erreicht hat. Wenn endlich der laufende Punkt wieder am Ort der Abscisse $(S = 0, y = 1)$ angelangt ist, so hat das Integral den Wert $4K$ erreicht und kann nun durch fortwährende Wiederholung dieser Reihe periodisch wachsen.

Wenn in der Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden die Coefficienten A, B, C zu ganzen Functionen einer Variablen λ gemacht werden (die zum Unterschiede an den auch variablen Coordinaten x, y Parameter heisse), so gehört zu jedem andern Werte des Parameters λ eine andere Gerade und die Gleichung stellt nun eine einfache Schaar von Geraden dar (die Gerade hat einfache Beweglichkeit). Die Gerade schneidet jeweilen die Curve in drei Punkten,

und die Summe der Werte, die das Integral $\int \frac{dS}{(1-S)y}$ in jedem der drei Schnittpunkte annimmt, kann nur von λ abhängen und wird durch Permutation der Schnittpunkte nicht geändert. Sie kann daher, wenn man alle reellen und imaginären Werte von λ in Betracht zieht, auf einem einblättrigen λ -Felde ausgebreitet werden, ist hier überall differentiabel und wird nirgends unendlich gross. An periodisches Zunehmen kann nicht gedacht werden, weil keine ungewöhnlichen Zusammenhänge da sind. Die genannte Summe kann daher nur eine Constante sein.

Irgend zwei feste Gerade seien durch die Gleichungen $p = 0$, $q = 0$ gegeben; dann ist auch $\lambda p + q = 0$, worin die Coefficienten lineare Functionen des Parameters λ sind, Gleichung einer Geraden, die durch den festen Punkt $(p = 0, q = 0)$ geht, und die um diesen Punkt sich dreht, wenn λ nach und nach alle Werte annimmt. Zu $\lambda = \infty$ gehört die Gerade $p = 0$ und zu $\lambda = 0$ die Gerade $q = 0$. Für beide Gerade hat die Summe der drei Integrale nach obigem denselben Wert. Obige Constante ist also für alle Geraden dieselbe. Wir kennen eine Gerade, die in $(S = 0, y = 1)$ berührt und in $(S = -1, y = 0)$ schneidet. In ihren drei Schnittpunkten dürfen wir dem Integrale resp. die Werte $0, 0, -K$ beilegen; die Constante ist also $-K$ (im allgemeinen könnte man $(4m-1)K$ setzen, wo m eine ganze Zahl ist). Beiläufig ersieht man hieraus, dass die gemeinschaftliche Abscisse der zwei im endlichen liegenden reellen Wendepunkte $S(-\frac{1}{2}K) = -S(\frac{1}{2}K)$ ist. Auf der positiven Seite der Abscissenaxe (wo y positiv) haben im Wendepunkte die drei Integrale in der Tat die Werte $-\frac{1}{2}K, -\frac{1}{2}K, -\frac{1}{2}K$. Fährt man fort, die Gerade als Tangente an der Curve gleiten zu lassen, indem man den Berührungspunkt in der Richtung von $(S = 0, y = 1)$ gegen $(S = -1, y = 0)$ hin bewegt, so gelangt man zu einem Punkte, wo die Tangente durch $(S = 0, y = 1)$ geht; die drei Integrale sind hier $-\frac{1}{2}K, -\frac{1}{2}K, 0$. Ist der Berührungspunkt in $(S = -1, y = 0)$ angelangt, die Tangente also mit der Asymptote parallel, so sind die drei Integrale $-K, -K, K$; denn der dritte Schnittpunkt ist auf der positiven Seite in unendliche Ferne gegangen, um nachher auf der negativen Seite in grosser Ferne wieder zu erscheinen (Durchgang durch $(S = 1, y = \infty)$). Der Berührungspunkt kommt dahin, wo die Tangente durch $(S = 0, y = -1)$ geht; die Integrale $-\frac{3}{2}K, -\frac{3}{2}K, 2K$. Der Berührungspunkt gelangt in den Wendepunkt, der auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegt; Integrale $-\frac{1}{2}K, -\frac{1}{2}K, \frac{3}{2}K$. Der Berührungspunkt nach $(S = 0, y = -1)$, wo die Tangente in $(S = -1, y = 0)$ schneidet; Integrale $-2K, -2K, 3K$.

Die neun Wendepunkte der Curve entsprechen den Argument-

werten $-\frac{1}{2}K$, K , $\frac{2}{3}K$, $-\frac{1}{2}K + \frac{2}{3}L$, $K + \frac{2}{3}L$, $\frac{2}{3}K + \frac{2}{3}L$, $-\frac{1}{2}K + \frac{4}{3}L$, $K + \frac{4}{3}L$, $\frac{2}{3}K + \frac{4}{3}L$. Da $S(K) = 1$ schon bekannt ist, so bleiben für die \sin am Function, die zu den übrigen 8 Wendepunkten gehört, nur folgende 4 unbekannte Werte: Zwei reelle $S(-\frac{1}{2}K) = S(\frac{2}{3}K)$, $S(K + \frac{2}{3}L) = S(K + \frac{4}{3}L)$; zwei imaginäre $S(-\frac{1}{2}K + \frac{2}{3}L) = S(\frac{2}{3}K + \frac{4}{3}L)$, $S(\frac{2}{3}K + \frac{2}{3}L) = S(-\frac{1}{2}K + \frac{4}{3}L)$. Die Gleichung für S ist daher vom vierten Grade, nämlich

$$1 + 2S - 2k^2S^3 - k^2S^4 = 0$$

Denn man findet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial S^2} = \frac{l^2}{(1-S)^4 y^3} (1 + 2S - 2k^2S^3 - k^2S^4)$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial S^2} = 0$$

ist die Bedingung für das Minimum des Winkels, den die Tangente der Curve mit der Abscissenaxe bildet.

Die Gleichung der schneidenden Geraden sei $y = \alpha S + \beta$. Gebraucht man die Functionszeichen C, D , die durch $C^2 = 1 - S^2$, $D^2 = 1 - k^2S^2$ und durch die Bedingung, dass sie im Ausgangspunkte ($S = 0, y = 1$) beide den Wert 1 haben, definiert sind, so ist

$$y = \frac{CD}{1-S} = \frac{(1+S)D}{C}$$

Man hat also die Gleichung

$$\frac{CD}{1-S} = \alpha S + \beta$$

Das Zeichen y für die Ordinate werde fortan nicht mehr gebraucht; dagegen sollen nun die Argumente in den drei Schnittpunkten mit a, x, y bezeichnet werden. Es sei also $a + x + y = -K$, und wenn $-a - K = c$ gesetzt wird, $x + y = c$. Schreibt man die Gleichg. drei Male hin mit den Argumenten a, x, y , ersetzt Sa, Ca, Da resp. durch $-\frac{Cc}{Dc}$, $-\frac{S(c)}{D(c)}$, $\frac{l}{Dc}$, so dass die betreffende Gleichg. zu

$$-l^2 \frac{Sc}{Dc(Dc + Cc)} = \frac{\beta Dc - \alpha Cc}{Dc}$$

d. h.

$$\frac{Dc - Cc}{Sc Dc} = \alpha Cc - \beta Dc$$

wird und eliminirt α, β aus allen drei Gleichungen, so hat man den

Additionssatz in einer besondern Form. Um zu den sonst bekannten Formen derselben zu gelangen, wollen wir zuerst die Gleichung der Geraden in Bezug auf S rational machen. Sie wird

$$V = (S-1)(\alpha S + \beta)^2 + (1+S)(1-k^2 S^2) = 0$$

und, wenn

$$V = S^3 - LS^2 + MS - N$$

gesetzt wird, so hat man

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - k^2)L &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + k^2; & (1-L)\alpha^2 - 2\alpha\beta &= k^2(-1-L) \\ (\alpha^2 - k^2)M &= \beta^2 - 2\alpha\beta + 1; & (M\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) &= k^2M + 1 \\ (\alpha^2 - k^2)N &= \beta^2 - 1; & -N\alpha^2 + \beta^2 &= -k^2N + 1 \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$J = 1 - L + M - N = (1 - Sa)(1 - Sx)(1 - Sy)$$

und addirt alle drei geordneten Gleichungen, so hat man

$$J\alpha^2 = k^2J + 2l^2$$

Die erste Gleichung gibt dann

$$J2\alpha\beta = (1-L)(k^2J + 2l^2) + k^2J(1+L) = 2k^2J + 2l^2(1-L)$$

also

$$J\alpha\beta = k^2J + l^2(1-L) = 1 - L + k^2(M - N)$$

Die dritte Gleichung gibt

$$J\beta^2 = N(k^2J + 2l^2) + J(1 - k^2N) = J + 2l^2N$$

Aus den für $J\alpha^2$, $J\alpha\beta$, $J\beta^2$ gefundenen Ausdrücken folgt

$$J\alpha(\alpha - \beta) = l^2(1 + L), \quad J\beta(\alpha - \beta) = -l^2(M + N)$$

und durch Subtraction

$$J(\alpha - \beta)^2 = l^2(1 + L + M + N) = l^2(1 + Sa)(1 + Sx)(1 + Sy)$$

Um endlich α , β zu eliminiren, kann man die gefundenen Ausdrücke in der identischen Gleichung

$$J\alpha\beta \times J(\alpha - \beta)^2 - J\alpha(\alpha - \beta) \times J\beta(\alpha - \beta) = 0$$

substituiren und bekommt

$$(1 - L + k^2(M - N))(1 + L + M + N) + l^2(1 + L)(M + N) = 0$$

das ist

$$1 - (L^2 - 2M) + 2l^2N + k^2(M^2 - 2LN) - k^2N^2 = 0$$

wo

$$L = Sa + Sx + Sy, \quad M = Sa(Sx + Sy) + Sx Sy, \quad N = Sa Sx Sy$$

folglich

$$L^2 - 2M = S^2a + S^2x + S^2y; \quad M^2 - 2LN = S^2a(S^2x + S^2y) + S^2x S^2y$$

Die Gleichung ist also

$$1 - S^2a - (1 - k^2 S^2a)(S^2x + S^2y) + 2l^2 Sa Sx Sy + k^2 S^2x S^2y - k^2 S^2a S^2x S^2y = 0$$

Um den ungeraden Term $2l^2 Sa Sx Sy$ in einem Quadrate zu verbergen, wollen wir $-S^2a$ durch $-l^2 S^2a - k^2 S^2a$ und $k^2 S^2x S^2y$ durch $-l^2 S^2x S^2y + S^2x S^2y$ ersetzen. Dann wird die Gleichung zu

$$-l^2(Sa - Sx Sy)^2 + (1 - k^2 S^2a)(1 - S^2x - S^2y + S^2x S^2y) = 0$$

das ist

$$D^2a C^2x C^2y - l^2(Sa - Sx Sy)^2 = 0$$

Jetzt kann man die Gleichung spalten, und es fragt sich nur noch, welchen der zwei Factoren man annulliren soll. Wenn $x=0, y=0, a = -K$, so ist

$$Da Cx Cy = l, \quad Sa - Sx Sy = -1$$

Man muss also

$$Da Cx Cy + l(Sa - Sx Sy) = 0$$

setzen. Da man die drei Schnittpunkte beliebig mit einander vertauschen darf, so kann man in dieser Gleichung auch a mit x vertauschen und hat

$$Ca Dx Cy + l(Sx - Sa Sy) = 0$$

Setzt man endlich $a = -K - c$ und multiplicirt die Gleichung mit $\frac{Dc}{l}$, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$Cx Cy - Cc - Dc Sx Sy = 0; \quad -Sc Dx Cy + Dc Sx + Cc Sy = 0$$

In der ersten Gleichung kann man, weil $x = c - y$ ist, c mit x und y mit $-y$ vertauschen und bekommt

$$Cx = Cc Cy + Sc Dx Sy$$

In der zweiten kann man c mit y und x mit $-x$ vertauschen und bekommt

$$Sx Dy = Sc Cy - Cc Dx Sy$$

Multiplicirt man nun die zwei Gleichungen

$$\begin{array}{l|l} Cx = Cc Cy + Sc Dx Sy & \times 1 \\ Sx Dy = Sc Cy - Cc Dx Sy & \times i \end{array}$$

resp. mit 1, i und addirt, so erhält man

$$Cx + i Sx Dy = (Cc + i Sc)(Cy - i Dx Sy)$$

also

$$Cc + i Sc = \frac{Cx + i Sx Dy}{Cy - i Dx Sy}$$

und somit

$$S(x+y) = \frac{Sx Cy Dy + Cx Dx Sy}{1 - k^2 S^2 x S^2 y}; \quad C(x+y) = \frac{Cx Cy - Sx Dx Sy Dy}{1 - k^2 S^2 x S^2 y}$$

Substituirt man den Wert von $C(x+y)$ in der Gleichung

$$Cx Cy - Cc - Dc Sx Sy = 0$$

so erhält man auch

$$D(x+y) = \frac{Dx Dy - k^2 Sx Cx Sy Cy}{1 - k^2 S^2 x S^2 y}$$

2^o) Durch Betrachtung des Unendlichwerdens und Verschwindens.

$S(a+x)$ als Function von x wird unendlich in

$$x = 2mK + (2n+1)L - a$$

und nur in diesen Punkten, und zwar einfach unendlich. In

$$x = 4mK + (2n+1)L - a \quad \text{ist}$$

$$Sx = -\frac{1}{kSa}$$

verschwindet also $1 + kSaSx$ und zwar einfach; in

$$x = (4m+2)K + (2n+1)L - a \quad \text{ist}$$

$$Sx = \frac{1}{kSa}$$

verschwindet also $1 - kSaSx$ und zwar einfach. Der Ausdruck $1 - k^2 S^2 a S^2 x$ verschwindet also überall einfach, wo $S(a+x)$ unendlich wird und sonst nirgends. Also wird

$$(1 - k^2 S^2 a S^2 x) \cdot S(a+x)$$

in

$$x = 2mK + (2n+1)L - a$$

nicht mehr unendlich, wohl aber in allen Punkten

$$x = 2mK + (2n+1)L$$

und zwar zweifach. Wenn der Ausdruck in Form einer ganzen Function von Sx, Cx, Dx ausgedrückt werden kann, so muss er daher vom zweiten Grade sein. Weil er durch den Schnitt $2K$ in sein

entgegengesetztes übergeht, so muss er in Bezug auf Sx , Cx allein von ungeradem Grade, folglich linear sein; und weil er durch den Schnitt $2L$ nicht geändert wird, so muss er in Bezug auf Cx , Dx allein von geradem, also vom zweiten Grade sein. Er kann also nur aus den zwei Termen $Cx Dx$ und Sx bestehen. Um den ersten Term wegzuschaffen, betrachten wir den Ausdruck

$$f(x) = (1 - k^2 S^2 a S^2 x) (S(a+x) - S(a-x))$$

Die Function

$$\begin{aligned} f(L+y) &= \left(1 - \frac{S^2 a}{S^2 y}\right) \left(\frac{1}{kS(a+y)} - \frac{1}{kS(a-y)}\right) \\ &= \frac{(S^2 a - S^2 y) (S(a+y) - S(a-y))}{k^2 S^2 y S(a+y) S(a-y)} \end{aligned}$$

geht für ein sehr kleines y in tiefster Näherung in $2 \frac{Ca Da}{ky}$ über, wird also nur einfach unendlich.

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x); & f(2K+x) &= -f(x) \\ f(2L+x) &= f(x) \end{aligned}$$

Setzt man im Ausdrucke für $f(L+y)$, $y = a+w$, wo w sehr klein sein soll, so wird

$$S^2 a - S^2 y = -2 Sa Ca Da . w, \quad S(a-y) = -w$$

also ist

$$f(L+a) = 2 \frac{Ca Da}{k Sa} = f(-L+a)$$

also

$$f(L-a) = -2 \frac{Ca Da}{k Sa}$$

Wenn endlich x sehr klein wird, so ist

$$f(x) = 2Ca Da . x$$

Ueberall also, wo Sx unendlich oder null wird, wird es auch $f(x)$ und umgekehrt, und in allen diesen Punkten ist

$$\frac{f(x)}{S(x)} = 2Ca Da$$

Zum Ueberfluss mag man noch untersuchen, ob $f(x)$ noch anderswo verschwinden könne, als wo Sx verschwindet. Die Punkte, wo der Factor $1 - k^2 S^2 a S^2 x$ verschwindet, sind schon erledigt. Es bleiben nur noch diejenigen übrig, wo der andere Factor $S(a+x) - S(a-x)$ verschwindet. Denkt man sich nun das zweiblättrige S -Feld mit den Verzweigungspunkten $-\frac{1}{k}$, -1 , 1 , $\frac{1}{k}$ und mit den zwei Perioden

$4K$ und $2L$ des Arguments, die den zwei ungewöhnlichen Zusammenhängen entsprechen, so sieht man, dass abgesehen von den Perioden, demselben Punkte S im einen Blatte das Argument x , im andern $2K - x$ zugehört. Aus der Gleichung $Sy = S(z)$ folgt also mit Notwendigkeit entweder

$$y - z = 4mK + 2nL$$

oder

$$y + z = (4m + 2)K + 2nL$$

Aus

$$S(a + x) - S(a - x) = 0$$

kann man aber nicht auf

$$2a = (4m + 2)K + 2nL$$

schliessen, weil a schon zufällig gegeben ist, sondern nur auf

$$2x = 4mK + 2nL$$

und hieraus entweder auf

$$x = 2mK + (2n + 1)L$$

wo $f(x)$ nicht verschwindet, oder auf

$$x = 2mK + 2nL$$

wo Sx und $f(x)$ zugleich verschwinden. Die zwei Functionen $S(x)$ und $f(x)$ haben also alle Nullpunkte gemein.

Die Function $\frac{f(x)}{S(x)}$ hat in der S -Ebene überall nur einen Wert und wird nirgends unendlich (und nirgends null), folglich ist sie keine Function, sondern eine Constante, nämlich $2Ca Da$;

$$(1 - k^2 S^2 a S^2 x)(S(a + x) - S(a - x)) = 2Ca Da Sx$$

Vertauscht man a mit x , so hat man

$$(1 - k^2 S^2 a S^2 x)(S(a + x) + S(a - x)) = 2Sa Cx Dx$$

und die Addition ergibt

$$1) \quad (1 - k^2 S^2 a S^2 x) S(a + x) = Sa Cx Dx + Ca Da Sx$$

Es sei

$$m^2 = 1 - k^2 S^2 a S^2 x = C^2 a + S^2 a D^2 x = C^2 x + D^2 a S^2 x$$

$$m \cos \varphi = Ca, \quad m \sin \varphi = Sa Dx; \quad m \cos \chi = Cx, \quad m \sin \chi = Da Sx$$

Dann ist

$$Sa Cx Dx = m^2 \sin \varphi \cos \chi; \quad Ca Da Sx = m^2 \cos \varphi \sin \chi$$

Die Gleichung 1) verwandelt sich also in

$$S(a+x) = \sin(\varphi + \chi)$$

Wenn $x = 0$, so ist $m = 1$, $\cos \varphi = Ca$, $\sin \varphi = Sa$, $\cos \chi = 1$, $\sin \chi = 0$, also $\chi = 0$. Unter denselben Voraussetzungen ist die Gleichung

$$C(a+x) = \cos(\varphi + \chi)$$

richtig. Die Gleichung ist also überhaupt richtig, weil der andere Fall

$$C(a+x) = -\cos(\varphi + \chi)$$

ausgeschlossen ist. Folglich

$$2) \quad (1 - k^2 S^2 a S^2 x) C(a+x) = Ca Cx - Sa Da Sx Dx$$

Ferner ist

$$m^2 = D^2 a + k^2 S^2 a C^2 x = D^2 x + k^2 C^2 a S^2 x$$

man kann also

$$Da = m \cos \psi, \quad k Sa Cx = m \sin \psi, \quad Dx = m \cos w, \quad k Ca Sx = m \sin w$$

setzen. Die Gleichung 1) wird

$$k S(a+x) = \sin(\psi + w)$$

Also

$$D(a+x) = \cos(\psi + w)$$

und man hat

$$3) \quad (1 - k^2 S^2 a S^2 x) \cdot D(a+x) = Da Dx - k^2 Sa Ca Sx Cx$$

30.) Beweis mittelst zweier Kreise, von denen der eine innerhalb des andern liegt, ohne den Mittelpunkt mit ihm gemein zu haben.

Wenn in einem einzigen Augenblick eine punktförmige Masse m in Bezug auf ein rechtwinkliges System die Coordinaten a, b, c ; ein anderer Massenpunkt m' die Coordinaten a', b', c' etc. hat; wenn x, y, z die Coordinaten eines freien Punktes P sind, der von $m, m', m'' \dots$ Gravitationswirkungen erfährt, und wenn

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

$$r'^2 = (a'-x)^2 + (b'-y)^2 + (c'-z)^2$$

etc., so heisst

$$V = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \dots$$

als Function der Coordinaten x, y, z des freien Punktes P be-

trachtet, das Potential des Massensystems ($m, m', m'' \dots$) in Bezug auf den Punkt P . Die Componenten der Beschleunigung, welche der Punkt P durch die Gravitationswirkung des Massensystems erfährt, sind

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

Das Potential gewährt also den Vorteil der Einheit gegenüber der Dreiheit der Componenten der Beschleunigung. Wir wollen das Potential eines Kreisbogens in Bezug auf einen innern Punkt seiner Ebene berechnen.

Der Durchmesser AB eines Kreises (Fig. 1.) werde durch den Pol O , auf den das Potential eines Kreisbogens AP sich bezieht, in einen grössern Teil $AO = 1$ und einen kleineren $OB = l$ geteilt. M sei Mittelpunkt; Wkl. $ABP = \varphi$, $OP = r$. Die Projection von OP auf BP ist gleich der von AO , also $= \cos \varphi$; die von OP auf AP gleich der von OB , also $l \sin \varphi$; folglich

$$r^2 = \cos^2 \varphi + l^2 \sin^2 \varphi$$

Der Radius des Kreises ist $\frac{1+l}{2}$, der Mittelpunktswinkel $AMP = 2\varphi$, der Bogen AP also gleich $(1+l)\varphi$. Das Bogenelement PP' , das, wenn man vom constanten infinitesimalen Querschnitt und von der Dichtigkeit absieht, als Massenelement gelten darf, ist daher $(1+l)d\varphi$. Das Element des Potentials V ist also

$$dV = (1+l) \frac{d\varphi}{r}$$

Das Potential des Kreisbogens in Bezug auf einen innern Punkt seiner Ebene ist also ein elliptisches Integral erster Art, das $(1+l)$ -fache des Normalintegrals, wenn l den complementären Modul bedeutet. Wenn

$$k^2 + l^2 = 1, \quad \text{so ist} \quad r^2 = 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

Bedeutet x das Argument, so ist

$$\sin \varphi = Sx, \quad r = Dx, \quad V = (1+l)x$$

Der Kreis $APBQA$, (Fig. 2.) Mittelpunkt M , Pol O seien dieselben wie vorhin. Ausser dem Punkte P (Wkl. $ABP = \varphi$) auf der positiven Seite der Abscissenaxe wähle man noch einen zweiten Q (Wkl. $ABQ = \chi$) auf der negativen Seite und verlange, dass das Potential des Bogens QP in Bezug auf O constant bleibe, während die Punkte P und Q sich auf der Kreislinie bewegen. Wenn $\varphi = \text{am } x$, $\chi = \text{am } y$, so sei $x + y = c$, $\text{am } c = \gamma$. Das Potential des Bogens QP in Bezug auf O soll also den Wert $(1+l)c$ behalten.

Die unendlich nahe auf die Sehne PQ (Fig. 3.) folgende Sehne schneide sie in T ; dann darf man die Dreiecke TPP' und TQQ' als ähnlich ansehen, weil jede Sehne von der Kreislinie unter gleichen Winkeln geschnitten wird; folglich ist

$$\frac{PP'}{TP} = \frac{QQ'}{TQ}$$

Damit aber das Potential sich nicht ändere, muss

$$\frac{PP'}{OP} = \frac{QQ'}{OQ}$$

sein. Also ist

$$\frac{QT}{OQ} = \frac{TP}{OP}$$

Die Gerade OT halbirt daher den Winkel QOP . Macht man nun den Winkel TOE dem Winkel OTP gleich (E liege auf der verlängerten Sehne), so ist ETO ein gleichschenkliges Dreieck; E Mittelpunkt eines durch O und T gehenden Kreises.

Wkl. $EOP = \text{Wkl. } EOT - \text{Wkl. } POT = \text{Wkl. } ETO - \text{Wkl. } TOQ = \text{Wkl. } OQE$. Weil die zwei Dreiecke EOP und EQO ausserdem noch den Winkel in E gemein haben, so sind sie einander ähnlich. Daher

$$\frac{EP}{EO} = \frac{EO}{EQ} = \frac{OP}{OQ} = \frac{TP}{TQ}$$

und weil $EO = ET$, so ist

$$\frac{EP}{ET} = \frac{ET}{EQ} \cdot \frac{PT}{TQ}$$

folglich

$$\overline{EO}^2 = \overline{ET}^2 = \overline{EP} \cdot \overline{EQ}$$

Also ist \overline{EO} gleich der Länge der aus E an den Kreis $APBQ$ gezogenen Tangente. EF sei diese Tangente. Man ziehe EB senkrecht auf die Abscissenaxe AB . Dann ist

$$\overline{ON}^2 + \overline{NE}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NE}^2 - \overline{MA}^2$$

$$\overline{ON}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{NB}^2 \cdot \overline{NA}$$

folglich ist BO gleich lang wie die aus N an den Kreis $AFPBQ$ gezogene Tangente. Zieht man in T auf die Sehne PQ eine Senkrechte, welche der Abscissenaxe in C begegne, und beschreibt um den Mittelpunkt C mit dem Halbmesser CT einen Kreis, so ist ET Tangente an diesen zweiten Kreis, und man beweist für diesen

zweiten Kreis, dass die aus N an ihn gezogene Tangente gleich NO ist, gerade sowie für den ersten Kreis geschehen ist.

Umgekehrt, wenn aus einem Punkte N der Abscissenaxe (Mittelpunktsgerad) an zwei (oder mehrere) Kreise, deren Mittelpunkte M, C in der durch N gehenden Mittelpunktsgeraden liegen, gleich lange Tangenten gehen, denen das Stück NO der Mittelpunktsgeraden gleich gemacht wird, und man zieht in D auf die Mittelpunktsgerade eine Senkrechte (die Radicalaxe), so hat jeder Punkt E der Radicalaxe die Eigenschaft, gleich lange Tangenten an beide Kreise (überhaupt an alle Kreise der Schaar, liegen sie links oder rechts der Radicalaxe) zu senden, und ihre Länge ist gleich EO ; (der Punkt O ist der eine der zwei Schaarenkreise, deren Halbmesser unendlich klein geworden ist) und wenn T Berührungspunkt der an den zweiten Kreis gehenden Tangente ist, so ist $OE(=EF)$ geometrisches Mittel zwischen EP und EQ . Der gemeinsame Winkel E der zwei Dreiecke EPO, EOQ wird also von proportionalen Seiten eingeschlossen. Die Dreiecke sind daher ähnlich; folglich ist

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{EP}{EQ} = \frac{ET}{TQ} = \frac{PT}{TQ}$$

Von welchem Punkte R der Radicalaxe aus man an irgend einen Schaarkreis, der innerhalb des ersten Kreises liegt, eine Tangente ziehen mag, die den innern Kreis in T berührt, und den äussern in P, Q schneidet, immer wird der Berührungspunkt T die Sehne PQ in zwei Teile teilen, die sich zu einander wie die Strahlen OP und OQ verhalten. — Die Bedingung der Constanz des Kreisbogens QP ist also erfüllt, wenn man den zweiten Kreis (Mittelpunkt C , Radius CT) festhält und an ihm die Sehne PQ des ersten Kreises fortgleiten lässt.

Für die geometrische Vorstellung ist jetzt die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{d\varphi} + \frac{d\chi}{d\chi} = 0$$

vollzogen; denn man kann sich der sichern Ueberzeugung hingeben, dass man im Stande sein wird, durch trigonometrische Formeln die der Figur entsprechende Abhängigkeit der Amplituden φ und χ von einander auszudrücken. Diese Form des Additionssatzes ist geometrisch interessant. Denkt man sich Q als beliebig gewählten Anfangspunkt und zieht nun von diesem aus eine erste Tangente QP an den zweiten Kreis, so ist der Punkt P durch das Argument

$$x = -y + c$$

bestimmt. Von P aus ziehe man eine zweite Tangente an den inneren Kreis, die den äusseren in P_2 trifft; dann gehört zu P_2 das Argument $-y+2c$: aus P_2 ziehe man eine Sehne P_2P_3 , die den inneren Kreis berührt; dann ist P_3 durch das Argument $-y+3c$ bestimmt, und so fort. Im allgemeinen wird man eine endlose gebrochene Linie bekommen, die dem äusseren Kreis eingeschrieben und dem inneren umschrieben ist. Das Potential des ganzen äusseren Kreises in Bezug auf O ist $(1+l) \cdot 2K$, die entsprechende Zunahme des Argumentes also $2K$. Wenn nun im besondern

$$c = \frac{m}{n} \cdot 2K$$

ist, wo m, n zwei positive zu einander prime ganze Zahlen bedeuten, so gehört zum Punkte P_n das Argument $-y+2mK$; dieser Punkt P_n fällt also mit Q zusammen; die gebrochene Linie hat sich geschlossen, und zwar nach m Umläufen. Man hat ein Vieleck, dessen Ecken in der äusseren Kreislinie liegen und dessen Seiten den inneren Kreis berühren. Man kann den Anfangspunkt Q verschieben; immer wird die gebrochene Linie fortfahren, sich nach m Umläufen zu schliessen und ein n -Eck zu bleiben.

(In dieser Zeichnung ist der Bequemlichkeit wegen χ negativ angenommen). Vom laufenden Punkte P des äusseren Punktes aus ziehe man eine Gerade durch den Pol Q , welche den äusseren Kreis noch in P' , den inneren in R und R' und die Radicalaxe in G schneide. Vom Anfangspunkte G an haben der Reihe nach die Punkte P, R, O, R', P' die Abstände p, r, n, r', p' . Dann ist

$$pp' = rr' = n^2$$

es sei noch

$$PT = t$$

Versucht man nun P als Anfangspunkt zu gebrauchen, so ist

$$\begin{aligned} (r-p)(r'-p) &= rr' + p^2 - p(r+r') = p(p'+p - (r+r')) \\ &= 2p \cdot \left(\frac{p+p'}{2} - \frac{r+r'}{2} \right) \end{aligned}$$

ebenso

$$(n-p)^2 = 2p \left(\frac{p+p'}{2} - n \right)$$

OP (früher mit r bezeichnet) mag ρ heissen. Wenn die Mitten der Sehnen PP' und RR' resp. M', C , sind, so haben diese zwei Punkte von G aus die Abstände $\frac{p+p'}{2}, \frac{r+r'}{2}$. Weil

$$\overline{PR} \cdot \overline{PR'} = t^2$$

ist, so hat man durch Elimination von $2p$ die Gleichung

$$\frac{t^2}{\rho^2} = \frac{C' M'}{O M'} = \frac{MC}{MO}$$

Nicht nur ist also, wie wir schon wissen,

$$\frac{TP}{OP} = \frac{TQ}{OQ}$$

sondern dieses Verhältniss ändert sich überhaupt nicht, während P den äussern Kreis durchläuft. Der hier bewiesene Satz, allgemein ausgesprochen, lautet:

Wenn von einem Punkte eines beliebigen Schaarkreises aus Tangenten an alle innern Kreise derselben Schaar gehen, so verhalten sich die Quadrate der Tangenten, wie die Abstände der Mittelpunkte der betreffenden innern Kreise vom festen Mittelpunkte des äussern Kreises.

Entweicht der Mittelpunkt M des äussern Kreises in unendliche Ferne, und beachtet man nur solche innern Kreise, die in endlicher Nähe um O herum liegen, so nähert sich das Verhältniss der Abstände irgend zweier Mittelpunkte derselben von M ohne Ende dem Werte 1; und der äussere Kreis selbst geht in die Radicalaxe. Der Satz, dass jeder Punkt der Radicalaxe gleich lange Tangenten an alle Schaarkreise sendet, ist also als besonderer Fall in dem zuletzt ausgesprochenen Satze enthalten.

Man findet leicht

$$AN = \frac{1}{1-l} \quad ON = \frac{l}{1-l} \quad BN = \frac{l^2}{1-l}$$

Wenn Q mit A zusammenfällt, so muss Wkl. $ABP = \gamma$ werden, weil wir $x + y = c$, am. $c = \gamma$ angenommen haben. Daher ist

$$AP = (1+l) \sin \gamma$$

Weil $AO = 1$, $OP = \Delta\gamma$, so ist

$$AT = \frac{1}{1+\Delta\gamma} \cdot AP = \frac{(1+l) \sin \gamma}{1+\Delta\gamma} = \frac{AT}{AO}$$

gleich dem erwähnten constanten Verhältniss $\sqrt{\frac{MC}{MO}}$. Weil Wkl. $ACT = \gamma$ ist, so ergibt sich

$$AC = \frac{1+l}{1+\Delta\gamma}, \quad CT = \frac{(1+l)\cos\gamma}{1+\Delta\gamma}$$

Halbmesser des innern Kreises. (Es wird vorteilhaft sein, alle Linienmaasse durch AC zu dividiren). Da wir durch diese zwei Werte die Lage des innern Kreises kennen, so denken wir uns die Sehne PQ wieder so gezogen, dass P und Q auf entgegen gesetzten Seiten der Mittelpunktsgeraden sich befinden, und bezeichnen die Mitte der Sehne PQ mit M' . Dann ist

$$\text{Wkl. } QMP = 2(\varphi + \chi), \quad \text{Wkl. } QMM' = \text{Wkl. } M'MP = \varphi + \chi$$

und wenn man

$$\text{Wkl. } QMA = 2\chi$$

subtrahirt, so ergibt sich

$$\text{Wkl. } AMM' = \text{Wkl. } ACT = \varphi - \chi$$

Also ist

$$PQ = (1+l)\sin(\varphi + \chi), \quad \frac{PQ}{AC} = (1+\Delta\gamma)(\varphi + \chi)$$

Weil das constante Verhältniss $\sqrt{\frac{MC}{MO}} = \frac{\text{Tangente}}{\text{Polstrahl}}$ durch $\frac{AC}{AO} \cdot \sin\gamma$ ausgedrückt werden kann, so ist

$$\frac{TP}{AC} = \sin\gamma \cdot \Delta\varphi, \quad \frac{QT}{AC} = \sin\gamma \Delta\chi$$

Weil

$$\frac{AM}{AC} = \frac{1+\Delta\gamma}{2}$$

so ist

$$\frac{MC}{AC} = \frac{1-\Delta\gamma}{2}$$

ferner ist

$$\frac{MM'}{AC} = \frac{1+\Delta\gamma}{2} \cos(\varphi + \chi); \quad \frac{CT}{AC} = \cos\gamma$$

Weil

$$\frac{CT}{AC} = \frac{MM'}{AC} + \frac{MC}{AC} \cos(\varphi - \chi)$$

so hat man

$$\cos\gamma = \frac{1+\Delta\gamma}{2} \cos(\varphi + \chi) + \frac{1-\Delta\gamma}{2} \cos(\varphi - \chi) = \cos\varphi \cos\chi - \Delta\gamma \cdot \sin\varphi \sin\chi$$

Ferner ist

$$M'T = MC \cdot \sin(\varphi - \chi)$$

daher

$$\frac{TP}{AC} = \frac{1}{2} \frac{PQ}{AC} - \frac{MC}{AC} \sin(\varphi - \chi)$$

das heisst

$$\sin \gamma \Delta \varphi = \frac{1 + \Delta \gamma}{2} \sin(\varphi + \chi) - \frac{1 - \Delta \gamma}{2} \sin(\varphi - \chi)$$

ähnlicher Ausdruck für $\frac{QT}{AC}$; also

$$\sin \gamma \Delta \varphi = \Delta \gamma \sin \varphi \cos \chi + \cos \varphi \sin \chi$$

$$\sin \gamma \Delta \chi = \sin \varphi \cos \chi + \Delta \gamma \cos \varphi \sin \chi$$

Führt man statt der Amplituden φ, χ, γ die Argumente $x, y, c = x + y$ ein, so hat man folgende drei Gleichungen gewonnen

$$C(x + y) = Cx Cy - D(x + y) Sx Sy$$

$$S(x + y) Dx = D(x + y) Sx Cy + Cx Sy$$

$$S(x + y) Dy = Sx Cy + D(x + y) Cx Sy$$

von denen aus es leicht ist, zu andern bekannten Formeln zu gelangen.

4^o) Der von Euler gefundene älteste Beweis des Additionssatzes.

Derselbe entstand aus dem Versuche die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{R(x)} + \frac{dy}{R(y)} = 0$$

wo $(R(x))^2$ gleich einer ganzen Function vierten Grades von x ist, durch eine Gleichung zu integriren, deren linke Seite eine ganze Function von x und y ist, die in Bezug auf jede einzelne dieser zwei Variablen nur auf den zweiten Fall sich erhebt (in Bezug auf beide zugleich, also den vierten Grad erreicht), während die rechte Seite null ist. Die Coefficienten in dieser Gleichung sind wol algebraische, aber nicht rationale Functionen der arbiträren Integrationsconstante. Das Polynom der Integralgleichung, das die Form $(x, 1)^2 (y, 1)^2$ hat, muss in Bezug auf x, y symmetrisch sein, weil die Differentialgleichung in Bezug auf x, y symmetrisch ist. Es enthält daher Coefficienten für die Terme $x^2 y^2, (x^2 y + x y^2), (x^2 + y^2), xy, (x + y), 1$, sechs an der Zahl. Da man aber mit einem derselben, wenn er nicht verschwindet, die fünf übrigen dividiren kann, so sind nur fünf unbekannte Coefficienten zu zählen, die als Functionen einer einzigen Integrationsconstanten dargestellt werden müssen. Nach x geordnet sei das Polynom

$$V = Ax^2 + 2Bx + C$$

wo A, B, C ganze Functionen zweiten Grades von y allein bedeuten; nach y geordnet sei

$$V = Dy^2 + 2Ey + F$$

wo D, E, F der Reihe nach dieselben Functionen von x bedeuten, welche A, B, C von y waren. Da nun

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Ax + B; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Dy + E$$

so ist

$$(Ax + B)dx + (Dy + E)dy = 0$$

also auch

$$\frac{dx}{Dy + E} + \frac{dy}{Ax + B} = 0, \quad \text{wenn } V = 0$$

ist. Diese Gleichung gibt aber

$$(Dy + E)^2 = E^2 - DF$$

ganze Function vierten Grades von x allein;

$$(Ax + B)^2 = B^2 - AC$$

dieselbe Function vierten Grades von x allein. Die Differentialgleichung hat also wirklich dieselbe Form, wie die vorgelegte. Man muss nun bewirken, dass $E^2 - DF$ sich von $R^2(x)$ bloss durch einen constanten Factor unterscheidet. Dieses zählt für vier Bedingungen, weil eine ganze Function vierten Grades von x fünf Terme zählt. Da die fünf unbekanntes Coefficienten nur vier Bedingungen ergeben, so ist wirklich noch Spielraum für die einzige arbiträre Integrationsconstante vorhanden.

Wenn das Polynom alle fünf Terme hat, so verursacht die Zergliederung des Systems der vier Bedingungen für die fünf unbekanntes Constanten beträchtliche Schwierigkeiten. Ich will daher den Gegenstand nicht in derselben Allgemeinheit wie Euler behandeln, sondern von Anfang an die Normalform des elliptischen Integrales erster Art, auf die man ja jedes andere solche Integrale zurückführen kann, gebrauchen, also

$$(R(x))^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2 x^4$$

setzen. Die zu integrirende Differentialgleichung sei

$$\frac{ds}{R(s)} + \frac{dt}{R(t)} = 0$$

Auf transcendente Weise ist sie sogleich integrirt, indem man setzt

$$s = Sx, \quad t = Sy, \quad x + y = c$$

wo das Argument c die Integrationsconstante ist. Die algebraische Integralgleichung sei $V = 0$, wo

$$V = As^2 + 2Bs + C = Dt^2 + 2Et + F$$

wo A, B, C der Reihe nach dieselben ganzen Functionen zweiten Grades von t allein bedeuten, welche D, E, F von s allein sind. Da man das Polynom V mit irgend einem constanten Factor multipliciren darf (Null ausgeschlossen), so steht es einem frei, unmittelbar

$$E^2 - DF = (R(s))^2$$

als identische Gleichung zu setzen; man hat dann fünf Bedingungen für die sechs unbekanntenen Constanten im Polynom V . Um die Erörterung von Fällen, die sich als unstatthaft erweisen würden, abzuschneiden, beginne ich mit der auf den ersten Blick ungerechtfertigten Behauptung, dass man das Polynom V als gerade in Bezug auf x, y zusammen annehmen dürfe, das heisst, dass es sich nicht ändere, wenn man darin zugleich $-x, -y$ für x, y setze. Denn, weil $-x - y = -c$ ist, so heisst das: die Coefficienten in V sind alle samt gerade oder alle ungerade Functionen von c . Die Coefficienten von $(x^2y + xy^2)$ und von $(x + y)$ sind dann null, folglich

$$V = \alpha s^2 t^2 + \beta (s^2 + t^2) + 2\gamma s t + \delta$$

$$D = \alpha s^2 + \beta, \quad E = \gamma s, \quad F = \beta s^2 + \delta$$

und die Gleichung

$$E^2 - DF = R^2(s)$$

d. h.

$$\gamma^2 s^2 - (\alpha s^2 + \beta)(\beta s^2 + \delta) = 1 - (1 + k^2)s^2 + k^2 s^4$$

soll identisch richtig sein (in Bezug auf s). Da nur $1, s^2, s^4$ darin vorkommen, so enthält die identische Gleichung nur drei Bedingungen für die vier unbekanntenen Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Eine von diesen wird also arbiträr bleiben, und die drei übrigen werden als Functionen derselben bestimmt, was dem Charakter der Aufgabe angemessen ist. Die Behauptung ist jetzt gerechtfertigt und man sieht ein, dass, wenn man auch fünf Bedingungen mit sechs unbekanntenen Constanten gehabt hätte, doch mit Notwendigkeit (nach Ausscheidung unstatthafter Fälle) sich würde ergeben haben, dass die Coefficienten von $(s^2 t + s t^2)$ und von $(s + t)$ null sind.

Die drei Bedingungen sind:

$$-\beta\delta = 1; \quad \gamma^2 - \alpha\delta - \beta^2 = -(1 + k^2); \quad -\alpha\beta = k^2$$

Wenn $y = 0$, so ist

$$x = c, \quad t = 0, \quad s = S(c)$$

Aus

$$V = Dt^2 + 2Et + F = 0 \quad \text{und} \quad Dt + E = R(s) = Cx Dx$$

folgt also, wenn $t = 0$ ist, $F = 0$, das heisst

$$\beta S^2 c + \delta = 0 \quad \text{und} \quad E = R(Sc)$$

das heisst

$$\gamma Sc = Cc Dc$$

Eliminirt man β aus $-\beta\delta = 1$ und $\beta \cdot S^2 c + \delta = 0$, so ergibt sich

$$\delta^2 = S^2 c, \quad \beta = -\frac{1}{\delta}, \quad \alpha = k^2 \delta$$

$$\delta V = k^2 S^2 c \cdot s^2 t^2 - (s^2 + t^2) + 2 \frac{\delta}{Sc} Cc Dc \cdot st + S^2 c$$

Denkt man sich s, t , folglich auch Sc sehr klein, und vernachlässigt die sechste Ordnung des Termes $k^2 S^2 c \cdot s^2 t^2$ (indem

$$Cc Dc = 1 - \frac{1+k^2}{2} S^2 + \dots$$

durch 1 ersetzt wird, vernachlässigt man ohnehin die vierte Ordnung neben der zweiten), so muss die Gleichung die Form

$$-(s+t)^2 + S^2 c = 0$$

nicht die andere

$$-(s-t)^2 + S^2 c = 0$$

annehmen; also muss

$$\delta = -Sc$$

sein. Dann ist

$$\beta = \frac{1}{Sc}, \quad \alpha = -k^2 Sc, \quad \gamma = \frac{Cc Dc}{Sc}, \quad \delta = -Sc$$

endlich ist

$$Sc \cdot V = -k^2 S^2 c \cdot s^2 t^2 + s^2 + t^2 + 2 Cc Dc \cdot st - S^2 c = 0$$

die verlangte Integralgleichung.

Weil

$$D = \frac{1}{Sc} (1 - k^2 S^2 c S^2 x), \quad E = \frac{Cc Dc}{Sc} \cdot Sx$$

so wird die Gleichung

$$Dt + E = R(s)$$

mit Sc multiplicirt, zu

$$(1 - k^2 S^2 c S^2 x) Sy = Sc Cx Dx - Cc Dc Sx$$

Da $y = c - x$, so bleibt diese Gleichung bestehen, wenn man c und y mit einander vertauscht und x durch $-x$ ersetzt; dann wird

$$Sc = \frac{Sx Cy Dy + Cx Dx Sy}{1 - k^2 S^2 x S^2 y}$$

Weniger leicht gelangt man von $V = 0$ aus zu dieser Gleichung. Die in Bezug auf Sx, Sy rationale Integralgleichung ist nämlich

$$-(1+k^2 S^2 x S^2 y) S^2 c + S^2 x + S^2 y + 2Cc Dc . Sx Sy = 0$$

Soll sie nun in Bezug auf Sc (was man als die arbiträre Integrationsconstante betrachten kann) rational werden, so muss man beide Seiten derselben mit

$$-(1+k^2 S^2 x S^2 y) S^2 c + S^2 x + S^2 y - 2Cc Dc . Sx Sy$$

multipliciren und bekommt

$$[-(1+k^2 S^2 x S^2 y) S^2 c + S^2 x + S^2 y]^2 - 4S^2 x S^2 y (1 - (1+k^2) S^2 c + k^2 S^4 c) = 0$$

Die linke Seite sei mit $LS^4 c - 2MS^2 c + N$ identisch. Dann ist

$$L = (1 - k^2 S^2 x S^2 y)^2, \quad N = (S^2 x - S^2 y)^2, \quad M = (1 + k^2 S^2 x S^2 y)(S^2 x + S^2 y) - 2(1 + k^2) S^2 x S^2 y = S^2 x (1 - (1 + k^2) S^2 y + k^2 S^4 y) + S^2 y (1 - (1 + k^2) S^2 x + k^2 S^4 x) = S^2 x C^2 y D^2 y + C^2 x D^2 x S^2 y$$

Zugleich ist

$$(Sx Cy Dy)^2 - (Cx Dx Sy)^2 = (S^2 x - S^2 y) (1 - k^2 S^2 x S^2 y)$$

Also

$$M^2 - LN = 4(Sx Cy Dy)^2 (Cx Dx Sy)^2$$

Man muss die Lösung

$$LS^2 c - M = 2Sx Cy Dy . Cx Dx Sy$$

wählen und bekommt

$$(1 - k^2 S^2 x S^2 y)^2 S^2 c = (Sx Cy Dy + Cx Dx Sy)^2$$

wo man wiederum

$$(1 - k^2 S^2 x S^2 y) Sc = Sx Cy Dy + Cx Dx Sy$$

wählen muss. Sonst kann man die Gleichung

$$-(1+k^2 S^2 x S^2 y) S^2 c + S^2 x + S^2 y + 2Cc Dc . Sx Sy = 0$$

auch wie folgt behandeln. Weil

$$S^2 x + S^2 y = 1 + S^2 x S^2 y - C^2 x C^2 y$$

ist, so wird die Gleichung zu

$$C^2 c + D^2 c S^2 x S^2 y - C^2 x C^2 y + 2Cc Dc . Sx Sy = 0$$

das ist zu

$$(Cx + Dc Sx Sy)^2 - C^2 x C^2 y = 0$$

und nun muss man den Factor

$$Cc + Dc Sx Sy - Cx Cy = 0$$

wählen, bekommt also die bekannte Gleichung

$$Cc = Cx Cy - Dc Sx Sy$$

5⁰.) Beweis von Lagrange.

Es sei

$$x + y = c, \quad \text{am. } x = \varphi, \quad \text{am. } y = \chi, \quad \text{am. } c = \gamma, \quad \varphi + \chi = p$$

$$\varphi - \chi = q$$

Dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = Dx; \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = - Dy$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - k^2 Sx Cx = - \frac{1}{2} k^2 \sin(p + q)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = - k^2 Sy Cy = - \frac{1}{2} k^2 \sin(p - q)$$

also

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = - k^2 \sin p \cos q, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = - k^2 \cos p \sin q$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \\ &= D^2 x - D^2 y = - k^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \chi) = - k^2 \sin p \sin q \end{aligned}$$

Dividirt man mit dieser dritten Gleichung jede der zwei vorigen, so bekommt man

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial x}} = \frac{\cos q}{\sin q}, \quad \frac{\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{\cos p}{\sin p}$$

also

$$d \log \frac{\partial p}{\partial x} = d \log \sin q, \quad d \log \frac{\partial q}{\partial x} = d \log \sin p$$

Beachtet man, dass

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Dx - Dy, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = Dx + Dy$$

so geben diese Gleichungen für $y = 0$ (also $x = c$, $\chi = 0$, $\varphi = \gamma$, $p = q = \gamma$):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - (1 - D\gamma), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 1 + D\gamma$$

Man kann also bei der Integration der zwei letzten Differentialgleichungen die Integrationsconstanten angeben und hat

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1 - \Delta\gamma}{\sin \gamma} \sin q, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1 + \Delta\gamma}{\sin \gamma} \sin p$$

Multipliziert man die linke Seite der ersten Gleichung mit der rechten Seite der zweiten, und die rechte Seite der ersten mit der linken der zweiten, ausserdem noch mit $\frac{\sin \gamma}{2}$, so hat man

$$\frac{1 + \Delta\gamma}{2} \sin p \, dp = -\frac{1 - \Delta\gamma}{2} \sin q \, dq$$

das heisst

$$d\left(\frac{1 - \Delta\gamma}{2} \cos q + \frac{1 + \Delta\gamma}{2} \cos p\right) = 0$$

also

$$d(Cx Cy - Dc Sx Sy) = 0$$

Für $y = 0$ wird der eingeklammerte Ausdruck zu Cc . Also

$$Cc = Cx Cy - Dc Sx Sy$$

Die zwei vorhergehenden Gleichungen, addirt und subtrahirt geben noch

$$Sc Dx = Dc Sx Cy + Cx Sy; \quad Sc Dy = Sx Cy + Dc Cx Sy$$

6^o) Beweis aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Wenn a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel eines Kugeldreiecks bedeuten, so gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \end{aligned}$$

- 1) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$
- 2) $\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$

Man betrachte A, B, C als die drei unabhängigen Variabeln und setze $k = \frac{\sin a}{\sin A} = \text{etc.}$; k ist also eine Function von A, B, C . Die Gleichung 1) gibt, wenn man A, B constant setzt:

$$(\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a) dC - \sin B \sin C \sin a \, da = 0$$

also

$$\sin B \sin C \sin a \frac{\partial a}{\partial C} = \sin A \cos b$$

das ist

$$k \sin B \sin C \frac{\partial a}{\partial C} = \cos b$$

Vertauscht man B mit C , so hat man

$$k \sin B \sin C \frac{\partial a}{\partial B} = \cos c$$

Endlich ist auch

$$k \sin B \sin C \frac{\partial a}{\partial A} = 1$$

Es ist somit

$$3) \quad k \sin B \sin C da = dA + \cos c dB + \cos b dC$$

Die Gleichung

$$\sin a - k \sin A = 0$$

gibt

$$4) \quad \cos a da = k \cos A dA + \sin A dk$$

Multipliziert man Gleichung 3) mit $\cos a$ und substituirt den Wert aus Gleichung 4), um da zu eliminiren, so erhält man

$$k \sin A \sin B \sin C dk = (\cos a - k^2 \sin B \sin C \cos A) dA + \cos a \cos c dB + \cos a \cos b dC$$

Der Coefficient von dA ist

$$\cos a - \sin b \sin c \cos A = \cos b \cos c$$

Man hat also

$$\frac{k \sin B \sin A \sin C}{\cos a \cos b \cos c} dk = \frac{dA}{\cos a} + \frac{dB}{\cos b} + \frac{dC}{\cos c}$$

Wenn z. B. $B = 0$, so ist

$$A + C = \pi$$

Setzt man k constant, so ist

$$\frac{d(\pi - C)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\pi - C)}} = \frac{dA}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 A}} + \frac{dB}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 B}}$$

Von der Integralgleichung wähle man folgende drei Formen:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - C) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c \\ \sin(\pi - C) \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\ \sin(\pi - C) \cos b &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c \end{aligned}$$

Setzt man

$$x = \int_0^A \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad y = \int_0^B \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad s = \int_0^{\pi - C} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

so ist

$$ds = dx + dy$$

die Differentialgleichung und gibt, weil

$$\pi - C = A$$

wird, wenn B verschwindet,

$$s = x + y$$

als Integralgleichung, von welcher

$$\begin{aligned} Cs &= Cx Cy - Ds Sx Sy \\ Ss Dx &= Cx Sy + Ds Sx Cy \\ Ss Dy &= Sx Cy + Ds Cx Cy \end{aligned}$$

drei andere Formen sind. Die zwei letzten Gleichungen geben durch Elimination, wenn man

$$M = Sx Cy Dy - Cx Dx Sy$$

setzt:

$$M \cdot Ss = S^2x C^2y - C^2x S^2y = S^2x - S^2y$$

$$M \cdot Ds = Sx Dx Cy - Cx Sy Dy$$

und dann gibt die erste Integralgleichung

$$\begin{aligned} MCs &= Cx Cy (Sx Cy Dy - Cx Dx Sy) - Sx Sy (Sx Dx Cy - Cx Sy Dy) \\ &= Sx Cx Dy - Dx Sy Cy \end{aligned}$$

Weil ferner

$$M(Sx Cy Dy + Cx Dx Sy) = (S^2x - S^2y)(1 - k^2 S^2x S^2y)$$

so erhält man schliesslich

$$S(x + y) = \frac{Sx Cy Dy + Cx Dx Sy}{1 - k^2 S^2x S^2y}$$

und so fort.

Bern, den 19. März 1888.



XXIII.

Miscellen.

1.

Ueber Vierecke am Kreise.

Wenn man ein Viereck in einen Kreis legt, seine Diagonalen zieht und die gegenüberliegenden Seiten bis zu ihren Durchschnittspunkten verlängert; so kann man die entstandene Figur dreimal auf verschiedene Weise als inbeschriebenes Viereck betrachten. Man fasst nämlich zweimal die Diagonalen als gegenüberstehende Seiten auf, indem man ausser ihnen zwei wirkliche gegenüberstehende Seiten hinzu nimmt, dann entstehen zwei überschlagene Vierecke, deren Eckpunkte in der Peripherie liegen, welche also inbeschrieben sind, und zu ihnen kommt das gewöhnliche inbeschriebene Viereck.

Die beiden Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten und den Durchschnittspunkt der Diagonalen kann man 3 zusammengehörige Pole nennen, insofern jeder von ihnen Pol zur Verbindungslinie der beiden anderen als Polare ist. Man nenne die beiden ausserhalb des Kreises liegenden Pole Y und Z , den innen liegenden X . Man kann die besprochene Figur auch auf folgende Art erzeugen; man stelle die Pole X und Y fest; d. h. man nehme z. B. X an, ziehe eine Linie durch X und suche in derselben zu X und den beiden Durchschnittspunkten des Kreises den vierten harmonischen Punkt, dieser sei Y . Nun ziehe man durch Y eine Secante, verbinde ihre Kreisdurchschnittspunkte mit X und mit den dadurch entstehenden zwei neuen Kreisdurchschnittspunkten, so schneiden sich die letzten Linien in Z und die Verbindungslinie der beiden letzten Kreisdurchschnittspunkte geht durch Y .

Da die erste durch Y gelegte Secante nicht bestimmt ist, so kann man die drei Punkte X, Y, Z auf sehr verschiedene Weisen finden; oder es ergibt sich eine inbeschriebene Vierecks-schaar, welche zu den drei zusammengehörigen Polen X, Y, Z gehört.

Verlängert man die durch X gehenden Diagonalen, bis sie YZ in U , zwischen Y und Z und V , ausserhalb der beiden schneiden; so sind die Punkte Y, U, Z, V harmonisch, denn die Linien XU, XV und YZ sind die Diagonalen eines vollständigen Vierecks, von welchem Y und Z zwei Ecken sind.

Bei einem Viereck aus der Vierecksschaar, welche zu den Punkten X, Y, Z gehört, sind aber die Punkte U und V nicht nur harmonisch zu Y und Z , sondern sie sind auch zusammengehörige Pole zum Punkte X . Wir wollen alsdann diese Punkte Y', Z' nennen und das betreffende Viereck das Hauptviereck der Schaar. Man kann ein inbeschriebenes Viereck, dessen Diagonalen Polaren zu einander sind, oder deren Durchschnittspunkte auf der Polaren YZ zum Punkte X gehören, (also das Hauptviereck) auf folgende Weise finden; man wähle X und construire seine Polare. Dann ziehe man von einem Punkte Z' der Polare nach dem Mittelpunkt M des Kreises und fälle von X auf $Z'M$ ein Lot, welches in A schneidet. Dieses Lot ist die eine der Diagonalen des zu construirenden Vierecks AY' , die andere ist XZ' . Da nämlich $Y'Z'$ Polare zu X ist und XY' Polare zu Z' , so ist auch XZ' Polare zu Y' .

Zieht man MX und verlängert diese Linie, bis sie die Polare $Y'Z'$ in O trifft, ist ferner $MX = a$, so ist

$$MO = \frac{r^2}{a}$$

(r Radius des Kreises) und

$$OX = \frac{r^2 - a^2}{a}$$

Nun sind aber die Dreiecke MOZ' , MAX und $Y'OX$ einander ähnlich, und wenn man $OZ' = b$ setzt, so hat man

$$b : \frac{r^2}{a} = OY' : \frac{r^2 - a^2}{a}$$

also ist

$$OY' = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{a^2 b}$$

Daraus ersieht man, dass

$$OY' \times OZ' = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{a^2}$$

also unabhängig von b ist; sind also Y und Z zwei mit X zusammengehörige Pole, so ist das Product der Abstände YO , ZO von dem Fusspunkte des auf die Polare vom Mittelpunkt gefällten Lotes constant und stets

$$r^2 \frac{(r^2 - a^2)}{a}$$

Man kann nun auch die Lage der beiden Ecken Y und Z des Vierecks bestimmen. Nennt man nämlich $OY' = c$, $YF' = x$ und $Y'Z = y$, so hat man die beiden Gleichungen

$$x : y = b + c + x : b + c - y$$

und

$$(x + c)(y - c) = bc$$

Aus denselben findet sich

$$x = \frac{b + c}{b - c} (c + \sqrt{bc}), \quad y = \frac{b + c}{b - c} (-c + \sqrt{bc})$$

Nennt man noch

$$ZZ' = z = b + c - y$$

so ergibt sich

$$z = \frac{b + c}{b - c} (b - \sqrt{bc})$$

Man hat somit alle drei zwischen den harmonischen Punkten Y , Y' , Z , Z' liegenden Linien x , y , z gefunden.

Das Viereck, dessen Diagonalen die Polare von X in Y' und Z' schneiden, ist das einzige inbeschriebene Viereck der Viereckschaar, welche zu den Punkten X , Y , Z gehört, dessen Diagonalen gegenseitige Polaren zu einander sind; denn da die Punkte Y , Z , Y' , Z' harmonisch sind, so nähert sich Y' dem Z , wenn Z' sich ihm nähert, ebenso entfernt sich Y' von Z , wenn sich Z' von ihm entfernt; also kann der Fall nur einmal vorkommen, dass

$$OY' \times OZ' = r^2 \left(\frac{r^2 - a^2}{a^2} \right) \text{ ist.}$$

Setzt man

$$x + c = \frac{2bc}{b - c} + \frac{b + c}{b - c} \sqrt{bc} = b'$$

und

$$y - c = -\frac{2bc}{b - c} + \frac{b + c}{b - c} \sqrt{bc} = c'$$

und sucht aus den Formeln

$$x' = \frac{b' + c'}{b' - c'}(c' + \sqrt{b'c'}), \quad y = \frac{b' + c'}{b' - c'}(-c' + \sqrt{b'c'})$$

x' und y' , indem man für b' und c' die Werte in b und c einsetzt, so ergibt sich

$$x' = \frac{b + c}{b - c}(b - \sqrt{bc}) \quad \text{und} \quad y' = \frac{b + c}{b - c}(-c + \sqrt{bc})$$

Das heisst also, wenn man von Y und Z , welche ebenfalls zugehörige Pole zu X sind, ausgegangen wäre, so würde man als Diagonalen des betreffenden Vierecks XY' und XZ' gefunden haben.

Es gibt also zwei unbeschriebene Vierecksschaaren, welche in der Art conjugirt sind, dass die eine zu den Punkten X, Y, Z gehört, und die Diagonalen ihres Hauptvierecks durch Y' und Z' gehen; während die andere Schaar zu X, Y', Z' gehört, und die Diagonalen ihres Hauptvierecks durch Y und Z gehen.

Betrachten wir nun die Vierecksschaar, welche zu X, Y, Z gehört, näher. Wir setzen dabei voraus, dass O näher an Z als an Y liegt. Die Diagonalen eines dieser Vierecke, welche sich in X schneiden, fallen sehr nahe mit XY zusammen; dann liegen die Punkte U und V sehr nahe an Y . Fallen die Diagonalen in XY , so fällt das ganze Viereck in die Linie XY , zwei Seiten werden dabei unendlich klein, sind als Tangenten aufzufassen und schneiden sich in Z . Lassen wir nun die Diagonalen grössere Winkel mit XY bilden, so rücken die Punkte U und V nach entgegengesetzten Seiten von Y fort. Dabei kommt U in die Mitte zwischen Y und Z , dann liegt XV parallel YZ , und die Sehne wird durch X halbirt. Lassen wir die Winkel der Diagonalen noch mehr wachsen, so liegen nun U und V auf der zweiten Hälfte von YZ und nähern sich Z . Dabei kommt zunächst der Fall vor, dass U und V zu Y' und Z' werden, oder dass

$$UO \times VO = Y'O \times Z'O = \frac{r^2}{a^2}(r^2 - a^2) \text{ ist.}$$

Dann tritt noch der Fall ein, dass U in O fällt, und endlich fallen beide Diagonalen und mithin das ganze Viereck in XZ . Die Punkte Y und Z können die bisher erörterte Rolle von X nicht spielen, weil sie ausserhalb des Kreises liegen. Die beiden durch X gehenden Polaren XY und XZ konnten nämlich als Diagonalen oder Seiten eines unbeschriebenen Vierecks angesehen werden, dies ist jedoch bei den Polaren XZ und YZ nicht möglich, weil YZ ganz ausserhalb des Kreises liegt.

Zu jedem inbeschriebenen Viereck der eben besprochenen Art, das heisst zu den drei inbeschriebenen Vierecken, als welche man ein vollständiges, inbeschriebenes Viereck mit seinen Diagonalen betrachten kann, gehört ein vollständiges, umbeschriebenes Viereck, dessen Seiten in den vier Eckpunkten des inbeschriebenen Vierecks den Kreis berühren.

Ein solches vollständiges Viereck besteht aus drei einzelnen Vierecken, nämlich einem gewöhnlichen Viereck, einem überschlagenem und einem mit dem einspringendem Winkel. Jedes dieser drei Vierecke im umbeschriebenen, vollständigen Viereck entspricht einem der drei Vierecke des inbeschriebenen Vierecks näher, wenn man die Folgen der Eckpunkte mit den Folgen der dazwischen liegenden Durchschnittspunkte der Tangenten zusammenhält. Liegt z. B. der Mittelpunkt des Kreises innerhalb des gewöhnlichen inbeschriebenen Vierecks, so entspricht das gewöhnliche Viereck des umbeschriebenen dem gewöhnlichen des inbeschriebenen; es entspricht dann das überschlagene Viereck des umbeschriebenen einem überschlagenen des inbeschriebenen und das mit dem einspringenden Winkel des umbeschriebenen dem anderen überschlagenen des inbeschriebenen.

Da sich indessen nach dem Satze:

Dreht sich eine Linie um einen Pol, so durchläuft ihr Pol die Polare des ersten Poles — alle Tangenten des umschriebenen Vierecks in den Polaren XY , YZ und XZ schneiden, so haben alle zur inbeschriebenen Vierecksschaar gehörigen umbeschriebenen Vierecke die gemeinschaftlichen Diagonalen XY , YZ und XZ .

Es gehört also eine inbeschriebene Vierecksschaar, welche zu den Punkten X , Y , Z gehört, mit einer umschriebenen Vierecksschaar, welche zu den Polaren XY , XZ , YZ gehört, zusammen.

Verfolgen wir nun die Durchschnittspunkte der Tangentenpaare dieser umbeschriebenen Vierecke, welche an die Endpunkte der Diagonalen der inbeschriebenen Vierecke gelegt sind. Dieselben durchlaufen die Linie YZ , wir nennen sie $U'V'$.

Fällt das inbeschriebene Viereck in die Linie XY zusammen, so besteht das umbeschriebene Viereck aus zwei Tangenten, welche sich in Z schneiden. Bilden die Diagonalen des inbeschriebenen Vierecks kleine Winkel mit XY , so liegen U' und V' nahe bei Z und entfernen sich mit wachsenden Winkeln mehr und mehr von diesem Punkte. Dabei kommt zunächst der Fall vor, dass U' in O fällt; dann ist die Sehne ZX parallel YZ .

Ferner kommt der Fall vor, dass U' in U und V' in V fällt. Sie heißen dann Y' und Z' , und es ist

$$U'O \times V'O = UO \times VO = Y'O \times Z'O = \frac{r^2}{a^2} (r^2 - a^2)$$

Dann fällt U' in die Mitte zwischen Y und Z , wenn die nicht zu U' gehörige Sehne ein Durchmesser ist. Endlich, wenn das ganze inbeschriebene Viereck in Z zusammenfällt, so besteht das umbeschriebene Viereck aus 2 Tangenten, welche sich in Y schneiden.

Legt man also um einen Kreis ein Viereck, sieht die Durchschnittspunkte seiner Diagonalen mit der Peripherie als Eckpunkte eines inbeschriebenen Vierecks an, legt um dieses wiederum ein Viereck, sieht die Kreis-Durchschnittspunkte der Diagonalen dieses zweiten umbeschriebenen Vierecks wieder als Eckpunkte eines inbeschriebenen Vierecks an, und legt um dieses wiederum ein Viereck, so fallen die Diagonalen des dritten umbeschriebenen Vierecks mit den Diagonalen des ersten zusammen. Das erste umbeschriebene Viereck ist nicht notwendiger Weise dasselbe wie das dritte, kann aber mit demselben auch übereinstimmen. Dann kommen überhaupt nur 2 umbeschriebene und zwei inbeschriebene Vierecke vor. Stets existiren jedoch bei dem aufgestellten Satze nur 2 verschiedene inbeschriebene Vierecke.

Hätte man die Reihe der Vierecke mit einem beliebigen inbeschriebenen angefangen, so brauchte dieses erste Viereck nicht mit dem dritten überein zu stimmen; stimmt es aber mit ihm überein, so existiren auch nur 2 Arten von inbeschriebenen Vierecken.

Setzt man die Art von Beschreibung der Vierecke in und um den Kreis fort, so wechseln nur 2 inbeschriebene und 2 umbeschriebene Vierecke ab.

Ist bei einem inbeschriebenen Viereck

$$OZ' = \frac{r}{a} \sqrt{r^2 - a^2}$$

so ist auch

$$OY' = \frac{r}{a} \sqrt{r^2 - a^2}$$

Das Viereck, zu welchem die Linien XZ' und XY' Diagonalen sind, und die ganze Schaar, deren Hauptviereck es ist, sind in diesem Falle die Trapezo, deren Diagonalen durch X gehen.

Bei dem Hauptviereck der dieser Trapezschaar conjugirten inbeschriebenen Vierecksschaar schneiden sich die Diagonalen recht-

winklig und eine ist Durchmesser, dieses Hauptviereck ist also symmetrisch, rechtwinklig. Die Ecken in YZ dieser Vierecksschaar liegen paarweise gleich weit von O entfernt. Die umbeschriebene Vierecksschaar zur ersten Schaar besteht aus symmetrischen Vierecken, deren Diagonalen rechtwinklig auf einander stehen und deren eine ein Durchmesser ist. Das Hauptviereck der zweiten umbeschriebenen Vierecksschaar ist ein Trapez; sodass bei der fortgesetzten Vierecksbeschreibung bei den eingeschriebenen Vierecken ein Trapez mit einem rechtwinkligen symmetrischen Viereck abwechselt, bei den umbeschriebenen Vierecken ein symmetrisches Viereck mit einem Trapez.

Liegt X im Mittelpunkt, so rückt YZ in die Unendlichkeit. Beide eingeschriebene Vierecksschaaren sind Rechtecke mit parallelen Seiten und die beiden Hauptvierecke sind die unter diesen vorkommenden Quadrate. Die Seiten, oder auch die Diagonalen dieser Quadrate bilden Winkel von 45° . Die beiden umbeschriebenen Vierecksschaaren sind Rhomben, deren Diagonalen gegenseitig Winkel von 45° bilden, und die ihnen gehörigen Hauptvierecke sind wieder die vorkommenden Quadrate.

Berlin, den 12. Sept. 1888.

Dr. Beyssell.

2.

Geometrischer Beweis eines Satzes der Flächentheorie.

Der Beweis des Satzes von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses einer Fläche bei einer Biegung derselben wird auf den Gauss'schen Satz gegründet, dass das Krümmungsmaass durch die Fundamentalgrössen E, F, G und ihre ersten und zweiten Ableitungen allein darstellbar ist. Wir teilen nachstehend einen Versuch mit, den erwähnten Satz geometrisch zu begründen.

Es sei M der betrachtete Punkt der Fläche, T die Tangentialebene, H_1, H_2 die beiden zugehörigen Hauptnormalebene, MN die Normale; bezüglich der Richtung der letzteren wollen wir, um an bestimmte Vorstellungen anzuknüpfen, voraussetzen, dass sie, wenn die beiden Hauptnormalschnitte in der Umgebung von M auf der nämlichen Seite von T liegen, nach dieser selben Seite gerichtet sei; im andern Falle denken wir sie auf derjenigen Seite von T liegend, auf welcher der Schnitt mit H_1 sich befindet.

Auf den Hauptnormalschnitten mögen nun von M aus nach beiden Seiten unendlich kleine Bögen ds_1 , beziehungsweise ds_2 aufgetragen werden, welche, bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, mit den zugehörigen Sehnen übereinstimmen, so dass mit dieser Beschränkung

$$MP_1 = MP_1' = ds_1, \quad MP_2 = MP_2' = ds_2$$

gesetzt werden kann.

Die Normalen der Fläche in den Punkten $P_1, P_1'; P_2, P_2'$ dürfen als in den Ebenen H_1, H_2 liegend und mit den Normalen der zugehörigen Normalschnitte zusammenfallend angesehen werden. Die Winkel, welche die Normalen in P_1 und P_2 mit der Normale MN in M bilden, seien $d\sigma_1$, bzw. $d\sigma_2$; dann sind

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{d\sigma_1}{ds_1}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\sigma_2}{ds_2} \tag{1}$$

die beiden Hauptkrümmungen.

Die Winkel, welche die Haupttangente t_1, t_2 mit den Sehnen MP_1, MP_2 einschliessen, sind $\frac{d\sigma_1}{2}, \frac{d\sigma_2}{2}$ respective.

Um das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte M zu bestimmen, betrachten wir das Dreieck MP_1P_2 auf der Fläche und seine Abbildung $M\Pi_1\Pi_2$ auf der Einheitskugel. Beide können, wenn es sich um ihre Fläche handelt, mit Beschränkung auf unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung wie ebene rechtwinklige Dreiecke angesehen werden; demgemäss sind

$$dw = \frac{1}{2} ds_1 ds_2 \tag{2}$$

$$d\bar{\omega} = \frac{1}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \tag{3}$$

ihre Flächeninhalte und

$$K = \frac{d\bar{\omega}}{dw} = \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{ds_1 ds_2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \tag{4}$$

das verlangte Krümmungsmaass in M .

Die vier Dreiecke $MP_1P_2, MP_1'P_2, MP_1P_2', MP_1'P_2'$, welche hier als der den Punkt M umgebende Teil der krummen Fläche betrachtet werden, bilden eine vierseitige gleichseitige Pyramidenfläche, welche im Falle gleichgerichteter Hauptkrümmungsradien ganz zu einer Seite von T liegt und bei M spitze Kantenwinkel hat, während sie im Falle ungleichgerichteter Hauptkrümmungsradien von T geschnitten wird und bei M stumpfe Kantenwinkel aufweist. Bezeichnet

man den Kantenwinkel mit γ , so folgt für ihn aus dem in der Kante MN rechtwinkligen Dreikant $M(P_1P_2N)$ die Bestimmung

$$\cos \gamma = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\sigma_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{d\sigma_2}{2} \right)$$

aus welcher bis auf Grössen der zweiten Ordnung

$$1 - \frac{\gamma^2}{2} = \pm \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{4} \quad (4)$$

folgt; das obere Zeichen gilt für gleichgerichtete, das untere für entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien.

Denkt man sich nun mit der Fläche eine Biegung, ohne Dehnung und Zusammenziehung, vorgenommen, so erleidet die eben betrachtete Pyramidenfläche eine Deformation, die jedoch nur die Flächenwinkel alterirt, während die Seitenflächen ungeändert bleiben; die Seitenkanten MP_1, MP_1' ; MP_2, MP_2' bewegen sich dabei in den Ebenen H_1, H_2 beziehungsweise. Da also γ constant bleibt, so ändern sich die Grössen $d\sigma_1, d\sigma_2$ vermöge der Gleich. (5) derart, dass

$$d\sigma_1 d^2\sigma_2 + d\sigma_2 d^2\sigma_1 = 0 \quad (6)$$

ist. Die sphärische Abbildung $M\Pi_1\Pi_2$ erfährt gleichfalls eine Veränderung, welche der Gleich. (3) gemäss durch

$$d^2\bar{\omega} = \frac{1}{2}(d\sigma_1 d^2\sigma_2 + d\sigma_2 d^2\sigma_1) \quad (7)$$

dargestellt ist und daher vermöge der Gleich. (6) verschwindet, so dass $d^2\bar{\omega} = 0$ wird. Bei der Biegung behält demnach nicht allein $d\bar{\omega}$, sondern auch $d^2\bar{\omega}$, somit auch K seinen Wert bei, d. h. das Krümmungsmaass bleibt bei jeder Biegung der Fläche in allen Punkten derselben ungeändert.

Brünn, 1888.

E. Czuber.

3.

Ein geometrischer Ort.

(Schüleraufgabe.)

Es ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises zu bestimmen, wenn die Endpunkte der Basis des Dreiecks die Brennpunkte einer Ellipse sind, deren Umfang der Scheitel des Dreiecks durchläuft.

Bezeichnet man die laufenden Coordinaten der Ellipse mit $x_1 y_1$, die Coordinaten des Kreiscentrums mit $\xi \eta$, so findet man aus der Bedingung, dass der Kreis dem Dreiecke eingeschrieben ist, leicht

$$1) \quad \eta = \frac{e y_1}{a + e}$$

Daher

$$y_1 = \frac{a + e}{e} \eta$$

Nennt man die Segmente der Dreiecksseiten, welche durch die Berührungspunkte des Kreises gebildet werden, s und t , so finden sich, wenn die Radienvectoren des Punktes $x_1 y_1$ mit r_1, r_2 bezeichnet werden, leicht die folgenden Relationen

$$s + t = 2e$$

$$s + u = r_1$$

$$t + u = r_2$$

daher, da $r_1 + r_2 = 2a$ ist:

$$u = a - e$$

Es ist aber auch

$$(y_1 - \eta)^2 + (x_1 - \xi)^2 = \eta^2 + u^2 = \eta^2 + (a - e)^2$$

daher

$$(x_1 - \xi)^2 = (a - e)^2 - y_1^2 + 2y_1 \eta$$

substituirt man hierin statt η seinen Wert aus 1) und nimmt für $x_1 - \xi$ das positive Vorzeichen ist, so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$x_1 - \xi = \frac{b}{a} x_1 \sqrt{\frac{a - e}{a + e}}$$

daher

$$x_1 = \xi \frac{a \sqrt{a + e}}{a \sqrt{a + e} - b \sqrt{a - e}}$$

Es besteht aber zwischen x_1 und y_1 die Bedingungsgleichung

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$$

Daraus findet sich die Gleichung des geometrischen Ortes

$$\frac{\eta^2 (a + e)}{e^2 (a - e)} + \frac{\xi^2}{e^2} = 1$$

d. h. eine Ellipse mit den Axen

$$(a) = e \quad (b) = \frac{eb}{a + e}$$

Ich brauche wol kaum hinzuzufügen, dass a , b , e gewöhnliche Bedeutung (grosse Halbaxe, kleine Halbaxe und Excentricität der Ellipse) haben. Die zum Verständnisse nötige Figur ist leicht herzustellen.

Wachring, 1888. December.

K. Zelbr.

4.

Ueber eine Differentialgleichung.

Sei φ eine beliebige Function von x , so lässt sich die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = e^{f \varphi dx} + \varphi y + \frac{e^{-f \varphi dx}}{x^2} y^2$$

immer integriren. Denn setzt man

$$z = y e^{-f \varphi dx} - x$$

so folgt

$$x^2 \frac{dz}{dx} = (z + x)^2$$

dieses ist aber eine homogene Gleichung. Oder man setze

$$y = -x e^{f \varphi dx} \frac{d \log u}{dx}$$

so folgt

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{z}{x} \frac{du}{dx} + \frac{u}{x^2} = 0$$

Diese Gleichung gehört zur Form:

$$\sum_0^n \alpha_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

deren allgemeines Integral

$$y = \sum_1^n A_k x^{\beta_k}$$

ist, wobei β_n die verschiedenen Wurzeln der Charakteristik

$$\sum_0^n \alpha_k (\beta | k) = 0$$

bezeichnen, in welcher

$$(\beta | 0) = 1$$

$$(\beta | k) = \beta(\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-k+1)$$

zu setzen ist. Sind etwa drei gleich, so sind

$$y = x^{\beta_1} (A_1 + A_2 \log x + A_3 \log^2 x) + \sum_4^n A_k x^{\beta_k}$$

sind zwei conjugirt imaginär, so folgt

$$y = x^m \{A_1 \cos [n \log x] + A_2 \sin [n \log x]\} + \sum_3^n A_k x^{\beta_k}$$

wobei

$$\beta_1 = m + ni,$$

$$\beta_2 = m - ni$$

angenommen wurde. Man sieht, dass diese Gleichungen eine Analogie zu jenen mit constanten Coefficienten bilden.

Prag, November 1888.

W. Láska.

5.

Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.

In Brünnow's Lehrbuch der sphärischen Astronomie wird im Abschnitt über „die Refraction“ bezüglich der verschiedenen Refractionstheorien bemerkt, dass die von Cassini gemachte Hypothese einer Atmosphäre von gleichförmiger Dichtigkeit mit einmaliger Brechung die mittlere Refraction bis zu 80° ganz gut darstellt.

Es lässt sich demnach erwarten, dass die Annahme einer zweimaligen Brechung in zwei an Dichtigkeit verschiedenen Schichten die mittlere Refraction bis zu einem höhern Grade genau darstellen wird. Wir haben diese Berechnung angestellt und geben im Nachstehenden eine Lösung dieser Aufgabe.

Wir bezeichnen mit i_1 den Einfallswinkel, mit f_1 den Brechungswinkel, mit δ_{z_1} die Refractionsablenkung, mit u_1 den Brechungsexponenten und mit r_1 den Radius der ersten oder äusseren Schicht der vorangesetzten Atmosphäre. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\sin i_1 = u_1 \sin f_1, \quad i_1 = f_1 + \delta_{z_1}, \quad \delta_{z_1} = (u_1 - 1) \operatorname{tg} f_1$$

$$\delta_{z_1} = \frac{u_1 - 1}{\sqrt{\frac{u_1^2}{\sin^2 i_1} - 1}}$$

Für die zweite Schicht hat man ebenso:

$$\sin i_2 = u_2 \sin f_2, \quad i_2 = f_2 + \delta z_2, \quad \delta z_2 = (u_2 - 1) \operatorname{tg} f_2$$

$$\delta z_2 = \frac{u_2 - 1}{\sqrt{\frac{u_2^2}{\sin i_2^2} - 1}}$$

Bezeichnen wir den Erdhalbmesser mit a , die scheinbare Zenithdistanz des Sterns mit z und bemerken, dass

$$r_2 \sin i_2 = r_1 \sin f_1 \quad \text{und} \quad a \sin z = r_2 \sin f_2$$

ist, so erhalten wir mittelst der Relationen

$$\sin i_1 = \frac{a}{r_1} u_1 u_2 \sin z$$

$$\sin i_2 = \frac{a}{r_2} u_2 \sin z$$

durch Einsetzen in die vorhergehenden Ausdrücke

$$\delta z = \frac{u_1 - 1}{\sqrt{\frac{r_1^2}{a^2 u_2^2 \sin z^2} - 1}} + \frac{u_2 - 1}{\sqrt{\frac{r_2^2}{a^2 \sin z^2} - 1}}$$

als vollständige Refraction

$$\delta z = \delta z_1 + \delta z_2$$

Für eine 3- oder n -malige Brechung würden analoge Glieder hinzukommen. So wäre eine 4-malige Brechung

$$\begin{aligned} \delta z = & \frac{u_1 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_1}{a}\right)^2 \frac{1}{u_2^2 u_3^2 u_4^2 \sin z^2} - 1}} + \frac{u_2 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_2}{a}\right)^2 \frac{1}{u_3^2 u_4^2 \sin z^2} - 1}} \\ & + \frac{u_3 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_3}{a}\right)^2 \frac{1}{u_4^2 \sin z^2} - 1}} + \frac{u_4 - 1}{\sqrt{\left(\frac{r_4}{a}\right)^2 \frac{1}{\sin z^2} - 1}} \end{aligned}$$

Indem wir uns zunächst auf eine zweimalige Brechung beschränken, haben wir die Unbekannten u_1 und u_2 und ferner $\frac{r_1}{a}$ und $\frac{r_2}{a}$ zu ermitteln, über welche nichts weiter bekannt ist. Da aber die obigen Gleichungen in Bezug auf die Unbekannten nicht linear sind, so würde eine directe Herleitung derselben aus z und δz Schwierigkeiten unterliegen. Wir schlagen deshalb den folgenden Weg ein:

Schreiben wir den Refraktionsausdruck in der Form

oder

$$\delta z = \frac{x_1}{\sqrt{\cot z^2 + y_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{\cot z^2 + y_2}}$$

$$\delta z = \frac{x_1 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + y_1 \operatorname{tg} z^2}} + \frac{x_2 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + y_2 \operatorname{tg} z^2}}$$

und entwickeln ihn nach Potenzen von $\operatorname{tg} z$, so kommt

$$\delta z = (x_1 + x_2) \operatorname{tg} z - \frac{1}{2}(x_1 y_1 + x_2 y_2) \operatorname{tg} z^3 + \frac{3}{8}(x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2) \operatorname{tg} z^5 \\ - \frac{5}{16}(x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3) \operatorname{tg} z^7 + \dots$$

In dem genannten Lehrbuch ist nun bis zu diesem Grade eine analoge Reihe entwickelt, welche wir in folgender Form benutzen werden

$$\delta z = 57,5234 \operatorname{tg} z - 0,066365 \operatorname{tg} z^3 \\ + 0,00020986 \operatorname{tg} z^5 - 0,000000996 \operatorname{tg} z^7$$

Die Coefficienten der vorhergehenden Reihe sind demnach als bekannt anzusehen, so dass wir auf das nachstehende Gleichungssystem gekommen sind:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 &= b \\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 &= c \\ x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 &= d \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir der Reihe nach die Werte

$$x_1 = \frac{b - ay_2}{y_1 - y_2} = \frac{c - by_2}{y_1(y_1 - y_2)} = \frac{d - cy_2}{y_1^2(y_1 - y_2)}$$

und die Verbindung dieser Relationen liefert

$$\begin{aligned} a y_1 y_2 - b(y_1 + y_2) + c &= 0 \\ b y_1 y_2 - c(y_1 + y_2) + d &= 0 \end{aligned}$$

Demnach stellen sich y_1 und y_2 als Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0$$

dar, deren Coefficienten sich aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ergeben, so dass man hat

$$y^2(b^2 - ac) - (bc - ad)y + c^2 - bd = 0$$

Hierin sind einzuführen

$$\begin{aligned} a &= 57,5234, & b &= 0,132731, & c &= 0,00055966, \\ & & d &= 0,0000031878 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichung, deren Wurzeln zugleich auch x_1 und x_2 bestimmen, führt schliesslich auf folgenden Refractionsausdruck für eine zweimalige Brechung

$$\delta z = \frac{44,96}{\sqrt{\cot z^2 + 0,001\,128}} + \frac{12,585}{\sqrt{\cot z^2 + 0,006\,228}}$$

Um zu sehen, bis zu welchem Grade genau diese Formel die Refractionen wiedergibt, haben wir die Refractionen für die folgenden Zenithdistanzen berechnet, und geben die in Klammern darunter stehenden Decimalen den Unterschied zwischen der genauen mittleren Refraction und der berechneten in Bogensekunden:

45°	60°	70°	75°	80°	85°	
57,5"	1'39,4"	2'36,9"	3'31,6"	5'15,6"	9'46,6"	
(0,2")	(0,3")	(0,4")	(0,5")	(0,5")	(-0,1")	
86°	87°	87°10'	87°30'	88°	89°	90°
11'38,9"	14'15,1"	14'46,8"	15'55,8"	17'53,8"	22'23,5"	25'
(0,0")	(-0,5")	(1,0")	(5")	(15")	(2'1")	(10')

E. Oekinghaus.

6.

Die Refractionsfläche des Meeresbodens.

Betrachtet man Punkte, Linien oder Flächen durch lichtbrechende Medien, so erscheinen sie im allgemeinen verschoben. Ein interessanter Fall ist derjenige, die Gleichung des scheinbaren Meeresgrundes aufzustellen unter der Annahme, dass das Meer eine Kugelfläche bedeckt.

Wir bezeichnen mit r ihren Radius, mit a den des Meeresspiegels, mit h die Entfernung des Auges vom Mittelpunkt der Kugel. Durch h legen wir eine Ebene und nehmen in dem Meridianschnitt vom Radius r einen beliebigen Punkt $r(\gamma)$ in Bezug auf h als Axe an, lassen von ihm einen Lichtstrahl ausgehen, welcher in $a(\psi)$ des zweiten Meridianschnittes, also im Meeresniveau mit dem entsprechenden Radius a den Winkel β bildet und dann nach erfolgter Brechung unter dem Winkel α ins Auge gelangt.

Nehmen wir endlich noch an, dass ein zweiter, dem ersten unendlich naher Lichtstrahl von $r(\gamma)$ ausgeht und in's Auge tritt, so werden beide divergirenden Strahlen rückwärts verlängert sich in

einem Convergenczpunkt $R(\varepsilon)$ schneiden, welcher der Bildpunkt von $r(\gamma)$ ist. Nach dem Brechungsgesetz haben wir zunächst

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

und ferner

$$R \sin(\alpha - \psi + \varepsilon) = a \sin \alpha$$

$$r \sin(\beta - \psi + \gamma) = a \sin \beta$$

als Gleichungen für den ersten Strahl. Die Gleichungen für den zweiten entwickeln sich aus den Differentialformeln

$$\cos \alpha d\alpha = n \cos \beta d\beta$$

$$R \cos(\alpha - \psi + \varepsilon) (d\alpha - d\psi) = a \cos \alpha d\alpha$$

$$r \cos(\beta - \psi + \gamma) (d\beta - d\psi) = a \cos \beta d\beta$$

in welchen R und ε zunächst als Constante zu betrachten sind.

Die Resultante der Elimination von $d\alpha$, $d\beta$, $d\psi$ ist

$$\frac{n}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \beta} = \frac{a n}{R \cos(\alpha - \psi + \varepsilon)} - \frac{a}{r \cos(\beta - \psi + \gamma)}$$

oder auch, wenn wir die rechte Seite mittelst der ersteren Gleichungen transformiren

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2} - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2 r^2}{a^2} - \sin^2 \alpha}}$$

Hierin ist für α eine andere Variable, welche zur Polargleichung der Refractioncurve des Meeresgrundsmeridians hinleitet. Hierfür stehen zwei Wege offen.

Aus der 2. und 3. unserer Gleichungen folgt

$$\sin(\alpha + \varepsilon) \cos \psi - \cos(\alpha + \varepsilon) \sin \psi = \frac{a}{R} \sin \alpha$$

und

$$\sin(\beta + \gamma) \cos \psi - \cos(\beta + \gamma) \sin \psi = \frac{a}{r} \sin \beta$$

woraus

$$\cos \psi \sin(\alpha + \varepsilon - \beta - \gamma) = \frac{a}{R} \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) - \frac{a}{r} \sin \beta \cos(\alpha + \varepsilon)$$

$$\sin \psi \sin(\alpha + \varepsilon - \beta - \gamma) = \frac{a}{R} \sin \alpha \sin(\beta + \gamma) - \frac{a}{r} \sin \beta \sin(\alpha + \varepsilon)$$

folgt.

Bezeichnen wir $\alpha + \varepsilon - \beta - \gamma$ mit U und eliminiren ψ , so folgt

$$\sin u^2 = \frac{a^2}{R^2} \sin \alpha^2 + \frac{a^2}{r^2} \sin \beta^2 - \frac{2a^2}{Rr} \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos u$$

und da

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$$

auch

$$\sin \alpha^2 = \frac{\sin U^2}{\frac{a^2}{R^2} + \frac{a^2}{r^2 n^2} - \frac{2a^2}{Rr n} \cos U}$$

Führen wir diesen Wert für $\sin \alpha^2$ in die obige Refractionsformel ein, so werden 2 Wurzel ausdrücke rational und es bedarf nur noch einer Relation von U als Function von R und ε , um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Wir benutzen hierzu die Formel

$$h \sin(\alpha - \psi) = a \sin \alpha$$

aus welcher

$$\frac{a}{h} = \cos \psi - \sin \psi \cdot \cot \alpha$$

folgt. Da wir vorhin schon $\cos \psi$ und $\sin \psi$ entwickelt haben, so erhalten wir nach Einsetzung ihrer Werte in die letzte Formel

$$\frac{\sin(\alpha - \beta + \varepsilon - \gamma)}{h} = \frac{\sin \varepsilon}{nr} + \sin \frac{(\alpha - \beta - \gamma)}{R}$$

oder

$$\sin U \left(\frac{1}{h} - \frac{\cos \varepsilon}{R} \right) + \cos U \frac{\sin \varepsilon}{R} = \frac{\sin \varepsilon}{nr}$$

und man hat $\cos U$ aus der Gleichung

$$\cos U^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{2 \cos \varepsilon}{Rh} + \frac{1}{h^2} \right) - \frac{2 \sin \varepsilon^2}{Rr n} \cos U + \frac{\sin \varepsilon^2}{n^2 r^2} - \left(\frac{1}{h} - \frac{\cos \varepsilon}{R} \right)^2 = 0$$

zu berechnen und in die betreffende Gleichung einzusetzen.

Da aber diese Polargleichung für $R(\varepsilon)$ etwas complicirt ist, wollen wir statt ihrer die einfachere für $\varrho(\varphi)$ einführen, in welcher ϱ den Radiusvector vom Auge zum Convergenzpunkt $R(\varepsilon)$, und φ seinen Winkel mit h , d. i. mit der Normalen vom Auge zum Meere bedeutet. Dann ist

$$h \sin \varphi = a \sin \alpha, \quad R \cos(\alpha - \psi + \varepsilon) = h \cos \varphi - \varrho$$

$$r \cos(\beta - \psi + \gamma) = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \beta} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{n^2} \sin^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{a^2 n^2} \sin^2 \varphi}$$

und die Relation

$$\frac{n}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \beta} = \frac{a n}{R \cos(\alpha - \psi + \varepsilon)} - \frac{a}{r \cos(\beta - \psi + \gamma)}$$

geht über in die folgende einfache Polargleichung der Bildcurve eines grössten Kreises des Meeresgrundes, dessen Ebene durch's Auge geht:

$$\frac{1}{h \cos \varphi - \rho} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - h^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 n^2 - h^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - h^2 \sin^2 \varphi}}$$

Diese Curve und demnach auch die entsprechende Rotationsfläche als Bildfläche des Meeresbodens liegen symmetrisch gegen die Axe h , deren Pol im Auge ruht. Ihr veränderlicher Parameter ist h , welcher von dem jeweiligen Orte des Auges abhängig ist.

Die Form der Curve oder Fläche ist in Bezug auf mässige Höhen das betrachtende Auge im allgemeinen concav. Der Meeresboden scheint gehoben und napfförmig sich nach oben auszubreiten.

Setzen wir nämlich $\varphi = 0$, so erhält man den scheinbaren Ort des dem Auge nächsten Punktes aus

$$\frac{1}{h - \rho} = \frac{1}{a} - \frac{1}{na} + \frac{1}{nr}$$

wobei wir $nr > a$ voraussetzen, welches der Fall der Natur ist.

Es sei die Tiefe des Meeres gleich e und x die Höhe des Bildpunktes beim senkrechten Sehen, dann ist

$$\frac{x}{e} = \frac{n-1}{n + \frac{e}{r}}$$

oder die scheinbare Tiefe $y = e - x$ des Meeresbodens unter dem Meeresspiegel

$$\frac{y}{e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{n + \frac{e}{r}}$$

Dieselbe hängt also ausser von n von der Meerestiefe e und ihrem Kugelradius r ab. Je grösser e und r ist, um so grösser wird auch x .

Ist dagegen $\frac{1}{r} = 0$, d. h. die Oberfläche und der Grund des Meeres eine Ebene, so ist die Tiefe

$$y = \frac{e}{n}$$

Blickt das Auge zum Meereshorizont, wofür die Bedingung

$$a = h \sin \varphi$$

gilt, so ist

$$e = h \cos \varphi$$

Demnach scheint der Meeresboden, den wir als kugelförmig annehmen, sich bis zum Horizont zu erheben, wobei aber die Bedingung $r > \frac{a}{n}$ erfüllt sein muss.

Ein lebendes Wesen, welches sich aus dem Grunde des als vollständig durchsichtig vorausgesetzten Meeres in Wirklichkeit immer weiter vom Auge des Betrachtenden entfernt, scheint in Folge der Refraction einen ganz andern Weg zu nehmen, indem es sich in aufsteigender Curve scheinbar dem Meeresniveau nähert und schliesslich im Horizont verschwindet. Die Sehrichtung in diesem Verschwindungspunkt ist zugleich auch eine Tangente der scheinbaren Bahn, wie sich leicht aus dem Differentialquotienten der Gleichung ermitteln lässt.

Ist r im Verhältniss zu a klein, die Meerestiefe also gross, so erscheint für grössere Höhen h die Refractioncurve des Meridians dem Auge convex. Für bestimmte Verhältnisse kann es demnach möglich sein, dass die Curve nur schwach gekrümmt erscheint, welches dann eintritt, wenn die concave Krümmung in convexe übergeht. So kann es vorkommen, dass die Gerade zwischen dem Verschwindungspunkt und dem dem Auge nächsten Bildpunkt senkrecht zur normalen Sehrichtung steht.

Setzen wir also jetzt

$$nr = h \sin \varphi, \quad h \cos \varphi = e$$

$$e \cos \varphi = h - r - e \frac{n-1}{n + \frac{e}{r}}$$

so folgt als Bedingung aus diesen Formeln

$$h = \frac{nr}{a} (nr + a - r)$$

wobei $h \geq a$ sein muss.

Ist z. B. $n = \frac{1}{2}$, $r = 3$, $a = 4$, so ist $h = 5$.

Diese specielle Curve würde also der obigen Bedingung genügen. Ihre Zweige tangiren den grösseren Kreis in Punkten, deren Verbindungsgerade durch den obern Bildpunkt geht. Dagegen ist

$$h = \frac{a}{nr} (nr + a - r)$$

zu setzen, wenn für $a = h \sin \varphi$ die Curve das Niveau erreicht.

Um die Wendepunkte der allgemeinen Curve zu bestimmen, wäre der zweite Differentialquotient y'' derselben gleich null zu setzen, wofür in Polarcoordinaten auch die Relation

$$\rho^3 - \rho\rho'' + 2\rho'^2 = 0$$

gültig ist. Doch hat die Durchführung dieser Rechnung nur nebensächliches Interesse, weshalb wir darauf verzichten.

E. Oekinghaus.

7.

Ueber die Bewegung eines Luftballons in ruhiger Luft.

Das Volumen des Luftballons sei V , das Gewicht eines Liters Luft in der Höhe x beim Barometerstande b und der Temperatur t sei $= p$, das Gewicht eines Liters Gas $= s$, das angehängte Gewicht $= P$.

Der Auftrieb des Ballons ist also Vp , das Gewicht des eingeschlossenen Gases Vs , demnach die nach oben wirkende Kraft in der Höhe x gleich

$$Vp - Vs - P$$

Diese wirkt auf die Masse $\frac{Vs + P}{g}$ ein, und die Beschleunigung q der Bewegung ist folglich, wenn wir noch $Vs + P = Q$ setzen

$$-q = \frac{Vp - Q}{Q} g$$

Indem wir nun die Formel $v dv = q dx$ benutzen, erhalten wir

$$v dv = - \frac{Vp - Q}{Q} g dx$$

Gemäss der barometrischen Höhenformel in ihrer einfachsten Gestalt

$$\frac{p}{p_0} = \frac{b}{b_0} = e^{-\frac{x}{A}}$$

oder

$$x = A \log \frac{b_0}{b}$$

geht die Differentialformel über in

$$v dv = - \left(\frac{V}{Q} p_0 e^{-\frac{x}{A}} - 1 \right) g dx$$

worin p_0 und b_0 sich auf die Erdoberfläche beziehen.

Nehmen wir an, dass die Bewegung in der Höhe H zur Ruhe kommt, wo also $Vp_1 = Q$ ist, so hat man

$$v dv = - \left(\frac{b_0}{b_1} e^{-\frac{x}{A}} - 1 \right) g dx$$

und integriert

$$\frac{v^2}{2g} = A \frac{b_0}{b_1} e^{-\frac{x}{A}} + x + C$$

Da nun für $v = 0$, $x = H$ wird, so ist die Geschwindigkeit des Ballons in der Höhe x durch

$$\frac{v^2}{2g} = A \frac{b_0}{b_1} \left(e^{-\frac{x}{A}} - e^{-\frac{H}{A}} \right) + x - H$$

gegeben. Darin ist b_1 der Barometerstand für H .

Die Anfangsgeschwindigkeit für $x = 0$ wäre also vermitteltst

$$\frac{c^2}{2g} = A \frac{b_0}{b_1} \left(1 - e^{-\frac{H}{A}} \right) - H$$

bestimmt.

Führen wir noch für $\frac{c^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe für den freien

Fall ein, setzen also $c^2 = 2gh$, so ist einfacher wegen $e^{-\frac{H}{A}} = \frac{b_1}{b_0}$

$$\frac{h}{A} = \frac{b_0}{b_1} - 1 - \log \frac{b_0}{b_1}$$

Der Coefficient A bedeutet eine gewisse Höhe, bei welcher das Verhältniss der Barometerstände $\frac{b_0}{b_1} = e$ ist. Für $b_1 = \frac{760\text{mm}}{2,718 \dots}$ wird A ungefähr gleich 8000 m. Dabei haben wir keine Rücksicht genommen auf die Veränderlichkeit der Schwere, der Temperatur und der Breite, um die Formeln nicht zu complicirt zu machen. Doch genügt die Formel $x = 8000 \log \frac{b_0}{b_1}$ für die Breite von 45° und die mittlere Temperatur = 0.

Um die Zeit des Steigens zu finden, gehen wir aus von

$$\frac{v^2 - c^2}{2gA} = \frac{b_0}{b_1} \left(e^{-\frac{x}{A}} - 1 \right) + \frac{x}{A}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

woraus

$$t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \int \frac{d\frac{x}{A}}{\sqrt{\frac{b_0}{b_1} \left(e^{-\frac{x}{A}} - 1 \right) + \frac{x}{A} + \frac{h}{A}}}$$

Die Integration ist nicht ausführbar. Für mässige Höhen können wir indes $e^{-\frac{x}{A}}$ in eine Reihe entwickeln, so dass man hat

$$t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \int \frac{d\frac{x}{A}}{\sqrt{-\frac{b_0}{b_1} \left(\frac{x}{A} - \frac{x^2}{2A^2} + \frac{x^3}{6A^3} - \frac{x^4}{24A^4} \dots \right) + \frac{x}{A} + \frac{h}{A}}}$$

Um nicht auf elliptische Integrale zu kommen, lassen wir die dritten und höheren Potenzen fort und erhalten, wenn x eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, das Näherungsintegral

$$t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \int \frac{d\frac{x}{A}}{\sqrt{\frac{h}{A} - \left(\frac{b_0}{b_1} - 1 \right) \frac{x}{A} + \frac{b_0}{2b_1} \frac{x^2}{A^2}}}$$

d. i.

$$\text{Const} + t = \sqrt{\frac{A b_1}{g b_0}} \log \left(1 - \frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0}{b_1} \frac{x}{A} \right) + \sqrt{\frac{2b_0}{b_1} \left(\frac{h}{A} - \left(\frac{b_0}{b_1} - 1 \right) \frac{x}{A} + \frac{b_0}{2b_1} \frac{x^2}{A^2} \right)}$$

Nach Bestimmung der Constanten haben wir

$$t = \sqrt{\frac{Ab_1}{gb_0}} \log \frac{1 - \frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0}{b_1} \frac{x}{A} + \sqrt{2 \frac{b_0}{b_1} \left(\frac{h}{A} - \left(\frac{b_0}{b_1} - 1 \right) \frac{x}{A} + \frac{b_0}{2b_1} \frac{x^2}{A^2} \right)}}{1 - \frac{b_0}{b_1} + \sqrt{\frac{2b_0}{b_1} \frac{h}{A}}}$$

oder nach Einsetzen von

$$\frac{x}{A} = \log \frac{b_0}{b_1}, \quad \frac{h}{A} = \frac{b_0}{b_1} - 1 - \log \frac{b_0}{b_1}$$

für den Grenzfall $x = H$, $b = b_1$.

Die Zeit des Steigens bis zum höchsten Punkt

$$T = \sqrt{\frac{Ab_1}{gb_0}} \log \frac{1 - \frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0}{b_1} \log \frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0}{b_1} \sqrt{1 - \frac{2b_1}{b_0} + \left(1 - \log \frac{b_0}{b_1}\right)^2}}{1 - \frac{b_0}{b_1} + \sqrt{2 \frac{b_0}{b_1} \left(\frac{b_0}{b_1} - 1 - \log \frac{b_0}{b_1} \right)}}$$

darin bedeuten b_0 und b_1 beziehungsweise die Barometerstände am untern und am obern Punkte, g die Acceleration der Schwere und $A = 8000$ m.

Entwickelt man für $\frac{b_0}{b_1} = 1 + x$ den $\log(1+x)$ in eine Reihe, so wird

$$T = \sqrt{\frac{A}{g} \frac{b_1}{b_0}} \log \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + (1+x) \sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{7}{12}x^2}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6}}}$$

welche Formel man für kleine Werte von x noch weiter vereinfachen kann.

Beispiel. Ist $b_0 = 760$ mm, $b_1 = 690$ mm, also $H = 761$ m, so ist T ca. 73 Sekunden.

Gräfrath, den 21. September 1888.

E. Oekinghaus.

Litterarischer Bericht

XXV.

L e h r b ü c h e r.

Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössen-Lehre. Im Auftrage der Königlich Preussischen General-Inspektionen der Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterricht in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte bearbeitet von R. Foth, Feuerwerks-Hauptmann. Mit 135 in den Text gedruckten Holzschnitten. Dritte Auflage. Hannover 1888. Carl Meyer. 284 S.

Das Buch ist mit ungemeinem Fleiss und Geschick für den klar erfassten und stets im Auge behaltenen besondern Zweck, für den es bestimmt ist, bearbeitet. Die für wissenschaftliches Studium erforderliche Exactheit und Gründlichkeit ist nicht zum Ziele genommen, demgemäss wird die Grundlegung der Begriffe grossenteils durch populäre Erläuterung vertreten. In Hinsicht auf den ausschliesslich praktischen Zweck der angestrebten mathematischen Ausbildung aber ist es sehr anzuerkennen, dass der Verfasser, wie es auch im Vorwort ausgesprochen ist, den grossen Gewinn, den die Schüler aus der Theorie für leichtere Aneignung der Lehren ziehen können, richtig gewürdigt, sich nicht mit Aufstellung von Regeln begnügt, sondern das Selbstdenken in umsichtigster Weise erweckt und ein eingehendes Verständniss eines grossen Umfangs von Begriffen zugänglich gemacht hat. Die Lehrweise ist, namentlich im Anfang, auf ein sehr geringes Fassungsvermögen eingerichtet, doch, wenigstens soweit Erklärung oder Herleitung durch die Sache gefordert war, derart, dass die grössere Ausführlichkeit stets instructiv auch für die fähigeren Schüler bleibt. Dies möchte wol nicht mehr

gelten von den Einschaltungen zwischen Lehrsatz und Beweis, welche zur Auffindung der Beweise Anleitung geben sollen. Diese Anleitungen sind weniger einfach und schwerer zu verstehen als der Beweis selbst und werden selten gerade den Weg repräsentiren, auf dem ein Schüler den Beweis findet. Statt ihm Vertrauen zu eigener Fähigkeit einzufliessen, machen sie ihn vorher unselbständig, indem sie ihn am Gängelbände führen. Höchstens durften in manchen Fällen kurze Winke gegeben werden. Dass der Verfasser es mit Angaben zur Bestimmung von Grundbegriffen nicht genau nimmt, würde kaum der Rüge wert erscheinen. Findet sich aber zu diesem Zwecke ein Satz aufgestellt, der in jeder Beziehung unrichtig ist, so kann man wol, auch wo der Fehler keine pädagogische Wirkung haben sollte, Abänderung verlangen. Auf S. 4. steht der dreifach unrichtige Satz: „Ist man berechtigt, eine Grösse für eine andre zu setzen, so sagt man, die beiden Grössen seien einander gleich“. 1) ist die Bedingung unzureichend aufgestellt. Innerhalb seines Eigentums ist doch wol Jeder berechtigt Ungleiches für einander zu setzen, und wenn jemand für 2 Mark, die er zu zahlen hat, 20 Mark setzen will, so wird man ihm die Berechtigung wol meistens nicht absprechen. 2) Ergänzt man die verschwiegene Bedingung, dass nämlich das Ergebniss, sei es Grösse oder Gleichung, bei der Substitution bestehen bleibt, so ist der Begriff der Gleichheit vorausgesetzt, und auf Umwege nur derselbe Begriff dadurch bestimmt. 3) Auch alsdann ist der Satz eine falsche Umkehrung eines richtigen Satzes: Gleiches kann man für einander setzen, das Ergebniss bleibt bestehen; aber bekanntlich ist dies auch oft bei Substitution von Ungleichem der Fall, z. B. in algebraischen Identitäten. Also nur der ursprüngliche Satz, nicht seine Umkehrung war hier auszusprechen; dieser sagt ebensowenig, was gleich heisst, aber dafür, wozu die Erkenntniss der Gleichheit nützlich ist, und damit wird das Wesen des Begriffs deutlich. — Die Herleitung der Sätze der Arithmetik geschieht im Anfang an speciellen Zahlen; wie bekannt, tritt die Bündigkeit dabei, solange es sich um einfache Dinge handelt, mindestens ebensogut ins Bewusstsein. Weiterhin werden die Buchstaben zum Ausdruck und zur Deduction gebraucht. Die Operationen werden zuerst an positiven ganzen Zahlen gelehrt, dann werden Brüche und benannte Zahlen eingeführt, negative Grössen nur bei der Subtraction erwähnt, von da an von aller Betrachtung ausgeschlossen; selbst die zur Uebung gegebenen Gleichungen sind so gewählt, dass ihre Lösungen positiv ausfallen. Ausser den 4 Species sind noch behandelt die Proportionen nebst den darauf beruhenden bürgerlichen Rechnungsarten, die Potenzen, Wurzeln und das Wurzelausziehen, die einfachsten Bestimmungsgleichungen. Die Uebungsaufgaben sind sämtlich für militärische Zwecke eingerichtet. Der

2. Teil des Buches enthält die Elemente der Planimetrie vollständig (ohne Trigonometrie). Aus der Stereometrie sind die wichtigsten Körperformen nebst Inhaltsberechnung behandelt. Der Anhang betrifft die Landesvermessung mittelst Kette und Stäben. H.

Leitfaden der elementaren Mathematik von Adolf Sickenberger, Professor am k. Luitpoldsgymnasium in München. Erster Teil. Algebra. Zweiter Teil. Planimetrie. Dritter Teil. Stereometrie. — Trigonometrie. 75 + 88 + 76 S.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen von Adolf Sickenberger, Professor am k. Luitpoldsgymnasium in München. Vierte Auflage. 192 S.

München 1888. Theodor Ackermann.

Von letzterem Buche ist die erste und zweite Auflage besprochen im 228. und 247. litt. Berichte Seite 33 und 24. Die dritte war mit einer völligen Umarbeitung verbunden, der Lehrtext ist erheblich vereinfacht, der Uebungsstoff beträchtlich erweitert worden. Die 4. Auflage ist der dritten soviel als möglich gleich erhalten.

Das erstere Buch soll nicht zur Unterweisung dienen, sondern nach empfangenem Unterrichte das Erlernte in bester Ordnung vorführen. Zu diesem Zwecke ist die Darlegung so kurz gefasst als möglich. Sie spart also alle Erläuterung dessen, was bereits verstanden sein muss, und alle Ausführung, zu welcher die Fähigkeit vorausgesetzt werden kann, enthält dagegen vollständig alle Elemente des Lehrgangs, Definitionen, Sätze nebst Andeutung des Beweisverfahrens, Aufgaben nebst hinreichender Angabe des Weges der Lösung, sämtlich in höchst übersichtlicher Form. Die Aufstellungen sind derart, dass sie sich einem logisch correcten Unterrichte anschliessen können, mit Ausnahme einer Stelle in der Algebra nebst ihrer noch einmal auftretenden Consequenz, welche sich der Verbreitung von Irrtum schuldig macht. Zuerst ist es falsch (S. 12.), wenn man sagt, $\frac{a}{0}$ sei unendlich gross. Deutet jemand symbolisch

durch $\frac{a}{0}$ einen Bruch an, dessen Nenner stetig verschwindet, so setzt er die Infinitesimalrechnung als bekannt und geläufig voraus. In diesem Buche aber, wo weder vom Begriffe des Unendlichen noch von symbolischen Ausdrücken etwas vorkommt, ist das Aufgestellte geradezu Unsinn. Dieser Unsinn wird noch ärger auf S. 21, wo aus der Gleichung $0x = a$ der Verfasser schliesst $x = \infty$. Offenbar ist die Gleichung gleichbedeutend mit $0 = a$, sagt also über x nichts

aus. Weiterhin wird richtig bemerkt, $0x = 0$ sei eine analytische Gleichung; aber $0x = a \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ ist auch eine solche, nur ist sie falsch. Die Algebra (d. i. Buchstabenrechnung) teilt sich zuerst in die 4 Species (erste und zweite Rechenstufe) und die Potenzenrechnung (dritte). Die erstere Abteilung umfasst auch die linearen Gleichungen und die Proportionen, die letztere die quadratischen Gleichungen, die Logarithmen, die Reihen und die Combinatorik. Bei den Logarithmen hätte die Formel nicht fehlen dürfen: $\log x$ (für Grundzahl a) = $\frac{\log x}{\log a}$ (für beliebige Grundzahl). Denn nur durch diese wird es verständlich, warum das brigg'sche System für jede Grundzahl ausreicht, was im Buche gar nicht erklärt ist und doch ein wesentliches Element der Lehre bildet. Im 2. Teil, Geometrie, wird nach einander behandelt: der Winkel, das Dreieck, das Vier- und Vieleck, der Kreis, Flächeninhalt, Proportionalität und Aehnlichkeit, Kreismessung — im dritten: offene Gebilde (Lage der Ebenen und Geraden im Raume), geschlossene Gebilde (Körper), Trigonometrie (ebene und sphärische). H.

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik. Bearbeitet von Prof. Dr. H. Suhle, Direktor des Herzogl. Friedrichs-Realgymnasiums zu Dessau. Erstes Heft. Zweites Heft. Zweite Auflage. Cöthen 1888. Paul Schettler. 100 + 147 S.

Das erste Heft erstreckt sich auf die 4 Species, an welche sich die Lehre von den Gleichungen 1. Grades und von den Proportionen anschliesst. Der zweite der 3 Anhänge behandelt, mit Ueberschreitung dieser Grenzen, die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Dieses Heft ist in 1. Auflage bereits im 244. litterarischen Berichte, S. 44 besprochen. In 2. Auflage ist auf das Bemerkte keine Rücksicht genommen, und obgleich der Verfasser im Vorwort auf 2 empfangene Recensionen, insbesondere auf eine darin enthaltene Missbilligung, die wir sowenig wie er als gerechtfertigt anerkennen, antwortet, doch der oben citirte Bericht ganz verschwiegen, der darin gerügte elementare Schnitzer unverändert beibehalten worden. Eine einfache Hinweisung hat also nicht genügt, es muss noch einmal und schärfer gesagt werden. Jeder denkende Anfänger weiss, dass der Ausdruck $a + b$ nicht 2 Zahlen, a und b , sondern nur eine Zahl bezeichnet. 3 Stellen im Buche entsprechen entschieden der falschen Auffassung, alle übrigen lassen beide Auffassungen zu. 1) Auf Seite 4 steht: „Zusatz. Die Addition ungleichnamiger Zahlenausdrücke kann nur ausgeführt werden, indem man

dieselben durch das Additionszeichen verbindet“. Die Ausführung einer Rechnung kann offenbar nur die Form, nicht Sinn und Wert eines Ausdrucks ändern. Hiernach würde also $a + b$ nichts anderes als a und b , wie es vor der Ausführung vorlag, bedeuten. Es musste heissen: „— kann nicht ausgeführt werden“ — sofern die Grösse $a + b$ nicht anders ausgedrückt werden kann. 2) In grösserm Umfange spricht sich schon auf Seite 1 der Mangel an klarer Auffassung aus in dem Satze: „Aus gegebenen Zahlen neue Zahlen finden, welche zu den gegebenen in bestimmt vorgeschriebener Beziehung stehen, heisst Rechnen.“ Der Rechner findet nie eine neue Zahl, sondern eine Zahl ist ihm explicite oder implicite gegeben, immer aber voraus bestimmt, ehe seine Tätigkeit beginnt; an dieser Zahl darf er nichts ändern als die Ausdrucksform. Man gehe alle Fälle der Anwendung des Wortes Rechnen durch, nie wird die damit bezeichnete Tätigkeit in Bildung neuer Zahlen, also in Wertveränderung von Zahlen bestehen, vielmehr ist letztere stets ein willkürlicher durch äussere Umstände auferlegter Act, welcher dem Rechnen vorhergeht. Addire $25a$ zu $14a$ oder in mathematischen Zeichen $14a + 25a$, sagt der Lehrer oder das Aufgabenbuch; letzteres nennt man den Ansatz der Aufgabe, die Ausübung des Rechnens besteht allein darin, die willkürlich gegebene Zahl $14a + 25a$ ohne Wertänderung in der beabsichtigten Form $39a$ darzustellen. In der Rechenschule, wo die dekadische Form stets die beabsichtigte ist, können jene falschen Begriffe nicht wol aufkommen; in der Algebra hingegen, wo die Definitionen der „Rechnungsoperationen“ dem Missverständniss nicht wehren können, sofern es sich darin um Forderung und Ausführung gar nicht handelt, ist es wesentlich im Bewusstsein zu erhalten, dass alles Rechnen ein zu einem Ziele führendes Transformiren ist und mit dem Willküracte der Bildung neuer Zahlen nicht verwechselt werden darf. 3) Auf Seite 2 steht — „Wenn das Resultat einer Rechnung (eine Summe, Differenz u. s. w.) selbst wieder als Zahl gelten soll etc.“ — Hiernach soll $a + b$ nur dann als eine Zahl gelten, wenn es in Klammern geschlossen ist. Auch die unrichtige Formel $\frac{a}{0} = \infty$ ist in der neuen Auflage beibehalten. Was zur Erklärung vorausgeht, ist zum Verständniss nicht hiureichend und würde, wenn man es vervollständigte, doch die falsche Formel nicht richtig machen. Wann und mit welchem Rechte man für die Variable ihren Grenzwert, für die Unendlichkleine die Null setzen kann, ist gar nicht erörtert, in dem hier vorliegenden Unstetigkeitspunkte ist es bekanntlich nicht gestattet.

Das 2. Heft behandelt zuerst die dritte Rechenstufe (Potenzen, Wurzeln, Logarithmen). Hieran schliessen sich dann die Gleichungen

2. Grades und Exponentialgleichungen, die Progressionen, die Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung, der binomische Lehrsatz, die Kettenbrüche, die unbestimmten Gleichungen. Gegen eine Definition der Potenz, welche als zweite der ersten, auf ganze positive Exponenten beschränkten, detaillirten Erklärung beigelegt wird, ist von anderer Seite Einwand erhoben; der Verfasser erklärt, ohne den Einwand zu nennen und zu widerlegen, auf die angefochtene Definition nicht verzichten zu wollen. Schon im 1. Hefte war der Erklärung des Products als zweite die folgende beigegeben: „Das Product ab entsteht aus dem Multiplicandus a ebenso, wie der Multiplikator b durch Addition aus der Einheit“. Dies ist ein Hinweis auf eine Analogie, den der Verfasser nur nicht hätte Erklärung nennen sollen, der aber mit Hilfe der vorausgehenden detaillirten Erklärung verstanden werden konnte. In der Potenzlehre kehrt dasselbe Verfahren wieder, aber mit weitgehenden unbegründeten Ansprüchen. Erklärung wird hier folgender Satz genannt: „Die Potenz a^n entsteht aus der Grundzahl a durch Multiplication ebenso wie der Exponent n durch Addition aus der Einheit“. Ob der Sinn dieses Satzes aus der vorausgehenden detaillirten Erklärung für ganze positive n deutlich wird, soll uns nicht beschäftigen. Allein eine Anmerkung dazu behauptet sogar, nach dieser Definition ergebe sich die Entstehung der Potenz auch für negative und gebrochene Exponenten. Also $a^{\frac{1}{2}}$ entsteht durch Multiplication aus a , wie $\frac{1}{2}$ durch Addition aus 1. Und wie entsteht dann $\frac{1}{2}$ durch Addition aus 1? Das ist eine Verweisung auf etwas, was nicht existirt. Stelle dich auf den Nordpol und schaue nach Osten, dann wirst du's sehen! Die Anmerkung ist aber keine beiläufige, sondern der Satz wird bei der Rechnung mit Potenzen mit gebrochenen Exponenten wirklich als Beweisglied gebraucht, also ein Beweis auf recht grobe Art erschlichen. Das ist es, worauf der Verfasser erklärtermassen nicht verzichten will.

Hoppe.

Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe dargelegt von Dr. Otto Reichel, Professor am Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, Dozent an der Kgl. landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin, Mitglied der Prüfungskommission für Landmesser daselbst. Hilfsbuch für den Unterricht. Teil I. Natürliche, algebraische, gebrochene Zahlen. Berlin 1886. Haude u. Spener. 33 S.

Dies Buch ist bereits im 18. litt. Bericht, S. 13 besprochen worden. Inzwischen ist es mit einer Abänderung auf S. 29. wieder erschienen, wo 2 Sätze nachträglich eingeschaltet, die folgenden bis

Ende §. 25. durch andre ersetzt sind. In der citirten Besprechung ist die Angabe zu berichtigen (S. 16. Z. 6.), dass die Buchstaben durchweg natürliche Zahlen bedeuteten. Vielmehr sind zum Ausdruck natürlicher, algebraischer und gebrochener Zahlen bzhw. das deutsche, lateinische und griechische Alphabet verwandt. Die vorausgehende Aussage indes, dass den Erweiterungen des Zahlbegriffs der Schlussstein fehle, bleibt dabei in Geltung. Denn wenn bis zu Ende 3 Zahlensysteme in der Lehre figuriren, so kann der Schüler nicht leicht inne werden, dass die Algebra eine einzige ungetheilte Theorie ist, vielmehr scheint die Erweiterung statt der erwarteten Vereinfachung nur immer neue Verwickelung herbeizuführen.

H.

Regeln und Erläuterungen zum Rechnen nebst einer Skizze eines Lehrganges und Masstafel. Zum Gebrauche an Gymnasien und andern Mittelschulen. Von A. Moroff, k. Studienlehrer zu Landsbut. Bamberg 1888. Buchver. 42 S.

Das Buch besteht aus 3 Theilen. Der erste enthält die Erklärungen und Hauptsätze über die 4 Species und Proportionen mit positiven unbenannten ganzen Zahlen, gemeinen und Decimalbrüchen. Jeder Satz ist allgemein in Worten ausgesprochen, bisweilen ein Beispiel beigefügt. Der 2. Teil entwickelt eingehend den Lehrgang, welcher auf 4 Classen verteilt ist. Der 3. Teil gibt Uebungsbeispiele in numerischen Ansatz.

H.

Leitfaden der Elementar-Mathematik. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin, und F. von Lümann, Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Erster Teil: Planimetrie. Mit 6 Figurentafeln. Fünfte Auflage. Berlin 1887. Leonhard Simion. 99 S.

Das Buch zeichnet sich zuerst durch Reichhaltigkeit aus: es gibt nicht allein das Notwendige, sondern auch das Interessante. In extensiver Hinsicht erstreckt sich der Inhalt über die gewöhnlichen Grenzen hinaus auf harmonische Teilung, Potentialität und Construction algebraischer Ausdrücke. Aber auch in den grundlegenden Abschnitten stehen viele wissenswerte Sätze, einige in voller Ausführung unter den notwendigen Sätzen, die übrigen als Uebungssätze verzeichnet. So finden sich auch die in jedem Abschnitte sich darbietenden geometrischen Oerter zusammengestellt. Ausserdem ist die concinne, einfache Darstellungs- und Entwicklungsweise hervorzuheben. Die Fassung ist fast durchgehends exact und geht in

dieser Beziehung in manchen Punkten mit gutem Beispiele voran. Dennoch ist der Parallelensatz mit einem Beweise aufgestellt, der sich auf einen ganz gemeinen Trugschluss stützt. Der Fall ist nur insofern nicht der gewöhnliche, als der Betrug nicht durch incorrecte Fassung der Winkel-Theorie vorbereitet ist. Ganz sachgemäss wird hier vielmehr erst der Winkel, und zwar durch die Winkelfigur erklärt, dann der Richtungsunterschied zweier Geraden durch den Winkel zwischen ihnen bestimmt. Hiermit ist es ausgesprochen, dass das Wort Unterschied nicht das Resultat einer Subtraction bedeutet, sowenig als der Unterschied zwischen Vogel und Fisch, sondern erst durch den Winkel gemessen zur Grösse wird. Die Behandlung des Parallelensatzes aber löscht das angezündete Licht wieder aus, kehrt das Sachverhältniss um und schliesst von der Gleichheit der Richtungen auf die Gleichheit der Winkel. Obgleich indes jene principiellen Sätze von den Winkeln tadellos aufgestellt sind, so sind sie doch noch unvollständig; denn der Winkel ist nicht als Grösse definiert: es fehlt die Bedingung der Gleichheit und Ungleichheit, welche die Messung eines Winkels durch einen andern ermöglicht. Dieser Mangel steht in naher Beziehung zu der Unklarheit, welche der erste Satz des Buches einführt mit den Worten: „Die Geometrie hat die Betrachtung der Raumgrössen zum Gegenstande.“ Sind Punkt, Lage, Richtung, Stellung, Grössen? oder kein Gegenstand der Geometrie? oder endlich, fängt die eigentliche Geometrie erst da an, wo jene qualitativen Elemente auf Grössen zurückgeführt sind? Im letzten Falle würde die ganze elementare Geometrie blosser Vorbereitung zur analytischen sein. Der gerügte Trugschluss zeigt, dass es nicht überflüssig ist das Unterscheidende der Grösse zum Bewusstsein zu bringen. Hoppe.

Vorschule der Geometrie. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Fünfte und sechste, verbesserte Auflage. Mit 47 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle a. S. 1887. Louis Nebert. 21 S.

Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 2. Heft. Lehre vom Flächeninhalt. Konstruktionslehre. Zweite, teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1888. Louis Nebert. 42 S.

Die Vorschule ist in 3. und 4. Auflage im 8. litt. Bericht S. 41, das 1. Heft des Leitfadens im 2. litt. Bericht S. 14, das 3. Heft im 241. litt. Bericht S. 29 besprochen. Das vorliegende 2. Heft besteht aus 3 Theilen, welche nach einander behandeln die Flächengleichheit,

Flächenmessung und Constructionslehre. Auf die Sätze folgt eine Reihe von Zu- und Uebungssätzen, dann von Aufgaben, und zwar erst in unmittelbar geometrischer Gestalt, dann Beispiele aus der Praxis. Die Aufgaben, namentlich im 3. Teile sind vermöge des kurzen Ausdrucks und der Systematik auf kleinem Raume reichhaltig und vielseitig. Auf Seite 28 sind aus Versehen die Wörter „überbestimmt“ und „unbestimmt“ mit einander verwechselt. Ferner ist doch gemäss auf Seite 20 der Ausdruck nicht sachgemäss: „Das Messen der Flächen durch das umständliche Abtragen des Flächenmasses“ (Einheit in Quadratform) „ist nicht nötig —“. Da es nur in besondern Fällen möglich ist, so kann von umständlich nicht die Rede sein. Offenbar kann der Begriff von Flächenmessung nicht der analoge von Streckenmessung sein. Wir verstehen unter Flächenmessung stets Flächenberechnung auf Grund der Linearmessung, das durfte bei der Erklärung nicht verschwiegen werden. Allerdings gibt es auch einen rein geometrischen Weg zur Ermittlung des Inhalts: man kann das Quadrat in solche Teile zerlegen, dass sie sich auf das gegebene Flächenstück auftragen lassen. Diese Aufgabe ist wieder als specielle in der allgemeinen enthalten: 2 gegebene gleiche Vielecke in congruente Stücke zu zerlegen. Letztere Aufgabe lässt sich mittelst der vorausgehenden elementaren Theorie lösen, sie ist instructiv und ihre Lösbarkeit jedenfalls wissenswert. Anlass ist also da, sie in den Cursus aufzunehmen, wiewol es sich empfiehlt, sie dem Studium vorzubehalten. Für die Definition von Flächenmessung aber kann die constructive Darstellung schon darum nicht in Betracht kommen, weil sie bei krummer Begrenzung versagt.

H.

Constructive Geometrie der Kegelschnitte auf Grund der Focaleigenschaften. Einheitlich entwickelt von Adalbert Breuer, k. k. Reallehrer in Trautenau, Böhmen. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Mit 80 in den Text gedruckten Original-Figuren. Eisenach 1888. J. Bacmeister. 110 S.

Die Kegelschnitte werden durch eine Focaleigenschaft als Orte von Punkten definiert, dann die übrigen Focal- und andern Eigenschaften, die Beziehungen der damit verbundenen und sie charakterisirenden Gebilde und die Lösungen der wichtigsten Aufgaben daraus constructiv hergeleitet. Die Behandlung ist zuerst eine gemeinsame für die 3 Curvenformen, weiterhin werden Ellipse, Parabel, Hyperbel einzeln betrachtet. Warum ist aber, da doch die Einheitlichkeit der Methode betont ward, der Krümmungskreis der Ellipse nur in den Scheiteln, der von Parabel und Hyperbel allge-

mein untersucht? Der Vortrag ist so einfach und leichtfasslich, als er nur sein kann; auch das trägt zur leichten Auffassung bei, dass von gewöhnlichen und nahe liegenden Kürzungen nirgends Gebrauch gemacht wird. Die Anwendungen vom Uebergang zur Grenze werden dem Anfänger keine Schwierigkeit verursachen. Das Buch ist denjenigen, welche ohne Mühe mit den Elementen der Kegelschnittslehre bekannt werden wollen, sehr zu empfehlen. H.

Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Von Professor Dr. F. W. Fischer, Oberlehrer am Gymnasium zu Kempen. Drei Teile in einem Band: Planimetrie. — Stereometrie. — Ebene und sphärische Trigonometrie. Zweite Ausgabe. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Freiburg i. Br. 1887. Herder. 203 + 105 + 172 S.

Das Lehrbuch charakterisirt sich durch Ausführlichkeit und Reichhaltigkeit. Ueber die Grenzen des für die Theorie notwendigen Inhalts gehen die hinzugefügten Abschnitte über Transversalen, Maxima und Minima, harmonische Teilung, Pol und Polare, Potenz und Potenzlinie und ein Anhang zur Goniometrie über einige analytische Themata hinaus. Ausserdem ist das Buch reich an Aufgaben. Die Abfassung ist grossenteils correct, die logischen Erfordernisse mit Umsicht berücksichtigend. Als Ausnahme ist zu nennen die Behandlung des Parallelsatzes und des Winkel-Begriffs. Ersterem ist ein angeblicher Beweis hinzugefügt, der nichts ist als Wiederholung der Behauptung mit andern Worten. Der Winkel soll die Grösse der Drehung sein; wodurch aber die Drehung zu einer messbaren Grösse wird, ist nicht gesagt, und lässt sich doch so leicht sagen. H.

Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Komerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert von Dr. Guido Hauck, Geh. Regierungsrat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Sechste Auflage. (Fünfte der Neubearbeitung.) Mit 67 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Tübingen 1888. H. Laupp. 226 S.

Die 4. Auflage ist im 251. litt. Bericht, S. 31 besprochen. In dieser war bereits die Neubearbeitung vollzogen. In der gegenwärtigen sind noch viele Aenderungen im einzelnen hinzugekommen: einige Bezeichnungen, veränderte Fassung von Lehrsätzen, Vermehrung von Anhängen und Aufgaben u. a. m. H.

Leitfaden der Experimental-Physik für Gymnasien. Mit einem Anhang: Mathematische Geographie und Grundlehren der Chemie. Von Prof. Dr. Georg Krebs, Oberlehrer an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 412 Figuren, 2 lithogr. Tafeln, 1 Farbentafel und Logarithmentafel. Wiesbaden 1887. J. F. Bergmann. 476 S.

Die Bezeichnung der Physik als experimentale auf dem Titel lässt sich nicht als unterscheidend verstehen. Der Vortrag besteht zum grössten Teil aus Beschreibung und elementar theoretischer Erklärung der Naturerscheinungen ergänzt durch Experimente, wo sie erforderlich sind. Die Erklärungen, sofern sie die physikalischen Begriffe zu entwickeln haben, auf die daher das grösste Gewicht zu legen ist, sind mit Fleiss und Umsicht bearbeitet. Was ihnen an Exactheit fehlt, beruht zum Teil auf dem approximativen Fortschritt aller inductiven Wissenschaften, welcher von geringern Einflüssen anfänglich absehen muss, aber auch zum andern Teil auf Connivenz gegen die populäre Anschauung. Die Schwere der Anziehung geradezu gleichzusetzen ist ein Absehen von einer kleinen Differenz; dagegen Ruhe und Bewegung direct als absolute zu betrachten, wie es hier geschieht, dient nur der vulgären Unklarheit. Die Hauptabschnitte des Buches sind: Eigenschaften der Körper, Mechanik, Wellenlehre und Akustik, Licht, Magnetismus, Elektrizität, Wärme, mathematische Geographie und Astronomie, Grundlehren der Chemie.

H.

Leitfaden für den wissenschaftlichen Unterricht in der Chemie. Für Realgymnasien, Gymnasien, Realschulen und zum Selbstunterrichte. Von Dr. W. Casselmann, weil. Professor und Lehrer der Chemie und Technologie am Realgymnasium zu Wiesbaden. Erster Kursus. Zweiter Kursus. Fünfte, umgearbeitete Auflage, bearbeitet von Prof. Dr. Georg Krebs, Oberlehrer an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wiesbaden 1887. J. F. Bergmann. 139 + 137 S.

Der Lehrgegenstand ist die anorganische Chemie. Der erste Cursus ist für Secunda, der zweite für Prima bestimmt. In beiden folgt der Lehrgang der Reihe der Grundstoffe, Metalloide in 5 Gruppen, Metalle in 5 Gruppen, und knüpft an experimentelle Untersuchung von Natur- oder Kunstproducten an. Die Versuche im 2. Cursus sind jedoch andere und unterscheiden sich dadurch von denen im 1. Cursus, dass sie auf Entwicklung der Theorie ausgehen. Veränderungen in der theoretischen Auffassung haben die Umarbeitung mancher Teile in der gegenwärtigen Auflage notwendig gemacht.

H.

Leitfaden der Physik. Von Dr. W. von Beetz, weil. ordentl. Professor der Physik an der technischen Hochschule zu München, ord. Mitglied der k. b. Akademie der Wissenschaften. Mit 339 in den Text gedruckten Holzschnitten. Neunte Auflage. Nach dem Tode des Verfassers bearbeitet und herausgegeben von J. Henrici, Professor am Gymnasium in Heidelberg. Leipzig 1888. Th. Grieben (Fernau). 354 S.

Die 6. Auflage ist im 260. litt. Bericht S. 40 besprochen. Das Buch hat in den successiven Auflagen sehr an Umfang zugenommen. Die 8. Auflage erhielt entsprechend der Einführung absoluter elektrischer Masse und der Anwendung des Potentials zur Erklärung elektrischer Erscheinungen eine Reihe von Zusätzen, welche in der gegenwärtigen mit dem Ganzen enger verknüpft worden sind.

II.

Vermischte Schriften.

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2^a. Vol. I. (Anno XXVI). Napoli 1887.

Die Zeitschrift erscheint in monatlichen Heften. Jedes Heft gibt zuerst die Verhandlungen, dann einzelne Arbeiten, denen meistens ein Bericht von Seiten eines Mitgliedes der Akademie unmittelbar vorausgeht. Der 1. Band enthält folgende mathematische Arbeiten.

E. Pascal: Ueber die Construction des regelmässigen 257 ecks. — Ueber ein neues Symbol in der Theorie der binären Formen zu 2 Reihen von Variablen. — Ueber eine Methode, eine beliebige invariante Form einer binären kubischen Function mittelst der des vollständigen Systems auszudrücken.

P. del Pezzo: Ueber eine fundamentale Eigenschaft der Flächen und der in einem Raume von mehr Dimensionen enthaltenen Mannichfaltigkeiten.

G. Emery: Ueber die Lage der Centralaxe der Momente der Bewegungsgrößen in einem in sphärischer Bewegung begriffenen starren materiellen Systeme.

A. Capelli: Beobachtungen über die Relationen, welche zwischen den invarianten Operationen identisch stattfinden können. — Be-

stimmung der invariantiven Operationen zwischen 2 Reihen von Variabeln, welche sich mit jeder andern Operation derselben Art vertauschen lassen.

M. Pannelli: Ueber die involutorischen vielfachen Transformationen zweier Räume.

A. del Re: Correlationen, welche die doppelt gekrümmte Curve 4. Grades in die Abwickelbare ihrer doppelt berührenden Ebenen verwandelt.

F. Amodeo: Ueber einen speciellen Connex (2, 2).

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Encke, J. F., gesammelte mathematische u. astronomische Abhandlungen. 2. Bd. Methode der kleinsten Quadrate. Fehlertheoretische Untersuchungen. Berlin, Dümmler's Verl. 8 Mk.

Fortschritte, die, der Astronomie. Nr. 13. 1887. Leipzig, E. H. Mayer. 2 Mk.

Fortschritte der Elektrotechnik. Vierteljährliche Berichte. Hrsg. v. K. Strecker. 1. Jahrg. 1887. 4. Hft. Berlin, Springer. 6 Mk. 20 Pf.; kplt. 20 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1882. Dargestellt v. d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 38. Jahrg. 2. u. 3. Abth. Berlin, G. Reimer. 31 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17. Bd. Jahrg. 1885. 3. Hft. Ebd. 10 Mk.

Unger, F., die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Anfange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Wahle, R., üb. die geometrische Methode d. Spinoza. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Methode und Principien.

Lindemann, F., über Molekularphysik. Versuch e. einheitl. dynam. Behandlg. der physikal. u. chem. Kräfte. Königsberg, Koch. 1 Mk. 60 Pf.

Schellwien, R., optische Häresien, erste Folge, u. das Gesetz der Polarität. Halle, Pfeffer. 2 Mk. 50 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Aufl. 16.—18. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

Lehrbücher.

- Sickenberger, A., Leitfaden d. elementaren Mathematik. 1—3. München, Th. Ackermann. à 1 Mk. 20 Pf.
— vierstellige logarithmisch-trigonometr. Tafeln. Ebd. 40 Pf.

Sammlungen.

Geerling's Rechenbuch. Hand- u. Hilfsbuch f. höh. Subalternbeamte, Militäranwärter u. Praktikanten, welche zum Zwecke ihrer Anstellung od. Beförderung in höh. Amtsstellgn. e. Rechenexamen abzulegen haben. 4. Afl. Frankfurt a/M., Gestewitz. Geb. 2 Mk.

Genau, A., Rechenbuch f. Lehrerseminare. 2. Afl. v. A. Genau u. P. A. Tüffers. 2. Bd. Für die Mittel- u. Oberstufen d. Seminare. Gotha, Thienemann. 1 Mk. 80 Pf.; Antwortenheft. 2. Afl. 60 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 422.—443. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Lichtblau, W., u. B. Wiese, Sammlung geometrischer Rechenaufgaben zum Gebrauch an Seminarien sowie zum Selbstunterricht. Breslau, Hirt, Verl. 1 Mk. 25 Pf.

Martus, H. C. E., mathematische Aufgaben zum Gebrauche an den obersten Klassen höh. Lehranstalten. 1. Tl. Aufgaben. 7. Afl. Leipzig, Koch's Verl. 3 Mk. 60 Pf.

Servus, H., Sammlung v. Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra f. Gymnasien, Realgymnasien u. höhere Bürgerschulen. 1. u. 2. Hft. Leipzig, Teubner. Kart. à 60 Pf.

Zähringer, H., methodisch geordnete Aufgaben üb. die Elemente der Buchstabenrechnung u. Gleichungslehre. 1. Hft. 5. Afl. Von C. Enholtz. Zürich, Meyer & Z. 60 Pf.; Antworten dazu. 1 Mk. 80 Pf.

Tabellen.

Gezeiten-Tafeln f. d. Jahr 1889. Hydrographisches Amt der Admiralität. Berlin, Mittler & S. 1 M. 50 Pf.

Markoff, A., Tables de valeur de l'intégrale $\int x^e - t^2 dt$. Leipzig, Voss' Sort. 2 Mk.

Schrön, L., siebenstellige gemeine Logarithmen d. Zahlen von 1—108000 u. d. Sinus, Cosinus, Tangenten u. Cotangenten aller Winkel d. Quadranten von 10 zu 100 Secunden. (Ungarisch.) Hrsg. v. J. Sztoczek. Taf. 1 u. 2. Neue Asg. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 80 Pf.

— dasselbe. Taf. 3. Neue Asg. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Blaschke, E., üb. die Ausgleichung v. Wahrscheinlichkeiten, welche Functionen e. unabhängig Variabelen sind. Leipzig, Freytag. 90 Pf.

Lembcke, K., allgemeine Arithmetik u. Algebra in ihrer Beziehg. zu einander u. zu den höheren bürgerl. Rechnungsarten, etc. Wismar, Hinstorff. 3 Mk.

Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. I. Abschnitt. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Lurtz, F. E., Rechenschule. 1. Tl. 7. Afl. Kronstadt, Zeidner. Geb. 1 Mk.

Mertens, F., invariante Gebilde v. Nullsystemen. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Pitra, K., das Rechnen m. gemeinen Brüchen. Leipzig, Fock. 60 Pf.

Rotter, L., das Rechnen m. ganzen Zahlen u. m. Dezimalzahlen, einheitlich behandelt. Ebd. 60 Pf.

Schwarz, H. C., e. Beitrag zur Theorie d. Ordnungstypen. Halle, Schmidt. 1 Mk. 60 Pf.

Schwarze's, B., Unterrichtsbriefe d. gesamten Rechnens. 2. Afl. Neu bearb. v. Th. Kolbe. Berlin, Liebel. In Carton. 4 Mk.

Sickenberger, A., Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. 4. Afl. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra m. Uebungsaufgaben f. höhere Lehranstalten. 3. Afl. Potsdam, Stein. 3 Mk.

Stadthagen, H., üb. die Genauigkeit logarithmischer Berechnungen. Berlin, Dümmler's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Wolff, H., Sätze u. Regeln der Arithmetik u. Algebra nebst Beispielen u. gelösten Aufgaben. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Geometrie.

Féaux, B., Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 7. Afl., besorgt v. A. Balkenhol. Paderborn, Schöningh. 2 Mk. 50 Pf.

Genau, A., Leitfaden der elementaren Geometrie f. Lehrerseminare. 5. Afl. Büren, Hagen. 2 Mk. 10 Pf.

Klimpert, R., Lehrbuch der Geometrie. Stuttgart, J. Maier. 3 Mk.

Knoblauch, J., Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Költzsch, A., Grundzüge d. Raumlehre. 1. Hft. Leipzig, Merseburger. 60 Pf.

Reeb, W., methodischer Leitfaden f. den Unterricht in der ebenen Geometrie. Nach konstruktiven u. heurist. Lehrverfahren f.

Oppolzer, Th., Ritter v., zum Entwurf e. Mondtheorie gehörende Entwicklung der Differentialquotienten. Nach dessen Tode vollendet unter Leitg. v. R. Schram. Leipzig, Freytag. 10 Mk.

Schwahn, P., üb. Aendergn. d. Lage d. Figur- u. d. Rotationsaxe d. Erde sowie üb. einige m. d. Rotationsproblem in Beziehg. steh. geophysische Probleme. Berlin, Mayer & M. 2 Mk. 50 Pf.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. General-Register. (Neue Folge.) I—XV. Bd. (1873—1887. Jahrg.) Leipzig, Scholtze. 2 Mk.

Zenker, W., die Vertheilung der Wärme auf der Erdoberfläche. Berlin, Springer. 3 Mk.

Nautik.

Jahrbuch, kleines nautisches, f. 1889. 28. Jhg. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. Jahr 1891 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtungen. Hrsg. vom Reichsamt des Innern unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde. 17. Jahrg. 5. Afl. Bremerhaven, v. Vangerow. Geb. 6 Mk.

Physik.

Fricke, A., Leitfaden f. d. Unterricht in der Physik. 2. Kurs. 2. Afl. Braunschweig, Bruhn's Verl. 1 Mk. 40 Pf.; geb. 1 Mk. 75 Pf.

Fröhlich, J., allgem. Theorie d. Elektrodynameter. Ein Beitrag z. Anwendg. u. zur Integration der Differentialgleichgn. d. electro-dynam. Induction. Berlin, Friedländer & S. Kart. 10 Mk.

Jahn, H., Experimentaluntersuchungen üb. die an der Grenzfläche heterogener Leiter auftretenden localen Wärmeerscheinungen. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 81. u. 82. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Krieg, M., die Erzeugung u. Verteilung der Elektrizität in Central-Stationen. 2. Bd. Die Erzeugg. u. Verteilg. der Elektrizität durch Gleichstrom-Maschinen m. u. ohne Verbindg. v. Accumulatoren. Magdeburg, Faber. 6 Mk.

Meyer, G., üb. die thermische Veränderlichkeit d. Daniell'schen Elements u. d. Accumulators. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 20 Pf.

Obermayer, A. v., Versuche üb. die „Elmsfeuer“ genannte Entladungsform der Elektrizität. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

untere Klassen höherer Lehranstalten und höhere Mädchenschulen. Giessen, Roth. 1 Mk.

Salmon, G., analytische Geometrie der Kegelschnitte m. besond. Berücksicht. d. neueren Methoden. Frei bearb. v. W. Fiedler. 5. Aufl. 2. Th. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen Geometrie m. Uebungsaufgaben f. höhere Lehranstalten. 18. Aufl. Potsdam, Stein. 2 Mk. 50 Pf.

Vonderlinn, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bearb. nach System Kleyer. 1. Buch: das Projektionszeichnen. 1. u. 2. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Weyr, E., üb. Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins. 3. Mittheilg. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Mechanik.

Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Red. O. Schneider. 9. Jahrg. 1888. Nr. 13. Leipzig, Gressner & Schr. Viertelj. 2 Mk.

Technik.

Jahrbuch f. Elektrotechnik f. d. J. 1887. Hrsg. v. G. Krebs u. C. Grawinkel. 4. u. 5. Hft. Halle, Knapp. à 2 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Ambrohn, L., Beitrag zur Bestimmung der Refraktionskonstanten. Göttingen, Vandenhoeck & R. 2 Mk.

Drude, P., üb. die Gesetze der Reflexion u. Brechung d. Lichtes an der Grenze absorbirender Krystalle. Ebd. 1 Mk.

Klimpert, R., Lehrbuch der Elasticität u. Festigkeit. Stuttgart, J. Maier. 5 Mk. 50 Pf.

Stokes, G. G., das Licht. 12 Vorlesungen. Uebers. v. O. Dziobek. Leipzig, Barth. 5 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königr. Bayern. Hrsg. durch C. Lang u. F. Erk. 10. Jahrg. 1888. (4 Hfte.) 1. Hft. München, Th. Ackermann. prepl. 18 Mk.

Exner, F., weitere Beobachtungen über atmosphärische Electricität. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Jahrbuch d. meteorolog. Beobachtgn. der Wetterwarte d. Magdeburg. Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. Jahrg. V. 1886. Magdeburg, Faber. Kart. 6 Mk.

Pürthner, J. C., Methode u. Apparat zur Erzeugung gleichgerichteter Inductionsströme, sowie Anwendung derselben zur Widerstandsbestimmung der Elektrolyte. Ebd. 20 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., die Electricität d. Himmels u. d. Erde. 16.—20. (Schluss-) Lfg. Wien, Hartleben. à 60 Pf.

Weinstein, B., Handbuch der physikal. Maassbestimmungen. 2. Bd. Einheiten u. Dimensionen, Messgn. f. Längen, Massen, Volumina u. Dichtigkeiten. Berlin, Springer. 14 Mk.

Winkler, C., praktische Uebungen in der Maassanalyse. Freiberg, Engelhardt'sche B. 6 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus d. J. 1887. Berlin, G. Reimer. Hieraus einzeln: Mathematische Abhandlungen. 20 Mk. Physikalische Abhandlungen. 13 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 32. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, B. G. Teubner. prepl. 20 Mk.

Bibliotheca mathematica. Zeitschrift f. Geschichte d. Mathematik. Hrsg. v. G. Eueström. Jahrg. 1888. (4 Nrn.) Nr. 1. Berlin, Mayer & M. prepl. 4 Mk.

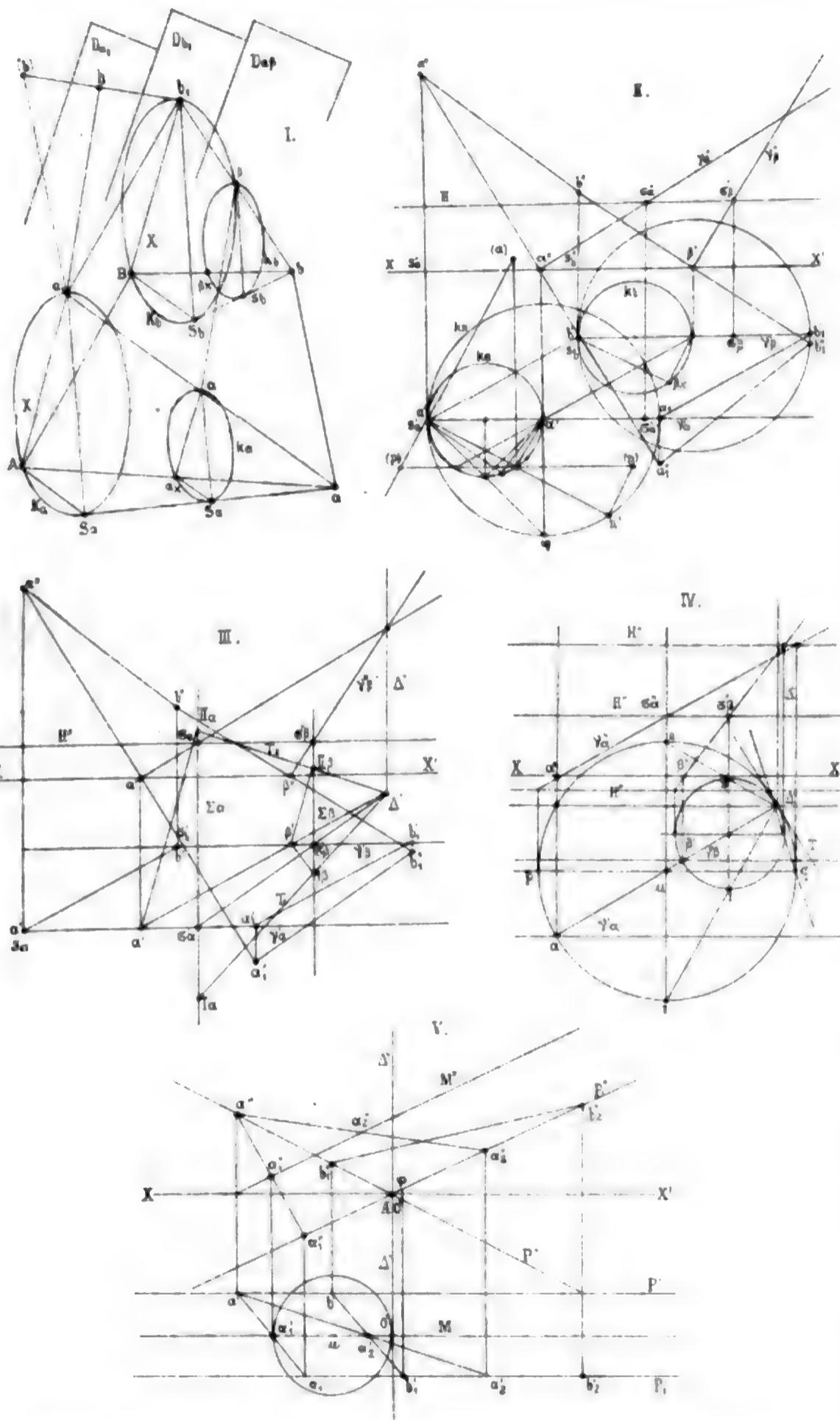
Decher, O., die Prismenröhrchen. 2. Aufl. München, Th. Ackermann. 2 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 54. Bd. Leipzig, Freytag. Kart. 36 Mk. 80 Pf.

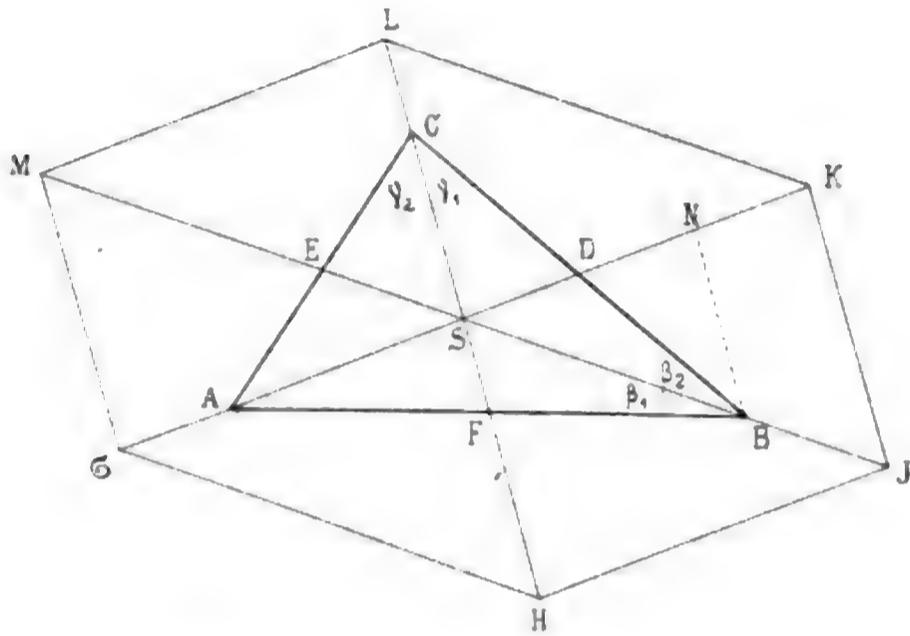
Kleyer's Encyclopädie der gesamten mathemat., techn. u. exacten Wissenschaften. 30.—33. Lfg. Stuttgart, J. Maier. à 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. II. a. Enth. die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 97. Bd. 1.—4 Hft. Leipzig, Freytag. 9 Mk. 40 Pf.

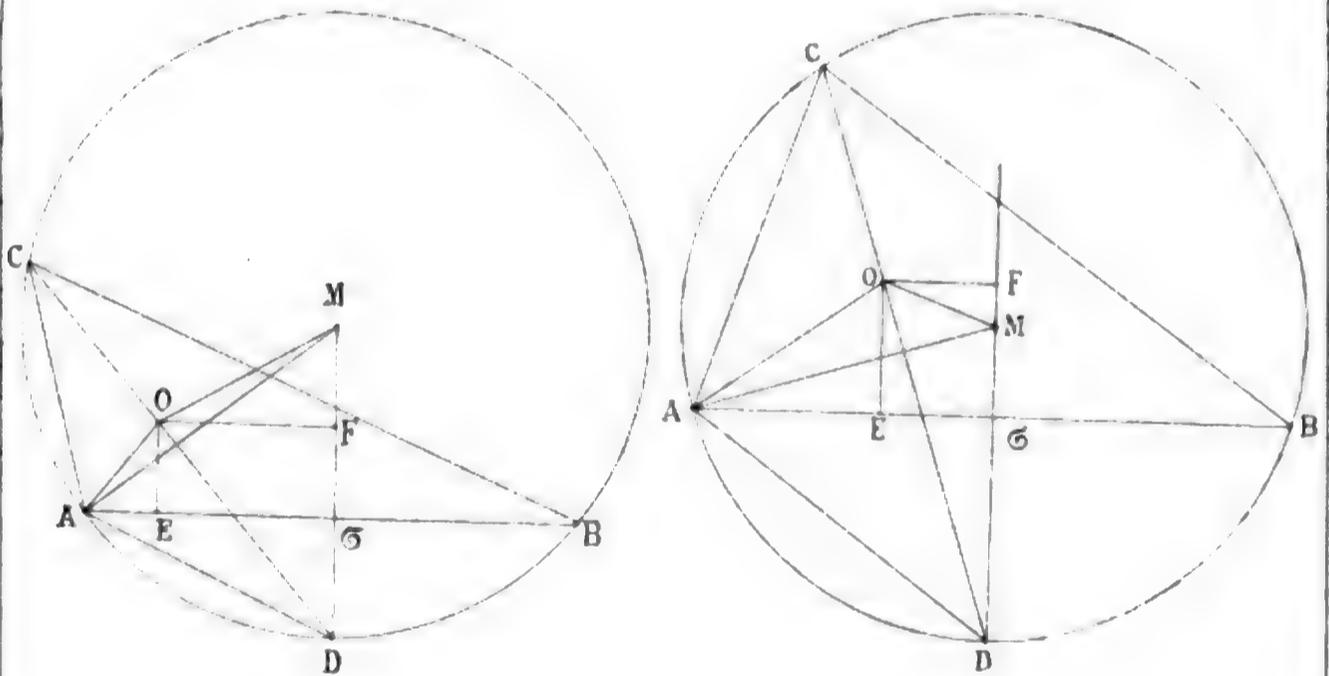
Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1888. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.



I. Pelisek: Ort der Axen von Schraubebewegungen.



II. Pabst: Beziehungen zwischen Höhen und Transversalen.



VIII. Caspar: Dreiecksatz.

Bei Aug. Stefn in *Potsdam* ist erschienen:

- Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten von **Dr. Th. Spieker**, Professor. 8. vermehrte Auflage. Preis 3 Mk.
- Lehrbuch der ebenen Geometrie** mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten von **Dr. Th. Spieker**. Mit vielen in den Text gedruckten Figuren. 18. verbesserte Auflage. Preis 2,50 Mk.
- Lehrbuch der ebenen Geometrie** mit Uebungsaufgaben von **Dr. Th. Spieker**. Aufgabe B. Für mittlere Klassen. geb. 1,80 Mk.
- Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie** mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten von **Dr. Th. Spieker**. geb. 1,60 Mk.
- Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben**, verbunden mit einem systematischem Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik für höhere Schulen von **Dr. H. Schubert**, Professor. Heft 1: 2. Auflage. geb. 2 Mk. Heft 2: geb. 2 Mk. — Ausgewählte Resultate zu beiden Heften. br. 80 Pf.
- System der Arithmetik und Algebra** als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen von **Dr. H. Schubert**. geb. 2 Mk.
- Die analytische und die projektivische Geometrie der Ebene**, die Kegelschnitte auch nach den Methoden der darstellenden und der elementarsynthetischen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht bearbeitet von **Dr. H. Funcke**, Oberlehrer. br. 1,40 Mk.
- Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene** mit den Resultaten für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht von **Dr. G. Janisch**, weil. Direktor. Herausgegeben von **Dr. H. Funcke**. br. 3 Mk.
- Geometrische Analysis und Synthesis**. Sammlung von 636 planimetrischen Konstruktionsaufgaben mit rein-geometrischer Lösung von **W. Adam**, Seminarlehrer. Mit 363 Figuren. geb. 4 Mk.
- Methodische Anleitung zum Unterricht im Rechnen** von **H. Claussen**. br. 3 Mk. Inhalt: I. Allgemeine Methodik. II. Spezielle Methodik.
- Naturgeschichte der drei Reiche** in Einzelbeschreibungen für die Mittelstufe mehrklassiger Volks- und Bürgerschulen, zugleich ein Lesebuch für die Jugend von **W. Wölkerling**, Lehrer. Mit Abbildungen. br. 1,50 Mk.
- Das Wichtigste aus der reinen und angewandten Chemie** in Einzeldarstellungen für die Oberstufe mehrklassiger Volks- und Bürgerschulen von **W. Wölkerling**. br. 60 Pf.
-

≡ Unter der Presse! ≡

Die **dritte** Auflage des

L e i t f a d e n
der ebenen Geometrie

für

höhere Lehranstalten

von Prof. **H. Küstler**.

1. Heft. (*Congruenz*).

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a./S.

Zur
Herstellung mathematischer etc. Werke,

auch mit **Figurentafeln**, halten wir den Herren Autoren und Verlegern unsere für mathematischen und Formelsatz speziell eingerichtete Offizin bestens empfohlen unter Zusicherung correcter, rascher und billiger Bedienung.

Greifswald.

F. W. Kunike,
Buch- und Steindruckerei.

I N H A L T.

	Seite.
I. Ueber den Ort der Axen derjenigen Schraubenbewegungen, durch welche eine Strecke in eine beliebige Lage im Raume gebracht werden kann. Von Polisek	1
II. Einige Beziehungen zwischen den drei Höhen und zwischen den drei seitenhalbirenden Ecktransversalen eines Dreiecks. Von Carl Pabst	10
III. Ueber trigonometrische Functionen von Winkelsummen und über Relationen zwischen Polygonwinkeln. Von Seipp . .	27
IV. Die elliptischen Integrale der Bewegung eines schweren Punktes in der verticalen Parabel. Von Emil Oekinghaus . . .	34
V. Die flache Kreisschraubenfläche. Von Franz Schiffner .	54
VI. Metrische Relationen am Sehnenviereck. Von Otto Zimmermann	64
VII. Miscellen.	
1. Zur Construction der Kegelschnittlinien. Von Karl Schober	99
2. Eine einfache Ableitung der Bedingungen, welche die Coefficienten einer Rotationsfläche zweiten Grades erfüllen müssen. Von Fritz Hofmann	101
3. Untersuchungen über die Fläche 3. Ordnung, welche von Kreisen erzeugt wird, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen. Von Fr. Schiffner . . .	104
4. Beweis eines Dreiecksatzes. Von R. Caspar . . .	109
5. Reduction einiger Integrale. Von W. Láska	110

Litterarischer Bericht

XXVI.

Sammlungen.

Stereometrische Aufgaben. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin. Berlin 1888. Leonhard Simion. 141 S.

Diese Aufgaben beziehen sich ausschliesslich auf Körperberechnung. Construction wird durch ihre Stellung nirgends gefordert. Gleichwol wird durch ihre Bearbeitung die stereometrische Anschauung gründlich geübt, indem zu ihrer Lösung eine Vorstellung der Körper, sei sie nun frei oder unterstützt durch Skizze, notwendig ist. Zu präzisen Constructionen würde die Kenntniss der beschreibenden Geometrie erfordert werden, welche auf der Schule, für die das Buch bestimmt ist, überhaupt nicht, für andre wol schwerlich vor der Stereometrie getrieben wird. Die untersuchten Figuren sind Polyeder, Cylinder, Kegel, Kugel und deren Zusammensetzungen. Die Aufgaben sind erst nach den Figuren, dann gruppenweise nach der Behandlung geordnet. Das Resultat steht unter jeder Aufgabe.

H.

Geometrische Konstruktions-Aufgaben. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Lieber, Oberlehrer am Friedrich-Wilhelm-Realgymnasium in Stettin, und F. von Lühmann, Oberlehrer am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Achte Auflage. Mit einer Figurentafel. Berlin 1887. Leonhard Simion. 206 S.

Die 4. Auflage ist im 247. litt. Bericht, S. 30 besprochen. Seitdem ist ein vierter Anhang hinzugekommen, welcher in den einzelnen Paragraphen theils neue Aufgaben, theils einfachere Lösungen nachträgt.

H.

Planimetrische Aufgaben für den Gebrauch im Schul-, Privat- und Selbst-Unterricht bearbeitet von Prof. Dr. F. Reidt, Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm. Zweiter Teil. Aufgaben, geordnet nach Auflösungs-Methoden und mit Anleitung zur Behandlung versehen. Zweite, umgearbeitete Auflage. Breslau 1888. Eduard Trewendt. 127 S.

Das Charakteristische an diesem Aufgabenbuche liegt darin, dass es von den Postulaten als den unmittelbar durch die Instrumente dargebotenen Lösungen aus in allmählichen Variationen der Aufgaben und successiven Hinzufügungen, die kein erdenkliches Glied überspringen, zu immer mehr Mittel erfordernden Aufgaben fortschreitet. Die zu erlernenden Lösungsmittel sind unter folgende Titel geordnet: Methode der Hilfsfiguren, der geometrischen Oerter, der ähnlichen Figuren, der algebraischen Analysis. Diese Methoden sind nicht definirt, sondern durch Beispiele erläutert. Die ganze reichhaltige Reihe von Aufgaben bildet daher eine Anleitung zur Lösung solcher, die jedoch fern von Einübung schematischen, die Erfindung ersparenden Verfahrens ist, (welches immer nur für einen gewissen Bezirk ausreicht, über die Schule hinaus keinen Gewinn bringt), die vielmehr darauf abzielt die Fähigkeit zur Erfindung zu wecken, zu entwickeln und zum Bewusstsein zu bringen — gewiss die beste Hilfe für Schüler, denen das Suchen nach Lösungen zu schwer fällt.

H.

Planimetrische Konstruktionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung für höhere Schulen. Methodisch bearbeitet von E. R. Müller. Zweite Auflage. Oldenburg 1888. Gerhard Stalling. 68 S.

Die Reihe der Aufgaben ist zunächst geteilt in Aufgaben ohne und mit Verhältnissen. Die Aufgaben schliessen sich mit wenigen Ausnahmen an das Dreieck an und schreiten, von den fundamentalen beginnend, zu immer mehr impliciten Bestimmungen fort. Auf jede Gruppe folgen die ausgeführten oder angedeuteten Lösungen einiger Aufgaben und am Schlusse jedes der beiden Abschnitte die Erklärung der Methoden.

H.

Textgleichungen geometrischen Inhalts. Für den Gebrauch beim Unterricht entworfen von Dr. Th. Harmuth, ord. Lehrer am Königl. Wilhelms-Gymnasium in Berlin. Berlin 1888. Julius Springer. 66 S.

Das Vorliegende ist eine Sammlung von 450 Aufgaben zur Uebung in der elementaren Geometrie und Gleichungslehre. Von

einer Figur sind einige Bestimmungsgrößen in unbenannten Zahlen, die Winkel in Graden gegeben, nach andern wird gefragt. Mit Anwendung seiner Kenntniss von messender und abzählender Geometrie hat dann der Schüler die Relation zwischen bekannten und gesuchten Größen anzusetzen, dann die Gleichung aufzulösen. Die Aufgaben sind nach den Figuren, zuerst ebenen, dann räumlichen, geordnet. Die Resultate aller Aufgaben stehen am Ende des Buches.

H.

Aufgaben aus der Elektrizitätslehre. Methodisch geordnet und mit Berücksichtigung aller Theile der Elektrizität sowie unter Zugrundelegung der absoluten Maasse bearbeitet von Dr. Robert Weber, Professor an der Akademie in Neuchâtel. Mit in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1888. Julius Springer. 176 S.

Die experimentelle und rechnende Elektrizitätslehre wird als bekannt vorausgesetzt, durch die vorliegenden Aufgaben soll die Rechnung eingeübt und Vertrautheit mit der untersuchenden und technischen Praxis erzielt werden. Die Reihenfolge schliesst sich dem Lehrgange an und geht mehr und mehr zu den einzelnen technischen Verwendungen über. Auf jede Aufgabe folgt die Lösung. Erklärung wird nicht gegeben, sondern nur auf den letzten 12 Seiten tabellarische Zusammenstellungen, aus denen die quantitativen Relationen ersichtlich sind. Nicht zu billigen sind häufig wiederkehrende nachlässige Kürzungen. Der Verfasser scheint sich in seiner Praxis daran gewöhnt zu haben, notwendige Größenangaben nach Gutdünken wegzulassen, wenn Einheiten gemeint sind. Er spricht vom Gewicht einer Quecksilbersäule von 760 mm, von einer Kraft, die 1 cm Beschleunigung in einer Grammmasse erwirkt, u. a. m. Letztere Vernachlässigung ist so durchgehend, dass sie zu dem Missverständniss verleitet, der Verfasser habe einen eigentümlichen Begriff von Kraft (sowie deren Einheit *Dyn*); erst Tafel CI. zeigt durch die Angabe MLT^{-2} , dass dies nicht der Fall ist.

H.

Tabellen.

Nouvelles tables de logarithmes la circonférence étant prise pour unité (texte en français). Par J. de Mendizabal Tamborrel, Ingénieur géographe, Professeur d'astronomie et de géodésie à l'école militaire, Membre de la sociedad científica „Antonio Alzate“. Ancien élève de l'école d'ingenieurs. (Mexico.)

Diese Logarithmentafel ist berechnet von dem genannten Professor de Mendizabal Tamborrel und wird auf Subscription herausgegeben von der genannten Gesellschaft Antonio Alzate in Mexico. Die Zeit des Erscheinens ist nicht angekündigt. Der erste Teil enthält auf 125 Seiten die siebenstelligen Logarithmen der Zahlen bis 125000, der zweite Teil auf 274 Seiten die siebenstelligen Logarithmen der Kreisfunctionen, letztere durch die Millionstel der ganzen Periode von 4 Rechten. In Betreff der Frage, ob die ganze oder die Viertel Periode decimal zu teilen sei, führt der Verfasser als Autoritäten Yvon-Villarceau, Wolf und Hoüel an. Die zwei Erstgenannten sind der ersten Meinung. Hoüel dagegen nennt den Quadranten die natürliche Einheit. Als rationales Motiv den erstern beizutreten wird nur geltend gemacht, dass bei Teilung des Tages bereits vom ganzen ausgegangen werde. Dieser Grund ist offenbar hinfällig; denn wenn factisch eine Decimaltheilung des ganzen Tages angeordnet worden ist, so ist dies ohne Berücksichtigung oder mit Hintansetzung des Charakters der Periodicität, bloss den Tag als Zeitmass im Auge, geschehen. Jede periodische Function, wofern keine besondern Eigentümlichkeiten eine Abweichung verursachen, durchläuft, vermöge ihrer doppelten Symmetrie, ihre sämtlichen absoluten Werte im Umfange eines Quadranten, und diese sind es, welche eine Tafel dem Rechner liefern muss. Die angekündigte Tafel wird daher für den Rechner stets die Bedeutung einer solchen haben, die den Rechten in 250000 Teile teilt, und die damit verbundene Unbequemlichkeit wird dadurch nicht verringert, dass sie auch an der Zeitrechnung haftet. Das gegenwärtige Unternehmen hat für uns nur das Schätzenswerte, dass dadurch die Herausgabe einer siebenstelligen Tafel der Logarithmen der Kreisfunctionen mit Decimaltheilung der Winkel, welche längst Bedürfniss ist, aufs neue in Anregung kommt.

H.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt von Adolf Sickenberger, Professor der Mathematik und Physik am K. Luitpoldsgymnasium in München. München 1888. Theodor Ackermann. 8 S.

Diese Tafeln stellen auf kleinst möglichem Raume die am häufigsten gebrauchten Zahlenangaben zusammen: vierstellig die Logarithmen der Zahlen 100 bis 1000 nebst Differenzen, die der \sin , \cos , tg , cot durch alle halben Grade, dreistellig die genannten Functionen selbst, vierstellig die Quadrate und Quadratwurzeln, π , $\frac{1}{\pi}$ und $\log \pi$, dreistellig die Zinsen für 1 bis 10 proc. vor- und rückgängig auf

48 Zeiten, Kuben und Kubikwurzeln von 1 bis 10, fernere Potenzen von 2, 3, 4, 5, Binomialcoefficienten und Facultäten, 38 spezifische Gewichte, 13 Geschwindigkeiten, Länge, Rectascension, Declination und Zeitgleichung der Sonne für 37 Jahrestage, Grössenangaben für die Erde, für Mond und Planeten, Breite und Länge von 11 Städten, 21 Sternorte, Präcession und Refraction. H.

P h y s i k.

Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Von E. Mascart, Professor am Collège de France, Director des Bureau central météorologique, und J. Joubert, Professor am Collège Rollin. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Leopold Levy. Zweiter Band. Mit 137 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin 1888. Julius Springer. 716 S.

Der 1. Band ist im 5. litt. B. S. 8 besprochen. Der 2. Band handelt vom Messen, und zwar sind die successiven Gegenstände: die Messungsmethoden überhaupt, einzeln Messung von Winkeln, von Schwingungen, von Kräftepaaren, Eigenschaften der Kreisströme, Inductionscoefficienten; dann elektrische Messungen, und zwar Elektrometrie, Messung von Strömen, Vergleichung von Widerständen, Messung von elektromotorischen Kräften, von Capacitäten, Dielektrica, Constanten der Rollen, Messung von Widerständen in absolutem Masse, Verhältniss der Einheiten zu einander; dann magnetische Messungen, und zwar magnetisches Feld, Magnetisirungsconstanten dann industrielle Anwendungen und numerische Constanten.

H.

Handbuch der statischen Elektrizität. Von E. Mascart, Professor am Collège de France, Director der meteorologischen Centralanstalt in Paris. Deutsche Bearbeitung von Dr. Jgnaz G. Wallentin, k. k. Professor am Staatsgymnasium im IX. Bezirke Wiens. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Zweiter Band. Wien 1887. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 690 S.

Der 1. Band ist im 278. und 17. litt. Bericht, resp. S. 19 und 9 besprochen. Im 2. Bande kommen folgende Gegenstände hinzu: conductive Entladungen, Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Elektrizität, disruptive Entladungen, Dauer, Schlagweite des Funkens, Formen der Entladungen, elektrische Versuche und Eigenschaften

des Funkens, Lichtwirkungen der Entladung, elektrische Bewegungen, physiologische, chemische Wirkungen, Magnetisirung und Induction durch die Entladung; Maschinen, Reibungsmaschinen, Maschinen, welche auf die Influenzwirkung und die Uebertragung gegründet sind, Inductionsapparate, Vergleichung der Elektrisirmaschinen, Elektrizitätsquellen, Contactelektricität, Spannungsreihen, elektrostatische Erscheinungen in den Säulen, thermoelektrische Erscheinungen, Gesetze der Fortpflanzung der Elektricität, Pyroelektricität, mechanische und physikalische Wirkungen, Verdampfung, chemische Erscheinungen, physiologische Elektricität, elektrocapillare Erscheinungen, atmosphärische Elektricität. H.

Elementare Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus von Silvanus P. Thompson, Professor der Physik am technical college zu London. Autorisirte deutsche Uebersetzung auf Grund der neuesten (28.) Auflage des Originals von Dr. A. Himstedt. Tübingen 1887. H. Laupp. 487 S.

Das Buch ist für Anfänger bestimmt und beschränkt sich rücksichtlich der Anwendung von Mathematik auf das Elementarste. Es soll, laut der Vorrede, denselben „eine klare und genaue Kenntniss verschaffen von den Experimenten, auf welchen die Lehre von der Elektricität und vom Magnetismus basirt ist, sowie von den Gesetzen, welche dabei entdeckt worden sind.“ Von dem Ziele klarer und exacter Kenntniss bleibt indes, wie wir nicht anders sagen können, die gegenwärtige Darstellung weit entfernt. Manche, auch vom Verfasser erkannte Schwierigkeit liegt in der Natur des Gegenstandes selbst, welche eine schrittweise Entwicklung der Lehre nicht zulässt. Die so äusserst verschiedenartigen Erscheinungen stehen ohne Theorie in keinem sichtlichen Zusammenhange, sind daher nicht belehrend, die Theorie aber beruht auf Erscheinungen in ziemlich grossem Umfange. Da sich also beides nicht trennen lässt, so ist die Anordnung getroffen, dass in einem ersten Teile nur die wichtigsten experimentellen Facta, einzeln von der Reibungselektricität, vom Magnetismus und von den elektrischen Strömen beschrieben werden, dann im zweiten Teile die Theorie nebst technischer Anwendung in 9 Abschnitten, nämlich Elektrostatik, Elektromagnetismus, Messung der Ströme, Wärme, Licht und Arbeit der elektrischen Ströme, Thermoelektricität, Elektrooptik, Inductionsströme, Elektrochemie, Telegraphen und Telephone — folgt. Am Schlusse sind zu jedem Capitel eine Reihe von Uebungsaufgaben aufgestellt, einige mit Angabe des Resultats. H.

Physikalische Einheiten und Constanten. Von J. D. Everett M. A., Mitglied der Royal Societies in London und Edinburgh, Professor der Physik in Belfast. Nach der dritten englischen Ausgabe unter Zustimmung des Verfassers den deutschen Verhältnissen angepasst durch Dr. P. Chappuis, Savant attaché au Bureau international des poids et mesures, und Dr. G. Kreichgauer, Assistent. Leipzig 1888. Johann Ambrosius Barth. 126 S.

Der Hauptinhalt des Buches ist eine geordnete Zusammenstellung der wichtigsten und am meisten feststehenden physikalischen Grössenangaben in den Grundeinheiten, Centimeter, Gramm, Secunde, nebst ihren Relationen. Voraus geht die Theorie der Einheiten; dann folgen die Constanten und Relationen der Mechanik, Hydrostatik, Elasticität, Astronomie, Akustik, Optik, Wärme, Magnetismus, Elektricität. Alle eingeführten Elemente sind nach Wesen und Bedeutung ausreichend, exact und leicht verständlich erklärt. Wiewol der Verfasser alle jene physikalischen Zahlen nur als Beispiele für den Gebrauch der Einheiten gelten lassen will, so kann deren Zusammenstellung sehr wol auch den weitem Anspruch machen, einem unzählig oft eintretenden Bedürfniss beim Rechnen als Hilfsmittel zu dienen. Die Uebersetzer haben zugunsten der Verbreitung in Deutschland, ohne wesentliche Aenderung des Originals, den exclusiv englischen Charakter, welcher sich namentlich in Bevorzugung englischer Untersuchungen zeigte, zu mindern gesucht. H.

Handbuch der physikalischen Massbestimmungen. Von Dr. B. Weinstein, Privat-Docent an der Universität zu Berlin und Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission. Zweiter Band. Einheiten und Dimensionen, Messungen für Längen, Massen, Volumina und Dichtigkeiten. Berlin 1888. Julius Springer. 552 S.

Der 1. Band, welcher die Ausgleichung der Messungsfehler lehrt, ist im 17. litt. Bericht S. 10 besprochen. Der Inhalt des zweiten ist: Theorie der Einheiten und Dimensionen, und zwar Einheiten und Dimensionen, Rechnen mit Einheiten, die praktischen Einheitsbeträge; dann mechanische Messungen, und zwar das Principielle der Vorrichtungen und Methoden bei Längenmessungen, Ausführung einfacherer Längenmessungen, Abbildung vermittelst optischer Instrumente, Längenmessungen auf Apparaten mit optischen Einrichtungen, die geometrisch mechanische Einrichtung von Längenmessungen, Einfluss von elastischen Deformationen auf die Länge von Strecken, die optische Einrichtung, Bestimmung der Teilungsfehler von Massstäben und Scalen, Bestimmung von Schraubenfehlern, Pointirungs- und Schätzungsfehler, Bedeutung der Wägungen als Massenbestim-

mungen, Gewichtssätze und deren Untersuchung, Einrichtung und Theorie der Waage, Massenbestimmung durch Wägungen, Theorie und Einrichtung, Wägungen in der Luft zu Massenbestimmungen, Volumen- und Dichtigkeitsbestimmungen. Es ist überall erst das Wesen der betreffenden Massbestimmung dargelegt, dann sind die zugehörigen Instrumente und Apparate beschrieben, hierauf ist die nötige theoretische Entwicklung für die Rechnung vorgenommen, meist mit einer Untersuchung der Fehlerquellen unter Angabe der zur Vermeidung der Beobachtungsunsicherheiten nötigen Vorsichtsmassregeln. Die Litteraturangaben machen nur da Anspruch auf Vollständigkeit, wo die betreffenden Arbeiten benutzt worden sind. H.

Die Elektrizität des Himmels und der Erde. Von Dr. Alfred Ritter von Urbanitzky. Mit 400 Illustrationen. Wien, Pest, Leipzig (1888). A. Hartleben.

Der Titel des Werkes hat nicht den Sinn, den Gegenstand desselben auf die natürlichen Erscheinungen der Elektrizität zu begrenzen. Es behandelt vielmehr die gesamte Elektrizitätslehre und scheint, nach der 1. Lieferung zu urteilen, zur Vorbereitung der Kenntniss im Volke bestimmt zu sein. Das Ganze soll in 18 bis 20 Lieferungen erscheinen, deren erste 3 Bogen gibt. H.

Praktische Physik, Zeitschrift für Elementarphysiker, Studierende der Physik, Mechaniker, Optiker u. s. w. und Organ für den physikalischen Unterricht. Unter Mitwirkung hervorragender Autoritäten und bewährter Fachmänner herausgegeben von Dr. Martin Krieg. I. Jahrgang 1888. A. u. R. Faber in Magdeburg.

Diese neue Zeitschrift erscheint in monatlichen Heften von 16 bis 24 Seiten. Sie hat sich zur Aufgabe gemacht „die Interessen aller derer zu fördern, die direct oder indirect mit der Praxis der Physik in Verbindung stehen.“ Die darin enthaltenen Aufsätze sind vorwiegend dem physikalischen Unterrichte, namentlich den Demonstrationsexperimenten, gewidmet, doch finden auch Mitteilungen über Versuche, Apparate und deren Verbesserungen ohne diese Beziehung Platz. Ausser den Aufsätzen enthält jedes Heft Litteraturanzeigen, Inhaltsverzeichnisse und Besprechung von Büchern, Vereinsnachrichten, Fragen und Correspondenzen. H.

Vermischte Schriften.

The Journal of the College of Science, Imperial University, Japan. Vol. I. part. IV. Vol. II. part. I. II. III. Tokyo 1887. 1888. Published by the university.

Die ersten 2 Hefte geben Fortsetzungen der im 21. litt. Bericht S. 13. aufgeführten Untersuchungen des Prof. Seikei Sekiya über Erdbeben. Die Arbeiten sind betitelt:

Ein Modell, welches die Bewegung eines Erdteilchens während eines Erdbebens zeigt.

Erdbebenmessungen der letzten Jahre besonders bezüglich auf verticale Bewegung.

Der erstern ist das vom Seismographen-Apparat gezeichnete dreifache Diagramm der verticalen, westöstlichen und südnördlichen Bewegung beigelegt.

Ausserdem enthält das letztgenannte Heft die deutsche Arbeit:

R. Fuisawa: Ueber die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen, die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreiten.

C. G. Knott und A. Tunakadate: Eine magnetische Untersuchung von ganz Japan.

Die übrigen Artikel handeln von Japans Landesproducten.

H.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto. Being a continuation of the „Canadian Journal“ of Science, Litterature and History. Third series. Vol. V. Toronto 1888. The Copp. Clark. Compagny Limited.

Der 5. Band enthält in 2 Heften folgende mathematische und physikalische Arbeiten.

C. Fessenden: Ein neuer Planimeter.

Rosebrugh: Doppelte Telephonie.

J. Ives: Geologie in den öffentlichen Schulen

H.

Annual report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures and conditions of the Institution for the year 1884. 1885. Washington.

Jeder von beiden Jahrgängen enthält einen Bericht von George F. Barker über die Fortschritte der Physik nach europäischen Zeitschriften.

H.

Verlag von B. F. Voigt in Weimar.

Lehrbuch der

Optik.

Dritte Auflage

von Dr. F. W. Barfuss' „Populäres Lehrbuch
der Optik, Katoptrik und Dioptrik“,

vollständig neu bearbeitet von

Ferdinand Meisel,

Direktor der gewerblichen Zeichenschule in Halle a. S.

Mit Atlas von 17 Foliotafeln.

1889. gr. 8. Geh. 12 Mark.

Vorrätig in allen Buchhandlungen.

In unserem Verlage erschien:

Inhaltsverzeichnis

zu
Teil LV—LXX

des

Archiv der Mathematik und Physik.

I. Abt., nach den Autoren geordnet.

II. „ nach der Materie geordnet.

Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

(J. Sengbusch.)

„Naturwissenschaftliche Wochenschrift“.

Redaktion: Dr. H. Potonié. — Verlag: Hermann Riemann, Berlin.

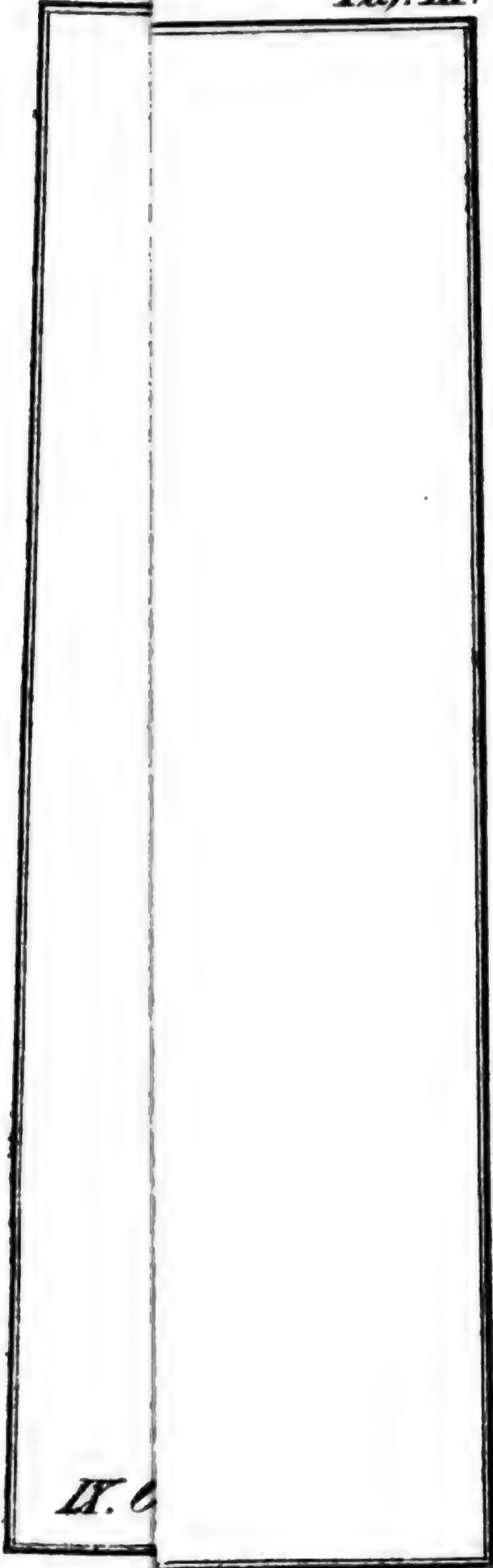
Die „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ bringt allgemein-interessante Aufsätze und orientirt über die Fortschritte aus dem Gesamtgebiet der Naturwissenschaft und ihrer praktischen Anwendung. Auch dem sich für Naturwissenschaft interessirenden Laien ist die „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ durch allgemein-verständliche Sprache ein wertvolles Organ.

Preis vierteljährlich 3 Mk. — Man abonniert bei allen Postämtern und allen Buchhandlungen.

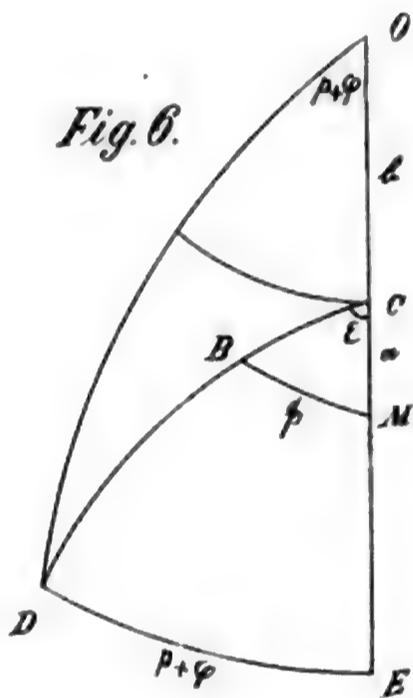
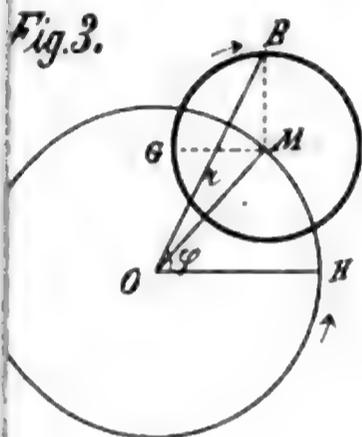
Mitarbeiter unter vielen anderen: Prof. *Albrecht*, Universitäts-Prof. *Ascherson*, Real-Gymnasialdir. *Bach*, Kgl. Landesgeol., Prof. *Behrendt*, Vereid. Chemiker d. Kgl. Gerichte u. d. Polizei-Präsidiums zu Berlin Dr. *Bischoff*, Oberberggrath Prof. Dr. *Credner*, Dr. *Dreher*, Geh. Regierungsrath Prof. Dr. *Galle*, Prof. *Frank*, DDr. *Arthur* u. *Aurel Krause*, Dr. *Löv*, Prof. *Nehring*, Kreisphys. Dr. *Schmitz*, Prof. *Taschenberg* u. s. w.

Teil

Taf. III.



H. C.



Litterarischer Bericht

XXVII.

Methode und Principien.

Das Problem der Continuität in Mathematik und Mechanik. Historische und systematische Beiträge von Dr. Ferdinand August Müller, Privatdocent der Philosophie an der Universität Giessen. Marburg 1886. N. G. Elwert. 123 S.

Sofern das Vorliegende der Geschichte der Mathematik, einschl. der Mechanik, gilt, erstreckt sich diese auf die Autoren Descartes, Leibniz, Huyghens, Cavalleri, Kant und Robert Mayer. Wissenschaftliche Objecte der Schrift sind factisch drei: die Stetigkeit und das Unveränderliche in der Substanz und in der Kraft. Angeblich ist nur die Stetigkeit zum Gegenstande genommen: die Zuziehung der zwei andern Objecte motivirt sich zunächst durch den Gedankengang von Descartes und Leibniz, in welchen eine unklare Begriffsmischung einspielt. Aber der Verfasser erklärt sie sogar sachlich für unumgänglich, und dies vermag am allerwenigstens der fernere Gang der Schrift selbst darzutun, der als reiner Abschweif erscheint. In der That betrachten wir fast nie eine Veränderung ohne eine Substanz, die sich verändert, und wenn keine solche bekannt ist, so legt die Sprache eine passende unter. Die Unveränderlichkeit der Substanz mag also zur Auffassung der Veränderung notwendig oder doch eine Hilfe sein. Was hat aber die Existenz eines Constanten mit der Stetigkeitsfrage zu tun? Wenn wir uns an die Schrift halten, so wird nur erwähnt, dass Leibniz eine zeitlang das Wesen der Stetigkeit im Fortbestehen der Substanz gesucht hat; sonst kommt keine Beziehung beider Begriffe vor, und auch jenem Versuche schreibt der Verfasser keine Fruchtbarkeit zu. Ueberlassen wir es indes dem Verfasser, ob er von einem oder von drei Dingen sprechen will.

Charakteristisch für das Ganze ist: auf dem Titel steht „Problem der Continuität“, und nirgends ist ein Problem kenntlich gemacht. Was ist gegeben? was gesucht? ist es noch Problem, oder eine Lösung bekannt? glaubt der Verfasser eine Lösung gefunden zu haben, und wo steht diese? Von allem dem ist kein Wort zu lesen. Versucht man aus dem Zusammenhange zu erraten, was der Verfasser mit dem Problem gemeint hat, so spricht alles nur dafür, dass er sich selbst darüber keine Rechenschaft gegeben hat. Als Erscheinung gegeben ist offenbar die Stetigkeit der Bewegung. In der Tat legt auch die Schrift die Stetigkeit dem Raume und der Zeit bei, aber ohne sich zu erklären, ob sie damit ein Gegebenes oder ein Resultat bezeichnen will. Gesucht kann sein der exacte Begriff und der brauchbare, wissenschaftlich erfolgreiche analytische Ausdruck. Diese sind Problem gewesen, und manche verfehlte Lösungsversuche damit aufgestellt worden; heutzutage sind sie es nicht mehr. Der Verfasser lehnt es ab auf die Theorie einzugehen, was ihm offenbar gestattet ist; wäre nur in seiner Darstellung des historischen Entwicklungsganges eine Annäherung an das erreichte Ziel zu erkennen. Der erste Teil der Geschichte ist wol das Beste im Buche: hierin ist wirkliche Arbeit zu erkennen; namentlich ist die Auslese aus den Schriften von Leibniz, ihre Zusammenstellung mit Stellen aus den übrigen genannten Autoren, ihre Auffassung von Seiten des Verfassers gemäss seinem Themata instructiv und zeugt von Fleiss. Dass er in der Geschichte nicht weiter zurück gegangen ist, wird ihm wol niemand zum Vorwurf machen und brauchte er nicht in der Vorrede zu motiviren. Dass er aber, nachdem er erklärt hat, Leibniz habe das Problem nicht zu lösen vermocht, von dessen Zeitgenossen Newton ganz schweigt, dessen Fluxionstheorie doch gewiss dem Ziele näher kommt, als die Monadenlehre des erstern, ist auffällig genug. Der Verfasser schliesst vielmehr den ersten Teil der Geschichte hier auf dem Punkte des Misserfolgs ab und eröffnet den zweiten Teil mit der neuen Aera, in welcher Kant die Frage von höherem Gesichtspunkte angegriffen habe. Auch diesem zweiten Teile müssen wir eine Leistung zuerkennen, nur ist es die umgekehrte. Wenn er die formale Logik und Metaphysik in ihrer Dürftigkeit, Schalheit und Hohlheit, dazu in ihrem Hochmut, der sie als Quelle aller wissenschaftlichen Entdeckungen weit über die speciellere Untersuchung stellt, vor Augen führen wollte, so ist die Abfassung gelungen zu nennen. Die Satyre wird durch die begleitende Lobpreisung der Metaphysik, durch Hervorhebung der Bescheidenheit Kant's, der auch der speciellen Arbeit, mit der er sich nicht befassen wolle, Verdienst zuerkennt (!), noch verschönert. Ihre Wirkung hätte nur noch erhöht werden können, wenn er die Caricatur etwas gemildert und auf plausible Weise aus dem Schema: „Quantität: Allgemeine,

Besondere, Einzelne — Qualität: Bejahende, Verneinende, Unendliche — Urteile“ Sätze über Stetigkeit und Infinitesimalrechnung hervorgeleitet hätte. Er zieht nur daraus das Schema: $1, a, \infty$, und damit ist Stetigkeit und Unendlichkeit abgetan. Dagegen sticht doch die Behauptung, es sei durch Metaphysik ein höherer Standpunkt erreicht, in zu schroffer Weise ab. Grösser kann selbst durch die angefügte Betrachtung über Mayer's Entdeckung der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, die er seiner Neigung zur Metaphysik verdanken soll, die Caricatur nicht werden. Ob nun der Verfasser mit oder ohne Absicht eine Satyre geschrieben hat, mag immer noch zweifelhaft bleiben; es gibt Leute genug, welche die Ironie für Wahrheit nehmen, und andere, welche der formalen Logik und Metaphysik alle Ehre erweisen, bloss um damit verschont zu werden, somit ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass er auf beiderlei Leser gerechnet hat.

Hoppe.

Was sind und was sollen die Zahlen? Von Richard Dedekind, Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig. *Ἐπὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.* Braunschweig 1888. Friedrich Vieweg u. Sohn. 58 S.

Auf diese Frage gibt der Verfasser im Vorwort die Antwort: „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.“ Dieser Satz ist ziemlich unbestimmt und charakterisirt nicht sichtlich das Folgende; er sei daher ohne Einwand übergangen. In näherer Beziehung zur Schrift steht die Aussage: „Diese Schrift kann Jeder verstehen, welcher das besitzt, was man gesunden Menschenverstand nennt.“ In der Tat zeichnet sich die Abfassung, bis auf wenige, aber sehr bedeutungsvolle Ausnahmen, durch bewundernswerte Umsicht und Schärfe aus; mit äusserstem Fleisse ist für den Leser gesorgt, dass er nichts zur Auffassung nötige vermissen soll; andererseits ist auch Kunst und Umsicht dazu verwandt, die Namen der noch zu erklärenden Begriffe zu meiden; während doch der Leser jenen Begriffen beständig begegnet und sie zur Auffassung nicht entbehren kann. Hiermit mag soviel erreicht sein, dass jeder Leser auf den ersten 10 Seiten dem Vortrage leicht folgt und die Meinung gewinnt alles verstanden zu haben. Weiterhin wird es ihm nicht so leicht gemacht; er befindet sich in der Lage eines Wanderers, dem der Führer lange auf ebener Strasse mit der Laterne vorgeleuchtet hat, nun aber, wo der zerklüftete Weg kommt, bei Annäherung an die gefährlichen Stellen die Laterne auslöscht. Die Abhängigkeit einmal definirter und fremdartig be-

nannter relativer Begriffe wird nicht mehr ausgesprochen, man muss beständig, um einen Sinn zu finden, die Citate vergleichen, und schliesslich bleibt nach vielem Hinundhersehen allerhand zweifelhaft. Was der Verfasser im Vorwort an Widerwärtigem einräumt, ist dagegen unerheblich und trifft nicht einmal zu. Er sagt, mancher Leser würde in den vorgeführten schattenhaften Gestalten kaum seine Zahlen wieder erkennen, Im Gegenteil würde man die gegebenen leeren Rahmen, um doch etwas dabei zu denken, kaum anders auszufüllen wissen als durch die bekannten Zahlen. Ferner sagt er, mancher Leser würde durch die lange Reihe von Schlüssen und durch die Zergliederung dessen, was er in der Kürze vollständig und sicher zu verstehen glaubt, abgeschreckt und ungeduldig werden. Hierzu ist die Abfassung nicht angetan. Die geschickte und sichere Handhabung, der durchschauliche Fortschritt bei beständiger Offenherzigkeit üben einen dauernden Reiz, der Ungeduld nicht aufkommen lässt, und erweckt Hoffnung neue Seiten des bekannten Gegenstands kennen zu lernen. Erst nach Durchlesung und Durchstudiren des Ganzen wird man leider gewahr, dass man in dem schönen Aufbau kein neues Licht über die Zahlen gewonnen hat, sondern nur durch eine geistige Gymnastik unterhalten worden ist, die mitunter auch zu Falle bringen kann.

Nach dieser Schilderung des Eindrucks der Schrift wenden wir uns zur Prüfung des Einzelnen. Um der Natur der hier gebrauchten Methode willen ist Folgendes im voraus zu bemerken. Es leuchtet ein und hat wol noch niemand zu bestreiten versucht, dass Bedingungen einen Begriff nur dann zu bestimmen vermögen, wenn der positive Inhalt als bekannt vorausgesetzt werden kann. Sie begrenzen stets nur Bekanntes gegen Bekanntes. Die Kreisfläche würde durch den Kreis nicht bestimmt werden, wenn der Begriff der Ebene unbekannt wäre. Auch Beispiele zum Beleg der Existenz des positiven Inhalts können den Mangel nicht ersetzen. Dies berücksichtigt der Verfasser im Anfang, indem er zur Erläuterung des Begriffes eines Systems vorher an die „Dinge“ erinnert, die zum Systeme zusammengefasst werden. Es fragt sich aber: Ist hiermit der ganze Inhalt kund getan? Zunächst wird man an vorliegende Dinge von fester Anzahl denken, und an andre wird auch nicht erinnert. Doch ist auch der Sinn von Systemen $a_1, a_2, \dots a_n$ für allgemeines n bekannt und mit keinem Worte ausgeschlossen. Lässt man aber einmal zu, dass nicht die Dinge, sondern nur das Gesetz ihrer Bildung gegeben sind, so kann man auch die Gesamtheit aller Punkte auf einer Linie, Fläche u. s. w., die keine Anzahl haben, ein System nennen, und nichts gibt Gewähr, dass der Verfasser den Begriff nicht auf Ungedachtes und Undenkbares anwendet. Hieraus ist er-

sichtlich, dass der Begriff „System“, wofern er nicht ausdrücklich auf auszählbare Dinge beschränkt wird, diejenige Bestimmtheit entbehrt, welche der Basis einer streng logischen Theorie zukommen muss, dass der Zahlbegriff schon zugrunde liegt, wenn der Systembegriff zur Klarheit gelangt, dass es also eine didaktische Verkehrt-heit ist, jenen aus diesem ableiten zu wollen. Bis §. 3. und vielleicht noch weiter steht nichts entgegen die genannte Beschränkung festzuhalten. Es folgt eine Reihe von Erklärungen, Sätzen und Beweisen. „Abbildung“ hat die gewöhnliche Bedeutung. „Echter Teil eines Systems“ heisst ein solcher, der dem ganzen nicht gleich ist, während „Teil“ selbst das genannt wird, was man als echten Teil nicht zu denken weiss. „Aehnlich“ heisst hier eine eindeutig umkehrbare Abbildung, was sich aus keiner bekannten Bedeutung des Wortes entnehmen lässt. „Abbildung“ in sich selbst“ ist gleichbedeutend mit Permutation. Soweit und nicht weiter wird eine gewöhnliche Fassungsgabe beansprucht. Jetzt wird die Erklärung gegeben: „ K heisst eine Kette, wenn K' Teil von K ist“ — mit der Bemerkung, dass durch vorher bestimmte Abbildung (bezeichnet durch Function φ) K in K' übergegangen zu denken ist. Diese Bemerkung zeigt die erste Relativität des Begriffs an, die jedoch bei dessen Anwendung nie ausgesprochen wird. Ihr zufolge stellt sich nun die Frage ein: Wie können dann irgend 2 Systeme K und K_1 Ketten sein? In der Analysis ist durch $\varphi(x)$ auch $\varphi(y)$ definiert. Im Vorliegenden hingegen, wo nur an tabellarisch gegebene Abbildungen gedacht wird, hat dasselbe φ für verschiedene x keinen Sinn. Wäre also die Eigenschaft der Kette nur von φ abhängig, so müsste K_1 Teil von K sein. Aus dem Zusammenhange ist zu ersehen, dass K Teil eines Systems S sein soll; dann sind alle Ketten als Teile von S zweitens von S abhängig, und wenn etwa, was gestattet ist, S die ganze Welt bedeutet, so muss eine Tabelle der Abbildungen φ so lang, dass kein Buch sie fasst, bekannt sein, um nur bezüglich auf ein specielles φ eine beliebige Kette zu denken. Diese zweite Relativität ist gar nicht ausgesprochen. Hierzu kommt nun eine dritte durch eine Einführung. Kette von A , einem Teile von S , heisst „die Gemeinheit aller derjenigen Ketten, von welchen A Teil ist“ Eine solche Lehre, meint also der Verfasser, könne Jeder verstehen, der gesunden Menschenverstand besitzt. Eher wäre es begreiflich, dass jemand, der mit so complicirten Begriffen von dreifacher Relativität operirt, sich vor jeder Controle sicher glauben könnte. Der bald folgende zu rügende Fehler indes verbirgt sich nicht hinter diese Schwierigkeit, sondern stellt sich ganz offen dar. In Nr. 64. wird erklärt: „Ein System S heisst unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist.“ Bedingung dafür ist, dass in irgend einer Abbildung S' jedem verschiedenen Elemente von S ein verschie-

denes Element von S' entspricht, dass ferner jedes Element von S' in S , aber nicht jedes Element von S in S' enthalten ist. Dies ist ein offener Widerspruch, wofür wir an der oben genannten Beschränkung des Systembegriffs, unter der allein er durch Aufweisung seines Inhalts klar ist, festhalten. Dem entgegen wird nun in Nr. 66. die Behauptung aufgestellt: „Es gibt unendliche Systeme.“ Der angebliche Beweis verlässt gleich von Anfang den objectiven Boden, der für Evidenz, für einen zwingenden Beweis, stets gefordert wird. S soll „meine“ Gedankenwelt, die Abbildung S' „mein“ Denken derselben Gedanken sein. Nun ist aber die Gedankenwelt eines Menschen nur zumteil objectiv, d. h. lässt sich von allen Menschen in identischem Sinne auffassen. Nur soweit dies der Fall ist, kann von exacter Uebertragung der Gedanken vom Verfasser auf den Leser die Rede sein. Der übrige Teil ist zur Zeit ein auf das Subject beschränktes psychisches Phänomen, das für den Leser keine intellectuelle Geltung hat. Mehr als irgendwo tritt dies in der entscheidenden Frage hervor: Enthält S ein Element, das in S' nicht enthalten ist? Als Beispiel — und wir müssen betonen, als einziges Beispiel im ganzen Buche, mit dem alles steht und fällt — führt der Verfasser an: das Ich. Dieses als Original aller Gedanken des Ich steckt freilich nicht in S' , aber auch nicht identisch im S des Lesers, beides aus gleichem Grunde, weil es kein Gegenstand sein kann. Ein Beispiel, das für alle Menschen in gleichem Sinne gälte, ist nicht aufgewiesen, demnach bleibt die Behauptung (66.) unbegründet. Jetzt kann es sich noch um die Anwendung des Satzes 66. handeln, da diese noch immer richtig und anderweit begründet sein könnte. Es wird erklärt: „Ein System N heisst einfach unendlich, wenn es eine solche ähnliche Abbildung φ von N in sich selbst gibt, dass N als Kette eines Elements erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist.“ Dieses Element wird mit dem Symbol 1 bezeichnet; die vorstehende Erklärung soll also den Begriff der Einheit definieren. Es folgt der Satz: „In jedem unendlichen Systeme S ist ein einfach unendliches System N als Teil enthalten.“ Der Beweis stützt sich auf Nr. 64. zum Nachweis der Existenz des Elements 1, sofern die Eigenschaft von S zur Voraussetzung gemacht ist. Ist aber die Eigenschaft widersinnig, so ist es auch die Behauptung, und zwischen Unsinn und Unsinn einen strengen Zusammenhang zu statuieren ist ein logischer Fehler. Es war deshalb doch nötig sich auch auf Satz 66. zu berufen, der noch unbewiesen ist. Auch mit dieser Widerlegung wollen wir uns nicht begnügen; die Erklärung gibt an die Hand zu versuchen, ob die Einheit, also ein objectives Element, im Beweise des Satzes 66. als Beispiel gebraucht werden könnte. Die unendliche Zahlenreihe 1, 2, 3, ... sei das System S , jedes Element werde durch Addition

von 1 abgebildet, es sei also S' das System 2, 3, 4 ... Ersteres enthält alle Zahlen, mithin das ganze System S' ; letzterem fehlt das Element 1, und damit ist die Bedingung erfüllt. Der Trugschluss ist ein sehr bekannter und oft gerügter. Der Begriff des Systems ist nur für fertig vorliegende Objecte erklärt, die unendliche Zahlenreihe aber liegt nicht fertig vor, im erklärten Sinne gibt es also kein solches System. Wollen wir den Begriff nach Bedarf erweitern, so müssen wir, um die Gesamtheit der Elemente einzuschliessen, statt ihrer die Fähigkeit sie zu bilden setzen. Bilden wir die Elemente und zugleich ihre Abbildung, so entspricht jedem n ein $n+1$ in S' , welches in S nicht enthalten ist, und zwar ohne Aufhören, folglich allgemein, d. h. allgemein, S' ist nicht Teil von S .

Auf den übrigen Teil der Schrift, welcher von einigen arithmetischen Operationen handelt, einzugehen, möchte wol, nachdem die Basis als fehlerhaft nachgewiesen ist, zwecklos sein. Was der Verfasser mit dem Ganzen hat erreichen wollen, bleibt durchaus dunkel.

Hoppe.

Die Eigenschaften der Materie. Von P. G. Tait, M. A. Professor der Physik an der Universität in Ediinburgh. Autorisirte Uebersetzung von G. Siebert. Wien 1888. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 322 S.

Das Buch gibt eine populäre Erläuterung von Fragen, welche die Materie und ihre Eigenschaften betreffen, sucht Vorurteile, die in minder gebildeten Kreisen herrschen, zu berichtigen und nach gegenwärtig erreichtem Standpunkt die grösst mögliche Klarheit zu verbreiten. Die vierteiligen hier behandelten Themata sind unter folgende Titel zusammengefasst: Hypothesen über die letzte Structur der Materie, durch den Sprachgebrauch der Materie beigelegte Eigenschaften, Zeit und Raum, Undurchdringlichkeit, Porosität und Teilbarkeit, Trägheit, Beweglichkeit und Centrifugalkraft, Gravitation, Deformabilität und Elasticität, Zusammendrückbarkeit der Gase, Flüssigkeiten, fester Körper und deren Starrheit, Cohäsion und Capillarität, Diffusion, Osmose, Transpiration, Zähigkeit u. s. w., Aggregation der Massenteilchen. In den meisten hieran geknüpften Fragen ist der heutige Standpunkt der Wissenschaft noch weit von seinem Ziele entfernt. Ist es nun überhaupt geboten, Lehren der Wissenschaft einem Laienpublicum erst dann mitzuteilen, wenn sie gesichert und unbestritten sind, so begegnet auch der Versuch einer Darstellung unfertiger Lehren grossen Schwierigkeiten, sobald etwas ganzes und instructives geliefert werden soll. Im Vorliegenden ist Deduction ganz ausgeschlossen, Kritik nur in sehr geringem Masse

vorhanden; daher konnten bei Verschiedenheit der Ansichten nur Meinungen unbegründet gegenübergestellt werden. (Mehr Begründung findet man, namentlich in den 4 Anhängen, wo der Verfasser andere Autoren reden lässt.) Bei dieser Sachlage, wo der grösste Teil des Vorgetragenen noch Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung ist, können wir uns indes nicht darauf beschränken die Schrift als einfache Belehrung für Laien anzusehen; das Hauptinteresse fällt vielmehr der Charakterisirung des Standpunktes jener Untersuchungen zu. Die Schrift macht den Eindruck ungemeiner Klarheit, reifer Ueberlegung und Freiheit von Vorurteilen. Um so mehr fallen zwei Punkte des Gegenteils auf. Beide weisen auf eine gemeinsame Quelle in einem populären Vorurteil und Mangel an Ueberlegung hin. In der Tat findet man nirgends die Frage erörtert, was naturwissenschaftliche Erklärung heisst, und was ihr Ziel ist. Dass der Verfasser sie auch sich selbst nie vorgelegt hat, darauf deuten seine Aeusserungen wenigstens hin. Als ob ihm die Antwort unbekannt wäre: Erklärung beobachteter Vorgänge heisst die Aufweisung unabänderlicher Gesetze, aus denen sie notwendig folgen; ihr Ziel ist grösstmögliche Einfachheit und geringst mögliche Anzahl der Gesetze; für Unveränderliches hat Erklärung keinen Sinn — adoptirt er naiverweise die roheste Auffassung, der man wol unter Unkundigen oft begegnet, welche in der Erklärung nur Zurückführung auf bekannte Begriffe und Vorstellungen suchen. Zuerst ist auffällig, dass er im Gegensatz zur Energie, welche vollkommen objectiv sei, im Begriffe der Kraft eine gewisse Subjectivität findet, sofern ihm nichts wirkliches zugrunde liege als die animalische Kraft. Es verhält sich vielmehr umgekehrt: im Begriffe der kinetischen Energie ist eine absolute Geschwindigkeit enthalten, die weder in der Beobachtung noch in der Idee existirt, und wenn man sie durch relative Geschwindigkeit ersetzen will, so sind nicht einmal die Differenzen der den verschiedenen Auffassungen entsprechenden Werte der Energie constant. Demnach ist die Objectivität des Energiebegriffs eine sehr mangelhafte. Dagegen ist im mechanischen Begriffe der Kraft nichts unbestimmbares enthalten: die nicht definirbare Constante der Translation ist eliminirt, die Rotation gerade durch Kraftwirkung bestimmbar. Jene Aeusserung zeigt, dass der Verfasser den Begriff der Kraft nur dadurch und nur soweit für erklärt hält, als sich etwas analoges im Bewusstsein des Unkundigen vorfindet. Ob sich jemand den abstracten Gedanken der mechanischen Kraft unter dem Bilde der analogen animalischen Kraft vergegenwärtigen und sich denken will, der Dampf im Kessel fühle sich durch die Menge beengt und drücke im Streben nach Erweiterung auf die Wände, trägt zur Klarheit des Begriffs nichts bei, denn das Substituirte ist nicht einfacher als die Erscheinung. Was

auf den wissenschaftlichen Begriff übergegangen ist, ist bloss der Name. Jene kurz vorübergehende Aeusserung steht indes nicht allein. Sehr ausführlich wird die Wirkung in die Ferne besprochen. In der Einleitung wird behauptet, dass heutzutage nur Wenige eine räumlich und zeitlich unvermittelte Fernwirkung annehmen. Hier hat wahrscheinlich der Verfasser alle diejenigen nicht mitgezählt, welche die Frage als längst erledigt mit keinem Worte mehr berühren. Das Newton'sche Attractionsgesetz besteht im Einklang mit allen Erscheinungen unveränderlich, und niemand denkt daran es zu vereinfachen; daher hat Erklärung der Fernwirkung keinen Sinn, sondern nur Erklärung durch Fernwirkung als letzte Ursache. Dagegen hat die Fernwirkung kein Analogon im gemeinen Leben: wer auf einen Gegenstand einwirken will, muss ihn mit Arm, Stange, Draht oder durch Wurf (Lichtstrahl u. s. w.) erreichen. Auf dieses vulgäre Bedürfniss eines Analogons reducirt sich also das Desideratum so zahlreicher Grübler, welche die Fernwirkung durch Stösse vermitteln wollen und diese Einfügung des Complicirtesten und selbst Erklärungsbedürftigsten statt der einfachen Attraction für Erklärung ausgeben. Der Verfasser constatirt selbst, dass bis jetzt kein Erfolg davon gewonnen ist. Sein eigenes Urtheil findet sich nicht ausgesprochen, doch begünstigt er durchweg jene Grübeleien. Er führt an, dass Newton auf Anfrage die unvermittelte Fernwirkung eine Absurdität genannt hat, verschweigt aber, wie Newton zu dieser unüberlegten Antwort gedrängt worden ist, ferner dass er später die Erklärung der Gravitation als secundäre Frage bezeichnet, noch später es definitiv ausgesprochen hat, dass die Attraction als *causa simplicissima* keine Frage übrig lässt. — Die im Vorstehenden berichtigten Vorurtheile haben ausschliesslich Beziehung zu den Ausführungen, zu denen sie den Anlass gegeben haben. Obgleich sie als Fragen fundamentaler Natur auftreten, ist doch in der ganzen übrigen Schrift nichts darauf gebaut, und würde keine Lücke entstehen, wenn die betreffenden Stellen wegfielen — ein Zeichen dass jene Fragen überflüssig sind. Demzufolge bleibt aber auch der Wert des so reichlich dargebotenen instructiven Stoffes unvermindert durch die ausserhalb stehenden Vorurtheile bestehen. Hoppe.

Die Structurformeln. Geschichte, Wesen und Beurtheilung des Werthes derselben. Bearbeitet von R. Bonn. Frankfurt a. O. 1887. Trowitzsch u. Sohn. 56 S.

Es wird zuerst die Gestaltung der Theorie der organischen Chemie geschichtlich entwickelt, dann an Beispielen der Wert der

gewonnenen Structurformeln gezeigt, der darin besteht, dass sie einen Einblick in die chemische Natur der Körper gestatten, und dass durch sie die Isomerien eine befriedigende Erklärung erlangen.

H!

Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes. Von O. Simony, stud. phil. in Wien.

Die Arbeit ist veröffentlicht in Schlömilch's Zeitschr. für Math. u. Phys. XVIII. 463 — 510. XIX. 299 — 323 und XX. 1 — 35. Daran schliesst sich noch ein Aufsatz betitelt:

Ueber die Beziehung der mittleren Bewegungsintensität der Atome eines beliebigen festen Complexes zu dessen absoluter Temperatur.

Die hier entwickelten Grundzüge einer neuen Moleculartheorie erstrecken sich nach Aufstellung einer einheitlichen Hypothese auf Berechnung von deren nächsten Consequenzen. durch welche vorläufig ein noch nicht zu übersehender Raum für Erklärung physikalischer Erscheinungen und Gesetze geschaffen wird, ohne diese Erklärung selbst in Angriff zu nehmen. Es wird angenommen, dass alle Stoffe aus unveränderlichen Atomen bestehen. (Es ist unwesentlich, dass hier die Atome als homogene Kugeln gedacht werden, deren Volum allein die Masse bestimmt; man kann dafür auch Punkte mit denselben Massen setzen.) Die Atome verschiedener einfacher Stoffe haben verschiedene Grösse oder Masse. Die Anziehung je zweier Atome ist ausgedrückt durch

$$\frac{m_1 m_2}{r^2} \cos \frac{\alpha}{r}$$

wo m_1 , m_2 ihre Massen, r ihren Abstand, α eine Function von m_1 , m_2 bezeichnet. Für sehr grosse r ist, wie man sieht, die Abweichung vom Newton'schen Gesetze unmerklich. Für hinreichend kleine, dann immer kleiner werdende r wird die Anziehung, successive wiederholt, negativ. Es ergibt sich also eine Reihe stabiler Gleichgewichtslagen, derart dass der Uebergang aus einer in die folgende immer schwieriger wird. Damit ist die Verbindung mehrerer Atome zu Moleculen erklärt, die nur mit Widerstand getrennt werden kann. Der erste Artikel untersucht die aus der Störung des Gleichgewichts zwischen 2 verbundenen Atomen folgende Bewegung, der zweite ebenso die des dreiatomigen Moleculs mit Vernachlässigung höherer Potenzen der Verschiebung, der dritte dieselbe mit deren Berücksichtigung.

H.

Elektricität und Magnetismus als kosmotellurische Kräfte. Von Dr. Theodor Hoh, Professor der Physik am königl. Lyceum in Bamberg. Wien. Pest. Leipzig (1888). A. Hartleben. 264 S. Elektrotechnische Bibliothek. Band XXXVII.

Da die Himmelskörper mechanisch, optisch und thermisch bekanntermassen auf einander wirken, so liegt die Vermutung nahe, dass auch eine magnetische und elektrische Fernwirkung statt hat. Die vorliegende Schrift führt nun so erschöpfend als möglich die Tatsachen vor, auf welche sich die Erforschung der Beziehung zwischen Sonne, Mond und Erde in dieser Hinsicht stützen kann. Es werden die hierher gehörigen Beobachtungen betreffend Magnetnadel, Erdmagnetismus, Nordlicht, elektrische Erdstöße, Elektricität der Luft, Elektricität der Wolken, Ozon, Helenenfeuer, Blitz und Donner: Verbreitung der Gewitter aus älterer und neuerer Zeit durchgegangen, dann am Schlusse die Gedanken über die Beeinflussung dieser Erscheinungen durch Sonne und Mond in allgemeinen Umrissen ausgesprochen. H.

Beweis, dass es eine Quadratur des Kreises giebt, und dass die bisher zur Berechnung des Kreises benutzte Ludolph'sche Zahl etwas zu klein ist. Von G. Kerschbaum, Steuerrath in Coburg. 2. vermehrte und verbesserte Auflage. Coburg 1888. E. Riemann jr. 18 S.

Von der 2ten, obwol ganz veränderten Auflage gilt dasselbe, was schon bei Besprechung der ersten (20. litt. Ber. S. 44) gesagt ist: Der Verfasser hat soviel Geschick und Verständniss an den Tag gelegt, dass er wol fähig sein wird seinen Fehler selbst anzufinden. Die neue Arbeit nimmt auf die vorige keinen Bezug, sie ist länger und beansprucht noch grössere Geduld des Lesers. Hoppe.

Die Quadratur des Zirkels. Sichere Lösung einer bislang als Problem betrachteten wissenschaftlichen Frage. Dargestellt in 3 Zeichnungen und erläutert von F. W. Lolling, Redacteur. Hamburg 1887. G. Kramer. 15 S.

Diese Schrift, obwol sie sich mit demselben Unsinn wie die vorige (von Kerschbaum) beschäftigt, ist doch das Gegenteil von ihr hinsichtlich der darin kund gegebenen Befähigung des Verfassers. Gleich im Anfang, um nur den ersten Fehler zu nennen, wird verlangt, eine Tangente an einen Kreis so zu legen, dass sie durch 2 vorher bestimmte Punkte d und e gehe. In der Tat würde die Gerade de den Kreis wirklich berühren, wenn die Abstände der Punkte

von den Axen $\sqrt{2} - 1$ statt $\frac{2}{3}$ des Radius wären. Hiernach scheint der Verfasser seine Relationen durch Messung der Figur gefunden zu haben, wobei ihm die kleine Differenz 0,014 entgangen ist. Der Fehler des Resultats ist c. 35 mal so gross als bei der Archimedischen Zahl.

Hoppe.

Die Quadratur der Hyperbel nach einer neuen Methode berechnet von F. Samuda. Graz 1888. Styria. 16 S.

Das Vorliegende ist ein Gemisch von Richtigem, Unbestimmtem und Falschem. Die neue Methode“ besteht in der Anwendung von „Analogieschlüssen.“ Durch Analogie, wenn sie auf richtiger Auffassung beruht, kann man Sätze auffinden, aber nicht beweisen. Hier hingegen ist die Auffassung, der Schluss und das Ergebniss jedesmal unrichtig. Richtig ist allein die Proportionalität der beliebigen und gleichseitigen Hyperbelfläche, welche nicht erst gefunden ward, sondern schon im anfänglichen Ansatz ausgedrückt lag.

Hoppe.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Clerke, A. M., Geschichte der Astronomie während des 19. Jahrhunderts. Deutsche Asg. v. H. Maser. Berlin, J. Springer. 10 Mk.

Graf, J. H., Geschichte der Mathematik u. der Naturwissenschaften in bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. 1. Hft. Das XVI. Jahrh. Bern, Wyss. 1 Mk.

Loria, G., die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren u. heutigen Entwicklung. In's Deutsche übertragen v. F. Schütte. Leipzig, Teubner. 3 Mk.

Methode und Principien.

Frerichs, H., die Hypothesen der Physik. Ein Versuch e. einheitl. Darstellung derselben. 2. Aufl. Norden, Fischer Nachf. 2 Mk. 50 Pf.

Kerz, F., weitere Ausbildung der Laplace'schen Nebularhypothese. Ein Nachtrag. Leipzig, Spamer. 3 Mk.

Lehrbücher.

Lieber, H., u. F. v. Lümann, Leitfaden der Elementar-Mathematik. 1. Tl. Planimetrie. 6. Aufl. Berlin, L. Simion. 1 Mk. 50 Pf.

—, dass. 3. Tl. Ebene Trigonometrie, Stereometrie, Sphärische Trigonometrie. 4. Aufl. Ebd. 1 Mk. 25 Pf.

Sammlungen.

Adam, W., 6500 Aufgaben f. d. Unterricht in der Arithmetik u. Algebra. 1. Tl. Neuruppin, R. Petrenz. 2 Mk.

Baur, L., Sammlung v. arithmetischen Aufgaben für Lehrer u. Zöglinge des niederen u. höheren Lehramts. Stuttgart, Steinkopf. Geb. 2 Mk. 20 Pf.

Daurer, F. S., Übungsbuch zum Studium der elementaren Mechanik. Wien, Hölder. 2 Mk. 40 Pf.

Fetscher, M., Arithmetisches. Auflösungen zu den arithmet. Aufgaben aus den Reallehrer-Prüfungen in Württemberg. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl.-Cto. 2 Mk. 30 Pf.

Graefe, F., Aufgaben u. Lehrsätze aus der analytischen Geometrie d. Raumes insbesondere der Flächen zweiten Grades. Leipzig, Teubner. 3 Mk.

Hauck, G., Übungsstoff f. den praktischen Unterricht in der Projektionslehre (Parallelperspektive, Centralperspektive u. Schattenlehre.) 1. u. 2. Hft. Berlin, J. Springer. à 1 Mk.

Heis, E., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. 76. — 78. Afl. Köln, DuMont-Schauberg. 3 Mk.

Heuner's, J. F., Aufgaben zum Kopf- u. Zifferrechnen m. den Ergebnissen. Hft. C. Für die Oberklasse. 7. Afl. Lehrer-Asg. Ansbach, Seybold. 80 Pf.

— Ergebnisse nebst weiterem Übungsstoffe zu den Rechen-Aufgaben u. zwar zum IV. u. V. Schülerhefte. Mittelklasse. 3. Afl. Asg. f. Lehrer. Ebd. 60 Pf.

Hočevar, F., geometrische Übungsaufgaben f. d. Obergymnasium. 1. Hft. Planimetrie u. Stereometrie. Leipzig, Freytag. Geb. 80 Pf.

Kellner, F. W., methodisch geordnete Aufgaben f. das Kopfrechnen. 1. Hft. 3. Afl. Reval, Kluge's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

— methodisch geordnete Aufgaben f. das Tafelrechnen. Ebd. 2. Hft. 6. Afl. 50 Pf.; 6. Hft. 4. Afl. 80 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 444. — 477. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Lieblein's, J., Sammlung v. Aufgaben aus der algebraischen Analysis zum Selbstunterricht. 2. Afl., hrsg. v. W. Laska. Prag, Neugebauer's Verl. 4 Mk. 50 Pf.

Löbe, M., Sammlung v. Aufgaben aus der Arithmetik. 3. Hft. 3. Afl. Leipzig, Brandstetter. Kart. 80 Pf.

Magnus, K. H. L., Lehrerheft zu F. Heuner's Rechenbuch f. Stadt- u. Landschulen. Zu Asg. A. u. B. 3. Tl. Hannover, Meyer. 1 Mk. 60 Pf.

Matthiessen, L., Übungsstoff f. den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. 2. Afl. Köln, DuMont-Schauberg. 2 Mk.

Zähringer, H., methodisch geordnete Aufgaben üb. die Elemente der Buchstabenrechnung und Gleichungslehren. 1. u. 2. Hft. 5. Aufl. Von C. Enholz. Zürich, Meyer & Z. 1 Mk. 50 Pf.; Antworten dazu. 3 Mk. 40 Pf.

Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch der Logarithmen f. Mittelschulen u. höhere Lehranstalten. 15. Aufl. Wien, Bermann & A. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Sprecher, A. v., Reductions-Tabellen f. Elektrotechniker zur Berechnung v. $\operatorname{tg} u$ und $\sin \frac{u}{2}$ aus der Skala-Ablesung. Zürich, Schult-hess. 1 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Ameseder, A., üb. die linearen Transformationen d. tetraedalen Complexes in sich. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Czuber, E., zum Gesetz der grossen Zahlen. Untersuchung der Ziehungsergebnisse der Prager u. Brünnener Lotterie vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Prag, Dominicus. 80 Pf.

Frömter, A., Lehrbuch der Grundrechnungsarten. 1. Buch: Das Rechnen m. unbenannten ganzen Zahlen. Stuttgart, J. Maier. 3 Mk.

Hochheim, H., Leitfaden f. den Unterricht in der Arithmetik u. Algebra an höheren Lehranstalten. 1. Hft. 4. Aufl. Berlin, Mittler & S. 2 Mk. 80 Pf.

Kleyer, A., Lehrbuch der Differentialrechnung. 1. Tl. Die einfache und wiederholte Differentiation explizirter Funktionen v. einer unabh. Variablen. 2. Aufl. Stuttgart, J. Maier. 5 Mk.

Knies, K., Lehrbuch der Arithmetik f. Real- und Lateinschulen. 1. Tl. 3. Aufl. München, Kellerer. 1 Mk.

Mertens, F., üb. die invarianten Gebilde e. ternären cubischen Form. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 40 Pf.

Neumann, C., über die Methode d. arithmetischen Mittels. 2. Abhandlung. Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Schlömilch, O., Handbuch der algebraischen Analysis. 6. Aufl. 2. Druck. Stuttgart, Frommann's Verl. 9 Mk.

Villicus, F., Lehr- u. Uebungsbuch der Arithmetik f. Unterrealschulen. 1. Thl. f. die 1. Classe. 9. Afl. Wien, Pichler's Wwe. & S. Geb. 1 Mk. 44 Pf.

Geometrie.

Bohnert, F., Bestimmung e. speciellen periodischen Minimalfläche, auf welchen unendlich viele gerade Linien u. unendlich viele ebene geodätische Linien liegen. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 50 Pf.

Disteli, M., die Steiner'schen Schliessungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Fiedler, W., d. darstellende Geometrie in organischer Verbindung m. der Geometrie der Lage. 3. Afl. 3. Thl. Die construir. u. analyt. Geometrie der Lage. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Fischer, E., Zeichen-Vorlagen aus dem Gebiete der Stereotomie. 1. Hft. 6 Blätter Original - Steinschnitt - Aufgaben. Mit erläut. Text. Nürnberg, Korn'sche B. 5 Mk.

Heis, E., u. Th. Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. 3. Afl. 3. Tl. Ebene u. sphärische Trigonometrie bearb. v. Heis. Köln, DuMont-Schauberg. 2 Mk. 80 Pf.

Hočevár, F., Lehrbuch der Geometrie f. Obergymnasien. Leipzig, Freytag. Geb. 2 Mk. 10 Pf.

— Lehr-Uebungsbuch der Geometrie f. Untergymnasien. 2. Afl. Ebd. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Kleyer, A., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 1. Tl. Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Stuttgart, J. Maier. 1 Mk. 80 Pf.

Költzsch, A., Grundzüge der Raumlehre. Leipzig, Merseburger. 60 Pf.

Koestler, H., Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Hft. Kongruenz. 3. Afl. Halle, Nebert's Verl. Kart. 1 Mk. 25 Pf.

Kröger, M., Leitfaden f. den Geometrie-Unterricht in Mittelschulen u. gehobenen Volksschulen. 2. Afl. Hamburg, Meissner's Verl. 1 Mk.

Lie, S., zur Theorie der Berührungstransformationen. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Michalitschke, A., die archimedische, die hyperbolische u. die logarithmische Spirale. Prag, Härpfer. 3 Mk.

Močník, F., Ritter v., Geometrie u. geometrisches Zeichnen f. Knaben-Bürgerschulen. 1.—3. Hft. 5. Afl. Leipzig, Freytag. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Naprawnik, F., Geometrie u. geometrisches Zeichnen f. Knaben- u. Bürgerschulen. 1. Thl. 7. Aufl., 3. Thl. 3. Aufl. Wien, Pichler's Wwe. & S. à 76 Pf.

Rottok, Lehrbuch der Planimetrie. 3. Aufl. Leipzig, Schultze. 1 Mk. 20 Pf.

—, Lehrbuch der Stereometrie. 3. Aufl. Ebd. 1 Mk. 5 Pf.

Schlömilch, O., Grundzüge e. wissenschaftl. Darstellung der Geometrie des Masses. 1. Hft. Planimetrie. 7. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Spitz, C., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 9. Aufl. Leipzig, Winter'sche Verlagsh. 3 Mk.; Anh.: Resultate u. Andeutgn. zu Auflösng. der Aufgaben enth. 1 Mk.

Steiner, J., Studien-Blätter. Eine systemat. Folge vorge-druckter Annahmen zur graph. Durchführg. grösserer Constructions-Aufgaben aus der darstell. Geometrie. 2. Aufl. Durchführungen. Wien, Hölder. 72 Pf.

— dasselbe. Schattenlehre. 2. Aufl. Ebd. 72 Pf.

Villicus, F., Lehrbuch der ebenen Geometrie f. die 2. u. 3. Realclasse. 3. Aufl. Wien, Pichler's Wwe. & S. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Vonderlinn, J., Lehrbuch der vorstellenden Geometrie. 1. Buch. Das Projektionszeichnen. 3.—12. (Schluss-) Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

— Lehrbuch des Projektionszeichnens. 1 Tl. Die rechtwinklige Projektion auf e. u. mehren Projektionsebenen. Ebd. 3 Mk. 50 Pf.

Weidemann, H., Lehrbuch der Planimetrie. Berlin, Deubner. 3 Mk.

Trigonometrie.

Nies, K., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie f. den Schulgebrauch. Darmstadt, Bergstraesser. 1 Mk. 20 Pf.

Spitz, C., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 6. Aufl. Leipzig, Winter'sche Verlagsh. 2 Mk.; Resultate u. Andeutgn. zu Auflösng. der Aufgaben. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Barfuss, F. W., Handbuch der Feld-Messkunde. 4. Aufl. bearb. v. W. Jeep. Weimar, B. F. Voigt. 6 Mk.

Bauernfeind, C. M. v., das bayerische Präcisions-Nivellement. 7. Mittheilg. München, Franz'scher Verl. 2 Mk. 80 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 3. Aufl. 2. Bd. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl.-Cto. 22 Mk.

Stambach, J. J., die Planimeter Coradi, ihre Theorie, Construction u. Genauigkeit. Stuttgart, Wittwer's Verl. 1 Mk.

Verhandlungen der vom 21. bis zum 29. October 1887 auf der Sternwarte zu Nizza abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung, red. v. A. Hirsch. Mit Suppl. Berlin, G. Reimer. 27 Mk.

Mechanik.

Bieler, A., Leitfaden u. Repetitorium der analytischen Mechanik. 2. Thl. Analytische Dynamik der festen Körper. Leipzig, Violet. 1 Mk. 80 Pf.

Poisson, S. D., Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch hrsg. v. A. Pfannstiel. 2. u. 3. Lfg. Dortmund, Meyer. à 2 Mk. 75 Pf.

Technik.

Ayrton, W. E., Handbuch der praktischen Electricität. Deutsche Bearbeitung von M. Krieg. Jena, Costenoble. 13 Mk. 50 Pf.; geb. 14 Mk. 50 Pf.

Bibliothek, elektro-technische. 39. Bd. Materialien f. Kostenanschläge elektrischer Lichtanlagen. Von E. de Fodor. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Exner, C., üb. e. Scintillometer. Leipzig, Freytag. 16 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Vierteljährliche Berichte. Hrsg. v. K. Strecker. 2. Jhg. 1888. 1. Hft. Berlin, J. Springer. 5 Mk.

Fuhrmann, A., Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik. 1. Thl. Naturwissenschaftliche Anwendung der Differentialrechnung. Berlin, Ernst & K. 3 Mk.

Maier, J., u. W. H. Preece, das Telephon und dessen praktische Verwendung. Stuttgart, Euke. 9 Mk.

Schellen, H., der elektromagnetische Telegraph. 6. Aufl. v. J. Kareis. 7. (Schluss-) Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk. 30 Pf.; cplt. 30 Mk.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. 3. Aufl., übers. v. C. Grawinkel. 1. Hft. Halle, Knapp. 4 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Bohn, C., über Linsenzusammenstellung und ihren Ersatz durch eine Linse v. vernachlässigbarer Dicke. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Ernecke, F., 150 optische Versuche zur Veranschaulichung der Grundlehren der Ausbreitung, Spiegelung und Brechung des

Lichtes. Nach Angaben v. H. Zwick zusammengestellt. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Fränkel, G., die Wirkung der Cylinderlinsen, veranschaulicht durch stereoskop. Darstellung des Strahlengangs. Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. die Spectren der Elemente. Berlin, G. Reimer. Kart. 6 Mk.

Meisel, F., Lehrbuch der Optik. 3. Aufl. v. F. W. Barfuss. Populäres Lehrbuch der Optik, Katoptrik u. Dioptrik. Weimar, B. F. Voigt. 12 Mk.

Pabst, C., Leitfaden der theoretischen Optik. Halle, Schmidt's Verl. 1 Mk. 25 Pf.

Snellen, H., optotypi ad visum determinandum secundam formulam $v = \frac{d}{D}$. Ed. 9., metrico systemate. (36 Blatt.) Berlin, Peters. 3 Mk. 50 Pf.

Wislicenus, W. F., Untersuchungen über den absoluten persönlichen Fehler bei Durchgangsbeobachtungen. Leipzig, W. Engelmann. 3 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Auwers, A., neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen aus den J. 1750 bis 1762. 3. Bd. Der Sternecatalog f. 1755 u. seine Vergleichung m. neuen Bestimmungen enth. Leipzig, Voss' Sort. 9 Mk. 20 Pf.

Bauschinger, J., üb. die Biegung v. Meridian-Fernrohren. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Beobachtungen, meteorologische, in Deutschland v. 25 Stationen II. Ordnung, sowie stündliche Aufzeichnungen v. 3 Normal-Beobachtungsstationen der Seewarte und Kaiserslautern, die Stürme nach den Signalstellen der Seewarte. 1886. Jahrg. IX. Hrsg. v. d. Direction der Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. 13 Mk.

Böhmer, G. H., elektrische Erscheinungen in den „Rocky Mountains“. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Brédichin, Th., sur la grande comète de 1887. I. Avec note supplémentaire. Leipzig, Voss' Sort. 60 Pf.

Dziobek, O., die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen. Leipzig, Barth. 9 Mk.

Gerling, Ch. L., die Pothenoth'sche Aufgabe, in praktischer Beziehung dargestellt. 2. Asg. Marburg, Elwert'sche Verl.-Buchh. 1 Mk. 50 Pf.

Messer, J., Stern-Atlas f. Himmelsbeobachtungen. St. Petersburg, Ricker. Geb. 10 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krüger. 120. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke. prepl. 15 Mk.

Niessl, G. v., Bahnbestimmung d. Meteors vom 23. Oktbr. 1887. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Stern-Ephemeriden f. d. Jahr 1890. Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Stern-Karte, drehbare, f. Mittel-Europa. 6. Aufl. Frankfurt, Dtsche. Lehrmittel-Anstalt. Asg. A. 1 Mk. 25 Pf.; Asg. B. Transparent. 1 Mk. 60 Pf.; Asg. B. Transparent m. Beleuchtungsapparat. 1 Mk. 85 Pf.; letzterer apart. 35 Pf.

Vertheilung, die, der in beiden Bonner Durchmusterungen enthaltenen Sterne am Himmel. München, Franz'scher Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 23. Jhrg. 1888. 1. Hft. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Wittstein, A., ein Beispiel zum Theodor v. Oppolzer'schen Kanon der Finsternisse. Leipzig, Köhler's Antiqu. 10 Mk.

Physik.

Behse, H. W., Lehrbuch der Physik f. höhere Bürgerschulen, Realschulen u. techn. Lehranstalten. 2. Aufl. Weimar, B. F. Voigt. Geb. 3 Mk. 75 Pf.

Bolz, C. H., die Pyrometer. Eine Kritik der bisher construirten höheren Temperaturmesser in wissenschaftlich-techn. Hinsicht. Gekrönte Preisschrift. Berlin, J. Springer. 3 Mk.

Dubois, Untersuchungen üb. die physiologischen Wirkung der Condensatorentladungen. Bern, Wyss. 1 Mk. 50 Pf.

Exner, F., Vorlesungen über Electricität. Wien, Deuticke's Verl. 14 Mk.

Hoppe, E., die Accumulatoren f. Electricität. Berlin, J. Springer. 6 Mk.

Jaumann, G., Einfluss rascher Potentialänderungen auf den Erklärungsvorgang. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 20 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen in Theorie u. Praxis. 83.—90. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Kohlrausch, F., üb. den absoluten elektrischen Leitungswiderstand. München, Franz'scher Verl. 3 Mk. 50 Pf.

Lehmann, O., Molekularphysik m. besond. Berücksicht. mikroskop. Untersuchungen und Anleitung zu solchen, sowie ein Anh. üb. mikroskop. Analyse. 1. Bd. Leipzig, W. Engelmann. 22 Mk.; Einbd. 2 Mk.

May, O., u. A. Krebs, Lehrbuch des Elektromagnetismus. Stuttgart, J. Maier. 4 Mk. 50 Pf.

Netoliczka, E., Lehrbuch der Physik u. Chemie f. Bürgerschulen. 3 Stufen. Neue Aufl. Wien, Pichler's Wwe. & S. Kart. 2 Mk. 24 Pf.

Recknagel, G., Kompendium der Experimental-Physik. 2. Aufl. Kaiserslautern, Tascher. 16 Mk.; geb. 18 Mk.

Schmidt, A., der tägliche Gang der erdmagnetischen Kraft in Wien u. Batavia in seiner Beziehung zum Fleckenzustand der Sonne. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Schulze, L. R., das Buch der physikalischen Erscheinungen. Nach A. Guillemin f. das Verständniss weiterer Kreise bearb. Neue Ausg. Braunschweig, Salle. 10 Mk.; geb. 12 Mk. 50 Pf.

— die physikalischen Kräfte im Dienst der Gewerbe, der Kunst u. der Wissenschaft. Nach A. Guillemin f. das Bedürfniss weiterer Kreise bearb. 2. Aufl. Ebd. 13 Mk.; geb. 15 Mk.

Schneidewind, W., üb. die negative Natur organischer Radicale. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk.

Sumpf, K., Grundriss der Physik. Hildelsheim, Lax. 3 Mk. 20 Pf.

Wallentin, J. G., Lehrbuch der Physik f. die oberen Classen der Mittelschulen u. verwandter Lehranstalten. 5. Aufl. Ausg. f. Gymnasien. 3 Mk. 20 Pf.; Ausg. f. Realschulen. Wien, Pichler's Wwe. & S. Geb. 3 Mk.

Vermischte Schriften.

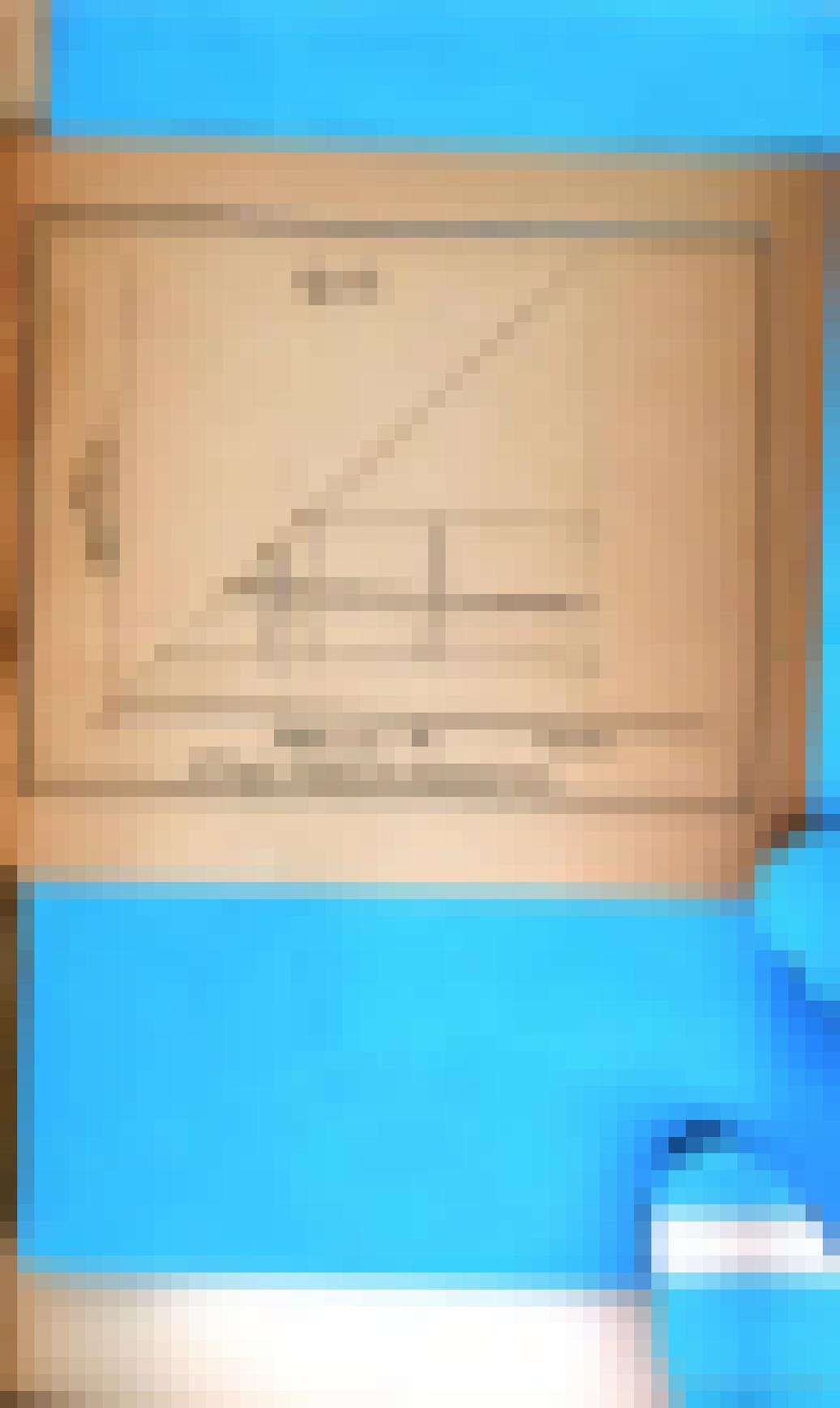
Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 14. Bd. Leipzig, Hirzel. 42 Mk.

Journal f. die reine und angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker. 104. Bd. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. proplt. 12 Mk.

Radzio, die Mathematik u. deren Nutzenanwendung im bürgerlichen Leben, insbesondere zur Vorbereitung auf die Prüfung u. s. w. f. Militär-Anwärter, Verkehrskassenbeamte u. s. w. Colbergerm., Pickel. 1 Mk. 30 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Enth. die Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik 97. Bd. 5. Hft. Leipzig, Freytag. 3 Mk.

— dass. Register XII. Zu den Bden. 91—96. Ebd. 1 Mk. 40 Pf.



Litterarischer Bericht

XXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. Von Professor Dr. H. Weissenborn. Mit 6 Figuren-Tafeln. Berlin 1888. Mayer u. Müller. 251 S.

Ueber das Betreiben der Mathematik im Mittelalter besitzen wir, wol infolge seiner geringen Fruchtbarkeit, noch so äusserst fragmentarische Kenntniss, dass Beiträge sehr willkommen sein können, namentlich wenn sie auf Herstellung eines annehmbaren Zusammenhangs gerichtet sind. Letzteres Augenmerk fehlt grossenteils den gegenwärtigen Beiträgen; sie sind noch in höherem Masse fragmentarisch. Der erste Teil der Schrift sucht Entscheidung über die zwei Fragen: ob die Werke Gerbert's, nach Manuscripten 1867 herausgegeben von Olleris, von Gerbert selbst verfasst sind, und ob derselbe seine Lehre von den Arabern oder Römern empfangen habe. Näher liegende Fragen werden mit Stillschweigen übergangen. Nur aus den citirten Angaben von Olleris: „Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II.“ — ersieht der Leser, sofern Sylvester II. im Jahr 1003 Papst war, dass vom 10. Jahrhundert als Zeit seiner Lehrtätigkeit die Rede ist. Nachdem, in Betreff der erstern Frage, die Gründe dargelegt sind, welche Cantor für die Echtheit von Gerbert's Geometrie anführt, begegnet der Verfasser denselben mit der Kritik einer grossen Anzahl von Stellen, welche ihn zu dem Schlusse führt, dass wol der erste Teil des Werkes und Einiges aus dem zweiten von Gerbert herrühren mag, der ganze dritte Teil aber höchst wahrscheinlich ihm fälschlich zugeschrieben worden ist. Sehr eingehend wird nun das Capitel über Messmethoden und Messinstrumente behandelt, bezüglich auf Höhen- und Distanz-Messung und Darstellung des Himmelsglobus auf der Ebene, nach Gerbert's Schrift. Man findet darin ein rationales theoretisch-praktisches Zuwerkgehen,

welches einen eigenen Standpunkt der Entwicklung gegenüber den griechischen Methoden charakterisirt. Die goniometrischen Functionen kommen bei diesem Verfahren gar nicht in Frage: denn statt des Kreisquadranten wird zur Wiukelmessung ein Quadrat gesetzt, und die Seite in 12 gleiche Teile geteilt, also statt des Winkels direct dessen Function tang gemessen. Zur Darstellung der Kugelfläche auf der Ebene dient die stereographische Projection. Die vom Verfasser erläuterten und interpretirten Sätze der Schrift geben einen guten Einblick in die damalige Doctrin und den Lehrgang. Stark contrastirt nun von dieser auf achtbarer Höhe der Entwicklung stehenden Geometrie die Rechenkunst, die gegen den natürlichen Verstand der Wilden sogar im Nachteil sich befindet. Um das Rechenverfahren zu erklären, sagt der Verfasser, man solle sich jemanden denken, dem es zu schwer sei das Einmaleins bis 10.10 zu erlernen, und der es etwa bis 5.5 wüsste. Dann würde er, um grössere Zahlen 6 bis 9 zu multipliciren, sich dadurch helfen, dass er die Factoren zu 10 ergänzte, und müsste so auf das Verfahren kommen, welches hier, nach Gerbert, complementare Multiplication heisst. Der Verfasser ist also wol der Meinung, die Schule habe diese complementare Multiplication zugunsten wenig begabter Schüler eingeführt. Es kann wol kein Zweifel sein, dass ein Kind ohne Kenntniss von Zahlzeichen leichter das Einmaleins bis 20.20 auswendig lernt als die complicirte Regel auch nur vorschriftsmässig ausübt, wie es hier gefordert wird. Verständniss derselben verlangt auch Gerbert nicht; der Schüler soll sich auf „die Regel“ berufen. Muss man nun annehmen, dass für die Multiplication mit Zahlen > 10 , von welcher der Verfasser kein Wort sagt, ähnliche Regeln aufgestellt wurden, so eröffnet sich ein Prospect so zurückschreckend wie er nur sein kann. Nicht für schwach begabte Anfänger war der Unterricht berechnet, sondern einander überbietende Rechenkünstler sollten angeleitet werden. Die Erklärung dieser sonderbaren Didaktik bietet sich aber leicht genug dar in dem Gebrauche der römischen Zahlzeichen und der Einrichtung des Rechenbretes für die Zahlclassen I, V, X, L, C, D, M. Wir sehen darin ein Beispiel der Herrschaft des schulmeisterlichen Zopfes: die auf die Rechenkunst verwandte Mühe war jedem Gelehrten einmal nötig und spornte jede neue Generation an, die gleiche Leistung an den Tag zu legen, bis es 600 Jahre später dem unermüdlichen Eifer Adam Riese's gelang den Strom zu hemmen und die Einführung des längst bekannten Zifferrechnens in die Schule durchzusetzen. Das Folgende knüpft nun nicht an die Ausführung der Multiplication, sondern an die durch die Regel gegebene Formel an, findet darin allgemeine arithmetische Sätze und führt deren Beziehung zu griechischen und arabischen Autoren aus. Ist diese vergleichende und interpretirende Unter-

suchung dem Fortgange des Gerbert'schen Textes entsprechend, so scheint derselbe kein geordneter Lehrgang, sondern die Ueberlieferung eines zusammengetragenen Fonds an arithmetischen Kenntnissen der Vorgänger zu sein. Nun wird noch ein drittes Thema behandelt: Rechenbret und Rechnen bei Gerbert. Den Anfang macht eine Stelle in Richerus über dessen mathematischen Unterricht in Rheims, welche über den Abacus viele Angaben macht, ohne dass daraus irgend eine Vorstellung von dessen Einrichtung und Gebrauche zu entnehmen wäre. Der Verfasser erklärt sie weder, noch erwähnt er irgend eine Frage nach ihrer Erklärung; er geht darüber hinweg zu angeknüpften Bemerkungen, zu deren Beurteilung wir nun einmal immer erst fragen müssten: Wie ist auf dem Abacus gerechnet worden? Aufstellungen darüber von Seiten andrer Autoren stimmen weder unter sich überein, noch lassen sie sich mit den Angaben von Richerus vereinigen. Als bekannt lässt sich also die Einrichtung nicht betrachten. Zuerst bemerkt der Verfasser, dass der Abacus auch geometrische Anwendung gehabt hat: er ist mit Sand bestreut, und Figuren darauf gezeichnet worden; diese werden mit den figurirten Zahlen in Verbindung gebracht. Dass aber deren Zeichnung mit dem Rechnen auf dem Abacus in irgend einer Beziehung gestanden habe, ist schwerlich zu ersehen. Am Schlusse des Ganzen verspricht der Verfasser, „ein Bild der Mathematik des Mittelalters, wenn auch nur in allgemeinen Umrissen und in groben Zügen, zu entwerfen“. Statt der allgemeinen Umrisse findet man jedoch wieder nur Einzelheiten. Als Vorarbeit mögen die vorliegenden Beiträge viel Nützlichliches enthalten; zu definitivem Resultate würde jedenfalls erst eine neue Arbeit erforderlich sein.

Hoppe.

Joachim Jungius. Festrede zur Feier seines dreihundertsten Geburtstages am 22. Oktober 1887 im Auftrage der Hamburger Oberschulbehörde gehalten von Dr. Emil Wohlwill. Mit Beiträgen zu Jungius' Biographie und zur Kenntnis seines handschriftlichen Nachlasses. Hamburg und Leipzig 1888. Leopold Voss. 85 S.

Die Rede charakterisirt in lebensvoller Weise die das Wiederaufleben der Wissenschaften anbahnende Lehrtätigkeit des Jungius, anbahnend durch Bekämpfung der unumschränkten Autorität des Aristoteles in Betreff der Naturerkenntnis. An biographischen Angaben kommen in der Rede folgende vor. Joach. Jungius, geboren in Lübeck den 22. Oct. 1587, ward 1609 Professor der Mathematik und Logik in Giessen, gab später diese Stellung auf, erwarb in Padua den medicinischen Doctorgrad, kehrte in die Heimat zurück, gründete 1622 die erste naturwissenschaftliche Vereinigung, genannt die ereunetische Gesellschaft, ward 1624 Professor der Mathematik in Rostock,

1625 Professor der Medicin in Helmstädt, erhielt 1626 erstere Stellung zum zweitenmale, und ward den 19. März 1629 Rector der classischen Schule und zugleich des Gymnasiums in Hamburg; von 1640 an bis zu seinem Tode 1657 blieb er Rector des Gymnasiums allein. Sein Vorgänger in Hamburg war Petrus Laureberg, der noch ganz der alten aprioristischen Naturlehre anhieng, welcher Jungius entgetreten musste. Seine schriftstellerische Tätigkeit und seine eingehenden äusserst vielseitigen naturwissenschaftlichen Forschungen beginnen mit 1622. Seine Werke, obwol im ganzen von sehr grossem Umfange, sind in kleinen Heften als Manuscript in Hamburg aufbewahrt. Es wird nicht erwähnt, dass irgend welche dieser Arbeiten im Druck erschienen seien. Daher konnte es kommen, dass ein grosser Teil derselben in der Feuersbrunst zugrunde gieng. Auch sind sie infolge davon, sowie auch der Kriegszeiten, dem Publicum ziemlich unbekannt geblieben, während die grössten Gelehrten jener Zeit sie mit Ehren hervorhoben. Der Rede sind einige ergänzende Notizen am Schluss beigefügt. Eine Biographie besitzen wir seit 1850 von G. E. Guhrauer unter dem Titel „Joachim Jungius und sein Zeitalter“. So wertvoll diese auch ist, wird doch eine neue Bearbeitung für notwendig erachtet, weil der Verfasser dem naturwissenschaftlichen Fache nicht angehört. Hierzu liefert ein Anhang der gegenwärtigen Schrift Vorarbeiten. H.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Door D. Bierens de Haan. Tweede verzameling. Overgedrukt uit de Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen. Af d. Natuurk. 2^o Reeks, Deel XIV, XVI, XVIII, XIX en XX, 3^o Reeks, Deel I en III. 1887. (Niet in den handel.) 465 S.

Nach der im 249. litt. Bericht besprochenen ersten ist dies die zweite Sammlung von Berichten über Form und Inhalt alter mathematischer und physikalischer Werke, welche zu jenen 17 Nummern noch 13 neue hinzufügt. Die Gegenstände dieser Schriften sind sehr verschieden und mögen hier genannt werden. M. C. Crezfeldt: Rechnen im 16. Jahrhundert. — N. S. Cruquius, M. Bolstra: Erster Gebrauch der Isobypsen bei niederländischen Ingenieuren. — W. J. Blaeu: Seekarten. — C. S. van Leeuwen: Landmessung, Placate. — J. H. J. van der Ley: Seefahrt, Erdmessung. — C. H. Gietermaker: Geometrische Fragen. — B. Spinoza: Regenbogen, Wahrscheinlichkeit u. a. — S. Stevin: Arithmetik, Singkunst, Mühlen. — D. J. B. van Burmania: Wetterkunde. — R. des Cartes: Wissenschaftliches Inventar. — J. J. Stampioen de Jonge: Wurzelauszichung. Ueber das Leben dieser Gelehrten und die Beziehung zu ihren Zeit-

genossen finden sich viele Mitteilungen. Zum Schlusse folgen Ergänzungen, Lebensberichte und ein Bücherverzeichniss. II.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XX. Roma 1887. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der 20. Band enthält folgende Abhandlungen.

M. Steinschneider: Studien über Zarkali. 2. Artikel (Forts.) — F. Jacoli: Ungedruckter Briefwechsel zwischen Tycho de Brahe, Johann Kepler und anderen berühmten Astronomen und Mathematikern des 16. und 17. Jahrhunderts und zwischen Giovanni Antonio Magini, entnommen aus dem Archivio Malvezzi de' Medici in Bologna, publicirt und erläutert von A. Favaro.

A. Favaro: Documente zur Geschichte der Accademia dei Lincei enthalten in Galileianischen Manuscripten der Biblioteca Nazionale von Florenz. — Von Giovanni Tarde und einem Besuche desselben bei Galileo vom 12. bis 15. November 1614. — Allgemeine Bibliographie der Astronomie, gedruckte Werke und Manuscript, vom Anfang der Buchdruckerei bis 1880 von J. C. Houzeau und A. Lancaster, 2 Teile. — Die römische Wissenschaft in der Zeit des Augustus, historische Untersuchung nach Viteuve von A. Terquem.

E. Narducci: Leben des Pythagoras geschrieben von Bernardino Baldi.

Ch. Henry: Brief an den Fürsten D. B. Boncompagni über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik.

A. Marre: Theorie des Quadrats der Hypotenuse.

R. Schram (in französischer Uebersetzung von E. Pasquier): Notiz über die Arbeiten von Theodor von Oppolzer nebst dem vollständigen Verzeichniss seiner Publicationen.

T. Bertelli Barnabita: Von einigen alten und neuen elektro-seismischen Theorien und Untersuchungen.

P. Riccardi: Ferneres über Giovanni Battista della Porta's Abhandlung *De quadratura circuli*.

G. Govi: Von der Erfindung des Mikrometers für die astronomischen Instrumente. II.

Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Hamburg 1889. Verlagsanstalt und Druckerei. 40 S.

Diese vortrefflich abgefasste kleine Schrift gibt Unkundigen der Mathematik Aufschluss über die Bedeutung des Problems der Qua-

dratur des Kreises, erklärt zunächst das Interesse, welches sich seit Jahrtausenden daran geknüpft hat und führt eingehend die Geschichte der intellectuellen Fortschritte, der praktischen Aushilfe durch Näherungswerte und der auftretenden Irrtümer bei den Aegyptern, Babyloniern, Indiern, Arabern, Chinesen und Griechen im Altertume, dann in Europa bis zur Gegenwart durch. Hieraus ist, weil wol weniger bekannt, hervorzuheben, dass schon Archimedes die Möglichkeit unbegrenzter Annäherung erkannt und gelehrt hat. Der Sinn des Problems knüpft sich überall an die Construction nach geometrischen Postulaten. Am Schlusse wird der Gang des Lindemann'schen Beweises der Unmöglichkeit der Lösung mitgeteilt, welcher diese Grenze weit überschreitet. H.

L e h r b ü c h e r.

Eléments des Mathématiques. Par M. Sibiriakoff. St. Petersburg 1888. Aug. Deubner. 8 S.

Die russisch und französisch erschienene Broschüre besteht aus 3 Capiteln, von denen das erste die Bedeutung der Null und der negativen Grössen, das zweite die der imaginären Wurzeln der Gleichungen erklärt, das dritte die algebraischen Gleichungen für x in solche für $x-1$ transformirt. Hiernach könnte man etwa vermuten, dass die Broschüre, sofern ihr Inhalt nur Anfängern unbekannt sein kann, zur Ergänzung irgend eines Lehrbuchs der Algebra dienen sollte. Doch bezeichnet der Verfasser die Schrift im Eingang als seine Untersuchungen und insbesondere das Gesetz der Coefficienten der transformirten Gleichung als seine Entdeckung. Dann freilich muss man das Ganze als Specimen seiner Studien ansehen. (Auf besonderen Wunsch des Verlegers hier besprochen.) Hoppe.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für den Schulgebrauch. Von Dr. Karl Nies, Lehrer an dem Grossherz. Realgymn. und der Realschule in Darmstadt. Darmstadt 1888. A. Bergsträsser. 78 S.

Der erste Abschnitt des Buches behandelt die Geometrie. Die wichtigste Frage ist hier, in welcher Weise dem Schüler der Begriff der Kreisfunctionen vorgeführt wird. Der Verfasser definiert dieselben zunächst als Verhältniszahlen der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, später durch Linien am Kreise vom Radius 1 und schliesslich mit Hilfe der Parallelcoordinaten eines Punktes. Jede der drei Definitionen wird zur Ableitung einer Reihe von Eigenschaften der Functionen

benutzt. — Will man aus pädagogischen Gründen nicht mit der allgemeinsten Definition beginnen, so erscheint es mir erwünscht, die speciellen doch nur als Vorübungen voranzuschicken. Jedenfalls sollte nach Einführung der allgemeinen Definition gezeigt werden, dass die früheren in ihr enthalten sind, und sollten alle Eigenschaften der Functionen aus ihr mit wissenschaftlicher Strenge abgeleitet werden, so dass der Schüler bei Repetitionen das der allgemeinen Definition Vorausgehende fortlassen kann. Die zweite und dritte der oben angeführten Definitionen sollten nicht von einander getrennt werden. — Die für den Schulgebrauch notwendigen Formeln sind vollständig abgeleitet, die Beweise sehr ausführlich, so dass auch schwache Schüler sie leicht verstehen werden. Für die Functionen der Summe zweier Winkel werden die beiden üblichen planimetrischen Ableitungen gegeben. Im zweiten Abschnitt, der Trigonometrie, werden zunächst das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck ausführlich behandelt, dann die für die Auflösung des allgemeinen Dreiecks notwendigen Sätze abgeleitet, die Einführung des Hilfswinkels besprochen und die verschiedenen Lösungen der vier Fundamentalaufgaben gegeben, wobei vielleicht die einfachsten Lösungen hätten mehr hervorgehoben werden können. Für sämtliche Aufgaben werden Zahlenbeispiele durchgeführt. Am Schluss folgt ein Paragraph, in dem die bei den verschiedensten trigonometrischen Aufgaben vorkommenden Stücke durch r und die Winkel ausgedrückt werden. In einem Anhang bietet der Verfasser eine grosse Zahl von Uebungsbeispielen mit den Resultaten. — Ist somit das Buch im ganzen für den Unterricht brauchbar, so hat es doch im einzelnen einige Mängel, deren Beseitigung bei einer neuen Auflage erwünscht erscheint. So heisst es in § 21: „Der Sinus stellt sich am Kreis als die Senkrechte vom Endpunkte des gedrehten Schenkels auf den ruhenden Schenkel . . . dar“. Wenigstens sollte doch gesagt sein: „am Kreis vom Radius 1.“ — „Der positive Sinn der Drehung ist derjenigen des Uhrzeigers entgegengesetzt.“ Nein! Wir nehmen die eine Drehungsrichtung, ganz gleichgiltig welche, als positiv an, dann ist die entgegengesetzte negativ. — „In einem rechtwinkligen Dreieck, welches die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ist, beträgt der eine Winkel 30° ; in diesem Falle ist $c = 1$, $a = \frac{1}{2}$.“ (!) — § 33. „ . . . man versteht nun für Winkel über 90° unter 1., Sinus eines beliebigen Winkels die Ordinate des Endpunktes des gedrehten Schenkels = y , 2., Cosinus . . . , immer unter der Voraussetzung, dass der Radius des Koordinatenkreises $r = 1$ ist.“ Das ist die letzte und allgemeinste Definition, die der Verfasser giebt! Die scheint also nur für beliebige Winkel über 90° zu gelten. Statt Ordinate sollte es Masszahl der Ordinate heissen, damit sich dem Schüler fest einprägen, dass der Sinus eine Zahl und keine Linie ist. Gleich darauf

definiert der Verfasser ja auch die Tangente eines Winkels als „Quotienten der Masszahlen seiner Ordinate und Abscisse“. Hier ist nun allerdings wieder vergessen, von der Ordinate eines Winkels zu sprechen. Es giebt nur Ordinaten von Punkten. Aehnliche Ungenauigkeiten finden sich an verschiedenen andern Stellen. — § 55. Die Moivre'sche Formel wird für die 2. Potenz bewiesen und ihre Giltigkeit für die n . Potenz und sogar für gebrochene Exponenten als selbstverständlich hingestellt! — In § 63 beziehen sich dieselben Buchstaben teils auf Figur 3, teils auf Figur 19. Das verwirrt den Schüler. — In § 68 werden „Formel“ und „Wert“ als gleichbedeutende Wörter gebraucht. — § 83, 3: „Die Formel I ist ungenau“. Der Verfasser meint natürlich das nach ihr berechnete Resultat. — Es wird nicht nötig sein, noch weitere Beispiele anzuführen, um den oben ausgesprochenen Wunsch, dass der Verfasser das Buch vor einer neuen Auflage einer genauen Durchsicht unterwerfen möge, berechtigt erscheinen zu lassen.

Dr. Edmund Schulze.

Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von 800 Übungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Neunte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 251 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1888. C. F. Winter. 290 S.

Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Geometrie. Von Dr. Carl Spitz. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. Neunte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 112 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1888. C. F. Winter. 113 S.

Das Lehrbuch nebst Anhang ist in 8. Auflage im 264. litt. Berichte S. 41 besprochen. Änderungen in der neuen Auflage sind im Vorwort nicht angezeigt. Das gerügte trügerische Zuwerkegeben beim Parallelsatze ist beibehalten worden. H.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von 630 Beispielen und Übungsaufgaben zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. Carl Spitz. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 47 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1888. C. F. Winter. 140 S.

Anhang zu dem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie von Dr. Carl Spitz. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der in dem Lehrbuche befindlichen Aufgaben enthaltend. Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1888. C. F. Winter. 73 S.

Ueber die Lehrmethode ist zunächst zu bemerken, dass die goniometrischen Functionen von Anfang an (als Zahlen, nicht Linien) für beliebig grosse Winkel eingeführt werden. Verbessert wird die Methode durch die anfängliche Allgemeinheit weder vom ideellen noch vom praktischen Gesichtspunkte. Die Goniometrie des 1. Quadranten (Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks) ist kein blosser specieller Teil der gesamten Theorie, sondern umfasst vollständig die notwendige Voraussetzung transcendenten Abhängigkeit; der übrige Teil ist algebraische Anwendung. Auch für Auffassung und Orientierung ist es ungünstig, mit einem überflüssig weiten Felde der Betrachtung zu beginnen. Für die fernere Entwicklung der Lehre wird nichts gewonnen; denn die Allgemeingültigkeit der Formeln muss jedenfalls an diesen selbst bewiesen werden, wie es auch hier geschieht. Die Darstellung zeichnet sich nicht durch Concinnität und Uebersichtlichkeit aus; sie lässt das Lehrpensum als ein grösseres erscheinen als es in Wirklichkeit ist. Dagegen versäumt sie auf den für Anfänger wichtigen Punkt, die Vieldeutigkeit der inversen Functionen, aufmerksam zu machen. Zu Anfang ist es zwar an 2 Stellen ausgesprochen, dass der Winkel durch die Function nicht vollständig bestimmt wird; doch weiterhin und besonders in den Uebungsbeispielen wird darauf keine Rücksicht mehr genommen. Ebenso bleibt das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel unbeachtet, und die Formel $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$, welche sich doch leicht rational herleiten lässt, wird durch Quadratwurzel gefunden ohne nur zu erwähnen, dass dann nach dem Vorzeichen gefragt werden müsste. Die Trigonometrie behandelt erst das rechtwinklige, dann das schiefwinklige Dreieck, und zwar an erstem 4 Aufgaben, über letzteres erst 5 Lehrsätze, dann 4 fundamentale und viele Uebungsaufgaben. H.

Lehrbuch der Planimetrie. Für den Schul- und Selbstunterricht. Von H. Weidemann, Oberlehrer der Mathematik am Landesgymnasium zu Fellin. Berlin 1888. A. Deubner. 210 S.

Ueber den Zweck der Herausgabe eines neuen Lehrbuchs wird im Vorwort reichlich Rechenschaft gegeben. Es werden darin keine neuen Grundsätze aufgestellt, noch nach irgend einer Seite hin eine Vollkommenheit in Aussicht genommen; vielmehr ist es Ziel der Bearbeitung, im einzelnen, ohne Bevorzugung des Alten oder Neuen, zu bessern, wo sich das Bedürfniss zeigt. Dass dies mit Fleiss und Umsicht geschehen, ist anzuerkennen. Kürze und Beschränkung auf das Notwendige hat sich der Verfasser nicht auferlegt: es werden keine Worte gespart um alles, was dem Verständniss und dem Auffinden der Lösungen der Aufgaben dienlich ist, beizubringen; nament-

lich hielt dies der Verfasser für erforderlich, um dem Schüler das Nachholen versäumter Lehrstunden zu erleichtern. Doch ist dabei darauf Bedacht genommen worden die Uebersichtlichkeit nicht zu beeinträchtigen. Ueber die Anordnung des Stoffes ist zu erwähnen, dass die Kreislehre ganz ans Ende gestellt ist, während die Erklärung des Kreises in der Einleitung vorausgeht. Allerdings muss der Kreis zur Bestimmung der Länge von Geraden bei unbekannter Richtung schon im Anfang dem Schüler bekannt sein, ohne dass er darum die Kreissätze zu kennen braucht. Aber eben, weil er bekannt genug ist, fällt auch jeder merkliche Grund weg die Theorie des Kreises so auszusondern, als ob seine Scheidung wesentlicher wäre als die zwischen Gleichheit und Aehnlichkeit. In diesem Punkte ist also die Veränderung keine Besserung zu nennen. Verdienstlich ist es, dass der Verfasser nirgends die strenge Logik und wissenschaftliche Wahrheit hinter falsche pädagogische Rücksichten zurückstellt; es sind nicht wenige Lehrbücher, denen er damit entgegentritt. Auch was die Benennung betrifft, findet man es hier einmal ausgesprochen, dass der Kreis eine Linie ist, während unzählige Lehrbücher, obgleich sie im ganzen Verlaufe eine Linie darunter verstehen, doch in der anfänglichen Erklärung ihn entweder als Fläche bezeichnen oder doch beide Bedeutungen zulassen. Dagegen ist die Verpflanzung der Steiner'schen Bedeutung des Wortes „Strahl“ in die Elementargeometrie nur geeignet Verwirrung zu schaffen. Unter Strahlen = Radien versteht man Gerade, die von einem und demselben Punkte ausgehen. Hierfür bedürfen wir ein besonderes Wort um der vielfachen Centralbetrachtungen willen. Für unbegrenzte Gerade hingegen bedürfen wir keins; denn eine Gerade ohne Angabe von Grenzen, mit Absehen von Grenzen, sofern sie ohne Einfluss sind, unterscheidet sich nicht von einer unbegrenzten. Hier hatte also der Verfasser nicht den mindesten Grund von der gewöhnlichen Terminologie abzugehen.

H.

Allgemeine Arithmetik und Algebra in ihrer Beziehung zu einander und zu den höheren bürgerlichen Rechnungsarten, insbesondere zu den den Kapital- und Renten-Versicherungen grundlegenden Zinseszinsrechnungen. Für Seminaristen und Lehrer in einer für den Selbstunterricht geeigneten Form bearbeitet von Karl Lembcke, Seminarlehrer. Wismar 1888. Hinstorff. 170 S. Text und 6 Tabellen.

Der Abfassung zufolge ist der Teil des Buchs, welcher Lehren der Algebra enthält, mathematische Vorbildung für die Rentenrechnung, welche als Hauptziel des Ganzen erscheint. Er umfasst die algebraischen Gleichungen 1. und 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, die Lehre vom Logarithmus und dem Gebrauche der

Tafeln, die Exponentialgleichungen und die Progressionen in einem gänzlich auf praktische Ausübung eingerichteten Vortrage mit Beispielen. Der übrige Teil lehrt, die einzelnen Fälle durchgehend, die Anwendung auf die zum Versicherungsfach gehörigen Aufgaben mit Ausschluss derjenigen, bei welchen die Wahrscheinlichkeit in Rechnung zu ziehen ist. H.

Vermischte Schriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XV. Amsterdam 1888. Sikken en Co.

Der Inhalt des 15. Bandes ist folgender.

C. L. Landré: Leibrente in Terminen und durchlaufend. — Ueber den Einfluss der Lebensfälle und des Rentenfusses auf den Reservetarif bei Lebensversicherung.

J. C. Kluyver: Ueber die invariante Beziehung zwischen 2 in und um ein Vieleck beschriebenen Kegelschnitten.

A. Eecon: Lösung der Preisfrage 11: Ein Kraftsystem, das eine Resultante hat, wirke auf die Ecken eines Vielecks. Durch welchen Punkt muss bei gleichzeitig gleicher Drehung aller Kräfte die Resultante beständig gehen? — Untersuchung der Bewegung einer Ebene in oder über einer andern, bei welcher 2 Gerade in der ersten Tangenten zweier Kreise in der zweiten bleiben.

F. J. van den Berg: Forts. von IX. und XI. über Wurzelpunkte.

A. J. A. Prange: Ueber die Lösung der Aufgabe, Mittelpunkte und Radien der Kreise zu finden, die 3 gegebene Kreise berühren.

G. Schouten: Beantwortung der Preisfrage Nr. 3 für 1887.

H.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, Professor na Escola Polytechnica do Porto, Antigo Professor na Universidade de Coimbra, Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa etc. Vol. VIII. Coimbra 1887.

Der Inhalt des 8. Bandes ist folgender.

M. Lerch: Ueber einen Satz der Theorie der elliptischen Functionen. — Modification des dritten Gauss'schen Beweises des Legendre'schen Gesetzes der Reciprocität. — Ueber eine Eigenschaft der Zahlen.

H. Novareso: Ueber die vollkommenen Zahlen.

E. Cesàro: Bemerkungen über die Theorie der Reihen.

F. Gomes Teixeira: Ueber die Entwicklung der Functionen imaginärer Variabeln in Reihen. — Ueber die Derivation der zusammengesetzten Functionen. — Ueber die Reduction der hyperelliptischen Integrale.

R. Guimarães: Ueber die Rectification der Ellipsenbogen.

A. Gützmer: Ueber eine von M. Lerch betrachtete Reihe. — Bemerkungen über die Theorie der Reihen. — Ueber gewisse arithmetische Mittel der Functionen einer complexen Variabeln.

H. le Pont: 2 Noten aus der Integralrechnung. — Ueber die asymptotischen und Krümmungslinien.

A. Schiappa Monteiro: Ueber das gleichschenklige Dreieck.

J. M. Rodrigues: Ueber die Lagrange'sche Reihe.

M. E. Weyr: 2 Bemerkungen zu den Reihen.

M. d'Ocagne: Ueber ein arithmetisches Problem. — Ueber die Kegelschnitte. — Algebraisches Problem.

Bibliographie. Auszüge aus neuen Arbeiten.

II.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté. Sous les auspices du Ministère de l'instruction publique et de la Municipalité de Toulouse. Avec le concours des Conseils Généraux de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées. Tome II. Année 1888. Paris 1888. Gauthier-Villars et fils.

Der Inhalt des 2. Bandes ist folgender.

Ch. Bioche: Ueber die asymptotischen Linien gewisser windschiefer Regelflächen.

P. Painlevé: Ueber die singularen Linien der analytischen Functionen.

Hermite: Bemerkungen über die Zerlegung der doppelt periodischen Functionen in einfache Elemente. — Ueber die Transformation des elliptischen Integrals 2. Gattung.

F. Tisserand: Ueber eine Differentialgleichung, welche eine wichtige Rolle in der Mechanik des Himmels spielt.

B. Baillaud, Ergänzende Untersuchungen über die Entwicklung der Störungfunction.

G. Koenigs: Beiträge zur Theorie des Kreises im Raume.

A. Destrem: Verrückungen des Kupfers in einigen Lösungen von Kupfersalzen durch Zink und Cadmium.

F. J. Stieltjes: Ueber die lineare Transformation des elliptischen Differentials $\partial x : \sqrt{x}$.

P. Duhem: Historische Studie über die Theorie der Magnetisirung durch Induction. — Von der Magnetisirung durch Induction.
H.

Mathésis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne. Publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Tome VIII. Gand 1888. Ad. Hoste.

Der 8. Band enthält folgende Abhandlungen.

G. de Longchamps: Ueber eine merkwürdige Trisectrix. — Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

Verniory: Eine Zerlegung in Partialbrüche.

Barbarin: Inhalt einiger Dreiecke. — Aufgaben über die Profil-Gerade.

Cl. Servais: Anwendungen der linearen Quasi-Inversion auf die osculirenden Curven. — Ueber die Theorie der Transformationen.

E. Cesàro: Developpanten des Punktes. — Trägheitsmomente des Dreiecks und Tetraeders. — E. C. und E. Catalan: Ueber einen Satz von Oltramare.

J. J. Sylvester: Ueber die vollkommenen Zahlen.

M. d'Ocagne: Ueber die complementaren Punkte. — Zu einer früheren Note über das Dreieck (t. VII.)

Bergmans: Sätze von der Parabel.

Jerábek und Neuberg: Ueber die der Euler'schen Geraden inverse Hyperbel.

E. Catalan: Ueber die vollkommenen Zahlen.

Fuhrmann: Ueber die Hyperbel F' .

P. Mansion: Methode der Unendlichkleinen.

J. Neuberg: Ueber die involutiven quadratischen Transformationen.

E. Wasteels: Ueber das Viviani'sche Theorem.

E. Lemoine: Ueber das Mass der Einfachheit in den mathematischen Constructionen.

Ph. Gilbert: Bestimmung der Axen eines centralen Ellipsoid-schnitts nach Grösse und Richtung.

Ausserdem Auszüge, viele Fragen und einige Lösungen.

H.

Annuaire pour l'an 1889, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1889 renferme des articles

des aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: Sur les quatre sessions de l'Association géodésique internationale à Paris, Berlin, Nice et Salzbourg; par H. Faye. — Sur la mesure des masses en Astronomie; par F. Tisserand. — Une expédition au massif du mont Blanc; par J. Janssen. — Une ascension au pic de Ténériffe; par Bouquet de la Grye. — Discours prononcé à l'inauguration de la statue d'Ampère à Lyon, par A. Cornu. — Revue des principaux travaux du Bureau des Longitudes en 1888; par le Secrétaire. In-18 de IX-830 pages, avec 2 Cartes magnétiques. (1 fr. 50 c.)

Gauthier-Villars et fils.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXIII.

Methode und Principien.

Natanson, L., üb. die kinetische Theorie der Joule'schen Erscheinungen. Dorpat, Karow. 1 Mk.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. Bearb. u. hrsg. v. B. Dürigen. 21. u. 22. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

Lehrbücher.

Frankenbach, F. W., Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. 1. Tl. Die Planimetrie. Liegnitz, Krumbhaar. 1 Mk. 50 Pf.

Sammlungen.

Bardey, E., arithmetische Aufgaben, nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise f. höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Prorealgymnasien. 5. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 476.—499. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Klunzinger, K., Aufgaben f. das mündliche u. schriftliche Rechnen zum Gebrauch f. Schulaspiranten, gehobene Oberklassen u. Fortbildungsschulen. Lehrerausg. 2. Afl. Nagold, Zaiser. 2 Mk.; geb. 2 Mk. 20 Pf.

— Schülersausg. 1 Mk.; geb. 1 Mk. 20 Pf.

Knies, K. u. O. Bachmann, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. bestimmten Zahlen. 1. Tl. 3. Afl. München, Kellerer. 1 Mk. 20 Pf.

Láska, W., Sammlung v. Formeln der reinen und angewandten Mathematik. 1. u. 2. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 13 Mk. 50 Pf.

Lieber, H. u. F. v. Lühmann, trigonometrische Aufgaben. 3. Afl. Berlin, L. Simion. 4 Mk.

Reeb, W., algebraisches Uebungsbuch m. einleit. Fragen, eingereihten Sätzen u. Regeln, sowie ausgeführten Musterbeispielen. 3. Afl. Giessen, Roth, Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Schubert, H., Sammlung v. arithmetischen u. algebraischen Fragen u. Aufgaben, verbunden m. e. systemat. Aufbau der Begriffe, Formeln u. Lehrsätzen der Arithmetik. 2. Hft. Für obere Klassen. 2. Afl. Potsdam, Stein's Verl. 1 Mk. 80 Pf.

Servus, H., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra f. Gymnasien, Realgymnasien u. höheren Bürgerschulen. 3. Hft. Leipzig, Teubner. Kart. 75 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Dorn, J. u. P. Nakel, Anleitung zum Unterrichte im Rechnen. 4. Tl. Die schwierigen Fälle der Bruchrechnung, die Decimalbrüche u. die bürgerl. Rechnungsarten. 7. Afl., besorgt v. P. Nakel. Breslau, Handel's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Forsyth, A. R., Lehrbuch der Differential-Gleichungen. Mit e. Anh.: Die Resultate der im Lehrbuche angeführten Übungsaufgaben enth., hrsg. v. H. Maser. Braunschweig, Vieweg & S. 14 Mk.

Lie, S., zur Theorie der Transformationsgruppen. Christiania, Dybwad. 35 Pf.

Menzel, J., Lehrgang f. den Elementar-Unterricht im Rechnen. 5. Afl. Bielefeld, Velhagen & Kl. Geb. 3 Mk.

Schlesinger, L., e. Beitrag zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung m. e. Relation dritten Grades zwischen den Elementen e. Fundamentalsystemes v. Integralen. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 80 Pf.

Winckler, A., über ein Kriterium d. Grössten und Kleinsten in der Variationsrechnung. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Geometrie.

Brockmann, F. J., Materialien zu Dreieckskonstruktionen nebst Anwendung auf fast vierhundert Aufgaben. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

End, W., algebraische Untersuchungen üb. Flächen m. gemeinschaftlichen Curven. Tübingen, Fues. 80 Pf.

Ganter, H. u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Huebner, L., ebene u. räumliche Geometrie d. Masses in organischer Verbindung m. der Lehre v. den Kreis- u. Hyperbelfunktionen. Neu dargestellt. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Johannes J., die rationellen Raumkurven sechster Ordnung erzeugt durch geometrische Transformationen aus e. Kegelschnitte. Tübingen, Fues. 1 Mk.

Kerschensteiner, G., üb. die Wendepunktgleichung 6. Grades und die ihr zugehörigen rationalen Kurven vierter Ordnung. Nürnberg, Ballhorn's Verl. 1 Mk.

Krieg v. Hochfelden, F., Frhr., üb. projective Beziehungen, die durch vier Gerade im Raume gegeben sind. 1. Mittheilg. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Leuch, S. R. A., Erzeugung u. Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung. Leipzig, Fock. 2 Mk.

Macher, G., Repetitorium der elementaren Mathematik. 1. Tl. Planimetrie. Würzburg, Hertz. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Menger, G., Elementa di geometria descrittiva ad uso delle scuole reali superiori. Wien, Hölder. 2 Mk. 80 Pf.

— geometrische Formenlehre in Verbindung mit dem Freihandzeichnen. Für die 1. Classe der Realschulen. 2. Afl. Ebd. 80 Pf.

Simon, M., der erste Unterricht in der Raumlehre. Berlin, Springer. Kart. 50 Pf.

Waelsch, E., üb. das Normalsystem u. die Centralfläche algebraischer Flächen insbesondere der Flächen 2. Grades. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 40 Pf.

Wapienik, A., Lehrbuch der Geometrie f. d. oberen Classen der Mittelschulen. Wien, Gracser. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Wiedemann, H., Lehrbuch der Planimetrie. Für den Schul- u. Selbstunterricht. Berlin, Deubner. 3 Mk.

Trigonometrie.

Focke, M. u. M. Krass, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen und anderen höheren Lehranstalten. Neueste Afl. Münster, Coppenrath. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Veröffentlichung d. königl. preuss. geodätischen Instituts. Astro-

nomisch-geodät. Arbeiten I. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmungen im J. 1887. Bestimmung der Polhöhe u. d. Azimutes auf den Stationen Raumberg u. Kiel in den J. 1886 u. 1887. Berlin, Stankiewicz. 15 Mk.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometer-Vereins. Hrsg. v. W. Jordan u. C. Steppes. Jahrg. 1889. (24 Hfte.) 1. Hft.. Stuttgart, Wittwer's Verl. proclt. 9 Mk.

Mechanik.

Fennel, L., üb. die Bewegung e. festen Körpers in e. tropfbaren Flüssigkeit. Kassel, Freyschmidt. 2 Mk.

Poisson, S. D., Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch hrsg. u. m. e. Anhang versehen v. A. Pfannstiel. 4. Lfg. Dortmund, Meyer. 2 Mk. 75 Pf.

Rausenberger, O., Lehrbuch der analytischen Mechanik. 2. Bd. Mechanik der zusammenhäng. Körper. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Technik.

Echo, elektrotechnisches Stimme aus allen Ländern. Red.: M. Krieg. Jahrg. 1889. (52 Nrn.) Nr. 1. Leipzig, Leiner. Viertelj. 3 Mk.

Gaisberg, S. Frhr. v., Taschenbuch f. Monteure elektrischer Beleuchtungsanlagen. 3. Aufl. München, Oldenbourg. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Geist, E. H., Berechnung elektrischer Maschinen. Handbuch für Fachleute. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.

Gerard's, E., Elemente der Elektrotechnik. Deutsche Ausg. v. J. Kareis u. W. Peukert. Wien, Deuticke. 9 Mk.

Gohletz, G., der Telephonist. Leitfaden zur schnellen u. sicheren Bedienung d. Telephon- resp. Mikrophon-Apparates. Berlin, Conrad. 40 Pf.

Hoppe, Elektrotechnik. 1.—3. Aufl. Klausthal, Grosse. 50 Pf.

Thompson, J. P., die dynamoelektrischen Maschinen. 3. Aufl. übersetzt von C. Grawinkel. 2. Hft. Halle, Knapp. 4 Mk.

Optik, Akustik und Elastizität.

Füchtbauer, G., einige Eigenschaften der optischen Linse in Bezug auf Zentralstrahlen. Nürnberg, Ballhorn's Verl. 90 Pf.

Johnen, P. J., Elemente der Festigkeitslehre in elementarer Darstellung. Weimar, B. Fr. Voigt. 6 Mk. 75 Pf.

Mach, E., üb. d. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des durch schwere Schüsse erregten Schalles. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Anleitung zur Beobachtung und Meldung der Gewitter-Erscheinungen. Hrsg. vom königl. preuss. meteorolog. Institut. Berlin, Asher & Co. 60 Pf.

Beobachtungs-Ergebnisse der kgl. Sternwarte zu Berlin. 3. u. 4. Hft. Berlin, Dümmler's Verl. 7 Mk.

Bredichen, Ch., sur l'origine des étoiles filantes. Leipzig, Voss' S. 2 Mk. 40 Pf.

Ephemeriden, astronomisch-nautische, f. d. J. 1890. Deutsche Asg. Red. v. F. Anton. III. Jahrg. Triest, Schimpff. Kart. 2 Mk. 70 Pf.

Emmerig, A., unser nächtlicher Sternhimmel. 2. Aufl. (Mit 1 Sternkarte u. 47 Fig.) Bamberg, Buchner. Kart. 2 Mk.; geb. 3 Mk.

Günther, S., die Meteorologie, ihrem neuesten Standpunkte gemäss u. m. besond. Berücksichtigung geographischer Fragen dargestellt. München, Th. Ackermann. 5 Mk. 40 Pf.

Harlacher, A. R., die hydrometrischen Beobachtungen im Jahre 1887. (Hydrograph. Commission d. Königr. Böhmen. Hydro-metr. Section. No. XII.) Prag, Calve. 3 Mk.

Haertl, E., Frhr. v., die Bahn d. periodischen Kometen Winnicke in den Jahren 1858—1886, nebst e. neuen Bestimmung der Jupitermassen. Leipzig, Freytag. 4 Mk. 80 Pf.

Hirn, G.-A., Constitution de l'espace céleste. Colmar, Barth. 16 Mk.

Instruktion f. die Beobachter an den meteorologischen Stationen II., III. u. IV. Ordnung. Hrsg. vom königl. preuss. meteorolog. Institut. Berlin, Asher & Co. 2 Mk. 50 Pf.

Liznar, J., die 26tägige Periode d. Nordlichtes. Leipzig, Teubner. 60 Pf.

Meissel E., Tafel der Bessel'schen Functionen $I^0 k$ und $I' k$ von $k = 0$ bis $k = 15,5$ berechnet. Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Neumayer, G., Linien gleicher magnetischer Variation (Declination), gleicher magnetischer Inklination u. gleicher magnetischer Horizontal-Intensität. nach Gauss'schen Grundsätzen 1885, O. Hrsg. von der deutschen Seewarte II. 3. Blatt. Hamburg, Friederichsen & Co. 3 Mk.

Pernter, J. M., Scintillometer-Beobachtungen auf dem Hohen Sonnenblick (3095 m) im Febr. 1888. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Peter, B., Monographie d. Sternhaufen G. C. 4460 u. G. C. 1440, sowie e. Sterngruppe bei θ Piscium. Leipzig, Hirzel. 4 Mk.

Plassmann, J., die veränderlichen Sterne. Darstellung der wichtigsten Beobachtungs-Ergebnisse u. Erklärungs-Versuche. Köln, Bachem. 1 Mk. 80 Pf.

Planté, G., die elektrischen Erscheinungen der Atmosphären. Deutsche Ausg., besorgt v. J. G. Wallentin. Halle, Knapp. 5 Mk.

Seeliger, H., fortgesetzte Untersuchungen üb. das mehrfache Sternensystem ζ Cancri. München, Franz'sche Verl. 2 Mk. 80 Pf.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. Red. H. J. Klein. 21. Bd. od. Neue Folge. 17. Bd. 1889. (12 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Scholtze. proclt. 12 Mk.

Struve, M., Beobachtungen der Saturntrabanten. 1. Abth. Beobachtungen am 15zölligen Refraktor. Leipzig, Voss' S. 10 Mk. 60 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 23. Jahrg. 1888. 2. u. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Wetter, das. Meteorologische Monatsschrift f. Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 6. Jahrg. 1889. (12 Hfte.) 1. Hft. Braunschweig, Salle. proclt. 6 Mk.

Wochenschrift f. Astronomie, Meteorologie u. Geographie. Neue Folge. 32. Jahrg. 1889. No. 1. Halle, Schmidt's Verl. proclt. 10 Mk.

Zeitschrift, meteorologische. Red. v. J. Hann u. W. Köppen. 6. Jahrg. 1889. (12 Hfte.) 1. Hft. Wien, Hölzel's Verl. proclt. 20 Mk.

Nautik.

Döring, W., der wetterkundige Navigator. Die Orkane. 2. Afl. Oldenburg, Schulze. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Physik.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums. Hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1887. 2 Thle. Leipzig, Voss' S. 25 Mk. 80 Pf.

Anzeiger, elektrotechnischer. Wochenschrift f. d. elektrotechn. Industrie und deren verwandte Fächer. Red.: A. Wilke. 6. Jahrg. 1889. Nr. 1. Berlin, Günther & S. Viertelj. 1 Mk. 50 Pf.

Handl, A., Lehrbuch der Physik f. die oberen Classen der

Mittelschulen. 4. Aufl. Ausg. f. Gymnasien. Wien, Hölder. 2 Mk. 72 Pf.

— Ausgabe f. Realschulen. 2 Mk. 48 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen in Theorie u. Praxis. 91.—96. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Lehmann, O., Molekularphysik m. besond. Berücksicht. mikroskop. Untersuchgn. u. Anleitg. zu solchen, sowie e. Anh. üb. mikroskop, Analyse. 2. Bd. Leipzig, Engelmann. 20 Mk.

Physik, praktische. Zeitschrift f. Physiker, Techniker, Aerzte, Fabrikanten, etc. Hrsg. v. M. Krieg. 2. Jahrg. 1889. (12 Hfte.) 1. Hft. Magdeburg, Faber. Halbjährl. 3 Mk.

Sattler, A., Leitfaden der Physik und Chemie. Für die oberen Classen von Bürger- und höheren Töchterschulen. 6. Aufl. Braunschweig, Vieweg & S. 80 Pf.

Sumpf, K., Anfangsgründe der Physik. 3. Aufl. Hildesheim, Lax. 1 Mk. 50 Pf.; geb. 1 Mk. 80 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften. 16. Bd. 3. Abth. München, Franz'sche Verl. 6 Mk. 50 Pf.

Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vom J. 1887—1888. 7. Folge. 2. Bd. Leipzig, Freytag. Kart. 25 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 33. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. proepl. 20 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikal. Classe. 1888. I. II. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Encke, J. F., gesammelte mathematische u. astronomische Abhandlungen. 3. (Schluss-) Bd. Astronomische u. optische Abhandlgn. Berlin, Dümmler's Verl. 5 Mk.

Kleyer, A., Encyclopädie der gesammten mathematischen, technischen und exacten Naturwissenschaften. 34. Lfg. Stuttgart, Maier. 1 Mk.

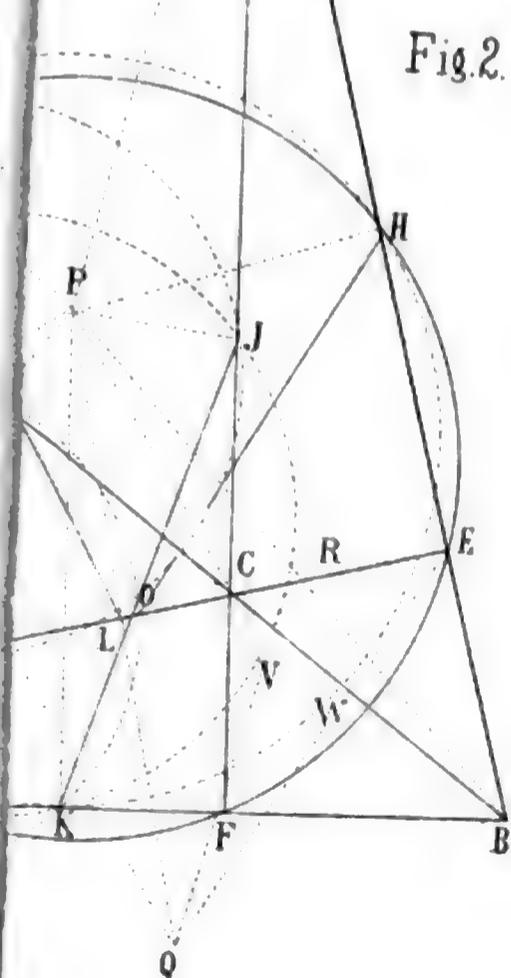
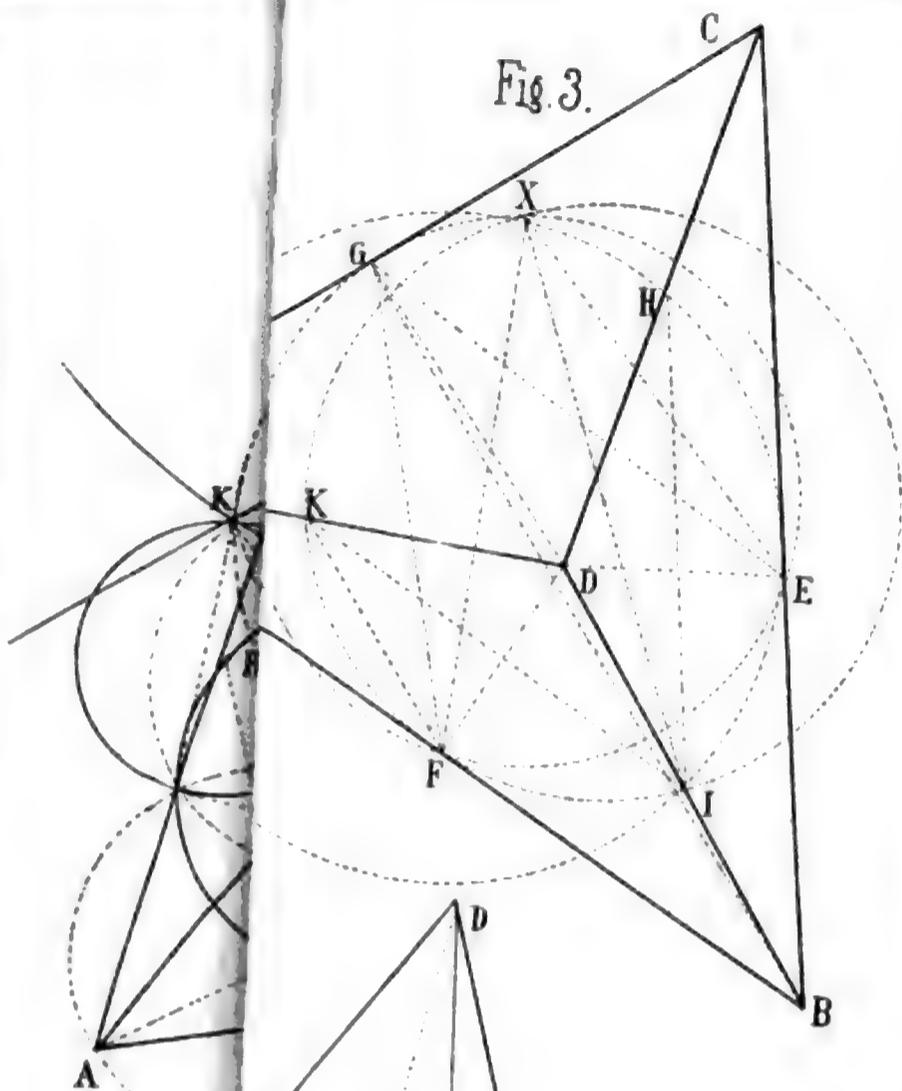
Siemens, W., wissenschaftliche u. technische Arbeiten. 1. Bd. Wissenschaftliche Abhandlungen u. Vorträge. 2. Aufl. Berlin, Springer. 5 Mk.; geb. 6 Mk. 20 Pf.

Sitzungs-Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1889. Nr. 1. Leipzig, Freytag. proepl. 3 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.
Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen
aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie
u. der Mechanik. 97. Bd. 6. u. 7. Hft. Leipzig, Freytag. 6 Mk.
40 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. v. O. Schlömilch,
A. Kahl u. M. Cantor. 34. Jahrg. 1889. 1. Hft. Leipzig, Teub-
ner. proclt. 18 Mk.

Zeitschrift f. mathematischen u. naturwissenschaftl. Unterricht.
Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 20 Jahrg. 1889. (8 Hfte.) 1. Hft.
Leipzig, Teubner. proclt. 12 Mk.





510,5
A67
M4

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren
Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Achter Teil. Erstes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.

**C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.**

1889.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

J a h r b u c h
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet von **Carl Ohrtmann**.

Unter Mitwirkung
von **Felix Müller** und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Max Henoch und **Emil Lampe**.

Achtzehnter Band. (1886.)
(In 3 Heften.)
Zweites Heft. Preis: 8 Mk.

**Bieler, Rector Dr. A., Leitfaden und Repetitorium der Analytischen
Mechanik.** Für Studierende an Universitäten und technischen
Hochschulen.

- I. Teil: Analytische Statik der festen Körper mit 18 Holzschnitten.
M. 1,80.
II. „ Analytische Dynamik der festen Körper mit erläuternden Bei-
spielen und 15 Holzschnitten. M. 1,80.
Jeder Teil auch einzeln zu haben.

Verlag von **W. Violet** in **Leipzig**.

Verlag von **G. Kreuschmer** in **Bunzlau**.

Gauss, A. F. G. Th., (Prof. am Gymn. zu Bunzlau):

Die Hauptsätze d. Elementar-Mathematik. Zum
Gebrauch an höheren Lehranstalten. 2. verbesserte Auf-
lage.

I. Teil: **Arithmetik u. Planimetrie.** M. 2,75.
(mit 130 Holzschnitten.)

II. Teil: **Stereometrie u. Trigonometrie.** M. 1,40.
(mit 53 Holzschnitten.)

Jede gute Buchhandlung ist in den Stand gesetzt, auf Wunsch
dieses gut empfohlene Lehrbuch der Mathematik den Herren Interessenten
zur Ansicht vorlegen zu können.

In unserem Verlage erschien:

Inhaltsverzeichnis

zu
Teil LV—LXX
des

Archiv der Mathematik und Physik.

- I. Abt., nach den Autoren geordnet.
II. „ nach der Materie geordnet.

Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.
(*J. Sengbusch.*)

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF CHEMISTRY

PH.D. THESIS

BY
ROBERT M. WAYNE
PH.D. 1964
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
1155 EAST 58TH STREET
CHICAGO, ILLINOIS 60637

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
1155 EAST 58TH STREET
CHICAGO, ILLINOIS 60637

The first part of the book discusses the early years of the United States, from the time of the first settlers to the end of the American Revolution. It covers the struggles of the colonies against British rule and the eventual declaration of independence. The second part of the book deals with the period of the early republic, from the end of the Revolution to the beginning of the Civil War. It examines the development of the federal government and the role of the states. The third part of the book covers the Civil War and Reconstruction, and the fourth part discusses the Gilded Age and the Progressive Era.

The book is written in a clear and concise style, and is suitable for students of American history. It provides a comprehensive overview of the major events and figures of the period, and is a valuable resource for anyone interested in the history of the United States. The book is divided into four main sections, each of which covers a different period of American history. The first section, 'The Early Years', covers the period from the first settlers to the end of the American Revolution. The second section, 'The Early Republic', covers the period from the end of the Revolution to the beginning of the Civil War. The third section, 'The Civil War and Reconstruction', covers the period from the start of the Civil War to the end of Reconstruction. The fourth section, 'The Gilded Age and the Progressive Era', covers the period from the end of Reconstruction to the beginning of the 20th century.

The book is a well-written and informative work that provides a clear and concise overview of the major events and figures of American history. It is a valuable resource for students and anyone interested in the history of the United States. The book is divided into four main sections, each of which covers a different period of American history. The first section, 'The Early Years', covers the period from the first settlers to the end of the American Revolution. The second section, 'The Early Republic', covers the period from the end of the Revolution to the beginning of the Civil War. The third section, 'The Civil War and Reconstruction', covers the period from the start of the Civil War to the end of Reconstruction. The fourth section, 'The Gilded Age and the Progressive Era', covers the period from the end of Reconstruction to the beginning of the 20th century.

of the



Zu beziehen durch Victor Dietz in Altenburg.

Kepleri opera omnia.

Edid. Ch. Frisch.
8 Bände. 1858—71

in 8 braune Calicobände geb. (124 M.) ermässiger Preis 32 M.

„Naturwissenschaftliche Wochenschrift“.

Redaktion: Dr. H. Potonié. — Verlag: Hermann Riemann, Berlin SW.

Die „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ bringt allgemeininteressante Aufsätze und orientirt über die Fortschritte aus dem Gesamtgebiet der Naturwissenschaft und ihrer praktischen Anwendung. Auch dem sich für Naturwissenschaft interessirenden Laien ist die „Naturwissenschaftliche Wochenschrift“ durch allgemeinverständliche Sprache ein werthvolles Organ.

Preis vierteljährlich 3 Mk. — Man abonniert bei allen Postämtern und allen Buchhandlungen.

Mitarbeiter unter vielen anderen: Prof. *Albrecht*, Universitäts-Prof. *Ascherson*, Real-Gymnasialdir. *Bach*, Kgl. Landesgeol., Prof. *Behrendt*, Vereid. Chemiker d. Kgl. Gerichte u. d. Polizei-Präsidiums zu Berlin Dr. *Bischoff*, Oberbergrath Prof. Dr. *Credner*, Dr. *Dreher*, Geh. Rerungsrath Prof. Dr. *Galle*, Prof. *Frank*, DDr. *Arthur* u. *Aurel Krause*, Dr. *Löw*, Prof. *Nehring*, Kreisphys. Dr. *Schmitz*, Prof. *Taschenberg* u. s. w.

POLYTECHNIKUM.

Volkswirtschaftliche Wochenschrift
für die deutschen Techniker

in Staatsdienst und Gewerbe des In- und Auslandes.

Herausgegeben
unter Mitwirkung von namhaften Fachgelehrten

von
Dr. W. Schaefer,

Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Vierteljährlich 2,50 Mark.

Jeden Mittwoch erscheint eine Nummer.

Probenummern gratis.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung, die Post (No. 4654a des 12. Nachtrags der Post-Zeitungsliste) oder direkt von der Verlagsfirma.

Jede Nummer enthält einen

Stellennachweis für Techniker,

in welchem Anmeldungen offener Stellen kostenfreie Aufnahme finden.

Stellengesuche werden zu ermässigtem Satze im Inseratenteile aufgenommen.

Vorzügliches Insertionsorgan.

Preis für die dreispaltene Petitzelle 30 Pfennig.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung in Hannover.

Inhalts-Verzeichnis

des achten Teils.

N ^o der Abhandlung.	Heft.	Seite
Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
V. Die harmonische Reihe. Ein Beitrag zur algebraischen Analysis. Von Heinrich Simon .	II	113
IX. Ein allgemeines Theorem aus der Theorie der recurrenden Reihen. Von W. Láska	II	222
X. Allgemeine Parameterdarstellung von Substitutionen involutorischen Charakters, welche eine rationale Function in sich selbst überführen. Von F. Hofmann	III	225
XI. Ein Satz über Binomialcoefficienten. Von J. Hermes	III	269
XII. Independente Darstellungen der Tangenten- und Secanten-Coefficienten. Von F. Rogel	III	295
XIV. Ueber harmonische Reihen ungerader Ordnung. Von F. Rogel	III	320
XIV. Zahl der Combinationen, die n Steine auf dem Damenbrette von 100 Feldern bilden können. Von C. Boecklen	III	326
XIV. Bemerkung zum Königinnenproblem. Von R. Hoppe	III	333

Geometrie der Ebene.

II.	Die Lemniskate. (Forts. von T. VII. Nr. XVIII.) Von E. Oekinghaus	I	24
IV.	Zur Theorie der Kegelschnittlinien. Von E. Czuber	I	108
VI.	Verallgemeinerung des Entstehungsgesetzes der Fusspunktecurven. Von E. Janisch	II	171
VIII.	Ueber Parabeln höherer Ordnung. Von Himstedt	II	210
XIII.	Die merkwürdigen Punkte derjenigen Tangentendreiecke einer Curve 2. Ordnung, welche von 2 festen Tangenten und einer beweglichen gebildet werden. Von Th. Meyer	III	307
XIV.	Construction des Schnittes einer Geraden mit einer Hyperbel. Von F. Ruth	III	315
XIV.	Zur Construction der Kegelschnittlinien. Von F. Schiffner	III	317
XV.	Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die demselben verwandten Kegelschnittscharen. Von Andr. Mäller	IV	337
XVIII.	Die Curven, welche von Punkten von Kegelschnitten, die sich ohne zu gleiten längs andern Curven wälzen, beschrieben werden. Von H. Ekama	IV	388
XX.	Vielecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte schneiden. Von R. Hoppe	IV	447

Geometrie des Raumes.

I.	Beiträge zur Theorie der Kegelschnitte und des geraden Kegels. Von F. Ruth	I	1
III.	Ueber Raumcurven-Singularitäten. Von C. F. E. Björling	I	83
VII.	Zur sphärischen Schleifenlinie. Von E. Janisch	II	184
XIV.	Ergänzung des „Beitrags zur Inhaltsberechnung der Körper.“ (Bd. XXVI. S. 204 des Arch.). Von Ligowski	III	319

V

Nr der Abhandlung.	Heft.	Seite.
XIV. Nachträgliche Bemerkung zu Nr. VII. Von E. Janisch	III	334
XIV. Zur Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel. Von R. Hoppe	III	335
XVI. Ueber das sphärische Polarsystem und seine Anwendung auf das Tetraeder. Von Th. Meyer .	IV	363
XVII. Anwendung des Taylor'schen Satzes zur Rectification der Ellipse und zur Complonation des Ellipsoids. Von C. Benz	IV	378
XIX. Ueber die Rectification der Krümmungslinien auf Röhrenflächen. Von A. Ahrendt	IV	442

Mechanik.

IV. Ueber Gleichgewichtspunkte der Anziehung von Linien. Von R. Hoppe	I	94
IV. Inkreiscentrum als Gleichgewichtspunkt. Von R. Hoppe	I	112
IX. Aehnlichkeitspunkt als Gleichgewichtspunkt der Anziehung ebener Flächenstücke. Von R. Hoppe	II	221
IX. Gleichgewicht der Anziehung einer ringförmigen Fläche. Von R. Hoppe	II	223

Erd- und Himmelskunde.

IV. Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. (Forts. zu T. VII. Nr. XXIII. 5.) Von E. Oekinghaus	I	92
--	---	----

Litterarische Berichte.

XXIX. Sturm (Anal.) Vandermonde (Abhdl.) H. C. Schwarz (Ord. Typ.) C. F. Gauss (höh. Ar.) Forsyth (Diff. Gl.) Czuber (Ges. gr. Zal.) Bleicher (Zinsr.) Holzinger (pol. Ar.) Pein (Königinnenpr.) Redlich (höh. Gleich.) Dziobek (Plan. Bew.) Th. Schmid (Erde). Caspari (Astr.) Neumaier (Beob.) Hément (Sternschn.) Fel. Müller (Kal. Kart.) Littrow (astr. Kal. 1889) Hann u. Köppen (Met. Z. V.) Soc. Math. de Fr.		
---	--	--

VI

(Bull. XVI.) Fac. de Toul. (Ann. II.) Versl. en Meded. (III. IV.)

XXX. Kaiser (neu. Geom.) Schoenflies (Geom. d. Bow.) Reye (G. d. Lage). Peschka (Persp.) Willig (Kegelschn.) Dorst (Kreiswkl.) Waage (Netze). Vonderlinn (darst. G.) Brill (Mod.) Katzer (Kryst.) Bieler (Mech.) Land (Trägh.) Samuelson (Dampfexp.) Stokes (Licht). Pabst (Opt.) Linc. (Rend. IV.) Mittag-Leffler (A. M. VIII.)

XXXI. Reiff (Gesch. un. Rh.) Curtze (Jord. Nem.) Böklon (Hist. im Unt.) Helm (Energ.) Harms (Rech.) Schram (Jd.) Fr Meyer (Unendl.) Krumme (anal. G.) Newcomb (Am. J. XI.) Mittag-Leffler (A. M. XII.)

XXXII. Schram u. Schüssler (Vorsch.) Otto u. Diesener (nied. M.) Kleyer (Encykl.) Köstler (eb. G.) Rottok (Plan. — Ster.) Wallentin (Naturl. — Phys.) Recknagel (Mech.) Meissel (Taf. Bess. F.) Ligowski (Taf. Hyp. F.) Bassot (5 u. 4 st. Log.) Blater (Taf. Quadr.) Versl. en Meded. V.

Berichtigungen im VIII. Teile.

Seite	Zeile				
150	3 v. u.	statt	Bestimmung	setze	Restbestimmung
211	3 v. ob.	„	n	„	a
	11 „ „		streiche		man
	15 „ „	statt	g	setze	q
212	7 „ „	„	Zahlen	„	Primzahlen
	12 „ „	„	x^4	„	y^4
213	3 u. 2 v. u.	„	a	„	α
218	10 v. ob.	„	δ_2	„	δ_1
220	2 v. u.	„	q	„	g (zweimal)
320	3 v. ob.	„	x^5	„	x^4
	12 „ „	„	x^8	„	x^3

Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker. 105. Bd. (4 Hfte.) 1. u. 2. Hft. Berlin, G. Reimerprecht. 12 Mk.

Kleyer, A., Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen u. exacten Naturwissenschaften. 36. Lfg. Stuttgart, Maier. 1 Mk.

Prometheus. Illustrierte Wochenschrift üb. die Fortschritte der angewandten Naturwissenschaften, hrsg. v. O. N. Witt. 1. Jahrg. 1889/90. Nr. 1. Berlin, Mückenberger. Vierteljährl. 3 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München 1889. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abtheilg. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 98. Bd. 1. Hft. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 50 Pf.



Verlag von Louis Nebert in Halle a/S.

- Köstler**, Prof. H., Oberlehrer, *Vorschule der Geometrie*. Fünfte u. sechste verb. Auflage. Mit 47 Holzschn. gr. 8°. Kart. 50 Pf.
- Köstler**, Prof. H., *Leitfaden d. ebenen Geometrie* f. höhere Lehranstalten. 3 Hefte. Mit vielen Holzschn.
- I. Heft: *Kongruenz*. Dritte teilw. umgearb. Auflage. gr. 8°. Kart. 1 Mark 25 Pf.
- II. Heft: *Lehre vom Flächeninhalt — Konstruktionslehre*. Zweite teilw. umgearb. Auflage. gr. 8°. Kart. 80 Pf.
- III. Heft: *Die Aehnlichkeit der Figuren*. gr. 8°. geh. 1 Mark.
- Köstler**, Prof. H., *Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Arithmetik* an höh. Lehranst. Zweite verm. u. teilw. umgearb. Auflage. gr. 8°. Kart. 90 Pf.
- Hoffmann**, Prof. J. C. V., (Redact. d. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr.) *Vorschule der Geometrie*. 2 Teile. Mit 270 Holzschn. u. 2 Fig.-Tafeln. gr. 8°. geh. 5 Mark.
- Rulf**, Prof. W., *Elemente der projectivischen Geometrie*. Mit viel Holzschn. gr. 8°. geh. 2 Mark 50 Pf.
- Emsmann**, Dr. G., *Mathematische Excursionen*. Zugleich „Sammlung mathemat. Abiturienten-Aufgaben.“ Mit 2 lithogr. Fig.-Tafeln. gr. 8°. geh. 3 Mark 60 Pf.
- Dronke**, Dr. A., *Einleitung in die höhere Algebra*. Mit 12 Holzschn. gr. 8°. geh. 4 Mark 50 Pf.
- Oldenburger**, G. u. Engels, *Materialien für das gewerbliche Rechnen*. Mit 17 Holzschn. u. 4 Fig.-Tafeln. gr. 8°. geh. 1 Mark 50 Pf. — Lösungen dazu 1 Mark.
- Wiegand**, Dr. Aug., (Verf. d. bekannt. mathem. Lehrbücher.) *Wie mir's erging*. Autobiogr. Skizzen. 8°. geh. 2 Mark.

T a f e l n

zur

dreissigstelligen logarithmischen Rechnung.

Berechnet von

Dr. R. Hoppe,

Professor an der Universität Berlin.

Geh. Preis 80 Pf.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagshandlung.
(J. Seegbusch.)

Zur

Herstellung mathematischer etc. Werke,

auch mit Figurentafeln, halten wir den Herren Autoren und Verlegern unsere für mathematischen und Formelsatz speziell eingerichtete Offizin bestens empfohlen unter Zusicherung correcter, rascher und billiger Bedienung.

Greifswald.

F. W. Kunike,

Buch- und Steindruckerei.

I.

Beiträge zur Theorie der Kegelschnitte und des
geraden Kreiskegels.

Von

F. Ruth

in Leoben.

(Mit einer Tafel.)

1) In der vorliegenden Abhandlung sollen die Eigenschaften der die Asymptoten eines Kegelschnittes berührenden Kreise erörtert werden, wodurch wir einerseits zu einer Definition der Scheitelkreise als Einhüllende gewisser Geraden gelangen, andererseits zu gewissen Constructionen, teils die Kegelschnitte selbst, teils die Bestimmung des Schnittes derselben mit zu den Hauptaxen parallelen Geraden u. s. w. betreffend, die, wiewohl sie, was Einfachheit anlangt, durch manche der schon bekannten übertroffen werden, immerhin als Beiträge zur Vervollständigung der Theorie der Hyperbel und Ellipse von einigem Interesse sein dürften. Die Hyperbel besitzt zwei reelle, die Ellipse zwei imaginäre Asymptoten, die Doppelstrahlen ihrer Durchmesserinvolutionsen; als Grenzfall zwischen beiden tritt die Parabel auf, bei welcher die beiden Asymptoten mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene zusammenfallen, daher man bei der Parabel von Kreisen, die die Asymptoten berühren, nicht sprechen kann, und die im Nachfolgenden erhaltenen und besprochenen Resultate sich nur auf die Ellipse und Hyperbel beziehen.

Wir gelangen zuerst ganz allgemein durch Betrachtung einer gemischten Kegelschnittschaar, bestimmt durch zwei Punkte und zwei Tangenten (jener Schaar, die sich selbst dual ist), zu einem

Satze, durch dessen Specialisirung sich die fraglichen Eigenschaften ergeben; denn die Kreise einer Ebene gehen alle durch dieselben zwei unendlich fernen imaginären Punkte, und jene davon, welche zwei gegebene Gerade berühren, bilden eine specielle Art einer solchen Kegelschnittschaar. Wir werden dann aber noch einen andern directen und elementaren Weg der Ableitung einschlagen, der nur die Kenntniss gewisser einfacher Relationen zweier Kreise voraussetzt, und schliesslich einige Uebertragungen in den Raum machen.

2) Bekanntlich sondern sich die Kegelschnitte durch zwei feste Punkte I und II auf s (Fig. 1.) berührend an zwei Gerade t und t_1 durch S , derart in zwei Gruppen, dass die Polaren von S (Berührungssehnen mit t und t_1) durch einen von 2 festen Punkten P oder Q gehen¹⁾, die so auf der Geraden s liegen, dass sie sowol I und II , als auch t und t_1 harmonisch trennen; die Pole der gemeinsamen Secante s liegen auf einer von zwei Geraden p oder q , die durch S gehen und ebenfalls I und II , und t und t_1 harmonisch trennen, also durch P und Q gehen.

Betrachten wir jetzt die eine Gruppe der Kegelschnitte des Systemes, z. B. die, für welche die Polaren von s durch P gehen, und bezeichnen wir einen beliebigen Kegelschnitt dieser Gruppe mit P_i^2 .

„Legt man einen Kegelschnitt K^2 beliebig, der SI und SII in „den Punkten I und II berührt, und legt man an diesen und jeden „Kegelschnitt P_i^2 der Gruppe P die gemeinsamen Tangenten, so „liegen die auf den P_i^2 befindlichen Berührungspunkte 1, 2, 3, 4 „derselben alle auf einem neuen Kegelschnitte K^{*2} , welcher t und t_1 „in den auf s gelegenen Punkten T und T_1 berührt, und den Kegel- „schnitt K^2 in den auf p gelegenen Punkten doppelt berührt.“

„Wählt man umgekehrt einen Kegelschnitt K^{*2} beliebig, der „jedoch die gegebenen Geraden t und t_1 in den auf s gelegenen „Punkten T und T_1 berührt, so schneidet dieser die Kegelschnitte „ P_i^2 der Gruppe P in Punkten derart, dass die Tangenten in diesen „an die Kegelschnitte P_i^2 einen neuen Kegelschnitt K^2 umhüllen, „welcher K^{*2} in den auf p gelegenen Punkten doppelt und die Ge- „raden SI und SII in den Punkten I und II resp. berührt.“

Zum Beweise des Vorstehenden betrachten wir in Fig. 1. K^2 und P_i^2 , zwei Kegelschnitte mit den auf s und s_1 gelegenen gemeinsamen Punkten I , II , III und IV , welche C und C_1 als gemeinsame auf p befindliche Contingenzpunkte besitzen. Sind S und Σ die Pole

1) Siehe Schröter: Theorie der Kegelschnitte. 2te Aufl. p. 362. und H. Pfaff, Neuere Geometrie II. Thl. p. 176. u. s. f.

von s bezüglich K^2 und P_i^2 , so bilden die von I nach C, C_1, S und Σ gezogenen Geraden vier harmonische Strahlen, da ja IS und $I\Sigma$ die Doppelstrahlen der in I durch die Kegelschnitte der Schaar $K^2P_i^2$ bestimmten Involution sind, in der IC und IC_1 ein Paar bilden. S, Σ und CC_1 sind somit zwei Paare harmonisch conjugirter Punkte auf p und ihre Polaren $\sigma s c c_1$ bezüglich P_i^2 werden 4 harmonische Strahlen durch P bilden. (σ die Polare von S, s die Polare von Σ bez. P_i^2).

Dasselbe findet bezüglich S_1 und Σ_1 den Polen von s_1 hinsichtlich K^2 und P_i^2 und Polaren in Bezug auf P_i^2 statt, so dass $\sigma_1 s_1 c c_1$ wieder 4 harmonische Strahlen durch P bilden.

K^2 und P_i^2 haben gemeinsame Tangenten und die Berührungspunkte 1, 2, 3, 4 auf P_i^2 liegen auf c und c_1 und geben diese bekanntlich dasselbe Poldreieck POR wie die Punkte I, II, III und IV . Legen wir jetzt aus S die Tangenten t und t_1 an P_i^2 und bringen wir sie zum Schnitt mit s und ebenso aus S_1 die Tangenten τ und τ_1 und bringen sie zum Schnitt mit s_1 , so erhalten wir 4 auf s und s_1 (und t, t_1 und τ und τ_1 resp.) gelegene Punkte, die ebenfalls POR als Poldreieck haben, wie sich leicht ergibt¹⁾. Diese 4 Punkte müssen nun einem bekannten Satze zufolge mit den Punkten 1, 2, 3, 4 auf einem und demselben Kegelschnitte liegen — K^{*2} . —

Da aber früher gezeigt wurde, dass $(s \sigma c c_1) = -1$, so sind t und t_1 Tangenten in den Punkten T und T_1 an K^{*2} , denn K^{*2} ist der ausser P_i^2 noch durch 1, 2, 3, 4 gehende Kegelschnitt der t berührt, und muss der Berührungspunkt von jenem mit P_i^2 durch c und c_1 harmonisch getrennt sein, was mit T wegen $(s \sigma c c_1) = -1$ der Fall ist.

Aehnliches lässt sich für τ und τ_1 sagen. Zur weiteren Bestimmung von K^{*2} suchen wir die Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit p ; da S und s sowol als auch S_1 und s_1 Pol und Polare nicht nur in Bezug auf K^2 , sondern auch hinsichtlich K^{*2} sind, so berühren sich K^{*2} und K^2 in den auf p gelegenen Punkten A und A_1 doppelt, K^2 und K^{*2} sind also doppelt berührende Kegelschnitte mit P und p als gemeinsamem Pol und Polare.

1) Legt man aus 2 Punkten einer Seite des gemeinsamen Poldreiecks eines Kegelschnittbüschels die von den Ecken des Poldreiecks harmonisch getrennt werden, Tangenten an irgend einen Kegelschnitt des Büschels, so treffen diese die durch die dritte Ecke des Poldreiecks gehenden gemeinsamen Secanten zweimal in 4 Punkten, die dasselbe Poldreieck, das des Büschels geben.

Wenn wir jetzt K^2 ungeändert lassen und den Kegelschnitt P_i^2 derart ändern, dass er jederzeit durch die zwei festen Punkte I und II geht und die ebenfalls festen Geraden t und t_1 berührt (so dass die Berührungssehne durch P geht) und an jeden dieser Kegelschnitte P_i^2 und an K^2 die gemeinsamen Tangenten legen, so liegen jedesmal die auf P_i^2 befindlichen Berührungspunkte mit TT , T_1T_1 , AA , A_1A_1 u. s. w. auf demselben Kegelschnitte, der durch die soeben aufgezählten Bestimmungsstücke schon bestimmt und mit dem Kegelschnitte K^{*2} identisch ist, wodurch der angeführte Satz bewiesen erscheint.

Es ist wol nicht notwendig, den Beweis besonders zu führen für den Fall, dass die festen Punkte I und II oder die Geraden t und t_1 , oder beide Paare Bestimmungselemente der Schaar imaginär sind, ebenso darf hier von dem Beweise des zweiten Theiles, wo K^{*2} gewählt wird, Umgang genommen werden.

3) An das Vorhergehende lassen sich noch unmittelbar folgende ergänzende Bemerkungen anreihen:

- a) Auf K^{*2} liegen noch jederzeit die Schnittpunkte der zweiten durch P gehenden K^2 und P_i^2 gemeinsamen Secante s_1 mit den Tangenten an P_i^2 aus dem Pole S_1 der Secante s_1 in Bezug auf K^2 ; diese Tangenten an P_i^2 sind zugleich auch Tangenten an K^{*2} .
- b) Da es noch einen zweiten Kegelschnitt $P_i^{2'}$ gibt, der mit P_i^2 ausser I , II noch dieselbe zweite Secante s_1 mit K^2 gemeinsam hat, so erscheint K^{*2} auch als die einhüllende Curve der ausser t und t_1 noch vorhandenen gemeinsamen Tangenten der Kegelschnittspaare P_i^2 und $P_i^{2'}$ der Gruppe P , die sich auf K^2 ausser in I und II noch in denselben zwei Punkten schneiden; auf der zweiten noch gemeinsamen Secante s_1 liegen auch die Punkte von K^{*2} .

Zur näheren Orientirung über die Paare P_i^2 und $P_i^{2'}$ dient die leicht zu erweisende Bemerkung, dass ihre Berührungspunkte auf t (also auch auf t_1) Paare einer Involution bilden, deren Doppelpunkte auf K^{*2} liegen.

Die in a) und b) angeführten Ergänzungen lassen sich auch leicht bezüglich der Fassung des zweiten Theiles des Satzes formuliren, was aber hier nicht weiter verfolgt werden soll.

4) Bevor wir auf einige Specialisirungen übergehen, wollen wir noch die zweite Gruppe des Systemes der Kegelschnitte (I , II , t , t_1)

in den Bereich unserer Betrachtungen ziehen. Es ergibt sich für diese Gruppe, welche Q und q als Convergenzpunkt der Polaren von S resp. als Ort der Pole von s bezüglich der Q_i^2 , wie wir einen Repräsentanten dieser Gruppe bezeichnen wollen, haben, dass, wenn wir K^2 von früher festhalten, und an K^2 und jeden Kegelschnitt Q_i^2 die gemeinsamen Tangenten legen, die auf Q_i^2 befindlichen Berührungspunkte auf einem neuen Kegelschnitte, K_q^2 wollen wir ihn bezeichnen, liegen der ebenfalls t und t_1 in den Punkten T und T_1 berührt und K^2 in den auf q gelegenen Punkten doppelt berührt. Betrachtet man also beide Gruppen P_i^2 und Q_i^2 der Kegelschnitte des Systemes, so folgen für jeden beliebig gewählten Kegelschnitt K^2 in der angegebenen Weise zwei Kegelschnitte K_p^2 und K_q^2 , die sich in T und T_1 doppelt berühren, und deren jeder K^2 doppelt berührt ersterer mit p , letzterer mit q als Berührungsehne.

Wenn wir hingegen K^{*2} festhalten, und diesen Kegelschnitt mit den Kegelschnitten Q_i^2 der zweiten Gruppe zum Schnitt bringen, in den Schnittpunkten an diese Kegelschnitte die Tangenten legen, so umhüllen diese einen neuen Kegelschnitt K_q^2 , welcher SI und SII in I und II berührt, und K^{*2} doppelt berührt mit q als Berührungsehne. K_p^2 für die Gruppe Q_i^2 und der demselben Kegelschnitt K^{*2} zukommende Kegelschnitt für die Gruppe Q_i^2 berühren sich doppelt in den Punkten I und II mit SI und SII als Tangenten in diesen, und jeder berührt K^{*2} doppelt, ersterer in den Schnittpunkten mit p , letzterer in jenen mit q .

Wir erhalten also aus beiden Gruppen von Kegelschnitten P_i^2 und Q_i^2 denselben Kegelschnitt K^{*2} , wenn wir die erste Gruppe mit K_p^2 , die zweite Gruppe mit K_q^2 in der angegebenen Weise in Beziehung bringen u. s. w.

Die in 3) gemachten Zusätze lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten auch für den Fall dass wir die zweite Gruppe von Kegelschnitten benutzen ausdrücken, was jedoch für den allgemeinen Fall hier nicht geschehen soll; nur mit Bezug auf die in den späteren Ausführungen folgenden Specialisirungen sei hierauf aufmerksam gemacht.

5) Gehen wir auf die Specialisirungen dieses allgemeinen Satzes und seiner Zusätze über, so ergibt sich:

- a) Ein System von Kegelschnitten durch 2 feste Punkte, welches einen gemeinsamen Brennpunkt besitzt, werde mit einem Kegelschnitte geschnitten, der denselben Brennpunkt und die Verbindungslinie der festen Punkte zur zugehörigen Leitlinie hat.

Legt man in den Schnittpunkten an die Kegelschnitte des Systemes die Tangenten, so umhüllen diese einen von zwei Kegelschnitten, die sich in den festen Punkten berühren, in diesen die Verbindungslinien mit dem gemeinsamen Brennpunkt zu Tangenten haben, und welche den angenommenen Kegelschnitt doppelt berühren, und:

- b) Hat man ein System von Kegelschnitten durch 2 feste Punkte, welches einen Brennpunkt gemeinsam hat, und legt man an diese und an einen Kegelschnitt der die Verbindungslinien des gemeinsamen Brennpunktes mit den beiden festen Punkten in diesen berührt die gemeinsamen Tangenten, so liegen die Berührungspunkte (ausser auf dem angenommenen) auf einem von zwei neuen Kegelschnitten, der ebenfalls den gemeinsamen Brennpunkt zum Brennpunkt hat, und dessen zu diesem gehörige Leitlinie die Verbindungslinie der beiden festen Punkte ist.

Sind die beiden festen gemeinsamen Punkte unendlich fern, so erhält man:

- c) Bringt man ein System von ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkt mit einem mit dem Brennpunkt concentrischen Kreise zum Schnitt, und legt in den Schnittpunkten desselben mit den Kegelschnitten an diese die Tangenten, so umhüllen diese einen von zwei Kegelschnitten, welche den Kreis doppelt berühren, und die Verbindungslinien des gemeinsamen Brennpunktes mit den festen ∞ fernen Punkten zu Asymptoten (reell o. imag.) haben.

oder:

- d) Legt man an ein System von ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkte und einen beliebigen andern Kegelschnitt, der die Verbindungslinien des gemeinsamen Brennpunktes mit den allen Kegelschnitten gemeinsamen Punkten zu Asymptoten hat, die gemeinsamen Tangenten, so liegen die Berührungspunkte derselben auf einem von zwei Kreisen, die mit dem gemeinsamen Brennpunkt concentrisch sind ¹⁾.

1) Diese sind die beiden Scheitelkreise des angenommenen Kegelschnittes. Im Falle ähnlicher Ellipsen wird der über der grossen Axe mit Hilfe der reellen Ellipsen, der über der kleinen Axe mit Hilfe der imaginären Gruppe erhalten.

Als Grenzfall lassen wir die beiden ∞ fernen Punkte in einen zusammenfallen, wodurch wir ein System von coaxialen confocalen Parabeln erhalten, ein specieller Fall einer Kegelschnittschaar. Es ergibt sich hier:

- e) Ein mit einem beliebigen Radius um den Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebener Kreis schneidet die Parabeln in Punkten so, dass die Tangenten in diesen durch 2 feste Punkte gehen, die Endpunkte des auf der gemeinsamen Parabelaxe gelegenen Kreisdurchmessers, und umgekehrt:
- f) Legt man aus einem Punkte der gemeinsamen Axe eines Systemes von confocalen coaxialen Parabeln die Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kreise der durch diesen Punkt geht, und dessen Mittelpunkt der gemeinsame Brennpunkt der Parabeln ist.

Der Kreis ist derselbe für die Berührungspunkte der Tangenten aus dem zweiten Endpunkte des auf der gemeinsamen Parabelaxe gelegenen Durchmessers ¹⁾.

Dieses Ergebniss ist übrigens auch direct elementar und leicht nachweisbar, mit Hilfe der bekannten Parabeleigenschaften. Ist nämlich Fig. 2. l_1 die Leitlinie einer beliebigen Parabel des Systemes, so liegt in der Mitte zwischen dieser und dem Brennpunkt F der Scheitel S_1 der Parabel. Die Schnittpunkte der Parabel mit dem Kreise vom Halbmesser r ergeben sich auf einer Parallelen zu l_1 im Abstände r von dieser und der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten mit der Axe wird erhalten, wenn man den Abstand des Scheitels S_1 von der Sehne auf die entgegengesetzte Seite abträgt, wodurch, wie zu sehen, der Durchmesserendpunkt erhalten wird u. s. w.

6) Von den zahlreichen noch denkbaren Specialisirungen, deren der allgemeine Satz fähig ist, soll nun noch eine, allerdings die wichtigste, erörtert werden. Wir nehmen an, die beiden festen Punkte I und II seien die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene, die Kegelschnitte des Systemes also vertreten durch die zwei Gruppen von Kreisen, welche zwei gegebene (reelle oder imaginäre) Gerade berühren, deren Mittelpunkte daher

1) Specialfall von: Legt man aus einem Punkte der gemeinsamen Hauptaxe eines Systemes confocaler Ellipsen Tangenten an diese, so ist der Ort der Berührungspunkte ein Kreis. Siehe Fiedler, Anal. Geometrie der Kegelschnitte. 4te Aufl. pag. 282.

auf einer von zwei Geraden a und b liegen, die, da sie conjugirt in Bezug auf die unendlich fernen Kreispunkte sind, senkrecht zu einander und weil sie auch durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt werden, die Halbierungslinien der Winkel dieser sind (oder die Axen des die Geraden ersetzenden Strahlensystems).

Die in der allgemeinen Betrachtung mit P und Q bezeichneten Punkte sind in diesem Falle die unendlich fernen Punkte von a und b , und der Kegelschnitt K^2 der allgemeinen Betrachtung ist ein mit dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden concentrischer Kreis, den wir mit A^2 oder B^2 bezeichnen wollen. Der Kegelschnitt K^{*2} ist dann ein Kegelschnitt, der die gegebenen Geraden zu Asymptoten hat, wenn diese reell, eine Hyperbel, wenn imaginär, eine Ellipse A^2 resp. B^2 zu Scheitelkreisen hat, da a und b die Axen desselben sind, und in den Endpunkten dieser die doppelte Berührung von K^2 und K^{*2} erfolgt.

Nach Vorausschickung dieses erhalten wir nun:

„Ellipse und Hyperbel ergeben sich auch als Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an einen Scheitelkreis, und die Kreise, welche die Asymptoten berühren, und deren Mittelpunkte auf der Axe liegen, über welcher der Scheitelkreis beschrieben wurde.“

Man erhält daher durch Benutzung beider Scheitelkreise, sowie beider Systeme der Kreise, die die Aymptoten berühren, in zweifacher Weise die Kegelschnitte in der angegebenen Art, und:

„Die Scheitelkreise der Kegelschnitte sind die Einhüllenden der Tangenten an die, die Asymptoten derselben berührenden Kreise in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte.“

Der letztere Satz lässt auch folgende Fassung zu:

„Die Tangenten an die, die Aymptoten eines Kegelschnittes berührenden Kreise in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte haben constante Entfernung vom Centrum des Kegelschnittes und ist diese Entfernung gleich der Grösse der einen oder andern Halbaxe, je nach der Lage des Mittelpunktes des Kreises auf der einen oder andern Axe.“

Ferner ergibt sich analog den in 3) gegebenen Zusätzen und der in 4) gemachten Schlussbemerkung:

- a) Jeder die Asymptoten berührende Kreis schneidet den entsprechenden Scheitelkreis noch in 2 Punkten einer Secante. Sucht man den Pol derselben in Bezug auf den Scheitelkreis (er ist auch der Pol in Bezug auf den Kegelschnitt) und legt aus diesem die Tangenten an den Kreis, so berühren diese auch den Kegelschnitt, und liegen die Berührungspunkte auf jener Secante.

Und:

- b) Ellipse und Hyperbel ergeben sich auch als Einhüllende der noch möglichen gemeinsamen Tangenten der die Asymptoten berührenden Kreispaaare, welche sich in denselben zwei Punkten des Scheitelkreises schneiden, deren Berührungspunkte mit den Asymptoten auf diesen eine Involution bilden, für welche die Doppelpunkte auf dem dem Kreissysteme entsprechenden Scheitelkreise liegen.

Die Mittelpunkte der Kreise, welche in jenen Punkten, wo der Scheitelkreis die Asymptoten schneidet, berühren, geben (wie bekannt) die Brennpunkte des Kegelschnittes; denn hier fallen beide Kreise des Paares zusammen, ihre mit dem Scheitelkreis gemeinsame Secante ist die Gerade, welche die auf den beiden Asymptoten gelegenen Doppelpunkte verbindet; aus dem Pole dieser Geraden, d. i. dem Mittelpunkte der beiden zusammen fallenden Kreise hat man an diese die Tangenten zu legen, die nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten der Ebene gehen, und weil diese auch den Kegelschnitt berühren, so ist dieser Punkt Brennpunkt für den Kegelschnitt.

Wir begnügen uns mit der Anführung dieser Sätze und bemerken, dass auch die andern Fassungen des allgemeinen Satzes sich leicht weiter ausführen lassen. Aus dem über die Ellipse und Hyperbel Gesagten ergeben sich nun leicht Constructionen, die wir aber erst später zusammenhangend behandeln wollen, nachdem wir die Sätze noch auf einem andern directen Wege uns zurecht gelegt haben, weil daraus sich noch einiges Bemerkenswerte und für die Constructionen Brauchbare ergibt.

7) Dass die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten eines festen Kreises und der Kreise, die zwei feste durch das Centrum des gegebenen Kreises gehende Gerade berühren (im System betrachtet) einen Kegelschnitt geben, der den festen Kreis als Scheitelkreis, die Geraden zu Asymptoten hat, können wir einfach und direct nachweisen, indem wir von gewissen Beziehungen zwischen

zwei Kreisen ausgehen, die wir im Nachstehenden anführen, und soweit sie nicht allgemein bekannt sind, auch beweisen wollen.

- α) Sind Fig. 3. K_1 und K_2 zwei Kreise, und legen wir aus dem Mittelpunkt O_1 von K_1 an K_2 und aus O_2 an K_1 die Tangenten, so schneiden diese Tangenten aus dem Kreise, durch deren Mittelpunkt sie gehen, gleich grosse Sehnen aus, d. h. es ist

$$2s_1 = 2s_2$$

Aus Fig. 3. ist nämlich

$$\left. \begin{aligned} s_1 : r_2 &= r_1 : e \\ s_2 : r_2 &= r_1 : e \end{aligned} \right\}$$

$$s_1 = s_2 = \frac{r_1 \cdot r_2}{e}$$

also

$$2s_1 = 2s_2$$

- β) Die Grösse dieser Sehnen ist auch gleich der Länge der Tangente an den betreffenden Kreis senkrecht zur gemeinsamen Centralen zwischen jenen Geraden, die von dem Mittelpunkte des einen Kreises nach den Endpunkten des zur Centralen senkrechten Durchmessers des zweiten Kreises gehen. Es ist nämlich Fig. 4.

$$\left. \begin{aligned} s_2 : r_2 &= r_1 : e \\ \tau_2 : r_2 &= r_1 : e \end{aligned} \right\} s_2 = \tau_2 = \frac{r_1 r_2}{e} = s_1 = \tau_1$$

Diese in β) gemachte Bemerkung ist insofern von Belang, als in jenen Fällen, wo von dem Centrum des einen Kreises (wie in Fig. 4) an den zweiten Kreis keine reellen Tangenten gelegt werden können, hiedurch ein Ersatz für die durch die Tangenten sonst aus dem Kreise geschnittene Sehne gegeben ist.

- γ) Legt man Fig. 3. an die beiden Kreise K_1 und K_2 die möglichen gemeinsamen Tangenten, so sind die Berührungsehnen, die senkrecht zu der gemeinsamen Centrale stehen, von der gemeinsamen Cordalen paarweise gleich weit abstehend, d. h. sie bilden Zonen von gleicher Breite¹⁾. Für unsere Zwecke ist wichtig zu zeigen, dass diese Zonenbreite gleich $2s_1 = 2\tau_1 = \dots$ ist.

1) Steiner, Ueber einige neue Bestimmungsarten etc. — Steiner'sche Werke Bd. II. p. 450; vergl. auch Fiedler, Cyclographie p. 90.

Aus Fig. 3. ergibt sich leicht:

$$m = \frac{r_1^2}{e}; \quad n = \frac{r_1^2}{p}$$

Ist $O_1 J = p$, so folgt:

$$p : e - p = r_1 : r_2$$

oder

$$p = \frac{e r_1}{r_1 + r_2}$$

und damit:

$$n - m = \frac{r_1 r_2}{e} = s_1 = s_2 = \tau_1 = \dots$$

$n - m$ ist nämlich die halbe Zonenbreite, denn die Polare des Mittelpunktes O_2 von K_2 in Bezug auf K_1 fällt aus leicht zu ersehenden Gründen in die Mitte zwischen den Polaren der beiden Aehnlichkeitspunkte der Kreise.

Dass diese Relation auch richtig ist, wenn die beiden reell vorausgesetzten Kreise nicht 4 reelle gemeinsame Tangenten zulassen, ist leicht zu ersehen. Für den Fall, dass beide Kreise imaginär sind, wird im wesentlichen nichts verändert, und der Fall, wo einer der Kreise imaginär, der zweite reell ist, hat für unsere Betrachtungen, die wir hier verfolgen, keinen Belang und kann übergangen werden.

- δ) Im Falle, dass von dem Mittelpunkte des einen Kreises an den zweiten reelle Tangenten gelegt werden können, ist noch zu bemerken, dass die Zonenbreite auf einer solchen Tangente gemessen werden kann, und dass sie da gleich ist dem Stück der Tangente an K_2 senkrecht zur Centralen, welches durch die aus O_2 an K_1 gehenden Tangenten begrenzt wird; es ist nämlich in Fig. 3.:

$$t : s_2 = r_2 : w$$

wo w den Abstand des Punktes O_2 von s_2 bedeutet. Es ist aber auch

$$b : s_2 = r_2 : w$$

woraus $b = t$ folgt; es ist daher b gleich der halben, längs einer aus dem Mittelpunkte von O_2 an K_1 gezogenen Tangente gemessenen Zonenbreite der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise.

- 8) Betrachten wir jetzt zwei feste und zwar zunächst reelle Gerade t_1 und t_2 Fig. 5., die durch den Mittelpunkt S eines Kreises

A^2 gehen, und alle die Kreise, die diese Geraden berühren und ihre Mittelpunkte auf der Geraden a haben. In diesem Falle ist s oder $DG = \frac{1}{2}DD$ für alle Kreise des Systemes constant, und die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an A^2 und jeden Kreis des Systemes bilden auf jedem der letzteren Zonen von constanter Breite $= 2s$.

Betrachten wir $t_1 t_2$ als die Projectionen der Umrisserzeugenden eines schiefen Kreiskegels, S als die Projection der Spitze, so sind die Kreise des Systemes aufzufassen als die Projectionen von zur Basis parallelen Schuitten. Eine Ebene parallel der die Contourerzeugenden verbindenden Ebene schneidet den Kegel nach einem Kegelschnitte, dessen Projection die Contourgeraden zu Asymptoten hat.

Man findet nun Punkte der Projection des Schnittes, indem man die zur Basis parallelen Ebenen mit der schneidenden Ebene zum Schnitt bringt, und die Projectionen bestimmt. Diese Schnittlinien projiciren sich als Parallelen zu den Berührungssehnen der Kreise mit t_1 und t_2 und zwar in gleichen Abständen und nach derselben Seite von diesen genommen.

Trägt man also von den Berührungspunkten auf t_1 nach einer Seite ein constantes Stück b (oder parallel zu a das Stück $DG = s$) auf, legt die Senkrechten zu a , so erhält man in den Schnittpunkten dieser mit den entsprechenden Kreisen die Punkte der Hyperbel, für welche $b = AB$ die absolute Grösse der Nebenaxe ist.

Dass b die Grösse der Nebenaxe ist, ist zu ersehen, indem man sich auch jenen Kreis K_a Fig. 5. parallel der Basisebene gezeichnet denkt, der von der ihm zukommenden Schnittlinie mit der schneidenden Ebene berührt wird, wo dann $BN = BA$, und A der Scheitel wird. Trägt man dieselbe Grösse b (oder s resp.) nach entgegengesetzter Richtung auf, so erhält man wieder eine Hyperbel, die mit der frühern dieselbe Nebenaxe (mit Hilfe des Kreises K_a' leicht zu sehen) und Asymptoten hat, also mit ihr identisch ist. Es ist daher gezeigt, dass tatsächlich der Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an A^2 und die Kreise, welche die Geraden t_1 und t_2 berühren und ihre Mittelpunkte auf a haben, eine Hyperbel von den früher angegebenen Eigenschaften ist ¹⁾.

Auch aus der bekannten Eigenschaft der Hyperbel, dass, siehe Fig. 6.

1) Ganz analog lässt sich für den Fall der Ellipsen, wo die Geraden imaginär sind, der Beweis führen.

$$\overline{R_1 P_1} \cdot \overline{R_2 P_1} = \overline{R_2 P_2} \cdot \overline{R_1 P_2} = b^2$$

ist, ist sofort mit Berücksichtigung des in 7), 8) Gesagten der Nachweis, dass der Ort der Berührungspunkte diese Hyperbel sein muss, zu erbringen.

9) Aus dem aus dem allgemeinen Satze Gefolgerten und aus dem in 7) und 8) Erörterten ergeben sich nun einige Constructionen für die Hyperbel, die wir, wenn sie auch in Betreff der Einfachheit nicht gerade hervorragend sind, doch zur Erläuterung der gewonnenen Sätze und Eigenschaften, als Beiträge zur Theorie der Hyperbel hier anführen wollen.

- a) Eine punktweise Construction der Hyperbel (und der Ellipse) ergibt sich, siehe Fig. 5. aus der in 6) angegebenen Definition (die in 8) neuerdings bewiesen wurde), die keiner weiteren Erläuterung mehr bedarf.
- b) Man bringt, wie aus dem in 8) gegebenen Beweise hervorgeht, die Kreise, welche eine Gerade berühren (Fig. 7.) und ihre Mittelpunkte auf einer zweiten Geraden haben, mit den zur letzteren Senkrechten zum Schnitte, welche Senkrechten von den Berührungspunkten der Kreise und der ersten Geraden constanten Abstand haben und zwar nach beiden Seiten.
- c) Ist Fig. 8 von einer Hyperbel die Hauptaxe und ein Punkt gegeben, so lassen sich die Asymptoten der Hyperbel dadurch finden, dass man aus dem gegebenen Punkte P an den über der Hauptaxe als Durchmesser beschriebenen Kreis A^2 eine Tangente t legt, zu dieser PM senkrecht errichtet und mit M auf der Axe a als Mittelpunkt den Kreis durch P legt. Die Tangenten aus dem Mittelpunkt der Hyperbel an diesen Kreis sind die gesuchten Asymptoten.

Aus P geht noch eine zweite Tangente an A^2 , und diese ebenso verwendet, liefert einen zweiten Kreis, und die gemeinsamen Tangenten an diesen und den Früheren geben ebenfalls die Asymptoten.

- d) Ist (Fig. 12.) die Grösse und Lage der Nebenaxe gegeben und ein Punkt P einer Hyperbel, so kann man auf Grund der erörterten Eigenschaften die Asymptoten finden, indem man OT senkrecht auf OP macht, wo \overline{PT}^2 die Potenz von P bezüglich des imaginären Scheitelkreises B^2 ist.

Zieht man durch P die $p_1 \parallel a$ und sucht P_1 den Pol von p_1 bezüglich B^2 (er ist auch der Pol von P_1 bezüglich der Hyperbel), so ist P_1P die Tangente t an die Hyperbel im Punkte P . Trägt man auf t die Strecken

$$PT_1 = PT_2 = PT$$

ab, und zeichnet einen der Kreise, die ihren Mittelpunkt auf b haben. und t in T_1 oder T_2 berühren, so gehen die Asymptoten berührend an diesen aus O , (oder man zeichnet beide Kreise und die gemeinsamen Tangenten an diese).

- f) Für die in c) und d) gegebene Aufgabe: Gegeben eine Axe und ein Punkt einer Hyperbel, die Asymptoten zu construiren — kann man die Construction einfacher durchführen auf Grund folgender Betrachtungen.

In Fig. 12^a. ist:

$$\triangle O_1BD \text{ ähnlich } O_2O_1F$$

woraus:

$$r_1 : e = BD : O_1F$$

oder, wenn man

$$BC = O_1F - AB$$

macht:

$$O_1E : O_1O_2 = BD : BC$$

d. h., dass

$$BC \parallel EO_2 \text{ wird.}$$

Da aber, wenn O_1E und A^2 unverändert bleiben, die Punkte B , wie wir gezeigt haben, auf einer Hyperbel liegen, so finden wir für die Hyperbel:

Das Stück auf einer Parallelen zu einer Asymptote zwischen der reellen Axe und dem Punkt der Hyperbel ist gleich der Länge der Tangente aus dem Punkte an den Scheitelkreis über der reellen Axe.

Man erhält daher die Asymptotenrichtungen¹⁾, indem man Fig. 12^d. aus P eine Tangente PV an den Scheitelkreis legt, $PT = PT_1 = PV$ macht, wo dann zufolge des Vorbemerkten PT und PT_1 die Asymptotenrichtungen sind; aus O die Parallelen hiezu gezogen, gibt die Asymptoten selbst.

Siehe Nouvelles Annales 1875, p. 239. wo diese Construction von L.-A. Levat angegeben wird. Uebrigens gilt die Construction verallgemeinert auch für den zweiten, imaginären Scheitelkreis, indem man allgemeiner statt der Länge

- g) Soll der Schnitt einer zu a senkrechten Geraden g mit der durch A^2 und die Asymptoten gegebenen Hyperbel bestimmt werden, so trägt man Fig. 9. vom Schnitte der g

der Tangente des Hyperbelpunktes an einen Scheitelkreis die Quadratwurzel aus der absoluten Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis einführt. Durch eine einfache Rechnung, die hier weggelassen werden kann, findet man nämlich (siehe Fig. 12^b.), wenn PTS und PT_1S_1 zu den beiden Asymptoten der Hyperbel durch den Hyperbelpunkt parallel gezogen werden,

$$PT = PT_1 = PV$$

wenn V der Berührungspunkt einer der beiden aus P an den Scheitelkreis gehenden Tangenten ist (ist bereits oben in f) bewiesen worden), und wenn OZ senkrecht auf OP , und Z auf dem Scheitelkreis B^2 liegt, OZ also gleich der absoluten Grösse der Nebenaxe ist, so ist $\overline{LP^2}$ die Potenz von P in Bezug auf den imaginären Scheitelkreis über der Nebenaxe, und es ist

$$PZ = PS = PS_1$$

Man findet daher aus der Nebenaxe, und einem Punkte P der Hyperbel die Asymptote, indem man Fig. 12^o. OZ senkrecht auf PO legt und

$$PS = PS_1 = PZ$$

macht, wodurch man in PS und PS_1 die Asymptotenrichtungen erhält.

Man hat hiedurch:

Auf jeder zu einer Asymptote durch einen Hyperbelpunkt gezogenen Parallelen wird durch diesen und die eine Axe eine Strecke abgeschnitten gleich der Quadratwurzel aus der Potenz des Punktes in Bezug auf den über diese Axe beschriebenen Scheitelkreis. Daher:

Auf jeder durch einen Hyperbelpunkt zu einer Asymptote gezogenen Parallelen schneiden die beiden Axen eine Strecke ab gleich der Differenz (oder Summe) der Wurzeln aus den Potenzen des Punktes bezüglich der beiden Scheitelkreise, und dieselbe Strecke wird durch die Parallelen aus dem Punkte der Hyperbel zu den beiden Axen auf jeder Asymptote bestimmt u. s. w.

Man kann die in den Figuren 12^c. und 12^d. zur Bestimmung der Asymptotenrichtungen verwendeten Punkte TT_1 und S und S_1 noch anders finden, indem sich durch eine leichte Rechnung ergibt, dass Q und R Fig. 12^b die Fusspunkte der aus P zu den Axen gefällten Senkrechten sind, und wenn man aus Q die eine Tangente QU an den Scheitelkreis A^2 legt,

$$QU = QT = QT_1$$

ist. Bestimmt man von R in Bezug auf den imaginären Scheitelkreis B^2 die die Potenz $\overline{RW^2}$, so ist

$$RW = RS = RS_1$$

wie sich leicht ergibt. Mit Hilfe dieser Bemerkung sind in den Figuren 12^c. und 12^d. ebenfalls die Punkte SS_1 und TT_1 , welche mit P verbunden die Asymptotenrichtungen geben, bestimmt worden, und bedarf dieses keiner weiteren Erörterung.

und t auf letzterer b nach einer oder der andern Seite auf (oder s auf a von g weg und zieht die Parallelen zu g bis diese t schneiden). Dann ist nur nötig, einen der beiden Kreise zu construiren, welcher t in einem der so erhaltenen Punkte berührt und seinen Mittelpunkt auf a hat, welcher dann g in den gesuchten Punkten I und II schneidet.

- h) Man kann stets vier Punkte, einer wie oben gegebenen Hyperbel zugleich finden, wenn man 2 parallele Gerade g und g' Fig. 9. senkrecht zu a zieht, deren senkrechter Abstand $= 2s$, oder deren Abstand auf einer Asymptote gemessen $= 2b$ ist. Der Kreis, dessen Mittelpunkt auf a liegt, und der die Asymptote im Mittelpunkt der durch g und g' begrenzten Strecke berührt, gibt zufolge des Früheren die gesuchten Punkte der Hyperbel auf g und g' . (Hiervon können auch 2, oder alle 4 imaginär werden).
- i) Entsprechend den in 6) gegebenen Zusätzen kann man den Schnitt einer zu a senkrechten Geraden g mit der Hyperbel auch finden unter gleichzeitiger Bestimmung der Tangenten in diesen Punkten. In Fig. 10. sucht man zu g den Pol G bezüglich A^2 , legt JT tangirend an A^2 und macht

$$JT_1 = JT$$

Legt man an den mit MT_1 beschriebenen Kreis aus G die Tangenten t_1 und t_2 , so hat man in den Schnittpunkten I und II dieser mit g die Punkte der Hyperbel gefunden, und t_1 und t_2 sind die Tangenten in ihnen.

Oder, wie in Fig. 11., man macht

$$JT_1 = JT_2 = JT$$

beschreibt die zwei Kreise mit $M_1 T_1$ und $M_2 T_2$ als Halbmesser, und legt die noch möglichen gemeinsamen Tangenten an diese Kreise, und die Aufgabe ist gelöst, wobei hier die Construction des Poles G der Geraden g entfällt.

- k) Ist eine Gerade γ parallel zur Hauptaxe gegeben, und ihr Schnitt mit der durch B^2 und die Asymptoten gegebenen Hyperbel zu finden, so kann unter gleichzeitiger Ermittlung der Tangenten in den Schnittpunkten diese Aufgabe gelöst werden, indem wie in Fig. 10. OV senkrecht auf OK gemacht wird, und

$$KV_1 = KV_2 = KV$$

aufgetragen wird; an die 2 Kreise, welche die Asymptote in V_1 resp. V_2 berühren, und ihre Centren auf b haben, sind die gemeinsamen Tangenten zu legen, die auch die Hyperbel berühren; undj deren Berührungspunkte auf γ liegen. (Oder, man zeichnet nur einen der Kreise, und an diesen aus dem Pole von γ bezüglich B^2 die Tangenten).

10) Der Uebergang von zwei reellen Geraden auf zwei imaginäre wird gegeben durch eine Gerade und einen auf ihr befindlichen Punkt, als Berührungspunkt für die Kreise des Systemes. Hiedurch erhält man ein System von Kreisen, die sich in einem Punkte berühren, und findet hiefür, dass die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an einen beliebigen mit dem gemeinsamen Berührungspunkte concentrischen Kreis und die Kreise des Systemes auf 2 zur Centralen senkrechten den angenommenen Kreis berührenden Geraden liegen, und umgekehrt, schneidet man ein System von Kreisen, die sich in einem Punkte berühren, durch 2 zur Tangente im gemeinsamen Berührungspunkte in gleichen Abständen von dieser parallelen Geraden, so umhüllen die Tangenten an die Kreise in den Schnittpunkten mit den Geraden jenen Kreis, welcher über der von den parallelen Geraden auf der gemeinsamen Centralen abgeschnittenen Strecke als Durchmesser beschrieben wird. (Dieses Ergebniss gilt offenbar auch für eine solche Gerade allein).

In Fig. 13. ist dargetan, wie sich dieses Resultat auch direct höchst einfach zeigen lässt. Es ist nämlich

$$\triangle O_1AC \cong O_1BF$$

und wegen

$$O_1B = O_1A$$

folgt auch

$$\triangle BDC \cong AEF$$

so dass also

$$BD = AE = r$$

ist, und da sich dasselbe für jeden Kreis des Systemes ergibt, ist ersichtlich, dass der Abstand BD des Berührungspunktes B von der gemeinsamen Tangente in A constant und gleich r ist. Ist die Gerade gegeben, so ergibt sich ebenso aus

$$BD = AE$$

dass jedesmal AE constant ist, also die Tangenten an die Kreise in den Punkten der Geraden den Kreis vom Halbmesser BD oder AE umhüllen.

11) Sind die beiden Geraden imaginär, so erhalten wir als Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an die Kreise des einen Systemes (welche ihre Mittelpunkte auf der einen der beiden Axen des elliptischen Strahlensystemes haben, dessen imaginäre Doppelstrahlen die gegebenen Geraden sind) und an einen mit dem Schnittpunkt der Geraden concentrischen Kreis B^2 eine Ellipse, wie sich aus dem allgemeinen Satze ergibt, wie wir aber auch analog, wie in 8) mit Hilfe des Kegels dartun könnten, was aber hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Auch die Ellipse kann als Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an den zweiten Scheitelkreis (über der grossen Axe) und die Kreise des zweiten Systemes, welche letztere imaginär¹⁾ sind, definiert werden, und umgekehrt ergibt sich jeder der Scheitelkreise als Einhüllende der Tangenten, B^2 als jener an die Kreise des reellen Systemes in den Schnittpunkten der Ellipse, A^2 als Einhüllende der (imaginären) Tangenten in den (ebenfalls imaginären) Schnittpunkten des Systemes der imaginären Kreise mit der Ellipse an diese Kreise.

Die constructive Verwertung der genannten Eigenschaften und der weiter aus dem Allgemeinen für diesen Fall noch herauszulesenden ist für die Ellipse von noch geringerer Bedeutung als für die Hyperbel, und kann aus dem Vorausgehenden leicht selbst gefolgert werden, daher sie hier übergangen werden soll. Jedoch soll hier noch einiges bemerkt werden, was zur raschen und einfachen Verzeichnung der die Asymptoten der Ellipse berührenden Kreise führt.

Alle Kreise $O_1 O_2 \dots$ Fig. 14. mit $r_1 r_2 \dots$ als Halbmesser haben S als gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt und berühren, wenn der Winkel φ , den die Gerade l mit b einschliesst, grösser als 45° ist, dieselben 2 durch S gehenden imaginären Geraden. Die Senkrechte a in S zu b trifft die Kreise in Punkten derart, dass der Winkel ψ , unter welchem die nach diesen Punkten gehenden Radien zu b geneigt sind, constant ist. Die Grösse der auf a gelegenen halben Sehnen ist, nebenbei bemerkt, gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der jeweiligen Quadrantensehne

1) Dass die Kreise des zweiten Systemes imaginär sein müssen, ergibt sich, indem wir aus einem Punkte eines Strahles x eine Senkrechte s zur Axe b und eine senkrechte Gerade σ zur Axe a legen; x und der conjugirte Strahl x_1 bilden mit s ein Dreieck und ebenso mit σ . Ist das ein stumpfwinklig, so muss das andere spitzwinklig sein, und während für das erstere ein Polarkreis mit reellem Radius sich ergibt, folgt dann für das zweite ein solcher mit imaginärem Radius.

und dessen andere Kathete dem jeweiligen l gleich ist. Durch $P_1 P_2 \dots$ gehen die Polaren von S bezüglich der Kreise, und von diesen hätte man zu beiden Seiten das constante Stück s (siehe 7 β, γ) abzutragen und die zu b daselbst senkrechten Geraden mit den entsprechenden Kreisen zum Schnitt zu bringen, wodurch punktweise die in Rede stehende Ellipse erhalten würde.

Das constante Stück s ist bei angenommenem l offenbar nur mehr von der Annahme des Kreises B^2 abhängig, gleich dem Stück der zu b senkrechten Tangente an B^2 , welches zwischen b und l liegt (7 β, γ).

Zur vollständigen Bestimmung der imaginären Asymptoten suchen wir den conjugirten Strahl l_1 zu l in der Involution, indem wir z. B. Fig. 15. zu l bezüglich eines Kreises den Pol suchen und mit S verbinden.

Wir suchen den Pol für den Kreis, dessen Mittelpunkt B ist, und haben aus B die Normale zu l zu legen, diese mit der zu b parallelen Tangente an diesen Kreis zu schneiden und erhalten den Pol von l .

In Fig. 15. ist

$$\begin{aligned} BC : CD &= BS : BC \\ &= b : s \end{aligned}$$

und

$$EF : CD = b : s$$

daher

$$BC = EF = s$$

d. h. l und die conjugirte Gerade l_1 schneiden aus der zu b parallelen Tangente an B^2 das constante Stück s ab, ein anderes Mittel um l_1 zu finden¹⁾.

Dass E ein Punkt der Ellipse ist, ist sofort zu sehen, wenn man einen jener 2 Kreise des Systemes zeichnet, die denselben Radius wie B^2 haben. Man findet daher l im Falle dass die Ellipse gezeichnet vorliegt, indem man die zur Axe b parallelen Tangenten an B^2 mit der Ellipse schneidet, und einen der Schnittpunkte mit dem Mittelpunkte verbindet.

1) Ist die Involution durch die Axen und ein beliebiges Paar xx_1 gegeben, so ist es leicht, die Gerade l zu finden (oder λ die symmetrische, in Bezug auf die Axen), indem man für xx_1 und einer zu b senkrechten Geraden s den Polarkreis ausmittelt, und die Endpunkte des zu b senkrechten Durchmessers desselben mit dem Punkte S verbindet.

Es folgt damit auch

$$s : b = b : SG$$

und

$$s = \frac{b^2}{SG}$$

Da aber

$$SG = \frac{eb}{a}$$

ist, wobei a die halbe grosse Axe, e die halbe Excentricität der Ellipse bedeutet, so ist

$$s = \frac{ab}{e}$$

und hieraus auch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{e}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{e}$$

wodurch wieder ein einfaches Mittel gegeben ist, die Gerade l zu zeichnen, wenn die Ellipse durch die Halbaxen gegeben ist; man trägt Fig. 16. auf der Scheiteltangente in A die halbe Excentricität $e = OF = AH$ auf, oder man macht $OF' = OF$ und zieht l parallel mit AF' .

Gehen wir auf die imaginären Kreise über, welche die Asymptoten der Ellipse berühren, so sind, wenn s die Polare von S bezüglich eines Kreises des reellen Systemes, und σ die Polare bezüglich eines der imaginären Kreise ist, und s und σ sich in demselben Punkte von l treffen, Fig. 17. H und H_i die Höhenschnittpunkte der Dreiecke sll_1 und σll_1 ; für das letztere ist der Halbmesser ρ des Polarkreises imaginär und die absolute Grösse desselben MH_i . Wegen

$$BS : SH = \Sigma H_i : SH_i$$

sind die rechtwinkligen Dreiecke BNH und ΣMS ähnlich, und in Folge dessen $SM \perp BN$ oder SM senkrecht auf HN , d. h. Wkl. α ist $= 90^\circ - \psi$, also constant. Die Bedeutung von i ist die, dass uns die Gerade sofort die absolute Grösse der Halbmesser der imaginären Kreise liefert auf den zu a Senkrechten zwischen a und i .

Es ist demnach

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\rho}{b}$$

d. h. i geht (Fig. 16.) durch O parallel mit BF , oder man erhält auch i (oder die zu den Axen symmetrisch gelegene Gerade j , welcher dieselbe Bedeutung zukommt), indem man in F die Senkrechte zu a mit A^2 zum Schnitt bringt und den Schnitt mit O verbindet, oder den Schnittpunkt der zu a parallelen Tangente mit O verbindet.

Wegen

$$AK : a = b : c$$

Fig. 17., folgt

$$AK = \frac{ab}{c} = s$$

d. h. man kann i auch erhalten, indem man auf der Scheiteltangente in A an A^2 das constante Stück $s = AK$ (Fig. 16). aufträgt, und den Endpunkt mit O verbindet.

Die Ableitung der Relationen für die Lage von i galt ganz allgemein für irgend eine beliebige Lage von s resp. σ . Ist s wie in Fig. 17. zusammenfallend mit der Tangente an B^2 , so folgt

$$SN = b \operatorname{tg} \alpha = c$$

d. h. der Kreis des reellen Systemes, dessen Mittelpunkt mit einem der Endpunkte der kleinen Axe zusammenfällt, geht durch die Brennpunkte der Ellipse. Macht man hingegen

$$SD = s = \frac{ab}{c}$$

so wird

$$SA : SN = b : c$$

$$SA : c = \frac{ab}{c} : b$$

und damit $SA = a$ d. h.:

Man erhält den Mittelpunkt eines Kreises des reellen Systemes der durch die Endpunkte der grossen Axe geht, wenn man aus einem der auf a gelegenen Punkte von B^2 die Senkrechte zu l_1 legt. Die Grösse des Halbmessers des Kreises ist die Ordinate im Mittelpunkte, bis l natürlich.

Diese und noch andere Relationen ermöglichen es leicht, die Geraden l und l_1 , sowie i anzugeben, welche geeignet sind, beliebig viele Kreise einfach zu legen (reell oder imaginär), welche die Asymptoten einer gegebenen Ellipse berühren. Von der Wahl der l resp. i hängt aber offenbar auch die Form der Ellipse ab. Die angegebenen Relationen gestatten auch den Schnitt der zu b parallelen Tangenten an B^2 mit der Ellipse auf leichte Art zu finden, wenn diese durch die Axen (eventuell Excentricität) gegeben ist. Auf die, den bei der Hyperbel gegebenen, analogen Constructionen der Schnitte einer zu einer Axe parallelen Geraden etc. wollen wir hier nicht weiter eingehen.

12) Machen wir jetzt die Uebertragung von einigen der gewonnenen Ergebnisse auf den Raum.

Sind t_1, t_2 Fig. 5. die in der Ebene der Zeichnung gelegenen Erzeugenden eines Rotationskegels, a die Axe und S die Spitze, so stellen uns $E_1, E_2, E_3 \dots$ die Hauptaxen (grosse Axe der Ellipse ¹⁾ oder die reelle Axe im Falle der Hyperbel) von Schnitten des Rotationskegels vor, deren Ebenen senkrecht zur Zeichnungsfläche stehen, und die dieselbe Entfernung a von der Spitze des Rotationskegels besitzen. Die Berührungspunkte dieser Geraden mit den Kreisen des t_1 und t_2 berührenden Systemes sind aber nach einem bekannten Satze ²⁾ die Brennpunkte der oben genannten Schnitte und liegen, wie wir ausführlich dargetan haben, auf der bestimmten Hyperbel, die A^2 zum Scheitelkreis über der reellen Axe und t_1 und t_2 zu Asymptoten hat. Die Brennpunkte aller zu einer Hauptebene senkrechten Schnitte dieses Rotationskegels, die denselben Abstand vom Scheitel haben, liegen auf jener Hyperbel. Man erhält:

„Der Ort der reellen Brennpunkte aller ebenen Schnitte eines Rotationskegels, die dieselbe mit dem Kegel concentrische Kugel berühren, ist ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid, welches den gegebenen Kegel als Asymptotenkegel hat und die Kugel in den auf ihr gelegenen Punkten der Rotationsaxe berührt.“

Den Parameter irgend eines Schnittes, z. B. für E_3 Fig. 15.) finden wir als $\sqrt{QF_3 \cdot F_3Q'}$, welcher Wert aber einer bekannten Hyperbeleigenschaft zu Folge gleich $2b$ ist, d. h. alle diese Schnitte haben gleich grosse Parameter.

Uebrigens kann man die Richtigkeit des soeben Gesagten auch aus Fig. 6. ableiten. $2P_1P_0$ ist der Parameter eines Schnittes des Rotationskegels, für welchen Schnitt P_1 ein Brennpunkt ist. P_0P_1 ist aber gleich dem Abstände der zur Zeichnungsebene parallelen Ebene, die den Kegel nach einer Hyperbel schneidet, deren orthogonale Projection auf die Zeichnungsfläche die Hyperbel der Punkte $P_1P_2 \dots$ ist, von der Zeichnungsfläche, und ist dieser Abstand P_0P_1 , weil der Kegel ein Rotationskegel ist, gleich b , d. i. gleich der halben Länge der Scheiteltangente der Hyperbel zwischen den Asymptoten; jeder Schnitt, der einen Punkt dieser Hyperbel zum Brennpunkt hat, hat $2P_0P_1$ als Grösse des Parameters, und somit haben wir auch die Richtigkeit eines von Jacob Bernoulli ³⁾ angegebenen Satzes dargetan:

1) Siehe Gugler, Theorie der Kreisprojectionen.

2) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch v. Sohnke, pag. 289.

3) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch v. Sohnke, pag. 16.

„Der Parameter eines ebenen Schnittes eines Rotationskegels ist gleich dem Durchmesser jenes Kreisschnittes desselben, welcher von der Kegelspitze ebensoweit absteht wie die schneidende Ebene.“

Als Folge des Satzes von Bernoulli hat man dann auch:

Alle Ebenen, die dieselbe mit einem geraden Kreiskegel concentrische Kugel berühren, schneiden diesen nach Kegelschnitten mit gleichen Parametern — und damit und im Zusammenhange mit dem Vorigen:

„Der Ort der reellen Brennpunkte aller ebenen Schnitte eines Rotationskegels, die gleiche Parameter haben, ist ein zweischaliges Rotationshyperboloid, das den Rotationskegel zum Asymptotenkegel hat ¹⁾.“

Dieser zuletzt ausgesprochene Satz gilt allgemein für Rotationsflächen zweiten Grades in folgender Form:

„Der Ort der reellen Brennpunkte sämtlicher ebenen Schnitte einer Rotationsfläche zweiten Grades, die gleiche Parameter haben, ist eine mit der gegebenen concentrische, ähnlich und ähnlich gelegene Rotationsfläche zweiten Grades.“

Es lässt sich das soeben Gesagte auch durch folgende Betrachtungen beweisen.

Wenn wir in dem Abstände p gleich dem halben Parameter von einer Meridianebene eine parallele zu dieser legen, so schneidet diese die Rotationsfläche nach einem mit dem Meridiane ähnlichen Kegelschnitte, dessen orthogonale Projection auf diese Meridianebene eine mit der Meridiancurve ähnliche, ähnlich und concentrisch gelegene Curve ist. Ein Schnitt senkrecht zu dieser Meridianebene, der den Parameter $2p$ haben soll, muss seine Brennpunkte auf der zuletzt erhaltenen Curve haben. Umgekehrt wird auch jeder Punkt dieser Curve Brennpunkt für einen oder den andern durch ihn gehenden zur Meridianebene senkrechten Schnitt sein.

Durch Rotation um die Axe erzeugt nun diese Curve die früher angegebene Fläche, und der Satz ist bewiesen, weil ja jeder beliebig gewählte Schnitt auf einer durch die Rotationsaxe gehenden Ebene senkrecht stehen wird, und die bezüglich der zu einer durch die Rotationsaxe gehenden Ebene senkrechten Schnitte angestellten Betrachtungen allgemein gelten.

1) Für den imaginären Kegel ein Ellipsoid.

II.

Die Lemniskate.

Von

Emil Oekinghaus.

(Fortsetzung von T. VII. Nr. XIV.)

Aus den, Seite 367, gewonnenen Relationen

$$\begin{aligned}\tau + \alpha + 90^\circ &= \sigma; & \tau + \alpha' + 90^\circ &= \sigma' \\ \sigma + \sigma' &= 360^\circ + 2\tau\end{aligned}$$

folgt:

$$86) \quad \alpha + \alpha' = 180^\circ$$

und somit der Satz:

Die entsprechenden Kreisradien ρ und ρ' nach dem Mittelpunkte der Lemniskate sind in dem Falle gegen die Achse gleich geneigt, wenn die Schnittpunkte beider Kreise und der Lemniskate in gerader Linie liegen. Dieser Satz gilt allgemein für die 3 Kreispaare, welche, wie oben abgeleitet wurde, hinsichtlich ihrer Radien durch die Beziehung $\rho\rho' = c^2$ verknüpft sind.

Eine allgemeinere Gleichung, welche das gesamte Kreissystem mit einander verbindet, geht aus der Cosinusresolvente der Geraden hervor. Für diese

$$\cos(2\sigma - 2\tau)^2 - \left(\frac{2h^2}{c^2} + \cos 2\tau\right) \cos(2\sigma - 2\tau) + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

entwickeln wir aus

den Wert $\frac{\sin(\sigma - 2\tau)}{\sin \sigma} = \frac{c^2}{\rho^2}$

$$\operatorname{tg} \sigma = -\frac{\rho^2 \sin 2\tau}{c^2 - \rho^2 \cos 2\tau}$$

und eliminiren mit ihrer Hülfe aus der ersten σ , was auf eine re-
ciproke Gleichung führt. Man findet schliesslich

$$87) \left(\frac{\rho^2}{c^2} + \frac{c^2}{\rho^2}\right)^2 - \cos 2\tau \left(\frac{c^2}{h^2} \cos 2\tau + 2\right) \left(\frac{\rho^2}{c^2} + \frac{c^2}{\rho^2}\right)^2 \\ + 4 \left(\frac{c^2}{h^2} \cos \tau - 1\right) \left(\frac{\rho^2}{c^2} + \frac{c^2}{\rho^2}\right) - 4 \left(\frac{c^2}{h^2} - 2 \cos 2\tau\right) = 0$$

Diese Gleichung zeigt den Zusammenhang der Radien jener Kreise
an, welche sowol durch entsprechende Schnittpunkte der Geraden, als
auch durch den Mittelpunkt O gehen.

Eine allgemeinere Betrachtung kann nun auf folgendem Wege
geschehen.

Ein Kreis schneide die Lemniskate in 4 Punkten. Durch je
zwei derselben legen wir eine Gerade, deren Neigung gegen die Achse
bez. τ und τ' sei. Vermöge der Formeln

$$\cos \delta = \frac{\sin \sigma}{\sin 2(\sigma - \tau)}, \quad \cos \delta' = \frac{\sin \sigma'}{\sin 2(\sigma' - \tau')}, \quad \frac{\cos \delta}{\cos \delta'} = -\frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'}$$

folgt hieraus

$$\sin 2(\sigma - \tau) = -\sin 2(\sigma' - \tau')$$

also

$$88) \quad \sigma + \sigma' = 180^\circ + \tau + \tau' = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

wo die φ die Polarwinkel der Schnittpunkte von Kreis und Lemnis-
kate sind.

Daher ist die Summe der Winkel $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ um 180°
grösser als die Summe τ und τ' der Winkel der beiden Geraden oder
Kreissehnen gegen die Achse. Nun haben wir aber nachgewiesen,
dass, wenn die Strecke vom Mittelpunkt der Lemniskate nach der
Mitte der Sehne mit dieser einen Winkel S bildet, die Formel

$$2\sigma = 90^\circ + 2\tau + S$$

besteht. Für die 2. Sehne ist

$$2\sigma' = 90^\circ + 2\tau' + S'$$

also resultirt

$$\sigma + \sigma' = 90^\circ + \tau + \tau' + \frac{1}{2}(S + S')$$

Da aber

$$\sigma + \sigma' = 180^\circ + \tau + \tau'$$

so folgt

$$89) \quad S + S' = 180^\circ$$

Oder: Verbindet man die Mitten der gegenüber liegenden Seiten oder Diagonalen eines durch den Schnitt von Lemniskate und Kreis gebildeten Vierecks mit dem Mittelpunkt O der Lemniskate durch Strecken, so haben diese gegen die Sehnen gleiche Neigung.

Dieser Satz ist, wie man sofort bemerkt, eine Erweiterung des vorhin über die Gerade abgeleiteten Satzes, die letztere als Kreis von unendlich grossem Radius betrachtet werden kann.

Wir bezeichnen mit h den spitzen Winkel, den die entsprechenden Sehnen mit einander bilden, so dass

$$\tau' - \tau = 180^\circ - h^\circ$$

Die Winkel S, S' wählen wir ebenfalls spitz, so ist unter diesen Annahmen

$$2\sigma = 90^\circ + 2\tau + S + 180^\circ$$

$$2\sigma' = 90^\circ + 2\tau - S$$

$$2(\sigma' - \sigma) = -2h - 2S + 180^\circ$$

$$S + \sigma' - \sigma = 90^\circ - h$$

$$\sigma - \sigma' = S + h - 90^\circ = 2\sigma - U$$

$$\sigma - \sigma' = T - 90^\circ$$

wo T der Winkel ist, den die erste Strecke verlängert mit der 2. Geraden einschliesst, und da

$$\frac{s^2 \sin \sigma}{q^2 \cos \delta} = \sin(\sigma - \sigma') = \sin(2\sigma - U)$$

$$\cos S = \frac{\sin \sigma}{\cos \delta}$$

so folgt

$$90) \quad \frac{s^2}{q^2} \cos S = \cos T$$

woraus neue Beziehungen gefolgert werden können, wenn $s = q$ ist.

Aus der Formel

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180^\circ + \tau + \tau'$$

lassen sich ebenfalls manche neue Sätze ableiten, wenn man die Winkel zwischen den Geraden und Radienvectoren einführt.

Aus dem Vorstehenden lässt sich noch ein Tangentenproblem lösen. Berührt ein Kreis die Lemniskate, so wird die eine Sehne zur Tangente, und der zugehörige Winkel S ist dem Winkel zwischen dieser Tangente und dem Radiusvector gleich, also $= 90^\circ - 2\varphi$. Der Winkel S' der 2. Sehne ist also $= 90^\circ - 2\varphi$. Hierauf beruht die allgemeine Auflösung der Aufgabe, durch 2 gegebene Punkte der Lemniskate einen Berührungskreis hindurch zu legen.

Da S' als Winkel zwischen der die beiden Punkte verbindenden Sehne und ihrer Mittellinie nach O bekannt ist, so ist auch der Polarwinkel $\varphi = \frac{1}{2}(90^\circ - S')$ des Berührungspunktes bestimmt, was auch ohne Rechnung klar ist, da die verlängerte Mittellinie den Berührungspunkt treffen muss.

Wir wollen hier die Relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180^\circ + \tau + \tau'$$

noch einmal discutiren. Die φ sind die Polarwinkel der Schnittpunkte von Lemniskate und Kreis, τ und τ' die Neigung zweier gegenüber stehenden Sehnen oder auch Diagonalen gegen die Achse. Jede dieser Sehnen schneidet aber die Lemniskate in noch je 2 Punkten, welche durch die Winkel $\psi_3 \psi_4, \chi_1 \chi_2$ bezeichnet sein mögen.

Bei Berücksichtigung der Lage ist für beide Sehnen

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 360^\circ + 2\tau$$

$$\varphi_3 + \varphi_4 + \chi_1 + \chi_2 = 2\tau'$$

$$\frac{\Sigma\varphi + \psi_3 + \psi_4 + \chi_1 + \chi_2 = 360^\circ + 2\tau + 2\tau'}{\Sigma\varphi}$$

$$= 180^\circ + \tau + \tau'$$

$$91) \quad \psi_3 + \psi_4 + \chi_1 + \chi_2 = 180^\circ + \tau + \tau'$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit dem in 88) abgeleiteten überein. Hieraus folgt, dass durch die Punkte $\chi_1 \chi_2, \psi_3 \psi_4$ ebenfalls ein Kreis hindurchgelegt werden kann. Und weil

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \chi_1 + \chi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

so folgt vermöge der Formel

$$\operatorname{tg}(\psi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{c^2 - R^2 \cos 2\alpha}$$

dass der Mittelpunkt dieses Kreises durch $R(180^\circ + \alpha)$ bestimmt ist.

Auch diese Ableitung steht mit schon früher Vorgetragendem in directer Verbindung, wie man leicht finden wird.

Ebenso leicht ergibt sich vermöge der Formel

$$\frac{s^2}{s'^2} = \frac{\sin(2\sigma - U)}{\sin(2\sigma' - U)}$$

und der Cosinusresolvente des Kreises vermittelt Elimination $2\sigma - U$ und $2\sigma' - U$ eine Relation zwischen den Kreisradien s, s' , die auf eine Gleichung 9. Grades führt.

Vergleicht man die Gleichungen für den Kreis und die Gerade etwa in der Form

$$\cos\varphi^4 - 2\cos 2\tau \cos\varphi^3 \text{ etc. } (R^4 - 2c^2R^2\cos 2\alpha + c^4)\cos 2\varphi^4 - \text{ etc.}$$

und untersucht, ob es möglich sei, die Wurzeln beider identisch zu machen, so findet man folgende Bedingungen

$$c^2 - R^2\cos 2\alpha = s^2\cos 2\tau$$

$$R^2\sin 2\alpha = s^2\sin 2\tau$$

92)

$$s^2 - R^2 = \pm 2hs$$

woraus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\tau &= \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = -\frac{R^2\sin 2\alpha}{c^2 - R^2\cos 2\alpha} \\ R^4 - 2c^2R^2\cos 2\alpha + c^4 &= s^4 \end{aligned}$$

Genügen die R und s diesen Bedingungen, so sind die Wurzeln identisch. Man bemerke, dass die letzte Relation für constante $s^4 = q^4$ eine Cassinische Curve repräsentirt.

Besonders einfach ist der Fall $q = c$. Die Parallelität der Geraden durch entsprechende Punkte möge noch bemerkt werden. (Vergl. 90).

Andere Sätze ergeben sich von selbst.

Als Specialfall führen wir noch an, dass, wenn zwei concentrische Kreise, deren gemeinsame Centra auf der Y-Achse liegen, die Lemniskate tangiren, die Halbmesser dieser Kreise sich verhalten wie die entsprechenden Radienvectoren ihrer Berührungspunkte.

§ 9.

Die Lemniskate und die Parabel.

Eine gewisse sich auf eine Gleichung beziehende Verwandtschaft zwischen Lemniskate und Parabel lässt sich noch wie folgt nachweisen.

Ein Kreis, dessen Centrum die Polarcoordinaten $R(\alpha)$ habe, gehe durch den Brennpunkt der Parabel, welchen wir als Anfangspunkt annehmen.

Die Brennstrahlen r mögen mit R Winkel 2φ einschliessen.

Aus

$$r = 2R \cos 2\varphi, \quad r = \frac{q}{\sin \frac{1}{2}(2\varphi + \alpha)^2}$$

$$\frac{q}{2R} = \sin \frac{1}{2}(2\varphi + \alpha)^2 \cos 2\varphi$$

folgt für $\cos 2\varphi$ eine biquadratische Gleichung

$$93) \quad \cos 2\varphi^4 - 2 \cos \alpha \cos 2\varphi^3 + \left(\frac{2q}{R} \cos \alpha + \cos \alpha^2 \right) \cos 2\varphi^2$$

$$- \frac{2q}{R} \cos 2\varphi + \frac{q^2}{R^2} = 0$$

welche mit der Gleichung zwischen Lemniskate und Geraden übereinstimmt, wenn

$$\frac{q}{R} = \frac{h^2}{c^2}, \quad \alpha = 2\tau$$

angenommen wird. Diese Uebereinstimmung der Constanten beider Curven genügt, um die Polarwinkel der einen durch die der anderen darzustellen.

Die Cosinusresolvente der Parabel ist in diesem Fall

$$94) \quad \cos \frac{1}{2}\gamma^2 + \left(\frac{2q}{R} + \cos \alpha \right) \cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2q}{R} = 0$$

worin die γ die Winkel zwischen den gegenüber liegenden Seiten und Diagonalen bedeuten.

Noch allgemeiner würden diese Relationen ausfallen, wenn der Kreis durch einen Brennpunkt eines beliebigen Kegelschnitts hindurch geht. Die Resolvente wird dann

$$95) \quad \cos \frac{1}{2}\gamma^2 - \left(\frac{p}{eR} + \cos \alpha \right) \cos \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1-e^2}{e^2} \cos \gamma - \cos \alpha \frac{1-e^2}{e^2}$$

$$+ \frac{p}{eR} = 0$$

und ein kurzer Vergleich dieser mit der Lemniskatenresolvente 85) lässt die Identität beider erkennen, wenn

$$\alpha = U, \quad e = \frac{q^2}{s^2}, \quad \frac{p}{R} = \frac{(R-s^2)^2}{a^2 s^2}$$

eingeführt wird. Die weitere Untersuchung dieser Verhältnisse bietet manches Interesse, z. B. wenn der Kreis die Curve berührt. Ueber eine Anwendung der Parabel hinsichtlich des Tangentenproblems der Lemniskate haben wir schon früher berichtet.

Es existiren noch andere Beziehungen zwischen der Lemniskate und den Kegelschnitten, worauf wir hier aber nicht weiter eingehen wollen. Wir werden später in der Theorie der letzteren darauf zurückkommen.

§ 10.

Die Lemniskate und die gleichseitige Hyperbel.

Da das Entstehungsgesetz der Lemniskate durch polarische Beziehung mit der gleichseitigen Hyperbel verknüpft ist, so lässt sich im Voraus schliessen, dass die gemeinsame Betrachtung beider Curven auf interessante Relationen führen werde. Einige davon verdienen bemerkt zu werden.

Die gleichseitige Hyperbel und ihre Fusspunktcurve werde von einem Kreise, dessen Centrum $R(\alpha)$ und dessen Radius $= s$ sei, in 4 Punkten geschnitten.

Aus

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \varphi)$$

$$a^2 = r^2 \cos 2\varphi$$

folgt

$$96) \quad \begin{aligned} & \operatorname{tg} \varphi^4 ((R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4R^2 a^2 \sin^2 \alpha) + 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \varphi^3 \\ & + (2a^4 - 2(R^2 - s^2)^2 + 4R^2 a^2 \cos 2\alpha) \operatorname{tg} \varphi^2 - 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \varphi \\ & + (R^2 - s^2 + a^2)^2 - 4R^2 a^2 \cos \alpha^2 = 0 \end{aligned}$$

Vergleicht man sie mit der analogen für die Lemniskate und den Kreis

$$97) \quad \begin{aligned} & \operatorname{tg} \varphi^4 ((R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4R^2 a^2 \sin^2 \alpha) + 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \varphi^3 \\ & + (2(R^2 - s^2)^2 - 2a^4 + 4R^2 a^2 \cos 2\alpha) \operatorname{tg} \varphi^2 - 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \varphi \\ & + (R^2 - s^2 + a^2)^2 - 4R^2 a^2 \cos \alpha^2 = 0 \end{aligned}$$

so erkennt man die Identität beider, wenn

$$R^2 - s^2 = \pm a^2$$

gesetzt wird. Daraus folgt der Satz:

Wenn der Radius s eines Kreises, der mit der Lemniskate

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

die Centrale R hat, der Bedingung

$$s^2 = R^2 \pm a^2$$

genügt, so gehen die nach den Schnittpunkten beider Curven gezogenen Radienvectoren r rückwärts verlängert durch die Schnittpunkte des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel.

Umgekehrt schneiden diese Radienvectoren der Hyperbel rückwärts verlängert die Lemniskate in 4 Kreispunkten.

Bei den folgenden Darstellungen wolle man die Relation

$$Rr = a^2$$

beachten, welche aus den Polargleichungen

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad R^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

hervorgeht. Diese beiden correspondirenden Punkte $r(\varphi)$, $R(\varphi)$ bezeichnen wir mit P und P' .

Von den Brennpunkten der Hyperbel ziehen wir Gerade nach dem Lemniskatenpunkte P , welche den Winkel E bilden, und ferner von den Brennpunkten der Lemniskate nach dem Hyperbelpunkte P' Gerade, welche den Winkel E' einschliessen.

Vermöge der Formeln

$$\operatorname{tg} E = \frac{4rc \sin \varphi}{r^2 - 4c^2}, \quad \operatorname{tg} E' = \frac{2Rc \sin \varphi}{R^2 - c^2}$$

und der Polargleichungen erhält man nach Einführung dieser die Relation

$$98) \quad E + E' = 180^\circ$$

und damit den Satz:

Die Leitstrahlen der Lemniskate nach einem Hyperbelpunkte P' und die Leitstrahlen der Hyperbel nach dem correspondirenden Lemniskatenpunkte P schliessen ein Kreisviereck ein.

Eine weitere Verbindung beider Curven findet sich wie folgt.

Wir bezeichnen die Winkel, welche die Scheitelstrahlen von den Endpunkten $\pm a$ der Achse mit P und P' einschliessen, bezüglich mit γ und γ_1 , dann findet man wie oben

$$\cos \gamma = -\operatorname{tg} \varphi$$

$$\cos \gamma' = \operatorname{tg} \varphi$$

also

$$99) \quad \gamma + \gamma' = 180^\circ$$

Oder: Die Scheitelstrahlen zweier correspondirender Punkte der Lemniskate und Hyperbel schliessen ein Kreisviereck ein.

Für dritte Ableitung ergibt sich aus der Polargleichung der Hyperbel

$$e' = \frac{a}{1 + \sqrt{2} \cos \psi'}$$

Eliminirt man aus dieser und

$$R^2 = e'^2 + 4c^2 - 4ce' \cos \psi'$$

den Winkel ψ' , so folgt für den einen Leitstrahl

$$e' = \sqrt{a^2 + R^2} - a - \frac{a}{r} (\sqrt{a^2 + r^2} - r)$$

für den andern

$$e'' = \sqrt{a^2 + R^2} + a = \frac{a}{r} (\sqrt{a^2 + r^2} + r)$$

woraus zunächst

$$e'e'' = R^2$$

folgt und ferner, wenn die Leitstrahlen mn der Lemniskate durch

$$\sqrt{2m} = \sqrt{a^2 + r^2} - r$$

$$\sqrt{2n} = \sqrt{a^2 + r^2} + r$$

definiert sind, dass

$$\frac{e'}{e''} = \frac{m}{n}$$

ist, wonach das Verhältniss correspondirender Leitstrahlen für beide Curven das nämliche bleibt.

Wir bezeichnen nun die Winkel, welche diese Leitstrahlen mit einander bilden, durch Θ , Θ' , dann besteht zunächst für die Hyperbel die Formel

$$16c^2 = e'^2 + e''^2 - 2e'e'' \cos \Theta$$

aus welcher leicht

$$R \sin \frac{1}{2} \Theta' = a$$

folgt. Weil aber

$$Rr = a^2 \quad \text{und} \quad r = a \cos \frac{1}{2} \Theta$$

ist, so ist

$$\sin \frac{1}{2} \Theta' = \cos \frac{1}{2} \Theta$$

oder

$$100) \quad \Theta + \Theta' = 180^\circ$$

woraus der Satz:

Die Leitstrahlen der Lemniskate und Hyperbel nach correspondirenden Punkten ihrer Curve schliessen ein Kreisviereck ein.

Daran knüpft sich ein 4. Satz, den wir noch mittheilen wollen.

Wir haben oben die Focalwinkel der Hyperbel ψ' und ψ'' eingeführt. Dieselben stehen mit 2 andern in der Lemniskate in merkwürdiger Verbindung. Diese Winkel ψ sind nämlich denen gleich, welche der Radiusvector r der Lemniskate mit den Brennstrahlen mn bezüglich einschliesst, und die wie wir schon früher gefunden, durch $\frac{1}{2}\Theta + \varphi$ und $\frac{1}{2}\Theta - \varphi$ definirt sind. Bei Betrachtung der Figur ergibt sich dann leicht der Satz:

Die beiden correspondirenden Punkte auf Lemniskate und Hyperbel bilden mit je zwei ihrer zusammen gehörigen Brennpunkte entsprechende Kreisvierecke.

Die Tangente des Hyperbelpunktes P' schneide die X -Achse in M , die Y -Achse in N ; nennen wir dann noch ihren zweiten Schnittpunkt mit der Lemniskate P'' , so sind $MNP'P''$ einander zugeordnete harmonische Punkte, wie leicht zu beweisen ist.

Ferner möge der Focalkreis, der durch die Brennpunkte $\pm c$ geht, die Y -Achse in 2 Punkten F und F' schneiden; ziehen wir nun durch die Lemniskate eine der X -Achse parallele Gerade, für welche die leicht abzuleitenden Relationen

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2, \quad \Theta' + \Theta'' = 180^\circ$$

bestehen, und halbiren die Focalwinkel Θ_1 und Θ_2 durch Geraden, welche die Y -Achse in G und G' schneiden, so sind $FF'GG'$ einander zugeordnete harmonische Punkte.

§ 11.

Die Linie gleicher Producte.

Das Absolutglied in der Gleichung der Geraden 18) wird durch

$$1) \quad R^4 - a^2 R^2 \cos 2\varphi = x_1 x_2 x_3 x_4$$

definirt. Es ist von der Richtung der Geraden oder vom Winkel δ unabhängig und drückt aus, dass das Product der vier von $R(\varphi)$ an gerechneten Secanten ähnlich wie beim Kreise constant ist, wie auch die Geraden durch jenen festen Punkt gezogen werden mögen.

Wie aus der Formel hervorgeht, ist die Curve gleicher Producte eine Cassinische Linie.

Wir beschreiben um den Lemniskatenmittelpunkt O einen Kreis vom Halbmesser h , ziehen von $R(\varphi)$ an diesen eine Tangente $= t$ und setzen fest, dass das Product gleich sein soll der 4. Potenz dieser Tangente, also dass

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= t^4 \\ \text{ist. Da aber} \quad t^2 &= R^2 - h^2 \end{aligned}$$

ist, so geht aus dieser Einführung die Beziehung

$$R^4 - a^2 R^2 \cos 2\varphi = (R^2 - h^2)^2$$

hervor, welche auf eine Kegelschnittsgleichung

$$2) \quad \frac{x^2}{2(h^2 - c^2)} + \frac{y^2}{2(h^2 + c^2)} = 1$$

als geometrischen Ort der Punkte gleicher Potenzen führt. Sie stellt eine Ellipse dar, wenn $h > c$, eine Hyperbel, wenn $h < c$, eine Gerade $y = \frac{1}{2}c$, wenn $h = c$ ist.

Legt man allgemein die Gleichung der Cassinischen Curven anstatt der Schleifenlemniskate zu Grunde, so modificiren sich die Formeln etwas, die Kegelschnittsgleichungen aber sind analog den obigen.

Die Untersuchung kann auf 2 Lemniskaten ausgedehnt werden in dem Sinne, dass das Product oder die Potenz für beide gleich sei. Der Untersuchung legen wir demnach 2 Lemniskaten

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad r'^2 = a'^2 \cos 2\varphi$$

zu Grunde. Die Centrale beider sei R und ihre Neigung zur α -Achse $= \beta$. Die beiden Achsen mögen noch den Winkel α einschliessen.

Die Ausführung der Rechnungen ergibt die Curvengleichung

$$\begin{aligned} 3) \quad & a^2(x^2 - y^2) - 2(x^2 + y^2)(2Rx \cos \alpha + 2Ry \sin \alpha - R^2) \\ & + (2Rx \cos \alpha + 2Ry \sin \alpha - R^2)^2 \\ & = a'^2 \cos 2\beta (x^2 - y^2 - 2Rx \cos \alpha + 2Ry \sin \alpha + R^2 \cos 2\alpha) \\ & + a^2 \sin 2\beta (2xy - 2Rx \sin \alpha - 2Ry \cos \alpha + R^2 \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

welche dem 3. Grad angehört. Für $R = 0$, also für concentrische Lemniskaten reducirt sie sich auf ein System zweier senkrecht auf einander stehenden Geraden

$$4) \quad x^2 - y^2 = \frac{2a'^2 \sin 2\alpha}{a^2 - a'^2 \cos 2\alpha} xy$$

Die Linie gleicher Producte wird sehr einfach und führt auf den 2. Grad, wenn die Achsen beider Curven in einer Geraden liegen, α und β , also $= 0$ sind.

Man findet zunächst, wenn die Centrale mit g bezeichnet wird:

$$y^2 = \frac{4gx^3 - (a^2 - a'^2 + 6g^2)x^2 + 2g(2g^2 - a'^2)x - g^2(g^2 - a'^2)}{-4gx + 2g^2 + 1'^2 - a^2}$$

Wir führen die Division durch und setzen das Restglied $= 0$, man erhält die Gleichung eines Kreises

$$5) \quad x^2 + y^2 - \frac{a^2 - a'^2 + 2g^2}{2g} x + \frac{(a^2 - a'^2)^2 + 4g^2(g^2 - a'^2)}{8g^2} = 0$$

mit der Bedingung

$$6) \quad g^4 - \frac{1}{2}(a^2 + a'^2)g^2 + \frac{1}{8}(a^2 - a'^2)^2 = 0$$

Benutzt man sie, um die Kreisgleichung zu transformiren, so wird letztere

$$7) \quad \left(x - \frac{a^2 - a'^2 + 2g^2}{4g}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{8}(a^2 + a'^2)$$

und stellt die Linie gleicher Producte in einfachster Form dar. Da die Gleichung für g^2 quadratisch ist, so ergibt sich aus ihrer Auflösung

$$8) \quad 4g^2 = a^2 + a'^2 \pm \sqrt{(3a^2 - a'^2)(3a'^2 - a^2)}$$

dass 2 Centralen existiren, so dass die zweite Lemniskate 2 verschiedene Lagen annehmen kann. Wie aus einer weiteren geometrischen Betrachtung hervorgeht, geht die Linie gleicher Producte durch die gemeinsamen Schnittpunkte der entsprechenden Lemniskaten.

Aus dem Bau der Gleichungen folgen noch gewisse Determinationen, welche zu berücksichtigen sind, womit wir uns aber hier nicht weiter beschäftigen wollen. Wir wollen nur andeuten, dass diese speciellen Sätze hinsichtlich der Cassinischen Curven einer Erweiterung fähig sind.

Es möge hier noch erwähnt werden, dass, wenn xy Lemniskaten-coordinaten darstellen, die daraus combinirten

$$X = x + ny$$

$$Y = y - nx$$

Coordinaten XY einer Gleichung

$$R^2 = a^2(1 + n^2) \cos 2(\Theta + h), \quad \operatorname{tgh} = n$$

genügen, die wieder durch eine Lemniskate repräsentirt ist und bei variablem n verschiedene Lagen- und Grössenverhältnisse annimmt.

Wird die Gleichung nach n differentiirt um die einhüllende Curve aller Lemniskaten zu finden, so resultirt als solche die durch

$$R^2 \cos 2\Theta = a^2$$

dargestellte gleichseitige Hyperbel.

Betrachtet man endlich noch die aus den obigen Ausdrücken hervorgehenden

$$x = \frac{X - nY}{1 + n^2}, \quad y = \frac{nX + Y}{1 + n^2}$$

Coordinationen xy als die einer gesuchten Curve, während XY der Lemniskate angehören, so resultirt die Curve

$$R^2 = a^2 \cos h^2 \cos 2(\Theta - h)$$

und die Einhüllende aller für $n = \operatorname{tgh}$ veränderlichen Lemniskaten führt auf die Fusspunktgleichung der Lemniskate

$$\varrho = a \cos \frac{1}{2} \Theta$$

Die Untersuchung der reciproken Polare dieser Curve ist deshalb bemerkenswert, weil sie mit der gleichseitigen Hyperbel in Verbindung tritt. Auch die Annahme, dass die Lemniskate hinsichtlich ihrer Brennpunkte oder auch ihres Mittelpunktes als Katakaustik oder Brennlinie einer Curve aufgefasst werden kann, verdient wegen der daraus sich ergebenden Resultate Beachtung.

§ 12.

Die Rectification der Cassini'schen Linien.

Die folgenden Entwicklungen über die Rectification der Lemniskaten werden vielleicht aus dem Grunde bemerkenswert erscheinen, weil wir eine Variable einführen, die man bisher übersehen hat, aber als sehr geeignet erscheint, die Integration auf einen einfachen Ausdruck zurückzuführen.

Ausserdem ist derselbe noch einer geometrischen Discussion zugänglich, welche manches Anregende bietet.

Anstatt der wenig geeigneten Variablen x oder r oder φ wählen wir als Variable den schon häufig benutzten Focalwinkel der Leit-

strahlen eines Punktes der Curve, der uns auch später noch wichtige Dienste leisten wird.

Er hängt mit dem Radiusvector r der Curve

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + c^4 = q^4$$

durch die Relation

$$r^2 = c^2 + q^2 \cos \Theta$$

zusammen. Die Beziehung zwischen φ und Θ findet sich aus

$$\sin \varphi = \frac{q^2}{2c} \frac{\sin \Theta}{\sqrt{c^2 + q^2 \cos \Theta}}$$

Unter Beachtung dieser Formeln erhält man vermittelst bekannter Methoden schliesslich das Integral

$$9) \quad s = q \int \sqrt{\frac{h^2 + \cos \Theta}{(h^2 + \cos \frac{1}{2} \Theta^2)(h^2 - \sin \frac{1}{2} \Theta^2)}} d \frac{1}{2} \Theta, \quad h = \frac{c}{q}$$

Dies Integral werden wir nachher in Reihen entwickeln, vorher aber die interessanten Eigenschaften discutiren, welche damit verknüpft sind.

Zunächst bemerken wir, dass die Grenzen der Integration davon abhängen, ob die Curve aus 2 Ovalen oder aus einem ungetheilten Ganzen besteht. Ausserdem ist das Verhältniss $h = \frac{c}{q}$ für beide Fälle zu beachten, welches entsprechend ≥ 1 oder auch $= -1$ sein kann.

Zugleich bestimmt

$$\frac{c}{q} = \sin E$$

für die aus einem Zuge bestehenden Curve, für welche $q > c$ ist, die obere Grenze, während bei den Ovalen das Integral 0 bis π genommen werden kann.

Nun möge das Integral

$$10) \quad s = \frac{q^2}{c} \int_0^\Theta \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{c^2} \sin \frac{1}{2} \Theta^2}{1 + \frac{c^2}{q^2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta^2}{1 + \frac{c^2}{q^2}}\right)}} d \frac{1}{2} \Theta$$

sich auf ein Oval und

$$11) \quad s' = \frac{q'^2}{c'} \int_0^{\Theta'} \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{c'^2} \sin \frac{1}{2} \Theta'^2}{1 + \frac{q'^2}{c'^2}} \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta'^2}{\frac{c'^2}{q'^2}}\right) \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta'^2}{1 + \frac{c'^2}{q'^2}}\right)} d \frac{1}{2} \Theta'}$$

auf eine ungeteilte Lemniskate beziehen, deren Constanten ausserdem noch von der ersten verschieden sein sollen. Die Grenzen sind in beiden verschieden. Daher substituiren wir im zweiten Integral

$$12) \quad \sin \frac{1}{2} \Theta' = \frac{c'}{q'} \sin \frac{1}{2} \Theta$$

und erhalten nach einigen Umformungen das Integral

$$13) \quad s' = q' \int_0^{\Theta} \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{q'^2} \sin \frac{1}{2} \Theta^2}{1 + \frac{q'^2}{c'^2}} \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta^2}{\frac{q'^2}{c'^2}}\right) \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta^2}{1 + \frac{q'^2}{c'^2}}\right)} d \frac{1}{2} \Theta}$$

welches nun auch von 0 bis π genommen werden kann. Man bemerke aber wol, dass trotz der Transformation der Bau des Integrals derselbe geblieben ist, indem nur die Glieder $\frac{c'}{q'}$ sich in ihre reciproken Werte umgesetzt haben. Daher ist das erste und dritte Integral überhaupt identisch, wenn

$$\frac{c}{q} = \frac{q'}{c'}$$

gesetzt wird, woraus

$$14) \quad cc' = qq'$$

als Bedingung resultirt, wenn die nach 12) entsprechenden Lemniskaten bogen in einfachem Verhältniss zu einander stehen sollen.

Nehmen wir der Einfachheit wegen confocale Lemniskaten an, so ist

$$15) \quad c^2 = qq' \\ \sin \frac{1}{2} \Theta' = \frac{c}{q'} \sin \frac{1}{2} \Theta$$

welche Formel, wenn

$$\frac{c}{q'} = \sin E'$$

eingeführt wird, auch in

16) $\sin \frac{1}{2}\Theta' = \sin E' \sin \frac{1}{2}\Theta$

übergeht.

Für die Bogen bestehen nun folgende allgemeine Ausdrücke, wenn das Integral = J gesetzt wird:

$$s = \frac{q^2}{c} \cdot J$$

17)

$$s' = q' \cdot J$$

woraus

18) $\frac{s}{s'} = \frac{q^2}{cq'}$

oder in dem zunächst betrachteten Falle von confocalen Curven

19) $\frac{s}{s'} = \frac{q^3}{c^3} = \frac{c^3}{q'^3}$

d. i.

$$\frac{s}{s'} = \sin E'^3$$

In confocalen Lemniskaten, deren Parameter q und $q' = \frac{c^2}{q}$ sind, entspricht mittelst 12) jedem Bogen s der einen Curve ein analoger s' der zweiten, welche beide in dem unveränderlichen Verhältniss $\frac{q^3}{c^3}$ zu einander stehen. Daher besteht auch zwischen den Umfängen beider Curven das nämliche Verhältniss $\sin E'^3$. (Vergl. Holzmüller, Lemniskatische Geometrie S. 351 und s. Schlussnote).

Wir fügen noch einige Bemerkungen bei.

Aus

$$\sin E' = \frac{\sin \frac{1}{2}\Theta'}{\sin \frac{1}{2}\Theta}$$

folgt

$$\sin E'^3 = \frac{1 - \cos \Theta'}{1 - \cos \Theta}$$

Hierin drücken wir mittelst der Formel

$$r^2 = c^2 + q^2 \cos \Theta$$

Θ durch r aus, und finden zunächst

$$\sin E'^3 = \frac{q^2}{q'^2} \frac{q'^2 - r'^2 + c^2}{q^2 - r^2 + c^2}$$

und weil

$$\sin E' = \frac{c}{q'}$$

so folgt schliesslich der einfache Ausdruck

$$\frac{r}{r'} = \frac{c}{q}$$

also auch

$$\sin E' = \frac{r}{r'}$$

so dass r oder r' mit Leichtigkeit gefunden werden kann, wodurch auch der eine Bogen durch den andern bestimmt ist.

Daher ist auch

$$20) \quad \frac{s}{s'} = \frac{r^3}{r'^3}$$

oder die entsprechenden Bogen verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Radienvectoren.

Oder: Bestimmt man in zwei Lemniskaten, welche die Parameter q und $q' = \frac{c^2}{q}$ haben, 2 Punkte derart, dass ihre Radienvectoren in constantem Verhältniss

$$\frac{r}{r'} = \sin E$$

zu einander stehen, so verhalten sich die entsprechenden Bogen s und s' wie die dritten Potenzen dieser Radien.

Der allgemeinere Fall nicht confocaler Lemniskaten möge noch kurz erledigt werden. Die Gleichungen sind jetzt:

$$\begin{aligned} r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + c^4 &= q^4 \\ r'^4 - 2c'^2 r'^2 \cos 2\varphi' + c'^4 &= q'^4 \end{aligned}$$

die Brennpunkte sind $\pm c$ und $\pm c'$, die Parameter q und q' .

Aus der Hauptformel

$$cc' = qq'$$

oder

$$\frac{c}{q} = \frac{q'}{c'}$$

folgt schon, dass die erste Curve zwei Ovale, die zweite ein Ganzes bildet. Die betreffenden Bogen haben jetzt das Verhältniss

$$21) \quad \frac{s}{s'} = \frac{c}{c'} \sin E'^3$$

wo wie früher

$$\sin \frac{1}{2} E' = \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta'}{\sin \frac{1}{2} \Theta}$$

ist. Ebenso entwickelt sich leicht das folgende Verhältniss

$$22) \quad \frac{r}{r'} = \frac{c}{c'} \sin E'$$

Wollte man annehmen, dass etwa der Bogen s' das n -fache von s sei, so würde zunächst

$$\begin{aligned} s' &= ns \\ \frac{c'}{c} &= n \sin E'^2 \end{aligned}$$

bestehen. Ist die äussere Curve als bekannt oder gezeichnet vorausgesetzt, so würden die Elemente der innern zu bestimmen sein.

Man findet leicht

$$23) \quad c = \frac{q'^2}{n c'^2} \quad q = \frac{q'^2}{n c'}$$

und ist aus diesen Data die Ovale gezeichnet, so entspricht jedem Punkt Θ' der äussern ein durch

$$\sin \frac{1}{2} \Theta \sin E' = \sin \frac{1}{2} \Theta'$$

bestimmter Punkt der innern Curve, deren Bogen sich wie $n:1$ verhalten. Die Umfänge haben ebenfalls das nämliche Verhältniss.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass die Lemniskatenbogen in ähnlicher Weise mit einander verglichen werden können, wie dies bei den Kegelschnitten der Fall ist.

§ 13.

Wir gehen jetzt zu den Reihenentwickelungen über, welche wir zunächst auf das Integral für die Ovale

$$s = \frac{q}{h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{1+h^2} \sin \frac{1}{2} \Theta^2}{\left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta^2}{h^2}\right) \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2} \Theta^2}{1+h^2}\right)}} d \frac{1}{2} \Theta; \quad h = \frac{c}{q}$$

beziehen. Der Abkürzung wegen schreiben wir es

$$\frac{h}{q} s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - 2\beta \sin \frac{1}{2}\Theta^2}{(1 - \alpha \sin \frac{1}{2}\Theta^2)(1 - \beta \sin \frac{1}{2}\Theta^2)}} d\frac{1}{2}\Theta$$

und entwickeln die einzelnen Ausdrücke in Reihen. Man findet

$$\begin{aligned} \frac{h}{q} s = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{\Theta^2}{2} + \frac{3}{8}\alpha^2 \sin \frac{1}{2}\Theta^4 + \frac{5}{16}\alpha^3 \sin \frac{1}{2}\Theta^6 + \frac{35}{128}\alpha^4 \sin \frac{1}{2}\Theta^8 \dots \right) \\ & \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\beta \sin \frac{\Theta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^2 \sin \frac{1}{2}\Theta^4 + \frac{5}{16}\beta^3 \sin \frac{1}{2}\Theta^6 + \frac{35}{128}\beta^4 \sin \frac{1}{2}\Theta^8 \dots \right) \\ & \cdot \left(1 - \beta \sin \frac{1}{2}\Theta^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \sin \frac{1}{2}\Theta^4 - \frac{1}{2}\beta^3 \sin \frac{1}{2}\Theta^6 - \frac{5}{8}\beta^4 \sin \frac{1}{2}\Theta^8 \dots \right) d\frac{1}{2}\Theta \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}\Theta^2 + \frac{1}{8}(3\alpha^2 - 2\alpha\beta - 5\beta^2) \sin \frac{1}{2}\Theta^4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{16}(5\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2 - 13\beta^3) \sin \frac{1}{2}\Theta^6 \right. \\ & \left. + \frac{1}{128}(35\alpha^4 - 20\alpha^3\beta - 30\alpha^2\beta^2 - 52\alpha\beta^3 - 141\beta^4) \sin \frac{1}{2}\Theta^8 \right) d\frac{1}{2}\Theta \end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen erstrecken sich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$.

Hinsichtlich der Bestimmung von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{1}{2}\Theta^{2n} d\Theta$ verweisen wir auf bekannte Formeln und geben hier das Schlussresultat, indem wir den echten Bruch $\frac{q^2}{c^2}$ mit k bezeichnen, da das Ergebniss zunächst für Ovale gilt.

$$24) \quad s = kc \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{k^2}{1+k} + \frac{3}{64} \frac{k^2(3k^2+4k-4)}{(1+k)^2} \right. \\ \left. + \frac{5}{256} \frac{k^3(5k^3+12k^2+4k-16)}{(1+k)^3} \dots \right)$$

Die Rectification der ungetheilten Lemniskaten führt, wie wir oben nachgewiesen, auf ein analoges Integral mit reciprokem Parameter.

Bezeichnen wir auch jetzt wieder mit k den Ausdruck $\frac{c^2}{q^2}$, welcher ein echter Bruch ist, so wird der Bogen s' durch

$$25) \quad s' = q \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{k^2}{1+k} + \frac{3}{64} \frac{k^2(3k^2+4k-4)}{(1+k)^2} + \frac{5}{256} \frac{k^2(5k^3+12k^2+4k-16)}{(1+k)^3} \dots \right)$$

Erwähnenswert ist noch die folgende Transformation.

Die Schnittpunkte $\pm a$ der grossen Achse der Cassinischen Curven, also ihre Scheitelpunkte verbinden wir mit einem beliebigen Curvenpunkte, welcher den Focalwinkel ϑ hat, durch Scheitelgeraden. Dieselben mögen den (spitzen) Scheitelwinkel γ einschliessen.

Man findet vermöge der Formel

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2ra \sin \varphi}{r^2 - a^2} \quad \text{etc.} \quad a = \sqrt{c^2 + q^2}$$

schliesslich die einfache Relation

$$26) \quad \cot \gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 + q^2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta$$

Daher lässt sich anstatt ϑ γ in das Integral einführen, und man findet

$$27) \quad s = \frac{q^2}{c^2} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \frac{q^2}{c^2} \cos^2 \gamma^2}{\left(1 + \frac{q^2}{c^2} \cos^2 \gamma^2\right) \left(1 - \frac{q^4}{c^4} \cos^2 \gamma^2\right)}} d\gamma \quad *)$$

welches noch einfacher gebaut ist, als die vorbergehenden und sich auf den Fall der Ovalen bezieht, wo $\frac{q}{c} < 1$ ist. Das Integral ist von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Die Entwicklungen in Reihen führen auf

*) S. Schlussnote.

$$s = ka \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\begin{aligned} &1 - k(1 - \frac{1}{2}k) \cos y^2 + k^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}k^2 \right) \cos y^4 \\ &- k^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}k^2 - \frac{5}{16}k^3 \right) \cos y^6 \\ &+ k^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}k + \frac{3}{16}k^2 - \frac{5}{16}k^3 + \frac{35}{128}k^4 \right) \cos y^8 \end{aligned} \right) dy$$

woraus schliesslich unter Benutzung bekannter Formeln

$$28) \quad s = ka \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2}k + \frac{7}{16}k^2 - \frac{11}{32}k^3 + \frac{329}{1024}k^4 - \dots \right)$$

als die gesuchte Reihe für den Bogen s hervorgeht. Darin bedeutet

$$k = \frac{a^2}{c^2}$$

und a ist die Länge der grossen Achse.

§ 14.

Die geometrische Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale 1. Gattung vermittelt der Lemniskate.

Die von Jacobi gegebene Auflösung dieses Problems gründet sich auf die Eigenschaften des Kreises. Dass die Kegelschnitte ebenfalls mit Erfolg verwertet werden können, haben wir schon früher mehrfach bewiesen. Wegen der Verwandtschaft der Lemniskaten mit den Kegelschnitten ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass auch die Lemniskate einen Beitrag zur Auflösung bringen wird. Es kommt nur darauf an, unter den mannigfachen Verhältnissen diejenigen zu treffen, welche sich den Bedingungen der Aufgabe am natürlichsten und ungezwungensten anschmiegen.

Wir legen durch die Mitte der Lemniskate einen Kreis, dessen Centrum die Coordinaten $R(\alpha)$ hat. Eine Gleichung für die beiden den Schnittpunkten entsprechenden Focalwinkel Θ und Θ' , welche bekanntlich von den Leitstrahlen gebildet werden, ist nun leicht aufzustellen.

Sie ist

$$29) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta^2 \cos 2\alpha + \frac{2c}{R} \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta + 2 \cos \alpha^2 - \frac{c^2}{R^2} = 0$$

Wir führen darin eine andere Variable ein, hervorgehend aus

$$\operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \Theta = \sqrt{2}$$

und erinnern daran, dass γ der (spitze) Scheitelwinkel ist, den 2 von den Endpunkten der Achse $\pm a$ nach dem genannten Punkte der Curve einschliessen.

Die erste Gleichung geht dann in

$$30) \quad \operatorname{tg} \gamma^2 \left(2 \cos \alpha^2 - \frac{c^2}{R^2} \right) + \frac{2a}{R} \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma + 2 \cos 2\alpha = 0$$

über. Daran schliessen sich

$$31) \quad \begin{aligned} \sin \gamma^4 \left(\frac{c^2}{2R^2} + \sin \alpha^2 \right)^2 - 2 \left(\frac{c^2}{2R^2} - \sin \alpha^2 \cos 2\alpha \right) \sin \gamma^2 + \cos 2\alpha^2 = 0 \\ \cos \gamma^4 \left(\frac{c^2}{2R^2} + \sin \alpha^2 \right)^2 - 2 \left(\frac{c^4}{4R^4} + \sin \alpha^2 \cos \alpha^2 - \frac{c^2}{2R^2} \cos 2\alpha \right) \cos \gamma^2 \\ + \left(\frac{c^2}{2R^2} - \cos \alpha^2 \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Diese bilden die Basis der nachfolgenden Aufstellungen.

Die Fundamentalformel des Additionstheorems

$$F(\gamma_1) + F(\gamma_2) = F(\gamma)$$

ist bekanntlich

$$\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \mathcal{A}(\gamma) = \cos \gamma$$

Die constituirenden Werte sind nun aus den Gleichungen 30) und 31) bekannt, und wir haben

$$\frac{c^2}{2R^2} - \cos \alpha^2 \mp \cos 2\alpha \mathcal{A}(\gamma) = \cos \gamma \left(\frac{c^2}{2R^2} + \sin \alpha^2 \right)$$

Wir führen

$$R \cos \alpha = x, \quad R \sin \alpha = y$$

ein und ordnen die Formel demgemäss. Man findet:

$$32) \quad x^2(1 \pm \mathcal{A}) + y^2(\cos \gamma \mp \mathcal{A}) = c^2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2$$

Damit haben wir einen Kegelschnitt erhalten, der die Bedingungen des Theorems erfüllt.

Der geometrische Ort der Centra der durch den Mittelpunkt der Lemniskate gehenden Kreise, welche in ihren Schnittpunkten

die Scheitel-Winkel γ als Amplituden der elliptischen Integrale 1. Gattung bestimmen und damit das Additionstheorem lösen, ist eine Ellipse

$$33) \quad \frac{x^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{1 - \mathcal{A}(\gamma)}} + \frac{y^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\mathcal{A}(\gamma) + \cos \gamma}} = 1$$

oder eine Hyperbel

$$34) \quad \frac{x^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{1 + \mathcal{A}(\gamma)}} - \frac{y^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\mathcal{A}(\gamma) - \cos \gamma}} = 1$$

Betrachten wir den Fall der Ellipse näher.

Ihre Achsen sind

$$A^2 = \frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{1 - \mathcal{A}}, \quad B^2 = \frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\mathcal{A} + \cos \gamma}$$

Führen wir

$$\operatorname{tg} E = \frac{B}{A}$$

ein, so erhält man aus

$$\mathcal{A} = \cos E^2 - \cos \gamma \sin E^2$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin E \cos E}{\sqrt{k^2 - \sin E^2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin E \cos E}{\sqrt{k^2 - \sin E^2}}$$

so dass bei bestimmten E und k der Modulus γ bekannt ist.

Derselbe folgt auch aus

$$35) \quad c^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{2A^2 B^2}{A^2 + B^2}$$

welche Formel geometrische Bedeutung besitzt. Es ist nämlich der rechtsstehende Ausdruck das Quadrat des Radiusvectors ρ , der mit der Achse den Winkel von 45° einschliesst und also mit der Asymptote der Lemniskate (Hyperbel) zusammenfällt und eine Grenzlage des Kreises bezeichnet. Daher besteht die einfache Relation

$$36) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho}{c}$$

Die Auflösung des Theorems beruht zunächst auf der Construction der Achsen der Ellipse, hervorgehend aus

$$37) \quad \frac{2A^2}{c^2} = \frac{1 - \cos \gamma}{1 - \mathcal{A}}, \quad \frac{2B^2}{c^2} = \frac{1 - \cos \gamma}{\mathcal{A} - \cos \gamma}$$

und der Ellipse selbst. Da die Amplituden γ und γ_1 bekannt sind, so ist der dem Scheitelwinkel γ_1 entsprechende Punkt der Lemniskate

leicht gefunden, ebenso der Mittelpunkt des Kreises, dessen zweiter Schnittpunkt den gesuchten Scheitelwinkel γ_2 als Amplitude des entsprechenden Integrals bestimmt.

Man bemerke, dass bei gegebener Ellipse der Modulus durch

$$k^2 = \frac{c^2 + 2B^2}{2(A^2 + B^2)}$$

gegeben, ist und es ist bemerkenswert, dass, wenn beide Curven confocal sind, k^2 gleich $\frac{1}{2}$ wird. Alsdann drückt das Integral

$$c \int \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \gamma}}$$

den entsprechenden Lemniskatenbogen u aus, und das Additionstheorem wird zu $u_1 + u_2 = u$, worin $u_1 + u_2$ bei allen Lagen des Kreises die unveränderliche Summe oder Bogenlänge u erhält.

Für die Hyperbel gelten die analogen Formeln

$$38) \quad A'^2 = \frac{c^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma^2}{1 + \mathcal{A}}, \quad B'^2 = \frac{c^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma^2}{\mathcal{A} - \cos \gamma}$$

$$c^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{A'^2 B'^2}{B'^2 - A'^2}$$

$$39) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{c}{\varrho'}, \quad k^2 = \frac{2B'^2 - c^2}{2(B'^2 - A'^2)}$$

worin ϱ' die Bedeutung wie bei der Ellipse hat, u. s. w.

Bei confocalen Hyperbeln folgt wieder $k^2 = \frac{1}{2}$ und die Integrale gehen in Lemniskatenbogen über.

Aus den Entwicklungen geht hervor, dass das Theorem

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} = \int \frac{d\gamma_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma_1}} = \int \frac{d\gamma_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma_2}}$$

in welchem γ und γ' als gegebene Grössen construiert werden können, hinsichtlich der gesuchten Amplitude γ_2 durch die Lemniskate gelöst ist, wodurch sich die Bedeutung der Lemniskate auch nach dieser Richtung offenbart.

Die zu Anfang aufgestellte Gleichung für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta$ wollen wir noch kurz betrachten. Wie wir früher gezeigt, ist durch

$$u = \int \frac{d\frac{1}{2} \Theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} \Theta}}$$

ein Lemniskatenbogen definiert. Für zwei solcher Bogen wählen wir die Relation

$$u_1 + u_2 = K$$

worin K als vollständiges Integral einen Lemniskatenquadranten ausdrückt. Die Bedingung hierfür ist

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta_2 = \sqrt{2}$$

Beachtet man das Absolutglied der genannten Gleichung, so geht daraus die Formel

$$\frac{c^2}{R^2} - 2 \cos \alpha^2 = \pm \sqrt{2} \cos 2\alpha$$

oder

$$c^2 - 2x^2 = \pm \sqrt{2}(x^2 - y^2)$$

hervor, welche auf eine Ellipse

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{2 - \sqrt{2}}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{\sqrt{2}}} = 1$$

und auf eine Hyperbel

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{2 + \sqrt{2}}} - \frac{y^2}{\frac{c^2}{\sqrt{2}}} = 1$$

führt, welche beide mit der Lemniskate confocal sind. Beide schneiden sich auf dem Focalkreise vom Radius c in der Asymptote der Lemniskate (gleichseitigen Hyperbel). Sie sind der geometrische Ort der Centra aller durch O hindurch gehenden Kreise, welche auf der Lemniskate Bogen constanter Summe begrenzen.

§ 15.

Die elliptischen Integralfunktionen der Lemniskate.

Wir werden hier die Formeln benutzen, welche wir in unserer Abhandlung über diese Functionen entwickelt haben.

Die nachstehende werden wir besonders benutzen, da sie die einfachste ist.

Es liege vor die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi^4 - a \operatorname{tg} \varphi^3 + b \operatorname{tg} \varphi^2 - c \operatorname{tg} \varphi + d = 0$$

mit derselben ist verbunden die Function

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 2K$$

$$k^2 = \frac{A^2 + 2(1 - B + D \pm \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}{C^2 + 2D(1 - B + D \pm \sqrt{(A - C)^2 + (1 - B + D)^2})}$$

Wir wenden sie an auf die Gleichung der Geraden für $\text{tg } \varphi$

$$\text{tg } \varphi^4 (h^2 + 2c^2 \cos^2 \tau) - 2c^2 \sin 2\tau \text{tg } \varphi^3 + 2(h^2 - c^2 \cos 2\tau) \text{tg } \varphi^2 + 2c^2 \sin 2\tau \text{tg } \varphi + h^2 - 2c^2 \sin^2 \tau = 0$$

und finden

$$k^2 = \frac{-2c^2}{\pm \frac{1}{2}c^2 - \frac{c^2}{2} + h^2 - c^2 \sin^2 \tau}$$

Geht die Gerade durch einen Brennpunkt, so ist

$$h = c \sin \tau$$

und für das untere Zeichen wird $k^2 = 2$, also die Integralfunctio zu

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2K$$

welche Lemniskatenbogen darstellt. Aus der Relation

$$40) \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2K$$

ergibt sich demnach der Satz, dass jede Gerade durch den Brennpunkt einer Lemniskate vier Bogen abschneidet, deren Summe der halben Lemniskate gleich ist.

u_1 und u_2 müssen von dem einen Scheitel $+a$, u_3 und u_4 von dem andern $-a$ an gerechnet werden.

Wir können diesem Satze eine weitere Ausdehnung auf den Kreis und die Lemniskate geben.

Die entsprechende Gleichung haben wir schon früher aufgestellt, sie ist

$$41) \quad ((R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4R^2 a^2 \sin^2 \alpha) \text{tg } \varphi^4 + 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \text{tg } \varphi^3 + (2(R^2 - s^2) - 2a^4 + 4R^2 a^2 \cos 2\alpha) \text{tg } \varphi^2 - 4R^2 a^2 \sin 2\alpha \text{tg } \varphi + (R^2 - s^2 + a^2)^2 - 4R^2 a^2 \cos^2 \alpha = 0$$

Die Rechnung wird dadurch sehr erleichtert, dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen des Modulus ein vollständiges Quadrat ist. Wir setzen wieder

$$k^2 = 2 \quad \text{also} \quad k'^2 = -1$$

und erhalten die Bedingung

$$R^4 a^4 \sin 2\alpha^2 = (R^2 - s^2)^2 ((R^2 - s^2)^2 + a^4 - 2a^2 R^2 \cos 2\alpha)$$

oder

$$42) \quad \frac{(R^2 - s^2)^2}{a^2} = 2 R^2 \cos 2\alpha - c^2 + \sqrt{R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4}$$

Schreiben wir wie früher

$$R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4 = q^4$$

als Gleichung einer Cassinischen Curve, so wird das letzte Resultat in

$$43) \quad (R^2 - s^2)^2 = R^4 - (c^2 - q^2)^2$$

umgewandelt.

Mit jeder beliebigen Lage des Kreiscentrums ist also ein bestimmter Radius s verknüpft, und der Kreis schneidet die Lemniskate in Punkten, deren entsprechende Bogen in der Relation

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2K$$

zu einander stehen. Die Bogen sind wieder zu zweien von den entsprechenden Scheiteln an gerechnet. Rechnet man sie vom Mittelpunkt der Lemniskate aus, so ist der grösste Bogen gleich der Summe der übrigen oder $u_1 = u_2 + u_3 + u_4$, wo die Zahlen auch die Quadranten bezeichnen. Der geometrische Ort aller Kreiscentra kann auch eine Cassinische Curve sein, und man bemerke wol, dass der Ausdruck $c^2 - q^2$ oder $q^2 - c^2$ für solche eine geometrische Bedeutung hat.

Demnach folgt für

$$c^2 - q^2 = \pm b^2$$

aus

$$(R^2 - s^2)^2 = R^4 - b^4$$

die Relation

$$44) \quad s^2 = R^2 \pm \sqrt{R^4 - b^4}$$

Sehr einfach wird die Formel für s^2 , wenn der geometrische Ort der Kreiscentra die Lemniskate selbst ist, alsdann ist $c = q$ und demnach $b = 0$. Daher ist

$$s^2 = 2R^2$$

und sehr leicht zu construieren.

Daher erhält man den Satz:

Jeder Kreis, dessen Centrum $r(\varphi)$ auf der Lemniskate liegt und einen Halbmesser

$$s = r\sqrt{2}$$

hat, schneidet die Curve in 4 Punkten, welchen Bogen entsprechen, deren grösster, vom Mittelpunkt der Lemniskate an gerechneter gleich der Summe der übrigen ist, nämlich

$$u_1 = u_2 + u_3 + u_4$$

wobei wieder die Indices die entsprechenden Quadranten bezeichnen.

Es verdient bemerkt zu werden, dass noch eine Relation zwischen den Radienvectoren r der bezüglichen durch den Kreis getroffenen Lemniskatenpunkte besteht, welche genau derjenigen entspricht, welche wir für die Gerade durch den Brennpunkt schon früher entwickelt haben.

Wie wir bewiesen, ist mit jeder Gleichung 4. Grades

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

die Relation

$$\Sigma \sqrt{x \cdot h} = 0$$

verknüpft, so dass

$$\Sigma \sqrt{x} = 0$$

ist, wenn $h = 0$ wird. Die Bedingung ist nun hierfür

$$\left(\frac{a^2}{4} - b\right)^2 = 4d$$

Wir wenden nun diese Relation auf die in 83) gegebene Cosinusgleichung an, in welcher

$$\cos 2\varphi = \frac{r^2}{a^2}$$

ist, aber in dem Sinne, dass wir die reciproken Wurzeln als x in obige Formel einführen. Die Relation

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 0$$

führt nun zu derselben Bedingungsgleichung 42), welche ausdrückt, dass

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

ist. Die Rechnungen übergehen wir, da dieselben keine Schwierigkeiten verursachen.

Auch die auf die Additionstheoreme gegründeten Formeln

$$\frac{\Delta\varphi_1 \pm \Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_3 \pm \Delta\varphi_4} = \frac{\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 \pm \varphi_4)}$$

lassen eine Anwendung zu. Da nämlich

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - 2\sin^2\varphi} = \frac{r}{a}$$

ist, so gehen aus der Relation die neuen

$$45) \quad \begin{aligned} \frac{r_1 \mp r_3}{r_3 \pm r_4} &= -\frac{\sin(\varphi_1 \mp \varphi_3)}{\sin(\varphi_3 \pm \varphi_4)} \\ \frac{r_1 \mp r_3}{r_2 \mp r_4} &= -\frac{\sin(\varphi_1 \mp \varphi_3)}{\sin(\varphi_2 \pm \varphi_4)} \\ \frac{r_1 \mp r_4}{r_2 \pm r_3} &= -\frac{\sin(\varphi_1 \mp \varphi_4)}{\sin(\varphi_2 \pm \varphi_3)} \end{aligned}$$

hervor. Diese Formeln gelten für die Lage des Kreises, in welchem 2 Schnittpunkte r_1, r_4 im 1. und 4. Quadranten ($r_1 > r_4$) sich befinden, r_3 und r_2 bez. im 3. und 2. Quadranten liegen. Für eine veränderte Lage muss auf die Vorzeichen von φ Rücksicht genommen werden.

Für die Brennpunktsgerade bestehen analoge Ausdrücke, deren Untersuchung sehr interessant ist.

Auch die übrigen Integralfunctionen können erfolgreich auf analoge Verhältnisse übertragen werden.

§ 16.

Die Gleichung des Kreises für $\operatorname{tg}\varphi$ kann auch zur Bildung einer neuen Integralfunction verwandt werden, wenn wir die $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ als Variable betrachten und nach früher gegebenen Methoden operiren. Die Rechnungen führen zunächst auf das Differential

$$\frac{A d \operatorname{tg} \varphi}{2a^2 R^2 (A \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{1}{2} B \sqrt{2A^2 - \frac{1}{2} B^2} - AB \operatorname{tg} \varphi^2 - (2A + A^2) \operatorname{tg} \varphi^4)}$$

worin

$$A = \frac{(R^2 - s^2 - a^2)^2}{2a^2 R^2}, \quad B = \frac{(R^2 - s^2 + a^2)^2}{2a^2 R^2}, \quad C = \frac{(R^2 - s^2)^2 - a^4}{a^2 R^2}$$

$$4AB = C^2$$

Auf die geeignete Form gebracht, resultirt bei Weglassung des Factors

46)

$$\Sigma \int \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\left(\frac{4a^2 R s + (R^2 - s^2)^2 - a^4}{(R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4a^2 R^2} + \operatorname{tg} \varphi^2\right) \left(\frac{4a^2 R s - (R^2 - s^2)^2 + a^4}{(R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4a^2 R^2} - \operatorname{tg} \varphi^2\right)}}$$

Um dies Integral auf die Normalform zu bringen, führen wir

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{(R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4a^2 R^2}{4a^2 R s - (R^2 - s^2)^2 + a^4}} \operatorname{tg} \varphi$$

$$k^2 = \frac{4a^2 R s - (R^2 - s^2)^2 + a^4}{8a^2 R s}$$

ein, und man erhält die Function

$$47) \int \frac{d\gamma_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma_1}} + \int \frac{d\gamma_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma_2}} + \int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma_3}}$$

$$+ \int \frac{d\gamma_4}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma_4}} = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}$$

in welcher die Constante ein Integral ist.

Zu bemerken ist der Fall $R = s$, wonach der Kreis durch den Anfangspunkt O geht. Es wird

$$\cos \gamma = \operatorname{tg} \varphi$$

und jetzt wird γ zum Scheitelwinkel, der dem Punkte $r(\varphi)$ entspricht.

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{c^2}{4R^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{R}{c}$$

welche Formeln man mit früheren vergleichen möge.

Werden in dem Hauptintegral noch gewisse Grössen gleich null gesetzt, so resultiren entsprechende Integrale, die in einfachern Fällen integrirt werden können und neue Beziehungen zu Tage fördern.

Analoge Functionen lassen sich aus der Gleichung für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta$ gewinnen. Sie ist

$$48) \quad g^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^4 + 2gR \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^3 + (2g(g - c) - R^2 \cos 2\alpha) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2$$

$$+ 2R(g - c) \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta + (g - c)^2 - 2R^2 \cos^2 \alpha = 0$$

$$g = \frac{s^2 - R^2}{2c}$$

Hierin betrachten wir $\sin \alpha$ als variabel und erhalten

$$49) \quad \Sigma \int \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta d \frac{1}{2} \Theta}{\sqrt{-(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2 + 2) \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2 + \frac{g^2 - cg - R^2 - Rs}{g^2} \right)} \times \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2 + \frac{g^2 - cg - R^2 + Rs}{g^2} \right)} = C$$

Substituieren wir

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2 + \frac{2g^2 - (R-s)^2}{2g^2} = \frac{2Rs}{g^2} \cos \psi$$

$$k^2 = \frac{4Rs}{g^2 + (R+s)^2}$$

so erscheint die Normalform

$$50) \quad \int \frac{d\psi_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_1}} + \int \frac{d\psi_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_2}} + \int \frac{d\psi_3}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_3}} + \int \frac{d\psi_4}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_4}} = C$$

$$\cos 2\varphi = \frac{2g^2}{R^2 + s^2 + 2Rs \cos 2\psi}$$

Wie vorhin können für die Constanten des Hauptintegrals Modificationen eingeführt werden, welche neue Relationen hervorrufen.

Entwickelt man die Formel für die Winkelsumme, so erhält man

$$51) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) = \frac{2cR \sin \alpha}{R^2 - c^2} = \operatorname{tg} \Theta$$

Der Ausdruck zur rechten hat einen leicht angebbaren Wert, es ist nämlich Θ der Winkel, welchen die vom Kreiscentrum $R(\alpha)$ nach den Brennpunkten gezogenen Leitstrahlen mit einander einschliessen.

Daher ist

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 2\Theta$$

welche Formel nicht nur für die Lemniskate, sondern auch, wie leicht zu beweisen ist, für alle Cassinischen Curven gilt. Die Summe $\Sigma \Theta$ ist überhaupt constant, wenn die Kreiscentra auf einem die Brennpunkte enthaltenden Kreise liegen.

Wir wollen noch für die Cassinischen Linien die Gerade durch den Brennpunkt einer Untersuchung unterwerfen. Ihre Neigung zur Achse sei τ . Man hat

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^4 - 2 \cot \tau \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^3 + \frac{g^2}{c^2} (1 + \cot^2 \tau) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2 - 2 \cot \tau \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta - 1 = 0$$

Wir nehmen $\cot \tau$ als Variabele an und bestimmen die entsprechende Integralfunctiön

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{c^2} \sin^2 \frac{1}{2}\Theta\right) \left(1 + \frac{q^2}{c^2} \cos^2 \frac{1}{2}\Theta\right)}}$$

welche wir mittelst der Relation

$$\cot \frac{1}{2}\Theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + q^2}} \operatorname{tg} \gamma$$

transformiren. Hierin ist γ der Scheitelwinkel, welcher uns aus früherem schon bekannt ist. Die Function vereinfacht sich dann zu

$$52) \int \frac{d\gamma_1}{\sqrt{1 - \frac{q^4}{c^4} \cos^2 \gamma_1}} + \int \frac{d\gamma_2}{\sqrt{1 - \frac{q^4}{c^4} \cos^2 \gamma_2}} + \int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{1 - \frac{q^4}{c^4} \cos^2 \gamma_3}} \\ + \int \frac{d\gamma_4}{\sqrt{1 + \frac{q^4}{c^4} \cos^2 \gamma_4}} - c$$

Der eingeführte Scheitelwinkel γ besitzt demnach für die Transformationen dieser Integrale bedeutenden Wert.

Hinsichtlich der weitem Anwendung der elliptischen Integralfunctiön erinnern wir daran, dass zwischen den Curven dritten und vierten Grades und der Lemniskate eine merkwürdige Verwandtschaft besteht, welche sich auf die Theorie der Invarianten dieser Curven gründet, und welche wir schon früher einer dynamischen Interpretation unterworfen haben.

§ 17.

Conforme Abbildungen lemniskatischer Curven.

Die Lemniskate gibt Veranlassung zur Aufstellung einer merkwürdigen Curve, welche durch die Leichtigkeit, mit welcher sie sich in die Theorie der conformen Abbildungen einführt, einiger Aufmerksamkeit wert erscheint. Sie charakterisirt sich durch die Gleichung

$$53) \quad y = \log(\sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x)$$

oder auch durch

$$54) \quad \begin{aligned} e^y &= \sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x \\ e^{-y} &= \sqrt{1 + \cos x^2} - \cos x \end{aligned}$$

von welcher wir zeigen wollen, dass sie für die Theorie der isogonalen Verwandtschaft eine gewisse Bedeutung besitzt. Die Curve, welche ungefähr einer Wellenlinie ähnlich ist, zeichnet sich durch besondere Eigenschaften aus.

Aus den letzten beiden Darstellungen folgen

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ \sqrt{1 + \cos x^2} &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \end{aligned}$$

Da aber bekanntlich

$$\sin iy = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

so erhalten wir eine einfache Relation

$$55) \quad \begin{aligned} \sin ix &= i \cos x \\ \cos iy &= \sqrt{1 + \cos x^2} \end{aligned}$$

Der Differentialquotient ist

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x^2}}$$

und die Rectification der Curve führt auf

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin x^2}}$$

welcher Ausdruck mit dem Integral des Lemniskatenbogens übereinstimmt, wenn $x = \frac{1}{2}\Theta$ gesetzt wird.

Θ ist bekanntlich der Focalwinkel, welchen 2 Leitstrahlen p, p' vom Punkte $r(\varphi)$ nach den Brennpunkten ± 1 mit einander bilden.

Daher ist auch

$$56) \quad p = e^y, \quad p' = e^{-y}, \quad pp' = 1$$

Bevor wir nun die eigentliche Bedeutung der Curve entwickeln, halten wir es für nützlich, den oben gegebenen Relationen eine einfache physikalische Grundlage zu geben.

Wir nehmen an, in einem Bogen der Lemniskate befände sich eine leuchtende Materie, die nach bekanntem Gesetz eine kleine im

Mittelpunkt der Lemniskate sich befindende Kugel in einer gewissen Stärke beleuchtet. Um den Lichtbetrag oder die Stärke dieser Beleuchtung zu bestimmen, haben wir zunächst das Bogendifferential ds durch r^2 zu dividiren und mit dem \cos des Ausstrahlungswinkels 2φ zu multipliciren. Der Ausdruck würde sein, wenn

$$k = 2c = 2$$

gesetzt wird,

$$57) \quad J = \int k \frac{ds}{r^2} \cos 2\varphi \quad \text{oder} \quad J = s$$

weil

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ist; daher folgt, dass die Stärke der Beleuchtung in proportionalem Verhältniss mit dem Bogen wächst.

Wir nehmen ferner an, dass im Mittelpunkt O eine kleine in der X Achse sich befindende Fläche von einem Bogen der Curve in obigem Sinne beleuchtet sei.

Jetzt tritt der Unterschied ein, dass das letzte Integral noch mit $\sin \varphi$ multiplicirt werden muss, so dass die Stärke der Beleuchtung durch

$$k \int \frac{ds}{r^2} \cos 2\varphi \sin \varphi$$

und wegen

$$ds = \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

durch

$$ak \int \frac{\cos 2\varphi}{r^2 \sqrt{\cos 2\varphi}} \sin \varphi d\varphi$$

definiert ist. Das Integral ist leicht zu erhalten, man findet

$$J = - \int \frac{k}{2c} \log(\sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x) + \text{Const.}$$

Wir setzen

$$k = 2c = 2$$

und beachten, dass J für $x = 0$ verschwindet.

Unter Berücksichtigung der eingeführten Curve hat man also

$$58) \quad J = k - y = y'$$

worin k die Maximalordinate der Curve im Punkte $x = 0$ bezeichnet.

Die Beleuchtungsstärke wächst also jetzt proportional der entsprechenden Ordinate der lemniskatischen Curve

$$\sin ix = i \cos x$$

Endlich betrachten wir noch die Wirkung des leuchtenden Bogens auf eine kleine im Mittelpunkt der Lemniskate sich befindende und in der Y -Achse liegende Fläche.

Das Integral wird jetzt

$$J = k \int \frac{ds}{r^2} \cos 2\varphi \cos \varphi$$

wobei wir

$$\cos 2\varphi = \cos \frac{1}{2}\theta^2$$

berücksichtigen müssen.

Das Endresultat ist

$$J = \frac{k}{2c} \theta$$

oder

$$59) \quad J = \frac{1}{2}\theta$$

In diesem Falle wächst die Beleuchtung proportional mit der Abscisse der Curve

$$\sin ix = i \cos x$$

wobei wir hinsichtlich des 1. Falls daran erinnern, dass die Lemniskate mit der ihr verwandten gleiche Rectificationsverhältnisse besitzt, so dass die eine Curve für die andere genommen werden kann. Sie kann also als eine modificirte Lemniskate betrachtet werden, deren Gleichung

$$\sin y = \cos x$$

ist. Umschreibt ein Punkt die Lemniskate in gleichförmiger Bewegung, so durchwandert in entsprechend constanter Bewegung der analoge Punkt die verwandte Curve in ununterbrochenem Zuge und befinden sich beide in periodischer Wiederkehr bald auf der positiven, bald auf der negativen Seite der Curve.

Da die Curve in unendlichem Zuge verläuft, könnte man sie Zuglinie oder Tractrix der Lemniskate, oder auch kurz Lemniskatrix nennen, wenn man letztere Benennung gelten lassen will.

Die Quadratur derselben ist leicht durchführbar, wenn man die Reihe

$$\log(\sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x) = \cos x - \frac{1}{2} \frac{\cos x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos x^5}{5} - \dots$$

benutzt. Die Fläche ist demnach

$$\int y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \frac{1}{3} \frac{\cos x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos x^5}{5} \dots \right)$$

und führt auf die interessante Reihe

$$60) \quad \int y dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$$

Vergl. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. XV. 229. Catalan.

§ 18.

I.

Schon an der Form der Gleichung

$$\sin iy = i \cos x$$

ist unmittelbar zu erkennen, dass die Curve in einfachster Weise auf Abbildungsaufgaben, oder auf Functionen complexen Arguments anwendbar ist, daher wollen wir sie jetzt in diesem Sinne untersuchen.

In der Zahlenebene ist ein beliebiger Punkt z durch $x + iy$ definiert. Bilden wir eine Function von z , so entspricht jedem Punkte z ein von der Function abhängiger conformer Punkt in der Abbildungsebene Z . Beschreibt z in der ersten Ebene eine gewisse Curve, so wird in der Functionalebene der entsprechende ebenfalls eine Curve beschreiben, deren Bildungsgesetz von der Art der Function und andern Verhältnissen abhängt. So führt bekanntlich die Abbildung von $\sin(x + iy)$, $\cos(x + iy)$ auf confocale Kegelschnitte, wenn x oder y als constant betrachtet wird. Wir werden in unserm Falle aber x und y als veränderlich ansehen und annehmen, dass sie Coordinaten der Lemniskatrix seien. Wir zeichnen also in der z Ebene diese Curve ein und versuchen, die conformen Abbildungen derselben für alle möglichen Functionen darzustellen. Dabei bemerken wir, dass die beiden Relationen

$$\sin iy = i \cos x$$

$$\sin iy = \sqrt{1 + \cos x^2}$$

für alle Fälle massgebend sind.

Als Function complexen Arguments wählen wir zuerst

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy + \sin x \sin iy$$

Die obigen Relationen hierin eingeführt, geben

$$X + iY = \cos x \sqrt{1 + \cos x^2} + \sin x \cos x \cdot i$$

also

$$X = \cos x \sqrt{1 + \cos x^2}$$

$$Y = \sin x \cos x$$

Man findet

$$X^2 + Y^2 = 2 \cos x^2$$

$$X^2 - Y^2 = 2 \cos x^4$$

also

$$61) \quad (X^2 + Y^2)^2 = 2(X^2 - Y^2)$$

woraus das interessante Resultat sich ergibt, dass für die eingeführte Function die Abbildung der Lemniskatrix die ursprüngliche Lemniskate mit den Brennpunkten ± 1 ist.

Man kann sie mit den oben genannten Kegelschnitten in einfachen Zusammenhang bringen, indem wir an bekannte Sätze erinnern:

Den Linien

$$x = a \pm 2n\pi$$

in der x Ebene entspricht in der Z Ebene die Hyperbel

$$\frac{X^2}{\cos a^2} - \frac{Y^2}{\sin a^2} = 1$$

Daher sind die Halbachsen durch

$$A' = \cos \frac{1}{2}\Theta = \cos x, \quad B' = \sin x$$

und demnach a durch $\frac{1}{2}\Theta$ oder den halben Focalwinkel der Lemniskate bezeichnet.

Ferner entspricht den Linien

$$y = \pm y$$

die Ellipse

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2} = 1$$

deren Halbachsen

$$A = \sqrt{1 + \cos x^2}, \quad B = \cos x$$

sind. Beachten wir

$$\cos x = \cos \frac{1}{2}\Theta = \sqrt{\cos 2\varphi}$$

so sind die Curven durch

$$62) \quad \frac{X^2}{2 \cos \varphi^2} + \frac{Y^2}{\cos 2\varphi} = 1, \quad \frac{X^2}{\cos 2\varphi} - \frac{Y^2}{2 \cos \varphi^2} = 1$$

bestimmt. Daher folgt: Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der vorstehenden confocalen Kegelschnitte ist eine confocale Lemniskate, deren Schnittpunkte die Polarwinkel φ und die Focalwinkel θ haben.

Ferner: Bewegt sich der 0 Punkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes in parallelen Lagen des letztern mit den Achsen auf der Lemniskatrix, so entspricht in der Z Ebene dieser Bewegung unter Voraussetzung der obigen Function die Wanderung veränderlicher confocaler Kegelschnitte, deren Durchschnittspunkte eine Lemniskate beschreiben.

Wir entwickeln den Differentialquotienten

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} \tau' = \frac{\cos 2x \sqrt{1 + \cos x^2}}{\sin x (1 + 2 \cos x^2)}$$

und da für die Lemniskate

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x^2}}$$

woraus

$$\operatorname{tg} \tau^2 = \frac{1 - \cos x^2}{1 + \cos x^2}$$

so folgt

$$\operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \tau' = \frac{2 \cos x^2 - 1}{2 \cos x^2 + 1}$$

Die Elimination von $\cos x$ ergibt

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{1 - 3 \operatorname{tg} \tau^2}{3 \operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \tau^3}$$

also ist

$$\cot \tau' = \operatorname{tg} 3\tau$$

$$\tau' = 90^\circ - 3\tau$$

und weil

$$\tau' = 90^\circ - 3\varphi$$

folgt

$$63) \quad \tau = \varphi$$

Daher ist der Tangentenwinkel τ der Lemniskatrix gleich dem entsprechenden Polarwinkel der Functionalcurve in den Punkten, deren Bogen einander gleich sind. Hinsichtlich des Abgeleiteten bemerke man den Differentialquotienten von $Z = \cos x$, er ist

$$\frac{dZ}{dx} = \cos(90^\circ - 2\varphi) + i \sin(90^\circ - 2\varphi)$$

woraus unmittelbar das Vergrößerungsverhältniss $= 1$ beider Curven nebst der Lage der Tangenten ihrer conformen Punkte sich ergibt.

II.

Wir bilden jetzt die Function $\sin(x + iy)$ ab.

Die Entwicklungen geben für $Z = \sin s$

$$X + iY = \sin x \sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x^2 i$$

$$X = \sin x \sqrt{1 + \cos x^2}$$

$$Y = \cos x^2$$

Daraus folgt

$$64) \quad X^2 + Y^2 = 1$$

Daher ist die conforme Abbildung unserer Curve der Einheitskreis.

Der Differentialquotient ist

$$\frac{dZ}{dz} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

wo $r(\varphi)$ die entsprechenden Polarcoordinaten des Lemniskatenpunktes sind, wonach das Vergrößerungsverhältniss $1:r$ ist.

Wir wollen dieses Ergebniss in dynamischem Sinne verwerten, indem wir die Bewegungsverhältnisse in beiden Curven discutiren. Dabei nehmen wir die Bewegung in der Lemniskate und verwandten Curve als gleichförmig an.

Wir differentiiren X und Y nach der Zeit t

$$\frac{dX}{dt} = \frac{2 \cos x^3}{\sqrt{1 + \cos x^2}} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{2 \cos x^2 \sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}} \frac{dx}{dt}$$

und setzen

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = v^2$$

worin v die gesuchte Geschwindigkeit im Kreise $r = 1$ ist, welche der gleichförmigen

$$v_0 = \frac{ds}{dt}$$

in der Lemniskate entspricht.

Nun ist aber

$$ds = \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{1 + \cos x^2}}$$

also

$$\frac{ds}{dt} = v_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos x^2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Daher kann man $\frac{dx}{dt}$ durch

$$\frac{ds}{dt} = v_0$$

vermittelt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos x^2}$$

in den obigen Formeln für v^2 ersetzen, und führt man diese Rechnungen durch, so erhält man

$$v = v_0 \sqrt{1 + \cos 2x} = v_0 \sqrt{2} \cos x$$

Erinnert man sich aber, dass

$$\cos x = \cos \frac{1}{2} \Theta = \frac{r}{a} = \frac{r}{c\sqrt{2}}$$

ist, so folgt wegen $c = 1$

$$65) \quad v = v_0 r$$

oder

$$\frac{v}{v_0} = r$$

wie es sein muss.

r ist der Radiusvector des entsprechenden Lemniskatenpunktes.

Der gleichförmigen Bewegung in der Lemniskate entspricht also eine gewisse beschleunigende Bewegung im Focalkreise, welche dem Radiusvector r in der erstern proportional ist.

Nun können wir aber nachweisen, dass diese Bewegung mit der eines schweren Punktes im Halbkreise $r = 1$ identisch ist.

Bezeichnen wir den Elongationswinkel mit 2φ , so führen die mechanischen Principien auf das Zeitintegral

$$t = \int \frac{d2\varphi}{\sqrt{2g \cos 2\varphi}}$$

also auf

$$t = \frac{s}{\sqrt{g}}$$

während die Geschwindigkeit durch

$$v = \sqrt{2g \cos 2\varphi}$$

und also in Uebereinstimmung mit dem Obigen durch

$$v = \sqrt{gr}$$

ausgedrückt wird. Die constante Geschwindigkeit in der Lemniskate ist demnach \sqrt{g} .

Man bemerke noch die aus der Relation

$$Y = \cos x^2 = \cos 2\varphi$$

hervorgehende fernere Uebereinstimmung mit dem Abgeleiteten.

Vielleicht dürfte folgende Entwicklung als Beweis des eben Mitgetheilten nicht überflüssig sein:

Der Lemniskatenbogen wird durch das Integral

$$s = \int \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

dargestellt. Wir differentiiren es nach der Zeit t und finden

$$v_0 = \frac{ds}{dt} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{d\varphi}{dt}$$

Eine nochmalige Differentiation führt auf das Resultat

$$66) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{v_0^2}{a^2} \sin 2\varphi = 0$$

welches die bekannte Differentialgleichung der Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreis ist.

III.

Wir legen jetzt die Function $\operatorname{tg}(x + iy)$ zu Grunde.

Hierfür besteht zunächst

$$X + iY = \frac{\sin 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} - e^{-2y})i}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})}$$

ferner

$$\frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y}) = 1 + 2 \cos x^2$$

u. s. w., also

$$X = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \quad Y = \frac{\sqrt{1 + \cos x^2}}{2 \cos x}$$

$$57) \quad Y^2 - X^2 = \frac{1}{2}$$

Die vorliegende Function bildet demnach die Lemniskatrix als gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 ab.

Wenn also der Schnittpunkt zweier senkrecht auf einander stehenden, den Achsen bez. parallelen Geraden eine Lemniskatrix be-

schreibt, so wandern in der Z -Ebene die Durchschnitte der jenen Parallelen entsprechenden variablen Kreise auf einer gleichseitigen Hyperbel mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{v_0}{r^2}$$

Das letzte Resultat kann direct oder auch aus dem absoluten Betrage des Differentialquotienten hergeleitet werden.

Die Abbildung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + iy)$ führt auf den Kreis

$$68) \quad X^2 + (Y + 1)^2 = 2$$

Interessant ist die conforme Abbildung der Curve für die Function

$$\log \sin(x + iy) = \log(\sin x \sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x^2 i)$$

Wir haben hier

$$L(u + iv) = \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2) + i \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$$

anzuwenden. Das Resultat ist

$$X = 0$$

$$Y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x^2}{\sin x \sqrt{1 + \cos x^2}}$$

also

$$69) \quad Y = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$$

Da X verschwindet, so entspricht der gleichmässigen Bewegung in der Lemniskatrix eine Art oscillirender Bewegung in der Y -Achse um eine Gleichgewichtslage $\frac{\pi}{2}$.

Um die Geschwindigkeit in den verschiedenen Phasen zu berechnen, differentiiren wir Y nach t

$$\frac{dY}{dt} = v = -2 \frac{d\varphi}{dt}$$

Da aber

$$v_0 = \frac{ds}{dt} = \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dt}$$

ist, so folgt

$$v = v_0 r$$

oder die Geschwindigkeit der oscillirenden Bewegung ist direct proportional dem Radiusvector der Lemniskate im conformen Punkte.

Die Abbildung $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + iy)$ ist bemerkenswert wegen der Congruenz beider Curven.

IV.

Eine allgemeinere Betrachtung zeigt, dass die oben aufgestellten Relationen und Sätze nur specielle Resultate sind, die leicht auf alle Lemniskaten erweitert werden können.

Anstatt der einfachen Function $\cos(x+iy)$ führen wir jetzt ein
 $\cos(x+iy)^n = X+iY = R(\cos \psi + i \sin \psi)$.

Man findet

$$\cos x \sqrt{1 + \cos x^2} = R^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\psi}{n}$$

$$\sin x = R^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\psi}{n}$$

woraus

$$70) \quad R^2 = 2^n \cos^n \frac{2\psi}{n}$$

folgt und eine Curve höherer Ordnung vorstellt, wenn $n > 2$ ist.

Ist $n = 1$, so erhalten wir eine Lemniskate. Für $n = 2$ wird die Curve ein Kreis

$$R = 2 \cos \psi$$

Setzen wir $\frac{2}{n}$ statt n , so folgt die Curve

$$R^n = 2 \cos n\psi$$

welche für $n = \frac{2}{3}$ in die Fusspunktcurve der Lemniskate übergeht.

Wird n negativ $-n$ gesetzt, so erscheint das Curvensystem

$$R^n \cos n\varphi = 2 \quad (\text{s. Schlussnote.})$$

welches für $n = 2$ in eine gleichseitige Hyperbel übergeht.

Die Abbildung der Curve für $\sin(x+iy)^n$ führt merkwürdiger Weise für alle n auf den Einheitskreis, wie man leicht findet.

Die Uebertragung der durch $\text{tg}(x+iy)^n$ vermittelten Function führt auf die Curve

$$R^{\frac{2}{n}} \cos \frac{2\varphi}{n} = -\frac{1}{2}$$

von $\text{tg}(x+iy)^{\frac{2}{n}}$ auf

$$R^n \cos n\varphi = -\frac{1}{2}$$

von $\text{tg}(k+iy)^{\frac{2}{n}}$ auf

$$R^n = -2 \cos n\varphi$$

während die Abbildung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+iy) \pm^n$ die Curve

$$71) \quad R^n + 2 \sin n\varphi = \frac{1}{R^n}$$

liefert, welche für $n = \pm 2$ in die Cassinische Linie übergeht.

Analog überträgt sich die Lemniskatrix bei Einführung der Function $\cos 2(x+iy)^{\frac{1}{2}}$ auf die Curve

$$R^{2n} - 2R^n \cos n\varphi = 3$$

und der Function $(x+iy)^n$ entspricht die Abbildung

$$72) \quad \sin iR^n \sin n\varphi = iR^n \cos n\varphi$$

welche für $n = 1$ in die Lemniskatrix, für $n = 2$ in

$$\cos(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}(e^{2xy} - e^{-2xy})$$

übergeht. In analoger Weise lassen sich die Functionen \arcsin , \cos , tang verwerthen, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

Erwähnt möge noch werden, dass die allgemeinere Form

$$\sin iy = \frac{k}{k'} i \cos x$$

in ähnlicher Art wie vorhin diskutirt werden kann, und dass die Rectification dieser Curve

$$73) \quad y = \log \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} + k \cos x}{k'}$$

auf das elliptische Integral

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

führt.

V.

Die allgemeinste auf die Eigenschaften der Cassinischen Linien basirte Curve ist nun die, deren Gleichung durch

$$74) \quad y = \log (\sqrt{h^2 + \cos x^2} + \sqrt{h^2 - \sin x^2})$$

charakterisirt ist und die Lemniskatrix als speciellen Fall enthält. Sie kann auch

$$75) \quad \begin{aligned} \cos iy &= \sqrt{h^2 + \cos x^2} \\ \sin iy &= \sqrt{h^2 - \sin x^2} i \end{aligned}$$

geschrieben werden und hat die merkwürdige Eigenschaft, dass die Rectification dieser Curve genau auf dasselbe Integral führt, welches bei der Cassinischen Linie auftritt.

Daher sind die vorhin gegebenen Auseinandersetzungen bei der speciellen Curve einer Uebertragung auf die allgemeinere fähig. Der Differentialquotient der Curve ist

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{(h^2 + x^2)(h^2 - \sin x^2)}}$$

der Bogen

$$s = h \int \sqrt{\frac{h^2 + \cos 2x}{(h^2 + \cos x^2)(h^2 - \sin x^2)}} dx, \quad h = \frac{c}{q}$$

Daher ist wieder $x = \frac{1}{2}\Theta$ oder dem halben Focalwinkel gleich.

Ist der entsprechende Bogen der Cassinischen Linie S , so folgt nach früherem

$$76) \quad \frac{S}{s} = \frac{q^2}{c}$$

Die bezüglichen Bogen beider Curven stehen in constantem Verhältniss.

Vermittelst der Function $\cos(x + iy)$ verwandelt sich die allgemeine Lemniskatrix in

$$\sqrt{\frac{1}{4}h^2 + X^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}h^2 - Y^2} = 1$$

d. i. in eine Cassinische Curve

$$77) \quad (X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 - Y^2) = h^4 - 1$$

mit den Brennpunkten ± 1 . Wie früher ist nun leicht der Satz abzuleiten, dass der geometrische Ort der Schnittpunkte der conform veränderlichen confocalen Kegelschnitte

$$78) \quad \frac{X^2}{h^2 + \cos x^2} + \frac{Y^2}{h^2 - \sin x^2} = 1$$

$$\frac{X^2}{\cos x^2} - \frac{Y^2}{\sin x^2} = 1$$

eine Cassinische Linie ist.

Die Abbildung für $\sin(x + iy)^n$ führt wiederum auf einen Kreis

$$79) \quad X^2 + Y^2 = h^{2n}, \quad R = h^n, \quad v = v_0 \sqrt{h^2 + \cos 2x}$$

und der gleichförmigen Bewegung v_0 entspricht die conforme

$$v = \frac{v_0}{q} r$$

Die Abbildung von $\operatorname{tg}(x + iy)$ gibt

$$80) \quad R^4 \left(1 - \frac{1}{h^4}\right) + 2R^2 \cos 2\varphi + 1 = 0$$

Allgemeiner ist die Uebertragung von $\cos(x + iy)^{-\frac{1}{n}}$ durch die Curve

$$81) \quad (1 - h^4) R^{4n} - 2R^{2n} \cos 2n\varphi - 1 = 0$$

vermittelt. Bei der Abbildung von

$$\operatorname{log} \sin(x + iy)$$

ergibt sich nach früherem analog

$$82) \quad X = \operatorname{tg} h$$

$$Y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^4 - (q^2 - c^2)}{(q^2 + c^2)^2 - r^4}}$$

so dass auch hier eine oscillirende oder periodische Bewegung auftritt, welche der gleichförmigen in der Lemniskate entspricht.

§ 19.

Die Jonoiden.

Im Anschluss an das Vorhergehende wollen wir, aber unabhängig von der Methode des Imaginären oder der conformen Abbildung, nachweisen, dass der Verwandtschaft der Curven eine solche der Bewegungen zur Seite steht. Man kann nämlich die Frage aufwerfen, ob es möglich sei, bestimmte Bewegungsverhältnisse der einen Curve auf eine verwandte andere derart zu übertragen, dass diese Verhältnisse sich in Ort, Zeit und Geschwindigkeit gegenseitig entsprechen. Diese Curven, welche wir Jonoiden nennen wollen, haben in so fern mit dem Hamilton'schen Hodographen einige Aehnlichkeit, als sie in ihren Radienvectoren die variable Geschwindigkeit des Punktes nach Grösse, nicht aber nach Richtung graphisch darstellen.

Dagegen wird der Polarwinkel des bewegten Punktes als Focalwinkel auftreten, und die Aufgabe demnach dahin bestimmt sein, eine Relation zwischen Ort und Geschwindigkeit zu finden, welche der entsprechenden Uebertragung fähig ist.

Geometrisch verhält sich die Sache nun so:

Von den beiden Brennpunkten $\pm c$ einer noch zu suchenden Curve ziehen wir nach einem Curvenpunkt Leitstrahlen der Art, dass sie einen Winkel Θ einschliessen, welcher dem Polarwinkel Θ der Curve $r(\Theta)$, in welcher die Bewegung erfolgt, 'gleich ist. Zugleich soll der Radiusvector R , welcher den Scheitelpunkt des Winkels Θ mit dem Anfangspunkt verbindet, der Geschwindigkeit v in der ersten Curve gleich sein. R habe gegen die Achse die Neigung φ . Geometrisch ausgedrückt, heisst die Bedingung

$$83) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \Theta &= \frac{2Rc \sin \varphi}{R^2 - c^2} \\ r(\Theta) &= \text{Const.} \\ v = R &= f(r) \end{aligned}$$

Demnach hat man in den Bewegungsgleichungen stets die Geschwindigkeit $v = R$ zu setzen, ferner aus den beiden letzten Relationen den Vector r zu eliminiren und den aus der Resultante erhaltenen Polarwinkel Θ in die erste Relation zu substituiren.

1. Die Centralbewegung $u = \frac{h^2}{r^2}$

Wir wollen unter diesen Voraussetzungen die Jonoiden der planetarischen Bewegungen oder allgemeiner die der Centralbewegung nach Newton'schen Gesetz $\frac{h^2}{r^2}$ zu bestimmen suchen.

Die Polargleichung derselben ist

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \Theta}$$

Die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2u}{r} - h}, \quad h = \frac{u}{a}$$

Aus der letzten Relation folgt vermöge $v = R$

$$R^2 = \frac{2u}{p} (1 + \epsilon \cos \Theta) - h$$

Da aber

$$\cos \Theta = \frac{R^2 - c^2}{\sqrt{R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4}}$$

ist, so geht die vorletzte Gleichung über in

$$R^2 = \frac{2u}{p} \left(1 + \frac{e(R^2 - c^2)}{\sqrt{R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4}} \right) - h$$

oder in

$$R^2 - \left(\frac{2u}{p} - h \right) = \frac{2ue}{p} \frac{R^2 - c^2}{\sqrt{R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4}}$$

Wir führen ein

$$c^2 = \frac{2u}{p} - h, \quad q^2 = \frac{2ue}{p}$$

also

$$c = \sqrt{\frac{2u}{p} - h} = v(p)$$

so resultirt

$$84) \quad R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 = \frac{4u^2 c^2}{p^2}$$

und man kann schon jetzt das Resultat aussprechen, dass die Jono-
iden der Centralbewegung Cassinische Curven sind.

Ferner wird sich zeigen, dass den drei Fällen dieser Bewegung
in Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln die aus getrennten Ovalen, bez.
die Schleifenlemniskate und die aus einem Ganzen bestehenden Cas-
sinischen Linien entsprechen.

Die Unterscheidung dieser Fälle beruht auf der Untersuchung
des Ausdrucks $\frac{4u^2 c^2}{p^2}$, der entweder $\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} c^4$ sein kann.

In Folge der Bedeutung von c haben wir also die Relation

$$\frac{2ue}{p} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{2u}{p} - h$$

geometrisch zu deuten.

Es ist zunächst

$$2ue \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 2u - hp$$

und da

$$h = \frac{u}{a}$$

so ist

$$\frac{p}{a} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 2(1-e)$$

und wegen

$$p = \frac{b^2}{a}$$

folgt schliesslich

$$c \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} a$$

Diese Beziehung bezeichnet aber bekanntlich die Art des Kegelschnitts, und es gilt demnach der Satz, dass die Jonoide der planetarischen oder elliptischen Bewegung eine lemniskatische Ovale, die der kometarischen oder parabolischen Bewegung eine Schleifenlemniskate, die der hyperbolischen Bewegung eine aus einem Zuge bestehende Cassinische Curve ist.

Diese Curve hat also die Eigenschaft, dass, wenn der Polarwinkel oder die wahre Anomalie des Himmelskörpers als Focalwinkel Θ in sie eingezeichnet ist, der entsprechende Radiusvector R die Grösse der Geschwindigkeit darstellt. Ist umgekehrt die Geschwindigkeit gegeben, so erhält man mit Leichtigkeit den zugehörigen Polarwinkel.

Welche Bedeutung c hat, erkennt man sofort aus der Formel

$$c = v(p)$$

Den Fall der Parabel wollen wir noch etwas näher betrachten.

In der Y -Achse der Lemniskate ziehen wir von einem Punkte $y = n$ eine Tangente an die Curve. Der Berührungspunkt habe den Polarwinkel φ , den Focalwinkel Θ . Aus

$$\frac{n}{r} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 3\varphi}, \quad \cos 2\varphi = \cos \frac{1}{2}\Theta^2, \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ergibt sich leicht eine Gleichung für $\cos \frac{1}{2}\Theta^2$ nämlich

$$(\cos \frac{1}{2}\Theta^2)^3 - \frac{3}{4 \left(1 + \frac{c^2}{n^2}\right)} (\cos \frac{1}{2}\Theta^2) - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{c^2}{n^2}\right)} = 0$$

Setzen wir

$$\frac{c}{n} = \frac{t}{c}$$

und entwickeln nach Potenzen von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta$, so ergibt sich

$$85) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^3 = 2 \frac{t}{c}$$

als diejenige Gleichung, welche das Kometenproblem löst.

Die Excentricität ist $c = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{3k}$, wie aus der Theorie hervorgeht. Die Lemniskate bestimmt demnach noch mit Leichtigkeit vermöge der Formel

$$c^2 = \pi t$$

für jede Anomalie die Zeit und umgekehrt, wie wir dies schon früher nachgewiesen haben.

Die elliptische Bewegung bietet ebenfalls in ihrer lemniskatischen Uebertragung einiges Interessante.

Eine der X -Achse parallele Gerade schneide die Ovale in zwei Punkten, deren Focalwinkel Θ, Θ' sein mögen. Für diese specielle Lage ist

$$\Theta + \Theta' = 180^\circ$$

Wir tragen diese Focalwinkel als Polarwinkel in die Ellipse ein; verbinden wir nun diese entsprechenden Ellipsenpunkte durch eine Sehne, so geht diese, sowie überhaupt alle analogen Sehnen durch einen festen Punkt der X -Achse, und die den entsprechenden Anomalien Θ, Θ' zukommenden Zeiten t, t' sind durch die Relation

$$\operatorname{tg} \frac{\pi t}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi t'}{T} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(1-e)\Theta}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(1+e)\Theta}$$

miteinander verknüpft.

Wir ziehen ferner einen Radiusvector durch die Ovale, welcher sie in 2 Punkten schneidet. Aus der Formel

$$\sin \varphi = \frac{q^2}{2c} \frac{\sin \Theta}{\sqrt{c^2 + q^2 \cos \Theta}}$$

folgt

$$\cos \Theta^2 + \frac{4c^2}{q^2} \sin \varphi^2 \cdot \cos \Theta + \frac{4c^4}{q^4} \sin \varphi^2 - 1 = 0$$

woraus

$$\cos \Theta + \cos \Theta' = -\frac{4c^2}{q^2} \sin \varphi^2$$

$$\cos \Theta \cos \Theta' = \frac{4c^4}{q^4} \sin \varphi^2 - 1$$

Aus der Verbingung beider geht die Relation

$$1 + \frac{c^2}{q^2} (\cos \Theta + \cos \Theta') + \cos \Theta \cos \Theta' = 0$$

hervor. Analog hierzu ziehen wir durch die Ellipse eine der X -Achse parallele Gerade $y = y$, womit die Formel

$$\frac{p \sin \Theta}{1 + e \cos \Theta} = \frac{p \sin \Theta'}{1 + e \cos \Theta'}$$

verbunden ist. Aus ihr erhalten wir

$$1 + \frac{1+e^2}{2e} (\cos \Theta + \cos \Theta') + \cos \Theta \cos \Theta' = 0$$

welche mit der analogen obigen wegen

$$\frac{c^2}{q^2} = \frac{1+e^2}{2e}$$

identisch ist.

Den der X Achse parallelen Geraden der Ellipse entsprechen also Anomalien oder Polarwinkel, welche den durch den Radiusvector der Ovalen bestimmten Focalwinkeln gleich sind, und die entsprechenden Bogen in beiden Curven werden von beiden Punkten in gleichen Zeiten durchlaufen.

2. Die Wurfbewegung.

Auch diese Bewegung lässt eine elegante Uebertragung zu.

Um die Jonoide der Bewegung eines geworfenen Körpers im luftleeren Raume zu finden, haben wir zunächst zu beachten, dass die Geschwindigkeit des Punktes in der Parabel derjenigen seiner Entfernung von der Directrix als Fallhöhe entspricht.

Die Parabelgleichung ist

$$r = \frac{q}{\sin \frac{1}{2} \Theta^2}$$

und r ist die genannte Fallhöhe, woraus die Relation

$$v^2 = 2gr = \frac{2gq}{\sin \frac{1}{2} \Theta^2} = R^2$$

folgt. Da aber

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{2Rc \sin \varphi}{R^2 - c^2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} \Theta}{1 - 2 \sin \frac{1}{2} \Theta^2}$$

so können wir

$$\sin \frac{1}{2} \Theta = \sqrt{\frac{pg}{R^2}}$$

darin einführen, und indem wir hinsichtlich der Constanten die Annahme

$$c^2 = 2pg - 2a^2$$

machen, erhalten wir als Curvengleichung die Jonoide

$$86) \quad x^2 - y^2 = a^2$$

also eine gleichseitige Hyperbel, deren Brennpunkte $\pm c$ sind.

Im Anfangspunkt der Bewegung habe v die horizontale Componente

$$v_x = v \cos \tau = v \sin \frac{1}{2} \Theta$$

Vermöge des Obigen findet man

$$v_x^2 = pg$$

also

$$v_x = a$$

Die grosse Halbachse der Hyperbel bezeichnet also die Grösse der horizontalen Componente im Beginn der Bewegung und überhaupt.

Indem also die Brennstrahlen der gleichseitigen Hyperbel den Polarwinkel der Parabel einschliessen, drückt der Radiusvector R der erstern die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers aus.

Auch dieser Fall der freien Wurfbewegung kaun erweitert werden, wenn wir die Bewegung als in einer festen Parabel vor sich gehend betrachten.

Ist dieselbe vertical nach oben gerichtet und die Wurfhöhe der Geschwindigkeit v_0 im Scheitelpunkt $= h$, so ist, wenn die Θ vom Scheitel an gerechnet werden

$$v^2 = 2g(h - q \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2) = R^2$$

Die Polargleichung ist jetzt

$$r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} \Theta^2}$$

Aus der obigen Formel kann man $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta$ berechnen und in

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta^2} = \frac{2Rc \sin \varphi}{R^2 - c^2}$$

einsetzen. Führen wir dies aus und nehmen zwischen den Constanten die Bedingung

$$c^2 = 2g(h - q)$$

an, so erscheint die Curve

$$87) \quad \frac{x^2}{2gh} + \frac{y^2}{2gq} = 1$$

also eine Ellipse, welche die Jonoide der Parabelbewegung im jetzigen Fall ist. Da

$$2gh - 2gq = c^2$$

ist, so schliessen jetzt die Leitstrahlen der Ellipse den Polarwinkel der Parabel ein, und die Geschwindigkeit in letzterer ist dem entsprechenden Radiusvector der Ellipse gleich; mit demselben zu- und abnehmend. Die grosse Achse ist $= v_0$.

Die Parabel sei jetzt vertical nach unten gerichtet.

Man findet die Hyperbel

$$88) \quad \frac{x^2}{2gh} - \frac{y^2}{2gq} = 1$$

wenn

$$c^2 = 2g(h + q)$$

welche Curve für $h = q$ in die gleichseitige Hyperbel übergeht, da alsdann die Bewegung eine freie ist.

Die Brennstrahlen schliessen den Polarwinkel $180^\circ - \Theta$ ein und die Geschwindigkeit wächst mit dem Vector ins Unendliche.

3. Die Bewegung auf der Cykloide.

Wie aus der Geometrie der Cykloide bekannt ist, sind die Coordinaten xy Functionen des Wälzungswinkels Θ , also, wenn a Kreisradius, ist

$$\begin{aligned} x &= a(\Theta - \sin \Theta) \\ y &= a(1 - \cos \Theta) \end{aligned}$$

Wir lassen einen schweren Punkt jetzt die verticalstehende Cykloide durchlaufen. Die Basis möge horizontal liegen, und die Curve ihre concave Seite nach oben kehren. Die Bewegung beginne in einer Spitze mit der Geschwindigkeit null.

Der Fallhöhe y entspricht die Formel

$$v^2 - 2gy = R^2$$

so dass

$$R^2 = 2ga(1 - \cos \Theta)$$

Das hieraus entwickelte $\cos \Theta$ führen wir in die Relation

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{2Rc \sin \varphi}{R^2 - c^2}$$

ein, setzen noch fest, dass $c^2 = 2ga$ ist und erhalten schliesslich

$$89) \quad R^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$$

Hieraus folgt der Satz:

Die Jonoide der Bewegung eines schweren Punktes in der Cykloide ist eine Lemniskate mit den Brennpunkten $\pm c$.

c bedeutet die Geschwindigkeit, welche der Fallhöhe a entspricht.

Ferner bemerke man

$$\Theta = t \sqrt{\frac{g}{a}}$$

was ausdrückt, dass der Focalwinkel Θ der Jonoide der Zeit proportional wächst, wie sich von selbst versteht.

Der betrachtete Fall ist wieder ein ganz specieller.

Eine Erweiterung tritt ein, wenn wir die den Cykloiden ähnlichen Trochoiden einführen. Es sind dies verflachte oder verkürzte Cykloiden, welche von Punkten beschrieben werden, die entweder innerhalb oder ausserhalb des auf einer Geraden rollenden Kreises liegen.

Die Lage der hier kurz betrachteten verflachten Cykloide sei analog der früheren. Die Geschwindigkeit für die Fallhöhe geht aus

$$v^2 = v_0^2 + 2gy$$

hervor. v_0 ist willkürlich.

Die Gleichungen der Curve sind

$$\begin{aligned} x &= a\Theta - b \sin \Theta \\ y &= a - b \cos \Theta \end{aligned}$$

Hierin bedeutet a den Radius des rollenden Kreises, b den Abstand des festen Punktes vom Centrum.

Man hat

$$\begin{aligned} R^2 &= v_0^2 + 2g(a - b \cos \Theta) \\ \cos \Theta &= \frac{a}{b} - \frac{R^2 - v_0^2}{2bg}, \quad \text{tg } \Theta = \frac{2Rc \sin \varphi}{R^2 - c^2} \end{aligned}$$

Die Elimination von Θ führt unter Voraussetzung der Bedingung

$$v_0^2 + 2ag = c^2$$

auf die Curvengleichung

$$90) \quad R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 = 4g^2 b^2$$

woraus der Satz:

Die Jonoide der Bewegung eines schweren Punktes in einer Trochoide ist eine Cassinische Linie.

Der Parameter ist

$$q^2 = 2gb$$

und für eine verflachte Cykloide, wenn $v_0 = 0$, kleiner als c^2 , da $b < a$ ist.

Wenn noch nicht bemerkt sein sollte, dass die Gleichungen der genannten Trochoide mit denjenigen der planetarischen Bewegung identificirt werden können, so wollen wir auf die entsprechenden Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \Theta - e \sin \Theta - k \frac{t \sqrt{1+m}}{a^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{k^2(1+m)}{a}} \cdot t - \sqrt{\frac{u}{a}} t - v_0 t$$

$$\frac{y}{a} = 1 - e \cos \Theta, \quad y = r$$

aufmerksam machen. Θ ist hierin der excentrische Winkel oder die mittlere Anomalie.

4. Die Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise und in der Ellipse.

Wir bezeichnen mit v_0 die Geschwindigkeit des Punktes, welche der Elongation α , mit v_Θ die, welche der Elongation Θ im Kreise $r = a$ entspricht. Alsdann folgt

$$v^2 = v_0^2 + 2ga(\cos \Theta - \cos \alpha)$$

Führen wir den hieraus berechneten Wert von

$$2ga \cos \Theta = R^2 - (v_0^2 - 2ga \cos \alpha)$$

in die bekannte Relation ein und setzen

$$v_0^2 - 2ga \cos \alpha = c^2$$

so folgt schliesslich

$$91) \quad R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\varphi + c^4 = 4g^2 a^2$$

Also ist die Jonoide der Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreis eine Cassinische Curve.

Ist speciell $c^2 = 2ga$ und $\alpha = 0$, wonach v_0 die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte bezeichnet, so ist die entsprechende Höhe $2a$. Daher entspricht die Lemniskate

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$$

der asymptotischen Bewegung. Ist die Geschwindigkeitshöhe grösser als der Durchmesser $2a$, so wird die Jonoide zur Ovale, deren Radienvectoren und bezügliche Focalwinkel bez. die Geschwindigkeit und den Ausschlagswinkel Θ bezeichnen. Die Pendelbewegung kann ebenfalls bis zu einer gewissen Grenze durch die aus einem Zuge bestehende Curve polarisch dargestellt werden.

Eine Anwendung auf die Ellipse ist noch leicht zu skizziren.

Die grosse Achse stehe vertical. Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte sei v_0 und der excentrische Winkel $= \Theta$, so dass

$$x = a \cos \Theta$$

Daher besteht die Formel

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2g(a-x) \\ R^2 &= 2gh + 2ga \cos \Theta \end{aligned}$$

wo h die Geschwindigkeitshöhe des Punktes im Scheitel der kleinen Achse bezeichnet. Führen wir nun

$$c^2 = 2gh, \quad q^2 = 2ga$$

ein, so ergibt sich wieder vermöge der Gleichung

$$92) \quad R^2 = c^2 + q^2 \cos \Theta$$

eine Cassinische Curve, deren Focalwinkel dem excentrischen Winkel der Ellipse gleich ist.

Wir wollen hieran noch eine Bemerkung knüpfen.

Entwickelt man das Zeitintegral der Bewegung eines schweren Punktes in der Ellipse, so erkennt man, dass es zu den hyperelliptischen gehört. Es scheint aber unbemerkt geblieben zu sein, dass dasselbe in einem speciellen Falle in ein elliptisches übergeht, und zwar findet sich dieses auf folgende Art:

Das Bogendifferential der Ellipse ist

$$ds = \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Aus der Formel

$$t = \int \frac{ds}{v}$$

folgt also

$$t = \int \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{(a^2 - x^2)v^2}} dx$$

Wir führen jetzt die Directrix ein, deren Abstand h vom Mittelpunkt $= \frac{a}{e}$ ist, und wählen h als Geschwindigkeitshöhe, was bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Punktes in jedem Orte der Ellipse gleich derjenigen ist, welche er erlangt, wenn er bis dahin von der Directrix ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgefallen wäre.

Der Punkt beschreibt also volle Umläufe. Wir rechnen die Θ vom obern Scheitelpunkte an. Es ist zunächst

$$v^2 = 2g(h - x)$$

also

$$t = \int \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{(a^2 - x^2)2g(h - x)}} dx, \quad x = a \cos \Theta, \quad h = \frac{a}{e}$$

demnach

$$93) \quad t = \sqrt{\frac{c}{2g}} \int \sqrt{1 + e \cos \Theta} d\Theta$$

welches ausdrückt, dass die Zeit durch ein elliptisches Integral der 2. Art sich finden lässt, wenn die Geschwindigkeitsverhältnisse sich auf die Directrix der Ellipse beziehen.

Man kann das Integral schreiben

$$t = 2 \sqrt{\frac{c}{2g}(1+e)} \int \sqrt{1 - \frac{2e}{1+e} \sin \frac{1}{2} \Theta} d \frac{1}{2} \Theta$$

Die halbe Umlaufszeit T ergibt sich also aus

$$T = 2 \sqrt{\frac{c}{2g}(1+e)} E$$

demnach ist

$$t = \frac{T}{E} E(u)$$

oder

$$t = \frac{T}{K} u + \frac{T}{E} \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1-q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^4} \sin \frac{2\pi u}{K} + \dots \right)$$

5. Elliptische Schwingungen.

Wir betrachten noch den Fall der Centralbewegung, nach welchem ein Punkt eine Ellipse beschreibt durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung durch das Centrum dieser Curve geht

Der Ausdruck dieser Kraft ist durch

$$\varphi = \frac{c^2}{a^2 b^2} r$$

definiert, so dass die Kraft, der Entfernung proportional, anziehend wirkt. Die Geschwindigkeit folgt aus

$$v^2 = v_0^2 - 2 \int \varphi dr$$

und ist

$$v^2 = v_0^2 + \frac{c^2}{a^2 b^2} r_0^2 - \frac{c^2}{a^2 b^2} r^2$$

worin $v_0 r_0$ sich auf den Anfangszustand beziehen.

Nun ist

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta}$$

indem wir Θ als Polarwinkel von der kleinen Achse an rechnen. Wir führen ein

$$A = v_0^2 + \frac{c^2}{a^2 b^2} r_0^2$$

und setzen $v = R$. Die Gleichung für $\text{tg } \Theta$ ist dann

$$\text{tg } \Theta^2 = \frac{c^2 - a^2(A - R^2)}{-c^2 + b^2(A - R^2)}$$

und da

$$\text{tg } \Theta = \frac{2RC \sin \varphi}{R^2 - C^2}$$

ist, so erhält man für die Bedingung

$$C^2 = \frac{Ab^2 - c^2}{b^2}$$

die Curve

$$94) \quad R^4 - R^2 \frac{a^2 A - c^2 + a^2 C^2 - 4b^2 C^2}{a^2} - 4 \frac{b^2 C^2}{a^2} R^2 \cos^2 \varphi + \frac{C^2}{a^2} (a^2 A - c^2) = 0$$

welche in einen Kreis übergeht, wenn noch die zweite Bedingung

$$a^2 A - c^2 = C^2 (a + 2b)^2, \quad A = \frac{a + 3b}{4b} \cdot \frac{c^2}{b^2}$$

erfüllt ist. Die Gleichung ist dann

$$95) \quad \left(x - \frac{b}{a} C\right)^2 + y^2 = \varrho^2$$

$$\varrho^2 = \frac{c^4}{4a^2b^2} \frac{a+b}{b}$$

Die Constanten stehen in diesem speciellen Falle durch die Relation

$$v_0^2 + \frac{c^2}{a^2b^2} r_0^2 = \frac{a+3b}{4b} \cdot \frac{c^2}{b^2}$$

in Verbindung.

Ferner ist

$$\frac{C}{\varrho} = \frac{a}{a+b}$$

Der Anfangspunkt der Curve liegt innerhalb des Kreises und die Strecke $-C$ geht bis zur Peripherie, so dass Θ von 0 bis 90° wächst. Die Geschwindigkeit erreicht daher in der b -Achse ihr Maximum, in der a -Achse ihr Minimum.

Auch die allgemeinere Gleichung hat in sofern Interesse, als sie mit andern Disciplinen in Verbindung steht und in leicht anzugebenden Fällen reciprok wird.

Zu S. 39 dem Citate beizufügen:

oder pag. 139 der „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ von Holzmüller, welcher Autor zuerst die Beziehungen lemniskatischer Linien zu einander entdeckt hat.

Zu S. 43: Führt man für ein zweites Integral, welches die Bezeichnungen c' , q' , γ' hat, die Transformation $\cos \gamma = \frac{q'^2}{c'^2} \cos \gamma'$ durch, so ist dasselbe dem ersten ähnlich, und können beide wieder mit einander verglichen werden.

Zu S. 66: Curven dieser und ähnlicher Art nennt Herr Holzmüller „irreguläre Hyperbeln und Lemniskaten n ter Ordnung“.

III.

Ueber Raumcurven-Singularitäten.

Von

C. F. E. Björling.

§ 1. Die Punkteordinaten x, y, z, w einer algebraischen Raumcurve seien rational ausgedrückt in einem Parameter λ , also

$$(1) \quad \frac{x}{\varphi(\lambda)} = \frac{y}{\psi(\lambda)} = \frac{z}{\chi(\lambda)} = \frac{w}{f(\lambda)}$$

wo φ, ψ, χ, f ganze Functionen sind. Jedem λ -Werte entspricht ein Curvenpunkt und umgekehrt; nur einem Doppelpunkte zwei verschiedene λ -Werte. Die λ -Werte, die den Schnittpunkten der Curve mit der Ebene

$$(2) \quad Xx + Yy + Zz + Ww = 0$$

entsprechen, befriedigen die Gleichung

$$(3) \quad X \cdot \varphi(\lambda) + Y \cdot \psi(\lambda) + Z \cdot \chi(\lambda) + W \cdot f(\lambda) = 0$$

Dieselbe hat eine Doppelwurzel, d. h. die Ebene hat an irgend einer Stelle zwei aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemeinsam, insofern zugleich

$$(4) \quad X \cdot \varphi'(\lambda) + Y \cdot \psi'(\lambda) + Z \cdot \chi'(\lambda) + W \cdot f'(\lambda) = 0$$

die Ebene berührt in solchem Falle die Curve an jener Stelle, wofern nicht

$$(5) \quad \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}$$

Diese drei Gleichungen seien nämlich von $\lambda = \lambda_1$ befriedigt. Aus der Gleichung (3) folgt dann immer (4), welche X, Y, Z, W auch sein mögen; d. h. jede durch den betreffenden Punkt (λ_1) gelegte Ebene hat daselbst zwei Punkte mit der Curve gemeinsam, und diese hat da folglich einen stationären Punkt oder Spitze (β)¹⁾. Jeder die drei Bedingungen (5) erfüllende λ -Wert ergibt folglich eine solche Singularität.

Wenn, nebst (3) und (4) auch die Gleichung

$$(6) \quad X \cdot \varphi''(\lambda) + Y \cdot \psi''(\lambda) + Z \cdot \chi''(\lambda) + W \cdot f''(\lambda) = 0$$

von einem λ -Werte befriedigt ist, hat die Ebene (2) an einer Stelle drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemeinsam; sie ist also Schmiegungeebene oder eine „Ebene des Systems“. Wir betrachten (2) als „Zwischenform“, d. h. X, Y, Z, W als die Ebenencoordinaten der gegebenen Curve oder, was dasselbe ist, die Punktkoordinaten ihrer Reciproken. Aus (3), (4) und (6) erhält man

$$(7) \quad \frac{X}{\Phi(\lambda)} = \frac{Y}{\Psi(\lambda)} = \frac{Z}{X(\lambda)} = \frac{W}{F(\lambda)}$$

wo

$$(8) \quad \begin{array}{c} \Phi(\lambda) \\ \hline \psi, \chi, f \\ \psi', \chi', f' \\ \psi'', \chi'', f'' \end{array} = \begin{array}{c} -\Psi(\lambda) \\ \hline \chi, f, \varphi \\ \chi', f', \varphi' \\ \chi'', f'', \varphi'' \end{array} = \begin{array}{c} X(\lambda) \\ \hline f, \varphi, \psi \\ f', \varphi', \psi' \\ f'', \varphi'', \psi'' \end{array} = \begin{array}{c} -F(\lambda) \\ \hline \varphi, \psi, \chi \\ \varphi', \psi', \chi' \\ \varphi'', \psi'', \chi'' \end{array}$$

gemeinsame Factoren der Nenner setzen wir weggenommen voraus. Das Princip der Dualität ergibt sogleich, dass jedem λ -Werte in (7) eine Schmiegungecurve entspricht und umgekehrt, und speciell jedem die drei Gleichungen

$$(9) \quad \frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = \frac{\Psi'(\lambda)}{\Psi(\lambda)} = \frac{X'(\lambda)}{X(\lambda)} = \frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)}$$

erfüllendem λ -Werte eine stationäre Ebene (α).

§ 2. Es seien nun

$$(10) \quad \varphi(\lambda) = L\lambda^l + L_1\lambda^{l+1} + L_2\lambda^{l+2} + \dots$$

$$(11) \quad \psi(\lambda) = M\lambda^m + M_1\lambda^{m+1} + M_2\lambda^{m+2} + \dots$$

1) Wir benutzen die gewöhnlichen Beziehungen α, β, θ für die Anzahlen der stationären Ebenen, Punkte und Tangenten der Raumcurven, aber auch, wenn kein Missverständniss möglich ist, um eine einzige Singularität der betreffenden Art ganz kurz zu bezeichnen.

$$(12) \quad \chi(\lambda) = N\lambda^n + N_1\lambda^{n+1} + N_2\lambda^{n+2} + \dots$$

$$(13) \quad f(\lambda) = P + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \dots$$

wo die rechten Membra endliche Reihen sind, und (wie immer im folgenden) $l < m < n$, und L, M, N, P nicht null. Die Curve geht dann für $\lambda = 0$ durch den Anfangspunkt O , hat daselbst mit ihrer Schmiegungebene ($z = 0$) n , mit ihrer Tangente ($y = z = 0$) und jeder durch dieselbe gehenden Ebene m Punkte gemeinsam, und schneidet jede andere durch O gehende Ebene daselbst in l Punkten. Einen solchen Punkt der Curve nennen wir einen (l, m, n) -Punkt; die Zahlen l, m, n seine Indices. Ein $(1, 2, 3)$ -Punkt ist also ein gewöhnlicher, nicht-singulärer¹⁾; ein $(2, 3, 4)$ eine Spitze β ; ein $(1, 2, 4)$ der Berührungspunkt einer stationären Ebene (α) oder, nach älterer Terminologie, eine „einfache Inflexion“; ein $(1, 3, 4)$ eine „doppelte Inflexion“, d. h. der Berührungspunkt einer stationären Tangente (Θ).

Die Gleichungen (5) werden nun befriedigt von $l-1$ Werten $\lambda = 0$; die Singularität eines (l, m, n) -Punktes ist also mit $l-1$ stationären Punkten (β) äquivalent.

Aus (8) erhält man ferner, nach Verkürzen mit λ^{l+m-2}

$$(14) \quad \Phi(\lambda) = MNPmn(n-m)\lambda^{n-l} + L'\lambda^{n-l+1} + \dots$$

$$(15) \quad \Psi(\lambda) = LNPln(l-n)\lambda^{n-m} + M'\lambda^{n-m+1} + \dots$$

$$(16) \quad X(\lambda) = LMPlm(m-l) + N'\lambda + \dots$$

$$(17) \quad F(\lambda) = LMN(n-m)(m-l)(l-n)\lambda^n + P'\lambda^{n+1} + \dots$$

also, da die Coefficienten der niedrigsten Dignitäten in den rechten Gliedern nicht null sein können, ist ein (l, m, n) -Punkt immer zu einem $(n-m, n-l, n)$ -Punkte reciprok.

Durch Anwendung des Dualitätsprinzips auf das vorige ergibt sich hieraus:

Die Schmiegungebene in einem (l, m, n) -Punkte O gilt,

von einem beliebigen Punkte in derselben gezogen, als $(n-m)$ -fache Ebene des Systems;

von einem beliebigen Punkte der Tangente in O gezogen, als $(n-l)$ -fache Ebene des Systems;

1) Womit natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass durch denselben Punkt des Raumes ein anderer Zweig der Curve, welchem ein anderer Parameterwert entspricht, gehen kann.

vom Punkte O selber gezogen, als n -fache Ebene des Systems;

und ferner, da α und β reciproke Singularitäten sind:

Die Singularität eines (l, m, n) -Punktes ist mit $n - m - 1$ stationären Ebenen (α) äquivalent.

§ 3. Setzen wir nun $w = 1$ und bezeichnen die veränderlichen Coordinaten der Tangente der Curve mit ξ, η, ζ , so werden

$$(18) \quad \frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'} \quad \left(\text{wo } x' = \frac{dx}{d\lambda} \text{ u. s. w.} \right)$$

die Gleichungen dieser Tangente oder, für λ als veränderlich, die Gleichungen der von dieser Geraden erzeugten osculirenden Developpablen. Schneidet man diese Fläche mit einer Ebene $\xi = k$ (constant), so werden die Coordinaten der ebenen Schnittcurve

$$(19) \quad \eta = y + \frac{k - x}{x'} \cdot y', \quad \zeta = z + \frac{k - x}{x'} \cdot z'$$

oder nach Einsetzung der Ausdrücke für x, y, z, x', y', z'

$$(20) \quad \eta = \frac{M k m}{L l} \lambda^{m-l} + M'' \lambda^{m-l+1} + \dots$$

$$\zeta = \frac{N k n}{L l} \lambda^{n-l} + N'' \lambda^{n-l+1} + \dots$$

Für $\lambda = 0$, d. h. im Schnittpunkt der Ebene mit der Tangente der Raumcurve in O , hat diese ebene Curve einen $(m-l, n-l)$ -Punkt, also eine Singularität, äquivalent mit $m-l-1$ Spitzen (α)¹⁾. Jede Spitze in der ebenen Schnittcurve einer Developpablen entspricht aber einem Schnittpunkte der Ebene mit entweder der Cuspidalcurve selbst oder einer ihrer stationären Tangente (Θ). Da das erste Alternativ hier nicht in Frage kommen kann, so folgt:

Die Singularität eines (l, m, n) -Punktes ist mit $m-l-1$ stationären Tangenten äquivalent.

Diese Eigenschaft ist offenbar zu sich selbst reciprok.

1) Der Begriff (m, n) -Punkt einer ebenen Curve ergibt sich leicht als Specialfall des vorigen. Er ist vom Verf. ausführlich definiert und behandelt in „Entsprechende Singularitäten in alg. ebenen Curven“ (Nova Acta Soc. Sc. Ups. Ser. III. 1879). Dass die Singularität eines solchen (m, n) -Punktes mit $m-1$ Spitzen (α) und $n-m-1$ Inflexionen (ι) äquivalent ist, ist unseres Wissens zuerst von Cayley („On the higher singularities of a plane curve“, Quart. Journ. of Mathemat. VII) gefunden.

§ 4. Jenachdem ein Index (der erste, zweite, dritte) ungerade (u) oder gerade (g) ist, durchsetzt die Curve die entsprechende (arbiträre, berührende, Schmiegungs-)Ebene oder nicht. Eine reelle Curve muss daher in O irgend eine der folgenden acht Formen darbieten:

- a) (u, g, u) , d. h. der erste und dritte Index ungerade, der zweite gerade; die Curve durchsetzt die arbiträre und die Schmiegungs-Ebene, nicht aber die berührende. Einfachster Fall: (1, 2, 3), der gewöhnliche, nicht singuläre Punkt.
- b) (u, g, g) . Einf. Fall: (1, 2, 4), stationäre Ebene (α).
- c) (u, u, g) . E. F.: (1, 3, 4), stationäre Tangente (Θ).
- d) (u, u, u) . E. F.: (1, 3, 5), Vereinigung der beiden letzten Singularitäten.
- e) (g, u, g) . E. F.: (2, 3, 4), stationärer Punkt (β).
- f) (g, u, u) . E. F.: (2, 3, 5), Vereinigung von α und β .
- g) (g, g, u) . E. F.: (2, 4, 5), Vereinigung von Θ und β .
- h) (g, g, g) . E. F.: (2, 4, 6), Vereinigung aller drei Singularitäten ¹⁾.

Von diesen acht Formen ist offenbar b) reciprok zu e) und d) zu g), jede der übrigen aber zu sich selbst.

§ 5. Auf sämtliche hier gefundenen Resultate haben die Anzahlen der Glieder und die Grade der Functionen φ, ψ, χ, f gar keinen Einfluss; jene Resultate behalten also ihre Gültigkeit, auch wenn diese Functionen unendliche convergirende Dignitätsreihen sind.

In solcher Form können die Coordinaten jeder algebraischen Raumcurve, wenigstens innerhalb eines endlichen Gebietes dargestellt werden. Es sei nämlich eine solche Curve C gegeben; wir verlegen den Anfangspunkt in einen Punkt O derselben; wenn mehrere Zweige der Curve dadurch gehen, behandeln wir jeden für sich.

1) Die Modelle des Hrn. Chr. Wiener (Brill's Verlag, Elfte Serie) stellen sämtliche diese acht Formen dar. Kartonmodelle der Formen a), b), c) und d) sind ausgegeben im Werke: „Quatre modèles représentant des surfaces développables par V. Malthe-Bruun et C. Crone“. Auch vom Verf. sind Modelle der acht Formen ausgegeben.

Nimmt man die Tangente des Zweiges in O zur x -Axe, und seine Schmiegungeebene zur xy -Ebene, so können bekanntlich die Coordinaten y und z der Projectionen C_{xy} und C_{xz} des Zweiges auf die xy - und xz -Ebene dargestellt werden durch zwei in endlicher Umgebung des Punktes O gültige, Reihen von der Form

$$(21) \quad y = M(x) \frac{x^m}{l} + M_1(x) \frac{x^{m+1}}{l} + M_2(x) \frac{x^{m+2}}{l} + \dots$$

$$(22) \quad z = N(x) \frac{x^n}{l_1} + N_1(x) \frac{x^{n+1}}{l_1} + N_2(x) \frac{x^{n+2}}{l_1} + \dots$$

wo die Coefficienten völlig bestimmte Grössen sind, und $m > l$, $n > l_1$, da die beiden ebenen Curven die x -Axe berühren.

l (resp. l_1) giebt die Anzahl der Punkte an, worin C_{xy} (C_{xz}) von einer in ihrer Ebene belegenen, durch O gehenden, beliebigen, aber nicht berührenden Geraden, also auch von einer durch O gehenden, beliebigen, aber nicht berührenden Ebene in O geschnitten wird. Also ist $l = l_1$, denn jede ist der Anzahl der Punkte gleich, worin der betreffende C -Zweig selbst von der genannten Ebene in O geschnitten wird.

Setzt man nun $x = \lambda^l$, so ergibt sich aus (21) und (22)

$$(23) \quad y = M\lambda^m + M_1\lambda^{m+1} + M_2\lambda^{m+2} + \dots$$

$$(24) \quad z = N\lambda^n + N_1\lambda^{n+1} + N_2\lambda^{n+2} + \dots$$

die Coordinaten der C sind also, wenigstens in endlicher Umgebung des Anfangspunktes, in der genannten Form ausgedrückt. n ist $> m$, da $z = 0$ die Schmiegungeebene ist.

§ 6. Die Gleichungen (18) der osculirenden Developpablen werden nun, nach Einführung dieser Ausdrücke für x , y , z

$$(25) \quad \frac{\xi - \lambda^l}{l} = \frac{\eta - M\lambda^m - M_1\lambda^{m+1} - \dots}{M_m\lambda^{m-l} + M_1(m+1)\lambda^{m-l+1} + \dots} \\ = \frac{\xi - N\lambda^n - N_1\lambda^{n+1} - \dots}{N_n\lambda^{n-l} + N_1(n+1)\lambda^{n-l+1} + \dots}$$

wo jedem λ -Werte eine Generatrix entspricht und umgekehrt. Wir untersuchen ihre Schnittecurven mit den Coordinaten-Ebenen.

1) $\xi = 0$ giebt

$$(26) \quad l\eta = M(l-m)\lambda^m + M'\lambda^{m+1} + \dots \\ l\xi = N(l-n)\lambda^n + N'\lambda^{n+1} + \dots$$

die Coefficienten der niedrigsten λ -Dignitäten können nicht verschwinden; die Schnittcurve hat also einen (m, n) -Punkt in O .

2) $\eta = 0$ giebt nach Verkürzung mit λ^{m-l}

$$(27) \quad \begin{aligned} m\xi &= (m-l)\lambda^l + J'\lambda^{l+1} + \dots \\ m\xi &= N(m-n)\lambda^n + N''\lambda^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

die Schnittebene enthält also die C -Tangente in O $(m-l)$ mal und eine Curve mit (l, n) -Punkt in O .

3) $\zeta = 0$ giebt nach Verkürzung mit λ^{n-l}

$$(28) \quad \begin{aligned} n\xi &= (n-l)\lambda^l + L'\lambda^{l+1} + \dots \\ n\eta &= M(n-m)\lambda^m + M''\lambda^{m+1} + \dots \end{aligned}$$

die Schnittebene enthält also die C -Tangente in O $(n-l)$ mal und eine Curve mit (l, m) -Punkt in O .

§ 7. Wir bezeichnen die Plücker'schen Charaktere der Schnittcurve S , die gebildet wird durch den Schnitt der Developpablen mit einer beliebigen Ebene P , mit

$$\mu, \delta, \kappa, \nu, \tau, \iota$$

dagegen diejenigen der Schnittcurve S' , wenn die Schnittebene P' die Tangente in einem (l, m, n) -Punkte O enthält (ohne Schmiegungebene zu sein), mit

$$\mu', \delta', \kappa', \nu', \tau', \iota'$$

und werden nun diese mittelst jener und der Indices l, m, n ausdrücken.

a) Der Ebenenschnitt der P' enthält die C -Tangente in O $(m-l)$ mal; also ist

$$(29) \quad \mu' = \mu - m + l$$

b) Die Spitzen (κ) der Schnittcurve entstehen bekanntlich in den Punkten, wo die Ebene entweder die Curve C selbst oder eine stationäre Tangente (θ) des Systems trifft. Wenn nun P' die Ebene ist, gehen von diesen Punkten verloren

1) die m Punkte, die P' mit C in O gemeinsam hat,

2) der einzige Schnittpunkt der P' mit der C -Tangente, welcher, wie oben (§ 3.) erwähnt ist, $m-l-1$ Spitzen repräsentirt.

Dagegen kommen hinzu die $l-1$ Spitzen, die S' in ihrem (l, n) -Punkte in O hat (§ 6., 2). Also wird

$$(30) \quad \kappa' = \kappa - 2(m-l)$$

c) Die Inflexionstangenten (ι) der Schnittcurve entstehen bekanntlich durch den Schnitt der Ebene mit den stationären Ebenen (α) des Systems. Wenn P' die Ebene ist, geht ihre einzige Schnittlinie mit der C -Ebene in O , welche, wie oben (§ 2.) erwähnt ist, $n-m-1$ stationäre Ebenen repräsentirt, verloren, dagegen aber kommen hinzu die $n-l-1$ Inflexionen, die S' in ihrem (l, n) -Punkte in O hat. Also wird

$$(31) \quad \iota' = \iota + m - l$$

Infolge (29), (30) und (31) erhält man nun mittelst Plücker's Formeln

$$(32) \quad \nu' = \nu, \quad \delta' = \delta + \frac{(m-l)(m-l+7-2\mu)}{2}, \quad \tau' = \tau - m + l$$

§ 8. Hieraus folgt vermöge des Dualitätsprinzips:

Sind $\mu, \delta, \kappa, \nu, \tau, \iota$ die Charaktere des aus einem beliebigen Punkte zu C gezogenen Perspektivkegels, und $\mu', \delta', \kappa', \nu', \tau', \iota'$ die Charaktere des Kegels, wenn der Punkt in einer Tangente eines (l, m, n) -Punktes O (doch nicht in O selbst) belegen ist, so ist

$$(33) \quad \mu' = \mu, \quad \delta' = \delta - m + l, \quad \kappa' = \kappa + m - l, \quad \nu' = \nu - m + l$$

$$(34) \quad \tau' = \tau + \frac{(m-l)(m-l+7-2\nu)}{2}, \quad \iota' = \iota - 2(m-l)$$

§ 9. In diesem § haben $S, P, \mu, \delta, \kappa \dots$ dieselbe Bedeutung als in § 7; P' sei dagegen die Schmiegungeebene selbst in einem (l, m, n) -Punkte O , S' ihre Schnittcurve mit der Developpablen und $\mu', \delta', \kappa' \dots$ die Charaktere dieser Curve.

a) Der Ebenenschnitt der P enthält die C -Tangente in O ($n-l$) mal; also ist

$$(35) \quad \mu' = \mu - n + l$$

b) Von den Spitzen (n) der Schnittcurve gehen, wenn P' die Schnittebene ist, verloren

1) die n Punkte, die P' mit C in O gemeinsam hat,

2) der einzige Schnittpunkt der P' mit der C -Tangente, welcher $m-l-1$ Spitzen repräsentirt.

Dagegen kommen hinzu die $l-1$ Spitzen, die S' in ihrem (l, m) -Punkte in O hat (§ 6., 3). Also wird

$$(36) \quad \kappa' = \kappa - n - m + 2l$$

c) Von den Inflexionen der Schnittcurve gehen, aus demselben Grunde wie oben, $n - m - 1$ verloren, dagegen kommen hinzu die $m - l - 1$, die S' in ihrem (l, m) -Punkte in O hat. Also wird

$$(37) \quad \iota' = \iota - n + 2m - l$$

Infolge (35), (36) und (37) erhält man nun mittelst Plückers Formeln

$$(38) \quad \nu' = \nu - n + m, \quad \delta' = \delta + \frac{(n-l)(n-l+5-2\mu)}{2} + m - l$$

$$(39) \quad \tau' = \tau + \frac{(n-m)(n-m+5-2\nu)}{2} + l - m$$

§ 10. Hieraus folgt vermöge des Dualitätsprinzips:

Sind $\mu, \delta, \kappa, \nu, \tau, \iota$ die Charaktere des aus einem beliebigen Punkte zu C gezogenen Perspektivkegels, und $\mu', \delta', \kappa', \nu', \iota'$ die Charaktere des Kegels, wenn der Punkt ein (l, m, n) -Punkt der Curve ist, so ist

$$(40) \quad \mu' = \mu - l, \quad \delta' = \delta + \frac{l(l+5-2\mu)}{2} + l - m, \quad \kappa' = \kappa + m - 2l$$

$$(41) \quad \nu' = \nu - m, \quad \tau' = \tau + \frac{m(m+5-2\nu)}{2} + m - l, \quad \iota' = \iota + l - 2m$$

Aus diesen Formeln (29)–(41) geht hervor, dass das Geschlecht p der Schnittcurve und des Perspektivkegels durch die betreffende Specialisirung der Schnittebene und des Kegelscheitels nicht geändert wird. Die Formeln enthalten als Specialfälle die bekannten Nr. 1–4, 7, 8, 11–14 in § 93. (S. 113) in Salmon-Fiedlers „Analytische Geometrie des Raumes“, Th. II, 3^e Aufl.

IV.

Miscellen.

1.

Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.

Fortsetzung zu T. VII. Nr. XXIII. 5.

Aus der im citirten Aufsätze geführten Berechnung ergibt sich, dass die Formel die Refractionen bis 87° ganz gut darstellt. Die Differenzen würden vielleicht noch geringer ausfallen, wenn die Constanten noch schärfer bestimmt werden könnten.

Man kann aus der Formel leicht die Brechungsexponenten für beide Schichten berechnen. Man findet

$$u_1 = 1,000062, \quad u_2 = 1,000218$$

Die Höhen dieser Schichten sind:

$$\frac{h_1}{a} = 0,00332, \quad \frac{h_2}{a} = 0,000564$$

Demnach würde die Höhe h' dieser Atmosphäre 2,68 Meilen betragen.

Die Annahme einer dreimaligen Brechung führt zu analogen Rechnungen, welche indessen sehr weitläufig ausfallen.

Jedenfalls aber würden sich hierdurch die mittleren Refractionen noch genauer und vielleicht schon bis 88° Zenithdistanz darstellen lassen. Wir wollen indessen diese Rechnung nur theoretisch durchführen und legen also jetzt die folgende Refractionsformel zugrunde:

$$\delta z = \frac{x_1 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + y_1 \operatorname{tg} z}} + \frac{x_2 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + y_2 \operatorname{tg} z}} + \frac{x_3 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + y_3 \operatorname{tg} z}}$$

Aus der entwickelten Reihenform folgen nach Gleichsetzen der entsprechenden Coefficienten gleich hoher Potenzen mit der vorhin angeführten Reihe die Relationen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= b \\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + x_3 y_3^2 &= c \\ x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 + x_3 y_3^3 &= d \\ x_1 y_1^4 + x_2 y_2^4 + x_3 y_3^4 &= e \\ x_1 y_1^5 + x_2 y_2^5 + x_3 y_3^5 &= f \end{aligned}$$

Aus diesen 6 Gleichungen sind die 6 Unbekannten zu ermitteln.

Man findet der Reihe nach leicht folgende Werte:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a y_1 y_2 - b(y_1 + y_2) + c}{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)}, & x_1 &= \frac{b y_1 y_2 - c(y_1 + y_2) + d}{y_1(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} \\ x_1 &= \frac{c y_1 y_2 - d(y_1 + y_2) + e}{y_1^2(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)}, & x_1 &= \frac{d y_1 y_2 - e(y_1 + y_2) + f}{y_1^3(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen zweier aufeinander folgenden Ausdrücke ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} a y_1 y_2 y_3 - b(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) + c(y_1 + y_2 + y_3) - d &= 0 \\ b y_1 y_2 y_3 - c(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) + d(y_1 + y_2 + y_3) - e &= 0 \\ c y_1 y_2 y_3 - d(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) + e(y_1 + y_2 + y_3) - f &= 0 \end{aligned}$$

Hätten wir aus den Grundgleichungen die Werte x_2 oder x_3 abgeleitet, so würden wir in Folge des symmetrischen Baues der letzten 3 Gleichungen auf dasselbe Schlussresultat gekommen sein.

Dieses zeigt uns, dass die Lösung der Aufgabe von der Auflösung der kubischen Gleichung

$$y^3 - (y_1 + y_2 + y_3)y^2 + (y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1)y - y_1 y_2 y_3 = 0$$

abhängt, deren Coefficienten sich aus den vorhergehenden Relationen berechnen lassen. Führen wir die Rechnung durch, so erhalten wir die Gleichung 3. Grades

$$\begin{aligned} &(a(d^2 - ce) + b(be - cd) + c(c^2 - bd))y^3 \\ &- (d(c^2 - bd) + e(ad - bc) + f(b^2 - ac))y^2 \\ &+ (d(cd - be) + e(ae - c^2) + f(bc - ad))y \\ &- d(d^2 - ce) + e(be - cd) + f(c^2 - bd) = 0 \end{aligned}$$

Hat man hiernach die Wurzeln $y_1 y_2 y_3$ berechnet, so sind auch damit nach dem Obigen die Werte $x_1 x_2 x_3$ bestimmt, womit die Aufgabe gelöst

ist. Wie man sieht, ist der Gang der Lösung für eine 4 oder n malige Brechung dem vorstehenden analog und an eine Gleichung 4ten oder n ten Grades geknüpft.

Sind demnach die Coefficienten der Reihe bis zu dem entsprechenden Grade entwickelt, so stehen der Lösung ausser einigen etwas weitläufigen Rechnungsoperationen keine weitem Schwierigkeiten entgegen.

E. Oekinghaus.

2.

Ueber Gleichgewichtspunkte der Anziehung von Linien.

Das Folgende gibt ausser einigen allgemeinen Sätzen nur Berechnungen der Gleichgewichtspunkte der Anziehung einer Anzahl specieller Gebilde.

§. 1. Gleichgewichtspunkt der Anziehung zweier symmetrisch begrenzter Parallelen.

Ist L eine begrenzte Linie (oder ein System solcher), und sind M, N zwei Punkte auf L , deren gerade Verbindungslinie weder L berührt noch in einem dritten Punkte (zwischen M und N) trifft, so ist die Componente X der Anziehung von L auf einen Punkt P der Geraden MN in der Richtung von M nach N nahe bei M negativ, nahe bei N positiv, folglich gibt es eine ungerade Anzahl Punkte P , wo sie null ist.

Dieser Satz gilt im Raume wie in der Ebene. Wir machen davon Anwendung auf den Fall, wo L aus 2 Parallelen

$$x = c; \quad -a < y < a$$

$$x = -c; \quad -b < y < b$$

besteht, und M, N deren Mitten sind, und zwar seien $x, 0$ die Coordinaten von P .

Die Anziehung wirkt längs der x Axe und ist

$$X = \frac{2a}{(c-x)\rho} - \frac{2b}{(c+x)\sigma}$$

wo zur Abkürzung

$$\rho = \sqrt{a^2 + (c-x)^2}; \quad \sigma = \sqrt{b^2 + (c+x)^2}$$

gesetzt ist.

Die Differentiation ergibt:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{2a}{(c-x)^2 \rho} + \frac{2a}{\rho^3} + \frac{2b}{(c+x)^2 \sigma} + \frac{2b}{\sigma^3} > 0$$

daher existirt zwischen $(c, 0)$ und $(-c, 0)$ immer ein und nur ein Gleichgewichtspunkt.

Dieser hat die Gleichung zu erfüllen:

$$a(c+x)\sigma = b(c-x)\rho \quad (1)$$

daher auch die rationale 4. Grades:

$$a^2(c+x)^2\sigma^2 = b^2(c-x)^2\rho^2 \quad (2)$$

und genügt jede Wurzel der letztern entweder der Gl. (1) oder der Gleichung

$$a(b+x)\sigma = -b(c-x)\rho \quad (3)$$

Gl. (1) kann nur bei $x^2 < c^2$, Gl. (3) nur bei $x^2 > c^2$ erfüllt werden. Da nun Gl. (1) immer eine und nur eine reelle Wurzel hat, so ergibt sich:

Gl. (2) hat immer eine und nur eine reelle Wurzel zwischen c und $-c$. Demnach kann sie nur 2 oder 4 reelle Wurzeln haben; im erstern Falle liegt eine, im letztern liegen 3 reelle Wurzeln ausserhalb des genannten Intervalls.

Sei $a < b$. In (2) geht für $x = \pm \infty$ das Zeichen $=$ über in $<$; für $x = \pm c$ beziehungsweise in $>$; folglich ist stets eine reelle Wurzel $> c$, die 2 übrigen sind entweder beide $> c$ oder beide $< -c$ oder imaginär.

Setzt man

$$\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = m; \quad \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} = nc^2; \quad x = cu$$

so lautet Gl. (2) geordnet:

$$u^4 - 4mu^2 + 6u^3 - 4(m+n)u + 1 = 0$$

und reducirt sich durch Substitution

$$u = v + m$$

auf

$$v^4 - 6kv^3 - 4(2mk + n)v - 3k^2 - 4k - 4mn = 0 \quad (4)$$

wo zur Abkürzung

$$k^2 = m^2 - 1 = \left(\frac{2ab}{b^2 - a^2} \right)^2$$

gesetzt ist.

Sind die 4 Wurzeln dieser Gleichung

$$v = p \pm q, \quad -p \pm r$$

so genügt, wie ich T. LXIX. S. 111 gezeigt habe, $4p^2$ einer kubischen Gleichung, die sich besonders einfach gestaltet, wenn man

$$p^2 = \frac{1}{2}z + k$$

setzt, wodurch sie übergeht in

$$z^3 + 4(k + mn)z - 2n^2 = 0$$

Jetzt kann man nach Cardani'scher Formel

$$z = \sqrt[3]{n^2 + \sqrt{n^4 + \left(4 \frac{k+mn}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{n^2 + \sqrt{n^4 + \left(4 \frac{k+mn}{3}\right)^3}}$$

als bekannt zugrunde legen und findet:

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}z + k} \tag{5}$$

$$q = \pm \sqrt{3k - p^2 + \frac{2km + n}{p}}; \quad r = \pm \sqrt{3k - p^2 - \frac{2km + n}{p}}$$

Wie sich die 4 Wurzeln verteilen, wird durch folgende Rechnung entschieden. Man hat:

$$q^2 r^2 = (3k - p^2)^2 - \frac{(2km + n)^2}{p^2}$$

und nach Gl. (5) in z ausgedrückt:

$$\begin{aligned} p^2 q^2 r^2 &= (2k - \frac{1}{2}z)^2 (k + \frac{1}{2}z) - (2km + n)^2 \\ &= 2k^3 - \frac{3}{4}k^2 z - \frac{1}{8}z^3 - 4k^2(k + 1) - 2kmn - n^2 \\ &= -\frac{3}{4}k^2 z - \frac{1}{8}z^3 - 2k^2(k + 2) - 2kmn - n^2 < 0 \end{aligned}$$

folglich sind q^2 und r^2 von ungleichem Vorzeichen und ist r^2 als das kleinere negativ.

Jetzt hat Gl. (2) als einzige reelle Wurzeln:

$$x = c(p \pm q)$$

deren eine $> c$, die andre Mittel zwischen c und $-c$ ist. Bezeichnet q die positive Quadratwurzel, so ist hiernach der Gleichgewichtspunkt

$$x = c(p - q) \\ = c \sqrt{\frac{1}{2}z + k} - \sqrt{2k - \frac{1}{2}z + \frac{2km + n}{\sqrt{\frac{1}{2}z + k}}}$$

§. 2. Gleichgewichtspunkte der Anziehung dreier Seiten eines Rechtecks.

Geht von einem Punkte A einer begrenzten Linie L eine unbegrenzte Gerade AX aus, welche L nicht berührt und nicht zum zweitenmale trifft, und wird ein Punkt P auf AX von L nach Newton'schem Gesetze angezogen, so ist die einem von 0 bis ∞ wachsenden AP entsprechende Componente nach AX zu Anfang und später definitiv positiv in der Richtung nach A hin. Denn für unendlich kleines AP ist die Anziehung eines höchstens in 1. Ordnung unendlich kleinen angrenzenden Stücks von L unendlich gross 1. Ordnung, und die des ganzen Restes von L endlich. Sobald nachher P die Grenze der Projection von L auf AX überschreitet, liegt die ganze Figur mit A auf einer Seite von P , zieht also P in allen ihren Teilen nach A hin. Hieraus folgt der Satz:

„Die Componente der Anziehung einer begrenzten Linie in beliebiger nicht tangirender Richtung nach einem Punkte der Linie kann nur eine gerade Anzahl von Gleichgewichtspunkten ausserhalb der Linie haben, wofern man jeden Punkt, dem eine Componente null und zugleich Maximum oder Minimum entspricht, doppelt zählt.“

Dieser Satz gilt ebensowol im Raume wie in der Ebene. Im Folgenden machen wir specielle Anwendung auf einen Fall der Ebene.

Die anziehende Linie Π bestehe aus 3 Seiten eines Rechtecks. Sei $AB = CD = a$ und $BC = 2b$, der angezogene Punkt P liege auf der Symmetrieaxe MN innerhalb des Rechtecks, wo M die Mitte von BC . Die Anziehung wird also repräsentirt durch ihre axiale Componente.

Diese Componente ist für jede der parallelen Seiten

$$= \frac{1}{AP} - \frac{1}{BP} = \frac{1}{\sqrt{(a-h)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

die Anziehung von BC

$$= \frac{BC}{hBP} = \frac{2b}{h\sqrt{h^2 + b^2}}$$

wo $h = MB$; daher ist die Anziehung der Linie Π

$$= \frac{2}{\sqrt{(a-h)^2 + b^2}} - 2 \frac{h-b}{h\sqrt{h^2 + b^2}}$$

in der Richtung von P nach M , die Bedingung des Gleichgewichts:

$$h\sqrt{h^2 + b^2} = (h-b)\sqrt{(a-h)^2 + b^2} \quad (1)$$

woraus als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung hervorgeht:

$$h^2(h^2 + b^2) = (h-b)^2[(a-h)^2 + b^2]$$

d. i. nach Potenzen von h entwickelt:

$$H(a, h) \equiv 2(a+b)h^3 - (a^2 + 4ab + b^2)h^2 + 2(a^2 + ab + b^2)bh - (a^2 + b^2)b^2 = 0 \quad (2)$$

und nach Potenzen von a :

$$a^2(h-b)^2 - 2ah(h-b)^2 = b(2h-b)(h^2 + b^2).$$

was sich schreiben lässt:

$$(a-h)^2 = \frac{h^4 + 2b^2h - b^4}{(h-b)^2} \quad (3)$$

Die 3 Wurzeln h von Gl. (2) teilen sich unter die 2 Gleichungen

$$h\sqrt{h^2 + b^2} = (h-b)\sqrt{(a-h)^2 + b^2} \quad (4)$$

$$h\sqrt{h^2 + b^2} = -(h-b)\sqrt{(a-h)^2 + b^2} \quad (5)$$

Dem vorangestellten Satze zufolge kann erstere nur keine oder zwei reelle Wurzeln haben. Gehen wir nun von dem Falle $a = b$ aus, so reducirt sich hier Gl. (2) auf

$$h^3 + (h-b)^3 = 0$$

und hat eine reelle Wurzel $h = \frac{1}{2}b$, welche der Gl. (5), und 2 imaginäre $h_2 = \frac{1}{2}b(1 \pm i\sqrt{3})$, welche der Gl. (4) genügen.

Andrerseits ist leicht zu ersehen, dass die Function

$$\frac{h\sqrt{h^2 + b^2}}{h-b}$$

von irgend einem Werte an mit h beständig und ins unendliche wächst. Nach Gl. (1) wächst dann auch das stets positive $a-h$, und umsomehr a mit h , d. h. die Function a von h ist eindeutig umkehrbar, und jedem hinreichend grossen a entspricht ein reelles h .

Lässt man nun a von $a = b$ an bis zu diesem Werte stetig wachsen, so muss irgend einmal das anfänglich conjugirt complexe

Wertepar h in ein reelles übergehen und an der Grenze zusammenfallen, wir wollen sagen in $h = h_0$ entsprechend $a = a_0$.

Ist ferner $a = a_1$ derjenige Wert, von welchem an h mit a wächst, und entspricht ihm $h = h_1$, so hat Gl. (4) für $a > a_1$ zwei reelle Wurzeln h , deren einer $> h_1$ ist, während der andre, weil h eindeutig in a , $< h_1$ sein muss.

Gleichzeitig hat Gl. (2) 3 reelle Wurzeln, deren einer der Gl. (5) angehört. Diese aber kann nur für $h < b$ erfüllt werden. Hiernach bilden b und h_1 feste Grenzen für die 3 Wurzeln: die beiden grössten, unter sich durch h_1 , gegen die dritte durch b geschieden, bestimmen Gleichgewichtspunkte; da sie für $a = a_0$ in h_0 zusammenfallen, so muss $h_0 = h_1$ und $a_0 = a_1$ sein.

Das letztere Ergebniss $h_0 = h_1$ erhält man auch sofort bei Bestimmung beider Grössen. Denn $h = h_1$ entspricht dem Beginn des definitiven Wachsens von a mit h ; die Bedingung ist:

$$\frac{\partial H(a, h)}{\partial h} = 0; \quad H(a, h) = 0 \quad (6)$$

Bedingung für $h = h_0$ ist die Existenz einer doppelten Wurzel, also dieselben Gleichungen (6). Es bleibt nur in Frage, ob diese nach Elimination von h durch mehrere Werte von a erfüllt werden können.

Unmittelbar erhält man aus den Gl. (6):

$$\begin{aligned} 3(a+b)h^2 - (a^2 + 4ab + b^2)h + (a^2 + ab + b^2)b &= 0 \\ (a^2 + 4ab + b^2)h^2 - 4(a^2 + ab + b^2)bh + 3(a^2 + b^2)b^2 &= 0 \end{aligned}$$

woraus zunächst: (7)

$$\begin{aligned} (a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 16ab^3 - 11b^4)h &= (a^4 - 4a^3b - 3a^2b^2 - 4ab^3 - 8b^4)b \\ (a^4 - 4a^3b - 3a^2b^2 - 4ab^3 - 8b^4)h &= (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)b \end{aligned}$$

und schliesslich:

$$2a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 - 40a^3b^3 - 24a^2b^4 - 12ab^5 - 25b^6 = 0$$

das ist:

$$2(a-b)^6 = 27(a^2 + b^2)^2 b^2$$

oder, da $a - b$ stets positiv:

$$\sqrt[3]{2(a-b)^3} = 3\sqrt[3]{3(a^2 + b^2)b}$$

Setzt man hier

$$a = \alpha(\gamma + 4); \quad b = \alpha(\gamma - 2)$$

so kommt:

$$\gamma^3 + 6\gamma - 4(5 + 3\sqrt[3]{6}) = 0 \quad (8)$$

$$\gamma = \sqrt[3]{2(\sqrt[3]{5+3\sqrt{6}+\sqrt{81+30\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{5+3\sqrt{6}-\sqrt{81+30\sqrt{6}}})}$$

$$\gamma = 3,128\,5746$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma+4}{\gamma-2} = 6,316\,4420$$

Drückt man die Coefficienten der Gl. (7) in γ aus, so kommt:

$$2(-\gamma^4 + 2\gamma^3 + 8\gamma + 20)h = (-\gamma^4 + 2\gamma^3 - 6\gamma^2 + 32\gamma + 32)b$$

$$(-\gamma^4 + 2\gamma^3 - 6\gamma^2 + 32\gamma + 32)h = 72b$$

Reducirt man durch Gl. (8) γ^4 und γ^3 auf niedere Potenzen, so geben beide Gleichungen übereinstimmend:

$$(2 + \sqrt{6} - \gamma)h = \sqrt{6}b$$

Demnach ist die kleinste Abscisse eines Gleichgewichtspunktes

$$h_0 = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6} - \gamma} b = 1,854\,3855b$$

und das kleinste a , dem ein Gleichgewichtspunkt entspricht:

$$a_0 = \frac{\gamma+4}{\gamma-2} b = 6,316\,4420b$$

Um die Resultate zusammenzustellen, so existirt

für $a < a_0$ kein Gleichgewichtspunkt,

für $a = a_0$ einer, nämlich $h = h_0$,

für $a > a_0$ zwei, nämlich $h = h'$ und h'' , von denen

$$h' > h_0, \quad h_0 > h'' > b$$

ist. Die dritte Wurzel von $H = 0$ ist $h''' < b$ und genügt der Gleichung (5).

Endlich ist es noch von Interesse die Lösungen für unendlich grosses a zu untersuchen. Sei

$$\frac{b}{a} = \beta; \quad \frac{h}{a} = \eta$$

so dass Gl. (2) übergeht in

$$2(1 + \beta)\eta^3 - (1 + 4\beta + \beta^2)\eta^2 + 2(1 + \beta + \beta^2)\beta\eta - (1 + \beta^2)\beta^2 = 0 \quad (9)$$

Für $\beta = 0$ erhält man $(2\eta - 1)\eta^3 = 0$, woraus als grösste Wurzel $\eta' = \frac{1}{2}$ hervorgeht, während die beiden andern verschwinden. Entwickelt man also η nach Potenzen von β , so ergibt sich der Wert

von $\eta' = \frac{h'}{a}$. Die Entwicklung muss, damit sich h'' und h''' scheiden, mindestens bis zur 4. Potenz getrieben werden, wo man findet:

$$\eta' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta - \beta^2 - 5\beta^3 - 17\beta^4$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (9) ein, subtrahirt die Gleichung in η' von der in η und dividirt durch $\eta - \eta'$, so erhält man die quadratische, für $\eta = \eta''$ und $\eta = \eta'''$ gültige Gleichung:

$$(1 + \beta)\eta^2 - 2\beta(1 + \beta + 3\beta^2 + 11\beta^3)\eta + \beta^2(1 + \beta + 4\beta^2) = 0$$

oder nach Division durch $1 + \beta$:

$$\eta^2 - 2\beta(1 + 3\beta^2 + 8\beta^3)\eta + \beta^2(1 + 4\beta^2) = 0$$

und nach Auflösung:

$$\eta = \beta \pm \sqrt{2\beta^2}$$

das ist:

$$h' = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{b^2}{a}; \quad h'' = b + \sqrt{2}\frac{b^2}{a}; \quad h''' = b - \sqrt{2}\frac{b^2}{a}$$

Die 2 ersten Ausdrücke bestimmen für sehr grosse $a:b$ annähernd die Gleichgewichtspunkte.

§. 3. Gleichgewichtspunkte der Anziehung einer symmetrischen dreiteiligen gebrochenen Linie.

Die gebrochene Linie L sei $ABCD$, die Stücke BA und CD liegen symmetrisch zur x Axe MN , und zwar sei M Projection von B und C und Anfang der xy , N Projection von A und D auf die x Axe; β sei Richtungswinkel von BA .

Der von L angezogene Punkt auf der x Axe sei P mit den Coordinaten $x, 0$ und $AP = \rho$, $BP = \sigma$. Das Lot PQ von P auf AB sei $= h$. Dann sind die Coordinaten von A, B bzw.

$$\begin{aligned} (x) &= MN = a, & 0 \\ (y) &= AN = b + a \operatorname{tg} \beta, & BM = b \end{aligned}$$

und man hat:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (a - x)^2 + (b + a \operatorname{tg} \beta)^2; & \sigma^2 &= x^2 + b^2 \\ h &= x \sin \beta + b \cos \beta \end{aligned}$$

Die Componenten der Anziehung von AB und BM in der x Richtung sind bzw.:

$$X_1 = -\frac{b + a \operatorname{tg} \beta}{\rho h} + \frac{b}{\sigma h}, \quad X_2 = -\frac{b}{\sigma x}$$

daher ist die Anziehung der ganzen Figur L

$$X = 2(X_1 + X_2) = -2 \left\{ \frac{b + a \operatorname{tg} \beta}{\rho h} + \frac{b}{\sigma} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h} \right) \right\}$$

und die Bedingung des Gleichgewichts:

$$G \equiv \rho b(x-h) - \sigma(b + a \operatorname{tg} \beta)x = 0$$

während $G > 0$ die positive x Richtung der Anziehung anzeigt.

Nach Multiplication mit

$$\rho b(x-h) + \sigma(b + a \operatorname{tg} \beta)x$$

erhält man als notwendige Bedingung die rationale Gleichung 4. Grades:

$$\{(a-x)^2 + (b + a \operatorname{tg} \beta)^2\} b^2(x-h)^2 - (x^2 + b^2)(b + a \operatorname{tg} \beta)^2 x^2 = 0 \quad (1)$$

unter deren Wurzeln, solange $b + a \operatorname{tg} \beta > 0$ ist, diejenigen, welche $> h$ sind, auch die ausreichende Bedingung $G = 0$ erfüllen, mithin, soweit sie reell sind, Gleichgewichtspunkte bestimmen.

Da für $x > a$ die ganze Figur L auf negativer Seite von P liegt, so ist hier stets $G < 0$. Hat nun $G = 0$ reelle Wurzeln, und ist $x = x_1$ die grösste unter ihnen, so ist $x_1 < a$. Verlängert man dann BA und CD um gleiche Stücke, so ist die Componente der Anziehung der Verlängerungen positiv, also wird durch den Zuwachs von a auch $G > 0$, muss aber für hinreichend grosses x negativ werden, folglich für irgend ein $x > x_1$ verschwinden. Hieraus folgt der Satz:

Existirt für irgend ein a ein Gleichgewichtspunkt, so existirt auch für jedes grössere a ein solcher, und existirt für irgend ein a keiner, so existirt auch für jedes kleinere a keiner.

Demgemäss erhalten wir die äusserste Grenze der Existenz von Gleichgewichtspunkten, wenn wir $a = \infty$ setzen. Dann geht Gl. (1) über in

$$x^4 \sin^2 \beta + b^2 x^2 (2 \sin \beta - 1) + 2b^3 x \cos \beta (1 - \sin \beta) - b^4 \cos^2 \beta = 0$$

oder, wenn man

$$x = bz \cos \beta; \quad \sin \beta = n$$

setzt, in

$$z^4 n^2 (1 - n^2) + z^2 (2n - 1) + 2z(1 - n) - 1 = 0$$

An den Grenzen zwischen zweien der Fälle, wo sie keine, zwei oder

vier reelle Wurzeln hat, müssen 2 Wurzeln zusammenfallen; hier ist also

$$2z^3n^2(1-n^2) + z(2n-1) + (1-n) = 0$$

Eliminiert man z zwischen beiden Gleichungen, so kommt:

$$n^2(11n^6 - 36n^5 + 19n^4 + 32n^3 - 19n^2 - 10n + 2) = 0$$

das ist:

$$n^2(11n^3 - 14n + 2)(n^2 - n - 1)^2 = 0$$

woraus 5 verschiedene reelle Wurzeln hervorgehen. Da die Elimination der höhern Potenzen von z zu linearen Gleichungen führt, so entspricht jedem n nur ein z , und es ergeben sich die Werte:

$$\begin{aligned} n = 0; \quad z = 1; \quad \frac{x-h}{b \cos \beta} &= 0 \\ n = \frac{7 \pm 3\sqrt{3}}{11}; \quad z = 2 \mp \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{x-h}{b \cos \beta} &= \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \\ n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad z = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{x-h}{b \cos \beta} &= \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Der Fall $n = 0$ ist in §. 2. behandelt. Unter den 4 übrigen sind die Werte mit obern Zeichen zu verwerfen, weil $n > 1$ wird. Es bleiben nur die zwei:

1) Für positives β hat man allein:

$$\sin \beta = \frac{7 - 3\sqrt{3}}{11}; \quad \beta = 0,1048707 \text{ R}$$

$$x = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) b \cos \beta = 2,542460b > h$$

2) für negatives β :

$$\sin \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \quad \beta = -0,4241412 \text{ R}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} b \cos \beta = 1,272020b > h$$

Da nach §. 2. für $\beta = 0$ und hinreichend grosses a , mithin auch für $a = \infty$ zwei Gleichgewichtspunkte existiren, so müssen sich an der eben bestimmten Grenze das reelle und imaginäre Wurzelpar so scheiden, dass das reelle im ganzen Intervall zwischen 0 und jeder der beiden Grenzen statthat. Es hat sich also ergeben:

Für $0 < \beta < 0,1048707 \dots \text{ R}$ existiren für hinreichend grosses a zwei Gleichgewichtspunkte, für grösseres β keiner, so gross immer a sei.

Die negativen β würden in Betreff des eventuellen Durchschnitts von BA und CD besondere Untersuchung erfordern, auf die ich hier nicht eingehe.

§. 4. Minimum der Kreisbogen, deren Anziehung Gleichgewichtspunkte hat.

Wächst der Bogen B eines constanten Kreises von 0 bis zum vollen Kreise, so hat (wie ich am Schlusse des Aufsatzes XVII. T. VII. S. 336 bewiesen habe) seine Anziehung im Anfang bis zu einer gewissen Grenze keinen, darüber hinaus zwei Gleichgewichtspunkte auf der Symmetrieaxe.

Im Folgenden will ich in der Kürze das Verfahren angeben, nach welchem ich diese Grenze

$$\frac{1}{2}B = 1,806\,9374 R$$

wo der Radius = 1 gesetzt ist, und R den Quadranten bedeutet, berechnet habe.

Da nur Punkte auf der Symmetrieaxe in Betracht gezogen sind, so ist vorher die Berechtigung zu begründen. In der Tat gibt es ein- und mehrfach symmetrisch gestaltete Linien mit Gleichgewichtspunkten, die auf keiner Axe liegen. Dass ein Kreisbogen nicht in diesem Falle ist, lässt sich leicht zeigen.

Wir nehmen an, P sei ein Gleichgewichtspunkt für den Bogen B , ziehen durch P den Durchmesser D und durch beide Enden von B Sehnen KL und MN normal zu D . Letztere teilen den vollen Kreis in 4 Stücke: Bog. KL und MN , einzeln symmetrisch zu D , und zwischen beiden Bog. KM und LN (in besondern Fällen kann ein Stück null sein). Die zu D normale Componente der Anziehung von KL und MN , mögen sie zu B gehören oder nicht, ist stets null. Von KM und LN aber ist stets ein Teil von B , das andre nicht; daher ist die transversale Componente der allein übrig bleibenden Anziehung stets positiv nach der Seite des erstern Bogens hin, und P befindet sich nicht im Gleichwichte, wenn nicht beide Sehnen zusammenfallen, mithin D Symmetrieaxe von B ist, w. z. b. w.

Sei also der vom Bogen B angezogene Punkt P auf der Symmetrieaxe D gelegen. Wir nehmen den Mittelpunkt des Kreises zum Anfang der xy , D zur Axe der x , positiv nach der Mitte von B hin, und zwar seien x , 0 Coordinaten von P und $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ Coordinaten des Bogenelements $\partial\varphi$. Den Enden des Bogens ent-

sprechen $\varphi = \pm \alpha R$, und ρ sei die Entfernung von P und $\partial\varphi$. Dann sind die Componenten der Anziehung

$$X = \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{\cos \varphi - x}{\rho^3} \partial\varphi; \quad Y = \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{\sin \varphi \partial\varphi}{\rho^3} = 0$$

$$\rho^2 = 1 + x^2 - 2x \cos \varphi$$

und die Bedingung des Gleichgewichts:

$$X = 0$$

wodurch x als Function von α bestimmt wird.

Zum Ausdruck des Integrals in elliptischen Functionen sei

$$\varphi = 2 \operatorname{am} c u; \quad \alpha R = 2 \operatorname{am} c \eta$$

$$k = \frac{2\sqrt{1-x}}{1-x}; \quad k' = \frac{1+x}{1-x}$$

dann wird

$$X = 2 \frac{\operatorname{el} \eta - E + k'(K - \eta)}{-x(1+x)}$$

Einfacher und zur numerischen Rechnung geeigneter wird der Ausdruck durch Einführung der Functionen:

$$\Theta_1(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\tau + 2niv}; \quad \Theta(v, \tau) = \Theta_1(v - R, \tau)$$

$$H_1(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+1)^2\tau + (2n+1)iv}; \quad H(v, \tau) = H_1(v - R, \tau)$$

Hier wird die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\Theta'(v, \tau)}{\Theta(v, \tau)} = G(R - v); \quad G = -k' \Theta_1^4(0, \tau) - \frac{H_1''(0, \tau)}{H_1(0, \tau)}$$

Für $k > \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $\tau < 2R$ kann man zum conjugirten Modul σ übergehen bestimmt durch

$$\sigma\tau = 4R^2$$

zugleich nehmen wir dann das Complement von v und setzen:

$$w = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{v}{R} \right)$$

dann lautet die Bedingungsgleichung:

$$\frac{i\Theta_1'(iw, \sigma)}{\Theta_1(iw, \sigma)} = Jw; \quad J = k' \Theta_1^4(0, \sigma) - \frac{\Theta_1''(0, \sigma)}{\Theta(0, \sigma)}$$

Bei einer siebenstelligen Rechnung reicht es vollkommen aus die Reihen bis zur 4. Potenz von

$$q = e^{-\tau}, \quad q' = e^{-\sigma}$$

zu benutzen. Die Gleichungen werden dann:

$$\frac{4q \sin 2v(1 - 4q^2 \cos 2v)}{1 - 2q \cos 2v + q^4 \cos 4v} = G(R - v) \quad (1)$$

$$G = \frac{1 + 9q^2}{1 + q^2} - k'(1 + 2q + 2q^4)^4$$

$$\frac{4q' \frac{\sin 2iw}{i} (1 + 4q'^2 \cos 2iw)}{1 + 2q' \cos 2iw + 2q'^4 \cos 4iw} = Jw \quad (2)$$

$$J = k'(1 + 2q' + 2q'^4)^4 - \frac{8q'(1 - 4q'^2)}{1 - 2q' + 2q'^4}$$

Um nun für gegebenen Bogen die Gleichgewichtspunkte zu finden, würde man x als Function von α darzustellen haben. Mit q , q' , v , w stehen x und α in folgender Beziehung. Sei

$$k = \sin \beta R; \quad k' = \cos \beta R$$

dann wird

$$x = -\operatorname{tg}^2 \frac{\beta R}{2}; \quad q = e^{-\tau}; \quad q' = e^{-\sigma}$$

$$\sin \beta R = \frac{H_1^2(0, \tau)}{\Theta_1^2(0, \tau)} = \frac{\Theta^2(0, \sigma)}{\Theta_1^2(0, \sigma)}; \quad \cos \beta R = \frac{\Theta^2(0, \tau)}{\Theta_1^2(0, \tau)} = \frac{H_1^2(0, \sigma)}{\Theta_1^2(0, \sigma)}$$

$$\begin{aligned} \cot \frac{\alpha R}{2} &= \sqrt{k'} \frac{H(v, \tau)}{H_1(v, \tau)} = \sqrt{k'} \frac{\sin v - q^2 \sin 3v}{\cos v + q^2 \cos 3v} \\ &= \sqrt{k'} \frac{i\Theta(iw, \sigma)}{H(iw, \sigma)} = \sqrt{k'} \frac{1 - 2q' \cos 2iw + 2q'^4 \cos 4iw}{2q'^2 (\sin iw - q'^2 \sin 3iw)} \end{aligned} \quad (3)$$

Da in Gl. (1) und (2) v und w implicite von x und α abhängen, so ist eine directe Lösung nach x nicht wol möglich, ebensowenig die inverse. Man hat nur den einen Weg, erst die Gleichungen nach v resp. w (approximativ) aufzulösen, x aus $q(q')$, α aus q , v , (q' , w) zu berechnen, schliesslich die erhaltene Darstellung von α in x umzukehren.

Diese Rechnung lässt sich in Reihen, die nach Potenzen von q resp. $\sqrt{q'}$ fortschreiten, ausführen; doch convergiren die resultirenden Reihen so schwach, dass sie zur numerischen Ausrechnung völlig unbrauchbar sind. Dagegen führt die gewöhnliche Approximationsmethode, welche jeden Näherungswert dem resultirenden Fehler pro-

portional corrigirt, sehr schnell und leicht zum Ziele. Die folgende kleine Tafel geht nicht von q , sondern von β aus. Die entsprechenden Werte von q habe ich der von E. Meissel berechneten und herausgegebenen achtstelligen Tafel entnommen; aus ihnen gehen die Werte von q' leicht hervor.

β	α	x
0,1	1,993 8822	-0,006 1940
0,2	1,976 1331	-0,025 8856
0,3	1,948 5543	-0,057 6378
0,4	1,914 0766	-0,105 5728
0,5	1,875 3810	-0,171 5729
0,6	1,840 4380	-0,259 6162
0,7	1,815 4961	-0,375 5248
0,8	1,807 3806	-0,527 8639
0,9	1,947 3050	-0,729 4538

Zur Bestimmung des Minimums von α , welches der Tabelle zufolge nicht weit von $\beta = 0,8$ entfernt sein kann, würde sich die analytische Bedingung wenig eignen, weil die derivirte Gl. (2) schon complicirt ist und nach Elimination von $\partial q'$, ∂w mittelst Gl. (3) noch complicirter wird. Dagegen ergibt sich das Minimum siebenstellig sehr bald, wenn man über die zweite Bruchstelle von β eine neue Tafel berechnet, die sich nur auf die nächtliegenden Werte, etwa 0,78; 0,79; 0,81 zu erstrecken braucht; dann in der Nähe des kleinsten α mit der dritten Stelle ebenso verfährt, u. s. f. Die vierte Tabelle lautet:

β	α
0,7808	1,806 9378
0,7809	1,806 9374
0,7810	1,806 9376

(4)

Sind die Differenzen der β hinreichend klein geworden, wie wir hier z. B. annehmen wollen, so kann man in dem kleinen Intervalle die Curve $\alpha = \mathfrak{Fct.}(\beta)$ durch eine Parabel ersetzen, die durch die 3 Punkte ($\alpha\beta$) geht, und deren Scheitel dann dem Minimum sehr nahe entsprechen muss. Sei also, wenn $\alpha_0 = \mathfrak{Fct.}(\beta_0)$ den Scheitel bezeichnet,

$$\alpha_0 = 1,806\ 9378 - 10^{-7}X; \quad \beta_0 = 0,7808 + 10^{-4}Y$$

dann kommt:

$$Y^2 = 2pX; \quad (Y-1)^2 = 2p(X-4); \quad (Y-2)^2 = 2p(X-2)$$

woraus:

$$X = \frac{49}{12}; \quad Y = \frac{7}{6}; \quad p = \frac{1}{6}$$

also

$$\beta_0 = 0,780\,9167; \quad \alpha_0 = 1,806\,9373\,9167$$

Die 3 letzten Ziffern würden Geltung haben, wenn die Zahlen (4) bis auf 3 weitere Stellen genau wären. Für die siebenstellige Rechnung fallen sie weg, und man hat für das Minimum:

$$\beta = 0,7809; \quad \alpha = 1,806\,9374; \quad x = -0,495\,4$$

Von x können natürlich alsdann nur höchstens 4 Stellen gefunden werden.

R. Hoppe.

3.

Zur Theorie der Kegelschnittslinien.

1. Zieht man an einen Kegelschnitt in einem beliebigen Punkte A die Tangente und verbindet A mit den beiden unendlich fernen Punkten der Curve, so ist das Product der Entfernungen irgend eines Punktes der Kegelschnittslinie von den beiden letztgenannten Geraden proportional seiner Entfernung von der Tangente.

Sei

$$u_2 + 2u_1 + u_0 = 0 \tag{1}$$

worin

$$u_2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad u_1 = a_{13}x + a_{23}y, \quad u_0 = a_{33}$$

die Gleichung des Kegelschnitts, bezogen auf rechtwinklige Axen. Transformirt man zu parallelen Axen mit dem Ursprung $A(x_0, y_0)$, so nimmt die Gleichung die Form

$$u_2 + 2u_1' = 0 \tag{2}$$

worin

$$u_1' = a_{13}'x + a_{23}'y$$

an; a_{13}' , a_{23}' sind lineare Functionen von x_0, y_0 mit Coefficienten der ursprünglichen Gleichung.

Die Gleichung der Tangente in A ist

$$u_1' = 0 \tag{3}$$

die Gleichung des Geradenpaars, welches A mit den unendlich fernen Punkten des Kegelschnitts verbindet, ist

$$u_2 = 0 \tag{4}$$

Zerlegt man u_2 in die linearen Factoren und setzt dabei zur Abkürzung die positive Quadratwurzel

$$\sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} = w \tag{5}$$

so schreiben sich die Gleichungen (3 und (4

$$u_1' = a_{13}'x + a_{23}'y = 0 \tag{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{a_{22}} [a_{22}y + (a_{12} - w)x] [a_{22}y + (a_{12} + w)x] = 0 \tag{6*}$$

Bezeichnet q die Entfernung des Punktes $B(x, y)$ auf (2 von der Tangente, s, s' seine Entfernungen von den nach den unendlich fernen Punkten gerichteten Geraden, so ergeben sich auf Grund der Gleichungen (6 und (6* für diese Grössen die Ausdrücke

$$q = \frac{a_{13}'x + a_{23}'y}{\sqrt{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}}$$

$$s = \frac{a_{22}y + (a_{12} - w)x}{\sqrt{a_{22}^2 + (a_{12} - w)^2}}$$

$$s' = \frac{a_{22}y + (a_{12} + w)x}{\sqrt{a_{22}^2 + (a_{12} + w)^2}}$$

Hieraus folgt mit Zuziehung von (5

$$u_1' = q \sqrt{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}$$

$$u_2 = ss' \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in die Gleich. (2 gibt

$$ss' = 2q \sqrt{\frac{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}} \tag{7}$$

wo nunmehr s, s', q und die Quadratwurzel mit ihrem absoluten Betrag zu verstehen sind. Damit ist der oben aufgestellte Satz bewiesen.

2. Die geometrische Bedeutung des aus den Coefficienten von

(2 gebildeten Factors $\sqrt{\frac{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}} = R$ ergibt sich am einfachsten, wenn man von der Axengleichung des Kegelschnitts ausgeht.

a) Für die Ellipse, beziehungsweise Hyperbel geht die Gleichung

$$a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = \pm a^2 b^2$$

durch Transformation nach dem Ursprung $A(x_0, y_0)$ über in

$$\pm b^2 x^2 + a^2 y^2 \pm 2b^2 x_0 x + 2a^2 y_0 y = 0$$

es ist also

$$a_{11} = \pm b^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = a^2, \quad a_{13}' = \pm b^2 x_0, \quad a_{23}' = a^2 y_0$$

und

$$R = \frac{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}{a^2 \mp b^2}$$

der Abschnitt n , welchen die Hauptaxe des Kegelschnitts auf der Normale des Punktes A bestimmt, ist aber

$$n = \frac{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}{a^2}$$

wenn also die relative Excentricität mit ϵ bezeichnet wird, so geht der Ausdruck für R in $\frac{n}{\epsilon^2}$ über, und Gleich. (7) schreibt sich für die Ellipse und Hyperbel

$$\epsilon^2 s s' = 2 n q \quad (8)$$

Für die gleichseitige Hyperbel wird insbesondere wegen $\epsilon^2 = 2$

$$s s' = n q \quad (8^*)$$

b) Die Gleichung der Parabel verwandelt sich bei der nämlichen Transformation in

$$y^2 - 2 p x + 2 y_0 y = 0$$

so dass

$$a_{11} = a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{13}' = -p, \quad a_{23}' = y_0$$

und

$$R = \sqrt{p^2 + y_0^2}$$

wird; dies aber ist zugleich der Ausdruck für den Abschnitt n , welchen die Axe der Parabel auf der Normale in A bestimmt. Da ferner im gegenwärtigen Falle die beiden reellen unendlich fernen Punkte in einen zusammenfallen, so wird $s' = s$, und die Gleich. (7) nimmt für die Parabel die Gestalt an

$$s^2 = 2 n q \quad (9)$$

Die Scheitelgleichung ist ein specieller Ausdruck für diese allgemeine Beziehung.

c) Bei dem Kreise, dessen Gleichung die Form

$$x^2 + y^2 + 2x_0x + 2y_0y = 0$$

annimmt, werden s, s' als Abstände eines Punktes von den Geraden absoluter Richtung durch A unendlich gross. Betrachtet man aber den Kreis als Grenzform einer Ellipse für ein gegen null convergirendes ε , so zeigt sich, dass das Product $\varepsilon^2 s s'$ der bestimmten Grenze

$$(y - ix)(y + ix) = x^2 + y^2 = c^2$$

sich nähert, wobei c die Strecke AB bezeichnet, während n den Wert r des Halbmessers annimmt. Mithin wird man hier zu der elementargeometrischen Beziehung

$$c^2 = 2rq \tag{10}$$

geführt.

3. Der obige Satz gibt ein einfaches Mittel zur Lösung der beiden folgenden Aufgaben.

a) Von einer Hyperbel sind eine Tangente a mit dem Berührungspunkt A , ein Punkt B und die Richtungen der Asymptoten (die beiden unendlich fernen Punkte) gegeben.

Man führe durch A die Parallelen zu den Asymptoten und falle auf dieselben von B die Lote s, s' , ebenso das Lot q auf a . Vermöge der Gleich. (8) ergibt sich, wenn man den Asymptotenwinkel 2Θ einführt durch die Relation $\varepsilon = \sec \Theta$:

$$2n = \frac{(s \sec \Theta)(s' \sec \Theta)}{q}$$

als vierte Proportionale der leicht zu construierenden Strecken $s \sec \Theta$, $s' \sec \Theta$ und der Strecke q . Wird nun n auf der Normale in A in der entsprechenden Richtung abgetragen, so erhält man einen Punkt der Hauptaxe und diese selbst als Parallele zur Halbierungslinie des Asymptotenwinkels. Damit ist aber auch y_0 und die Subtangente t von A bestimmt; da nun

$$t = \frac{y_0^2}{(\varepsilon^2 - 1)x_0}$$

so ergibt sich

$$x_0 = \frac{(y_0 \cotg \Theta)^2}{t}$$

und hiermit der Mittelpunkt der Hyperbel. Die weitere Verfolgung der Aufgabe bietet keine Schwierigkeit.

b) Von einer Parabel ist eine Tangente a mit dem Berührungspunkt A , ein Punkt B und die Richtung der Axe (der unendlich ferne Punkt) gegeben.

Man führe durch A die Parallele zur Axe und fälle auf dieselbe aus B das Lot s , ebenso das Lot q auf a . Auf Grund der Gleichung (9) findet man

$$2n = \frac{s^2}{q}$$

durch Abtragen von n auf der Normale in A einen Punkt der Axe und somit auch diese selbst. Es ist nun leicht, die weiteren Elemente zu bestimmen.

E. Czuber.

4.

Inkreiscentrum als Gleichgewichtspunkt.

Ist P ein Punkt innerhalb eines Vielecks, h sein Abstand von einer Seite AB , φ und φ' die Richtungswinkel von PA und PB , so ist die Componente der Anziehung von AB auf $P = (\sin \varphi' - \sin \varphi) : h$, daher die Comp. d. Anz. des Umfangs die Summe aller den Seiten entsprechenden Werte, d. i. $= 0$, wenn h für alle Seiten gleich ist. Folglich ist in diesem Falle der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ein Gleichgewichtspunkt der Anz. des Umfangs, beim Dreieck bedingungslos.

Das Analoge gilt auch vom Polyeder und analogen Gebilden von n Dimensionen, nur muss die Anz. der $(-n)$ ten Potenz der Entfernung proport. sein.

Sei nämlich ∂f ein Element einer Polyederseite, ρ seine Entfernung von P , h das Lot von P auf die Seite, ω eine um P mit dem Radius 1 beschriebene Kugelfläche, $\partial \omega$ die Radialprojection von ∂f ; dann ist die Pyramide über ∂f mit P als Spitze $= \frac{1}{2} h \partial f = \frac{1}{2} \rho^3 \partial \omega$, daher die Anz. von ∂f auf P

$$= \frac{\partial f}{\rho^3} = \frac{\partial \omega}{h}$$

Ist jetzt $\partial \omega_1$ Normalprojection von $\partial \omega$ auf die yz Ebene, so ist $\partial \omega_1 : h$ die Comp. d. Anz. nach x Richtung. Davon bei gleichen h die Summe über die Oberfläche genommen gibt die Projection der Kugelfläche auf eine Ebene, d. i. null — w. z. b. w.

Anlass zu derlei Untersuchungen war mir der Vortrag des Hrn. Oekinghaus auf der Naturforschervers. (Tagebl. LXI. p. 7.) welcher zeigt, dass die Brennpunkte der Lemniskate deren Gleichgewichtspunkte sind.

R. Hoppe.

V.

Die harmonische Reihe.

Ein Beitrag zur algebraischen Analysis.

Von

Dr. **Heinrich Simon** in Berlin¹⁾.

E i n l e i t u n g.

Die Reihentheorie bedient sich zur Begründung ihrer Sätze vielfach des fremdartigen Hilfsmittels der bestimmten Integrale. Es mag in manchen Fällen schwer scheinen, dieses Hilfsmittel durch die Methoden der algebraischen Analysis zu ersetzen — die Behauptung, dass ein solcher Ersatz wünschenswert sei, wird aber kaum vielem Widerspruche begegnen. Bezeichnet Herr Thomae²⁾ es doch geradezu als „eine Forderung der Wissenschaft, dass sie die Resultate, die sie auf elementarem Wege erhalten kann, auch auf diesem zu erhalten suchen muss, wofern damit nur nicht übergrosse Weitläufigkeiten verbunden sind“. Mit letzterer Einschränkung ist wol der Haupteinwand berührt, den man jener Forderung entgegenstellen kann: Ist Reinheit der Methode ein berechtigter Anspruch der Aesthetik der Wissenschaft, so ist es doch Eleganz und Kürze nicht minder, und wo beide in Widerstreit geraten, wird im einzelnen Falle der Geschmack zu entscheiden haben, welcher von ihnen

1) Nachstehende Arbeit ist ein an vielen Stellen umgearbeiteter und erweiterter Abdruck der unter derselben Aufschrift erschienenen Inaugural-Dissertation des Verfassers (Halle, 1886). Vergl. auch den Aufsatz d. Verf. T. VI. S. 105 u. 220.

2) „Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe“. Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. XXVI. (1881) S. 315.

dem andern unterzuordnen sei. Lässt sich aber beiden zugleich genügen, so wird ein Versuch in dieser Richtung keiner weiteren Rechtfertigung bedürfen.

Zu solchem Versuche forderte nun die harmonische Reihe besonders auf.

Dieselbe wird in ihrer einfachsten Gestalt, als Reihe der reciproken natürlichen Zahlen, gerade in den Elementen der Reihenlehre häufig herangezogen. Sie pflegt als der erste Beleg dafür angeführt zu werden, dass die unbegrenzte Abnahme der Glieder allein nicht hinreicht, um eine unendliche Reihe convergent zu machen; sie liefert, mit wechselnden Vorzeichen versehen, das einfachste Beispiel einer convergenten alternirenden Reihe; an ihr wird endlich seit Dirichlet¹⁾ die bedingte Convergenz erläutert und mit den Mitteln der algebraischen Analysis nachgewiesen, dass eine veränderte Anordnung der Glieder von Einfluss auf die Summe sein kann.

Allein damit sind die Eigenschaften der Reihe nur an der Oberfläche gestreift.

Denn zunächst lässt sich das Unendlichwerden der harmonischen Reihe in Beziehung setzen zu dem des Logarithmus; im engsten Zusammenhange hiermit steht dann die Gauss'sche Function $\Psi(x)$, die als Specialfall die Euler'sche Constante enthält, und mit deren Hilfe die annähernde Summirung der endlichen Reihe möglich wird. Das Umordnungsproblem endlich, welches, in Ermangelung des massgebenden Grenzwertes eines n -gliedrigen, unendlich fernen Reihen-Ausschnitts, nur für einige wenige Specialfälle behandelt zu werden pflegt — und das in einer Weise, die den wahren Sachverhalt mehr verhüllt als aufklärt, — lässt sich mit Hilfe des gedachten Grenzwertes allgemeiner und klarer lösen.

Die hierher gehörigen Sätze sind, wie eine Uebersicht der einschlägigen Litteratur weiterhin zeigen wird, an den verschiedensten Stellen zerstreut und fast ausschliesslich mit Hilfe der Infinitesimalrechnung hergeleitet. Insbesondere werden zur Ermittlung der Wertänderung der alternirenden harmonischen Reihe für den Fall, dass man auf p positive Glieder immer q negative folgen lässt, überall bestimmte Integrale herangezogen, so dass Herr Pringsheim, um solche Wertänderungen zu veranschaulichen, ein anderes Beispiel vorschlägt, bei dem die Integrale entbehrlich sind²⁾. Letzteres ist nun

1) Abhandlg. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1837. S. 48.

2) „Ueber die Wertveränderungen bedingt convergenter Reihen und Produkte“. Math. Annalen, Bd. XXII. (1883). S. 459.

aber, wie sich zeigen wird, auch bei der harmonischen Reihe der Fall, und damit ist das Umordnungsproblem der algebraischen Analysis in allgemeinerer Gestalt zugänglich gemacht, als man zunächst erwarten sollte. Denn ein noch zu erwähnender Satz von Herrn Schlömilch führt die Wertänderung, die eine ganz *beliebige* convergente alternirende Reihe bei der gedachten Umstellung der Glieder erfährt, auf die Wertänderung der *harmonischen* Reihe zurück, und dieser Satz lässt sich ohne Mühe für den Fall verallgemeinern, dass die Zahlen p und q variabel gemacht werden.

Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, dass von den allgemein üblichen, bequemen Ausdrücken „Umstellung der Glieder“, „veränderte Anordnung“ u. s. w. hier nur unter dem Vorbehalt Gebrauch gemacht wird, dass dieselben, wie schon Herr Natani¹⁾ hervorhebt, „im uneigentlichen Sinne zu verstehen“ seien.

Was als Veränderung der Anordnung bezeichnet wird, ist eigentlich die Bildung einer ganz neuen Reihe aus *ausgewählten* Gliedern der ursprünglichen und läuft auf das *Fortlassen einer i. A. unendlichen Anzahl unendlich ferner Glieder* hinaus.

Bei dieser Auffassung ist das logische Paradoxon hinfällig, dass die Reihenfolge der Summanden von Einfluss auf die Summe sein könne, oder, wenn man lieber will, es lässt sich der Begriff der Addition auch auf den Fall unendlich vieler Summanden übertragen, ohne das Vertauschungsgesetz aufzugeben. Um den Betrag jenes fortgelassenen Ausschnitts muss sich nun offenbar die Reihe summe (algebraisch) vermindern. Damit ist denn unmittelbar klar, dass eine solche Fortlassung bei *absolut* convergenten Reihen keine Veränderung der Summe bewirken kann, weil die Convergenz einer aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe eben durch das *Verschwinden jeder unendlich grossen Anzahl unendlich ferner Glieder* definiert ist. Eine Veränderung der Summe kann also nur bei *bedingt* convergenten Reihen vorkommen und wird gleichzeitig mit jenem Ausschnitte einen endlichen oder unendlich grossen Wert haben, in welchem letzteren Falle die neue Reihe divergirt. Auch bei *bedingt* convergenten Reihen ist indessen das Verschwinden des fraglichen Ausschnitts nicht ausgeschlossen, wie das Beispiel der Reihe

$$\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{2f(2)} + \frac{1}{3f(3)} - \frac{1}{4f(4)} + - \dots$$

zeigt, wo $f(n)$ eine beliebige, mit n beständig wachsende, aber nicht

1) Mathemat. Wörterbuch (begonnen v. L. Hoffmann). Art. „Reihe“. Bd. VI. S. 272.

stärker als $\log n$ unendlich werdende Function bedeutet. Leitet man aus ihr eine neue Reihe dadurch ab, dass man auf je ein positives Glied zwei negative Glieder folgen lässt, so entnimmt man aus den $4n$ ersten Gliedern zwar sämtliche $2n$ negativen, aber nur die ersten n positiven Glieder. Der fortgelassene n -gliedrige Ausschnitt

$$\frac{1}{(2n+1)f(2n+1)} + \frac{1}{(2n+3)f(2n+3)} + \dots + \frac{1}{(4n-1)f(4n-1)}$$

liegt zwischen

$$\frac{n}{(2n+1)f(2n+1)} \quad \text{und} \quad \frac{n}{(4n-1)f(4n-1)}$$

hat also für $n = \infty$ die Null zur Grenze, so dass die vorgenommene Umstellung die Summe der Reihe, trotz ihrer nur bedingten Convergence, unverändert lässt.

Der oben gegen die übliche Behandlungsweise ähnlicher specieller Umordnungen der harmonischen Reihe gerichtete Vorwurf bezieht sich darauf, dass nirgends von diesem Ausschnitt die Rede ist, der doch für jede endliche Gliederzahl den greifbaren Unterschied der beiden Anordnungen darstellt, und dessen Grenzwert leicht elementar zu finden ist.

L i t t e r a t u r .

Euler behandelt die endliche harmonische Reihe als Beispiel zu seiner Summenformel¹⁾, wobei die nach ihm benannte Constante c als Integrationsconstante auftritt. Die hier, Gleichung (22) für die allgemeine, Gleichung (28) für die specielle harmonische Reihe, gegebene Näherungsformel stimmt mit dem Anfang der Euler'schen halbconvergenten Entwicklung überein. (Vgl. Formel 28 a.)

Eulers Summation scheint das erste wirkliche Resultat in der Theorie der harmonischen Reihe zu sein. Er zählt dieselbe auch bereits neben der Facultät $1.2.3 \dots n$ zu den „inexplicablen“ Functionen, während Joh. Bernoulli noch auf die Summirung durch einen geschlossenen Ausdruck hoffte und Leibnitz um einen solchen anging²⁾. Als Bernoulli später in einer älteren Abhandlung Leibnitz' die Behauptung fand, man könne beliebig viele Glieder der harmonischen Reihe summiren, wiederholte er seine

1) Differential-Rechnung. II. § 142 ff.

2) Leibnitz' Mathemat. Werke, herausgeg. v. Gerhardt, III. S. 160. Brief vom 2. Febr. 1695. — Die bezügliche Stelle ist auch in Grunerts Archiv, Bd. XXVI S. 109 abgedruckt.

Bitte ¹⁾, Leibnitz musste indessen zugeben, er habe sich damals geirrt ²⁾.

Die Untersuchung der verallgemeinerten Facultät $\Pi(z)$ führt Gauss ³⁾ dazu, die logarithmische Ableitung derselben als besondere Function $\Psi(z)$ einzuführen, wobei $-\Psi(0)$ die Euler'sche Constante ist. Gleichzeitig wird für $\Psi(z)$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \dots - \frac{1}{z+n} \right] \\ = \sum_1^{\infty} \left(-\frac{1}{z+k} + \log \frac{k+1}{k} \right) \end{aligned}$$

gewonnen, dessen Zusammenhang mit der harmonischen Reihe ersichtlich ist.

Aus beiden Quellen fließen eine Anzahl Eigenschaften von $\Psi(z)$. Statt dieser ist hier (§ 5) die ganz ähnliche Function

$$C_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n} - \log(z+n)$$

definiert, deren Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ mit der Gauss'schen Function durch die Beziehung

$$C(z) = -\Psi(z-1), \quad \Psi(z) = -C(z+1)$$

verknüpft ist. Die Eigenschaften von $C(z)$ lassen sich leicht aus dieser Definition allein und ohne Hilfe höherer Rechnung ableiten (§ 6).

Herr Thomae berührt in seiner schon erwähnten Abhandlung über die Gauss'sche Reihe die Function $\Psi(z)$ nur flüchtig und beschränkt sich auf die Herleitung des Satzes, dass

$$\Psi(n) - \log n = H(n) = \frac{1}{2n} + \frac{\Theta(n)}{n}$$

wo $\Theta(n)$ mit wachsendem n verschwindet.

Eine ziemlich vollständige Theorie der Reihe giebt Herr Nattani ⁴⁾. Mit Hilfe bestimmter Integrale wird gezeigt, dass die Differenz

1) Brief vom 12. Sept. 1696. A. a. O. S. 327.

2) Briefe vom 6. Oct. und 6. Nov. 1696. — Vgl. auch die Einleitung Gerhards zum Briefwechsel, a. a. O. S. 119.

3) „Disquis. generales circa seriem infinitam etc.“ § 30. Comment. soc. Gotting. II. 1813. — Werke, III. Uebersetz. v. Simon, Berlin 1888.

4) Math. Wörterbuch. Art. „Reihe“. S. 284 ff.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \dots + \frac{1}{a+(n-1)b} - \frac{1}{b} \log(a+nb)$$

sich mit wachsendem n einem Grenzwerte $\varphi(a, b)$ nähert. Nach Gauss' Bezeichnung wäre also

$$b\varphi(a, b) = -\log b - \Psi\left(\frac{a-b}{b}\right)$$

Es wird eine schwach convergirende Reihe für $\varphi(a, b)$ entwickelt und daraus in $\varphi(1, 1)$ die Euler'sche Constante gewonnen. Die Summe der alternirenden Reihe wird durch die Function φ ausgedrückt. Die positiven und negativen Glieder dieser Reihe werden in Gruppen von p bzw. q Gliedern zu einer neuen Reihe zusammengefasst, die Summe derselben wird auf die der ursprünglichen Reihe zurückgeführt, und der Betrag der Wertänderung, die hier, wie es scheint, zum ersten Male als Ausschnitt einer divergenten Reihe dargestellt ist, durch ein bestimmtes Integral ermittelt.

Bevor auf die übrigen Behandlungen des Umordnungsproblems eingegangen wird, sind noch einige Arbeiten zu nennen, die darauf ausgehen, die endliche Reihe näherungsweise zu summieren.

Herr Catalan leitet ¹⁾ durch bestimmte Integrale die Einschliessung

$$c + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < c + \log n + \frac{1}{2n}$$

her, wo c die Eulersche Constante bedeutet. Die Uebereinstimmung der unteren Grenze mit den ersten Gliedern der Euler'schen Reihe wird merkwürdigerweise nicht hervorgehoben.

An einer anderen Stelle ²⁾ werden aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals Sätze abgeleitet, wonach Summen zwischen Integrale eingeschlossen werden. Bei der Anwendung auf die harmonische Reihe ergeben sich Formeln von geringer Annäherung bei ziemlich umständlicher Rechnung. So wird die Summe der ersten tausend Glieder noch in der ersten Decimalstelle falsch.

Auf elementarem Wege gehen dagegen die Herren Mansion und Cesaro vor. Der erstere gelangt ³⁾ mit Hilfe der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel zu der Einschliessung

1) „Sur la série harmonique“. Comptes Rendus de l'Acad. fr. 1856. II. S. 628.

2) „Traité élémentaire des séries“, 1860. Cap. IV.

3) „On the harmonic series and Stirling's formula“. Messenger of Math. XI. (1881) S. 38. — Auch Mathesis. I. S. 169.

$$\frac{1}{2n} < \sum_n^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$$

Die eingeschlossene Reihe convergirt demnach, und ihre Summe c liegt, für $n = 1$, zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$. Daraus ergibt sich weiter, dass

$$c + \log n + \frac{1}{2n+1} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < c + \log n + \frac{1}{2n}$$

Herr Cesaro gewinnt (dem Jahrbuch über die Fortschritte der Math. 1881 S. 199 zufolge) in einer mir nicht zugänglich gewesenen Arbeit ¹⁾ die Formeln

$$\log(n + \frac{1}{2}) + 0,57 < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \log(n + \frac{1}{2}) + 0,60$$

und

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = c + \log \sqrt{n(n+1)} + \frac{\Theta}{6n(n+1)} \quad (0 < \Theta < 1)$$

Eine (andere?) Herleitung der letzteren Formel giebt er noch in einer neueren Note ²⁾, wobei

$$c = 1 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^5} - \dots$$

gesetzt ist, also wol durch diese Entwicklung definiert sein und aus ihr berechnet werden soll. Zur Rechnung ist jene Formel wegen der Unbestimmtheit von Θ nicht sehr brauchbar; den besten Näherungswert würde $\Theta = 1$ liefern, da dann die rechte Seite, nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt, mit $c + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$ beginnt, wie in der Euler'schen Reihe.

Was die Wertveränderung der alternirenden harmonischen Reihe betrifft, so scheint Dirichlet, der an der schon angegebenen Stelle zuerst darauf hinwies, auch an anderen Orten keinen Beweis oder eine Ermittlung des Betrages jener Wertänderung mitgeteilt zu haben ³⁾. Vielmehr scheint die erste nähere Behandlung der Aufgabe von Ohm ⁴⁾ herzurühren, der aus der Reihe

1) *Mathesis*. I. S. 51 und S. 143.

2) „*Sur la série harm.*“. *Nouv. Annales de Math.* 1885. S. 295.

3) Vgl. Pringsheim, a. a. O. S. 456. Wenn daher Hr. Schlömilch in einer „*Notiz über die bedingt converg. Reihen*“ (*Ztschr. f. math. etc. Unterricht*. XII. (1881) S. 30) seinen Nachweis dem von Dirichlet angeblich an der citirten Stelle gegebenen als einfacher gegenüberstellt, so liegt vielleicht eine Verwechslung mit einer Vorlesung Dirichlets vor.

4) *De nonnullis seriebus infinitis summandis*. Berlin. 1839.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

mehre andere ableitet, indem er dem Verhältniss der Anzahl der positiven zu der der negativen Glieder verschiedene specielle Werte und endlich den Wert $m:n$ beilegt; die Reihen werden durch Integration summirt, und so wird schliesslich der Satz gewonnen, dass im allgemeinsten der behandelten Fälle die Reihensumme um $\frac{1}{2} \log \frac{m}{n}$ wächst. Bei einigen der speciellen Fälle wird nebenher darauf aufmerksam gemacht, dass die ursprüngliche und die umgestellte Reihe sich um eine Reihe von Gliedern unterscheiden, deren Summe denselben Grenzwert hat wie die Wertänderung ¹⁾).

Dieselbe Aufgabe wie Ohm behandelt Herr Schlömilch ²⁾ für die allgemeine harmonische Reihe, indem er zunächst die Summe der alternirenden Reihe durch ein bestimmtes Integral ausdrückt, und auch für die Wertänderung ein solches aufstellt und auswertet. Von der zweiten Auflage an wird die Untersuchung ausserdem noch auf eine beliebige, convergente alternirende Reihe erstreckt, wobei sich der Satz ergibt ³⁾, dass die mehrfach erwähnte Umstellung der Glieder der Reihensumme den Zuwachs $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n u_n) \log \frac{p}{q}$ zuführt.

Die elementare und noch etwas verallgemeinerte Herleitung dieses Satzes wird möglich mit Hilfe einer von Herrn Pringsheim ⁴⁾ gegebenen Methode, die Wertbestimmung eines unendlich fernen Ausschnitts einer divergenten Reihe positiver Glieder auf die des entsprechenden Ausschnitts einer andern solchen Reihe zurückzuführen. Denn wie Herr Pringsheim bemerkt, beruht der Schlömilch'sche Satz unmittelbar auf dem Verhalten der harmonischen Reihe, und der in Frage kommende Ausschnitt der letzteren wird elementar bestimmt werden.

Schliesslich ist noch der in vielen Lehrbüchern übereinstimmend gegebenen Behandlungen der Umordnungen der speciellen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ für $p = 1, q = 2$ und $p = 2, q = 1$ zu ge-

1) Wie die Anmerkung „Series infinitae nunquam non eodem valore gaudent, si adhuc manent convergentes, etiamsi omnes termini signo + (additionis) afficiantur“ (a. a. O. S. 14) zeigt, hat Ohm sehr wol gewusst, dass absolut convergente Reihen stets dieselbe Summe behalten. Vgl. dagegen Pringsheim, a. a. O. S. 456.

2) Uebungsbuch zum Studium d. höh. Analysis. II. Cap. V. § 23.

3) S. a. Ztschr. f. Math. u. Phys. XVIII (1873) S. 520.

4) A. a. O. S. 471.

denken, wobei die Summenänderung um $\frac{1}{2} \log 2$ elementar nachgewiesen wird ¹⁾. Inwiefern die dabei übliche Darstellung reformbedürftig erscheint, ist bereits ausgeführt worden.

1. **Aufstellung der Reihe.** Die Forderung, jedes Glied einer Reihe solle das arithmetische Mittel zwischen dem ihm vorhergehenden und dem ihm folgenden Gliede sein, führt zu der arithmetischen Reihe; soll jedes Glied das geometrische Mittel zwischen seinen Nachbargliedern sein, so gelangt man zur geometrischen Reihe; dieselbe Bedingung für das harmonische Mittel liefert die harmonische Reihe.

Wir stellen uns die Aufgabe, die allgemeine Form dieser Reihe zu ermitteln.

h_n ist das harmonische Mittel zwischen h_{n-1} und h_{n+1} , wenn die drei Grössen der stetigen harmonischen Proportion

$$(h_{n-1} - h_n) : (h_n - h_{n+1}) = h_{n-1} : h_{n+1}$$

genügen. Dies liefert

$$\frac{1}{h_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}} \right)$$

d. h., wenn man die reciproken Werte der Reihenglieder betrachtet, so ist jedes Glied das arithmetische Mittel zwischen seinen Nachbarn. Die reciproken Werte der Glieder bilden also eine arithmetische Reihe, so dass das allgemeine Glied der harmonischen Reihe die Form

$$h_n = \frac{1}{a + nb}$$

besitzt ²⁾. Lassen wir noch den Factor $\frac{1}{b}$ fort und setzen wir

1) So bei Schlömilch, Algebraische Analysis § 29. — Scheibner, Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz, Leipzig 1860, § 6. — Vgl. auch Lionnet, Note sur la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ Nouv. Annales de Math. 1879.

2) Wie es scheint, ist die eigentliche Begründung des Namens der harmonischen Reihe ziemlich in Vergessenheit geraten; sonst würde wol kaum Scheibner (Ueber unendliche Reihen § 20) die Reihe der Potenzen der reciproken ganzen Zahlen als harmonische Reihe bezeichnen und weiterhin gar (§ 21) dieselbe Benennung für die Reihen

$$f(x) = \sum_k \frac{u_k}{(a + bk)^x}$$

vorschlagen.

$$\frac{a}{b} = z$$

so schreibt sich die Reihe in einfachster Form

$$(1) \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^n h_k = \sum_0^n \frac{1}{z+k} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+n}$$

Dabei kann z jeden beliebigen, positiven oder negativen, reellen oder complexen Wert haben; ausgeschlossen seien nur Null und die negativen ganzen Zahlen, die eins der Glieder ∞ machen würden, sofern die Reihe von $k=0$ an in Betracht gezogen wird; auch diese Beschränkung fällt aber fort, wenn die Reihe erst mit einem so grossen k begonnen wird, dass $k+z \geq 1$ ist¹⁾.

Jede harmonische Reihe lässt sich leicht auf die angesetzte Form zurückführen. So ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \dots + \frac{1}{a+nb} \\ = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a/b} + \frac{1}{a/b+1} + \dots + \frac{1}{a/b+n} \right) = \frac{1}{b} S_n \left(\frac{a}{b} \right) \\ \frac{1}{a-kb} + \frac{1}{a-(k-1)b} + \dots + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a+lb} = \frac{1}{b} S_{l+k} \left(\frac{a}{b} - k \right) \end{aligned}$$

und die Reihe der reciproken natürlichen Zahlen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = S_{n-1}(1)$$

2. Grenzen für den Ausschritt $S_n(z) - S_m(z)$. Die Reihen-Entwickelungen

$$\log(1+x) = x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots \right) \quad \left| x \right| < 1$$

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right)$$

liefern

$$\log(1+x) < x < \log \frac{1}{1-x}$$

Setzen wir hierin

$$x = \frac{1}{k+z}$$

1) Als Summationsbuchstabe gilt, wofern nichts anderes angegeben ist, überall k .

indem wir k positiv und so gross voraussetzen, dass $\left| k+z \right| \geq 1$ ist, so erhalten wir

$$\log \frac{k+1+z}{k+z} < \frac{1}{k+z} < \log \frac{k+z}{k-1+z}$$

und wenn wir hier nach und nach k die ganzzahligen Werte $m+1$, $m+2$, \dots , n annehmen lassen und die so entstehenden Ungleichungen addiren

$$(2) \quad \log \frac{n+1+z}{m+1+z} < \sum_{m+1}^n \frac{1}{k+z} < \log \frac{n+z}{m+z} \quad \left| m+1+z \right| \geq 1$$

Ist z reell, so ist die Geltungsbedingung erfüllt

bei $z = -\infty \dots -2$	für $m = 0, 1, 2 \dots$
$z = -2 \dots -1$	$m = 2, 3, \dots$
$z = -1 \dots 0$	$m = 1, 2, \dots$
$z = 0] \dots +\infty$	$m = 0, 1, 2, \dots$

immer vorausgesetzt, dass verschwindende Nenner ($k+z$) vermieden werden.

Ist z complex, etwa gleich $x+yi$, wo also y nicht 0 ist, so kann für die Werte $x = -\infty \dots -2$ und $x = 0 \dots +\infty$, bei ganz beliebigem y , $m = 0, 1, 2, \dots$ sein. Hat aber x einen der Werte zwischen -2 und 0 , die Grenzen ausgeschlossen, und ist k die kleinste ganze Zahl, für die

$$y^2 \geq -2(k+x) - (k+x)^2$$

erfüllt ist, so kann $m = k, k+1, \dots$ gesetzt werden.

3. Divergenz der Reihe. Lassen wir in (2) n unendlich werden, während m endlich bleibt, so werden beide Grenzen für $S_n - S_m$ unendlich, also auch S_n selbst.

Die Formel giebt zugleich eine gute Vorstellung davon, wie ausserordentlich langsam die Reihe divergirt. Denn es ist für $n=2m$

$$\sum_{m+1}^{2m} \frac{1}{k+z} < \log 2$$

Wie gross man auch m wählen möge — die Summe der m ersten Glieder wächst durch die Summe der nächsten m Glieder stets um weniger als $\log 2 = 0,69 \dots$. Denkt man also die Reihe in Gruppen von je m Gliedern zerlegt, so ist die Summe der zweiten Gruppe $< \log 2$, die Summe der folgenden beiden Gruppen wieder $< \log 2$,

ebenso die Summe der auf sie folgenden 4 Gruppen, dann der nächsten 8 Gruppen u. s. w. Trotzdem wächst die Summe ins Grenzenlose.

Die Divergenz der harmonischen Reihe liefert ferner einen Beleg dafür, dass es zur Convergenz auch von Reihen mit *wechselnden* Vorzeichen nicht ausreicht, wenn das n te Glied die Null zur Grenze hat. Denn zerlegt man jedes Glied der Reihe nach dem Muster

$$\frac{1}{k+z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k+z+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+z+1}+1} \right)$$

so erhält man die divergente Reihe ¹⁾

$$\begin{aligned} 2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{k+z} &= \frac{1}{\sqrt{z+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{z+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{z+2}-1} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{z+2}+1} + \dots \end{aligned}$$

4. Endlicher Wert des Ausschnitts. Wird mit n auch m unendlich, aber so, dass $\lim \frac{n}{m}$ endlich bleibt, so fallen in (2) beide Grenzen zusammen, und wir erhalten unmittelbar den sonst nur durch einen Uebergang zum bestimmten Integral hergeleiteten Satz

$$(3) \quad \lim (S_n - S_m) = \lim \sum_{m+1}^n \frac{1}{k+z} = \log \left(\lim \frac{n}{m} \right) \quad \begin{matrix} n = \infty \\ m = \infty \end{matrix}$$

Sind z. B. n und m ganze und ganzzahlige Functionen gleich hohen Grades einer unendlich werdenden Veränderlichen w , so ist $\lim \frac{n}{m}$ der Quotient der Coefficienten der höchsten Potenz. So hat man ohne Weiteres

$$\lim_{w = \infty} \sum_{q_1 w + q_0}^{p_1 w + p_0} \frac{1}{k+z} = \log \frac{p}{q}$$

und wenn $f_1(w)$ und $f_2(w)$ ganzzahlige Werte sonst beliebiger Functionen sind

$$\lim_{w = \infty} \sum_{f_1(w)}^{f_2(w)} \frac{1}{ak+z} = \frac{1}{a} \lim \sum \frac{1}{k+\frac{z}{a}} = \frac{1}{a} \log \left(\lim \frac{f_2(w)}{f_1(w)} \right)$$

Die erstere Formel allein reicht aus, um die Wertveränderung zu ermitteln, die die Reihe

1) Dieselbe findet sich, für $z = 1$, bei Catalan, *Trakté élém. des séries*. Cap. II. § XV.

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - + \dots$$

erfährt, wenn immer p positive Glieder mit q negativen abwechseln (§ 11).

Als eine einfache Anwendung diene die Summirung der Reihe

$$\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+n} \right) - \frac{1}{z+1} + \left(\frac{1}{z+n+1} + \dots + \frac{1}{z+2n} \right) - \frac{1}{z+2} + - \dots \text{ in inf.}$$

Dieselbe ist die Grenze des Ausdrucks

$$\sum_1^{mn} \frac{1}{z+k} - \sum_1^m \frac{1}{z+k} = \sum_{m+1}^{mn} \frac{1}{z+k}$$

für $m = \infty$, somit hat man

$$\sum_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+(k-1)n+1} + \frac{1}{z+(k-1)n+2} + \dots + \frac{1}{z+kn} - \frac{1}{z+k} \right\} = \log n$$

wobei z ganz beliebig bleibt¹⁾.

1) Für $n = 2$ erhält man nach dem Obigen die Formel

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z+2k-1} + \frac{1}{z+2k} - \frac{1}{z+k} \right) = \log 2$$

die von Herrn Catalan gegeben ist (Nouv. Corresp. math. I. 1879). — Lässt man n unbestimmt, setzt aber $z = 0$ und schreibt statt $\frac{1}{nk} - \frac{1}{k}$ noch $-\frac{n-1}{nk}$, so kommt, zunächst für endliches m ,

$$\sum_1^m \left\{ \frac{1}{(k-1)n+1} + \frac{1}{(k-1)n+2} + \dots + \frac{1}{kn-1} - \frac{n-1}{kn} \right\} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{nm}$$

woraus sich z. B. für $n = 2$ die ebenfalls Catalan'sche Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m}$$

ergibt, von der gleich Gebrauch gemacht werden wird. Wächst aber nun m ins Unendliche, so erhält man links eine schon von Euler gegebene Reihe für $\log n$ (Integralrechnung II. § 147. Auch bei Lacroix, *Traité du calcul diff. et int.* III. § 1003).

Bei der Wichtigkeit der Formel (3) möge sie noch auf folgende Art *direct* abgeleitet werden.

Zunächst ist ersichtlich, dass der gesuchte Grenzwert von

$$\sum_{m+1}^n \frac{1}{k+z} = \sum_{m+1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{1+\frac{z}{k}}$$

wenn er existirt, zwischen

$$\frac{1}{1+\frac{z}{m+1}} \sum \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+\frac{z}{n}} \sum \frac{1}{k}$$

liegen muss, also für $m = \infty$, $n = \infty$, mit

$$\lim \sum_{m+1}^n \frac{1}{k} = \lim \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

übereinstimmt Diese Summe liegt nun zwischen

$$\frac{n-m}{m+1} \quad \text{und} \quad \frac{n-m}{n}$$

oder zwischen

$$\frac{\frac{n}{m}-1}{1+\frac{1}{m}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{n}{m}-1}{\frac{n}{m}}$$

bleibt also endlich mit $\lim \frac{n}{m} = t$ und wird eine Function von t sein. Setzen wir daher

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{tm} \right) = f(t)$$

so haben wir

$$\begin{aligned} f(2t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m} \right) \\ &+ \lim_{2m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2m+1} + \dots + \frac{1}{t \cdot 2m} \right) = f(2t) + f(t) \end{aligned}$$

Nach einer schon erwähnten, von Herrn Catalan herrührenden Formel ¹⁾ ist aber

1) Sie lässt sich leicht so herleiten:

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2m} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

$$f(2) = \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2m} \right) = \log 2$$

also

$$f(2t) = \log 2 + f(t)$$

Setzen wir $f(t) = \log \varphi(t)$ und gehen wir zu den Zahlen über, so kommt $\varphi(2t) = 2\varphi(t)$; die Functionswerte von $\varphi(t)$ sind also proportional den Argumenten, d. h. $\varphi(t)$ ist rein linear, etwa $= at$. Die Constante a ergibt sich aus $f(2) = \log 2a = \log 2$, und wir erhalten

$$f(t) = \log t = \log \left(\lim \frac{n}{m} \right)$$

5. Die Function $C_k(x)$ und ihr Grenzwert $C(x)$. Für grosse Werte von n und m wird nach (3) annähernd die Gleichung

$$S_n - S_m = \log n - \log m$$

gelten, oder

$$S_n - \log n = S_m - \log m$$

sein, u. z. werden diese Differenzen einander um so näher kommen, je mehr n und m wachsen. Wenn nun zwar hieraus noch nicht zu schliessen sein dürfte¹⁾, dass die Differenz $S_n - \log n$ sich bei unbegrenzt wachsendem n einer von n unabhängigen Grenze nähert, so lässt sich doch die Existenz dieser Grenze folgendermassen zeigen.

Wählen wir m so gross, dass nach (2)

$$\log \frac{n+z+1}{m+z+1} < S_n(z) - S_m(z) < \log \frac{n+z}{m+z}$$

gilt, und subtrahiren wir überall

$$\log(n+z) - \log(m+z)$$

so folgt

$$\begin{aligned} & - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2m} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ & + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

Für $m = \infty$ hat man hieraus unmittelbar

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \right) = \log 2$$

was auf anderem Wege Herr Unferdinger bewiesen hat. (Sitzgsbr. der Wiener Akad. 1867. Bd. 55. II. S. 93.)

1) Wie es bei Natani, Math. Wörterb., Art. „Reihe“, Bd. VI. S. 284 f. geschieht.

$$\log \frac{n+z+1}{n+z} - \log \frac{m+z+1}{m+z} < \\ [S_n(z) - \log(n+z)] - [S_m(z) - \log(m+z)] < 0$$

oder, wenn wir die Bezeichnung

$$S_k(z) - \log(k+z) = C_k(z)$$

einführen,

$$\log \left(1 + \frac{1}{n+z} \right) + C_m(z) - \log \left(1 + \frac{1}{m+z} \right) < C_n(z) < C_m(z)$$

Bei festem m nähert sich für wachsendes n das erste Glied linker Hand der Null, $C_n(z)$ bleibt also zwischen endlichen Grenzen, die sich um

$$\log \left(1 + \frac{1}{m+z} \right)$$

unterscheiden. Da nun dies endliche Intervall durch Vergrößerung von m beliebig verkleinert werden kann, so nähert sich $C_n(z)$ mit wachsendem n , beständig abnehmend, einem nur noch von z abhängigen Grenzwert $C(z)$.

Derselben Grenze strebt offenbar auch

$$S_n - \log n = S_n - \log(n+z) + \log \left(1 + \frac{z}{n} \right)$$

zu.

6. Haupteigenschaften von $C(z)$. Aus der Definition

$$C_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n} - \log(z+n)$$

folgt unmittelbar

$$(4) \quad C(z) - C(y) = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{y+1} + \dots$$

also

$$(5) \quad C(z) - C(z+1) = \frac{1}{z}$$

$$(6) \quad C(z+m) = C(z) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+m-1} \right)$$

$$(7) \quad C(z-m) = C(z) + \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \dots + \frac{1}{z-m} \right)$$

Für $z = 1$ liefert (6)

$$(8) \quad C(m+1) = C(1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right)$$

so dass $C(z)$ für positive ganzzahlige Werte von z durch $C(1)$ und die specielle harmonische Reihe bestimmt werden kann. Dabei ist

$$C(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right]$$

die Euler'sche Constante, auf deren Berechnung weiterhin noch eingegangen wird.

Für $z = 0$ oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist nach (4) $C(z) = \infty$.

Für $y = 1 - z$ liefert (4) die bekannte Reihe

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - + \dots = \pi \cotg \pi z$$

so dass

$$(9) \quad C(z) - C(1-z) = \pi \cotg \pi z$$

Da $\cotg \pi z$ für $z = \frac{2m+1}{2}$ verschwindet, so hat man hiernach für ganzzahlige, positive oder negative m

$$(10) \quad C\left(m + \frac{1}{2}\right) = C\left(-m + \frac{1}{2}\right)$$

und da für $z = \frac{4m+1}{4}$
 $\cotg \pi z = 1$ ist,

$$(11) \quad C\left(m + \frac{1}{4}\right) - C\left(-m + \frac{3}{4}\right) = \pi$$

Aus

$$C_n\left(z + \frac{k}{m}\right) = m \left[\frac{1}{mz+k} + \frac{1}{mz+k+m} + \frac{1}{mz+k+2m} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{mz+k+nm} \right] - \log \frac{nm+mz+k}{m}$$

folgt, wenn wir über $k = 1, 2 \dots m$ summieren

$$\sum_1^m C_n\left(z + \frac{k}{m}\right) = m \left[\sum_1^m \frac{1}{mz+k} + \sum_{m+1}^{2m} \frac{1}{mz+k} + \sum_{2m+1}^{3m} \frac{1}{mz+k} \right. \\ \left. + \dots + \sum_{nm+1}^{(n+1)m} \frac{1}{mz+k} \right] - \sum_1^m \log \frac{mn+mz+k}{m} \\ = m \sum_1^{nm+m} \frac{1}{mz+k} - \sum_1^m \log(nm+mz+k) + m \log m$$

Nun ist

$$\sum_1^{nm+m} \frac{1}{mz+k} = S(mz+1) = C(mz+1) + \log(nm+mz+m)$$

wir können also schreiben

$$\sum_1^m C_n \left(z + \frac{k}{m} \right) = mC(mz+1) + m \log m + \sum_1^m \log \frac{nm+mz+m}{nm+mz+k}$$

und da für $n = \infty$ jedes der m Glieder der letzteren Summe verschwindet, ergibt sich

$$(12) \quad \sum_1^m C \left(z + \frac{k}{m} \right) = mC(mz+1) + m \log m$$

Hieraus für $z = 0$

$$(13) \quad \sum_1^{m-1} C \left(\frac{k}{m} \right) = (m-1)C(1) + m \log m$$

Beispiele. Für $m = 2$ ist nach (13)

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = C(1) + 2 \log 2$$

dann nach (5)

$$C\left(\frac{3}{2}\right) = C\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = C(1) + 2 \log 2 - 2$$

Für $m = 3$ kommt

$$C\left(\frac{1}{3}\right) + C\left(\frac{2}{3}\right) = 2C(1) + 3 \log 3$$

dazu aus (9)

$$C\left(\frac{1}{3}\right) - C\left(\frac{2}{3}\right) = \pi \cotg \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \sqrt{3}$$

so dass

$$C\left(\frac{1}{3}\right) = C(1) + \frac{3}{2} \log 3 + \frac{\pi}{6} \sqrt{3}, \quad C\left(\frac{2}{3}\right) = C(1) + \frac{3}{2} \log 3 - \frac{\pi}{6} \sqrt{3}$$

$m = 4$ liefert

$$C\left(\frac{1}{4}\right) + C\left(\frac{3}{4}\right) + C\left(\frac{2}{4}\right) = 3C(1) + 4 \log 4$$

also, da $C\left(\frac{1}{2}\right)$ bekannt ist,

$$C\left(\frac{1}{4}\right) + C\left(\frac{3}{4}\right) = 2C(1) + 6 \log 2.$$

Mit Hilfe von

$$C\left(\frac{1}{4}\right) - C\left(\frac{3}{4}\right) = \pi \cotg \frac{\pi}{4} = \pi$$

ergibt sich

$$C\left(\frac{1}{4}\right) = C(1) + 3 \log 2 + \frac{\pi}{2}, \quad C\left(\frac{3}{4}\right) = C(1) + 3 \log 2 - \frac{\pi}{2}$$

Für $m = 6$ findet sich

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = C(1) + 2\log 2 + \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$$

$$C\left(\frac{2}{3}\right) = C(1) + 2\log 2 + \frac{3}{2}\log 3 - \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$$

Wie man sieht, gelingt es schon mit Hilfe der entwickelten Formeln, die Werte $C\left(\frac{1}{m}\right)$, $C\left(\frac{2}{m}\right)$, ... $C\left(\frac{m-1}{m}\right)$, für $m = 2, 3, 4, 6$ durch $C(1)$, Logarithmen und Teile der Peripherie darzustellen. Für $m = 5$ aber erhält man nur

$$C\left(\frac{1}{5}\right) + C\left(\frac{2}{5}\right) = 2C(1) + \frac{1}{2}\log 5 + \frac{\pi}{2}\left(\cotg \frac{\pi}{5} + \cotg \frac{2\pi}{5}\right)$$

und

$$C\left(\frac{3}{5}\right) + C\left(\frac{4}{5}\right) = 2C(1) + \frac{1}{2}\log 5 - \frac{\pi}{2}\left(\cotg \frac{\pi}{5} + \cotg \frac{2\pi}{5}\right)$$

ohne dass zunächst eine weitere Trennung möglich ist. Ebenso kommt

$$C\left(\frac{1}{8}\right) + C\left(\frac{3}{8}\right) = 2C(1) + 8\log 2 + \frac{\pi}{2}\left(\cotg \frac{\pi}{8} + \cotg \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$C\left(\frac{5}{8}\right) + C\left(\frac{7}{8}\right) = 2C(1) + 8\log 2 - \frac{\pi}{2}\left(\cotg \frac{\pi}{8} + \cotg \frac{3\pi}{8}\right)$$

Um nun $C(z)$ für ganz beliebige rationale z im Intervall $0 < z < 1$ darzustellen, hat Gauss ¹⁾ independente Formeln, u. z. ohne Benutzung höherer Rechnung, abgeleitet, die sich nach unserer Bezeichnung schreiben lassen:

$$C\left(\frac{n}{m}\right) = C(1) + \frac{\pi}{2} \cotg \frac{n\pi}{m} + \log m - 2 \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{2k\pi n}{m} \log \left(2 \sin \frac{k\pi}{m}\right)$$

für ungerade m

(14)

$$C\left(\frac{n}{m}\right) = C(1) + \frac{\pi}{2} \cotg \frac{n\pi}{m} + \log m - 2 \sum_1^{\frac{m-2}{2}} \cos \frac{2k\pi n}{m} \log \left(2 \sin \frac{k\pi}{m}\right) \\ + (-1)^{n+1} \log 2 \quad \text{für gerade } m$$

Da nun mit Hilfe von (6) und (7) die Werte von $C(z)$ für alle rationalen $z > 1$ auf $C(z)$ mit echt gebrochenem Argument zurückzuführen sind, so können wir mit Gauss den Satz aussprechen,

1) Disquis. gener. § 33. Formel (74) und (75).

dass sich $C(z)$, für alle rationalen, positiven oder negativen Werte von z , durch die Euler'sche und Ludolfsche Constante, sowie durch Logarithmen bestimmen lässt.

Am Schluss der Gauss'schen Disquis. gener. findet sich eine von Nicolai berechnete Tafel der numerischen Werte von $-C(z+1)$ für $z = 0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \dots, \frac{99}{100}, 1$. Zieht man diese Werte von $\frac{1}{z}$ ab, so erhält man nach (5) die Tafel der Werte von $C(z)$ für dasselbe Intervall.

Die zweite der Formeln (14) lässt sich noch zusammenziehen. Sei $m = 2\mu$, und fassen wir in

$$\sum_1^{\mu-1} \cos \frac{k\pi n}{\mu} \log \left(2 \sin \frac{k\pi}{2\mu} \right)$$

das erste und letzte, zweite und vorletzte u. s. w. Glied zusammen, so kommt allgemein

$$\begin{aligned} \cos \frac{k\pi n}{\mu} \log 2 \sin \frac{k\pi}{2\mu} + \cos \frac{(\mu-k)\pi n}{\mu} \log 2 \sin \frac{(\mu-k)\pi}{2\mu} \\ = \cos \frac{k\pi n}{\mu} \log 2 \sin \frac{k\pi}{2\mu} + \cos \left(n\pi - \frac{k\pi n}{\mu} \right) \log 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2\mu} \right) \end{aligned}$$

und wenn wir voraussetzen, dass $\frac{n}{m}$ in kleinsten Zahlen gegeben sei, so dass n ungerade und $\cos n\pi = -1$ ist, wird dies

$$= \cos \frac{k\pi n}{\mu} \log \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2\mu}$$

Ist die Gliederanzahl $(\mu-1)$ gerade, so haben wir $\frac{\mu-1}{2}$ umzufordernde Gliederpaare, ist aber μ gerade, so ist ein Mittelglied für $k = \frac{\mu}{2}$ vorhanden, dessen Wert

$$\cos \frac{n\pi}{2} \log 2 \sin \frac{\pi}{4} = 0$$

ist. Demnach wird

$$(14a) \quad C\left(\frac{n}{m}\right) = C(1) + \frac{\pi}{2} \cot \operatorname{tg} \frac{n\pi}{m} + \log(2m) - 2 \sum \cos \frac{k\pi n}{m/2} \log \operatorname{tg} \frac{k\pi}{m}$$

(n ungerade, m gerade; $k = 1, 2, 3 \dots \frac{m-4}{4}$ oder $\frac{m-2}{4}$)

Nachstehende Tafel giebt eine Uebersicht einiger Fälle, in denen

sich $C(z)$ verhältnissmässig einfach ausdrückt; dabei gilt das obere Wurzelzeichen stets für den in der ersten Spalte voranstehenden Wert von z .

z	$C(z)$
1	c
$\frac{1}{2}$	$c + 2 \log 2$
$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	$c + \frac{1}{2} \log 3 \pm \frac{\pi}{6} \sqrt{3}$
$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	$c + 3 \log 2 \pm \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$	$c + \frac{1}{2} \log 5 + \frac{\sqrt{5}}{4} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2} \cotg \frac{\pi}{5}$
$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$	$c + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{\sqrt{5}}{4} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2} \cotg \frac{2\pi}{5}$
$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$	$c + 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{3}$
$\frac{1}{8}, \frac{7}{8}$	$c + 4 \log 2 - \sqrt{2} \log(\sqrt{2} - 1) \pm \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} + 1)$
$\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$	$c + 4 \log 2 + \sqrt{2} \log(\sqrt{2} - 1) \pm \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} - 1)$
$\frac{1}{10}, \frac{9}{10}$	$c + 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 5 + \frac{1}{2} \sqrt{5} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2} \cotg \frac{\pi}{10}$
$\frac{3}{10}, \frac{7}{10}$	$c + 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \sqrt{5} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2} \cotg \frac{3\pi}{10}$
$\frac{1}{12}, \frac{11}{12}$	$c + 3 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \sqrt{3} \log(2 - \sqrt{3}) \pm \frac{\pi}{2} (2 + \sqrt{3})$
$\frac{5}{12}, \frac{7}{12}$	$c + 3 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 + \sqrt{3} \log(2 - \sqrt{3}) \pm \frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{3})$

7. Reihen für $C(z)$. Schreiben wir der Kürze wegen

$$\frac{1}{k+z} = h_k$$

also

$$C_k(z) = S_k(z) + \log h_k$$

so ist, immer z als Argument gedacht,

$$C_{k-1} - C_k = S_{k-1} + \log h_{k-1} - S_k - \log h_k = -h_k + \log \frac{h_{k-1}}{h_k}$$

Je nachdem wir nun

$$\frac{h_{k-1}}{h_k} = \frac{k+z}{k+z-1} = 1 + \frac{1}{k+z-1}$$

oder

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{k+z}}$$

schreiben, erhalten wir einen der Ausdrücke

$$C_{k-1} - C_k = -h_k + \log[1 + h_{k-1}]$$

$$C_{k-1} - C_k = -h_k - \log[1 - h_k]$$

Jeder derselben führt zu einer Reihen-Entwicklung für C .

Die erste Form liefert entwickelt

$$C_{k-1} - C_k = -h_k + h_{k-1} - \frac{1}{2} h_{k-1}^2 + \frac{1}{3} h_{k-1}^3 - + \dots$$

und wenn wir über $k = m+1, m+2, \dots, n$ summieren,

$$C_m - C_n = h_m - h_n - \frac{1}{2} \sum_{m+1}^n h_{k-1}^2 + \frac{1}{3} \sum_{m+1}^n h_{k-1}^3 - + \dots$$

Benutzen wir, dass allgemein

$$\sum_{m+1}^n u_{k-1} - \sum_m^{n-1} u_k = \sum_{m+1}^n u_k + u_m - u_n$$

ist, so sondern sich aus jeder der rechts stehenden Summen Ausdrücke von der Form

$$\frac{(-1)^{p+1}}{p} (h_m^p - h_n^p)$$

aus, die mit der Differenz $(h_m - h_n)$ zu $\log(1 + h_m) - \log(1 + h_n)$ verschmelzen. Somit wird

$$(15) \quad C_m(z) - C_n(z) = \log \frac{1 + h_m}{1 + h_n} - \frac{1}{2} \sum_{m+1}^n h_k^2 + \frac{1}{3} \sum_{m+1}^n h_k^3 - + \dots$$

Der zweite Ausdruck

$$C_{k-1} - C_k = -h_k - \log(1 - h_k) = \frac{1}{2} h_k^2 + \frac{1}{3} h_k^3 + \dots$$

ergibt, wenn wieder über $k = m+1 \dots n$ summirt wird,

$$(16) \quad C_m(z) - C_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{m+1}^n h_k^2 + \frac{1}{3} \sum_{m+1}^n h_k^3 + \dots$$

Beide Reihen ¹⁾ lassen sich zu einer dritten, rascher convergirenden, vereinigen; wir erhalten durch Addition sofort

$$(17) \quad C_m(z) - C_n(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+h_m}{1+h_n} + \frac{1}{2} \sum_{m+1}^n h_k^3 + \frac{1}{2} \sum_{m+1}^n h_k^5 + \dots$$

und hieraus für $n = \infty$, da $h_\infty = 0$

$$(18) \quad C_m(z) - C(z) = \frac{1}{2} \log(1+h_m) + \frac{1}{2} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^3 + \frac{1}{2} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^5 + \dots$$

wodurch, unter der Bedingung $\left| m+z+1 \right| \geq 1$ die Berechnung von $C(z)$ auf die von $C_m(z) = S_m(z) + \log h_m$ zurückgeführt ist. Ist der reelle Teil von z einer der Werte $-\infty \dots -2, 0 \dots +\infty$, so darf (nach § 2) $m = 0, 1 \dots \infty$ gesetzt werden. So ergibt sich z. B. für $m = 0$, wo

$$C_0(z) = \frac{1}{z} + \log \frac{1}{z} \quad \text{ist,}$$

$$(19) \quad C(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \log z(z+1) - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(k+z)^3} - \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(k+z)^5} - \dots$$

Man kann unmittelbar zu der Entwicklung (17) gelangen, wenn man von dem Ausdruck

$$C_{k-1} - C_{k+1} = -h_k - h_{k+1} + \log \frac{1+h_k}{1-h_k}$$

ausgeht, denselben auf die Form bringt

$$C_{k-1} - C_{k+1} = h_k - h_{k+1} + 2\left[\frac{1}{2}h_k^3 + \frac{1}{2}h_k^5 + \dots\right]$$

über $k = m+1 \dots n$ summirt und beachtet, dass

$$C_{m+1} = C_m + h_{m+1} - \log(1+h_m)$$

ist.

Die Convergenz der Reihen, die in den Formeln (15) bis (19), zum Teil stückweise, auftreten, kann zwar als bekannt vorausgesetzt werden, mag hier aber noch in einer Weise gezeigt werden, die zugleich brauchbare Grenzeinschliessungen für die Berechnung derselben liefert.

Bekanntlich ²⁾ gilt für positive a und p die Einschliessung

$$p(a+1)^{p-1} > (a+1)^p - a^p > pa^{p-1}$$

1) Eine mit (15) im wesentlichen übereinstimmende Reihe findet sich bei Natani „Reihe“, a. a. O.

2) Vgl. z. B. Schlömilch, Übungsbuch, I. S. 3. f.

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem $p > 1$ ist. Durch Division mit $pa^p(a+1)^p$ kommt

$$\frac{1}{a^p(a+1)} > \frac{1}{p} \left[\frac{1}{a^p} - \frac{1}{(a+1)^p} \right] > \frac{1}{a(a+1)^p}$$

Zur Verstärkung der oberen Ungleichung ist links a für $a+1$, rechts $a+1$ für a zu setzen; die untere Ungleichung wird aber durch die umgekehrte Substitution stärker, so dass beide die gemeinsame Form annehmen

$$\frac{1}{a^{p+1}} > \frac{1}{p} \left[\frac{1}{a^p} - \frac{1}{(a+1)^p} \right] > \frac{1}{(a+1)^p}$$

Schreiben wir noch in dem zweiten Teil dieser Einschliessung $a-1$ für a , so erhalten wir für $\frac{1}{a^{p+1}}$ die Begrenzung

$$\frac{1}{p} \left[\frac{1}{a^p} - \frac{1}{(a+1)^p} \right] < \frac{1}{a^{p+1}} < \frac{1}{p} \left[\frac{1}{(a-1)^p} - \frac{1}{a^p} \right]$$

Jetzt werde $a = z+k$ gesetzt und über die Werte $k = m+1 \dots n$ summiert; dann ergibt sich

$$\begin{aligned} 20) \quad \frac{1}{p} \left[\frac{1}{(z+m+1)^p} - \frac{1}{(z+n+1)^p} \right] &< \sum_{m+1}^n \frac{1}{(z+k)^{p+1}} \\ &< \frac{1}{p} \left[\frac{1}{(z+m)^p} - \frac{1}{(z+n)^p} \right] \end{aligned}$$

und für $n = \infty$

$$(21) \quad \frac{1}{p} h_{m+1}^p < \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{p+1} < \frac{1}{p} h_m^p$$

Damit ist der bekannte Satz bewiesen, dass für jeden Wert $p > 0$ die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(k+z)^{p+1}}$$

convergiert; die in den Formeln (15) bis (19) auftretenden Reihen — auch in (15) und (16) kann ja $n = \infty$ werden — sind besondere Fälle derselben. Der Fehler, den man begeht, wenn man statt der Summe eine der beiden einschliessenden Grenzen setzt, ist kleiner als die Differenz der letzteren und mithin, nach dem eben benutzten Hilfssatz, sicher kleiner als h_m^{p+1} .

Was die Convergenz der Doppel-Reihen für $C_m \dots C_n$, bzw. für $C_m - C$ betrifft, so bedarf es des Beweises nur für die zweite derselben (16), da mit ihr sicher auch (15) und (17) convergieren. Dass aber die Reihe

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^\lambda$$

convergiert, ist leicht ersichtlich. Denn es ist

$$\sum_{m+1}^{\infty} h_k^{\lambda+1} = \sum_{m+1}^{\infty} h_k \cdot h_k^\lambda < h_{m+1} \cdot \sum_{m+1}^{\infty} h_k^\lambda$$

Der massgebende Quotient der Reihe ist also kleiner als $\frac{\lambda}{\lambda+1} h_{m+1}$, bleibt mithin auch für $\lambda = \infty$ ein echter Bruch.

Die Formeln (20) und (2) lassen sich auch erhalten als besondere Fälle des Satzes

$$\int_{m+1}^{n+1} f(x) dx < f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n) < \int_m^n f(x) dx$$

der unter der Voraussetzung gilt, dass $f(x)$ positiv ist und im Intervall $x = m \dots n+1$ nie zunimmt, und der sich leicht aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals ergibt. In der Tat braucht man nur $f(x)$ die Werte h_x^{p+1} und h_x zu erteilen, um zu jenen Formeln zu gelangen.

8. Grenzeinschliessung von $C(z)$. Wenden wir die Formel (21) auf (18) an, also auf die Gleichung

$$C_m - C = \frac{1}{2} \log(1 + h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{2p+1}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(1 + h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{m+1}^{2p}}{2p(2p+1)} &< C_m - C \\ &< \frac{1}{2} \log(1 + h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_m^{2p}}{2p(2p+1)} \end{aligned}$$

Beide Grenzen lassen sich leicht nach Potenzen von h_m entwickeln; mit Rücksicht auf

$$h_{m+1} = \frac{h_m}{1+h_m} = h_m - h_m^2 + h_m^3 - \dots$$

findet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_m - \frac{1}{12} h_m^2 - \frac{1}{6} h_m^3 + \frac{17}{40} h_m^4 - \dots &< C_m - C < \frac{1}{2} h_m - \frac{1}{12} h_m^2 \\ &+ \frac{1}{6} h_m^3 - \frac{3}{40} h_m^4 + \dots \end{aligned}$$

Die Differenz beider Grenzen beginnt mit

$$\frac{1}{3}h_m^3 - \frac{1}{2}h_m^4$$

wenn man also

$$(22) \quad C_m(z) - C(z) = S_m(z) - \log(m+z) - C(z) \\ = \frac{1}{3}h_m^3 - \frac{1}{12}h_m^2$$

setzt, begeht man einen Fehler, der sicher kleiner als $\frac{1}{6}h_m^3$ ist, der also durch Vergrößerung von m beliebig verkleinert werden kann.

Tatsächlich ist übrigens die Annäherung der Formel (22) erheblich grösser, als es aus den obigen Rechnungen zu erkennen ist. Denn die Reihe ¹⁾

$$(22a) \quad \frac{d \log \Gamma(z+1)}{dz} = \Psi(z) = -C(z+1) \\ = -\log z + \frac{1}{2z} - \frac{B_2}{2z^2} + \frac{B_4}{4z^4} - \frac{B_6}{6z^6} + \dots$$

wo die B die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten, liefert, wenn nur die drei ersten Glieder berücksichtigt werden,

$$C(z+1) = -\log z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{12z^2}$$

also nach (5)

$$(23) \quad C(z) = -\log z + \frac{1}{2z} + \frac{1}{12z^2}$$

und diesen Wert ergibt Gleichung (22) schon für $m=0$. Nun ist bei jener Reihe, so lange die Glieder abnehmen, der begangene Fehler stets kleiner als das erste nicht mehr berücksichtigte Glied, also bei (23) kleiner als

$$\frac{B_4}{4z^4} = \frac{1}{120z^4}$$

Schon für $z=10$ genügt daher Formel (23) zur Berechnung von $C(z)$ auf 6 Decimalstellen genau, und man würde, von solchem Werte ausgehend, $C(z)$ auch für kleinere z mit Hilfe von (6) hinreichend genau berechnen können.

Ist sonach $C(z)$ für jedes z als bekannt anzusehen, so bietet Gleichung (22) umgekehrt ein Mittel, um $S_m(z)$, die Summe der endlichen harmonischen Reihe, leicht zu berechnen.

1) Euler, Diff.-Rechn. II. § 146. — Natani, „Reihe“, S. 320. Ebenda, S. 314 ff., findet man die Fehlerbestimmung nach Serret.

Zur Ableitung dieser Näherungsformeln war eine Summierung der Reihen von der Gestalt

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{h^{2p}}{2p(2p+1)}$$

in geschlossener Form entbehrlich. Dieselbe hat indessen keine Schwierigkeit. Denn wegen

$$\frac{1}{2p(2p+1)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p+1}$$

zerfällt jede Summe in die Differenz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{(h^2)^p}{p} - \frac{1}{h} \sum_1^{\infty} \frac{h^{2p+1}}{2p+1} &= \frac{1}{2} \log(1-h^2) - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+h}{1-h} - h \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \log(1-h^2) - \frac{1}{2h} \log \frac{1+h}{1-h} \end{aligned}$$

Hiernach findet man

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{2} \log(1+h_m) - \left(1 + \frac{1}{2h_m} \right) \log(1+2h_m) &< C_m - C \\ &< 1 - \frac{1}{2} \log(1-h_m) - \frac{1}{2h_m} \log \frac{1+h_m}{1-h_m} \end{aligned}$$

9. Die specielle harmonische Reihe. Als solche werde die Reihe der reciproken natürlichen Zahlen bezeichnet, die aus der allgemeinen Reihe für $z = 1$ hervorgeht. Formel (2) lässt sich dann schreiben

$$\log \frac{n+1}{m+1} < \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} < \log \frac{n}{m} \quad (m = 0, 1, 2 \dots)$$

Hiernach liegt z. B. die Summe des zweiten Tausends der Glieder der Reihe zwischen

$$\log \frac{2001}{1001} = 0,6926 \dots \quad \text{und} \quad \log 2 = 0,6931 \dots$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = s_n \quad \text{und} \quad s_k - \log k = c_k$$

ein, so ist nach (3)

$$\lim (s_n - s_m) = \lim \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} = \log \left[\lim \frac{n}{m} \right] \quad \begin{matrix} n = \infty \\ m = \infty \end{matrix}$$

Die Function c_k ist hier, da z den festen Wert 1 erhalten hat, nur

noch von ihrem Index abhängig; sie fällt von $c_1 = 1$ mit wachsendem k beständig, bleibt aber positiv, da $s_n > \log(n+1) > \log n$ ist, nähert sich also einem constanten echten Bruch c , für den die Einschliessung gilt (§ 5):

$$c_m - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) < c < c_m$$

Zur Berechnung von c aus einem bekannten c_m dienen dann, entsprechend (15) und (16), die Reihen

$$c_m - c = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{2} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - + \dots$$

$$c_m - c = \frac{1}{2} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{3} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + + \dots$$

oder besser die aus beiden hervorgehende Reihe

$$(24) \quad c_m - c = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{5} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^5} + \dots$$

Für $m = 1$ erhält man hieraus die Formel

$$(25) \quad c = 1 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{3} \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{5} \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^5} - \dots$$

die sich in der Theorie der analytischen Facultäten als Specialfall der Formel

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2} \log \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} + (1-c)a - \frac{a^3}{3} \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^3} - \dots$$

$$\left(a^2 \leq 1\right)$$

für $a = 1$ ergibt. ¹⁾

Zu Formel (24) gelangt man, ohne den Umweg über die weniger convergenten Entwicklungen zu nehmen, wenn man in

$$\frac{1}{2} \log \frac{k+1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{5k^5} + \dots$$

über $k = m+1 \dots n$ summirt. Man erhält so

$$\frac{1}{2} \log \frac{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = s_n - s_m + \frac{1}{3} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{5} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^5} + \dots$$

und mit Rücksicht auf

1) Natani, Die höhere Analysis, S. 182.

$$s_n - \frac{1}{2} \log n(n+1) = s_n - \log n - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

kommt

$$\begin{aligned} c_m - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) &= c_n + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{5} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^5} + \dots \end{aligned}$$

was für $n = \infty$ in Formel (24) übergeht.

Eine noch rascher convergirende Reihe entsteht, wenn man in

$$\frac{1}{2} \log \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^3} + \frac{1}{32k^5} + \dots$$

oder

$$\log \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3 \cdot 4k^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^2 k^5} + \dots$$

über $k = m+1 \dots n$ summirt.

Man erhält so:

$$\log \frac{2n+1}{2m+1} = s_n - s_m + \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^2} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^5} + \dots$$

und wenn man hiervon die Identität

$$\log \frac{n}{m} = \log n - \log m$$

abzieht, kommt

$$c_m - c_n = \log \frac{2m+1}{m} - \log \frac{2n+1}{n} + \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^2} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^5} + \dots$$

also für $n = \infty$

$$c_m - c = \log \left(1 + \frac{1}{2m}\right) + \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^2} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^5} + \dots$$

oder auch

$$(26) \quad c = s_m - \log \frac{2m+1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{5 \cdot 4^2} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^5} - \dots$$

So ist z. B. für $m = 0$

$$(27) \quad c = \log 2 - \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{5 \cdot 4^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^5} - \dots$$

und die für $m = 1$ entstehende Formel

$$(27a) \quad c = 1 - \log \frac{3}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{5 \cdot 4^2} \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^5} - \dots$$

würde sich aus dem oben angeführten Ausdruck für $\log \Gamma(1+a)$ durch die Annahme $a = \frac{1}{2}$ ergeben.

Schreiben wir (26) in der Form

$$s_m - \log m - c = \log \left(1 + \frac{1}{2m}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1) \cdot 4^p} - \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p+1}}$$

und wenden wir die Einschliessung (21) für die Summen der reziproken Potenzen an, so erhalten wir, wenn wir nach Potenzen von $1/m$ entwickeln,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} + \frac{1}{24m^3} + \frac{17}{240m^4} \dots < s_m - \log m - c \\ < \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{80m^4} \dots \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel zwischen beiden Grenzen bis zum dritten Gliede

$$(28) \quad s_m - \log m - c = \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}$$

ist dann ein Näherungswert, der sich von dem wahren höchstens um $\frac{1}{24m^3}$ entfernt, während die blosser Specialisirung der Formel (22) zwar denselben Näherungswert ergibt, aber für den begangenen Fehler den vierfachen Spielraum lässt. In Wirklichkeit ist auch dieser noch viel zu weit gegriffen, denn aus der Reihe ¹⁾

$$(28a) \quad c = s_m - \log m - \frac{1}{2m} + \frac{B_2}{2} \frac{1}{m^2} - \frac{B_4}{4} \frac{1}{m^4} \\ + \dots + (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{2n} \frac{1}{m^{2n}}$$

geht Formel (28) für $n = 1$ hervor, und der Fehler beträgt wieder weniger als

$$\frac{B_4}{4m^4} = \frac{1}{120m^4}$$

Nimmt man $m = 100$ an, so liefert (28) also c bis auf 10 Decimalen richtig. Die Addition der ersten 10 Reciproken der natürlichen Zahlen, die zu diesem Zweck auf 12 Decimalen berechnet wurden, ergibt

$$s_{100} = 5,1873\ 775\ 176$$

während

¹⁾ Euler, Diff. R. II. § 142.

$$\log 100 = 4, 6051\ 701\ 860$$

ist. Somit ist

$$c = 0, 5822\ 073\ 316 - \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{1}{12} \cdot 0,0001$$

$$c = 0, 5772\ 126\ 649.$$

Für $m=50$ erhält man c auf 8 Decimalen richtig, für $m=25$ auf 7. Bei $m=20$ beträgt die Abweichung eine Einheit der 7. Stelle, bei $m=10$ eine Einheit der 6. Stelle. — Euler hat c aus der soeben angeführten Reihe, für $m=10$, auf 16 Stellen berechnet. Wie aus einer Note bei Gauss¹⁾ hervorgeht, hat Mascheroni (in den mir nicht zugänglich gewesenen *Adnotationes ad Euleri Calc. Int.*) die Rechnung weiter ausgedehnt und einen Wert gefunden, der von der 20. Stelle an von dem durch Gauss auf 23 Stellen bestimmten Werte abwich, so dass auf Gauss' Veranlassung Nicolai die Berechnung bis auf 40 Stellen erstreckte. Er fand²⁾

$$c = 0, 5772\ 156\ 649\ 015\ 328\ 606\ 065\ 120\ 900\ 824\ 024\ 310\ 421\ \dots$$

Jede der Grössen s_m , $\log m$, c , die die linke Seite in (28) bilden, kann übrigens aus dieser Formel berechnet werden, wenn die beiden anderen als bekannt vorauszusetzen sind.

So hat man zur Ermittlung der *Summe der ersten million Glieder* der speciellen harmonischen Reihe

$$\begin{array}{r} c = 0, 5772\ 156\ 649\ 015\ 328\ 606\ 065 \\ \log m = 13, 8155\ 105\ 579\ 642\ 741\ 041\ 079 \\ \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} = 0, 0000\ 004\ 999\ 999\ 166\ 666\ 667 \\ \hline s_m = 14, 3927\ 267\ 228\ 657\ 236\ 313\ 811 \end{array}$$

Den Beitrag, den die zweite Million Glieder zur Summe liefert, findet man aus

$$s_n - s_m = \log \frac{n}{m} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12m^2}$$

bezeichnet m eine Million, so hat man

$$s_{2m} - s_m = \log 2 - \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2$$

und mit Benutzung von

1) *Disquis. gener.*, Art 31. — 2) Vgl. Oettinger, Ueber die Constante des Integrallogarithmus. *Crelle Journ.* LX. 375—6.

$$\log 2 = 0,693\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\ 417\ 232$$

ergibt sich

$$s_{2m} - s_m = 0,693\ 146\ 930\ 560\ 007\ 809\ 417\ 232$$

Dies Resultat zeigt recht deutlich die schwache Convergenz der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$. Denn da, nach der schon in § 4 benutzten Catalan'schen Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m} \\ = s_{2m} - s_m$$

Reihe ist, so würde die Addition der ersten zwei Millionen Glieder der den soeben berechneten Wert 0,691469 ergeben, während die Summe durch das nächstfolgende Glied $\frac{1}{2m+1}$ auf 0,6931474 springt, so dass beide Grenzen noch nicht in den sechs ersten Stellen übereinstimmen.

Formel (28) kann auch dazu dienen, die Berechnung der Logarithmen grosser Zahlen auf die kleineren zurückzuführen, wie dies schon Euler¹⁾ getan hat. Wir wollen hier noch eine Anwendung auf die Logarithmen der Facultäten machen und eine Formel ableiten, die mit der Stirling'schen sehr nahe übereinstimmt. Herr Mansion hat so, aus der in der Einleitung angeführten Einschliessung für s_n den Ausdruck

$$\log(n!) = (n + \frac{1}{2})\log n - n + \frac{1+c}{2} + \frac{\Theta}{2} \quad (0 < \Theta < 1)$$

gewonnen. Nach der Stirling'schen Formel ist nun bekanntlich für wachsende n

$$\log(n!) = (n + \frac{1}{2})\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

und da

$$\frac{1+c}{2} = 0,788\ 6078$$

$$\frac{1}{2}\log(2\pi) = 0,918\ 9385$$

ist, so bleibt jene Annäherung hinter dem wahren Wert erheblich zurück, um so mehr, als auch die Stirling'sche Formel noch durch Hinzufügung von $\frac{1}{12n}$ sehr viel genauer wird²⁾.

1) Diff. R. II. § 145.

2) Vgl. Euler, Diff. Rechn. Cap. III. 159 oder Gauss, Disquis. gener. § 29.

Wenn wir nun in

$$s_k = \log k + c + \frac{1}{2k} - \frac{1}{12k^2}$$

über $k = m+1 \dots n$ summieren, erhalten wir

$$(s_1 + s_2 + \dots + s_n) - (s_1 + s_2 + \dots + s_m) = \log(n!) - \log(m!) \\ + (n-m)c + \frac{1}{2}(s_n - s_m) - \frac{1}{12} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^2}$$

Wie man sich leicht überzeugt ¹⁾, ist aber

$$s_1 + s_2 + \dots + s_k = (k+1)s_k - k$$

also

$$\log(n!) = \log(m!) + (n + \frac{1}{2})s_n - (m + \frac{1}{2})s_m - (n-m)(1+c) \\ + \frac{1}{12} \sum_{m+1}^n \frac{1}{k^2}$$

Für das letzte Glied liefert (20) die Grenzen

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

deren arithmetisches Mittel, wenn wir $\frac{1}{n+1}$ nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickeln und bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleiben,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

wird. Setzen wir diesen Wert, sowie für s_n den Näherungswert aus (28) in die letzte Gleichung ein, so kommt, nach gehöriger Zusammenziehung

$$(28b) \quad \log(n!) = (n + \frac{1}{2}) \log n - n + \frac{1}{12n} + \Theta_m$$

wo

$$\Theta_m = \log(m!) - (m + \frac{1}{2})(s_m - 1 - c) + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \right)$$

ist. Die Formel wird mit der verbesserten Stirling'schen um so genauer übereinstimmen, je grösser das feste m zur Berechnung der Constante Θ_m angenommen wird. Schon für $m = 1$ unterscheidet sich aber $\Theta_1 = 0,92333$ von $\frac{1}{2} \log 2\pi$ um kaum 0,01. Legt man $m = 10$ zu Grunde, so nimmt die Formel die Gestalt an

1) Vgl. Mansion, a. a. O., sowie des Verfassers Notiz „Zur Summation endlicher Reihen von der Form $\sum ku_k^a$ “. Arch. d. Math. T. IV. S. 107.

$$(28c) \quad \log(n!) = (n + \frac{1}{2}) \log n - n + \frac{1}{12n} + 0,918\ 9658 \quad (n > 10)$$

Für $n = 100$ ist

$$(n + \frac{1}{2}) \log n - n = 362, 819\ 6037$$

also nach unserer Formel

$$\log(100!) = 363, 739\ 4028$$

während die Addition der Logarithmen der ersten 100 ganzen Zahlen in einer siebenstelligen Tafel den Wert

$$\log(100!) = 363, 739\ 3755$$

ergibt. Genau denselben liefert die verbesserte Stirling'sche Formel, die gewöhnliche dagegen einen um $\frac{1}{12n} = 0,000\ 8333$ zu kleinen. Nach der Formel von Mansion wird

$$\log(100!) = 363, 608\ 2115$$

Nimmt man $m = 100$ an, so findet man mit Hilfe des genauen Werts von $\log(100!)$ und von s_{100} (der letztere wurde oben auf 10 Decimalen angegeben)

$$\Theta_{100} = 0,918\ 9385$$

also in den sieben ersten Decimalen mit $\frac{1}{2} \log 2\pi$ vollständig übereinstimmen.

10. Die alternirende Reihe. Versieht man die geradstelligen Glieder der Reihe $\sum \frac{1}{k+z}$ mit negativem Zeichen, so erhält man die Reihe

$$\mathfrak{S}_{2n}(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - + \dots - \frac{1}{z+2n-1} + \frac{1}{z+2n}$$

die für $n = \infty$ in eine convergente unendliche Reihe übergeht, da die Glieder sich unbegrenzt der Null nähern, beständig fallen und abwechselnde Zeichen haben. Die Summe der Reihe lässt sich leicht durch die Function $C(z)$ ausdrücken. Fassen wir zu dem Ende in $\mathfrak{S}_{2n}(z)$ die positiven und die negativen Glieder für sich zusammen, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2n}(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n} \right) \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+1} + n - 1 \right) \end{aligned}$$

also

$$2\mathfrak{S}_{2n}(z) = S_n\left(\frac{z}{2}\right) - S_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

Hier würde für $n = \infty$ die rechte Seite in unbestimmter Form erscheinen, was durch Einführung von $C_n(z)$ vermieden wird. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{S}_{2n}(z) &= \log\left(n + \frac{z}{2}\right) + C_n\left(\frac{z}{2}\right) - \log\left(n-1 + \frac{z+1}{2}\right) \\ &- C_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) - \log\frac{2n+z}{2n+z-1} + C_n\left(\frac{z}{2}\right) - C_{n-1}\left(\frac{z}{2}\right) \end{aligned}$$

und für $n = \infty$

$$(29) \quad \mathfrak{S}(z) = \frac{1}{2} \left[C\left(\frac{z}{2}\right) - C\left(\frac{z+1}{2}\right) \right]$$

wie auch durch (4) leicht zu bestätigen.

Zu einem anderen Ausdruck gelangt man, wenn man schreibt ¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2n}(z) &= \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+2n} &- 2 \left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \dots + \frac{1}{z+2n-1} \right] \\ &= S_{2n}(z) - S_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) = C_{2n}(z) - C_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) + \log 2 \frac{2n+z}{2n+z-1} \end{aligned}$$

$$(30) \quad \mathfrak{S}(z) = C(z) - C\left(\frac{z+1}{2}\right) + \log 2$$

Die Vergleichung beider Formeln ergibt die Beziehung

$$(31) \quad C\left(\frac{z}{2}\right) + C\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2[C(z) + \log 2]$$

oder

$$C(z) + C\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2C(2z) + 2\log 2$$

Beispiele. Für $z = 1$ ist

$$C(z) = C\left(\frac{z+1}{2}\right) - c$$

Formel (30) gibt dann das bekannte Resultat

$$\mathfrak{S}(1) = \log 2$$

während aus (29) oder (31) der schon in § 6 gefundene Ausdruck

1) Vgl. Natani, „Reihe“, S. 286.

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \log 2 + c$$

folgt. Nach (29) und (11) ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} \mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} [C\left(\frac{1}{2}\right) - C\left(\frac{3}{2}\right)] = \frac{1}{2} \pi$$

Nach (30):

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{3} \sigma \mathfrak{S}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} [C\left(\frac{1}{3}\right) - C\left(\frac{2}{3}\right) + \log 2] \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} \sqrt{3} + \log 2 \right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = \frac{1}{3} \mathfrak{S}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} [C\left(\frac{1}{3}\right) - C\left(\frac{5}{3}\right)] \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} \sqrt{3} - \log 2 \right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{1}{10} \mathfrak{S}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{10} [C\left(\frac{1}{5}\right) - C\left(\frac{4}{5}\right)] \\ = \frac{1}{10} \left[\frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{10}} - 2 \log 2 + \sqrt{5} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

Setzen wir z gleich der rationalen Zahl $\frac{n}{m}$, so ist nach (29)

$$2 \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = C\left(\frac{n}{2m}\right) - C\left(\frac{m+n}{2m}\right)$$

Unter der Bedingung $0 < n < m$ liefert dann die zweite der Formeln (14)

$$2 \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\cotg \frac{n\pi}{2m} - \cotg \frac{(m+n)\pi}{2m} \right) - 2 \sum_1^{m-1} \left(\cos \frac{k\pi n}{m} \right. \\ \left. - \cos \frac{k\pi(m+n)}{m} \right) \log 2 \sin \frac{k\pi}{m} + (-1)^{n+1} [1 - (-1)^m] \log 2$$

Da

$$\cos \frac{k\pi n}{m} - \cos \left(\frac{k\pi n}{m} + k\pi \right) = \cos \frac{k\pi n}{m} [1 - (-1)^k]$$

ist, so fallen in der Summe die Glieder für gerades k fort, und es ergibt sich,

wenn m gerade ist,

$$(32) \quad \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{n\pi}{m}} - 2 \sum_1^{\frac{m}{2}} \cos \frac{(2k-1)n\pi}{m} \log \left(2 \sin \frac{(2k-1)\pi}{2m} \right)$$

und wenn m ungerade ist,

$$(33) \quad \mathfrak{S} \left(\frac{n}{m} \right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{n\pi}{m}} - 2 \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{(2k-1)n\pi}{m} \log \left(2 \sin \frac{(2k-1)\pi}{2m} \right) \\ + (-1)^{n-1} \log 2 \\ (0 < n < m)$$

Ist m gerade, so dass n und $n+m$ als ungerade angesehen werden können, so lässt sich in

$$2\mathfrak{S} \left(\frac{n}{m} \right) = C \left(\frac{n}{2m} \right) - C \left(\frac{m+n}{2m} \right)$$

für die beiden C -Functionen Formel (14a) in Anwendung bringen. Man erhält so

$$2\mathfrak{S} \left(\frac{n}{m} \right) = \frac{\pi}{\sin \frac{n\pi}{m}} - 2 \sum_1^{\frac{m-2}{2}} \log \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2m} \cos \frac{k\pi n}{m} [1 - (-1)^k]$$

oder

$$(32a) \quad \mathfrak{S} \left(\frac{n}{m} \right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{n\pi}{m}} - 2 \sum \cos (2k-1) \frac{n}{m} \pi \cdot \log \operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{2m}$$

$$\left(\begin{array}{l} n \text{ ungerade} \\ m \text{ gerade} \end{array} , \quad k = 1, 2, \dots, \frac{m-2}{4} \text{ oder } \frac{m}{4}, \quad 0 < n < m \right)$$

eine Formel, die sich natürlich auch aus (32) in derselben Weise herleiten lässt, wie (14a) aus (14) gewonnen wurde.

Die Umformung, die hier die Gliederzahl der zu summirenden endlichen Reihe auf die Hälfte herabminderte, hat diesen Erfolg im Falle eines ungeraden m nicht. Denn dann wird, je nachdem n gerade oder ungerade ist, einer der Zähler n und $n+m$ in den auftretenden C -Functionen gerade, so dass Formel (14a) nur auf eine der letzteren anwendbar ist. Immerhin hat die Rechnung den Erfolg, die unter dem Summenzeichen stehenden Bögen zu verkleinern, so das wenigstens das Resultat angegeben werden möge. Man erhält

$$(33a) \quad \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{n\pi}{m}} + (-1)^{n-1} \log 2 - 2 \sum_1^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{n(k+1)} \cos \frac{kn}{m} \pi \cdot \log 2f\left(\frac{k\pi}{2m}\right)$$

(m ungerade, n beliebig, $0 < n < m$)

wo das Functionszeichen f den Sinus oder Cosinus bedeutet, je nachdem k ungerade oder gerade ist, so dass also auch

$$\log 2f\left(\frac{k\pi}{2m}\right) = \log 2 \left| \cos\left(\frac{k\pi}{2m} + \frac{k\pi}{2}\right) \right|$$

geschrieben werden könnte¹⁾.

Beispiele.

$$\mathfrak{S}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{4}} - 2 \cos \frac{\pi}{4} \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$$

also

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{4} \mathfrak{S}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \sqrt{2} \left[\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2} + 1) \right]$$

wie sich auch aus (29) mit Hilfe der kleinen Tafel in Abschnitt 6. ergibt.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\left(\frac{1}{8}\right) &= \frac{\pi}{2 \sin 22\frac{1}{2}^\circ} - 2(\cos 22\frac{1}{2}^\circ \cdot \log \operatorname{tg} 11\frac{1}{2}^\circ + \cos 67\frac{1}{2}^\circ \log \operatorname{tg} 33\frac{1}{2}^\circ) \\ &= 8(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{25} + \frac{1}{33} - \frac{1}{41} + \dots) \end{aligned}$$

1) Die Formeln (32), (33) und (32a) finden sich bereits in einer älteren Abhandlung, auf die ich erst aufmerksam wurde, nachdem der erste Druck der vorliegenden Arbeit fast vollendet war, wobei übrigens, wie manches andere, auch die Umformung (32a) der Raumersparnis wegen fortblieb. Jene Abhandlung ist die von Prof. Schrader in Tübingen herrührende, überarbeitete Lösung einer im Jahre 1813 von der Kopenhagener Kgl. Gesellschaft gestellten Preisaufgabe, die unter dem Titel „Commentatio de summatione seriei $\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \dots$ “ zu Weimar 1818 erschien. Die Summierung wird durch Integration bewirkt und liefert die genannten Formeln auf S. 17. Später (§ 15 ff.) wird die Reihe als Differenz zweier harmonischen Reihen mit Hilfe der Euler'schen semiconvergenten Summenformel behandelt und die Bestimmung nach Erchinger ausgeführt („qui ante paucos annos rusticus, nunc mathesin apprime sciens, eam in Lyceo Tubingensi docet“ a. a. O. S. 57).

$$\mathfrak{S}\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{2\pi}{7}} - \log 2 - 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} \log 2 \sin \frac{\pi}{14} + \cos \frac{4\pi}{7} \log 2 \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \log 2 \sin \frac{3\pi}{14} \right)$$

somit ist

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} - \frac{1}{24} + \frac{1}{36} - \frac{1}{42} + \dots = \frac{1}{7} \left[\frac{\pi}{2 \sin \frac{2\pi}{7}} - \log 2 - 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} \log 2 \sin \frac{\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} \log 2 \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \log 2 \cos \frac{2\pi}{7} \right) \right].$$

Mit Hilfe der Formeln (32) und (33) oder (32a) und (33a) lässt sich jede unendliche alternierende Reihe rationaler Zahlen, deren Nenner eine arithmetische Reihe bilden, summieren. Denn es ist

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - + \dots = \frac{1}{b} \mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Die Formeln geben $\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right)$ allerdings nur, wenn $a < b$. Ist nun $a > b$, etwa $a = pb + q$, wo p und q ganzzahlig und $q < b$ ist, so kann man die Reihe nach rückwärts bis zum Nenner q fortsetzen und hat dann, indem man das Hinzugefügte wieder abzieht

$$\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right) = \pm \left[\mathfrak{S}\left(\frac{q}{b}\right) - b \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+b} + \frac{1}{q+2b} - + \dots - \frac{1}{q+(p-1)b} \right) \right]$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem p gerade oder ungerade ist, so dass wir auch schreiben können

$$(34) \quad \mathfrak{S}\left(p + \frac{q}{b}\right) = (-1)^p \left[\mathfrak{S}\left(\frac{q}{b}\right) - \mathfrak{S}_{p-1}\left(\frac{q}{b}\right) \right] \quad (q < b)$$

Zur *angenäherten* numerischen Berechnung von $\mathfrak{S}(z)$, besonders für grosse Werte von z , hat man aus (30), wenn man für $C(z)$ den Näherungswert aus (23) setzt,

$$(35) \quad \mathfrak{S}(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{12z^2} - \frac{1}{3(z+1)^2} + \log \frac{z+1}{z}$$

Für $z = 1$ heben sich die Ungenauigkeiten dieser Formel vollständig auf, sie liefert richtig

$$\mathfrak{S}(1) = \log 2$$

Im allgemeinen ist der Fehler für $z > 1$ kleiner als $\frac{2}{15(z+1)^4}$

Wird in (35) noch nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt, so ergibt sich

$$(35a) \quad \mathfrak{S}(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} - \frac{1}{4z^4} \dots$$

Diese Formel ist auch sehr brauchbar, um die Summierung einer endlichen Gliederzahl der alternierenden Reihe zu bewerkstelligen, oder was auf dasselbe hinauskommt, den Rest der unendlichen Reihe, beim Abbrechen nach einem bestimmten Gliede zu schätzen.

Offenbar ist nämlich

$$(35b) \quad \frac{1}{b} \mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{a+(m-1)b} \\ + (-1)^m \cdot \frac{1}{b} \mathfrak{S}\left(\frac{a}{b} + m\right)$$

und auf das letzte Glied lässt sich, wenn m nicht all zu klein ist, Gleichung (35a) mit hinreichender Genauigkeit anwenden. Damit ist aber der fragliche Rest bestimmt, und sonach auch die Summe der m ersten Glieder.

Setzen wir nun in (35a) $z+m$ statt z und entwickeln wir nach Potenzen von $\frac{1}{m}$, so kommt

$$2\mathfrak{S}(z+m) = \frac{1}{m} - \frac{2z-1}{2m^2} + \frac{z(z-1)}{m^3} - \frac{(2z-1)(2z^2-2z-1)}{4m^4} \dots$$

also ist der Rest

$$(35c) \quad \frac{1}{b} \mathfrak{S}\left(\frac{a}{b} + m\right) = \frac{1}{2bm} - \frac{2a-b}{4b^2m^2} + \frac{a(a-b)}{2b^3m^3} \\ - \frac{(2a-b)(2a^2-2ab-b^2)}{4b^4m^4} \dots$$

Die Summe der m ersten Glieder der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ist also um $(-1)^m \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{4m^4} \dots\right)$ algebraisch kleiner als $\log 2$, wie schon in Abschnitt 9. gefunden wurde. Sollte, um ein anderes Beispiel zu wählen, π aus der Leibnitz'schen Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

berechnet werden, so hätte man $a = 1$, $b = 2$, mithin für π selbst

$$4. \frac{1}{b} \approx \left(\frac{a}{b} + m \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{4m^3}$$

Nimmt man also $m = 10^n$ Glieder, so beträgt der Fehler fast genau eine Einheit der n ten Stelle hinter dem Decimalkomma, und zwar erhält man die n te Ziffer um 1 zu klein, die darauf folgenden Stellen aber richtig, und eine Abweichung tritt erst wieder nach $2n$ weiteren Stellen ein.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass Formel (35b) nicht nur dazu dienen kann, die Summierung der endlichen Reihe auf die der unendlichen zurückzuführen, sondern dass danach eben so wol die linke Seite berechnet werden kann, indem man die Summation der endlichen Reihe soweit wirklich ausführt, dass zur Abschätzung des Restes Gleichung (35) oder gar die ungenauere aber einfachere Formel (35c) genügt.

So ist z. B.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \approx \left(\frac{9}{2} \right)$$

und nach (35)

$$\approx \left(\frac{9}{2} \right) = 0,12308$$

während nach (35c)

$$\approx \left(\frac{9}{2} \right) = 0,12285$$

kommt. Für $\frac{\pi}{4}$ erhält man so die Werte 0,78535 bzw. 0,78524, deren erster dem wahren Werte 0,785398 natürlich näher kommt. Man sieht leicht, dass man den Fehler erheblich verkleinern kann, wenn man nur einige Anfangsglieder mehr unmittelbar addiert.

11. Abgeleitete Reihen. Werden alle Glieder der Reihe \approx positiv genommen, so geht sie in die divergente Reihe S über sie convergirt also nur bedingt. Convergenz und Summe der Reihe sind daher abhängig von dem Verhältniss, in welchem die positiven und negativen Glieder in den ersten n Gliedern, als deren Grenzwert die Summe der Reihe anzusehen ist, auftreten. Wie schon in der Einleitung und im § 4 angedeutet, ist die Untersuchung dieser Abhängigkeit mit den hier gegebenen Mitteln sehr einfach ausführbar. Der einzuschlagende Weg ist derselbe, dem Herr Natani ¹⁾ gefolgt ist, nur dass wir keinen Gebrauch von bestimmten Integralen machen.

1) A. n. O. S. 287.

Wir leiten aus der gegebenen Reihe \mathfrak{S} eine neue ab, in der positive und negative Glieder nicht mehr in gleicher Anzahl, sondern im Verhältnis $p : q$ vorhanden sein sollen, und zwar so, dass wir die p ersten Glieder der gegebenen Reihe unmittelbar auf einander folgen lassen, dann die q ersten negativen Glieder einschalten, dann wieder p positive und q negative Glieder nehmen u. s. f. Da p und q als endlich vorausgesetzt werden, besteht die neue Reihe aus alternierenden Gruppen von endlich vielen Gliedern. Diese Gliedergruppen werden schliesslich unendlich klein; ob sie beständig abnehmen, ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Hier genügt aber auch die erstere Eigenschaft zur Convergenz, da sich leicht ergibt, dass die Summe einer endlichen Anzahl der Gruppen sich mit wachsender Anzahl einer festen Grenze nähert. Fassen wir nämlich die beiden ersten Gruppen

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+2p-2}$$

und

$$-\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} - \dots - \frac{1}{z+2q-1}$$

zu einem Gliede u_1 der neuen Reihe zusammen, so können wir $p > q$ vorausgesetzt, schreiben:

$$u_1 = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+2q-2} - \frac{1}{z+2q-1} + \frac{1}{z+2q} \right) \\ + \frac{1}{z+2q+2} + \dots + \frac{1}{z+2p-2}$$

und erhalten, wenn wir np und nq statt p und q setzen, die Summe der $2n$ ersten Gruppen

$$U_n(z) = \mathfrak{S}_{2nq}(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{z}{2} + nq + 1} + \frac{1}{\frac{z}{2} + nq + 2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{\frac{z}{2} + np - 1} \right)$$

also, wenn wir zur Grenze übergehen, und beachten, dass nach (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{np-1} \frac{1}{\frac{z}{2} + k} = \log \frac{p}{q}$$

ist,

$$(36) \quad U(z) = \mathfrak{S}(z) + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q}$$

Für $q > p$ hätte man ganz ebenso

$$U_n = \zeta_{2qn} - \frac{1}{z+2p} - \frac{1}{z+2p+2} - \dots - \frac{1}{z+2q}$$

also

$$U = \zeta - \frac{1}{2} \log \frac{p}{q}$$

mithin dasselbe Resultat.

Die Summe der $2n$ ersten Gruppen, oder der $n(p+q)$ ersten Einzelglieder, der neuen Reihe bleibt also mit wachsendem n endlich; da nun ein Oscilliren der Reihe durch das schliessliche Verschwinden der Gruppen ausgeschlossen ist, muss die Reihe, auch wenn man an anderer Stelle abbricht, demselben Grenzwert zustreben.

Es ist deutlich, wie die ursprüngliche und die neue Reihe sich für jedes endliche n um eine Anzahl Glieder unterscheiden, die mit wachsendem n selbst eine unendliche Reihe mit der Summe $\frac{1}{2} \log \frac{p}{q}$ bilden. Ist $q = p$, so verschwindet dieser Betrag, und die abgeleitete Reihe hat, wie zu erwarten war, dieselbe Summe wie die ursprüngliche.

Die Wertänderung ist übrigens einerseits von z , andererseits auch davon unabhängig, wie die einzelnen Glieder innerhalb der $2n$ ersten Gruppen angeordnet sind, da es bei der Ermittlung der Summe nur darauf ankam, wieviel Glieder jeder Art vorhanden waren. —

Die Trennung der Fälle $p > q$ und $p < q$ lässt sich auf folgende Art vermeiden. Schreiben wir

$$u_1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+2p-2} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} - \dots \\ - \frac{1}{z+2q-1} = \frac{1}{2} S_{p-1} \left(\frac{z}{2} \right) - \frac{1}{2} S_{q-1} \left(\frac{z+1}{2} \right)$$

so ist

$$2U_n(z) = S_{pn-1} \left(\frac{z}{2} \right) - S_{qn-1} \left(\frac{z+1}{2} \right) \\ = C_{pn-1} \left(\frac{z}{2} \right) - C_{qn-1} \left(\frac{z+1}{2} \right) + \log \frac{\frac{z}{2} + np - 1}{\frac{z+1}{2} + nq - 1}$$

also für $n = \infty$

$$2U(z) = C\left(\frac{z}{2}\right) - C\left(\frac{z+1}{2}\right) + \log \frac{p}{q}$$

woraus sich nach (29) Formel (36) ergibt.

Beispiele. Es war

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$$

daher für $p = 2, q = 1$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots &= \frac{1}{2} [\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \log 2] \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \log 2 \end{aligned}$$

Für $z = 1$ hat man

$$\zeta(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

Demnach ist

$$U(1) = \log 2 \sqrt{\frac{p}{q}}$$

so dass man die Logarithmen beliebiger rationaler oder quadratisch irrationaler Zahlen durch die reciproken natürlichen Zahlen darstellen kann. — Für $p = 1, q = 4$, erhält man so:

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \dots$$

Eine Entscheidung darüber, ob die Gliedergruppen beständig abnehmen, oder aber bald steigen, bald fallen, lässt sich mit Hilfe der Formel (22) gewinnen, da jede Gruppe als ein Ausschnitt einer harmonischen Reihe anzusehen ist. Bezeichnen wir die k te Gruppe mit v_k , so ist die n te positive Gruppe

$$v_{2n-1} = \frac{1}{z + 2(n-1)p} + \frac{1}{z + 2(n-1)p + 2} + \dots + \frac{1}{z + 2np - 2}$$

also

$$2v_{2n-1} = S_{np-1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{(n-1)p-1}\left(\frac{z}{2}\right)$$

Ebenso gilt für die n te negative Gruppe

$$v_{2n} = \frac{1}{z + (2n-2)q + 1} + \dots + \frac{1}{z + 2nq - 1}$$

$$2v_{2n} = S_{nq-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) - S_{(n-1)q-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

Nach (22) ist nun, für hinreichend grosse m und m_1

$$S_m(x) - S_{m_1}(x) = \log \frac{m+x}{m_1+x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+x} - \frac{1}{m_1+x} \right) \\ - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{(m+x)^2} - \frac{1}{(m_1+x)^2} \right)$$

also, wenn wir $\frac{z}{2} = x$ setzen

$$2v_{2n-1} = \log \frac{np-1+x}{np-p-1+x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{np-1+x} - \frac{1}{np-p-1+x} \right) \\ - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{(np-1+x)^2} - \frac{1}{(np-p-1+x)^2} \right) \\ = -\log \left(1 - \frac{p}{np-1+x} \right) + \frac{1}{2np} \left(\frac{1}{1-\frac{1-x}{np}} - \frac{1}{1-\frac{p+1-x}{np}} \right) \\ - \frac{1}{12n^2 p^2} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-x}{np}\right)^2} - \frac{1}{1-\left(\frac{p+1-x}{np}\right)^2} \right)$$

Entwickeln wir nach Potenzen von $\frac{1}{n}$, so wird, wenn wir nur die beiden ersten Potenzen berücksichtigen

$$2v_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \left(1 - \frac{z-1}{p} \right)$$

Setzen wir hierin $z+1$ statt z und q statt p , so erhalten wir

$$2v_{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \left(1 - \frac{z}{q} \right)$$

und ebenfalls aus $2v_{2n-1}$, für $n+1$ statt n

$$2v_{2n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \left(-1 - \frac{z-1}{p} \right)$$

Demnach ist

$$2(v_{2n-1} - v_{2n}) = \frac{1}{2n^2} \left(\frac{z}{q} - \frac{z-1}{p} \right)$$

$$2(v_{2n} - v_{2n+1}) = \frac{1}{2n^2} \left(2 - \frac{z}{q} + \frac{z-1}{p} \right)$$

und zwar bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{n^3}$ genau. Für einen hinreichend grossen Wert von n haben also die Differenzen $v_{2n-1} - v_{2n}$ und $v_{2n} - v_{2n+1}$ bzw. dieselben Vorzeichen wie

$$w_1 = \frac{z}{q} + \frac{1-z}{p} \quad \text{und} \quad w_2 = 2 - w_1$$

Sind w_1 und w_2 beide positiv, so nehmen, von jenem n an, die Gliedergruppen beständig ab. Dies ist, wie leicht ersichtlich, für ganz beliebige Werte p und q der Fall, sobald (z als reell vorausgesetzt)

$$0 \leq z \leq 1$$

ist, da dann auch w_2 in demselben Intervall liegt, mithin w_2 sich zwischen 1 und 2 bewegt. Insbesondere gilt dies also von allen auf die in Rede stehende Art aus der „speziellen“ harmonischen Reihe abgeleiteten Reihen.

Ist aber $z > 1$ oder negativ, so hängt das Vorzeichen der Grössen w von der Wahl von p und q ab. Ist z. B. $z = 2$, so ist

$$w_1 = \frac{2}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2p - q}{pq}$$

also negativ, wenn $p = 1$, $q = 3$ ist. In der Tat ist dann

$$v_{2n} = \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n+1} = \frac{108n^2 - 36n - 1}{216n^3 - 108n^2 - 6n + 3}$$

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2n}, \quad v_{2n+1} = \frac{1}{2n+2}$$

und schon von $n = 1$ an $v_{2n-1} < v_{2n}$, aber $v_{2n} > \frac{3}{6n+1} > v_{2n+1}$, so dass in der Reihe

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \dots \\ = \zeta(2) + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1 - \log 2\sqrt{3}$$

die Gruppen von Anfang an abwechselnd steigen und fallen. Man kann also durch passende Wahl von p und q leicht Reihen von dieser Beschaffenheit herstellen, die trotzdem convergiren.

Uebrigens ist auch ohne die Beziehung $w_1 + w_2 = 2$ klar, dass, wenn eine der beiden Grössen w negativ ist, die andere nicht auch negativ sein kann, denn sonst würden die Gruppen beständig zunehmen, könnten also nicht unendlich klein werden.

Ist $q = p$, so fällt z ganz heraus, es wird

$$w_1 = \frac{1}{p}, \quad w_2 = \frac{2p-1}{p}$$

d. h. beide sind stets positiv, Gruppen aus gleich vielen Gliedern fallen schliesslich beständig, aus welcher harmonischen Reihe man auch die Glieder entnehme.

12. Verallgemeinerung. Es liegt nahe, die Gliederzahl der alternierenden Gruppen in der abgeleiteten Reihe variabel zu machen. Bezeichnen wir sie mit p_n für die positiven, q_n für die negativen Glieder, so beginnt die neue Reihe also mit den ersten p_1 positiven Gliedern der ursprünglichen, dann folgen die ersten q_1 negativen, dann die nächsten p_2 positiven und q_2 negativen Glieder u. s. f. Schreiben wir noch

$$q_1 + q_2 + \dots + q_k = Q_k, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_k = P_k$$

so ist also die n te positive Gruppe

$$v_{2n-1} = \frac{1}{z+2P_{n-1}} + \frac{1}{z+2P_{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{z+2P_n-2}$$

und die darauf folgende n te negative Gruppe

$$v_{2n} = \frac{1}{z+2Q_{n-1}+1} + \frac{1}{z+2Q_{n-1}+3} + \dots + \frac{1}{z+2Q_n-1}$$

so dass also die Summe der ersten $2n$ Gruppen

$$V_{2n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+2P_n-2} \\ - \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \dots + \frac{1}{z+2Q_n-1} \right)$$

ist, woraus

$$2V_{2n} = S_{P_n-1} \left(\frac{z}{2} \right) - S_{Q_n-1} \left(\frac{z+1}{2} \right) \\ = \log \frac{P_n-1 + \frac{z}{2}}{Q_n-1 + \frac{z+1}{2}} + C_{P_n-1} \left(\frac{z}{2} \right) - C_{Q_n-1} \left(\frac{z+1}{2} \right)$$

Es seien nun p_n und q_n so gewählt, dass P_n und Q_n mit n unendlich werden.

Wäre nämlich etwa $\lim P_n$ endlich, so müsste $\lim p_n = 0$ sein, also p_n bei einem gewissen n unter 1 sinken; dies bedeutet aber ein Aufhören der positiven Glieder. Wäre dann auch $\lim Q_n$ endlich, so bräche die Reihe ab, während bei $\lim q_n \geq 1$ die negativen Glieder weiter laufen und die Reihe divergent machen würden.

Werden aber P_n und Q_n beide unendlich, so ist

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2n} = \zeta(z) + \frac{1}{2} \log \left[\lim \frac{P_n}{Q_n} \right]$$

$\lim V_{2n}$ bleibt also endlich mit $\lim P_n : Q_n$. Kommt noch hinzu, dass die Gruppen v die Null zur Grenze haben, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe wird durch Formel (37) angegeben. Ist dagegen $\lim v_{2n-1} = \lim v_{2n}$ endlich, so wird die neue Reihe, als Summe der einzelnen v aufgefasst, in den Grenzen $\lim V_{2n}$ und $\lim (V_{2n} + v_{2n+1})$ oscilliren; indessen würde dann jede der Reihen

$$\sum_1^{\infty} (v_{2k-1} - v_{2k}) = \lim V_{2n} \quad \text{und} \quad v_1 - \sum_1^{\infty} (v_{2k} - v_{2k+1}) = \lim V_{2n+1}$$

als convergent zu bezeichnen sein, und je nach der Definition der neuen Reihe durch die eine oder die andere Form, hat sie dann die eine oder die andere Summe.

Zur Untersuchung von v_{∞} hat man

$$2v_{2n-1} = S_{P_n-1} \left(\frac{z}{2} \right) - S_{P_{n-1}-1} \left(\frac{z}{2} \right)$$

also nach (3)

$$2 \lim v_{2n-1} = \log \left(\lim \frac{P_n}{P_{n-1}} \right) = \log \left[\lim \left(1 + \frac{p_n}{P_{n-1}} \right) \right]$$

und ebenso

(38)

$$2 \lim v_{2n} = \log \left(\lim \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \right) = \log \left[\lim \left(1 + \frac{q_n}{Q_{n-1}} \right) \right]$$

v_{∞} wird also immer und nur dann verschwinden, wenn P_n und Q_n stärker unendlich werden, als p_{n+1} und q_{n+1} .

Beispiele. Die Voraussetzung $\lim P_n = \infty$, $\lim Q_n = \infty$ ist erfüllt, sobald die Reihen $p_1 + p_2 + \dots$, $q_1 + q_2 + \dots$ divergiren, zunächst also sicher, wenn auch p_n und q_n mit n unendlich werden, so dass die Gruppen schliesslich selbst unendliche Reihen bilden. Dass die Convergenz der dann entstehenden Doppelreihe nicht ausgeschlossen ist, zeigt sich in dem Falle, wo p_n und q_n ganze rationale Functionen von n sind. Sei p_n vom Grade r , q_n vom Grade s , so ist P_n vom Grade $r+1$, Q_n vom Grade $s+1$, und da

$$v_{2n-1} < \frac{p_n}{z + 2P_{n-1}}, \quad v_{2n} < \frac{q_n}{1 + z + 2Q_{n-1}}$$

so folgt, auch ohne die Benutzung von (38) unmittelbar, dass

$$\lim v_{2n-1} = \lim v_{2n} = 0$$

ist. $\lim \frac{P_n}{Q_n}$ wird nun nur dann endlich und von null verschieden, wenn beide Functionen von gleichem Grade sind, also $r = s$ ist; ist

$r > s$, so wird der Quotient ∞ oder 0, der Logarithmus desselben also $\pm \infty$, und die v -Reihe divergiert.

So erhält man, um einen ganz einfachen Fall zu wählen, für $s = 1$, $p = 1$, $q = n$, die Reihe

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{2} \\ - \left(\frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{20}\right) + - \dots$$

Die allgemeinen Glieder derselben sind

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$$

und da

$$Q_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ist,

$$v_{2n} = \frac{1}{n(n-1)+2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Trotzdem nun $v_{2n} < \frac{n}{n(n-1)+2}$, also $\lim v_{2n} = 0$ ist, wird die Reihe mit

$$\log \frac{P_n}{Q_n} = \log \frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

negativ unendlich und giebt so ein einfaches Beispiel für eine, trotz der unbegrenzten Abnahme der Glieder, *divergente*, alternirende Reihe¹⁾. (Vgl. § 3.)

Ist aber $s = r$ und $p_n = a_r n^r + \dots$, $q_n = b_r n^r + \dots$, so ist

$$P_n = a_r \sum_1^n k^r + \dots, \quad \lim \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_r}{b_r} = \lim \frac{p_n}{q_n}.$$

$$Q_n = b_r \sum_1^n k^r + \dots,$$

Die Summenänderung hängt also nur von den Coefficienten der höchsten Potenz in p_n und q_n ab, so dass wir den Satz aussprechen können:

1) Dass die ganz ähnliche Reihe, welche man erhält, wenn man umgekehrt $p = n$, $q = 1$ wählt, eine gleichfalls divergente „Umstellung“ der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots$ ist, hat Herr Lionnet in der schon angeführten Note nachgewiesen. (Nouv. Annales de Math. 1879.)

Sind p_n und q_n ganzzahlige, ganze rationale Functionen gleichen Grades von n , und bildet man aus den Gliedern der alternirenden harmonischen Reihe eine neue Reihe, in der auf je p_n positive Glieder der ersteren, je q_n negative Glieder derselben folgen, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe übertrifft die der ersten um

$$\frac{1}{2} \log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} \right)$$

Insbesondere wird keine Summenänderung stattfinden, wenn die Coefficienten der höchsten Potenz in p_n und q_n gleich sind. Demnach ist also, für $p_n = 2n - 1$, $q_n = 2n$,

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) + \dots = \log 2$$

und ähnlich

$$(1 + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{11}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{21}) - (\frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \frac{1}{27} + \frac{1}{31}) + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Sind die Functionen p_n und q_n vom Grade 0, also constant, so entsteht Formel (36).

Ein Beispiel für den Fall, dass die Gruppen für $n \rightarrow \infty$ nicht der 0, sondern festen endlichen Grenzen zustreben, bietet sich, wenn p_n und q_n Exponentialfunctionen sind. Sei etwa $p_n = a^{n-1}$ und $a > 1$, also

$$P_n = 1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - a}{a - 1}$$

so ist nach (38)

$$\lim 2v_{2n-1} = \log \left(\lim \frac{P_n}{P_{n-1}} \right) = \log a$$

Die v -Reihe kann also nur convergiren, wenn auch

$$\lim 2v_{2n} = \log a,$$

was etwa durch die Wahl von

$$q_n = a^{n-1} + b^{n-2} \quad (b < a)$$

zu erreichen ist. Man hat dann

$$\lim V_{2n} = \zeta(z) + \frac{1}{2} \log 1 = \zeta(z)$$

und

$$\lim V_{2n+1} = \zeta(z) + \frac{1}{2} \log a$$

$\sum_1^\infty v_k$ wird zwischen diesen beiden Werten oscilliren, wofern nicht

durch Zusammenfassung je zweier aufeinander folgender Glieder in in der oben angedeuteten Weise für die Convergenz gesorgt wird.

Wir wollen noch über das Grössenverhältniss aufeinander folgender Gruppen dieselbe Untersuchung anstellen, wie sie in Abschnitt 11. bei constanter Gliederzahl p und q geführt wurde. Wir brauchen in den dortigen Ausdrücken für v_{2n-1} und v_{2n} nur P_n statt np und Q_n statt nq zu schreiben, um die jetzt in Frage kommenden Werte zu erhalten; demnach ist, wenn wir noch $\frac{z}{2} = x$ setzen,

$$2v_{2n-1} = S_{P_n-1}(x) - S_{P_n-1}(x)$$

und für hinreichend grosses n , wieder nach (22)

$$2v_{2n-1} = -\log\left(1 - \frac{p_n}{P_n-1+x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P_n-1+x} - \frac{1}{P_n-p_n-1+x} \right)$$

Hier können wir abbrechen, wenn wir bei der Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{P_n}$ uns mit den Gliedern zweiter Ordnung begnügen wollen. Es wird so

$$\begin{aligned} 2v_{2n-1} &= \frac{p_n}{P_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^2 + \frac{1-z}{2} \frac{p_n}{P_n^2} \\ 2v_{2n} &= \frac{q_n}{Q_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{q_n}{Q_n} \right)^2 - \frac{z}{2} \frac{q_n}{Q_n^2} \\ 2v_{2n+1} &= \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} \right)^2 + \frac{1-z}{2} \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}^2} \\ &= \frac{p_{n+1}}{P_n} - \frac{1}{2} \left(\frac{p_{n+1}}{P_n} \right)^2 + \frac{1-z}{2} \frac{p_{n+1}}{P_n^2} \end{aligned}$$

wo die Formeln für v_{2n} und v_{2n+1} wie früher aus dem Werte von v_{2n-1} abgeleitet sind. Um die Vorzeichen der Grössen $v_{2n-1} - v_{2n}$ und $v_{2n} - v_{2n+1}$ untersuchen zu können, wollen wir voraussetzen, p_n und q_n seien ganze rationale Functionen gleichen Grades von n und dieselben wie vorher bezeichnen. Dann ist

$$P_n = a_r \sum_1^n k^r + a_{r-1} \sum_1^n k^{r-1} + \dots$$

und für unseren Zweck genügt es, zu wissen, dass diese Summen die Form

$$\sum_1^n k^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + \frac{1}{2} n^r + \dots$$

besitzen ¹⁾. Wir haben hiernach nämlich

$$P_n = \frac{a_r}{r+1} n^{r+1} + \left(\frac{a_r}{2} + \frac{a_{r-1}}{r} \right) n^r + \dots$$

also

$$\frac{p_n}{P_n} = \left(\frac{a_r}{n} + \frac{a_{r-1}}{n^2} + \dots \right) \frac{\frac{r+1}{a_r}}{1 + \frac{r+1}{a_r} \left(\frac{a_r}{2} + \frac{a_{r-1}}{r} \right) \frac{1}{n} + \dots}$$

und, wenn wir wieder bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleiben,

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{n^2} \left(\frac{1}{r} \frac{a_{r-1}}{a_r} + \frac{r+1}{2} \right)$$

Da wir die Functionen p und q mindestens als linear, also $r \geq 1$ voraussetzen können — der Fall $r = 0$ ist in Abschnitt 11.

erledigt — so wird das in v_{2n-1} auftretende Glied $\frac{1-z}{2} \frac{p_n}{P_n^2}$ schon für $r = 1$ mit Gliedern dritter Ordnung beginnen, also für uns nicht mehr in Betracht kommen. Wir haben daher

$$\begin{aligned} 2v_{2n-1} &= \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{r} \frac{a_{r-1}}{a_r} \frac{1}{n^2} \\ 2v_{2n} &= \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{r} \frac{b_{r-1}}{b_r} \frac{1}{n^2} \\ 2v_{2n+1} &= \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{r} \left(r + \frac{a_{r-1}}{a_r} \right) \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} v_{2n-1} - v_{2n} &= \frac{r+1}{2r} \left(\frac{b_{r-1}}{b_r} - \frac{a_{r-1}}{a_r} \right) \frac{1}{n^2} \\ v_{2n} - v_{2n+1} &= \frac{r+1}{2r} \left(r - \frac{b_{r-1}}{b_r} + \frac{a_{r-1}}{a_r} \right) \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Für hinreichend grosse Werte von n sind folglich die Vorzeichen dieser Differenzen dieselben wie die der Grössen

$$w_1 = \frac{b_{r-1}}{b_r} - \frac{a_{r-1}}{a_r}, \quad w_2 = r - w_1$$

1) Eine elementare Herleitung dieser Eigenschaft findet man in dem schon oben angeführten Aufsätze „Zur Summation endlicher Reihen u. s. w.“ (Archiv d. Math. T. IV. S. 107.)

sonach unabhängig von z , so lange nicht w_1 , oder w_2 null wird, in welchem Falle die höheren Potenzen von n in Frage kommen, deren Coefficienten z enthalten.

Das beständige Fallen der Gliedergruppen von einem gewissen n an ist also hier an die Bedingung

$$0 < \frac{b_{r-1}}{b_r} - \frac{a_{r-1}}{a_r} < r$$

geknüpft.

In den beiden oben gegebenen Reihen für $\log 2$ und $\frac{\pi}{4}$ ist $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, also die Bedingung erfüllt, während für $p_n = n$, $q_n = n-1$ sich $w_1 = -1$, $w_2 = 2$ ergibt, so dass in der Reihe

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+4} \right) - \left(\frac{1}{z+1} \right) + \left(\frac{1}{z+6} + \frac{1}{z+8} + \frac{1}{z+10} \right) \\ - \left(\frac{1}{z+3} + \frac{1}{z+5} \right) + \dots = \mathfrak{S}(z) \end{aligned}$$

von einem gewissen Gliede an jede positive Gruppe sowohl kleiner ist als die vorhergehende wie auch als die folgende negative Gruppe.

13. Der Schlömilch'sche Satz verallgemeinert. Wie in der Einleitung erwähnt, hat Herr Pringsheim eine Methode gegeben, um die Wertveränderung einer bedingt convergenten Reihe unter Umständen auf die einer andern zurückzuführen. So führt der ebenda genannte Satz von Schlömilch die Wertänderung einer beliebigen convergenten alternirenden Reihe für den Fall, dass die positiven und negativen Glieder nicht mehr in dem Verhältnis 1:1, sondern in dem Verhältnis $p:q$ auftreten, auf die entsprechende Wertänderung der harmonischen Reihe zurück, die hier in § 11 ermittelt ist. Wir wollen diesen, in so enger Beziehung zur harmonischen Reihe stehenden Satz elementar herleiten, dabei aber, wie in § 12, statt des constanten Verhältnisses $p:q$ das variable $p_n:q_n$, sowie die Bedingung $P_\infty = \infty$, $Q_\infty = \infty$ einführen.

Zwei divergente Reihen positiver Glieder

$$u_1, u_3, u_5 \dots \text{ und } u_2, u_4, u_6 \dots$$

seien nun zu der bedingt convergenten Reihe

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = U$$

vereinigt, wobei nicht erforderlich ist, dass die u_k mit ungeradem Index demselben Bildungsgesetz folgen, wie die Glieder mit geradem

Index. U_k sei die Summe der ersten k Glieder. Bilden wir jetzt die neue Reihe

$$(u_1 + u_3 + \dots + u_{2p_1-1}) - (u_2 + u_4 + \dots + u_{2q_1}) + - \dots$$

so ist (bei derselben Bezeichnung wie in § 12) die mit einer negativen Gruppe abbrechende Summe der ersten $2n$ Gruppen oder $P_n + Q_n$ Einzelglieder:

$$V_{2n} = (u_1 + u_3 + \dots + u_{2P_n-1}) - (u_2 + u_4 + \dots + u_{2Q_n})$$

Je nachdem nun $P_n > Q_n$ oder $Q_n > P_n$ ist, wird V_{2n} im Vergleich mit

$$U_{2P_n} = (u_1 + u_3 + \dots + u_{P_n-1}) - (u_2 + \dots + u_{2P_n})$$

$P_n - Q_n$ negative Glieder *weniger*, oder $Q_n - P_n$ solche Glieder *mehr* enthalten, so dass wir schreiben können

$$V_{2n} - U_{2P_n} \left\{ \begin{array}{l} = \sum_{Q_n+1}^{P_n} u_{2k}, \text{ wenn } P_n > Q_n \\ = - \sum_{P_n+1}^{Q_n} u_{2k}, \text{ wenn } P_n < Q_n \end{array} \right.$$

Ziehen wir nun nach der Pringsheim'schen Methode die harmonische Reihe zur Vergleichung heran, indem wir schreiben

$$V_{2n} - U_{2P_n} = \sum_{Q_n+1}^{P_n} (k \cdot u_{2k}) \cdot \frac{1}{k} \quad (P_n > Q_n)$$

so muss es zwischen dem kleinsten und dem grössten der Werte

$$(Q_n + 1)u_{2Q_n+2}, (Q_n + 2)u_{2Q_n+4}, \dots, P_n u_{2P_n}$$

einen Mittelwert M_n geben, dergestalt dass

$$V_{2n} - U_{2P_n} = M_n \sum_{Q_n+1}^{P_n} \frac{1}{k}$$

Ist nun

$$\lim_{n = \infty} n u_{2n} = m$$

wo m endlich (auch 0) oder unendlich sein kann, so nimmt auch jedes der Producte, deren Mittelwert M_n ist, für $n = \infty$ den Wert m an, so dass auch $\lim M_n$ mit diesem übereinstimmen muss, und wir erhalten

$$(39) \quad \lim V_{2n} = U + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot u_{2n} \log \frac{P_n}{Q_n} \right]$$

und zwar auch für den Fall $P_n < Q_n$, da dann zwar P_n und Q_n zu vertauschen sind, dafür aber der Logarithmus das negative Zeichen bekommen muss, und beide Operationen einander aufheben.

Im übrigen gelten auch für Formel (39) die bei (37) gemachten Bemerkungen.

So ist $\sum v_k$ nur dann convergent und gleich $\lim V_{2n}$, wenn $\lim v_{2n+1} = 0$. Nun ist

$$v_{2n+1} = \frac{P_{n+1}}{\sum_{k=1}^{2n+1} u_{2k-1}}$$

also, auf demselben Wege wie vorher,

$$(40) \quad \begin{aligned} \lim v_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot u_{2n-1} \log \frac{P_{n+1}}{P_n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot u_{2n-2} \cdot \log \left(1 + \frac{P_{n+1}}{P_n} \right) \right] \end{aligned}$$

Ist z. B.

$$u_k = \frac{1}{k \cdot \log(k+1)}$$

sowol für gerade wie für ungerade k , so ist

$$\lim n u_{2n} = \lim n u_{2n-1} = 0$$

Der Wert von v_{2n+1} , sowie in (39) der von $n u_{2n} \log \frac{P_n}{Q_n}$ wird aber ausserdem noch davon abhängen, wie P_n und Q_n unendlich werden. Sind p_n und q_n , also auch P_n und Q_n , ganze Functionen gleich hohen Grades von n , so wird, nach dem in 12. Gesagten, $\lim v_{2n+1} = 0$ und $\lim V_{2n} = \lim V_{2n+1} = U$ sein, also keine Wertänderung eintreten. Während dort dagegen die neue Reihe divergirte, sobald der Grad der Functionen ein verschiedener war, wird hier die Convergenz noch statthaben, wenn der Grad von p_n und der von q_n sich um eine Einheit unterscheiden. Denn ist demgemäss etwa

$$\begin{aligned} P_n &= a_{r+1} n^{r+1} + \dots \\ Q_n &= b_r n^r + \dots \end{aligned}$$

so ist

$$n u_{2n} \cdot \log \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{2} \frac{\log \left(\frac{a_{r+1}}{b_r} n + \frac{a_r}{b_r} + \dots \right)}{\log(2n+1)}$$

nähert sich also der Grenze $\frac{1}{2}$. Da ausserdem $\lim v_{2n+1} = 0$, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe übertrifft die der ursprünglichen um $\frac{1}{2}$, während eine Verminderung um $\frac{1}{2}$ eintreten wird, wenn P_n vom Grade r , Q_n vom Grade $r+1$ ist. Von dieser Bedingung abgesehen, sind also sowol die Grade als die Coefficienten der für p_n und q_n zu wählenden Functionen ganz gleichgültig. Gelegentlich sei noch bemerkt, dass zwei solcher v -Reihen, wenn in der einen p_n , in der andern q_n den höheren Grad besitzt, hiernach stets die Differenz ± 1 ergeben, so dass danach die Einheit auf unzählig viele Arten durch Brüche von der Form $\frac{1}{k \log(k+1)}$ dargestellt werden kann.

Sind p und q constant, so geht (39) in den Schlömilch'schen Satz über, wonach die Wertänderung der u -Reihe

$$\frac{1}{2} \log \frac{p}{q} \cdot \lim (n u_n)$$

beträgt. —

Versagen wird Formel (39) nur in den Fällen, wo die Wertänderung in unbestimmter Form erscheint. Dies tritt ein, wenn

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = 0 \text{ oder } \infty \text{ und gleichzeitig } \lim n u_{2n} = 0$$

sowie, wenn

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = 1 \text{ und dabei } \lim n u_{2n} = \infty$$

ist. Da in diesen Fällen der wahre Wert von $0 \cdot \infty$ davon abhängt, in welcher Weise P_n und Q_n unendlich und u_{2n} null wird, lassen sie sich nicht erledigen, ohne über diesen Punkt besondere Voraussetzungen zu machen.

Dabei ist ferner zu beachten, dass zwar mit $\lim n u_{2n} = \infty$ auch jedes der Producte

$$(Q_n + 1) u_{2Q_n+2}, \dots P_n u_{2P_n}$$

und also auch ihr Mittelwert M_n unendlich wird, dass aber der Grad des Unendlichwerdens — und auf diesen kommt es wesentlich an — für den Mittelwert i. allg. nicht derselbe sein wird, wie für $n u_{2n}$. Ist z. B.

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$p_n = 2an + b$$

also

$$q_n = 2an$$

$$P_n = a(n^2 + n) + bn$$

$$Q_n = a(n^2 + n)$$

so sind jene Producte die Glieder der Reihe

$$\frac{P_n}{Q_{n+1}} \frac{k}{\sqrt{2k}} = \frac{an^2 + an + bn}{an^2 + an + 1} \sqrt{\frac{k}{2}}$$

und jedes derselben wird ∞ wie $n\sqrt{\frac{a}{2}}$ während $nu_{2n} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ weniger stark ∞ wird.

Bisweilen — und so auch hier — führt aber schon die Bemerkung zum Ziel, dass der Ausschnitt $\frac{P_n}{Q_{n+1}}$, der für $P_n > Q_n$ die Wertänderung darstellt, zwischen den Grenzen

$$\frac{P_n - Q_n}{u_2 Q_{n+2}} \quad \text{und} \quad \frac{P_n - Q_n}{u_2 P_n}$$

liegen muss. Für unser Beispiel fallen nämlich beide Grenzen zu dem Werte $\frac{b}{\sqrt{2a}}$ zusammen, der mithin die Wertänderung angiebt die nach (39) in der Form $\infty \cdot 0$ erscheinen würde.

Ob $\lim v_{2n+1}$ verschwindet, darf in solchem Falle ebensowenig nach (40) beurteilt werden, da auch diese Formel über die Art des Unendlichwerdens von M_n i. allg. nicht den richtigen Aufschluss erteilt. Nach (40) wäre der Mittelwert für unser Beispiel mit

$$\lim nu_{2n-1} = \lim \sqrt{\frac{n}{2}}$$

in Anschlag zu bringen, während

$$\log \left(1 + \frac{p_{n+1}}{P_n} \right) = \log \left(1 + \frac{2an + (2a + b)}{an^2 + (a + b)n} \right)$$

nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt, mit $\frac{2}{n}$ beginnt. Hiernach würde $\lim v_{2n+1}$ mit $\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{n}$ verschwinden, während in Wahrheit, wie wir sahen,

$$\lim v_{2n+1} = \lim \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot n \log \left(1 + \frac{p_{n+1}}{P_n} \right) = \sqrt{2a}$$

zu setzen ist. Da auch

$$\lim v_{2n} = \lim \sum_{an(n-1)+1}^{an(n+1)} \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sqrt{2a}$$

ist, wird die neue Reihe zwischen den Werten

$$\lim V_{2n} = U + \frac{b}{\sqrt{2a}} \quad \text{und} \quad \lim V_{2n+1} = U + \frac{b}{\sqrt{2a}} + \sqrt{2a}$$

oscilliren, aber convergiren, wenn wir sie in eine der Formen setzen:

$$V' = \sum (v_{2k-1} - v_{2k}) = U + \frac{b}{\sqrt{2a}}$$

$$V'' = v_1 - \sum (v_{2k} - v_{2k+1}) = U + \frac{b}{\sqrt{2a}} + \sqrt{2a}$$

Berlin, Januar 1887.

VI.

Verallgemeinerung des Entstehungsgesetzes der
Fusspunktcurven.

Von

Eduard Janisch.

1. Wir verallgemeinern das Entstehungsgesetz der Fusspunktcurven dahin, dass wir den Pol F auf einer Bahncurve B gleichzeitig mit dem Punkte P der Directrix D sich bewegen lassen. Wir erhalten dann, wenn wir durch die F auf die Tangenten t in dem ihrer (der F) Lage entsprechenden Punkte P der D Senkrechte fällen, in den Fusspunkten P^* derselben eine Reihe von Punkten, die einer Curve C angehören, welche eine verallgemeinerte positive Fusspunktcurve der D genannt werden mag. Dem analog werden wir eine verallgemeinerte negative Fusspunktcurve der D die Einhüllende aller jener Geraden t^* nennen können, deren jede durch einen Punkt P der D geht und normal ist zur entsprechenden PF . — Es liegt nun die Frage nahe: „Was ist erforderlich, damit eine Construction der Tangente in jedem beliebigen Punkte P^* einer verallg. pos. Fusspunktcurve, beziehungsweise eine Construction des Berührungspunktes einer beliebigen t^* einer verallg. neg. Fusspunktcurve leicht möglich wird?“

2. Wir bemerken zunächst, dass diese Constructionen zurückgeführt werden können auf die für die gewöhnlichen Fusspunktcurven. Es lässt sich nämlich, wenn wir eine verallg. pos. Fusspunktcurve vorliegen haben, auf jeder $FP^*(\equiv p)$ ein Punkt F^* so angeben, dass die erste pos. Fusspunktcurve der Directrix D be-

züglich dieses Punktes F^* in P^* eine Berührung mit der bewussten verallg. Fusspunktcurve eingeht. Ebenso kann im andern Falle, wenn wir eine verallg. neg. Fusspunktcurve gegeben haben, auf jeder FP ein Punkt F^* ermittelt werden, dem die Eigenschaft zukommt, dass die neg. Fusspunktcurve der D bezüglich desselben auf der t^* zur Berührung kommt mit der in Rede stehenden verallg. Fusspunktcurve. — Betreffs dieser Punkte F^* ist zu sagen, dass dieselben nichts andres sind, als Punkte der Enveloppe aller FP^* im ersten, aller FP im zweiten Falle und zwar ist der auf einer gewissen $FP^*(FP)$ liegende Punkt F^* identisch mit dem Berührungspunkte derselben, — eine Tatsache, die die Anschauung ohne weiteres bestätigt. Wir brauchen demnach jetzt nur zu untersuchen, unter welchen Umständen die Ermittlung der F^* einfach von Statten geht.

3. Es sind in Fig. 1. zwei benachbarte, willkürlich gewählte Lagen der Punkte F und P mit F_0, P_0 und F_1, P_1 bezeichnet, ferner mit P_0^*, P_1^* die entsprechenden Punkte der verallg. pos. Fusspunktcurve. Der Schnitt der $F_0 P_0^*, F_1 P_1^*$ wird der zu ermittelnde Punkt F_0^* , für dessen Entfernung x von F_0 sich aus dem Dreiecke $F_0 F_1 F_0^*$ ergibt:

$$x = dm \frac{\sin \nu}{\sin i}$$

da, wie aus der Figur ersichtlich, dm das Bogenelement $F_0 F_1$, ν der Winkel bei F_1 , und i der Winkel bei F_0^* genannt wurde. Nun ist aber i offenbar auch gleich dem Winkel, den die beiden Tangenten in P_0 und P_1 einschliessen, er ist also ein Contingenzwinkel, und wir haben daher

$$i = \frac{ds}{\rho}$$

wenn ds das Bogenelement $P_0 P_1$ und ρ den Krümmungsradius für P_0 bedeutet. Schreiben wir im Ausdruck für x anstatt $\sin i$

$$\frac{\sin i}{i} \cdot i$$

so erhalten wir, wenn für i der eben gefundene Wert substituirt wird, da unter den obwaltenden Verhältnissen

$$\frac{\sin i}{i} = 1$$

zu erachten ist:

$$x = \rho \sin \nu \frac{dm}{ds}$$

damit dieser Ausdruck und daher auch F_0^* für jede beliebige Lage von F_0, P_0 construirt werden kann, müssen also die entsprechen-

den ρ , $\frac{dm}{ds}$ und v constructibel sein. Hiezu ist notwendig, dass es

1) eine allgemeine Construction für den Krümmungskreis eines Punktes der D gibt, ferner dass es 2) möglich ist, stets das Verhältniss der gleichzeitigen Geschwindigkeiten der einander entsprechenden Punkte F und P anzugeben

$$\left(\text{da } \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dt} : \frac{ds}{dt} \right)$$

und endlich 3) dass man in jedem Punkte F der Bahncurve B die Tangente herzustellen vermag.

4. Wir untersuchen nun, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit F^* als Berührungspunkt einer FP constructiv ermittelt werden kann. — Wir haben zu dem Behufe in Fig. 2. wieder eine Bahncurve B und eine Directrix D ersichtlich gemacht, und auf ersterer einen Punkt P_0 , auf letzterer den ihm entsprechenden F_0 . Der Berührungspunkt F_0^* der F_0P_0 , als einer Tangente der Enveloppe aller FP , ergibt sich im Schnittpunkt der F_1P_1 , wenn F_1, P_1 die zu F_0, P_0 benachbarten, von ihnen um dm, ds abstehenden, entsprechenden Punkte sind. Nun bestimmen aber die Punktepaare F_0, F_1 und P_0, P_1 auf den Verlängerungen von dm, ds zwei ähnliche Punktreihen und das Erzeugniss derselben berührt offenbar F_0P_0 in F_0^* . Mit Benutzung dieses Resultates können wir also die Aufgabe „den Berührungspunkt einer Tangente der Enveloppe aller FP zu construiren“, zurückführen auf die „den Berührungspunkt einer Tangente einer als Erzeugniss zweier ähnlichen Punktreihen gegebenen Parabel zu ermitteln“. Es hängt somit die Durchführbarkeit einer graphischen Lösung unserer Aufgabe davon ab, dass die beiden Reihen für jede Lage von F und P construirt werden können. Dies erfordert die Erfüllung folgender Bedingungen: 1) Es müssen ihre Träger, d. s. die Tangenten in F und P , constructiv sein, und 2) es muss wieder das Verhältniss $\frac{dm}{ds}$ der gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Punkte F und P , als das Verhältniss entsprechender Strecken der F - und der P -Reihe, allgemein angegeben werden können — Auf eine Darlegung der Einzelheiten der nötigen Constructionen brauchen wir nicht einzugehen. Wir erwähnen blos, dass man am zweckmässigsten die dem Schnittpunkte X der beiden Träger entsprechenden Punkte Φ und Π der F - und P -Reihe benutzen wird, wenn sie samt X auf der Zeichenfläche zu liegen kommen. Im andern Falle wird man sich noch zwei Tangenten der Parabel verschaffen und den Satz von Brianchon in Anwendung bringen.

5. In dem Art. sei es uns gestattet einige einfache Fälle her-

vorzuheben, in welchen sofort zu erkennen ist, dass die Bedingung betreffend $\frac{dm}{ds}$ erfüllt wird.

a) Bahncurve B und Directrix D sind ähnliche Curven. Zugeordnete Punkte F und P sind homologe Punkte, $\frac{dm}{ds}$ ist dann constant und zwar gleich dem Verhältniss homologer Sehnen der B und D . Sind beide Curven congruent, so haben wir

$$\frac{dm}{ds} = 1$$

Wir können in diesem Specialfalle unter der weiteren beschränken- den Voraussetzung, dass B und D ein- oder mehrfache Symmetrie aufweisen, sogar Bahncurve und Directrix coincidiren lassen und erhalten bei einfacher Symmetrie blos eine verallg. pos. Fusspunkt- curve, die als Ort der Projectionen aller Punkte der gegebenen Curve auf die Tangenten der symmetrisch gelegenen definirt werden kann. Die verallg. neg. Fusspunktcurve degenerirt nämlich in dem Falle in ein Parallelstrahlenbüschel. — Bei mehrfacher (n -facher) Symmetrie ergeben sich hingegen zwei Gruppen verallg. pos. Fuss- punktcurven und eine Gruppe verallg. neg. Fusspunktcurven und zwar enthält die erste Gruppe der verallg. pos. Fusspunktcurven n (wenn n ungerade, sonst $2 \times \frac{n}{2}$) congruente Curven, die so zu Stande kommen wie bei einfacher Symmetrie, während die zweite Gruppe, die dadurch charakterisirt wird, dass F und P sich hinter einander bewegen und zwar so, dass ihre Entfernung auf der Bahncurve ge- messen stets constant $= \frac{m}{n}$ Teile deren Peripherie beträgt (m und n ganz), im Falle, dass n ungerade ist aus $(n-1)$ Curven besteht, von denen je zwei congruent sind, ist aber n gerade, so haben wir $\frac{n}{2}$ von ein- ander verschiedene Curven, worunter sich als bemerkenswerteste diejenige befindet, welche als Ort der Projectionen aller Punkte der gegebenen Curve auf die Tangenten in den diametral gegenüber liegenden erscheint¹⁾. — Weit einfachere Beziehungen walten hier ob

1) Für die Ellipse ist dies die Keelhoff'sche Curve. S. Mathesis, VI, 16: „Le lieu des projections d'un ellipse sur la tangente menée au point diamé- tralement opposé.“ In diesem Falle wird

$$x = e \frac{dm}{ds} \sin \nu = e, \text{ da } \frac{dm}{ds} = 1 \text{ und } \nu = \frac{\pi}{2}$$

bezüglich der verallg. negat. Fusspunktcuren. Die einzige Gruppe derselben, die vorhanden ist, setzt eine Bewegung der Punkte F und P voraus, die identisch ist mit der bei der zweiten Gruppe der verallg. pos. Fusspunktcuren angenommenen.

Nun ist aber die Enveloppe aller FP unter dieser Voraussetzung stets mit der ersten neg. Fusspunktcure der gegebenen Curve ähnlich, da deren (der Enveloppe) erste pos. Fusspunktcure bezügl. des Centrums O mit der gegebenen Curve ähnlich ist, welches letzteres Moment sehr leicht nachzuweisen ist, wenn man bemerkt, dass die Winkel FOP alle unter einander gleich sind. Ebenso leicht ist auch der Nachweis herzustellen, dass diese Enveloppen des weiteren mit den verallg. neg. Fusspunktcuren ähnlich sind. Mithin können wir sagen: „Alle verallg. neg. Fusspunktcuren sind im vorliegenden Falle mit der ersten negat. Fusspunktcure der gegebenen Curve bezüglich O ähnlich“.

Wir gehen nun zu einem andern Falle über:

b) Bahncurve B und Directrix D sind Kreise. Die Punkte F und P bewegen sich auf deren Peripherien mit gegebenen Geschwindigkeiten gleichförmig fort. In dem Falle sind offenbar alle Bedingungen erfüllt, insbesondere ist

$$\frac{dm}{ds} = \text{const} = \frac{r\gamma}{RI}$$

wenn r den Radius von B , R den Radius von D , γ die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit von F und endlich I die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit von P bedeutet. Man sieht, dass der Quotient $\frac{\gamma}{I}$, entscheidet, ob die auftretenden verallg. Fusspunktcuren wie auch die Enveloppen der $FP(FP^*)$ algebraisch oder transcendent werden, auch wird man leicht bemerken, dass der specielle Fall

$$\frac{\gamma}{I} = 1$$

zu subsumiren ist unter a). — Es bietet aber gerade dieser letztere Fall bezüglich der Einhüllenden der FP ein bemerkenswertes Resultat, wenn wir noch die Beschränkung einführen, dass B und D

ist. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich der Satz: „Beschreibt man über der Verbindungsstrecke eines Punktes A einer Ellipse mit dem Krümmungsmittelpunkt des diametral gegenüber liegenden als Durchmesser einen Kreis, so berührt dieser die Keelhoff'sche Curve in dem A entsprechenden Punkte“.

concentrisch liegen. (Selbstverständlich müssen die Bewegungen von F und P hier im entgegengesetzten Sinne erfolgen). Wir erlauben uns die nötigen analytischen Entwicklungen, welche die Natur dieser Enveloppe erkennen lassen werden, hier anzuführen:

Wir verlegen den Anfangspunkt unseres rechtwinkligen Coordinatensystemes in den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise B und D und leiten von den Lagen

$$F_0(x = 1, y = 0), \quad P_0(x = R, y = 0)$$

die angedeutete Bewegung dergestalt ein, dass gleichzeitige Lagen von F und P die Coordinaten haben:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} F, \quad \left. \begin{array}{l} x = R \cos \varphi \\ y = -R \sin \varphi \end{array} \right\} P$$

Als Gleichung der Verbindungsgeraden von F und P erhalten wir dann:

$$\frac{y - r \sin \varphi}{x - r \cos \varphi} = - \frac{(R + r) \sin \varphi}{(R - r) \cos \varphi}$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$I) \quad (R + r)x \sin \varphi + (R - r)y \cos \varphi = Rr \sin 2\varphi$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach φ ergibt sich:

$$II) \quad (R + r)x \cos \varphi - (R - r)y \sin \varphi = 2Rr \cos 2\varphi$$

Aus diesen beiden Gleichungen bestimmen sich leicht die Werte von x und y , der Coordinaten des Berührungspunktes der FP :

$$III) \quad x = \frac{2Rr}{R+r} \cos^3 \varphi, \quad y = \frac{2Rr}{R-r} \sin^3 \varphi$$

Durch Elimination von φ aus den beiden Gleichungen III) erhalten wir dann die Gleichung unserer Enveloppe:

$$IV) \quad \left(\frac{x}{\frac{2Rr}{R+r}} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{2Rr}{R-r}} \right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

welche dieselbe als die Evolute der Ellipse

$$\left(\frac{x}{\frac{R+r}{2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{R-r}{2}} \right)^2 = 1$$

zu erkennen gibt. — Mit Rücksicht auf dieses Ergebniss könnte man zu einer Construction der Krümmungskreise für Punkte einer

Ellipse gelangen ¹⁾. — Wir gehen hierauf nicht ein, sondern wenden uns sogleich der Untersuchung eines weiteren Specialfalles zu, der dadurch gekennzeichnet ist, dass B und D coincidiren. In dem Falle werden die Einhüllenden der FP congruent mit den verallg. neg. Fusspunktkurven. Der Beweis hiefür kann auf folgende Art gegeben werden: In den Fig. 3 sind durchgehends zwei entsprechende Lagen der F, P schlechtweg mit F, P bezeichnet und mit F' der zu F diametral gegenüberliegende Punkt, so dass $F'P$ die der Tangente FP der Enveloppe zugeordnete der verallg. neg. Fusspunktkurve wird. Ferner hat man X als jenen Punkt anzusehen, in welchen die Anfangslagen F_0, P_0 vereinigt sind. Demnach kann man für das Verhältniss der Winkel $FOX = \varphi, POX = \psi$ setzen:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\gamma}{\Gamma} = k (\text{const})$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe einen Punkt X' auf dem Kreise derart zu bestimmen, dass das Verhältniss der Winkel $F'OX' = \varphi', POX' = \psi' : \frac{\varphi'}{\psi'}$ auch gleich k wird. Es ist leicht abzusehen, zu welchem Zwecke dies geschieht. Stellt sich nämlich heraus, dass der für Winkel $X'OX = \xi$ sich ergebende Wert bloß von k abhängig ist, dann kann die Enveloppe der $F'P$ analog zu Stande gebracht werden, wie die der FP und ist folglich mit derselben congruent, w. z. b. w. Dies ist aber tatsächlich der Fall, denn man findet für

gleichgerichtete Bewegung der Punkte F, P :

wenn $\frac{\varphi}{\psi} = k < 1$, (Fig. 3a):

$$\xi = \frac{1 - 2k}{1 - k} \pi$$

$\frac{\varphi}{\psi} = k > 1$, (Fig. 3b):

1) In Herrn Dr. K. Schwing's Schrift: „Theorie und Anwendungen der Liniencoordinaten etc. Leipzig 1884“. befindet sich auf S. 77, Art. 94 eine analytische Untersuchung der „Enveloppen aller FP “, wenn B und D concentrische Kreise sind, für den allgemeinen Fall $\left(\frac{\gamma}{\Gamma}, \text{beliebig}\right)$, welche das bemerkenswerte Resultat liefert, dass deren Brennpunkte aequidistant auf einem mit B und D concentrischen Kreise gelagert sind. Es wird dann auch der Fall in Betracht gezogen, dass die beiden Kreise zusammen fallen, und mit Zuhilfenahme des Imaginären sogar eine allgemeine Gleichung dieser Enveloppe hergestellt, ohne dass gesagt wird, dass dieselben mit den Cykloiden identisch sind. Wir werden dies weiter unten nachweisen.

$$\xi = \frac{2k-3}{k-1} \pi$$

und für entgegengesetzt gerichtete Bewegung derselben:

wenn $\frac{\varphi}{\psi} = k < 1$, (Fig. 3c):

$$\xi = \frac{1}{1+k} \pi$$

$\frac{\varphi}{\psi} = k > 1$, (Fig. 3d):

$$\xi = \frac{1}{k+1} \pi$$

Die Ableitung des einen oder des anderen dieser Ausdrücke geht sehr einfach von Statten. Es sei uns gestattet die vollständige Rechnung bloß für Fig. 3a hier anzuführen. Wir entnehmen dieser Fig.:

$$\varphi' = \pi - \varphi - \xi, \quad \psi' = 2\pi - \psi - \xi$$

daher erhält man für $\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\varphi}{\psi} = k$

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\pi - \varphi - \xi}{2\pi - \psi - \xi}$$

und hieraus ξ :

$$\xi = \frac{2\varphi - \psi}{\varphi - \psi} \pi = \frac{2k-1}{k-1} \pi$$

Ebenso ergeben sich die Werte von ξ für die anderen Fälle. — Wir ziehen aus diesen Resultaten vorläufig keine Consequenzen, sondern untersuchen jetzt, mit was für Curven wir es eigentlich zu tun haben.

Nehmen wir an, in den Fig. 3 bedeute OX die pos. Richtung der Abscissenaxe und es sei $\varphi = p\vartheta$, $\psi = q\vartheta$, wobei p stets pos., q aber pos. oder neg. sein mag, so haben wir:

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos p\vartheta \\ y = \rho \sin p\vartheta \end{array} \right\} F \quad \left. \begin{array}{l} x = \rho \cos q\vartheta \\ y = \rho \sin q\vartheta \end{array} \right\} P$$

Die Verbindungslinie FP erhält also die Gleichung:

$$\frac{y - \rho \sin p\vartheta}{x - \rho \cos p\vartheta} = \frac{\sin p\vartheta - \sin q\vartheta}{\cos p\vartheta - \cos q\vartheta}$$

oder

$$x(\sin p\vartheta - \sin q\vartheta) - y(\cos p\vartheta - \cos q\vartheta) = \rho \sin(p - q)\vartheta$$

$$I) \quad x \cos \frac{p+q}{2} \vartheta + y \sin \frac{p+q}{2} \vartheta = \rho \cos \frac{p-q}{2} \vartheta$$

Diese Gleichung nach ϑ differentiirt gibt:

$$II) \quad x \sin \frac{p+q}{2} \vartheta - y \cos \frac{p+q}{2} \vartheta = \rho \frac{p-q}{p+q} \sin \frac{p-q}{2} \vartheta$$

also bekommen wir für die Coordinaten des Berührungspunktes FP die Werte:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \left(\cos \frac{p+q}{2} \vartheta \cdot \cos \frac{p-q}{2} \vartheta + \frac{p-q}{p+q} \sin \frac{p+q}{2} \vartheta \cdot \sin \frac{p-q}{2} \vartheta \right) \\ &= \rho \frac{p \cos q\vartheta + q \cos p\vartheta}{p+q} \\ III) \quad y &= \rho \left(\sin \frac{p+q}{2} \vartheta \cdot \cos \frac{p-q}{2} \vartheta - \frac{p-q}{p+q} \cos \frac{p+q}{2} \vartheta \cdot \sin \frac{p-q}{2} \vartheta \right) \\ &= \rho \frac{p \sin q\vartheta + q \sin p\vartheta}{p+q} \end{aligned} \right\}$$

Es seien nun p und q pos., $p > q$. Setzen wir in den Gl. III):

$$\frac{p}{p+q} \rho = R+r, \quad \frac{q}{p+q} \rho = r, \quad q\vartheta = \omega, \quad \text{also } p\vartheta = \frac{R+r}{r} \omega$$

($\rho = R+r$)

dann erhalten wir

$$IIIa) \quad \left. \begin{aligned} x &= (R+r) \cos \omega + r \cos \frac{R+r}{r} \omega \\ y &= (R+r) \sin \omega + r \sin \frac{R+r}{r} \omega \end{aligned} \right\}$$

d. s. die Gleichungen einer Epicycloide, welche durch Wälzung des Kreises mit dem Radius r auf dem mit dem Radius R zu Stande kommt. — Dieselben Gleichungen hätten wir gefunden, wenn $q > p$ angenommen worden wäre, und wir

$$\frac{q}{q+p} \rho = R+r, \quad \frac{p}{p+q} \rho = r, \quad p\vartheta = \omega, \quad q\vartheta = \frac{R+r}{r} \omega$$

substituirt hätten. — Anders gestaltet sich die Sache, wenn q negativ vorausgesetzt wird; die Gl. III) können dann geschrieben werden:

$$III') \quad \left. \begin{aligned} x &= \rho \frac{p \cos q\vartheta - q \cos p\vartheta}{p-q} \\ y &= \rho \frac{-p \sin q\vartheta - q \sin p\vartheta}{p-q} \end{aligned} \right\}$$

und, wenn nun gesetzt wird ($p > q$):

$$\frac{p}{p-q} \varrho = R-r, \quad \frac{q}{p-q} \varrho = r, \quad q\vartheta = \omega, \quad p\vartheta = \frac{R-r}{r} \omega$$

$$(\varrho = R-2r)$$

dann ergeben sich die Ausdrücke:

$$\text{III'a) } \left. \begin{aligned} x &= (R-r) \cos \omega - r \cos \frac{R-r}{r} \omega \\ y &= -(R-r) \sin \omega - r \sin \frac{R-r}{r} \omega \end{aligned} \right\}$$

welche erkennen lassen, dass wir eine Hypocykloide vorliegen haben, die durch Wälzung eines Kreises vom Radius r auf einem Kreise vom Radius R entstehen kann ¹⁾. — Dass das Resultat einer analogen Substitution für den Fall $p < q$ wieder Gleichungen einer Hypocykloide gibt, ist vorauszusehen; wir brauchen wol auf das Nähere nicht mehr eingehen.

Interessant wäre es zu erfahren, ob nicht unter Umständen die Enveloppe der FP mit der verallg. neg. Fusspunktcurve zur Coincidenz kommt. Um hierüber Aufschluss zu bekommen, müssen wir die Werte für ξ heranziehen. Es wird dies offenbar dann eintreten, wenn die Gleichung

$$\bar{\varphi} + \xi = 2m\pi$$

erfüllt ist, unter $\bar{\varphi}$ den Winkel \bar{FOX} verstanden, unter \bar{F} einen Punkt der mit dem ihm entsprechenden \bar{P} in X' zusammenfällt, und endlich unter m eine ganze Zahl. — Die dies bezüglichen Untersuchungen müssen für die durch die vier Fig. 3 veranschaulichten Fälle für die ersten zwei für jeden separat und können für die übrigen zwei für beide zugleich durchgeführt werden.

(Fig. 3a). In dem Falle findet zwischen $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ (W. \bar{POX}) die Beziehung statt:

$$\bar{\psi} = \bar{\varphi} + 2n\pi$$

(n ganz), woraus folgt, da

$$\bar{\psi} = \frac{1}{k} \bar{\varphi} \text{ ist:}$$

1) Wir hätten auch setzen können:

$$\frac{q}{p-q} \varrho = R-r', \quad \frac{p}{p-q} \varrho = r', \quad p\vartheta = \omega', \quad q\vartheta = \frac{R-r'}{r'} \omega'$$

$$(2r' - R = \varrho)$$

und würden dann allerdings ein anderes Gleichungssystem III'a) bekommen haben, Dasselbe hätte aber nichtsdestoweniger dieselbe Hypocykloide definiert, da ja $r + r' = R$ ist.

$$\bar{\varphi} = \frac{2nk}{1-k} \pi$$

Dieser Wert, sowie der für ξ

$$\xi = \frac{1-2k}{1-k} \pi$$

eingeführt in

$$\bar{\varphi} + \xi = 2m\pi$$

gibt:

$$\frac{2nk}{1-k} \pi + \frac{1-2k}{1-k} \pi = 2n\pi$$

hieraus:

$$k = \frac{p}{q} = \frac{2m-1}{2(m+n-1)} = \frac{r}{R+r}$$

eine Grösse, die tatsächlich für ganzzahlige m und n stets kleiner als 1 bleibt. Man sieht, dass das Verhältniss $\frac{p}{q}$ gleich dem einer kleineren ungeraden zu einer grösseren geraden Zahl sein muss, und dass ferner, da man findet

$$\frac{r}{R} = \frac{2m+1}{2n-1}$$

das Verhältniss des Radius des rollenden Kreises zum Radius des Grundkreises der entsprechenden Epicykloide gleich dem zweier ungerader Zahlen ist. (Beispiel: $p = 1, q = 2; m = 1, n = 1, \xi = 0$; Kardioiden).

(Fig. 3b). Hier ist

$$\bar{\varphi} = \bar{\psi} + 2n\pi$$

also

$$\bar{\varphi} = \frac{2nk}{k-1} \pi$$

und

$$\bar{\varphi} + \xi = \frac{2nk}{k-1} \pi + \frac{2k-3}{k-1} \pi = 2m\pi$$

woraus folgt

$$k = \frac{p}{q} = \frac{2m-3}{2(m-n-1)} = \frac{R+r}{r}$$

welcher Ausdruck auch keinen Widerspruch birgt, daher kann in dem Falle die fragliche Coincidenz gleichfalls stattfinden, und zwar geschieht dies dann, wenn das Verhältniss $\frac{p}{q}$ gleich ist dem einer grösseren ungeraden zu einer kleineren geraden Zahl, und die Epicykloiden die hier auftreten sind dadurch charakterisirt, dass das Verhältniss des Radius des rollenden zu dem des festen Kreises

gleich sein muss dem einer geraden zu einer ungeraden Zahl, denn man bekommt

$$\frac{r}{R} = \frac{2(m-n-1)}{2n-1}$$

(Fig. 3c, 3d). Man hat in diesen beiden Fällen:

$$\bar{\varphi} + \bar{\psi} = 2n\pi$$

demnach resultirt für $\bar{\varphi}$

$$\bar{\varphi} = \frac{2nk}{k+1} \pi$$

und somit wird:

$$\bar{\varphi} + \xi = \frac{2nk}{k+1} \pi + \frac{1}{k+1} \pi = 2m\pi$$

und

$$k = \frac{p}{q} = \frac{2m-1}{2(n-m)} = \frac{R-r}{r} = \frac{r'}{R-r'}$$

ein Ausdruck, welcher sowol grössere, wie auch kleinere Werte als 1 annehmen kann. Es ist also die Coincidenz in beiden Fällen möglich und zwar dann, wenn das Verhältniss $\frac{p}{q}$ gleich kommt dem Verhältniss einer ungeraden zu einer geraden Zahl. Bezüglich der Art der Hypocykloiden ist hier auch eine Beschränkung zu verzeichnen, denn man findet:

$$\frac{r}{R} = \frac{2(n-m)}{2n-1}, \quad \frac{r'}{R} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

mithin sind diejenigen ausgeschlossen, bei welchen das Verhältniss des Radius des rollenden zum Radius des stabilen Kreises gleich kommt dem einer ungeraden zu einer geraden Zahl, was übrigens schon aus dem Ausdruck für $\frac{p}{q}$ ersichtlich ist.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen berücksichtigend, können wir ungezwungen zu folgenden beiden, die hier aufgetretenen, speciellen Cykloiden betreffenden Sätzen gelangen:

„Ein Teil des geometr. Ortes aller Schnittpunkte von zu einander senkrechten Tangenten an eine dieser Cykloiden ist deren Inbez. Umkreis“.

„Jede dieser Epi- oder Hypocykloiden ist die Enveloppe von mit ihr concentr. Ellipsen oder Hyperbeln, deren Hauptaxe constant = dem Durchmesser des Um- oder Inkreises derselben und deren ein Brennpunkt die Cykloide durchläuft“.

Hiermit wollen wir mit dem sehr dankbaren Fall b) abschliessen und nur noch kurz eines weiteren gedenken:

c) Bahncurve B und Directrix D sind ähnliche ein- oder mehrfach schief-symmetrische Curven (klinogr. oder axonometr. Projectionen orthogonal symmetr. Curven). F und P sind zugeordnete Punkte, wenn der bezüglich einer bestimmten Symmetrale symmetrisch zu F gelegene Punkt F' dem Punkt P homolog ist. Für das Verhältniss

$$\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dm'} \cdot \frac{dm'}{ds}$$

wo dm' das Bogenelement bei F' bedeutet, erhalten wir

$$\frac{dm}{ds} = \frac{FT}{F'T} \cdot k$$

wenn wir mit T den auf der entsprechenden Symmetrale gelegenen Schnittpunkt der Tangenten in F und F' an die B bezeichnen und unter k das Verhältniss homologer Sehnen der B und D verstehen wollen. Um alle Fälle zu erschöpfen, müssen wir die Zuordnung aber noch allgemeiner gestalten. Wir müssen nämlich zwei Symmetralen s_1, s_2 herausgreifen und zu einem angenommenen Punkt F den bezüglich s_1 symmetrischen F_1 und zu diesem den bezüglich s_2 symmetrischen F_2 ermitteln. Zuletzt zu F_2 den homologen Punkt P der D . Wenn wir dann bezeichnen mit T, T_1 die beziehungsweise auf s_1, s_2 gelegenen Schnittpunkte der Tangenten in F und F_1, F_1 und F_2 , so haben wir für $\frac{dm}{ds}$:

$$\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dm_1} \cdot \frac{dm_1}{dm_2} \cdot \frac{dm_2}{ds} = \frac{FT}{F_1T} \cdot \frac{F_1T_1}{F_2T_1} \cdot k$$

unter dm_1, dm_2 , die Bogenelemente in F_1, F_2 verstanden und unter k dasselbe wie oben.

Auch hier wird der Fall besonders hervorzuheben sein, dass $k = 1$ ist, die Curven B und D mithin congruent sind, in welchem Falle man noch weiter specialisiren kann, indem man dieselben zusammenfallen lässt. In's Detail gehen wir, des geringen Interesses dieser Curven wegen, aber nicht mehr ein.

Wien, im Januar 1889.

VII.

Zur sphärischen Schleifenlinie.

Von

Eduard Janisch.

Herr Professor Schiffner hat im 5. Teil der zweiten Reihe dieses Archivs interessante Untersuchungen mitgeteilt über eine Curve — die sphärische Schleifenlinie —, welche mich auch bereits vor längerer Zeit beschäftigte. Ich fand diese Curve ursprünglich als Ort aller jener Punkte der (kugelförmigen) Erdoberfläche, deren geographische Länge gleich ist der geographischen Breite, oder allgemeiner, deren geographische Länge um eine constante Grösse von der geographischen Breite differirt.

Bezüglich der Curve selbst können wir nicht viel mehr bemerken, wol aber werden wir im Folgenden uns eingehender mit geometr. Gebilden beschäftigen, welche mit dieser Schleifenlinie in gewisser Beziehung stehen.

Wählen wir die Erdachse zur z -Achse, die Ebene des Aequators zur xy -Ebene und die Ebene des Anfangsmeridians zur xz -Ebene, dann müssen wir einem Punkte P , dessen geogr. Länge $\lambda =$ der geogr. Breite φ ($\lambda = \varphi = u$) ist, die Coordinaten zuweisen:

$$x = r \cos^2 u, \quad y = r \sin u \cos u, \quad z = r \sin u$$

wo r den Erdradius bedeutet. — In der citirten Abhandlung des Herrn Prof. Schiffner ist nun unter anderem gezeigt, dass die stereogr. Projection der Schleifenlinie aus deren reellem Doppelpunkte ($x = r, y = \theta, z = \theta$) eine gleichseitige Hyperbel mit der Achse $2r$

wird. Hieran anknüpfend erwähnen wir, dass auch noch für die Projectionscentra ($x = 0, y = 0, z = \pm r$), ($x = -r, y = 0, z = 0$) bekannte Curven als Projectionen auftreten.

Leiten wir zunächst die Gleichung der Projection aus dem Centrum ($x = -r, y = 0, z = 0$) ab. Wir finden als Gleichungen der Verbindungslinie eines Curvenpunktes P mit diesem Centrum:

$$\eta = \frac{\sin u \cos u}{1 + \cos^2 u} (\xi + r), \quad \zeta = \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u} (\xi + r), \quad \eta = \zeta \cos u$$

Also sind für die Coordinaten des Schnittpunktes π derselben mit der yz -Ebene zu setzen:

$$\xi = \theta, \quad \eta = r \frac{\sin u \cos u}{1 + \cos^2 u}, \quad \zeta = r \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u}$$

und mithin werden wir die Gleichung des Ortes der Π , das ist die der gesuchten Projection der Schleifenlinie, erhalten durch Elimination von u aus:

$$\frac{\eta}{\xi} = \cos u, \quad \eta^2 + \zeta^2 = r^2 \frac{\sin^2 u}{1 + \cos^2 u}$$

Wir finden leicht:

$$(\zeta^2 + \eta^2)^2 = r^2(\zeta^2 - \eta^2)$$

die Gleichung einer Lemniskate des Bernoulli

Für ($x = \theta, y = \theta, z = \pm r$) als Projectionscentrum bekommen wir dagegen eine Strophoide. Wir haben in dem Falle als Gleichungen der Verbindungslinie des Projectionscentrums mit einem Curvenpunkte anzusetzen:

$$\xi = \frac{\cos^2 u}{\sin u \mp 1} (\zeta \mp r), \quad \eta = \frac{\sin u \cos u}{\sin u \mp 1} (\zeta \mp r), \quad \xi = \eta \cot u$$

und als Coordinaten des Schnittpunktes Π desselben mit der xy -Ebene:

$$\xi = \mp r \frac{\cos^2 u}{\sin u \mp 1}, \quad \eta = \mp r \frac{\sin u \cos u}{\sin u \mp 1}, \quad \zeta = \theta$$

Für ξ kann auch geschrieben werden:

$$\xi = \pm r(\sin u \pm 1) = r(1 \pm \sin u)$$

Hieraus folgt für $\sin u$:

$$\sin u = \pm \frac{\xi - r}{r}$$

Mit Berücksichtigung dieses Wertes und der Beziehung $\xi = \eta \cot u$ resultirt dann für $\cos u$:

$$\cos u = \pm \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\xi - r}{r}$$

und wir erhalten endlich durch Substitution in $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$$(\xi - r)^2 (\xi^2 + \eta^2) = r^2 \eta^2$$

oder entwickelt:

$$(\xi^2 - 2r\xi) (\xi^2 + \eta^2) + r^2 \xi^2 = 0$$

Hierin den Factor ξ unterdrückt und η^2 isolirt gibt:

$$\eta^2 = \frac{\xi(r - \xi)^2}{2r - \xi}$$

die Gleichung einer Strophoide, deren Doppelpunkt die Coordinaten $(\xi = r, \eta = 0)$ und deren Asymptote die Gleichung $\xi = 2r$ hat ¹⁾.

Soviel wollten wir noch bezüglich der Schleifenlinie selbst bemerken. — Was nun des weiteren folgen wird, betrifft einfache Schnitt- und Durchdringungscurven 1) jenes Kegels K , der die Schleifenlinie enthält und seine Spitze im Anfangspunkt der Coordinaten hat, und 2) jener geraden Konoide, die eine der Coordinatenachsen zu Achsen haben, und auf deren Oberfläche diese Curve ebenfalls zu liegen kommt.

Gemäss der Definition des Kegels K können wir eine beliebige Erzeugende desselben darstellen durch die Gleichungen:

$$\eta = \xi \cdot \operatorname{tg} u, \quad \eta = \xi \cdot \cos u$$

Hieraus folgt sogleich:

$$\sin u = \frac{\eta^2}{\xi \zeta}$$

und wir haben daher:

1) Mit Hilfe einer Karte der Planigloben, die sich in jedem Atlas vorfindet, kann man sich dieses, wie das vorhergehende Resultat leicht veranschaulichen. Verbinden wir nämlich beispielsweise (auf der Hauptkarte) die Punkte, deren geogr. Coordinaten sind: (90° w. L., 0° Br.), 100° w. L., 10 n. Br.), . . . (170° w. L., 80° n. Br.), (180° w. L., 90° n. Br.), (10° w. L., 80° n. Br.), . . . (80° w. L., 10° Br.), (90° w. L., 0° Br.), (100° w. L., 10° s. Br.), . . . etc., so erhalten wir eine Lemniskate. — Verbinden wir aber von diesen Punkten, etwa die auf der nördl. Halbkugel gelegenen, in dem einen Nebenkärtchen, welches eben diese Erdhälfte in stereogr. Polarprojection dargestellt, so ergibt sich die Schleife einer Strophoide.

$$\sin^2 u + \cos^2 u = \frac{\eta^4}{\xi^2 \zeta^2} + \frac{\eta^2}{\zeta^2} = 1$$

als Gleichung dieses Kegels. Selbe gibt geordnet:

$$\eta^2(\xi^2 + \eta^2) = \xi^2 \zeta^2 \quad \text{oder} \quad \eta^4 = \xi^2(\xi^2 - \eta^2)$$

Setzen wir hierin $\zeta = \delta$, so erhalten wir:

$$\eta^2(\xi^2 + \eta^2) = \delta^2 \xi^2$$

die Gleichung eines in der Höhe $\zeta = \delta$ zur xy -Ebene parallel geführten Schnittes. Durch Einführung der Polarcordinaten ρ , φ mittels der Relationen $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$ nimmt jene Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\zeta = \pm \delta \cos \varphi$$

welche eine leichte Construction einzelner Punkte der Curve an die Hand gibt. — Für $\varphi = 0$ wird $\rho = \infty$ und $\eta = \rho \sin \varphi = \pm \delta$, so dass die Geraden $\eta = \pm \delta$ Asymptoten der Curve sind.

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ wird ρ gerade $= \pm \delta$ und endlich für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich:

$$\rho = 0$$

was besagt, dass die Curve im Ursprung (der ein Doppelpunkt ist) die Ordinatenaxe berührt. Wir fanden, dass diese Curve identisch ist mit der Subtangenten-Ordinaten-Curve des Kreises $x^2 + y^2 = \delta^2$.

Ist nämlich $\xi = r'(\text{Subtang.}) = \frac{y^2}{x}$ und $\eta = y$ (x, y ein Punkt des Kreises), so ergibt sich zunächst:

$$x = \frac{\eta^2}{\xi}$$

und nach Substitution dieses Wertes für x und des für $y(-\eta)$ in $x^2 + y^2 = \delta^2$:

$$\frac{\eta^4}{\xi^2} + \eta^2 = \delta^2 \quad \text{oder} \quad \eta^2(\xi^2 + \eta^2) = \delta^2 \xi^2$$

als Gleichung der Subtangenten-Ordinatencurve des obigen Kreises, welche Gleichung übereinstimmt mit der für den Schnitt unseres Kegels.

Führen wir in der Gleichung:

$$\eta^4 = \xi^2(\xi^2 - \eta^2)$$

ein $\eta = \delta$, so erhalten wir:

$$\delta^4 = \xi^2(\zeta^2 - \delta^2)$$

als analyt. Aequivalent des Schnittes einer in der Entfernung $\eta = \delta$ zur xz -Ebene parallel gelegten Ebene. Diese Schnittcurve hat zu Asymptoten: Die Achse der ζ und die beiden Geraden $\zeta = \pm \delta$. Sie passirt die Achse der ξ nicht, folglich besteht sie aus vier zu den Coordinatenachsen symmetrisch gelegenen, getrennten Aesten, deren jeder diesen Achsen die convexe Seite zukehrt. — Suchen wir diejenigen Punkte, in welchen die Tangenten an die Curve unter $\frac{\pi}{4}$ gegen die Ox geneigt sind. Verbinden wir zu dem Zwecke ihre Gleichung mit der eines Kreises um O mit dem Radius ρ , so haben wir nach Elimination von ζ aus den beiden so sich bietenden Gleichungen:

$$\delta^4 = \xi^2(\rho^2 - \xi^2 - \delta^2) \quad \text{oder} \quad \xi^4 - (\rho^2 - \delta^2)\xi^2 = -\delta^4$$

woraus wir für die Abscissen der diesen zwei Curven gemeinsamen Punkte gewinnen:

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\rho^2 - \delta^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\rho^2 - \delta^2)^2}{4} - \delta^4}}$$

Ist

$$\frac{(\rho^2 - \delta^2)^2}{4} - \delta^4 = 0$$

also

$$\rho = \delta\sqrt{3}$$

dann berührt der Kreis unsere Curve in den vier symmetrisch gelegenen Punkten, in welchen die Tangenten die verlangte Eigenschaft haben, und wir bekommen für deren Abscissen:

$$\xi = \pm \delta$$

und für die Applicaten:

$$\zeta = \pm, \mp \delta\sqrt{2}$$

Untersuchen wir endlich noch die Schnittcurve einer zur yz -Ebene in der Entfernung $\xi = \delta$ parallel gelegten Ebene. Diese Curve bekommt die Gleichung:

$$\eta^2(\delta^2 + \eta^2) = \delta^2 \zeta^2$$

Derselben kann vor allem entnommen werden, dass die Curve durch den Ursprung zweimal hindurchgeht. Um die Richtungen der beiden Tangenten in diesem Doppelpunkte zu erfahren, substituieren wir $\zeta = A\eta$ und erhalten so:

$$\delta^2 + \eta^2 = \delta^2 A^2$$

d. i. für $\eta = 0$

$$A = \pm 1$$

Somit sind die beiden Tangenten im Ursprung unter je 45° gegen die Achsen der η und ζ geneigt. Im übrigen bemerkt man noch leicht, dass die Curve überall der Achse der η die convexe Seite zuwendet, und dass sie sich ins Unendliche erstreckt ohne Asymptoten zu besitzen.

Nachdem wir jetzt die einfachsten, ebenen Schnitte erledigt haben, möchten wir uns erlauben complicirtere heranzuziehen: nämlich Schnitte projicirender Ebenen, da auch diese Fälle einiges Bemerkenswerte liefern. Und zwar wollen wir da zuerst eine Grundrissprojic. Ebene E wählen, die durch den Punkt $(\xi - \delta, -0, \zeta - 0)$ geht. Dieselbe habe die Gleichung

$$\eta = a(\xi - \delta)$$

Die Projection von deren Schnittcurve mit dem Kegel auf die Ebene $\xi\zeta$ wird dann gegeben sein durch

$$\xi^2 \zeta^2 = a^2(\xi - \delta)^2[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] \tag{1}$$

Dieser Gleichung kann sofort entnommen werden, dass selbe Projection im Punkte $\xi = \delta, \zeta = 0$ einen Doppelpunkt hat, ferner dass die ζ -Achse Asymptote ist. Differentiiren wir die Gleichung, so erhalten wir:

$$\xi \zeta^2 + \xi^2 \zeta \zeta' = a^2\{(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] + (\xi - \delta)^2[\xi + a^2(\xi - \delta)]\}$$

also für ζ'

$$\zeta' = \frac{a^2\{(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] + (\xi - \delta)^2[\xi + a^2(\xi - \delta)]\} - \xi \zeta^2}{\xi^2 \zeta} \tag{2}$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn

$$a^2\{(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] + (\xi - \delta)^2[\xi + a^2(\xi - \delta)]\} = \xi \zeta^2 \tag{3}$$

Eliminiren wir aus der soeben erhaltenen Bedingungsgleichung und der Curvengleichung ζ^2 , dann finden wir

$$(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] = \xi\{[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] + (\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)]\}$$

oder nach einiger Reduction

$$a^2(\xi - \delta)^3 = \xi^3 + 2a^2\xi(\xi - \delta)^2$$

$$a^2 = \frac{\xi^3}{(\xi - \delta)^2(\xi + \delta)} \tag{4}$$

woraus sich endlich ergibt

$$(1 + a^2)\xi^3 - a^2\delta\xi^2 - a^2\delta^2\xi + a^2\delta^3 = 0 \tag{5}$$

eine Gleichung in ξ , deren einzige reelle Wurzel die gemeinsame Abscisse des höchsten und tiefsten Punktes unserer Projectionscurve liefert.

Eliminiren wir aus (1) und (4) ... a^2 ... so erhalten wir

$$\xi^3 \zeta^2 = - \frac{\xi^3}{\xi + \delta} \left[\xi^2 - \frac{\xi^3}{\xi + \delta} \right]$$

Nach gehöriger Zusammenziehung und Kürzung

$$\zeta^2 = - \frac{\delta \xi^3}{(\delta + \xi)^2} \quad (6)$$

das ist die Gleichung jener Curve, auf der die höchsten und tiefsten Punkte aller jener Curven (1) zu liegen kommen, welche durch Variation von a , durch Drehung von $\eta = a(\xi - \delta)$ um $(\xi = \delta, \eta = 0)$ zu Stande gebracht werden. Wollen wir erfahren, welche Punkte des Kegels auf die Ebene der $\xi\zeta$ projectirt werden müssen, um die Curve (6) zu erhalten, so können wir hierauf die Antwort auf mehrfache Weise erhalten, am einfachsten dadurch, dass wir in (4) an die Stelle von a setzen $\frac{\eta}{\xi - \delta}$. Es ergibt sich auf die Art

$$\eta^2 = - \frac{\xi^3}{\delta + \xi} \quad (7)$$

eine Bedingung, an welche die Ordinaten und Abscissen jener Kegelpunkte geknüpft sind, — nichts andres als die Gleichung ihres Grundrisses, einer gewöhnlichen Cissoide, deren Spitze im Ursprung liegt, und deren Asymptote die Gerade $\xi = -\delta$ ist. Dieses Ergebniss wird man zweckmässig bei einer graphischen Lösung der Aufgabe: die höchsten und tiefsten Punkte unserer Curve zu suchen — entsprechend verwerthen. Wir halten uns dabei nicht auf, sondern gehen gleich daran die Richtung der Tangenten im Doppelpunkte $(\xi = \delta, \zeta = 0)$ zu ermitteln. Wir können zu dem Ende nach der bekannten Regel für die Auswertung der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ Zähler und Nenner des Ausdrucks (2) für ζ' differentiiren und finden so, wenn wir gleich $\xi = \delta, \zeta = 0$ einführen:

$$\zeta' = \frac{a^2 \delta^2}{\delta^2 \zeta'}, \quad \zeta'^2 = a^2$$

also

$$\zeta' = \pm a \quad (8)$$

Nun bleibt uns noch die Frage nach den Asymptoten zu erledigen. Wir haben bereits die Achse der ζ als Asymptote erkannt. Um die übrigen zwei zu bestimmen, die zweifellos vorhanden sind, setzen

wir in der Curvengleichung (1) $\zeta = A\xi$ und bekommen, wenn wir gleich auf der linken und rechten Seite durch ξ^4 dividiren

$$A^2 - a^2 \left(1 - \frac{\delta}{\xi}\right)^2 \left[1 + a^2 \left(1 - \frac{\delta}{\xi}\right)^2\right]$$

also für $\xi = \infty$

$$A = a \sqrt{1 + a^2} \tag{9}$$

Substituiren wir nun

$$\zeta = \xi a \sqrt{1 + a^2} + B$$

so resultirt

$$\begin{aligned} &\xi^2 [a^2(1 + a^2)\xi^2 + 2B\xi a \sqrt{1 + a^2} + B^2] \\ &\quad - a^2[\xi^2 + \delta(\delta - 2\xi)][\xi^2(1 + a^2) + a^2\delta(\delta - 2\xi)] \end{aligned}$$

Dies ausmultiplicirt gibt:

$$\begin{aligned} &2B\xi^3 a \sqrt{1 + a^2} + B^2\xi^2 \\ &\quad - a^2\delta[\xi^2(1 + a^2)(\delta - 2\xi) + a^2\xi^2(\delta - 2\xi) + a^2\delta(\delta - 2\xi)] \end{aligned}$$

und wenn wir uns durch ξ^3 hierin durchgehends dividirt denken und und hernach $\xi = \infty$ eingeführt voraussetzen, dann hat man

$$2Ba \sqrt{1 + a^2} = -2a^2\delta(1 + 2a^2)$$

also

$$B = -\frac{a(1 + 2a^2)}{\sqrt{1 + a^2}} \delta \tag{10}$$

so dass die beiden Asymptoten die Gleichung haben

$$\zeta = \pm a \sqrt{1 + a^2} \left[\xi - \frac{1 + 2a^2}{1 + a^2} \delta \right] \tag{11}$$

Die Construction derselben kann auf folgende Weise vorgenommen werden: Man lege durch die Spitze des Kegels K eine Ebene ϵ parallel zu unserer Schnittebene E ; bestimme, die in ϵ gelegenen Erzeugenden k_1, k_2 und die längs derselben tangirenden Ebenen τ_1, τ_2 mit Hilfe der Schleifenlinie. Die Schnittlinien von τ_1, τ_2 mit E geben dann bekanntlich projecirt die gesuchten Asymptoten. — Sollte der freundliche Leser versuchen die Curve darzustellen, so

möge er $\delta = 2$ bis 3 cm annehmen und $a = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(a = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right)$.

In dem speciellen Falle ist der aus Gleichung (5) sich ergebende

Wert für $\xi = \frac{\delta}{2}$ und die zugehörigen $\zeta = \pm \delta\sqrt{3}$. Ferner wird die

Gleichung der Asymptoten

$$\zeta = \pm \frac{2}{3}(\xi - \frac{1}{2}\delta)$$

Aus der Figur dieser Curve wird ersichtlich sein, dass zu einem ausgiebigen posit. Werte von ξ zwei zur $\xi\xi'$ symmetr. Wendepunkte gehören, was nicht nur für $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$, sondern allgemein gilt. Da die Bestimmung derselben aber auf eine zu weitläufige Rechnung führt, so glauben wir hiervon absehen zu dürfen.

Wir gehen dader gleich über zur Untersuchung des Schnittes einer aufrissprojicirenden Ebene E mit der Gleichung $\zeta = a(\xi - \delta)$. Die Gleichung von dessen Grundriss wird sein

$$a^2 \xi^2 (\xi - \delta)^2 = \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) \quad (1)$$

Derselben entnimmt man, dass diese Projectioncurve den Ursprung und ebenso den Punkt ($\xi = \delta, \eta = 0$) zu Doppelpunkten hat, und ferner auch noch, dass die η -Achse die Tangente im ersteren Doppelpunkt ist, so dass in diesem Punkte zwei Aeste der Curve sich berühren. Um die Richtung der beiden Tangenten im zweiten Doppelpunkt zu erfahren, können wir wie folgt vorgehen. Wir setzen in (1) $\eta = A(\xi - \delta)$ und bekommen nach Unterdrückung von $(\xi - \delta)^2$

$$a^2 \xi^2 = A^2 [\xi^2 + A^2 (\xi - \delta)^2] \quad (2)$$

eine Gleichung, welche durch die Abscissen $\xi_{1,2}$ der beiden noch übrigen Schnittpunkte der Geraden $y = A(\xi - \delta)$ mit der Curve (1) erfüllt wird. Soll aber diese Gerade in ($\xi = \delta, \eta = 0$) tangiren, dann muss Gleichung (2) für $\xi = \delta$ bestehen, was nur sein kann, wenn $A = \pm a$ ist. Mithin sind die beiden Tangenten in dem Doppelpunkte gegeben durch

$$\eta = \pm a(\xi - \delta) \quad (3)$$

Differentiiren wir (1) nach ξ , so erhalten wir

$$a^2 [\xi(\xi - \delta)^2 + \xi^2(\xi - \delta)] = \eta\eta'(\xi^2 + \eta^2) + \eta^2(\xi + \eta\eta')$$

und hieraus

$$\eta' = \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{a^2(\xi - \delta)(2\xi - \delta) - \eta^2}{\xi^2 + 2\eta^2} \quad (4)$$

η' verschwindet, wenn

$$\eta^2 = a^2(\xi - \delta)(2\xi - \delta)$$

ist. Setzen wir diesen Wert für η^2 in (1) ein, so ergibt sich eine Gleichung in ξ , deren einzige, reelle, zwischen 0 und $+\frac{\delta}{2}$ gelegene Wurzel die Abscisse des höchsten und tiefsten Punktes liefert. Selbe Gleichung lautet:

$$a^2 \xi^2 (\xi - \delta)^2 = a^2 (\xi - \delta) (2\xi - \delta) [\xi^2 + a^2 (\xi - \delta) (2\xi - \delta)]$$

nach Kürzung:

$$\xi^2 (\xi - \delta) = (2\xi - \delta) [\xi^2 + a^2 (\xi - \delta) (2\xi - \delta)]$$

oder a^2 isolirt

$$a^2 = - \frac{\xi^3}{(\xi - \delta) (2\xi - \delta)^2} \quad (5)$$

oder endlich nach fallenden Potenzen von ξ geordnet

$$(1 + 4a^2)\xi^3 - 8a^2\delta\xi^2 + 5a^2\delta^2\xi - a^2\delta^3 = 0 \quad (6)$$

Nehmen wir den Wert von a^2 aus (5) und setzen denselben ein in

$$\eta^2 = a^2 (\xi - \delta) (2\xi - \delta)$$

so resultirt

$$\eta^2 = \frac{\xi^3}{\delta - 2\xi} \quad (7)$$

Die Gleichung des Ortes der höchsten und tiefsten Punkte der Grundrissprojectionen aller Schnittcurven, die durch Drehung von E um $(\xi = \delta, \zeta = 0)$ zu Stande kommen. Dieser Ort ist eine elliptische Cissoide, wie aus folgendem hervorgeht. Es sei die Gleichung einer Ellipse

$$\frac{(\xi - m)^2}{m^2} + \frac{\eta^2}{n^2} = 1$$

oder

$$\xi^2 n^2 + \eta^2 m^2 = 2\xi m n^2$$

in Polarcoordinaten

$$\rho(n^2 \cos^2 \varphi + m^2 \sin^2 \varphi) = 2m n^2 \cos \varphi$$

Ziehen wir durch O , den Ursprung, eine beliebige Gerade unter dem Winkel φ gegen die Polarachse geneigt, welche die Ellipse zum zweiten Mal in P und die Gerade $\xi = 2m$ in Q trifft, so hat der P entsprechende Punkt der elliptischen Cissoide die Polarcoordinaten

$$\rho \text{ und } \sigma = \overline{OQ} - \overline{OP} = \frac{2m}{\cos \varphi} - \rho$$

Die Polargleichung dieser Cissoide wird sich demgemäss aus der für die Ellipse ergeben, wenn wir hierin einführen

$$\rho = \frac{2m}{\cos \varphi} - \sigma$$

wodurch wir erhalten:

$$(2m - \sigma \cos \varphi)(n^2 \cos^2 \varphi + m^2 \sin^2 \varphi) = 2m n^2 \cos^2 \varphi$$

Durch Wiedereinführung der cartes. Coordinaten resultirt:

$$(2m - \xi)(n^2 \xi^2 + m^2 \eta^2) = 2m n^2 \xi^2$$

oder nach Isolirung von η^2 :

$$\eta^2 = \frac{\xi^3}{\frac{m^2}{n^2}(2m - \xi)} \quad (8)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (7), so finden wir, dass sie mit derselben identisch wird, wenn

$$\frac{2m^3}{n^2} = \delta \quad \text{und} \quad \frac{m^2}{n^2} = 2$$

also

$$m = \frac{\delta}{4}, \quad n = \frac{\delta}{4} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist. Aus diesen Resultaten ersehen wir, dass unsere Curve tatsächlich eine Cissoide ist, und zwar die einer Ellipse, bei welcher die kleine Achse gleiche Grösse mit der Excentricität hat. —

Um die Asymptoten der Curve (1) zu erhalten, setzen wir in deren Gleichung

$$\eta = A\xi$$

dividiren beiderseits durch ξ^4 und bekommen

$$a^2 \left(1 - \frac{\delta}{\xi}\right)^2 = A^2(1 + A^2)$$

also für $\xi = \infty$

$$a^2 = A^4 + A^2$$

woraus sich ergibt ¹⁾

1) Wählen wir für a der Reihe nach Werte, welche bewirken, dass

$$\sqrt{1+4a^2} = 3, 5, 7, \dots$$

wird, so ergibt sich folgendes Schema

$$\sqrt{1+4a_1^2} = 3; \quad a_1 = \sqrt{2}; \quad A_1 = \sqrt{1} \quad - a_1 = A_1 A_2$$

$$\sqrt{1+4a_2^2} = 5; \quad a_2 = \sqrt{6}; \quad A_2 = \sqrt{2} \quad - a_2 = A_2 A_3$$

$$\sqrt{1+4a_3^2} = 7; \quad a_3 = \sqrt{12}; \quad A_3 = \sqrt{3} \quad - a_3 = A_3 A_4$$

$$\sqrt{1+4a_4^2} = 9; \quad a_4 = \sqrt{20}; \quad A_4 = \sqrt{4} \quad - a_4 = A_4 A_5$$

etc.

Man ersieht hieraus, dass, wenn a die Quadratwurzel aus einer Barlong'schen Zahl ist, $A =$ der Quadratwurzel aus dem entsprechenden Gliede der natürlichen Zahlenreihe wird.

$$(a = \sqrt{n(n+1)}, \quad A = \sqrt{n})$$

$$A = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})} \quad (9)$$

Führen wir nun in (1) ein

$$\eta = \xi \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})} + B$$

dann haben wir:

$$a^2 \xi^2 (\xi - \delta)^2 = \left[\frac{1}{2} \xi^2 (-1 + \sqrt{1 + 4a^2}) + 2B\xi \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})} + B^2 \right] \left[\frac{1}{2} \xi^2 (1 + \sqrt{1 + 4a^2}) + 2B\xi \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})} + B^2 \right]$$

Dies teilweise ausmultipliziert liefert:

$$-2a^2 \xi^3 \delta + a^2 \xi^2 \delta^2 = [2B\xi \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})} + B^2] \xi^2 \sqrt{1 + 4a^2}$$

nach Division mit ξ^2 :

$$-2a^2 \delta + a^2 \frac{\delta^2}{\xi} = B \left[2 \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})} + \frac{B}{\xi} \right] \sqrt{1 + 4a^2}$$

woraus für $\xi = \infty$ gefunden wird:

$$B = - \frac{a^2}{\sqrt{1 + 4a^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})}} \delta \quad (10)$$

Mithin haben die beiden Asymptoten die Gleichung

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a^2})} \left[\xi - \delta \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{\sqrt{1 + 4a^2}} \right] \quad (11)$$

Aus dieser ersehen wir, dass der (natürlich in die Abscissenachse fallende) Schnitt derselben stets zwischen die Punkte $\left(\xi = \frac{\delta}{2}, \eta = 0 \right)$ und $(\xi = \delta, \eta = 0)$ zu liegen kommt, also in die zweite Hälfte der Strecke von $\xi = 0$ bis $\xi = \delta$, während, wie wir schon früher bemerkten (was erst aus Gl. (7) hervorgeht) die Projection der höchsten und tiefsten Punkte auf die Achse der ξ im Gegensatze hierzu stets in der ersten Hälfte, zwischen den Punkten $(\xi = 0, \eta = 0)$, $\left(\xi = \frac{\delta}{2}, \eta = 0 \right)$ enthalten ist.

Das bisher Gesagte genügt, um uns von der Gestalt der Curve eine richtige Vorstellung zu bilden. Es gilt diesbezüglich folgendes: 1) Die Punkte für die negat. ξ gehören einem Aste derselben an, der überall der Abscissenachse die hohle Seite zukehrt, ferner 2) Es formiren die Curvenpunkte für die ξ von $\xi = 0$ bis $\xi = \delta$ eine Schlinge und dann endlich 3) Es wendet die Curve in ihrem

weiteren Verlaufe anfangs der Abscissenachse die gewölbte und später bis ins Unendliche wieder die hohle Seite zu, so dass in dem letzteren Bezirke zwei, selbstverständlich bezüglich der Achse der ξ symmetrisch gelegene Inflexionspunkte auftreten müssen. Die Berechnung derselben, die auf erhebliche Weitläufigkeiten führt, sei uns erlassen.

Wir gelangen nun zur Untersuchung der Schnittcurve einer kreuzrissprojicirenden Ebene: $\xi = a(\eta - \delta)$. Die Gleichung der Projection derselben auf die Ebene der ξ, η lautet

$$a^2 \xi^2 (\eta - \delta)^2 = \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) \quad (1)$$

Diese Curve enthält den Ursprung als Doppelpunkt und berührt in demselben sich selbst längs der Ordinatenachse; denn setzt man in (1) $\eta = A\xi$, so findet man:

$$A^2 \xi^2 (1 + A^2) = a^2 (A\xi - \delta)^2$$

welcher Ausdruck für $\xi = 0$ nur für $A = \infty$ bestehen kann. — Isoliren wir in Gl. (1) ξ^2 , dann ergibt sich:

$$\xi^2 = \frac{\eta^4}{a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2} \quad (1')$$

eine zweite Form der Gleichung der Projectioncurve, aus der zu ersehen ist, dass diese Curve zwei zur ξ -Achse parallele Asymptoten besitzt, deren Gleichungen sind:

$$\eta = \frac{a}{a-1} \delta, \quad \eta = \frac{a}{a+1} \delta \quad (2)$$

Man bemerkt leicht, dass dieselben zu beiden Seiten der Abscissenachse zu liegen kommen, wenn (ohne Rücksicht auf das Zeichen) $a < 1$ ist, während im Gegenfalle ($a > 1$) beide auf derselben Seite sich vorfinden. Endlich coincidirt für die ganz specielle Annahme $a = \pm 1$ die eine mit der unendlich weiten Geraden und die andre erhält die Gleichung $\eta = \frac{1}{2} \delta$. — Untersuchen wir nun, ob es nicht auch schiefgerichtete Asymptoten gibt. Setzen wir zu dem Ende in (1') $\xi = A\eta$. Wir erhalten dann:

$$A^2 = \frac{1}{a^2 \left(1 - \frac{\delta}{\eta}\right)^2 - 1}$$

woraus für $\eta = \infty$ hervorgeht:

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (3)$$

Hierauf gesetzt

$$\xi = \frac{\eta}{\sqrt{a^2 - 1}} + B$$

gibt:

$$\frac{\eta^2}{a^2 - 1} + \frac{2B\eta}{\sqrt{a^2 - 1}} + B^2 - \frac{\eta^4}{a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2}$$

nach Wegschaffung der Brüche

$$(\eta^2 + 2B\eta\sqrt{a^2 - 1} + B^2)[(a^2 - 1)\eta^2 - 2a^2\delta\eta + a^2\delta^2] = \eta^4(a^2 - 1)$$

Dies zum Teile reducirt, gibt weiters:

$$B[2\eta\sqrt{a^2 - 1} + B][(a^2 - 1)\eta^2 - 2a^2\delta\eta + a^2\delta^2] - a^2\delta\eta^2(2\eta - \delta) = 0$$

und hieraus folgt endlich, wenn durch η^3 dividirt und hernach $\eta = \infty$ eingeführt wird:

$$B = \frac{a^2}{(a^2 - 1)\delta} \delta \quad (4)$$

Somit haben die beiden noch übrigen Asymptoten die Gleichung

$$\xi = \frac{\eta}{\pm\sqrt{a^2 - 1}} + \frac{a^2\delta}{\pm\sqrt{(a^2 - 1)^3}} \quad (5)$$

oder auf eine andre Form gebracht

$$\eta = \pm \xi \sqrt{a^2 - 1} - \frac{a^2}{a^2 - 1} \delta \quad (5')$$

Man sieht, dass dieselben nur dann reell sind, wenn $a^2 > 1$ vorausgesetzt wird, was auch geometrisch evident ist. Ferner bemerkt man, dass für den Grenzfall $a^2 = 1$ dieselben mit der unendlich weiten Geraden coincidiren. — Aus all dem, was wir bisher bezüglich der in Betrachtung stehenden Curve gefunden haben, erhellt zur Genüge, dass die absolute Grösse von a deren Gestalt wesentlich beeinflusst. Es wird sich dies noch weiters bestätigen, wenn wir untersuchen, ob nicht ausser dem Ursprung andere Punkte existiren, in welchen die Tangenten parallel zur η -Achse sind. — Wir bestimmen zu dem Behufe

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \xi'$$

$$\begin{aligned} \xi\xi' &= \frac{2\eta^3[a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2] - \eta^4[a^2(\eta - \delta) - \eta]}{[a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2]^2} \\ &= \eta^3 \frac{a^2(\eta - \delta)(\eta - 2\delta) - \eta^2}{[a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2]^2} \end{aligned}$$

$$\xi' = \frac{\eta^3}{\xi} \cdot \frac{a^2(\eta - \delta)(\eta - 2\delta) - \eta^2}{[a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2]^2} \quad (6)$$

ξ' wird 0, wenn die Bedingungsgleichung erfüllt ist:

$$a^2 = \frac{\eta^2}{(\eta - \delta)(\eta - 2\delta)} \quad (7)$$

welche auch geschrieben werden kann:

$$\eta^2(a^2 - 1) - 3a^2\delta\eta + 2a^2\delta^2 = 0 \quad (7')$$

Diese Gleichung gibt aufgelöst:

$$\eta_{1,2} = \frac{3a^2\delta}{2(a^2 - 1)} \pm \frac{a\delta}{2(a^2 - 1)} \sqrt{a^2 + 8} \quad (8)$$

die Werte der Ordinaten der von uns gesuchten Punkte. Es sind diese beiden Werte positiv und ist der kleinere derselben bereits $> \frac{a\delta}{a+1}$ (a ohne Zeichen zu nehmen), woraus schon hervorgeht, dass für $a^2 < 1$ die zugehörigen $\xi_{1,2}$ imaginär werden, also in dem Falle derlei Punkte nicht bestehen. Das letztere gilt auch für $a^2 = 1$; hingegen ergeben sich, wenn $a^2 > 1$, zwei zur η -Achse symmetr. für den grösseren der Werte $\eta_{1,2}$, da sich von diesem leicht nachweisen lässt, dass er nicht nur $> \frac{a\delta}{a+1}$, sondern auch $> \frac{a\delta}{a-1}$ ist, während der kleinere unter $\frac{a\delta}{a-1}$ bleibt und daher zu keinem reellen Punkte führen kann¹⁾. Eine Bestätigung werden diese Ergebnisse

1) Die Behauptung, dass der kleinere der Werte $\eta_{1,2}$ in dem gekennzeichneten Falle ($a > 1$) unter $\frac{a\delta}{a-1}$ bleibt, lässt sich auf folgende Art beweisen. Man setze

$$\begin{aligned} \frac{a\delta}{2(a^2-1)} (3a - \sqrt{a^2+8}) &= \frac{a\delta}{2(a^2-1)} [2(a+1) - \nu] = \frac{a\delta}{a-1} \\ &\quad - \nu \frac{a\delta}{2(a^2-1)} = \eta_2 \end{aligned}$$

dem augenscheinlich kleinerem Werte. Damit diese Annahme besteht, muss offenbar

$$\nu = 2 - a + \sqrt{a^2 + 8}$$

sein, welcher Wert für $a > 1$ stets positiv ausfällt, und daher ist

$$\eta^2 = \frac{a\delta}{a-1} - \nu \frac{a\delta}{2(a^2-1)}$$

factisch $< \frac{a\delta}{a-1}$. -- Auf ähnliche Art lassen sich auch die anderen oben angeführten Tatsachen verificieren.

erfahren, wenn wir wieder den gewissen geometrischen Ort durch Elimination von a aus (1') und (7) bestimmen. Wir finden als Gleichung desselben ohne Schwierigkeit:

$$\xi^2 \delta = \eta^2 (\eta - 2\delta) \quad (9)$$

Die hiedurch charakterisirte Curve besitzt nur reelle Punkte für posit. Ordinaten $> 2\delta$; für $\eta = 2\delta$ ergibt sich $\xi = 0$ — ihr Scheitel, welcher demnach vom Ursprung weiter entfernt ist, als der Fuss-

punkt der einen Asymptote $\eta = \frac{a}{a+1} \delta$ von der Ordinatenachse. —

Um diejenige Curve des Kegels kennen zu lernen, deren Grundriss die Gleichung (8) hat, verschaffen wir uns die Gleichung ihres Kreuzrisses. Selbe erhalten wir, wenn wir in (5) für $a \dots \frac{\xi}{\eta - \delta}$ setzen; sie lautet:

$$\xi^2 = \frac{\eta^2 (\eta - \delta)}{\eta - 2\delta} \quad (10)$$

Die bisherigen Resultate genügen um die sypischen Formen der unserer Betrachtung unterzogenen Curve genau festzustellen. Wir heben Folgendes hervor:

1) Ist $a < 1$, so besteht die Curve aus zwei im Ursprunge längs der Achse der η sich berührenden Zweigen, die zwei zur Achse der ξ parallele und zu beiden Seiten derselben gelegene Asymptoten besitzen, wovon diejenige, welche den dritten und zweiten Quadranten durchquert, weiter von dieser Axe absteht, als die andere.

2) $a > 1$. In dem Falle besteht unsere Curve aus vier Aesten, von denen natürlich je zwei bezüglich der Achse der η symmetrisch gelegen sind. Sie besitzt vier reelle Asymptoten. Zwei hiervon sind parallel zur Abscissenaxe und durchsetzen beide den ersten und vierten Quadranten, die übrigen sind zu den Axen schief gerichtet. Der gemeinsame Punkt der letzteren liegt auf der negat. η -Achse. Die beiden ausschliesslich im ersten und vierten Quadranten gelegenen Aeste der Curve haben keinen Contact mit einander. Sie schneiden die Achsen nicht, und von den zur ξ -Achse parallelen Asymptoten gehört ihnen die von dieser Axe weiter entfernte an. Dagegen haben die zum grössten Teile im zweiten und dritten Quadranten gelegenen Aeste mit den Coordinatenachsen den Ursprung gemein, in welchem sie sich längs der η -Achse berühren, und haben zur gemeinsamen Asymptote (von den beiden zur ξ -Achse parallelen) die derselben näher gelegene.

3) Für den Grenzfall $a = 1$ resultirt endlich eine Curve, welche aus zwei sich gleichfalls im Ursprung längs der Ordinatenachse be-

rührenden Zweigen besteht, die sich einerseits einer im ersten und vierten Quadranten gelegenen zur ξ -Achse parallelen Asymptote nähern und andererseits parabolisch ins Unendliche sich erstrecken¹⁾.

Einfach gestaltet sich die Quadratur dieser Curven, denn man hat für den zwischen einem Bogen derselben, der Ordinatenachse und zweien zur Abscissenachse parallelen Geraden $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ gelegenen Flächenraum das Integral

$$S = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{a^2 \delta^2 - 2a^2 \delta \eta - (1 - a^2) \eta^2}}$$

welches mit Hilfe der bekannten Reductionsformeln zurückgeführt werden kann auf das folgende

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{a^2 \delta^2 - 2a^2 \delta \eta - (1 - a^2) \eta^2}} &= (1 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\arcsin \frac{(1 - a^2) \eta + a^2 \delta}{a \delta} \right]_{\eta_1}^{\eta_2} \\ &= (a^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \left[\log \text{nat} \left(- \frac{a^2 \delta}{\sqrt{a^2 - 1}} + \eta \sqrt{a^2 - 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{a^2 \delta^2 - 2a^2 \delta \eta + (a^2 - 1) \eta^2} \right) \right]_{\eta_1}^{\eta_2} \end{aligned}$$

Man findet nämlich:

1) In bemerkenswerter Beziehung steht zu dieser Curve die Neil'sche (semikubische) Parabel. Diese erscheint nämlich als Ort der Halbirungspunkte der durch den Doppelpunkt der ersteren gehenden Sehnen, wie aus nachstehender Rechnung hervorgehen wird. — Es sei die Gl. einer solchen Sehne

$$\xi = m\eta$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der der Curve

$$\xi^2 = \frac{\eta^4}{(\eta - \delta)^2 - \eta^2} = \frac{\eta^4}{\delta(\delta - 2\eta)}$$

so ergibt sich:

$$\eta^2 + 2m^2 \delta \eta - m^2 \delta^2 = 0$$

woraus zwei Werte $\eta_{1,2}$ für η folgen, welche die Ordinaten der Endpunkte jener Sehne sind. Bedeutet y die Ordinate und x die Abscisse des Halbirungspunktes, dann hat man

$$y = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = -m^2 \delta, \quad x = m y$$

und mithin als Gleichung des Ortes dieser Halbirungspunkte

$$y^3 = -\delta x^2$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{a^2 \delta^2 - 2a^2 \delta \eta - (1-a^2)\eta^2}}$$

$$= \frac{1}{2}(1-a^2)^{-2} \left[\left\{ [3a^2 \delta - \eta(1-a^2)] \sqrt{a^2 \delta^2 - 2a^2 \delta \eta - (1-a^2)\eta^2} \right\}_{\eta_1}^{\eta_2} \right. \\ \left. + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{a^2(1+2a^2)\delta^2 \cdot d\eta}{\sqrt{a^2 \delta^2 - 2a^2 \delta \eta - (1-a^2)\eta^2}} \right]$$

woraus sich z. B. für $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \frac{a}{1+a} \delta$ ($a < 1$) ergibt:

$$S_1 = \frac{a^2}{2(1-a^2)^2 \sqrt{1-a^2}} \left[(1+2a^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a \right) - 3a \sqrt{1-a^2} \right] \cdot \delta^2$$

und für $\eta_1 = -\frac{a}{1-a} \delta$, $\eta_2 = 0$

$$S_2 = \frac{a^2}{2(1-a^2)^2 \sqrt{1-a^2}} \left[(1+2a^2) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin a \right) + 3a \sqrt{1-a^2} \right] \cdot \delta^2$$

so dass für $2(S_1 + S_2)$, das ist für die ganze von den Asymptoten und der Curve begrenzte (von der Achse der η durchschnittene) Fläche resultirt

$$S = 2(S_1 + S_2) = \frac{a^2(1+2a^2)}{(1-a^2)^2 \sqrt{1+a^2}} \delta^2 \pi$$

Ist $a = 1$, dann erscheint bei Benutzung der obigen Formeln das Integral für die Fläche S_1 in unbestimmter Form. In dem Falle könnte man wol die Auswertung nach den Regeln der Differentialrechnung vornehmen, weit einfacher ist aber die directe Behandlung

Man hat, wenn $a = 1$ ist:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{a^2 \delta^2 - 2a^2 \delta \eta - (1-a^2)\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{\delta - 2\eta}}$$

welches Integral durch die Substitution

$$\delta - 2\eta = \delta \zeta^2$$

übergeht in das folgende:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{\delta - 2\eta}} = -\frac{1}{4}\delta^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} (1 - \xi^2)^2 d\xi = -\frac{1}{4}\delta^2 \left[\xi - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{5}\xi^5 \right]_{\xi_1}^{\xi_2}$$

Setzen wir

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \frac{a}{a+1}, \quad \delta = \frac{1}{2}\delta$$

also

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0$$

dann ergibt sich die von der Asymptote, der Curve und der η -Achse eingeschlossene Fläche S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{\frac{1}{2}\delta} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{\delta - 2\eta}} = \frac{1}{4}\delta^2 \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right] = \frac{2}{15} \delta^2 = \frac{8}{15} \cdot \left(\frac{\delta}{2} \right)^2$$

Hiermit wollen wir die Untersuchungen über die ebenen Schnitte des Kegels $\xi^2 \zeta^2 = \eta^2 (\xi^2 + \eta^2)$ abschliessen und übergehen zur Betrachtung der Projectionen einiger Durchdringungscurven desselben mit einfachen Flächen zweiter Ordnung. Wir fassen uns dabei sehr kurz und geben bloß eine tabellarische Uebersicht, welche der Reihe nach enthalten wird die Projectionsgleichungen der Durchdringungscurven des Kreiscylinders $\xi^2 + \eta^2 = r^2$, des Rotationsparaboloids $\xi^2 + \eta^2 = p\xi$, der parabol. Cylinder $\eta^2 = -p\xi$, $\xi^2 = p\eta$ und endlich des hyp. Cylinders $\xi\xi = a^2$.

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 = r^2: \quad \xi^2 \zeta^2 &= r^2(r^2 - \xi^2) \text{ oder in Parameterdarstellung} \\ \xi &= r \cos u, \quad \zeta = r \operatorname{tg} u; \quad \eta^2 \zeta^2 = r^2(\zeta^2 - \eta^2) \text{ oder} \\ \eta &= r \sin u, \quad \zeta = r \sin u \operatorname{tg} u \end{aligned}$$

$\xi^2 + \eta^2 = p\xi$: $p^2 \eta^2 = \xi^2(\xi^2 + \eta^2)$; die hierdurch charakterisirte Curve ist identisch mit dem Schnitte der Ebene $\xi = p$. Die beiden übrigen Projectionen sind Curven dritter Ordnung

$$\xi^2 = \frac{p^2 \zeta}{p + \zeta}, \quad \eta^2 = \frac{p \zeta^2}{p + \zeta}$$

$\eta^2 = -p\xi$: Gibt denselben Aufriss wie $\xi^2 + \eta^2 = p\xi$

$$\xi^2 = \frac{p^2 \zeta}{p + \zeta}$$

Der Grundriss hat dagegen die Gleichung:

$$\xi^2 \eta^2 = p^2(\xi^2 + \eta^2)$$

$\xi^2 = p\eta^2$: Bloß bemerkenswert der Grundriss

$$\xi^2 = \frac{\eta^3}{\eta - \zeta}$$

eine Cissoide.

$\xi\zeta = \alpha^2$: Auch hier nur die Grundrisscurve hervorzuheben, da selbe uns später wieder begegnet, Gleichung:

$$\alpha^4 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)^2$$

Unserm Programme nach kommen wir nun zu den geraden Konoiden, deren Leitlinie die Schleifenlinie und deren Achse eine der Coordinatenachsen ist und zwar beschränken wir uns auf die, deren Achse die Achse der ξ und ζ ist.

Eine Erzeugende des ersteren hat die Gleichungen:

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{y}{z} = \cos u, \quad \xi = x = r \cos^2 u$$

somit besteht zwischen den drei Coordinaten eines Punktes desselben die sehr einfache Beziehung:

$$\xi\zeta^2 = r\eta^2$$

Es ist dies Konoid also eine Fläche bloß dritter Ordnung, wie man sieht. — Der Schnitt einer zur Grundrissebene parallelen Ebene $\zeta = \delta$ wird eine Parabel:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{r} \xi$$

und der Schnitt einer aufrissparallelen Ebene $\eta = \delta$ wird die Differentialcurve einer Parabel:

$$\xi\zeta^2 = r\delta^2$$

Bemerkenswerte Ergebnisse liefern noch die Schnitte von Ebenen, welche durch die η - oder ζ -Achse hindurchgehen. So erhält man für $\zeta = m\xi$:

$$\xi^3 = \frac{r\eta^2}{m^2}$$

die Gleichung einer Neil'schen Parabel; für $\eta = m\xi$:

$$\zeta^2 = m^2 r \xi$$

die Gleichung einer gemeinen Parabel.

Von weiterem Interesse dürfte es sein, dass die Durchdringungscurve des Kreiskegels

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$$

mit dem Konoide sich auf die Ebene der ξ, η als Cissoide des Diokles projectirt, denn man erhält durch Elimination von ζ aus den Gleichungen des Kegels und des Konoids:

$$\xi(\xi^2 + \eta^2) = r\eta^2$$

oder

$$\eta^2 = \frac{\xi^3}{r - \xi}$$

Führt man diesen Wert von η^2 in die Konoidengleichung ein, so ergibt sich:

$$\zeta^2 = \frac{r\xi^2}{r - \xi}$$

die Gl. des Aufrisses der Durchdringungcurve. — Derlei einfache Projectionsgleichungen, wie die soeben erhaltene, haben auch die Durchdringungen C_ξ, C_η der Kegel $K_\xi \dots \xi^2 = \eta^2 + \zeta^2, K_\eta \dots \eta^2 = \zeta^2 + \xi^2$. Man wird finden:

$$\left. \begin{aligned} \eta^2 &= \frac{\xi^2}{r + \xi} \\ \zeta^2 &= \frac{r\xi^2}{r + \xi} \end{aligned} \right\} C_\xi \quad \left. \begin{aligned} \eta^2 &= \frac{\xi^2}{\xi - r} \\ \zeta^2 &= \frac{r\xi^2}{\xi - r} \end{aligned} \right\} C_\eta$$

Nun wollen wir die Projectionsgleichungen des Ortes der dem Konoide und dem Rotationsparaboloide $\eta^2 + \zeta^2 = p\xi$ gemeinsamen Punkte aufstellen. Wir erhalten

$$\zeta^2(\eta^2 + \zeta^2) = r\eta^2$$

als Gl. des Kreuzrisses einer Curve, die uns hier schon wiederholt begegnet ist; ferner als Gleichungen des Auf- und Grundrisses:

$$\zeta^2 = p \frac{r\xi}{r + \xi}, \quad \eta^2 = \frac{p}{r} \cdot \frac{r\xi^2}{r + \xi}$$

d. s. Gleichungen, welche Curven angehören, die affin sind mit kurz vorher gefundenen.

Zum Beschlusse geben wir eine Tabelle der Projectionen der Durchdringungen parab. und hyperb. Cylinder. In derselben erscheinen zum grossen Teile Parabeln höherer Ordnung, nebstdem auch Differentialcurven solcher Parabeln.

$$\eta^2 = p\xi: \quad \xi = +\sqrt{rp}, \quad \xi = -\sqrt{rp}$$

$$\xi^2 = p\eta: \quad \xi^3 = \frac{p^2}{r}\zeta^2, \quad \zeta^4 = \frac{r^2}{p}\eta^3$$

$$\zeta^2 = p\eta: \quad \xi = \frac{p}{r}\eta, \quad \zeta^2 = \frac{p^2}{r}\xi$$

$$\eta^2 = p\xi: \quad \xi\zeta = rp, \quad \eta^2\xi = rp^2$$

$$\xi^2 = p\xi: \quad \xi^3 = rp^2\eta^2, \quad \zeta^6 = \frac{r^2}{p}\eta^4$$

$$\zeta^2 = p\xi: \quad \zeta^2 = \frac{p^2}{r}\eta, \quad \xi = \frac{r^2}{p^2}\eta$$

$$\xi\eta = a^2: \quad \xi^2\zeta^2 = a^4r, \quad \eta^3 = \frac{a^2}{r}\zeta^2$$

$$\eta\xi = a^2: \quad \eta^4 = \frac{a^4}{r}\xi, \quad \xi\zeta^4 = a^4r$$

$$\xi\xi = a^2: \quad \eta^2\xi = \frac{a^4}{r}, \quad \eta^2 = \frac{a^2}{r}\xi$$

Wir gelangen jetzt zum z -Konoid. Die durch den Punkt (x, y, z) der Schleifenlinie gehende Erzeugende desselben hat die Gleichungen:

$$\zeta = z = r \sin u, \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{x}{y} = \operatorname{tg} u$$

Demgemäss wird die Gleichung der Fläche sein:

$$\frac{\zeta^2}{r^2} = \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}$$

oder

$$r^2\eta^2 = \zeta^2(\xi^2 + \eta^2)$$

Schneiden wir dieses Konoid durch die Ebenen $\xi = \delta$ und $\eta = \delta$, so erhalten wir als Gleichungen der Schnitte:

$$r^2\eta^2 = \zeta^2(\delta^2 + \eta^2) \quad \text{und} \quad r^2\delta^2 = \zeta^2(\xi^2 + \delta^2)$$

Dieselben gehen für $\delta = r$ über in

$$r^2\eta^2 = \zeta^2(r^2 + \eta^2) \quad \text{und} \quad r^4 = \zeta^2(\xi^2 + r^2)$$

welche Curven angehören, die als Berührungsgrössenlinien der Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ resp. $x^2 + z^2 = r^2$ erscheinen, und zwar ist die erstere die Tangenten-Ordinaten (t, z) Curve und die letztere, die nebenbei bemerkt identisch ist mit der Aufrissprojection der Durchdringung des Cylinders $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ mit dem Kegel $\xi^2\zeta^2 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)$, ist die Tangenten-Abscissen-Curve, wie aus folgendem hervorgehen wird. Dieses Konoid ist bereits Gegenstand früherer Arbeiten gewesen, welche in der Schlussnote angeführt sind.

1) Wir haben für die Grösse der Tangente t im Punkte (y, z) des Kreises $y^2 + z^2 = r^2$ den Ausdruck:

$$t = r \frac{z}{y}$$

Setzen wir nun $\eta = t = r \frac{z}{y}$, $\xi = z$ und eliminiren wir hieraus mit Hilfe von $y^2 + z^2 = r^2$ y und z , so ergibt sich zunächst

$$r^2 \frac{\xi^2}{\eta^2} + \xi^2 = r^2$$

geordnet $r^2 \eta^2 = \xi^2(r^2 + \eta^2)$ übereinstimmend mit der Gleichung der obigen Schnittcurve. Die Bemerkung dieser Identität führt uns auch zur einfachen Parameterdarstellung der Curve. Man bekommt leicht

$$\eta = r \operatorname{tg} u, \quad \xi = r \sin u$$

2) Für die Tangente t des Punktes (x, z) am Kreise $x^2 + z^2 = r^2$ hat man analog

$$t = r \frac{z}{x}$$

Mithin sind die Coordinaten der Tangenten-Abscissen-Curve

$$\xi = t = r \frac{z}{x}, \quad \zeta = x$$

und die Gleichung derselben wird sein:

$$\zeta^2 + \left(\frac{\xi \zeta}{r}\right)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \zeta^2(\zeta^2 + r^2) = r^4$$

Von Interesse sind weiter die Schnitte der Ebenen $\xi = m\eta$ und $\xi = m\zeta$. — Der der ersteren dieser beiden Ebenen ist eine Ellipse, die sich auf die Grundrissebene als Kreis projicirt:

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{r}{m}\right)^2$$

und der der letzteren hat zum Grundriss wieder die wolbekannte Subtangenten-Ordinaten-Curve

$$\left(\frac{r}{m}\right)^2 \eta^2 = \xi^2(\xi^2 + \eta^2)$$

des Kreises

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{m}\right)^2$$

Nunmehr führen wir noch einige Durchdringungscurven an. Zu-

nächst die des Kegels $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$. Dieselbe hat zur Kreuzriss-projection die beiden Parabeln

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \pm r\eta \\ \text{zum Aufriss die Curve} \quad \zeta^4 &= r^2(\zeta^2 - \xi^2) \end{aligned}$$

d. i., wie man leicht findet, der Kreuzriss der Schleifenlinie und zum Grundriss die beiden Kreise

$$(\xi^2 + \eta^2) = \pm r\eta$$

Diese Durchdringungcurve zerfällt also in zwei bezüglich der $\xi\xi$ -Ebene symmetrisch gelegene Raumcurven vierter Ordnung und zwar sind sie mit der als Leitlinie des Konoids fungirenden Schleifenlinie congruent. Bezüglich ihrer Lage ist zu bemerken, dass die beiden Doppelpunkte in den Ursprung fallen, und dass die Längssymmetrieebene beider die $\eta\xi$ -Ebene ist. — Von den Projectionen der Durchdringungcurve des Kegels $\eta^2 + \xi^2 = \zeta^2$ sind hervorzuheben der Grundriss und der Kreuzriss. Ersterer hat die Gleichung

$$\eta^2(r^2 + \eta^2) = \xi^4$$

oder in Polarcoordinaten

$$\rho = \frac{r \sin \vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$$

und letzterer

$$r^2 \eta^2 = \xi^2(2\eta^2 + \xi^2)$$

welche durch die Substitution

$$\eta = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}$$

übergeht in

$$\frac{r^2}{2} \eta_1^2 = \xi^2(\eta_1^2 + \xi^2)$$

die Gleichung der Subtangente-Ordinate-Curve des Kreises

$$\eta^2 + \xi^2 = \frac{r^2}{2}$$

folglich ist jener Kreuzriss affin mit dieser Curve. Schreiben wir die Polargl. des Grundrisses in der Form

$$\rho = r \frac{r \sin \vartheta}{r \sqrt{\cos 2\vartheta}}$$

und setzen wir

$$r \sin \vartheta = \rho_x, \quad r \sqrt{\cos 2\vartheta} = \rho_\lambda$$

wo ρ_x und ρ_λ beziehungsweise die Radien-Vectoren eines Kreis- und Lemniskatenpunktes bedeuten, dann haben wir die Beziehung

$$\rho = r \frac{\rho x}{\rho \lambda}$$

Endlich sei noch erwähnt, dass Grundriss und Kreuzriss der Durchdringungcurve des Kegels $\zeta^2 + \xi^2 = \eta^2$ die Gleichungen haben:

$$\eta^2(\eta^2 - r^2) = \zeta^4 \quad \text{und} \quad r^2 \eta^2 = \zeta^2(2\eta^2 - \zeta^2)$$

Bezüglich des Kreuzrisses ist zu bemerken, dass derselbe affin ist mit der Subtangenten-Ordinaten-Curve der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = \frac{r^2}{2}$$

Man findet nämlich durch Elimination von x und y aus dieser Hypergleichung und aus $\eta = t' = \frac{x^2}{y}$, $\zeta = x$

$$\zeta^2 - \left(\frac{\zeta^2}{\eta}\right)^2 = \frac{r^2}{2} \quad \text{geordnet} \quad \zeta^2(\eta^2 - \zeta^2) = \frac{r^2}{2} \eta^2$$

und wenn man hierin statt η setzt $\eta \sqrt{2}$, so erhält man:

$$\zeta^2(2\eta^2 - \zeta^2) = r^2 \eta^2$$

die obige Kreuzrissgleichung. — Von den Durchdringungscuren der gewissen drei Rotationsparaboloide ist bloß die von

$$\xi^2 + \eta^2 = p\xi$$

bemerkenswert wegen ihres Kreuzrisses einer Neil'schen Parabel mit der Gleichung:

$$\zeta^2 = \frac{r^2}{p} \eta^2$$

Was nun noch folgt, ist eine Auswahl von Projectionsgleichungen der Durchdringungen einiger parab. und hyperb. Cylinderflächen. Die Resultate wurden wieder in eine Tabelle geordnet.

$\xi^2 = p\eta$: $r^2 \xi^2 = \zeta^2(p^2 + \xi^2)$ identisch mit dem Schnitt der Ebene $\xi = p$; $\zeta^2 = \frac{r^2 \eta}{p + \eta}$ der Kreuzriss.

$\eta^2 = p\xi$: $\zeta^2 = \frac{r^2 p}{\xi + p}$ (Different. C. einer Parabel); $r^2 p^2 = \zeta^2(\eta^2 + p^2)$ für $p = r$ wird die Curve identisch mit dem Schnitt der Ebene $\eta = r$.

$\eta^2 = p\xi$: $\eta^2(\xi^2 + \eta^2) = r^2 p^2$, diese Curve trat bereits auf als Grundriss der Durchdringungcurve des hyperb. Cylinders $\xi\xi = a^2$ mit dem Kegel $\xi^2 \zeta^2 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)$.

$\zeta^2 = p\xi$: Bloss zu bemerken der Grundriss

$$\eta^2 = \frac{p\xi^3}{r^2 - p\xi} = \frac{\xi^3}{\frac{r^2}{p} - \xi}$$

— eine Cissoide des Diokles.

$\xi\zeta = a^2$: $r^2\xi^2\eta^2 = a^4(\xi^2 + \eta^2)$ identisch mit dem Grundriss der Durchdringung des parab. Cylinders $\eta^2 = p\xi$ mit dem Kegel $\xi^2\zeta^2 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)$. — Durch Einfachheit der Gleichung bemerkenswert der Kreuzriss

$$a^4 = \eta^2(r^2 - \zeta^2)$$

in Parameterdarstellung

$$\eta = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{1}{\cos u}, \quad \zeta = r \sin u$$

Bemerkung zu Seite 205.

Näheres über dieses Konoid, welches nach Pabst den Namen „gerader parab. Cono-Cuneus“ trägt, findet sich in T. LIII. dieses Archivs in einer Arbeit von Dr. A. Hochheim (S. 350—363), ferner in T. II (2. Reihe): Die Cuno-Cunci von Dr. C. Pabst (S. 281—319 und S. 337—382) und endlich in einer neueren Arbeit von H. Brocard in T. VI der „Mathesis“ (S. 126 u. f.)

Wien, im März 1889.

VIII.

Ueber Parabeln höherer Ordnung.

Von

Himstedt.

§ 1. Einteilung der Parabeln höherer Ordnung. — Unter einer Parabel im allgemeinen versteht man eine ebene Curve, welche der Gleichung

$$(1) \quad y^m = a^{m-n} \cdot x^n$$

entspricht. In dieser Gleichung bedeuten x , y die rechtwinkligen Coordinaten eines in der Ebene beweglichen Punktes, a eine constante Strecke und m , n zwei gegebene rationale Zahlen mit demselben Vorzeichen. (Haben m und n verschiedene Vorzeichen, so stellt obige Gleichung eine Hyperbel vor). Ueber die Zahlen m und n lassen sich noch einige Voraussetzungen machen, welche die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigen:

1) m und n sind beide positiv. Denn wären beide negativ, so könnten wir obige Gleichung durch Multiplication so umformen, dass die Exponenten positiv würden.

2) m und n sind ganze Zahlen. Denn wären sie Brüche, so könnten wir die Gleichung (1) durch Potenziren so umformen, dass die Exponenten dadurch zu ganzen Zahlen würden.

3) m und n sind relative Primzahlen. Denn hätten sie einen gemeinschaftlichen Factor λ , so könnten wir auf beiden Seiten der Gleichung (1) die λ te Wurzel ziehen, so dass die Exponenten dadurch zu relativen Primzahlen würden. Daher ist mindestens eine der beiden Zahlen m und n ungerade.

Ferner wollen wir noch in Betreff der Constanten a bemerken, dass dieselbe stets als positiv vorausgesetzt werden kann. Denn wäre $n < 0$, so könnten wir bei derjenigen Achse, deren Coordinate einen ungeraden Exponenten hat, die positive Richtung mit der negativen vertauschen, wodurch dann a ein positives Vorzeichen erhielte. —

Demgemäss haben wir nun zwei verschiedene Arten von Parabeln zu unterscheiden, je nachdem die beiden Exponenten m und n beide ungerade sind, oder der eine gerade und der andere ungerade. Im letztern Falle wollen wir dann stets den Exponenten von y als gerade voraussetzen. Hätte man umgekehrt y einen ungeraden und x einen geraden Exponenten, so könnten wir durch Vertauschen der Achsen diesen Fall auf den angenommenen zurückführen.

Die Gleichung der Parabel erster Art heisst also

$$(2) \quad y^{2p+1} = a^{2p-2q} x^{2q+1}$$

und die der Parabel zweiter Art

$$(3) \quad y^{2p} = a^{2p-2q-1} x^{2q+1}$$

Von den Parabeln der verschiedenen Ordnungen führen wir folgende an:

Die Parabel erster Ordnung, $y = x$, ist eine Gerade und gehört zu den Parabeln erster Art.

Die Parabel zweiter Ordnung, $y^2 = ax$, ist die bekannte Apollonische Parabel und gehört zu den Parabeln zweiter Art.

Der dritten Ordnung entsprechen zwei verschiedene Parabeln, nämlich:

$$a^2y = x^3 \quad \text{und} \quad ay^2 = x^3$$

jene ist eine Parabel erster Art; letztere ist semikubische Parabel und gehört zu den Parabeln zweiter Art.

In die vierte Ordnung gehören zwei Parabeln zweiter Art, nämlich:

$$y^4 = ax^3 \quad \text{und} \quad y^4 = a^3x$$

Die fünfte Ordnung umfasst vier verschiedene Parabeln, nämlich:

$$a^4y = x^5; \quad a^3y^2 = x^5; \quad a^2y^3 = x^5; \quad ay^4 = x^5$$

hiervon gehören zwei zu den Parabeln erster Art, die beiden andern zu denen zweiter Art.

Der sechsten Ordnung entsprechen wieder nur zwei Parabeln, beide von der zweiten Art:

$$y^6 = a^5x; \quad y^6 = ax^5$$

u. s. w. Um alle Parabeln r ter Ordnung zu finden, combinire man die Zahl r mit allen positiven ganzen Zahlen, welche kleiner als r sind und lasse diejenigen Combinationen unberücksichtigt, deren Elemente nicht relative Zahlen sind. Für die neunte Ordnung ergeben sich z. B. 8 verschiedene Combinationen: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89; von diesen kommen die dritte und die sechste nicht in Betracht, so dass wir im Ganzen 6 verschiedene Parabeln neunter Ordnung haben, nämlich:

$$a^8y = x^9; \quad a^7y^2 = x^9; \quad a^6x^4 = x^9; \quad a^4y^6 = x^9; \quad a^2y^7 = x^9; \quad ay^8 = x^9$$

Von diesen gehören 3 der ersten Art und die drei andern der zweiten Art an. Ueberhaupt gilt die Regel, dass sich unter den Parabeln einer ungeraden Ordnung stets gleich viel von jeder Art befinden, (den Fall $r = 1$ ausgenommen), während die Parabeln gerader Ordnung nur solche der zweiten Art sein können.

§ 2. Lage und Gestalt der Curven. — Jede Parabel besteht aus 2 congruenten, sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen, welche im Coordinatenanfangspunkte zusammentreffen. Sind die Exponenten m und n beide ungerade, so sind die Coordinaten xy entweder beide positiv oder beide negativ, wie sich aus der Gleichung (2) ergibt. Hieraus folgt, dass alle Parabeln der ersten Art im ersten und dritten Quadranten gelegen sind. Dies ist z. B. der Fall bei der Parabel dritter Ordnung $a^3y = x^3$. Ist dagegen m gerade und n ungerade, so ist die Abscisse x stets positiv, denn für negative Abscissen werden die Ordinaten imaginair, wie sich aus der Gleichung (3) ergibt. Jeder positiven Abscisse entsprechen alsdann zwei entgegengesetzt gleiche Ordinaten. Hieraus folgt, dass alle Parabeln zweiter Art (wie z. B. die Apollonische und die semikubische) im ersten und vierten Quadranten liegen und zwar symmetrisch zur positiven x -Achse.

Eine durch den Coordinatenanfangspunkt O gezogene Gerade $y = \lambda x$ schneidet die Parabel ausser im Punkte O noch in denjenigen Punkten, für welche

$$(4) \quad x = \sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n}}{\lambda^m}}, \quad y = \sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n}}{\lambda^n}}$$

ist. Bei den Parabeln erster Art ist die Differenz $m - n$ eine gerade Zahl, folglich liefern die Gleichungen (4) zwei verschiedene

Schnittpunkte, deren Coordinaten entgegengesetzt gleich sind. Der Coordinatenanfangspunkt ist demnach Mittelpunkt der Parabeln erster Art. Uebrigens sind jene Schnittpunkte reell oder imaginair, je nachdem $\lambda \gtrless 0$ ist. Für die Parabeln zweiter Art ist die Differenz $m-n$ eine ungerade Zahl, folglich liefern die Gleichungen (4) jetzt nur einen Schnittpunkt, und dieser ist für jedes λ reell. Die Parabeln zweiter Art haben demnach in O keinen Mittelpunkt.

Der Coordinatenanfangspunkt ist ein vielfacher Punkt der Parabel. Ist $m > n$, so ist O ein n -facher Punkt, dessen n Tangenten sämtlich mit der y -Achse zusammenfallen. Die Parabel kehrt dann der x -Achse ihre concave Seite zu, wie sich aus dem Vorzeichen des Productes

$$(5) \quad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \frac{y^2}{x^2}$$

ergiebt. Ist dagegen $m < n$, so ist O ein m -facher Punkt, dessen m Tangenten sämtlich mit der x -Achse zusammenfallen. Die Parabel ist dann convex in Bezug auf die x -Achse.

Die Tangente des Anfangspunktes schneidet die Parabel in m , resp. n zusammenfallenden Punkten, je nachdem $m > n$ oder umgekehrt. Folglich muss diese Tangente bei allen Parabeln erster Art die Curve im Anfangspunkte durchschneiden, d. h. dieser Punkt ist ein Wendepunkt der Curve. Bei den Parabeln zweiter Art haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $m > n$, so haben Curve und Tangente (hier die y -Achse) eine gerade Anzahl von zusammenfallenden Punkten, folglich berühren sich jene, ohne sich zu durchschneiden. Ist aber $m < n$, so haben Curve und Tangente (jetzt die x -Achse) eine ungerade Anzahl von zusammenfallenden Punkten und durchschneiden sich daher im Anfangspunkte. Dieser ist jetzt aber kein Wendepunkt, sondern eine Spitze der Curve. Wir können demnach die Parabeln zweiter Art weiter einteilen in solche mit Spitze und solche ohne Spitze. Ein Beispiel für den ersten Fall bietet die semikubische Parabel, während die Apollonische ein Beispiel für den zweiten Fall ist.

§ 3. Die Parabeltangente. — Durch Differentiation ergiebt sich aus der Gleichung der Parabel

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ny}{mx} = \operatorname{tg} \alpha$$

wenn wir mit α den Winkel bezeichnen, welchen die Tangente im Punkte xy mit der positiven Richtung der x -Achse bildet.

Da dieser Quotient stets einen endlichen, von null verschiedenen Wert hat, so giebt es keine im Endlichen gelegene Tangente, welche senkrecht zur x -Achse steht oder mit ihr parallel läuft, ausgenommen jedoch die Tangente des Anfangspunktes, welche, wie im vorigen § gezeigt wurde, mit einer der beiden Coordinatenachsen zusammenfällt. Als Gleichung der Parabeltangente ergibt sich

$$(7) \quad ny\xi - mx\eta + (m-n)xy = 0$$

wo $\xi\eta$ die laufenden Coordinaten und xy die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten. Die Construction der Tangente geschieht am einfachsten mit Hilfe der Abschnitte, welche dieselbe auf den Achsen bildet, und für welche wir aus Gleichung (7) die Werte

$$(8) \quad \xi = \frac{n-m}{n} \cdot x, \quad \eta = \frac{m-n}{m} \cdot y$$

erhalten. Diese Abschnitte sind also den Coordinaten des Berührungspunktes proportional und können leicht construirt werden, wenn letztere bekannt sind. Für die Apollonische Parabel ($m=2, n=1$) ergibt sich z. B. $\xi = -x; \eta = \frac{1}{2}y$ und für die semikubische ($m=2, n=3$) $\xi = \frac{1}{3}x; \eta = -\frac{1}{2}y$. Rückt der Berührungspunkt in unendliche Ferne, so werden seine Coordinaten beide unendlich gross, folglich auch die beiden Abschnitte (8), d. h. die Parabeln haben keine Asymptoten. —

Für die Längen der Subtangente und Subnormale ergeben sich ebenfalls leicht construierbare Ausdrücke, nämlich

$$\text{Subtangente} = \frac{m}{n} \cdot x$$

$$\text{Subnormale} = \frac{n}{m} \cdot \frac{y^2}{x}$$

Die Subtangente ist demnach bei allen Parabeln der Abscisse des Berührungspunktes proportional. In dem speciellen Falle der Apollonischen Parabel ($y^2 = ax$) kommen wir auf die beiden bekannten Sätze zurück, dass die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes ist, und dass die Subnormale eine constante Länge hat. Für die semikubische Parabel ($ay^2 = x^3$) haben wir die beiden entsprechenden Sätze: Die Subtangente ist der Abscisse des Berührungspunktes und die Subnormale dem Quadrate dieser Abscisse direct proportional.

§ 4. Krümmung der Parabeln. — Da bereits in § 2. von der Art der Krümmung die Rede war, so haben wir hier nur noch

die Krümmungsstärke der Curven zu untersuchen. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir die Gleichung (1) durch das System

$$(9) \quad x = at^m; \quad y = a \cdot t^n$$

ersetzen. wo t ein beliebiger Parameter ist. Nach bekannten Formeln erhalten wir dann für den Krümmungsradius der Curve

$$\rho = \frac{a[m^2 t^{2(m-1)} + n^2 t^{2(n-1)}]^{3/2}}{mn(m-n)t^{m+n-3}}$$

oder

$$(10) \quad \rho = \frac{a[m^2 t^{3(2m-n)} + n^2 t^{3(2n-m)}]^{1/2}}{mn(m-n)}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Krümmungsradius im Coordinatenanfangspunkte ($t = 0$) entweder unendlich klein oder unendlich gross ist, je nachdem die hier auftretenden Exponenten des Parameters t beide positiv oder einer von ihnen positiv und der andere negativ ist. (Der Fall, dass beide Exponenten negativ sind, kann offenbar nicht eintreten). Wenn nämlich

$$(11) \quad 2 > \frac{m}{n} > \frac{1}{2}$$

so sind beide Exponenten von t positiv, folglich $\rho = 0$ für $t = 0$. In diesem Falle wächst der Krümmungsradius mit wachsendem t continuirlich von $\rho = 0$ bis $\rho = \infty$. Dies findet z. B. Statt bei der semikubischen Parabel $ay^2 = x^3$. —

Ist dagegen

$$(12) \quad \frac{m}{n} > 2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} > \frac{m}{n}$$

so ist von den Exponenten der Gleichung (10) der eine positiv und der andere negativ. folglich ist jetzt $\rho = \infty$ für $t = 0$. In diesem Falle nimmt der Krümmungshalbmesser mit wachsendem t zunächst von $\rho = \infty$ bis zu einem gewissen Minimalwerte $\rho = \rho'$ ab, um dann wieder von $\rho = \rho'$ bis $\rho = \infty$ zu wachsen. Dieser Minimalwert wird gefunden, indem wir die Gleichung $\frac{d\rho}{dt} = 0$ nach t auflösen und das

Resultat

$$t^{m-n} = \frac{n}{m} \sqrt{\frac{m-2n}{2m-n}}$$

in die Gleichung (10) substituieren. Ein Beispiel hierfür bietet die Parabel dritter Ordnung $a^2 y = x^3$. Der Krümmungsradius hat im Anfangspunkte den Wert $\rho = \infty$, erreicht seinen Minimalwert

$$\rho = \frac{3}{2} a \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

in demjenigen Punkte, welcher dem Parameter $t = (45)^{-\frac{1}{2}}$ entspricht, und wächst von da an continuirlich bis $\rho = \infty$.

Die obigen Sätze von der Krümmungsstärke gelten für alle Parabeln, mit alleiniger Ausnahme der Apollonischen, welche dem Grenzfalle $\frac{m}{n} = 2$ (resp. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$) entspricht. Hier hat der Krümmungsradius im Anfangspunkte einen endlichen von null verschiedenen Wert, nämlich $\rho = \frac{a}{2}$, und wächst von da continuirlich bis $\rho = \infty$.

§ 5. Fortsetzung. — Aus dem vorhergehenden können wir schliessen, dass der Krümmungsradius für einen Wendepunkt nicht notwendig unendlich gross und für eine Spitze nicht notwendig unendlich klein sein muss. Da nämlich der Wert des Krümmungsradius im Anfangspunkte nur von dem Werte des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ abhängt und jener Punkt für alle Parabeln erster Art ein Wendepunkt, und, falls $m < n$, für alle Parabeln zweiter Art eine Spitze ist, so kann es geschehen, dass der Krümmungsradius eines Wendepunktes unendlich klein und derjenige einer Spitze unendlich gross wird. Betrachten wir z. B. die beiden Parabeln erster Art

$$a^2y = x^3 \quad \text{und} \quad a^2y^3 = x^5$$

Nach § 2. haben beide Curven im Anfangspunkte einen Wendepunkt, und doch ist nach § 4. nur für die erste $\rho = \infty$, während für die zweite $\rho = 0$ ist.

Ferner haben die beiden Parabeln zweiter Art

$$ay^2 = x^3 \quad \text{und} \quad a^2y^3 = x^5$$

nach § 2. im Anfangspunkte eine Spitze, während nach § 4. $\rho = 0$ für die erste und $\rho = \infty$ für die zweite wird. Um dies geometrisch zu erklären, gehen wir von dem ursprünglichen Begriffe der Krümmung aus. Hiernach versteht man unter der Krümmung der Curve ihre Abweichung von der geradlinigen Form und demgemäss unter der Krümmungsstärke das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit der Curventangente zur Bahngeschwindigkeit des die Curve erzeugenden Punktes. Bezeichnen wir also den Winkel, welchen die Curventangente mit einer festen Geraden (z. B. mit der x -Achse) bildet, mit τ , die Länge eines beliebigen Curvenbogens mit s und die Zeit mit t , so ist die Winkelgeschwindigkeit der Tangente $= \frac{d\tau}{dt}$ und die Bahngeschwindigkeit $= \frac{ds}{dt}$, folglich

$$K = \frac{d\tau}{ds} : \frac{ds}{dt}$$

wenn wir mit K die Krümmungsstärke der Curve bezeichnen. Nun ist jene dem Krümmungsradius ρ umgekehrt proportional, wie sich aus der Untersuchung über die Krümmung [eines Kreises] ergibt, folglich

$$\rho = \frac{ds}{dt} : \frac{d\tau}{dt}$$

die beiden Quotienten, die hier auftreten, sind im allgemeinen endliche, von null verschiedene Grössen, können jedoch auch beide gleichzeitig unendlich klein werden, in welchem Falle $\rho = \frac{0}{0}$, also unbestimmt wird. Liegen z. B., wie dies bei einem Wendepunkte stets der Fall ist, drei benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie, so fallen zwei benachbarte Tangenten zusammen, und der Quotient $\frac{d\tau}{dt}$ hat dann den Wert null. Liegen 4 benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie, wie z. B. bei der Parabel $y^4 = a^3x$, so fallen drei benachbarte Tangenten zusammen und es ist dann ebenfalls $\frac{d\tau}{dt} = 0$.

Um aber diesen Fall von dem vorigen zu unterscheiden, setzen wir fest, dass dieser Quotient dort unendlich klein von der ersten Ordnung und hier unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Dies erkennen wir auch auf analytischem Wege, wenn wir in den Gleichungen (9) den Parameter t als Zeit auffassen und dann jenen Quotienten berechnen. Allgemein können wir daher den folgenden Satz aufstellen: Wenn r benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie liegen und demgemäss $(r-1)$ benachbarte Tangenten zusammenfallen, so ist der Quotient $\frac{d\tau}{dt}$ unendlich klein von der $(r-2)$ ten Ordnung.

Was den Quotienten $\frac{ds}{dt}$ anbelangt, so wird derselbe nur dann zu null, wenn 2 oder mehrere Curvenpunkte in einen einzigen zusammenfallen. Auch hier haben wir unendlich kleine Grössen verschiedener Ordnung zu unterscheiden und setzen fest, (in Uebereinstimmung mit den auf analytischem Wege sich ergebenden Resultaten) dass in dem Falle, wo 2, 3, 4 ... r Curvenpunkte in einen einzigen zusammenfallen, der Quotient $\frac{ds}{dt}$ unendlich klein von der ersten, zweiten, dritten ... $(r-1)$ ten Ordnung wird. — Dies vorausgesetzt, können wir nun den Krümmungsradius einer Parabel im Anfangspunkte O einfach dadurch bestimmen, dass wir erstens untersuchen, wieviel Punkte mit O in gerader Linie liegen, und zweitens,

wieviele Punkte mit O zusammenfallen. Bezeichnen wir zur Abkürzung mit A irgend eine endliche, von null verschiedene Grösse und mit δ_r eine unendlich kleine Grösse r ter Ordnung, so ergibt sich Folgendes:

Bei der Parabel $a^2y = x^3$ liegen in der Nachbarschaft von O drei Punkte in gerader Linie und O ist ein einfacher Punkt. Folglich ist

$$\frac{d\tau}{dt} = \delta_1 \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dt} = A$$

mithin

$$\varrho = \frac{A}{\delta_2} = \infty$$

Die Parabel $a^2y^3 = x^5$ hat in O einen dreifachen Punkt, folglich

$$\frac{ds}{dt} = \delta_2$$

Ferner schneidet die x -Achse die Curve in 5 Punkten, so dass, da O dreimal zu zählen ist, im Ganzen 3 Punkte in gerader Linie liegen; folglich

$$\frac{d\tau}{dt} = \delta_1 \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0$$

Die semikubische Parabel $ay^2 = x^3$ hat in O einen Doppelpunkt, folglich

$$\frac{ds}{dt} = \delta_1$$

Die x -Achse schneidet die Curve in 3 Punkten, so dass, da O doppelt zu zählen ist, nicht mehr als 2 benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie liegen; folglich

$$\frac{d\tau}{dt} = A \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\delta_1}{A} = 0$$

Die Parabel $a^3y^3 = x^5$ hat in O ebenfalls einen Doppelpunkt, so dass

$$\frac{ds}{dt} = \delta_1$$

Die x -Achse schneidet die Curve in 5 Punkten, folglich liegen, da O doppelt zu zählen ist, 4 derselben in gerader Linie. Mithin ist

$$\frac{d\tau}{dt} = \delta_2 \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \infty$$

Die Parabel $y^4 = a^3x$ hat in O einen einfachen Punkt, folglich

$$\frac{ds}{dt} = A$$

Die y -Achse schneidet die Curve in 4 zusammenfallenden Punkten, welche hier als ebenso viele in gerader Linie liegende Curvenpunkte zu betrachten sind. Folglich

$$\frac{d\tau}{dt} = \delta_2 \quad \text{und} \quad \rho = \frac{A}{\delta_2} = \infty$$

u. s. w.

§ 6. Quadratur und Rectification der Curven. — Für die Fläche, welche von der Parabel, der x -Achse und einer beliebigen Ordinate begrenzt wird, erhalten wir

$$F = a \cdot \frac{m-n}{m} \int_0^x \frac{n}{x^m} dx = \frac{m}{m+n} \cdot a \cdot \frac{m-n}{m} \cdot x^{\frac{m+n}{m}}$$

oder einfacher

$$(13) \quad F = \frac{m}{m+n} \cdot xy$$

Die Parabelfläche hat demnach stets ein rationales Verhältniss zu dem Rechtecke, welches die Grenzordinate mit der entsprechenden Abscisse bildet. Für die Apollonische Parabel ($m = 2$, $n = 1$) ergibt sich aus obiger Formel $F = \frac{2}{3}xy$; für die semikubische $F = \frac{2}{3}xy$.

Je nachdem $m > n$, beträgt die Parabelfläche mehr oder weniger als die Hälfte jenes Rechtecks. Dies stimmt mit dem überein, was in § 2. über die Krümmung der Parabeln gesagt wurde.

Nicht so einfach ist die Rectification der Parabeln. Nach einer bekannten Formel erhalten wir für den vom Anfangspunkte an gerechneten Bogen

$$(14) \quad s = \int_0^x \sqrt{1 + \lambda^2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{2\lambda-2}} dx$$

wo $\lambda = \frac{n}{m}$ zur Abkürzung dient. Um dieses Integral zu berechnen, führen wir eine neue Variable ein, indem wir setzen

$$\frac{1}{\lambda-1}$$

$$x = az$$

Dadurch geht die Gleichung (14) über in

$$(15) \quad s = \frac{a}{\lambda-1} \int \sqrt{1+\lambda^2 z^2} \cdot z^{\frac{2-\lambda}{\lambda-1}} dz$$

Dieses Integral kann in geschlossener Form angegeben werden, sobald der Exponent $\frac{2-\lambda}{\lambda-1}$ eine ganze Zahl ist. Dies ist aber der Fall, wenn

$$(16) \quad \lambda = \frac{k+1}{k}$$

ist, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. (Nur der Wert $k = -1$ muss ausgeschlossen werden, denn in diesem Falle wird $\lambda = 0$, was unmöglich ist). Die Rectification der Parabeln ist also durch Potenzen, Logarithmen und Kreisbögen nur dann ausführbar, wenn die Differenz der Exponenten m und n gleich der Einheit ist. Dies ist z. B. der Fall bei der Apollonischen und bei der semikubischen Parabel. Für erstere erhalten wir aus Gleichung (14)

$$s = \int_0^z \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x(a+4x)} + \frac{1}{8} a \log \left(\frac{a+8x+4\sqrt{x(a+4x)}}{a} \right)$$

für letztere

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{q}{4} \cdot \frac{x}{a}} dx = a \left[\left(\frac{4}{q} + \frac{x}{a} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{q} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Loebau, Westpr., im April 1889.

IX.

Miscellen.

1.

**Ähnlichkeitspunkt als Gleichgewichtspunkt der Anziehung
ebener Flächenstücke.**

Seien AB , $A'B'$, A_0B_0 drei Parallelen, welche die Schenkel eines Winkels ACB verbinden, φ , ψ die Richtungswinkel der Schenkel AA , CB gegen eine beliebige x Axe, h , $h\nu$, hx die Lote von C auf AB , $A'B'$, A_0B_0 , dann ist die Componente der Anziehung von $A'B'$ auf C

$$X' = \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{h\nu}$$

also $X'h\partial\nu$ die des Rechtecks $A'B' \cdot h\partial\nu$, das ist eines Elements des Dreiecks ABC . Variirt ν von x bis 1, so erzeugt dieses Element das Viereck ABC_0A_0 , daher ist die Componente der Anziehung von ABB_0A_0 auf C

$$X = \int_x^1 (\sin \varphi - \sin \psi) \frac{\partial\nu}{\nu} = (\sin \varphi - \sin \psi) \log \frac{1}{x}$$

Ist nun AB eine Seite eines Vielecks, A_0B_0 die eines ähnlichen und ähnlich liegenden, C Ähnlichkeitspunkt, so ist für alle entsprechenden Seitenpaare x gemeinsam, also

$$\Sigma X = \log \frac{1}{x} \Sigma (\sin \varphi - \sin \psi) = 0$$

Geht man bei unendlicher Seitenzahl zur Grenze über, so erstreckt sich die Eigenschaft des Vielecks auf beliebig begrenzte Flächen, und man hat den Satz:

„Die Anziehung der Ringfläche zwischen zwei geschlossenen und einander umschliessenden ähnlichen und ähnlich liegenden Linien auf den Aehnlichkeitspunkt ist null.“

Anwendung auf den Fall $\kappa = 0$ führt zu einem Trugschluss.
R. Hoppe.

2.

**Ein allgemeines Theorem aus der Theorie der
recurrirenden Reihen.**

Für die recurrirenden Reihen besteht folgendes Theorem:

Sei durch

$$\sum_0^m a_k u_{n-k} = 0 \quad 1)$$

die sogenannte Scala relationis gegeben. Seien ferner

$$\eta_1 \eta_2 \dots \eta_m$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^m a_k \eta^{m-k} = 0 \quad 2)$$

so lautet das allgemeine Glied in der independenten Form

$$u_n = \sum_1^m b_k \eta_k^n \quad 3)$$

wobei die Coefficienten b_k aus den gegebenen Anfangsgliedern zu bestimmen sind. Der Beweis wird geführt dadurch, dass man die Gleichung 3) in die Gleichung 1) einsetzt und das Resultat in zwei Factoren zerlegt, deren einer eben die Gleichung 2) ist. Da nun der andere Factor nicht null sein kann, so ergibt sich hieraus zur Bestimmung von η die Gleichung 2).

Für die bekannte Reihe von Lamé (Nouv. Corr. Mathem. Tom. I und V) ist

$$u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 2$$

Wir haben also die Bestimmungsgleichung

$$\eta^3 - \eta - 1 = 0$$

welche

$$\eta_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

liefert. Also hat das allgemeine Glied die Form

$$u_n = b_0 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

wobei b_0 und b_1 aus den Gleichungen

$$1 = b_0 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b_1 \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$2 = b_0 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + b_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2$$

zu bestimmen sind.

Prag, Januar 1889.

W. Láska.

3.

Gleichgewicht der Anziehung einer ringförmigen Fläche.

Der auf Seite 222 ausgesprochene Satz lässt sich erweitern.

Seien L und M zwei geschlossene Linien, die einander und den Punkt C umschliessen; C sei Anfang der rechtwinkligen x, y und der Polarcoordinaten ρ, φ . Das von den consecutiven Radienvectoren φ und $\varphi + \partial\varphi$ und den Linienelementen von L und M begrenzte Viereck, d. i. ein Element der Ringfläche R zwischen L und M lässt sich erzeugt denken durch eine transversale Gerade $NN' = l$ von constanter Richtung, welche auf ρ die Strecke $CN = \rho v$ abschneidet, indem v von ∞ bis 1 variirt, so dass (ρ, φ) und $(\rho x, \varphi)$ die Schnittpunkte des Strahles φ mit L und M bedeuten.

Bezeichnet $h v$ den normalen Abstand der Geraden NN' von C , so ist das Dreieck

$$C N N' = \frac{1}{2} l \cdot h v = \frac{1}{2} (\rho v)^2 \partial\varphi$$

also

$$\frac{l}{(\rho v)^2} = \frac{\partial\varphi}{h v}$$

Die Grösse zur Linken drückt die von l auf C geübte Anziehung aus, deren Componenten also sind:

$$X' = \frac{\partial \varphi \cos \varphi}{hv}, \quad Y' = \frac{\partial \varphi \sin \varphi}{hv}$$

Erzeugt nun l das Flächenelement $l \cdot h \partial v$, so sind die Componenten von dessen Anziehung

$$\partial^2 X = \frac{\partial v}{v} \partial \varphi \cos \varphi, \quad \partial^2 Y = \frac{\partial v}{v} \partial \varphi \sin \varphi$$

folglich nach Integration die Componenten der Anziehung von R

$$X = \int_0^{4R} \log \frac{1}{x} \cos \varphi \partial \varphi, \quad Y = \int_0^{4R} \log \frac{1}{x} \sin \varphi \partial \varphi$$

Setzt man

$$\log \frac{1}{x} = F(\cos 2\varphi)$$

so verschwinden X und Y , denn nach Zerlegung des Integralintervalls in Quadranten zeigt sich, dass die 4 Teilintegrale gleichen absoluten Wert und parweise ungleiche Vorzeichen haben.

Schreiben wir einfacher

$$x = f(\cos 2\varphi)$$

so lautet das Resultat:

„Die Anziehung einer Ringfläche auf einen innern Punkt ist null, wenn das Verhältniss der von ihnen ausgehenden Radienvectoren beider Grenzlinien Function des Cosinus der doppelten Amplitude ist.“

R. Hoppe.

X.

Allgemeine Parameterdarstellung
von Substitutionen involutorischen Charakters,
welche eine rationale Function in sich selbst
überführen.

Von

Fritz Hofmann.

I. Lineare involutorisch-orthogonale Substitutionen.

§ 1. Zahl der homogenen Veränderlichen = 2.

Bildet man die Substitutionen

$$A \quad \begin{cases} X = -\frac{2\lambda}{N}x + \frac{1-\lambda^2}{N}y \\ Y = \frac{1-\lambda^2}{N}x + \frac{2\lambda}{N}y; \quad N = 1 + \lambda^2 \end{cases}$$

deren orthogonale Eigenschaft evident ist, so erhält man durch Auflösung nach x und y :

$$A \quad \begin{cases} x = -\frac{2\lambda}{N}X + \frac{1-\lambda^2}{N}Y \\ y = \frac{1-\lambda^2}{N}X + \frac{2\lambda}{N}Y; \quad N = 1 + \lambda^2 \end{cases}$$

so dass also genau dieselben Gleichungen die x und y durch X und Y ausdrücken, welche auch X und Y durch x und y darstellen.

Dies steht im Gegensatz zu der gewöhnlich gegebenen Darstellung orthogonaler Substitutionen, wie man solche mit Hilfe der schiefen Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

zu bilden pflegt:

$$A' \quad \begin{cases} X = \frac{1-\lambda^2}{N}x + \frac{2\lambda}{N}y \\ Y = \frac{-2\lambda}{N}x + \frac{1-\lambda^2}{N}y; \quad N = 1+\lambda^2 \end{cases}$$

Der geometrische Sinn der „umkehrbaren“ Substitutionen A ist folgender:

Da diese Formeln A auch geschrieben werden können

$$A_1 \quad \begin{cases} X = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \\ Y = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y \end{cases}$$

so kann man, wenn in der Figur ox senkrecht auf oy , sowie oX senkrecht auf oY , von einem Punkte p der xy -Ebene aus Perpendikel fallen auf oY , oX : man erhält als Längen dieser Perpendikel genau jene Grössen X , Y , wie sie aus den Gleichungen A algebraisch berechnet werden könnten.

Man kann nun einen Punkt P in der xy -Ebene construiren mit den so erhaltenen und als x und y zu behandelnden Coordinaten X , Y ; dieser neue Punkt P wird im allgemeinen von p verschieden liegen (vergl. die Figur 1); jedoch

„fasst man P auf als Punkt g der xy -Ebene und wiederholt für ihn dieselbe Construction, die von p nach P führte (Senkrechte X_g , Y_g fallend auf oY , oX) — so erhält man als letztes Constructionsergebnis G den ursprünglichen Ausgangspunkt p wieder.“

Die Identitäten

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (X) & (Y) \\ -\sin\alpha[-\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y] + \cos\alpha[\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y] = x \end{matrix} \\ & \begin{matrix} (X) & (Y) \\ +\cos\alpha[-\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y] + \sin\alpha[\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y] = y \end{matrix} \end{aligned}$$

gestatten den Verlauf unserer Constructionen schrittweise zu verfolgen und unseren Satz zu bestätigen.

Dagegen würde die Durchführung desselben Processes für

$$A_1' \quad \begin{cases} X = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y \\ Y = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \end{cases}$$

aus dem Punkte p ein an derselben Stelle liegendes $G(+x, +y)$ liefern nur für $\alpha = n \cdot \pi$.

So sind demnach 2 verschiedene Classen der linearen orthogonalen Substitution vorhanden, von welchen die von uns betrachtete, A oder A_1 , geometrisch wie algebraisch die Bezeichnung „involutorisch“ verdient. —

Die Determinante dieser „involutorisch — orthogonalen“ Substitution A ist -1 , daher ist genau die Hälfte aller überhaupt möglichen orthogonalen Substitutionen von unserer speciellen Art (für den Fall von zwei Veränderlichen).

Sie sind — rein geometrisch — dadurch charakterisirt, dass der von den neuen Coordinatenaxen gebildete, körperliche Winkel nicht mit dem von den ursprünglichen Axen gebildeten zur Deckung gebracht werden kann.

Auch geometrisch stellt sich somit die Wahrscheinlichkeit: in einer beliebig vorgegebenen rechtwinkligen Coordinatenachsenstellung die „involutorische“ Eigenschaft zu erkennen, gleich $\frac{1}{2}$ heraus.

Setzt man in den Formeln A statt λ ein: $\frac{b-a}{b+a}$, so nehmen dieselben die Gestalt an

$$A_2 \quad \begin{cases} X = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x + \frac{2ab}{a^2 + b^2} y \\ Y = \frac{2ab}{a^2 + b^2} x + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} y \end{cases}$$

diese Formeln A_2 enthalten den einzigen Parameter $a:b$; sie sind nur brauchbar, wenn

$$a^2 + b^2 \lesseqgtr 0$$

im übrigen können a, b reell oder rein imaginär sein. Für $a = 0$ erhält man eine sogenannte „Spiegelung“, vgl. § 6, Anm. II.

Wir nennen A_2 die „Normalform“ für die involutorisch-orthogonale Substitution — aus späterhin ersichtlichen Gründen.

§ 2. Zahl der homogenen Veränderlichen = 3.

Hier fragen wir nach der Existenz und Darstellbarkeit von orthogonalen Substitutionen

$$\begin{aligned} X &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z \\ Y &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z \\ Z &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z \end{aligned}$$

wobei aber gleichzeitig gefordert wird

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32}, \quad \alpha_{31} = \alpha_{13}$$

Nun wird ein System von 3 orthogonalen Ebenen geliefert durch die Formeln

$$F \quad \begin{cases} NX = (1 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2)x + 2(\lambda - \mu\nu)y + 2(\lambda\nu + \mu)z \\ NY = -2(\lambda + \mu\nu)x + (1 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2)y + 2(\nu - \mu\lambda)z \\ NZ = 2(\lambda\nu - \mu)x - 2(\nu + \lambda\mu)y + (1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)z \\ N = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \end{cases}$$

Dass aber unter diesen 9 Richtungscos. sich 3 Paare von je 2 gleichen befänden, ist aus obigem allgemeinen Systeme F nicht zu schliessen; auch ein Vertauschen von Zeilen oder Reihen würde — im allgemeinen — die gewünschten 3 Paare $a_k = a_l$ nicht auftreten lassen.

Wir sind daher auf Ermittlung eines besonderen Kunstgriffs angewiesen, der die Formeln F in solche von der gewünschten involutorischen Eigenschaft verwandelt — die Formen F werden bei diesem Process einen ihrer Parameter verlieren.

Schreiben wir für λ, μ, ν respective $\frac{c}{d}, \frac{-b}{d}, \frac{a}{d}$, so erhalten die 9 Coefficienten von F folgende Gestalt¹⁾ (indem wir d^2 aus Zähler und Nenner, N , entfernen):

$$F_1 \quad \begin{vmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(dc + ab) & 2(ac - bd) \\ +2(-dc + ab) & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc + ad) \\ +2(ae + bd) & +2(bc - ad) & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{vmatrix}$$

$$N_1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

1) Vom Verfasser mitgeteilt in einer Note: „Zeitschr. f. Math. u. Ph.“, XXXIII. 384.

Diese Tabelle wurde abgeleitet unter der Voraussetzung eines nicht verschwindenden d ; für jedes solche d muss dieselbe orthogonale Substitutionen liefern, denn F_1 ist nur eine Umformung von F .

Da danach die 9 Glieder der Determinante für beliebig viele Werte von d die Eigenschaft besitzen: jeder Zeile oder Reihe nach die Quadratsumme =

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

aufzuweisen, so muss die Determinante F_1 identisch diese Eigenschaft besitzen (man kann diesen Schluss leicht durch effective Herstellung der Quadratsumme bestätigen).

Wählen wir nun

$$d = 0$$

so ist auch

$$F_2 \begin{vmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ba & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ca & 2cb & -a^2 - b^2 + c^2 \end{vmatrix}$$

$$N = a^2 + b^2 + c^2$$

eine orthogonale Substitution unter der Bedingung

$$a^2 + b^2 + c^2 \gtrless 0$$

Demnach erhielten wir durch eine Umformung der allgemeinen Formel F , welche a priori für unser Problem wenig förderlich erschien, das „involutorisch-orthogonale“ System:

$$A_3 \begin{cases} NX = (a^2 - b^2 - c^2)x + 2aby + 2acz \\ NY = 2bax + (-a^2 + b^2 - c^2)y + 2bcz \\ NZ = 2cax + 2cby + (-a^2 - b^2 + c^2)z \\ N = a^2 + b^2 + c^2 \gtrless 0 \end{cases}$$

welches 2 wesentliche Parameter $a : b : c$ enthält.

Der Wert der Coefficientendeterminante F_2 ist hier zunächst = 1, kann aber (durch $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ statt a , b , c) auch = -1 gemacht werden.

In letzterem Falle kann der von den neuen Coordinatenaxen gebildete „Dreistuhl“ nicht mehr mit dem ursprünglich gegebenen körperlichen Winkel der Axen zur Deckung gebracht werden. Immer-

hin besteht nach dem Vorhergehenden der geometrische Satz: „Unter den orthogonalen Systemen XYZ , durch welche die durch das System der Ebenen xyz fixierten Raumpunkte transformiert werden können — ihre Anzahl ist α^3 — gibt es α^2 von involutorischer Eigenschaft, derart, dass ein transformierter Punkt P (aus $p(xyz)$ entstanden), welchem als xyz -Coordinationen die Perpendikel XYZ gegeben wurden, mit der Anfangslage p zusammenfällt, sobald er als y im xyz -System von neuem aufgefasst und demselben Process unterworfen wird, der von p nach P führte.“:

Denn man hat, sich der Formeln A_3 bedienend durch Ausrechnen:

$$\begin{aligned} & (a^2 - b^2 - c^2) [(a^2 - b^2 - c^2)x + 2aby + 2acz] \\ & + 2ba [2abx + (-a^2 + b^2 - c^2)y + 2acz] \\ & + 2ca [2cax + 2bcy + (-a^2 - b^2 + c^2)z] \\ & = N^2x \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel. $a = 1, b = 2, c = 4$ gibt

$$\begin{aligned} 21. X &= -19x & +4y & + 8z \\ 21. Y &= 4x & -13y & + 16z \\ 21. Z &= 8x & +16y & + 11z \end{aligned}$$

ein Substitutionssystem, dessen Umkehrung dieselben Coefficienten an denselben Stellen auftreten liesse.

§ 3. Zahl der homogenen Veränderlichen > 3 .

Von $n = 4$ an verlieren die bisher gebrauchten Methoden, — nämlich: Vertauschung von Reihen, oder: Einführung homogener Parameter — ihre Wirksamkeit. Denn die nach dem Cayley-Hermite'schen Verfahren aus schiefen Determinanten herzustellenden Coefficientenreihen für allgemeine orthogonale Substitutionen geben z. B. für 4 Veränderliche 16 vollständig verschiedene Zahlen als Schlussresultat, andererseits aber sind die allgemeinen Ausdrücke, welche uns die Substitutionscoefficienten liefern, Brüche vom dritten Grade im Zähler (in Bezug auf die Parameter), vom vierten im Nenner, so dass ein Homogenmachen keinesfalls weiter hilft. (Vgl. Baltzer, Determinanten. V. Auflage. pag. 195).

Es bleibt uns der Analogieschluss, um aus der „Normalform“ für $n = 2$ und $n = 3$ eine Coefficiententabelle, für $n = 4$ etwa, aufzubauen. Wir bilden:

A_4

$$\begin{vmatrix} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 & 2ab & 2ac & 2ad \\ 2ba & -a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc & 2bd \\ 2ca & 2cb & -a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd \\ 2da & 2db & 2dc & -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{vmatrix}.$$

$$N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2; \quad N \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

und überzeugen uns nachträglich durch Ausrechnen, dass in dieser Tabelle alle wesentlichen Eigenschaften der „orthogonalen“ Substitutionen sich finden, während zugleich ihr „involutorischer“ Charakter in ihrer Bildung ausgesprochen ist.

Das Quadrat obiger Determinante, gebildet nach dem Multiplikationsgesetze der Determinanten, gibt $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^8$; daher ist die Determinante selbst $= -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$ — wie aus dem Vorzeichen von a^8 zu entnehmen.

Somit ist die Determinante der eigentlichen, mit dem Nenner zu versehenen Coefficienten unter allen Umständen $= -1$, mag man auch beliebig viele homolog benannte $\left. \begin{matrix} \text{Zeilen} \\ \text{Reihen} \end{matrix} \right\}$ gleichzeitig paarweise mit -1 multipliciren.

Die Zahl der orthogonalen und zugleich involutorischen Substitutionen für 4 Veränderliche ist daher ∞^3 , denn A_4 enthält 3 unabhängige Parameter $a : b : c : d$.

Lehrsatz. Allgemein wird die „involutorisch-orthogonale“ Substitutions-Coefficienten-Tabelle dargestellt durch $n-1$ unabhängige Parameter, wenn n Veränderliche vorliegen (diese Zahl bleibt von $n > 2$ an hinter der für die „allgemeine“ Orthogonalsubstitution geltigen Zahl $\frac{1}{2}n(n-1)$ zurück).

Für ungerades n kann der Wert der Coefficienten-Determinante nach Belieben als $+1$ oder -1 angegeben werden, durch eventuelle Anwendung der Parameter $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1} \dots$ statt $a, b \dots$; für gerades n ist derselbe immer $= -1$.

Der Beweis für diesen Satz ist einstweilen durch Ausrechnung

zu führen — eine strengere Ableitung desselben, als die bisherige, durch Induction gegebene, bleibt demnach wünschenswert ¹⁾).

§. 4. Directe geometrische Ableitung der Coefficienten-Tabellen.

Ist eine homogene quadratische Function von beliebig vielen, n , Veränderlichen gegeben in der speciellen Form

$$G \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + \dots$$

so kann

$$G = 0$$

gedeutet werden als die Gleichung eines $(n-2)$ -dimensionalen Punktcontinuum im Raume von $(n-1)$ Dimensionen.

Beispiel. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$$

stellt eine imaginäre Kugel vor im dreidimensionalen Raume; die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

ist die eines Kreises mit dem Radius $\sqrt{-1}$ in der Ebene.

Ein Punkt $a, b, c, d \dots$ ausserhalb dieser Fläche („Fläche“ im übertragenen Sinne), für welchen also

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots \gtrless 0$$

kann dann mit einem Punkte $x, y, z, w \dots$ auf der Fläche durch eine Gerade verbunden werden. Die Coordinaten $X, Y, Z, W \dots$ des zweiten Durchstosspunktes dieser Geraden mit der Fläche werden sich als lineare Functionen von $x, y, z, w \dots$ einstellen; es sei etwa

$$X = \varphi_1(x, y, z, w \dots)$$

$$Y = \varphi_2(x, y, z, w \dots)$$

u. s. w.

Werden nun in der Gleichung

$$G = 0$$

1) Auf anderem Wege ist Herr Veltmann in „Zeitschrift für Mathem. u. Ph.“ Bd. 16., pag. 523 ff. auf ähnliche Bildungen gelangt.

überall an Stelle der $x, y, z, w \dots$ diese Ausdrücke für $X, Y, Z, W \dots$ substituirt:

$$G' \quad [\varphi_1(x, y, z, w \dots)]^2 + [\varphi_2(x, y, z, w \dots)]^2 + \dots = 0$$

so wird, wenn ein System von n Zahlen $x, y, z, w \dots$ der ursprünglichen G genügt, auch der durch Rechnung, durch die Transformationsformeln φ ihm zugeordnete Punkt (das System) $X, Y, Z, W \dots$ der

$$G' = 0$$

genügen.

Ein Beweisversuch hierfür würde den Wert einer Tautologie haben; denn wir haben ja a priori unsere Formeln φ so eingerichtet, dass eben der durch sie dem $x, y, z, w \dots$ zugeordnete Punkt auf G' liegen muss.

Einer logischen Tautologie muss, wenn zu ihrer Einkleidung mathematische Formeln verwendet werden können, die Mathematik mit einer nach ihren Operationsvorschriften darstellbaren Identität antworten. Somit ist sicher vorauszusagen: für jeden Punkt $x, y, z, w \dots$, für welchen

$$G = 0$$

erfüllt ist, muss

$$G' = 0$$

identisch erfüllt sein, d. h. in geometrischer Sprechweise: die Fläche G muss einen Teil von G' bilden.

Da die Substitutionsformeln φ sicher linear ausfallen werden, so muss überhaupt die Fläche G' mit G zusammenfallen; d. h. die Form G' muss sich herausstellen als mit G bis auf einen constanten Factor identisch.

Die Beziehung zwischen $(x, y, z, w \dots)$ und $(X, Y, Z, W \dots)$ ist geometrisch eine reciproke bei festliegendem Systeme $a, b, c, d \dots$; demnach muss die Auflösung der Gleichungen

$$X = \varphi_1(x, y, z, w \dots), \quad Y = \varphi_2(x, y, z, w \dots) \quad \text{u. s. w.}$$

nach den $x, y, z, w \dots$ genau dieselben homolog gelegenen Coefficienten aufweisen, wie die Functionen φ selbst deren besitzen: unsere Transformation wird eine „involutorische“ sein und jedenfalls die „Fläche“ G in sich selbst transformiren. Die Herstellung eines geeigneten gemeinschaftlichen Nenners für die φ -Functionen — um die Substitutions-Determinante = -1 zu erhalten — bildet eine Hilfsaufgabe; ist dieselbe gelöst, so würde für die independente Darstellung von „involutorisch-orthogonalen“ Substitutionen durch $n-1$ Parameter $a:b:c:d \dots$ das Material gewonnen sein.

Wir schreiten nun zur effectiven Bestimmung der φ -Functionen. Der unbekannte Durchstosspunkt $X, Y, Z, W \dots$ hat als Punkt der Verbindungslinie von $(a, b, c, d \dots)$ nach $(x, y, z, w \dots)$ die Coordinaten

$$S \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \mu a + \lambda x \\ Y = \mu b + \lambda y \\ Z = \mu c + \lambda z \\ W = \mu d + \lambda w \quad \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in

$$G = 0$$

liefert

$$\mu^2(a^2 + b^2 + \dots) + 2\lambda\mu(ax + by + cz + dw + \dots) + \lambda^2(x^2 + y^2 + \dots) = 0$$

da aber nach Voraussetzung $(x, y, z, w \dots)$ auf

$$G = 0$$

gelegen, also

$$x^2 + y^2 + \dots = 0$$

so erhält man

$$\mu(a^2 + b^2 + c^2 + \dots) + 2\lambda(ax + by + cz + \dots) = 0$$

Demnach hat man zu setzen:

$$\mu : \lambda = 2(ax + by + cz + \dots) : -(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)$$

Somit wären die Coordinaten des Punktes $X, Y, Z, W \dots$ bestimmt durch Einsetzen in G :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = X &= 2(ax + by + cz + \dots) \cdot a - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots)x \\ \varphi_2 = Y &= 2(ax + by + cz + \dots) \cdot b - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots)y \\ \varphi_3 = Z &= 2(ax + by + cz + \dots) \cdot c - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots)z \\ &\quad \text{u. s. w. } ^1) \end{aligned}$$

In der That wird nun die Einführung dieser φ -Functionen statt der $x, y, z, w \dots$ in die ursprüngliche Gleichung

$$G = 0$$

das Resultat ergeben: (unserc oben vorausgesagte „Tautologie“)

1) Dicselben Formeln finden sich in dem Aufsätze von Herrn A. Voss: „Ueber orthogonale Substitutionen“: Mathem. Annalen; Band 13. (1878) pag 341.

Die Formeln T sind im Einklange mit den früher durch Induction gefundenen Ausdrücken A_4 ; den Beweis für ihre Eigenschaften brauchen wir nicht mehr durch Ausrechnung zu erbringen; er liegt in dem Gedankengange, dem sie ihre Existenz verdanken.

II. Lineare involutorische Substitution für allgemeine quadratische Formen.

§ 5. Herstellung der Substitutions-Coefficienten; Eigenschaften ihrer Determinante.

Wir werden im Folgenden die rasch fördernde Methode der symbolischen Rechnung ausschliesslich benutzen — durch ihre Anwendung wird sich die Lösung der uns vorliegenden Aufgabe, sowie der Nachweis für einige merkwürdige, höchst allgemeine Determinanten-Relationen besonders übersichtlich gestalten.

Es sei eine homogene quadratische Form von μ Variablen vorgelegt:

$$A \quad \begin{aligned} a_x^2 &\equiv b_x^2 \equiv c_x^2 \equiv d_x^2 \dots \\ a_x &\equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_\mu x_\mu \end{aligned}$$

dann kann ein Punkt y ausserhalb der Fläche

$$A = 0$$

fest angenommen werden, so dass also:

$$a_y^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

Wird dieser Punkt y mit einem auf der Fläche sich vorfindenden Punkte x verbunden, so müssen, wie in § 4., die Coordinaten des zweiten Durchstosspunktes X mit der Fläche — auf der Verbindungsgeraden von x nach y — sich einstellen als lineare Functionen von x_i .

Man hat nun für X , eben weil auf jener Verbindungsgeraden gelegen:

$$X_i = \mu y_i + \lambda x_i; \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

und daher zur Bestimmung von $\mu : \lambda$ die Gleichung

$$A' = 0$$

oder

$$\mu^2 a_y^2 + 2\lambda a_x a_y + \lambda^2 a_x^2 = 0$$

Da nach der Voraussetzung

$$a_x^2 = 0$$

so erhält man

$$\mu : \lambda = 2(a_x a_y) : -a_y^2$$

demnach die „involutorischen“ Substitutionen:

$$F \quad N \cdot X_i = 2(a_x a_y) y_i - a_y^2 \cdot x_i$$

Um für diese X einen Nenner N zu bestimmen, welcher nach der Transformation die Form a_x^2 vollständig identisch mit sich selbst — ohne Zahlenfactor — erscheinen lässt, haben wir nachträglich die Wirkung der Substitutionen F in

$$A = 0$$

zu untersuchen.

Die Substitutionen F ergeben nun:

$$A' \quad 4(a_x a_y)(d_x d_y) b_y^2 - 4(a_x a_y) \cdot c_y^2 b_x b_y + (c_y^2)(d_y^2) \cdot b_x^2 = 0$$

Man erkennt dies durch wirkliche Einführung der für die X bestimmten Ausdrücke:

$$A' \quad [2(a_x a_y) \cdot b_y - c_y^2 \cdot b_x]^2 = 0$$

denn dies gibt, nach Taylor's Theorem entwickelt, genau unsere obige Form — indem wir weitergehend noch neue Symbole einführen, um im Resultate A' die Vieldeutigkeit der symbolischen Ausdrücke zu vermeiden.

Die beiden ersten Glieder der Summe A' zerstören sich nun identisch, somit wird durch die Verwendung der X -Formeln sich die Gleichung

$$A = 0$$

mit dem constanten Factor $(a_y^2)(b_y^2)$ behaftet — einstellen; dividirt man also gleichmässig sämtliche X durch (die Zahl) a_y^2 , so wird identisch

$$A' \equiv A$$

Wir stellen demnach die Tabellen T_X , T der „involutorischen“ Substitution auf, welche „die Form A identisch in sich selbst transformirt“:

$$T_X \quad a_y^2 \cdot X_i = 2(a_x a_y) y_i - (a_y^2) x_i$$

oder (beispielsweise ausgerechnet für $\mu = 3$):

$$T \quad \begin{vmatrix} \frac{2y_1(a_1 a_y) - a_y^2}{N} & \frac{2y_1(a_2 a_y)}{N} & \frac{2y_1(a_3 a_y)}{N} \\ \frac{2y_2(b_1 b_y)}{N} & \frac{2y_2(b_2 b_y) - b_y^2}{N} & \frac{2y_2(b_3 b_y)}{N} \\ \frac{2y_3(c_1 c_y)}{N} & \frac{2y_3(c_2 c_y)}{N} & \frac{2y_3(c_3 c_y) - c_y^2}{N} \end{vmatrix}$$

$$N = d_y^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

Ohne jede Ausrechnung können wir aus der geometrischen Entstehungsart dieser Determinante, wonach die Substitutionen T involutorisch sein müssen, voraussagen:

„Es sei in der Determinante T das k te Glied der i ten Zeile mit a_{ik} bezeichnet, ferner mit A_{ik} die Unterdeterminante der Stelle a_{ik} . Man hat dann identisch:

$$a_{ik} = A_{ki} \text{ 1)}$$

Schreibt man nämlich die T_X Substitutionen mit Hilfe der a :

$$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

$$X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$

$$X_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

so ist nach unserer geometrischen Herleitungsweise erwiesen, dass umgekehrt:

$$x_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3$$

$$x_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3$$

$$x_3 = a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3$$

Aber nach den Regeln der Algebra würde man erhalten haben:

$$\Delta x_1 = A_{11} X_1 + A_{21} X_2 + A_{31} X_3$$

$$\Delta x_2 = A_{12} X_1 + A_{22} X_2 + A_{32} X_3$$

$$\Delta x_3 = A_{13} X_1 + A_{23} X_2 + A_{33} X_3$$

wobei Δ die ausgerechnete Determinante T . Um nun T auszuwerten, lassen wir zunächst zur Einfachheit den Nenner weg — und können die so entstandene Determinante Δ' nach den Potenzen der 3 in der Diagonale sich hervorhebenden Glieder a_y^2 , b_y^2 , c_y^2 entwickeln.

1) Obige Fassung gilt für unser Beispiel einer T -Determinante für $\mu = 3$; allgemein ist dagegen

$$\varepsilon a_{ik} = A_{ki}, \quad \varepsilon = (-1)^{\mu-1}$$

Wir erhalten zunächst als Product dieser drei Grössen: $-(a_y^2)^3$.

Fassen wir dann die Producte von je zweien jener 3 Grössen ins Auge, so finden wir als weiteres Glied der Entwicklung:

$$\begin{aligned} & a_y^2 \cdot b_y^2 \cdot 2y_3(c_3 c_y) + b_y^2 \cdot c_y^2 \cdot 2y_1(a_1 a_y) + c_y^2 \cdot a_y^2 \cdot 2y_2(b_2 b_y) \\ &= 2(a_y^2)^2 \{y_3 d_3 d_y + y_2 d_2 d_y + y_1 d_1 d_y\} \\ &= 2(a_y^2)^2 \cdot d_y^2 = 2(a_y^2)^3 \end{aligned}$$

Um jene Glieder von \mathcal{A}' zu bestimmen, welche a_y^2 , b_y^2 , c_y^2 gar nicht enthalten, haben wir an Stelle dieser Grössen 0 einzusetzen; so erhalten wir als Factor von $(a_y^2)^0$:

$$2y_1 \cdot 2y_2 \cdot 2y_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 a_y & a_2 a_y & a_3 a_y \\ b_1 b_y & b_2 b_y & b_3 b_y \\ c_1 c_y & c_2 c_y & c_3 c_y \end{vmatrix}$$

was offenbar verschwindet —; der gleiche Schluss würde auch gelten für die Factoren — etwa $\begin{vmatrix} a_1 a_y & a_2 a_y \\ b_1 b_y & b_2 b_y \end{vmatrix}$ der ersten Potenzen — etwa c_y^2 — jener 3 hervorgehobenen Glieder.

Demnach ist

$$\mathcal{A}' = -(a_y^2)^3 + 2(a_y^2)^3 = +(a_y^2)^3$$

dies gibt nach Division mit dem Kubus des Nenners (a_y^2) den Wert \mathcal{A} , oder $T = +1$.

(Im allgemeinen Falle ist $\mathcal{A} = (-1)^{\mu-1}$).

Zu unseren Formeln für $\mathcal{A} \cdot x_i$ und x_i zurückkehrend, finden wir somit den ausgesprochenen Satz

$$a_{ik} = A_{ki}$$

bestätigt.

Zahlenbeispiel für Aufstellung einer Coefficiententabelle und deren Untersuchung.

Der Kreis

$$K \quad x_1^2 + x_2^2 - 12x_3^2 + 6x_2 x_3 + 4x_3 x_1 = 0$$

mit dem Mittelpunkte $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ und vom Radius = 5 kann transformirt werden mit Zugrundelegung eines Punktes, wie

$$1, 2, 1$$

der nicht auf ihm gelegen, $((a_y^2) = 9)$.

Die Tabelle F der X -Substitutionen ergibt sich als

$$9X_1 = 2[(x_1 + 2x_3) \cdot 1 + (x_2 + 3x_3) \cdot 2 + (2x_1 + 3x_2 - 12x_3) \cdot 1] \cdot 1 - 9x_1$$

$$9X_2 = 2[(x_1 + 2x_3) \cdot 1 + (x_2 + 3x_3) \cdot 2 + (2x_1 + 3x_2 - 12x_3) \cdot 1] \cdot 2 - 9x_2$$

$$9X_3 = 2[(x_1 + 2x_3) \cdot 1 + (x_2 + 3x_3) \cdot 2 + (2x_1 + 3x_2 - 12x_3) \cdot 1] \cdot 1 - 9x_3$$

oder ausgerechnet:

$$9X_1 = -3x_1 + 10x_2 - 8x_3$$

$$9X_2 = 12x_1 + 11x_2 - 16x_3$$

$$9X_3 = 6x_1 + 10x_2 - 17x_3$$

Diese Formeln geben also zunächst, wenn ein Punkt beliebig auf der Kreisperipherie vorgegeben, etwa 1, 1, 1, denjenigen Punkt X , wo die Verbindungslinie vom festen Punkte 1, 2, 1 nach dem beweglichen Punkte (1, 1, 1) hin zum zweitenmale den Kreis trifft. Dem Punkte 1, 1, 1 entspräche

$$9X_1 = -1, \quad 9X_2 = 7, \quad 9X_3 = -1$$

Zweitens aber werden die Formeln für die X_i , an Stelle der x_i in die Kreisgleichung eingeführt, dieselbe identisch in sich transformiren; und schliesslich ergibt sich durch Auflösung der 3 Gleichungen nach x_i :

$$9x_1 = -3X_1 + 10X_2 - 8X_3$$

$$9x_2 = 12X_1 + 11X_2 - 16X_3$$

$$9x_3 = 6X_1 + 10X_2 - 17X_3$$

Wie unsre früher gegebenen Formeln (§§ 1.—4.) nur äusserst specialisirte Fälle des in diesem Paragraphen gelösten, viel allgemeineren, Problems bilden, kann an dieser Stelle am besten überschaut werden. Die dort in die Substitutionsformeln eingeführten Summen:

$$2(ax + by + cz + \dots) \quad \text{oder} \quad (a^2 + b^2 + c^2 + \dots)$$

sind nichts anderes als die Polaren und Formen $2(a_x a_y)$, a_y^2 dieses Paragraphen; die feste Gruppe $a, b, c, d \dots$ entspricht dem nunmehr benutzten festen Punkte y .

Ist der zu transformirende Punkt x so gelegen, dass

$$(a_x a_y) = 0$$

so fällt X mit x zusammen, wie aus den Formeln F ersichtlich.

§ 6. Formale Erweiterungen der gefundenen Formen, sowie verallgemeinerte Anwendungen derselben.

Wenn wir die Formeln T des letzten Paragraphen ins Auge fassen und uns daran erinnern, dass die Coordinaten y fest gegebene Zahlen vorstellen, so lehrt eine kurze Ueberlegung, dass für unser ganzes Transformationsproblem nicht die einzelnen Coefficienten a_{ik} der zu transformirenden Form α_x^2 wesentlich sind, sondern immer nur gewisse Verbindungen derselben mit den Zahlen y , nämlich die Ausdrücke $(a_1 a_y)$, $(a_2 a_y) \dots (a_\mu a_y)$; so dass man also recht wol den Coefficienten a_{ik} ganz neue Werte geben kann, wenn nur jene Verbindungen, beispielsweise

$$(a_1 a_y) = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + \dots + a_{1\mu} y_\mu$$

bei gleichgebliebenen y_i ihren effectiven Zahlenwert nicht ändern.

Man kann also jene Ausdrücke gleichsetzen resp. $(\beta_1 \beta_y)$, $(\beta_2 \beta_y) \dots (\beta_\mu \beta_y)$, entstanden aus einer ganz neuen Form β_x^2 . So wird also durch die Transformation T nicht nur die Form α_x^2 in sich transformirt, sondern auch die mit vollständig verschiedenen Coefficienten versehene Form β_x^2 , wenn eben nur immer

$$(\beta_1 \beta_y) = \varrho (a_1 a_y), \quad (\beta_2 \beta_y) = \varrho (a_2 a_y) \quad \text{u. s. w.}$$

Hier stehen rechts auszurechnende Zahlengrössen — im ganzen erhält man μ Gleichungen für $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ wesentliche Unbekannte, nämlich die neuen Coefficienten β_{ik} .

Zahlenbeispiel. Es sei vorgegeben gewesen die Summe $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; sowie der „transformirende Punkt“ $y(1, 2, 3)$. Man erhält zunächst

$$(a_1 a_y) = 1, \quad (a_2 a_y) = 2, \quad (a_3 a_y) = 3$$

Stellt man nun die Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} \beta_1 \beta_y &= \beta_{11} \cdot 1 + \beta_{12} \cdot 2 + \beta_{13} \cdot 3 = \varrho \cdot 1 \\ \beta_2 \beta_y &= \beta_{21} \cdot 1 + \beta_{22} \cdot 2 + \beta_{23} \cdot 3 = \varrho \cdot 2 \\ \beta_3 \beta_y &= \beta_{31} \cdot 1 + \beta_{32} \cdot 2 + \beta_{33} \cdot 3 = \varrho \cdot 3 \end{aligned}$$

welches System beispielsweise befriedigt wird durch $(\beta_{ki} = \beta_{ik})$:

$$\varrho = 27; \quad \beta_{11} = 15, \quad \beta_{12} = -3, \quad \beta_{13} = 6, \quad \beta_{22} = 12, \quad \beta_{23} = 11, \\ \beta_{33} = 5^3$$

so würde die auf den Punkt $y(1, 2, 3)$ sich stützende orthogonal-involutorische Transformation der Summe $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, nämlich (§ 4.)

$$\begin{aligned}NX_1 &= -12x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\NX_2 &= 4x_1 - 6x_2 + 12x_3 \\NX_3 &= 6x_1 + 12x_2 + 4x_3, \quad N = 14\end{aligned}$$

eine solche sein, dass sie auch den Kegelschnitt

$$\beta_y^2 \equiv 15x_1^2 - 6x_1x_2 + 12x_2^2 + 12x_1x_3 + 22x_2x_3 + 6x_3^2 - 0$$

in sich transformirt — sie würde nebenbei auch die Punkte dieses Kegelschnitts involutorisch ordnen.

Ueber 4 Coefficienten β_{ik} kann hier vor Auflösung der sie definirenden Gleichungen

$$\beta_i\beta_j = a_ia_j$$

willkürlich verfügt werden — allgemein über $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$; aber trotzdem wäre es ein Cirkelschluss, wenn man annehmen wollte, dass durch diese Verfügungsfreiheit über die β etwa eine Verallgemeinerung in der Parameterdarstellung der involutorisch-orthogonalen Substitutionen erreicht wäre.

Nachdem wir nun für die Entstehung der Formeln eine Erweiterung erreicht haben — wenigstens eine formale — kann auch eine Ausdehnung ihrer Verwendbarkeit nachgewiesen werden.

Wir wissen, dass die Formeln F , T_X involutorischen Charakter haben — zunächst in geometrischer Weise und zwar für Punkte der Fläche

$$a_x^2 = 0$$

die Coefficienten- und Variabeln-Verbindungen aber, wie sie vom Verein der Transformationsformeln vorgestellt werden, bringen diesen Charakter auch algebraisch zum Ausdruck durch das Bestehen von formalen Identitäten, wie etwa die wichtigste

$$F(X) = x$$

in welchen dann den Symbolen x für die Veränderlichen nicht mehr die Beschränkung anhaftet nur als Coordinaten von Punkten auf einer gewissen Fläche anerkannt zu werden.

Demnach transformiren alle bisher gebrachten Transformationsformeln nicht nur die Punkte der jeweilig ins Auge gefassten Fläche

$$a_x^2 = 0$$

in Punkte derselben Fläche, sondern sie ordnen in involutorisch-collinearer Weise alle Punkte des $(\mu-1)$ -dimensionalen Raumes einander paarweise zu.

Für diese involutorische Raumtransformation ist nach dem Schlusse von § 5. die Fläche

$$a_x a_y = 0$$

der Ort der sich selbst zugeordneten Punkte :

$$X = x$$

Unsere Formeln T_X gestatten überdies noch eine einfache Ableitung des Satzes:

„Die Fläche

$$a_x a_y = 0$$

trennt mit dem festen Punkte y jedes sich entsprechende Punktepaar x, X harmonisch.“

Denn es sei x' ein auf der Fläche

$$a_x a_y = 0$$

gelegener Punkt, daher

$$a_{x'} \cdot a_y = 0$$

wir wollen dann zum Punkte

$$y_i + \lambda x'_i = \sigma z_i$$

den nach unseren Formeln conjugirten Punkt Z bestimmen.

Das Einsetzen in die Tabelle T_X ergibt als zugeordneten Punkt Z :

$$\varrho \cdot Z_i = 2(a_y^2 + \lambda a_{x'} \cdot a_y) y_i - a_y^2 \cdot (y_i + \lambda x'_i)$$

da aber

$$a_{x'} \cdot a_y = 0$$

so hat man

$$\varrho \cdot Z = a_y^2 \cdot \{y_i - \lambda x'_i\}$$

demnach

$$\sigma \cdot z_i = y_i + \lambda x'_i; \quad \varrho \cdot Z_i = y_i - \lambda x'_i$$

was zu beweisen war.

Zusammenfassend also und wieder anknüpfend an das im Eingange Bemerkte: Nachdem eine Fläche

$$a_x^2 = 0$$

aufgestellt und benutzt worden ist, um eine involutorische Raum-Transformation zu liefern, ist es nicht mehr nötig, sie für jene durch sie erzeugte Transformation ausschliesslich beizubehalten — im Gegenteile sind dann unendlich viele Flächen

$$\beta_x^2 = 0$$

nachweisbar als geeignet die Stelle der

$$a_x^2 = 0$$

zu ersetzen; das Charakteristische einer solchen Transformation ist vereinigt in den μ Coordinaten $(a_i a_y)$ der ebenen Fläche

$$a_x a_y = 0$$

Oder auch: Bei Involutionen dieser Art darf der transformirende Punkt y , sowie die Zahlenwerte der Coordinaten der Fläche der Doppелеlemente beliebig vorgegeben sein, — nachträglich können dann Flächen

$$a_x^2 = 0$$

gefunden werden, die gleichfalls geeignet wären jene Transformation zu ermitteln.

Anm. I. Von Herrn Mansion, Nouvelle correspondance de mathématiques, Bnd. IV., p. 257. wurde bewiesen, dass jede lineare involutorische Zuordnung von der Art sein muss wie unser aufgestelltes System, d. h. dass sie sich stützen muss auf einen „transformirenden Punkt“, sowie ein lineares Gebilde, welches die Doppелеlemente der Zuordnung enthält.

Anmerkung II. Ist vorgegeben

$$y_1 = y_2 = \dots = y_{\mu-1} = 0; \quad y_\mu \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

sowie als Gleichung der Fläche der sich selbst entsprechenden Elemente

$$a_y = 0$$

die folgende

$$x_\mu = 0$$

so nehmen wir als transformirende Fläche zweiten Grades

$$\beta_x^2 = 0$$

die folgende

$$x_\mu^2 = 0$$

Ihre Anwendung gibt die Transformationsformeln

$$\begin{cases} (\alpha_\mu y_\mu) \cdot X_i = -(\alpha_\mu y_\mu) \cdot x_i; & i = 1, 2, 3, 4 \dots (\mu - 1) \\ (\alpha_\mu y_\mu) \cdot X_\mu = +(\alpha_\mu y_\mu) \cdot x_\mu \end{cases}$$

Für 3 oder 4 Veränderliche kann man mit

$$x_\mu = 0$$

die Vorstellung der Gleichung einer endlichen Coordinatenfläche (— Axe für $\mu = 3$), oder der Gleichung der sogenannten „unend-

lich fernen“ Punkte verbinden. Man erhält dann als geometrische Deutung unsrer algebraischen Specialisirung in dem einem Falle jene Transformation, für welche die Bezeichnung „Spiegelung“ üblich; im andern Falle jene Zuordnung, wo zwei Punkte X und x jeweilig die entgegengesetzt gleiche Entfernung und Richtung vom sogenannten „Anfangspunkte“ $O, 0, 0, \dots 1$ aus aufweisen. Der involutorische Charakter dieser beiden Transformationen ist evident.

III. Involutorische Transformationen von Formen dritten Grades.

§ 7. Involutorisch-rationale Transformation einer homogenen Form 3ten Grades in sich selbst.

1. Es sei vorgegeben

$$a_x^3 = b_x^3 = c_x^3$$

sowie ein Zahlensystem (Punkt) y , für welches

$$a_y^3 = 0$$

erfüllt ist.

Die Verbindungsgerade

$$X = \mu y + \lambda x$$

trifft, wenn x ein beliebiger Punkt auf der Fläche

A

$$a_x^3 = 0$$

diese Fläche zum drittenmale in einem Punkte X , dessen Coordinaten rational ausdrückbar sein müssen durch die von x , sowie jene des festen Punktes y .

Wie früher schliessen wir weiter: angenommen, man habe Formeln $\varphi_i(x)$ ^(y) construirt, welche in ihrem geometrischen Aufbau uns verbürgen, dass immer der Punkt

$$X_i = \varphi_i$$

auf der Fläche A:

$$a_x^3 = 0$$

sich befindet, wenn y und x darauf liegen, so muss — als mathematische Identität — sich beim Einsetzen dieser φ -Functionen in die Flächengleichung:

$$A' \quad a_y^3 = 0$$

ergeben, dass A ein Divisor von A' ist.

Denn stellen wir uns einen der unendlich vielen Punkte der Fläche

$$a_x^3 = 0$$

vor, etwa x' , so weiss man schon, dass nach effectiver Berechnung der φ -Functionen bei Einsetzung der Zahlen $x_1', x_2', \dots, x_\mu'$ in

$$A' = 0$$

(welch letzteres die Symbole $x_1, x_2 \dots$ enthält), A' deswegen verschwindet, weil der Punkt φ auf A gelegen.

Da dies nun aber für jeden der unendlich vielen Punkte x' auf A gilt, so muss der algebraische Ausdruck von A' — der durch die Allgemeinheit seiner alle Zahlen umfassenden Buchstabenzeichen $x_1, x_2 \dots x_\mu$ alle Punkte einer Fläche A aufzunehmen geeignet ist, indem man eben nach

$$a_x^3 = 0$$

nebenbei schreibt —, durch eine zwischen A und A' bestehende Identität von der Form

$$A = f \cdot A'$$

die logisch festgestellte Tatsache sichtbar machen, dass eine beliebige Zahlengruppe $x_1' \dots x_\mu'$ mit

$$A = 0 \quad \text{auch} \quad A' = 0$$

erfüllt (f darf dabei selbst eine Function der x sein). D. h. die Ausrechnung wird und muss zum Ausdruck bringen, dass die Fläche

$$A = 0$$

einen Teil der transformirten Fläche

$$A' = 0$$

bildet.

Um die Transformation wirklich herzustellen, setzen wir

$$X_i = \mu y_i + \lambda x_i \quad \text{in} \quad a_x^3 = 0$$

ein, um zu erhalten:

$$A \quad \mu^3 a_y^3 + 3\mu^2 \lambda a_y^2 a_x + 3\mu \lambda^2 a_y a_x^2 + \lambda^3 a_x^3 = 0$$

wobei vorausgesetzt wird:

$$a_y^3 = 0, \quad a_x^3 = 0$$

Wir finden:

$$\mu a_y^2 a_x + \lambda a_y a_x^2 = 0$$

daher

$$\mu : \lambda = (a_y a_x^2) : -(a_y^2 a_x)$$

Schliesslich hat man

$$T_X \quad X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_y^2 a_x) x_i$$

Diese Zuweisung T ist eine involutorische; denn wäre y sowie ein bestimmtes, aus x' errechnetes X' , vorgegeben, so würde sich als dritter Schnittpunkt mit der Fläche auf der Verbindungsgeraden yX' offenbar wieder der Punkt x' einstellen müssen, der zur Herstellung von X' gedient hat ¹⁾.

Durch Einsetzen des Wertes von X in die Flächengleichung erhalten wir A' und erfahren dabei, welches der Factor f ist, um welchen A' gegen A multiplicativ vermehrt erscheint:

$$A'^2) \quad (a_y a_x^2)^3 \cdot c_y^3 - 3(a_y a_x^2)^2 \cdot (b_y^2 b_x) c_y^2 \cdot c_x \\ + 3(a_y a_x^2) \cdot (b_y^2 b_x)^2 \cdot c_y c_x^2 - (b_y^2 b_x)^3 \cdot c_x^3 = 0$$

(hierzu ist die Gleichung A mit dem Symbole c geschrieben worden, ebenso T_X mit a und b).

Nun ist nach der Voraussetzung

$$c_y^3 = 0$$

Demnach erscheint die ursprüngliche Form behaftet mit dem Kubus eines linearen Factors $-(b_y^2 b_x)$. Will man demnach Formeln aufstellen, für deren Anwendung die Ueberführung von A nach A' eine vollständig identische ist, auch der Form nach, so hat man statt T_X verbessernd zu schreiben:

$$NX_i = -(a_y a_x^2) y_i + (a_y^2 a_x) x_i; \quad N = (a_x a_y^2)$$

Es sei bemerkt, dass für den Punkt

$$x_i = y_i$$

alle Transformationsformeln illusorisch werden. Denn man hat, mit oder ohne Nenner schreibend:

1) Es sei hervorgehoben, dass der involutorische Charakter der Involution T_x nur erkannt ist, so lange Punkte der vorgegebenen Fläche A transformirt werden. Dass obige Formeln überhaupt involutorisch sind, für alle Punkte $(x_1, x_2 \dots x_\mu)$, wird später (§§ 8—10.) erwiesen werden.

2) Hier bedeuten die Klammern, dass jeder in ihnen enthaltene Ausdruck durch effective Bestimmung der Symbole ausgerechnet und dann erst Potenzirt werden soll. Strenger wäre $(a_x^2 a_x) \cdot (d_x^2 d_y) \cdot (e_x^2 e_y)$ u. s. w

$$X_i = (a_y^3) y_i - (a_y^3) x_i = 0$$

wegen

$$a_y^3 = 0$$

Andrerseits entspricht jedem Punkte x' , für welchen

$$a_y^3 a_{x'} = 0 \quad \text{ist,}$$

$$X_i = (a_y a_{x'}^2) y_i$$

d. h. der ganzen Fläche

$$a_y^3 a_x = 0$$

entspricht der einzige Punkt y .

Die μ Ausdrücke der X_i stellen also Flächen zweiten Grades vor, die den Punkt $y_1, y_2 \dots y_\mu$ gemeinschaftlich besitzen; man kann aber leicht zeigen, dass sie sich sämtlich dort berühren ¹⁾

Um dies nachzuweisen, bilden wir die Gleichung der Polarfläche einer solchen Fläche X_i , genommen für den Punkt $y_1, y_2 \dots y_\mu$ als Pol und geschrieben mit z als laufenden Coordinaten.

$$X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y^2) z_i$$

gibt polarisirt:

$$2(a_y \cdot a_y \cdot a_x) y_i - a_y^2 \{y_i a_x + z_i a_y\} = y_i \cdot (a_y^2 a_x)$$

da

$$a_y^3 = 0$$

Diese Tangentenfläche ist daher dieselbe für alle μ Flächen X_i ; sie ist überdies die Tangentenfläche an die vorgegebene Fläche dritten Grades

$$a_x^3 = 0$$

Wir werden diese geometrischen Untersuchungen später erledigen und kehren zu unsern Formeln für NX zurück, um denselben den Satz zu entnehmen:

„Für eine Function von höherem Grade als dem zweiten ist es — im allgemeinen und auf einen beliebigen Punkt y sich stützend — nicht möglich durch ganze Functionen der Variablen als Transformationsformeln X die Form in sich selbst ohne Factor überzuführen.“

Specielle Beispiele für $\mu = 3$.

$$A \quad ax_1^3 + \beta x_2^3 + \gamma x_3^3 + 6k \cdot x_1 x_2 x_3 = 0$$

liefert

1) Diese Berührung ist nicht die gewöhnliche, sondern die innigste zunächst der Identität.

$$(a_y^2 a_x) = x_1 (\alpha y_1^2 + 2k y_2 y_3) + x_2 (\beta y_2^2 + 2k y_3 y_1) + x_3 (\gamma y_3^2 + 2k y_1 y_2) = N$$

$$(a_y a_x^2) = y_1 (\alpha x_1^2 + 2k x_2 x_3) + y_2 (\beta x_2^2 + 2k x_3 x_1) + y_3 (\gamma x_3^2 + 2k x_1 x_2) = M$$

Die Substitutionen:

$$-N \cdot X_i = M y_i - N \cdot x_i$$

liefern erstens, wenn 2 Punkte der Curve A bekannt sind, y und x , den dritten Schnittpunkt der Geraden xy mit der Curve, X , rational; sie besitzen zweitens die involutorische Eigenschaft, d. h. sie geben nach x_i aufgelöst genau dieselben Functionen φ_i in den X_i , welche aus den x_i die X_i direct zu bilden gestatten; und ihre Einführung in die Gleichung der Curven dritter Ordnung A , an Stelle der y , wird diese Gleichung identisch in sich überführen.

Zahlenbeispiel. Sei vorgegeben

$$\alpha = \beta = \gamma = 1; \quad k = -\frac{5}{8}$$

d. h.

$$A \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5x_1 x_2 x_3 = 0$$

als y sei gewählt der Punkt

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1$$

Die ausgerechneten Transformationsformeln sind

$$\varphi \cdot X_1 = 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 - x_1 x_3 - \frac{5}{8}(x_2 x_3 - 2x_1^2)$$

$$\varphi \cdot X_2 = 2x_1^2 + 2x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \frac{5}{8}(4x_1 x_3 - x_2^2)$$

$$\varphi \cdot X_3 = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_3 - 4x_2 x_3 - \frac{5}{8}(x_1 x_2 - 2x_3^2)$$

Die Einsetzung

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 5X_1 X_2 X_3 \text{ gibt } (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5x_1 x_2 x_3) \cdot (x_1 - x_2 + x_3)^3$$

bis auf einen Zahlenfactor; die 3 Kegelschnitte $X_1 X_2 X_3$ gehen durch den Punkt 1, 2, 1; in demselben die Curventangente desselben Punktes, nämlich

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

berührend.

Dass sich die 3 Kegelschnitte X in y sogar dreipunktig berühren, wird später gezeigt werden.

§ 8. Geometrische Eigenschaften der Functionen,
welche die involutorische Substitution vermitteln.

Setzen wir einen der 3 allgemeinen Ausdrücke φ_i für die transformirten Coordinaten X_i , etwa $\varphi_3 = 0$, so hat man

$$\varphi_3 = (a_y a_x^2) y_3 - (a_x a_y^2) x_3 = 0; \quad = X_3$$

Demnach wird jeder Punkt x_1', x_2', x_3' , welcher

$$\begin{array}{l} \text{befriedigt und der Curve} \\ \varphi_3 = 0 \\ a_x^3 = 0 \end{array}$$

angehört, transformirt in einen Punkt

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1' = \text{endlich} \\ X_2' = \text{endlich} \\ X_3' = 0 \end{array} \right.$$

demnach liegen alle jene Curvenpunkte X' , welche durch unsere Transformationen zugewiesen werden den Schnittpunkten des Kegelschnitts

$$\begin{array}{l} \text{und der Curve} \\ \varphi_3 = 0 \\ \text{auf der Geraden} \\ a_x^3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

Nun hat aber diese Gerade mit der Curve dritten Grades nur 3 Schnittpunkte gemeinschaftlich — daher kann der Kegelschnitt

$$\varphi_3 = 0$$

mit der Curve nur 3 von y verschiedene Schnittpunkte aufweisen; er muss demnach in y_1, y_2, y_3 die Curve

$$a_x^3 = 0$$

dreipunktig berühren.

Wir können diesen Schluss leicht verallgemeinern und zugleich neue Sätze gewinnen.

Wenn 3 Punkte X^I, X^{II}, X^{III} der Curve

$$\begin{array}{l} \text{gleichzeitig auf der Geraden} \\ a_x^3 = 0 \end{array}$$

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

liegen, so ist auch für jeden der drei Punkte x' auf derselben Curve, welche die drei X durch Transformation erzeugt haben:

$$a[(a_y a_x'^2) \cdot y_1 - (a_x a_y^2) x_1'] + b[(a_y a_x'^2) y_2 - (a_x a_y^2) x_2'] + c[(a_y a_x'^2) y_3 - (a_x a_y^2) x_3'] = 0 \quad D$$

dazu noch

$$a_x'^3 = 0$$

sie sind also Schnittpunkte des Kegelschnitts D mit der Curve.

Dieser Kegelschnitt D nun hat an der Stelle y genau dieselbe Tangente

$$a_x a_y^2 = 0$$

wie die 3 einzelnen Kegelschnitte φ_i , aus welchen er additiv zusammengesetzt ist; d. h. D berührt die vorgegebene Curve

$$A = 0 \quad \text{oder} \quad a_x^3 = 0$$

im Punkte y —; einstweilen also wäre eine — zweipunktige Berührung in y erkannt.

Nun gilt aber als Anwendung des bekannten Schnittpunktsatzes von 3 Curven 3ter Ordnung durch 8 Punkte der Lehrsatz:

„Liegen die 3 Punkte X^I, X^{II}, X^{III} einer Curve dritter Ordnung auf einer Geraden, und sind x^I, x^{II}, x^{III} deren Projectionen auf dieselbe Curve von einem festen Curvenpunkte y aus, so berührt jener Kegelschnitt D , welcher durch x^I, x^{II}, x^{III} sowie durch zwei in y unmittelbar benachbarte Curvenpunkte geführt werden kann, die Curve dritter Ordnung 3punktig in y 1)“.

Demnach berührt unser obiger Kegelschnitt, der durch Transformation aus

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

entstand, in y die vorgegebene Curve dritten Grades

$$a_x^3 = 0$$

dreipunktig.

Somit wird jeder Kegelschnitt von der Form

$$a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 = 0$$

die Curve

$$a_x^3 = 0$$

in y dreipunktig berühren. Denn er geht durch die Projectionen x der 3 Punkte X , in welchen die Gerade

1) Dieser Satz ist umkehrbar.

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

die Curve schneidet — berührt seiner additiven Zusammensetzung nach die Curve zweipunktig, somit nach dem geometrischen Satze sogar dreipunktig.

Anmerkung I. Die am Schlusse des vorigen Paragraphen gebrauchte einfache Form der Transformation lässt diese Verhältnisse noch deutlicher werden. Der Kegelschnitt φ_3 für Z , nämlich

$$\delta \quad -(yz + axy + by^2 + cx^2) = 0$$

ist im Endlichen gelegen und schneidet die vorgegebene Curve

$$a \quad yz^2 + z(axy + by^2 + cx^2) + \{\alpha x^3 + \beta x^2y + \gamma xy^2 + \delta y^3\} = 0$$

im Endlichen. Ist nun für einen bestimmten Punkt $x'y'$

$$-(y' \cdot 1 + ax'y' + by'^2 + cx'^2) = 0$$

zugleich

$$a = 0$$

so liegen die transformirten Punkte $X' Y'$ auf der Curve unendlich fern, da der Nenner Z' verschwindet.

Somit liegen die 3 transformirten Punkte der Curve, wie sie den 3 Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte δ zuzuordnen sind, auf der unendlich fernen Geraden.

Andrerseits könnte man auf die Lage der transformirten Punkte auch aus der Gleichung schliessen, die für den Punkt $x'y'$ erfüllt sein muss:

$$\alpha x'^3 + \beta x'^2 y' + \gamma x' y'^2 + \delta y'^3 = 0$$

sie gibt 3 Richtungen $\frac{y'}{x'}$, an, in welchen erstens die endlichen Schnittpunkte $x'y'$ der Curve mit dem Kegelschnitte

$$\varphi_3 = 0$$

liegen müssen, ist aber dabei identisch mit der Gleichung, welche die Richtungen der drei unendlich fernen — auf einer Geraden gelegenen — Curvenpunkte bestimmt hätte.

§ 9. Formale Erweiterungen der Transformationsformeln; das Netz von Curven dritter Ordnung, die durch dieselbe involutorisch-quadratische Substitution in sich transformirt werden.

Immer deutlicher tritt der geometrische Charakter unser φ -Functionen, nämlich der einer quadratischen Cremona-Transformation

mit 3 zusammen fallenden Hauptpunkten ¹⁾ hervor — aber wir sind noch nicht berechtigt gewesen diese Bezeichnung principiell anzuwenden, da wir bisher immer nur Geometrie auf einer Curve getrieben haben und nur für deren Transformation, nicht für die ganze Ebene, unsre Formeln construiert wurden. — Die formalen Erweiterungen dieses Paragraphen bereiten den Uebergang von der einzelnen Curve auf die Ebene vor.

Wie früher, bei dem Falle von quadratischen Formen können wir uns fragen nach den Zahlen, welche bei unsrer Transformation von Curven dritter Ordnung in sich selbst wesentlich sind. Stellt sich hierbei heraus, dass deren Anzahl geringer als die der Coefficienten einer solchen Curve, und dass diese 9 Coefficienten nur in gewissen Verbindungen auftreten, deren Anzahl < 9 , so ist damit die Aussicht eröffnet, dass unendlich viele Curven — wenn eben nur ihre Constanten in jene Zahl von Bedingungen sich fügen, gleichzeitig durch genau identische Substitutionen in sich transformirt werden.

„Für die Transformation einer Curve dritter Ordnung, die sich auf den Curvenpunkt y stützen will, sind nur die 6 Grössen

$$a_1^2 a_y; a_2^2 a_y; a_3^2 a_y; a_{23} a_y; a_{31} a_y; a_{12} a_y$$

wesentlich; d. h. die 6 Coefficienten des Kegelschnitts

$$a_y a_x^2 = 0.$$

Beweis. Man hat zu zeigen: 1) dass jede Curve 3ter Ordnung, für welche 6 Gleichungen bestehen

$$S \quad \begin{cases} \beta_1^2 \cdot \beta_y = a_1^2 \cdot a_y; & \beta_{23} \cdot \beta_y = a_{23} \cdot a_y \\ \beta_2^2 \cdot \beta_y = a_2^2 \cdot a_y; & \beta_{31} \cdot \beta_y = a_{31} \cdot a_y \\ \beta_3^2 \cdot \beta_y = a_3^2 \cdot a_y, & \beta_{12} \cdot \beta_y = a_{12} \cdot a_y \end{cases}$$

den Punkt y enthält, wenn

$$a_y^3 = 0$$

2) dass die Transformationsformeln φ_i für die β -Curve identisch sind mit jenen für die α -Curve, solange sich beide auf den Punkt y stützen.

ad 1) Die Gleichung

$$\beta_y^3 = 0$$

kann geschrieben werden:

1) Salmon-Fiedler: Höhere ebene Curven. Art. 330.

$$\begin{array}{l} \beta_1^2 \beta_y \cdot y_1^2 + 2\beta_{23} \beta_y \cdot y_2 y_3 \\ + \beta_2^2 \beta_y \cdot y_2^2 + 2\beta_{31} \beta_y \cdot y_3 y_1 = 0 \\ + \beta_3^2 \beta_y \cdot y_3^2 + 2\beta_{12} \beta_y \cdot y_1 y_2 \end{array}$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$a_y^3 = 0$$

ferner sind alle hier vorhandenen links vom Striche stehenden Grössen nach der Voraussetzung S gleich den für a entsprechend gebildeten; das Zusammenhalten dieser beiden Voraussetzungen zeigt, dass die Zahlen $y_1 y_2 y_3$ oben eingesetzt die Bedingung

$$a_y^3 = 0$$

befriedigen.

2) Ist das System S erfüllt, so sind die beiden Kegelschnitte

$$a_y a_x^2 = 0 \quad \text{und} \quad \beta_y \beta_x^2 = 0$$

vollständig identisch. Bildet man nun die Polare des nämlichen Punktes y (seine Tangente) in Bezug auf

$$a_y a_x^2 = 0 \quad \text{als} \quad a_y \cdot a_y \cdot a_x = a_y^2 a_x = 0$$

und andererseits in Bezug auf

$$\beta_y \beta_x^2 = 0 \quad \text{als} \quad \beta_y^2 \beta_x = 0$$

so müssen beide Gleichungen der Tangente vollständig übereinstimmen. D. h.

$$a_y^2 a_x = 0$$

muss in allen darin vorkommenden 3 Coefficienten identisch sein mit

$$\beta_y^2 \beta_x = 0$$

Wenn man will, kann man diesen Schluss deutlich machen durch das Hinschreiben von $\beta_y \beta_x^2 = 0$:

$$\begin{array}{l} \beta_1^2 \beta_y \cdot y_1 x_1 + \beta_{21} \beta_y \cdot y_1 x_2 + \beta_{31} \beta_y \cdot y_1 x_3 \\ \beta_{12} \beta_y \cdot y_2 x_1 + \beta_2^2 \beta_y \cdot y_2 x_2 + \beta_{32} \beta_y \cdot y_2 x_3 \\ \beta_{13} \beta_y \cdot y_3 x_1 + \beta_{23} \beta_y \cdot y_3 x_2 + \beta_{33} \beta_y \cdot y_3 x_3 \end{array}$$

wo wiederum links vom Striche Zahlen stehen, für deren Gleichheit mit den für

$$a_y a_x^2 = 0$$

giltigen durch das System S Sorge getragen wurde.

Demnach sind die Formeln

$$\begin{aligned} \varphi_i &= X_i - (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y^2) x_i \\ \text{und} \\ \varphi_i &= X_i - (\beta_y \beta_x^2) y_i - (\beta_x \beta_y^2) x_i \end{aligned}$$

identisch bei Bestehen der 6 Relationen S.)

Somit werden durch ein solches, einmal aufgestelltes System der φ , unendlich viele Curven dritter Ordnung mit gemeinschaftlichem Punkte y (und gemeinschaftlicher Tangente in ihm) gleichzeitig in sich selbst transformirt und keine diese Curven ist vor den übrigen ausgezeichnet.

Es sei bemerkt, dass die 4 Punkte, in welchen die 4 von y aus an eine solche Curve möglichen Tangenten dieselbe berühren, auf dem festen Kegelschnitte $(a_y a_x^2) = 0$ liegen; somit auch die Doppelpunkte der im Systeme vorkommenden Curven vom Geschlechte 0. Dass solche Curven

$$\beta_x^2 = 0$$

sich überhaupt unseren Bedingungen S fügen können, wird durch die geringe Zahl der letztern erwiesen.

Unser oft gebrauchtes Beispiel

$$y + axy + by^2 + cx^2 + \{ax^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3\} = 0$$

gibt bei der Verfügbarkeit über $\alpha\beta\gamma\delta$ die Existenz jenes Curvensystems von gleichen Transformationen nochmals zu erkennen.

§ 10. Erweiterung der Anwendbarkeit der für ebene Curven dritter Ordnung gefundenen Transformationsformeln; Bildung von involutorisch-quadratischen Cremona-Substitutionen der Ebene.

Die Curven

$$\beta_x^3 = 0$$

welche einer vorgegebenen Curve

$$a_x^3 = 0$$

in der Weise des vorigen Paragraphen zugeordnet sind durch die 6 Relationen S , überdecken die ganze Ebene. Denn man hat Freiheit genug bei der Bestimmung von ihren 9 Coefficienten um dieselben durch einen beliebigen Punkt z der Ebene hindurchzuführen.

Lehrsatz. „Die Transformationen

$$T_X \quad \varphi_i = X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y)^2 x_i$$

ausgerechnet mit Zugrundelegung einer vorgegebenen Curve

$$a_x^3 = 0$$

und eines festen Punktes y auf ihr, sind, wenn angewendet für einen beliebigen Punkt der Ebene, eindeutig umkehrbar und zwar identisch umkehrbar. Man kann ohne Ausrechnung schliessen: setzt man in die Ausdrücke für die X_i nochmals an Stelle der x_i die für X_i gebildeten Ausdrücke ein, so erhält man identisch die Coordinaten x_1, x_2, x_3 wieder (allerdings behaftet mit dem sich gleichmässig einstellenden Factor

$$f = (a_y^2 a_x)^3.$$

Beweis. Für die Punkte der Curve

$$a_x^3 = 0$$

ist der Satz aus der geometrischen Entstehung (§ 7.) der φ -Formeln zu folgern.

Ist nun ein Punkt z vorgegeben, so kann man durch ihn eine Curve dritter Ordnung

$$\beta_x^3 = 0$$

legen, mit gleichzeitiger Erfüllung der 6 Bedingungen

$$S \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_1^2 \beta_y = a_1^2 a_y; & \beta_{23} \beta_y = a_{23} a_y \\ \beta_2^2 \beta_y = a_2^2 a_y; & \beta_{31} \beta_y = a_{31} a_y \\ \beta_3^2 \beta_y = a_3^2 a_y; & \beta_{12} \beta_y = a_{12} a_y \end{array} \right.$$

(dass $\beta_y^3 = 0$ folgt hieraus)

Wendet man auf den Punkt z dieser neuen Curve β die Transformation

$$T_X(\beta) \quad \varphi_i = X_i = (\beta_y \beta_x^2) \cdot y_i - (\beta_x \beta_y^2) x_i$$

an, welche vollständig in den darin vorkommenden Zahlen mit der für die a -Curve gebildeten identisch ist, so entsteht aus dem Curvenpunkte z jener Punkt als zugehöriger Z , in welchem die Verbindungsgerade von y nach z die Curve

$$\beta_x^3 = 0$$

schneidet. Wendet man auf Z nun nochmals dieselbe zuletzt gebrauchte Transformation $T_X^{(\beta)}$ an, so muss man wieder den Punkt z erhalten — weil eben für alle Punkte auf

$$\beta_x^3 = 0$$

die Zuordnung $T_X^{(\beta)}$ eine involutorische ist.

Nachdem dieses bewiesen, können wir die Hilfscurve

$$\beta_x^3 = 0$$

ganz eliminieren; wir können uns vorstellen als sei fortwährend nur mit der für

$$a_x^3 = 0$$

giltigen T_X -Formeln operirt worden ohne die Curve

$$\beta_x^3 = 0$$

jemals effectiv hergestellt zu haben — und gewinnen, da ja die T_X -Formeln, als mit den $T_X^{(\beta)}$ -Formeln identisch, mit letzteren übereinstimmende Schlussresultate liefern müssen, den Satz: die Formeln T_X führen bei zweimaliger Anwendung den vorgegebenen Punkt z in sich selbst zurück; ihre Umkehrung ist demnach für jeden Punkt der Ebene eine eindeutige und involutorische; d. h. jeder transformirte Punkt Z liefert, wenn der ihn erzeugende Punkt z nicht gegeben wäre, denselben durch Anwendung der Transformationsformeln auf Z .

Auch die directe Ausrechnung der Formeln

$$\varphi_i = X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y^2) x_i$$

müsste die Umkehrbarkeit ergeben; aber es schien uns wissenschaftlicher auf diesen für alle Punkte der Ebene giltigen involutorischen Charakter der Formeln zu schliessen, als ihn durch Rechnung zu erholen. Jeder algebraische (wie logisch-geometrische) Satz ist eine Identität, d. h. eine Baulität — nur durch das Vermeiden jedes Beweises, der sich auf directes Ausrechnen einer Formel stützen wollte, nur bei consequenter ausschliesslicher Verwendung der Phantasie, die mit ihren Schlüssen dem Rechner vorausseilt, verdient die Geometrie den Namen der *ἐλεγχος πραγμάτων οὐ βλεπομένων* und ihre Existenzberechtigung. Dieses Gefühl liess es uns entschuldbar scheinen, wenn — zur Constatirung des eigentlichen Charakters unsrer Transformation bei ihrer Anwendung auf die Paragraphen 8 und 9 als vorbereitend eingefügt wurden.

Die Curven dritter Ordnung gewähren somit die Möglichkeit involutorisch-quadratische, d. h. Cremona-Transformationen, zu bilden,

und zwar erscheint hierbei von letzteren der specialisirende Fall, wo 3 Hauptpunkte der Transformation in einen zusammengerückt sind. —

§ 11. Independenten Herstellung von Beispielen für involutorisch-quadratische Transformationen.

Nicht jede Zusammenstellung von 3 Ausdrücken zweiten Grades φ_i , die man willkürlich gebildet hätte

$$X_1 = \varphi_1(x), \quad X_2 = \varphi_2(x), \quad X_3 = \varphi_3(x)$$

würde eine eindeutig umkehrbare Transformation der Ebene vorstellen — höchstens würden jene Formel ausreichen eine vorgegebene Curve in eine andre zu transformiren (Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curv. Art. 344).

Noch viel weniger würden beliebig gebildete Ausdrücke obiger Art, identisch umkehrbare Transformationen vorstellen. Beispielsweise ist die von Salmon a. a. O. Art. 330 gegebene Substitution:

$$\varrho X_1 = x_1 x_2; \quad \varrho X_2 = x_2^2; \quad \varrho X_3 = x_2 x_3 - m x_1^2$$

trotz ihrer grossen Einfachheit nicht identisch umkehrbar; sondern die Auflösung nach den x_i ergibt:

$$x_1 = X_1 X_2; \quad x_2 = X_2^2; \quad x_3 = X_2 X_3 + m X_1^2$$

Auf die Frage nun: „wie kann man Beispiele bilden von identisch umkehrbaren Cremona-Transformationen mit zusammenfallenden Hauptpunkten?“ vermag die von uns vorgetragene Theorie der Transformation von ebenen Curven dritten Grades vollständige Antwort zu geben.

Durch Annahme einer willkürlichen Curve dritter Ordnung können wir, nach dem Vorhergehenden, Transformationen der ganzen Ebene bilden, die identisch umkehrbar sind.

Zweck des gegenwärtigen Paragraphen soll es sein, uns auch von der Heranziehung solcher Curven zu emancipiren und wo möglich direct involutorisch-quadratische Transformationen zu bilden. In diesen Formeln wird in nichts mehr — äusserlich — der Gedankengang erkennbar sein, dem sie ihre Existenz verdanken; aber eben hinter dieser Bildungsweise verstecken sich Curven dritter Ord-

nung — die übrigens niemals effectiv zu machen sind — und nur die Vorstellung von dem Bestehen einer solchen Curve dritter Ordnung wird uns das Mittel geben, die identische Umkehrbarkeit der aufzustellenden quadratischen Transformationen zu beweisen.

Lehrsatz. „Sind $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$ 6 beliebig vorgegebene Grössen, und erfüllen die Zahlen y_1, y_2, y_3 die Bedingung:

$$f(y) \equiv a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2(a_{23}y_2y_3 + a_{31}y_3y_1 + a_{12}y_1y_2) = 0$$

dann hat die Transformation

$$\varrho X_i = f(x) \cdot y_i - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} x_3 \right\} \cdot x_i$$

nicht nur den Charakter einer Cremona-Transformation mit 3 in y zusammenfallenden Hauptpunkten, sondern die Formeln für X_i sind identisch umkehrbar.“

Beispiel:

$$X_1 = 3(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - (3x_1 + 4x_2 - 5x_3)x_1$$

$$X_2 = 4(x_1^2 + x_3^2 - x_2^2) - (3x_1 + 4x_2 - 5x_3)x_2$$

$$X_3 = 5(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - (3x_1 + 4x_2 - 5x_3)x_3$$

ist entstanden aus der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = f(x)$$

welche von

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = 5$$

erfüllt wird.

Die Ersetzung der x_i in diesen Formeln durch ihre homologen Ausdrücke X_i selbst muss als Resultat x_i erscheinen lassen, behaftet mit dem Kubus der linken Seite der Tangentengleichung für 3, 4, 5 an die 3 Kegelschnitte

$$X_i = 0$$

Beweis. Man unterwerfe die Coefficienten einer Curve dritten Grades folgenden 6 Bedingungen, wo y dem $f(y) = 0$ genügt:

$$a_1^2 a_y = a_{111}y_1 + a_{112}y_2 + a_{113}y_3 = \varrho \cdot a_{11}$$

$$a_2^2 a_y = a_{221}y_1 + a_{222}y_2 + a_{223}y_3 = \varrho \cdot a_{22}$$

$$a_3^2 a_y = a_{331}y_1 + a_{332}y_2 + a_{333}y_3 = \varrho \cdot a_{33}$$

$$2a_{23} a_y = 2(a_{231}y_1 + a_{232}y_2 + a_{233}y_3) = 2 \cdot \varrho \cdot a_{23}$$

$$2a_{31} a_y = 2(a_{311}y_1 + a_{312}y_2 + a_{313}y_3) = 2 \cdot \varrho \cdot a_{31}$$

$$2a_{12} a_y = 2(a_{121}y_1 + a_{122}y_2 + a_{123}y_3) = 2 \cdot \varrho \cdot a_{12}$$

In diesen 6 Gleichungen sind die $y_1 y_2 y_3$ sowie die 6 Grössen (Coefficienten) a_{ik} bekannt, für die 11 Unbekannten a_{ikl} , ϱ ergibt sich demnach noch grosse Bewegungsfreiheit.

Stellen wir nun die 10 Coefficienten uns als fixirt vor, d. h. als wirklich gegebene Zahlen, so können wir die 6 Gleichungen multipliciren mit den 6 Grössen y_1^2 , y_2^2 , y_3^2 , $y_2 y_3$, $y_3 y_1$, $y_1 y_2$ respective. Wir erhalten rechts

$$a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2(a_{23} y_2 y_3 + a_{31} y_3 y_1 + a_{12} y_1 y_2)$$

was nach der Voraussetzung $= 0$, links entsteht

$$a_y^3 = 0$$

d. h. der Punkt y liegt auf der den Bedingungen entsprechend bestimmten Curve dritter Ordnung.

Diese Curve kann nun benutzt werden, um eine für die ganze Ebene brauchbare involutorisch-quadratische Cremona-Transformation zu liefern:

$$X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y^2) x_i$$

aber man überzeugt sich leicht, dass $(a_y a_x^2)$ zusammenfällt mit

$$a_{11} x_1^2 + \dots = f(x)$$

ebenso, dass $(a_x a_y^2)$ identisch ist mit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} x_3 \right)$$

Denn es ist beispielsweise in $(a_x a_y^2)$ der Factor von x_1 :

$$(a_{12} a_y \cdot y_2 + a_{13} a_y \cdot y_3)$$

dies gibt aber nach der obigen Tabelle über die Werte der Coefficienten

$$(a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

Die Transformation durch die quadratischen Functionen unsres Lehrsatzes ist also dieselbe, welche — mit Hilfe einer bestimmbarren Curve dritter Ordnung gebildet — die Ebene involutorisch abbildet. Dies war zu beweisen.

Beim Gange des Beweises war es niemals nötig die Coefficienten a_{ikl} wirklich zu bilden —; auch wenn wir im folgenden Zahlenbeispiele eine Curve dritter Ordnung effectiv herstellen, so geschieht es nicht um den Beweis unsres Satzes irgendwie zu bekräftigen, sondern

um das Material zu liefern zu nachträglicher, rechnerischer Bestätigung unsrer Schlüsse.

Zahlenbeispiel. Wenn vorgegeben

$$f(y) = -5y_1^2 - 6y_2^2 + 17y_3^2 + 2(8y_2y_3 + 7y_3y_1 - 18y_1y_2)$$

so wird

$$f(x) = 0$$

befriedigt von

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1$$

Wir finden als eine der unendlich vielen Curven dritter Ordnung, deren Coefficienten den 6 Bedingungsgleichungen genügen, die folgende:

$$\begin{aligned} & 2x_1^3 - x_2^3 + 5x_3^3 \\ & + 3\{4 \cdot x_2^2 x_3 + 7 \cdot x_3^2 x_1 - 8x_1^2 x_2\} \\ & + 3\{5 \cdot x_2 x_3^2 + 1 \cdot x_3 x_1^2 - 9 \cdot x_1 x_2^2\} \\ & - 6x_1 x_2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

Beide Curven, der Kegelschnitt wie die kubische Curve liefern dann die Substitutionen

$$\begin{aligned} X_i &= 1 \cdot f(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} 1 + \frac{\partial f}{\partial x_3} 1 \right) x_i \\ &= 1[-5x_1^2 - 6x_2^2 + 17x_3^2 + 2(8x_2x_3 + 7x_3x_1 - 18x_1x_2)] \\ &\quad - (-16x_1 - 16x_2 + 32x_3)x_i \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho \cdot X_1 &= 11x_1^2 - 6x_2^2 + 17x_3^2 + 16x_2x_3 - 18x_3x_1 - 20x_1x_2 \\ \varrho \cdot X_2 &= -5x_1^2 + 10x_2^2 + 17x_3^2 - 16x_2x_3 + 14x_3x_1 - 20x_1x_2 \\ \varrho \cdot X_3 &= -5x_1^2 - 6x_2^2 - 15x_3^2 + 32x_2x_3 + 30x_3x_1 - 36x_1x_2 \end{aligned}$$

Diese Formeln haben involutorischen Charakter; ersetzt man in ihnen die x_i durch das homologe X_i , so erhält man wiederum x_i , mit dem Factor

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^3 \text{ behaftet.}$$

Zweites Beispiel. Unsere schon benutzten einfachen Formeln § 7. Schluss:

$$X = -xy, \quad Y = -y^2, \quad Z = zy + axy + by^2 + cx^2$$

welche bei beliebigem a, b, c die Eigenschaft besitzen, identische Umkehrungen zuzulassen, sind entstanden aus der Function:

$$2zy + axy + by^2 + cx^2 = 0$$

und dem Punkte 0, 0, 1. — Denn man erhält in der Tat

$$X_1 = 0 \cdot f - x \cdot y$$

$$X_2 = 0 \cdot f - y \cdot y$$

$$X_3 = f - yz = zy + axy + by^2 + cx^3$$

da hier

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} x_3 \right) = y$$

IV. Die Sylvester-Cayley'sche Methode der Zerspaltung der involutorisch-quadratischen Transformation einer Curve dritter Ordnung.

§ 12. Beweis für die Möglichkeit, eine Transformation einer Curve dritter Ordnung in sich selbst aus zwei eben solchen Transformationen *additiv* zusammenzusetzen.

Liegt die Gleichung einer Curve dritten Grades vor, geschrieben in der Form

$$A \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 = 0$$

so kann man auf dieselbe unsere quadratisch-involutorischen Substitutionen

$$T_X \quad X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_y^2 a_x) x_i$$

anwenden, nachdem ein Punkt $a, b, c(y)$ der Curve bekannt ist und findet (vergl. die Zahlenbeispiele am Schlusse von Abteil. 1. von § 7.):

$$X_1 = abx_2^2 + acx_3^2 - b^2x_1x_2 - c^2x_1x_3 + 2k\{a^2x_2x_3 - bcx_1^2\}$$

$$X_2 = bcx_3^2 + bax_1^2 - c^2x_2x_3 - a^2x_2x_1 + 2k\{b^2x_3x_1 - cax_2^2\}$$

$$X_3 = cax_1^2 + cbx_2^2 - a^2x_3x_1 - b^2x_3x_2 + 2k\{c^2x_1x_2 - abx_3^2\}$$

$$= \Phi_1(x_1x_2x_3) + 2k\Psi_1(x_1x_2x_3)$$

$$= \Phi_2(x_1x_2x_3) + 2k\Psi_2(x_1x_2x_3)$$

$$= \Phi_3(x_1x_2x_3) + 2k\Psi_3(x_1x_2x_3).$$

Herr Sylvester hat bemerkt, dass man die Voraussetzung

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2kabc = 0$$

benutzend, für obige Formeln als identisch die Proportionen:

$$X_1 : X_2 : X_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3$$

nachweisen kann (für jeden Punkt der Curve A) — vgl. die ersten Seiten seines Aufsatzes über „Cubische Curven“ im Bande III des American Journal of Mathematics.

Herr Cayley hat hinzugefügt, dass nicht nur eine Curve A identisch in sich selbst transformirt wird durch die Substitutionen

$$X_i = \Phi_i \quad \text{oder} \quad X_i = \Psi_i$$

welche Formeln, für die Curve gleichberechtigt mit der Substitution

$$X_i = \Phi_i + \Psi_i$$

vor letzterer den Vorzug grösserer Einfachheit haben — sondern dass auch die beiden Systeme

$$X_i = \Phi_i, \quad X_i = \Psi_i$$

ohne allen Zusammenhang mit einer Curve, bei beliebigen a, b, c — die Punkte der Ebene involutorisch ordnen; so dass also die Auflösung der Φ_i nach den x_i für letztere dieselben Formeln — zu schreiben in den X_i — liefert, wie sie oben ausgerechnet stehen, geschrieben in den x_i — dasselbe gilt für die Ψ_i . (John Hopkins University Circulars, pag. 178).

Zahlenbeispiel. Die Curve (§ 7., 1) mit dem Punkte 1, 2, 1

$$A \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5x_1x_2x_3 = 0, \quad k = -\frac{5}{3}$$

wird nicht nur durch die dort gegebene zusammengesetzte Transformation in sich selbst transformirt, sondern auch durch

$$X_1 = x_2x_3 - 2x_1^2$$

$$X_2 = 4x_1x_3 - x_2^2$$

$$X_3 = x_1x_2 - 2x_3^2$$

oder

$$X_1 = 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - x_1x_3$$

$$X_2 = 2x_1^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$$

$$X_3 = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Beide Systeme sind, jedes für sich, für alle Punkte der Ebene involutorisch.

Wir geben für diese durch Ausrechnung gewonnenen Sätze folgenden

Beweis.

Wir wenden auf die vorgegebene Curve

$$A \quad \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 2kx_1x_2x_3 = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 + 2kabc = 0 \end{cases}$$

die Transformationen Ψ

$$\left. \begin{aligned} \varrho X_1 &= bcx_1^2 - a^2 x_2 x_3 \\ \varrho X_2 &= cax_2^2 - b^2 x_3 x_1 \\ \varrho X_3 &= abx_3^2 - c^2 x_1 x_2 \end{aligned} \right\} \Psi$$

an und erhalten als transformirte Curve in der X -Ebene, durch Elimination von 4 Grössen aus 4 Gleichungen: A , Ψ_i , eine Curve 6ten Grades deren rechnerisch entwickelte Form unten folgt.

Ueber die Gestaltung dieser Curve können wir einiges geometrisch schliessen: wendet man auf die 9 Wendepunkte der Curve die Ψ -Transformationen an, so entspricht dem x -Punkte

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad 0, -1, 1 \\ 2) \quad 1, 0, -1 \\ 3) \quad -1, 1, 0 \end{array} \right. & \text{der } X\text{-Punkt} \\ \left\{ \begin{array}{l} 4) \quad 0, -\varepsilon, 1 \\ 5) \quad 0, 1, -\varepsilon \\ 6) \quad 1, 0, -\varepsilon \\ 7) \quad -\varepsilon, 0, 1 \\ 8) \quad -\varepsilon, 1, 0 \\ 9) \quad 1, -\varepsilon, 0 \end{array} \right. & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1)' \quad a, c, b \\ 2)' \quad c, b, a \\ 3)' \quad b, a, c \\ 4)' \quad a, c\varepsilon, b\varepsilon^2 \\ 5)' \quad a, c\varepsilon^2, b\varepsilon \\ 6)' \quad c, b\varepsilon, a\varepsilon^2 \\ 7)' \quad c, b\varepsilon^2, a\varepsilon \\ 8)' \quad b, a\varepsilon, c\varepsilon^2 \\ 9)' \quad b, a\varepsilon^2, c\varepsilon \end{array}$$

Man findet, dass nicht nur die ausgerechneten 9 Punkte $X: 1' \dots 9'$ der Curvengleichung A genügen, sondern auch jeweilig mit dem zugehörigen Wendepunkte auf einer Geraden durch a, b, c liegen.

Wollte man die 9 ausgerechneten Punkte als Punkte der x -Ebene auffassen und in die X -Ebene transformiren, so würden sich genau entsprechend die 9 Wendepunkte, diesmal der X -Ebene zugerechnet, wieder einstellen.

Demnach werden bei Anwendung der Ψ -Transformation 18 Punkte der Curve A in 18 Punkte derselben Curve übergeführt.

Dies ist nur möglich, wenn die durch die Ψ -Transformation aus A abgeleitete Curve A' als Bestandteil die Curve A enthält (da 18 Punkte der transformirten Curve A' auf einer Curve dritter Ordnung liegen, so trennt sich zunächst von A' eine solche Curve ab; diese ist identisch mit A , weil sie mit A 18 Punkte gemeinschaftlich hat) ¹⁾.

1) In der That ist die transformirte Gleichung ausgerechnet

$$A' = (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 2k X_1 X_2 X_3) \times$$

Demnach der Sylvester-Cayley'sche Satz; erster Teil: 7) „Die Curve A wird, wenn a, b, c auf ihr gelegen, durch die Substitutionen \mathcal{P} in sich transformirt.“

Was die früher discutirte Determinante

$$\Delta \begin{vmatrix} bcx_1^2 - a^2x_2x_3 & cax_2^2 - b^2x_3x_1 & abx_3^2 - c^2x_1x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

anlangt, so kann man für deren identisches Verschwinden aus dem soeben Gesagten einen Beweis ableiten. Bei beliebigem a, b, c genügen ihr die Coordinaten x_1, x_2, x_3 jener 9 Wendepunkte 1–9; nebst den zugeordneten Punkten 1'–9'. Nehmen wir nun weiter einen beliebigen Punkt dazu, etwa 0, 0, 1, der für allgemeine a, b, c nicht auf der zugehörigen Curve liegen wird, so zeigt das Einsetzen der Coordinaten des dazu gehörigen X -Punktes in Δ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

dass auch für

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

Δ verschwindet. Da somit die Gleichung dritten Grades

$$\Delta = 0$$

erfüllt ist für 18 Punkte einer Curve dritter Ordnung, sowie für einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt 0, 0, 1, so muss sie eine Identität sein für alle Punkte der Ebene, bei beliebigem a, b, c .

Man schliesst nun weiter für die Punkte der Curve A :

Ist der Curvenpunkt z gegeben, und Z construirt worden durch die \mathcal{P} -Functionen, so kann man zu Z den entsprechenden weiter transformirten Punkt Z' der X -Ebene suchen, nachdem Z als x -Punkt aufgefasst worden. Z' muss erstens der Curve angehören (Satz 7), zweitens auf der Geraden von Z nach a, b, c liegen ($\Delta=0$);

$$\begin{aligned} &(a^3b^3X_3^3 + b^3c^3X_1^3 + c^3a^3X_2^3 - 3a^2b^2c^2X_1X_2X_3) \\ &= (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 2kX_1X_2X_3) \times \\ &(bcX_1 + caX_2 + abX_3)(bcX_1 + ca\epsilon^2X_2 + ab\epsilon X_3)(bcX_1 + ca\epsilon X_2 + ab\epsilon^2X_3) \end{aligned}$$

muss demnach mit dem a priori gewählten Curvenpunkte z zusammenfallen, der mit Z auf einer Geraden lag.

Daher der Satz:

8) „Die Formeln Ψ liefern, angewendet auf die Curve A , je zwei involutorisch einander zugeordnete Punkte.“

Die Erweiterung dieses Satzes wurde am Schlusse des „Excurses“ mitgeteilt, von ihr ist obige auf eine Curve bezügliche Aussage nur eine specialisirende Anwendung. [Es sei hier eingefügt, dass die Frage: „welches ist der Ort der x -Punkte, die mit ihren zugeordneten Punkten X Verbindungsgerade durch einen von a, b, c verschiedenen Punkt d, e, f liefern?“ auf eine zerfallende Curve führen muss. Denn jener Bedingung genügen erstens die x -Punkte die Verbindungsgeraden von d, e, f nach a, b, c , zweitens aber die Punkte des Kegelschnittes B in Satz 2) des Excurses].

Wir vollenden nunmehr das Theorem. Die Formeln

$$\begin{aligned} \varrho X_1 &= \Phi_1(x_1 x_2 x_3) + 2k\Psi_1(x_1 x_2 x_3) \\ \varrho X_2 &= \Phi_2(x_1 x_2 x_3) + 2k\Psi_2(x_1 x_2 x_3) \\ \varrho X_3 &= \Phi_3(x_1 x_2 x_3) + 2k\Psi_3(x_1 x_2 x_3) \end{aligned}$$

haben, da sie — in toto genommen, ohne Trennung — direct nach früheren Methoden abgeleitet wurden, die Eigenschaft einen bestimmten Punkt $z_1 z_2 z_3$ der vorgegebenen Curve A überzuführen in einen Punkt $Z_1 Z_2 Z_3$ derselben Curve, der mit a, b, c und z auf einer Geraden liegt.

Die ausgerechneten Zahlen $Z_1 Z_2 Z_3$ sind definirt durch

$$\begin{aligned} \varrho Z_1 &= \Phi_1(z_1 z_2 z_3) + 2k\Psi_1(z_1 z_2 z_3) \\ \varrho Z_2 &= \Phi_2(z_1 z_2 z_3) + 2k\Psi_2(z_1 z_2 z_3) \\ \varrho Z_3 &= \Phi_3(z_1 z_2 z_3) + 2k\Psi_3(z_1 z_2 z_3) \end{aligned}$$

Hätten wir aber die Ψ -Functionen allein angewendet, so hätten wir hierbei ebenfalls aus $z_1 z_2 z_3$ einen mit z und abc auf einer Geraden liegenden Punkt erhalten. Dieser durch die Ψ -Functionen ausschliesslich bestimmte Punkt kann kein anderer sein, als der vorhin bestimmte Punkt Z . Demnach genügen die 3 vorhin errechneten Zahlen $Z_1 Z_2 Z_3$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma Z_1 &= \Psi_1(z_1 z_2 z_3) \\ \sigma Z_2 &= \Psi_2(z_1 z_2 z_3) \\ \sigma Z_3 &= \Psi_3(z_1 z_2 z_3). \end{aligned}$$

Die Grössen Φ_i müssen demnach der Proportion:

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \Phi_1(z_1 z_2 z_3) : \Phi_2(z_1 z_2 z_3) : \Phi_3(z_1 z_2 z_3)$$

genügen, für jeden Punkt der Curve A .

Kürzer: 9) „Für die Punkte der Curve A ist die quadratische Cremona-Transformation Φ vollständig in ihrer Wirkung identisch mit der Ψ -Function. Beide liefern bei vorgegebenem Punkte x der Curve den auf der Verbindungsgeraden von a, b, c nach x liegenden Curvenpunkt als zugehöriger X -Punkt.“

In der Fassung:

$$\begin{cases} \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3 \\ a^3 + b^3 + c^3 + 2kabc = 0 \end{cases}$$

findet sich der Satz an den beiden citirten Stellen ausgesprochen.

In der rechnerischen Durchführung des Beweises für diese Identitäten wird die gegebene Voraussetzung auftreten; denn beide Substitutionen Φ und Ψ sind a priori fast vollständig (für die Ebene) verschiedenartig, selbst wenn die Werte der sie jeweilig bestimmenden Constanten a, b, c gleich sind für beide Formeln —; sie können gleiche Wirkung nur haben für eine ganz bestimmte Curve, deren Lage von den Constanten a, b, c abhängen muss.

Wir geben schliesslich einige Resultate für die Φ -Functionen, wie sie aus obigen Sätzen folgen:

10) „Dieselben teilen mit den Ψ -Functionen alle Eigenschaften, die sich auf die Lage der der Transformation unterworfenen Curvenpunkte beziehen.“

11) „Aber sie können mit den Ψ -Functionen nicht dieselben 3 Hauptpunkte gemeinschaftlich haben, mit Ausnahme von a, b, c .“

Beweis. Die Ψ -Functionen verschwinden an den 3 Stellen a, b, c ; $a, b\varepsilon, c\varepsilon^2$; $a, b\varepsilon^2, c\varepsilon$. Aber die zusammengesetzten Formeln

$$\varphi X_i = \Phi_i + 2k\Psi_i$$

können ihrer Entstehung nach nur für den einzigen „transformirenden Punkt“ a, b, c illusorisch, d. h. gleichzeitig $= 0$ werden. Demnach müssen die Φ -Functionen für die beiden x -Punkte: $a, b\varepsilon, c\varepsilon^2$; $a, b\varepsilon^2, c\varepsilon$, für welche die Ψ verschwinden, von null verschiedene Werte ergeben.

12) „Demnach ist für jede T_X -Transformation quadratisch-involutorischen Charakters

$$X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_y^2 a_x) x_i$$

eine Zerteilung der drei einzelnen Summen, welche jeweilig ein X_i vorstellen, möglich, so dass für Punkte der Curve $a_x^3 = 0$ identisch

$$X_i^* = \Phi_i + 2k\Psi_i$$

und gleichzeitig

$$\Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3$$

Aber diese Zerteilung setzt die Kenntniss der Wendepunkte der vorgegebenen Curve, d. h. die Auflösung einer Gleichung vierten Grades voraus.“



XI.

Ein Satz über Binomialcoefficienten.

Von

J. Hermes.

In der 6ten Note der algebraischen Analysis beweist Cauchy unter andern ähnlichen Sätzen auch den folgenden:

„Multipliziert man die Binomialcoefficienten β irgend einer Potenz z. B. der vierten: 1, -4, 6, -4, 1, mit abwechselnden Zeichen genommen, der Reihe nach mit den aufeinander folgenden figurirten Zahlen einer höchstens eben so hohen Ordnung z. B. mit: 3, 6, 10, 15, 21 und addirt die Producte: 3, -24, 60, -60, 21, so erhält man stets null, nur zuletzt: ± 1 .“

Mit Anwendung der bekannten Symbole für Combinationsanzahlen ohne Wiederholungen:

$$\beta = \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

und mit Wiederholungen:

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} n-1 \\ k+1 \end{matrix} \right]$$

lässt sich der Satz in die etwas allgemeinere Formel 1)

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \left[\begin{matrix} m+k \\ \varrho \end{matrix} \right] = (-1)^n \left[\begin{matrix} m+n \\ \varrho-n \end{matrix} \right]$$

zusammenfassen und leicht durch Schluss von n auf $n+1$, wie folgt beweisen. Man addire zur letzten Gleichung, falls sie schon gelten möchte, die dann auch geltende:

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left[\begin{matrix} m+1+k \\ \varrho \end{matrix} \right] = (-1)^{n+1} \left[\begin{matrix} m+1+n \\ \varrho-n \end{matrix} \right]$$

in der Art hinzu, dass jedes k te Glied der ersten Summe mit dem $(k+1)$ ten Gliede der zweiten Summe vereinigt wird, so ergibt sich, da

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} - 1$$

ist, Formel 1) für $n+1$, nämlich:

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left[\begin{matrix} m+k \\ \varrho \end{matrix} \right] = (-1)^{n+1} \left[\begin{matrix} m+n+1 \\ \varrho-n-1 \end{matrix} \right]$$

Für $n = 1$ geht aber Formel 1) in:

$$\left[\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} m+1 \\ \varrho \end{matrix} \right] = - \left[\begin{matrix} m+1 \\ \varrho-1 \end{matrix} \right]$$

über, was nach der Definition der figurirten Zahl $[\]$ für jedes m richtig ist, m und ϱ zunächst als positive ganze rationale Zahlen gedacht. Für negatives ϱ ist

$$\left[\begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix} \right] = 0 \text{)}$$

Die beiden Symbole $(\)$ und $[\]$, welche ja auch nicht wesentlich von einander verschieden sind, da

$$\left[\begin{matrix} -n \\ k \end{matrix} \right] = (-1)^k \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad \binom{-n}{k} = (-1)^k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$$

gilt, kann man offenbar durch ein drittes

$$\delta = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n+2 \\ k+1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}$$

ergänzen und so fort.

1) Bekanntlich gilt auch

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} k+1 \\ n-1 \end{matrix} \right] \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Für $k = 0$ und $k = n$ ist

$$\binom{n}{k} = 1$$

für $k < 0$ und $k > n$ ist

$$\binom{n}{k} = 0$$

Wir gewinnen dann folgenden Satz 2)

$$\sum_{k=0}^{k=e} (-1)^k \binom{n-2k}{e-k} \left\{ \frac{r}{k} \right\} = (-1)^e \left[\frac{r-n}{e} \right]; \quad e \leq \frac{n}{2}$$

der als speciellen Fall

$$n = r = 2e = 2m$$

(nach Division mit n) zwar ebenfalls die Formel:

$$\sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \binom{m}{k} \left[\frac{m}{k} \right] = 0$$

enthält, aber doch nicht direct mit einem der Cauchy'schen Sätze, etwa mit Formel 9 a. a. O. identisch sein möchte ¹⁾.

Beweis von Satz 2)

Ist derselbe auch ebenso einfach wie der vorher zu 1) gegebene, so wollen wir doch des Folgenden wegen vorher noch näher auf die $\delta = \left\{ \frac{n}{k} \right\}$ eingehen.

Erheben wir die Differenz

$$\partial = M - M^{-1}$$

auf die n te Potenz und bezeichnen $M^r + (-1)^r M^{-r}$ mit ∂_r , so erhalten wir

$$\partial^n = \partial_n - \binom{n}{1} \partial_{n-2} + \binom{n}{2} \partial_{n-4} - \binom{n}{3} \partial_{n-6} + \dots$$

Indem hierin ∂_{n-2} , ∂_{n-4} , ∂_{n-6} wiederum durch Potenzen ausgedrückt werden, entstehen die Ergänzungskoeffizienten δ . Es wird

$$\partial^n = \delta^n + \left\{ \frac{n}{1} \right\} \delta^{n-2} + \left\{ \frac{n}{2} \right\} \delta^{n-4} + \dots$$

Multipliziert man nämlich ∂_g mit ∂_G , worin g und G gerade Zahlen und $G > g$ angenommen, so ergibt sich:

$$\partial_g \partial_G - \partial_{G-g} = \partial_{G+g}$$

und analog für ungerade Indices:

1) Indirect hängen diese Sätze offenbar alle mit einander als Identitäten zusammen. Vgl. auch: Baltzer, Determinanten § 3, 7 und 10.

nebst
$$\partial_u \partial_U + \partial_{U-u} = \partial_{U+u} \text{ 1)}$$

$$\partial_u \partial_a + \partial_{a-u} = \partial_{a+u} \quad \text{und} \quad \partial_g \partial_U - \partial_{U-g} = \partial_{U+g}.$$

Zur Recursion sind nun am bequemsten die zweite und dritte Formel für $u = 1$ zu benutzen; zugleich erhellt, dass

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1} \quad \text{also} \quad \delta = \binom{n+2}{k+1} - \binom{n+1}{k+1}$$

wird.

Um also eine Tafel für die δ zu entwerfen, hat man zunächst

$$u = U = 1$$

zu setzen

$$\partial_u \partial_u = \partial_1 \partial_1 = 1\delta^2 \quad \text{und} \quad \partial_{U-u} = \partial_0$$

muss hier natürlich 2 sein, sonst = 1, weil dann eben die 2 schon als Coefficient berücksichtigt ist.

$$\partial_{U+u} = \partial_2$$

wird also $1\delta^2 + 2$ Wird dies von neuem mit

$$\partial_u = \partial_1$$

genommen und

$$\partial_{2-1} = 1\delta$$

hinzugefügt, so folgt

$$\partial_3 = 1\delta^3 + 3\delta$$

Schreiben wir nur die Coefficienten δ , indem sich die stets geraden resp. stets ungeraden Potenzen von δ von selbst verstehen, so lässt sich die Construction der Tafel für die δ

$$\begin{array}{r} \partial_0 = \\ \partial_1 = \\ \partial_2 = \\ \partial_3 = \\ \partial_4 = \\ \partial_5 = \\ \partial_6 = \\ \partial_7 = \end{array} \begin{array}{r} \\ \\ 1 \ 2 \\ 1 \ 3 \\ 1 \ 4 \ 2 \\ 1 \ 5 \ 5 \\ 1 \ 6 \ 9 \ 2 \\ 1 \ 7 \ 14 \ 7 \end{array} \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

1) In diesem der vier Fälle, wo $\partial_u \partial_U$ mit $uU\delta^2$ und ∂_{U-u} , wie immer bei geradem Index, mit 2 schliesst, ist ∂_{U-u} um eine Stelle nach rechts auszurücken.

$$\begin{aligned} \partial_8 &= && 1 & 8 & 20 & 16 & 2 \\ \partial_9 &= & 1 & 9 & 27 & 30 & 9 \\ \partial_{10} &= & 1 & 10 & 35 & 50 & 25 & 2 \end{aligned}$$

folgendermassen zusammenfassen: „Werden je zwei aufeinander folgende Zeilen addirt und das Resultat um eine Stelle nach links gerückt, so erhält man die Coefficienten der nächstfolgenden Zeile“. Zur Probe ∂_{10} nach Formel

$$\partial_u \partial_v + \partial_{v-u} = \partial_{v+u} \text{ hat man:}$$

$$\begin{array}{r} \partial_7 = \dots \quad 1 \quad 7 \quad 14 \quad 7 \\ \partial_3 = \quad 1 \quad 3 \\ \hline \quad 3 \quad 21 \quad 42 \quad 21 \\ \quad 1 \quad 7 \quad 14 \quad 7 \\ \hline \quad 1 \quad 10 \quad 35 \quad 49 \quad 21 \\ \partial_{7-3} = \partial_4 = \dots \quad 1 \quad 4 \quad 2 \\ \hline \partial_{10} = \quad 1 \quad 10 \quad 35 \quad 50 \quad 25 \quad 2 \quad \text{also} \\ \phantom{\partial_{10} =} \phantom{\text{also}} \\ \phantom{\partial_{10} =} \phantom{\text{also}} = \partial^{10} + 10\partial^8 + 35\partial^6 + 50\partial^4 + 25\partial^2 + 2 \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1; \quad \begin{Bmatrix} 10 \\ 1 \end{Bmatrix} = 10; \quad \begin{Bmatrix} 10 \\ 2 \end{Bmatrix} = 35 \dots$$

Auch ist die Summe der in einer Colonne befindlichen Zahlen = $3 \cdot 2^r$; die vorletzte Zahl in einer 29ten Reihe ist q^2 etc.

Die Entstehung dieser Zahlen giebt nun unmittelbar:

$$\begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix} = 1$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ 1 \end{Bmatrix} = r$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ 2 \end{Bmatrix} = \binom{r-1}{2} - 1 = \frac{r(r-3)}{1 \cdot 2} = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1 \cdot 2 \cdot (r-1)(r-2)}$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ 3 \end{Bmatrix} = \binom{r-2}{3} - \binom{r-4}{1} = \frac{r(r-4)(r-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (r-1)(r-2)(r-3)}$$

.....

$$\begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} = \binom{r-(k-1)}{k} - \binom{r-(k+1)}{k-2}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} r \\ k+1 \end{matrix} \right\} &= \binom{r-k}{k+1} - \binom{r-(k+2)}{k-1} \\ &= \binom{r-(k+1)}{k} + \binom{r-(k+1)}{k+1} - \binom{r-(k+3)}{k-2} - \binom{r-(k+3)}{k-1} \\ &= \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} r-2 \\ k \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

wenn das erste und dritte, das zweite und vierte Glied vereinigt werden. Dies führt für $r-2 = n$ auf obige Definition von δ nämlich auf

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n+2 \\ k+1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}$$

zurück. Es ist aber auch:

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ \varrho \end{matrix} \right\} = \frac{r(r-\varrho-1)(r-\varrho-2) \dots (r-2\varrho+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \varrho}$$

Denn addiren wir

$$\left\{ \begin{matrix} r+1 \\ \varrho+1 \end{matrix} \right\} = \frac{(r+1)(r-\varrho-1)(r-\varrho-2) \dots (r-2\varrho+1)(r-2\varrho)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \varrho \cdot (\varrho+1)}$$

hinzu, so resultirt

$$\begin{aligned} &\frac{(r-\varrho-1) \dots (r-2\varrho+1)}{1 \dots \varrho} \left\{ \begin{matrix} r\varrho+r+r^2-r\varrho+r-2\varrho \\ \varrho+1 \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{(r+2)(r+2-(\varrho+2)) \dots (r+2-(2\varrho+1))}{1 \cdot 2 \dots (\varrho+1)} = \left\{ \begin{matrix} r+2 \\ \varrho+1 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

wie oben, also muss auch, da beide Male dasselbe Gesetz erhalten wird, und der Anfang identisch ist:

$$\begin{aligned} \binom{r-\varrho+1}{\varrho} - \binom{r-\varrho-1}{\varrho-2} &= \frac{r(r-\varrho-1)(r-\varrho-2) \dots (r-2\varrho+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \varrho} \\ &= \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-2\varrho+1)}{1 \cdot 2 \dots \varrho(r-1)(r-2) \dots (r-\varrho)} \\ &= \binom{r}{\varrho} \frac{(r-(\varrho+1)) \dots (r-2\varrho+1)}{(r-1) \dots (r-\varrho+1)} \end{aligned}$$

gelten, was auch leicht direct folgt.

Beispiel:

$$\left\{ \begin{matrix} 10 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{10 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 35 = \binom{9}{2} - \binom{7}{0} = 45 \cdot \frac{7}{9}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 50 = \binom{8}{3} - \binom{6}{1} = 120 \cdot \frac{6 \cdot 5}{9 \cdot 8}$$

Es liegt auch nahe, obige Tafel zu erweitern, indem z. B.

$$\left\{ \begin{matrix} 10 \\ 10 \end{matrix} \right\} = \frac{10(-1)(-2) \dots (-9)}{1 \cdot 2 \dots 10} = -1$$

wäre. Dadurch würde dann die Giltigkeit des Satzes 2) über die für

$$\delta = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

ursprünglich vorhandenen Grenzen ausgedehnt sein. Wir erhalten somit die erweiterte Tafel für δ

n													
-3						1	-3	9	-28				
-2					1	-2	5	-14	42				
-1				1	-1	2	-5	14	-42				
0			1	0	0	0	0	0	0				
1			1	1	-1	2	-5	14	-42	132			
2			1	2	-1	2	-5	14	-42	132	-429		
3			1	3	0	1	-3	9	-28	90	-297	1001	
4			1	4	2	0	-1	4	-14	48	-165	572	
5			1	5	5	0	0	1	-5	20	-75	275	$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$
6			1	6	9	2	0	0	-1	6	-27	110	$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

Es gelte nun für ein r bereits:

$$\pm \left[\left\{ \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} \right\} \binom{n}{e} - \left\{ \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\} \binom{n-2}{e-1} + \left\{ \begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix} \right\} \binom{n-4}{e-2} - \dots \right] = \left[\begin{matrix} r-n \\ e \end{matrix} \right]$$

$e = \frac{n}{2}$
 $e < \frac{n}{2}$

und in Bezug auf $n-2$ für ein beliebiges r schon:

$$\pm \left[- \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \binom{n-2}{e-1} + \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \binom{n-4}{e-2} - \dots \right] = \left[\begin{matrix} r-1-(n-2) \\ e-1 \end{matrix} \right]$$

$$= \left[\begin{matrix} r-n+1 \\ e-1 \end{matrix} \right]$$

so folgt durch Addition:

$$\pm \left[\left\{ \begin{matrix} r+1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \binom{n}{e} - \left\{ \begin{matrix} r+1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \binom{n-2}{e-1} + \left\{ \begin{matrix} r+1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \binom{n-4}{e-2} - \dots \right]$$

$$= \left[\begin{matrix} r+1-n \\ e \end{matrix} \right]$$

daher ist der Satz für jedes folgende r in Bezug auf n richtig und in analoger Weise auch für jedes vorhergehende, wenn nur noch

gezeigt wird, dass er für ein r gilt, etwa für $r = n$. Es folgt aber aus

$$\partial^n = \partial_n - \binom{n}{1} \partial_{n-2} + \binom{n}{2} \partial_{n-4} - \dots \text{ und } \partial_n = \delta^n + \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} \partial^{n-2} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} \partial^{n-4} + \dots$$

$$\partial^{n-2} = \partial_{n-2} - \binom{n-2}{1} \partial_{n-4} + \dots \quad \left| \quad \partial_{n-2} = \delta^{n-2} + \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \partial^{n-4} + \dots \right.$$

etc. | etc.

oder auch

$$\begin{array}{l} \partial^n = \delta^n + \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} \partial^{n-2} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} \partial^{n-4} + \dots \\ - \binom{n}{1} \partial^{n-2} - \binom{n}{1} \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \partial^{n-4} - \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \partial_n = \partial_n - \binom{n}{1} \partial_{n-2} + \binom{n}{2} \partial_{n-4} - \dots \\ + \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} \partial_{n-2} - \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} \binom{n-2}{1} \partial_{n-4} + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

durch Vergleichung:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} - \binom{n}{1} \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + \binom{n}{2} \left\{ \begin{matrix} n-4 \\ k-2 \end{matrix} \right\} - \dots = 0$$

und

$$\binom{n}{k} - \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} \binom{n-2}{k-1} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} \binom{n-4}{k-2} - \dots = 0$$

in welche Formel der zu beweisende Satz für $r = n$ übergeht. Zugleich ergibt sich, dass in Formel 2) eine Vertauschung der () und { } unter einander eintreten kann, vgl. Beispiel A) und B)

					δ					
A)	$\beta = 1$	-7	21	-35	1	...	1	-7	21	-35
		1	-5	10	10			10	-50	100
			1	-3	35				35	-105
				1	50					50

es resultiren: 1 3 6 10

						β				
B)	$\delta = 1$	10	35	50	25	2	1			
		1	8	20	16	2	-10			
			1	6	9	2	45			
				1	4	2	-120			
					1	2	210			
						1	-252			

wir erhalten: 1 0 0 0 0 0

Ehe wir eine Anwendung hievon auf das Crelle Bd 87. pag. 107 ff. behandelte Curvensystem $\sum e_r \partial_{ru} \equiv 0 \pmod{p}$ machen, wollen wir die Congruenz \mathfrak{C}_p nämlich

$$qu \equiv \pm r \pmod{2^p}$$

in welcher u und q ungerade Zahlen bedeuten sollen, darauf hin untersuchen, ob der Rest r numerisch kleiner oder grösser als 2^{p-2} ist.

Findet dies Letztere statt, muss also mit dem halben Modul 2^{p-1} reducirt werden, so möge es durch einen dem Reste zugesetzten Punkt angedeutet sein ¹⁾. Die Reste sind nun zwar schliesslich alle numerisch als positiv zu denken doch müssen die, welche sich ursprünglich negativ ergaben, markirt (etwa unterstrichen) werden. Benutzen wir die halbirende Anordnung, so gilt der Satz 3): „Ein mit Punkt versehener markirter Rest etwa r . in \mathfrak{C}_p wird an correspondirender Stelle in \mathfrak{C}_{p+1} durch das nicht markirte Supplement $2^{p-1} - r$ (ob mit oder ohne Punkt, entscheiden die folgenden Sätze ersetzt und ein mit Punkt versehener, nicht markirter Rest r . durch $2^{p-1} - r$, denn auf eine Periode, schematisch durch

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline m2^p & & m2^p \pm 2^{p-1} & (m+1)2^p \\ \hline \left| \begin{array}{l} \text{ohne Punkt;} \\ \text{mit Punkt;} \\ \text{(markirt)} \end{array} \right. & ; & \left| \begin{array}{l} \text{mit Punkt;} \\ \text{ohne Punkt;} \\ \text{(markirt)} \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} \text{ohne Punkt} \\ \text{(markirt)} \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

dargestellt, kommen zwei Perioden von \mathfrak{C}_{p-1}

$$| \text{ ohne, mit; mit, ohne } | \text{ ohne, mit; mit, ohne } |$$

so dass also die markirten von \mathfrak{C}_p nur den nicht markirten mit Punkt, oder auch den markirten ohne Punkt entsprechen können.

Hervorzuheben ist, dass die jedesmaligen Gruppen der Reste unverändert in ihrem Zusammenhange bleiben.

Satz 4) In der kleinsten Gruppe von viere sind stets drei Reste oder nur ein Rest mit Punkt versehen. Beweis.

Die Gruppe sei:

$$\begin{array}{l} qu \quad 2^{p-2} - qu \\ 2^{p-2}q - uq \quad 2^{2p-4} - (q \pm u)2^{p-2} \pm qu \end{array}$$

Da

1) Hiermit hangen, wie leicht ersichtlich, die Vorzeichen der cos in der Determinante D_p zusammen. vgl. Archiv der Math. u. Phys. 2te Reihe. T. VI. pag 276.

$$\nu \stackrel{=}{>} 4$$

ist, so ist

$$2^{\nu-4} \stackrel{=}{>} \nu \quad \text{also} \quad 2^{2^{\nu-4}} \equiv 0 \pmod{2^\nu}$$

Ist nun q nicht $\equiv u \pmod{4}$, so sind beide Reste in der Hauptdiagonale entweder mit Punkt versehen oder beide ohne Punkt. Es sei $u \equiv 1 \pmod{4}$, so ist, je nachdem $uq \equiv r; -r; 2^{\nu-1} + r; 2^{\nu-1} - r \pmod{2^\nu}$, offenbar: $2^{\nu-2} - qu \equiv 2^{\nu-2} - r; +2^{\nu-1} - (2^{\nu-1} - r); +2^{\nu-1} + (2^{\nu-2} - 1); -(2^{\nu-2} - r) \pmod{2^\nu}$. Das kann also für $u \equiv 1 \pmod{4}$ zusammengefasst werden in: „nicht markirte Paare sind entweder beide mit Punkt versehen oder beide ohne, markirte Paare sind in Rücksicht auf den Punkt verschiedenartig“. Bei $u \equiv -1 \pmod{4}$ sind markirte gleichartig, nicht markirte verschieden. Hieraus folgt denn auch schon Satz 4).

Endlich gilt noch, wie leicht zu beweisen, für den Rest r''' in

$$\left\{ \begin{array}{l} r, \\ r'', \\ r''', \\ r'''' \end{array} \right. , \quad \text{wenn mit } r, \text{ die Gruppe von 16 zusammengehörigen Resten}$$

beginnt, dass in der linken Hälfte von \mathbb{C}_ν dieselbe entweder mit $r,$ und r'' (wenn diese in Bezug auf den fehlenden oder vorhandenen Punkt gleichartig sind) ebenfalls gleichartig ist oder andernfalls mit dem kleinern übereinstimmt, dass aber in der rechten Hälfte r''' mit $r,$ und r'' ungleichartig ist oder mit dem grössern stimmt.

Dieser Satz 5) gilt auch ebenso für $r,$ in Bezug auf r''' und r'''' . Auch kann er statt in verticaler Richtung, natürlich ebenso in horizontaler angewandt werden; (obere und untere Hälfte von \mathbb{C}_ν).

6) Ferner gilt er für r'''' in Bezug auf $r,$ und r''' etc. ... jedoch dann für halb sogrosse Räume, (linkes Viertel₍₁₎, rechtes Viertel₍₁₎, linkes Viertel₍₂₎, rechtes Viertel₍₂₎) und so fort. ... Mit Hilfe dieser Regeln kann man nun $\mathbb{C}_{\nu-1}$ aus \mathbb{C}_ν ohne eine Nebenrechnung hinschreiben.

Ist ein Rest

$$r = qu$$

so bleibt er fortan für alle grösseren ν natürlich ohne Punkt. Es ist also hiedurch, wenn man so will, die Multiplication der Zahlen auf Addition und Subtraction der Potenzen von Zwei untereinander gebracht, was wol die natürlichste Einführung in das diadische System sein dürfte.

Wir lassen $\mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_5, \mathfrak{C}_6$ folgen ¹⁾

$$\mathfrak{C}_4 = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1. \end{Bmatrix}$$

$$\mathfrak{C}_5 = \begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 3 & 5 \\ 7 & 1. & 5. & 3 \\ \hline & & 3 & 5. \\ & & 5 & 3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \hline 7. & 1. \\ \hline 1. & 7 \end{array}$$

$$\mathfrak{C}_6 \left\{ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 15 & 7 & 9. & 3 & 13 & 5 & 11 \\ 15 & 1. & 9. & 7 & 13. & 3 & 11 & 5. \\ 7 & 9. & 15 & 1 & 11. & 5. & 3. & 13 \\ 9 & 7 & 1 & 15. & 5. & 11 & 13. & 3. \\ \hline 3 & 13. & 11. & 5. & 9 & 7. & 15 & 1. \\ 13 & 3 & 5. & 11 & 7. & 9. & 1 & 15 \\ 5 & 11 & 3. & 13. & 15 & 1. & 7. & 9 \\ 11 & 5. & 13 & 3. & 1. & 15 & 9 & 7 \end{array} \right\} \text{ etc.}$$

Indem wir nun in

$$\sum_{r=0}^{2^r-1-1} e_r \partial_r \equiv 0 \pmod{p^2}$$

die Substitution

$$M = M^u$$

machen wollen, wo

$$M^{2^p} \equiv 1 \pmod{p}$$

vorausgesetzt, werden sich wegen $(-1)^r$ in

$$\partial_r = M^r + (-1)M^{-r}$$

für ungerades r' die Punkte bei nicht markirten Resten wie in \mathfrak{C}_p vorfinden, bei markirten jedoch da vorhanden sein (resp. fehlen), wo sie dort fehlen (resp. vorhanden sind).

Für gerade $r' \equiv 2 \pmod{4}$ werden sie mit denen in \mathfrak{C}_{r-1} übereinstimmen, (wenn zuvor jede zweite Zeile ausgelassen, dann in entgegengesetztem Sinne mit Punkten versehen wird, wie die darüberstehende); für gerade $r' \equiv 4 \pmod{8}$ mit denen von \mathfrak{C}_{r-2} , wenn je drei Zeilen zuvor ausgelassen und dann die erste von diesen mit Punkten in demselben Sinne, wie die darüberstehende, die beiden andern im entgegengesetzten Sinne versehen werden und so fort ...

1) Die Anzahl der Punkte ist 1, 6, 26, 122, 478, 2030 ... allgemein?

2) Dies System Congruenzen ergibt sich unmittelbar aus den: Bachmann, Kreisteilung X. Vorl. pag. 127. aufgestellten Jacobi'schen Congruenzen.

Wir haben z. B.:

$$\mathfrak{C}_4 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 1 \ 3 \\ \hline 0 & 2. & 3 \ 1. \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{C}_5 = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 4 & 2 \ 6 & 1 \ 7 \\ \hline 0 & 4 & 2. \ 6. & 7 \ 1. \\ \hline 0 & 4. & 6 \ 2. & 3 \ 5. \\ \hline 0 & 4. & 6. \ 2 & 5 \ 3 \\ \hline & & & 7 \ 1 \\ & & & 1 \ 7. \end{array} \right\}$$

Der Punkt bei r' deutet dann an, dass in der betreffenden Congruenz $e_r \partial_{r'}$ negativ zu nehmen ist. Eine Folgerung hiervon ist, dass 7)

$$\sum u \partial_{ru} \cdot \partial_{r_1 u} \equiv 0$$

während

$$\sum \partial_{ru}^2 \equiv (-1)^r 2^v \quad \text{und} \quad \sum \partial_0^2 = v$$

statthat, die Summe über

$$v = 2^v - 3$$

Glieder ausgedehnt.

Setzen wir jetzt

$$e_r = u \cdot \sum x_r^{(s)} \partial^s$$

wo s je nachdem r gerade oder ungerade nur gerade oder ungerade Werte annimmt $\leq v$ (e_0 enthält noch das Glied $x_0^{(v)} \partial^v$) und fragen, welchen Coefficient (abgesehen von Factor u) hat wol $\partial_{2t} \times x_r^{(s)}$ für ein gegebenes u ?

Da

$$\partial_{r'} = \partial^{r'} + \left\{ \begin{array}{c} r' \\ 1 \end{array} \right\} \partial^{r'-2} + \dots$$

ist, so wird das Product, wenn

$$s + r' = n \quad \text{ist:}$$

$$\pm x_r^{(s)} \left(\partial^n + \left\{ \begin{array}{c} r' \\ 1 \end{array} \right\} \partial^{n-2} + \left\{ \begin{array}{c} r' \\ 2 \end{array} \right\} \partial^{n-4} + \dots \right)$$

Nun aber ist:

$$\begin{array}{l} \partial^n = \partial_n - \binom{n}{1} \partial_{n-2} + \binom{n}{2} \partial_{n-4} - \dots \\ \partial^{n-2} = \partial_{n-2} - \binom{n-2}{1} \partial_{n-4} + \dots \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot \left\{ \begin{array}{c} r' \\ 0 \end{array} \right\} \\ \cdot \left\{ \begin{array}{c} r' \\ 1 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Es wird also von $\partial_{2t} x_r^{(s)}$ der Coefficient

$$\pm (-1)^e \sum_{k=0}^{k=e} (-1)^k \binom{n-2k}{e-k} \left\{ \begin{matrix} r' \\ k \end{matrix} \right\} \quad \text{für } e = \frac{n}{2} - t = \frac{s+r'}{2} - t$$

lauten, das ist nach Formel 2)

$$\pm (-1)^{2e} \left[\begin{matrix} r'-n \\ e \end{matrix} \right] = \pm (-1)^{2e} \left[\begin{matrix} -s \\ e \end{matrix} \right] = \pm (-1)^{2e} \binom{s}{e}$$

also ein Binomialcoefficient $\pm (-1)^e \binom{s}{e}$, wo + oder - davon abhängt, ob in $\mathbb{C}_{r'}$ der Rest

$$r' \equiv ur \pmod{2^v}$$

ohne oder mit Punkt versehen ist; jedoch ist bei der Formel 2) wie vorhin bewiesen ja die Giltigkeit über die für δ ursprünglich vorhandenen Grenzen ausgedehnt; (nur bei $r' = 0$ nicht). Da gleichwol aber diese Grenzen vorhanden, so müssen wir, wenn

$$e \stackrel{=}{>} r'$$

ist, etwa um e' die Summe

$$(-1)^{e-r'} \sum_{k=0}^{k=\lambda} (-1)^k \binom{n-2r'-2k}{e'-k} \left\{ \begin{matrix} r' \\ r'+k \end{matrix} \right\}$$

in Abzug bringen. Es ist aber, wie sich aus der erweiterten Tafel für die δ ergibt,

$$\left\{ \begin{matrix} r' \\ r'+k \end{matrix} \right\} = (-1)^{r'-1} \left\{ \begin{matrix} -r' \\ k \end{matrix} \right\}$$

mithin erhalten wir nach Formel 2) für die eben erwähnte Summe den Wert

$$\begin{aligned} & (-1)^{e-r'+e'+r'-1} \cdot \left[\begin{matrix} -r'-n+2r' \\ e' \end{matrix} \right] \\ & = -(-1)^{e+e'} \left[\begin{matrix} r'-n \\ e' \end{matrix} \right] = -(-1)^e \binom{n-r'}{e'} = -(-1)^e \binom{s}{e'} \end{aligned}$$

und im ganzen, da dieser Wert abzuziehen ist, als Coefficienten von $\partial_{2t} \times x_{r'}^{(s)}$ den Ausdruck:

$$\pm (-1)^e \left\{ \binom{s}{e} + \binom{s}{e'} \right\}$$

wo

$$e = \frac{s+r'}{2} - t$$

und

$$e' = \frac{s-r'}{2} - t$$

Der Coefficient $K^{(v)}_{3v+2(t-1)^1}$ von ∂_{2t} wird demnach 8)

$$\sum_r \sum_s (\pm) (-1)^e \left\{ \binom{s}{e} + \binom{s}{e'} \right\} x_r^{(s)} + (-1)^t x_0^{(v)} \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$$

$$0 \leq r < 2v-1$$

und

$$0 \leq s \leq v$$

Für $r = r' = 0$ würde

$$\binom{s}{e} = \binom{s}{e'}$$

es ist aber aus dem oben angeführten Grunde dennoch nicht zu verdoppeln. Z. B. wird, wenn die Ordnung $v = 6$, also $v = 8$ ist,

$$\begin{aligned} K_{30}^{(1)} = & x_0^{(8)} - 20x_8^{(6)} + 6x_8^{(4)} - 2x_8^{(2)} + x_8^{(0)} + 1x_1^{(7)} \\ & - 6x_4^{(6)} + 1x_4^{(4)} & - 1x_{15}^{(7)} \\ & - 6x_{12}^{(6)} + 1x_{12}^{(4)} & - 35x_7^{(3)} + 10x_7^{(5)} - 3x_7^{(3)} \\ & & + x_7^{(1)} \\ & + 1x_2^{(6)} & + 35x_9^{(7)} - 10x_9^{(5)} + 3x_9^{(3)} \\ & & - x_9^{(1)} \\ & + 1x_{14}^{(6)} & - 7x_3^{(7)} + 1x_3^{(5)} \\ & + 15x_6^{(6)} - 4x_6^{(4)} + 1x_6^{(2)} & + 7x_{13}^{(7)} - 1x_{13}^{(5)} \\ & + 15x_{10}^{(6)} - 4x_{10}^{(4)} + 1x_{10}^{(2)} & + 21x_5^{(7)} - 5x_5^{(3)} + 1x_5^{(3)} \\ & & + 21x_{11}^{(7)} + 5x_{11}^{(5)} - 1x_{11}^{(3)} \end{aligned}$$

In das System der Grössen $K^{(v)}$ führen wir linear

$$\lambda \leq \frac{v-s}{2}$$

$$x_r^{(s)} = \sum_{\lambda=0} \left\{ \begin{matrix} s+2\lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} y_r^{(s+2\lambda)} \quad \text{ein.}$$

Die Substitutionsdeterminante dieser linearen Transformation von $(v^2+1)^2$ Elementen hat den Wert 1, daher sind auch umgekehrt die $y_r^{(s)}$ bequem durch die $x_r^{(s)}$ auszudrücken. Dann ergeben sich wieder Binomialcoefficienten, also

1) $K_{2\gamma}$ ursprünglich als Coefficient von $M^{2\gamma}$ gedacht. t ist höchstens

$$= \frac{3v}{2} - 1$$

Werden daher die Congruenzen mit M^{3v-2} aufmultiplicirt, so folgt

$$0 \equiv K_{6v-4} (M^{6v-4} + 1) + K_{6v-6} (M^{6v-6} + M^2) + \dots + K_{3v-2} M^{3v-2}$$

$$y_r^{(s)} = \sum_{\lambda=0}^s (-1)^\lambda \binom{s+2\lambda}{\lambda} x_r^{(s+2\lambda)}$$

Durch die Transformation wird die Grösse

$$K^{(v)}_{s+2(t-1)} =$$

$$\sum_r \sum_s (\pm) (-1)^e \left\{ \binom{s}{\varrho} + \binom{s}{\varrho'} \right\} \sum_{\lambda=0}^s \binom{s+2\lambda}{\lambda} y_r^{s+2\lambda} + (-1)^t y_0^{(v)} \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$$

Nur für $r = r' = 0$ erreicht $s+2\lambda$ den höchsten Wert v . Greifen wir diesen Teil der $\Sigma\Sigma\Sigma$ heraus, so wird derselbe, indem

$$(-1)^t y_0^{(v)} \binom{v}{\frac{v}{2}-t} \text{ hinzugezogen und } \binom{s}{\varrho} + \binom{s}{\varrho'} \text{ einfach zu rechnen}$$

ist (vgl. oben),

$$= +(-1)^{e-\lambda} \Sigma \lambda 1 \cdot \binom{v-2\lambda}{\varrho-\lambda} \binom{v}{\lambda} y_0^{(v)} = 0$$

nach 2), wenn

$$\varrho = \frac{v}{2} - t \text{ nicht } = 0$$

wenn aber

$$t = \frac{v}{2} \text{ also } \varrho = 0$$

ist, und $\binom{v-2\lambda}{-\lambda}$ bei $\lambda > 0$ verschwindet, reducirt er sich auf $+1 y_0^{(v)}$.

Ganz ebenso verhält es sich, wenn $s+2\lambda$ den Wert σ annimmt, während r , somit auch r' constant gedacht wird. Zunächst ist für diesen Teil der $\Sigma\Sigma\Sigma$ dann auch nur immer eines der Zeichen (\pm) gültig, das ja von r' in $\mathbb{C}_{r'}$ abhängig war und überdies besteht er wegen $\binom{s}{\varrho}$ und $\binom{s}{\varrho'}$ aus zwei Summen:

$$(\pm) \Sigma \lambda (-1)^{e-\lambda} \binom{\sigma-2\lambda}{\varrho-\lambda} \binom{\sigma}{\lambda} y_r^{(\sigma)}; \quad \varrho = \frac{\sigma+r'}{2} - t$$

und

$$(\pm) \Sigma \lambda (-1)^{e-\lambda} \binom{\sigma-2\lambda}{\varrho'-\lambda} \binom{\sigma}{\lambda} y_r^{(\sigma)}; \quad \varrho' = \frac{\sigma-r'}{2} - t$$

Diese Summen verschwinden beide, ausser wenn

$$t = \frac{\sigma + r'}{2}; \quad \frac{r' - \sigma}{2} \quad \text{oder} \quad t = \frac{\sigma - r}{2}$$

und λ folglich $= 0$ ist. Dann erhalten wir

$$\pm (-1)^0 y_r^{(\sigma)}; \quad \pm (-1)^\sigma y_r^{(\sigma)} \quad \text{und} \quad \pm (-1)^\sigma y_r^{(\sigma)}$$

Dies ist

$$= \pm (-1)^\sigma y_r^{(\sigma)}$$

da

$$e = \frac{\sigma + r'}{2} - \frac{\sigma - r'}{2} = r' \equiv \sigma \pmod{2}$$

wird. Ist endlich $t = 0$ und $\sigma = r'$, so ergibt sich

$$\pm (-1)^\sigma \cdot 2 \cdot y_r^{(\sigma)}$$

jedoch wieder:

$$1 y^{(0)}_{r=t=0}$$

Dies möge

$$= \eta_0^0$$

gesetzt werden, indem

$$\eta_0^0 = \frac{1}{2} y_0^0$$

eingeführt wird.

Satz 9) Es kommen also in $K_{3v+2(t-1)}$ für $t > 0$ und in K_{3v+2} gar keine andern Coefficienten bei $y_r^{(s)}$ vor als: Null, $+1$ oder -1 .

So wird z. B. für

$$v = 6, \quad v = 8, \quad t = 4, \quad u = 1$$

der Coefficient transformirt

$$= y_0^{(8)} + y_8^{(0)} + y_4^{(4)} + y_{12}^{(4)} + y_2^{(6)} + y_{14}^{(6)} + y_6^{(2)} + y_{10}^{(2)} + y_1^{(7)} \\ - y_{15}^{(7)} + y_7^{(1)} - y_9^{(1)} + y_3^{(5)} - y_{13}^{(5)} + y_5^{(3)} - y_{11}^{(3)}$$

Indem wir bei den so umgeformten Congruenzen

$$\sum e_r \hat{r} u \equiv 0 \pmod{p}$$

jedesmal das Glied mit K_{5v-2} ausschliessen, weil es offenbar teilbar durch p ist und die Differenzen $K_{5v-2(\gamma+1)} - K_{5v-2(\gamma-1)}$ bilden, welche Ausdrücke auf diese Weise nämlich eine gleichartige Beschaffenheit mit den übrigen $\frac{v}{2}$ Grössen K erhalten ¹⁾, lässt sich das Coefficientenschema für die $y_r^{(s)}$, wie sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergibt, folgendermassen leicht bilden.

1) Diese Ausdrücke mögen deshalb, wie auch die übrigen K nunmehr einfach mit $K_l^{(u)}$ bezeichnet werden.

Man verteile $v(v+1)(v^2+1)$ Felder in ein Rechteck, dessen verticale Seite $v(v+1)$, dessen horizontale

$$1 + \frac{v}{2} + \frac{1v}{2} + \frac{2v}{2} + \frac{4v}{2} + \frac{8v}{2} + \dots + \frac{vv}{2}$$

Einheiten enthält, $v = 2^{\nu-3}$.

Sehen wir von der ersten Rand-Colonne, welche ein Streifen von der Breite 1 und der Länge $v(v+1)$ ist, vorläufig ab, so lassen sich die übrigen Streifen, resp. von der Breite $\frac{v}{2}, \frac{1v}{2}, \frac{2v}{2}, \frac{4v}{2} \dots$ in Rechtecke, $\frac{v}{2}$ breit und $v+1$ lang, zerlegen, die wir jetzt als Gruppen $\mathfrak{G}_{r'}$ bezeichnen, wo der Index r' mit dem in \mathfrak{C}_v übereinstimmt.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_{r'}$ enthält also $\frac{v}{2}(v+1)$ Felder, die mit null, + oder - einzufüllen sind und die Coefficienten der Unbekannten $y_r^{(s)}$ repräsentiren. Als verticale Eingänge sind daher für die einzelne Gruppe

$$t = 0, \quad t = 1, \quad t = 2, \quad \dots \quad t = v-1; \quad t = v$$

als horizontale die Unbekannten $y_r^{(s)}$ zu denken, wo s für gerades r die Werte 0, 2, 4 ... $v-2$, für ungerades r die Werte 1, 3, 5 ... $v-1$ hat.

Gruppen, die sich vertical untereinander befinden, gehören zu demselben r ; Gruppen, die horizontal nebeneinander liegen, zu demselben u , welches die ungeraden Zahlen, so wie r alle Zahlen in der halbirenden Anordnung wie in \mathfrak{C}_v durchläuft.

In der Gruppe $\mathfrak{G}_{r'}$, wo

$$ru \equiv r' \pmod{2^\nu}$$

wird nun, falls r' ungerade ist und in $\mathfrak{C}_{v'}$ nicht mit einem Punkt versehen war, in der ersten Verticalreihe

von $v+1$ Feldern das zu

$$s = 1$$

$$t = \frac{r'+1}{2}$$

gehörige mit einem +, das zu

$$t = \frac{r'-1}{2}$$

gehörige mit einem - zu füllen sein, in der zweiten Verticalreihe

$$s = 3$$

das zu $\frac{r'+3}{2}$ gehörige mit +, das zu $\frac{r'-3}{2}$ gehörige mit - und so fort, bis entweder der obere oder der untere Rand unter 45° erreicht wird, wo dann beide Male unter rechtem Winkel eine Reflexion stattfindet, beim oberen Rande ohne, beim unter mit Zahlenveränderung z. B.

$$v = 8$$

	\mathfrak{G}_3	\mathfrak{G}_{11}	\mathfrak{G}_{17}	\mathfrak{G}_0
$t = 0$	-			+
$t = 1$	- -			+ +
$t = 2$	+ -			+ +
$t = 3$	+ +			+ +
$t = 4$	+ +			+ +
$t = 5$	+ +			+ +
$t = 6$	+ +			+ +
$t = 7$	+ +			+ +
...				
$t = 8$	+ +			+ +
	(s) = 1 3 5 7	1 3 5 7	0 2 4 6	0 2 4 6

)

Ist r' gerade, so wird in der ersten Verticalen der Gruppe \mathfrak{G}_r nur ein Feld, das zu

$$t = \frac{r'}{2}$$

gehörende mit einem + gefüllt sein, in der zweiten Verticalale die zu

$$t = \frac{r'-2}{2} \text{ und zu } t = \frac{r'+2}{2}$$

gehörenden, beide mit + und so fort wie vorhin.

Ist r' mit einem Punkte in \mathfrak{G}' versehen, so sind durchweg die entgegengesetzten Zeichen zu nehmen.

Bei \mathfrak{G}_0 ist nur eine Reihe von + Zeichen für

$$t = 0, 1, 2 \dots$$

resp. in der ersten, zweiten, dritten Verticalen.

In der ersten Rand-Colonne ist nur jedesmal das zu

$$t = \frac{v}{2}$$

gehörende Feld mit $+$ zu bezeichnen.

Schliesslich müssen alle zu

$$t = v$$

gehörenden Horizontalreihen fortgelassen werden, da wir das Glied mit

$$K^{(n)}_{5v-2} = K_r^{(n)}$$

ausschlossen, und mögen überdies die jedesmal complementären Streifen $2^{v-2} - r$ statt der Anordnung $\dots s, s+2, s+4 \dots$ die entgegengesetzte $\dots s+4, s+2, s \dots$ ihrer Verticalcolonnen erhalten. Wir gewinnen dann die v -Elemente (die Randcolonne nicht eingerechnet) der a. a. O. erwähnten Kreisteilungsdeterminante und es dürfte vielleicht von Interesse sein, sie für

$$v = 8$$

wirklich aufzustellen.

(Der Kürze halber sei hier nur das erste Viertel dieser Determinante gegeben.)

Anschluss	$r=1$			$r=15$			$r=7$			$r=9$			$r=3$			$r=13$			$r=5$			$r=11$																																																														
	1	3	5	7	7	5	3	1	1	3	5	7	7	5	3	1	1	3	5	7	7	5	3	1																																																												
0	-	+	-																																																																																	
1	+	-	-																																																																																	
2		+	-																																																																																	
3			+																																																																																	
4																																																																																				
5																																																																																				
6																																																																																				
7																																																																																				
0																																																																																				
1																																																																																				
2																																																																																				
3																																																																																				
4																																																																																				
5																																																																																				
6																																																																																				
7																																																																																				
Wert. für $y_r(s)$	-35			21			-7			1			-1			5			-9			21			-31			11			-17			43			-11			-5			13			-21			45			-11			5			-11			17			1			7			14			7											
Wert. für $x_r(s)$	0			0			1			-1			-2			2			0			-4			0			-8			4			-2			4			-11			2			2			0			0			-10			-4			1			-1			-2			0			2			1			-3			1		

Satz 10) Die v^2 Grössen $K_l^{(u)}$ müssen einzeln verschwinden. Hierauf wird man durch folgende Betrachtung geführt.

Da

$$\partial_{2\alpha} + \partial_{4v-2\alpha} \equiv 0 \pmod{p}$$

wo p von der Form $M^{4v} + 1$ {und $M = 2 \cdot 2^{2^{\mu-v}}$ }, so lassen sich die Glieder $K_{\frac{v}{2}+\gamma} \partial_{v+2\gamma}$ und $K_{\frac{3v}{2}-\gamma} \partial_{3v-2\gamma}$ in $\left(K_{\frac{v}{2}+\gamma} - K_{\frac{3v}{2}-\gamma}\right) \partial_{v+2\gamma}$ zusammenziehen, und unser System Congruenzen wird, wenn wir es in Form von Gleichungen schreiben, für v Werte: u

$$I) \quad n(K_0^{(u)} + K_1^{(u)} \partial_2 + K_2^{(u)} \partial_4 + \dots + K_{v-1}^{(u)} \partial_{2v-2}) = g^{(u)} \cdot p$$

Nach Archiv der Math. u. Phys. 2te Reihe T. VI. pag. 293. gelten aber zugleich

$$\sum e^2 = p \quad \text{und} \quad \sum e_k e_{k+\lambda} = 0$$

ausserdem

$$e_0 \equiv -1 \pmod{4^1}.$$

Zur Vereinfachung behandeln wir diese Bedingungsgleichungen unter der gemeinschaftlichen Form:

$$\sum_{r=0}^{r=4v-1} e_r e_{r+2\gamma} = p \quad \text{oder} \quad = 0$$

je nachdem $\gamma = 0$ ist, oder oder die Werte $1, 2 \dots (v-1)$ annimmt.

Dabei ist

$$e_r = -e_{r'}$$

wenn r' um r grösser als $4v$ ist, und

$$e_r = \pm e_{4v-r}$$

wo $+$ bei ungeradem, $-$ bei geradem r gilt. Dann noch

$$e_{2v} = 0$$

Diese Beziehungen können offenbar auf die $x_r^{(s)}$ übertragen werden, und wir erhalten für den Coefficienten $\mathfrak{R}_t^{(\gamma)}$ von ∂_{2t} für ein beliebiges γ abgesehen von dem Factor n^2 den Ausdruck:

$$\sum_{k=0}^{k=v-t} (-1)^k \binom{2t+2k}{k} \sum_{s+s'=2t+2k} \sum_0^{4v-1} x_r^{(s)} x_{r+2\gamma}^{(s')}$$

1) Erst bei hohen Ordnungen v wird

$$e \equiv +1 \pmod{4}$$

bei der letzten wieder

$$\equiv -1 \pmod{4}.$$

wobei s und s' alle zulässigen Werte annehmen müssen; man wird also $s + s'$ wie auch $s' + s$, wenn beide ungleich sind, in Rechnung ziehen müssen. Viele, keineswegs immer alle Glieder $x_r^s x_r^{s'}$ wiederholen sich, wenn $r > 2v$ wird, indem die eben angeführten Beziehungen Platz greifen.

Wird nun, da $M^{2v} \partial_{2v} = p$ ist,

$$n = M^v$$

angenommen, so ergibt sich, nachdem durch n^2 dividirt, ein System Gleichungen:

$$\text{II) } \Omega_0^{(\gamma)} + \Omega_1^{(\gamma)} \partial_2 + \Omega_2^{(\gamma)} \partial_4 + \dots + \Omega_{v-1}^{(\gamma)} \partial_{2v-2} + (\Omega_v^{(0)} - 1) \partial_{2v} = 0$$

worin das letzte Glied nur für

$$\gamma = 0$$

hinzutritt. Da hierin die ∂ von M und somit von μ abhängig sind, die $\Omega^{(\gamma)}$ aber nur von v , da also jede Gleichung des System's II) bestehen bleibt, auch wenn zu anderm μ gehörige ∂ zu Grunde gelegt werden, so müssen wir die $\Omega^{(\gamma)}$ einzeln $= 0$ setzen und

$$\Omega_v^{(0)} = 1$$

denn die Determinante der ∂

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & \partial_2 & \partial_4 & \dots \\ 1 & \partial_2' & \partial_4' & \dots \\ 1 & \partial_2'' & \partial_4'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1, & \partial^2 + \binom{2}{1}, & \partial^4 + \binom{4}{1} \partial^2 + \binom{4}{2} \dots \\ 1, & \partial'^2 + \binom{2}{1}, & \partial'^4 + \binom{4}{1} \partial'^2 + \binom{4}{2} \dots \\ 1, & \partial''^2 + \binom{2}{1}, & \partial''^4 + \binom{4}{1} \partial''^2 + \binom{4}{2} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \partial^2 & \partial^4 & \dots \\ 1 & \partial'^2 & \partial'^4 & \dots \\ 1 & \partial''^2 & \partial''^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \Pi(\partial^{(k)} + \partial^\lambda) (\partial^{(k)} - \partial^{(\lambda)})^1 \end{aligned}$$

verschwindet nicht, wenn die ∂ alle unter sich verschieden sind. {Ob sich die genügende Anzahl ungleicher ∂ , für welche II) gilt, vor-

1) Vgl. Baltzer, Determinanten. § 10.

findet, könnte freilich in Zweifel gezogen werden, wenn die Reihe der Primzahlen von der Form p abbrechen möchte.

Weil die Coefficienten $\Omega^{(\gamma)}$ verschwinden, und

$$\Omega_v^{(0)} = 1$$

ist, so muss offenbar:

$$11) \quad \sum_{s+s'=2t} \sum_0^{4v-1} x_r^{(s)} x_{r+2\gamma}^{(s')} = \begin{cases} 2v \\ v-t \end{cases} \quad \text{oder} \quad = 0$$

sein, je nachdem

$$\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad > 0 \quad \text{ist.}$$

Hiedurch erhalten wir v^2+1 Gleichungen 2ten Grades für die Unbekannten $x_r^{(s)}$.

$$\Omega_v^{(0)} = x_0^{(v)^2} = 1$$

ergibt:

$$x_0^{(v)} = -1$$

wo sich das Zeichen aus:

$$e_0 \equiv -1 \pmod{4}$$

folgern lässt. Ω_{v-1} wird

$$-2v + 2x_0^{(v)} x_0^{(v-2)} + \sum_1^{4v-1} x_r^{(v-1)} x_{r+2\gamma}^{(v-1)} = 0$$

$\Omega_{v-1}^{(\gamma)}$ wird

$$\begin{aligned} & x_0^{(v)} x_{2\gamma}^{(v-2)} + \sum_1^{4v-1} x_r^{(v-1)} x_{r+2\gamma}^{(v-1)} + x_{4v-2\gamma}^{(v-2)} x_{4v}^{(v)} \\ & = 2x_0^{(v)} x_{2\gamma}^{(v-2)} + \sum_1^{4v-1} x_r^{(v-1)} x_{r+2\gamma}^{(v-1)} = 0; \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Ueber die Natur der Zahlen $x_r^{(s)}$ lässt sich hieraus wenigstens so viel ersehen, dass sie nicht von μ abhängen, sondern von ν , denn ν war $= 2^{\nu-3}$. Mithin wird die Determinante der aus den $x_r^{(s)}$ zusammengesetzten Grössen $K_l^{(u)}$ nämlich:

$$D = \begin{vmatrix} K_0^{(1)} & K_1^{(1)} & \dots \\ K_0^{(3)} & K_1^{(3)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

keineswegs den Factor p enthalten können, (von null mal p natürlich abgesehen); es sind also auch in System I) die $g^{(u)} = 0$, weil sich sonst aus der Auflösung des Systems I) nach den $u^2 \cdot \partial_{2t}$ für diese Vielfache von p ergeben würden, was nicht angeht, so dass also das System der Congruenzen schliesslich in die Gleichungen:

$$I') \quad K_0^{(u)} + K_1^{(u)} \partial_2 + \dots + K_{v-1}^{(u)} \partial_{2v-2} = 0$$

übergeht, aus denen sich dann, wie vorhin ergibt, dass die $K_t^{(u)}$ einzeln = 0 sein müssen. Dies sind dann v^2 lineare Gleichungen für v^2 Unbekannte $x_r^{(s)}$ oder nach der Transformation auch für $y_r^{(s)}$.

Da nun $x_0^{(v)}$ bei ∂_{2t} in den Binomialcoefficienten $(-1)^t \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$

multipliziert war, während $x_1^{(v-1)}$ als Factor

$$(\pm) (-1)^t \left\{ \binom{v-1}{\frac{v}{2}-t} + \binom{v-1}{\frac{v}{2}-t-1} \right\}$$

also ebenfalls

$$\pm (-1)^t \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$$

besitzt, so wird man

$$x_r^{(v-1)} \mp x_0^{(v)} = 0$$

setzen können, jenachdem bei \mathcal{C}_r' in Zeile u der Rest $r_1 = 1$ mit Punkt versehen war oder nicht, so dass sich z. B.

$$\begin{aligned} x_1^{(7)} &= x_5^{(7)} = x_{13}^{(7)} = +1 \\ x_{15}^{(7)} &= x_7^{(7)} = x_9^{(7)} = x_3^{(7)} = x_{11}^{(7)} = -1 \end{aligned}$$

ergeben, hieraus wieder nach der Formel $\mathfrak{R}_{v-1}^{(0)}$ und $\mathfrak{R}_{v-1}^{(1)}$ die Werte:

$$\begin{aligned} x_0^{(v-2)} &= x_0^{(6)} = 0 \\ x_2^{(6)} &= x_1^{(7)} x_3^{(7)} + x_3^{(7)} x_5^{(7)} + \dots = -3 \end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned} x_4^{(6)} &= 2, \quad x_6^{(6)} = -1, \quad x_8^{(6)} = 4, \quad x_{10}^{(6)} = -3, \quad x_{12}^{(6)} = 2 \\ x_{14}^{(6)} &= 1 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Betrachtung findet darin ihre Bestätigung, dass die pag. 288 unter die Kreisteilungsdeterminante gesetzten Werte $y_r^{(s)}$ in der Tat die einzelnen Zeilen $K_t^{(u)}$ zu null machen, wenn man sie an die mit + oder - gefüllten Stellen einsetzt ($y_0^{(6)} = -1$) und dass die aus den $y_r^{(s)}$ durch Multiplication mit dem beigefügten Schema der δ^1) gewonnenen $x_r^{(s)}$ die in den Binomialcoefficienten β aufgestellten Gleichungen $K_t^{(u)} = 0$ z. B.

1) Bei $r = 0$ hat man aber:

$$\begin{array}{cccccc} \{-1 & & & & & \{1 & 8 & 20 & 16 & 2 \\ & 8 & & & & & 1 & 6 & 9 & 2 \\ & & -24 & & & \text{mit} & & 1 & 4 & 2 \\ & & & 44 & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & & & & 1 \} \\ & & & & & & & & & & (y_0^0 = -27); \quad y_0^0 = -54 \end{array}$$

zu nehmen, um die $x_r^{(s)}$ zu erhalten.

$$K_{30}^{(1)} = 0$$

auf pag. 282 erfüllen. Hiedurch haben wir also auf eine durch die Natur des Gegenstandes begründete Weise, nach bestimmter Regel construirte Systeme linearer Gleichungen mit eben sovielen Unbekannten, als ihre Anzahl beträgt, erhalten, welche die Eigenschaft besitzen, durch ganze rationale Zahlen sich auflösen zu lassen. Zugleich sind dadurch die Zahlen e_r (*ohne* Indextabelle) direct ermittelt, wie auch die Bedingungsgleichungen erfüllt, freilich nur in dem durch die Ordnung ν bedingten Umfange, denn $\nu < \mu + 1$ scheint zunächst wenigstens erforderlich. (Ausdehnung auf $\nu = \mu + 2$ siehe a. a. O.)

Königsberg i./Pr., den 19. October 1888.

XII.

Independente Darstellungen der Tangenten- und Secanten-Coefficienten.

Von

Franz Rogel.

Wenn in der bekannten Formel:

$$\begin{aligned} \cos \frac{x+1}{4} \pi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 - \frac{x}{5}\right) \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_0^{\infty} \left[1 - \frac{(-1)^m}{2m+1} x\right] \quad 1] \end{aligned}$$

der Reihe nach $\alpha_1 x, \alpha_2 x, \dots, \alpha_n x$, wo α eine eigentliche Einheitswurzel $= \sqrt[m]{+1}$ und $\alpha_r = \alpha^r$ ist, statt x gesetzt wird, so ergibt sich durch Multiplication der n Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= \prod_1^n \cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \prod_0^{\infty} \left[1 - \frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^n} x^n\right] \quad 2] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n [1 - R_n x^n \pm \dots] \end{aligned}$$

worin

$$R_n = \frac{1}{1^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{7^n} + \dots$$

also bei geradem n

$$R_n = T_n = \sum_0 \frac{1}{(2m+1)^n}$$

und bei ungeradem n

$$R_n = U_n = \sum \frac{(-1)^m}{(2m+1)^n} \text{ ist.}$$

Diese Reihen hängen in einfacher Weise mit den Tangenten- und Secanten-Coefficienten τ_n zusammen; es ist nämlich:

$$\tau_n = \frac{2^{n+2n}!}{\pi^{n+1}} R_{n+1} \quad 2']$$

bei ungeradem n sind die τ_n Tangenten-, bei geradem n Secanten-Coefficienten.

Mittelt des Mac-Laurin'schen Satzes kann y in eine zweite Reihe entwickelt werden; die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x gleichsetzt, führt zu

$$\frac{1}{n!} D_x^n y_0 = - \frac{1}{(\sqrt{2})^n} R_n \quad 3]$$

Der n te Differentialquotient des Productes y kann nun entweder durch directes Differentiiren desselben oder durch das sogenannte logarithmische Differentiiren gefunden werden.

I.

Um $y_0^{(n)}$ nach ersterer Art zu bestimmen, sei allgemein

$$y = x_1 x_2 \dots x_n$$

wo $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots$ beliebige Functionen von x bedeuten sollen; dann ist:

$$\begin{aligned} y' &= x_1' \cdot x_2 \dots x_n + x_1 x_2' x_3 \dots x_n + \dots \\ y'' &= x_1'' \cdot x_2 \dots x_n + 2x_1' x_2' x_3 \dots x_n + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

woraus zu ersehen ist, dass $y^{(n)}$ jedenfalls aus der Summe von Producten $P_1, P_2, \dots, P_r, \dots$ bestehen wird, welche mit noch unbekanntem, von der Natur der Functionen x_r unabhängigen, dagegen von n abhängigen Zahlencoefficienten C_1, C_2, \dots behaftet sind, also

$$y^{(n)} = \sum C_r P_r$$

Die Bestandteile $C_r P_r$ von $y^{(n)}$ haben offenbar die Form $C_1 x_1^{(\alpha)} \cdot x_2^{(\beta)} \dots x_n^{(\nu)}$, unter $x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\beta)}, \dots$ Differentialquotienten der Ordnung α, β, \dots der Functionen x_1, x_2, \dots verstanden, wobei die Ordnungs-

Exponenten die Werte von 0 bis n annehmen. Der 0 te Differentialquotient ist die Function selbst, d. h. es ist

$$x_1^{(0)} = x_1, \quad x_2^{(0)} = x_2 \dots$$

Die Bestimmung der Coefficienten $C_1, C_2 \dots$ geschieht am einfachsten auf die Art, dass für $x_1, x_2 \dots$ bekannte Functionen, deren höhere Differentialquotienten sich recht leicht angeben lassen, substituirt werden, etwa

$$x_1 = e^{a_1 x} \dots x_r = e^{a_r x} \dots$$

dann ist

$$\begin{aligned} x_r^{(n)} &= (a_r)^n x_r, \quad y = e^{(a_1 + \dots + a_n)x}, \quad y^{(n)} = (a_1 + \dots + a_n)^n y \\ &= y \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots} a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \dots = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots} a_1^\alpha e^{a_1 x} \cdot a_2^\beta e^{a_2 x} \dots \end{aligned}$$

da

$$a_1^\alpha e^{a_1 x} = x_1^{(\alpha)}, \quad a_2^\beta e^{a_2 x} = x_2^{(\beta)} \dots$$

ist, folglich

$$y^{(n)} = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots} x_1^{(\alpha)} \cdot x_2^{(\beta)} \quad 4]$$

Die Zahlen C_1, C_2 sind daher die Polynomialcoefficienten, erhalten durch die Erhebung eines n gliedrigen Polynoms zur n ten Potenz. Das System der Wiederholungs-Exponenten $\alpha, \beta \dots$ ist somit auf dieselbe Art, wie das der Potenz-Exponenten bei der polynomialen Entwicklung aufzustellen, es ist nämlich das vollständige Wertsystem $\alpha, \beta \dots$, welches der Bedingung

$$\alpha + \beta + \dots = n, \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 0, & 1 & \dots & n \\ \beta = 0, & 1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right)$$

genügt.

In symbolischer Ausdrucksweise kann daher geschrieben werden

$$y^{(n)} = D_x [x_1 + x_2 + \dots + x_n]^n \quad 5]$$

Dieses Resultat kann nicht überraschen, da der Vorgang bei der Potenzirung eines Polynoms analog dem des wiederholten Differenzirens eines Productes ist.

Die Ausführung der in 5] angezeigten Operation hat in der Weise zu erfolgen, dass nach geschehener polynomialer Entwicklung in jedem Bestandteil die nicht vertretenen Glieder $x_1, x_2 \dots$ des Polynoms durch ihre 0 ten Potenzen n und schliesslich alle Potenz-Exponenten durch die gleich hohen Wiederholungs-Exponenten ersetzt werden.

Die Anwendung des Satzes 5] auf y in 1] ergibt:

$$R_n = - \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} D_x^n y_0 = - \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \left[r \sum_1^n \cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi \right]_{x=0}^{(n)}$$

Entwickelt, und sodann jede Potenz $\left(\cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi \right)_0^p$ durch

$$\left\{ D_x^p \left(\cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi \right) \right\}_{x=0} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha_r \pi}{4} \right)^p$$

ersetzt, ergibt für τ_n einen von den vorhergehenden $\tau_{n-1}, \tau_{n-2} \dots$ unabhängigen Ausdruck. Das positive Zeichen kommt allen Exponenten p von den Formen $4k$ und $4k+3$ und das negative allen p von den Formen $4m+1$ und $4m+2$ zu. Erst nach erfolgter Zeichenbestimmung sind die Potenzen der Einheitswurzeln mit Berücksichtigung von

$$\alpha_r = \alpha^r$$

zusammenzuziehen.

Sämtliche Glieder der so entstandenen Summe haben $\left(\frac{\pi}{4} \right)^n$ und weil sie n Cosinusse von der Form

$$\cos \frac{2p+1}{4} \pi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

enthalten, auch $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$ als gemeinschaftlichen Factor; folglich ist nach leichter Reducirung:

$$\tau_{n-1} = - \frac{1}{n 2^{n-1}} \sum \pm \frac{n!}{x! \lambda! \mu! \dots} \alpha_1^x \alpha_2^\lambda \alpha_2^\mu \dots \quad 6]$$

$$x + \lambda + \mu + \dots = n$$

oder in symbolischer Form

$$\tau_{n-1} = - \frac{1}{n 2^{n-1}} \left[r \sum_1^n \pm \alpha_r \right]^{(n)} \quad 7]$$

mit dem Vorbehalt, dass nach geschehener polynomialer Entwicklung für jede Potenz α_r^μ mit Berücksichtigung der Form von μ das Vorzeichen auf die bereits festgesetzte Art bestimmt wird.

Diese Formel erfährt eine Vereinfachung durch die Bemerkung, dass

$$r \sum_1^n \alpha_r = 0$$

folglich auch

$$- \frac{1}{n 2^{n-1}} \left[\sum_1^n \alpha_r \right]^n = 0$$

ist. Letzteres zu 7] addirt, macht die negativen Glieder innerhalb der Klammer verschwinden, während sich die positiven Glieder verdoppeln; daher kann geschrieben werden

$$\tau_{n-1} = - \frac{1}{n2^{n-2}} \left[\sum_1^n + (\alpha_r) \right]^{(n)} \quad 8]$$

wo das positive Zeichen symbolisch andeuten soll, dass nur die nach dem hier geltenden Zeichengesetze als positiv auftretenden Glieder beizubehalten sind.

In der Formel 6] das gemeinsame $n!$ vor das Summenzeichen gesetzt wird

$$\tau_{n-1} = - \frac{(n-1)!}{2^{n-2}} \sum + \frac{\alpha_1^\kappa \alpha_2^\lambda \alpha_3^\mu}{\kappa! \lambda! \mu!} \quad 9]$$

wenn für $\kappa, \lambda, \mu \dots$ wieder nur sämtliche Glieder positiv machende und der Bedingung

$$\kappa + \lambda + \mu + \dots = n$$

genügende Werte gedacht werden.

Da alle Vereinigungen der Einheitswurzeln mit derselben Exponentenreihe $\kappa, \lambda, \mu \dots$ dasselbe Vorzeichen und denselben Nenner $\kappa! \lambda! \mu! \dots$ haben, so ist ihre Summe eine mit einem gewissen Coefficienten behaftete symmetrische Function $[\kappa, \lambda, \mu \dots]$ der Einheitswurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, nämlich

$$\sum \frac{\alpha_1^\kappa \alpha_2^\lambda \alpha_3^\mu \dots}{\kappa! \lambda! \mu! \dots} = \frac{[\kappa, \lambda, \mu \dots]}{\kappa! \lambda! \mu! \dots}$$

demgemäss gilt auch:

$$\tau_{n-1} = - \frac{(n-1)!}{2^{n-2}} \sum + \frac{[\kappa, \lambda, \mu \dots]}{\kappa! \lambda! \mu! \dots} \quad 10]$$

wodurch die independente Darstellung der Tangenten- und Secanten-Coefficienten durch symmetrische Functionen der Einheitswurzeln bewirkt wird.

Für $\kappa, \lambda, \mu \dots$ sind auf alle mögliche Arten solche gleiche oder ungleiche Werte von 0 bis n zu setzen, deren Summe jedesmal n beträgt und die ein positives Vorzeichen bedingen.

Beispiel.

$$n = 3, \quad \alpha = \sqrt[3]{+1}$$

κ, λ, μ

Vorzeichen:

$$\begin{array}{r} 3, 0, 0 + \\ 2, 1, 0 + \\ 1, 1, 1 - \end{array}$$

entfällt daher

$$\begin{aligned} \tau_2 &= - \frac{1}{3 \cdot 2} [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3]^{(3)} \\ &= - \left[\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \frac{3!}{2!} 3(\alpha + \alpha^2) \right] = + 1 \end{aligned}$$

II.

Das logarithmische Differentiieren führt zu einer schönen Anwendung des fruchtbaren Hoppe'schen Satzes über höhere Differentialquotienten, welcher bekanntlich in folgender Gleichung seinen Ausdruck findet:

$$D_x^n F(y) = \frac{U_1}{1!} F'(y) + \frac{U_2}{2!} F''(y) + \dots + \frac{U_n}{n!} F^{(n)}(y)$$

$$U_m = \binom{m}{0} D_x^n y^m - \binom{m}{1} D_x^n y^{m-1} + \dots$$

In Formel 2] beiderseits die Logarithmen genommen ist:

$$\log y = \Sigma \log \cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi$$

mit Benutzung obigen Satzes wird

$$D_x^n \log y = \frac{\binom{n}{1}}{1y} D_x^n y = \frac{\binom{n}{2}}{2y^2} D_x^n y^2 = \frac{\binom{n}{3}}{3y^3} D_x^n y^3 - + \dots \quad 11]$$

Für $x = 0$ ist

$$y_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

und alle Nullwerte der höheren Differentialquotienten, deren Ordnungszeiger kein Vielfaches von n sind, verschwinden, somit ist

$$D_x^n \log y \Big|_0 = \frac{y_0^{(n)}}{y_0} \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots \right] = \frac{y_0^{(n)}}{y_0} = (\sqrt{2})^n y_0^{(n)}$$

Ebenso kann die Formel 11] zur Bildung der höhern Differentialquotienten von $\Sigma \log \cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi$ verwendet werden;

$$\cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi = u_r \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_r x + 1}{4} = \varphi_r$$

gesetzt, ist zunächst

$$D_x^n u_r = \left(\frac{\alpha_r \pi}{4}\right)^n \cos\left(\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \cos\left(\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi$$

Um die n ten Differentialquotienten der aufeinanderfolgenden Potenzen von u_r zu erhalten, ist es nur notwendig, dieselben in Vielfache des Argumentes $\varphi_r \pi$ zu verwandeln; es ist bekanntlich:

$$2^m \cos^m \varphi = \binom{m}{0} \cos m \varphi + \binom{m}{1} \cos(m-2)\varphi + \binom{m}{2} \cos(m-4)\varphi + \dots$$

daher

$$\begin{aligned} D_x^n u_r^n &= \frac{1}{2^m} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos\left(m\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi \right. \\ &+ \binom{m}{1} (m-2)^n \cos\left((m-2)\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi \\ &\left. + \binom{m}{2} (m-4)^n \cos\left((m-4)\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi + \dots \right] \end{aligned}$$

Für $x = 0$ ist

$$\varphi_r = \frac{1}{4} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} D_x^n u_r^m \Big|_0 &= \frac{1}{2^m} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos \frac{2n+m}{4} \pi \right. \\ &\left. + \binom{m}{1} (m-2)^n \cos \frac{2n+m-2}{4} \pi + \dots \right] \end{aligned}$$

Hier entfallen sämtliche Einheitswurzeln, der Ausdruck rechter Hand ist daher von r unabhängig; da aber die Formel 11] für eine Summe von n sich eben nur durch diesen Zeiger r sich unterscheidenden Functionen $\log u_r$ zur Anwendung kommen soll, und nur die Nullwerte benötigt werden, so ist, da $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} D_x^n \log y \Big|_0 = D_x^n \Sigma \log u \Big|_0 &= n \left[\frac{\binom{n}{1}}{1u_1} D_0^n u_r - \frac{\binom{n}{2}}{2u_0^3} D_0^n u_r^2 \right. \\ &\left. + \frac{\binom{n}{3}}{3u_0^3} D_0^n u_r^3 - + \dots \right] \end{aligned}$$

oder

$$(\sqrt{2})^n y_0^{(n)} = n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{n}{1} (\sqrt{2}) \frac{C_1}{1} - \binom{n}{2} (\sqrt{2})^2 \frac{C_2}{2} + \binom{n}{3} (\sqrt{2})^3 \frac{C_3}{3} - + \dots \right]$$

$$C_m = \frac{1}{2^m} \left[\binom{m}{0} m^n \cos \frac{2n+m}{4} \pi + \binom{m}{1} (m-2)^n \cos \frac{2n+m-2}{4} \pi + \dots \right]$$

und

$$\tau_{n-1} = - \frac{2^{n+1} (\sqrt{2})^n}{n \pi^n} y_0^{(n)}$$

oder

$$\tau_{n-1} = - \frac{1}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{1} (\sqrt{2}) \frac{C_1}{1} - \binom{n}{2} (\sqrt{2})^2 \frac{C_2}{2} + \dots \right] \quad 12]$$

Aehnliche independente Ausdrücke für die Tangenten- und Secanten-Coefficienten können bekanntlich mit Hilfe der höhern Differentialquotienten der Functionen $\frac{1}{1+e^{2x}}$ und $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ aufgestellt werden, in welchen statt der Coefficienten C_m solche von der Form

$$E_m = \binom{m}{0} m^n - \binom{m}{1} (m-1)^n + \binom{m}{2} (m-2)^n - \dots$$

erscheinen; letztere haben daher eine doppelt so grosse Gliederzahl als erstere. Diese independente Darstellung erscheint in 12] in ihrer allgemeinsten und sehr zusammengezogenen Form. Durch Unterscheidung der Fälle eines geraden m und eines ungeraden m gelingt es die Zahl der Glieder von C_m auf die Hälfte zu reduciren und die Cosinusse auszuwerten. Es ist für gerades m :

$$2^{m-1} \cos^m \varphi = \binom{m}{0} \cos m \varphi + \binom{m}{1} \cos(m-2) \varphi + \dots + \binom{m}{\frac{m}{2}-1} \cos 2 \varphi + \frac{1}{2} \binom{m}{\frac{m}{2}}$$

und für ungerades m

$$2^{m-1} \cos^m \varphi = \binom{m}{0} \cos m \varphi + \binom{m}{1} \cos(m-2) \varphi + \dots + \binom{m}{\frac{m-3}{2}} \cos 3 \varphi + \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos \varphi$$

folglich ist

a) bei geradem m

$$D_x^n u_n^n = \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos \left(m\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi \right. \\ \left. + \binom{m}{1} (m-2)^n \cos \left((m-2)\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{m}{\frac{m}{2}-1} 2^n \cos \left(2\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi \right]$$

$$x = 0, \varphi_r = \frac{1}{4}$$

$$D_x^n u_r^m \Big|_0 = \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos \frac{2n+m}{4} \pi \right. \\ \left. + \binom{m}{1} (m-2)^n \cos \frac{2n+m-2}{4} \pi + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{m}{\frac{m}{2}-1} 2^n \cos \frac{2n+2}{4} \pi \right]$$

b) bei ungeradem m :

$$D_x^n u_r^m = \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos \left(m\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi \right. \\ \left. + \binom{m}{1} (m-2)^n \cos \left((m-2)\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{m-3}{\frac{m}{2}} 3^n \cos \left(3\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi + \binom{m-1}{\frac{m}{2}} \cos \left(\varphi_r + \frac{n}{2}\right) \pi \right]$$

$$x = 0, \varphi_r = \frac{1}{4}$$

$$D_x^n u_r^m \Big|_0 = \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos \frac{2n+m}{4} \pi \right. \\ \left. + \binom{m}{1} (m-2)^n \cos \frac{2n+m-2}{4} \pi + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{m-3}{\frac{m}{2}} 3^n \cos \frac{2n+3}{4} \pi + \binom{m-1}{\frac{m}{2}} \cos \frac{2n+1}{4} \pi \right]$$

Bei der Sonderung der Tangenten- von den Secanten-Coefficienten lassen sich die von m unabhängigen Cosinuse der letzten Glieder sofort berechnen; es ist mithin vorteilhafter mit denselben

beginnend die Reihenfolge der Glieder umzukehren, wodurch weitere Unterscheidungen der Zahlformen von m von selbst entfallen.

A. Die Tangenten-Coefficienten, n gerade.

a) m gerade

$$D_x^n u_r^m \Big|_0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{\frac{m}{2}-2} 4^n - \binom{m}{\frac{m}{2}-4} 8^n \right. \\ \left. + \binom{m}{\frac{m}{2}-6} 12^n - + \dots \right]$$

b) m ungerade

$$D_x^n u_r^m \Big|_0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{2^{m-1} \sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[- \binom{m}{\frac{m-1}{2}} 1^n + \binom{m}{\frac{m-3}{2}} 3^n \right. \\ \left. + \binom{m}{\frac{m-5}{2}} 5^n - - + + \dots \right]$$

$$\tau_{n-1} = - \frac{2^{n+1} (\sqrt{2})^n}{n \pi^n} y_0^{(n)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{1} (\sqrt{2}) \mathfrak{I}'_{1,2^0} \right. \\ \left. - \binom{n}{2} (\sqrt{2})^2 \mathfrak{I}'_{2,2^1} + \binom{n}{3} (\sqrt{2})^3 \mathfrak{I}'_{3,2^2} - + \dots \right]$$

$$\mathfrak{I}_{2\nu'} = \binom{2\nu}{\nu-2} 4^n - \binom{2\nu}{\nu-4} 8^n + \binom{2\nu}{\nu-6} 12^n - \dots$$

$$\sqrt{2} \cdot \mathfrak{I}_{2\nu'+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n - \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n + + - - \dots$$

B. Die Secanten-Coefficienten, n ungerade.

a) m gerade

$$D_x^n u_r^m \Big|_0 = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{\frac{m}{2}-1} 2^n - \binom{m}{\frac{m}{2}-3} 6^n \right. \\ \left. + \binom{m}{\frac{m}{2}-5} 10^n - + \dots \right]$$

b) m ungerade

$$D_x^n u_r^m \Big|_0 = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{\frac{m-1}{2}} 1^n + \binom{m}{\frac{m-3}{2}} 3^n - \binom{m}{\frac{m-5}{2}} 5^n - + + \dots \right]$$

$$\tau_{n-1} = -\frac{2^{n+1}(\sqrt{2})^n}{n\pi^n} y_0^{(n)} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{1} (\sqrt{2}) \frac{\mathfrak{S}'_1}{1 \cdot 2^0} - \binom{n}{2} (\sqrt{2})^2 \frac{\mathfrak{S}'_2}{2 \cdot 2^1} + - \dots \right]$$

$$\mathfrak{S}'_{2\nu} = \binom{2\nu}{\nu-1} 2^n - \binom{2\nu}{\nu-3} 6^n + \binom{2\nu}{\nu-5} 10^n - \dots \quad 14]$$

$$\sqrt{2} \cdot \mathfrak{S}'_{2\nu+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n + \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n - + + \dots$$

Diese Formeln sind weiterer Reductionen fähig; die ungeraden Potenzen von $\sqrt{2}$ können entfernt werden. Schliesslich lassen sich die Formeln für Tangenten- und Secanten-Coefficienten in eine einzige zusammenziehen, und zwar wird

$$\tau_{n-1} \tau_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{1} \frac{\mathfrak{S}_1}{1 \cdot 2^0} - \binom{n}{2} \frac{\mathfrak{S}_2}{2 \cdot 2^1} + \binom{n}{3} \frac{\mathfrak{S}_3}{3 \cdot 2^2} - \binom{n}{4} \frac{\mathfrak{S}_4}{4 \cdot 2^3} + \binom{n}{5} \frac{\mathfrak{S}_5}{5 \cdot 2^4} - \binom{n}{6} \frac{\mathfrak{S}_6}{6 \cdot 2^5} + - \dots \right] \quad 15]$$

Für die Tangenten-Coefficienten ist

$$\tau_{n-1} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

n gerade und

$$\mathfrak{S}_{2\nu} = \binom{2\nu}{\nu-2} 4^n - \binom{2\nu}{\nu-4} 8^n + \binom{2\nu}{\nu-6} 12^n - + \dots$$

$$\mathfrak{C}_{2\nu+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n - \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n + + - - \dots$$

Für die Secanten-Coefficienten ist

$$\epsilon_{n-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

n ungerade

$$\mathfrak{C}_{2\nu} = \binom{2\nu}{\nu-2} 2^n - \binom{2\nu}{\nu-3} 6^n + \binom{2\nu}{\nu-5} 10^n - + \dots$$

$$\mathfrak{C}_{2\nu+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n + \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n - + + \dots$$



XIII.

Die merkwürdigen Punkte derjenigen
Tangentendreiecke einer Curve zweiter Ordnung,
welche von zwei festen Tangenten und einer
beweglichen gebildet werden.

Von

Dr. **Theodor Meyer**

in Saarbrücken.

Der Satz von den Höhenschnittpunkten der Tangentendreiecke einer Parabel legt die Frage nahe, ob derselbe ein besonderer Fall von einem für Curven II. O. allgemeingültigen Satze ist, und er regt weiter zu Untersuchungen über die merkwürdigen Punkte in den Tangentendreiecken an, in deren Bildung irgend eine Gesetzmässigkeit herrscht. Wir wollen im Folgenden diejenigen Tangentendreiecke einer Curve II. O. in Bezug auf ihre merkwürdigen Punkte untersuchen, welche von zwei festen und einer beweglichen Tangente gebildet werden. Diese Aufgabe lässt sich vorteilhaft auf synthetischem Wege durchführen, und es wird sich dabei unter anderm eine Bejahung der aufgeworfenen Frage ergeben.

I. Der Höhenschnittpunkt.

Von einem Punkte A seien an eine Curve II. O. die Tangenten t_1 und t_2 gezogen, und eine dritte Tangente t schneide dieselben in den Punkten S_1 und S_2 . Ferner sei H der Schnittpunkt der beiden

durch S_1 und S_2 gehenden Höhen des Dreiecks AS_1S_2 und mit P_1 und P_2 mögen die beiden unendlich fernen Punkte bezeichnet werden, nach welchen beide Höhen gerichtet sind.

Denkt man sich dann die Tangenten t_1 und t_2 fest, die dritte Tangente t aber beweglich, dann beschreiben S_1 und S_2 auf den ersteren Tangenten zwei zu einander projectivische Punktreihen I. O. und folglich ihre Verbindungsgeraden mit den festen unendlichen fernen Punkten P_1 und P_2 zwei zu einander projectivische Parallel-Strahlenbüschel. Je zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden sich in dem Höhenschnittpunkt H des veränderlichen Dreiecks AS_1S_2 ; folglich durchläuft dieser eine Hyperbel, wenn t längs der Curve als Tangente gleitet.

Diese Hyperbel geht durch die unendlich fernen Punkte P_1 und P_2 , die Mittelpunkte der beiden Parallel-Strahlenbüschel, und trifft die Geraden t_1 und t_2 in 4 Punkten desjenigen Kreises, auf welchem die Schnittpunkte von je zwei zu einander normalen Tangenten der Curve liegen. Der Geraden von P_1 , welche diesen Punkt mit dem Berührungspunkt T_1 auf der Tangente t_1 verbindet, entspricht in dem andern Büschel die Gerade $\overline{P_2A}$; der Schnittpunkt dieser beiden zu t_2 und t_1 normalen Geraden ist also auch ein Punkt der Hyperbel. Ebenso erkennt man, dass die durch A gehende Normale zu t_2 von derjenigen Normalen zu t_1 in einem Punkte der Hyperbel geschnitten wird, welche durch den Berührungspunkt T_2 der Tangente t_2 geht. Nennt man ferner B_1 den Punkt, in welchem t_1 von der zu t_2 parallelen Tangente geschnitten wird, und B_2 den Punkt von $-t_2$, durch welchen die zu t_1 parallele Tangente geht, dann entspricht in den beiden Parallel-Strahlenbüscheln der Geraden $\overline{P_1B_1}$ die unendlich ferne Gerade $\overline{P_2P_1}$ und der Geraden $\overline{P_2B_2}$ ebenfalls die unendlich ferne Gerade $\overline{P_1P_2}$. Diese beiden durch B_1 und B_2 zu den Geraden t_2 und t_1 gezogenen Normalen sind also die Asymptoten der Hyperbel.

Entsprechen sich in den beiden projectivischen Punktreihen $t_1(S_1)$ und $t_2(S_2)$ die unendlich fernen Punkte, ist also die vorliegende Curve eine Parabel, dann haben die beiden Parallel-Strahlenbüschel $P_1(\overline{P_1S_1})$ und $P_2(\overline{P_2S_2})$ die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein. In diesem Falle also liegen die Höhenschnittpunkte H der Dreiecke AS_1S_2 auf einer im Endlichen gelegenen und der unendlich fernen Geraden. Weil erstere Gerade auch die Punkte enthält, in welchen t_1 und t_2 von den zu ihnen normalen Parabeltangente geschnitten werden, so ist sie identisch mit der Directrix, und wir kommen stets auf diese Gerade, von welchem

Punkte auch die Tangenten t_1 und t_2 an die Parabel gehen mögen. Schliesslich sei noch bemerkt, dass sich für jede Curve II. O. der Ort der Höhenschnittpunkte auf den Punkt A reducirt, falls t_1 und t_2 einen Winkel von 90° einschliessen.

Wir können nun als Zusammenfassung der vorhergehenden Ausführungen folgenden Satz aufstellen:

„Die Höhenschnittpunkte der Tangentendreiecke, welche von zwei festen und einer beweglichen Tangente einer Curve II. O. gebildet werden, liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten normal zu den festen Tangenten stehen. — Diese Hyperbel zerfällt in die Directrix und die unendlich ferne Gerade, falls die Curve II. O. eine Parabel ist. Sie reducirt sich auf einen Punkt, wenn die festen Tangenten einen rechten Winkel bilden.“

Gewöhnlich wird als Ort der Höhenschnittpunkte der Tangentendreiecke einer Parabel nur die Directrix erwähnt; aus der Ableitung des vorhergehenden Satzes, sowie auch aus der geometrischen Anschauung geht jedoch hervor, dass auch die unendlich ferne Gerade zu diesem Orte gezählt werden muss. Weil nämlich der unendlich fernen Geraden keine bestimmte Richtung zukommt, so kann sie bei unendlich ferner Lage von S_1 und S_2 sowol als Höhe zu der Tangente t_1 als auch als Höhe zu t_2 angesehen werden, jeder ihrer Punkte also als Höhenschnittpunkt des von t_1 , t_2 und der unendlich fernen Geraden gebildeten Tangentendreiecks aufgefasst werden.

II. Der Mittelpunkt des Umkreises.

In dem Dreieck AS_1S_2 sei M_1 der Mittelpunkt der Seite AS_1 und M_2 der Mittelpunkt der Seite AS_2 . Dann entspricht auf t_1 jedem Punkt S_1 ein Punkt M_1 und ebenso auf t_2 jedem Punkte S_2 ein Punkt M_2 , und es lässt sich leicht einsehen, dass diese Beziehung eine projectivische ist. Denkt man sich nämlich die Punktreihe $t_1(M_1)$ um A in die Lage irgend einer andern Geraden t_1' gedreht, dann sind die Verbindungsgeraden der Punkte M_1 auf t_1' mit ihren entsprechenden Punkten S_1 auf t_1 alle zu einander parallel; folglich ist $t_1'(M_1)$ perspectivisch zu $t_1(S_1)$ und daher auch $t_1(M_1)$ projectivisch zu $t_1(S_1)$ ¹⁾. Ebenso überzeugt man sich, dass die beiden Punktreihen $t_2(M_2)$ und $t_2(S_2)$ zu einander in projectivischer Beziehung

1) In ganz ähnlicher Weise kann man zeigen, dass auch die Punkte, welche die Strecken AS_1 in einem constanten Verhältnis teilen, eine zu $t_1(S_1)$ projectivische Punktreihe bilden.

stehen, Da nun aber die Punktreihen $t_1(S_1)$ und $t_2(S_2)$ selbst zu einander projectivisch sind, so gilt dies auch von den Punktreihen $t_1(M_1)$ und $t_2(M_2)$ und daher weiter von den beiden Parallel-Strahlenbüschelein, welche $t_1(M_1)$ und $t_2(M_2)$ aus den unendlich fernen und in normaler Richtung zu t_1 und t_2 gelegenen Punkten Q_1 und Q_2 projectiviren. Der Schnittpunkt M je zweier entsprechenden Strahlen dieser Büschel ist der Mittelpunkt des einem Dreieck AS_1S_2 umgeschriebenen Kreises, und wir erkennen jetzt, dass sich M auf einer Hyperbel bewegt, wenn t den der Curve zugehörigen Strahlenbüschel II. O. durchläuft. Für den Fall der Parabel haben die beiden Parallel-Strahlenbüschel wieder die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein, folglich erhält man als Ort für M die unendlich ferne und eine im Endlichen gelegene Gerade. Wir können also bis jetzt folgendes Ergebniss aussprechen:

„Die Mittelpunkte der Umkreise aller Dreiecke, welche von zwei festen und einer beweglichen Tangente einer Curve II. O. gebildet werden, liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten normal zu den festen Tangenten sind. — Diese Hyperbel zerfällt in die unendlich ferne und eine im Endlichen gelegene Gerade, wenn die Curve eine Parabel ist.“

In letzterm Falle haben alle durch die Ecken der Tangendendreiecke AS_1S_2 gelegten Kreise ausser A noch einen zweiten Punkt gemeinsam. Nennen wir denselben F , dann ist

$$\text{Wkl. } S_1FS_2 = 2R - \text{Wkl.}(t_1t_2)$$

als constant, folglich ist F der Brennpunkt der Parabel. Damit sind wir zu einem bekannten Parabelsatz gekommen, aus welchem umgekehrt der zweite Teil des vorhergehenden Satzes folgt.

Zu jedem Punkte A gehört bei gegebener Parabel eine bestimmte Gerade m , auf welcher die Mittelpunkte M der den Dreiecken AS_1S_2 umgeschriebenen Kreise liegen. Am einfachsten construirt man dieselbe, indem man A mit dem Brennpunkte F verbindet und dann die die Strecke AF halbirende Normale zieht. Sind die Berührungspunkte T_1 und T_2 der beiden Tangenten t_1 und t_2 bekannt, dann kann man auch m in folgender Weise bestimmen. Man zieht durch A die Normale zu t_1 und bringt sie zum Durchschnitt mit derjenigen Normalen von t_2 , welche die Strecke AF_2 halbirt; ebenso errichtet man in A zu t_2 die Normale und durchschneidet sie mit der die Strecke AT_1 halbirenden Normalen. Die Verbindungsgerade dieser beiden Schnittpunkte ist alsdann die Gerade m . Von der Richtigkeit dieser Construction überzeugt man sich leicht, wenn man die veränderliche Tangente t mit t_1 und t_2 zu-

sammenfallen lässt. Mit derselben haben wir übrigens zugleich eine einfache Lösung der Aufgabe: „Den Brennpunkt einer Parabel zu bestimmen, wenn 2 Tangenten und ihre Berührungspunkte gegeben sind“.

Liegt A auf der Hauptachse der Parabel symmetrisch zu dem Brennpunkt bezüglich der Directrix, dann fällt m mit dieser Geraden zusammen, und die Tangenten t_1 und t_2 bilden einen Winkel von 60° mit einander.

Im Anschluss hieran wollen wir untersuchen, ob bei einer allgemeinen Curve II. O. die beiden Hyperbeln h und m sich vereinigen können, auf denen die Höhenschnitte und die Mittelpunkte der Umkreise von den Dreiecken AS_1S_2 liegen. Zu diesem Zwecke beachten wir zunächst, dass die unendlich fernen und in normaler Richtung zu t_1 und t_2 gelegenen Curvenpunkte Q_1 und Q_2 von der Hyperbel stets mit den unendlich fernen Punkten P_2 und P_1 der Hyperbel h zusammenfallen.

Die Asymptoten der letztern Curve gehen durch B_1 und B_2 , die beiden gegenüberliegenden Eckpunkte des von t_1 und t_2 und ihren parallelen Tangenten gebildeten Parallelogramms; die Asymptoten der Hyperbel m hingegen halbiren die Strecken AB_2 und AB_1 . Eine Vereinigung der beiden Asymptotenpaare kann also nur eintreten, wenn

$$\text{Wkl. } (t_1 t_2) = 60^\circ$$

und zugleich

$$AB_1 = AB_2$$

ist, also A auf einer Achse der gegebenen Curve liegt. In diesem Falle gibt es aber unter den Dreiecken AS_1S_2 zwei gleichseitige, und folglich haben die beiden Hyperbeln ausser den Asymptoten auch noch zwei im Endlichen gelegene Punkte gemein, das heisst, sie fallen ganz zusammen. Wir können also sagen:

„Schneiden sich zwei einen Winkel von 60° einschliessenden Tangenten einer Curve II. O. auf einer Achse derselben, dann liegen die Höhenschnittpunkte und die Mittelpunkte der Umkreise der von diesen Tangenten mit den übrigen gebildeten Dreiecke auf ein und derselben Hyperbel“.

In den beiden Hyperbeln h und m , welche durch irgend zwei in einem Punkte A sich schneidende Tangenten t_1 und t_2 eine Curve II. O. bestimmt sind, können wir je zwei Punkte H und M einander zuordnen, welche merkwürdige Punkte desselben Dreiecks AS_1S_2 sind. Es lässt sich dann zeigen, dass die Punktreihen II. O. $h(H)$ und $m(M)$ zu einander in projectivischer Beziehung stehen. Da

nämlich die Punktreihe $t_1(S_1)$ perspectivisch zu dem Parallel-Strahlenbündel $P_1(\overline{P_1S_1})$ ist und dieser perspectivische Lage mit der Punktreihe II. O. $h(H)$ hat, so ist auch $t_1(S_1)$ projectivisch zu $h(H)$. In ähnlicher Weise überzeugt man sich, dass auch $t_1(S_1)$ und $m(M)$ projectivisch sind. Aus beiden Beziehungen folgt aber, dass $h(H)$ zu $m(M)$ projectivisch ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wenn nun Winkel (t_1t_2) ¹⁾ mehr oder weniger als 60° oder 120° beträgt, dann gibt es kein Dreieck AS_1S_2 , dessen Höhenschnittpunkt zugleich Mittelpunkt des Umkreises ist. Die beiden projectivischen Hyperbeln haben also im allgemeinen keine Punkte entsprechend gemein, folglich ²⁾ bilden die Geraden \overline{HM} , welche die Euler'schen Geraden des Dreiecks AS_1S_2 sind, einen Strahlenbündel IV. O. In der unendlich fernen Geraden liegen zwei dieser Strahlen, da den unendlich fernen Punkten der einen Hyperbel dieselben unendlich fernen Punkte der andern aber in umgekehrter Reihenfolge entsprechen. Ist aber

$$\text{Wkl. } (t_1t_2) \text{ } ^2) = 60^\circ \quad \text{oder} \quad = 120^\circ$$

dann gibt es unter der Schaar von Tangentendreiecken zwei gleichseitige, und mithin haben alsdann h und m 2 im Endlichen gelegene Punkte K und L entsprechend gemein. Ausser den beiden Strahlenbündeln I. O. mit den Mittelpunkten K und L erhält man also noch einen Strahlenbündel II. O. Da aber die unendlich ferne Gerade 2 Strahlen des Bündels enthält, so gehen durch einen Punkt, in welchem sie von einem andern Strahle geschnitten wird, drei und folglich unendlich viele Strahlen des Bündels. Schneidet ein Strahl \overline{HM} die beiden Curven zum zweiten Male in den Punkten H' und M' , so sind auch diese Punkte einander entsprechend, und somit sehen wir, dass der Strahlenbündel II. O. in einen Parallel-Strahlenbündel zerfällt, in welchem jeder Strahl doppelt gezählt werden kann.

Um die Richtung der Strahlen zu bestimmen, betrachten wir dasjenige Dreieck AS_1S_2 , welches bei S_1 einen rechten Winkel hat. In diesem ist die Gerade, welche S_1 mit der Mitte der Hypotenuse AS_2 verbindet, die Euler'sche Gerade und sie steht senkrecht zu der Halbierungslinie des 60° betragenden Winkels (t_1t_2) .

Folglich stehen alle Euler'schen Geraden der Dreiecke AS_1S_2 senkrecht zu dieser Halbierungslinie, und wir haben beiläufig folgende Dreieckssätze:

1) Unter Wkl. (t_1t_2) wollen wir denjenigen Winkel der beiden Tangenten verstehen, innerhalb dessen Schenkel die Curve liegt.

2) Reye, Geom. d. Lage. II. Aufl. S. 116.

„Die Euler'sche Gerade jedes Dreiecks, welches einen Winkel von 60° enthält, ist normal zu der Halbierungslinie dieses Winkels.“

„Die Euler'sche Gerade jedes Dreiecks, welches einen Winkel von 120° enthält, ist parallel zu der Halbierungslinie dieses Winkels.“

Liegen, um diesen Fall noch zu erwähnen, die beiden Hyperbeln h und m auf einander, dann stehen $h(H)$ und $m(M)$ zu einander in involutorischer Beziehung, und die Doppelpunkte dieser Punktreihe sind zugleich die Scheitelpunkte der Hyperbeln.

Bei der Parabel sind die beiden projectivischen Punktfolgen II. O. durch zwei projectivische ähnliche Punktfolgen I. O., h und m , zu ersetzen, von welchen erstere stets auf der Directrix liegt. Daher gilt der Satz:

„Die Euler'schen Geraden aller Tangentendreiecke einer Parabel, welche von zwei festen und einer beweglichen dritten Tangente gebildet werden, umbüllen im allgemeinen eine zweite Parabel, welche auch die Directrix der erstern zur Tangente hat.“

Man erhält einen Strahlenbüschel, wenn A auf der Hauptachse der Parabel liegt, und einen Parallelstrahlenbüschel, wenn A ausserhalb der Hauptachse liegt und zugleich

$$\text{Wkl. } (t_1 t_2) = 60^\circ \text{ oder } = 120^\circ$$

ist. Liegt A auf der Hauptachse, und ist zugleich

$$\text{Wkl. } (t_1 t_2) = 60^\circ$$

dann liegen die beiden projectivischen Punktfolgen auf der Directrix.

III. Der Schwerpunkt.

In dem Dreieck AS_1S_2 werde der Schnittpunkt der Mittellinien S_1M_2 und S_2M_1 mit S bezeichnet. Schneidet dann die durch S gehende Parallele zu t_1 die Gerade t_2 in V_2 und die durch S gehende Parallele zu t_2 die Gerade t_1 in V_1 , dann ist

$$AV_1 = \frac{1}{3}AS_1 \quad \text{und} \quad AV_2 = \frac{1}{3}AS_2$$

Diese Punkte V_1 und V_2 teilen also die veränderlichen Seiten AS_1

und AS_2 in einem constanten Verhältniss, folglich ¹⁾ ist $t_1(V_1)$ projectivisch zu $t_1(S_1)$ und $t_2(V_2)$ projectivisch zu $t_2(S_2)$. Weil aber $t_1(S_1)$ projectivisch zu $t_2(S_2)$ ist, so gilt dies auch von den Punktreihen $t_1(V_1)$ und $t_2(V_2)$ und folglich auch von den beiden Parallelstrahlenbüscheln, welche $t_1(V_1)$ und $t_2(V_2)$ aus den unendlich fernen Punkten R_2 und R_1 der Geraden t_2 und t_1 projiciren. Da nun der Schwerpunkt S des Dreiecks AS_1S_2 als Schnittpunkt von zwei entsprechenden Strahlen dieser beiden Büschel erscheint, so erkennt man, dass er sich auf einer Hyperbel bewegt, wenn t den zur Curve gehörigen Strahlenbüschel II. O. beschreibt. Diese Hyperbel geht durch die unendlich fernen Punkte R_1 und R_2 der Geraden t_1 und t_2 , und ihre Asymptoten teilen die Strecken AB_1 ²⁾ und AB_2 in dem Verhältniss 1 : 2. Für die Parabel erhalten wir als Ort der Schwerpunkte der Dreiecke AS_1S_2 wieder eine eigentliche und die unendlich ferne Gerade.

Wir können also folgenden Satz aufstellen:

„Die Schwerpunkte aller Dreiecke, welche von zwei festen und „einer beweglichen Tangente einer Curve II. O. gebildet werden, „liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten parallel zu den festen „Tangenten sind. — Die Hyperbel zerfällt in eine eigentliche und „die unendlich ferne Gerade, wenn die Curve eine Parabel ist.“

Lässt man t mit den festen Tangenten t_1 und t_2 zusammenfallen, dann erkennt man, dass auch diejenigen Punkte dieser Geraden zu dem Orte gehören, welche die Strecken AT_1 ³⁾ und AT_2 in dem Verhältniss 1 : 2 teilen. Die Gerade, welche bei gegebener Parabel diese beiden Punkte mit einander verbindet, enthält die Schwerpunkte aller eigentlichen Tangentendreiecke AS_1S_2 .

1) Vgl. die Fussbemerkung auf Seite 309.

2) Vgl. S. 308.

3) Vgl. S. 308.

XIV.

Miscellen.

1.

Construction des Schnittes einer Geraden mit einer Hyperbel.

Die Constructionen, welche den Zweck verfolgen, die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem durch gewisse Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitt zu finden ohne den letzteren zu zeichnen, sind zahlreich und sehr mannigfaltig je nach den gegebenen Bestimmungsstücken, und die dabei zur Anwendung gelangenden Gesichtspunkte selbst dementsprechend sehr verschiedener Art. Besonders einfache Lösungen dieser Aufgabe ergeben sich für die Ellipse, wenn von derselben ein Paar conjugirter Durchmesser oder die Axen gegeben sind, indem dann die Ellipse durch einen ihr affin verwandten Kreis ersetzt werden kann. Die Anwendung des Kreises als verwandte Figur des Kegelschnittes kann auch bei der Hyperbel Platz greifen, wenn man dieselbe collinear auf ihn bezieht. Wollte man auch hier statt der Verwandtschaft der Collineation die speciellere der Affinität gebrauchen, so wird der Hyperbel wieder eine solche Curve entsprechen und die Aufgabe nicht vereinfacht erscheinen, wenn man nicht ein einfaches Mittel hat für diesen Fall jetzt, die Schnittpunkte der Geraden die der gegebenen affin entspricht, mit der affinen Hyperbel ohne diese zeichnen zu müssen, anzugeben.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie man mit Benutzung einer der gegebenen affin verwandten die Schnittpunkte einer durch ihre Asymptoten und die Hauptaxe gegebenen Hyperbel und einer Geraden finden kann.

Im 1. Bde. 2. Rh. dieses Journals wurde die Erzeugungsweise der Hyperbel und Ellipse als: „Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an einen Scheitelkreis ¹⁾ und alle, die Asymptoten berührenden Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf der Hauptaxe haben, über welcher der Scheitelkreis beschrieben wurde“, ausführlich erörtert.

Hieraus ergibt sich aber, dass man die Schnittpunkte einer den Scheitelkreis über der reellen Axe einer Hyperbel berührenden Geraden mit dieser sehr einfach finden kann.

Ist, siehe die Figur, g eine den Scheitelkreis A^2 berührende Gerade, von welcher die Schnittpunkte mit der Hyperbel, deren Asymptoten a_1 und a_2 sind, construirt werden sollen, so hat man eben nur jene Kreise zu suchen, welche die Gerade g und die Asymptoten a_1 und a_2 berühren und ihre Mittelpunkte auf der Axe a haben, um in den Berührungspunkten mit g die fraglichen Schnittpunkte zu erhalten. Diese Berührungspunkte lassen sich aber etwa in folgender Art finden. Zunächst findet man die Mittelpunkte O_1 und O_2 der oben genannten berührenden Kreise entweder

- 1) indem man die Winkelhalbirenden $1O_1$ und $1O_2$ der Geraden g und der Asymptote a_1 construirt (oder $2O_1$ und $2O_2$ von g und a_2) oder:
- 2) als Endpunkte des auf der Axe a gelegenen Durchmessers desjenigen Kreises, der seinen Mittelpunkt auf a hat, und welcher durch die Schnittpunkte 1 und 2 von g mit den Asymptoten a_1 und a_2 geht, wie leicht sofort einzusehen ist, da ja die früher erwähnten Winkelhalbirenden senkrecht zu einander stehen. Dass man nur 12 in m zu halbiren und mm_2 senkrecht zu g zu errichten hat, um den Mittelpunkt dieses Kreises zu erhalten, ist selbstverständlich.

Aus den Punkten O_1 und O_2 sind dann die Senkrechten zu g zu legen, um in ihren Fusspunkten I und II die gesuchten Durchschnittpunkte von g mit der Hyperbel zu erhalten.

Auf diesen Fall lässt sich nun der allgemeinere, wo die gegebene Gerade den Scheitelkreis nicht berührt, zurückführen.

Wäre z. B., siehe die Figur, die Gerade γ , und die Hyperbel durch ihre Asymptoten α_1 und α_2 , und den über der Hauptaxe beschriebenen Scheitelkreis A^2 gegeben, und sind ihre gemeinsamen

1) Kreis, der eine der Kegelschnittsaxen zum Durchmesser hat.

Durchschnittspunkte anzugeben, so legt man aus dem Schnittpunkte g von γ und der Axe a eine Tangente g an den Scheitelkreis A^2 und betrachtet diese als affin¹⁾ verwandte zur gegebenen γ . Die Gerade γ schneidet z. B. die Asymptote α_2 in (2), und der affin entsprechende Punkt 2 auf g wird auch ein Punkt der einen Asymptote α_2 jener Hyperbel sein, durch welche die gegebene zu ersetzen ist.

Die gegebene Hyperbel ist nun durch eine andere ihr affin mit demselben Scheitelkreis und den Asymptoten α_1 und α_2 , die sich nach dem Bemerkten sehr einfach ergeben, ersetzt, und die gegebene Gerade durch eine den Scheitelkreis der letztern berührende Gerade, der allgemeine Fall also auf diesen früher besprochenen speciellen zurückgeführt. Nach dem bereits Auseinandergesetzten wird man nun die Punkte I und II auf g construiren und dann mit Hilfe der Senkrechten in diesen Punkten zur Axe a die Punkte (I) und (II) auf γ erhalten, wodurch die allgemeine Aufgabe gelöst erscheint.

Ist die gegebene Gerade parallel der Nebenaxe, so wird die Methode nicht anwendbar sein, aber hiefür sich noch einfachere Constructionen auf Grund der früher angeführten Erzeugungsweise ergeben, die an oben citirter Stelle angegeben erscheinen.

Auch für die Ellipse, wenn diese durch die Hauptaxen gegeben ist, lässt sich das Princip anwenden, indem hier an die Stelle der Asymptoten gewisse leicht aufzufindende Gerade treten; allein angesichts der für diesen Fall existirenden äusserst einfachen Constructionen sind die aus diesem Gesichtspunkte folgenden ohne Bedeutung.

F. Ruth.

2.

Zur Construction der Kegelschnittslinien.

Unter diesem Titel hat Herr K. Schober (Triest) im 1. Hefte, (2. R. VII. T.) die von mir in dieser Zeitschrift (2. R. III. T. S. 108 — 110 und S. 223) veröffentlichten und mittelst analytischer Geometrie bewiesenen Constructionen „durch Specialisirung des Pascal'schen Satzes“ angeblich „naturgemässer“ abgeleitet — wie er es schon in zwei andern Aufsätzen (Ztschrft. f. d. Realschulwesen 12. J. 1887 und Programm d. k. k. Ob. Realschule in Sechshaus bei Wien, 1887)

1) Orthogonale Affinität; der Scheitelkreis bleibt derselbe für jede dieser Art affin verwandte Hyperbel.

getan hat — obgleich er selbst in einem seiner Aufsätze sagt, die analytische Geometrie eigne sich am besten dazu, die Richtigkeit einer gefundenen Construction zu beweisen. Welches Beweisverfahren besser ist, das ist wol meist — Geschmackssache.

Ich zog das analytische vor, trotzdem ich jene Constructionen durch synthetische Untersuchungen gefunden hatte, weil ich glaubte, es sei weiteren Kreisen zugänglich. Das ist übrigens Nebensache; ich bringe nur deshalb den Gegenstand zur Sprache, weil ich von einer Vereinfachung der in Rede stehenden Constructionen Mitteilung machen möchte.

Das früher entwickelte Verfahren wird besonders bei der Ellipse nicht gern angewendet werden, weil man über die Fläche des umschriebenen Parallelogramms $EFGH$ hinausgehen muss; bei nachstehender Construction entfällt nicht nur dieser Uebelstand, sondern man erspart sich auch noch eine Linie.

Sind AB und CD conjugirte Durchmesser einer Ellipse, so schneidet die zu CD parallele Gerade S die AC und AB in Punkten M und Q , welche aus B und D durch Strahlen BM und DQ projicirt werden, die sich in einem Ellipsenpunkte P treffen, dessen Tangente durch den Schnittpunkt L jener Parallelen S mit der Tangente CF in C geht. Bei der Hyperbel ändert sich die Construction nur dahin, dass QP als Parallele zu BC (oder Parallele zur Asymptote FH) zu zeichnen ist, und L auf der zu AC parallelen Asymptote EG liegt.

Ist CD eine conjugirte Sehne, dann ist das Constructionsverfahren für alle drei Kegelschnitte gleich und lautet so, wie es oben für die Ellipse angegeben wurde.

Bei Hyperbel-Constructionen ist oft das Bedürfniss vorhanden, die Tangente unabhängig vom Berührungspunkte zu construiren; wir geben deshalb in Folgendem noch ein Verfahren an, welches diese Bedingung erfüllt und andern gegenüber den Vorteil hat, ein kleines Constructionsfeld zu benötigen.

Es seien wieder AB und CD conjugirte Durchmesser einer Hyperbel, ferner sei $EFGH$ das Parallelogramm mit den Mittellinien AB und CD ; FH und EG sind dann die Asymptoten.

Projicirt man einerseits die Punkte M der Geraden AC aus G auf EF nach R , andererseits durch Parallele S zu CD auf EG nach L , so ist LR eine Hyperbeltangente und ihr Berührungspunkt der Schnitt mit BM oder $QP \parallel FH$.

Die Beweise für alle erwähnten Constructionen können auf mehrere Arten so leicht erbracht werden, dass es überflüssig erscheint, dieselben hier anzuführen.

Pola, im December 1888.

Fr. Schiffner.

3.

Ergänzung des „Beitrags zur Inhaltsrechnung der Körper“
Bd. XXVI. S. 204 des Archivs.

Die Ergänzung betrifft die geometrische Bestimmung des Inhalts eines Körpers, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe x durch

$$f(x) = d \cdot x^2$$

gegeben ist.

Da die Gestalt des Schnittes von keinem Einfluss ist, so soll folgende specielle Anordnung getroffen werden.

In der Figur stehen die Linien OX , OY und OZ senkrecht zu einander.

Die Coordinaten des Punktes C seien x , y und z und dabei:

$$y = \frac{x^2}{p}$$

$$z = d \cdot px$$

die Curve OMB ist also eine Parabel in der xy Ebene.

Das Rechteck $ABCD$ hat zum Inhalt

$$yz = d \cdot x^3$$

Der Inhalt der Pyramide $ABCDO$ ist also: $\frac{1}{3}d \cdot x^4$.

Das Parabelsegment OMB hat zum Inhalt:

$$\frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{6}xy = \frac{1}{6} \frac{x^3}{p}$$

Der Inhalt des prismatischen Körpers von der Höhe z mit der Grundfläche OMB ist daher:

$$\frac{1}{6} \frac{x^3}{p} \cdot z = \frac{1}{6} d \cdot x^4$$

Subtrahirt man die Hälfte dieses Körpers von der Pyramide $ABCDO$, so ergibt sich als Inhalt des Körpers $OMBADCLO$

$$v = \frac{1}{4}d \cdot x^5$$

Die Durchschnittsfläche dieses Körpers in der Höhe x ist $ABCL$, also:

$$f(x) = d \cdot x^3$$

Die Zusammenstellung auf Seite 296 Band 26 wird nun:

Durchschnittsfläche in der Höhe x	Volumen des Körperstücks von der Höhe x
1) a	ax
2) bx	$\frac{1}{2}bx^2$
3) cx^2	$\frac{1}{3}cx^3$
4) dx^3	$\frac{1}{4}dx^4$

und

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad v = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}$$

$$= \frac{x}{6} \left(f(x) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x) \right)$$

Kiel, den 27. Mai 1889.

Ligowski.

4.

Ueber harmonische Reihen ungerader Ordnung.

In der Reihe für $\log \Gamma(1 + \mu)$ treten bekanntlich als Coefficienten die harmonischen Reihen S_n auf, von welchen nur diejenigen gerader Ordnung summierbar sind. Im Folgenden sollen nun für die Reihen S_n mit ungeradem Stellenzeiger — Recursionsformeln aufgestellt werden; sie enthalten zwar auch unendliche Reihen, die aber bedeutend rascher als die ursprünglichen Reihen S_n convergiren.

Diese Transformation wird mit Hilfe der Function $\log \sin \frac{\varphi}{2}$, welche sich auf zweierlei Art in convergente Reihen verwandeln lässt, bewirkt. Es ist gleichzeitig

$$-\log \sin \frac{\varphi}{2} = \log^2 + \frac{\cos \varphi}{1} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \dots, \quad 0 < \varphi < \pi$$

und

$$-\log \sin \frac{\varphi}{2} = -\log \varphi + \log 2 + S_2 \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} S_4 \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4 + \dots$$

$$-2\pi < \varphi < +2\pi$$

daher auch

$$\frac{\cos \varphi}{1} + \frac{\cos \varphi}{2} + \dots = -\log \varphi + S_2 \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} S_4 \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4 + \dots$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \quad 1]$$

Durch wiederholte Integrationen dieser Gleichung entstehen links Ausdrücke, welche für die Werte

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \varphi = \pi$$

entweder in die Potenzreihen $S_{2\nu+1}$ oder

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\nu}} = U_{2\nu}$$

übergehen, jenachdem die Anzahl der Integrationen eine gerade oder ungerade ist.

Die erste Integration zwischen 0 und φ giebt:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^2} = \varphi(1 - \log \varphi) + \frac{S_2}{1(2\pi)^2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} + \frac{S_4}{2(2\pi)^4} \cdot \frac{\varphi^5}{5} + \dots$$

$$0 \leq \varphi < \pi$$

Da rechter Hand $\log \varphi$ vorkommt, sind nur positive Werte von φ zulässig; für $\varphi = \pi$ entsteht ein Widerspruch, endlich convergirt das Integral des Restgliedes von 1] gegen die Null; als Convergencebereich können daher die Werte von incl 0 bis exclusive π angenommen werden.

Aus den weiteren Integrationen zwischen 0 und φ gehen mit Beachtung von $\{\varphi^m \log \varphi\}_{\varphi=0} = 0$ folgende Gleichungen hervor:

$$-\sum \frac{\cos n\varphi}{n^3} + S_3 = \frac{\varphi^2}{2!} (1 + \frac{1}{2} - \log \varphi) + \frac{S_2}{1(2\pi)^2} \frac{\varphi^4}{3 \cdot 4} + \frac{S_4}{2(2\pi)^4} \frac{\varphi^6}{5 \cdot 6} + \dots \quad 1']$$

$$-\sum \frac{\sin n\varphi}{n^4} + S_3 \varphi = \frac{\varphi^3}{3!} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \log \varphi) + \frac{S_2}{1(2\pi)^2} \frac{\varphi^5}{3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$+ \frac{S_4}{2(2\pi)^4} \frac{\varphi^7}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$0 \leq \varphi < \pi$$

Das Bildungsgesetz dieser Formeln ist ein leicht erkennbares; nach $r-1$ Integrationen zwischen 0 und φ ist offenbar, wenn a) r ungerade:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{r-1}{2}} \sum \frac{\cos n\varphi}{n^r} + S_3 \frac{\varphi^{r-3}}{(r-3)!} - S_5 \frac{\varphi^{r-5}}{(r-5)!} + \dots \\ & + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{S_{r-2}\varphi^2}{2!} + (-1)^{\frac{r+1}{2}} S_r = \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} - \log \varphi \right) \\ & + \frac{S_2}{1(2\pi)^2} \frac{2! \varphi^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{4! \varphi^{r+3}}{(r+3)!} + \dots \end{aligned} \quad 2]$$

b) r gerade:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{r+2}{2}} \sum \frac{\sin n\varphi}{n^r} + S_r \frac{\varphi^{r-3}}{(r-3)!} - S_5 \frac{\varphi^{r-5}}{(r-5)!} + \dots \\ & + (-1)^{\frac{r}{2}} S_{r-1} = \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} - \log \varphi \right) \\ & + \frac{S_2}{1(2\pi)^2} \frac{2! \varphi^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{4! \varphi^{r+3}}{(r+3)!} + \dots \end{aligned} \quad 3]$$

Die Substitution $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt, da

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}} \sum \frac{\cos n\varphi}{n^r} + (-1)^{\frac{r+1}{2}} S_r = (-1)^{\frac{r+1}{2}} \frac{2^{2r-1} + 2^{r-1} - 1}{2^{2r-1}} S_r$$

(r ungerade)

und

$$\sum \frac{\sin n\varphi}{n^r} = (-1)^{\frac{r+2}{2}} \left(\frac{1}{1^r} - \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} - + \dots \right) = (-1)^{\frac{r+2}{2}} U_r$$

(r gerade)

ist, folgende Beziehungen zwischen den harmonischen Reihen S_{2r+1} und den Reihen U_{2r} , einerseits und den bekannten Summen S_{2r} andererseits:

$$\begin{aligned} & \frac{S_3}{(r-3)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-3} - \frac{S_5}{(r-5)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-5} + \dots \\ & + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{S_{r-2}}{2!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (-1)^{\frac{r+1}{2}} \frac{2^{2r-1} + 2^{r-1} - 1}{2^{2r-1}} S_r = \\ & \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} - \log \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1} \frac{S_2}{\binom{r+1}{1} 4^3} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{S_4}{\binom{r+3}{4} 4^4} + \dots \right] \end{aligned} \tag{4}$$

(r ungerade)

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{r+2}{2}} U_r + \frac{S_3}{(r-3)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-3} - \frac{S_5}{(r-5)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-5} + \dots \\ & + (-1)^{\frac{r}{2}} S_{r-1} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} - \log \frac{\pi}{2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{1} \frac{S_2}{\binom{r+1}{2} 4^3} + \frac{1}{2} \frac{S_4}{\binom{r+3}{2} 4^4} + \dots \right] \end{aligned} \tag{5}$$

(r gerade)

Da die in den Formeln 4] und 5] auftretende Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{S_{2\nu}}{\binom{r+2\nu-1}{2\nu}} \cdot \frac{1}{4^{2\nu}}$ ungleich rascher als S_r oder U_r convergirt, so kann erstere zur Berechnung der letztern Reihen mit grossem Vorteil angewendet werden.

Die Convergenz der neuen Reihen kann dadurch noch wesentlich erhöht werden, dass zu 1]:

$$\sum \frac{\cos n\varphi}{n} = -\log \varphi + \frac{S_2}{1} \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \frac{S_4}{2} \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4 + \dots$$

die Gleichung

$$0 = -\log \left[1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 \right] - \frac{1}{1} \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4 - \dots$$

addirt wird, woraus entsteht:

$$\sum \frac{\cos n\varphi}{n} = -\log \varphi \left[1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 \right] + \frac{S_2-1}{1} \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \frac{S_4-1}{2} \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4 + \dots \tag{6}$$

Zwischen 0 und φ wiederholt integriert, ergibt zunächst:

$$\begin{aligned}
 -\int_0^{\varphi} \log \left[1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^2 \right] d\varphi &= \frac{\varphi^r}{r!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} - \log \varphi \right) \\
 -\int_0^{\varphi} \log \left[1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^2 \right] d\varphi &= -\int_0^{\varphi} \log \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) d\varphi - \int_0^{\varphi} \log \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) d\varphi \\
 -\int_0^{\varphi} \log \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) d\varphi &= \frac{(2\pi)^r}{r!} \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right)^r \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} - \log \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) \right] \\
 -\int_0^{\varphi} \log \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) d\varphi &= \frac{(-2\pi)^r}{r!} \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^r \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right. \\
 &\quad \left. - \log \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \right]
 \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
 -\int_0^{\varphi} \log \left[1 - \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^2 \right] d\varphi &= \frac{(2\pi)^r}{r!} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right) \left[\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right)^r \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^r \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^r \right] - \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right)^r \log \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) - (-1)^r \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^r \right. \\
 &\quad \left. \times \log \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Nach $r-1$ maliger Integration der Gleichung 6] ist nun

a) r ungerade

$$\begin{aligned}
 \frac{S_3 \varphi^{r-3}}{(r-3)!} - \frac{S_5 \varphi^{r-5}}{(r-5)!} + \dots + (-1)^{\frac{r+1}{2}} S_r + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^r} \\
 - \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} - \log \varphi \right) + \frac{S_2-1}{\binom{r+1}{2}} \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^2 \right. \\
 \left. + \frac{S_4-1}{\binom{r+3}{4}} \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^4 + \dots \right\} + \frac{(2\pi)^{r-1}}{(r-1)!} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} \right) \right. \\
 \times \left[\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{r-1} + \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{r-1} \right] - \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{r-1} \log \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) \\
 \left. - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{r-1} \log \frac{\varphi}{2\pi} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} \right) \left[1 + \frac{2\pi}{\varphi} + 1 \right]^{r-1} + \left(\frac{2\pi}{\varphi} - 1 \right)^{r-1} \right\} \\
 &- \log \varphi - \left(\frac{2\pi}{\varphi} + 1 \right)^{r-1} \log \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) - \left(\frac{2\pi}{\varphi} - 1 \right)^{r-1} \log \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \\
 &+ \frac{S_2 - 1}{\binom{r+1}{2}} \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^2 + \frac{S_4 - 1}{\binom{r+3}{4}} \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^4 + \dots \} \quad 7]
 \end{aligned}$$

b) r gerade

$$\begin{aligned}
 &\frac{S_3 \varphi^{r-3}}{(r-3)!} - \frac{S_5 \varphi^{r-5}}{(r-5)!} + \dots + (-1)^{\frac{r}{2}} S_{r-1} \varphi + (-1)^{\frac{r+2}{2}} \Sigma \frac{\sin n\varphi}{n^r} \\
 &= \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1} \right) \left[1 + \left(\frac{2\pi}{\varphi} + 1 \right)^{r-1} - \left(\frac{2\pi}{\varphi} - 1 \right)^{r-1} \right] \right. \\
 &- \log \varphi - \left(\frac{2\pi}{\varphi} + 1 \right)^{r-1} \log \left(1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) + \left(\frac{2\pi}{\varphi} - 1 \right)^{r-1} \log \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \\
 &\left. + \frac{S_2 - 1}{\binom{r+1}{2}} \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^2 + \frac{S_4 - 1}{\binom{r+3}{4}} \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)^4 + \dots \right\} \quad 8]
 \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Reihen gehen für den speciellen Wert $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wieder in reine Potenzreihen über:

a) r ungerade

$$\begin{aligned}
 &\frac{S_3}{(r-3)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{r-3} - \frac{S_5}{(r-5)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{r-5} + \dots + (-1)^{\frac{r+1}{2}} \frac{S_{r-2}}{2!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \\
 &+ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \frac{2^{2r-1} + 2^{r-1} - 1}{2^{2r-1}} S_r = \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{r-1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \right. \right. \\
 &\left. \left. \dots + \frac{1}{r-1} \right) [1 + 3^{r-1} + 5^{r-1}] - \log \frac{\pi}{2} - 5^{r-1} \log \frac{1}{4} - 3^{r-1} \log \frac{1}{4} \right. \\
 &\left. + \frac{S_2 - 1}{\binom{r+1}{2}} \frac{1}{4^2} + \frac{S_4 - 1}{\binom{r+3}{4}} \frac{1}{4^4} + \dots \right\} \quad 9]
 \end{aligned}$$

b) r gerade

$$\frac{S_3}{(r-3)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{r-3} - \frac{S_5}{(r-5)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{r-5} + \dots + (-1)^{\frac{r}{2}} S_r \frac{\pi}{2} + (-1)^{\frac{r+2}{2}} U_r$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1} \left[(1 - 3^{r-1} + 5^{r-1}) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1}\right) - \log \frac{\pi}{2} \right. \\ \left. + 3^{r-1} \log \frac{3}{4} - 5^{r-1} \log \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \frac{S_2-1}{\binom{r+1}{2}} \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \frac{S_4-1}{\binom{r+3}{4}} \frac{1}{4^4} + \dots \right] \quad 10]$$

Bei Annahme eines grossen r verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen 2] und 3], während der linksseitigen Teile zu den bekannten Sinus- und Cosinus-Reihen führen.

Franz Rogel.

5.

Zahl der Combinationen, die n Steine auf dem Damenbrette von 100 Feldern bilden können.

Wir suchen zunächst die Zahl $C'_{p,q}$ der Combinationen zu bestimmen, die mit p einfachen Steinen und q Damen möglich. Bezeichnen wir mit $C'_{i,p-i}$ die Zahl der Combinationen, die p einfache Steine, worunter i weisse und $(p-i)$ schwarze sich befinden, bilden können, ferner mit $C''_{k,q-k}$ die Zahl der Combinationen, die — bei p auf dem Brette befindlichen Steinen — mit k weissen und $(q-k)$ schwarzen Damen möglich, so haben wir

$$C_{p,q} = \sum_0^p C'_{i,p-i} \cdot \sum_0^q C''_{k,q-k} - (C'_{0,p} \cdot C''_{0,q} + C'_{p,0} \cdot C''_{q,0})$$

Der Klammerausdruck ist von dem Product der beiden Summen abzuziehen, da wir die Fälle auszuschliessen haben, wo sämtliche auf dem Brett befindlichen Steine von derselben Farbe sind.

Indem wir in Betracht ziehen, dass ein einfacher Stein nicht die 5 Endfelder seines Gegners einnehmen kann, haben wir

$$C'_{i,p-i} = \binom{5}{0} \binom{40}{i} \binom{45-i}{p-i} + \binom{5}{1} \binom{40}{i-1} \binom{45-i-1}{p-i} \\ + \binom{5}{2} \binom{40}{i-2} \binom{45-i-2}{p-i} + \dots + \binom{5}{5} \binom{40}{i-5} \binom{45-i-5}{p-i}$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\binom{r+s}{m} = \binom{r}{m} \binom{s}{0} + \binom{r}{m-1} \binom{s}{1} + \binom{r}{m-2} \binom{s}{2} + \\ + \dots + \binom{r}{0} \binom{s}{m} \quad (\alpha)$$

können wir schreiben

$$\begin{aligned}
 C'_{i,p-i} &= \binom{5}{0} \binom{40}{i} \binom{45-i}{p-i} \\
 &+ \binom{5}{1} \binom{40}{i-1} \left[\binom{45-i}{p-i} \binom{1}{0} + \binom{45-i}{p-i-1} \binom{1}{1} \right] \\
 &+ \binom{5}{2} \binom{40}{i-2} \left[\binom{45-i}{p-i} \binom{2}{0} + \binom{45-i}{p-i-1} \binom{2}{1} \right. \\
 &\left. + \binom{45-i}{p-i-2} \binom{2}{2} \right] \\
 &+ \dots \\
 &+ \binom{5}{5} \binom{40}{i-5} \left[\binom{45-i}{p-i} \binom{5}{0} + \binom{45-i}{p-i-1} \binom{5}{1} \right. \\
 &\left. + \binom{45-i}{p-i-2} \binom{5}{2} + \dots + \binom{45-i}{p-i-5} \binom{5}{5} \right] \\
 &= \binom{5}{0} \binom{45-i}{p-i} \left[\binom{40}{i} \binom{5}{0} + \binom{40}{i-1} \binom{5}{1} \right. \\
 &\left. + \binom{40}{i-2} \binom{5}{2} + \dots + \binom{40}{i-5} \binom{5}{5} \right] \\
 &+ \binom{5}{1} \binom{45-i}{p-i-1} \left[\binom{40}{i-1} \binom{4}{0} + \binom{40}{i-2} \binom{4}{1} + \right. \\
 &\left. + \binom{40}{i-3} \binom{4}{2} + \dots + \binom{40}{i-5} \binom{4}{4} \right] \\
 &+ \binom{5}{2} \binom{45-i}{p-i-2} \left[\binom{40}{i-2} \binom{3}{0} + \binom{40}{i-3} \binom{3}{1} + \right. \\
 &\left. + \binom{40}{i-4} \binom{3}{2} + \binom{40}{i-5} \binom{3}{3} \right] \\
 &+ \dots \\
 &+ \binom{5}{5} \binom{45-i}{p-i-5} \binom{40}{i-5}
 \end{aligned}$$

woraus sich mit Hilfe der Beziehung (α ergibt

$$\begin{aligned}
 C'_{i,p-i} &= \binom{5}{0} \binom{45-i}{p-i} \binom{45}{i} + \binom{5}{1} \binom{45-i}{p-i-1} \binom{44}{i-1} \\
 &+ \binom{5}{2} \binom{45-i}{p-i-2} \binom{43}{i-2} + \dots + \binom{5}{5} \binom{45-i}{p-i-5} \binom{40}{i-5}
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\binom{45-i}{p-i-J} \binom{45-J}{i-J} = \frac{(45-i)!}{(p-i-J)! (45-p+J)!} \frac{(45-J)!}{(i-J)! (45-i)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(45-J)!}{(p-2J)!(45-p+J)!} \frac{(p-2J)!}{(i-J)!(p-i-J)!} \\
&= \binom{45-J}{p-2J} \binom{p-2J}{i-J}
\end{aligned} \tag{1}$$

somit

$$\begin{aligned}
C'_{i,p-i} &= \binom{5}{0} \binom{45}{p} \binom{p}{i} + \binom{5}{1} \binom{44}{p-2} \binom{p-2}{i-1} \\
&+ \binom{5}{2} \binom{43}{p-4} \binom{p-4}{i-2} + \dots + \binom{5}{5} \binom{40}{p-10} \binom{p-10}{i-5}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$C'_{0,p} = C'_{p,0} = \binom{5}{0} \binom{45}{p} \binom{p}{0} = \binom{45}{p} \tag{1a}$$

Setzen wir in Gleichung (1) der Reihe nach $i = 0, 1, 2 \dots p$ und addieren, so erhalten wir, da bekanntlich

$$\sum_0^p \binom{p}{i} = 2^p \text{ ist:}$$

$$\begin{aligned}
\sum_0^p C'_{i,p-i} &= \binom{5}{0} \binom{45}{p} 2^p + \binom{5}{1} \binom{44}{p-2} 2^{p-2} \\
&+ \binom{5}{2} \binom{43}{p-4} 2^{p-4} + \dots + \binom{5}{5} \binom{40}{p-10} 2^{p-10}
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\binom{r}{m} &= \binom{5}{0} \binom{r+s}{m} - \binom{s}{1} \binom{r+s-1}{m-1} \\
&+ \binom{s}{2} \binom{r+s-2}{m-2} - + \dots + (-1)^s \binom{s}{s} \binom{r}{m-s}
\end{aligned} \tag{\beta}$$

somit können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\sum C'_{i,p-i} &= \binom{5}{0} 2^p \left[\binom{5}{0} \binom{50}{p} - \binom{5}{1} \binom{49}{p-1} \right. \\
&+ \left. \binom{5}{2} \binom{48}{p-2} - + \dots - \binom{5}{5} \binom{45}{p-5} \right] \\
&+ \binom{5}{1} 2^{p-1} \left[\binom{4}{0} \binom{48}{p-2} - \binom{4}{1} \binom{47}{p-3} \right. \\
&+ \left. \binom{4}{2} \binom{46}{p-5} - \dots + \binom{4}{4} \binom{44}{p-6} \right] \\
&+ \binom{5}{2} 2^{p-4} \left[\binom{3}{0} \binom{46}{p-4} - \binom{3}{1} \binom{45}{p-5} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \binom{3}{2} \binom{44}{p-6} - \binom{3}{3} \binom{43}{p-7} \\
 &+ \dots \\
 &+ \binom{5}{5} 2^{p-10} \binom{40}{p-10} \\
 &= \binom{50}{p} 2^p \binom{5}{0} - \binom{49}{p-1} 2^{p-1} \binom{5}{1} 2 \\
 &+ \binom{48}{p-2} 2^{p-2} \left[\binom{5}{0} \binom{5}{2} 2^2 + \binom{5}{1} \binom{4}{0} 2^0 \right] \\
 &- \binom{47}{p-3} 2^{p-3} \left[\binom{5}{0} \binom{5}{3} 2^3 + \binom{5}{1} \binom{4}{1} 2 \right] \\
 &+ \binom{46}{p-4} 2^{p-4} \left[\binom{5}{0} \binom{5}{4} 2^4 + \binom{5}{1} \binom{4}{2} 2^2 + \binom{5}{2} \binom{3}{0} 2^0 \right] \\
 &- + \dots \\
 &+ \binom{40}{p-10} 2^{p-10} \binom{5}{5}
 \end{aligned}$$

Mit Hinsicht auf die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \binom{2m}{r} &= \binom{m}{0} \binom{m}{r} 2^r + \binom{m}{1} \binom{m-1}{r-2} 2^{r-2} \\
 &+ \binom{m}{2} \binom{m-2}{r-4} 2^{r-4} + \dots \tag{y}
 \end{aligned}$$

ergibt sich schliesslich

$$\begin{aligned}
 \Sigma C'_{i,p-i} &= \binom{10}{0} \binom{50}{p} 2^p - \binom{10}{1} \binom{49}{p-1} 2^{p-1} \\
 &+ \binom{10}{2} \binom{48}{p-2} 2^{p-2} - + \dots + \binom{10}{10} \binom{40}{p-10} 2^{p-10} \tag{2}
 \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned}
 C''_{k,q-k} &= \binom{50-p}{k} \binom{50-p-k}{q-k} \\
 &= \frac{(50-p)!}{k!(50-p-k)!} \frac{(50-p-k)!}{(q-k)!(50-p-q)!} \\
 &= \frac{(50-p)!}{q!(50-p-q)!} \frac{q!}{k!(q-k)!} = \binom{50-p}{q} \binom{q}{k} \tag{3}
 \end{aligned}$$

Insonderheit ist

$$C'_{0,q} = C'_{q,0} = \binom{50-p}{q} \tag{3a}$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$\sum_0^q C''_{k, q-k} = \binom{50-p}{q} 2^q \quad (4)$$

Beachten wir nun, dass

$$\begin{aligned} \binom{50-t}{p-t} \binom{50-p}{q} &= \frac{(50-t)!}{(p-t)!(50-p)!} \frac{(50-p)!}{q!(50-p-q)!} \\ &= \frac{(50-t)!}{(p-q-t)!(50-p-q)!} \frac{(p+q-t)!}{(p-t)!q!} \\ &= \binom{50-t}{p+q-t} \binom{p+q-t}{q} \end{aligned} \quad (*)$$

so gibt die Multiplication der Gleichungen (2) und (4)

$$\begin{aligned} \sum_0^p C' \cdot \sum_0^q C'' &= \binom{10}{0} \binom{50}{p+q} \binom{p+q}{q} 2^{p+q} \\ &- \binom{10}{1} \binom{49}{p+q-1} \binom{p+q-1}{q} 2^{p+q-1} \\ &+ \binom{10}{2} \binom{48}{p+q-2} \binom{p+q-2}{q} 2^{p+q-2} - + \dots \\ &\dots + \binom{10}{10} \binom{40}{p+q-10} \binom{p+q-10}{q} 2^{p+q-10} \end{aligned}$$

Aus Gleichungen (1a) und (3a) folgt

$$C'_{0,p} \cdot C''_{0,q} + C'_{p,0} \cdot C''_{q,0} = 2 \binom{45}{p} \binom{50-p}{q}$$

oder mit Rücksicht auf Beziehung (β):

$$\begin{aligned} C' \cdot C'' + C' \cdot C'' &= 2 \binom{50-p}{q} \left[\binom{5}{0} \binom{50}{p} - \binom{5}{1} \binom{49}{p-1} \right. \\ &+ \binom{5}{2} \binom{48}{p-2} - + \dots - \left. \binom{5}{5} \binom{45}{p-5} \right] \end{aligned}$$

wofür wir unter Beachtung der Beziehung (*) schreiben können:

$$\begin{aligned} 2 \left[\binom{5}{0} \binom{50}{p+q} \binom{p+q}{q} - \binom{5}{1} \binom{49}{p+q-1} \binom{p+q-1}{q} \right. \\ \left. + \binom{5}{2} \binom{48}{p+q-2} \binom{p+q-2}{q} - + \dots - \binom{5}{5} \binom{45}{p+q-5} \binom{p+q-5}{q} \right] \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} C'_{p,q} &= \binom{10}{0} \binom{50}{p+q} \binom{p+q}{q} 2^{p+q} \\ &- \binom{10}{1} \binom{49}{p+q-1} \binom{p+q-1}{q} 2^{p+q-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \binom{10}{2} \binom{48}{p+q-2} \binom{p+q-2}{q} 2^{p+q-2} - + \dots \\
 &\dots + \binom{10}{10} \binom{40}{p+q-10} 2^{p+q-10} \\
 &- 2 \left[\binom{5}{0} \binom{50}{p+q} \binom{p+q}{q} - \binom{5}{1} \binom{49}{p+q-1} \binom{p+q-1}{q} \right. \\
 &+ \binom{5}{2} \binom{48}{p+q-2} \binom{p+q-2}{q} - + \dots \\
 &\left. \dots - \binom{5}{5} \binom{45}{p+q-5} \binom{p+q-5}{q} \right]
 \end{aligned}$$

Setzen wir hierin der Reihe nach $q = 0, 1, 2 \dots n$ und gleichzeitig $p = n, n-1, n-2 \dots 0$, so erhalten wir als Zahl der gesuchten Combinationen

$$\begin{aligned}
 A_n &= \binom{10}{0} \binom{50}{n} 4^n - \binom{10}{1} \binom{49}{n-1} 4^{n-1} \\
 &+ \binom{10}{2} \binom{48}{n-2} 4^{n-2} - + \dots + \binom{10}{10} \binom{40}{n-10} 4^{n-10} \\
 &- 2 \left[\binom{5}{0} \binom{50}{n} 2^n - \binom{5}{1} \binom{49}{n-1} 2^{n-1} \right. \\
 &+ \binom{5}{2} \binom{48}{n-2} 2^{n-2} - + \dots - \left. \binom{5}{5} \binom{45}{n-5} 2^{n-5} \right]
 \end{aligned}$$

Bemerkungen.

Beziehung (α) ergibt sich, wenn wir die beiden Seiten der Identität

$$(1+x)^{r+s} = (1+x)^r (1+x)^s$$

nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und die Coefficienten des Gliedes x^m vergleichen.

In ähnlicher Weise erhalten wir Beziehung (β) aus der Vergleichung der Coefficienten des Gliedes x^m in der Entwicklung von

$$(1-x)^{-(r-m+1)} = (1-x)^{-(r+s-m+1)} (1-x)^s$$

Um die Beziehung (γ) zu beweisen, haben wir

$$\begin{aligned}
 S &= \binom{m}{0} \binom{m}{r} 2^r + \binom{m}{1} \binom{m-1}{r-2} 2^{r-2} \\
 &+ \binom{m}{2} \binom{m-2}{r-4} 2^{r-4} + \dots + \binom{m}{s} \binom{m-s}{r-2s} 2^{r-2s} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{m}{0} \binom{m}{r} \left[\binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \dots + \binom{r}{r} \right] \\
 &+ \binom{m}{1} \binom{m-1}{r-1} \left[\binom{r-2}{0} + \binom{r-2}{1} + \binom{r-2}{2} + \dots + \binom{r-2}{r-2} \right] \\
 &+ \dots \\
 &+ \binom{m}{s} \binom{m-s}{r-2s} \left[\binom{r-2s}{0} + \binom{r-2s}{1} + \binom{r-2s}{2} + \dots + \binom{r-2s}{r-2s} \right] \\
 &+ \dots \\
 &= \binom{m}{0} \binom{m}{r} \binom{r}{0} \\
 &+ \binom{m}{1} \binom{m-1}{r-2} \binom{r-2}{0} + \binom{m}{0} \binom{m}{r} \binom{r}{1} \\
 &+ \binom{m}{2} \binom{m-2}{r-4} \binom{r-4}{0} + \binom{m}{1} \binom{m-1}{r-2} \binom{r-2}{1} + \binom{m}{0} \binom{m}{r} \binom{r}{2} \\
 &+ \dots \\
 &+ \binom{m}{s} \binom{m-s}{r-2s} \binom{r-2s}{0} + \binom{m}{s-1} \binom{m-s+1}{r-2s+2} \binom{r-2s+2}{1} + \dots \\
 &\dots + \binom{m}{s-u} \binom{m-s+u}{r-2s+2u} \binom{r-2s+2u}{u} + \dots \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 &\binom{m}{s-u} \binom{m-s+u}{r-2s+2u} \binom{r-2s+2u}{u} \\
 &= \frac{m!}{(s-u)! (m-s+u)!} \frac{(m-s+u)!}{(r-2s+2u)! (m-r+s-u)!} \frac{(r-2s+2u)!}{u! (r-2s+u)!} \\
 &= \frac{m!}{(r-s)! (m-r+s)!} \frac{(m-r+s)!}{u! (m-r+s-u)!} \frac{(r-s)!}{(s-u)! (r-2s+u)!} \\
 &= \binom{m}{r-s} \binom{m-r+s}{u} \binom{r-s}{s-u}
 \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}
 S &= \binom{m}{r} \binom{m-r}{0} \binom{r}{0} \\
 &+ \binom{m}{r-1} \left[\binom{m-r+1}{0} \binom{r-1}{1} + \binom{m-r+1}{1} \binom{r-1}{0} \right] \\
 &+ \binom{m}{r-2} \left[\binom{m-r+2}{0} \binom{r-2}{2} + \binom{m-r+2}{1} \binom{r-2}{1} \right] \\
 &+ \binom{m-r+2}{2} \binom{r-2}{2} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \binom{m}{r-s} \left[\binom{m-r+s}{0} \binom{r-s}{s} + \binom{m-r+s}{1} \binom{r-s}{s-1} \right. \\
 &+ \left. \binom{m-r+s}{2} \binom{r-s}{s-2} + \dots + \binom{m-r+s}{s} \binom{r-s}{0} \right] \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

oder mit wiederholter Anwendung von (α)

$$\begin{aligned}
 S &= \binom{m}{r} \binom{m}{0} + \binom{m}{r-1} \binom{m}{1} + \binom{m}{r-2} \binom{m}{2} + \dots \\
 &\dots + \binom{m}{r-s} \binom{m}{s} + \dots + \binom{m}{0} \binom{m}{r} \\
 &= \binom{2m}{r} \text{ q. e. d.}
 \end{aligned}$$

Louisville, Juni 1889.

Carl Boecklen.

6.

Bemerkung zum Königinnenproblem.

Wo das Königinnenproblem, d. ist die Aufgabe, 8 Königinnen auf dem Schachbret so zu stellen, dass keine die andere angreift, zur Unterhaltung geübt wird, da ist wol schon öfters bemerkt worden, dass bei jeder Lösung eine gerade Zahl von Königinnen auf Feldern gleicher Farbe steht. Der Grund dieses Umstandes, den ich hier auf Anlass geschehener Nachfrage angebe, ist insofern instructiv, als er sich durch die elementarste Determinantenbetrachtung darbietet.

Von den zweierlei Zügen der Königin kommt nur der Turmzug in Anwendung. Sei daher t_{kh} ein Turm auf dem k ten Felde der h ten Reihe. Entwickelt man die Determinante $|t_{kh}|$ für $k = 1, 2 \dots 8; h = 1, 2 \dots 8$ in ihre $8!$ Terme, so drückt jeder Term eine Aufstellung von 8 Türmen aus, die sich nicht angreifen, weil kein Wert von k und von h zweimal darin vorkommt. Ausserdem ist ersichtlich, dass keine andre Aufstellung der Bedingung genügt, dass mithin jene Terme alle Lösungen des analogen Turmproblems repräsentiren.

Ein Turm steht nun auf weissem oder schwarzem Felde (oder umgekehrt), jenachdem $h+k$ gerade oder ungerade ist. Hiernach gibt der Anfangsterm $t_{11}t_{22} \dots t_{88}$ 8 weisse Felder. Aus diesem

gehen alle andern Terme hervor durch wiederholte Vertauschung zweier Werte von k , z. B. k und k' . Ist nun $k + k'$ gerade, so bleiben die Farben unverändert; ist es ungerade, so wechseln beide betreffenden Türme die Farbe. Folglich kann sich die Anzahl der besetzten Felder gleicher Farbe nur um eine gerade Zahl ändern und bleibt stets gerade.

Hiermit ist der Satz für Türme bewiesen. In einer Stellung aber, wo sich Türme bedrohen, bedrohen sich auch Königinnen; daher können 8 Königinnen nicht auf ungerader Anzahl weisser und schwarzer Felder stehen ohne sich zu bedrohen, w. z. b. w.

Alles Gesagte, mit einziger Ausnahme dessen, was den Haupt- (oder Diagonal-)Term betraf, gilt offenbar auch für n Königinnen, resp. Türmen, auf einem Brete von nn Feldern. Ist n gerade, so ist der Hauptterm in gleichem Falle wie für $n = 8$, und der Satz besteht fort. Ist n ungerade, so gibt es, wie im Hauptterm, in allen Lösungen eine ungerade Anzahl Felder von der gemeinsamen Farbe beider Diagonalen, eine gerade Anzahl von der andern, welche aus null parweise durch Permutation entstehen.

R. Hoppe.

7.

Nachträgliche Bemerkung zu Nr. VII.

Wir haben auf Seite 206 d. Teiles gefunden, dass das Konoid

$$r^2 \eta^2 = \zeta^2 (\xi^2 + \eta^2)$$

von dem Kegel

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$$

nach zwei untereinander und mit der Directrix des ersteren congruenten sph. Schleifenlinien geschnitten wird. Hiemit war die Existenz von vier derartigen Schleifenlinien auf diesem Konoide nachgewiesen. Nun kann aber leicht gezeigt werden, dass sich nicht nur deren vier, sondern beliebig viele vorfinden. — Denken wir uns nämlich, es vollführe die Directrix ($x = r \cos u^2$, $y = r \sin u \cos u$, $z = r \sin u$) eine gleichförmige Rotation im negat Sinne um die verticale Axe ($x = \frac{1}{2}r$, $y = 0$), während diese Axe selber gleichzeitig eine ebenfalls gleichförmige Rotation, aber nur mit halber Winkelgeschwindigkeit und im posit. Sinne um die ζ -Axe erleidet, so beschreibt jeder Punkt der Directrix (da deren Grundriss ein durch den Ursprung gehender Kreis $\xi^2 + \eta^2 = r\eta$ ist) nach einem bekannten Satze der Kinematik eine horizontale, die ζ -Axe schneidende Gerade, also eine Erzeugende

unseres Konoides, und folglich finden sich auf dessen Oberfläche unendlich viele sph. Schleifenlinien vor, — es kann durch die ange-deutete zusammengesetzte Bewegung der Directrix erzeugt werden.

Es ist dieses Ergebniss übrigens, wie leicht zu sehen, blos ein Ausfluss eines allgemeinen, für alle geraden Konoide giltigen Satzes, der wie folgt ausgesprochen werden kann: „Alle geraden Kreiscylinder, welche congruente Basen haben, und von denen eine Erzeugende mit der Axe irgend eines gleichfalls geraden Konoides zusammenfällt, schneiden das letztere in congruenten Curven“.

In Bezug auf den vorliegenden Fall ergibt sich demgemäss, dass die Durchdringungscurven aller Kreiscylinder, deren Gleichungen die Form haben

$$\xi^2 + \eta^2 = r(\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)$$

mit dem Konoide

$$r^2 \eta^2 = \zeta^2 (\xi^2 + \eta^2)$$

mit dessen Directrix congruente sph. Schleifenlinien sind, deren Doppelpunkte auf der Abscissenaxe liegen und zwar in der Strecke von $x = -r$ bis $x = +r$. Hieraus folgern wir weiter, dass die Kegel, beziehungsweise Kugeln mit den Gleichungen

$$(\xi - \alpha)^2 + \eta^2 = \zeta^2, \quad \xi^2 + (\eta - \beta)^2 + \zeta^2 = r^2$$

(α, β beide absolut genommen $< r$) aus dem Konoide, desgleichen mit dessen Directrix congruente Schleifenlinien herauschneiden, welche Resultate unschwer analytisch verificirt werden können.

Eduard Janisch.

8.

Zur Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel.

Ist der Torsionswinkel ϑ als Function des Krümmungswinkels τ gegeben, so lässt sich das Problem der Darstellung der Curve bei willkürlich bleibendem Bogen, wie ich in Crelle J. LX. 182. LXIII. 122 und in d. Arch. gezeigt habe, auf die lineare Gleichung 2. Ordn.

$$r'' + i\vartheta' r' + \frac{1}{2}r = 0 \quad (1)$$

zurückführen, wo die Striche die Diff. nach τ bezeichnen, und, wenn f, f', l die Richtungscos. der Tangente, Haupt- und Binormale sind, die Bedeutung von r aus den Annahmen hervorgeht:

$$f \cos \mu + f' \sin \mu = 1 \quad (2)$$

$$f \sin \mu - f' \cos \mu = il \quad (3)$$

$$r' = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu \quad (4)$$

Unabhängig *) hiervon hat nun E. Goursat in den Ann. de la Fac. de Toulouse I. C. dasselbe Problem bei der Annahme

$$f + il = Y^2 \quad (5)$$

gleichfalls auf eine Gleichung 2. Ordn., und zwar für Y zurückgeführt. Es entsteht die Frage, ob sich die complexen r und Y als monodrome Functionen von einander explicite darstellen lassen, so dass beide Differentialgleichungen durch Substitution aus einander hervorgehen. Sei für reelle p, v

$$r = p e^{iv} \quad (6)$$

dann ergibt sich durch Elimination von \mathcal{P}' aus der reellen Doppelgleich. (1) nach Integration:

$$p'^2 + p^2 v'^2 + \frac{1}{4} p^2 = c^2 \quad (\text{constant}) \quad (7)$$

und durch Elimination von v zwischen (6) und (7):

$$(p^2)' - \left(\frac{r'}{r} - \frac{r}{4r'} \right) p^2 = \frac{c^2 r}{r'} \quad (8)$$

Hiernach ist erst p , dann nach Gl. (6) v in r dargestellt. Ferner ist nach Bd. II. S. 421 Gl. (22) $f = p^2 - 1$ und f' bekannt, daher nach Gl. (2) (3) auch l , also nach Gl. (5) Y ausgedrückt als Function von r .

*) Goursat citirt meine oben genannte Arbeit, hat sie aber allem Anschein nach nicht gelesen. Was er (p. 19) als deren Inhalt angibt, kommt gar nicht darin vor. Trotzdem er sie nicht kennt, scheut er sich nicht (p. 1) zu behaupten, sie handle nur einen speciellen Fall des Problems.

R. Hoppe.

XV.

Ueber den Brocard'schen Kreis als
geometrischen Ort und die demselben verwandten
Kegelschnittschaaren.

Von

Andr. Müller.

Die Sätze, welche hier erörtert werden sollen, wurden unter Anwendung barycentrischer Coordinaten gewonnen. Es möge deshalb gestattet sein, auch hier dieses Coordinatensystem, das sich für die vorliegende Frage als ganz besonders geeignet erweist, beizubehalten. Zu diesem Zwecke möge zunächst daran erinnert werden, dass die Lage eines Punktes M in Bezug auf drei feste Punkte A , B , C (Fundamentaldreieck) ausgedrückt wird durch die Gleichung:

$$M = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

oder

$$M \equiv aA + bB + cC$$

wenn a , b und c die Gewichte darstellen, welche man sich in den Punkten A , B und C zu denken hat, damit M den Schwerpunkt jener drei mit den bezüglichen Gewichten belasteten Punkte darstelle ¹⁾.

1) Möbius: Der barycentrische Calcul 1. Abschn. 2. Cap. S. 10, u. ff.
Bellavitis: Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica IV 92 pag. 44.

Denkt man sich ferner den Punkt M mit den Ecken des Fundamentaldreiecks ABC verbunden und diese Geraden bis zum Schnitt mit den Seiten BC in A' , CA in B' , AB in C' verlängert, so verhalten sich auch

$$a : b : c = \frac{A'M}{A'A} : \frac{B'M}{B'B} : \frac{C'M}{C'C}$$

oder auch

$$a : b : c = \triangle BMC : \triangle CMA : \triangle AMB$$

Ferner mögen hier im voraus die im folgenden zur Verwendung gelangenden Formeln zusammengestellt werden. Betrachten wir nämlich zwei Punkte M_1 und M_2 , deren Coordinaten beziehungsweise a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 seien, so müssen die Coordinaten eines dritten Punktes x_1, x_2, x_3 auf der Verbindungslinie derselben die Bedingung erfüllen:

$$1) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir in der Entwicklung dieser Determinante die mit x_1 multiplicirte Unterdeterminante mit α_{12} , die mit x_2 multiplicirte mit β_{12} , die mit x_3 multiplicirte mit γ_{12} und ebenso in einer zweiten und dritten Determinante, welche die durch die Punkte 3, 4, beziehungsweise 5, 6 gehenden Geraden darstellen, die betr. Unterdeterminanten mit α_{34} etc., α_{56} etc., so sind die Schnittpunkt-Coordinationen der beiden ersten Geraden bestimmt durch die Gleichung:

$$2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} \beta_{12} & \gamma_{12} \\ \beta_{34} & \gamma_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \gamma_{12} & \alpha_{12} \\ \gamma_{34} & \alpha_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{34} & \beta_{34} \end{vmatrix}$$

die Bedingung aber, dass die drei Geraden durch denselben Punkt gehen, ist:

$$3) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} & \gamma_{12} \\ \alpha_{34} & \beta_{34} & \gamma_{34} \\ \alpha_{56} & \beta_{56} & \gamma_{56} \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnet man ferner die Länge der Strecken BC, CA, AB bezüglich mit a, b, c , so ist ein Punkt M_1 mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3 auf der dem Dreieck umschriebenen Kreisperipherie gebunden an den Ausdruck

$$M_1 \equiv \frac{Aa}{x_1} + \frac{Bb}{x_2} + \frac{Cc}{x_3}$$

1) Die Ableitung der Formeln 1–4 siehe im Programm des kgl. Gymnasiums zu Kempten v. J. 1889.

und die Gleichung, welche die Coordinaten eines Punktes, der auf der Kreisperipherie liegen soll, erfüllen müssen, ist:

$$4) \quad \frac{a^2}{x_1} + \frac{b^2}{x_2} + \frac{c^2}{x_3} = 0$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns der besonderen, in der Ueberschrift bezeichneten Aufgabe zu.

I.

Das Dreieck, an welches die Untersuchung geknüpft werden soll, und das zugleich als Fundamentaldreieck dient, sei $ABC^1)$, die Segmentärpunkte seien O_2 und O_2' , die Schnittpunkte von BO_2 und CO_2' , dann von CO_2 mit AO_2' , endlich von AO_2 mit BO_2' seien bezüglich $A_2B_2C_2$; dann sind zunächst die Punkte O_2 und O_2' barycentrisch ausgedrückt durch

$$O_2 \equiv \frac{1}{b^2}A + \frac{1}{c^2}B + \frac{1}{a^2}C$$

und

$$O_2' \equiv \frac{1}{c^2}A + \frac{1}{a^2}B + \frac{1}{b^2}C$$

Die Coordinaten des ersten Ausdruckes ergeben sich leicht durch eine elementare Betrachtung. Verbindet man nämlich die Ecken A , B , C mit O_2 und verlängert die Verbindungslinien bis zum Schnitt mit den gegenüber stehenden Seiten in A_α , B_β , C_γ , so findet sich

$$\frac{A_\alpha O_2}{A_\alpha A} = \frac{1}{b^2}; \quad \frac{B_\beta O_2}{B_\beta B} = \frac{1}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{C_\gamma O_2}{C_\gamma C} = \frac{1}{a^2}$$

Die Coordinaten von O_2' ergeben sich ebenso, oder noch einfacher unter Beachtung des Umstandes, dass O_2' der Winkelgegenpunkt von O_2 ist. Aus diesen Coordinaten lassen sich nun die der übrigen in Betracht kommenden Punkte berechnen, wenn man im besonderen Fall nicht etwa anderweitige Erwägungen anstellen will. Für A_2 den Schnittpunkt von BO_2 mit CO_2' sei diese Rechnung hier ausgeführt.

B hat die Coordinaten:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0$$

1) S. den Art.: „Der Brocard'sche Winkel“ von W. Fahrmann im 6. T. der 2. R. dieser Zeitschrift und die demselben beigegebene Figur.

O_2 die Coordinaten:

$$a_2 = \frac{1}{b^2}, \quad b_2 = \frac{1}{c^2}, \quad c_2 = \frac{1}{a^2}$$

ferner C :

$$a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = 1$$

endlich O_2' :

$$a_4 = \frac{1}{c^2}, \quad b_4 = \frac{1}{a^2}, \quad c_4 = \frac{1}{b^2}$$

Also wird nach 2):

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{b^2 c^2} : \frac{1}{a^2 b^2} : \frac{1}{a^2 c^2}$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = a^2 : c^2 : b^2$$

Ebenso findet man für B_2 :

$$x_1 : x_2 : x_3 = c^2 : b^2 : a^2$$

und für C_2 :

$$x_1 : x_2 : x_3 = b^2 : a^2 : c^2$$

Die Anwendung der Formel 3) ergibt nun zunächst folgenden Satz:

Verbindet man homologe Punkte auf den Seiten des Fundamentaldreiecks BC , CA , AB bzw. mit den Punkten A_2 , B_2 , C_2 , so schneiden sich immer je drei derselben in dem nämlichen Punkte.

Unter homologen Punkten sind solche zu verstehen, welche man erhält, wenn man die drei Seiten des Dreiecks der Folge nach im nämlichen Verhältnisse teilt. Teilt nämlich P_α die Seite BC im Verhältniss von $m:n$, so sind die Coordinaten dieses Punktes

$$a_1 = 0, \quad b_1 = n, \quad c_1 = m$$

teilt P_β die Seite CA im Verhältniss $m:n$, so sind dessen Coordinaten:

$$a_3 = m, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = n$$

endlich sind die Coordinaten von P_γ :

$$a_5 = n, \quad b_5 = m, \quad c_5 = 0$$

Die Coordinaten von A_2 , B_2 , C_2 aber sind:

$$a_2 = a^2, \quad b_2 = c^2, \quad c_2 = b^2$$

$$a_4 = c^2, \quad b_4 = b^2, \quad c_4 = a^2$$

$$a_6 = b^2, \quad b_6 = a^2, \quad c_6 = c^2$$

Die Determinante 3) erhält also unter Einführung dieser Werte folgende Form:

$$\Theta = \begin{vmatrix} nb^2 - mc^2, & ma^2, & -na^2 \\ -nb^2, & nc^2 - ma^2, & mb^2 \\ mc^2, & -nc^2, & na^2 - mb^2 \end{vmatrix}$$

Man ersieht aber sofort, wenn man sich die Glieder der einzelnen Columnen addirt denkt, dass $\Theta = 0$ ist.

II.

Diese Schnittpunkte nun liegen sämtlich auf dem Brocard'schen Kreise, daher der weitere Satz:

Der Brocard'sche Kreis ist der geometrische Ort der Schnittpunkte von je drei Geraden, welche man erhält, wenn man homologe Punkte auf den Seiten BC , CA , AB des Dreiecks bzhw. mit den Punkten A_2 , B_2 , C_2 verbindet.

Um den Nachweis dieses Satzes zu liefern, müssen wir zuvor eine Coordinatentransformation ausführen. Die Formel 4) gilt nämlich für die Coordinaten eines Punktes, welcher auf dem Kreise liegt, der dem Fundamentaldreieck umbeschrieben ist. Es muss also $\triangle A_2 B_2 C_2$, um welches bekanntlich der Brocard'sche Kreis beschrieben ist, als Fundamentaldreieck betrachtet werden. Das Verhältniss der Grössen a^2 , b^2 , c^2 in 4) ändert sich dabei nicht, da, (wie sich auch barycentrisch zeigen lässt)

$$\triangle A_2 B_2 C_2 \sim \triangle ABC \text{ ist.}$$

Um aber die Coordinaten irgend eines Punktes auf $A_2 B_2 C_2$ zu beziehen, erinnern wir uns, dass

$$A_2 = \frac{a^2 A + c^2 B + b^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$B_2 = \frac{c^2 A + b^2 B + a^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$C_2 = \frac{b^2 A + a^2 B + c^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bezeichnen wir nun $a^2 + b^2 + c^2$ mit Σ und setzen die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2, & c^2, & b^2 \\ c^2, & b^2, & a^2 \\ b^2, & a^2, & c^2 \end{vmatrix} = a^2 \alpha + c^2 \beta + b^2 \gamma$$

so ist

$$A = \frac{\Sigma}{\Delta} (\alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2)$$

$$B = \frac{\Sigma}{\Delta} (\beta A_2 + \gamma B_2 + \alpha C_2)$$

$$C = \frac{\Sigma}{\Delta} (\gamma A_2 + \alpha B_2 + \beta C_2)$$

Ein Punkt P_α also, welcher BC im Verhältniss von $n : m$ teilt, hat, bezogen auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$, den Ausdruck:

$$P_\alpha \equiv (m\beta + n\gamma)A_2 + (m\gamma + n\alpha)B_2 + (m\alpha + n\beta)C_2$$

Der homologe Punkt P_β auf CA ist ausgedrückt durch

$$P_\beta \equiv (m\gamma + n\alpha)A_2 + (m\alpha + n\beta)B_2 + (m\beta + n\gamma)C_2$$

Endlich ist

$$P_\gamma \equiv (m\alpha + n\beta)A_2 + (m\beta + n\gamma)B_2 + (m\gamma + n\alpha)C_2$$

Verbindet man nun P_α mit A_2 , so hat man in Formel 1):

$$\begin{aligned} a_1 &= m\beta + n\gamma; & b_1 &= m\gamma + n\alpha; & c_1 &= m\alpha + n\beta \\ a_2 &= 1; & b_2 &= 0; & c_2 &= 0 \end{aligned}$$

und irgend ein Punkt auf dieser Geraden genügt also der Gleichung:

$$x_2(m\alpha + n\beta) - x_3(m\gamma + n\alpha) = 0$$

Ebenso genügt ein Punkt auf der Geraden $P_\beta B_2$ der Gleichung:

$$x_1(m\beta + n\gamma) - x_3(m\gamma + n\alpha) = 0$$

Endlich gilt für $P_\gamma C_2$ die Gleichung:

$$(m\beta + n\gamma)x_1 - (m\alpha + n\beta)x_2 = 0$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes je zweier dieser Geraden genügen den beiden betr. Gleichungen. Da sie aber dann auch der dritten Gleichung genügen, so ersieht man auch hieraus, dass die drei Geraden durch denselben Punkt gehen. Für diesen Schnittpunkt ist also:

$$x_1(m\beta + n\gamma) = x_2(m\alpha + n\beta) = x_3(m\gamma + n\alpha)$$

Soll dieser Punkt auch auf dem um $A_2 B_2 C_2$ beschriebenen Kreise liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen:

$$\frac{a^2}{x_1} + \frac{b^2}{x_2} + \frac{c^2}{x_3} = 0$$

Um nun darzutun, dass für denselben diese Gleichung erfüllt ist, multipliciren wir Dividend und Divisor des ersten Quotienten mit $m\beta + n\gamma$, des zweiten mit $m\alpha + n\beta$, des dritten mit $m\gamma + n\alpha$. Dadurch werden alle drei Nenner gleich, und die linke Seite der obigen Gleichung erhält also die Form:

$$a^2(m\beta + n\gamma) + b^2(m\alpha + n\beta) + c^2(m\gamma + n\alpha)$$

oder:

$$m(a^2\beta + b^2\alpha + c^2\gamma) + n(a^2\gamma + b^2\beta + c^2\alpha)$$

oder:

$$m \cdot \begin{vmatrix} b^2 & c^2 & b^2 \\ a^2 & b^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & c^2 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} c^2 & c^2 & b^2 \\ b^2 & b^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

in welcher Summe ersichtlich jeder der beiden Summanden für sich gleich 0 ist. Da also die Gleichung für beliebige m und n erfüllt ist, so ist es selbstverständlich, dass auch die beiden Segmentärpunkte O_2 und O'_2 ($m = 0$ bzw. $n = 0$), ferner der Greve'sche Punkt G_2 ($m + n = 0$), sowie der Punkt M_2' ($m = n$) auf jenem Kreise liegen. Da ferner die obige Gleichung auch für ein negatives m oder n erfüllt ist, so dürfen die homologen Punkte auch auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten gewählt werden.

III.

Die soeben durchgeführten Untersuchungen sind nun nach doppelter Richtung der Verallgemeinerung fähig. Zunächst ist nämlich ersichtlich, dass die analytischen Formeln, welche seither zum Beweise der aufgestellten Sätze Verwendung fanden, auch dann ihre Giltigkeit behalten, wenn an Stelle der Exponenten 2, mit denen die Coordinaten der in Betracht kommenden Punkte versehen waren, irgend eine andere Zahl tritt; des weiteren aber lässt eine genauere Untersuchung erkennen, dass, wenn man den Punkt A_2 mit irgend welchen Punkten auf CA oder AB und entsprechend B_2 und C_2 mit den homologen Punkten auf AB und BC bzw. BC und CA verbindet, sich ähnliche Sätze ergeben, wie die oben abgeleiteten, und dass auch diese Sätze sich wieder verallgemeinern lassen.

Um nun die Untersuchung nach der eben angedeuteten dreifachen Richtung ganz allgemein durchzuführen, gehen wir von drei Punkten aus, welche mit A_m , B_m , C_m bezeichnet seien und durch die Ausdrücke bestimmt sind¹⁾

1) Ueber die Construction dieser Punkte für den Fall, dass m eine ganze Zahl vorstellt, siehe das Programm des kgl. Gymnasiums zu Kempten vom Jahre 1889.

$$A_m \equiv a^m A + c^m B + b^m C$$

$$B_m \equiv c^m A + b^m B + a^m C$$

$$C_m \equiv b^m A + a^m B + c^m C$$

in welchen Ausdrücken m irgend eine positive oder negative Zahl bezeichnet. Verbindet man nun homologe Punkte

1) auf BC mit A_m auf CA mit B_m auf AB mit C_m

2) auf BC mit C_m auf CA mit A_m auf AB mit B_m

3) auf BC mit B_m auf CA mit C_m auf AB mit A_m

so schneiden sich in allen drei Fällen je drei solcher Verbindungslinien in demselben Punkte.

Es seien nämlich die drei Seiten des Coordinatendreiecks im Verhältniss von $q : p$ geteilt, und es werde der Teilungspunkt auf BC mit A_{pq} auf CA mit B_{pq} auf AB mit C_{pq} bezeichnet, dann erscheint der Punkt

$$A_{pq} \equiv pB + qC$$

im ersten Falle mit A_m , im zweiten mit C_m , im dritten mit B_m verbunden. Sind ferner die Punkte

$$B_{pq} \equiv qA + pC$$

und

$$C_{pq} \equiv pA + qB$$

in der oben näher bezeichneten Weise mit den Punkten A_m, B_m, C_m , jeweilig verbunden, und bildet man in jedem der drei Fälle die der Formel 3) entsprechende Determinante, so ergibt sich:

$$1) \begin{vmatrix} pb^m - qc^m, & qa^m, & -pa^m \\ -pb^m, & pc^m - qa^m, & qb^m \\ qc^m, & -pc^m, & pa^m - qb^m \end{vmatrix} = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} -pc^m, & pa^m - qb^m, & qc^m \\ qa^m, & -pa^m, & pb^m - qc^m \\ pc^m - qa^m, & qb^m, & -pb^m \end{vmatrix} = 0$$

$$3) \begin{vmatrix} pa^m - qb^m, & qc^m, & -pc^m \\ -pa^m, & pb^m - qc^m, & qa^m \\ qb^m, & -pb^m, & pc^m - qa^m \end{vmatrix} = 0$$

Es ist also die nämliche Determinante (nur Columnen und Reihen sind cyklisch vertauscht), welche man in den drei Fällen erhält,

und deren Verschwinden die Richtigkeit der obigen Behauptungen erhärtet.

Für die Coordinaten eines Schnittpunktes erhält man in jedem der drei Fälle aus der betr. Determinante den Ausdruck:

$$1) \quad x_2 : x_2 : x_3 = a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pqa^m) : b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pqb^m) \\ : c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pqc^m)$$

$$2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pqb^m) : c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pqc^m) \\ : a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pqa^m)$$

$$3) \quad x_1 : x_2 : x_3 = c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pqc^m) : a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pqa^m) \\ : b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pqb^m)$$

Wie man sieht, treten in den drei Fällen die nämlichen Coordinaten, nur in veränderter Reihenfolge (cyklisch vertauscht) auf.

Setzen wir nun in diesen Ausdrücken, um einige Punkte näher kennen zu lernen, $p = 0$, so wird der Ausdruck für den Schnittpunkt

$$1) \quad Y_1 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

$$2) \quad Y_2 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C$$

$$3) \quad Y_3 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C$$

Der erste Punkt ist zu bezeichnen mit O'_m , der zweite mit G_{-m} , der dritte mit O_m .

Setzen wir $q = 0$, so wird

$$1) \quad Y_1 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C$$

$$2) \quad Y_2 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

$$3) \quad Y_3 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{4}{c^m} C$$

Der erste Punkt ist wieder O_m , der zweite O'_m , der dritte G_{-m} .

Setzen wir $p = q$, verbinden wir also die Mitten der Seiten des Coordinatendreiecks mit den Punkten A_m, B_m, C_m , so wird

- 1) $Y_1 \equiv a^m(b^m + c^m - a^m)A + b^m(a^m + c^m - b^m)B + c^m(a^m + b^m - c^m)C$
- 2) $Y_2 \equiv b^m(a^m + c^m - b^m)A + c^m(a^m + b^m - c^m)B + a^m(b^m + c^m - a^m)C$
- 3) $Y_3 \equiv c^m(a^m + b^m - c^m)A + a^m(b^m + c^m - a^m)B + b^m(a^m + c^m - b^m)C$

Diese Punkte seien bezeichnet bezüglich mit M_{m1} , M_{m2} und M_{m3} .

Setzen wir $q = -p$, ziehen wir also durch die Punkte A_m , B_m , C_m Parallele zu den Seiten des Coordinatendreiecks, so ergibt sich

- 1) $Y_1 \equiv a^m A + b^m B + c^m C$
- 2) $Y_2 \equiv b^m A + c^m B + a^m C$
- 3) $Y_3 \equiv c^m A + a^m B + b^m C$

Diese Punkte sind dann zu bezeichnen mit G_{m1} , G_{m2} und G_{m3} .

Kehren wir nun zu dem allgemeinen Ausdrucke für einen Schnittpunkt dreier entsprechender Verbindungslinien der Punkte A_m , B_m , C_m mit homologen Punkten auf den Seiten des Dreiecks ABC zurück. Derselbe ist für den ersten Fall

$$Y_1 \equiv a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - p q a^m)A + b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - p q b^m)B \\ + c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - p q c^m)C$$

Für den zweiten und dritten Fall sind die Ausdrücke von derselben Form, nur die Coordinaten erscheinen cyclisch um eine bzw. zwei Stellen verschoben. Da aber diese Ausdrücke, falls man m als constant betrachtet, eigentlich nur eine Unbekannte und diese in keiner höheren als in der zweiten Potenz enthalten, so erschliesst man daraus, dass alle in der angegebenen Weise für dasselbe m erhaltenen Schnittpunkte auf Kegelschnitten liegen¹⁾, und dass man für dasselbe m drei solche Kegelschnitte zu unterscheiden hat. Gibt man aber dem m verschiedene Werte, so erhält man drei Scharen von Kegelschnitten.

Um nun noch Näheres über diese Kegelschnitte zu erfahren, transformiren wir die Coordinaten, indem wir das Dreieck $A_m B_m C_m$ als Coordinatendreieck betrachten. Das zu diesem Zwecke einzuschlagende Verfahren ist dasselbe, wie es bereits früher beobachtet wurde. Man entwickelt aus den Ausdrücken für A_m etc. die Werte für A , B und C und setzt diese dann in die im ursprünglichen Coordinatensystem gegebenen Ausdrücke ein. Setzt man nun

1) Möbius, d. b. C. 1. Abschn. § 59.

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a^m & c^m & b^m \\ c^m & b^m & a^m \\ b^m & a^m & c^m \end{vmatrix} = a^m \alpha_m + c^m \beta_m + b^m \gamma_m$$

so wird

$$\begin{aligned} A &\equiv \alpha_m A_m + \beta_m B_m + \gamma_m C_m \\ B &\equiv \beta_m A_m + \gamma_m B_m + \alpha_m C_m \\ C &\equiv \gamma_m A_m + \alpha_m B_m + \beta_m C_m. \end{aligned}$$

Nun überzeugt man sich leicht, dass alle hier in Betracht kommenden Kegelschnitte dem entsprechenden Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben sind. Liegt nämlich ein Punkt auf einem Kegelschnitte, welcher einem Dreiecke umschrieben ist, so müssen die Coordinaten x_1, x_2, x_3 desselben, bezogen auf eben dieses Dreieck, der Gleichung genügen

$$\frac{f}{x_1} + \frac{g}{x_2} + \frac{h}{x_3} = 0 \quad 1)$$

in welcher f, g und h Constante bezeichnen, deren Verhältniss durch zwei weitere Punkte, welche auf dem betreffenden Kegelschnitte liegen, bestimmt werden kann. Wir wählen zur Bestimmung desselben für den ersten Fall die Punkte O_m und O'_m , für den zweiten die Punkte O_m' und G_{-m} , für den dritten die Punkte G_{-m} und O_m , von denen wir oben schon gesehen, dass sie jedesmal auf dem betr. Kegelschnitte liegen.

Zunächst sind nun die Ausdrücke für die Punkte O_m, O'_m und G_{-m} im neuen Coordinatensystem abzuleiten. Da nun im ursprünglichen Coordinatensysteme

$$O_m \equiv a^m c^m A + a^m b^m B + b^m c^m C$$

war, so erhält man nunmehr

$$O_m \equiv (a^m c^m \alpha_m + a^m b^m \beta_m + b^m c^m \gamma_m) A_m + (a^m c^m \beta_m + a^m b^m \gamma_m + b^m c^m \alpha_m) B_m + (a^m c^m \gamma_m + a^m b^m \alpha_m + b^m c^m \beta_m) C_m$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun mit Rücksicht auf die Determinante Δ_m umgestalten. Es ist nämlich auf Grund dieser Determinante

$$c^m \alpha_m + b^m \beta_m + a^m \gamma_m = 0$$

und

$$b^m \alpha_m + a^m \beta_m + c^m \gamma_m = 0$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen ergibt sich

1) Möbius, d. b. C. 3. Abschn. § 250.

$$O_m \equiv (b^m c^m - a^{2m}) \gamma_m A_m + (a^m c^m - b^{2m}) \beta_m B_m + (a^m b^m - c^{2m}) \alpha_m C_m$$

oder endlich

$$O_m \equiv \alpha_m \gamma_m A_m + \beta_m \gamma_m B_m + \alpha_m \beta_m C_m$$

Der Ausdruck für O'_m war im ursprünglichen Coordinatensysteme

$$O'_m \equiv a^m b^m A + b^m c^m B + a^m c^m C$$

Mithin erhält man nunmehr

$$O'_m \equiv (a^m b^m \alpha_m + b^m c^m \beta_m + a^m c^m \gamma_m) A_m + (a^m b^m \beta_m + b^m c^m \gamma_m + a^m c^m \alpha_m) B_m + (a^m b^m \gamma_m + b^m c^m \alpha_m + a^m c^m \beta_m) C_m$$

oder mit Rücksicht auf A_m

$$O'_m \equiv (b^m c^m - a^{2m}) \beta_m A_m + (a^m c^m - b^{2m}) \alpha_m B_m + (a^m b^m - c^m) \gamma_m C_m$$

oder endlich

$$O'_m \equiv \alpha_m \beta_m A_m + \alpha_m \gamma_m B_m + \beta_m \gamma_m C_m$$

Für G_{-m} schliesslich hatte man im ursprünglichen Coordinatensystem

$$G_{-m} = b^m c^m A + a^m c^m B + a^m b^m C$$

folglich erhält man nunmehr

$$G_{-m} \equiv (b^m c^m \alpha_m + a^m c^m \beta_m + a^m b^m \gamma_m) A_m + (b^m c^m \beta_m + a^m c^m \gamma_m + a^m b^m \alpha_m) B_m + (b^m c^m \gamma_m + a^m c^m \alpha_m + a^m b^m \beta_m) C_m$$

oder

$$G_{-m} \equiv (a^m b^m - c^{2m}) \gamma_m A_m + (a^m b^m - c^{2m}) \alpha_m B_m + (a^m c^m - b^{2m}) \alpha_m C_m$$

oder endlich

$$G_{-m} \equiv \beta_m \gamma_m A_m + \beta_m \alpha_m B_m + \gamma_m \alpha_m C_m$$

Wir gehen nun zur Bestimmung der Constanten f , g und h für die drei Kegelschnittschaaren über.

1) Es liegen auf jedem hierher gehörigen Kegelschnitte die Punkte O_m und O'_m , mithin erhält man zur Bestimmung jener Constanten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_m f + \alpha_m g + \gamma_m h &= 0 \\ \gamma_m f + \beta_m g + \alpha_m h &= 0 \end{aligned}$$

Daraus wird

$$f : g : h = (\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) : (\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) : (\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m)$$

Gestaltet man die rechte Seite der Gleichung entsprechend um, so wird

$$f : g : h = a^m : b^m : c^m$$

2) Auf den hieher gehörigen Kegelschnitten liegen die Punkte O'_m und G_{-m} , deshalb hat man:

$$\gamma_m f + \beta_m g + \alpha_m h = 0$$

$$\alpha_m f + \gamma_m g + \beta_m h = 0$$

Man erhält daraus

$$f : g : h = (\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) : (\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m) : (\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m)$$

also

$$f : g : h = c^m : a^m : b^m$$

3) Es liegen auf den Kegelschnitten der dritten Schaar die Punkte G_{-m} und O_m , deshalb hat man

$$\alpha_m f + \gamma_m g + \beta_m h = 0$$

$$\beta_m f + \alpha_m g + \gamma_m h = 0$$

woraus man zieht

$$f : g : h = (\gamma_m^2 - \alpha_m \beta_m) : (\beta_m^2 - \alpha_m \gamma_m) : (\alpha_m^2 - \beta_m \gamma_m)$$

oder umgestaltet

$$f : g : h = b^m : c^m : a^m$$

Dass nun in allen drei Fällen die betr. Schnittpunkte je dreier Geraden auf den so bestimmten Kegelschnitten liegen, ergibt sich in ähnlicher Weise, wie dies oben bezüglich der Punkte, welche auf dem Brocard'schen Kreise liegen, ausgeführt wurde.

1. Für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 irgend eines Punktes auf der Geraden, welche den Punkt A_m mit irgend einem Punkte auf BC , der diese Gerade im Verhältniss $q:p$ teilt, verbindet, hat man in Bezug auf $A_m B_m C_m$ als Coordinatendreieck

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ p\beta_m + q\gamma_m & p\gamma_m + q\alpha_m & p\alpha_m + q\beta_m \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$x_2(p\alpha_m + q\beta_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, welche den entsprechenden Punkt auf CA mit B_m verbindet, hat man

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ p\gamma_m + q\alpha_m & p\alpha_m + q\beta_m & p\beta_m + q\gamma_m \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$x_1(p\beta_m + q\gamma_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Für den Schnittpunkt beider Geraden also hat man

$$x_1(p\beta_m + q\gamma_m) = x_2(p\alpha_m + q\beta_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Soll aber ein Punkt auf einem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen

$$\frac{a^m}{x_1} + \frac{b^m}{x_2} + \frac{c^m}{x_3} = 0$$

welchen Ausdruck man auch so gestalten kann

$$\frac{a^m(p\beta_m + q\gamma_m)}{x_1(p\beta_m + q\gamma_m)} + \frac{b^m(p\alpha_m + q\beta_m)}{x_2(p\alpha_m + q\beta_m)} + \frac{c^m(p\gamma_m + q\alpha_m)}{x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)} = 0$$

Da für den vorliegenden Fall die Divisoren dieser Quotienten gleich sind, so müsste nur von der Summe der Dividenden erwiesen werden, dass sie verschwindet. Dies ist aber in der Tat der Fall, da auf Grund der Determinante \mathcal{A}_m sowol

$$p(a^m\beta_m + b^m\alpha_m + c^m\gamma_m) = 0$$

als auch

$$q(a^m\gamma_m + b^m\beta_m + c^m\alpha_m) = 0$$

ist. Also liegen alle hieher gehörigen Schnittpunkte auf Kegelschnitten, welche den Dreiecken A_m , B_m , C_m umschrieben sind.2. Für die Coordinaten x_1 , x_2 , x_3 irgend eines Punktes auf der Geraden, welche den Punkt A_m mit einem Punkte auf CA verbindet, welcher diese Seite im Verhältniss $q:p$ teilt, hat man in Bezug auf $A_mB_mC_m$:

$$x_2(p\beta_m + q\gamma_m) = x_3(p\alpha_m + q\beta_m)$$

Für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, welche den entsprechenden Punkt auf AB mit B_m verbindet, ergibt sich ferner

$$x_1(p\gamma_m + q\alpha_m) = x_3(p\alpha_m + q\beta_m)$$

Es muss aber für einen Punkt, welcher auf einem zur zweiten Reihe gehörigen Kegelschnitte liegen soll, die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

oder

$$\frac{c^m(p\gamma_m + q\alpha_m)}{x_1(p\gamma_m + q\alpha_m)} + \frac{a^m(p\beta_m + q\gamma_m)}{x_2(p\beta_m + q\gamma_m)} + \frac{b^m(p\alpha_m + q\beta_m)}{x_3(p\alpha_m + q\beta_m)} = 0$$

Auch hier sind für die Schnittpunkte der in Betracht gezogenen Geraden die Divisoren gleich und die Summe der Dividenden auf Grund von Δ_m gleich null.

3. Für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 irgend eines Punktes auf der Geraden; welche den Punkt A_m mit einem Punkte auf der Geraden AB verbindet, welcher diese Gerade im Verhältniss $q:p$ teilt, hat man

$$x_2(p\gamma_m + q\alpha_m) = x_3(p\beta_m + q\gamma_m)$$

Ebenso hat man für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden welche den entsprechenden Punkt auf CA mit C_m verbindet

$$x_1(p\alpha_m + q\beta_m) = x_2(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

so dass auch in diesem Falle

$$\frac{b^m}{x_1} + \frac{c^m}{x_2} + \frac{a^m}{x_3} = 0$$

ist, wovon man sich in derselben Weise wie unter 1. oder 2. überzeugt.

Wir haben also in der Tat für jedes m drei Kegelschnitte, welche alle drei dem Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben sind, und von denen der erste und zweite ausserdem noch den Punkt O'_m , der erste und dritte den Punkt O_m , der zweite und dritte den Punkt G_{-m} gemein haben.

Auf jedem dieser Kegelschnitte können wir nun noch drei merkwürdige Punkte unterscheiden, welche man erhält, wenn man einerseits G_0 mit $A_m B_m C_m$, andererseits die Punkte G_m mit A, B, C verbindet.

1. Verbindet man G_0 mit A_m und G_{m1} mit A , so schneiden sich diese beiden Geraden auf dem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte; ebenso schneiden sich $G_0 B_m$ und $G_{m1} B$ und endlich $G_0 C_m$ und $G_{m1} C$ auf diesem Kegelschnitte.

Verbindet man nämlich G_0 , dessen Coordinaten auch in Bezug auf das Dreieck $A_m B_m C_m$ wieder dieselben sind, wie in Bezug auf ABC , da er auch der Schwerpunkt des Dreiecks $A_m B_m C_m$ ist, mit $A_m(1, 0, 0)$, so wird (Formel 2)

$$\alpha_{12} = 0, \quad \beta_{12} = 1, \quad \gamma_{12} = -1$$

und wenn man ferner den Punkt

$$G_{m1} \equiv (a^m \alpha_m + b^m \beta_m + c^m \gamma_m) A_m + (a^m \beta_m + b^m \gamma_m + c^m \alpha_m) B_m \\ + (a^m \gamma_m + b^m \alpha_m + c^m \beta_m) C_m$$

mit

$$A = \alpha_m A_m + \beta_m B_m + \gamma_m C_m$$

verbindet, so wird

$$\alpha_{34} = b^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) - c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m)$$

$$\beta_{34} = b^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) - c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)$$

$$\gamma_{34} = b^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) - c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m)$$

Man hat mithin für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Schnittpunktes der beiden Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m1} A$

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 = & [b^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) - c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) \\ & + b^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) - c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)] \\ & : [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) - b^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)] : [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) \\ & - b^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)] \end{aligned}$$

Auf Grund der Determinante Δ_m lassen sich diese Ausdrücke umgestalten, so dass man schliesslich hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-a^m) : (b^m + c^m) : (b^m + c^m)$$

Soll nun der Schnittpunkt der beiden Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m1} A$ auf dem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte liegen, so muss man haben

$$\frac{a^m}{x_1} + \frac{b^m}{x_2} + \frac{c^m}{x_3} = 0$$

also

$$-\frac{a^m}{a^m} + \frac{b^m}{b^m + c^m} + \frac{c^m}{b^m + c^m} = 0$$

was offenbar der Fall ist.

Aus der Symmetrie der in Betracht gekommenen Ausdrücke kann man nun schliessen, dass auch die Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m1} B$ einerseits, sowie die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m1} C$ andererseits sich auf dem betr. Kegelschnitte schneiden, und man hat im zweiten Falle für die Coordinaten des Schnittpunktes

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + c^m) : (-b^m) : (a^m + c^m)$$

im letzten Falle aber

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + b^m) : (a^m + b^m) : (-c^m)$$

2. Verbindet man G_0 mit B_m und G_{m2} mit C , so schneiden sich beide Gerade auf dem Kegelschnitte, welcher der zweiten Reihe angehört, ebenso schneiden sich die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m2} A$ und endlich die Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m2} B$ auf diesem Kegelschnitte.

Man erhält, wenn man die Rechnung genau so wie unter 1. durchführt, für den Schnittpunkt der Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m2} C$

$$\alpha_{12} = 1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = -1$$

$$\alpha_{34} = c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \gamma_m - \beta^2_m)$$

$$\beta_{34} = c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$

$$\gamma_{34} = c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) + b^m(\beta_m \gamma_m - \alpha^2_m)$$

Mithin wird

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] : -[c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) \\ &\quad + b^m(\alpha_m \gamma_m - \beta^2_m) + c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) + b^m(\beta_m \gamma_m - \alpha^2_m)] \\ &: [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] \end{aligned}$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m + c^m) : -a^m : b^m + c^m$$

Da nun im vorliegenden Falle für einen Punkt, welcher auf dem betr. Kegelschnitte liegen soll, wie wir oben fanden, die Gleichung erfüllt sein muss

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

so erkennt man, dass der Schnittpunkt der Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m2} C$ auf diesem Kegelschnitte liegt. Es liegt aber auch der Schnittpunkt der Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m2} A$ auf demselben, da für die Coordinaten desselben die Gleichung besteht

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + c^m) : (a^m + c^m) : (-b^m)$$

und endlich liegt der Schnittpunkt der Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m2} B$ auf demselben, da man für jenen hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-c^m) : (a^m + b^m) : (a^m + b^m)$$

3. Verbindet man G_0 mit B_m und G_{m3} mit A , so schneiden sich beide Gerade auf dem betr. Kegelschnitte, welcher der dritten Schaar angehört. Auf diesem schneiden sich aber auch die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m3} B$ einerseits und $G_0 A_m$ und $G_{m3} C$ andererseits. Man hat nämlich für den Schnittpunkt von $G_0 B_m$ mit $G_{m3} A$

$$\alpha_{12} = 1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = -1$$

$$\alpha_{34} = a^m(\gamma^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$

$$\beta_{34} = a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$

$$\gamma_{34} = a^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\gamma_m \beta_m - \alpha^2_m)$$

Es wird also

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= [a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] \\ &: [a^m(\alpha_m \beta_m + \alpha_m \gamma_m - \beta^2_m - \gamma^2_m) + b^m(\alpha^2_m + \beta^2_m - \alpha_m \gamma_m - \beta_m \gamma_m)] \\ &: [a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] \end{aligned}$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + b^m) : (-c^m) : (a^m + b^m)$$

Soll aber der Punkt auf dem Kegelschnitte liegen, so muss für den vorliegenden Fall die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{b^m}{x_1} + \frac{c^m}{x_2} + \frac{a^m}{x_3} = 0$$

was offenbar der Fall ist.

Für den Schnittpunkt von $G_0 C_m$ und $G_{m3} B$ hat man

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m + c^m) : (b^m + c^m) : (-a^m)$$

und für den Schnittpunkt von $G_0 A_m$ und $G_{m3} C$

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-b^m) : (a^m + c^m) : (a^m + c^m)$$

so dass also auch diese beiden Punkte auf dem betr. Kegelschnitte liegen.

Was nun die besondere Form der Kegelschnitte angeht, welche in den drei Fällen in der geschilderten Weise entstehen, so erhält man darüber Aufschluss, wenn man beachtet, dass ein Punkt im Unendlichen liegt, wenn dessen Coordinaten die Gleichung erfüllen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Die Summe der Coordinaten irgend eines Punktes, der auf einem der in Betracht kommenden Kegelschnitte liegt, ist aber in allen drei Fällen dargestellt durch den Ausdruck:

$$a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pqa^m) + b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pqb^m) \\ + c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pqc^m)$$

Unter Beachtung der obigen Bemerkung leitet man daraus leicht die ganz allgemein geltende Formel ab, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sei, je nachdem der Ausdruck

$$a^{2m} + b^{2m} + c^{2m} - 2(a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

ist. Dieser Ausdruck lässt erkennen, dass im allgemeinen für jedes m je nach der Gestalt des Dreiecks alle möglichen Arten von Kegelschnitten auf die geschilderte Art entstehen können. Nur für $m=1$ und für $m=2$ sind die Kegelschnitte immer Ellipsen

Ist nämlich $m=1$, so lautet der obige Ausdruck

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$$

dieser aber ist immer negativ. Man kann nämlich dafür auch setzen

$$(a - b)^2 - c(2a + 2b - c)$$

Nun ist aber $a - b < c$. Setzt man also dafür das grössere c , so wird die obige Differenz grösser, sie ist aber dann immer noch negativ, wie man sofort erkennt, wenn man dieselbe folgendermassen ordnet

$$-2c(a + b - c)$$

da ja $a + b - c$ immer positiv ist.

Ist ferner $m = 2$, so wird wieder der für die Form des Kegelschnitts massgebende Ausdruck

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) < 0$$

Bezeichnet nämlich m_c die Mittellinie zur Seite c des fraglichen Dreiecks, so wird

$$c^4 + (a^2 - b^2)^2 - 2c^2(a^2 + b^2) = c^4 + (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha - b^2)^2 - 2c^2(\frac{1}{2}c^2 + 2m_c^2) = c^2(c - 2b \cos \alpha)^2 - 4c^2m_c^2$$

Unterdrückt man den Factor $4c^2$, so ist der Ausdruck

$$\left(\frac{c}{2} - b \cos \alpha\right)^2 - m_c^2 < 0$$

denn es ist $\frac{c}{2} - b \cos \alpha$ die Kathete, m_c aber die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Hat man für $m = 2$ den Kegelschnitt im Auge, welcher der ersten Schaar angehört, so hätte es des vorstehenden Nachweises nicht bedurft, da für diesen Fall die Formel für den Kreis, deren allgemeine Giltigkeit erwiesen ist, zur Anwendung gelangt, und der fragliche Kegelschnitt mit dem Brocard'schen Kreise identisch ist. Ist $m > 2$ oder $m < 0$, so hängt die Gestalt der entsprechenden Kegelschnitte von dem Verhältnisse der Dreiecksseiten $a : b : c$ ab; so ist z. B. für das rechtwinklige Dreieck, dessen Seiten im Verhältniss von $5 : 4 : 3$ stehen, und für $m = 4$ der Kegelschnitt in den drei Fällen eine Parabel. Es geht nämlich, wie noch bemerkt werden möge, aus der obigen für alle drei Schaaren geltenden Formel hervor, dass die Form des Kegelschnittes in allen drei Fällen für ein bestimmtes m (vom Kreise abgesehen) die nämliche ist.

Was endlich die Mittelpunkte der im Vorhergehenden betrachteten Kegelschnitte angeht, so ist ganz allgemein der Ausdruck für einen derselben

$$Z \equiv f(g+h-f)A + g(f+h-g)B + h(f+g-h)C^1)$$

falls die betr. Constanten des fraglichen Kegelschnittes f , g und h sind. Sind also die Mittelpunkte der ersten Schaar mit Z_{m1} , der zweiten mit Z_{m2} , der dritten mit Z_{m3} bezeichnet, so erhält man

$$Z_{m1} \equiv a^m(b^m+c^m-a^m)A_m + b^m(a^m+c^m-b^m)B_m + c^m(a^m+b^m-c^m)C_m$$

$$Z_{m2} \equiv c^m(a^m+b^m-c^m)A_m + a^m(b^m+c^m-a^m)B_m + b^m(a^m+c^m-b^m)C_m$$

$$Z_{m3} \equiv b^m(a^m+c^m-b^m)A_m + c^m(a^m+b^m-c^m)B_m + a^m(b^m+c^m-a^m)C_m$$

Um diese Punkte mit anderen vergleichen zu können, sollen dieselben auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurückgeführt werden, für welchen Fall für A_m , B_m , C_m wieder ihre Werte in A , B , C zu setzen sind. Führt man dieses aus und reducirt, so erhält man

$$Z_{m1} \equiv a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))A + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))B + c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))C$$

$$Z_{m2} \equiv b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))A + c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))B + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))C$$

$$Z_{m3} \equiv c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))A + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))B + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))C$$

Jeder dieser Punkte Z liegt nun auf der betr. Geraden GM , also z. B. Z_{m2} auf der Geraden $M_{m2}G_{m2}$. Da der Beweis dieser Behauptung in allen drei Fällen derselbe ist, soll er nur für die eben genannte Gerade geführt werden. Die Determinante (Formel 1) nimmt für diesen Fall die Form an

$$\begin{vmatrix} b^m, & c^m, & a^m \\ b^m(a^m+c^m-b^m), & c^m(a^m+b^m-c^m), & a^m(b^m+c^m-a^m) \\ b^m r, & c^m s, & a^m t \end{vmatrix}$$

worin r , s und t die betreffenden Factoren der Coordinaten von Z_{m2} bezeichnen. Hebt man in dieser Determinante die den Columnen gemeinsamen Factoren heraus, multiplicirt sodann die erste Reihe mit $a^m + b^m + c^m$ und subtrahirt dieselbe von der zweiten, so kann man unter Hinweglassung des Factors $-2a^m b^m c^m$ die Determinante so schreiben

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ b^m, & c^m, & a^m \\ r, & s, & t \end{vmatrix}$$

1) Möbius, d. b. C. 3. Abschn. § 267.

Wenn man nun die zweite Reihe mit $a^m + b^m + c^m$ multiplicirt und dieselbe zur dritten addirt, so werden die Glieder der letzten Reihe gleich, wie jene der ersten es sind, so dass also die Determinante verschwindet. Da nun, wie wir oben gesehen haben, die Punkte M_m und G_m auf den betr. Kegelschnitten liegen, die Geraden $M_m G_m$ also Sehnen derselben sind, so erkennt man nunmehr, da ja auch die Mittelpunkte der betr. Kegelschnitte auf diesen Geraden liegen, dass dieselben Durchmesser jener Curven bilden.

IV.

Wir denken uns nun durch die Punkte G Parallele zu den Seiten des Coordinatendreiecks gezogen. Die Schnittpunkte der Parallelen zu AB seien bezeichnet mit L'_m auf BC und J''_m auf AC , die der Parallelen zu AC seien auf $BC: L''_m$ auf $AB: N'_m$, die der Parallelen zu BC endlich seien auf $AC: J'_m$ und auf $AB: N''_m$. Da für jedes m drei verschiedene G zu unterscheiden sind, so ergeben sich achtzehn solcher Schnittpunkte, und es sind entsprechend den G die J , L und N für jeden Fall noch mit den unteren Indices 1, 2 und 3 zu versehen. Unter Hinweglassung der unteren Indices m erhalten wir dann für diese Schnittpunkte die folgenden Ausdrücke:

- 1) $L'_1 \equiv (a^m + b^m)B + c^m C$
 $L''_1 \equiv b^m B + (a^m + c^m)C$
 $J'_1 \equiv a^m A + (b^m + c^m)C$
 $J''_1 \equiv (a^m + b^m)A + c^m C$
 $N'_1 \equiv (a^m + c^m)A + b^m B$
 $N''_1 \equiv a^m A + (b^m + c^m)B$
- 2) $L'_2 \equiv (b^m + c^m)B + a^m C$
 $L''_2 \equiv c^m B + (a^m + b^m)C$
 $J'_2 \equiv b^m A + (a^m + c^m)C$
 $J''_2 \equiv (b^m + c^m)A + a^m C$
 $N'_2 \equiv (a^m + b^m)A + c^m B$
 $N''_2 \equiv b^m A + (a^m + c^m)B$
- 3) $L'_3 \equiv (a^m + c^m)B + b^m C$
 $L''_3 \equiv a^m B + (b^m + c^m)C$
 $J'_3 \equiv c^m A + (a^m + b^m)C$
 $J''_3 \equiv (a^m + c^m)A + b^m C$
 $N'_3 \equiv (b^m + c^m)A + a^m B$
 $N''_3 \equiv c^m A + (a^m + b^m)B$

Was die Herleitung dieser Ausdrücke angeht, so ist dieselbe für die drei Gruppen die nämliche, sie möge daher nur für die zweite Gruppe durchgeführt werden. Wir hatten nämlich für G_{m2} den Ausdruck

$$G_{m2} \equiv b^m A + c^m B + a^m C$$

Es hat also die durch diesen Punkt zu AB gezogene Parallele die Gleichung¹⁾

$$(x_1 + x_2)a^m = x_3(b^m + c^m)$$

für den Schnitt dieser Geraden mit BC hat man zudem noch

$$x_1 = 0$$

mithin wird der Schnittpunkt

$$L_2' \equiv (b^m + c^m)B + a^m C$$

Für den Schnitt der Parallelen mit AC hat man noch

$$x_2 = 0$$

mithin erhält man für den Schnittpunkt

$$J_2'' \equiv (b^m + c^m)A + a^m C$$

Die durch G_{m2} zu AC gezogene Parallele hat die Gleichung

$$(x_1 + x_3)c^m = x_2(a^m + b^m)$$

für den Schnitt dieser mit BC und AB ist zudem

$$x_1 = 0 \quad \text{bzhw.} \quad x_3 = 0$$

mithin wird

$$L_2'' \equiv c^m B + (a^m + b^m)C$$

und

$$N_2' \equiv (a^m + b^m)A + c^m B$$

Die durch G_{m2} zu BC gezogene Parallele endlich hat die Gleichung

$$x_1(a^m + c^m) = (x_2 + x_3)b^m$$

und da für den Schnitt derselben mit AC und AB zudem

$$x_2 = 0 \quad \text{bzhw.} \quad x_3 = 0$$

ist, so erhält man

$$J_2' \equiv b^m A + (a^m + c^m)C$$

und

$$N_2'' \equiv b^m A + (a^m + c^m)B$$

Durch die sechs Punkte jeder der oben aufgestellten Gruppen lässt sich nun immer ein Kegelschnitt legen. Um dieses darzutun,

1) S. Programm des kgl. Gymn. zu Kempten v. J. 1889. I 5a S. 10.

transformiren wir die Coordinaten, indem wir für die erste Gruppe das Dreieck $L_1'J_1'N_1'$ als Coordinatendreieck betrachten. Nun war aber

$$\begin{aligned} L_1' &\equiv (a^m + b^m)B + c^mC \\ J_1' &\equiv a^m A + (b^m + c^m)C \\ N_1' &\equiv (a^m + c^m)A + b^m B \end{aligned}$$

Entwickelt man aus diesen Gleichungen A , B und C , so erhält man

$$\begin{aligned} A &\equiv -b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1' \\ B &\equiv (b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1' \\ C &\equiv a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1' \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die oben für L_1'' , J_1'' , N_1'' gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man

$$\begin{aligned} L_1'' &\equiv b^m[(b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1'] \\ &\quad + (a^m + c^m)[a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1'] \end{aligned}$$

oder nach vorgenommener Reduction

$$L_2'' \equiv b^m(a^m + c^m)L_1' + a^m(a^m + c^m)J_1' - a^{2m}N_1'$$

Ebenso erhält man für

$$\begin{aligned} J_1'' &\equiv (a^m + b^m)[-b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1'] \\ &\quad + c^m[a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1'] \end{aligned}$$

oder reducirt

$$J_1'' = -b^{2m}L_1' + c^m(a^m + b^m)J_1' + b^m(a^m + b^m)N_1'$$

Endlich wird

$$\begin{aligned} N_1'' &\equiv a^m[-b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1'] \\ &\quad + (b^m + c^m)[(b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1'] \end{aligned}$$

oder vereinfacht

$$N_1'' \equiv c^m(b^m + c^m)L_1' - c^{2m}J_1' + a^m(b^m + c^m)N_1'$$

Wir bestimmen nun, wie früher, durch die Punkte L_1'' und J_1'' die Constanten f , g und h des betr. Kegelschnitts. Man erhält zu diesem Behufe die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{f}{a^{2m}} + \frac{g}{b^m(a^m + c^m)} + \frac{h}{a^m(a^m + c^m)} &= 0 \\ \frac{f}{b^m(a^m + b^m)} - \frac{g}{b^{2m}} + \frac{h}{c^m(a^m + b^m)} &= 0 \end{aligned}$$

wenn wir uns in den Ausdrücken für L_1'' und J_1'' die Glieder in der Reihenfolge N_1' , L_1' , J_1' denken. Aus beiden Gleichungen erhält man

$$f \cdot g : h = a^m : b^m : c^m$$

Denkt man sich die Glieder von N_1'' ebenso geordnet, wie jene von L_1'' und J_1'' , so erkennt man aus der Gleichung

$$\frac{a^m}{a^m(b^m + c^m)} + \frac{b^m}{c^m(b^m + c^m)} + \frac{c^m}{c^{2m}} = 0$$

dass auch der Punkt N_1'' auf dem durch die fünf anderen Punkte bestimmten Kegelschnitte liegt.

Da nun die Coordinaten der Punkte der zweiten und dritten Gruppe ganz ähnlich gebildet sind, wie jene der ersten, so dürften wir wol daraus sofort den Schluss ziehen, dass auch die sechs Punkte der zweiten und dritten Gruppe immer auf einem Kegelschnitte liegen. Es soll indes wegen der Werte der Constanten f , g und h in Kürze für die zweite Gruppe dieser Beweis noch durchgeführt werden. Zunächst erhält man hier, ganz so wie oben, bei Transformation der Coordinaten auf das Dreieck $L_2'J_2'N_2'$ für A , B und C die Ausdrücke

$$A \equiv -c^m(a^m + c^m)L_2' + a^m c^m J_2' + (a^m + c^m)(b^m + c^m)N_2'$$

$$B \equiv (a^m + c^m)(a^m + b^m)L_2' - a^m(a^m + b^m)J_2' + a^m b^m N_2'$$

$$C \equiv b^m c^m L_2' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)J_2' - b^m(b^m + c^m)N_2'$$

Des weiteren erhält man im neuen Coordinatensystem

$$J_2'' \equiv (a^m + b^m)c^m L_2' + (a^m + b^m)b^m J_2' - b^{2m}N_2'$$

$$J_2'' \equiv -c^{2m}L_2' + a^m(b^m + c^m)J_2' + c^m(b^m + c^m)N_2'$$

$$N_2'' \equiv a^m(a^m + c^m)L_2' - a^{2m}J_2' + b^m(a^m + c^m)N_2'$$

Benutzt man nun zur Bestimmung der Constanten f , g , h die Punkte L_2'' und J_2'' , indem man deren Ausdrücke in der Reihenfolge L_2' , J_2' , N_2' nimmt, so erhält man

$$\frac{f}{c^m(a^m + b^m)} + \frac{g}{b^m(a^m + b^m)} - \frac{h}{b^{2m}} = 0$$

$$- \frac{f}{c^{2m}} + \frac{g}{a^m(b^m + c^m)} + \frac{h}{c^m(b^m + c^m)} = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = c^m : a^m : b^m$$

und man erhält endlich für den Punkt N_2'' , nachdem dessen Ausdruck wie oben geordnet:

$$\frac{c^m}{a^m(a^m + c^m)} - \frac{a^m}{a^{2m}} + \frac{b^m}{b^m(a^m + c^m)} = 0$$

Für die dritte Kegelschnittschaar, für welche die vorhergehende Ableitung wiederkehren würde, möge nur noch bemerkt werden, dass man, falls man nach Transformation der Coordinaten die Ausdrücke in der Reihenfolge J_3' , N_3' , L_3' nimmt, für die den Kegelschnitt bestimmenden Constanten erhält

$$f : g : h = b^m : c^m : a^m$$

Bestimmen wir nun die Mittelpunkte der drei soeben betrachteten Kegelschnittschaaren, welche einstweilen mit Q_1 , Q_2 , Q_3 bezeichnet werden mögen. Wir erhalten dafür im Coordinatensystem L, J, N nach derselben Regel wie oben:

$$Q_1 \equiv a^m(b^m + c^m - a^m)N_1' + b^m(a^m + c^m - b^m)L_1' + c^m(a^m + b^m - c^m)J_1'$$

$$Q_2 \equiv c^m(a^m + b^m - c^m)L_2' + a^m(b^m + c^m - a^m)J_2' + b^m(a^m + c^m - b^m)N_2'$$

$$Q_3 \equiv b^m(a^m + c^m - b^m)J_3' + c^m(a^m + b^m - c^m)N_3' + a^m(b^m + c^m - a^m)L_3'$$

Geht man nunmehr auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurück, indem man für J, L und N die oben für dieselben aufgestellten Werte in A, B, C setzt, so erhält man nach durchgeführter Reduction die Ausdrücke

$$Q_1 \equiv a^m(2bc^m + a^m(b^m + c^m - a^m))A + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))B + c^m(a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))C$$

$$Q_2 \equiv b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))A + c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))B + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))C$$

$$Q_3 \equiv c^m(2a^m b^m + c^m(a^m + b^m - c^m))A + a^m(2b^m c^m + a^m(b^m + c^m - a^m))B + b^m(2a^m c^m + b^m(a^m + c^m - b^m))C$$

Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit denjenigen, welche oben mit Z bezeichnet wurden, so findet sich, dass dieselben bzhw. identisch sind, d. h. es sind immer zwei Kegelschnitte, welche in beiden Fällen zu derselben Schaar und zu demselben m gehören, concentrisch. Zwei solche zusammengehörige Kegelschnitte sind aber auch ähnlich und in ähnlicher Lage. Dies ergibt sich daraus, dass die Mittelpunkte dreier den beiden Kegelschnitten gemeinsamer Sehnen von verschiedener Richtung zusammenfallen, und dass somit die zwischen die beiden Kegelschnitte fallenden Stücke dieser Sehnen gleich lang sind. Es soll dieses für zwei zusammengehörige Kegelschnitte der beiden ersten Schaaren dargetan werden. Es ist die Mitte der Sehne $J_1' N_1''$, welche die andere Curve in $A_m G_{m1}$ trifft, ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2}[2a^m A + (b^m + c^m)B + (b^m + c^m)C]$$

dies ist aber, wie man sofort sieht, auch die Mitte von $A_m G_{m1}$. Ebenso erhält man sowol für die Mitte von $L_1'' N_1'$ als auch für jene von $B_m G_{m1}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{2}[(a^m + c^m)A + 2b^m B + (a^m + c^m)C]$$

Endlich ergibt sich sowol für die Mitte von $L_1' M_1''$ als für die Mitte von $C_m G_{m1}$ der Ausdruck

$$\frac{1}{2}[(a^m + b^m)A + (a^m + b^m)B + 2c^m C]$$

Die nämlichen Betrachtungen aber führen bei den beiden anderen Kegelschnittschaaren zu denselben Resultaten.

Kempton (Bayern).



XVI.

Ueber das sphärische Polarsystem und seine
Anwendung auf das Tetraeder.

Von

Dr. Karl Theodor Meyer

in Saarbrücken.

Im Raume nehmen wir einen festen Punkt M an und ordnen jedem Punkte P diejenige Ebene π zu, welche normal zu der Geraden \overline{PM} ist und diese in einem Punkte Q so schneidet, dass das Product $PM \cdot MQ$ einen constanten, positiven oder negativen Wert hat. Dann lässt sich zeigen, dass durch diese Zuordnung von Punkten und Ebenen ein räumliches Polarsystem von besonderer Art bestimmt ist¹⁾.

Legen wir nämlich durch den Punkt P eine Ebene α und fällen auf dieselbe von M aus die Normale, welche π in A und die Ebene α selbst in B schneidet, dann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AMQ und PMB , dass $AM \cdot MB = PM \cdot MQ$ ist, dass also die durch P gehende Ebene α dem auf π liegenden Punkte A entspricht. Ist ferner g eine beliebige Gerade durch P , und schneidet die Normalebene aus M zu g diese Gerade in einem Punkte F und die Ebene π in einer Geraden g' , deren Schnittpunkt mit \overline{MF} F' heißen möge, so sehen wir, dass jedem Punkte G von g die zu \overline{GM} normale Ebene γ von g' entspricht, und dass $g(G)$ proj. $g'(\gamma)$ ist. Nennen wir

1) S. auch Reye, synth. Geom. der Kugeln. Leipzig 1879. S. 29.

noch G' den Punkt von g , durch welchen die Ebene γ geht, dann ist in dem Dreieck $GG'F'$ $G'M$ Höhe zu der Seite GF' , folglich geht die dem Punkte G' entsprechende Ebene γ' auch durch G und somit erkennen wir, dass die projectivische Beziehung zwischen $g(G)$ und $g'(\gamma)$ auch eine involutorische ist. Hiermit ist der Beweis für die Behauptung erbracht, dass die oben angegebene Zuordnung von Punkten und Ebenen ein räumliches Polarsystem bestimmt. Es besitzt — und dadurch wird es zu einem besondern — die charakteristische Eigenschaft, dass die Normalen aus den Punkten des Systems auf die entsprechenden Ebenen alle durch einen Punkt gehen, und von ihm so geteilt werden, dass das Product der entstandenen Abschnitte einen constanten Wert hat.

Nähert sich P dem Punkte M , dann entfernt sich π von letzterem Punkte und bei der Vereinigung von P und M wird π zur unendlich fernen Ebene. M ist also der Mittelpunkt des Systems, und folglich entspricht jeder durch M gehenden Ebene der in normaler Richtung unendlich fern gelegene Punkt.

Die Ordnungsfläche des Systems ist nur dann reell und zwar eine Kugelfläche, wenn das constante Product, die Potenz des Systems, negativ ist, M also die Strecke PQ äusserlich teilt. Die Kugel hat M zum Mittelpunkt und die Quadratwurzel aus dem absoluten Werte des Products zum Radius. Wegen dieser Tatsache, dass die Ordnungsfläche des Systems eine reelle oder imaginäre Kugel ist, kann das Polarsystem ein sphärisches genannt werden.

Jedes Poltetraeder des Systems ist von besonderer Art, insofern sich in ihm die 4 Höhen schneiden und zwar im Mittelpunkt des Polarsystems. Diese Tetraeder sind entweder alle spitzwinklig, stumpfwinklig, oder alle rechtwinklig, je nachdem die Potenz des Systems positiv, negativ oder null ist ¹⁾.

Bewegt sich in dem sphärischen Polarsystem P auf einer Fläche II. O. f , dann durchläuft π einen Ebenenbüschel II. O., dessen Einhüllungsfläche f' von besonderer Art ist, je nach der Lage, die M zu f einnimmt. Liegt nämlich M auf f , dann wird f' von der unendlich fernen Ebene berührt, ist also ein elliptisches oder hyper-

1) Auch in diesem Falle kann man noch von einem sphärischen Polarsystem reden. Jedem Punkte P entspricht die zu \overline{PM} normale Ebene von M und jede Ebene, die nicht durch M geht, hat letzteren Punkt zu ihrem Pol. Enthält eine Ebene den Punkt M , dann entspricht ihr jeder Punkt auf ihrer durch M gehenden Normalen. Die Ordnungsfläche reducirt sich auf den Punkt M .

bolisches Paraboloid, je nachdem f eine nicht geradlinige Fläche II. O. oder eine Regelfläche II. O. ist. Ist f eine Kegelfläche II. O., dann wird f' zu einer Parabel, deren Ebene normal zu dem Kegelsstrahl steht, auf welchem der Punkt M liegt. — Nehmen wir zweitens M innerhalb f an und setzen diese Fläche zunächst als krummlinig voraus, dann ist f' ein Ellipsoid. Ist aber f' eine Regel- oder Kegelfläche II. O., dann wird f' zu einem einschaligen Hyperboloid oder zu einer Ellipse. — Für den Fall endlich, dass M ausserhalb f liegt, erhalten wir für f' ein zwei- oder einschaliges Hyperboloid, je nachdem f eine krummlinige Fläche II. O. oder eine Regelfläche II. O. ist. f' geht über in eine Hyperbel, falls f eine Kegelfläche ist. Jeder Kugel f entspricht in dem sphärischen Polarsystem eine Rotationsfläche II. O. f' , welche M zu einem Brennpunkt und die Verbindungsgerade dieses Punktes mit dem Mittelpunkte O der Kugel zur Rotationsachse hat. Nimmt man daher eine Kugel als gegeben an und beachtet, dass in Bezug auf dieselbe das Product der Sehnen- und Secantenabschnitte des Punktes M constant ist, so erkennt man sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Legt man zu den Strahlen eines Punktes in ihren Schnittpunkten mit einer Kugelfläche die Normalebene, so umhüllen diese ein Rotationsellipsoid oder Rotationshyperboloid, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegt¹⁾. Der Punkt ist ein Brennpunkt der Rotationsfläche.“

— Die Tatsache, dass im sphärischen Polarsystem jeder Kugel eine Rotationsfläche II. O. entspricht, gibt uns ein Mittel an die Hand, um die Sätze der Kugel in einfacher Weise auf jene zu übertragen. So hat z. B. der Satz: „Durch 4 Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, ist eine Kugel bestimmt“ — den folgenden zu seinem reciproken:

„Durch 4 Ebenen, von denen keine drei durch eine Gerade gehen, ist eine Rotationsfläche II. O. bestimmt, welche einen bestimmten Punkt zu einem Brennpunkt hat.“

Wir verzichten darauf, andere [Kugelsätze zu übertragen, da dies wenigstens teilweise schon von Salmon in seiner analytischen Geometrie des Raumes geschehen ist, allerdings nur unter der beschränkenden Voraussetzung, dass die Ordnungsfäche des Systems reell ist. Weil einer Curve II. O. in dem sphärischen Polarsystem eine bestimmte Kegelfläche II. O. entspricht, (die supplementär ist

1) Liegt der Punkt auf der Kugelfläche, dann gehen die Normalebene theils durch diesen Punkt, theils durch seinen Gegenpunkt auf der Kugel.

zu der andern Kegelfläche, welche aus dem Punkte M die Curve projicirt), so lassen sich auch zu den Sätzen über die Curven II. O. bestimmte reciproke über die Kegelflächen II. O. bilden. Es möge dies durch ein Beispiel gezeigt werden. Einem Brennpunkt P der Curve II. O. λ entspricht eine Ebene durch den Mittelpunkt O der Kegelfläche, deren Strahlensystem aus der Geraden \overline{OM} durch eine orthogonale Ebeneninvolution projicirt wird. Weil nun eine Curve II. O. 2 Brennpunkte hat, so ergibt sich der Satz:

„Zu jeder durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche II. O. gelegten Geraden gibt es zwei Ebenen von der Art, dass das Strahlensystem „einer jeden derselben aus der Geraden durch eine orthogonale „Ebeneninvolution projicirt wird.“

Weil ferner die Verbindungsgerade der beiden Brennpunkte durch den Pol der unendlich fernen Geraden von λ geht, so folgt weiter:

„Jene beiden Ebenen schneiden sich auf der Polarebene der „Geraden.“

Man sieht leicht, wie mit Hilfe der Curve II. O. die Ebenen construirt werden können.

Auch auf diese Uebertragungen wollen wir hier nicht weiter eingehen, sondern uns nunmehr zu dem Tetraeder wenden, um von demselben mittelst des sphärischen Polarsystems eine Reihe von Sätzen abzuleiten, die noch nicht alle bekannt sein dürften.

I. Das allgemeine Tetraeder.

Die Eckpunkte eines Tetraeders mögen mit A, B, C, D und die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden. Ferner seien in den bezüglich eines sphärischen Polarsystems reciproken Tetraeder $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die den Eckpunkten des erstern entsprechenden Seiten und A', B', C', D' die den Seiten des erstern entsprechenden Eckpunkte.

Ziehen wir nun im Tetraeder $ABCD$ die Höhe aus A zu α , so hat dieselbe im reciproken Tetraeder $A'B'C'D'$ als entsprechendes Element diejenige Gerade von α' , durch welche die Normalebene des Punktes M ¹⁾ zu der Geraden $\overline{MA'}$ geht. Da nämlich A' der Ebene α entspricht, so ist die Gerade $\overline{MA'}$ normal zu α , also parallel zu der Höhe durch A und mithin auch normal zu der Ebene, welche

1) M wie oben Mittelpunkt des Systems.

die jener Höhe entsprechende Gerade enthält. Da nun bei dem allgemeinen Tetraeder die 4 Höhen auf einer Regelschaar liegen, weil sie von den Normalen der Seitenflächen, welche durch die Höhenschnittpunkte der letzteren gehen, getroffen werden, so folgt:

„Legt man durch einen Punkt die Normalebenen zu seinen Verbindungsgeraden mit den Eckpunkten eines Tetraeders, so schneiden dieselben die gegenüberliegenden Seiten in 4 Geraden einer Regelschaar.“

Diese 4 Geraden können in einem besondern Falle zu zwei Paaren in zwei Ebenen und in einem noch besonderen in einer Ebene liegen. Dies folgt daraus, dass die Höhen des Tetraeders mit 2 zu einander normalen Gegenkanten zwei Paare sich schneidender Geraden bilden, und dass die Höhen des Tetraeders mit 2 Paar normaler Gegenkanten alle durch einen Punkt, den Höhenschnittpunkt des Tetraeders, gehen.

Da den Eckpunkten A und B des ersten Tetraeders die Seiten α' , β' des zweiten entsprechen, so entspricht dem unendlich fernen Punkte P_∞ auf der Geraden \overline{AB} diejenige (zu \overline{AB}) normale Ebene, welche M mit der Geraden $\overline{\alpha'\beta'}$ verbindet. Weil ferner der Mittelpunkt M_1 der Kante AB von dem unendlich fernen Punkte P_∞ durch A und B harmonisch getrennt ist, so ist auch die entsprechende Ebene μ' harmonisch getrennt von M durch α' und β' . Verbinden wir nun den Punkt M_1 mit der gegenüberliegenden Kante CD durch eine Ebene — die Mittelebene der letztern Kante —, so entspricht derselben in dem reciproken Tetraeder der Punkt, in welchem μ' von der Kante $\overline{\gamma'\delta'}$ getroffen wird, und da bekanntlich die 6 Mittelebenen eines Tetraeders durch einen Punkt, den Schwerpunkt S desselben, gehen, wobei sie sich 4 mal zu dreien in einer Geraden schneiden, so führt uns das sphärische Polarsystem zu folgendem Satze:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die durch die Seiten derselben von einem festen Punkt M harmonisch getrennte Ebene und bringt sie zum Durchschnitt mit der gegenüberliegenden Kante, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, welche 4 mal zu dreien in einer Geraden liegen.“

Die Ebene soll gemäss der Bezeichnungsweise bei dem entsprechenden Satze über das Dreieck die Harmonikalebene des Punktes M genannt werden, und sie werde, weil sie dem Schwerpunkt S entspricht, mit s bezeichnet.

Durch reciproke Uebertragung des letzten Satzes erhalten wir weiter den folgenden:

„Bestimmt man auf jeder Kante eines Tetraeders den Punkt, welcher durch die Eckpunkte von einer festen Ebene harmonisch getrennt ist, und verbindet denselben mit der gegenüberliegenden Kante, so erhält man 6 Ebenen eines Punktes, welche 4 mal zu dreien durch eine Gerade gehen.“

In diesem Satze ist auch der von dem Schnittpunkte der 6 Mittelebenen eines Tetraeders enthalten, und somit erkennen wir, wie uns das sphärische Polarsystem von einem nur für einen besondern Fall gültigen Satze sofort zu dem allgemein gültigen geführt hat.

Bewegen wir nun das Tetraeder $ABCD$ so lange im Raume bis sein Schwerpunkt S mit dem Mittelpunkte M des sphärischen Polarsystems zusammenfällt, dann rückt die Harmonikalebene s des Punktes M in Bezug auf das reciproke Tetraeder $A'B'C'D'$ in die unendliche Ferne, und folglich ist letzterer mit S vereinigter Punkt auch Schwerpunkt des Tetraeders $A'B'C'D'$. Wir haben also für das sphärische Polarsystem den Satz:

„Fällt der Schwerpunkt eines Tetraeders mit dem Mittelpunkte eines sphärischen Polarsystems zusammen, so vereinigt sich mit letzterem Punkte auch der Schwerpunkt des reciproken Tetraeders.“

Legt man also zu jeder Schwerlinie eines Tetraeders die Ebene, welche die Strecke zwischen dem Eckpunkte und dem Schwerpunkte in 2 Abschnitte von constantem Producte teilt, so erhält man ein zweites Tetraeder, welches mit dem ersteren den Schwerpunkt gemeinsam hat und zu ihm reciprok in Bezug auf ein sphärisches Polarsystem ist. Zugleich erkennt man jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Die Normalebene der Schwerlinien eines Tetraeders in ihren zweiten Schnittpunkten mit der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel bilden ein Tetraeder, welches mit dem ersten den Schwerpunkt gemeinsam hat und zu ihm in Bezug auf ein sphärisches Polarsystem reciprok ist.“

Eine einfache Folgerung des Satzes von den 5 Mittelebenen eines Tetraeders ist auch der: Die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten eines Tetraeders werden durch den Schwerpunkt halbirt. Die reciproke Uebertragung dieses Satzes lautet:

„Legt man durch 2 Gegenkanten eines Tetraeders die durch ihre Seiten von einem Punkte M harmonisch getrennten Ebenen, so

„schneiden sich diese auf der Harmonikalebene des Punktes M und sind durch M und diese Ebene harmonisch getrennt.“

Wir denken uns nun zu dem Tetraeder $ABCD$ die umgeschriebene Kugel mit dem Mittelpunkt U . Dann entsprechen den Punkten derselben die Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O., welche den Punkt M zu einem Brennpunkt hat und auch die Seitenflächen des Tetraeders $A'B'C'D'$ berührt. Dem Mittelpunkt U der Kugel entspricht eine Ebene π , welche die Polarebene des Punktes M bezüglich der Rotationsfläche ist. Da sich nun in dem Punkte U die normal zu den Kanten des Tetraeders $ABCD$ und zwar durch deren Mittelpunkt gelegten Ebenen schneiden, wobei sie viermal zu dreien durch eine Gerade gehen, so ergibt sich durch reciproke Uebertragung folgender Satz:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren Seitenflächen durch einen Punkt M harmonisch getrennte Ebene und bringt diese zum Durchschnitt mit der Normale des Punktes M zu seiner Verbindungsebene mit der Kante, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, welche 4mal zu dreien auf einer Geraden liegen.“

Diese Ebene ist die Polarebene des Punktes M bezüglich derjenigen Rotationsfläche II. O., welche die Seiten des Tetraeders berührt und M zu einem Brennpunkt hat.

Verbinden wir nun den Mittelpunkt M_1 der Kante AB mit dem Mittelpunkte M_2 der gegenüberliegenden Kante CD , dann wird, wie bereits hervorgehoben, die Strecke M_1M_2 durch den Schwerpunkt S halbirt. Ziehen wir daher durch M_1 die Parallele zu CD , und nennen wir C_1 und D_1 die Punkte, in welchen diese Parallele die Geraden \overline{CS} und \overline{DS} trifft, dann ist $CS = SC_1$, $DS = SD_1$ und folglich $C_1D_1 = CD$. Ebenso geht die durch M_2 zu der Kante AB gezogene Parallele durch die zu A und B bezüglich des Schwerpunktes symmetrisch gelegenen Punkte A_1 und B_1 , und wir erkennen weiter, dass die durch die Mitte der vier übrigen Kanten zu ihren jedesmaligen Gegenkanten gezogenen Parallelen bzw. die Punktepaare C_1A_1 , C_1B_1 , D_1A_1 , D_1B_1 verbinden. Das Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$, welches durch jene 6 Gerade bestimmt ist, hat mit dem Tetraeder $ABCD$ die Mitten der Kanten und daher auch den Schwerpunkt gemeinsam; die Tetraeder liegen ferner zu einander perspectivisch und sind symmetrisch, aber nicht congruent. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

„Zieht man durch die Mitte jeder Kante eines Tetraeders die Parallele zu der gegenüberliegenden Kante, so erhält man 6 Gerade,

„welche 4 mal zu dreien durch einen Punkt gehen, also die Kanten eines zweiten Tetraeders bilden. Dieses hat mit ersterem den „Schwerpunkt gemeinsam, liegt zu ihm perspectivisch und symmetrisch.“

Den reciproken Satz wollen wir, wie folgt, aussprechen:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren „Seiten durch einen Punkt M harmonisch getrennte Ebene und bringt „letztere zum Durchschnitt mit der Verbindungsebene des Punktes „ M mit der Gegenkante, so erhält man 6 Gerade, welche 4 mal zu „dreien in einer Ebene liegen, also die Kanten eines Tetraeders „bilden. — Beide Tetraeder haben dieselbe Harmonikalebene in Bezug „auf den Punkt M und liegen so zu einander perspectivisch, dass „sich je 2 entsprechende Ebenen auf der Harmonikalebene schneiden „und von dieser und dem Punkte M harmonisch getrennt sind.“

Dieser Satz enthält wieder den vorhergehenden, aus welchem er abgeleitet wurde, als besonderen Fall.

Errichten wir nun zu den Kanten des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ in ihren Mittelpunkten $M_1, M_2 \dots M_6$ die Normalebene, so gehen dieselben durch einen Punkt H , nämlich den Mittelpunkt der dem Tetraeder $A_1 B_1 C_1 D_1$ umgeschriebenen Kugel. Da nun die Kanten des Tetraeders $ABCD$ mit denen des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ parallel laufen und die Mittelpunkte gemeinsam haben, so können jene Ebenen auch aufgefasst werden als solche, welche durch die Mitte der Kanten des Tetraeders $ABCD$ normal zu den Gegenkanten gelegt sind, und somit ergibt sich sofort der Satz von Monge:

„Die Normalebene aus den Mitten der Kanten eines Tetraeders „zu den Gegenkanten schneiden sich in einem Punkte, und zwar gehen „diese Ebenen viermal zu dreien durch eine Gerade.“

Da U der Mittelpunkt der dem Tetraeder $ABCD$, und H der Mittelpunkt der dem Tetraeder $A_1 B_1 C_1 D_1$ umgeschriebenen Kugel ist, so sind U und H entsprechende Punkte in den beiden bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes S symmetrisch gelegenen Tetraedern. Folglich ergibt sich weiter die Beziehung:

„In jedem Tetraeder liegt der Schwerpunkt S , der Mittelpunkt „ U der umgeschriebenen Kugel und derjenige Punkt H in einer „Geraden, in welchem die Normalebene aus den Mitten der Kanten „zu den Gegenkanten sich schneiden. Die Strecke UH wird durch „den Punkt S halbirt.“

Der Satz von Monge lautet in seiner reciproken Uebertragung:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren „Seiten durch einen festen Punkt M harmonisch getrennte Ebene

„und bringt letztere zum Durchschnitt mit der Normalen des Punktes „ M zu seiner Verbindungsebene mit der Gegenkante, so erhält man „6 Punkte einer Ebene, die 4 mal zu dreien auf einer Geraden liegen.“

Aus dem vorletzten Satze folgt weiter, dass für jedes Tetraeder die Ebenen s , u und h durch eine Gerade gehen und dass s von u und h durch M harmonisch getrennt ist.

Während es nur eine Kugel gibt, welche durch die Ecken eines Tetraeders geht, gibt es deren 8, welche die Seiten des Tetraeders berühren. Zu dieser Erkenntniss führt uns folgende Ueberlegung. Ist J der Mittelpunkt einer die Seitenflächen α , β , γ , δ des Tetraeders berührenden Kugel, dann hat dieser Punkt von den Ebenen gleiche Entfernung, liegt also auf der Halbierungsebene der von den Ebenen gebildeten Winkel. In dem Punkte A stossen die Ebenen β , γ , δ zusammen und die Winkel, welche 2 von diesen Ebenen, etwa β und γ bilden, werden durch 2 zu einander normale, durch die Kante AD gehende Ebenen halbirt; ebenso haben die Winkel, welche γ und δ miteinander bilden, zwei zu einander normale durch die Kante AB gehende Halbierungsebenen. Diese 4 Halbierungsebenen schneiden sich ausser in den Kanten AD und AB noch in 4 andern durch A gehenden Geraden. Jeder Punkt derselben ist von den Ebenen β , γ , δ gleichweit entfernt, also gehen auch die Halbierungsebenen der Winkel, welche β und δ miteinander bilden, durch die 4te Gerade. Diejenigen Punkte dieser Geraden nun, welche von der vierten Ebene α des Tetraeders ebenso weit entfernt sind als von β , γ , δ , liegen offenbar auf den beiden Halbierungsebenen der von α mit einer der übrigen Ebenen gebildeten Winkel. Wir erhalten also 4.2 oder 8 Punkte, welche von den Ebenen gleichweit entfernt sind, also die Mittelpunkte der die Seitenflächen berührenden Kugeln sind. Zugleich sehen wir, dass diese Punkte 16 mal zu zweien mit einer Ecke in einer Geraden und 12 mal zu vieren mit einer Kante in einer Ebene liegen.

Bilden wir nun die reciproke Beziehung, so erhalten wir den Satz:

„Es gibt 8 Rotationsflächen II. O., welche durch 4 Punkte gehen „und einen andern fünften Punkt zu einem Brennpunkt haben. Die „8 Polarebenen des Brennpunktes schneiden sich 16 mal zu zweien „auf einer Seitenfläche des von den 4 Punkten gebildeten Tetraeders „und gehen 12 mal zu vieren durch einen Punkt auf einer Kante „des Tetraeders.“

II. Das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt.

Wir haben bei der allgemeinen Betrachtung über das sphärische Polarsystem bereits erwähnt, dass die Poltetraeder dieses Systems

solche sind, in welchen die 4 Höhen durch einen Punkt gehen. Umgekehrt können wir jedes Tetraeder $ABCD$ mit einem Höhenschnittpunkte H zu einem Poltetraeder eines sphärischen Polarsystems machen, wenn wir nur bestimmen, dass H der Mittelpunkt des Systems und das constante Product der Höhenabschnitte die Potenz desselben sein soll. Alsdann ist es möglich, in einfacher Weise zu den bisher bekannten Sätzen¹⁾ über das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt noch andere interessante abzuleiten, die gleich den früher bekannten recht deutlich die Analogie dieses räumlichen Gebildes mit dem Dreieck hervortreten lassen.

Indem wir nun beachten, dass den Eckpunkten $ABCD$ des Tetraeders mit dem Höhenschnittpunkt H in dem sphärischen Polarsystem die ihnen gegenüberliegenden Seiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen, erkennen wir sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze:

„Durchschneidet man die Kanten eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt durch eine Ebene π in 6 Punkten und fällt zu jeder Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem Höhenschnittpunkt H aus der gegenüberliegenden Kante die Normalebene, so erhält man 6 Ebenen, welche durch einen Punkt P gehen, der auf der Normalen von H zu π liegt. Ist Q der Schnittpunkt dieser Normalen mit π , dann ist $QH \cdot HP$ gleich dem constanten Product der Höhenabschnitte des Tetraeders.“

„Verbindet man einen Punkt mit den Kanten eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt durch Ebenen und fällt zu denselben aus dem Höhenschnittpunkt H die Normalen, so treffen diese die jedesmaligen gegenüberliegenden Kanten in 6 Punkten einer Ebene π , welche normal zu der Geraden \overline{PH} liegt. Ist Q der Schnittpunkt dieser Normalen mit π , dann ist $PH \cdot HQ$ gleich dem constanten Product der Höhenabschnitte des Tetraeders.“

„Verbindet man eine Gerade g mit den 4 Eckpunkten eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt und fällt auf diese Ebenen vom Höhenschnittpunkt H aus die Normalen, so treffen dieselben die gegenüberliegenden Seiten in 4 Punkten einer zu g normal gelegenen Geraden g' . Die kürzeste Entfernung dieser beiden Geraden wird durch H in zwei Abschnitte geteilt, deren Product gleich dem constanten Product der Höhenabschnitte ist.“

1) Am eingehendsten scheint bis jetzt Vogt in einer interessanten wissenschaftlichen Beilage zum Programm des Friedrichs-Gymnasiums in Breslau vom Jahre 1881 das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt untersucht zu haben.

Dem Mittelpunkte M_1 der Kante AB entspricht diejenige Ebene μ_1 durch die gegenüberliegende Kante CD , welche normal zu der Geraden $\overline{M_1 H}$ ist. Ferner hat der unendlich ferne Punkt P_∞ auf der Geraden \overline{AB} diejenige Ebene π zu seinem entsprechenden Element, welche H mit \overline{CD} verbindet. Da nun aber M_1 von P_∞ durch die Eckpunkte A und B harmonisch getrennt ist, so sind auch die Ebenen μ_1 und π harmonisch getrennt von den Seiten α und β . Wir haben also den Satz:

„Ist in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt letzterer Punkt „mit der Mitte einer Kante durch eine Gerade verbunden und legt „man zu derselben aus der gegenüberliegenden Kante die Normal- „ebene, dann ist diese harmonisch getrennt von dem Höhenschnitt- „punkt durch die Seitenflächen der letzteren Kante.“

Oder:

„Legt man durch eine Kante eines Tetraeders mit Höhenschnitt- „punkt die von diesem Punkte durch die Seiten der Kante harmo- „nisch getrennte Ebene, so trifft die Normale derselben aus dem „Höhenschnittpunkt die gegenüberliegende Kante in ihrer Mitte.“

Legen wir ferner durch eine Kante die Mittelebene, d. h. die Ebene, welche diese Kante mit der Mitte der Gegenkante verbindet, dann ist die von dieser Ebene durch die beiden Seitenflächen der Kante harmonisch getrennte Ebene parallel mit der Gegenkante, und es trifft die Normale aus dem Höhenschnittpunkt H zu letzterer Ebene die gegenüberliegende Kante in ihrem Höhenfusspunkt. Daraus folgt nun der Satz:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt trifft die Normale „aus diesem Punkte zu einer Mittelebene die gegenüberliegende „Kante in einem Punkte, welcher von den Eckpunktendderselben durch „ihren Höhenfusspunkt harmonisch getrennt ist.“

Bestimmen wir nun auf jeder Kante den Punkt, welcher von den Eckpunkten durch ihren Höhenfusspunkt, oder, was dasselbe ist, welcher von den Seitenflächen der Gegenkante durch den Höhenschnittpunkt des Tetraeders harmonisch getrennt ist, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, nämlich der Harmonikalebene des Höhenschnittpunktes. Da ferner diese Ebene in dem Polarsystem dem Schwerpunkt S des Tetraeders entspricht, so folgt:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt steht die Harmonikal- „ebene des Höhenschnittpunkts H normal zu der Verbindungsgeraden „dieses Punktes mit dem Schwerpunkt S . Heisst Q der Schnittpunkt

„von \overline{SH} mit der Harmonikalebene, dann ist das Product $SH.HQ$ „gleich dem Product der Höhenabschnitte des Tetraeders.“

Den Höhenfusspunkten der Kanten entsprechen diejenigen Ebenen durch die Gegenkanten, welche parallel zu den ersten Kanten laufen, und die Mittelpunkte der Kanten haben zu ihren entsprechenden Elementen diejenigen Ebenen durch die Gegenkanten, welche durch die Seitenflächen derselben durch den Höhengschnittpunkt harmonisch getrennt sind. Da nun in einem Tetraeder mit Höhengschnittpunkt die Mittelpunkte der Kanten und folglich auch die Höhenfusspunkte derselben auf einer Kugel liegen, welche den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, so folgt:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders mit Höhengschnittpunkt

„1) die Parallelebene zur Gegenkante,
 „2) die von den Seitenflächen der Kante durch den Höhengschnittpunkt harmonisch getrennte Ebene, so erhält man 12 Ebenen, „welche von einer Rotationsfläche II. O. berührt werden, die den „Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt und die Harmonikalebene „desselben zu der zugehörigen Leitebene hat.“

Die Punkte, in welchen die Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O. von ihrer Normalen aus einem Brennpunkt getroffen werden, liegen auf einer Kugel, welche mit der Fläche den Mittelpunkt gemeinsam hat. Da nun in unserm Falle die Ebenen der ersteren Art von ihren Normalen aus dem Höhengschnittpunkt in den Höhenfusspunkten der Kanten getroffen werden, so liegen auf der durch diese und die Mittelpunkte der Kanten gehenden Kugel auch die Schnittpunkte der Ebenen zweiter Art mit ihren Normalen aus dem Höhengschnittpunkt. Indem wir noch vorausschieken, was gleich bewiesen werden soll, dass der Höhengschnittpunkt des Tetraeders zu dem Mittelpunkt U der umgeschriebenen Kugel bezüglich des Schwerpunktes S symmetrisch liegt, so können wir nun folgenden Zusatz zu dem letzten Satze bilden:

„Die Rotationsfläche hat den Schwerpunkt des Tetraeders zum „Mittelpunkt und den Höhengschnittpunkt und den Mittelpunkt der „umgeschriebenen Kugel zu Brennpunkten.“

Ferner erkennen wir die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„In einem Tetraeder mit Höhengschnittpunkt liegen die Punkte, „in welchen die Verbindungsgeraden des Höhengschnittpunktes mit „den Mitten der Kanten von ihren Normalebene aus den jedesmaligen gegenüberliegenden Kanten getroffen werden, auf derselben

„Kugel, welche auch durch die Mitten der Kanten und die Höhen-,
fusspunkte derselben geht.“

Nach dem im ersten Abschnitt (S. 370) dargelegten Satze von Monge liegt in jedem Tetraeder bezüglich des Schwerpunktes S der Mittelpunkt U der umgeschriebenen Kugel zu demjenigen Punkte H symmetrisch, durch welchen die aus den Mitten der Kanten normal zu den Gegenkanten gelegten Ebenen gehen. Weil nun aber bei einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt je 2 Gegenkanten zu einander normal sind, so enthält die Ebene, welche normal zu der einen Kante durch die Mitte der Gegenkante gelegt wird, die letztere Kante ganz, und somit erkennen wir, dass bei diesem besonderen Tetraeder der Punkt H identisch ist mit dem Höhenschnittpunkt. Es ist also jetzt gezeigt, was wir vorhin als erwiesen annahmen, dass in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt die Strecke zwischen diesem Punkte und dem Mittelpunkte der umgeschriebenen Kugel durch den Schwerpunkt halbirt wird.

Die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte seien mit A_2, B_2, C_2, D_2 bezeichnet. Dann ist das Tetraeder $A_2B_2C_2D_2$ mit dem Tetraeder $ABCD$ ähnlich und ähnlich liegend in Bezug auf H als äusseren Aehnlichkeitspunkt. Denn je zwei entsprechende Kanten z. B. A_2B_2 und AB sind zu einander parallel und stehen in dem Verhältniss $1:2$. Der Mittelpunkt U_2 der dem Tetraeder $A_2B_2C_2D_2$ umgeschriebenen Kugel ist der Mittelpunkt der Strecke UH , also identisch mit dem Schwerpunkt S des Tetraeders $ABCD$. Folglich gilt der Satz¹⁾:

„Die Kugel, welche durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt geht, hat den Schwerpunkt des Tetraeders zum Mittelpunkt und ihr Radius ist gleich der Hälfte von dem Radius der umgeschriebenen Kugel.“

Da nun in dem sphärischen Polarsystem dem Mittelpunkt eines oberen Höhenabschnittes die zu dem Höhenschnittpunkt bezüglich der zugehörigen Seitenfläche symmetrisch gelegene Ebene entspricht, so gilt der Satz: Legt man zu jeder Seite eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt diejenige Parallelebene, welche mit dem Höhenschnittpunkt bezüglich der zugehörigen Seitenfläche symmetrisch liegt, so erhält man 4 Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O., welche den Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt und dessen Harmonikalebene zur Directrixebene hat.

1) Vgl. auch Vogt § 8.

Wir benutzen nun noch folgenden Satz und verweisen bezüglich seiner Ableitung auf § 10 der erwähnten Arbeit von Vogt:

„In jedem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt liegen die Schwerpunkte und die Höhenschnittpunkte der Seitenflächen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt F auf der Verbindungsgeraden der Punkte H und U liegt.“

Von diesem Satze führt uns das sphärische Polarsystem sofort zu folgendem:

„Legt man durch die Ecken eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt die Parallelebenen zu den gegenüberliegenden Seitenflächen und die Normalebenen zu den Verbindungsgeraden des Höhenschnittpunktes mit den Schwerpunkten auf den gegenüberliegenden Seitenflächen, so erhält man 8 Ebenen, welche eine Rotationsfläche II. O. berühren, die den Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt hat, und deren Mittelpunkt auf der Geraden HU liegt.“

Da nun diese Ebenen von ihren Normalen aus dem Höhenschnittpunkt in den Punkten einer Kugel getroffen werden, und 4 von diesen Punkten die Eckpunkte des Tetraeders sind, so folgt weiter:

„Verbindet man in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt den Schwerpunkt einer Seitenfläche mit dem Höhenschnittpunkt des Tetraeders durch eine Gerade, so wird dieselbe von ihrer Normalebene aus dem gegenüberliegenden Eckpunkte in einem Punkte der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel getroffen.“

Ist in einem sphärischen Polarsystem ein Tetraeder mit dem Höhenschnittpunkt H gegeben, und fällt letzterer Punkt nicht mit dem Mittelpunkt M des Systems zusammen, dann ist das reciproke Tetraeder nur dann von derselben Art, falls M auf einer Höhe des ersten Tetraeders liegt. Ist z. B. M ein Punkt der Höhe AH , dann entspricht der Kante AB in dem reciproken Tetraeder eine Kante $A'B'$, welche normal zu der Ebene ABH , also parallel mit der Kante CD ist. Die letzterer Kante in dem reciproken Tetraeder entsprechende Kante $C'D'$ ist normal zu CD , also auch zu $A'B'$. Ebenso erkennt man, dass auch die Kanten $A'C'$ und $B'D'$ zu einander normal sind. Das Tetraeder $A'B'C'D'$ hat also 2 Paare zu einander normaler Gegenkanten, folglich schneiden sich seine Höhen in einem Punkte H' . Zugleich überzeugen wir uns von der Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Nimmt man in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt auf einer Höhe desselben einen Punkt M an und legt zu den Verbindungsgeraden dieses Punktes mit den Eckpunkten des Tetraeders in ihren zweiten Schnittpunkten mit der umgeschriebenen Kugel die Normalenebenen, so erhält man ein Tetraeder, dessen Höhen durch einen Punkt gehen, der auf der gemeinsamen Höhe beider Tetraeder liegt.“

Aber auch dann, wenn M nicht auf einer Höhe des Tetraeders $ABCD$ liegt, ist das reciproke Tetraeder $A'B'C'D'$ noch von besonderer Art. Wir unterlassen es, seine Eigenschaften hier näher anzugeben; dieselben ergeben sich wieder am einfachsten durch reciproke Uebertragung derjenigen des Tetraeders mit Höhenschnittpunkt.

XVII.

Anwendung des Taylor'schen Satzes
zur Rectification der Ellipse und zur Complination
des Ellipsoids.

Von

Herrn **C. Benz**,
Lehrer in Luckenwalde.

Bezeichnet $aE(\varepsilon, \varphi)$ einen Ellipsenbogen, a die halbe grosse Achse, ε die numerische Excentricität, φ den Winkel des Bogens, von der kleinen Achse an gerechnet, so ist

$$\begin{aligned}
 \text{I) } aE(\varepsilon, \varphi) = a \left\{ \varphi - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi^3 + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{5!} \varphi^5 \right. \\
 - \frac{(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7!} \varphi^7 \\
 + \frac{(64\varepsilon^2 - 1008\varepsilon^4 + 2520\varepsilon^6 - 1575\varepsilon^8)}{9!} \varphi^9 \\
 \left. - \frac{(256\varepsilon^2 - 16320\varepsilon^4 + 105840\varepsilon^6 - 189000\varepsilon^8 + 99225\varepsilon^{10})}{11!} \varphi^{11} + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

Nach dem Taylor'schen Satze ist nämlich, wenn wir $E(\varepsilon, \varphi)$ kurz mit $F(\varphi)$ und die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten von $F(\varphi)$ nach φ bezüglich mit $F(\varphi)^I$, $F(\varphi)^{II}$, $F(\varphi)^{III}$ u. s. w. bezeichnen,

$$F(\varphi) = F(\varphi=0) + (F(\varphi=0)^I) \cdot \varphi + \frac{(F(\varphi=0)^{II})}{1 \cdot 2} \varphi^2 + \frac{(F(\varphi=0)^{III})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi^3 + \dots$$

Aus der Gleichung der Ellipse

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi$$

folgt nun

$$aE(\varepsilon, \varphi) = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

also

$$E(\varepsilon, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

folglich

$$F_{(\varphi=0)} = 0$$

ferner

$$F_{(\varphi)}^I = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}, \quad F_{(\varphi=0)}^I = 0$$

$$F_{(\varphi)}^{II} = - \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad F_{(\varphi=0)}^{II} = 0$$

$$F_{(\varphi)}^{III} = - \frac{\varepsilon^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_{(\varphi=0)}^{III} = - \varepsilon^2$$

$$F_{(\varphi)}^{IV} = \frac{4\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\varepsilon^4 (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\varepsilon^6 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}}, \quad F_{(\varphi=0)}^{IV} = 0$$

$$F_{(\varphi)}^V = \frac{4\varepsilon^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} + \frac{22\varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 3\varepsilon^4 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{18\varepsilon^6 (\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15\varepsilon^4 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{7}{2}}}, \quad F_{(\varphi=0)}^V = 4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4$$

$$F_{(\varphi)}^{VI} = - \frac{16\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{60\varepsilon^4 (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{210\varepsilon^6 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi - 45\varepsilon^6 (\sin \varphi \cos^5 \varphi + \sin^5 \varphi \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}} - \frac{150\varepsilon^8 (\sin^3 \varphi \cos^5 \varphi - \sin^5 \varphi \cos^3 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{7}{2}}} - \frac{105\varepsilon^{10} \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{9}{2}}}, \quad F_{(\varphi=0)}^{VI} = 0$$

$$\begin{aligned}
 F_{(\varphi)}^{VII} = & - \frac{16 \varepsilon^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\
 & + \frac{60 \varepsilon^4 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi - 6 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) - 16 \varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \\
 & + \frac{1035 \varepsilon^6 (\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi) - 45 \varepsilon^6 (\cos^6 \varphi - \sin^6 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}} \\
 & + \frac{2550 \varepsilon^8 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi - 675 \varepsilon^8 (\sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{7}{2}}} \\
 & - \frac{1050 \varepsilon^{10} (\sin^4 \varphi \cos^6 \varphi - \sin^6 \varphi \cos^4 \varphi) - 525 \varepsilon^{10} (\sin^4 \varphi \cos^6 \varphi - \sin^6 \varphi \cos^4 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{9}{2}}} \\
 & - \frac{945 \varepsilon^{12} \sin^6 \varphi \cos^6 \varphi \cos^6 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{11}{2}}}, \quad F_{(\varphi=0)}^{VII} = -16\varepsilon^2 + 60\varepsilon^4 - 45\varepsilon^6
 \end{aligned}$$

und abgekürzt:

$$\begin{aligned}
 F_{(\varphi)}^{VIII} = & \frac{64 \varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1008 \varepsilon^4 \sin \varphi \cos^3 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \\
 & + \frac{2520 \varepsilon^6 \sin \varphi \cos^5 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1575 \varepsilon^8 \sin \varphi \cos^7 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{7}{2}}}, \quad F_{(\varphi=0)}^{VIII} = 0
 \end{aligned}$$

$$F_{(\varphi=0)}^{IX} = 64\varepsilon^2 - 1008\varepsilon^4 + 2520\varepsilon^6 - 1575\varepsilon^8$$

$$F_{(\varphi=0)}^{XI} = -256\varepsilon^2 + 16320\varepsilon^4 - 105840\varepsilon^6 - 189000\varepsilon^8 + 99225\varepsilon^{10}$$

u. s. w.

Setzt man die Werte von $F_{(\varphi=0)}$, $F_{(\varphi=0)}^I$, $F_{(\varphi=0)}^{II}$ u. s. w. in die Taylor'sche Reihe für $aE(\varepsilon, \varphi) = aF_{(\varphi)}$ ein, so erhält man die oben angegebene Reihe I).

Für den Ellipsenquadranten erhält man

$$\begin{aligned}
 \text{II)} \quad aE\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) = & a \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{5!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \right. \\
 & \left. - \frac{(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

und für den Grenzfall $\varepsilon = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{III)} \quad aE\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = & a \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} + \dots \right\} \\
 = & a \sin \frac{\pi}{2} = a
 \end{aligned}$$

Aus den 5 ersten Gliedern der Reihe III) erhält man $a = 1,000\,0036\,a$, aus den 6 ersten $a = 0,999\,9999\,a$.

Da $E(\varepsilon, \varphi)$ eine stetige Function von ε und φ ist, und Reihe I) für die grössten und kleinsten Werte von $E(\varepsilon, \varphi)$ convergirt, so muss sie auch für alle dazwischen liegenden Werte convergiren.

Anmerkung. Den directen Beweis für die Convergenz der Reihe I) vermag Verfasser nicht zu erbringen. Ebenso ist es dem Verfasser nicht gelungen, in A_n für den grössten Coefficienten der bezüglichen Potenz von ε eine allgemeine Formel behufs Herleitung der Convergenz zu finden.

Um bei solchen Werten von ε , welche sehr nahe bei 1 liegen, bei der Summirung der ersten Glieder eine grössere Genauigkeit für den Näherungswert zu erhalten, addire man in Reihe I) $\sin \varphi$ und subtrahire die Sinusreihe; man erhält dann

$$\text{IV) } aE(\varepsilon, \varphi) = a \left\{ \sin \varphi + \frac{(1 - \varepsilon^2)}{3!} \varphi^3 - \frac{1 - (4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{5!} \varphi^5 + \frac{1 - (16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7!} \varphi^7 - \dots \right\}$$

Das Integral $\int \frac{d\varphi}{a(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$ lässt sich ähnlich wie das Integral $a \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ entwickeln. Für das zweifache Integral $a \int_0^\varphi d\varphi \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ erhält man

$$a \int_0^\varphi d\varphi \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a \left\{ \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi^4 + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{6!} \varphi^6 - \dots \right\}$$

Für $\varepsilon = 1$ wird diese Reihe $= a(1 - \cos \varphi)$.

Nimmt man in Gleichung I) links und rechts den Differentialquotienten nach φ und dividirt beiderseits durch a , so erhält man

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{\varepsilon^2 \varphi^2}{1 \cdot 2} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{4!} \varphi^4 - \dots$$

Anmerkung. Die Convergenz dieser Reihe lässt sich ebenso wie die Convergenz der Reihe I) beweisen. Für $\varphi = 0$ wird dieselbe $= 1$, für $\varepsilon = 1$ wird sie $= \cos \varphi$, für $\varepsilon = 0$ wird sie ebenfalls $= 1$, convergirt also für den grössten und kleinsten Wert von ε .

Will man nun beispielsweise in Reihe I) nur die ersten 6 Glieder berücksichtigen, so setze man

$$\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\varphi}{11} - \frac{\varepsilon^2 \varphi^3}{1 \cdot 2 \cdot 11} + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11} \varphi^5 - \frac{(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{6! \cdot 11} \varphi^7 + \dots$$

Addirt man nun in Reihe I) den Ausdruck $\frac{\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}{11}$ und subtrahirt die demselben gleiche Reihe, so erhält man

$$aE(\varepsilon, \varphi) = a \left\{ \frac{(10 + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi})}{11} \varphi - \frac{8\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11} \varphi^3 + \frac{6(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{5! \cdot 11} \varphi^5 - \frac{4(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7! \cdot 11} \varphi^7 + \frac{2(64\varepsilon^2 - 1008\varepsilon^4 + 2520\varepsilon^6 - 1575\varepsilon^8)}{9! \cdot 11} \varphi^9 - 0 + \dots \right\}$$

Setzt man in $\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$

$$\sin \varphi = x$$

also

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 x^2}{1 - x^2}} \, dx$$

und entwickelt letzteren Ausdruck nach dem Taylor'schen oder, was bequemer ist, nach dem binomischen Satze, so erhält man

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 x^2}{1 - x^2}} \, dx = x + \frac{(1 - \varepsilon^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{3 \cdot 4 (3 - 2\varepsilon^2 - \varepsilon^4)}{2^2 \cdot 5!} x^5 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 (3 \cdot 5 - 9\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4 - 3\varepsilon^6)}{2^3 \cdot 7!} x^7 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 (3 \cdot 5 \cdot 7 - 60\varepsilon^2 - 18\varepsilon^4 - 12\varepsilon^6 - 15\varepsilon^8)}{2^4 \cdot 9!} x^9 + \frac{10! (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 - 525\varepsilon^2 - 150\varepsilon^4 - 90\varepsilon^6 - 75\varepsilon^8 - 105\varepsilon^{10})}{5! \cdot 2^5 \cdot 11!} + \dots \left. \right\}$$

Das n te Glied dieser Reihe ist immer kleiner als

$$\frac{\{n(n+1) \dots (2n-2)\} 1.3.5.7 \dots (2n-3)}{2^{n-1} \cdot (2n-1)!} x^{2n-1}$$

oder kleiner als

$$\frac{(2n-2)!(n-1)^2}{(n-1)! 2^{n-1} \cdot (2n-1)!} x^{2n-1}$$

das $n+1$ te Glied kleiner als

$$\frac{(2n)! n^2}{n! 2^n (2n+1)!} x^{2n+1}$$

also

$$\frac{A_{n+1} x^{2n+1}}{A_n x^{2n-1}}, \text{ für } n = \infty, \text{ gleich } \frac{x^2}{2n+1}$$

die Reihe convergirt also. Für $\varepsilon = 0$ geht dieselbe über in $\arcsin x$ für $\varepsilon = 1$ in x . Entwickelt man

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

ebenso wie $\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ in Gleichung I), so erhält man in

den Gliedern der Reihe Ausdrücke von der Form $\frac{m\varepsilon^{2p}}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{2p-1}{2}}}$

Für $\varepsilon = 1$ werden dieselben $= \infty$. Für Werte von ε , welche nahe bei 1 liegen, würde also die Reihe unbrauchbar sein. Sie ist deshalb zur Rectification der Ellipse nicht geeignet, um so für φ den Ausdruck $\frac{\varphi}{2}$ einzuführen und die Reihe I) für den Grenzfall auf $\frac{\pi}{4}$ zu reduciren.

Führt man in die Reihe I) statt des Winkels φ die geographische Breite ψ ein, so ist

$$\frac{b}{a} \cotg \varphi = \frac{b^2}{a^2} \tg \psi, \quad \varphi = \arccotg \{ \sqrt{1 - \varepsilon^2} \tg \psi \} = \beta$$

Ist nun gegeben

- 1) $aE(\varepsilon, \beta_1) = x$
- 2) $aE(\varepsilon, \beta_2) = x + l_1$
- 3) $aE(\varepsilon, \beta_3) = x + l_2$

wo $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, und diese Grössen, sowie l_1 und l_2 bekannt sind, so erhält man nach Elimination von x und a , wenn für ε der richtige Wert eingesetzt ist, eine Gleichung von der Form

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

wo

$$L_1 = \beta_2 - \beta_1 - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\beta_2^3 - \beta_1^3) + \dots$$

$$L_2 = \beta_3 - \beta_2 - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\beta_3^3 - \beta_2^3) + \dots$$

Der Wert von ε lässt sich durch Versuche und Interpolation bestimmen. Ist ε gefunden, so hat man

$$a = \frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2}$$

Ist l_1 und l_2 für die Meereshöhe h gegeben und

$$a_1 = \frac{l_1}{L_1}$$

gefunden, so ist

$$a = a_1 - h$$

Ist z. B. gegeben	$\psi_1 = 70^\circ 40' 11,23''$
$l_1 = 1370, 2159 \text{ km}$	$\psi_2 = 58 \quad 22 \quad 47,56$
$l_2 = 1451, 5730 \text{ km}$	$\psi_3 = 45 \quad 20 \quad 2,94$

also

$$\beta_1 = 19 \quad 23 \quad 27,63$$

$$\beta_2 = 31 \quad 42 \quad 25,11$$

$$\beta_3 = 44 \quad 45 \quad 46,93$$

so ist

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{0,214 \ 817 \ 209}{0,227 \ 574 \ 788}$$

wenn

$$\varepsilon = 0,082 \ 235$$

gesetzt wird, ferner

$$\log \frac{l_1}{l_2} - \log \frac{L_1}{L_2} = 0,0000052.$$

Anmerkung. Die benutzten Daten sind dem Werke des Herrn Pr. Martus, „Astronomische Geographie“, Leipzig, Koch's Verlagsbuchhandlung, entnommen.

Die gewöhnliche Berechnung von ε aus den Krümmungsradien eines Meridians und den bezüglichen Breiten ist allerdings weit bequemer und, da wegen der Kleinheit von ε die Bogen des Meridians

von den Bogen der entsprechenden Krümmungskreise unmerklich verschieden sind, auch hinreichend genau.

Das Differential einer krummen Fläche, welches man auch aus der Berechnung eines Parallelogramms, dessen zusammenstossende Seiten $\sqrt{(dx)^2 + (dz_x)^2}$ und $\sqrt{(dy)^2 + (dz_y)^2}$ und dessen Diagonale $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz_x - dz_y)^2}$ ist, erhalten kann, ist

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dx dy$$

die Gleichung des dreiachsigen Ellipsoïds ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Berechnet man aus dieser Gleichung die Differentialquotienten, setzt

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2, \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2} = \zeta^2, \quad \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \eta^2$$

und führt Polarcoordinaten ein, so erhält man

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dx dy = \left\{ \frac{1 - \frac{\{(1 - \varepsilon^2)\eta^2 \sin^2 \chi + \zeta^2 \cos^2 \chi\} r^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)}}{1 - \frac{\{\cos^2 \chi + (1 - \varepsilon^2)\sin^2 \chi\} r^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)}} \right\}^{\frac{1}{2}} r dr d\chi$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach r entweder nach dem Taylor'schen oder, was bequemer ist, nach dem binomischen Satze, so erhält man, wenn man im letzteren Falle nach r integriert und

$$(1 - \varepsilon^2)\eta^2 \sin^2 \chi + \zeta^2 \cos^2 \chi = a^2, \quad \cos^2 \chi + (1 - \varepsilon^2)\sin^2 \chi = \beta^2$$

setzt,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\chi} \int_0^r \left\{ \frac{1 - \frac{\{(1 - \varepsilon^2)\eta^2 \sin^2 \chi + \zeta^2 \cos^2 \chi\} r^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)}}{1 - \frac{\{\cos^2 \chi + (1 - \varepsilon^2)\sin^2 \chi\} r^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)}} \right\}^{\frac{1}{2}} r dr d\chi \\ &= \int_0^{\chi} \left\{ \frac{1}{2} r^2 + \frac{3(\beta^2 - a^2)}{1.2 \cdot 3.4} r^4 + \frac{3 \cdot 4.5 \{3\beta^4 - (a^4 + 2a^2\beta^2)\}}{2^2 \cdot 6!} r^6 \right. \\ &+ \frac{4.5 \cdot 6.7 \{1.3.5\beta^6 - (3a^6 + 3a^4\beta^2 + 3.3a^2\beta^4)\}}{2^3 \cdot 8!} r^8 \\ &+ \frac{5.6.7.8.9}{2^4 \cdot 10!} \{1.3.5.7\beta^8 - (1.3.5a^8 + 3.4a^6\beta^2 + 2.3.3a^4\beta^4 + 1.3.4.5a^2\beta^6)\} r^{10} \\ &+ \left. \frac{11!}{5! \cdot 2^5 \cdot 12!} \{1.3.5.7.9\beta^{10} - (1.3.5.7a^{10} + 1.3.5.5a^8\beta^2 + 1.3.3.2.5a^6\beta^4 \right. \\ &\quad \left. + 1.3.5.5a^4\beta^6 + 1.3.5.7.5a^2\beta^8)\} r^{12} + \dots \right\} d\chi \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{tg} \varphi$$

$$r^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)$$

$$\sin^2 \chi = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)}, \quad \cos^2 \chi = \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)} = \frac{a^2(1 - \varepsilon^2) \cos^2 \varphi}{a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)}$$

$$d\chi = \frac{ab \, d\varphi}{a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)}$$

so geht das letzte Integral über in

$$V) \quad ab \int_0^\varphi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3(\delta^2 - \gamma^2)}{4!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \{3\delta^4 - (\gamma^4 + 2\gamma^2 \delta^2)\}}{2^2 \cdot 6!} + \dots \right\} d\varphi$$

wo

$$\gamma^2 = \eta^2 \sin^2 \varphi + \zeta^2 \cos^2 \varphi = \zeta^2 + (\eta^2 - \zeta^2) \sin^2 \varphi$$

und

$$\delta^2 = 1$$

ist. Der Ausdruck ist also leicht zu integrieren.

Die Reihe V) convergirt zunächst, wie aus den Bedingungen der Gültigkeit des binomischen Satzes hervorgeht, wenn sowol $\frac{\{(1 - \varepsilon^2) \eta^2 \sin^2 \chi + \zeta^2 \cos^2 \chi\}}{a^2(1 - \varepsilon^2)} r^2$, als auch $\frac{\{(1 - \varepsilon^2) \sin^2 \chi + \cos^2 \chi\}}{a^2(1 - \varepsilon^2)} r^2 < 1$ ist; da man aber nach dem Taylor'schen Satze dieselbe Reihe ohne Integration nach r erhält, weil $F(r, \chi)$ sowol für $r = 0$, als auch für $\varphi = 0$ verschwinden muss, ebenso $\frac{d(F(r, \chi))}{d\chi}$ für $r = 0$, so convergirt dieselbe auch noch, wenn

$$\gamma^2 = \eta^2 \sin^2 \varphi + \zeta^2 \cos^2 \varphi \leq 1$$

ist. Da sowol η als auch $\zeta \leq 1$, so ist diese Bedingung erfüllt.

Das n te Glied der Reihe V) = $A_n \cdot F(\varphi)$ ist immer kleiner als $\frac{(2n-1)!(n-1)^2}{(n-1)!2^{n-1}(2n)!} \varphi$, woraus sich für den Grenzfall und für $n = \infty$

$$\frac{A_{n+1} \cdot \varphi}{A_n \cdot \varphi} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{ergibt.}$$

Für $\varepsilon = 0$, $\zeta = 0$, $\eta = 0$ wird die Reihe V)

$$= a^2 \varphi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6} + \frac{15}{2^3 \cdot 3! \cdot 8} + \frac{105}{2^4 \cdot 4! \cdot 10} + \dots \right\}$$

$$= a^2 \varphi, \text{ wie sich aus } \int_0^\varphi \int_0^r \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} \text{ ergibt.}$$

Anmerkung. Das Integral für den Teil der Oberfläche des Rotationsellipsoids, welcher vom Winkel φ umfasst wird, ist

$$ab \frac{\pi}{2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi. \text{ Setzt man nun}$$

$$\varepsilon \sin \varphi = \sin \psi, \quad d\varphi = \frac{\cos \psi}{\varepsilon \cos \psi} d\psi$$

$$\text{so erhält man } ab \frac{\pi}{2} \int_0^\psi \frac{\cos^2 \psi}{\varepsilon} d\psi \text{ u. s. w.}$$

Für $\zeta = 1, \eta = 1$ wird die Reihe V) $= ab \frac{\varphi}{2}$,

für $\varepsilon = 0, \zeta = 1, \eta = 1$ wird sie $a^2 \frac{\varphi}{2}$,

für $\varepsilon = \zeta = 1$ wird sie $= 0$.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man in den Grenzfällen $\frac{1}{8}$ der Oberfläche der Kugel $= a^2 \frac{\pi}{2}$, resp. $\frac{1}{8}$ der Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$= ab \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} + \frac{\arcsin(\sin \varepsilon)}{2\varepsilon} \right\}$$

einen Ellipsenquadranten $= ab \frac{\pi}{4}$ resp. einen Kreisquadranten $= a^2 \frac{\pi}{2}$.

Nähert sich Reihe V) einer dieser Grössen, so kann man letztere zu der Reihe addiren und die der addirten Grösse entsprechende Reihe subtrahiren, um bei der Summirung der ersten Glieder für den Näherungswert eine grössere Genauigkeit zu erhalten.

XVIII.

Die Curven, welche von Punkten von Kegelschnitten, die sich ohne zu gleiten längs anderer Curven wälzen, beschrieben werden.

Von

H. Ekama.

Allgemeine Formeln.

In der Zeitschrift *Nouvelle correspondance mathématique*, Tome II und III hat Brocard getrachtet die Eigenschaften der Curve, welche ein Punkt durchläuft, fest mit einem Kegelschnitte verbunden, welcher sich ohne zu gleiten eine gerade Linie entlang wälzt, zu finden. Ich habe versucht die Betrachtungen über diese Curven allgemeiner zu machen, indem ich den beschreibenden Punkt nicht nur auf den Hauptachsen wählte und auch einige Fälle untersuchte, bei welchen die Directrix keine gerade Linie ist.

Die gesuchte Curve wird bestimmt in einem geradwinkligen Coordinatensysteme, in welchem auch die Directrix gegeben ist. Das Coordinatensystem, in welchem die Generatrix bestimmt ist, ist im allgemeinen schiefwinklig und ändert seine Lage in Bezug zum geradwinkligen Systeme. Zwei conjugirte Achsen sind, wenn die Generatrix ein Kegelschnitt ist, die Achsen und zwar so gewählt, dass der beschreibende Punkt auf der ξ' -Achse liegt. ξ und η sind die Coordinaten eines Punktes der Directrix, welche vorläufig willkürlich genommen wird, in dem festen Coordinatensysteme. Die Entfernung des beschreibenden Punktes von dem Coordinatenanfang sei p . ξ und η , ξ' und η' sind die Coordinaten des Berührungspunktes der beiden gegebenen Curven in jedem Coordinatensysteme. Die von dem Punkte beschriebene Curve wird verschieden sein, je nach der Seite

der Directrix, an welcher die Generatrix sich wälzt. Die Normalen im Berührungspunkte an beiden Curven gezogen, können eine in der andern Verlängerung oder zusammen fallen. Ersteres ist in Fig. 1, letzteres in Fig. 2 vorausgesetzt.

P und P' sind die beschreibenden Punkte, PE und $P'E'$ sind die ξ 'Achsen des Kegelschnittes, BE und $B'E'$ sind die Normalen an dem Kegelschnitte in den Punkten B und B' welche die Berührungspunkte sind.

σ und σ' sind die Winkel, welche die gemeinsame Normale mit der ξ und mit der ξ' Achse macht.

In Fig. 1 ist

$$\text{Wkl. } DBE = \omega - \sigma' + 180^\circ$$

$$\text{Wkl. } DBC = \omega - \sigma - \sigma' + 90^\circ$$

$$\text{Wkl. } EPF = \sigma + \sigma' - 90^\circ$$

In Fig. 2 ist

$$\text{Wkl. } D'B'E' = \omega - \sigma' + 180^\circ$$

$$\text{Wkl. } D'B'C' = 90^\circ - (\sigma - \sigma' + \omega)$$

$$\text{Wkl. } E'P'F' = 90^\circ - (\sigma - \sigma')$$

Folglich ist für Fig. 1

$$x_a = \xi + \eta' \cos(\sigma + \sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos(\sigma + \sigma')$$

$$y_a = \eta + \eta' \sin(\sigma + \sigma' - \omega) - (p - \xi') \sin(\sigma + \sigma')$$

und für Fig. 2

$$\begin{aligned} x_i &= \xi - \eta' \cos\{\sigma - (\sigma' - \omega)\} + (p - \xi') \cos(\sigma - \sigma') \\ y_i &= \eta - \eta' \sin\{\sigma - (\sigma' - \omega)\} + (p - \xi') \sin(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (\text{I})$$

x und y sind die Coordinaten eines Punktes der gesuchten Curven. Aus diesen Formeln folgt, wenn wir x und y nach dem Bogen der Generatrix, welcher dem durchlaufenen Bogen der Directrix gleich ist, differentiiren:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{d\xi}{ds} \pm \frac{d\eta'}{ds} \cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \mp \eta' \sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} \\ &\quad \pm \frac{d\xi'}{ds} \cos\{\sigma \pm \sigma'\} \pm (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma') \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{d\eta}{ds} \pm \frac{d\eta'}{ds} \sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \pm \eta' \cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} \\ &\quad \pm \frac{d\xi'}{ds} \sin\{\sigma \pm \sigma'\} \mp (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma') \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} \end{aligned}$$

In diesen Formeln so wie im Folgenden haben die obenstehenden Zeichen Beziehung auf den Fall, dass die Normalen eine in der andern Verlängerung fallen; die untenstehenden hingegen auf den Fall, dass sie zusammenfallen.

Nun ist

$$\sin \sigma = \frac{d\xi}{ds} \quad \text{und} \quad \sigma' = -\frac{d\eta}{ds}$$

weil die Normalen an den gegebenen Curven nach dem Krümmungsmittelpunkt gezogen werden. Ebenso ist

$$\cos(\omega - \sigma') = \frac{d\xi'}{ds} \sin \omega \quad \text{und} \quad \cos \sigma' = -\frac{d\eta'}{ds} \sin \omega$$

Man hat also

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \sin \sigma \mp \frac{\cos \sigma' \cos \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\}}{\sin \omega} \pm \frac{\cos(\omega - \sigma') \cos(\sigma \pm \sigma')}{\sin \omega} \\ &\mp \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} [\eta' \sin \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \cos \sigma \mp \frac{\cos \sigma' \sin \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\}}{\sin \omega} \pm \frac{\cos(\omega - \sigma') \sin(\sigma \pm \sigma')}{\sin \omega} \\ &\pm \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} [\eta' \cos \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma')] \end{aligned}$$

Folglich

$$\frac{dx}{ds} = \mp \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} [\eta' \sin \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma')] \quad (\text{II})$$

$$\frac{dy}{ds} = \pm \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\} [\eta' \cos \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma')]$$

Sei τ der Winkel, welchen die Tangente der gesuchten Curve mit der X Achse macht, so ist:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\eta' \cos \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma')}{\eta' \sin \{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma')} \quad (\text{III})$$

Ist Σ der Winkel, welchen die Normale der gesuchten Curve mit der X Achse macht, so ist

$$\operatorname{tg} \Sigma = -\frac{dx}{dy}$$

Nennen wir die veränderlichen Coordinaten eines Punktes der Normale x_1 und y_1 , so wird die Gleichung

$$(x - x_1) \operatorname{tg} \Sigma = (y - y_1)$$

oder

$$[\xi \pm \eta' \cos \{ \sigma \pm (\sigma' - \omega) \} \mp (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma') - x_1] \operatorname{tg} \Sigma = \\ \eta \pm \eta' \sin \{ \sigma \pm (\sigma' - \omega) \} \mp (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma') - y_1$$

Nach Substitution des Wertes für $\operatorname{tg} \Sigma$ finden wir

$$(\xi - x_1) \operatorname{tg} \Sigma = \eta - y_1$$

was uns lehrt, dass die Normale der gesuchten Curve immer durch den Berührungspunkt der gegebenen Curven geht, was auch zu erwarten war, weil dieser Punkt das Momentancentrum ist. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass wenn an jeder Seite der Directrix sich dieselbe Curve wälzt, bei demselben Punkte der Directrix anfangend und mit demselben beschreibenden Punkte, die Tangenten in zwei entsprechenden Punkten der entstandenen Curven und an der Directrix im Berührungspunkte gezogen, einander in einem Punkte schneiden.

Ein Teil der Normale liegt zwischen dem beschreibenden Punkte und dem Berührungspunkte. Nennen wir diesen Teil k , so ist

$$k^2 = \eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi') \cos \omega$$

Wir können auch den Krümmungsradius P in jedem Punkte der gesuchten Curve bestimmen, wofür wir die bekannte Formel gebrauchen

$$P = \frac{\left\{ \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{ds^2} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2} \frac{dy}{ds}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \mp [\eta' \sin \{ \sigma \pm (\sigma' - \omega) \} - (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma')] \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} \pm \frac{d^2\sigma'}{ds^2} \right) \\ \mp \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right)^2 [\eta' \cos \{ \sigma \pm (\sigma' - \omega) \} - (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma')] \\ - \cos \sigma \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \pm [\eta' \cos \{ \sigma \pm (\sigma' - \omega) \} - (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma')] \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} \pm \frac{d^2\sigma'}{ds^2} \right) \\ \mp \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right)^2 [\eta' \sin \{ \sigma \pm (\sigma' - \omega) \} - (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma')] \\ - \sin \sigma \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right\}$$

Folglich

$$P = \frac{k^3 \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right)^3}{\pm \{ \eta' \cos(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos \sigma' \} \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right)^2 + k^3 \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds} \right)^3}$$

oder

$$P = \frac{k^3}{\pm \{ \eta' \cos(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos \sigma' \} \frac{1}{1/q \pm 1/q'} + k^2} \quad (\text{IV})$$

in welcher Formel q und q' die Krümmungsradien der beiden gegebenen Curven im Berührungspunkte sind.

Um den Winkel ε , welchen die Normale der gesuchten Curve im Berührungspunkte mit der Tangente an der Directrix macht, zu bestimmen, haben wir:

$$\cotg \varepsilon = -\operatorname{tg}(\sigma - \Sigma) = \pm \frac{\eta' \sin(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \sin \sigma'}{\eta' \cos(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos \sigma'}$$

oder

$$\sin \varepsilon = \frac{\eta' \cos(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos \sigma'}{\sqrt{\eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi') \cos \omega}}$$

Folglich wird jetzt ¹⁾)

$$P = \frac{k^2}{\mp \frac{1}{1/q \pm 1/q'} \sin \varepsilon + k}$$

Die Curve wird einen Wendepunkt haben, wenn

$$k = \pm \frac{qq'}{q' \pm q} \sin \varepsilon \quad (\text{V})$$

Berühren die beiden gegebenen Curven einander inwendig, das heisst fallen die Normalen zusammen, so wird $P = 0$ für $q = q'$; die gesuchte Curve hat eine Spitze.

Für die Länge eines Bogenelementes finden wir

$$\frac{dL_a}{ds} = \left\{ \frac{d\sigma}{ds} + \frac{d\sigma'}{ds} \right\} \sqrt{(\eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi') \cos \omega)} - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \right) k$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{ds} &= \pm \left\{ \frac{d\sigma}{ds} - \frac{d\sigma'}{ds} \right\} \sqrt{(\eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi') \cos \omega)} \\ &= \pm \left\{ \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} \right\} k \end{aligned}$$

Sei

$$q > q' \quad \text{also} \quad 1/q < 1/q'$$

und man hat

$$dL_i = - \left\{ 1/q - 1/q' \right\} k ds$$

folglich

$$dL_a + dL_i = 21/q' k ds \quad (\text{VI})$$

1) Salmon Fiedler. Höhere ebene Curven. Seite 347.

Ist immer $q > q'$, so ist die Summe der Curven an beiden Seiten der Directrix beschrieben, unabhängig von der Form der Directrix und zwar zweimal so gross als die Curve, welche bei einer gleich grossen Wälzung der Generatrix eine gerade Linie entlang durchlaufen sein würde.

Sei aber $q < q'$ also

$$dL_i = \pm \{1/q - 1/q'\} k ds$$

und folglich

$$dL_a - dL_i = 2^1/q' k ds \quad (\text{VII})$$

Nun ist die Differenz der Curven an beiden Seiten der Directrix beschrieben unabhängig von der Form dieser Curve. Während der betrachteten Wälzung darf die Form $\frac{1}{q} - \frac{1}{q'}$ nicht die Zeichen wechseln.

Berühren die Generatrix und die Directrix einander immer in übereinkünftigen Punkten, während sie congruent sind, so ist dL_i immer null, folglich ist dann L_a zweimal so lang als die Curve, welche bei einer gleich grossen Wälzung längs einer geraden Linie beschrieben wird.

Um die Oberfläche zu bestimmen, welche eingeschlossen wird durch die Curve, die Directrix und die Normalen beim Anfang und beim Ende der Bewegung, so können wir uns die Oberfläche geteilt denken in kleine Vierecke (Fig. 3), von welchen ds die eine Seite ist, und die Normalen der durchlaufenen Curve, welche durch die Enden von ds gehen, die anliegenden Seiten sind, während die vierte Seite das Bogenelement der gesuchten Curve ist.

Teilen wir jetzt das Viereck $ABCD$ in zwei Dreiecke ABC und ACD , so ist

$$AD = AC = BC = k$$

Ist weiter

$$\text{Wkl. } CBA = 180^\circ - \varepsilon \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } DAC = \delta$$

so ist die Oberfläche eines Vierecks $\frac{1}{2} k^2 \delta + \frac{1}{2} k ds \sin \varepsilon$. Berühren die beiden Curven einander auswendig, so ist

$$\delta = d\sigma + d\sigma'$$

bei innerer Berührung ist

$$\delta = \pm (d\sigma - d\sigma')$$

die ganze Oberfläche eingeschlossen zwischen den beiden Curven, welche durch den Punkt bei einer Wälzung der Directrix an beiden Seiten der Generatrix durchlaufen werden, und die Normalen beim Anfang und beim Ende sind immer gleich

$$\begin{aligned} & - \int \{ \eta' \cos(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos \sigma' \} ds \\ & + \int \{ \eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi') \cos \omega \} d\sigma' \quad (\text{VIII}) \end{aligned}$$

Innerhalb der Grenzen des Integrals dürfen jedoch die gegebenen Curven keine Spitzen haben. Man findet also, dass die gesuchte Oberfläche unabhängig von der Directrix ist, und dass sie immer zweimal grösser ist als die Oberfläche, eingeschlossen durch die Curve, welche durch den Punkt bei einer gleich grossen Wälzung längs einer geraden Linie beschrieben wird.¹⁾

A. Die Generatrix ist eine Ellipse.

Seien die beiden halben conjugirten Achsen β und β' und der Coordinatenwinkel ω , so ist

$$\xi' = \beta \cos \Theta \quad \text{und} \quad \eta' = \beta' \sin \Theta$$

in welcher Formel Θ die excentrische Anomalie ist. β kann grösser und kleiner sein als β' .

Die halben Hauptachsen der Ellipse sind a und b , während ψ der excentrische Winkel zwischen den Achsen β und a ist, dann hat man

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi \\ \beta'^2 &= a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi \\ 2\beta\beta' \cos \omega &= (b^2 - a^2) \sin^2 \psi \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

und

Weiter ist:

$$\frac{\cos(\omega - \sigma')}{\cos \sigma'} = - \frac{d\xi'}{d\eta'} = \frac{\beta}{\beta'} \operatorname{tg} \Theta \quad (b)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega - \sigma') &= + \frac{d\xi'}{ds} \sin \omega = - \beta \sin \Theta \sin \omega \frac{d\Theta}{ds} \\ \cos \sigma' &= - \frac{d\eta'}{ds} \sin \omega = - \beta' \cos \Theta \sin \omega \frac{d\Theta}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\frac{d\sigma'}{ds} = \beta\beta' \sin \omega \left(\frac{d\Theta}{ds} \right)^2 \quad (d)$$

Endlich finden wir²⁾

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{d\Theta} \right)^2 &= \left(\frac{d\xi'}{d\Theta} \right)^2 + \left(\frac{d\eta'}{d\Theta} \right)^2 + 2 \frac{d\xi'}{d\Theta} \frac{d\eta'}{d\Theta} \cos \omega \\ &= \beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega \end{aligned}$$

1) Man kann dieses Resultat auch auf einem viel längeren Wege an rein analytische Weise erhalten. Die oben gegebene Ableitung verdanke ich Prof. Dr. H. A. Lorentz zu Leiden.

2) Schlömilch. *Comp. der höheren Analysis*. Seite 385.

Liegt der beschreibende Punkt auf der Hauptachse, so wird $\beta = a$, $\beta' = b$ und $\omega = 90^\circ$.

Die Formeln (IV) und (V) werden

$$P = \frac{\{\beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta \cos \omega\}^{3/2}}{1} \quad (IV^*)$$

$$\mp \beta'(\beta - p \cos \Theta) \frac{\sqrt{\{\beta'^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \sin^2 \Theta - 2\beta\beta' \cos \Theta \sin \Theta \cos \omega\}}}{^{1/q} \pm ^{1/q}}$$

$$+ \{\beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta \cos \omega\}$$

und

$$\{\beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta \cos \omega - \quad (V^*)$$

$$\pm \frac{\beta'(\beta - p \cos \Theta)}{^{1/q} \pm ^{1/q}} \frac{1}{\sqrt{\{\beta'^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega\}}}$$

In diesen Formeln ist

$$\frac{1}{q} = \frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{\beta\beta' \sin \omega}{\sqrt{\{\beta'^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega\}}}$$

Die Formel (VIII) gibt für die Oberfläche bei einer ganzen Wälzung der Ellipse:

$$O = \beta' \sin \omega \int_0^{2\pi} (\beta - p \cos \Theta) d\Theta + \beta\beta' \sin \omega \times$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega}{\beta'^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \sin^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega} d\Theta$$

oder

$$O = 2\beta\beta' \sin \omega \left\{ \int_0^\pi d\Theta \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \frac{\beta'^2 \sin^2 \Theta + p^2 + \beta^2 \cos^2 \Theta + 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega}{\beta'^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \sin^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega} d\Theta \right.$$

$$\left. - 2\beta\beta' \sin \omega (\beta^2 + \beta'^2 + p^2) \times \right.$$

$$\left. \int_0^\pi \frac{d\Theta}{\beta'^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \sin^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega} \right.$$

$$\left. - 2\beta\beta' \sin \omega (\beta^2 + \beta'^2 + p^2) \int \frac{dx}{\beta'^2 - 2\beta\beta' \cos \omega x + \beta^2 x^2} \right.$$

folglich

$$O = 2\pi\beta^2 + 2\pi\beta'^2 + 2\pi p^2 \quad (VIII^*)$$

Dieses lehrt uns, dass diese Oberfläche immer gleich ist zweimal der Summe der Oberflächen von drei Kreisen, von welchen die halben

conjugirten Achsen und die Entfernung des beschreibenden Punktes von dem Mittelpunkte die Radien sind.

I. Die Ellipse wälzt eine gerade Linie entlang.

Die gerade Linie sei die X Achse des festen Coordinatensystems und zum Coordinatenanfang wählen wir den Punkt, wo die ξ Achse die X Achse beim Anfang der Bewegung schneidet. Nun ist $\sigma = 270^\circ$ und ξ ist gleich dem Bogen der Ellipse zwischen dem Berührungspunkte und dem Punkte, wo die Achse, auf welcher der beschreibende Punkt liegt, die Ellipse schneidet. Nun ist $\sigma = 270^\circ$ und ξ ist gleich dem Bogen der Ellipse zwischen dem Berührungspunkte und dem Punkte, wo die Achse, auf welcher der beschreibende Punkt liegt, die Ellipse schneidet. Also wird (I)

$$\begin{aligned}x &= \xi + \eta' \sin(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \sin \sigma' \\y &= -\eta' \sin(\sigma' - \omega) + (p - \xi') \cos \sigma'\end{aligned}$$

ξ ist negativ, weil sich die Ellipse nach der negativen Seite der X Achse wälzt. Nehmen wir die positive Seite der X Achse in Uebereinstimmung mit der Richtung der Wälzung, so finden wir:

$$\begin{aligned}x &= \xi + \eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma' \\y &= -\eta' \cos(\omega - \sigma') + (p - \xi') \cos \sigma'\end{aligned}$$

Diese Formeln können auch unmittelbar aus einer Figur abgeleitet werden.

Wir werden untersuchen, welche Culminationspunkte die Curve in Bezug zur X Achse haben kann. Es muss die Ordinate y ihr Maximum oder Minimum erreichen, also $\frac{dy}{ds} = 0$ sein.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{ds} &= -\frac{d\eta'}{ds} \cos(\omega - \sigma') - \eta' \sin(\omega - \sigma') \frac{d\sigma'}{ds} \\&\quad - (p - \xi') \sin \sigma' \frac{d\sigma'}{ds} - \frac{d\xi'}{ds} \cos \sigma = 0\end{aligned}$$

und nach (c)

$$\eta' \sin(\omega - \sigma') = -(p - \xi') \sin \sigma'$$

Diese Formel ist, wie zu erwarten war, die Bedingung, dass das Perpendikel aus einem willkürlichen Punkte nach der Tangente der Ellipse gezogen so klein oder so gross als möglich ist. Es wird sein Minimum erreichen, wenn dies Perpendikel gerade durch den Berührungspunkt geht (Fig. 4.), sein Maximum, wenn es durch den Punkt P' geht, der auf derselben Achse gleichweit vom Mittelpunkte der Ellipse wie der Punkt P liegt (Fig. 5.).

In den Dreiecken PRC und $P'C'R$ ist:

$$\eta' : \xi' - p = \sin \sigma' : \sin (\omega - \sigma')$$

oder

$$\eta' \sin (\omega - \sigma') = -(p - \xi') \sin \sigma'$$

Transformiren wir diese Gleichung durch Einführung der Θ :

$$\begin{aligned} & \eta' \sin \omega \cos \sigma' - (\eta' \cos \omega - p + \xi') \sin \sigma' \\ & \beta'^2 \sin^2 \omega \sin \Theta - \{\beta' \sin \Theta \cos \omega - p + \beta \cos \Theta\} \{\beta \operatorname{tg} \Theta - \beta' \cos \omega\} \\ & \beta'^2 \sin \Theta \cos \Theta - \beta \beta' \cos \omega (\sin^2 \Theta - \cos^2 \Theta) - p \beta \sin \Theta + \beta^2 \sin \Theta \cos \Theta \\ & \quad + p \beta' \cos \omega \cos \Theta \quad (1) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung muss Θ bestimmt werden, wenn wir einführen $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta$, so finden wir in Bezug auf diese Unbekannte eine Gleichung vom vierten Grade, welche im allgemeinen nicht zu lösen ist.

Für den Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der X Achse macht, finden wir nach (III)

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\eta' \sin (\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma'}{\eta' \cos (\omega - \sigma') - (p - \xi') \cos \sigma'} \quad (2)$$

Für $\Theta = \pi$ wird $\sigma' = \omega$ also

$$\operatorname{tg} \tau = -\operatorname{cotg} \omega$$

Die Tangente steht in jenem Falle senkrecht auf der bewegten ξ' Achse.

Um zu finden, ob die Curve auch Wendepunkte hat, müssen wir (IV*) gebrauchen, alsdann finden wir

$$\begin{aligned} & \{\beta - p \cos \Theta\} \{\beta'^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta \beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega\} \\ & - \beta \{\beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta' (p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta \cos \omega\} \quad (3) \end{aligned}$$

Auch aus dieser Formel ist Θ im allgemeinen nicht zu lösen.

Den Krümmungsradius finden wir mittels (IV*)

$$P = \frac{\{\beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta' (p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta \cos \omega\}^{\frac{3}{2}}}{\{\beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta' (p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta \cos \omega\} - \frac{(\beta - p \cos \Theta)}{\beta}}$$

$$\times (\beta'^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta \beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega) \quad (4)$$

Für $\Theta = 2n\pi$ ist

$$P = \frac{\beta(p - \beta)^2}{(p - \beta)\beta + \beta'^2}$$

für $\Theta = (2n + 1)\pi$

$$P = \frac{\beta(p + \beta)^2}{(p + \beta)\beta - \beta'^2}$$

und für $\Theta = (2n + 1)\frac{1}{2}\pi$

$$P = \frac{(\beta' \pm p)^2}{(\beta' \pm p)^2 - \beta^2}$$

Für die Länge L des Weges, welchen der Punkt bei einer Wälzung der Ellipse durchläuft, findet man:

$$L = \int \{\eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi')\cos\omega\}^{\frac{1}{2}} d\sigma'$$

oder

$$L = \beta\beta'\sin\omega \int_0^{2\pi} \frac{(\beta'^2\sin^2\Theta + (p - \beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega)^{\frac{1}{2}}}{\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2\cos^2\Theta - 2\beta\beta'\cos\Theta\sin\Theta\cos\omega} d\Theta \quad (5)$$

Führen wir in diese Formel ein $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta = x$, so wird sie

$$L = \beta\beta'\sin\omega \int \frac{[(p - \beta)^2 + 4(p - \beta)\beta'\cos\omega x + 2(2\beta'^2 + p^2 - \beta^2)x^2 - 4(p + \beta)\beta'\cos\omega x^3 + (p + \beta)^2x^4]^{\frac{1}{2}}}{4\beta^2x^2 + \beta'^2(1 - x^2)^2 - 4\beta\beta'\cos\omega x(1 - x^2)} dx \quad (6)$$

Für die Oberfläche, welche eingeschlossen wird durch die Curve, die gerade Linie und die Normalen beim Anfang und beim Ende einer Wälzung der Ellipse, finden wir nach (VIII) und nach (VIII*)

$$O = \pi\beta^2 + \pi\beta'^2 + \pi p^2 = \pi a^2 + \pi b^2 + \pi p^2 \quad (7)$$

die Oberfläche ist also gleich der Summe der Oberflächen von drei Kreisen, von welchen die halben Hauptachsen und die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt die Radien sind ¹⁾. Gebrauchen wir diese Formeln für einige besonderen Fälle.

1. Der beschreibende Punkt liegt auf der Ellipse.

In diesem Falle ist $p = \beta$.

Die Gleichung (1), welche uns die Culminationspunkte gibt, wird jetzt:

$$\begin{aligned} \beta'^2\sin\Theta\cos\Theta &= -\beta\beta'\cos\omega\cos 2\Theta - \beta^2\sin\Theta(1 - \cos\Theta) + \beta\beta'\cos\omega\cos\Theta \\ 2\beta'^2\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\Theta &= 2\beta\beta'\cos\omega\sin\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{3}{2}\Theta - 2\beta^2\sin\Theta\sin^2\frac{1}{2}\Theta \end{aligned}$$

folglich

$$\sin\frac{1}{2}\Theta = 0 \quad \therefore \quad \Theta = 2n\pi$$

dieses ist der Fall, wenn der beschreibende Punkt in die gerade Linie kommt.

¹⁾ Nouv. Corr. Math. Tome III. p. 11 und Jacob Steiner's Gesammelte Werke 2 ter Band, Seite 136.

Weiter ist

$$\beta'^2 \cos \frac{1}{2} \Theta (\cos^2 \frac{1}{2} \Theta - \sin^2 \frac{1}{2} \Theta) = \beta \beta' \cos \omega (3 \sin \frac{1}{2} \Theta - \sin^3 \frac{1}{2} \Theta) - 2 \beta^2 \sin^2 \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} \Theta$$

folglich

$$\beta'^2 \cotg^3 \frac{1}{2} \Theta - 3 \beta \beta' \cos \omega \cotg^2 \frac{1}{2} \Theta + (2 \beta^2 - \beta'^2) \cotg \frac{1}{2} \Theta + \beta \beta' \cos \omega = 0$$

Wir müssen untersuchen, wann diese Gleichung drei reelle Wurzeln hat. Sei

$$\cotg \frac{1}{2} \Theta = y + \frac{\beta}{\beta'} \cos \omega$$

so finden wir

$$y^3 + \left(\frac{2\beta^2}{\beta'^2} - 1 - 3 \frac{\beta^2}{\beta'^2} \cos^2 \omega \right) y + 2 \frac{\beta^3}{\beta'^3} \sin^2 \omega \cos \omega = 0$$

Sollen die Wurzeln reell sein, so muss sein

$$\left(2 \frac{\beta^3}{\beta'^3} \sin^2 \omega \cos \omega \right)^2 + \frac{4}{27} \left(\frac{2\beta^2}{\beta'^2} - 1 - 3 \frac{\beta^2}{\beta'^2} \cos^2 \omega \right)^3 < 0$$

oder

$$27 \beta^6 \sin^4 \omega - 27 \beta^6 \sin^6 \omega - (\beta'^2 + \beta^2)^3 + 9(\beta'^2 + \beta^2) \beta^2 \sin^2 \omega - 27(\beta'^2 + \beta^2) \beta^4 \sin^4 \omega + 27 \beta^6 \sin^6 \omega < 0$$

$$-(\beta'^2 + \beta^2)^3 + 9(\beta'^2 + \beta^2)^2 \beta^2 \sin^2 \omega - 27 \beta'^2 \beta^4 \sin^4 \omega < 0$$

Nach Einführung der Hauptachsen finden wir

$$-(a^2 + b^2)^3 + 9(a^2 + b^2) \frac{a^2 b^2}{\beta'^2} - 27 \frac{a^4 b^4}{\beta'^2} < 0$$

folglich

$$\beta^2 < \frac{(a^2 + b^2)^4 - 9a^2 b^2 (a^2 + b^2) + 27a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^3}$$

Soll β reell sein, so muss der Zähler positiv sein. Dieses ist immer der Fall, denn man kann ihn transformiren in

$$\{(a^2 + b^2)^2 - 4,5 a^2 b^2\}^2 + 6,75 a^4 b^4$$

Sei a die kleinste halbe Achse, so muss $\beta > a$ sein, also

$$a^2 < \beta^2 < \frac{a^8 - 5a^6 b^2 + 15a^4 b^4 - 5a^2 b^6 + b^8}{(a^2 + b^2)^3} \quad (a)$$

folglich

$$8a^6 - 12a^4 b^2 + 6a^2 b^4 - b^6 < 0$$

oder

$$2a^2 - b^2 < 0$$

also

$$b > a \sqrt{2}$$

Soll die Curve drei Culminationspunkte in Bezug auf die X Achse haben können, so muss die längste Achse der Ellipse grösser

sein als die kürzeste Achse multiplicirt mit $\sqrt{2}$; was übereinstimmt mit $b^2 - a^2 > a^2$, das heisst, die Excentricität muss grösser sein, als die halbe kleine Achse der Ellipse.

Die Grenzen von β sind durch die Formel (α) bestimmt. Die Gleichung (3) wird in diesem Falle

$$(1 - \cos \Theta) \{ \beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega \} \\ - \beta'^2 \sin^2 \Theta + \beta^2 (1 - \cos \Theta)^2 - 2\beta\beta' \cos \omega \sin \Theta (1 - \cos \Theta)$$

Diese Gleichung kann dividirt werden durch $1 - \cos \Theta$, also $\Theta = 2n\pi$ dieses gibt wieder dieselben Punkte in der X Achse.

Auch ist

$$\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega \\ = \beta'^2 (1 + \cos \Theta) + \beta^2 (1 - \cos \Theta) - 2\beta\beta' \cos \omega \sin \Theta$$

$$\beta^2 (\sin^2 \Theta - 1 + \cos \Theta) + \beta'^2 (\cos^2 \Theta - \cos \Theta - 1) \\ + 2\beta\beta' \cos \omega (1 - \cos \Theta) \sin \Theta = 0$$

oder

$$\beta'^2 \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \Theta + 8\beta\beta' \cos \omega \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} \Theta + (2\beta^2 - 4\beta'^2) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Theta - (2\beta^2 + \beta'^2) = 0$$

Diese Gleichung hat immer zwei imaginäre Wurzeln, die beiden anderen Wurzeln werden reell sein, wenn die Curve drei Culminationspunkte in Bezug auf die X Achse hat

In den Punkten, welche in der X Achse liegen, ist der Krümmungsradius $P = 0$; diese Punkte sind also Spitzen.

Für die Länge der Curve, welche durchlaufen wird bei einer Wälzung der Ellipse, finden wir nach (6)

$$L = 4\beta\beta' \sin \omega \int \frac{x dx \sqrt{\{\beta'^2 - 2\beta\beta' \cos \omega x + \beta^2 x^2\}}}{4\beta^2 x^2 + \beta'^2 (1 - x^2)^2 - 4\beta\beta' \cos \omega x (1 - x^2)}$$

2. Der beschreibende Punkt liegt auf einer Hauptachse

Die Gleichungen der Curve sind

$$x = \xi + \eta' \cos \sigma' + (p - \xi') \sin \sigma' \\ y = -\eta' \sin \sigma' + (p - \xi') \cos \sigma'$$

Führen wir die Werte für ξ' , η' und σ' ein, so ist:

$$x = \int_0^\Theta \sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)} d\Theta - \frac{(b^2 - a^2) \sin \Theta \cos \Theta - ap \sin \Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)}}$$

$$y = \frac{b(a - p \cos \Theta)}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)}}$$

Ist $p > a$, so werden verschiedene Teile der Curve einander schneiden, wir werden den Ort dieser Doppelpunkte bestimmen.

Für zwei Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ muss

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

sein, folglich

$$\frac{a - p \cos \Theta}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \Theta}} = \frac{a - p \cos \Theta'}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \Theta'}}$$

Setzen wir

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = l^2$$

so muss sein:

$$\begin{aligned} (a - p \cos \Theta)^2 (1 - l^2 \cos^2 \Theta') &= (a - p \cos \Theta')^2 (1 - l^2 \cos^2 \Theta) \\ - 2a(\cos \Theta - \cos \Theta') + p(\cos^2 \Theta - \cos^2 \Theta') \\ + 2al^2(\cos \Theta \cos^2 \Theta' - \cos \Theta' \cos^2 \Theta) &= 0 \end{aligned}$$

folglich kann

$$\cos \Theta = \cos \Theta'$$

sein und also

$$\Theta' = 2n\pi - \Theta$$

oder auch

$$-2a + p(\cos \Theta + \cos \Theta') - 2al^2 \cos \Theta \cos \Theta' = 0$$

Dieser Gleichung können nicht zugleich reelle Werte von Θ und Θ' genügen, weil entweder $\cos \Theta$ oder $\cos \Theta'$ grösser als 1 sein müsste.

Soll $x_1 = x_2$ sein, dann muss sein:

$$\begin{aligned} \int_0^\Theta \sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)} d\Theta - \frac{(b^2 - a^2) \sin \Theta \cos \Theta + ap \sin \Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)}} \\ = \int_0^{\Theta'} \sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta' + b^2 \cos^2 \Theta')} d\Theta' - \frac{(b^2 - a^2) \sin \Theta' \cos \Theta' + ap \sin \Theta'}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta' + b^2 \cos^2 \Theta')}} \end{aligned}$$

Nach Substitution wird

$$\begin{aligned} - 2 \frac{(b^2 - a^2) \cos \Theta \sin \Theta + pa \sin \Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)}} \\ = \int_0^{2n\pi - \Theta} \sqrt{(b^2 \cos^2 \Theta + a^2 \sin^2 \Theta)} d\Theta - \int_0^\Theta \sqrt{(b^2 \cos^2 \Theta + a^2 \sin^2 \Theta)} d\Theta \end{aligned}$$

Nennen wir ein Viertel des Ellipsenumfanges bK , in welcher Formel

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 \Theta\right)^{\frac{1}{2}} d\Theta$$

ist, so haben wir nach der Lehre der elliptischen Functionen:

$$\begin{aligned} & - \frac{(b^2 - a^2) \cos \Theta \sin \Theta + pa \sin \Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)}} \\ & = 2nbK - \int_0^{\Theta} \sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)} d\Theta \end{aligned}$$

Substituiren wir dieses in die Gleichung für x , so finden wir für die Doppelpunkte

$$x = 2nbK$$

Diese Formel lehrt uns, dass diese Punkte immer liegen auf Linien, welche senkrecht zur X Achse stehen, und welche den halben Umfang der Ellipse von einander entfernt sind.

Die Formel (1) gibt uns zur Bestimmung der Culminationspunkte

$$b^2 \sin \Theta \cos \Theta = -pa \sin \Theta + a^2 \sin \Theta \cos \Theta$$

diesem genügt

$$\sin \Theta = 0$$

also

$$\Theta = n\pi$$

und

$$\cos \Theta = \frac{pa}{a^2 - b^2}$$

a ist die Achse, auf welcher der beschreibende Punkt liegt.

$$\text{Ist } a > b \text{ so muss } p < \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$\text{„ } a < b \text{ „ „ } p < \frac{b^2 - a^2}{a}$$

sein, damit $\cos \Theta$ reell ist.

Für die Culminationspunkte ist

$$x = \int_0^{n\pi} \sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)} d\Theta = 2nbK$$

und

$$y = a - p \text{ oder } y = a + p$$

Gibt es noch zwei Culminationspunkte, so ist

$$y = b \sqrt{\frac{a^2 - b^2 - p^2}{a^2 - b^2}}$$

3. Das Ende der Hauptachse ist der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $p = a$, so gibt die Formel (1)

$$b^2 \sin \Theta \cos \Theta = -a^2 \sin \Theta + a^2 \sin \Theta \cos \Theta$$

folglich ist wieder

$$\sin \Theta = 0 \quad \text{also} \quad \Theta = n\pi$$

und

$$\cos \Theta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

Dieser letzte Wert ist reell, wenn $b^2 > 2a^2$ ist, wie wir früher gefunden haben.

Die Ellipse, welche in Fig. 6. die gezeichneten Curven entstehen lässt, genügt dieser Bedingung; Fig. 6A. gibt die Curve, welche durch das Ende der grossen Achse durchlaufen wird und Fig. 6B. diejenige, welche durch das Ende der kleinen Achse beschrieben wird.

Die Coordinaten der Culminationspunkte sind

für $\Theta = n\pi$ wird

$$x = 2nbK \quad \text{und} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 2a$$

für $\cos \Theta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$ wird

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$$

Jetzt ist es auch möglich die Wendepunkte zu finden. Die Formel (3) wird:

$$(1 - \cos \Theta) \{a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta\} = b^2 \sin^2 \Theta + a^2 (1 - \cos \Theta)^2$$

$$a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \Theta = b^2 (1 + \cos \Theta) + a^2 (1 - \cos \Theta)$$

also ist

$$1 - \cos \Theta = 0 \quad \text{oder} \quad \Theta = 2n\pi$$

Diese sind wieder die Punkte in der X Achse; auch ist

$$(a^2 - b^2) \cos^2 \Theta - (a^2 - b^2) \cos \Theta + b^2 = 0$$

folglich

$$\cos \Theta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 5b^2}{a^2 - b^2}}$$

Für das + Zeichen ist $\cos \Theta > 1$

$\cos \Theta$ muss grösser sein als -1 oder $-1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 5b^2}{a^2 - b^2}}$

$$3 > \sqrt{\frac{a^2 - 5b^2}{a^2 - b^2}}$$

$$9a^2 - 9b^2 < a^2 - 5b^2$$

oder

$$2a^2 < b^2$$

also b muss grösser als $a\sqrt{2}$ sein, wenn Θ reell sein soll. Den gefundenen Wert für Θ können wir in y und $\text{tg } \tau$ substituieren.

Für den Krümmungsradius finden wir mittels (4)

$$\text{Für } \Theta = 2n\pi$$

$$P = 0$$

$$\text{„ } \Theta = (2n+1)\pi$$

$$P = \frac{4a^2}{2a^2 - b^2}$$

$$\text{„ } \Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$$

$$P = \frac{(b^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{b^2}$$

Die Länge der Curve wird nach (6)

$$L = 4ab \int_0^{\infty} \frac{x dx \sqrt{(b^2 + a^2 x^2)}}{4a^2 x^2 + b^2 - 2b^2 x^2 + b^2 x^4}$$

Sei $b^2 + a^2 x^2 = y^2$, so ist:

$$L = 4a^2 b \int_b^{\infty} \frac{y^2 dy}{b^2(b^4 + 2a^2 b^2 - 3a^4) + 2y^2(2a^4 - a^2 b^2 - b^4) + b^2 y^4}$$

4. Der Brennpunkt ist der beschreibende Punkt.

In diesem Falle ist $a > b$ und $p = c$, wenn $a^2 - b^2 = c^2$ ist.

Um die Culminationspunkte zu finden, haben wir nach (1)

$$b^2 \sin \Theta \cos \Theta = -ac \sin \Theta + a^2 \sin \Theta \cos \Theta$$

$$\sin \Theta = 0 \quad \text{also} \quad \Theta = n\pi$$

und

$$\cos \Theta = \frac{a}{c} > 1$$

also wie zu erwarten war, immer imaginär. Die Curve hat also nur zwei Culminationspunkte, für welche

$$x = 2nbK$$

und

$$y = a - c \text{ oder } y = a + c \text{ ist.}$$

Die Formel (3) gibt für die Wendepunkte

$$(a - c \cos \Theta)(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta) = a \{ b^2 \sin^2 \Theta + (c - a \cos \Theta)^2 \}$$

oder

$$(a - c \cos \Theta)(a^2 - c^2 \cos^2 \Theta) = a(a - c \cos \Theta)^2$$

folglich

$$\cos \Theta = \frac{a}{c}$$

dieser Wert ist imaginär, und

$$a + c \cos \Theta = a \text{ oder } \cos \Theta = 0$$

also

$$\Theta = (2n + 1) \frac{1}{2} \pi$$

Jeder Teil der Curve (Fig. 6C.) hat also zwei Wendepunkte. Mittels der Formel (2) finden wir den Winkel τ , welchen die Tangente in diesen Punkten an die Curve gezogen mit der X Achse macht.

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{b^2 \cos \Theta \sin \Theta + (c - a \cos \Theta) a \cos \Theta}{ba \sin^2 \Theta - (c - a \cos \Theta) b \cos \Theta} = \pm \frac{c}{b}$$

Für diese Punkte ist:

$$x = (2n + 1) bK \mp c \text{ und } y = b$$

Für den Krümmungsradius in jedem Punkte der Curve finden wir nach (4)

$$P = \frac{a \{ b^2 \sin^2 \Theta + (c - a \cos \Theta)^2 \}^{3/2}}{-(a - c \cos \Theta)(a^2 - c^2 \cos^2 \Theta) + a \{ b^2 \sin^2 \Theta + (c - a \cos \Theta)^2 \}}$$

Ist die Länge der Normale

$$k = \sqrt{ \{ b^2 \sin^2 \Theta + (c - a \cos \Theta)^2 \} }$$

so finden wir

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{k} = \frac{-(a - c \cos \Theta)(a^2 - c^2 \cos^2 \Theta) + 2a(a - c \cos \Theta)^2}{a(a - c \cos \Theta)^3} = \frac{1}{a}$$

Dieser Eigenschaft zufolge kann die Figur, welche entsteht durch die Rotation dieser Curve um die gerade Linie, eine Gleichgewichtsfläche einer Flüssigkeit, welche keinen auswendigen Kräften ausgesetzt ist, sein. Diesem Rotationskörper hat Plateau¹⁾ den Namen von Ouduloïde gegeben.

1) Plateau. Statique des liquides Vol. I pag. 83.

In den Culminationspunkten findet man

$$\text{für } \Theta = 2n\pi \quad P = \frac{a}{c}(a-c)$$

$$\text{für } \Theta = (2n+1)\pi \quad P = \frac{a}{c}(a+c)$$

Für die Länge eines Teiles finden wir mittels (6)

$$L = 2 \int_0^\pi \sqrt{(\eta')^2 + (c - \xi')^2} d\sigma' = 2ab \int_0^\pi \frac{d\Theta}{a + c \cos \Theta}$$

Sei $\Theta = 2\varphi$ so wird

$$L = 4ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(a+c)\cos^2\varphi + (a-c)\sin^2\varphi}$$

$$= \left| \frac{4ab}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \right) \right|_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

also

$$L = 2\pi a \quad (\beta)$$

Die Länge dieser Curve ist also immer gleich dem Umfang des Kreises, welcher die halbe grosse Achse als Radius hat, und diese Länge ist also immer von der kurzen Achse unabhängig.

Die Oberfläche

$$O = \pi a^2 + \pi b^2 + \pi c^2 = 2\pi a^2$$

5. Der Mittelpunkt ist der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $p = 0$ (Fig. 6D).

Für die Culminationspunkte finden wir durch die Formel (1):

$$b^2 \sin \Theta \cos \Theta = a^2 \sin \Theta \cos \Theta$$

Dieser Formel genügt

$$\sin 2\Theta = 0; \text{ also } \Theta = \frac{1}{2}\pi$$

Jeder Teil der Curve hat also vier Culminationspunkte, und die Coordinaten dieser Punkte sind:

$$x = nbK \text{ und } y = a \text{ oder } y = b$$

Die Formel (3) wird in diesem Falle

$$a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta = b^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta$$

folglich

$$a^2 \cos 2\Theta = b^2 \cos 2\Theta \text{ und } 2\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$$

Jeder Teil der Curve hat also auch vier Wendepunkte. Die Coordinaten ¹⁾ dieser Punkte sind:

$$x = b E\{k, (2n+1)\frac{1}{2}\pi\} \quad \text{und} \quad y = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Durch die Formel (2) finden wir

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{b^2 - a^2}{ab} \sin \Theta \cos \Theta$$

folglich ist in einem Wendepunkte

$$\operatorname{tg} \tau = \pm \frac{c^2}{2ab}$$

Der Krümmungsradius ist in den Culminationspunkten

$$\text{für } \Theta = 2n\frac{1}{2}\pi \quad P = \frac{a^3}{a^2 - b^2}$$

$$\text{für } \Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi \quad P = \frac{b^3}{a^2 - b^2}$$

Für die Länge der Curve bei einer Wälzung der Ellipse beschrieben, finden wir nach (5):

$$L = 4ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(b^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta)^{\frac{1}{2}}}{a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta} d\Theta$$

Sei

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2 \quad \text{und} \quad \frac{b^2}{a^2} = l^2$$

während wir immer dafür sorgen können, dass $0 < k' < 1$ ist, so wird

$$L = 4b \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \Theta)}}{l^2 + k^2 \sin^2 \Theta} d\Theta$$

also

$$\begin{aligned} L &= 4b(1+l^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\Theta}{(l^2+k^2 \sin^2 \Theta)\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \Theta)}} - 4b \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\Theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \Theta)}} \\ &= 4b \{(1+l^2) \Pi(l, k, \frac{1}{2}\pi) - F(k, \frac{1}{2}\pi)\} \end{aligned} \quad (\gamma)$$

II. Die Ellipse wälzt sich einen Kreis entlang.

Die Ellipse kann den Kreis auswendig oder inwendig berühren; auf den ersten Fall beziehen sich in den folgenden Betrachtungen

1) Nouv. Corr. Math. Tome III p. 6.

die obenstehenden, auf den zweiten die untenstehenden Zeichen. Der Mittelpunkt des Kreises wird zum Coordinatenanfang gewählt.

Jetzt ist

$$\xi = R \cos \varphi \quad \text{und} \quad \eta = R \sin \varphi \quad \sigma = 180^\circ + \psi$$

$$x = R \cos \varphi \mp \eta' \cos \{ \varphi \pm (\sigma' - \omega) \} \pm (p - \xi') \cos (\varphi \pm \sigma')$$

$$y = R \sin \varphi \mp \eta' \sin \{ \varphi \pm (\sigma' - \omega) \} \pm (p - \xi') \sin (\varphi \pm \sigma')$$

Führen wir Polarcoordinaten ein, für welche

$$x = r \cos \chi \quad \text{und} \quad y = r \sin \chi$$

so wird

$$r^2 = R^2 + (p - \xi')^2 + \eta'^2 - 2\eta'(p - \xi') \cos \omega \mp 2\eta' R \cos (\sigma' - \omega) \pm 2R(p - \xi') \cos \sigma'$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\varphi - \chi) &= \frac{r \sin \varphi \cos \chi - r \cos \varphi \sin \chi}{r \cos \varphi \cos \chi + r \sin \varphi \sin \chi} \\ &= \frac{\eta' \sin (\sigma' - \omega) - (p - \xi') \sin \sigma'}{R \mp \eta' \cos (\sigma' - \omega) \pm (p - \xi') \cos \sigma'} \end{aligned}$$

Beginnen wir die Anomalie zu zählen bei einem Punkte, in welchen die bewegende ξ' Achse den Kreis in dem Berührungspunkte schneidet, so ist der Bogen zwischen einem Berührungspunkte und dem genannten Punkte dem Bogen der Ellipse gleich. Nennen wir diesen Bogen B , so ist

$$\psi = \frac{B}{R} - \operatorname{arctg} \frac{\eta' \sin (\sigma' - \omega) - (p - \xi') \sin \sigma'}{R \mp \eta' \cos (\sigma' - \omega) \pm (p - \xi') \cos \sigma'}$$

Wir müssen bestimmen, wann der Radiusvector ein Maximum oder ein Minimum wird, hier muss $dr = 0$ sein.

$$\begin{aligned} \frac{r dr}{ds} &= - (p - \xi') \frac{d\xi'}{ds} + \eta' \frac{d\eta'}{ds} + \frac{d\xi'}{ds} \eta' \cos \omega \\ &\quad - (p - \xi') \frac{d\eta'}{ds} \cos \omega \mp R \frac{d\eta'}{ds} \cos (\omega - \sigma') \\ &\quad \mp R \eta' \sin (\omega - \sigma') \frac{d\sigma'}{ds} \mp R \frac{d\xi'}{ds} \cos \sigma' \mp R (p - \xi') \sin \sigma' \frac{d\sigma'}{ds} \end{aligned}$$

Folglich soll nach Substitution sein:

$$\begin{aligned} 0 &= \{ \beta (p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta + \beta'^2 \cos \Theta \sin \Theta + \beta \beta' \cos \omega \sin^2 \Theta \\ &\quad - (p - \beta \cos \Theta) \beta' \cos \Theta \cos \omega \} \frac{d\Theta}{ds} \mp R \frac{d\sigma'}{ds} \{ \eta' \sin (\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma' \} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 &= \{ \beta (p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta + \beta'^2 \sin \Theta \cos \Theta + \beta \beta' \cos \omega (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \\ &\quad - p \beta' \cos \Theta \cos \omega \} \times \end{aligned}$$

$$\left\{ 1 \pm R \beta \beta' \sin \omega \left(\frac{d\Theta}{ds} \right)^3 \right\} \quad (1')$$

Dieser Gleichung genügt

$$\beta(p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta + \beta'^2 \sin \Theta \cos \Theta + \beta \beta' \cos \omega (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) - p \beta' \cos \Theta \cos \omega = 0$$

Welche Formel ganz übereinstimmt mit der Formel (1) und also Anleitung zu denselben Betrachtungen gibt.

Wälzt sich die Ellipse ausserhalb des Kreises, so kann nimmer

$$1 + R \beta \beta' \sin \omega \left(\frac{d\Theta}{ds} \right)^3 = 0$$

sein, weil $\frac{d\Theta}{ds}$ positiv ist.

Jedoch kann sehr gut, wenn die Ellipse den Kreis inwendig berührt,

$$1 - R \beta \beta' \sin \omega \left(\frac{d\Theta}{ds} \right)^3 = 0$$

sein. Jetzt ist

$$\beta \beta' \sin \omega \left(\frac{d\Theta}{ds} \right)^3 = \frac{d\sigma'}{ds} = \frac{1}{q'}$$

in welcher Formel q' der Krümmungsradius der Ellipse ist. Die Bedingung für einen Scheitel ist also $R = q'$, aber wenn $a > b$ ist, so hat man bei einer Ellipse

$$\frac{b^2}{a} < q' < \frac{a^2}{b}$$

oder

$$\frac{b^2}{a} < R < \frac{a^2}{b}$$

Liegt nun der Wert von R zwischen dem grössten und dem kleinsten Krümmungsradius der Ellipse, so hat die Curve noch zwei Scheitel.

Wir müssen für diese Punkte Θ bestimmen, dazu bringen wir die Gleichung in die Form:

$$\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta \beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega = \sqrt[3]{(R^2 \beta^2 \beta'^2 \sin^2 \omega)}$$

Substituiren wir in diese Formel die Gleichungen (a) und ϵ für $\Theta + \psi$, so finden wir

$$a^2 \sin^2 \epsilon + b^2 \cos^2 \epsilon - \sqrt[3]{R^2 a^2 b^2}$$

und

$$\cos^2 \varepsilon = \frac{a^2 - \sqrt{a^2 b^2 R^2}}{a^2 - b^2}$$

Dieser Wert von ε ist also unabhängig vom Orte des beschreibenden Punktes. Soll ε reell sein, so muss R der oben genannten Bedingung genügen.

Für die Wendepunkte finden wir mittels der Formel (V*)

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\beta'(\beta - p \cos \Theta)}{\sqrt{(\beta'^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \cos \Theta \sin \Theta \cos \omega)}} \\ & = \left\{ \frac{1}{R} \pm \frac{\beta\beta' \sin \omega}{\sqrt{(\beta'^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \cos \Theta \sin \Theta \cos \omega)^2}} \right\} \\ & \quad \times \{ \beta'^2 \sin^2 \Theta + (p - \beta \cos \Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta \cos \Theta) \sin \Theta \cos \omega \} \quad (2') \end{aligned}$$

Der Krümmungsradius P kann null werden, wenn die Ellipse und der Kreis einander inwendig berühren, so

$$\frac{1}{R} = \frac{d\sigma'}{ds} = \frac{1}{q'} \quad \text{oder} \quad R = q' \quad \text{ist.}$$

Dieses ist der Fall in den hier oben gefundenen exceptionellen Scheiteln, diese Punkte sind also Spitzen.

Die Formeln (VI) und (VII) können nur angewendet werden, wenn R nicht liegt zwischen $\frac{a^2}{b}$ und $\frac{b^2}{a}$.

Auch hier werden wir einige Fälle untersuchen, jedoch sind die Gleichungen nur in den einfachsten Fällen zu lösen, weil immer eine Quadrirung vermieden werden muss.

1. Der beschreibende Punkt liegt auf einer Hauptachse.

Wir werden damit anfangen, in diesem Falle den Ort der Doppelpunkte zu suchen.

Für zwei Punkte der Curve in einem Doppelpunkte muss $r = r'$ und $\psi = \psi'$ sein.

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + p^2 - 2ap \cos \Theta + a^2 \cos^2 \Theta + b^2 - b^2 \cos^2 \Theta \\ & \quad \pm 2bR \frac{a - p \cos \Theta}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \Theta}} \\ &= R^2 + p^2 - 2np \cos \Theta' + a^2 \cos^2 \Theta' + b^2 - b^2 \cos^2 \Theta' \\ & \quad \pm 2bR \frac{a - p \cos \Theta'}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \Theta'}} \end{aligned}$$

Dieser Formel wird genügt durch

$$\cos \theta = \cos \theta' \quad \text{das ist} \quad \theta' = 2n\pi - \theta$$

Sollen die ψ einander gleich sein, so muss sein

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_0^\theta (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta - \operatorname{arctg} \frac{\{ap - (a^2 - b^2) \cos \theta\} \sin \theta}{R \sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) - b(a - p \cos \theta)}} \\ = \frac{1}{R} \int_0^{\theta'} (a^2 \sin^2 \theta' + b^2 \cos^2 \theta')^{\frac{1}{2}} d\theta' \\ - \operatorname{arctg} \frac{\{ap - (a^2 - b^2) \cos \theta'\} \sin \theta'}{R \sqrt{(a^2 \sin^2 \theta' + b^2 \cos^2 \theta') - b(a - p \cos \theta')}} \end{aligned}$$

Substituiren wir in diese Formel den Wert für θ' , so finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_0^{2n\pi - \theta} (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta - \frac{1}{R} \int_0^\theta (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ = - 2 \operatorname{arctg} \frac{\{ap - (a^2 - b^2) \cos \theta\} \sin \theta}{R \sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) - b(a - p \cos \theta)}} \end{aligned}$$

Der erste Teil dieser Gleichung ist

$$\frac{4nbK}{R} - \frac{2}{R} \int_0^\theta (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

folglich in einem Doppelpunkte

$$\psi = \frac{2nbK}{R}$$

Sind die Umfänge der Ellipse und des Kreises unter einander messbar, während ihr Verhältniss $t : s$ ist, so ist

$$4sbK = 2\pi Rt$$

folglich

$$\psi = n \frac{t\pi}{s}$$

Der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Linien, auf welchen die Doppelpunkte liegen, ist also gleich $\frac{\pi}{s}$, also liegen die Doppelpunkte auf den Linien, welche die Oberfläche um den Mittelpunkt des Kreises in $2s$ gleiche Sectoren teilen ¹⁾. Leicht kann man zeigen, dass diese Linien auch Linien von Symmetrie sind.

1) Arch. der Math. u. Phys. 2. Reihe, Teil VII. p. 209.

Aus der Formel (1') folgt, dass die Scheitel gefunden werden für $\theta = n\pi$ und $\cos \theta = \frac{pa}{a^2 - b^2}$.

Wir finden dann für

$$\theta = 2n\pi \quad r = R \pm (a - p) \quad \psi = \frac{4n b K}{R}$$

$$\theta = (2n + 1)\pi \quad r = R \pm (a + p) \quad \psi = (2n + 1) \frac{2b K}{R}$$

Für $\theta = \arccos \frac{pa}{a^2 - b^2}$ im Falle dass dies θ reell ist.

$$r^2 = R^2 + \frac{a^2 - b^2 - p^2}{a^2 - b^2} \pm 2Rb \sqrt{\frac{a^2 - b^2 - p^2}{a^2 - b^2}}$$

oder

$$r = R \pm b \sqrt{\frac{a^2 - b^2 - p^2}{a^2 - b^2}}$$

Für den Ort der Wendepunkte gibt uns (2')

$$\pm \frac{b(a - p \cos \theta)}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}} = \left\{ \frac{1}{R} \pm \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^3}} \right\} \times [b^2 \sin^2 \theta + (p - a \cos \theta)^2] \quad (2'')$$

Für den Krümmungsradius folgt aus IV*

$$P = [b^2 \sin^2 \theta + (p - a \cos \theta)^2]^{\frac{3}{2}} \quad (3')$$

$$\left\{ \mp \frac{b(a - p \cos \theta)}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)}} \right\} \frac{1}{R \pm \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^3}} + b^2 \sin^2 \theta + (p - a \cos \theta)^2}$$

Der Brennpunkt ist der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $a > b$ und $p^2 = a^2 - b^2 = c^2$.

Die Radienvectoren der Scheitel werden also für

$$\theta = 2n\pi \quad r = R \pm (a - c) \quad \psi = \frac{4n b K}{R}$$

$$\theta = (2n + 1)\pi \quad r = R \pm (a + c) \quad \psi = (2n + 1) \frac{2b K}{R}$$

Die Radienvectoren der Spitzen, wenn es diese gibt, sind

$$r^2 = R^2 + 2a^2 - 3 \sqrt{a^2 b^2 R^2} - \frac{r}{a} (a^2 - \sqrt{a^2 b^2 R^2})^{\frac{3}{2}}$$

Wir müssen jetzt suchen, ob die Curve Wendepunkte haben wird
Die Formel (2'') gibt:

$$\pm \frac{b(a - c \cos \Theta)}{(a^2 - c^2 \cos^2 \Theta)^{\frac{3}{2}}} = \left\{ \frac{1}{R} \pm \frac{ab}{(a^2 - c^2 \cos^2 \Theta)^{\frac{3}{2}}} \right\} (a - c \cos \Theta)^2$$

$$\pm b(a^2 - c^2 \cos^2 \Theta) = \frac{1}{R} (a^2 - c^2 \cos^2 \Theta)^{\frac{3}{2}} (a - c \cos \Theta) \pm ab(a - c \cos \Theta)$$

Diese Gleichung kann dividirt werden durch $a - c \cos \Theta$, was nur für einen imaginären Wert. null ist,

Wir haben auch

$$\pm bc \cos \Theta = \frac{1}{R} (a^2 - c^2 \cos^2 \Theta)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$R^2 b^2 c^2 \cos^2 \Theta = (a^2 - c^2 \cos^2 \Theta)^3$$

Sei $\cos^2 \Theta = x$, so haben wir eine Gleichung vom dritten Grade.

$$c^6 x^3 - 3a^2 c^4 x^2 + (3a^4 c^2 + R^2 b^2 c^2) x - a^6 = 0$$

Setzen wir $\frac{a^2}{c^2} = t^2$ und $x = y + t^2$, so finden wir:

$$y^3 + \frac{R^2 b^2}{c^4} y + \frac{R^2 b^3 a^2}{c^6} = 0$$

Der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten ist immer positiv, folglich gibt es immer nur eine reelle Wurzel.

Ausserdem muss $0 < x < 1$ sein.

Für $x = 0$ wird die Linke negativ,

„ $x = 1$ wird sie $\{-b^4 + R^2 c^2\} b^2$

folglich ist sie negativ für $b^2 > Rc$, alsdann gibt es keinen Wendepunkt (Fig. 7.);

sie ist positiv für $b^2 < Rc$, alsdann besteht wol ein Wendepunkt (Fig. 8., die Curven a. a. a. und b. b. b.)

3. Der Mittelpunkt ist der beschreibende Punkt.

Nehmen wir $b > a$ und p ist 0.

Die Scheitel werden gefunden nach (1) für $\Theta = \frac{1}{2}n\pi$ und zwar

$$\text{für } \Theta = 2n \frac{1}{2}\pi \quad r = R \pm a \quad \text{und} \quad \psi = 2n \frac{bK}{R}$$

$$\text{für } \Theta = (2n + 1) \frac{1}{2}\pi \quad r = R \pm b \quad \text{und} \quad \psi = (2n + 1) \frac{bK}{R}$$

Gibt es Spitzen, so ist ihre Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises

$$r^2 = R^2 + a^2 + b^2 - 3\sqrt{a^2 b^2 R^2}$$

Bestimmen wir jetzt, wann die Curve Wendepunkte haben wird. Die Formel (2'') gibt:

$$\begin{aligned} \pm ab(b^2 - a^2)\cos 2\Theta &= \frac{1}{R}(b^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta)\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)^3} \\ \pm ab\{2(b^2 \cos 2\Theta + a^2 \sin^2 \Theta) - (b^2 + a^2)\} &= \frac{1}{R}\{(b^2 + a^2) \\ &\quad - (b^2 \cos^2 \Theta + a^2 \sin^2 \Theta)\}\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Sei } \sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)} = y$$

$$\begin{aligned} \pm Rab\{2y^2 - (a^2 + b^2)\} &= \{(b^2 + a^2) - y^2\}y^3 \\ \text{oder} \quad y^5 - (a^2 + b^2)y^3 &\pm 2Raby^2 \mp Rab(b^2 + a^2) = 0 \end{aligned}$$

Betrachten wir erstens den Fall, dass sich die Ellipse ausserhalb des Kreises wälzt, so haben wir:

$$y^5 - (a^2 + b^2)y^3 + 2Raby^2 - Rab(b^2 + a^2) = 0$$

Diese Gleichung vom fünften Grade hat höchstens drei positive und zwei negative reelle Wurzeln, denn welches Zeichen wir den fehlenden Gliedern geben, wir finden immer drei Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen. Für die Curve können jedoch nur die Werte, welche zwischen $+b$ und $+a$ liegen, gebraucht werden, während wir $b > a$ voraussetzen; die negativen Wurzeln fallen also weg.

Vermindern wir die Wurzeln mit a , indem wir für y substituiren $y + a$, so finden wir:

$$\begin{aligned} y^5 + 5ay^4 + (9a^2 - b^2)y^3 + a(7a^2 - 3b^2 + 2Rb)y^2 \\ + a^2\{2a^2 - 3b^2 + 4Rb\}y - ab\{a^2b + R(b^2 - a^2)\} = 0 \end{aligned}$$

Die beiden letzten Glieder sind negativ. Das vierte Glied kann negativ oder positiv sein, aber wenn das dritte negativ ist, also für $b^2 > 9a^2$, so ist das vierte es auch, folglich hat diese Gleichung nur einen Zeichenwechsel, also eine positive Wurzel.

Vermindern wir nun die Wurzeln der Gleichung mit b durch Substitution von $y + b$ für y , so hat man

$$\begin{aligned} y^5 + 5by^4 + (9b^2 - a^2)y^3 + b(7b^2 - 3a^2 + 2Ra)y^2 \\ + b^2(2b^2 - 3a^2 + 4Ra)y - ab\{ab^2 - R(b^2 - a^2)\} = 0 \end{aligned}$$

Das letzte Glied wird immer positiv sein für $a < R\frac{b^2 - a^2}{b^2}$, dann ist

das vorletzte Glied auch positiv, denn nehmen wir im ungünstigsten Falle $R = \frac{ab^2}{b^2 - a^2}$ so wird dieses Glied $\frac{2(a^2 - b^2)^2 + a^4 + 3a^2b^2}{b^2 - a^2}$. Das dritte Glied wird dann $\frac{4(a^2 - b^2)^2 + 3b^4 - a^4}{b^2 - a^2}$, also auch positiv. Die Gleichung hat jetzt nur Zeichenfolgen und wir finden also nur eine reelle Wurzel zwischen a und b ; folglich hat die Curve nur einen Wendepunkt (Fig. 8. e. e. e.) Für $a > R \frac{b^2 - a^2}{b^2}$ hat die letzte Gleichung immer noch eine Zeichenfolge, also liegt keine Wurzel zwischen a und b und die Curve hat keinen Wendepunkt (Fig. 8. d. d. d.).

Betrachten wir jetzt den Fall, dass die Ellipse und der Kreis einander inwendig berühren, so ist die Gleichung:

$$y^6 - (a^2 + b^2)y^3 - 2Raby^2 + Rab(a^2 + b^2) = 0$$

Welches Zeichen wir auch den fehlenden Gliedern geben mögen, immer hat man drei Zeichenfolgen und zwei Zeichenwechsel, also höchstens zwei positive Wurzeln. Auch diese müssen zwischen a und b liegen. Wir finden, da die negativen Wurzeln ausser Betracht bleiben: für

$$\begin{aligned} y = \infty & \quad f(y) \text{ ist } + \\ y = b & \quad f(y) = -ab\{ab^2 + R(b^2 - a^2)\} \text{ also } - \\ y = a & \quad f(y) = -ab\{ba^2 - R(b^2 - a^2)\} \text{ also } + \text{ oder } - \\ y = 0 & \quad f(y) \text{ ist } + \end{aligned}$$

Eine positive Wurzel liegt immer zwischen b und ∞ , die andere wird zwischen b und a liegen, wenn

$$ba^2 < R(b^2 - a^2) \text{ oder } R > b \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

Die Curve hat also einen Wendepunkt (Fig. 8. c. e. c. und f. f. f.).

Für $R < b \frac{a^2}{b^2 - a^2}$ hat die Gleichung keine Wurzel zwischen a und b , die Curve hat also keinen Wendepunkt.

Für die Krümmungsradien in den Scheiteln finden wir für

$$\begin{aligned} \theta = 2n \frac{1}{2}\pi & \quad P = \frac{a^2(b^2 \pm aR)}{\mp Rb^2 + ab^2 \pm a^2R} \\ \theta = (2n + 1) \frac{1}{2}\pi & \quad P = \frac{b^2(a^2 \pm bR)}{\mp Ra^2 + ba^2 \pm b^2R} \end{aligned}$$

*image
not
available*

laufen durch den entsprechenden Punkt einer Curve, welche mit der gegebenen gleichförmig ist, deren Parameter jedoch die Hälfte von jenem sind, und der wälzt längs einer Curve, welche mit ihr congruent ist, während immer entsprechende Elemente einander berühren¹⁾. Der Coordinatenanfangspunkt ist der Punkt, aus welchem die Normalen gezogen werden, also der Punkt der Directrix, der übereinstimmt mit dem beschreibenden Punkte der Generatrix.

Wir werden nur einige Bemerkungen über einige besonderen Fälle machen. Sei der Mittelpunkt der beschreibende Punkt, so gibt uns (1*)

$$x = \frac{2ab^2 \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \quad \text{und} \quad y = \frac{2ba^2 \sin \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

Folglich

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{(a^2 x^2 + b^2 y^2)}$$

oder auf Polarcoordinaten

$$r = 2\sqrt{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)}$$

Diese letzte Gleichung gibt eine einfache Construction der Curve (Fig. 9.). r ist dem Radiusvector der Ellipse gleich, deren Achsen $2a$ und $2b$ sind, und φ ist die excentrische Anomalie. Hat man r auf die bekannte Weise construirt, so setzt man es auf eine Linie, welche mit der X Achse einen Winkel φ macht.

Die Scheitel in Bezug auf die Y Achse finden wir also

$$\frac{dx}{d\theta} = 2ab^2 \frac{(a^2 + a^2 \cos^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) \sin \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} = 0$$

folglich

$$\sin \theta = 0 \quad \text{oder} \quad \theta = n\pi$$

und

$$\cos^2 \theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad \text{oder} \quad \sin^2 \theta = \frac{b^2 - 2a^2}{b^2 - a^2}$$

Dieser Wert ist nur reell für $b > a\sqrt{2}$.

Bestimmen wir die Länge dieser Curve, so finden wir

$$L = 8b \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}}{l^2 + k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

oder

$$L = 8b \{(1 + l^2) \Pi(l, k, \frac{1}{2}\pi) - F(k, \frac{1}{2}\pi)\}$$

Dieses stimmt mit den Formeln (VI) und (γ) überein.

1) Jacob Steiner's gesammelte Werke. II. Bd. Seite 157.

Für die durch die Curve eingeschlossene Oberfläche finden wir

$$O = 2\pi a^2 + 2\pi b^2 = 4\pi v^2$$

Also ist sie der Oberfläche eines Kreises, welcher eine der gleichen Achsen der Generatrix als Radius hat, gleich.

Aus der Formel (I*) folgt für den Weg, welchen ein Brennpunkt durchläuft,

$$y^2 + (x + c)^2 = 4a^2$$

also ist, wie zu erwarten war, dieser Weg ein Kreis, dessen Radius die halbe grosse Achse der Ellipse ist.

Für die Oberfläche dieses Kreises fanden wir nach (VIII)

$$O = 2\pi a^2 + 2\pi b^2 + 2\pi c^2 = 4\pi a^2$$

Die Länge dieser Curve ist $4\pi a$, was auch übereinstimmt mit den Formeln (VI) und (β).

Endlich werden wir den Weg bestimmen, welchen die Scheitel der Ellipse durchlaufen, diese Curve stimmt auch überein mit der Fusspunktlinie einer Ellipse in Bezug auf einen der Scheitel. Weil diese Curve weniger bekannt ist, werden wir sie ein wenig genauer betrachten,

Aus der Formel (I*) folgt, da $p = a$ ist, nach Substitution der Werte für ξ , η und σ :

$$x = a \cos \theta + \frac{2ab^2 \sin^2 \theta \cos \theta - a(1 - \cos \theta)(b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta)}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

oder

$$x = a \frac{2b^2 \cos \theta - b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

folglich

$$x - a = 2ab^2 \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

Auch finden wir:

$$y = 2a^2 b \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

also

$$\frac{y}{x - a} = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta$$

und

$$\{(x - a)^2 + y^2\}^2 = 4a^2 (\sec \theta - 1)^2 (x - a)^2$$

Sei

$$x - a = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi$$

so wird

$$r + 2a \cos \varphi = 2\sqrt{\{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi\}}$$

Um die Scheitel zu finden, haben wir

$$\frac{dx}{ds} = 2\{\eta \cos 2\sigma + 2(a - \xi) \sin 2\sigma\} \frac{d\sigma}{ds}$$

folglich muss

$$\eta(1 - 2 \sin^2 \sigma) + 2(a - \xi) \cos \sigma \sin \sigma = 0 \quad \text{sein}$$

$$b \sin \Theta (b^2 \cos^2 \Theta - a^2 \sin^2 \Theta) + 2ba^2(1 - \cos \Theta) \cos \Theta \sin \Theta = 0$$

also

$$\sin \Theta = 0 \quad \text{demnach} \quad \Theta = n\pi$$

In diesen Scheiteln ist

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x = a \quad \text{oder} \quad x = 3a$$

Auch ist

$$(b^2 - a^2) \cos^2 \Theta + 2a^2 \cos \Theta - a^2 = 0$$

was uns gibt

$$\cos \Theta = \frac{a}{a \mp b}$$

Sollen beide Werte reell sein, so muss $b > 2a$ sein.

Für die Punkte ist

$$x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \quad \text{oder} \quad x - a = \frac{b^2}{a \mp b}$$

und

$$y = \frac{b}{a \mp b} \sqrt{b(b \mp 2a)}$$

Für $x = a$ ist

$$\Theta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\pi$$

daher

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 2b$$

Um die Wendepunkte zu bestimmen, haben wir nach (V)

$$\eta \sin \sigma - (a - \xi) \cos \sigma = -\frac{2}{9} k^2$$

Nach Substitution

$$\begin{aligned} & \{ab \sin^2 \Theta - ab(1 - \cos \Theta) \cos \Theta\} \frac{d\Theta}{ds} \\ & = 2ab \left(\frac{d\Theta}{ds} \right)^2 \{b^2 \sin^2 \Theta + a^2(1 - \cos \Theta)^2\} \end{aligned}$$

$$(b^2 - a^2) \{\cos^2 \Theta - 2 \cos \Theta + 1\} = 3b^2$$

$$\cos \Theta = 1 \pm \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

Das positive Zeichen genügt nimmer, soll das andere Zeichen genügen, so muss

$$-1 < 1 - \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

oder

$$2 > \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

folglich, wie zu erwarten war, $b > 2a$ sein. (Fig. 10).

Die durch die Curve eingeschlossene Oberfläche ist

$$O = 4\pi a^2 + 2\pi b^2$$

B. Die Generatrix ist eine Hyperbel.

Die Hyperbel sei gegeben in Bez. auf zwei conjugirte Achsen, welche einen Winkel ω mit einander machen. Sind die beiden halben Achsen wieder β und β' , so wird die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{\xi'^2}{\beta^2} - \frac{\eta'^2}{\beta'^2} = 1$$

Setzen wir

$$\xi' = \beta \sec \Theta \quad \text{und} \quad \eta' = \beta' \operatorname{tg} \Theta$$

so finden wir

$$\cos(\omega - \sigma') = \frac{d\xi'}{ds} \sin \omega = + \beta \frac{\sin \Theta}{\cos^2 \Theta} \sin \omega \frac{d\Theta}{ds}$$

$$\cos \sigma' = - \frac{d\eta'}{ds} \sin \omega = - \beta' \frac{1}{\cos^2 \Theta} \sin \omega \frac{d\Theta}{ds}$$

und

$$\left(\frac{ds}{d\Theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^4 \Theta} \{\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \omega\}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma'}{ds} &= - \frac{\beta \cos \Theta}{\beta' \sin \omega} \left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3 \left(\frac{d\eta'}{ds}\right)^2 \sin^2 \omega \\ &= - \frac{\beta\beta' \sin \omega \cos^3 \Theta}{(\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \omega)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\sin(\omega - \sigma') = \frac{-\beta \sin \Theta \cos \omega - \beta'}{(\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \omega)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$\sin \sigma' = \frac{\beta' \cos \omega + \beta \sin \Theta}{(\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \omega)^{\frac{1}{2}}}$$

Auch müssen wir noch bemerken, dass nur die Werte von Θ einem Berührungspunkte der Hyperbel mit der Directrix genügen, welche liegen zwischen 90° bis 180° und von 180° bis 270° .

Wälzt sich jedoch die Hyperbel eine gerade Linie entlang, bis ihre Asymptote mit dieser zusammenfällt, so berührt auch der andere Zweig der Hyperbel die Linie. Wälzt sich dieser jetzt die Directrix entlang, bis die andere Asymptote mit der geraden Linie zusammenfällt, wonach sich der erstgenannte Zweig wieder längs der Linie wälzt, so bekommt man eine ununterbrochene Curve. In Wirklichkeit werden diese Curven nie durchlaufen, weil die Werte $\Theta = 90^\circ$ und $\Theta = 270^\circ$ bei einer endlichen Schnelligkeit nach einer unendlich grossen Zeit erreicht werden.

I. Die Hyperbel wälzt sich eine gerade Linie entlang.

Die allgemeine Formel (I) gibt uns wieder, weil $\sigma = 270^\circ$ ist,

$$\begin{aligned} x &= \text{Hyperbelbogen} + \eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma' \\ y &= -\eta' \cos(\omega - \sigma') + (p - \xi') \cos \sigma' \end{aligned}$$

Nach Substitution finden wir

$$\begin{aligned} y &= \frac{\{-\beta\beta' \sin \Theta \operatorname{tg} \Theta - (p - \beta \sec \Theta)\beta'\} \sin \omega}{\sqrt{\{\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \omega\}}} \\ &= -\beta' \sin \omega \frac{p - \beta \cos \Theta}{\sqrt{\{\beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \omega\}}} \end{aligned}$$

Für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist

$$y = -\frac{\beta\beta' \sin \omega}{\sqrt{(\beta^2 + \beta'^2 \pm 2\beta\beta' \cos \omega)}}$$

y nähert sich also bei der Bewegung einem bestimmten Werte, welchen sie jedoch nimmer erreichen wird. Der Nenner des gefundenen Bruches sind die Diagonalen eines Parallelogramms, welches auf den halben Achsen beschrieben ist.

Bestimmen wir den Winkel, welchen die Tangenten in diesen Punkten mit der X Achse macht.

Nach (III) ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tau &= \frac{\eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma'}{\eta' \cos(\omega - \sigma') - (p - \xi') \cos \sigma'} \\ &= \frac{(\beta^2 + \beta'^2) \operatorname{tg} \Theta + \beta\beta' \cos \omega (\operatorname{tg} \Theta \sin \Theta + \sec \Theta) - p(\beta \sin \Theta + \beta' \cos \Theta)}{\beta' \sin \omega (p - \beta \cos \Theta)} \end{aligned}$$

Für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ wird

$$\operatorname{tg} \tau = \infty \quad \text{also} \quad \tau = \frac{1}{2}\pi$$

In den Culminationspunkten der Curve in Bezug auf die X Achse muss $\frac{dy}{d\Theta} = 0$ sein.

$$\frac{dy}{d\Theta} = -\beta\beta'\sin\omega$$

$$\times \frac{(\beta^2 + \beta'^2)\sin\Theta + \beta\beta'\cos\omega + \beta\beta'\sin^2\Theta\cos\omega - p\cos\Theta(\beta\sin\Theta + \beta'\cos\omega)}{(\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)} = 0$$

also wird

$$(\beta^2 + \beta'^2)\sin\Theta + \beta\beta'\cos\omega + \beta\beta'\cos\omega\sin^2\Theta - p\cos\Theta(\beta\sin\Theta + \beta'\cos\omega) = 0 \quad (1)$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nicht zu lösen.

Den Krümmungsradius finden wir mittels (IV)

$$P = \frac{\{\beta'^2\text{tg}^2\Theta + (p - \beta\text{sec}\Theta)^2 - 2\beta'\text{tg}\Theta(p - \beta\text{sec}\Theta)\cos\omega\}^{\frac{3}{2}}}{\{\beta'^2\text{tg}^2\Theta + (p - \beta\text{sec}\Theta)^2 - 2\beta'\text{tg}\Theta(p - \beta\text{sec}\Theta)\cos\omega\} - \frac{p - \beta\cos\Theta}{\beta\cos^3\Theta}}$$

$$\times (\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)$$

oder

$$P = \frac{\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p\cos\Theta - \beta)^2 - 2\beta'\sin\Theta(p\cos\Theta - \beta)\cos\omega\}^{\frac{3}{2}}}{\cos\Theta\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p\cos\Theta - \beta)^2 - 2\beta'\sin\Theta(p\cos\Theta - \beta)\cos\omega\} - \frac{p - \beta\cos\Theta}{\beta}}$$

$$(4^*) \quad \times (\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)$$

Für $\Theta = 2n\pi$	ist	$P = \frac{(p - \beta)^2\beta}{p\beta - \beta^2 - \beta'^2}$
„ $\Theta = (2n + 1)\pi$	„	$P = \frac{(p + \beta)^2\beta}{p\beta + \beta^2 + \beta'^2}$
„ $\Theta = (2n + 1)\frac{1}{2}\pi$	„	$P = \frac{\beta(\beta'^2 + \beta^2 \pm 2\beta\beta'\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}{p(\beta^2 + \beta'^2 \pm 2\beta\beta'\cos\omega)}$
		$= \frac{\beta}{p} \sqrt{(\beta'^2 + \beta^2 \pm 2\beta\beta'\cos\omega)}$

Wälzt sich die Hyperbel bis die Asymptote mit der gegebenen Linie zusammenfällt, so kommt der Mittelpunkt in die gerade Linie. Wir können die Entfernung des Ortes, wo der Mittelpunkt kommt vom Punkte, in welchem die Scheitel der Hyperbel die gerade Linie berührt, bestimmen. Diese Entfernung ist gleich dem Unterschiede in Länge der Asymptote und eines halben Zweiges der Hyperbel. Diese Differenz ist bekanntlich eine endliche Grösse und zwar gleich ¹⁾:

1) Schlämilch, Compendium. I. Bd. p. 389 und II. Bd. p. 350.

$$V = \frac{1}{2}\pi a \left\{ \frac{k}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^3}{4} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^5}{6} \cdot \dots \right\}$$

in welcher Formel

$$k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Diese Punkte können wir also näherungsweise bestimmen, wodurch wir die Curve construiren können.

a. Der beschreibende Punkt liegt auf der Hyperbel.

In diesem Falle ist $p = -\beta$ und folglich finden wir für die Culminationspunkte $y = 0$. Wir wollen sehen, ob die Formel (1') noch andere Culminationspunkte gibt, diese ist

$$\begin{aligned} (\beta^2 + \beta'^2) \sin \Theta + \beta\beta' \cos \omega (\sin^2 \Theta + 1 + \cos \Theta) + \beta^2 \cos \Theta \sin \Theta = 0 \\ (\beta^2 + \beta'^2) \sin \frac{1}{2}\Theta + \beta\beta' \cos \omega \cos \frac{1}{2}\Theta (3 - 2 \cos^2 \frac{1}{2}\Theta) \\ + \beta^2 \sin^2 \frac{1}{2}\Theta (2 \cos^2 \frac{1}{2}\Theta - 1) = 0 \end{aligned}$$

folglich

$$\cos \frac{1}{2}\Theta = 0 \quad \text{also} \quad \Theta = n\pi$$

Diese sind die Punkte in der X Achse.

$$\begin{aligned} 2\beta^2 \sin \frac{1}{2}\Theta \cos^2 \frac{1}{2}\Theta + \beta'^2 \sin \frac{1}{2}\Theta + \beta\beta' \cos \omega \cos \frac{1}{2}\Theta (3 - 2 \cos^2 \frac{1}{2}\Theta) = 0 \\ 2\beta^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta + \beta'^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Theta + 1) + \beta\beta' \cos \omega (3 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Theta - 1) = 0 \end{aligned}$$

Setzen wir $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta = y$, so wird die Gleichung:

$$\beta'^2 y^3 + 3\beta\beta' \cos \omega y^2 + (2\beta^2 + \beta'^2) y + \beta\beta' \cos \omega = 0$$

Sei für y gesetzt $y = \frac{\beta}{\beta'} \cos \omega$; so finden wir

$$y^3 + \left(\frac{2\beta^2}{\beta'^2} + 1 - 3 \frac{\beta^2}{\beta'^2} \cos \omega \right) y - 2 \frac{\beta^3}{\beta'^3} \cos \omega \sin^2 \omega = 0$$

Sollen alle Wurzeln reell sein, so muss

$$\left(2 \frac{\beta^3}{\beta'^3} \cos \omega \sin^2 \omega \right)^2 + \frac{4}{27} \left(2 \frac{\beta^2}{\beta'^2} + 1 - 3 \frac{\beta^2}{\beta'^2} \cos^2 \omega \right)^3 < 0$$

sein; oder

$$-(\beta^2 - \beta'^2)^3 + 9(\beta^2 - \beta'^2)\beta^2 \sin^2 \omega + 27\beta'^2 \beta^4 \sin^4 \omega < 0$$

Führen wir jetzt ein

$$\beta^2 - \beta'^2 = a^2 - b^2 \quad \text{und} \quad \beta\beta' \sin \omega = ab$$

*image
not
available*

Wir werden die Oberfläche bestimmen, welche eingeschlossen wird durch die Curve, die Linie und die Ordinaten beim Anfang und beim Ende einer Wälzung.

Jetzt ist

$$O = \int y dx \quad \text{und} \quad dx = y d\sigma'$$

also

$$O = \int y^2 d\sigma'$$

folglich ist

$$O = -2ab^3 \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{(p - a \cos \Theta)^2}{(c^2 - a^2 \cos^2 \Theta)^2} \cos \Theta d\Theta$$

$$p^2 \int \frac{\cos \Theta d\Theta}{(c^2 - a^2 \cos^2 \Theta)^2} = \frac{p^2}{2b^2} \frac{\sin \Theta}{b^2 + a^2 \sin^2 \Theta} + \frac{p^2}{2b^3 a} \arctg \left(\frac{a}{b} \sin \Theta \right)$$

$$a^2 \int \frac{\cos^3 \Theta d\Theta}{(c^2 - a^2 \cos^2 \Theta)^2} = \frac{a^2 + b^2}{2b^2} \frac{\sin \Theta}{b^2 + a^2 \sin^2 \Theta} + \frac{a^2 - b^2}{2b^3 a} \arctg \left(\frac{a}{b} \sin \Theta \right)$$

$$-2ap \int \frac{\cos^2 \Theta d\Theta}{(c^2 - a^2 \cos^2 \Theta)^2} = -\frac{ap}{b^2} \frac{\operatorname{tg} \Theta}{b^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 \Theta} - \frac{ap}{b^2 c} \arctg \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \Theta \right)$$

folglich ist

$$O = ab \frac{p^2 + b^2 + a^2}{b^2 + a^2} + \{p^2 - b^2 + a^2\} \arctg \frac{a}{b} + a^2 \frac{p}{c} \pi \quad (3')$$

Wälzt sich der andere Zweig der Hyperbel die gerade Linie entlang, während der beschreibende Punkt derselbe bleibt, so sind die Grenzen der Integrale 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und also

$$O = -ab \frac{p^2 + b^2 + a^2}{b^2 + a^2} - (p^2 - b^2 + a^2) \arctg \frac{a}{b} + a^2 \frac{p}{c} \pi$$

Folglich ist die ganze Oberfläche

$$= 2a^2 \frac{p}{c} \pi \quad (4')$$

c. Der Scheitel ist der beschreibende Punkt.

Sei $p = -a$ (Fig. 12. a. a. a.). In den Culminationspunkten ist $y = 0$ und $y = 2a$. Die Formel (1') gibt für die anderen Culminationspunkte

$$\sin \Theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos \Theta = -\frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

aber dieser Wert ist imaginär.

Aus der Formel (2') finden wir

$$b^2 \cos^3 \Theta - a^2 \cos^2 \Theta - 2(a^2 + b^2) \cos \Theta - (a^2 + b^2) = 0$$

Diese Gleichung kann dividirt werden durch $\cos \Theta + 1$, und wir haben ausser

$$\Theta = (2n+1)\pi$$

auch

$$b^2 \cos^2 \Theta - (a^2 + b^2) \cos \Theta - (a^2 + b^2) = 0$$

Wir finden eine positive Wurzel, welche nicht genügt, weil dieses $\cos \Theta > 1$, und eine negative:

$$\cos \Theta = \frac{a^2 + b^2}{2b^2} - \frac{1}{2b^2} \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 + b^2)b^2}$$

Jetzt muss auch sein

$$-1 < \frac{a^2 + b^2}{2b^2} - \frac{1}{2b^2} \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 + b^2)b^2}$$

$$3b^2 + a^2 > \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 + b^2)b^2}$$

oder

$$4b^4 > 0$$

also immer eine reelle Wurzel, folglich hat die Curve immer einen Wendepunkt.

$$\text{Für } \Theta = 2n\pi \quad \text{ist} \quad P = \frac{4a^3}{2a^2 + b^2}$$

$$,, \quad \Theta = (2n+1)\pi \quad ,, \quad P = 0$$

$$,, \quad \Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi \quad ,, \quad P = c$$

d. Der Brennpunkt sei der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $p = -c$ und $c^2 = a^2 + b^2$ (Fig. 12. b. b. b.)

Wir finden für die Culminationspunkte

$$y = a - c \quad \text{und} \quad y = a + c$$

Die Formel (1') gibt uns auch

$$\sin \Theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos \Theta = -\frac{c}{a}$$

dieser Wert ist immer imaginär.

Für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist $y = b$ (Fig. 12. b'. b').

Um die Wendepunkte zu finden, gibt uns die Formel (2')

$$a^2 \cos^2 \Theta + 2ac \cos \Theta + c^2 = 0$$

folglich

$$a \cos \Theta + c = 0 \quad \text{also} \quad \cos \Theta = -\frac{c}{a}$$

gleichfalls imaginär.

Der Krümmungsradius in jedem Punkte der Curve ist nach (IV)

$$P = \frac{a\{b^2 \operatorname{tg}^2 \Theta + (-c - a \sec \Theta)^2\}^{\frac{3}{2}} \cos^3 \Theta}{- \{a \operatorname{tg} \Theta \sin \Theta + (-c - a \sec \Theta)\} \{a^2 \sin^2 \Theta + b^2\} + a\{b^2 \operatorname{tg}^2 \Theta + (-c - a \sec \Theta)^2\} \cos^3 \Theta}$$

und die Normale ist

$$k = \sqrt{\{b^2 \operatorname{tg}^2 \Theta + (-c - a \sec \Theta)^2\}}$$

folglich ist

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{k} = \frac{-(-c - a \cos \Theta) \{(c^2 - a^2 \cos^2 \Theta) + 2a \cos \Theta (a \cos \Theta + c)\}^{\frac{3}{2}}}{a(a \cos \Theta + c)^3} = \frac{1}{a}$$

Diese Curve gibt bei einer Rotation um die gerade Linie eine Oberfläche, die Plateau¹⁾ die Nodoide genannt hat. Diese Oberfläche kann der genannten Eigenschaft wegen eine Gleichgewichtsfläche einer Flüssigkeit, welche keinen auswendigen Kräften ausgesetzt ist, sein.

Für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist $P = a$.

Um die Länge zu bestimmen, haben wir

$$L = \int \sqrt{(\eta')^2 + (p - \xi')^2} d\sigma'$$

oder

$$L = - \int_0^{2\pi} \sqrt{\{b^2 \operatorname{tg}^2 \Theta + (-c - a \sec \Theta)^2\}} \frac{ab \cos \Theta}{a^2 \sin^2 \Theta + b^2} d\Theta \\ = - 2ab \int_0^{\pi} \frac{d\Theta}{c + a \cos \Theta}$$

folglich

$$L = - 4ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(c+a) \cos^2 \varphi + (c-a) \sin^2 \varphi} = 2\pi a$$

Für die durch die Curve und die gerade Linie eingeschlossene Oberfläche finden wir nach (4')

$$O = 2\pi a^2$$

Diese Oberfläche ist also immer gleich zweimal der Oberfläche eines Kreises, der einen Radius gleich der halben reellen Achse hat, und unabhängig von der imaginären Achse.

e. Der Mittelpunkt ist der beschreibende Punkt.

$p = 0$ und wir finden für die Culminationspunkte (Fig. 12. c. e. c.)

1) Plateau, Statique des liquides. Vol. I. p. 120.

$$y = \mp a \quad \text{und} \quad x = 2nV$$

Für $y = 0$, das ist für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist $x = (2n+1)V$.

Aus der Formel (1') folgt

$$\sin \Theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos \Theta = \infty$$

also keine anderen Culminationspunkte. Aus der Formel (2') haben wir:

$$-a(a^2 + b^2)\cos^3\Theta + 2a(a^2 + b^2)\cos\Theta = 0$$

folglich

$$\cos \Theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos \Theta = \pm \sqrt{2}$$

dieser Wert ist auch imaginär.

Für $\Theta = n\pi$ ist $P = \frac{a^3}{c^2}$.

Nach (3') finden wir für die eingeschlossene Oberfläche

$$O = ab + (a^2 - b^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \quad (\delta)$$

Ist die Hyperbel gleichseitig, also $a = b$, so ist die Oberfläche $= a^2$, folglich dem Quadrate gleich, welches die halbe Achse als Seite hat.

f. Der beschreibende Punkt liegt auf der imaginären Achse.

Um den Weg eines Punktes zu bestimmen, der auf der imaginären Achse liegt, wechseln wir die ζ' - und die η' Achse, so ist

$$\frac{\eta'^2}{a^2} - \frac{\zeta'^2}{b^2} = 1$$

Setzen wir $\eta' = a \sec \Theta$ und $\zeta' = -b \operatorname{tg} \Theta$, so ist

$$\frac{d\eta'}{ds} = -\cos \sigma' = a \frac{\sin \Theta}{\cos^2 \Theta} \frac{d\Theta}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta'}{ds} = \sin \sigma' = -b \frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{d\Theta}{ds}$$

während

$$\frac{ds}{d\Theta} = \frac{1}{\cos^2 \Theta} \sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2)}$$

Wir finden

$$x = \text{Hyperbelbogen} = \frac{a^2 \sec \Theta \sin \Theta + (p + b \operatorname{tg} \Theta)b}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2)}}$$

und

$$y = -a \frac{p \sin \Theta - b \cos \Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2)}}$$

Für $\Theta = 0$	ist	$y = +a$
„ $\Theta = \frac{1}{2}\pi$	„	$y = -\frac{ap}{c}$
„ $\Theta = \pi$	„	$y = -a$
„ $\Theta = \frac{3}{2}\pi$	„	$y = +\frac{ap}{c}$

Um zu finden, ob die Curve auch Culminationspunkte in Bezug auf die X Achse hat, differentiiren wir y nach Θ

$$\frac{dy}{d\Theta} = -a \frac{(p \cos \Theta + b \sin \Theta)(a^2 \sin^2 \Theta + b^2) - (p \sin \Theta - b \cos \Theta)a^2 \sin \Theta \cos \Theta}{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

In einem Culminationspunkte muss also

$$bp \cos \Theta + a^2 \sin \Theta + b^2 \sin \Theta = 0$$

sein, oder

$$\operatorname{tg} \Theta = -\frac{bp}{a^2 + b^2}$$

Ist der Brennpunkt der conjugirten Hyperbel der beschreibende Punkt (Fig. 12. d. d. d.), so ist

$$p = c$$

folglich

$$\operatorname{tg} \Theta = -\frac{b}{c}$$

oder

$$\sin \Theta = \pm \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \text{und} \quad \cos \Theta = \mp \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

dieses gibt

$$y = \mp a \frac{2bc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2(b^2 + c^2)}} = \mp a\sqrt{2}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 + b^2) \sin \Theta - pb}{a \cos \Theta (p \sin \Theta - b \cos \Theta)}$$

$$\text{Für } \Theta = n\pi \quad \text{ist} \quad \operatorname{tg} \tau = -\frac{p}{a}$$

$$\text{„ } \Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi \quad \text{„} \quad \operatorname{tg} \tau = \infty$$

also

$$\tau = 90^\circ$$

$y = 0$ für $p \sin \Theta = b \cos \Theta$, so ist $\operatorname{tg} \tau = \infty$ oder τ gleichfalls $= 90^\circ$.

Die Curve schneidet also die gerade Linie immer senkrecht unabhängig von p .

Wir müssen jetzt untersuchen, ob die Curve Wendepunkte hat.

Aus der Formel (V) folgt in diesem Falle, da

$$\frac{d\sigma'}{d\Theta} = -\frac{ab}{\cos^3\Theta} \left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3 \text{ ist,}$$

$$-\frac{(p \sin \Theta - b \cos \Theta)}{b \cos^3 \Theta} (a^2 \sin^2 \Theta + b^2) + \frac{a^2 + (p \cos \Theta + b \sin \Theta)^2}{\cos^3 \Theta} = 0$$

oder

$$-(p \sin \Theta - b \cos \Theta) (a^2 \sin^2 \Theta + b^2) + b a^2 \cos \Theta + b (p \cos \Theta + b \sin \Theta)^2 \cos \Theta = 0$$

Betrachten wir nur den Fall $p = c$, so finden wir nach Substitution von $a^2 + b^2 = c^2$

$$-c^3 \sin^3 \Theta + b^2 c \sin \Theta \cos^2 \Theta + 2b c^2 \cos \Theta = 0$$

Setzen wir $\operatorname{tg} \Theta = y$ und $\frac{b}{c} = d$, so haben wir

$$y^3 - 2dy^2 - d^2y - 2d = 0$$

Sei $y = z + \frac{2}{3}d$, so finden wir

$$z^3 - \frac{7}{3}d^2z - 3\frac{7}{27}d^3 = 0$$

Eine Wurzel ist immer reell; sollen die beiden anderen auch reell sein; so muss

$$d^6 \left\{ \left(\frac{88}{27}\right)^2 - \frac{4}{27} \left(\frac{7}{3}\right)^3 \right\} < 0$$

sein, oder

$$\left(\frac{2}{27}\right)^2 d^6 \{44^2 - 7^3\} < 0$$

also muss sein

$$1593 < 0$$

Diese beiden Wurzeln sind also imaginär, folglich hat die Curve immer nur einen, aber auch nicht mehr als einen Wendepunkt. Uns bleibt noch übrig den Krümmungsradius zu bestimmen. Nach (IV) haben wir:

$$P = \frac{b\{a^2 + (p \cos \Theta + b \sin \Theta)^2\}^{\frac{3}{2}}}{-(p \sin \Theta - b \cos \Theta)(a^2 \sin^2 \Theta + b^2) + b a^2 \cos \Theta + b(p \cos \Theta + b \sin \Theta)^2 \cos \Theta}$$

$$\text{Für } \Theta = n\pi \quad \text{ist} \quad P = \frac{(a^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{c^2 + p^2}$$

$$\text{„ } \Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi \quad \text{„} \quad P = \frac{bc}{p}$$

Ist jetzt $p = c$, so finden wir für $\operatorname{tg} \Theta = -\frac{b}{c}$

$$P = \frac{a^3 \sqrt{2}}{b^2 + c^2}$$

und für $y = 0$ ist $\operatorname{tg} \Theta = \frac{b}{c}$, also ist

$$P = \sqrt{2(b^2 + c^2)}$$

II. Die Hyperbel wälzt sich eine congruente Hyperbel entlang, während entsprechende Elemente einander berühren.

Nach dem bei der Ellipse betrachteten Gesetze, werden die Curven, welche bei der Wälzung einer Hyperbel längs einer congruenten Hyperbel entstehen, Fusspunktlinien sein einer mit ihr gleichförmigen Hyperbel, welche zweimal grössere Parameter hat.

Der Weg, welchen bei dieser Wälzung ein Brennpunkt durchläuft, wird ein Teil eines Kreises sein, dessen Radius die grosse Achse der Hyperbel ist.

Der eine Brennpunkt durchläuft einen Kreis, welcher der Gleichung

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$$

genügt. Der andere einen Kreis mit der Gleichung

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2$$

Beide Kreise werden bei der Wälzung von zwei Zweigen nur zum Teil durchlaufen; lässt man jedoch danach die beiden anderen Zweige einander entlang wälzen, so bekommt man ganze Kreise. Für die Punkte, welche bei endlicher Schnelligkeit nach unendlich grosser Zeit erreicht werden, ist

$$y = \pm \frac{2ab}{c}$$

Der Mittelpunkt durchläuft eine Curve, welche die Form einer Acht hat, jedoch wird nur die eine Hälfte durchlaufen, wenn man nicht auch die beiden anderen Zweige einander entlang wälzen lässt. Die Gleichung der Curve ist

$$r^2 = 4(a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi)$$

r wird = 0 für $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$

Die Oberfläche, welche durch den durchlaufenen Teil eingeschlossen ist

$$O = \int r^2 d\varphi = 4 \int_0^{\arctg a/b} (a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = 4 \int_0^{\arctg a/b} (a^2 - c^2 \sin^2 \varphi) d\varphi$$

$$= 2(a^2 - b^2) \arctg a/b + (a^2 + b^2) \left| \sin^2 \varphi \right|_0^{\arctg a/b}$$

oder

$$O = 2ab + 2(a^2 - b^2) \arctg a/b$$

Diese Formel stimmt mit (δ) überein.

Für $a = b$ wird $O = 2a^2$.

Die Fusspunktlinie geht in diesen Fällen über in die Lemniskate von Bernoulli. Der Punkt hat nur die Hälfte durchlaufen, darum finden wir auch die halbe Oberfläche. Die halbe Achse der Lemniskate würde $2a$ sein und also die Oberfläche $4a^2$ 1).

C. Die Generatrix ist eine Parabel.

Der Winkel zwischen zwei conjugirten Achsen der Parabel sei ω , und die Gleichung der Parabel wird:

$$\eta'^2 = -2a'\xi'$$

in welcher Formel ξ' immer negativ sein muss.

Wir finden wieder

$$\cos(\omega - \sigma') = \frac{d\xi'}{ds} \sin \omega = - \frac{\eta' \sin \omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega)}}$$

$$\cos \sigma' = - \frac{d\eta'}{ds} \sin \omega = - \frac{a' \sin \omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega)}}$$

oder auch

$$\sin(\omega - \sigma') = - \frac{a' - \eta' \cos \omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega)}}$$

und

$$\sin \sigma' = - \frac{\eta' - a' \cos \omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega)}}$$

Auch müssen wir bemerken, dass der Bogen der Parabel vom Scheitel abgemessen, gleich ist 2)

$$s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\eta' \sqrt{a'^2 + \eta'^2}}{a} + a \log \frac{\eta' + \sqrt{a'^2 + \eta'^2}}{a} \right\}$$

1) Schlömilch, Höhere Analysis. Bd. I. p. 379.

2) Schlömilch, Höhere Analysis. Bd. I. p. 386.

I. Die Parabel wälzt sich eine gerade Linie entlang.

Die allgemeinen Formeln werden wieder sein

$$\begin{aligned} x &= \text{Parabelbogen} + \eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma' \\ y &= \quad \quad \quad - \eta' \cos(\omega - \sigma') + (p - \xi') \cos \sigma' \end{aligned}$$

Nur zwei Fälle werden wir betrachten.

a. Der Brennpunkt ist der beschreibende Punkt. ¹⁾

Jetzt ist $\omega = 90^\circ$ und $p = -\frac{1}{2}a$, folglich sind die Coordinaten

$$x = \frac{1}{2} \frac{\eta' \sqrt{a^2 + \eta'^2}}{a} + \frac{1}{2} a \log \frac{\eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}}{a} - \frac{a\eta' - \frac{1}{2}a\eta' - \eta'\xi'}{\sqrt{a^2 + \eta'^2}}$$

oder

$$x = \frac{1}{2} a \log \frac{\eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}}{a}$$

und

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + \eta'^2}$$

also

$$ae^{\frac{2x}{a}} = \eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}$$

Wälzt sich die Parabel nach der anderen Richtung, so werden η' und x beide negativ, also

$$ae^{-\frac{2x}{a}} = -\eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}$$

oder

$$ae^{\frac{2x}{a}} + ae^{-\frac{2x}{a}} = 2\sqrt{a^2 + \eta'^2} = 4y$$

Sei $\frac{1}{2}a = \alpha$, so ist

$$y = \alpha \left\{ e^{\frac{x}{2\alpha}} + e^{-\frac{x}{2\alpha}} \right\}$$

1) Die drei Curven, welche durch die Brennpunkte der Kegelschnitte bei der Wälzung längs einer geraden Linie beschrieben werden, haben eine gemeinschaftliche Gleichung; diese findet man bei Anwendung der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte, wenn der Scheitel der Coordinatenanfangspunkt ist,

$$\eta'^2 = \xi'^2(\epsilon^2 - 1) - 2a\xi'$$

in welcher Formel ϵ die numerische Excentricität und a der Parameter ist.

Im gebrauchten Coordinatensysteme muss ξ' immer negativ sein.

also ist der durchlaufene Weg eine Kettenlinie ²⁾. Für den Krümmungsradius finden wir nach (IV)

$$P = -\frac{(a^2 + \eta'^2)^3}{2a(a^2 + \eta'^2)^2} = -\frac{a^2 + \eta'^2}{2a}$$

und für die Normale

$$k = \frac{a^2 + \eta'^2}{2a}$$

also ist

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{k} = 0$$

Durch diese Eigenschaft kann die Oberfläche, welche entsteht durch die Rotation der Kettenlinie um die gerade Linie, eine Gleich-

$$\sin \sigma' = \frac{d\xi'}{ds} = \frac{\eta'}{\sqrt{\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2}}$$

und

$$\cos \sigma' = -\frac{d\eta'}{ds} = -\frac{(\varepsilon^2 - 1)\xi' - a}{\sqrt{\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2}}$$

denn

$$\sqrt{[\eta'^2 + \{(\varepsilon^2 + 1)\xi' - a\}^2]} = \sqrt{\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2}$$

folglich wird

$$x = \text{Bogen des Kegelschnittes} = \eta' \frac{(\varepsilon^2 - 1)\xi' - a}{\sqrt{\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2}} + (p - \xi') \frac{\eta'}{\sqrt{\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2}}$$

und

$$y = -\frac{\eta'^2}{\sqrt{(\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2)}} - (p - \xi') \frac{(\varepsilon^2 - 1)\xi' - a}{\sqrt{(\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2)}}$$

Nun ist bei allen Kegelschnitten die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte gleich $\frac{a}{1 + \varepsilon}$, also

$$p = -\frac{a}{1 + \varepsilon}$$

folglich

$$x = \text{Bogen des Kegelschnittes} = \eta' \varepsilon \left\{ \varepsilon \xi' - \frac{a}{1 + \varepsilon} \right\} \frac{1}{\sqrt{\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2}}$$

$$y = a \frac{\varepsilon \xi' - \frac{a}{1 + \varepsilon}}{\sqrt{(\eta'^2 \varepsilon^2 + a^2)}}$$

Diese Gleichungen geben den Weg durch den Brennpunkt durchlaufen für

$\varepsilon > 1$ bei der Hyperbel

$\varepsilon = 1$ bei der Parabel

$\varepsilon < 1$ bei der Ellipse

$\varepsilon = 0$ bei dem Kreise

(eine gerade Linie || der Directrix).

2) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. I. Bd. p. 241.

gewichtsfläche einer Flüssigkeit, auf welcher keine] auswendigen Kräfte wirken, sein. Den Körper durch diese Oberfläche eingeschlossen hat Plateau ¹⁾ eine Catenoide genannt.

b. Der beschreibende Punkt liegt auf der Parabel.

In diesem Falle ist $p = 0$. Wir müssen untersuchen, ob die durchlaufene Curve auch Wendepunkte hat. Nach (V) ist

$$-\{\eta' \cos(\omega - \sigma') + \xi' \cos \sigma'\} = \{\eta'^2 + \xi'^2 + 2\eta'\xi' \cos \omega\} \frac{d\sigma'}{ds}$$

oder

$$-\sin \omega \left\{ \eta' \frac{d\xi'}{ds} - \xi' \frac{d\eta'}{ds} \right\}$$

$$= -\{\eta'^2 + \xi'^2 + 2\eta'\xi' \cos \omega\} \frac{d^2\xi'}{d\eta'^2} \frac{1}{\sin \omega} \left(\frac{d\eta'}{ds} \right)^3 \sin^2 \omega$$

Jetzt ist

$$\frac{d^2\xi'}{d\eta'^2} = -\frac{1}{a}$$

folglich

$$\{\eta'^2 + a'\xi'\} = \{\eta'^2 + \xi'^2 + 2\eta'\xi' \cos \omega\} \frac{1}{\frac{\eta'^2}{a'^2} + 1 - \frac{2\eta'}{a'} \cos \omega}$$

$$\frac{1}{2}\eta'^2\{\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega\} = a'^2 \left\{ \eta'^2 + \frac{\eta'^4}{4a'^2} - \frac{\eta'^3}{a'} \cos \omega \right\}$$

Also $\eta' = 0$. Dieses gibt den Punkt in der geraden Linie, und auch

$$2(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega) = 4a'^2 + \eta'^2 - 4a'\eta' \cos \omega$$

oder

$$\eta'^2 = 2a'^2$$

also

$$\eta' = \pm a\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \xi' = a'$$

In den Wendepunkten ist, weil

$$y = \eta'^2 \frac{\sin \omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega)}} + \xi'a' \frac{\sin \omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta'a' \cos \omega)}}$$

ist:

$$y = \frac{a' \sin \omega}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \omega}}$$

Aus der Formel (III) folgt

1) Plateau, Statique des liquides. Vol. I. p. 95.

*image
not
available*

$$\frac{1}{R} = \mp \frac{a^2}{(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

diese entstehen nur, wenn die Parabel und der Kreis einander inwendig berühren.

Wir finden dann

$$(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = Ra^2$$

oder

$$\eta'^2 = a\sqrt{Ra^2} - a^2 = a\{\sqrt{Ra^2} - a\}$$

Soll dieser Wert von η' reell sein, so muss $R > a$ sein.

Bestimmen wir den Ort der Doppelpunkte:

$$(p - \xi_1')^2 + \eta_1'^2 \pm 2R \frac{\eta_1'^2 - (p - \xi_1')a}{\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)}} = (p - \xi_2')^2 + \eta_2'^2 \\ \pm 2R \frac{\eta_2'^2 - (p - \xi_2')a}{\sqrt{(\eta_2'^2 + a^2)}}$$

oder

$$\left(1 - \frac{p}{a}\right) (\eta_1'^2 - \eta_2'^2) + \frac{1}{4a^2} \{\eta_1'^4 - \eta_2'^4\} \\ + R \left\{ \frac{\eta_1'^2 - 2pa}{\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)}} - \frac{\eta_2'^2 - 2pa}{\sqrt{(\eta_2'^2 + a^2)}} \right\} = 0$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $\eta_1' = \pm \eta_2'$

$$\psi = \frac{\text{Bogen}}{R} = \text{arctg} \frac{p\eta_1' + \frac{\eta_1'^3}{2a} + \eta_1'a}{R\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)} \mp pa \mp \frac{1}{2}\eta_1'^2} \\ = \frac{\text{Bogen}'}{R} = \text{arctg} \frac{p\eta_2' + \frac{\eta_2'^3}{2a} + \eta_2'a}{R\sqrt{(\eta_2'^2 + a^2)} \mp pa \mp \frac{1}{2}\eta_2'^2}$$

Setzen wir die beiden Glieder $\eta_2' = -\eta_1'$, so wird

$$\text{Bogen} = -\text{Bogen}'$$

folglich

$$2 \left\{ \frac{\text{Bogen}}{R} = \text{arctg} \frac{p\eta_1' + \frac{\eta_1'^3}{2a} + \eta_1'a}{R\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)} \mp pa \mp \frac{1}{2}\eta_1'^2} \right\} = 0$$

Also

$$\psi = 0$$

Dieses lehrt uns, dass die Doppelpunkte liegen auf der Linie, welche durch den Mittelpunkt und den Punkt, in welchen der Scheitel den Kreis berührt, geht. Die Linie ist auch eine Linie von Symmetrie.

Um die Wendepunkte zu bestimmen, gebrauchen wir die Formel (V), dies gibt

$$\pm \frac{\eta'^2 - (p - \xi')a}{\eta'^2 + a^2} \frac{1}{1/R \pm \frac{a^2}{(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}} = \eta'^2 + (p - \xi')^2$$

$$\pm \{\eta'^2 - (p - \xi')a\}(\eta'^2 + a^2) \mp \{\eta'^2 + (p - \xi')^2\}a^2 \\ = \{\eta'^2 + (p - \xi')^2\}1/R(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$$

Ist der Brennpunkt der beschreibende Punkt, so ist $p = -\frac{1}{2}a$

$$\pm \{\eta'^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\eta'^2\}\{\eta'^2 + a^2\} \mp \{\eta'^2 + (\frac{1}{2}a + \xi')^2\}a^2 \\ = \{\eta'^2 + (\frac{1}{2}a + \xi')^2\}1/R(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$\pm \frac{1}{2}\eta'^4 \pm \eta'^2 a^2 \pm \frac{1}{2}a^4 \mp \frac{1}{2}a^2 \eta'^2 \mp \frac{1}{4}a^4 \mp \frac{\eta'^4}{4} \\ = \frac{1}{4Ra^2}(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}\{a^4 + 2a^2 \eta'^2 + \eta'^4\}$$

also

$$\pm Ra^2(\eta'^2 + a^2)^2 = (a^2 + \eta'^2)^{\frac{7}{2}}$$

folglich

$$a^2 + \eta'^2 = 0$$

Der Wert der η' , welcher aus dieser Formel folgt, ist imaginär. Weiter ist

$$\pm Ra^2 = (\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$\eta'^2 = a\{\sqrt[3]{R^2 a} - a\}$$

Dieser Wert ist nur reell für $R > a$. Diese Punkte stimmen überein mit den gefundenen Spitzen, wenn die Parabel und der Kreis einander inwendig berühren.

III. Die Parabel wälzt sich längs einer mit ihr congruenten Parabel, während entsprechende Elemente einander berühren.

Schon aus der Analogie mit den Fusspunktlinien wissen wir, dass der Brennpunkt eine gerade Linie durchlaufen wird, und zwar die Richtungslinie der Parabel, während der Scheitel eine Cissoide beschreibt, von welcher der Parameter a ist.

Bestimmen wir den durchlaufenen Weg eines Punktes der Parabel. In schiefwinkligen Coordinaten finden wir (Fig. 14.) für diesen Weg, weil

sich ohne zu gleiten längs anderer Curven wälzen, beschrieben werden. 439

$\alpha = 180^\circ - (\sigma - \omega)$, $\beta = 2\sigma - \omega$ und $\gamma = 2\sigma - \omega$ ist:

$$x = \xi - \eta \frac{\sin 2(\sigma - \omega)}{\sin \omega} + (p - \xi) \frac{\sin(2\sigma - \omega)}{\sin \omega}$$

$$y = \eta \pm \eta \frac{\sin(2\sigma - \omega)}{\sin \omega} - (p - \xi) \frac{\sin 2\sigma}{\sin \omega}$$

Der beschreibende Punkt sei der sich bewegende Coordinatenanfangspunkt, also $p = 0$

$$x = \xi + 2\eta^2 \frac{a' - \eta \cos \omega}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega} + \xi \frac{(a' - \eta \cos \omega)a' - \eta(\eta - a' \cos \omega)}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$x = \eta^2 \frac{a' - \eta \cos \omega}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$y = \eta - \eta \frac{a'^2 - \eta^2}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega} + 2\xi \frac{a'(\eta - a' \cos \omega)}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$y = \eta^2 \frac{\eta - a' \cos \omega}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a' - \eta \cos \omega}{\eta - a' \cos \omega}$$

also

$$\eta = a \frac{x \cos \omega + y}{x + y \cos \omega}$$

folglich nach Substitution dieses Wertes in der Formel für x

$$x + y \cos \omega = a' \frac{(x \cos \omega + y)^2}{x^2 + 2xy \cos \omega + y^2}$$

Gebrauchen wir Polarcoordinaten, so ist

$$x = r \frac{\sin(\omega - \Theta)}{\sin \omega} \quad \text{und} \quad y = r \frac{\sin \Theta}{\sin \omega}$$

also

$$r^3 \frac{\sin(\omega - \Theta) + \sin \Theta \cos \omega}{\sin \omega} = a' r^2 \frac{[\sin(\omega - \Theta) \cos \omega + \sin \Theta]^2}{\sin^2 \omega}$$

oder

$$r \cos \Theta = a' \cos^2(\omega - \Theta)$$

Sei $\Theta = \varepsilon + \omega - 90^\circ$; so ist

$$r = a' \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \omega)}$$

Diese Gleichung geht, wie es gehört, für $\omega = 90^\circ$ über in jene der Cissoide. Wir können den gefundenen Weg auf eine einfache

Weise construiren, welche mit der Construction der Cissoide übereinstimmt. In dem Kreise (Fig. 15) ziehen wir eine Sehne AB und im Punkte B eine Tangente am Kreise. Wenn wir dann durch A Linien ziehen, welche die Tangente und den Kreis schneiden, so müssen wir die Teile zwischen dem Kreise und der Tangente setzen auf die Linien vom Punkte A ab. Wenn wir die Enden dieser Teile mit einander verbinden, bekommen wir die gewünschte Curve. Denn

$$CD = r = CB \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\omega - \varepsilon)} \quad \text{oder} \quad CB = AB \frac{\sin \varepsilon}{\sin \omega}$$

folglich

$$r = AB \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin \omega \sin(\varepsilon + \omega)}$$

Sei der Diameter des Kreises a' , so ist

$$AB = a' \sin \omega$$

folglich

$$r = a' \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \omega)}$$

Die Curve schneidet die Tangente PQ einmal, wenn $\varepsilon = \omega$ ist, hier ist

$$r = \frac{1}{2} a' \operatorname{tg} \omega$$

Die Linie PQ ist eine Asymptote.

A p p e n d i x.

Wenn wir an eine gegebene Curve $f(\xi, \eta)$ eine Tangente und aus einem bestimmten Punkte eine gerade Linie, welche mit der Tangente einen Winkel ω macht, ziehen, so können wir den geometrischen Ort des Schnittpunktes dieser Linien bestimmen. Diese Aufgabe kommt überein mit der Bestimmung des geometrischen Ortes des Schnittpunktes eines Winkels, wenn die eine Linie immer durch einen gegebenen Punkt geht, während die andere eine gegebene Curve berührt. Für diese Frage hat schon Weinmeister¹⁾ eine Lösung gegeben.

In einem geradwinkligen Coordinatensysteme, von welchem der gegebene Punkt der Anfang ist, finden wir:

$$x_1 = \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg}(\tau - \omega) - \operatorname{tg} \tau} = - \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} (1 + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \omega)$$

und

¹⁾ Schlömilch, Zeitschrift. Bd. XXVIII. p. 256.

$$y_1 = \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg}(\tau - \omega) - \operatorname{tg} \tau} \operatorname{tg}(\tau - \omega) = - \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} (\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \omega)$$

Uebertragen wir die Curve auf ein anderes System, dessen Achsen mit jenen des gebrauchten Systemes einen Winkel $90^\circ - \omega$ machen; so ist:

$$x = x_1 \sin \omega + y_1 \cos \omega$$

$$y = -x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega$$

Folglich wird

$$x = - \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\sin \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} \operatorname{tg} \tau = \frac{\xi + \eta \operatorname{tg} \sigma}{\sin \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma)}$$

und

$$y = \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\sin \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} = \frac{\xi + \eta \operatorname{tg} \sigma}{\sin \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma)} \operatorname{tg} \sigma$$

Diese Formeln stimmen mit den Formeln I*** überein. Hieraus folgt, dass die gesuchte Curve mit der Fusspunktlinie in Bezug auf den gegebenen Punkt gleichförmig ist; dass aber ihre Parameter $\operatorname{cosec} \omega$ grösser sind; oder dass die gesuchte Curve die Fusspunktlinie einer Curve, welche der gegebenen gleichförmig ist, aber $\operatorname{cosec} \omega$ mal grössere Parameter hat. So wird z. B. die Ecke eines Winkels, welcher sich auf solche Weise bewegt, dass die eine Linie immer einen Kegelschnitt berührt, während die andere durch den Brennpunkt geht, einen Kreis beschreiben. Bei einer Parabel geht dieser in eine gerade Linie über.

Amersfoort, Januar 1889.

*image
not
available*

$$(1) \quad \alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta = 0$$

$$(2) \quad d\alpha(\beta d\xi - \gamma d\eta) + d\beta(\gamma d\xi - \alpha d\zeta) + d\gamma(\alpha d\eta - \beta d\xi) = 0$$

übrigens gilt

$$(3) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Weil nun

$$dx = d\xi + \rho d\alpha, \quad dy = d\eta + \rho d\beta, \quad dz = d\zeta + \rho d\gamma$$

ist, so folgt, falls man mit $d\sigma$ und ds entsprechende Bogenelemente der Original- und Parallelcurve bezeichnet:

$$ds^2 = d\sigma^2 + 2\rho(d\xi d\alpha + d\eta d\beta + d\zeta d\gamma) + \rho^2(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)$$

Es wird behauptet, dass diese Gleichung von der Form

$$ds^2 = d\sigma^2 \cdot (1 + g\rho)^2$$

ist. Die hinreichende und notwendige Bedingung für diese Darstellbarkeit ist:

$$(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) d\sigma^2 = (d\xi d\alpha + d\eta d\beta + d\zeta d\gamma)^2 \\ = (d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) d\sigma^2 - \Sigma (d\xi d\beta - d\eta d\alpha)^2$$

d. h.

$$\Sigma (d\xi d\beta - d\eta d\alpha) = 0$$

Für α, β, γ galten nun die Bedingungen, von denen man (3) und (1) auch in der Form schreiben kann:

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0 \\ d\xi \cdot d\alpha + d\eta \cdot d\beta + d\zeta \cdot d\gamma = -(\alpha \cdot d^2\xi + \beta \cdot d^2\eta + \gamma \cdot d^2\zeta)$$

aus diesen Gleichungen und aus (2) folgt:

$$d\alpha \cdot d\sigma^2 = -d\xi \cdot (\alpha \cdot d^2\xi + \beta \cdot d^2\eta + \gamma \cdot d^2\zeta)$$

$$d\beta \cdot d\sigma^2 = -d\eta \cdot (\alpha \cdot d^2\xi + \beta \cdot d^2\eta + \gamma \cdot d^2\zeta)$$

$$d\gamma \cdot d\sigma^2 = -d\zeta \cdot (\alpha \cdot d^2\xi + \beta \cdot d^2\eta + \gamma \cdot d^2\zeta)$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\Sigma (d\alpha d\eta - d\beta d\xi)^2 = 0$$

und daher ist

$$(4) \quad ds = d\sigma(1 + g \cdot \rho)$$

$$(5) \quad g = -\frac{d\alpha d\xi + d\beta d\eta + d\gamma d\zeta}{d\sigma^2}$$

Die so definirte Grösse g bedeutet die geodätische Krümmung der Originalcurve, falls man sie als auf der zu Grunde gelegten abwickelbaren Fläche A gelegen ansieht. Denn das System

$$x = \xi + \varrho \cdot \alpha, \quad y = \eta + \varrho \cdot \beta, \quad z = \zeta + \varrho \cdot \gamma$$

kann man als Gleichung der Torse A ansehen, falls man ϱ als zweiten Parameter nimmt. Die Coordinatencurven sind dann einerseits die Erzeugenden der Torse, andererseits die Schaar der Parallelcurven. Die Coordinatencurven schneiden sich orthogonal. Demnach ist ¹⁾

$$g_{\varrho} = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \varrho}$$

die geodätische Krümmung einer Curve $\varrho = \text{Const.}$ E und G bedeuten die Gauss'schen Grössen.

$$E = \Sigma \left(\frac{dx}{du} \right)^2 = [d\sigma^2 + 2\varrho \Sigma d\xi d\alpha + \varrho^2 \Sigma d\alpha^2] : d\sigma^2$$

$$G = \Sigma \left(\frac{dx}{d\varrho} \right)^2 = 1$$

Führt man diese Werte in den Ausdruck für g_{ϱ} ein, und setzt $\varrho = 0$, so folgt $g_{\varrho} = g$, und dies war zu beweisen.

Man ersieht hieraus, in welcher Weise die Formel für ebene Parallelcurven sich specialisirt. Da dann nämlich die Torse zur Ebene wird, so geht die geodätische Krümmung in die gewöhnliche über.

Man kann aus der soeben gefundenen Grundformel noch eine geometrische Beziehung herleiten. Durch Integration folgt:

$$s = \sigma \pm \varrho \int_{\sigma_0}^{\sigma} g d\sigma = \sigma \pm \sigma_1$$

und das doppelte Zeichen entspricht den beiden Zweigen der Parallelcurve. Die Grösse σ_1 gibt also an, um wieviel grösser oder kleiner der Bogen des Parallelcurvenzweiges ist als der entsprechende Bogen der Originalcurve. Den Bogen σ_1 kann man darstellen als Schnitt einer Kugel vom Radius ϱ mit einem Kegel, dessen Spitze im Centrum der Kugel liegt, und dessen Erzeugende

1) Knoblauch, Flächentheorie, § 90.

parallel sind den Erzeugenden der Torse A . Denn die Gleichung des so definirten Kegels ist

$$x = \rho\alpha, \quad y = \rho\beta, \quad z = \rho\gamma$$

wo ρ vorläufig zweiter Parameter ist. Das Bogenelement der Curve $\rho = \text{Const.}$ ist also:

$$d\sigma_2 = \rho \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

nach früheren Beweisen ist

$$\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = g \cdot d\sigma$$

also

$$d\sigma_2 = \rho \cdot g \cdot d\sigma$$

$$\sigma_2 = \rho \int_{\sigma_0}^{\sigma} g \cdot d\sigma = \sigma_1$$

dies war zu beweisen.

Man ersieht leicht, wie diese Darstellung sich für Parallelcurven ebener Curven und für ebene Parallelcurven gestaltet; im ersten Falle wird der genannte Kegel zum Kreiskegel, im zweiten zur Ebene. In beiden Fällen sind die Bögen σ_1 Teile von Kreisbögen, oder auch ganze Kreise.

Schliesslich ergibt sich noch das Resultat, dass die Krümmungslinien einer und derselben Röhrenfläche constanten Umfang haben, nämlich den doppelten Umfang der Originalcurve. Denn die Längen der Zweige sind:

$$s' = \sigma + \sigma_1$$

$$s'' = \sigma - \sigma_1$$

mithin

$$s = s' + s'' = 2\sigma$$

Ebenso lässt sich nachweisen, dass das Areal der abwickelbaren Fläche A zwischen den beiden Zweigen der Parallelcurve constant ist, welche von den unendlich vielen abwickelbaren Flächen auch genommen wird. Denn das Element des Areals, begrenzt von zwei benachbarten Curven $\rho = \text{Const.}$ und zwei benachbarten Normalen, ist:

$$dF' = d\sigma d\rho + \rho g d\sigma d\rho$$

$$dF'' = d\sigma d\rho - \rho g d\sigma d\rho$$

also

$$F' = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \int_0^{\rho} d\sigma d\rho + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \int_0^{\rho} \rho g d\sigma d\rho$$

$$F'' = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \int_0^{\rho} d\sigma d\rho - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \int_0^{\rho} \rho g d\sigma d\rho$$

$$F = F' + F'' = 2\rho(\sigma - \sigma_0)$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von der Wahl der abwickelbaren Fläche ab.

Für das Volumen der Röhrenfläche findet man in ähnlicher Weise die bekannte Formel

$$\text{Vol} = \rho^2 \pi (\sigma - \sigma_0)$$



XX.

Vielecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte schneiden.

Von

R. Hoppe.

Versteht man unter der Höhe eines $(2n+1)$ ecks über einer Seite als Basis das Lot von der Gegenecke auf diese Seite, so bilden diejenigen $(2n+1)$ ecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte treffen, eine specielle Classe von bemerkenswerten Eigenschaften, die wir hier untersuchen wollen.

Der Höhenschnittpunkt C sei Anfang der rechtwinkligen xy und der Polarcoordinaten $\rho\varphi$. Die k te Ecke A_k habe die Coordinaten $\rho_k\varphi_k$ und auf der Gegenseite ($l_k = A_{k+n}A_{k+n+1}$) den Höhenfusspunkt B_k . Die Projection des Dreiecks CA_kA_{k+1} auf beide Axen ergibt die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{k+1} \cos \varphi_{k+1} &= \rho_k \cos \varphi_k + l_{k+n+1} \sin \varphi_{k+n+1} \\ \rho_{k+1} \sin \varphi_{k+1} &= \rho_k \sin \varphi_k - l_{k+n+1} \cos \varphi_{k+n+1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

woraus durch Elimination von l_{k+n+1} :

$$\rho_{k+1} \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_{k+n+1}) = \rho_k \cos(\varphi_k - \varphi_{k+n+1}) \quad (2)$$

Setzt man $k = 1, 2, \dots, 2n+1$, so ergibt das Product aller Gleichungen eine Identität.

Daraus folgt, dass man, um ein solches Vieleck zu construiren, sämtliche φ_k und ein ρ_k willkürlich annehmen kann. Zeichnet man dann, von einem beliebigen A_k anfangend, alle Seiten der Reihe nach, jede normal zum nächsten Höhenlot, so gelangt man stets auf A_k zurück.

Nun ist jedes der Vierecke $B_{k+n}CB_{k+n+1}A_k$ ein Kreissehenviereck, da die Winkel bei den B rechte sind; daher ist der Winkel bei C gleich dem Aussenwinkel des Vielecks bei A_k . Nennt man letztern α_k , so hat man:

$$\varphi_{k+n+1} - \varphi_{k+n} = \alpha_k \quad (3)$$

Setzt man in den 2 Gl. (1) $k-1$ für k und eliminirt φ_{k+1} , φ_k , φ_{k-1} zwischen allen 4 Gleichungen, so kommt:

$$l_{k+n+1} \cos(\varphi_{k+n+1} - \varphi_{k+1}) \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) = \\ l_{k+n} \cos(\varphi_{k+n} - \varphi_{k-1}) \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

Drückt man nach der Formel (3) die Differenzen der φ in α aus und setzt $k-n$ für k , so findet man:

$$l_{k+1} \sin \alpha_k^2 \cos(\alpha_{k+2} + \alpha_{k+3} + \dots + \alpha_{k+n+1}) = \\ l_k \sin \alpha_{k+1} \cos(\alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{k+n}) \quad (4)$$

Die hierin für $k = 1, 2, \dots, 2n+1$ enthaltenen Gleichungen geben vermöge der Relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n+1} = 4R$ ein identisches Product. Demnach gibt es $2n$ Relationen zwischen den Seiten und Winkeln des Vielecks als Bedingungen des gemeinsamen Höhenschnitts, und zwar keine Bedingungen für die Winkel, ausser der bekannten Summe aller. Sind letztere gegeben, so sind die Seitenverhältnisse eindeutig bestimmt. Sind die Seiten gegeben, so sind die Gleichungen zur Bestimmung der Winkel der Zahl nach gerade ausreichend; die Bedingungen, unter denen sie reell werden, würden weitere Untersuchung erfordern.



Litterarischer Bericht

XXIX.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Par Ch. Sturm, Membre de l'Institut. Revu et corrigé par E. Prouhet, Répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, et augmenté de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques par H. Laurent. Neuvième édition, revue et mise au courant du nouveau programme de la Licence par A. de Saint-Germain, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. Paris 1888. Gauthier-Villars et fils. 1220 S.

Die erste Ausgabe ist von Prouhet nach dem Manuscript von Sturm in dessen Auftrage bearbeitet. Bald nach Beginn dieser Arbeit starb Sturm. Die Theorie der elliptischen Functionen kam später hinzu. Der gegenwärtigen Ausgabe geht eine Lebensbeschreibung Sturm's voraus. Karl Sturm, geboren 1803 in Genf, ausgebildet an der Akademie daseibst von Schaub, Dufour und Lhuillier, war anfangs Privatlehrer, von 1825 an in Paris, wo besonders Arago, Ampère und Fourier an seinen Arbeiten Interesse nahmen, ward 1830 Professor der Mathematik am Collège Rollin, 1836 Mitglied der Akademie der Wissenschaften, 1838 Repetitor, 1840 Professor an der Polytechnischen Schule und Lehrer der Mechanik an der Sorbonne an Poisson's Stelle, erhielt von vielen Seiten Auszeichnungen und starb 1855 in Paris. Schriften von ihm werden 46 aufgeführt.

Sturm's Ruf gründet sich nicht allein auf seine wissenschaftlichen Leistungen, auch die Klarheit seines Vortrags wird laut der Biographie sehr gerühmt. Da letztere in einem Lehrbuche wie dem

vorliegenden von besonderer Wichtigkeit ist, so können wir nicht mit Nachsicht darüber hinweggehen, wenn der ausdrücklich als Fundamentalsatz der Analysis bezeichnete Satz, nach 8 Revisionen die er erfahren hat, völlig unklar ausgesprochen ist und ein gänzlich Misverstehen von Seiten des Verfassers kund gibt. Er lautet:

„Si deux quantités qui varient simultanément restent constamment égales entre elles, dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, et si l'on sait que l'une d'elles tend vers une limite, il est évident que l'autre tend aussi vers la même limite ou vers une limite égale à celle-là.“

Offenbar sind 2 Variable, die bei ihrer Variation einander stets gleichbleiben, nichts weiter als eine Variable zweimal gedacht. Der Satz sagt also, dass diese Variable beim zweiten Denken noch denselben Grenzwert hat, den sie beim ersten Denken hatte. Das ist ein Satz, dessen Inhalt null ist, und daraus folgt, dass jeder Beweis, der sich auf denselben als notwendiges Glied stützt, falsch sein muss. So ist denn die gesamte Analysis nach Darstellung des Verfassers, sofern sie sich angeblich darauf stützt, auf lauter Trugschlüsse gebaut.

Der obige Satz gelte aus demjenigen Fundamentalsatze, an dessen Stelle er steht, durch eine wunderliche Verwechslung hervor. Der richtige Satz lautet: Zwei Constante, welche Grenzwerte einer, gleich variirenden Grösse sind, sind einander gleich. Statt aber zwei Constante und eine Variable zu betrachten, nimmt Sturm zwei Variable und eine Constante; statt zwei Dinge durch ein Band zu verknüpfen, wird hier ein Ding durch zwei Bänder mit sich selbst verknüpft.

Dass Sturm seinen Satz evident nennt und nicht beweist, ist ganz natürlich. Er gibt dafür eine Anwendung von demselben, die wir als bestätigendes Beispiel unserer Aussage, dass jede solche einen Trugschluss enthalten muss, anführen wollen. Seien f , s , r Fläche, Umfang, Radius eines Kreises, f_n , s_n , r die eines umschriebenen regelmässigen n ecks; dann ist $f_n = \frac{1}{2} r s_n$. Weil nun der Kreis Grenze des Vielecks sei, folgert Sturm, sei vermöge seines Satzes $f = \frac{1}{2} r s$. Dies stimmt aber wie man sieht gar nicht mit jenem Satze; denn dieser sagt nur, dass, wenn $\lim f_n = f$, auch $\lim \frac{1}{2} r s_n = f$ ist und umgekehrt, während $\frac{1}{2} r s$ ganz unberührt und unbekannt bleibt. Verhüllt wird der handgreifliche Fehler bloss durch die vage vulgäre Vorstellung von der Grenze, ein Begriff der anfänglich richtig definiert, hier aber nicht dementsprechend angewandt wird. In Wirklichkeit genügt eine Grenzrelation nicht zur Folgerung $f = \frac{1}{2} r s$; es

muss ausser f auch $\frac{1}{2}rs$ als Grenze von f_n , oder, was dasselbe ist, s als Grenze von s_n bekannt sein.

Auf die Erörterung des Grenzwerts folgt noch besonders einiges über den Begriff der unendlich kleinen Grössen, beginnend mit den Worten:

„Lorsqu' une quantité variable prend des valeurs de plus en plus petites, de manière qu'elle puisse devenir moindre que toute quantité donnée, ou dit qu'elle devient infiniment petite.“

Dem wird hinzugefügt, dass die Unendlichkleine wesentlich eine Variable ist, die den Grenzwert 0 hat. Letztere Angabe würde zur Definition genügen, vorausgesetzt, dass der Grenzwert vorher definiert ist. Die angeführte Stelle aber ist durchaus unklar, geht um den Sinn und Gebrauch des Wortes herum ohne ihn zu treffen. Wenn in der Analysis von unendlich kleinen Grössen die Rede ist, sagt man nicht, dass irgend welche Grössen unendlich klein werden, sondern man nennt jene Variable einfach „unendlich klein“; dem factischen Gebrauche nach (welcher keine Lizenz, sondern völlig exact ist) sind sie also unendlich klein. Was unendlich klein ist, darüber fehlt jede Angabe in jener Stelle, die doch gewiss eine Erklärung sein soll; der Begriff bleibt rätselhaft und dunkel.

Das Angeführte zeigt wol zur Genüge, dass das Buch Anfängern der Analysis nicht zu empfehlen ist. Es besteht aus 2 Bänden; im ersten ist die Differentialgleichung mit Anwendung auf Reihen und Curven, im zweiten die Integralrechnung mit Anwendung auf krumme Flächen behandelt. Hoppe.

Abhandlungen aus der reinen Mathematik von N. Vandermonde. In deutscher Sprache herausgegeben von Carl Jtzigsohn. Berlin 1888. Julius Springer. 104 S. Text und 4 Zahlentafeln.

Es werden uns im Vorliegenden 4 Abhandlungen aus dem vorigen Jahrhundert durch deutsche Ausgabe näher gerückt, in einer Zeit, die geneigter ist die Genialität der darin ausgeführten Gedanken zu würdigen als die vergangene, die mehr Vollendung oder sicherere Gewährleistung verlangte. Die erste Abhandlung „über die Auflösung der Gleichungen“ betrifft die verschiedenen Auffassungen der algebraischen Gleichungen. Die zweite „über die irrationalen Grössen verschiedener Ordnung nebst einer Anwendung auf den Kreis“ geht von einer Erweiterung des Potenzbegriffs aus. Statt eines Products gleicher Factoren wird das Product einer endlichen arithmetischen Reihe gesetzt, deren m te Differenz null ist. Die Bedeutung negativer

und Null-Exponenten liegt auf der Hand; die Einführung gebrochener Exponenten beschränkt sich hier auf den Exponenten $\frac{1}{2}$; hierzu dient der Kreis. Als dritte Schrift folgt nun ein Bericht über vorstehende Abhandlung aus den historischen Notizen der Königl. Akad. der Wiss. zu Paris 1772. Dieser legt Gewicht darauf, dass die Irrationalzahl π einen analogen Ursprung mit der irrationalen Potenzwurzel erhalten hat, und sagt, durch diese Arbeit sei ein neuer Weg eröffnet, und Vandermonde werde jederzeit gerechten Anspruch auf die ruhmvollen Erfolge haben, die man in späterer Zeit dadurch erzielen werde. So hoch man nun aber den originellen Gedanken des Verfassers auch schätzen mag, so ist doch letztere Aeusserung etwas zu phantastisch. Zunächst ist der Weg der Untersuchung kein offener, solange die Probleme, von denen er abhängt, nicht sichtlich lösbar sind. Wären sie aber auch gelöst, so kann der eine Fall der Zahl π kaum irgend eine Wahrscheinlichkeit bieten, dass die analogen Irrationalen mit den Zielen der Analysis in Beziehung stehen. Die vierte Abhandlung „über die Elimination“ zeigt den Weg der Entdeckung der Determinantentheorie in der Forschungsweise des Verfassers.

H.

Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Von Dr. Hermann Cuno Schwarz. Halle a. S. 1888. H. W. Schmidt 43 S.

Das Vorliegende schliesst sich an eine Arbeit von Georg Cantor an, welcher auch den Namen Ordnungstypen eingeführt hat. Der Gegenstand ist eine Menge nach begrenzt vielen Dimensionen geordneter Elemente, die zwar nicht durch Beschaffenheit, aber durch ihren Rang (Ordinalzahl) unterschieden sind. Hierin liegt in der That eine specielle Beschränkung des Themas; denn eine Menge kann auch nach einem Gesetze geordnet sein derart, dass sich die Dimensionen beständig mehren. Das Gegenwärtige stellt sich die Aufgabe, über die Menge aller derjenigen Ordnungstypen Aufschluss zu geben, welche auf dieselbe Cardinalzahl führen, so wie über daran sich anknüpfende Fragen. Es ergiebt sich, dass die Untersuchung betreffend beliebig viele Dimensionen sich auf die für 2 Dimensionen reducirt. Schliesslich wird auf eigentümlich definirte Reihensummen Anwendung gemacht.

H.

Carl Friedrich Gauss' Untersuchungen über höhere Arithmetik. (Disquisitiones arithmeticae. Theorematis arithmetici demonstratio nova. Summatio quarundam serierum singularium. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliaciones novae. Theoria residuorum biquadraticorum,

commentatio prima et secunda. Etc.) Deutsch herausgegeben von H. Maser. Berlin 1889. Julius Springer. 695 S.

Das Buch enthält in der Originalausgabe der gesamten Werke wie in der Uebersetzung die Zahlentheorie von den Elementen beginnend auf dem Standpunkte, auf den sie Gauss erhoben hat. Es ist darin kein Unterschied gemacht, ob Teile schon vor ihm bekannt waren. Er hat die Werke seiner Vorgänger wie er sagt nicht vorher gelesen, sondern alles selbst entdeckt, daher manches nach anderer Methode hergeleitet. Die Abschnitte sind: Von der Congruenz der Zahlen im allgemeinen; von der Congruenz ersten Grades; von den Potenzresten; von den Congruenzen 2. Grades; von den Formen und unbestimmten Gleichungen 2. Grades; verschiedene Anwendungen; über diejenigen Gleichungen, von denen die Teilung des Kreises abhängt; neuer Beweis eines arithmetischen Satzes; Summierung gewisser Reihen von besonderer Art; neue Beweise und Erweiterungen des Fundamentalsatzes in der Lehre von den quadratischen Resten; Theorie der quadratischen Reste, 2 Abhandlungen; einige Untersuchungen aus dem handschriftlichen Nachlasse von Gauss H.

Lehrbuch der Differential-Gleichungen. Von Dr. Andrew Russell Forsyth, Professor am Trinity College zu Cambridge. Mit einem Anhang: Die Resultate der im Lehrbuche angeführten Übungsaufgaben enthaltend, herausgegeben von H. Maser. Autorisirte Uebersetzung. Braunschweig 1889. Friedrich Vieweg und Sohn. 742 S.

Das Buch enthält der Reihe nach: als Einleitung die allgemeinen Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen und ihren Lösungen, dann Differentialgleichungen der 1. Ordnung; allgemeine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten; vermischte Methoden; Integration durch Reihen; die hypergeometrische Reihe; Lösung durch bestimmte Integrale; gewöhnliche Differentiale mit mehr als 2 Veränderlichen; partielle Differentialgleichungen erster, dann zweiter und höherer Ordnung. Mit der Theorie sind viele Übungsaufgaben, über das ganze Buch zerstreut, mehr als 800, verbunden und im Anhang jedes Abschnitts die Resultate oder Andeutungen zur Lösung gegeben. Bei der Wahl der Methoden wird dem praktischen Interesse vor dem theoretischen der Vorzug zugeschrieben. Die Uebersetzung entspricht der 2. Ausgabe von Forsyth's Werke „A treatise on differential equations“, welche sich indes nur unbedeutend von der ersten unterscheidet. H.

Zum Gesetz der grossen Zahlen. Untersuchung der Ziehungsergebnisse der Prager und Brüner Lotterie vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Emanuel Czuber. Prag 1889. Dominicus. 41 S.

Der Mittelwert von vielen gleichmöglichen Werten, resp. wo begünstigende Ursachen einspielen, von den mit ihren Chancen multiplicirten Werten heisst gewöhnlich der mathematisch wahrscheinliche Wert. Ebenso lässt sich die wahrscheinliche Abweichung von diesem Mittelwerte berechnen. Das Gesetz der grossen Zahlen sagt nun aus, dass der Umfang der Abweichungen für unendliche Anzahl von Fällen unendlich klein wird. Er hat offenbar keinen theoretischen Grund, sondern beruht rein auf Erfahrung. Der Verfasser hat nun die aufgezeichneten Ergebnisse der Prager und Brüner Lotterie benutzt um es zu prüfen und gefunden, dass der wirkliche Umfang der Abweichungen weit kleiner ist als die wahrscheinliche Abweichung. Es werden eine Anzahl Wahrscheinlichkeitsfragen berechnet, z. B.: Nach wievielen Ziehungen, deren jede nur einen bestimmten Teil der vorhandenen Numern umfasst, werden alle Numern erschöpft sein? — dann das Rechnungsergebnis mit den Beobachtungen verglichen. H.

Grundriss der Theorie der Zinsrechnung. Von Dr. Heinrich Bleicher. Mit Tabellen. Berlin 1888. Julius Springer. 75 S.

In der Einleitung werden die Begriffe normirt und die 3 hier behandelten Fälle: 1) einfacher Zins bei dauernder gleichen Rente 2) Zinseszins bei wachsendem Capital ohne Rente 3) Aufzehrung des Capitals bei gleichmässigem Zuschlag zur Rente — erörtert, dann einzeln deren Theorie entwickelt, und am Schlusse Tabellen gegeben über Zinsfactoren für ein Jahr nach Monaten und auch Tagen innerhalb eines Monats, Zins- und Discout-Factoren für den Schluss des Jahres, Tafeln zur Ueberführung discontinuirlicher Verzinsung in continuirliche und umgekehrt. H.

Lehrbuch der politischen Arithmetik für höhere Handelsschulen (Handelsakademien) und zum Selbstunterricht bearbeitet von F. S. Holzinger, Professor an der öffentlichen Handelsakademie in Linz. Braunschweig 1888. Vieweg und Sohn. 156 S.

Das den Lehrplänen entsprechend für die 3. Classe der Handelsakademien von Wien, Prag, Linz, Innsbruck u. a. bearbeitete Lehrbuch behandelt nach einander: als Einleitung die einfache Zinsrechnung, dann die Zinseszins- und Zeitrentenrechnung, Anlehenscourts

und Construction von Amortisations-Plänen, Construction von Lotterie-Anlehens-Plänen, Wahrscheinlichkeits- und Leibrentenrechnung, Capitalsversicherung, Verbindungsrenten (von der Verbindung zweier Personen abhängend) und gibt Tabellen für $\log\left(1 \pm \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$,

$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, Sterblichkeit und die davon abhängigen Renten. Es

ist ganz zweckmässig, dass bei specieller Rechnung nicht die allgemeine Formel, sondern die Methode eingeübt wird. Eine Unklarheit macht sich im Anfange des Buches bemerklich, wo gesagt wird: wenn ein Capital c zu p proc. n Jahre einfach verzinst würde, so wäre es nach diesen n Jahren auf $c + \frac{c p n}{100}$ angewachsen. Dies ist ein Widerspruch; denn wenn das Capital wüchse, so würden zufolge des Vordersatzes auch seine jährlichen Zinsen wachsen. Wäre diese unlogische Redeweise im geschäftlichen Verkehr in Gebrauch, so hätte umsomehr das Lehrbuch die Pflicht darüber Aufklärung zu geben und sich selbst wenigstens exact auszudrücken. H.

Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrett von n^2 Feldern, derart dass keine von einer andern geschlagen werden kann. (Von $n = 4$ bis $n = 10$.) Von Dr. August Pein, Oberlehrer an der Realschule zu Bochum. Mit 7 Figurentafeln. Leipzig 1889. Gustav Fock. 4^o. 62 S.

Die bezeichnete Aufgabe ist für specielle Zahlen n bis $n = 8$ von mehreren Mathematikern behandelt und gelöst. Es werden deren genannt: Gauss (und Schumacher), Nauck, Natani, Günther, Glaisher, De la Noë. Zu deren Arbeiten fügt die gegenwärtige als neu hinzu 352 Lösungen für $n = 9$ und 724 Lösungen für $n = 10$. An der Vollständigkeit der erstern hat der Verfasser keinen Zweifel, letztere Zahl hält er noch für unsicher. Analytische Lösungen hat noch keiner der Vorgänger gegeben, und die gegenwärtige Bearbeitung geht auf keine solche aus. In dieser Hinsicht war, wie es scheint, Günther der erste, welcher die analytische Gestaltung des Problems als eigentliches Ziel ins Auge fasste und soviel erreichte, dass das Verfahren der Ausschliessung eine bedeutende Vereinfachung und Uebersichtlichkeit, daher auch grössere Sicherheit gewann. Hierzu fügte Glaisher noch eine Verbesserung. Der Verfasser hat diese Methoden zur Lösung in Anwendung gebracht, der Standpunkt des Problems ist dabei derselbe geblieben. Der Inhalt der Schrift besteht in der Vorführung aller Betrachtungen, welche zur Auffindung und Vervielfältigung der Lösungen als bekannt zur Verfügung stehen, und der tabellarischen Aufstellung der Resultate. H.

*image
not
available*

lässt an Gründlichkeit und Vollständigkeit nichts vermissen: keine Vernachlässigung findet statt ohne Nachweis der Berechtigung; was in den Originalarbeiten die Grenzen des Beabsichtigten überschreitet oder für dasselbe entbehrlich war, ist wenigstens durch Citate zugänglich gemacht. Das Ganze liefert demnach eine vollständige Entwicklung des heutigen Standpunktes des Problems. Nach dem vorbereitenden ersten Abschnitte, in welchem namentlich das Problem zweier und dreier Körper behandelt werden, teilt sich die Aufgabe des Buches in zwei Fragen: 1) Was ist in dem Problem der *n* Körper im voraus bekannt? 2) welche approximative Methoden stehen bei dessen Ergänzung zur Verfügung und sind in Anwendung gekommen. Dieser natürlichen Teilung gemäss werden im 2. Abschnitt die vorhandenen Integrale angegeben und die allgemeinen Eigenschaften der Integrale entwickelt, im 3ten die Störungsrechnungen gelehrt. Am Schlusse jedes Abschnitts wird die Geschichte der betreffenden Entdeckungen zusammengestellt. Tabellen der neuesten Wertangaben der Constanten stehen am Ende. H.

Die Form, Anziehung und materielle Beschaffenheit der Erde. Von Theodor Schmid. Linz 1887. Verlag der k. k. Staats-Ober-Realschule. 65 S.

Ein Teil der Schrift ist im Jahresbericht der genannten Schule für das 36. Studienjahr enthalten, die Fortsetzung besonders herausgegeben. Es wird zunächst die Geschichte des Problems, in welcher 4 Entwicklungsphasen durch die Namen Newton, Clairaut, Laplace, Stokes kenntlich gemacht sind, vorgetragen, dann über sämtliche Untersuchungen und Theorien, welche aus dem Problem hervorgegangen sind, mit Eingehen auf die Herleitungen Bericht gegeben. Die nach einander behandelten Gegenstände sind: das Potential, insbes. des Ellipsoids; Form und Anziehung einer homogenen, flüssigen Masse, welche um eine Axe rotirt; Potential eines Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten; Form und Anziehung einer flüssigen Masse, welche ein festes Ellipsoid bedeckt, das aus unendlich vielen Schichten veränderlicher Dichte und Abplattung zusammengesetzt ist; Beschaffenheit des Erdinnern auf Grund einer Hypothese; das Potential mit Rücksicht auf die Theorie der Kugelfunctionen; das Geoid und die Störungen; Schwermessungen und Bestimmung der mittleren Dichte der Erde. H.

Cours d'astronomie pratique. Application à la géographie et à la navigation. Par E. Caspari, Ingénieur hydrographe de la marine. Paris 1889. Gauthier-Villars et fils.

Dies Buch ist bestimmt für Reisende zur See und zu Lande, welche eigene Beobachtungen zu machen beabsichtigen. Es ertheilt ihnen reichlich alle dazu erforderliche Belehrung und Angaben aus der Astronomie und mathematischen Geographie. Das 1. Buch behandelt die Probleme der sphärischen Astronomie, das 2te die Theorie der Instrumente, das 3te die Bestimmung der geographischen Elemente, complementäre Breite, Zeit, Azimut und Länge nebst Gebrauch des Chronometers, das 4te die Kartenprojectionen, zum Schluss die Theorie der Beobachtungsfehler. H.

Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, in Einzel-Abhandlungen verfasst und herausgegeben von Dr. G. Neumayer, Director der deutschen Seewarte. Zweite völlig umgearbeitete, und vermehrte Auflage. Mit zahlreichen Holzschnitten und zwei lithogr. Tafeln. Berlin 1888. Robert Oppenheim. 82 Bogen.

Die Abhandlungen sind folgende. Fr. Tietjen: Geograph. Ortsbestimmungen. W. Jordan: Topogr. und geogr. Aufnahmen. v. Richthofen: Geologie. H. Wild: Bestimmung der Elemente des Erdmagn. J. Hann: Meteorol. E. Weiss: Anweis. zur Beob. allg. Phän. am Himmel. P. Hoffmann: Naut. Vermess. C. Börgen: Beob. über Ebbe und Flut. v. Lorenz-Liburnau: Beurteil. des Fahrwassers in unregelmäßigen Flüssen. O. Krümmel: Einige oceanograph. Aufgaben. M. Lindemann: Erheb. über den Weltverkehr. G. Neumayer: Hydrogr. und magn. Beob. an Bord. A. Meitzen: Allg. Landeskunde, polit. Geogr. und Statistik. A. Gärtner: Heilkunde. A. Orth: Landwirtsch. L. Wittmack: Landwirtsch. Culturpflanzen. O. Drude: Pflanzengeogr. P. Ascherson: Die geogr. Verbreitung der Seegräser. G. Schweinfurth: Pflanzen höh. Ordn. A. Bastian: Allg. Begriffe der Ethnol. H. Steinthal: Linguistik. H. Schubert: Das Zählen. R. Virchow: Anthropol. und prähist. Forsch. R. Hartmann: Säugetiere. H. Bolau: Waltiere. G. Hartlaub: Vögel. A. Günther, Reptilien, Batrachier und Fische. v. Martens: Mollusken. K. Möbius: Wirbellose Seetiere. A. Gerstäcker: Gliedertiere. G. Fritsch: Das Mikroskop und der photogr. Apparat. Diese Abhandlungen sind auch einzeln käuflich. H.

Les étoiles filantes et les bolides. Par M. Félix Hémet, Lauréat de l'Institut, Inspecteur général honoraire de l'instruction publique. Paris 1888. Gauthier-Villars et fils. 108 S.

Dies Buch ist für Nicht-Astronomen bestimmt, welche für Himmelserscheinungen Interesse haben. Es beschreibt die Erscheinungen

von Sternschnuppen, charakterisirt ihre Unterschiede, macht Angaben über die Zeit ihrer Beobachtung, ihre Periodicität und Häufigkeit, nennt die Beobachter der bemerkenswertesten Erscheinungen nebst den Orten der Beobachtung und teilt die Ansichten über ihre Erklärung mit. H.

Kalender-Karten für die Jahre 1800—1999. Entworfen von Prof. Dr. Felix Müller. Berlin 1888. Rudolf Hertzberg. Format 10 × 7 ctm. 34 S.

Die Karten geben auf kleinst möglichem Raume mit geringst möglichem Aufwande von Mühe für jeden Monatstag jedes Jahres den Wochentag und für jedes Jahr den Ostertag. Je 2 Nebenseiten enthalten den Kalender aller Jahre von gleichem Cyklus: links findet man die Beziehung zwischen Monats- und Wochentag, rechts die Jahre, denen sie gemeinsam zukommt, nebst Ostertag. Am Schlusse weist ein Register jedem Jahre die betreffende Karte zu. H.

Astronomischer Kalender für 1889. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neu Folge. Achter Jahrgang. Wien, Carl Gerold's Sohn. 145 S.

Die Beilagen zu diesem Jahrgange haben folgende Gegenstände: I. Neue Planeten und Kometen. II. Das Chronodeik. III. Mars. IV. Uebersicht des Planetensystems, A) Bahnelemente der grossen Planeten, B) der Satelliten, C) Verzeichniss der Asteroiden, alphabetisch und nach ihrer Entdeckungszeit, und ihre Bahnelemente. H.

Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen meteorologischen Gesellschaft. Redigirt von Dr. J. Hann, Wien, Hohe Warte, und Dr. W. Köppen, Hamburg, Seewarte. Fünfter Jahrgang 1888. (zugleich XXIII. Bd. der „Zeitschrift der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie“). Berlin, A. Asher u. Co.

Der 5. Jahrg. enthält folgende Abhandlungen.

Ferrari: Beitr. z. Gewitterk. Hann: Bezieh. zw. Luftdruck u. Temp.-Var. auf Berggipfeln. Woeikof; Einfl. von Land und Meer auf d. Lufttemp. Weber: Photometr. Beob. während d. Sonnenfinst. 1887. Wild: Regenverh. d. russ. Reichs. Ekholm: Abl. einer period. Funct. aus einer Reihe beob. Grössen. Meyer: Ge-

*image
not
available*

T. J. Stieltjes: Ueber eine Verallgemeinerung der Formel der endlichen Incremente.

A. Pellet: Approximative Theilung eines Kreisbogens in gegebenem Verhältniss mit Hilfe der Regel des Zirkels.

Bioche: Ueber die Krümmungslinien gewisser Rogelflächen.

Delannoy: Ueber die Dauer des Spieles.

E. Catalan: Verschiedene Sätze und Aufgaben.

J. Réveille: Ueber einen Satz der kinematischen Geometrie.

V. Jamet: Ueber das Genus der triangulären ebenen Curven.

Fabry: Zurückführbarkeit der linearen Differentialgleichungen.

de Presle: Ueber die Entwicklung von $\cot x$ in eine Reihe von Brüchen. — Successive Derivirte einer ganzen Potenz einer Function 1 Variabeln; dito einer Function nebst Anwendung auf die Bestimmung der bernoullischen Zahlen.

Williot: Einfachstes Verfahren der Berechnung der bernoullischen Zahlen.

Rouché: Bemerkungen in Antwort auf eine Note von Delannoy.

C. A. Laisant: Arithmetische Bemerkungen über die zusammengesetzten Zahlen. — Ueber ein System zweier ebenen Curven. — Ueber die factorielle Zählung, Anwendung auf Permutationen.

Weil: Ueber eine Eigenschaft der Systeme ebener Curven.

E. Lemoine: Coordinatensysteme, welche am einfachsten einen Punkt durch Construction bestimmen.

M. d'Ocagne: Ueber die Hauptssysteme von Peninvarianten einer linearen Form. H.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté. Sous les auspices du Ministère de l'instruction publique et de la Municipalité de Toulouse avec le concours des Conseils Généraux de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées. Tome II. Année 1888. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Der 2. Band enthält folgende Abhandlungen.

Ch. Bioche: Ueber die asymptotischen Linien gewisser windschiefer Flächen.

P. Painlevé: Ueber die singulären Linien der analytischen Functionen.

Hermite: Bemerkungen über die Zerlegung der doppelt periodischen Functionen in einfache Elemente. — Ueber die Transformation des Integrals 2. Gattung.

F. Tisserand: Ueber eine Differentialgleichung 2. Ordnung, welche in der Himmelsmechanik eine wichtige Rolle spielt.

B. Baillaud: Ergänzende Untersuchungen über die Entwicklung der Störungsfunction.

G. Koenigs: Beiträge zur Theorie des Kreises im Raume.

F. J. Stieltjes: Ueber die lineare Transformation des elliptischen Differentials $dx : \sqrt{X}$.

A. Destrem: Verdrängung des Kupfers durch Zink und Cadmium in einigen Lösungen von Kupfersalzen.

P. Duhem: Historische Studie über die Theorie der Magnetsirung durch Influenz. H.

Verlagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Weetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Derde reeks. Derde, vierde deel. Amsterdam 1887. 1888. Johannes Müller.

Der 3. Teil enthält 2 mathematische Aufsätze von

P. H. Schoute: Ueber eine enge Beziehung zwischen dem Brocard'schen Winkel und Brocard'schen Kreise. — Allgemeine Regel für die Bahnform und Dauer der centralen Bewegung.

Der 4. Teil enthält die folgenden.

F. J. van den Berg: Ueber die graphische Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.

J. de Vries: Quadrupelinvolutionen auf biquadratischen Curven.

Ausserdem verschiedenes Geschichtliches von D. Bierens de Haan und D. J. Korteweg. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXIV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1883. Dargest. v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 39. Jahrg. 1. Abth., enth. Physik der Materie. Red. v. L. Rosochatius. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Graf, J. H., Geschichte der Mathematik u. der Naturwissenschaften in bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. 2. Hft. Das XVII. Jahrhundert. Bern, Wyss. 1 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Unter bes. Mitwirkg. v. F. Müller u. A. Wangerin, hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 18. Bd. Jahrg. 1886. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Methode und Principien.

Bolzano's, B., Paradoxien d. Unendlichen, hrsg. aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers v. F. Přihonsky. 2. Aufl. Berlin, Mayer & M. 3 Mk.

Miller-Hauenfels, A. Ritter v., Richtigstellung der in bisheriger Fassung unrichtigen mechanischen Wärmetheorie und Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Aotherbewegungen. Wien, Manz'scher Hof-Verl. 4 Mk. 80 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Aufl. Bearb. u. hrsg. v. B. Dürigen. 23. ÷ 25. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. 50 Pf.

Lehrbücher.

Otto, C., u. H. Diesener, Lehrbuch der gesamten niederen Mathematik. 5 Hfte. Halle, Hofstetter. 11 Mk. 80 Pf.; in 2 Bde. geb. 13 Mk. 50 Pf.

*image
not
available*

Gegenbauer, L., über windschiefe Determinanten höheren Ranges. Ebd. 60 Pf.

Lie, S., e. Fundamentalsatz in der Theorie der unendlichen Gruppen. Christiania, Dybwad. 35 Pf.

Mertens, F., e. Beweis d. Fundamentalsatzes der Algebra. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Michaelsen, A., d. logarithmische Grenzfall der hypergeometrischen Differentialgleichung n -Ordnung. Kiel, Lipsius & T. 1 Mk. 20 Pf.

Steinhauser, A., die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln m. Hilfe der kleinsten Quadrate. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Wirtinger, W., Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen m. algebraischen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Zaiser, G., das Speziesrechnen u. der Bruchsatz. Lehrbuch zur rationellen Behandlg. d. Rechenunterrichts in den Oberklassen der Volks- u. Mittelschulen. Lehrer-Asg. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 2 Mk. 40 Pf.; Schüler-Asg. Kart. 45 Pf.

Geometrie.

Bieler, A., Leitfaden f. den Unterricht in der Raumlehre in gehobenen Volks-, Bürger- u. Mittelschulen. Jona, Mauke's Verl. 80 Pf.

Glänzer, K., die Gegenkurven der Kegelschnitte. Hamburg, Herold, Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Hofmiller, O., Grundzüge der orthogonalen Projektion. In Mappe. Bamberg, Buchner. 3 Mk. 80 Pf.

Koeltzsch, A., Grundzüge der Raumlehre. 2. Hft. Leipzig, Merseburger. 60 Pf.; Einbd. 10 Pf.

Koestler, H., Leitfaden der ebenen Geometria f. höhere Lehranstalten. 1. Hft. Kongruenz. 3. Aufl. Halle, Nebert. Kart. 1 Mk. 25 Pf.

Kuglmayr, L., ab. Spiralen u. deren Tangirungs-Problem. Wien, Spielhagen & Sch. 7 Mk.

Mertens, F., Beweis der Darstellbarkeit irgend e. ganzen invarianten Gebildes e. binären Form als ganze Function e. geschlossenen Anzahl solcher Gebilde. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Pelz, C., Note zur Abhandlung: „Ueber die Focalcurven d. Quetelet.“ Ebd. 40 Pf.

Puchta, A., analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen. Ebd. 40 Pf.

Vries, J. de, ab. d. e. Vierseite harmonisch eingeschriebene Configuration 18_3 . Ebd. 40 Pf.

Weyll, der erste Unterricht in der Raumlehre. Leipzig, Fock. 50 Pf.

Trigonometrie.

Conradt, F., stufenmässige Anordnung d. trigonometrischen Lehrstoffs der Gymnasien. Leipzig, Fock. 1 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Simon, P., Gewichtsbestimmungen f. Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen. Veröffentlichung d. königl. preuss. geodät. Instituts. Berlin, Stankiewicz. 2 Mk. 50 Pf.

Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Instituts. Polhöhenbestimmungen aus dem J. 1886 f. 20 Stationen nahe dem Meridian d. Brockens vom Harz bis zur dänischen Grenze. Gelegentlich ausgeführte Polhöhen- u. Azimutbestimmungen aus den J. 1878 – 1884. Ebd. 10 Mk.

Mechanik.

Brill, A., über die reducirte Resultante. München, Franz'scher Verl. 40 Pf.

Velde, W., üb. e. Spezialfall der Bewegung e. Punktes, welcher v. festen Centren angezogen wird. Kiel, Lipsius & T. 1 Mk. 60 Pf.

Wolf, M., die Differentialgleichung der mittleren Anomalie u. die Wahrscheinlichkeit der Convergenz in der Darstellung ihres Integrals. Heidelberg, Winter's Univ.-Buchh. 1 Mk. 60 Pf.

Technik.

Fortschritte der Elektrotechnik. Vierteljährliche Berichte. Hrsg. v. K. Strecker. 2. Jahrg. 1888. 2. Hft. Berlin, Springer. 5 Mk.

Fritsche, W., die Gleichstrom-Dynamomaschine, ihre Wirkungsweise u. Vorausbestimmung. Ebd. 4 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Red.: O. Schneider. 10. Jahrg. 1889. Nr. 7. Leipzig, Gressner & Schr. Viertelj. 2 Mk.

Exner, K., üb. e. Consequenz d. Fresnel-Huyghens'schen Principis. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Koppe, C., die Photogrammetrie od. Bildungskunst. Weimar, Verlag der dtshn. Photographen-Zeitung. 6 Mk.

Straubel, R., üb. die Berechnung der Frauenhofer'schen Beugungerscheinungen durch Randintegrale m. besond. Berücksichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer. Jena, Pohle. 1 Mk. 50 Pf.

Tumlirz, O., Berechnung d. mechanischen Lichtäquivalents aus den Versuchen d. Herrn Julius Thomsen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen, magnetische, d. Tifiser physikalischen Observatoriums im J. 1886—1887. Hrsg. v. J. Mielberg. Russisch u. deutsch. St. Petersburg, Eggers & Co. 4 Mk.

Brosch, Ph., Bahnbestimmung d. Kometen 1867. III. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Hann, J., Untersuchungen üb. die tägliche Oscillation d. Barometers. Ebd. 4 Mk.

Holtschek, J., Bahnbestimmung d. Planeten (118) Peitho. 3. Tl. Ebd. 80 Pf.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. Jahrg. VII. 1888. Magdeburg, Faber. Kart. 6 Mk.

Jerofeieff, M., u. P. Latschinoff, der Meteorit v. Nowo-Urei. St. Petersburg, Eggers & Co. 6 Mk.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla (Ungarn). 10. Bd., enth. Beobachtungen vom Jahre 1887. Halle, Schmidt's Verl. 5 Mk.

Krebs, A., Beiträge zur Kenntniss u. Erklärung der Gewitter-Erscheinungen auf Grund der Aufzeichnungen über die Gewitter Hamburgs in den J. 1878—1887. Stuttgart, Maier. 1 Mk. 50 Pf.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 121. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke S. prepl. 15 Mk.

Niessl, G. v., üb. das Meteor vom 22. April 1888. Wien, Hölder. 1 Mk. 60 Pf.

Palisa, A., Bestimmung der Bahn d. Planeten (211) Isolda. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Pernter, J. M., Messungen der Ausstrahlung auf dem Hohen Sonnenblick. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Publicationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 23. 6. Bd. 3. Stück. Leipzig, W. Engelmann. 5 Mk.

Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Otta-kring). Hrsg. v. N. Hertz. 1. Bd. Wien, Frick. 15 Mk.

Singer, K., Temperaturmittel f. Süddeutschland. München, Th. Ackermann. 3 Mk.

Spörer, G., üb. die Periodicität der Sonnenflecken seit dem J. 1618, vornehmlich in Bezug auf die heliographische Breite der-

selben, u. Nachweis e. erhebl. Störung dieser Periodicität während e. langen Zeitraumes. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 23. Jahrg. 4. Hft. Ebd. 2 Mk.

Dass. 24. Jahrg. 1889. 1. Hft. Ebd. 2 Mk.

Physik.

Faraday, M., Experimental-Untersuchungen üb. Elektricität. Uebers. v. S. Kalischer. 1. Bd. Berlin, Springer. 12 Mk.; geb. 13 Mk. 20 Pf.

James, E., l'électricité. Cours public donné à Bienne. Genf, Stapelmohr. 1 Mk.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 97.—100. Heft. Stuttgart. J. Maier. à 25 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 9. Aufl. v. L. Pfaundler. 3. Bd. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk. 50 Pf.

Troje, O., Beiträge zur Analyse d. Uebergangswiderstandes. Königsberg, Koch. 1 Mk.

Tumlirz, O., u. A. Krug, die Energie der Wärmestrahlung bei der Weissgluth. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Vermischte Schriften.

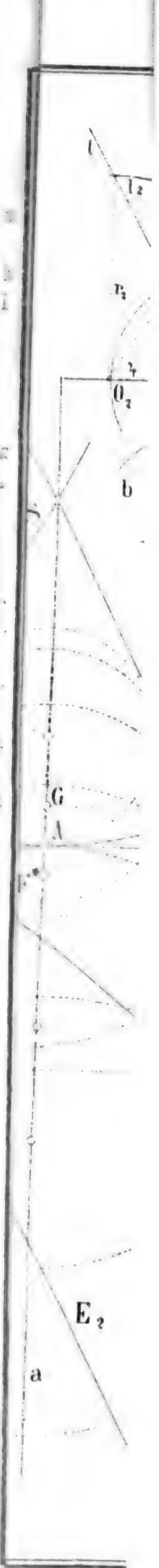
Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. v. J. Fröhlich. 6. Bd. (Juni 1887 — Juni 1888.) Berlin, Friedländer & S. 8 Mk.

Kleyer, A., Encyklopädie der gesammten mathematischen, technischen und exacten Naturwissenschaften. 35. Lfg. Stuttgart, Maier. 1 Mk.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'Académie imperiale des sciences de St. Pétersburg. Tome VI. Livr. V. Leipzig, Voss' Sort. 3 Mk. 75 Pf.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr. 29. Jahrg. 1888. Königsberg, Koch. 6 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. Jahrg. 1888. 3. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.



+

Litterarischer Bericht

XXX.

Geometrie.

Einführung in die neuere analytische und synthetische Geometrie. Für das Selbststudium leichtverständlich ausgearbeitet von Dr. H. Kaiser in Dieburg. Mit 83 Holzschnitten im Text und 3 lithographirten Tafeln. Wiesbaden 1887. J. F. Bergmann. 190 S.

Der gesamte Inhalt des Buches zeigt, dass dasselbe eine Einführung in die neuere synthetische Geometrie ist, weit entfernt von der analytischen Geometrie eine Idee zu geben oder dieselbe irgendwie zu berühren. Die weiter gehende Behauptung auf den Titel ist umso ausdrücklicher zurückzuweisen, weil die unbegrenzte Ausdehnung der synthetischen Geometrie leicht die ganze Universitätszeit in Beschlag nimmt, während die Studirenden von der Existenz der wirklichen analytischen Geometrie keine Ahnung haben und durch jene anmassende Aussage beständig im Irrtum erhalten werden. Die gegenwärtige Bearbeitung macht freien Gebrauch von Coordinaten in jeder zweckdienlichen Form, verbindet also Rechnung und räumliche Betrachtung. Die Berechtigung der synthetischen Geometrie dies zu tun kann niemand bestreiten, ihre Name selbst weist auf die Tätigkeit hin. Auch der Ausfall der vorliegenden Lehre zeigt, dass durch Zuziehung des Rechnens keine abweichende Theorie entstanden ist. Was dagegen der Verfasser in den dem Buche vorangestellten „generellen Bemerkungen“ über das Verhältniss der synthetischen und analytischen Methode sagt — sie verhielten sich wie Handarbeit (resp. Kopfarbeit) und Maschinenarbeit — ist lächerlich entstellend. Die Erfindung einer Maschine setzt voraus, dass, was sie leistet,

*image
not
available*

gebilde nicht von ihnen abhänge. Zur Klarstellung ist dreierlei zu betonen. Erstens ist die Behauptung unrichtig, denn die Geschwindigkeiten (natürlich die relativen der Teile) und die Erzeugnisse nach Gestalt und Eigenschaften bestimmen sich gegenseitig, es bleibt nur die Frage, wie man sie aus einander findet. Zweitens sind die Bestimmungsgrößen kein blosses Hülfsmittel der Deduction, sondern ein recht wesentlich zur Theorie gehöriges Element. Da der Verfasser im Anfange des Vorworts schlechthin von der Kinematik im gauzen redet, gleich nehher aber es erscheinen lässt, als ob die rein geometrischen Resultate dieses Gauze wären, so ist es wol nicht überflüssig zu erinnern, dass die so erhaltenen Gesetze doch nur die eine, nämlich die qualitative Seite der Kinematik darstellen. Konnten diese Gesetze ohne Zuziehung der Quantitäten auch recht leicht und elegant gewonnen werden, so würde man doch die vollständige fundamentale Kinematik weit einfacher bei stets begleitender Formel herleiten, als wenn man die Quantitäten erst nachträglich aus den Lagenverhältnissen berechnen wollte. Drittens, wenn es sich um Vorzüge der einen und andern Methode handelt, so hat sich die rein geometrische bloss einen Mangel aus Maxime selbst auferlegt: sie kann das Erkannte nicht deponiren; sowol der Forschende als auch der Lernende ist genötigt die ganze Geistesarbeit des Vorstellens dauernd und immer von neuem zu vollziehen; die Schöpfungen bleiben stets Privateigentum des Erzeugers, und wer sie fortsetzen will, muss grössere Gaben besitzen als seine Vorgänger. Die ordnenden Gesichtspunkte, welche über das Lagenverhältniss der Configurationen Licht verbreiten, kommen der rein geometrischen Betrachtung nicht ausschliesslich zu: wer sie findet, hängt von der Begabung des Autors, nicht von der Methode ab, ihr Gebrauch aber kommt der Untersuchung in jeder Form zugute.

Der Fortschritt in der Entwicklung der Theorie der Bewegung, unter welcher durchgängig die Lagenänderung in sich unveränderlicher Systeme verstanden wird, ist der, dass zuerst die Bewegung ebener Systeme in ihrer Ebene, dann die Bewegung eines räumlichen Systems um einen festen Punkt, endlich mit Ausschluss beider Specialitäten die Bewegung eines Raumes im andern zur Behandlung gelangt.

H.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, o. Professor der Mathematik an der Universität Strassburg i. E. Erste Abtheilung. Mit 82 Holzschnitten im Text. Dritte, vermehrte Auflage. Leipzig 1886. Baumgärtner. 248 S.

Die bedeutende Vermehrung besteht zunächst in der schon in

*image
not
available*

Methoden aufnimmt und in dieselben einführt. Der I. Abschnitt behandelt die Grundzüge der Centralprojection. Nach einleitender Erläuterung der Sache und der allgemeinen Anordnungen sind die Gegenstände: die fundamentalen Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen und hierauf bezügliche Constructionen; Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, welche von Längen- und Winkelgrößen abhängig sind. Der II. Abschnitt behandelt die Elemente der projectivischen Geometrie, und zwar: Allgemeines; Curven 2. Grades als projectivische Erzeugnisse; collineare Verwandtschaft zweier ebenen Systeme und deren specielle Formen; Aufgaben in centralprojectivischer Darstellung mit Benutzung projectivischer und collinearer Constructionen. Der III. Abschnitt Transformationen centralprojectivischer Bilder. Der IVte aus Ebenen zusammengesetzte Gebilde, und zwar das Dreikant; die Darstellung durch Polygone, Polyeder, ihre ebenen und gegenseitigen Schnitte. Der 2. Band soll den krummen Flächen gewidmet sein. H.

Behandlung der Kegelschnitte mittels Linienkoordinaten. Von Dr. H. Willig, Realgymnasiallehrer zu Mainz. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Grossherzlichen Realgymnasiums und der Realschule zu Mainz. Herbst 1888. Mainz. 48 S.

Das Vorliegende teilt in elementarer Herleitung die Theorie der Linienkoordinaten und ihrer Anwendung auf die Elemente der Kegelschnittslehre zur Einführung in das Studium derselben mit. Der Verfasser empfiehlt, einige Teile davon schon auf der Schule zur Verwendung zu bringen. Dem werden wol Wenige beistimmen; die Betrachtungsweisen zu vervielfältigen, wo kaum Gelegenheit ist, die Bedeutung der Coordinaten in einer Form kennen zu lernen, möchte doch gewiss in pädagogischer Hinsicht das Allerunvernünftigste sein und alle Orientirung vereiteln. Nach einer Einleitung, welche die nötigen Anordnungen darlegt, sind die Gegenstände der Schrift: Transformation der Linienkoordinaten, der Kreis, die Parabel, die Ellipse, die Hyperbel, Durchmesser der Kegelschnitte, andere Formen für die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel, Discussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades. H.

Bing's Kreiswinkel. Ein Beitrag zur Quadratur des Kreises. Redigirt von Regierungsbauführer Dorst. Düren (Rheinland), Carl Schleicher u. Schüll.

Das so benannte Instrument ist ein Lineal in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit einem Winkel, dessen Cosinus $-\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ ist.

*image
not
available*

Elemente der mathematischen Krystallographie in neuer leichtfasslicher Darstellung. Nach den Vorträgen von Johann Krejčí, Professor an der k. k. böhm. Karl-Ferdinand'schen Universität in Prag herausgegeben von Friedrich Katzer. Leipzig 1887. Wilhelm Opetz. 214 S.

Die Darstellung ist eine analytisch geometrische, welche vom vollständigen System der Krystallformen ausgeht, dieses übersichtlich ordnet, dann die einzelnen Formen nach dieser Ordnung entwickelt. Sämtliche werden aus dem Hexaid, sechsseitigem Parallelepiped, abgeleitet, welches in Winkeln und Kanten 7 Variationen zulässt. Die Geometrie und die Rechnungen der Krystallographie sind an sich einfach und leicht genug, das Verständniss wird aber in den meisten Lehrbüchern, wo dieselbe einen Teil bildet, erschwert durch den Gebrauch von Symbolen, welche die Vorstellung abschneiden, während der Gewinn an Kürze ganz unerheblich ist. Die gegenwärtige Bearbeitung bleibt bei der allgemein mathematischen Ausdrucksweise, mit welcher der Anfänger vertraut ist. Die sich ergebenden 362 Krystallformen sind auf 8 Tafeln gezeichnet. H.

Mechanik.

Leitfaden und Repetitorium der analytischen Mechanik. Für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen. Von Rector Dr. Albert Bieler. In zwei Theilen. Analytische Dynamik der festen Körper. Mit erläuternden Beispielen und in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1888. Wilhelm Violet. 91 S.

Das Vorliegende enthält die analytischen Principien der Dynamik der Punkte, Punktsysteme und starren Körper in kurzer zusammenhängender Entwicklung. Diese zerfällt der Natur der Sache gemäss in 2 verschiedene Elemente: allgemeine Sätze als Basis aller Untersuchung und ausgeführte Lösung derjenigen speciellen Probleme, für welche eine solche möglich ist. Das gegenwärtige folgt grösstenteils letzterm theoretischen Gesichtspunkte und erstrebt Vollständigkeit, lässt sich aber auch manchmal vom vorwaltenden Interesse leiten, z. B. bei der Bewegung eines Punkts auf einer Linie, wo die allgemeine Lösung unmittelbar bekannt ist. Am wenigsten motivirt ist aber die Zuziehung des Falles, wo die Bewegung durch Stoss, d. h. also durch unberechnete Zwischenvorgänge, unterbrochen wird. Auch in Betreff der Ausführungen gilt es, dass nur grössten-

teils die Fragen der Theorie beantwortet werden: bei der Bewegung eines Punkts auf einer Kugel z. B. ist nur die Zeitgleichung berechnet, die Bahngleichung geradezu vergessen. So sind auch die Methoden grösstenteils, aber nicht immer, die einfachsten: das Alembert'sche Princip z. B., das doch bei richtiger Betrachtung aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten als unmittelbare Folge hervorgeht, wird hier durch eine gar nicht einfache Rechnung daraus hergeleitet, die überdies zum Verständniss noch weiterer Erläuterung bedarf. Endlich sind auch die Begriffsbestimmungen grösstenteils correct, aber nicht alle: die Schwere z. B. wird in constantes Verhältniss zur Masse gesetzt und ein Coefficient angegeben, welcher nahezu der Breite $48^{\circ} 27'$ entspricht, ohne ein Wort von seiner Abhängigkeit zu sagen. Im ganzen also ist die Arbeit eine erfreuliche Erscheinung, aber noch in vielen Punkten besserungsbedürftig. H.

Ueber die Berechnung und die bildliche Darstellung von Trägheits- und Centrifugalmomenten ebener Massenfiguren. Von Robert Land in Dresden. Leipzig 1888. Arthur Felix. 66 S. (Civilingenieur XXXIV.)

Im Vorliegenden reproducirt der Verfasser die im Civilingenieur XXXIII vom Herrn Professor Mohr entwickelte Lehre und fügt eigene Bemerkungen hinzu. Es werden darin die „Centrifugalmomente“, die Bestimmungsgrössen für die Lage des „Trägheitsschwerpunkts“ — zwei Namen deren Bedeutung der Verfasser zu erklären nicht für nötig befunden hat — und die Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstücks in einer für die Construction geeigneten Form durch Rechnung dargestellt, dann die Construction ausgeführt. Nach dem Urtheile des Verfassers über Mohr's Theorie gibt dieselbe „eine äusserst übersichtliche und einfache Darstellung von Flächenmomenten 2. Ordnung in Bezug auf beliebige Axen, welche Darstellung bei ihrer grossen Allgemeinheit für alle in der Flächenebene befindlichen Axen an Einfachheit wol schwerlich übertroffen werden kann und gegenüber der bisher meist üblichen Darstellung durch Trägheits- und Centralellipsen für die praktischen Anwendungen einen überwiegenden Vorteil besitzt.“ H.

T e c h n i k.

Das wahre Gesetz der Dampf-Expansion und die Berechnung der dreistufigen Expansions-Dampfmaschine. Von Arnold Samuelson, Chef-Ingenieur der Stadtwasserkunst zu Hamburg. Mit 4 lithographischen Tafeln und 14 Skizzen im Text. Hamburg und Leipzig 1888. Leopold Voss. 127 S.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass der Wasserdampf im Cylinder einer Dampfmaschine in der Expansionszeit, d. h. wo weder Dampf noch Wärme zu oder abfließt, am genauesten der Poisson'schen Formel

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n$$

gemäss Druck und Volum ändert, wenn man darin auch n , d. i. das Verhältniss der Capacitäten bei constantem Druck und Volum vorläufig als unbekannt betrachten müsse. Die Theorie von Clausius sei völlig ohne Anwendung, weil sie allein von gesättigtem Dampf handle, der im vorliegenden Falle nicht dauernd bestehen könne. Die Techniker hingegen seien sämtlich abgeneigt auf Revision der Berechnungsweise einzugehen. Er hat zur Verteidigung seiner Ansicht 4 Vorträge gehalten und publicirt dieselben unverändert in der vorliegenden Schrift. H.

O p t i k.

Das Licht. Zwölf Vorlesungen gehalten in Aberdeen 1883—1885 nebst zwei Vorlesungen über Absorption und Fluorescenz des Lichtes von George Gabriel Stokes M. A. F. R. S. F. P. C. etc., Professor der Mathematik in Cambridge. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Otto Dziobek, Privatdocent an der technischen Hochschule zu Charlottenburg. Leipzig 1888. Johann Ambrosius Barth. 308 S.

Diese Vorlesungen sind in Ausführung der veränderten Bestimmungen des Burnett'schen Logats, zu der dessen Curatorium das Thema gegeben und den Verfasser erwählt hat, gehalten worden. Die Behandlungsweise und namentlich die Art, wie er den Anschluss an die ursprüngliche Forderung, welche die Wissenschaft in Beziehung zur Religion zur Aufgabe macht, bewahrt hat, unterlag dem freien Ermessen des Verfassers. Der Vortrag wendet fast gar keine Mathematik an, beschränkt sich also ganz auf rein qualitative Dar-

*image
not
available*

griffe dem Schüler eine zwei Seiten lange Betrachtung ohne alle exacte Schlussweise vorgeredet um ihm den Satz glaubhaft zu machen. Begründung des Brechungsgesetzes war nicht notwendig, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht weiter in Anwendung kommt; man konnte das Gesetz als empirisch erkanntes zugrunde legen. Es liess sich auch leicht elementar begründen; nur musste der Strahl als Gerade, der momentan erreichte Punkt auf ihr und dadurch die Geschwindigkeit, endlich der Ort der gleichzeitig erreichten Punkte als Ebene construirt und die Hypothese gemacht werden, dass der Strahl auf ihr senkrecht steht, was sich wiederum elementar beweisen liess, wenn man in der Hypothese noch weiter zurückgriff. Im Vorwort wird behauptet, es sei die Hypothese über das Wesen des Lichts vorangestellt, um deutlich darzutun, wie sich die ganze Lehre aus einem einheitlichen Principe ableiten lässt. Was im voraus über das Wesen des Lichts gesagt ist, möchte schwerlich Basis einer daraus folgenden Theorie sein können; denn die einzige mathematische Angabe, dass die Schwingungen transversale sein sollen, hat keinen Sinn, wenn keine Richtung genannt wird, zu der sie es sind. Jedenfalls steht alles Folgende damit in keiner logischen Verbindung. Angeblich wird daraus bewiesen, dass die Lichtstrahlen im isotropen Medium gerade Linien sind. Was aber ein Lichtstrahl bedeutet, ist hier gar nicht erklärt; die Strahlen treten in der Rede auf als beliebig gedachte Gerade; von solchen weiss man auch ohne Optik, dass sie Gerade sind. II.

Vermischte Schriften.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXV. 1888. Serie quarta. Rendiconti pubblicati per cura dei Segretari. Volume IV. Roma 1888. V. Salviucci.

Der 4. Band enthält folgende mathematische Abhandlungen.

Bianchi: Ueber die kleinsten Flächen in Räumen constanter Krümmungen. — Ueber die Fuchs'schen Flächen. — Ueber die unbestimmten quadratischen Differentialformen.

Cesàro: Ueber die Begriffe der Grenze und der Stetigkeit. — Formeln zur Bewegung eines Punktes. — Ueber eine Verteilung der Zeichen. — Starre Bewegung und theoretische Deformationen in krummen Räumen.

D'Ovidio: Ueber einige simultane Invarianten zweier binären Formen 5. und 4. Ordnung und über deren Resultanten.

Pincherle: Ueber gewisse bestimmte Integrale. — Ueber die verallgemeinerten hypergeometrischen Functionen.

Volterra: Eine Erweiterung der Riemann'schen Theorie der Functionen complexer Variablen. — Ueber die polydromen analytischen Functionen.

Pascal: Ueber ein Fundamentaltheorem in der Theorie des symbolischen Calculs der n -ären Formen.

Gerosa: Ueber die Schallgeschwindigkeit in den Legirungen.

Maschke: Auflösung der Gleichung 6. Grades.

Brioschi: Beobachtungen an vorstehender Mitteilung. — Die Normalform der Gleichungen 6. Grades (2 Noten). — Die Differentialgleichungen für die Perioden der hyperelliptischen Functionen zweier Variablen.

Paladini: Ueber die rotirende Bewegung, welche im Vacuum oder in incompressibler Flüssigkeit ein Körper unter dem Einfluss von Kräften mit dem Potential $H_1 \cos^2 \vartheta + H_2 \cos \vartheta$ annimmt.

Ricci: Ueber die Classification der quadratischen Differentialformen.

Montesano: Ueber die involutorischen Transformationen des Raumes, welche einen linearen Complex von Geraden bestimmen.

Marangoni: Kriterien zur Aufstellung einer natürlichen Classification der Krystalle. — Das Problem der capillaren Anziehung und Abstossung.

Favero: Eine neue Untersuchung über die Schwere.

Padova: Eine neue Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf Mechanik. — Ueber die krummlinigen Coordinaten.

Pittarelli: Ueber die zum Oktaeder gehörenden Formen. — Ueber die Transformation des elliptischen Differentials ausgeführt mittelst typischer Darstellung der binären Formen 3. und 4. Grades.

Cardani: Ueber den Einfluss der elastischen Kräfte auf die transversalen Schwingungen der Saiten (2 Noten).

Govi: Neue Methode den Ort, die Lage und Grösse der von Linsen oder complexen optischen Systemen gegebenen Bilder zu construiren und zu berechnen.

Pierpaoli: Einfluss der Temperatur auf die Schwingungszahl einer Stimmgabel.

Betti: Ueber die Entropie eines Newton'schen Systems in Bewegung.

Battaglini: Ueber die sestatischen Punkte einer beliebigen Curve.

Ricco: Deformirtes Bild der Sonne im Spiegel des Meeres und dessen Abhängigkeit von der Rundung der Erde.

Tonelli: Ueber eine gewisse partielle Differentialgleichung.

II.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler 8. Stockholm 1886. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 8. Band enthält folgende Abhandlungen.

G. W. Hill: Ueber den Teil der Bewegung des Perigäums des Mondes, welcher eine Function der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond ist.

Hj. Mellin: Zur Theorie der Γ Function.

O. Staudé: Ueber hyperelliptische Integrale 2. und 3. Gattung

M. A. Stern: Ueber einen Satz von Hermite bezüglich auf die Function $E(x)$.

H. Schubert: Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimensionen.

E. A. Stenberg: Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen.

E. Holst: Beweis des Satzes, dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat.

M. Noether: Ueber die reductibeln algebraischen Curven.

H. Weber: Theorie der Abel'schen Zahlkörper.

P. Appell: Ueber einige Anwendungen der Function $Z(x, y, z)$ auf die mathematische Physik.

H. Poincaré: Ueber die unregelmässigen Integrale der linearen Gleichungen.

F. Casorati: Die Functionen einer einzigen Variablen mit beliebig vielen Perioden. — Die fundamentalen Oerter der inversen Functionen der Abelschen Integrale und insbesondere der inversen Functionen der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung.

J. Bertrand: Ueber die elektrischen Einheiten. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Epping, C., Astronomisches aus Babylon od. das Wissen der Chaldäer üb. den gestirnten Himmel. Unter Mitwirkung v. J. N. Strassmaier. Freiburg, Herder. 4 Mk.

Fortschritte, die, der Physik. Nr. 12. 1888. Leipzig, E. H. Mayer. 3 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet von C. Ohrtmann. Unter Mitwirkung von F. Müller u. A. Wangerin hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 18. Bd. Jahrg. 1886. 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Lommel, E., Georg Simon Ohm's wissenschaftliche Leistungen. Festrede. München, Franz'scher Verl. 60 Pf.

Némethy, G., Quæstiones de Firmico Materno astrologo. Budapest, Lampel. 60 Pf.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 1 – 3. Leipzig, W. Engelmann. Kart. 2 Mk. 10 Pf.

Reiff, R., Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, Laupp. 5 Mk.

Revue der Fortschritte der Naturwissenschaften. Hrsg. v. H. J. Klein. (17. Bd.) Neue Folge. 9. Bd. Nr. 1. Physik. Leipzig, E. H. Mayer. pro Nr. 1 – 6. 9 Mk.

Methode und Principien.

Beetz, K. O., das Typenrechnen auf psychophysischer Grundlage. 1. Tl. Theoretische Darstellung. Halle, Schrödel. 2 Mk. 50 Pf.

Bredichin, Th., sur l'origine des comètes périodiques. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk.

Dorn, J. u. P. Nakel, Anleitung zum Unterrichte im Rechnen. 5. Tl. 7. Aufl. v. P. Nakel. Breslau, Handel's Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Harms, Ch., zwei Abhandlungen üb. den Rechenunterricht. Oldenburg, Stalling's Verl. 80 Pf.

Schulze, C., richtig Rechnen durch Selbstunterricht. Berlin, A. Schultze's Verl. 3 Mk.

Steuer, W., die Decimalfläche, ihr Wesen und ihre Stellung im Selbstunterrichte. 2. Aufl. Breslau, Woywod. 50 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Aufl. Bearb. u. hrsg. v. K. Dürigen. 26.—29. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 60 Pf.

Sammlungen.

Adam, W., Resultate zu dem arithmetischen u. algebraischen Übungsbuch. 2. Aufl. Neuruppin, Petronz. 90 Pf.

Bardey, E., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enth. üb. alle Teile der Elementar-Arithmetik. 15. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Bothe, A., Sammlung v. Rechenaufgaben f. höhere Schulen. 2. Hft. 7. Aufl. Annaberg, Graser. Kart. 1 Mk.

Dittmers, H., Rechenbuch f. Stadt- u. Bauschulen. 2. Hft. 8. Aufl. Harburg, Elkan. 65 Pf.

Fölsing, Rechenbuch f. Gymnasien, Realschulen, Ober-Real-schulen etc. 2 Tle. 19. u. 20. Aufl. bearb. v. O. Hoffmann. Berlin, E. Goldschmidt. Geb. à 1 Mk. 20 Pf.

Frick, F., Übungsstoff f. das stereometrische Rechnen. Nürtingen, Zimmermann. 80 Pf.

Harms, Ch. u. A. Kallius, Rechenbuch für Gymnasien, Real-gymnasien, Ober-Real-schulen etc. 14. Aufl. Oldenburg, Stalling's Verl. 2 Mk. 25 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 528.—567. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Lösungen der Absolutorial-Aufgaben aus der Mathematik an den humanistischen Gymnasien Bayerns seit dem J. 1861. Nebst e. Anhang: Die wichtigsten Formeln der Mathematik. München, Pohl's Verl. 2 Mk. 80 Pf.

Löwe, M. u. F. Unger, Aufgaben f. das Zahlenrechnen. Hft. A. u. B. 3. Aufl. Leipzig, Klinkhardt. à 60 Pf.

Särchinger, E. u. V. Estel, Aufgabensammlung f. den Rechen-unterricht in den Unterklassen der Gymnasien. 1. Hft. Sexta. Leipzig, Teubner. Kart. 80 Pf.

Scharlach's Aufgaben zu Übungen im schriftlichen Rechnen

f. Bürger- u. Volksschulen. Hrsg. v. A. Steger u. Wohlrabe. 5. Hft. 7. Afl. Halle, Schrödel. 40 Pf.

Schellen, H., Aufgaben f. den Unterricht im Rechnen. 2. Tl. Für die mittleren u. oberen Klassen. 6. Afl. Bearb. v. H. Lemkes. Münster, Coppenrath. 2 Mk.

Schmehl, Ch., Rechenbuch für höhere Lehranstalten. 2. Tl. Die bürgerl. Rechnungsarten. Giessen, Roth, Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Steck, F. H. u. J. Vielmayr, Resultate zu der Sammlung arithmetischer Aufgaben. Kempten, Kösel. 45 Pf.

Steuer, W., neue Sammlung angewandter Aufgaben f. das Kopfrechnen. 2 Hfte. 3. Afl. Breslau, Woywod. 2 Mk. 50 Pf.

Wrobel, E., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra. 1. Tl. Rostock, Werther. 2 Mk. 60 Pf.

Zepf, C., Rechenaufgaben f. die Oberklassen höherer Mädchenschulen u. Töchterinstitute. Freiburg, Herder. 50 Pf.; kart. 60 Pf.

Tabellen.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 30. Afl. Halle, Strien, Verl. 2 Mk.

Gezeitentafeln f. das Jahr 1890. Hydrographisches Amt d. Reichs-Marine-Amtes. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, B., üb. die Theilbarkeit der Zahlen. Leipzig, Fock. 50 Pf.

Biermann, O., zur Theorie der Doppelintegrale expliciter irrationaler Functionen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Borchardt, B., Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre. Berlin, J. Springer. 2 Mk. 40 Pf.

Büttner, A., die Elemente der Buchstabenrechnung u. Algebra. 9. Afl. Bielefeld, Velhagen & Kl. 2 Mk. 80 Pf.

Fürle, H., üb. die eindeutigen Lösungen e. Gruppe v. Functionalgleichungen. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Goldscheider, F., das Reziprozitätsgesetz der achten Potenzreste. Ebd. 1 Mk.

Haentzschel, E., Beitrag zur Theorie der Funktionen d. elliptischen u. d. Kreiscylinders. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Heilermann, H., u. J. Dieckmann, Lehr- u. Uebungsbuch f. den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. 3. Tl. 2. Afl. Essen, Bädeker. 1 Mk. 20 Pf.; geb. 1 Mk. 50 Pf.

Igel, B., üb. die associirten Formen u. deren Anwendung in der Theorie der Gleichungen. Wien, Gerold's S. 3 Mk.

Lackemann, C., die Elemente der Arithmetik. 2. Afl. Breslau, F. Hirt. Kart. 75 Pf.

Lurtz, F. E., Rechenschule. 2. Tl. 7. Afl. Kronstadt, Zeidner. Kart. 1 Mk.

Richter, P. B., der praktische Ansatz der Regeldetri- und Prozentrechnungen als Lösung der Aufgabe. Aehnliches f. Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung etc. Leipzig, Fock. 50 Pf.

Weber, K., arithmetische Regeln. Hilfsbuch f. arithmet. Aufgabensammlungen. Braunschweig, Achtelstetter. 50 Pf.

Geometrie.

Berger, G., Lehre der Perspektive in kurzer, leicht fasslicher Darstellung. 9. Afl. Leipzig, Scholtze. 2 Mk. 40 Pf.

Bobek, K., über Dreischaarcurven. Leipzig, Freytag. 60 Pf.
- über die Steiner'schen Mittelpunktscurven. Ebd. 50 Pf.

Bohle, G., Vorschule der Geometrie. Crefeld, Greven. 50 Pf.

Braune, A., Raumlehre f. Volks-, Bürger- u. Fortbildungsschulen, sowie f. Präparanden-Anstalten. 2. Afl. Halle, Schrödel. 65 Pf.

— dass. Methodische Erläuterungen, ausgeführte Lectionen u. Auflösungen zu den Aufgaben. Ebd. 30 Pf.

Focke, M. u. M. Krass, Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen u. anderen höheren Lehranstalten. 1. Thl. Planimetrie. 9. Afl. Münster, Coppenrath. 1 Mk. 8) Pf.

Hahn, H., Euler's Methode der Parameterdarstellung algebraischer Curven. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Kalbe, O., der goldene Schnitt in Zeichnung u. Schrift, insbesondere als goldenes Grundgesetz schöner Schriftformen. Hannover, Cruse. 1 Mk.

Kohl, E., üb. die Lemniscatentheilung. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Mahler, Einleitung in die abzählende Geometrie. Tübingen, Fues. 60 Pf.

Müller, H., die Elemente der Stereometrie. Ein Beitrag zur Methode d. geometr. Unterrichts. 2. Afl. Metz, Scriba. 1 Mk. 20 Pf.

Peschka, G. A. V, freie Perspektive (centrale Projektion) in ihrer Begründung u. Anwendung. 2. Afl. 2. Bd. Leipzig, Baumgärtner. 14 Mk.; geb. 16 Mk.

Rulf, W., Elemente der projectivischen Geometrie. Auf Grund neuer vom Prof. C. Küpper herrühr. Definitionen u. Beweise leicht fasslich zusammengestellt. Halle, Nebert's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Schuberth, H., illustriertes Hand- u. Hilfsbuch der Flächen- u. Körperberechnung. 2. Asg. Berlin, Cronbach. 3 Mk.

Stahl, H., üb. die konforme Abbildung durch die lineare Substitution. Tübingen, Fues. 50 Pf.

Weber, K., Lehrbuch der Planimetrie f. höhere Schulen u. zum Selbst-Unterricht. Braunschweig, Achtelstetter. 2 Mk. 75 Pf.

Trigonometrie.

Theol, E., Einleitung in die Trigonometrie, als halbjährliches Pensum f. Untersekunda. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Geodäsie.

Arbeiten, astronomisch-geodätische, f. d. europäische Gradmessung im Königr. Sachsen. 2. Abth. Das trigonometrische Netz. I. Ordnung. Bearb. v. A. Nagel. 1. Hft. Berlin, Stankiewicz. 30 Mk.

Boersch, O., geodätische Literatur, auf Wunsch der permanenten Commission f. internationale Erdmessung. zusammengestellt. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme. 7. Bd. Berlin, Mittler & S. 10 Mk.

Reinhertz, C., die Verbindungs-Triangulation zwischen dem rheinischen Dreiecksnetze der europäischen Gradmessung u. der Triangulation d. Dortmunder Kohlenreviers der Landesaufnahme, ausgeführt v. der preussischen Katasterverwaltung in den Jahren 1881—1883. Stuttgart, Wittwer's Verl. 5 Mk.

Werneke, H., Mittheilungen aus dem Markscheiderwesen. Vereinschrift d. rheinisch-westfälischen Markscheider-Vereins. 4. Hft. Freiberg, Craz & G. 3 Mk.

Mechanik.

Bigler, U., Potential einer elliptischen Walze. Bern, Huber & Co. 2 Mk.

Geigenmüller, R., die Anfangsgründe der theoretischen Mechanik m. Anwendungen auf Maschinen. Mittweida, Polytechn. Buchhandl. 3 Mk. 60 Pf.

Haussner, R., die Bewegung eines v. 2 festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen materiellen Punktes. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 80 Pf.

Ohnesorge, A., hyperelliptische Integrale u. Anwendungen auf Probleme der Mechanik. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Velde, W., üb. e. Spezialfall der Bewegung eines Punktes, welcher von festen Centren angezogen wird. Ebd. 1 Mk.

Wagner, K., *üb. die Bewegung e. inkompressiblen Flüssigkeit, welche begrenzt ist v. 2 in gegebener Rotation befindl. Flächen.* Tübingen, Fues. 1 Mk. 60 Pf.

Züge, H., *das Potential e. homogenen Ringkörpers m. elliptischem Querschnitt.* Lingen, van Acken. 1 Mk. 25 Pf.

Zwenger, M., *der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel.* München, Lindauer. 4 Mk.

Technik.

Abdank-Abakanowicz, B., *die Integraphen. Die Integralkurve u. ihre Anwendgn.* Deutsch bearb. v. E. Bitterli. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Calgary, A. u. J. N. Teufelhart, *der elektromagnetische Telegraph.* Umgearb. u. ergänzt v. H. Leel. 2. Aufl. Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. 5 Mk.

Elektro-Techniker, *der.* Hrsg.: G. A. Ungár-Szentmiklósy. 8. Jahrg 1889/98. (24 Nrn.) Nr. 1. Wien, Porles' Verl. proplt. 12 Mk.

Edler's Messblatt, *e. Apparat zum Bestimmen v. Neigungswinkeln, Höhen u. Tiefen.* Halle, Reichardt. 50 Pf.

Fortschritte d. Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 2. Jahrg. Das Jahr 1888. 3. Hft. Berlin, J. Springer. 5 Mk.

Grünwald, F., *der Bau, Betrieb und die Reparatur der elektrischen Beleuchtungsanlagen.* 2. Aufl. Halle, Knapp. 3 Mk.

Lindner, M., *Leitfaden der praktischen Hausteographie.* Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Thompson, S. P., *die dynamoelektrischen Maschinen.* 3. Aufl. Uebers. v. C. Grawinkel. 1. Thl. Ebd. 12 Mk.

— dass. 4. Hft. Ebd. 3 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Bach, C., *Elasticität u. Festigkeit. Die f. die Technik wichtigsten Sätze u. deren erfahrungsmässige Grundlage.* 1. Lfg. Berlin, J. Springer. 8 Mk.

Lübeck, G., *die Umformung e. elastischen Kugel durch Zusammendrücken zwischen zwei horizontalen u. starren, glatten od. rauhen Ebenen.* Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Wiechert, E., *üb. elastische Nachwirkung.* Königsberg, Koch. 1 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Anton, F., Bestimmung der Polhöhe d. astronomisch-meteorologischen Observatoriums in Triest durch Beobachtung v. Sternpassagen im ersten Vertical. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Bidschof, F., Bestimmung der Bahn d. Planeten (175) Andromache. Ebd. 40 Pf.

Diesterweg's populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb. v. W. Meyer u. B. Schwalbe. 11. Afl. 1 u. 2. Lfg. Berlin, E. Goldschmidt. 60 Pf.

Dreisbach, H., praktische Anleitung zur Vorausbestimmung d. Wetters. Paderborn, Schöningh. 40 Pf.

Gartbe, E., üb. die tägliche u. jährliche Periode der Variationen der erdmagnetischen Kraft im Moltkehafen auf Süd-Georgien während der Polar-Expeditionen v. 1882 u. 1883. Göttingen, Vandenhoeck & R. 2 Mk. 80 Pf.

Grossmann, J., Wetterperioden? Berlin, Moeser. 1 Mk.

Himmel und Erde. Populäre illustrierte Monatsschrift. Red. M. W. Meyer. 1 Jahrg. 1888/89. 7. Hft. Berlin, H. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1891 m. Ephemeriden der Planeten (1) (274) f. 1889. Hrsg. unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

Kirsch, Th., die Vorbestimmung des Wetters. Breslau, Maruschke & B. 75 Pf.

Klein, H. J., Stern-Atlas. Neue Asg. 1. Lfg. Leipzig, E. H. Mayer. 3 Mk.

Kreidel, W., Untersuchungen über den Verlauf der Flutwellen in den Ozeanen. Frankfurt, Reitz & K. 2 Mk.

Lotabweichungen in der Umgebung von Berlin. Veröffentlichung d. königl. preuss. geodät. Instituts. Berlin, Stankiewicz. 12 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 122. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke S. prepl. 15 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 19. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Riggenbach, A., Resultate aus 112jährigen Gewitteraufzeichnungen in Basel. Basel, Georg, Verl. 1 Mk.

Ritzhaupt, F., der Sternhimmel m. seinen Veränderungen, nebst e. Darstellung üb. die Vertheilung d. Sonnenlichtes auf der Erdoberfläche. Karlsruhe, Macklot, Verl. 40 Pf.

Stern-Ephemeriden f. d. J. 1891. Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 24. Jahrg. 1889. 2 Hft. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Nautik.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. Jahr 1892 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Hrsg. v. Reichsamt d. Innern. Unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Conrad, P., Präparationen f. den Physik-Unterricht in Volks- u. Mittelschulen. Mit Zugrundelegg. v. Individuen. Nach Herbart'schen Grundsätzen bearb. 1. Tl.: Mechanik u. Akustik. Dresden, Bleyl & K. 3 Mk.

Crüger, J., Grundzüge der Physik, mit Rücksicht auf Chemie, als Leitfaden f. die mittlere physikal. Lehrstufe methodisch bearbeitet 23. Afl. Leipzig, Amelang's Verl. 2 Mk. 10 Pf.

Csógler, A., Dimensionen u. absolute Maasse der physikalischen Grössen. Leipzig, Quandt & H. 3 Mk. 60 Pf.

Dvořák, V., üb. die Wirkung der Selbstinduction bei elektromagnetischen Stromunterbrechern. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 2. Lfg. Breslau, Trewendt, Subscript.-Pr. 3 Mk. 60 Pf.

Heussi, S., Leitfaden der Physik. 12. Afl., bearb. v. K. Weinert. Braunschweig, Salle. 1 Mk. 50 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 101.—106. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Krebs, G., Lehrbuch der Physik f. Real- u. höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen u. Seminare. 6. Afl. Wiesbaden, Bergmann. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Lippich, E., üb. die Bestimmung v. magnetischen Momenten, Horizontalintensitäten u. Stromstärken nach absolutem Masse. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Mitthaler, J., üb. die Veränderlichkeit der specifischen Wärme d. Quecksilbers m. d. Temperatur. Königsberg, Koch. 1 Mk.

Münch, P., Lehrbuch der Physik. 9. Afl. Freiburg, Herder. 4 Mk.; Einbd. 50 Pf.

Schwartz, Th., E. Japing u. A. Wilke, die Elektrizität. Eine kurze u. verständl. Darstellg. der Grundgesetze sowie der Anwendgn. der Elektrizität zur Kraftübertragg., Beleuchtg., Galvanoplastik, Telegraphie u. Telephonie 3. Afl. Bearb. v. A. Ritter v. Urbanitzky. Wien, Hartleben. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Stefan, J., üb. einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. A. Klein, W. Dyck, A. Meyer. 34. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. prepl. 20 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe 1889. I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Enth. die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 97. Bd. 8.—10. Hft. Leipzig, Freytag. 13 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1889. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin i. J. 1888. 7. Jahrg. Red. v. E. Rosochatius u. A. König. Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

Litterarischer Bericht

XXXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der unendlichen Reihen. Von Dr. R. Reiff, Professor am Gymnasium zu Heilbronn. Tübingen 1889. II. Laupp. 212 S.

Mehr und mehr bereitet sich der Aufbau einer die neue Wissenschaft umfassenden Geschichte der Mathematik durch successive Behandlung ihrer Objecte vor. Auch die vorliegende Schrift ist ein Beitrag zur materiellen Grundlage des künftigen Universalwerkes und bedarf als notwendiger Bestandteil derselben keiner weitem Rechtfertigung. Wenn, wie der Verfasser sagt, es schwierig ist, die Theorie der Reihen von den Disciplinen, mit denen sie in Zusammenhange steht, gesondert zu betrachten, so würde es noch viel schwieriger sein, ihre Geschichte in ihrer Verflechtung mit denselben darzustellen. Ihre vielseitigen Beziehungen sind es gerade, die ihren Entwicklungsgang in ein deutlicheres Licht stellen, und ehe diese Klärung stattgefunden hat, lässt sich überhaupt keine befriedigende Darstellung geben. Die Geschichte der unendlichen Reihen teilt sich in 3 Perioden. Die erste wird genannt die von Newton und Leibnitz. Zu ihr gehören auch Wallis, Jakob und Johann Bernoulli. Von diesen werden specielle Reihen gebraucht zur Quadratur des Kreises, der Hyperbel und anderer Curven. Die Convergenz tritt schon von Anfang an in Frage und wird bewiesen; auch das Wort ist schon in Gebrauch. Die zweite Periode, hier genannt die der formalen Behandlungsweise, zu der Moivre, Stirling, Taylor, MacLaurin, Euler und zum Teil Lagrange gerechnet werden, charakterisirt sich durch

Erweiterung. Die Aufhebung der Beschränkung durch die Bedingung der Convergenz wird mehr anticipirt als zur Aufgabe, das Entwicklungsgesetz zur Hauptsache gemacht. Die dritte Periode, genannt die der exacten Behandlungsweise, welche mit Gauss beginnt, ist auf Herstellung der beiseite gesetzten Strenge gerichtet und begründet erst eine allgemeine Reihentheorie. Es handelt sich im Buche, nachdem einiges über die Gauss'sche Reihe gesagt ist, ausschliesslich um die Kriterien der Convergenz und deren Ausbildung. H.

Jordani Memorarii geometria vel de triangulis libri IV. Zum ersten male nach der Lesart der Handschrift Db. 86. der Königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden herausgegeben von Maximilian Curtze, Oberlehrer am Königlichen Gymnasium zu Thorn. Mit 5 Figurentafeln. Thorn 1887. Ernst Lambeck. 50 S.

Das herausgegebene Werk bildet zusammen mit einer zweiten Schrift desselben Autors „Liber de similibus arcubus“ das 6. Heft der „Mitteilungen des Copernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn.“ Als Einleitung gehen voraus genauere Nachrichten über die einzelnen bekannt gewordenen Schriften, Nachrichten namentlich welche wir den Nachforschungen des Fürsten Boncompagni verdanken. Durch diese ist zuerst erwiesen, dass der Ordensgeneral der Dominicaner Jordanus mit dem Mathematiker Jordanus Nemorarius dieselbe Person ist. Infolge dessen ist anzunehmen, dass dessen mathematische Schriften vor 1220 verfasst sind. Vor dem gegenwärtigen waren bereits 5 seiner Werke gedruckt. Zuerst erschien „Arithmetica libris X demonstrata“ 1496 in Paris; dann „Algorismus demonstratus“ 1534 in Nürnberg; dann „De numeris datis“ herausgegeben von Treutlein in Karlsruhe (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, II. Heft, S. 125); dann „Tractatus de ponderibus“, unvollständig schon 1533 von Apian in Nürnberg, vollständig 1565 von Curtius Trojanus herausgegeben; zuletzt „Descriptio sphaerae in plano“ in den Ausgaben des Planisphaerium von Ptolemäus. In Handschriften sind ausserdem vorhanden: „Tractatus de isoperimetris propositiones septem“; „Jordanus de speculis et ponderibus“. Die Schrift „De numeris“ ist dadurch bemerkenswert, dass hier zum erstenmal Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlen als solchen, nicht erst in Linien dargestellten Zahlen auftreten, während die Operationszeichen noch ziemlich unpraktisch sind. Ein Beispiel von algebraischer Rechnung — es betrifft die Auflösung einer quadratischen Gleichung — zeigt, dass das Verfahren dem heutigen ganz gleich, nur des Ausdrucks wegen nicht leicht verständlich ist.

H.

Ueber die Berücksichtigung des Historischen beim Unterricht in der Geometrie. Von Dr. H. Böklen, Reallehrer in Ludwigsburg. Tübingen 1889. Franz Fues. 23 S.

Der Titel lässt einen pädagogisch didaktischen Inhalt erwarten; letzterer ist jedoch durchweg historisch. Die Schrift gibt, nachdem sie die 3 Bearbeitungen der Geschichte der Mathematik, die wir aus neuerer Zeit besitzen, von C. A. Bretschneider, Hermann Hankel und M. Cantor genannt, zuerst eine vortreffliche Uebersicht über die mathematische Litteratur des Altertums, in 4 Abschnitte geteilt: Aegyptische Mathematik, Uebergang zur griechischen Geometrie, griechische Geometrie, höhere griechische Geometrie und Stereometrie, und lässt dann alle nähern Angaben über die Schriften, die Lehre und den Standpunkt in Noten folgen. Das hier entfaltete Bild der Mathematik der Alten ist weit reichhaltiger, als es wol ein Schüler durch die Notizen gewinnen wird, die gewöhnlich beim Unterricht eingeschaltet werden, gleichwol der Umfang klein genug um es sich leicht zu eignen zu machen. Die Schrift möchte daher für Schulen sehr zu empfehlen sein, mit der Bestimmung, dass die Schüler sie einmal durchlesen, später das Bezügliche darin nachschlagen.

H.

Methoden und Principien.

Die Lehre von der Energie historisch-kritisch entwickelt. Nebst Beiträgen zu einer allgemeinen Energetik. Von Dr. Georg Helm, Oberlehrer an der Annenschule zu Dresden. Leipzig 1887. Arthur Felix. 104 S.

Das Buch lässt sich weder zu den eigentlich historischen noch zu den eigentlich philosophischen Schriften zählen, obgleich es sich mit Geschichte und Philosophie beschäftigt; zutreffender würde es sein, es ein poetisches Erzeugniss zu nennen. Zur historischen Darstellung würde gehören, dass der Ursprung und die Stadien der Ausbildung des Begriffs der Energie mit litterarischem Nachweis aus Licht gestellt wären. Hierauf geht die Schrift nicht ein: sie bleibt von Anfang an bei dem Worte Energie stehen, ohne irgend einmal dessen Inhalt zu entfalten, ohne das Problem darzulegen, um dessen Lösung es sich handelt, so dass ein Fortschritt in der Auffassung überhaupt nicht ersichtlich werden kann. Eher poetisch als philosophisch aber stellt sich die Schrift dar, sofern sie ihr Interesse nur der Aussenseite der litterarischen Erscheinungen zuwendet, und ihre

Urteile, um deren exacte Begründung sie sich nirgends bemüht, nur den Geschmack des Verfassers repräsentiren. Nach dessen Ansicht muss die Geschichte die geäußerten Ideen aller Schriftsteller, die das Wort Energie im Munde führen, des Phantasten wie des Forschers, gleicherweise würdigen; denn auch das vergessene Wort wirke fort und sei als Grund späterer wichtiger Entdeckungen anzuerkennen. Wie sehr seine Beobachtungen am Aeussern haften, verrät die anfängliche Bemerkung, auch die Wissenschaft habe ihren Styl. Der Wissenschaft wird hiernach die persönliche Vorliebe ihrer Vertreter zugeschrieben. Dass letztere zu verschiedenen Zeiten in verschiedener Weise sich vorwaltend geltend gemacht hat, ist es, was nach des Verfassers Meinung den Entwicklungsgang der Wissenschaft charakterisirt. Ob sich während dessen die Wissenschaft einem Ziele angenähert hat, scheint ihm gleichgültig. Das Ziel wird allerdings in dem Satze ausgesprochen: Bei jeder Verwandlung kinetischer Energie in potentielle oder potentieller in kinetische bleibt doch die gesamte Energie unverändert. Wenn er aber gleich nachher die analytische Gestaltung als das grösste Hinderniss auf dem Wege zu diesem Ziele verdammt, so kann man darin doch kaum etwas anderes als ein Urteil seines Geschmackes sehen. Die Schrift teilt sich nach den verschiedenen Gebieten, denen die Bemerkungen zugehören. Der 1. Teil, Quellen der Energie-Ideen, hat die Abschnitte: theoretische Mechanik, Physik, Philosophie, Technik; der 2. Teil, Begründung des Energie-Gesetzes: Aufstellung des Energie-Princips, experimentelle Belege der Aequivalenz, Erhaltung der Energie, Eigenenergie der Körper, Terminologie, Ergebniss; der 3. Teil: Energiegesetz als Integralgesetz, Einfluss des Entropiegesetzes, Energiegesetz als Grundgesetz, Formen der Energie. Verweisungen auf die Litteratur sind am Ende zusammengestellt. Hoppe.

Zwei Abhandlungen über den Rechenunterricht. Das Rechnen mit den Zahlen von 1 bis 100, eine didaktische Skizze. Ueber Rechenunterricht und Rechenbücher, eine Rück- und Umschau. Von Christian Harms, Professor. Oldenburg 1889. Gerhard Stalling. 72 S.

Die erste Abhandlung beginnt mit einem Streite, der über zwei Methoden des Rechenunterrichts für Kinder schon längere Zeit geführt wird, obwol man hätte erwarten dürfen, dass seine Entscheidung heutzutage keine Frage mehr sein würde. Als vor 45 Jahren der Schulrat Schulz in einem Artikel seiner Zeitschrift die Methode zuerst ausführlich erörterte und empfahl, nach welcher die Eigenschaften, Zusammensetzung und Zerlegung jeder Zahl einzeln von 1 an aufsteigend gelehrt, mithin die Operationen auch immer speciell,

als zu jeder Zahl einzeln gehörig, betrieben werden, wurden sehr bald die damit verknüpften Unzuträglichkeiten empfunden, und Einführung fand nicht statt. Indes verwarf man ihren Grundgedanken nicht, sondern verbesserte die Form der Ausführung dahin, dass statt der einzelnen Zahlen Gruppen auf einander folgender Zahlen in dieser Weise behandelt wurden. Ebenso verfährt auch der Verfasser und zwar erklärt er die Gruppen bis 5, bis 10, bis 20, bis 100 für die geeigneten, weil sie dem Abzählen an den Fingern entsprechen. Er wendet sich hier gegen einen Autor Grube, welcher bei der gesonderten Behandlung aller Zahlen bis 100 verharret, und demgemäss 100 Stufen des Unterrichts annimmt. Dass jemand sich von einem solchen Zuwerkegehen Erfolg versprechen kann, scheint nur glaublich unter der irrigen, wiewol öfters angetroffenen, Voraussetzung, dass alles, was die Kinder in der Schule hören, ihr Eigentum bleibt. Es ist bekannt genug, dass eine unterschiedliche Menge des Gehörten oder Gesehenen nur durch Ordnung zur Gesamtauffassung gelangt. Das Herauskehren der Individualität so vieler Zahlen aber macht jedes Ordnungsprincip unmöglich. Diese Ueberbürdung des Gedächtnisses wird durch die Einteilung in 4 Stufen gänzlich vermieden. Die erste Stufe gibt Raum genug für Entwicklung der elementaren Begriffe. Je mehr der Umfang sich in höhern Stufen vergrössert, desto mehr überwiegt das Gemeinsame, d. i. die Operation, die Individualität, und hierzu muss es doch einmal kommen. Es wird nun das Verfahren eingehend erörtert. Hierzu ist eine Bemerkung zu machen. Der Verfasser findet es schwierig den Kindern begreiflich zu machen, dass aus $||| - |$ sich 2 ergeben könne, da sie doch 4 Striche zählen. Die Schwierigkeit zeigt nur an, dass die Erklärung vom unrechten Ende anfängt. Die Subtraction muss zuerst durch Inversion erklärt werden; diese Regel entspricht nicht bloss der wissenschaftlichen, sondern auch der kindlichen Logik. Ist $|| + | = |||$ erklärt, so frage man $? + | = |||$. Die Frage beantworten am leichtesten die Finger. Soll durch Erhebung eines Fingers 3 entstehen, so muss dieser 1 Finger von den dreien vorher gesenkt werden. Das Senken der Finger aber bedeutet bei den Strichen die Tilgung eines Striches. Warum der Verfasser die Inversion nie anwendet, ist nicht ersichtlich; hatte er einen Einwand dagegen, so war dieser auszusprechen.

Die zweite Abhandlung, Abdruck eines früheren Programms, bespricht den Gegenstand im ganzen und gibt keinen Anlass etwas daraus hervorzuheben. Hoppe.

Ueber die Identität geometrischer Gebilde. Ein Beitrag zur Didaktik der Geometrie. Von Jos. Schram, Professor am Commu-

nal-Real- und Obergymnasium in Mariahilf. Abdruck aus der „Zeitschr. f. d. Realschulwesen“ III. Jahrg. VI. Heft.

Der Verfasser erklärt zuerst, dass er bei Herausgabe seines Lehrbuchs der ebenen Geometrie keine passende Stelle gefunden hat, seine vielfachen Abweichungen vom Gewöhnlichen zu rechtfertigen. Eine Besprechung des Lehrbuchs durch Herrn Dr. Obermann im III. Heft dieser Zeitschr. bietet ihm jetzt den Anlass dazu, indem sie einen Vorwurf enthält. Die betreffende Stelle ist wörtlich abgedruckt; sie sagt aus, dass die Definition der Congruenz (Identität) durch die ausreichenden Bestimmungsstücke bei Schram einen augenfälligen, bei frühern Autoren einen versteckten Cirkel gebe. Der Verfasser will den schuldigen Nachweis dieses Urteils nicht abwarten, sondern teilt sogleich seine Aufstellungen mit und sucht durch Musterung aller einzelnen Punkte das Nichtvorhandensein eines Cirkels darzulegen. Halten wir uns nun, da Obermann sich nicht näher ausspricht, einfach an die mitgeteilten Aufstellungen, so liegt es uns jedenfalls näher gegen die mannichfachen Unbestimmtheiten Kritik zu üben als ein Urteil über sie zu fällen. Der erste Satz ist: „Zwei Gebilde heissen identisch, wenn sie sich nur durch den Ort, an welchem sie sich befinden, von einander unterscheiden“. Dies soll doch gewiss keine Definition sein; denn es sagt nur: identisch heisst, was identisch ist bis auf die Lage. Aber diese Bestimmung als definitive, fortgeltende ist überhaupt unzulässig; denn sie widerspricht dem natürlichen wie dem wissenschaftlich unentbehrlichen Sinne der Identität, demgemäss 2 identische Dinge nicht gleichzeitig existiren können. Wir können 2 geometrische Gebilde, congruent oder nicht, als Darstellungen zweier Zustände desselben variablen Gebildes betrachten, willkürlich weil die Geometrie von der Materie, welche in der Natur die Identität bestimmt, abstrahirt. Schram's Einführung nimmt erstlich der Kinematik diese viel geübte Freiheit und verwechselt andererseits die Betrachtung ad hoc mit der endgültigen Festsetzung. Er beruft sich auf andre Autoren; einen Diebstahl aus Not mag man entschuldigen, aber nicht nachahmen. Der zweite Satz ist: „Identische Gebilde sind vertauschbar, nämlich das eine kann so an die Stelle des andern treten, dass jeder Punkt des einen G. durch einen Punkt des andern ersetzt wird“. Das Wort „nämlich“ an sich ist zunächst mehrdeutig. Vertauschbar schlechthin sind je zwei Dinge; soll etwas damit gesagt sein, so muss eine Bedingung hinzukommen, der Satz mit „nämlich“ kann nur diese Bedingung ausdrücken. Allein dieser hebt die Unbestimmtheit nicht auf; denn „ersetzen“ ist ebenso relativ zu einer Forderung wie „vertauschen“: ein Ersatz für eine Forderung ist kein Ersatz für eine andere. Folglich ist die Vertauschbarkeit als eine Eigenschaft

überhaupt nicht definiert. Es würde leicht sein die Vertauschbarkeit eines Dreiecks mit einem Viereck bei materieller Identität und sogar bei unveränderter Gesamtfigur entsprechend obigem Satze zu zeigen. Vielleicht im Gefühl der Unzulänglichkeit seiner Erklärung fügt der Verfasser hinzu: „Man sagt auch, sie decken einander“. Wenn aber einmal zur Deutlichkeit der gewöhnliche Ausdruck nötig wird, warum geht er dann davon ab und führt erst Undeutliches statt des Deutlichen ein? Ein dritter Satz lautet: „Die (gegebenen) Bestimmungsstücke einer Figur heissen eindeutig, wenn die Construction nur eine Figur oder mehrere vertauschbare Figuren liefert, mehrdeutig etc.“ Der Sinn ist hier nicht miszuverstehen, aber das Attribut „ein- und mehrdeutig“ wird dem verkehrten Subject beigelegt: statt der Abhängigkeit der mitbestimmten Strecken und Winkel, welche allein ein- oder mehrdeutig sein kann, werden die gegebenen Strecken und Winkel so genannt, was offenbar der eclatanteste Unsinn ist, wenn auch der Kundige leicht versteht, was gemeint ist. Vergleichen wir die hier dargebotene Didaktik mit der gewöhnlichen, dem Euklid folgenden Behandlung des Congruenzbegriffs, so setzt sie an die Stelle einer verständlichen und sehr einfachen Lehre, die allerdings auf die geläufige Vorstellung unveränderlicher Körper (Zirkel und Massstab) fasst, aber von aller Unklarheit frei ist, eine durchweg mit logischen Mängeln behaftete Reihe von Sätzen, die dem Schüler teils überhaupt, teils in dem hier usurpirten Sinne fremd sind. Fragt man nun nach dem Zwecke der ganzen Umgestaltung, so können wir nur eine Ausführung, in welcher die praktische Wichtigkeit der Bestimmungsstücke hervorgehoben wird, als einzige leitende Angabe betrachten. Diese aber motivirt nicht im mindesten die Gründung des Begriffs auf die Bestimmungsstücke. In letzterer liegt in mehr als einer Beziehung eine didaktische Verkehrtheit. Zuvächst ist sie eine verwerfliche Verweisung auf Späteres. Die hinreichenden Bestimmungsstücke kann der Schüler erst successive während des Cursus kennen lernen, muss sich also bei der Definition mit dem Worte ohne Verständniß begnügen. Infolge davon geht den Schülern der leitende und orientirende Gesichtspunkt verloren, welchen die gleich anfängliche deutliche Vorstellung des Deckens der ganzen Figur bei Behandlung von dessen einzelnen Erfordernissen darbietet. Eine augenfällige Probe dieses Mangels ist der Umstand, dass durch alle Bestimmungsstücke der Unterschied zwischen congruenten und symmetrischen Figuren nicht erkannt werden kann. Der Verfasser wehrt dessen Beachtung ab, indem er den Unterschied sogleich mit dem umfassenden (ohne Erklärung gelassenen) Namen „Vertauschbarkeit“ zudeckt. Abgesehen von dem pädagogischen Fehler, ist die Motivirung auch logisch verkehrt. Wenn der Techniker von der Ellipse nur 2 Dimensionen misst, weil sie zur Bestimmung aus-

reichen, so ist die Messung doch nur das Mittel und bedeutungslos, wenn nicht der Zweck die ganze Ellipse zu bestimmen vorher im Bewusstsein liegt. So läuft denn Schram's ganze Auseinandersetzung darauf hinaus, die gebrauchten Mittel zum wesentlichen Merkmal der Sache zu machen, deren Zweck im Dunkeln bleibt.

Hoppe.

Zur Lehre vom Unendlichen. Antrittsrede zur Uebnahme der ausserordentlichen Professur der Mathematik an der Universität Tübingen gehalten am 28. Juni 1888 von Dr. W. Franz Meyer an der Bergakademie Clausthal. Tübingen 1888. H. Laupp. 24 S.

Da die Lehre vom Unendlichen so ganz und gar keine Schwierigkeit darbietet, dass selbst Anfänger der Arithmetik, wenn sie nur überhaupt auf den Gedanken einer Veränderung eingehen, sie ohne Mühe und ohne subtile Anforderungen begreifen können, so sind gewisse Schriftsteller, die den Reiz des Wunderbaren und Unbegreiflichen zur Erregung der Aufmerksamkeit nicht entbehren zu können meinen, gezwungen, wenn sie davon reden, diese Lehre so zu verdrehen und zu entstellen, dass niemand mehr das Gewirre zu durchschauen vermag, und sie nun zeigen können, dass allerhand Lösungsversuche der selbstgemachten Schwierigkeiten zu keinem Ende führen. Als ein Erzeugniss dieser Art stellt sich auch das Vorliegende dar. Einleitend sagt die Schrift, die sogenannte reine Mathematik und Analysis könne erst dann rein genannt werden, wenn sie, soweit es die Eigenart unserer Geistesanlagen zulasse, als ein Bestandteil der reinen Logik auftrete. Hiergegen ist zunächst zu erinnern, dass factisch von reiner Mathematik nur im Gegensatz zur angewandten gesprochen wird, und dass weder der Name noch das Motiv einer Unterscheidung mit der Quelle mathematischer Erkenntniss zu tun hat. Für den Verfasser ist die Basirung auf die reine Logik das Ideal der Strenge; er möge sich doch fragen, wie er diese Logik, dieses angeborene Gesetz des Geistes, von der vorgefassten bornirten Meinung unterscheiden will. Doch wollen wir hierbei nicht verweilen und uns zum eigentlichen Thema der Schrift wenden. Als Beleg dafür, dass die Arithmetik und Analysis nicht aus reiner Logik hervorgehen, führt der Verfasser die Begriffe der Grösse, der Anzahl, des Irrationalen, des Stetigen und (diesen vorausgehend) des Unendlichen an; das Unendliche ist von da an sein einziger Gegenstand. Sehen wir nun zu, was er von diesem aussagt. Zuerst bemerkt er, dass fast alle unsere Autoren in der Definition und Einführung des Begriffs des Unendlichen von jeher von einander abgewichen seien. Freilich wenn man alle Faselien, die in der Neuzeit über diesen

Begriff zutage getreten sind, als verschiedene wissenschaftliche Ansichten gelten lässt, so mag es denen, die nie selbst analytische Untersuchungen gemacht haben, vorkommen, als gäbe es eine Menge verschiedene Begriffe und Auffassungen. Dennoch ist das Unendliche in allen wissenschaftlich analytischen Abhandlungen nur in einer Bedeutung in Gebrauch, und seine Definition längst bekannt: unendlich gross heisst eine Variable, die beliebig gross werden kann, unendlich klein eine Variable, deren absoluter Wert beliebig klein werden kann. Der Verfasser erklärt es für unbedingt geboten, dass man, um mit dem Unendlichen so familiär umzugehen, wie es geschieht, sich zuvor einer festen und untrüglichen Definition desselben versichere, behauptet aber, das Gegenteil finde statt. Hier ist diese Definition; auf Grund ihrer ist die Untrüglichkeit der Schlussweise der Infinitesimalrechnung streng bewiesen — s. d. Arch. Bd. LV. S. 50 — und in den seitdem vergangenen 16 Jahren kein Einwand gegen die Richtigkeit oder Anwendbarkeit erhoben worden. Schien dem Verfasser vielleicht diese Lehre zu einfach und elementar, um sie neben den hochgeschraubten Erklärungsversuchen, die er oft vernommen, und die wol für rhetorische Auslassungen ein reicheres Feld eröffneten, auch nur der Erwähnung für wert zu halten? Weiter sagt der Verfasser, um eine der mannichfaltigen Auffassungen des Unendlichen zu nennen, man spräche in erster Linie vom Unendlich - klein - und vom Unendlich - gross - werdenden, u. s. w. Von solchen spricht sicher keine analytische Abhandlung; manche Grübler mögen in diese Unklarheit verfallen sein. Ferner sagt er, man bediene sich jetzt des Unendlichen nur als eines Sprachgebrauches für ein Veränderliches, entweder ab- oder zunehmendes, selbst aber durchaus endlich und bestimmbar bleibendes. Dieses Convolut von lauter Unsinn nennt er eine „hochbedeutende Erkenntniss“. Er hat somit erkannt, dass die Entdeckung Newton's und Leibniz's nebst der ganzen daraus erwachsenen Wissenschaft sich auf einen Sprachgebrauch reducirt! Von den genannten Merkmalen gehört das erste, das Ab- oder Zunehmen, nicht zum Begriffe, dafür fehlt das notwendige Merkmal, dass der Veränderung keine obere, resp. untere Grenze gesetzt ist; dass das Unendliche endlich sei, ist ein Widerspruch; bestimmbar kann es wol sein, nämlich als Function eines andern Unendlichen, doch dies hat sicher der Verfasser nicht gemeint. Schliesslich behauptet er, man verzichte im allgemeinen von vornherein auf durchaus exacte oder reine Resultate, man gestehe freimütig ein, dass jeder Schritt vorwärts im Gebiete der veränderlichen Grössen mit Fehlern behaftet sein müsse, u. s. w. Im Anfang staunt man über die Dreistigkeit, mit welcher plötzlich solche ganz unwahre Aussagen hingeworfen werden; bald aber kommen die Schwächen seiner Stützpunkte zutage. Dass mit höherer analytischer Rechnung

viele Probleme in Angriff genommen werden, die nur approximativ zu lösen sind, ist die Tatsache, auf welche das Folgende hinzudeuten scheint. Er verwechselt aber die Ursachen und statt in der Schwierigkeit der Probleme sieht er den Grund der anfänglichen Ungenauigkeit im Mangel des Begriffs des Unendlichen, ignorirt auch gänzlich alle Lösungen in geschlossener Form. So ist denn der gesamte Vortrag für eine unwissende Zuhörerschaft berechnet, der er durch Vorspiegelung falscher Tatsachen die Meinung einzufliessen sucht, die Infinitesimalrechnung sei keine exacte Wissenschaft. Hier beginnt nun der zweite Teil der Schrift, welcher zeigen soll, welche Aussicht wir haben auf Grund eines definirten absoluten (constanten) Unendlich eine exacte Infinitesimalwissenschaft herzustellen. Diese Hoffnung schöpft der Verfasser aus der Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen“? von R. Dedekind — und reproducirt dieselbe ausführlich. In ihr ist u. a. ein Versuch enthalten das absolute Unendliche definiren. Dieser ist jedoch gänzlich misglückt, wie in ausführlicher Besprechung der Schrift, im 27. litt. Bericht, S. 29—33, bewiesen worden ist.

Hoppe.

Der Unterricht in der analytischen Geometrie. Für Lehrer und zum Selbstunterricht. Von Dr. Wilhelm Krumme, Direktor der Ober-Realschule zu Braunschweig. Mit 53 Figuren im Text. Braunschweig 1889. Otto Salle. 311 S.

Das Vorliegende, weit entfernt dem Titel zu entsprechen, hat vielmehr zum Gegenstande die rechnende Geometrie der Ebene und umfasst insbesondere die Theorie der rechtwinkligen Coordinaten in Anwendung auf die Kegelschnitte in rein synthetischer Entwicklung. Motivirt wird die Benennung in sehr eigentümlicher Weise: die vorgetragene Lehre sei weder euklidische noch neuere Geometrie, heisse daher analytische Geometrie. Der Verfasser sollte doch wissen, dass man über ein Wort von so grosser und in so weitem Umfange bereits geltender Bedeutung nicht nach Gutdünken verfügen kann. Er ignorirt nicht nur den eigentlichen Wortsinn, sondern auch einen ganzen Wissenschaftszweig, welchem der Name „analytische Geometrie“ mit vollem Rechte angehört. Analytisch heisst die Erkenntniss, die von ihrem Ziele in allgemeinst möglicher Auffassung ausgeht und mit diesem im Auge ihre Erfordernisse zu beschaffen sucht. Käme diese analytische Erkenntniss auch erst in der höhern Mathematik zur Verwirklichung, so wäre es doch durchaus verwerflich auf der Schule eine Terminologie einzuführen, die gegen die wissenschaftliche Ausdrucksweise streitet. Aber selbst bei der Behandlung ganz elementarer Constructionsaufgaben lernen die Anfänger das

Wort „Analysis“ im echten Sinne kennen, und zwar handelt es sich hier gewöhnlich um gar keine Rechnung, sondern um direct geometrische Beziehungen. Letzteres zeigt zum Ueberflus, dass, während das synthetische Verfahren die Anwendung von Rechnung und Rechnungselementen, Coordinaten, nicht ausschliesst, auch das analytische ohne Rechnung möglich ist. An einer treffenden Bezeichnung fehlt es nicht: „rechnende Geometrie“ und „Coordinatenlehre“ sagt ohne Erklärung deutlich, was es sagen soll; ein Grund, dafür das erklärungsbedürftige und gar nicht zutreffende Wort „analytische Geometrie“ zu gebrauchen ist also nicht ersichtlich, wenn man nicht geflissentlich die Schüler irre leiten will.

Scheint vielleicht ein blosser unpassender Name nicht soviel wert zu sein, dass wir seinetwegen ausführlich längst bekannte Dinge wiederholen, wie es im Vorstehenden geschehen ist, so rechtfertigt uns wol die Schwerhörigkeit, von der das neue Auftreten eines so oft gerügten Fehlers, ohno zur Entkräftung der Rüge etwas beizubringen, Zeugnis gibt.

Das Buch beginnt mit einem „allgemeinen Teil“, welcher das Verfahren des Unterrichts bespricht, der also nur für Kundige bestimmt ist; dann erst folgt im „besondern Teil“ die für die Lernenden bestimmte Lehre. Letzterer wird in 3 Stufen geteilt, deren erste für den Unterricht in Prima berechnet ist. Durch diesen soll der Schüler in 2 Jahren soweit gefördert werden, dass er den übrigen Inhalt des Buches ohne Hülfe des Lehrers für sich lernen kann. Die erste Stufe behandelt die Coordinatentheorie und einen gewissen Kreis ihrer Anwendung und teilt sich in 6 Abschnitte nach den Gegenständen: Punkt, Gerade, Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbol. Die zweite Stufe erweitert den Lehrstoff der ersten und hat dieselben Gegenstände. Der dritte behandelt die allgemeine Gleichung 2. Grades. Auf jeden Abschnitt folgen Uebungen. Durch diese lernt der Schüler, was der wichtigste Punkt ist, ein algebraisches Resultat geometrisch deuten. Ob er daraus die Nützlichkeit des Umwegs der Uebersetzung des Geometrischen in's Algebraische und wieder zurück ersieht, ist wol zweifelhaft. Der Lehrgegenstand selbst ist ohne Zweifel für sehr Viele nützlich, die nicht Mathematik studiren, und denen doch mathematische Kenntnisse zu statten kommen. Wer dagegen die Mathematik zum Studium wählt, dem ist die hier gegebene Unterweisung eine schlechte Vorbereitung dazu und eher hinderlich als irgend förderlich. Er tut besser, das Betreiben der Coordinatenlehre auf die Universität zu versparen und unmittelbar vom allgemeinen Standpunkte aus anzufangen.

Hoppe.

Vermischte Schriften.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb, Editor. Thomas Craig, Associate Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. *Πραγμάτων Έλεγχος οὐ βλεπομένων*. Volume XI. Baltimore 1889. Publication Agency of the Johns Hopkins University.

Der Inhalt des 11. Bandes ist folgender.

P. A. Mac Mahon: Abhandlung über eine neue Theorie der symmetrischen Functionen.

W. Woolsey: Ueber die in Reihen dargestellten Integrale binomischer Differentialgleichungen.

M. d'Ocagne: Ueber gewisse Curven, welche man mit den ebenen Curven zum Studium ihrer Infinitesimaleigenschaften verbinden kann.

Cayley: Ueber die Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien. — Ueber die Theorie der Gruppen.

J. Perott: Bemerkung zum Satze von Euklid über die unendliche Anzahl von Primzahlen.

A. E. H. Love: Wirbelbewegung in gewissen Dreiecken.

A. B. Basset: Ueber die permanente Bewegung eines rotirenden flüssigen Ringes.

S. Lie: Die Begriffe Gruppe und Invariante.

E. Picard: Ueber die binären quadratischen Formen mit conjugirten Unbestimmten und die Fuchs'schen Functionen.

F. Morley: Ueber die Geometrie einer circularen kubischen Curve mit Knoten.

H. B. Fine: Ueber die durch Differentialgleichungen definirten Functionen nebst einer Erweiterung der Puiseux'schen Polygon-Construction dieser Gleichungen.

E. Goursat: Ueber die singulären Lösungen der simultanen Differentialgleichungen.

H. A. Rowland: Elektromagnetische Wellen und Oscillationen an der Oberfläche der Conductoren.

J. C. Fields: Der Ausdruck eines beliebigen Differentialcoefficienten einer Function einer Function beliebig vieler Variabeln mittelst der entsprechenden Differentialquotienten von n Potenzen der Function, wo n die Ordnung des Differentialquotienten ist.

O. Bolza: Ueber die Construction intransitiver Gruppen.

K. Heun: Die Herstellung einer linearen Differentialgleichung aus einem gegebenen Element der Integralfunction.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction von Integralen transcendenter Functionen.

F. Franklin: Note über die doppelte Periodicität der elliptischen Functionen. H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 12. Stockholm 1889. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 12. Bandes ist folgender.

P. Appell: Ueber die Bewegung eines Fadens in einer festen Ebene.

M. Lerch: Ueber eine Methode der Entwicklung einiger elliptischen Functionen in trigonometrische Reihen.

C. Guichard: Ueber die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

J. de Vries: Ueber gewisse ebene Configurationen.

F. Brioschi: Ueber die Gleichung 6. Grades.

K. Heun: Bemerkungen zur Theorie der mehrfach linear verknüpften Functionen.

J. Hacks: Schering's Beweis des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hilfe des Zeichens $[x]$.

J. Horn: Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen.

S. Kowalevski: Ueber das Problem der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt.

V. Volterra: Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Functionen einer imaginären Variablen. I.

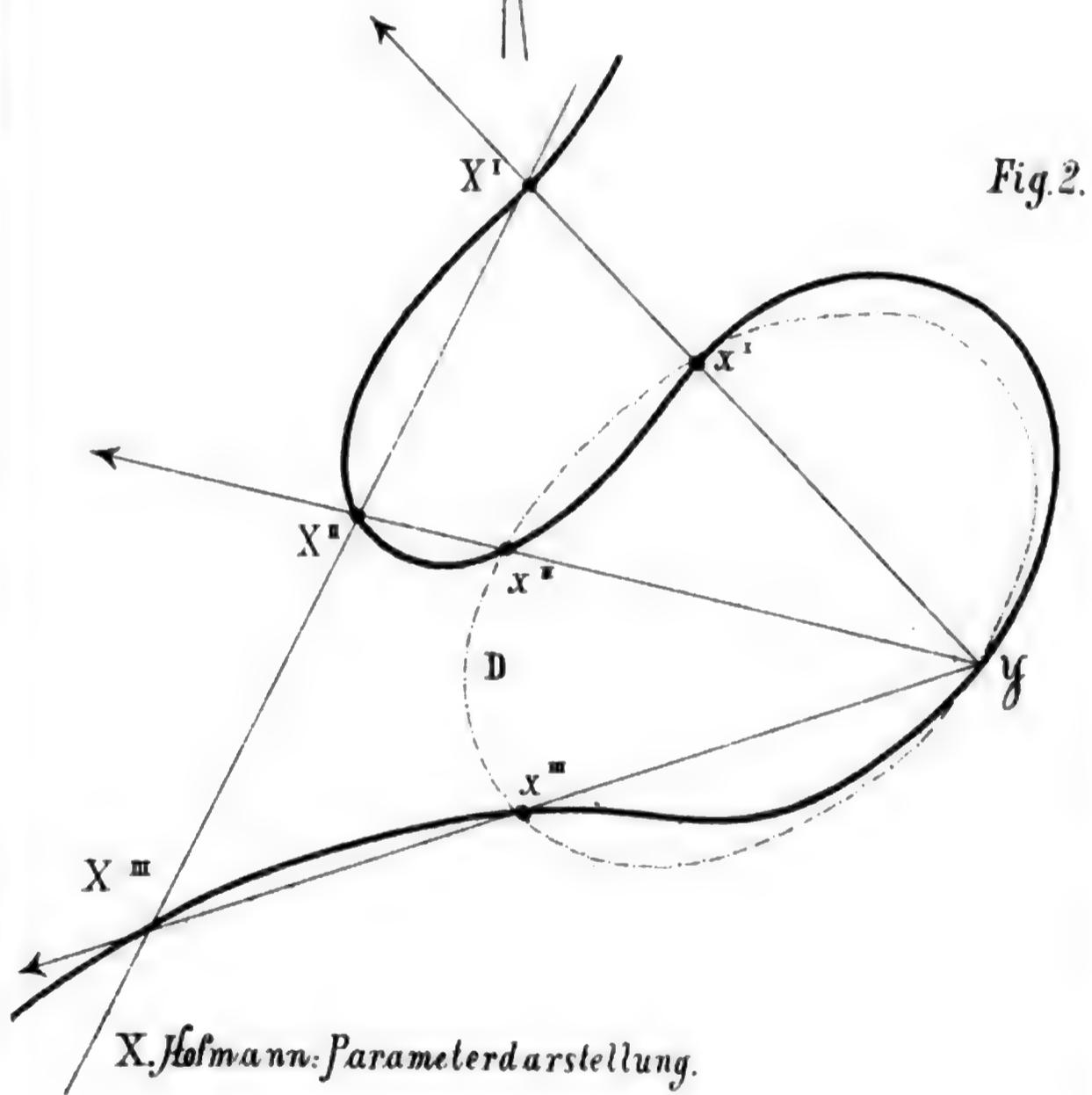
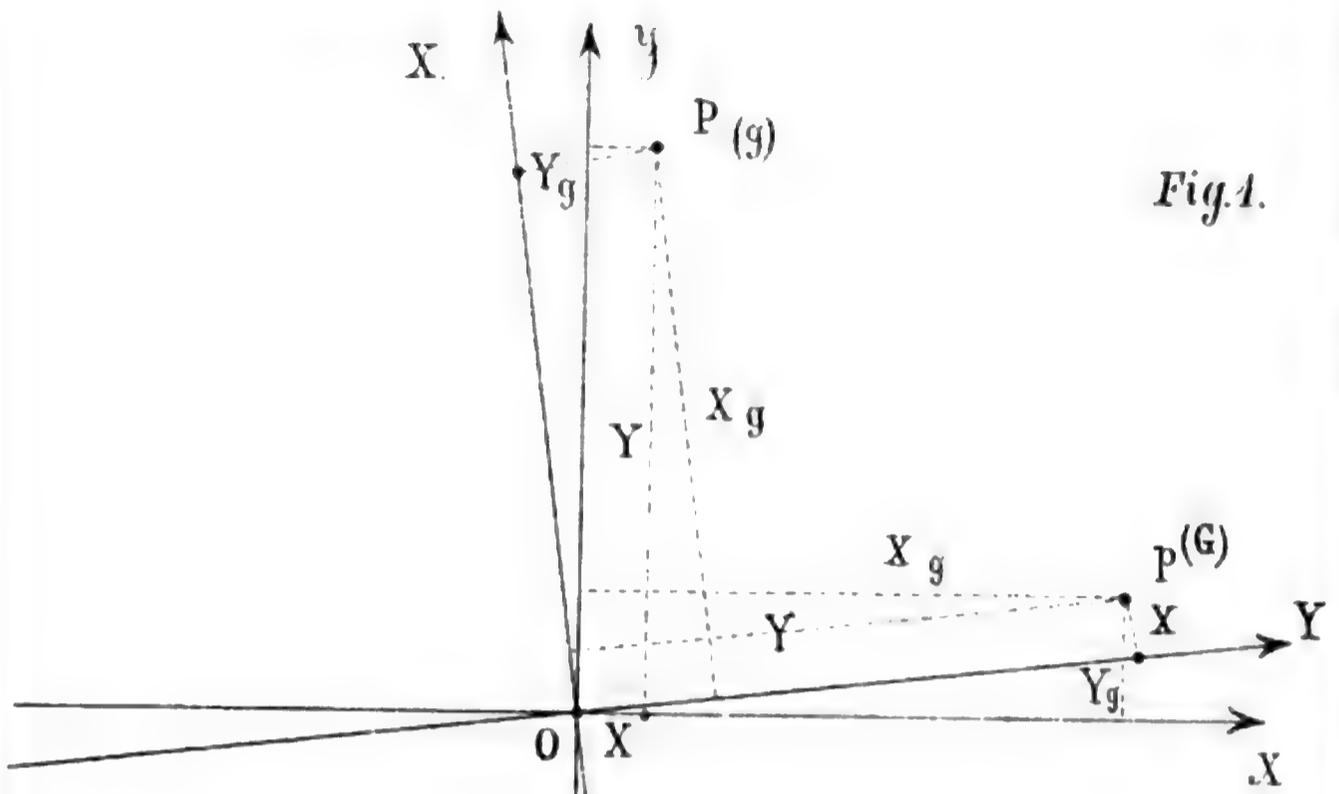
P. Tschebyscheff: Ueber die Integral-Residuen, welche die angenäherten Werte der Integrale geben.

E. Picard: Ueber eine Classe linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung.

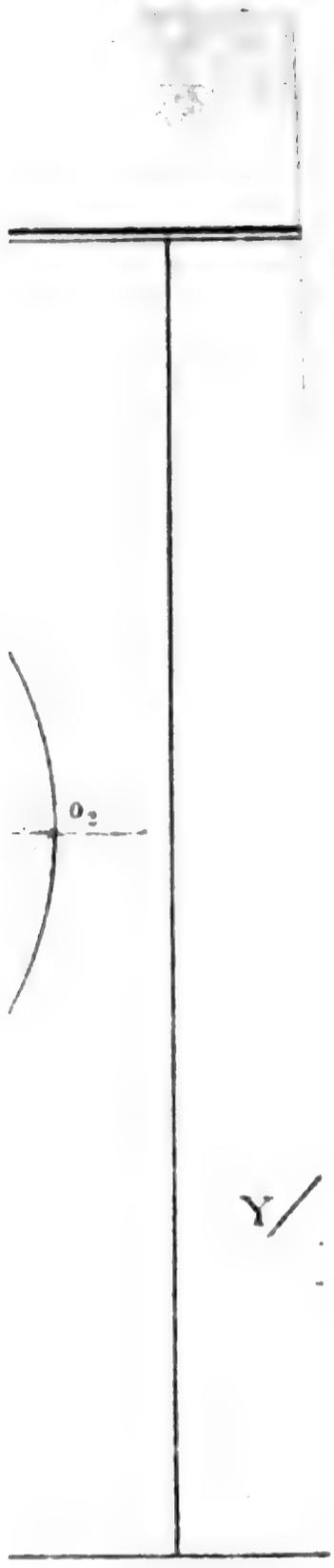
H. Dobriner: Ueber das räumliche Achteck, welches die Schnittpunkte dreier Flächen 2. Ordnung bilden.

H. G. Zeuthen: Note über die 8 Schnittpunkte dreier Flächen 2. Ordnung.

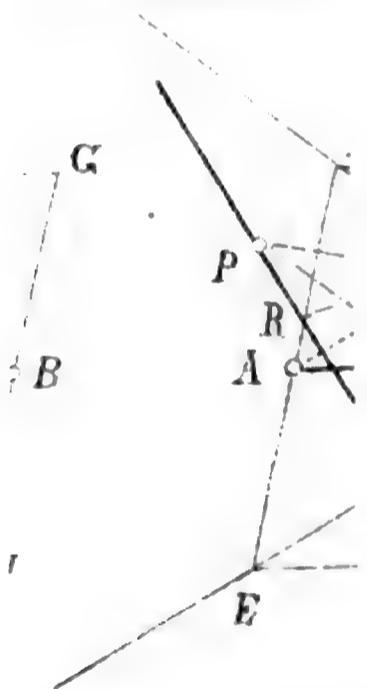
A. Hurwitz: Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Grössen. H.



X. Hofmann: Parameterdarstellung.



Y/



nstruction der



Litterarischer Bericht

XXXII.

L e h r b ü c h e r.

Vorschule der Mathematik für österr. Untergymnasien und verwandte Lehranstalten. Von Jos. Schram, Professor am Communal-Real- und Obergymnasium in Mariahilf, und Rud. Schüssler, Doctor der Philosophie. Mit 384 Figuren. (In besonderem Heft.) Wien 1889. Alfred Hölder. 319 S.

Zwei Schriften vom erstern Verfasser sind hier bereits besprochen worden, die eine: „Lehrbuch der ebenen Geometrie“ — erschienen 1878, im 247. litt. Bericht S. 25, die andere: „Ueber die Identität geometrischer Gebilde“ — ohne Zeitangabe, soeben im vorigen litt. Ber. S. 32. Letztere sucht die in einem mit ersterer gleich betiteltten Werke befolgte Didaktik gegen Angriffe zu verteidigen und führt daraus die Sätze an, auf welche die Angriffe Bezug haben. Von diesen Sätzen ist der eine, welcher die Congruenz durch Vertauschbarkeit definiert, wörtlich unverändert auch in die „Vorschule“ übergegangen, während zwei andre, deren einer statt der Congruenz den Namen Identität einführt, der zweite dieselbe mittelst des falsch gebrauchten Ausdrucks „eindeutig“ auf die Bestimmungsstücke zurückführt, im gegenwärtigen Werke nicht vorkommen, und, wenn Ref. nicht irrt, auch in der besprochenen Ausgabe nicht standen haben. Auf die Bezeichnung des gegenwärtigen als „Vorschule“ scheinen die Verfasser selbst kein Gewicht zu legen, da es im Vorwort stets „Lehrbuch“ genannt wird. In der That charakterisirt es sich gegenüber andern Lehrbüchern gerade in entgegengesetzter Richtung: es hat eher den Charakter einer Encyclopädie, die

in sachlich geordneter Reihe von Artikeln über alle Lehrthemata concinne vollständige Auskunft erteilt. Diese Darstellungsweise verliert natürlich im weitem Fortschritt mehr und mehr ihr Unterscheidendes und fällt schliesslich mit der rational didaktischen Entwicklung des Lehrstoffs zusammen. Schon die Ausdehnung des Lehrbuchs auf Stereometrie und Kegelschnitte lässt dasselbe nicht als Vorschule erscheinen. Hauptsächlich aber ist es die Abfassungsweise, die einer Einführung von Anfängern in das mathematische Gebiet am wenigstens entspricht. Während überall sonst auf exacten Ausdruck grosse Sorgsamkeit verwandt ist, treten gerade in den Anfängen, wo es sich um Erklärung der elementarsten Begriffe handelt, mancherlei Schwächen und Misgriffe auf. Der in der Geometrie begangene und an bezeichneter Stelle gerügte Fehler, der in der Erklärung der Congruenz durch Vertauschbarkeit liegt, entstellt auch den Anfang der Arithmetik, wo gesagt wird: „Zwei gleichartige Grössen heissen einander gleich, wenn die eine für die andere gesetzt werden kann, ungleich, wenn dies nicht möglich ist.“ Die einfachste Widerlegung gibt wol jede Ungleichung $a > b$, indem man für a jede grössere, für b jede kleinere Grösse setzen kann. Sie deutet darauf hin, dass der Fehler ein Erklärungskreislauf sei, da die Erklärung der Gleichheit die Gleichheit stillschweigend voraussetzt. Allein auch in $ax = 0$, wie in vielen Gleichungen, kann man für a Ungleiches setzen. Der Fehler ist vielmehr die unzulässige Umkehrung des richtigen Satzes: Gleiches kann man für einander setzen. Ferner ist der Satz unrichtig: „Jedes Ding für sich allein betrachtet heisst Einheit.“ Im Gegenteil heisst es nur dann so, wenn man es in Verbindung mit andern Dingen betrachtet, und, was wesentlich ist, wenn man von deren Verschiedenheit absieht. Ferner zeigt der Satz: „Rechnen hat die Aufgabe, aus gegebenen Zahlen nach bestimmten Vorschriften eine neue Zahl zu bilden“ — Mangel an Beobachtung. Nirgends, auch nicht in diesem Buche, wird das Wort Rechnen in dem genannten Sinne gebraucht. Nicht derjenige, welcher aus den Zahlen 3 und 8 die neue Zahl 3×8 bildet, sondern derjenige, welcher die so gebildete Zahl in der dekadischen Form 24 darstellt, rechnet. Während der Verfasser bei andern Gegenständen selbständig mit Besserung vorgegangen ist und manchmal in der Abweichung vom Gewöhnlichen geirrt hat, ist es hier gerade ein recht häufig vorkommender Fehler, den er ohne Ueberlegung aufnimmt. Was zu dem Fehler verleitet, ist der Umstand, dass bei Erklärung der einzelnen Operation der Unterschied von Stellung und Lösung der Rechenaufgabe ohne Bedeutung ist. Hier ist daher auch der Fehler von keiner Bedeutung; bei den mannichfaltigen Transformationen der Algebra hingegen bringt er Unklarheit mit sich; die falsche Definition hat zwar der Schüler hier längst vergessen, aber

das Richtige weiss er darum doch nicht. In Betreff der Geometrie ist die verfehlte Definition der Congruenz bereits ausführlich besprochen. Die behandelten Lehrthemata sind der Reihe nach folgende. Unter „besondere Arithmetik“: die Zahl und ihre Darstellung, die 4 Grundoperationen in ganzen Zahlen, Teilbarkeit der Zahlen, gemeine Brüche, Decimalbrüche, mehrfach benannte Zahlen, Proportionen. Unter „allgemeine Arithmetik“: arithmetische Zeichensprache, Operationen erster, zweiter Stufe, allgemeine Brüche, Quadrat und Quadratwurzel, Kubus und Kubikwurzel, Proportionen, Gleichungen 1. Grades. Unter „Planimetrie“: Grundgebilde, Dreieck, Kreis, Viereck, Polygon, Längenmessung, Flächengleichheit und Flächenmessung, Aehnlichkeit. Unter „Stereometrie“: Punkt, Gerade, Ebene im Raume, Prisma und Cylinder, Pyramide und Kegel, Kugel, Polyeder, Kegelschnittlinien. Auf die besondere und auf die allgemeine Arithmetik folgen Aufgaben des Verkehrs, auf die Planimetrie Constructionsaufgaben, die Lösungen sind am Schlusse des Buchs zusammengestellt. Ausserdem sind an einzelne Lehren Fragen und Aufgaben angeknüpft.

Hoppe.

Lehrbuch der gesammten niederen Mathematik umfassend Arithmetik, Buchstabenrechnung, Algebra einschliesslich der Logarithmen, Geometrie, ebene Trigonometrie und Stereometrie. Mit zahlreichen Beispielen und Uebungsaufgaben nebst vollständiger Lösung und Ausrechnung bearbeitet für den Selbstunterricht sowie auch für den Schulgebrauch von C. Otto, Gewerbeschullehrer a. D. und H. Diesener, Architekt. Mit 420 Holzschnitten. Abteilung I. und II. Arithmetik, Buchstabenrechnung und Algebra. Abteilung III. IV. u. V. Geometrie, ebene Trigonometrie und Stereometrie. Halle a. d. S. 1889. Ludw. Hofstetter. 64 + 50 + 173 + 132 + 97 + 75 S.

Das Buch lehrt, wie man ohne alles Denken und Verstehen eine gewisse praktische Fertigkeit im Rechnen und Construiren gewinnen soll. Es besteht nur aus Regeln (mit vorgängiger Angabe des Wortgebrauchs) und Uebungsbeispielen. Von Begründung und Begriffs-erklärung ist nirgends die Rede, ja die Regeln und Worterklärungen sind nicht einmal dafür abgefasst, dass der Schüler daraus das Verfahren entnehmen kann. S. 6. z. B. steht: „Multipliciren heisst, eine Zahl, den Multiplicator, so oft zu sich selbst addiren, als eine andere Zahl, der Multiplicator Einheiten hat.“ Wollte ein Schüler hiernach 5 mit 3 multipliciren, so würde er 5 zu 5 addiren, dann wieder 5 zu 5, dann wieder 5 zu 5, und dreimal dasselbe Resultat 10 finden, was denn mit mehrfacher Bestätigung ergäbe, dass 3 mal

5 = 10 ist. Wahrscheinlich sind also die Regeln und Worterklärungen nur dazu da, im Examen hergesagt zu werden, und das Rechnen erlernt der Schüler, indem er es dem Lehrer nachmacht.

Hoppe.

Kleyers Encyclopädie der gesamten, mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften. Stuttgart. Julius Maier.

Das Verzeichniss der bis jetzt erschienenen Teile dieser Encyclopädie nennt 23 Lehrbücher, eine Logarithmentafel und eine Geschichte der Geometrie, worunter die Mehrzahl von Kleyer bearbeitet ist. Dem Ref. liegen die Anfänge zweier dieser Lehrbücher vor, nämlich der folgenden.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Bearbeitet nach eigenem System von Adolph Kleyer. Erster Teil: Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Bearbeitet nach eigenem System von Adolph Kleyer. Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation explizierter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Zweite Auflage.

Die Einleitung des erstern ist ein Gemisch von richtigen und unrichtigen Gedanken über den Raumbegriff. Die unrichtigen sind es, welche dem beginnenden Vortrag zugrunde liegen und, wenigstens innerhalb der 2 ersten Hefte, ziemlich den einzigen Stoff dazu bieten. Jenen Gedanken zufolge ist die Linie eine Aneinanderlagerung von Punkten, die der Verfasser auch Atome und Infinitesimale nennt. Der Punkt ist ein Teil der Linie, aber so klein, dass er nicht mehr geteilt werden kann. Ein Linienelement besteht aus 2 Atomen. Die Linie hat eine endliche Anzahl unendlich kleiner Teile. U. s. w. Dies sind nicht bloss einmalige Aussagen, sondern der gesamte Lehrvortrag enthält nichts weiter als die Umsetzung der gemeinen Vorstellung in solche confuse Redeweise. Als äusserliche Eigentümlichkeit ist zu erwähnen, dass jede Seite in 2 Spalten geteilt ist. Links steht unter „Frage“ die in eine Frage gekleidete Ankündigung des Themas, über das der Verfasser, rechts unter „Antwort“ sprechen will.

Im Vorwort zum Lehrbuch der Differentialrechnung sagt der Verfasser, es sei ihm ergangen, wie es jetzt noch 100 Andern ergehe, deren mathematisches Denken durch keine der Methoden, welche zur Herleitung der Differentialformeln dienen, Befriedigung

finden. Er nennt 5 Methoden, aber, wie vom bösen Geist auf unfruchtbarem Felde herumgeführt, nur solche, die erdacht worden sind, damit man die Principien der Differentialrechnung nicht verstehe, und geht mit Stillschweigen an den Methoden vorbei, durch welche sie leicht verständlich werden. Er beansprucht nun nicht, schon jetzt über die Frage zur Klarheit gelangt zu sein und die rechte Methode gefunden zu haben, vielmehr könne er zur Herausgabe seiner Bearbeitung gedrängt, sich nur auf einige Ergebnisse seines Nachdenkens, die er für unumstößlich halte, stützen. In diesen sucht er eine Auffassung der Grösse, wie sie der Natur der Körperwelt entspreche, zu geben und betrachtet daher die Grösse als aus unteilbaren Teilen bestehend, wie oben von der Linie gesagt ward; diese sind dann seine Differentiale. Hoppe.

Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Heft. Kongruenz. Dritte, teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1889. Louis Nebert. 66 S.

Das 1. Heft ist im 2. litt. Ber. S. 14, das 2. Heft im 25. litt. Ber. S. 8, das 3. Heft im 251. 1. Ber. S. 29 besprochen. Die 3. Auflage unterscheidet sich, abgesehen von kleinen Verbesserungen, durch folgendes von den 2 vorausgehenden. Die „Systematik der Geometrie“ ist aus der Einleitung entfernt und in den Anhang gesetzt. Der Abschnitt über die Linien ist übersichtlicher gegliedert. Der erste Lehrsatz aus der Parallelen-theorie ist durch den entsprechenden Grundsatz ersetzt worden, dieser lautet: Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen. Hiermit ist eine Berichtigung eingeleitet, aber noch nicht vollzogen. Statt nun mit Anwendung des Grundsatzes die Gleichheit der gleichliegenden Winkeln an Parallelen zu beweisen, hat der Verfasser erstern müssig liegen lassen und letztere auf einen sehr bekannten Trugschluss gestützt. Hoppe.

Lehrbuch der Ebenen Geometrie. Nach neuen Grundsätzen bearbeitet. Von Karl Koch, Professor am Lyceum in Cannstatt. Erster Teil. Mit 80 Figuren. Ravensburg 1889. Dorn. 103 S.

Der Titel sagt, dass das Lehrbuch nach neuen Grundsätzen bearbeitet ist. Eigentlich ist es indes derselbe Reformgedanke, den schon viele Bearbeiter von Lehrbüchern verfolgt haben, und in dessen Verwirklichung das gegenwärtige Lehrbuch nur weiter geht als viel-

leicht alle Vorgänger: dem Schüler soll keine Verstandestätigkeit an Gegenständen zugemutet werden, die ihm zur Zeit noch fremd sind. Allein im Zuwerkegehen zeigt sich doch eine bedeutende Verschiedenheit, welcher pädagogische Ansicht zugrunde liegen muss, so dass hier wirklich die Grundsätze füglich neu genannt werden können, wenn sie auch nur in Meidung früherer Mängel und Misgriffe bestehen. Der grösste und doch so gewöhnliche Misgriff ist es, dass diejenigen, welche die Pflege der Anschauung forderten, auch, als ob es notwendig damit verbunden wäre, oder um die euklidische Methode zu überflügeln, das Gesichtsfeld des Schülers recht bald zu erweitern und ihn so an allen Schwierigkeiten recht unmerklich vorbeizuführen strebten. Dadurch geht der Hauptbildungszweck der mathematischen Disciplin, welcher das Verweilen auf engem Felde der Betrachtung als unerlässlich fordert, verloren, nicht das Verstehen, sondern das Nichtverstehen bei der Meinung zu verstehen wird den Schülern leicht gemacht. Koch pflegt in nicht minderm Grade die Anschauung. aber er verweilt stets auf engstem Felde. Hierzu kommt, dass die Beobachtungen an der Figur keine bloss äussere sind, dass vielmehr jede Beziehung, auch wenn sie selbstverständlich ist, durch besondern Satz zum Bewusstsein gebracht wird. Hervorzuheben ist endlich die logische Genauigkeit in Deduction, Urteil und Ausdruck, die so häufig von den Verbesserern der Methode als Nebensache behandelt, hier aber trotz aller Kürze und Einfachheit überall festgehalten wird. Bedenken könnte vielleicht die sehr abweichende Anordnung des Lehrstoffs erregen, indem dadurch die Systematik verhüllt wird, umsomehr weil die Sätze, welche einen wirklichen Fortschritt enthalten, mit vielen solchen, wo dies nicht der Fall ist, gemischt auftreten. Nach einer Aeusserung im Anfang des Vorworts scheint der Verfasser zu verlangen, dass der Schüler zuvor wisse, wie man z. B. einen Winkel abträgt, halbiert u. s. w., ehe von abgetragenen, halbirten Winkeln die Rede sein dürfe. Eine solche Forderung würde geradezu die Regel alles vernünftigen Handelns: Erst denken, dann tun — auf den Kopf stellen, und kann wol kaum seine Meinung sein. Die Dreiteilung eines Winkels wissen wir nicht auszuführen und können sie doch als geschehen denken.

Hoppe.

Lehrbuch der Planimetrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbst-Unterricht. Von Dr. Rottok, vormals Professor und Rektor am Gymnasium und Realgymnasium zu Rendsburg. Dritte, mit Aufgaben vermehrte und verbesserte Auflage (Mit 57 Figuren im Text.) Leipzig 1888. Hermann Schultze 96 S.

Lehrbuch der Stereometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Dr. Rottok, vormals Professor und Rektor am Gymnasium und Realgymnasium zu Rendsburg. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. (Mit 28 Figuren im Text.) Leipzig 1888. Hermann Schultze. 65 S.

Das erstere Lehrbuch beginnt mit einem ganz unklaren Satze: es nennt die Geometrie eine Wissenschaft der räumlichen Grössen, nur auf Ausdehnung Rücksicht nehmend, von andern, wie physischen u. s. w. Eigenschaften absehend. Wenn andere Lehrbücher — in der That sind es nicht wenige — im Eingangssatze die Raumgrössen ausschliesslich als Gegenstand der Geometrie hinstellen, so ist dies ein einmaliger ungenauer Ausdruck, sie sorgen wenigstens, wenn auch öfters ungenügend, im weitern Verlaufe dafür, die Begriffe durch ihre Anwendung richtig zu stellen. Hier hingegen ist der ungenaue Eingangssatz die Quelle immer neuer Unklarheiten: die unklare Begriffsmischung von Grössen und Qualitäten wie Richtung, Lage, Gestalt wird fortgesponnen und der dadurch erzeugte Mangel an Orientirung zur Erschleichung eines Scheinbeweises für den Parallelen-satz benutzt. Ebenso wird durch eine unverständliche Auseinandersetzung die Nichtberücksichtigung des Falles der Incommensurabilität zu rechtfertigen versucht; statt Evidenz zu geben, erschwert der Verfasser nur die Erhebung eines Einwandes.

In der Stereometrie wird gleich von Anfang die Bewegung der Gebilde in Betracht gezogen, es geschieht dies mit besonderer Bevorzugung, ohne dass die Sache es erforderte und öfters in ausgedehnterem Masse als dazu Anlass war. Es scheint daher die Tendenz vorzuwalten, das Gesichtsfeld des Schülers gleich anfangs zu erweitern, was aber nur dahin wirken kann, eine recht oberflächliche Auffassung zu erzeugen.

Hoppe.

Grundzüge der Naturlehre für die unteren Classen der Gymnasien, Realschulen und verwandten Anstalten. Von Dr. Ignaz G. Wallentin, k. k. Professor am Ober-Gymnasium im IX. Bezirke Wiens, ehem. Privatdocent für mathematische Physik an der k. k. technischen Hochschule in Brünn. Ausgabe für Gymnasien. Mit 234 in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite, veränderte Auflage. Wien 1887. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 207 S.

Das Vorliegende ist ein vortreffliches Lehrbuch der Physik für Anfänger, einerseits leichtfasslich in hohem Grade, andererseits in echt wissenschaftlichem Geiste bearbeitet, so dass es dem Zwecke der Einführung in das künftige Studium so gut genügt wie es der

populären Aufklärung und der Verbreitung nützlicher Kenntnisse zu dienen sich eignet. Der Lehrstoff ist nicht auf vorgezeichnete Grenzen beschränkt worden, doch umfasst er mehr als gewöhnlich zur Kenntniss der Schüler gelangt, und zwar nach sehr treffendem Urtheile das Wesentliche für richtige Auffassung der Naturerscheinungen. Der Vortrag bindet sich nicht an eine gleichmässige Form, sondern wählt diese den Gegenständen in vielseitigster Behandlung entsprechend. Er ist nicht ausschliesslich beschreibend, sondern auch erklärend, gibt nicht bloss die Qualität der Erscheinung, sondern wo es hingehört auch das Mass und dessen Gesetze. Wo auch von letztern das weniger Einfache ausgeschlossen werden musste, da ward um so gründlicher das Einfache behandelt. In denjenigen Punkten, in welchen sonst häufig Irrlehren aufgetreten sind, findet sich hier stets der Grund sogleich so gelegt, dass die irrige Auffassung keine Stelle hat. Wie in einzelnen Fragen der Verfasser sich entschieden hat, ist im Vorwort ausgesprochen; um es zu würdigen würde ein Eingehen auf die Behandlungsweise im einzelnen nötig sein.

H.

Lehrbuch der Physik für die oberen Classen der Mittelschulen und verwandter Lehranstalten. Von Dr. Ignaz G. Wallentin, Professor am k. k. Staatsgymnasium im neunten Bezirke von Wien, Ehrenmitglied der physikalisch-chemischen Gesellschaft zu Frankfurt am Main. Fünfte, veränderte Auflage. Mit 232 in den Text gedruckten Holzschnitten und einer Spectraltafel in Farbendruck. Ausgabe für Gymnasien. Wien 1888. A. Pichler's Witwe und Sohn. 318 S.

Dieselben vorzüglichen Eigenschaften, welche die „Grundzüge der Naturlehre“ besitzen, und die im vorigen Berichte dargelegt sind, charakterisiren auch das Lehrbuch der Physik. Es werden darin, nach einer Einleitung über die Methode der Physik und die allgemeinen Eigenschaften der Körper, nach einander behandelt: Mechanik, Wärme, Magnetismus, Elektrizität, Wellen, Schall, Licht, Wärmestrahlung, und im Anhang: Astronomie nebst mathematischer Geographie und Chemie. Bei allen Lehrgegenständen sind die allgemeinen Gesetze obenan gestellt, an sie schliessen sich dann die speciellen Erscheinungen, die Beobachtung und deren Mittel.

H.

Joh. Chr. Walberer's Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten neu bearbeitet von Dr. Georg Recknagel, Professor am Realgymnasium zu Passau, correspon-

direndem Mitgliede der R. B. Akademie der Wissenschaften. Sechste Auflage. München 1889. Theodor Ackermann. 178 S.

Das Lehrbuch von Walberer ist in 2. und 4. Auflage im 228. und 268. litt. Ber. S. 34. S. 43. besprochen. Das Vorliegende stellt sich als Umarbeitung der analytischen Mechanik für den Schulgebrauch dar, d. h. der Lehrgang ward im ganzen beibehalten, was hingegen im einzelnen nach Ermessen des Herausgebers zu hoch für den Standpunkt der Schüler war, ward in mehr erläuternder Form vorgetragen, mitunter auch weggelassen. Diese Umsetzungen sind nun durchaus kein Muster von Fleiss und didaktischem Urtheil. Die mathematische Schärfe wird preisgegeben, mancherlei Unbestimmtheiten bleiben, wo die Klarstellung zu schwierig schien, das ursprünglich Einfache wird durch Umschweife dem Blick entzogen. Um nur ein Beispiel anzuführen, so ist der Begriff des Gleichgewichts eines Systems von Kräften, der doch durch die gleiche Wirkung mit Nullkraft sofort definiert sein würde, durch Bedingungen bestimmt worden, die sich auf die erfolgenden Bewegungen beziehen, Bedingungen die höchstens bei dauerndem, nicht aber bei momentanem Gleichgewicht zutreffen. Da bei Gleichgewicht der Kräfte die mannichfaltigsten Bewegungen stattfinden können, so ist es offenbar unvernünftig die Deutlichkeit des Begriffs darauf stützen zu wollen. Ueberdies liegen die Bewegungsbedingungen nicht mehr im Bereich der zu beobachtenden Wirklichkeit, wenn ausser dem System im Gleichgewicht gleichzeitig andre Kräfte wirken. Die in den früheren Auflagen des Buches von Walberer enthaltenen Irrlehren kommen freilich in der gegenwärtigen Bearbeitung nicht vor; doch zeugt es nicht von Beherrschung des Lehrstoffs von Seiten des neuen Bearbeiters, wenn jene Fehler nur am Gängelbände der analytischen Methode vermieden worden sind, und er nicht vermocht hat, die gleichen Resultate in sicherem synthetischen Lehrgange zu entwickeln. Hoppe.

Tabellen.

Tafel der Bessel'schen Functionen J_k^0 und J_k^1 von $k = 0$ bis $k = 15,5$ berechnet von Dr. E. Meissel in Kiel. Aus den Abhandlungen der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1888. Berlin 1889. Georg Reimer. 4^o. 23 S.

Die Tafel ist eine Erweiterung der Bessel'schen Tafel für die Functionen

$$I_k^0 = 1 - \frac{k^2}{2^2} + \frac{k^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{k^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{k^8}{2^4 \cdot 4^2 \cdot 6^4 \cdot 8^2} - \dots$$

$$- I_k^1 = -\frac{k}{2} + \frac{k^3}{2^2 \cdot 4} - \frac{k^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{k^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots$$

in den Abhandlungen der Akademie vom Jahre 1824. Sie gibt innerhalb der genannten Grenzen für die Hundertel von k die Werte beider Functionen auf 12 Bruchstellen. H.

Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen nebst einem Anhang enthaltend die Theorie der Hyperbelfunctionen. Von Dr. W. Ligowski, Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie und Schule in Kiel. Berlin 1890. Ernst u. Korn. 104 S.

Die Haupttafel gibt die Werte der brigg'schen Logarithmen der Functionen $\text{Sin } \psi = \frac{1}{2}(e^\psi - e^{-\psi}) = \text{tg } \varphi$, $\text{Cos } \psi = \frac{1}{2}(e^\psi + e^{-\psi}) = \text{sec } \varphi$ und die Werte der vermittelnden Function φ entsprechend der Relation $e^\psi = \text{tg } \frac{R + \varphi}{2}$ für jedes ψ von 0 bis 12. Die Detaillirung der ψ geht bis $\psi = 2$ auf Tausendtel, dann bis $\psi = 9$ auf die Hundertel, von da auf Ganze. Die Logarithmen sind bis $\psi = 2$ fünfstellig, von da bis $\psi = 5$ sechsstellig, von da bis $\psi = 8$ siebenstellig, weiterhin zehnstellig. Die φ sind bis $\psi = 6$, die Differenzen bei allen Functionen angegeben. Diese Haupttafel ist mit vielen kleinern Tafeln verbunden, welche zur Erleichterung des Rechnens mit hyperbolischen Functionen dienen. In der Einleitung ist der Gebrauch der Tafeln erläutert, der Anhang enthält die Theorie der hyperbolischen Functionen. In der Berechnung von Tafeln dieser Functionen war namentlich Gudermann vorausgegangen; das Nähere darüber ist im Vorwort ausgesprochen. H.

Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales pour les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant et pour les nombres 1 à 12000 suivies des mêmes tables à quatre décimales et de diverses tables et formules usuelles. Paris 1889. Imprimerie Nationale.

Die gegenwärtigen Tafeln sind im Auftrage des Kriegsministers von der geodätischen Section des Service géographique unter der Leitung des Oberst-Lieutenants Bassot zusammengestellt aus den bis jetzt ungedruckten, von Prony berechneten 14stelligen Tafeln. Hiermit ist erst ein Teil des Auftrags erfüllt, dieselben Tafeln sollen auch 8stellig herausgegeben werden; ihr Erscheinen in diesem Jahre

*image
not
available*

G. Schouten: Die Regel für die Bahnform und die Eigenschaften der Centralbewegung graphisch dargestellt. — Allgemeine Eigenschaften der reinen rollenden Bewegung eines Rotationskörpers auf horizontaler Ebene angewandt auf die Bewegung eines Rotationskörpers um einen festen Punkt seiner Axe.

P. H. Schoute: Der lineare Complex (I. 1).

Jan de Vries: Ueber ebene Configurationen. — Ueber die harmonischen Configurationen (24_3 , 18_4).

V. A. Julius: Ueber die vibrirende Bewegung einer deformirten Flüssigkeitskugel.

J. A. C. Oudemann: Untersuchung der Bedingung, unter der im Doppelbildmikrometer von Airy der Wert einer schraubenumlau-fenden Unabhängigen von der Accommodation des Auges kommt.

P. H. Dojes: Ueber einige Formeln, die sich auf die durch Druck- und Temperaturveränderungen bewirkten Veränderungen in der Zusammensetzung von Lösungen beziehen.

F. J. van den Berg: Die Constructionsfigur für die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, als Configuration betrachtet. — Einige Formeln für die Berechnung der bernoullischen Zahlen und der Tangentencoefficienten.

C. H. C. Grinwis: Die Energie des kugelförmigen Condensators.

J. Cardinaal: Geometrische Theorie der windschiefen Flächen 4. Ordnung. H.

*image
not
available*

Brockmann, F. J., planimetrische Konstruktionsaufgaben. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Gerke's, R., Aufgabensammlung aus der darstellenden Geometrie. 40 (autogr.) Taf. m. 350 Fig. 2. Aufl. Hrsg. v. G. Schönemark. Fol. Hannover, Cruse's B. Kart. 6 Mk.

Heuner, F., Aufgabensammlung zum Rechenunterrichte. 7. Aufl. Ansbach, Seybold. 1 Mk. 20 Pf.; geb. 1 Mk. 50 Pf.

— Ergebnisse zum 6. u. 7. Hft. Oberklasse. Apg. f. Lehrer. 4. Aufl. 60 Pf.

Hoffmann, J., u. **J. Klein**, Rechenbuch f. Seminaristen u. Lehrer. 9. Aufl. Düsseldorf, Schwann. 1 Mk.

Kloyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 563.—607. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Kniess, K., u. **O. Bachmann**, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. bestimmten Zahlen, bearb. unter besond. Berücksicht. d. f. Lateinschulen vorgeschrieb. Lehrpensums. Resultate. München, Kellerer. 80 Pf.

Krauth, Th., Aufgaben-Sammlung f. das gewerbliche Rechnen. Für Gewerbeschulen u. gewerbl. Fortbildungsschulen. 2. Aufl. Schüler-Apg. Karlsruhe, Bielefeld. 40 Pf.

Láska, W., Sammlung von Formeln der reinen u. angewandten Mathematik. 3. Lfg. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg & S. 5 Mk.

Mattek, B., Resultate zur Aufgabensammlung in Močnik's Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra f. die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien, C. Gerold's S. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Reich, A., die Hauptlehren der Mathematik m. e. Sammlung ausführlich gelöster u. Anhängen ungelöster Aufgaben m. ihren Resultaten. (In ca. 90 Lfgn.) 1.—9 25.—47. Lfg. Hanau, Reich. à 25 Pf.

Sachse, J. J., Übungsbuch f. e. praktischen, geistbildenden u. erziehlichen Rechenunterricht. 1. u. 2. Hft. 3. Aufl. Osnabrück, Wehberg. 55 Pf.

Särchinger, E., u. **V. Estel**, Aufgabensammlung f. den Rechenunterricht in den Unterklassen der Gymnasien. 2. u. 3. Hft. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Schmehl, Ch., Rechenbuch f. höhere Lehranstalten. 1. Thl. Das Rechnen m. ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen u. Decimalbrüchen. Giessen, Roth, Verl. 1 Mk. 40 Pf.

Stockmayer, H., **M. Fletscher** u. **G. Thomass**, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen etc. 1 Bdchn. 4. Aufl. Heilbronn, Scheurlen's Verl. Kart. 80 Pf.

— Dasselbe. 2.—4. Bdchn. 5. Aufl. Ebd. Kart. 2 Mk. 25 Pf.

*image
not
available*

Tschebyscheff, P. L., Theorie der Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie). Deutsch hrsg. v. H. Schapira. Berlin, Mayer & M. 7 Mk.

Geometrie.

Ameseder, A., die Quintupellage collinearer Räume. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

— Theorie der cyklischen Projectivitäten. Ebd. 50 Pf.

Bobek, K., üb. die Steiner'schen Mittelpunktskurven. II. u. III. Mittheilg. Leipzig, Freytag. 80 Pf.

Bützberger, ein m. der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes planimetrisches Problem. Bern, Jent & R. 80 Pf.

Dietsch, Ch., Leitfaden der darstellenden Geometrie. 2. Aufl. Leipzig, Deichert. 2 Mk.

Döhlemann, K., Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen. München, Th. Ackermann, Verl. 1 Mk.

Heilermann, H., u. J. Dieckmann, Grundlehren der Trigonometrie u. Stereometrie. 1. Thl. Ebene Geometrie. Essen, Bädeker. 40 Pf.

Koch, K., Lehrbuch der ebenen Geometrie. Nach neuen Grundsätzen bearb. 1. Thl. Ravensburg, Dorn. 1 Mk.

Kröger, M., Leitfaden f. den Geometrie-Unterricht in Mittelschulen u. gehobenen Volksschulen. 4. Aufl. Hamburg, Meissner's Verl. 1 Mk.

Krumme, W., der Unterricht in der analytischen Geometrie. Für Lehrer u. zum Selbstunterricht. Braunschweig, Sallo. 6 Mk. 50 Pf.

Lauermann, C., zum Normalproblem der Ellipse. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Löttsch, C., Geometrie in konzentrisch erweiterten Kursen. 6. Aufl. 2. Kurs. Mittweida, Polytechn. Buchh. 1 Mk.

Mertens, F., zum Normalproblem der Kegelschnitte. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Mink's Leitfaden der analytischen Geometrie der Ebene u. des Raumes f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. 2. Aufl. v. E. W. Fiedler. Berlin, Nicolai'sche Verl.-Buchh. 1 Mk.

Müller, C., zeichnende Geometrie. 4. Aufl. Esslingen, Mayer. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Müller, H., Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Thl. 1. Hft. Die gradlinigen Figuren u. der Kreis. Mit Uebungen. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Nöther, M., zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curven 4. Ordnung. München, Frauz'scher Verl. 1 Mk. 50 Pf.

*image
not
available*

Technik.

Thomson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. 2. Aufl., übers. v. C. Grawinkel. 5. Hft. Halle, Knapp. 4 Mk.

Urbanitzky, A. v., die elektrische Beleuchtung u. ihre Anwendung in der Praxis. 2. Aufl. Wien, Hartleben. 4 Mk.; geb. 4 Mk. 80 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. d. Spectren der Elemente. 2. Abschn. Berlin, G. Reimer. Kart. 4 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Bebber, W. J. van, Beitrag zur Kenntniss der täglichen Periode der Windgeschwindigkeit an unserer Küste. Leipzig, Engelmann. 50 Pf.

— Lehrbuch der Meteorologie f. Studierende u. zum Gebrauche in der Praxis. Stuttgart, Euke. 10 Mk.

Bibliothek, internationale wissenschaftliche. 68. Bd. Die wichtigsten periodischen Erscheinungen der Meteorologie u. Kosmologie. Von H. Fritz. Leipzig, Brockhaus. 7 Mk.; geb. 8 Mk.

Diesterweg's populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb. v. W. Meyer u. B. Schwalbe. 11. Aufl. 3.—7. Lfg. Berlin, Emil Goldschmidt. à 60 Pf.

Hayn, F., Bahn-Bestimmung d. Cometen 1862 III. Göttingen, Vandenhoeck & R. 2 Mk. 80 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1887. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse d. meteorolog. Beobachtungen im J. 1887. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co. 22 Mk.

— Dasselbe f. 1889. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1889. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. 1. Hft. Berlin, Asher & Co. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, 1889. Bayern. Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern, hrsg. v. der königl. meteorolog. Central-Station durch C. Lang u. F. Erk. 11. Jahrg. 1889. 2. Hft. München, Th. Ackermann, Verl. propl. 18 Mk.

— Dasselbe. Jahrg. 1888. Württemberg. Mittheilungen der m. dem königl. statist. Landesamt verbundenen meteorolog. Centralstation. Bearb. v. L. Meyer. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 2 Mk. 80 Pf.

*image
not
available*

Art der Bewegg. Hrsg. v. M. Planck u. C. Pulfrich. (In 2 Lfgn.)
1. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk. 20 Pf.

Echo, elektrotechnisches. Red.: M. Krieg. Jahrg. 1889. 40. Hft.
Leipzig, Leiner. Vierteljährl. 3 Mk.

Eiben, C. E., Physikstunden, angeschlossen an die Erscheinungen d. täglichen Lebens. Hannover, Meyer. 1 Mk. 60 Pf.; kart. 1 Mk. 80 Pf.

Fischer, H. L., Versuch o. Theorie d. Berührungs-Elektricität. Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk. 60 Pf.

Hertz, H., üb. die Beziehungen zwischen Licht u. Elektricität. Ein Vortrag. Bonn, Strauss, Verl. 1 Mk.

Heussi, J., Lehrbuch der Physik f. Gymnasien, Realschulen u. andere höhere Bildungsanstalten. 5. Aufl. Neue Asg. Braunschweig, Salle. 4 Mk. 20 Pf.

Hübl, A. Frhr. v., u. A. v. Obermayer, üb. einige elektrische Entladungserscheinungen u. ihre photographische Fixierung. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 107.—112. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Koller, H., üb. den Durchgang v. Elektricität durch sehr schlechte Leiter. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 20 Pf.

Krebs, A., Lehrbuch der Inductionselektricität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 6 Mk.

Reis, P., Elemente der Physik, Meteorologie u. mathematischen Geographie. Hilfsbuch f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. Mit zahlreichen Uebungsfragen u. -Aufgaben. 4. Aufl. Leipzig, Quandt & H. 4 Mk. 50 Pf.

Waeber, R., Leitfaden f. den Unterricht in der Physik m. besond. Berücksicht der Meteorologie. 6. Aufl. Leipzig, Hirt & S. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift f. den physikalischen u. chemischen Unterricht. Unter der besond. Mitwirkg. v. E. Mach u. B. Schwalbe. Hrsg. v. F. Poske. 3. Jahrg. 1889/90. 1. Hft. Berlin, Springer. prepl. 10 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem J. 1888. Mathematische. Berlin, G. Reimer. 2 Mk

— Dasselbe. Physikalische. 2 Thle. Ebd. Kart 36 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 55. Bd. Leipzig, Freytag. 54 Mk. 80 Pf.

*image
not
available*

Teil.VIII.

Fig 1.

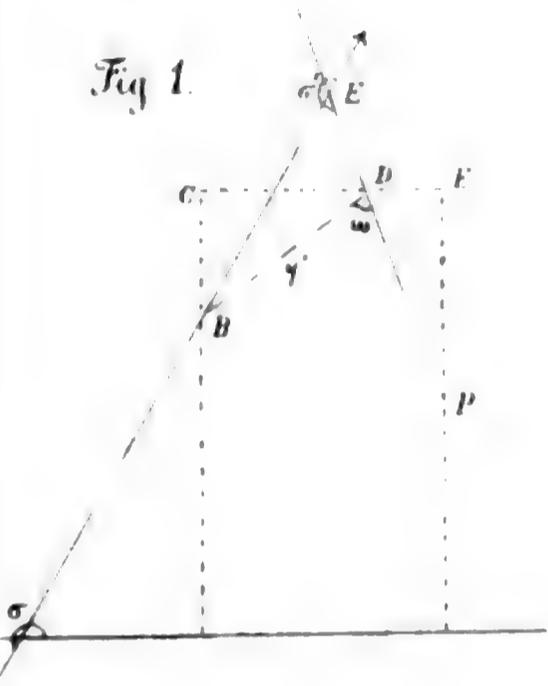


Fig. 2.

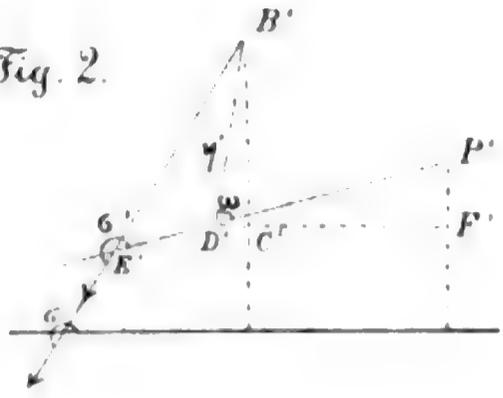


Fig 3.



Fig 7.

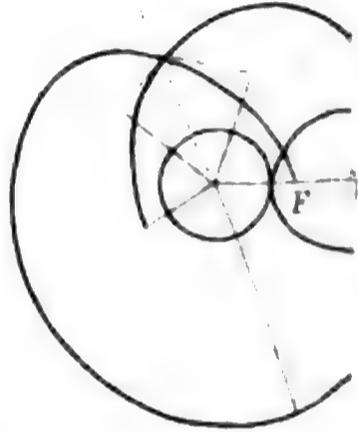


Fig. 6.

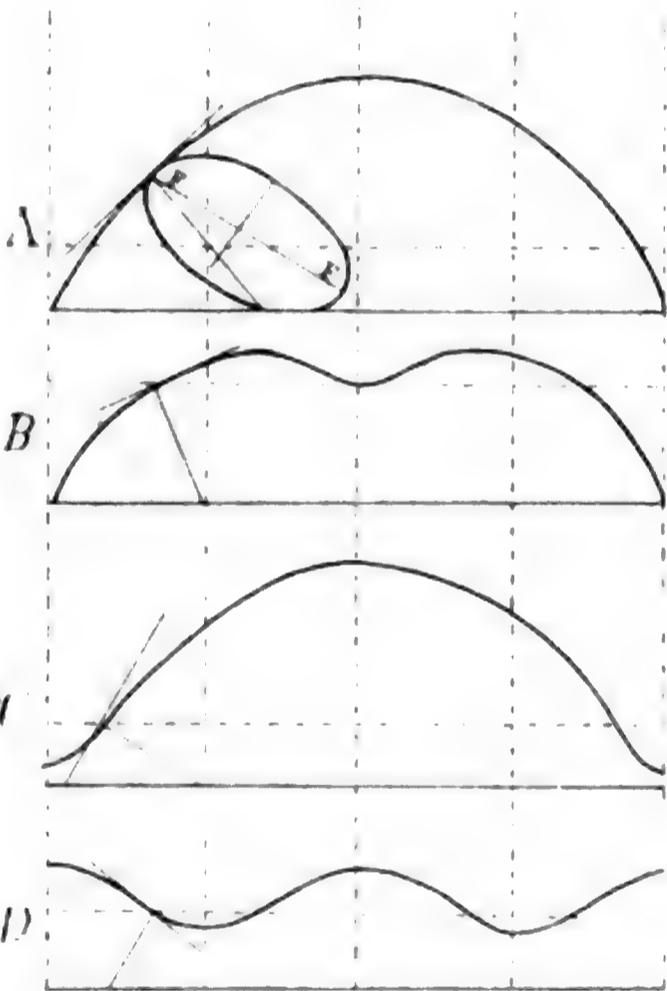


Fig. 9.

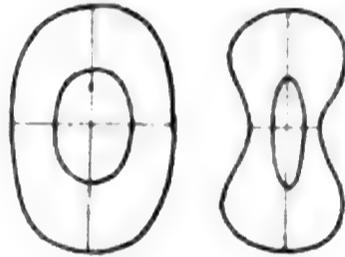


Fig.

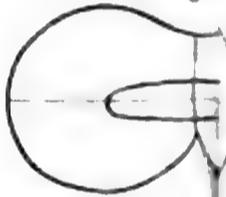
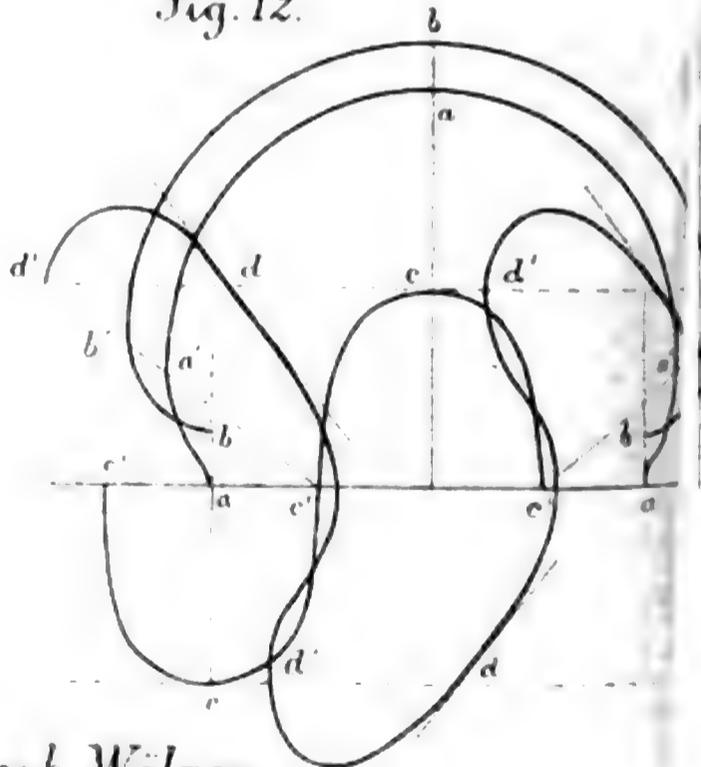


Fig. 12.



XVIII. Ekama: Curven erzeugt durch Wälzen.

*image
not
available*

*image
not
available*

In meinem Verlage erschien soeben:

Lehrbuch
der
analytischen Geometrie.
II. Teil: **Flächentheorie.**

Von

Dr. R. Hoppe,

Professor an der Universität Berlin.

Zweite Auflage.

Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagshandlung.
(J. Bengbusch.)

I N H A L T.

	Seite
XV. Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die demselben verwandten Kegelschnittschaaren. Von Andr. Müller	337
XVI. Ueber das sphärische Polarsystem und seine Anwendung auf das Tetraeder. Von Theodor Meyer	363
XVII. Anwendung des Taylor'schen Satzes zur Rectification der Ellipse und zur Complonation des Ellipsoids. Von C. Benz . . .	378
XVIII. Die Curven, welche von Punkten von Kegelschnitten, die sich ohne zu gleiten längs anderer Curven wälzen, beschrieben werden. Von H. Ekama	388
XIX. Ueber die Rectification der Krümmungslinien auf Röhrenflächen. Von A. Abrendt	442
XX. Vielecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte schneiden. Von R. Hoppe	447

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

*image
not
available*

*image
not
available*

*image
not
available*

*image
not
available*

